



**HAL**  
open science

# Identification de champs de propriétés élastiques fondée sur la mesure de champs : application sur un composite tissé 3D

Renaud Gras

► **To cite this version:**

Renaud Gras. Identification de champs de propriétés élastiques fondée sur la mesure de champs : application sur un composite tissé 3D. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0088 . tel-00845752

**HAL Id: tel-00845752**

**<https://theses.hal.science/tel-00845752>**

Submitted on 17 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2012-NYYY



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Renaud Gras**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Identification de champs de propriétés élastiques fondée  
sur la mesure de champs : application à un composite  
tissé 3D**

Soutenue à Cachan le 18 décembre 2012 devant le jury composé de :

Zoheir Aboura	Professeur des Universités, UTC	examinateur
Philippe Boisse	Professeur des Universités, INSA Lyon	examinateur
Marc Bonnet	Directeur de Recherches, ENSTA-Paritech	examinateur
Hugo Leclerc	Ingénieur de Recherches, ENS Cachan	co-encadrant
Jean-François Maire	Professeur des Universités, ONERA	rapporteur
Julien Réthoré	Chargé de Recherches, INSA Lyon	rapporteur
Stéphane Roux	Directeur de Recherches, ENS Cachan	directeur de thèse
Julien Schneider	Ingénieur, SNECMA Villaroche	co-encadrant

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Matériaux</b>	<b>3</b>
1 Matériau : composite tissé 3D . . . . .	4
1.1 Présentation générale des composites . . . . .	4
1.2 Composites tissés 3D . . . . .	5
1.3 Spécificités du matériau de l'étude . . . . .	6
1.4 Éprouvettes testées . . . . .	7
2 Vision macroscopique . . . . .	8
<b>2 Enjeux</b>	<b>11</b>
1 Matériau multi-échelle . . . . .	12
1.1 Échelle microscopique . . . . .	12
1.2 Échelle mésoscopique . . . . .	12
1.3 Échelle macroscopique . . . . .	12
1.4 Changement d'échelle . . . . .	12
2 Validation expérimentale . . . . .	13
2.1 Essais . . . . .	13
<b>3 Outils</b>	<b>15</b>
1 La Corrélation d'Images Numériques . . . . .	16
1.1 Approche globale . . . . .	16
1.2 Étude d'incertitude CIN . . . . .	20
2 Les méthodes d'identification . . . . .	26
2.1 Cadre général . . . . .	26
2.2 Choix de la FEMU . . . . .	31
3 La plateforme LMTpp . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Essai de flexion 3pts sur coupon court</b>	<b>35</b>
1	Validation . . . . .	36
1.1	Description de l'essai . . . . .	36
1.2	Modélisation . . . . .	38
1.3	Résumé de l'article . . . . .	38
1.4	Robustesse de l'identification . . . . .	40
2	Interface . . . . .	41
2.1	Matériau . . . . .	41
2.2	Description de l'essai . . . . .	43
2.3	Méthode numérique . . . . .	47
2.4	Modélisation avec interface parfaite . . . . .	50
2.5	Modélisation avec interface élastique . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Pied d'aube</b>	<b>65</b>
1	Essai de traction sur pied d'aube . . . . .	66
1.1	Description de l'essai . . . . .	66
1.2	Approximation faite par la modélisation 2D . . . . .	75
1.3	Modélisation EF homogène . . . . .	78
1.4	Identification . . . . .	79
1.5	Modélisation avec zonage matériau . . . . .	87
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
<b>6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>99</b>
1	Essai de traction/flexion sur pied d'aube . . . . .	99
1.1	Étude spatio-temporelle . . . . .	99
1.2	CIN intégrée . . . . .	101
2	Régularisation . . . . .	110
3	Segmentation . . . . .	110
4	A plus long terme . . . . .	111
<b>A</b>	<b>Article flexion trois points</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Article pied d'aube</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>205</b>

# Table des figures

1.1	Exemple d'un composite tissé 3D de type orthogonal interlock en vue longitudinale [Quinn <i>et al.</i> , 2008]. . . . .	5
1.2	Exemple d'un composite tissé 3D de type couche-couche en vue longitudinale [Sun <i>et al.</i> , 2005]. . . . .	6
1.3	Exemple d'un composite tissé 3D de type couche-à-couche en vue longitudinale [Tsai <i>et al.</i> , 2000]. . . . .	6
1.4	Exemple d'une cellule élémentaire d'un composite tissé 3D de type couche à couche. Les torons de chaîne sont représentés suivant la direction 1 et les torons de trame suivant la direction 2. . . . .	7
1.5	Géométrie de l'éprouvette de pied d'aube en vue de face et vue de dessous. . . . .	8
3.1	Cellule de base de la matrice <i>RGB</i> d'un capteur CCD dans laquelle deux pixels en diagonale sont verts, et suivant l'autre diagonale, un pixel est rouge et le second est bleu. . . . .	18
3.2	Coordonnées du point de lecture des niveaux de gris. Le niveau de gris du pixel (respectivement de l'interpolation des pixels voisins) est lu aux coordonnées des points correspondant aux $\square$ (respectivement $\bullet$ ). . . . .	19
3.3	Échantillons d'images prises pour un même état non sollicité et codées sur 16 bits en niveaux de gris, $f$ (a) et $g$ (b). Tracé des niveaux de gris de $f$ en fonction de ceux de $g$ pour tout point de coordonnées $\mathbf{x}$ de l'image. Le nuage de points obtenu est ajusté par une fonction linéaire de pente 1 et d'ordonnée à l'origine 76 (c). . . . .	21
3.4	Image du plan moucheté et déplacé devant l'appareil photo au cours de l'essai. L'image est codée sur 12 bits en niveaux de gris. . . . .	22
3.5	Valeur absolue de la différence pixel à pixel entre l'image 16 et l'image 15 (a). L'image est codée sur 12 bits en niveau de gris. Le zoom (b) révèle un défaut sur le capteur, en tronquant la dynamique à 400 niveaux de gris, on aperçoit un fil. . . . .	24
3.6	Incertitude (a) et biais (b) pour le jeu de paramètres $J_1^{bil}$ pour différentes tailles de maille $L$ allant de 16 à 64 pixels. . . . .	26
3.7	Incertitude (a) (respectivement (c)) et biais (b) (respectivement (d)) pour les jeux de paramètres avec interpolation subpixel bilinéaire (respectivement spline cubique). . . . .	27

3.8	Incertitude (a) et biais (b) pour les jeux de paramètres $J_1^{bil}, J_5^{bil}, J_1^{cub}, J_5^{cub}$ .	28
3.9	Incertitude pour une image artificiellement décalée. . . . .	28
3.10	Histogramme du bruit capteur, représenté par les $\circ$ , obtenu par différence pixel à pixel de deux images prises au même état de déformation. Une gaussienne d'écart-type 78 pixels est tracée en trait plein. . . . .	29
3.11	Carte d'incertitude suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $y$ (b) due au bruit du capteur CCD. . . . .	29
3.12	Illustration du gain sur l'incertitude de mesure (a) et sur le biais (b) pour une discrétisation de 0,125 et de 0,5 pixel. Le temps de calcul, $t_c$ , est multiplié par 11. . . . .	30
3.13	Schéma de principe de la méthode d'identification FEMU. . . . .	32
4.1	Schéma de principe de l'essai de flexion à trois points rapprochés. La face observée de l'éprouvette correspond au plan $xz$ du composite tissé 3D, les torons de chaîne étant orientés suivant l'axe $x$ et les torons de trame suivant l'axe $y$ . . . . .	37
4.2	Effort mesuré, normalisé par la charge maximale, en fonction du déplacement imposé à la traverse, $U_t$ , exprimé en pixel pour des raisons de confidentialité, pour l'éprouvette C6 <sub>1</sub> (respectivement C6 <sub>2</sub> ) en trait plein (respectivement en trait pointillé). . . . .	37
4.3	Maillage EF 2D modélisant l'ensemble de l'éprouvette superposé à la zone observée pour la CIN. Les appuis sont schématisés par des arcs de cercle hachurés et numérotés 1, 2 et 3. . . . .	38
4.4	Cartes des résidus d'identification, $R = \mathbf{u}^{ca} - \mathbf{u}^{me}$ , suivant la direction $x$ (a) et $z$ (b) tracées pour le maillage de CIN adapté à la mésostructure. . . . .	40
4.5	Évolution du rapport du module de cisaillement identifié, $G_{13}$ , sur le module de cisaillement nominal, $G_{13_0}$ (a), des déplacements imposés au niveau des appuis extérieurs 1 et 2 (b), du rapport de l'effort identifié suivant l'axe $x$ et de l'effort mesuré suivant l'axe $z$ (c) et du résidu adimensionné (d) en fonction de la charge appliquée, adimensionnée par rapport à la charge maximale prescrite durant l'essai pour l'éprouvette C6 <sub>1</sub> et C6 <sub>2</sub> . . . . .	42
4.6	Vue de la face observée par CIN lors de l'essai avant dépôt du mouchetis. . . . .	43
4.7	Évolution de l'effort mesuré au cours du chargement, $F$ , en fonction du numéro d'image, $N$ . . . . .	44
4.8	Champ de déformation mesuré entre les images 70 et 74 suivant la direction $x$ (a), la direction $z$ (b) et la direction de cisaillement $xz$ (c). . . . .	45
4.9	Champ de déplacement mesuré entre les images 70 et 74 suivant la direction $x$ (a) et la direction $z$ (b) sur lequel est superposé le maillage déformé (amplifié 20 fois). Carte des résidus de corrélation, $R = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})$ , correspondant (c). . . . .	46
4.10	Carte des résidus de corrélation correspondant au champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 104. Un plus fort niveau de résidu est observé au niveau de l'interface collée. . . . .	46

4.11	Champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 125, composante suivant l'axe $x$ (a). Carte des résidus de corrélation correspondant (b). Un plus fort niveau de résidu est observé au niveau de l'interface collée et de la fissure. . . . .	47
4.12	Champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 153, composante suivant l'axe $x$ (a) et composante suivant l'axe $z$ (b). Carte des résidus de corrélation correspondant (c). . . . .	48
4.13	Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels. . . . .	48
4.14	Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels. Les nœuds notés $\bullet$ sont ceux pour lesquels le déplacement est imposé, et les nœuds notés $\square$ , ceux pour lesquels l'effort est imposé. . . . .	49
4.15	Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels. Partition horizontale du maillage en deux zones ayant des propriétés matériau différentes. . . . .	51
4.16	Évolution du module de cisaillement, $G_{13}$ (a), du module élastique $E_1$ (b), du module élastique $E_3$ (c) et du coefficient de Poisson (d) identifiés en fonction du numéro d'image $N$ dans les deux composites, tissage à 30% et à 100%. . . . .	52
4.17	Incrément calculé à chaque itération $n$ pour les modules élastiques (a) et les coefficients de Poisson (b). . . . .	53
4.18	Carte des résidus issus du champ de déplacement calculé pour l'image 100 pour une modélisation d'interface parfaite. . . . .	54
4.19	Maillage avec interface (a) dont les trois zones matériau sont la partie haute, notée 1, la partie basse, notée 2 et l'interface entre les deux, notée 3 (b). . . . .	55
4.20	Carte de sensibilité $dU/dG_{13}^1$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	55
4.21	Carte de sensibilité $dU/dG_{13}^2$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	55
4.22	Carte de sensibilité $dU/dG_{13}^{interface}$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	56
4.23	Carte de sensibilité $dU/dE_1^1$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	56
4.24	Carte de sensibilité $dU/dE_1^2$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	56
4.25	Carte de sensibilité $dU/dE_3^1$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	57
4.26	Carte de sensibilité $dU/dE_3^2$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	57
4.27	Carte de sensibilité $dU/d\nu_{13}^1$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	57
4.28	Carte de sensibilité $dU/d\nu_{13}^2$ suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b). . . . .	58
4.29	Évolution du rapport du module élastique identifié dans l'interface et de l'épaisseur de cette dernière en fonction de l'épaisseur d'interface, $L$ , tracé pour différentes images $N$ prises à différents niveaux de chargement. . . . .	58
4.30	Évolution du déplacement suivant l'axe $x$ dans une section suivant l'axe $z$ située à $x = 2100$ pixels. . . . .	59
4.31	Évolution du saut de déplacement suivant l'axe $x$ pour la série d'images allant de 82 à 109. . . . .	60

4.32	Évolution du module de cisaillement, $G_{13}$ (a), du module élastique $E_1$ (b), du module élastique $E_3$ (c) et du coefficient de Poisson (d) identifiés en fonction du numéro d'image $N$ dans les deux composites, tissage à 30% et à 100% pour une interface d'épaisseur 32 pixels, notée $L_{32}$ , et pour une interface parfaite, notée $PI$ . . . . .	60
4.33	Carte des résidus pour l'image 100 pour une modélisation avec interface élastique. . . . .	61
4.34	Maillage avec interface non homogène. . . . .	61
4.35	Évolution du module de cisaillement $G_{13}$ (a) et du module élastique $E_1$ (b) identifiés en fonction du numéro d'image $N$ dans les deux composites, tissage à 30% et à 100%. La modélisation à une interface est notée $EI_1$ , tandis que la modélisation à deux interfaces est notée $EI_2$ . . . . .	62
4.36	Carte des résidus pour l'image 100 pour une modélisation avec interface élastique dont le comportement est différent suivant la position selon l'axe $x$ . . . . .	62
4.37	Module identifié au sein de l'interface pour une interface homogène, $EI_1$ , ou une interface hétérogène, $EI_1^1$ correspondant à la partie droite et $EI_2^2$ correspondant à la partie gauche de l'interface. . . . .	63
4.38	Évolution du résidu adimensionné, $R_n$ , en fonction du numéro d'image $N$ pour une interface parfaite, $PI$ , une interface élastique homogène, $EI_1$ et une interface élastique différente pour la partie gauche et droite de l'éprouvette, $EI_2$ . . . . .	63
5.1	Montage de l'essai de traction/flexion sur pied d'aube. . . . .	66
5.2	Effort mesuré en fonction du numéro d'image. . . . .	67
5.3	Effort adimensionné en fonction du numéro d'image, $N$ , pour la phase de mise en position de l'éprouvette (a). Moyenne de la norme du déplacement mesuré en chaque nœud du maillage en fonction du numéro d'image $N$ (b). . . . .	67
5.4	Effet d'une translation hors-plan (a) et d'une rotation hors-plan (b) sur la détermination du champ de déplacement dans le plan du capteur CCD dans le cas de l'utilisation d'un seul appareil photo [Sutton <i>et al.</i> , 2008]. . . . .	68
5.5	Évolution du déplacement mesuré par les capteurs LVDT (a). La position des capteurs LVDT est notée sur le plan de l'éprouvette de pied (b). . . . .	69
5.6	Champ de déplacement mesuré par CIN, pour un chargement adimensionné de 50%, suivant la direction horizontale $x$ (a) et verticale $z$ (b) exprimé en pixel. Carte des résidus correspondant à ce champ de déplacement mesuré (c). . . . .	70
5.7	Maillage du pied d'aube extrait de la modélisation CAO. . . . .	73
5.8	Frontière du modèle CAO importé et recentré grossièrement sur l'image en trait plein noir et frontière de l'éprouvette testée obtenue sur l'image de référence en trait pointillé. . . . .	73
5.9	Champ de déplacement sur l'ensemble de l'image exprimé en pixel sur l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b) permettant de recalibrer le maillage sur l'image. . . . .	74

5.10	Frontière du modèle EF, en trait plein gris, une fois ajusté sur la frontière de l'éprouvette testée, représentée en trait pointillé. . . . .	74
5.11	Maillage EF recalé sur l'image de référence après projection des nœuds de bords sur la frontière réelle de l'éprouvette. . . . .	75
5.12	Maillage EF 3D du pied et du mors. . . . .	76
5.13	Champ de déplacement calculé avec une modélisation 3D de l'essai projeté suivant la direction $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c). Le mors a été tronqué afin d'améliorer la visibilité. . . . .	77
5.14	Différence entre le champ de déplacement calculé avec la modélisation 3D et celui calculé avec la modélisation 2D. . . . .	78
5.15	Directions principales d'orthotropie définies par élément sur le maillage 2D. . . . .	79
5.16	Zones d'application des conditions aux limites en déplacement sur la partie supérieure du pied d'aube, $A$ et les portées $B$ . . . . .	80
5.17	Champ de sensibilité pour les trois paramètres matériau identifiés, $\ln(G_{13}/E_1)$ (a), $\ln(E_3/E_1)$ (b) et $\nu_{13}$ (c). . . . .	81
5.18	Évolution des trois paramètres matériau identifiés, (a) $G_{13}/E_1$ , (b) $E_3/E_1$ et (c) $\nu_{13}$ , et (d) résidu normalisé $R_n = \frac{(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})}{\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me}}$ en fonction du nombre d'itération. . . . .	82
5.19	Histogramme de la valeur absolue de la différence pixel à pixel entre deux images. Les données obtenues sont tracées avec des cercles, une gaussienne ajustée sur ces points (courbe en trait plein) sert de guide. La dynamique des images est de 1024 niveaux de gris. . . . .	84
5.20	Projection des incertitudes dans les trois plans (a) $(\nu_{13}, \ln(G_{13}/E_1))$ , (b) $(\nu_{13}, \ln(E_3/E_1))$ et (c) $(\ln(E_3/E_1), \ln(G_{13}/E_1))$ . . . . .	85
5.21	Résidus en niveau de gris associés à l'étape de mesure et à l'identification : (a) résidus de mesure $\rho_m$ , (b) résidus d'identification $\rho_c$ , (c) $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histogrammes de niveaux de gris $\eta$ , $\rho_m$ , $\rho_c$ , $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris. . . . .	86
5.22	Valeurs identifiées pour la série d'images prises au cours de la première charge, $C_1$ , et de la seconde charge, $C_2$ , en fonction de la charge appliquée normalisée. Le résidu normalisé, $R_n = [(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})]/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})$ , est aussi tracé en fonction du niveau de chargement. . . . .	88
5.23	Incertitudes dues au bruit d'acquisition du capteur CCD tracées pour les différents paramètres matériau et pour les deux rampes de chargement, $C_1$ et $C_2$ en fonction du chargement normalisé appliqué. . . . .	89
5.24	Zonage matériau du pied d'aube numéroté de 1 à 4. Chaque zone possède un comportement orthotrope. . . . .	89
5.25	Répartition du logarithme des valeurs propres, $D_i$ , de la matrice $[\mathbf{N}]$ issue de la minimisation de la fonctionnelle $T_1$ sur laquelle est superposée le niveau de pondération de la régularisation, $\lambda^*$ , en trait pointillé rouge. . .	91

5.26	Valeurs identifiées pour la série d'images prises sur la seconde rampe en fonction du chargement normalisé appliqué pour la modélisation hétérogène. . . . .	92
5.27	Incertitudes dues au bruit d'acquisition du capteur CCD pour la série d'images prises sur la seconde rampe en fonction du chargement normalisé appliqué pour la modélisation hétérogène. . . . .	93
5.28	Résidus en niveaux de gris associés à la mesure et à l'identification régularisée pour la modélisation hétérogène : (a) différence entre les résidus de mesure $\rho_m$ et les résidus d'identification $\rho_c$ , $\rho_m - \rho_c$ , (b) histogrammes de niveaux de gris de $\eta$ , $\rho_m$ , $\rho_c$ , $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris. . . . .	94
6.1	Résidus d'identification correspondant à une série d'images 86 – 104 pour $C_1$ et 124 – 160 pour $C_2$ . . . . .	101
6.2	Résidus en niveau de gris associés à l'étape de mesure et à l'identification pour la paire d'image 123 – 139 : (a) résidus de mesure $\rho_m$ , (b) résidus d'identification $\rho_c$ , (c) $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histogrammes de niveaux de gris $\eta$ , $\rho_m$ , $\rho_c$ , $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris. . . . .	102
6.3	Paramètre matériau identifié en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied, $E_3/E_{1nom}$ (a), $G_{13}/E_{1nom}$ (b), $\nu_{13}$ (c) et incertitude correspondante (d) pour le cas 1 où les trois paramètres $E_3/E_{1nom}$ , $G_{13}/E_{1nom}$ et $\nu_{13}$ sont identifiés et pour le cas 2 où seulement $E_3/E_{1nom}$ et $G_{13}/E_{1nom}$ sont identifiés. . . . .	104
6.4	Paramètre matériau identifié en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied, $E_3/E_{1nom}$ (a), $G_{13}/E_{1nom}$ (b), et incertitude correspondante (c) pour le cas 1 où l'identification est post-traitée et pour le cas 2 où l'identification est intégrée à la mesure. . . . .	105
6.5	Carte de résidu correspondant à la paire d'image 123 – 139 à l'issue de la CIN intégrée. On rappelle que la dynamique de l'image est de 1024 niveaux de gris. . . . .	105
6.6	Champ de déplacement suivant l'axe $x$ (a) et l'axe $z$ (b) obtenu après identification par CIN intégrée pour la paire d'image 215 – 300. Carte des résidus de corrélation correspondant (c). . . . .	107
6.7	Paramètres matériau identifiés en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied, $E_3/E_{1nom}$ (a), $G_{13}/E_{1nom}$ (b), incertitude correspondante (c) et résidus d'identification (d) pour le cas P où l'identification se fait par paire d'images et pour le cas S où l'identification se fait sur une série d'images (ici cinq pour la traction et cinq pour la traction/flexion). . . . .	108
6.8	Cartes de résidus d'identification correspondant au champ de déplacement obtenu pour la paire d'image 215 – 240 (a), 215 – 246 (b), 215 – 290 (c) et 215 – 296 (d). . . . .	109

---

6.9	Résultat de minimisation entre la fonction $f$ et le nuage de points pour une régularisation munie d'une norme 2 (a) et d'une norme 1 (b). . . . .	111
6.10	Champ de déplacement suivant l'axe $x$ exprimé sur la déformée d'un calcul 3D de compression entre la surface supérieure sur laquelle est transmis l'effort et la surface inférieure encastrée. Le maillage dans sa configuration non déformé est visible en trait plein. . . . .	112



## Liste des tableaux

3.1	Déplacements imposés théoriques et déplacements vrais mesurés pour chaque incrément subpixel. Le déplacement vrai est mesuré par CIN comme la minimisation au sens des moindres carrés des déplacements de corps rigide obtenus pour <i>toutes les paires d'images possible</i> . . . . .	23
3.2	Caractéristiques de chaque jeu de paramètres étudié pour une interpolation subpixel bilinéaire. Le point de lecture $\square$ (respectivement $\bullet$ ) correspond à une lecture au centre du pixel (respectivement au demi pixel) (Fig 3.2) . . . . .	25
3.3	Caractéristiques de chaque jeu de paramètres étudiés pour une interpolation subpixel spline cubique. . . . .	25
4.1	Valeurs nominales des paramètres matériau identifiés et valeurs imposées des paramètres matériau non identifiés. . . . .	53
5.1	Écart-type sur chaque paramètre identifié en considérant les autres fixés (colonne 2) ou en prenant en compte l'ensemble des incertitudes de chaque paramètre (colonne 3). . . . .	85
5.2	Valeurs nominales des différents paramètres matériau pour chaque partition $i$ du pied d'aube. . . . .	90
5.3	Valeurs identifiées des différents paramètres matériau pour chaque partition $i$ du pied d'aube ainsi que les incertitudes correspondantes pour l'image 139. . . . .	94
6.1	Valeurs des paramètres matériau identifiés sur une série d'images pour la charge $C_1$ et $C_2$ (fonctionnelle régularisée $C_1^r$ et $C_2^r$ ). . . . .	100



# Introduction

L'industrie aéronautique développe actuellement des solutions pour fabriquer des avions plus légers et moins bruyants afin de limiter leur impact environnemental. Des innovations sont notamment proposées par les motoristes. Le rendement d'un moteur d'avion est égal au maximum à 70% pour une vitesse de croisière de Mach 0.8. Ces vitesses sont atteintes grâce à des moteurs de type turboréacteur à double flux. Le rendement de ces derniers est proportionnel au taux de dilution, qui est le rapport entre la masse d'air du flux froid et celle du flux chaud circulant à travers le turboréacteur. Le flux froid passe à travers la soufflante et par l'extérieur du moteur avant d'être éjecté par la tuyère en sortie. Tandis que le flux chaud est un flux d'air passant par la soufflante et étant compressé petit à petit avant d'être brûlé dans la chambre de combustion et éjecté par la tuyère. La détente des gaz dans la tuyère crée une accélération du flux d'air entre l'entrée et la sortie du turboréacteur. Cette différence de vitesse multipliée par le débit massique d'air forme la poussée. Afin d'augmenter cette force de poussée, il est classiquement choisi d'augmenter le débit massique du flux d'air froid. Pour cela, la soufflante joue un rôle primordial dans le rendement du turboréacteur. Par conséquent, les innovations des motoristes portent en partie sur les aubes de soufflante afin d'augmenter le taux de dilution. Ces pièces étant de grandes dimensions, il est indispensable de réduire leur densité par un choix judicieux du matériau.

Les composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie aéronautique du fait de leur bon compromis poids/performances mécaniques. Depuis plusieurs années, les composites laminés sont étudiés, des modèles complexes ont été développés, mais du fait de leur faible résistance au délaminage sous sollicitations d'impact et de leurs faibles propriétés mécaniques dans la direction hors-plan, de nouveaux matériaux émergent afin d'augmenter ces performances et de les adapter aux sollicitations. De plus, la fabrication de pièces en composites laminés est coûteuse du fait du besoin de stockage réfrigéré des tissus pré-imprégnés, de la mise en œuvre manuelle et de la complexité du processus de fabrication des grandes pièces telles que les ailes d'avion [Mouritz *et al.*, 1999]. Pour pallier ces difficultés, les composites 3D ont été largement développés dans les dernières décennies. Les principaux procédés de fabrication sont le tressage, le tricotage, la couture et le tissage [Kamiya *et al.*, 2000]. Nous nous intéresserons ici au tissage 3D, directement issu du tissage 2D, dans lequel un renforcement dans l'épaisseur est assuré par une liaison des différentes couches ensemble. Ce procédé offre l'avantage de réduire le coût de main d'œuvre et de limiter le surplus de matière puisque la préforme tissée est très proche de la pièce finale. Dans ce contexte, SNECMA développe des aubes en composite tissé 3D

afin de remplacer le titane actuellement présent. l'aube tissée permet d'obtenir des taux de dilution élevés et donc une consommation et un niveau de bruit réduits.

Une des spécificités de la technologie de tissage 3D développée et mise en œuvre par SNECMA consiste à tisser des préformes textiles "sur mesure". Des simulations par éléments finis permettent aujourd'hui de décrire le comportement non linéaire de ces structures complexes jusqu'à un stade avancé de leur dégradation. La mise en place d'outils d'identification permettant de s'adapter à toute nouvelle déclinaison de matériau paraît à ce stade incontournable. Des méthodes par analyse modale de corrélation entre résultats expérimentaux et numériques permettent de recalibrer les modèles éléments finis [Fallstrom et Jonsson, 1991, Ayorinde, 1995, Frederiksen, 1997]. Cette approche est applicable dans les zones « courantes », par exemple, pour les échasses et les pales des aubes de soufflante. Par contre, elle perd de son sens dans les régions « singulières » et massives telles que le pied. En effet, le pied n'étant que très peu sollicité mécaniquement en régime vibratoire, ces méthodes ne permettent pas de recalibrer les modèles éléments finis dans cette zone pourtant critique (survitesse, fatigue, ingestion, perte d'aube).

Les mesures de champs par corrélation d'images numériques permettent d'obtenir de façon précise et robuste l'évolution spatio-temporelle du champ de déplacement en surface d'un pied d'aube. À partir d'une telle mesure, des travaux réalisés au LMT-Cachan proposent plusieurs approches pour remonter, par méthodes inverses, à la loi de comportement du matériau. Ces approches ont été développées et mises en œuvre pour des comportements élastiques linéaires mais également pour des lois d'endommagement en isotrope ou anisotrope [Claire *et al.*, 2003, Claire *et al.*, 2004, Hild et Roux, 2006, Roux et Hild, 2008, Witz *et al.*, 2008, Périé *et al.*, 2009]. Les récents développements en corrélation d'images élargissent le champ d'application en termes d'identification de propriétés des matériaux. La notion d'éléments finis en corrélation d'image, en cours de développement au LMT-Cachan, rend direct (i.e., sans reprojection) le lien entre prédiction d'essai, identification, recalage et dimensionnement [Leclerc *et al.*, 2009].

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse s'inscrit dans ce contexte en développant plus avant la stratégie d'identification sur la base de mesures de champs pour identifier les propriétés élastiques des composites tissés 3D utilisés dans les aubes de soufflantes.

# Chapitre 1

## Matériaux

*Dans ce premier chapitre, une revue rapide des composites est présentée de façon chronologique. Au sein des matériaux composites, la famille des composites tissés 3D est détaillée.*

*Le matériau étudié est décrit ainsi que les différentes éprouvettes testées. Enfin, l'échelle de description du matériau et le comportement associé sont décrits.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Matériau : composite tissé 3D</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1	Présentation générale des composites . . . . .	4
1.2	Composites tissés 3D . . . . .	5
1.3	Spécificités du matériau de l'étude . . . . .	6
1.4	Éprouvettes testées . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Vision macroscopique</b> . . . . .	<b>8</b>

---

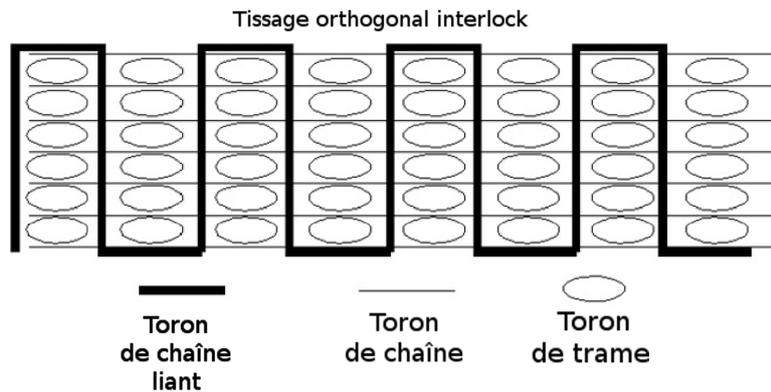
# 1 Matériau : composite tissé 3D

## 1.1 Présentation générale des composites

Un composite est un assemblage de deux phases, la première composant l'ossature de la pièce, et la seconde le liant afin de maintenir cette ossature suivant une organisation spatiale donnée. Cette organisation spatiale est choisie en fonction des caractéristiques mécaniques attendues de la pièce finale. Prenons par exemple le bois, matériau composite naturel composé de fibres végétales, ces dernières sont globalement orientées suivant l'axe de croissance de l'arbre afin de pouvoir supporter son poids propre et reprendre des efforts de flexion dus au vent. De la même manière, les premiers composites unidirectionnels (UD) sont composés de fibres disposées parallèlement les unes aux autres et noyées dans une matrice pour les maintenir en place [Sun et Vaidya, 1996]. La rigidité des fibres en traction confère des propriétés mécaniques très intéressantes à ce type de matériau. Mais malheureusement, du fait de la disposition des fibres dans une unique direction, les sollicitations dans des directions non parallèles aux fibres endommagent très vite le matériau. Afin de pallier ce problème, les pièces peuvent être fabriquées par superposition de composites UD de manière à varier la direction principale des fibres dans l'épaisseur. Ce sont les composites laminés [Azzi et Tsai, 1965]. Ces composites sont très utilisés en industrie, car ils sont aisément mis en œuvre dans le cas de faibles épaisseurs de pièces. Mais leur inconvénient majeur, découlant directement de leur mode de fabrication par superposition de couche UD, est qu'ils ne permettent pas d'obtenir une rigidité élevée dans la direction perpendiculaire au plan contenant les fibres UD. De ce fait, le mode majeur de rupture de ces composites est le décollement des différentes couches, ce qu'on appelle le délaminage.

Une solution retenue pour des pièces d'épaisseur fines est le tissage 2D. Plusieurs milliers de fibres sont agrégées afin de former un toron. A la manière d'un métier à tisser, un premier ensemble de torons parallèles entre eux constituent les fils de chaîne entrelacés autour d'un second ensemble de torons, perpendiculaires aux premiers, constituant les fils de trame. Cette organisation spatiale des torons forme un tissu dans un plan 2D, tel que le taffetas, le satin ou le sergé. Une fois cette préforme tissée réalisée, la forme finale est obtenue par positionnement dans un moule. Dans le cadre des composites à matrice organique (CMO), la matrice est ensuite appliquée à l'état liquide (du moins à faible coefficient de viscosité pour imprégner l'ensemble de la préforme) et se réticule lors de la phase de durcissement afin de figer la préforme dans la forme voulue.

Pour des pièces plus épaisses, différentes solutions ont été proposées pour intégrer des renforts dans la troisième direction [McIlhagger *et al.*, 1995, Adanur et Tam, 1997, Kamiya *et al.*, 2000]. Nous nous intéresserons ici uniquement au tissage 3D, procédé utilisé pour réaliser les aubes fan composites d'un moteur d'avion. L'aube fan étant située en partie froide du moteur, elle est réalisée en fibres de carbone et matrice organique, et peut résister jusqu'à des températures d'une centaine de degrés Celsius.



**FIGURE 1.1:** Exemple d'un composite tissé 3D de type orthogonal interlock en vue longitudinale [Quinn *et al.*, 2008].

## 1.2 Composites tissés 3D

Le tissage 3D est une extension directe du tissage 2D dont plusieurs couches de torons de trame ont été superposées et liées entre elles par les torons de chaîne balayant la troisième direction [McIlhagger *et al.*, 1995, Adanur et Tam, 1997]. Il existe différentes manières d'entrelacer les torons de chaîne et les torons de trame, on peut classer les tissés 3D suivant le type de renfort dans la troisième direction :

- Le tissage orthogonal interlock
- Le tissage angle interlock 3D
- Le tissage couche-couche
- Le tissage couche à couche

### 1.2.1 Tissage orthogonal interlock

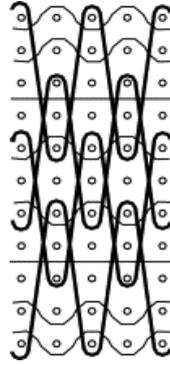
Pour ce tissage, des torons sont disposés par couches successives suivant la direction de chaîne puis de trame sans entrelacement. Un troisième renfort, ondulant suivant la direction des torons de chaîne, vient ensuite entrelacer l'ensemble des couches en traversant orthogonalement l'empilement des renforts chaîne/trame (Fig. 1.1).

### 1.2.2 Tissage angle interlock 3D

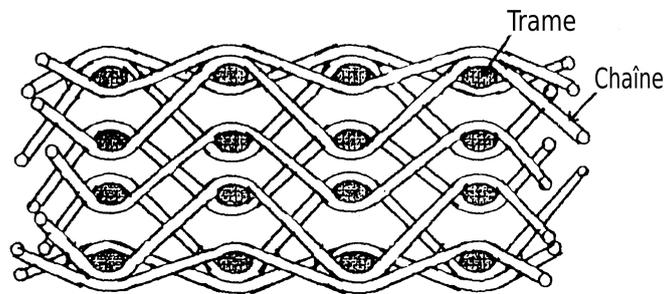
Une variante du tissage orthogonal consiste à donner un angle inférieur à  $90^\circ$  au renfort dans la troisième direction lors de la traversée de l'empilement des couches chaîne/trame. L'ondulation du renfort hors-plan est donc limitée par rapport au tissage orthogonal.

### 1.2.3 Le tissage couche-couche

Il est aussi possible de lier seulement quelques couches chaîne/trame entre elles et non plus l'ensemble de l'empilement (Fig. 1.2). Ceci est particulièrement utilisé pour



**FIGURE 1.2:** Exemple d'un composite tissé 3D de type couche-couche en vue longitudinale [Sun *et al.*, 2005].



**FIGURE 1.3:** Exemple d'un composite tissé 3D de type couche-à-couche en vue longitudinale [Tsai *et al.*, 2000].

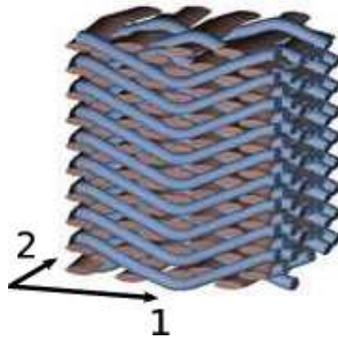
les pièces de grande épaisseur pour lesquelles un tissage orthogonal interlock ou angle interlock 3D induit un embuvage excessif, ce qui réduit les propriétés mécaniques de la pièce obtenue [Cox *et al.*, 1996].

#### 1.2.4 Tissage couche à couche

Pour le tissage couche à couche, seulement deux couches sont liées entre elles (Fig. 1.3). Dans ce cas, l'embuvage est limité mais en contrepartie, les propriétés mécaniques dans la troisième direction sont elles aussi réduites par rapport aux tissages précédents [Brandt *et al.*, 1996].

### 1.3 Spécificités du matériau de l'étude

Le choix du tissage parmi ceux présentés précédemment dépend du comportement souhaité [Vandeurzen *et al.*, 1996], de la forme à réaliser, notamment l'épaisseur est un critère influent, et de la capacité à injecter ensuite la matrice dans l'ensemble de la préforme sans laisser de vide [McIlhagger *et al.*, 1995, Spencer, 2000]. On peut définir un tissage à partir d'une optimisation fonction des paramètres matériau ho-



**FIGURE 1.4:** Exemple d'une cellule élémentaire d'un composite tissé 3D de type couche à couche. Les torons de chaîne sont représentés suivant la direction 1 et les torons de trame suivant la direction 2.

mogénéisés équivalents au comportement macroscopique [Younes *et al.*, 2008]. On peut aussi avoir des limitations dues aux déformations subies par la préforme tissée lors de la mise en place dans le moule avant injection [Lomov *et al.*, 2008, Badel *et al.*, 2008, Luycker *et al.*, 2009]. Il s'agit donc de trouver un compromis.

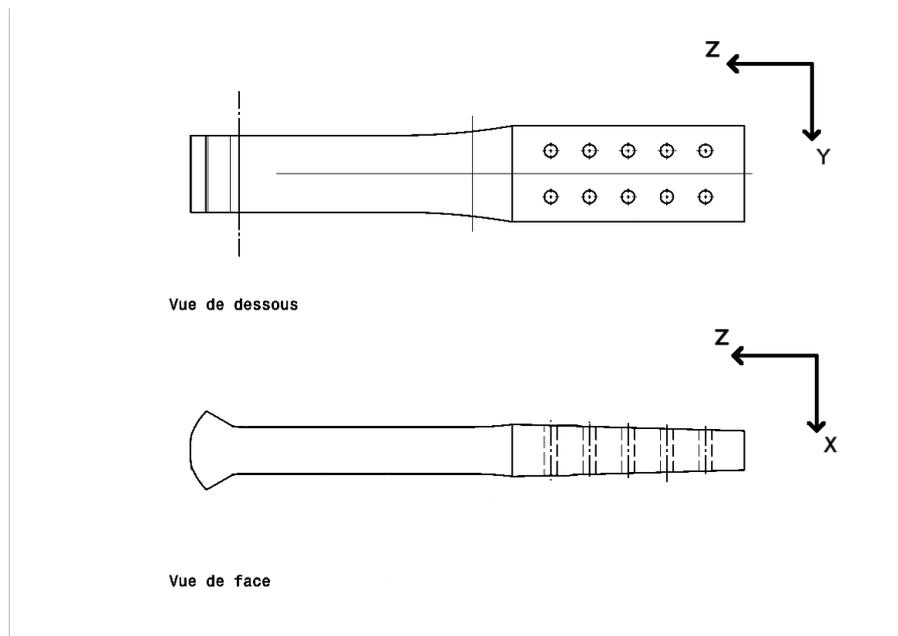
Le matériau étudié est un composite tissé de type interlock couche-à-couche permettant d'améliorer les propriétés hors-plan par rapport aux matériaux composites laminés [Guénon *et al.*, 1989, Mouritz *et al.*, 1999, Mouritz, 2008]. Le tissage varie le long de la pièce, pour notre cas du pied d'aube fan, ce qui permet de fabriquer un matériau spécifique pour cette application. Notamment, la variation de section suivant la direction des torons de chaîne,  $z$ , d'une base large jusqu'à un raccord plus fin avec l'aube ainsi que les sollicitations complexes attendues en traction, flexion et torsion permet de dessiner une variation de tissage dans le plan  $(x, z)$ , plan chaîne/hors plan, tout en étant périodique dans la direction de trame  $y$ . Dans le pied d'aube, le matériau est clairement hétérogène par la variation continue du tissage le long de la pièce et anisotrope.

Du fait des sollicitations élevées vues par la pièce, les torons utilisés sont constitués de plusieurs milliers de fibres assemblées, de 48K jusqu'à 96K, contrairement aux torons plus classiques constitués de 6K à 24K, ce qui confère une section importante à ceux-ci. Par conséquent, ce matériau possède une mésostructure grossière, en plus de l'hétérogénéité et de l'anisotropie. Des éprouvettes sont fabriquées, selon ce plan de tissage retenu, par procédé Resin Transfer Molding (RTM), dont on peut voir une cellule élémentaire type sur la Figure 1.4. Les dimensions caractéristiques géométriques du Volume Élémentaire Représentatif (VER) sont de  $3h \times 2,5h \times h \text{ mm}^3$  (la valeur de  $h$  est confidentielle).

## 1.4 Éprouvettes testées

### 1.4.1 Coupons courts

Dans un premier temps, il s'agit de réaliser un cas d'étude simple permettant de valider la méthode présentée par la suite. Pour cela, des coupons courts, de taille proche de deux



**FIGURE 1.5:** Géométrie de l'éprouvette de pied d'aube en vue de face et vue de dessous.

fois le VER,  $2 \times 1,5 \times 1$  VER, sont testés. Ces éprouvettes sont issues de plaques ayant un tissage périodique suivant les trois directions. Le faible nombre de VER contenus dans l'éprouvette permet de se positionner dans un cadre proche de la problématique issue du pied d'aube (Chapitre 2).

#### 1.4.2 Éprouvettes de pied d'aube

Dans un second temps, des éprouvettes de structures représentant le pied d'aube sont testées. Sachant que le tissage est périodique dans la direction de trame, l'épaisseur dans cette direction est fortement réduite par rapport à la pièce réelle. L'éprouvette consiste en une base en forme de queue d'aronde se terminant sur la partie supérieure qui elle, est à base rectangulaire. Cette partie supérieure s'élargie très légèrement et se termine par une partie servant à la fixation du vérin de sollicitation constituée de dix perçages suivant la largeur répartis en deux rangées de cinq (Fig. 1.5).

## 2 Vision macroscopique

La modélisation choisie afin de représenter le comportement est une vision macroscopique homogénéisée du matériau. L'étude se situe dans le cadre de la mécanique des milieux continus dans le domaine élastique du composite. De ce fait, les déplacements et déformations appliqués sont petits devant les dimensions caractéristiques des éprouvettes, et l'hypothèse des petites perturbations (HPP) est donc valable pour l'ensemble de cette étude. La loi de comportement macroscopique proposée est orthotrope, ce qui

est assez classique pour des matériaux composites tissés 2D et 3D, les torons de chaîne et de trame formant naturellement une base d'orthotropie [Cox et Dadkhan, 1995, Pailhes *et al.*, 2002, El Hage *et al.*, 2006, Schneider *et al.*, 2009, Buchanan *et al.*, 2010, Nehme *et al.*, 2011]. La loi de comportement, reliant les déformations aux contraintes, peut donc s'écrire,  $\varepsilon = A : \sigma$ , en fonction de la matrice de souplesse  $A$ , soit en notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Dans le premier cas des coupons courts, le matériau est considéré comme homogène et les directions d'orthotropie sont constantes sur l'ensemble de l'éprouvette. Dans le second cas de l'éprouvette de pied, les directions d'orthotropie ainsi que la matrice de souplesse  $A$  varient suivant la position de l'élément.



# Chapitre 2

## Enjeux

*Dans ce second chapitre, la problématique de l'étude est soulevée. La modélisation proposée décrit-elle de façon raisonnable le comportement de l'éprouvette ? Il est donc suggéré de mener une validation expérimentale.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Matériau multi-échelle</b>	<b>12</b>
1.1	Échelle microscopique	12
1.2	Échelle mésoscopique	12
1.3	Échelle macroscopique	12
1.4	Changement d'échelle	12
<b>2</b>	<b>Validation expérimentale</b>	<b>13</b>
2.1	Essais	13

---

# 1 Matériau multi-échelle

Pour bien comprendre les enjeux de l'étude, il est indispensable de prendre en compte l'aspect multi-échelle de description du matériau.

## 1.1 Échelle microscopique

Premièrement, au vu de la vision macroscopique attendue dans cette étude, il semble inutile de décrire ici l'échelle fine portant sur la description des fibres de carbone. Nous considérons alors acquis le passage de cette échelle au comportement des fibres et de la matrice.

## 1.2 Échelle mésoscopique

L'échelle des torons de fibres et de la matrice, que nous appellerons par la suite l'échelle mésoscopique, est donc le premier niveau de description. Ces torons sont organisés, ici de façon périodique, lors du tissage, mis en place lors du positionnement dans le moule de la préforme tissée et fixés définitivement lors du durcissement de la matrice. Si l'on considère la périodicité de cette organisation de torons et de matrice, il vient naturellement l'échelle du volume élémentaire représentatif (VER) géométrique, définissant le volume minimal de description au delà duquel le motif ainsi défini se répète pour former la pièce voulue, mais aussi le VER mécanique définissant le volume nécessaire dans lequel le comportement macroscopique peut être assimilé à celui d'un milieu homogène "équivalent". Dans le cas de composite à fibres longues, le VER peut être défini de manière déterministe comme la cellule élémentaire de l'arrangement périodique.

## 1.3 Échelle macroscopique

À partir de la connaissance mécanique des éléments constituant ce VER et de son organisation géométrique, il est possible d'obtenir une description macroscopique équivalente du matériau. C'est cette description qui nous intéresse plus particulièrement ici (Section 2).

## 1.4 Changement d'échelle

Pour passer d'une échelle de description fine du matériau à une autre plus macroscopique, des méthodes d'homogénéisation existent afin de déterminer le comportement global du matériau [Bensoussan *et al.*, 1978, Holmbom *et al.*, 1992, Dasgupta et Bhandarkar, 1994, Huysmans *et al.*, 1999, Byström *et al.*, 2000, Lomov *et al.*, 2007]. La méthode retenue est celle de l'inclusion d'Eshelby [Huysmans *et al.*, 1998, Lomov *et al.*, 2011], implémentée dans le logiciel *Texcomp* [Verpoest et Lomov, 2005]. Néanmoins, cela est basé sur certaines hypothèses qu'il convient de valider, notamment, une hypothèse de séparation

d'échelle et une hypothèse sur la connaissance exacte de la forme et de la position des torons dans la pièce finale. En effet, la taille caractéristique des hétérogénéités doit être petite devant la taille de l'ensemble à considérer, qui elle même doit être petite devant la taille de la structure.

Or comme nous allons le voir ces hypothèses ne sont pas évidemment validées dans le cadre de cette étude. Le matériau étudié est fortement hétérogène à l'échelle mésoscopique du fait du fort contraste des différents composants mis en jeu (fibres, matrice), mais son comportement est aussi hétérogène à l'échelle macroscopique de par la variation de tissage au sein même du pied d'aube. De plus, la mésostructure grossière fait que la séparation d'échelle entre le VER et les dimensions du matériau équivalent recherché n'est pas réalisée. Ainsi, le comportement global résultant de l'homogénéisation fluctue fortement d'une particule macroscopique à l'autre du fait de sa dépendance à la mésostructure sous-jacente.

La méthode de l'inclusion d'Eshelby suppose aussi la connaissance exacte de la forme et de la position du toron dans la pièce réalisée. Or le tissage de la pièce est réalisé en plan et est ensuite positionné dans un moule pour être injectée (Section 1). Lors du positionnement de la préforme tissée dans le moule, les torons glissent les uns par rapport aux autres afin d'ajuster la préforme sur le moule. Le positionnement résultant des torons est extrêmement difficile à prévoir du fait de la complexité du tissage et des interactions entre torons [Boisse *et al.*, 2005, Badel *et al.*, 2008, Luycker *et al.*, 2009]. De plus, la manipulation de la préforme induit des endommagements plus ou moins importants des fibres qui peuvent localement altérer les propriétés du composite. De ce fait, la connaissance du positionnement, de la forme et des propriétés locales des torons reste approximative et les propriétés mécaniques résultant de l'homogénéisation sont fortement affectées par ces approximations.

Par conséquent, il est nécessaire d'apporter une validation expérimentale sur la détermination du comportement macroscopique équivalent du pied d'aube. Pour cela, un dialogue entre simulation et essai est indispensable. Les outils d'exploitation de données mesurées doivent fournir des informations sur l'ensemble du pied d'aube à l'échelle macroscopique. Cette étude sera donc fondée sur l'exploitation de mesure de champ par Corrélation d'Images Numériques (CIN).

## 2 Validation expérimentale

### 2.1 Essais

Pour cette validation expérimentale, il est illusoire de réaliser un essai pour chaque paramètre matériau. Tout d'abord, le grand nombre de paramètres demande une campagne d'essai importante. Ensuite, certains paramètres matériau ne pourront pas être caractérisés de la sorte. En effet, parmi les paramètres matériau obtenus par homogénéisation, on peut aisément valider les paramètres dans le plan, les modules élastique  $E_1$  et  $E_2$ , en réalisant des essais de traction simple. Mais, cela est beaucoup plus compliqué pour le module

élastique hors-plan,  $E_3$ , car il est difficile de réaliser un essai de traction dans cette direction au vu de l'épaisseur du matériau. En ce qui concerne les modules de cisaillement, les essais de Iosipescu, classiquement utilisés pour caractériser le cisaillement, ne sont *a priori* pas les plus adaptés à ce matériau à mésostructure grossière. Dans l'essai de Iosipescu, un plan unique est sollicité en cisaillement. Par conséquent, dans le cas où le VER géométrique n'est pas négligeable devant le volume de l'éprouvette, le plan sollicité ne représente pas le comportement de l'ensemble de l'éprouvette.

Il sera donc indispensable de réaliser l'essai de validation sur une éprouvette de pied d'aube. Sachant que la modélisation de l'éprouvette de pied présente des hétérogénéités, plusieurs jeux de paramètres matériau sont alors à identifier. L'identification des paramètres hors-plan sera plus spécifiquement étudiée.

# Chapitre 3

## Outils

*Dans ce troisième chapitre, les outils utilisés permettant de mener à bien la validation expérimentale sont présentés. La méthode d'identification par recalage de modèle EF est basée sur la mesure de champ de déplacement par CIN. L'étude est menée dans un environnement commun, la plateforme LMTpp, code C++ développé au laboratoire.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>La Corrélation d'Images Numériques</b>	<b>16</b>
1.1	Approche globale	16
1.2	Étude d'incertitude CIN	20
<b>2</b>	<b>Les méthodes d'identification</b>	<b>26</b>
2.1	Cadre général	26
2.2	Choix de la FEMU	31
<b>3</b>	<b>La plateforme LMTpp</b>	<b>32</b>

---

# 1 La Corrélacion d'Images Numériques

## 1.1 Approche globale

Le but de la CIN est d'obtenir un champ de déplacement à partir d'images prises lors de l'essai sur une face de l'éprouvette sollicitée. Le déplacement est estimé en chaque point d'une région d'intérêt (ROI) de la surface observée choisie par l'utilisateur. Une image de référence,  $f$ , prise habituellement dans un état non sollicité, et une image déformée,  $g$ , prise à un état de sollicitation donné, sont sélectionnées. En se basant sur la texture de la surface observée, exprimée en niveaux de gris dans l'image, et en considérant que celle-ci est uniquement transportée par le déplacement et altérée par le bruit d'acquisition du capteur CCD,  $\eta$ , on peut écrire pour tout point de coordonnées  $\mathbf{x}$  de la ROI :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

L'approche locale de la CIN, dont le cadre théorique a été défini pour la première fois dans [Sutton *et al.*, 1983], décompose la ROI en sous régions indépendantes, appelées fenêtres d'interrogation, de tailles variant habituellement de  $16 \times 16 \text{ pix}^2$  à  $64 \times 64 \text{ pix}^2$ . Le déplacement est estimé en leur centre, et souvent une déformation homogène de la fenêtre d'interrogation est autorisée. L'interpolation de ces estimations de déplacement permet d'obtenir le champ de déplacement sur l'ensemble de la ROI. Cette interpolation, et le filtrage qui l'accompagne souvent, se fait dans une seconde étape sans lien avec les images analysées, ce qui constitue la faiblesse majeure de cette technique car elle interdit une évaluation propre de la qualité du résultat obtenu, et *a fortiori* de l'exploitation des incertitudes de mesure.

L'approche globale, quant à elle, propose une régularisation que l'on considère ici sous l'angle de la limitation de la cinématique  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  à un sous-espace approprié. La CIN dans son approche globale consiste donc à estimer la meilleure solution de la projection du champ de déplacement sur une base adaptée, telle que les fonctions de formes de type éléments finis afin de satisfaire au mieux l'équation (3.1).

Par conséquent, le champ de déplacement peut s'exprimer en fonction des valeurs nodales du champ de déplacement, les inconnues du problème,  $a_{\alpha i}$ , et les fonctions de forme de type EF,  $N_i(\mathbf{x})$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{e}_{\alpha}$  est le vecteur unité suivant la direction  $\alpha$ . Le champ de déplacement est obtenu par minimisation sur l'ensemble du domaine,  $\Omega$ , de la différence élevée au carré entre l'image déformée,  $g$ , corrigée du champ de déplacement et l'image de référence,  $f$ . La fonctionnelle à minimiser s'écrit donc :

$$\mathcal{T}(a_{\alpha i}) = \int_{\Omega} \left[ g \left( \mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} \right) - f(\mathbf{x}) \right]^2 dx \quad (3.3)$$

La non linéarité de cette fonctionnelle impose une résolution par correction successive de l'image  $g$ . Après une linéarisation locale du problème effectuée par un développement de Taylor, l'incrément de déplacement à l'itération  $n$  est obtenu par résolution du système linéaire :

$$[\mathbf{M}]\{\delta a^{(n+1)}\} = \{b^{(n)}\} \quad (3.4)$$

où  $[\mathbf{M}]$  est la matrice de corrélation dont l'expression est :

$$M_{\alpha i, \beta j} = \int_{\Omega} \partial_{\alpha} f(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) \partial_{\beta} f(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

et  $\{b^{(n)}\}$  le second membre à l'itération  $n$

$$b_{\alpha i}^{(n)} = \int_{\Omega} [g^{(n)}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \partial_{\alpha} f(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (3.6)$$

La CIN globale telle qu'utilisée par la suite est détaillée dans [Besnard *et al.*, 2006] et en annexe A et B. Néanmoins, le passage des images enregistrées lors de l'essai aux images  $f$  et  $g$  sur lesquelles la mesure est faite présente quelques particularités liées au format d'enregistrement. La démarche est expliquée ci-dessous (Section 1.1.1).

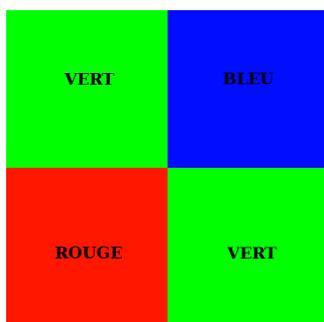
### 1.1.1 Lecture de l'image

Les images sur lesquelles la mesure est effectuée,  $f$  et  $g$ , dépendent de la lecture initiale lors du chargement dans le programme de l'image enregistrée par le système d'acquisition. Tout d'abord, plusieurs formats sont disponibles suivant le type de système, caméra ou appareil photo. Dans notre cas, le premier enregistre les images dans un format '.tif' en niveaux de gris sur une grille de  $1024 \times 1024$  pixels. Tandis que le second enregistre dans un format '.raw' en couleur sur une matrice *RGB*. Un traitement spécifique est donc nécessaire pour lire le format '.raw' afin de le convertir en niveaux de gris. La matrice *RGB* définie sur l'ensemble du capteur CCD présente une cellule de base de  $2 \times 2$  pixels pour laquelle la première diagonale est constituée de deux pixels verts et la deuxième diagonale est constituée d'un pixel rouge et d'un pixel bleu (Fig 3.1). Afin de profiter de toute l'information disponible, la conversion vers une image en niveaux de gris au format '.tif' est obtenue par l'addition des niveaux de gris lus dans chaque pixel de la cellule de base pour former un pixel de l'image finale. Il est choisi de prendre un échantillonnage de 2 pixels, la grille de pixel de l'image en niveaux de gris est donc divisée par deux dans chaque direction.

Ensuite, le détail des calculs effectués sur l'image en niveaux de gris de type '.tif' dépend des options de corrélation disponibles (Section 1.1.2).

### 1.1.2 Options de CIN

Plusieurs options, choisies par l'utilisateur, sont disponibles au sein de la procédure de corrélation. Ces options seront choisies suivant la qualité des images enregistrées,



**FIGURE 3.1:** Cellule de base de la matrice *RGB* d'un capteur CCD dans laquelle deux pixels en diagonale sont verts, et suivant l'autre diagonale, un pixel est rouge et le second est bleu.

dépendant des conditions environnementales de l'essai et de la qualité de la chaîne d'acquisition des images, et du compromis qualité de mesure/temps de calcul attendu.

Les conditions d'éclairage n'étant pas idéalement uniforme sur l'ensemble de la durée de l'essai. Ces variations d'éclairage sont dues aux modifications de la luminosité ambiante mais aussi aux imprécisions électroniques et/ou mécaniques du système d'acquisition. Cela induit des variations de niveaux de gris artificielles sur les images enregistrées. Les imprécisions du système d'acquisition concernent notamment le temps d'exposition. Les rayons lumineux sont captés par le capteur CCD durant ce temps d'exposition défini par l'utilisateur. Une moyenne des photons reçus sur chaque photosite durant ce laps de temps donne le niveau de gris pour chaque pixel du capteur. Afin d'avoir un éclairage uniforme et le plus constant possible durant l'essai, il est préférable d'avoir un éclairage puissant, cela entraîne un choix de temps d'exposition faible. Par conséquent, les variations relatives du temps réel d'exposition sont significatives. On comprend donc aisément qu'il peut y avoir des variations non négligeables sur les niveaux de gris enregistrés par le capteur CCD.

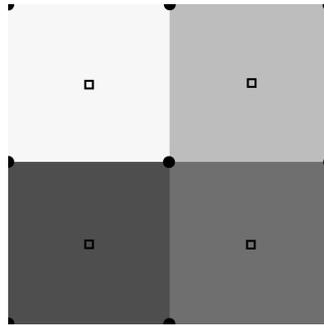
Lors de l'acquisition d'une image, les rayons lumineux traversent tout d'abord l'objectif, un assemblage de lentilles, ce qui induit une distorsion de l'image vue par l'appareil. Cette distorsion n'est pas prise en compte dans le cadre de cette étude car celle-ci est la même pour l'ensemble des images prises au cours de l'essai et les déplacements mesurés sont petits devant la taille du capteur CCD. Néanmoins, une erreur est induite par la distorsion sur le calcul des gradients et déformations.

– **Correction de contraste :**

Il est possible de corriger la luminance en relaxant l'hypothèse de conservation du niveau de gris introduite dans l'équation (3.1). Dans le cas où la seule différence entre deux images  $f$  et  $g$  est due à la variation de luminance, deux paramètres suffisent pour effectuer la correction. Ce sont la brillance,  $b(\mathbf{x})$ , et le contraste,  $c(\mathbf{x})$ , tels que :

$$g(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) + (1 + c(\mathbf{x}))f(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

Il est choisi, ici, de ne corriger que le contraste, de telle sorte que l'on prend  $b(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$



**FIGURE 3.2:** Coordonnées du point de lecture des niveaux de gris. Le niveau de gris du pixel (respectivement de l'interpolation des pixels voisins) est lu aux coordonnées des points correspondant aux □ (respectivement ●).

dans l'équation 3.7.

– **Coordonnées du point de lecture :**

Le bruit du capteur CCD vient perturber le niveau de gris de l'image enregistrée. Afin de réduire le niveau de bruit, un filtrage naturel lié aux données contenues dans l'image enregistrée consiste à lire le niveau de gris non pas au centre d'un pixel mais à l'intersection de quatre pixels adjacents (Fig. 3.2). Le niveau de gris retenu résulte donc de l'interpolation des niveaux de gris de ces quatre pixels. La fonction d'interpolation subpixel est choisie par l'utilisateur (voir dernier item).

– **Calcul du gradient de l'image :**

le calcul du gradient de l'image se fait par différence finie sur une distance donnée,  $2d$  tel que au point  $\mathbf{x}$  de coordonnées  $(x, y)$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{f(x+d) - f(x-d)}{2d} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{f(y+d) - f(y-d)}{2d} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

Le paramètre  $d$  est choisi par l'utilisateur. De plus, la discrétisation des points de coordonnées pour le calcul du gradient est effectué par subdivision de chaque pixel en prenant pour niveau de gris la valeur correspondante à l'interpolation subpixel choisie. Une discrétisation fine permet d'améliorer la qualité de l'intégration de la fonctionnelle sur l'ensemble du domaine. Par contre, le temps de calcul s'en trouve fortement augmenté, un exemple est donné dans la Section 1.2 figure 3.12.

– **Interpolation subpixel :**

L'interpolation des niveaux de gris de l'image peut être bilinéaire ou spline cubique. Il est à noter que pour le cas de l'interpolation spline cubique, le calcul rigoureux de l'intégrale sur le domaine d'étude n'est plus simplement une somme sur les pixels du fait de la non linéarité de la fonction d'interpolation. Néanmoins, on considérera que cette erreur est acceptable.

## 1.2 Étude d'incertitude CIN

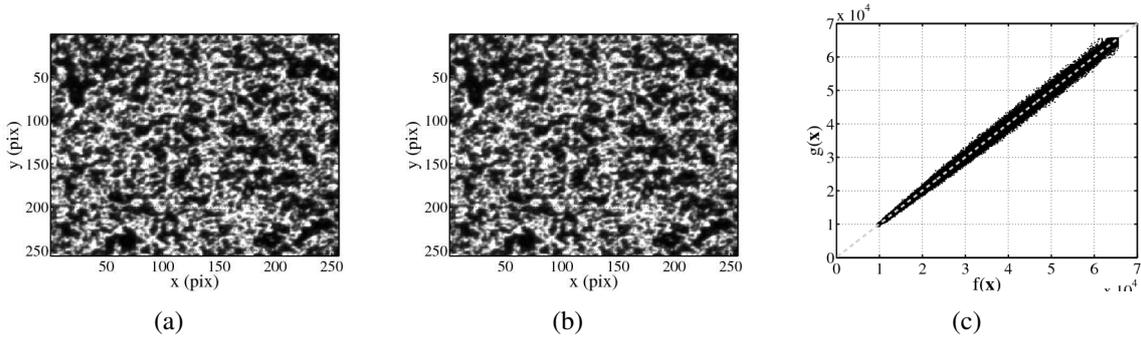
Il convient premièrement d'identifier les différentes sources d'incertitudes présentes sur les images et induisant directement une incertitude sur le champ de déplacement à travers l'algorithme de CIN. Les incertitudes sont dues à une différence de signal (on peut par exemple prendre l'histogramme des niveaux de gris comme outil de comparaison) entre deux images de la série. Idéalement, l'histogramme ne varie pas au cours de l'essai puisque reflétant la mesure du mouchetis appliqué sur la surface de l'éprouvette observée. Néanmoins, la variation observée est due aux variations de l'environnement lumineux et à la nature même de l'outil d'acquisition. En effet, le capteur CCD constitue une grille discrète de pixels et présente une incertitude de mesure sur le niveau de gris. Par conséquent, on peut lister trois sources d'incertitudes présentes sur les images : la variation de la luminance, le bruit du capteur CCD et l'interpolation subpixel. On peut noter que les options disponibles dans la CIN présentées Section 1.1.2 sont tout à fait adaptées pour s'accommoder de ces sources d'incertitudes.

### 1.2.1 Variations d'intensité lumineuse

Tout d'abord, comme cela a été vu précédemment, les variations d'intensité lumineuse durant l'essai induisent une variation de contraste et de brillance sur la série d'image. Une correction de contraste uniquement est utilisée (aucune correction de brillance). On peut toutefois remarquer que lors d'un essai sur une éprouvette de dimension millimétrique, l'expérimentateur peut aisément obtenir un éclairage uniforme dans un environnement protégé de sources lumineuses extérieures et variables (telle que le soleil). Néanmoins, la fréquence d'éclairage de la source artificielle doit être très grande devant le temps de pose de prise d'image. De ce fait, lorsque ces précautions sont prises, la brillance évolue très peu sur la série d'images, par contre du fait d'éventuelles zones d'ombre le contraste, quant à lui peut varier sensiblement (Annexe A Section 4.2.1). Prenons le cas de deux échantillons d'images prises au même état non sollicité et codés sur 16 bits en niveaux de gris (Fig. 3.3a et 3.3b). Le tracé des niveaux de gris de  $f$  en fonction de ceux de  $g$  pour les différents points de coordonnées  $x$  montre un nuage de points dont l'ajustement par une droite donne un coefficient directeur de 1 et une ordonnée à l'origine de 76 (Fig. 3.3c). Tels que définis précédemment, la correction de brillance concerne l'ordonnée à l'origine tandis que le contraste concerne la pente de la droite ajustée. On remarque que le nuage de points se répartit suivant une gerbe, étroite pour les faibles niveaux de gris et plus large pour les niveaux de gris plus élevés. De plus l'ordonnée à l'origine obtenue est très proche de zéro (la dynamique de l'image en niveaux de gris est de 65536). On justifie donc le fait de ne corriger que le contraste par la suite.

### 1.2.2 Bruit capteur

Une seconde source de variation de niveaux de gris artificielle est le bruit du capteur CCD. On considère que le bruit provenant du capteur CCD est un bruit blanc gaussien indépendant du niveaux de gris de l'image. Il est montré que l'on peut relier l'écart-type



**FIGURE 3.3:** Échantillons d'images prises pour un même état non sollicité et codées sur 16 bits en niveaux de gris,  $f$  (a) et  $g$  (b). Tracé des niveaux de gris de  $f$  en fonction de ceux de  $g$  pour tout point de coordonnées  $\mathbf{x}$  de l'image. Le nuage de points obtenu est ajusté par une fonction linéaire de pente 1 et d'ordonnée à l'origine 76 (c).

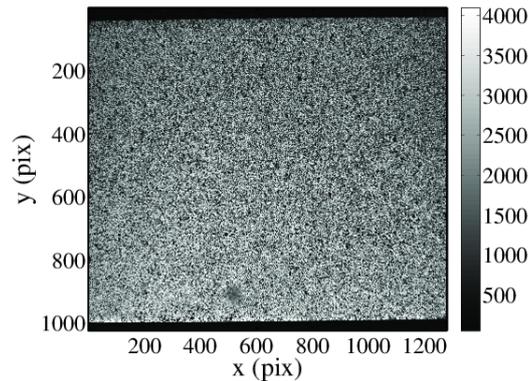
du bruit capteur,  $\sigma$ , à l'incertitude de mesure commise lorsque la seule source de bruit vient du capteur CCD [Roux et Hild, 2006]. Alors, la matrice de covariance du champ de déplacement s'écrit  $\langle u_i u_j \rangle = 2\sigma^2 M_{ij}^{-1}$  où  $\mathbf{M}$  est la matrice de corrélation correspondant à l'image de référence (et donc à la texture appliquée sur la surface observée). L'utilisation de cette formulation théorique a été validée sur un cas test présenté en Section 1.2.4 sur la figure 3.11 (voir aussi Annexe B Section 5.3).

### 1.2.3 Interpolation subpixel

Plusieurs études ont été menées afin de quantifier les erreurs de mesure causées par la CIN [Schreier *et al.*, 2000, Bornert *et al.*, 2009, Triconnet *et al.*, 2009].

Dans le cas de [Schreier *et al.*, 2000], un algorithme de CIN local est utilisé. Un cas test numérique est présenté pour lequel deux types de mouchetis, l'un possédant une distribution uniforme des niveaux de gris et l'autre une distribution bimodale, sont générés et décalés par incréments de 0,05 pixel entre 0 et 1 pixel à l'aide d'une convolution dans l'espace de Fourier. Il est montré que l'interpolation subpixel des niveaux de gris joue un rôle primordial dans l'estimation subpixel de la position d'un point de l'image. Notamment, les variations rapides de niveaux de gris (hautes fréquences) induisent de plus grandes erreurs de phases lors de l'interpolation. Il est donc préconisé de privilégier une interpolation subpixel de haut degré mais ayant peu d'erreur de phase.

Dans [Bornert *et al.*, 2009], un cas test de déformation artificielle sinusoïdale est étudié pour différents algorithmes de CIN locaux. L'image artificielle possède une texture continue discrétisée sur la grille de pixel, ce qui élimine le biais dû à l'interpolation de niveaux de gris lors de la déformation. L'influence de la taille, du recouvrement, de la transformation autorisée (translation et/ou déformation) des fenêtres d'interrogation ainsi que de l'interpolation subpixel du niveau de gris est étudié. Il est montré qu'un choix d'interpolation de type spline cubique est judicieux afin de réduire le biais et l'incertitude sur la détermination de déplacements subpixels.



**FIGURE 3.4:** Image du plan moucheté et déplacé devant l'appareil photo au cours de l'essai. L'image est codée sur 12 bits en niveaux de gris.

Néanmoins, ces études reposent sur des images artificiellement déformées sans ajout de bruit. Il en est de même pour le cas étudié dans [Triconnet *et al.*, 2009] pour un algorithme de CIN global. Il est donc indispensable de quantifier l'erreur totale commise sur la détermination de champ de déplacement subpixel suivant les différentes options choisies dans la CIN prenant en compte l'ensemble de la chaîne d'acquisition des images.

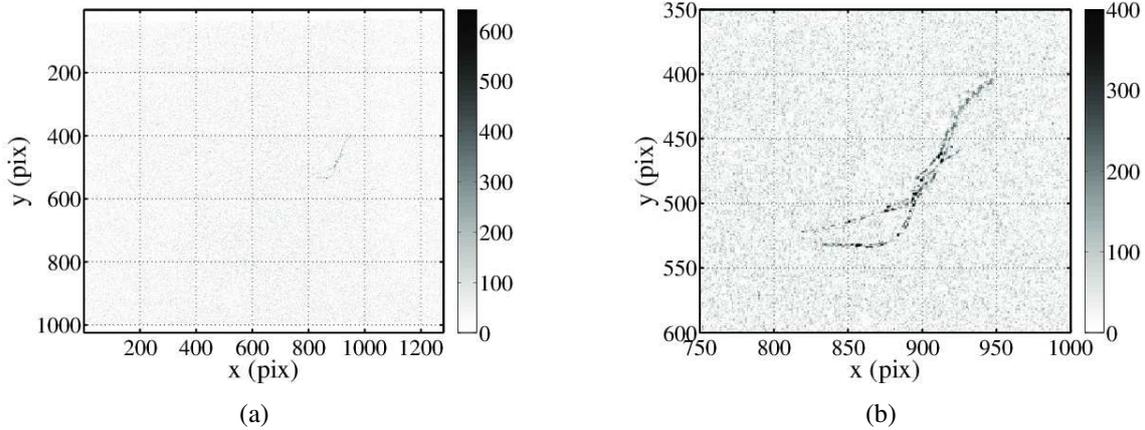
#### 1.2.4 Cas réel

Un mode opératoire expérimental a été mis en place et réalisé par X. Fayolle au LMT-Cachan. Cela consiste à déplacer un corps rigide plan moucheté perpendiculairement à l'axe optique de l'appareil photo (suivant un axe horizontal de la grille de pixels) par incrément de 0,05 pixel sur une gamme allant de 0 à 1 pixel. Pour chaque incrément de déplacement, obtenu grâce à une platine micrométrique, une image est acquise (codée sur 12 bits en niveaux de gris) (Fig. 3.4). Bien que le déplacement imposé soit contrôlé, le déplacement vrai est mesuré par CIN comme la minimisation au sens des moindres carrés des déplacements de corps rigide obtenus pour *toutes les paires d'images possible* (Table 3.1). Soit  $N$  le nombre d'images, il y a  $N(N-1)/2$  combinaisons et donc champs de déplacement disponibles pour  $N-1$  inconnues. La surdétermination du système à résoudre réduit considérablement la sensibilité au bruit pour la détermination du déplacement vrai mesuré. On remarque notamment que les déplacements mesurés suivant l'axe  $y$  ne sont pas nuls (Table 3.1). Toutefois, les valeurs de déplacement sont suffisamment faibles pour ne pas induire de biais significatif sur l'axe  $x$ . On présente donc les résultats obtenus sur l'axe  $x$  à partir des images brutes, c'est-à-dire non corrigés du déplacement suivant l'axe  $y$ .

À partir de ces données et de la série d'images, une analyse permettant de qualifier l'influence des différentes options sur la capacité de la CIN à déterminer avec précision des déplacements subpixels a été menée dans le cadre de cette thèse. Le déplacement imposé étant un mouvement de corps rigide, les deux indicateurs qualitatifs utilisés sont la différence entre la moyenne de l'ensemble des déplacements nodaux mesurés et le

**TABLE 3.1:** Déplacements imposés théoriques et déplacements vrais mesurés pour chaque incrément subpixel. Le déplacement vrai est mesuré par CIN comme la minimisation au sens des moindres carrés des déplacements de corps rigide obtenus pour *toutes les paires d'images possible*.

n° image	déplacement théorique imposé $U_x$ (pix)	déplacement vrai mesuré $U_x$ (pix)	déplacement théorique imposé $U_y$ (pix)	déplacement vrai mesuré $U_y$ (pix)
2	0,05	0,050	0	0,004
3	0,1	0,097	0	0,005
4	0,15	0,148	0	0,006
5	0,2	0,201	0	0,011
6	0,25	0,255	0	0,006
7	0,3	0,304	0	0,006
8	0,35	0,355	0	0,009
9	0,4	0,405	0	0,005
10	0,45	0,455	0	0,015
11	0,5	0,506	0	0,012
12	0,55	0,558	0	0,015
13	0,6	0,610	0	0,015
14	0,65	0,659	0	0,015
15	0,7	0,711	0	0,011
16	0,75	0,761	0	0,010
17	0,8	0,813	0	0,006
18	0,85	0,867	0	0,009
19	0,9	0,915	0	0,016
20	0,95	0,963	0	0,012
21	1	1,016	0	0,003



**FIGURE 3.5:** Valeur absolue de la différence pixel à pixel entre l'image 16 et l'image 15 (a). L'image est codée sur 12 bits en niveau de gris. Le zoom (b) révèle un défaut sur le capteur, en tronquant la dynamique à 400 niveaux de gris, on aperçoit un fil.

déplacement vrai correspondant, notée  $\langle \Delta u_m \rangle$ , et l'écart-type de ces mêmes déplacements nodaux  $\sigma_{u_m}$ .

Les paramètres sont la taille d'élément du maillage de corrélation, dont le côté de longueur  $L$  prend les valeurs  $[16, 32, 46, 64]$  pixels, la correction de contraste, active ou non, l'interpolation subpixel des niveaux de gris, la distance  $d$  utilisée pour le calcul du gradient de l'image par différence finie et le point de lecture des niveaux de gris de l'image comme défini sur la figure 3.2. La discrétisation choisie pour le calcul du gradient est de 0,5 pixel pour l'ensemble des jeux de paramètres. Les différents jeux de paramètres sont récapitulés dans les tableaux 3.2 pour l'interpolation subpixel bilinéaire et 3.3 pour l'interpolation spline cubique.

Premièrement, on peut montrer un résultat bien connu de la CIN, plus la taille d'élément augmente, plus l'incertitude de mesure diminue. La figure 3.6a montre l'évolution des incertitudes de mesure pour le jeu de paramètres  $J_1^{bil}$ . L'incertitude maximale correspond à un déplacement de 0,5 pixel. La forme caractéristique en chapeau chinois est retrouvée. On remarque un accroissement de l'incertitude pour le déplacement théorique  $U_x = 0,75$  pixel, du au dépôt d'une poussière sur l'objectif de l'appareil photo. Cette poussière est visible en traçant la valeur absolue de la différence pixel à pixel de l'image 16 correspondant à  $U_x = 0,75$  pixel et de l'image 15 correspondant à  $U_x = 0,7$  pixel. On voit clairement une zone, autour du point de coordonnées (900,450), dont les niveaux de gris ne correspondent pas à un simple mouvement de corps rigide entre les deux images (Figure 3.5a et 3.5b). La figure 3.6b montre l'évolution du biais de mesure. Le biais est minimum pour un déplacement de 0,5 pixel, car les erreurs d'interpolation sont également compensées (par symétrie), par contre pour un déplacement de 0,25 et 0,75 pixel, le biais est maximum. On note que le biais est indépendant de la taille de maille.

Pour chaque jeu de paramètres, le biais,  $\langle \Delta u_m \rangle$ , et l'incertitude,  $\sigma_{u_m}$ , sont tracés en

fonction du déplacement imposé  $U_x$  exprimé en pixel pour une taille de maille de 16 pixels (Fig. 3.7).

jeu de paramètres	$J_1^{bil}$	$J_2^{bil}$	$J_3^{bil}$	$J_4^{bil}$	$J_5^{bil}$	$J_6^{bil}$
Correction contraste	non	non	oui	non	oui	oui
Interpolation	bilinéaire	bilinéaire	bilinéaire	bilinéaire	bilinéaire	bilinéaire
$d$	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.1
Point de lecture	□	□	□	●	●	●

**TABLE 3.2:** Caractéristiques de chaque jeu de paramètres étudié pour une interpolation subpixel bilinéaire. Le point de lecture □ (respectivement ●) correspond à une lecture au centre du pixel (respectivement au demi pixel) (Fig 3.2)

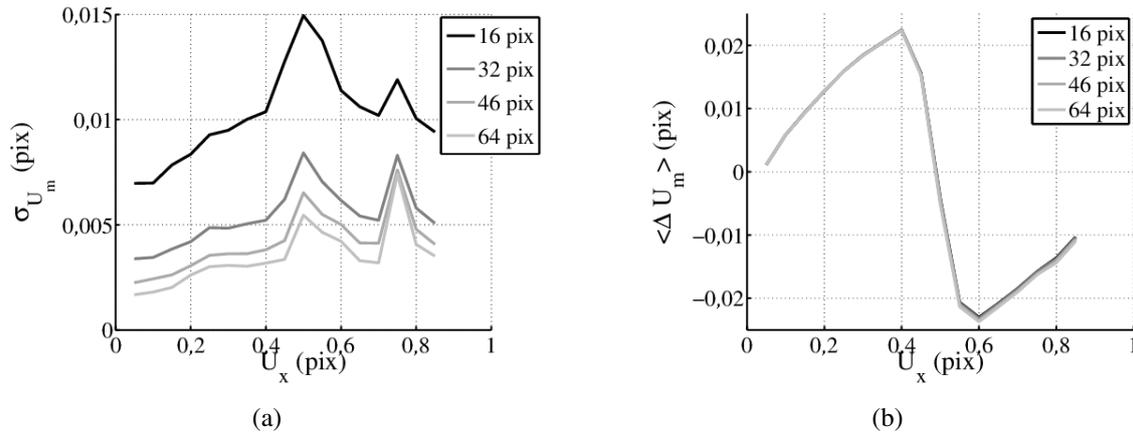
jeu de paramètres	$J_1^{cub}$	$J_2^{cub}$	$J_3^{cub}$	$J_4^{cub}$	$J_5^{cub}$	$J_6^{cub}$
Correction contraste	non	non	oui	non	oui	oui
Interpolation	cubique	cubique	cubique	cubique	cubique	cubique
$d$	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.1
Point de lecture	□	□	□	●	●	●

**TABLE 3.3:** Caractéristiques de chaque jeu de paramètres étudiés pour une interpolation subpixel spline cubique.

Deuxièmement, on peut déjà remarquer que pour ce test, l'influence de la correction de contraste et de la lecture des niveaux de gris décalée d'un demi-pixel est très faible par rapport aux autres options. Le choix de  $d$ , distance définie pour le calcul du gradient de l'image par différence finie, est beaucoup plus déterminante. Une distance de 0,5 pixel donne de meilleurs résultats. On note aussi que le choix d'une interpolation subpixel des niveaux de gris de type spline cubique réduit fortement les erreurs systématiques commises. On peut voir cela en traçant sur une même figure les résultats correspondant aux jeux,  $J_1^{bil}$ ,  $J_5^{bil}$ ,  $J_1^{cub}$ ,  $J_5^{cub}$  (Fig. 3.8).

Ces résultats peuvent être comparés avec l'analyse d'incertitude faite en décalant artificiellement l'image de 0,5 pixel à l'aide d'une convolution dans l'espace de Fourier (Fig. 3.9). Les niveaux d'incertitude sont bien plus faibles dans le cas numérique que dans le cas réel du fait que dans ce dernier l'ensemble de la chaîne de mesure est prise en compte. Notamment, le bruit capteur n'est pas inclus dans l'analyse numérique.

Comme défini dans la section 1.2.2, il est possible de déterminer l'incertitude sur le champ de déplacement due au bruit capteur uniquement. Prenons dans le cas présent l'ensemble des images prises pour un décalage incrémental de 0,05 pixel. Le bruit capteur peut être déterminé en corrigeant chaque image de son déplacement vrai afin de



**FIGURE 3.6:** Incertitude (a) et biais (b) pour le jeu de paramètres  $J_1^{bil}$  pour différentes tailles de maille  $L$  allant de 16 à 64 pixels.

la ramener sur l'image initiale. Une fois cela effectué, la différence pixel à pixel de deux images permet d'obtenir une représentation du bruit capteur, défini par son écart-type,  $\sigma$  et sa moyenne nulle telle que  $\sqrt{2}\sigma = 78$  pixels (Fig. 3.10). La carte des incertitudes calculées, telle que pour chaque nœud  $i$  du maillage l'incertitude est donnée par  $\langle u_i u_i \rangle = 2\sigma^2 M_{ii}^{-1}$  [Roux et Hild, 2006], est montrée sur la figure 3.11. On remarque que la valeur moyenne,  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0,01$  pixel, est proche de la valeur minimale observée sur la figure 3.8(a) correspondant à un déplacement théorique de 0,05 pixel. En effet, pour un déplacement nul, seul le bruit capteur et l'éventuelle variation de luminosité induisent une incertitude sur le champ mesuré.

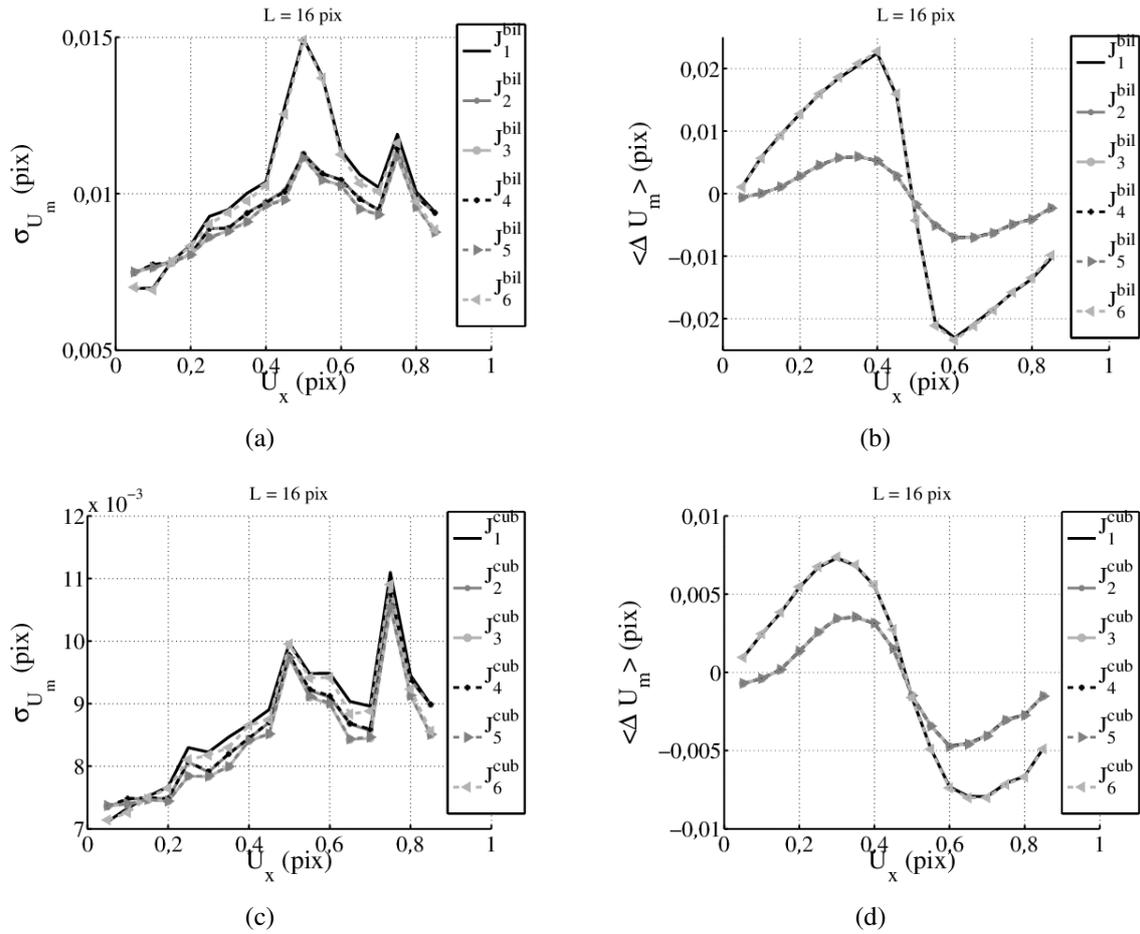
Finalement, dans la suite, les résultats de champs de déplacement mesurés sont obtenus en prenant le jeu de paramètres de CIN  $J_5^{cub}$ . À titre d'exemple, en prenant les paramètres du jeu  $J_5^{cub}$  et une discrétisation de 0,125 pixel au lieu d'une discrétisation de 0,5 pixel, le gain sur l'incertitude de mesure est très faible, et même négligeable sur le biais, pour un temps de calcul multiplié par onze (Fig. 3.12).

De la sorte, la mesure de champ de déplacement ainsi que les incertitudes associées sont caractérisées. Afin d'obtenir les paramètres matériau du composite étudié, il est nécessaire de choisir une méthode d'identification basée sur la mesure de champ.

## 2 Les méthodes d'identification

### 2.1 Cadre général

L'identification de paramètres constitutifs se présente comme un problème inverse. Certaines informations manquantes ne permettent pas de résoudre le problème direct



**FIGURE 3.7:** Incertitude (a) (respectivement (c)) et biais (b) (respectivement (d)) pour les jeux de paramètres avec interpolation subpixel bilinéaire (respectivement spline cubique).

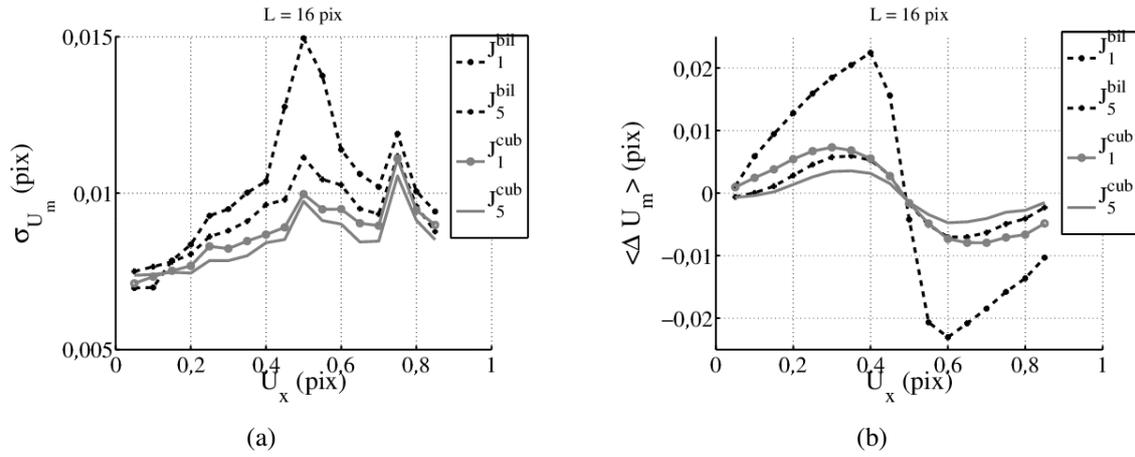


FIGURE 3.8: Incertitude (a) et biais (b) pour les jeux de paramètres  $J_1^{bil}$ ,  $J_5^{bil}$ ,  $J_1^{cub}$ ,  $J_5^{cub}$ .

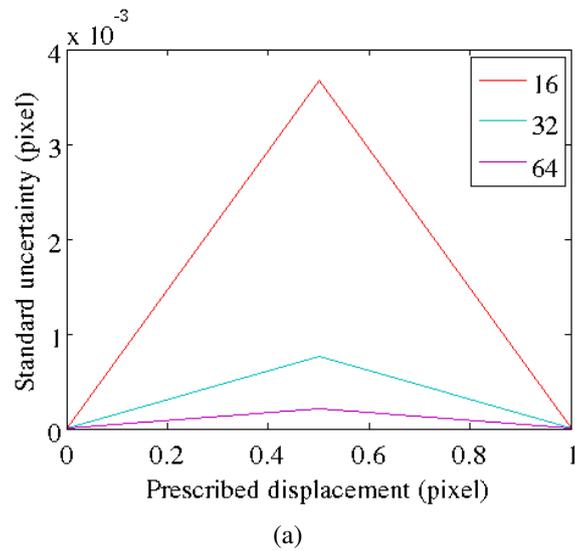
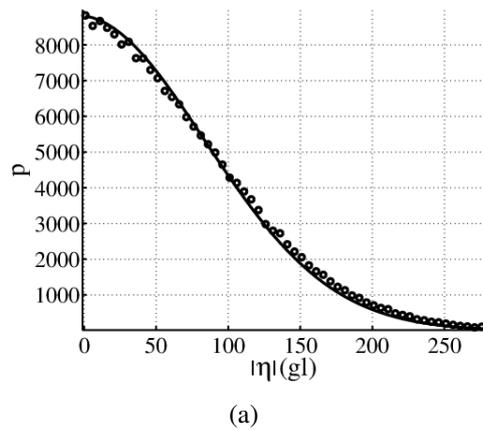
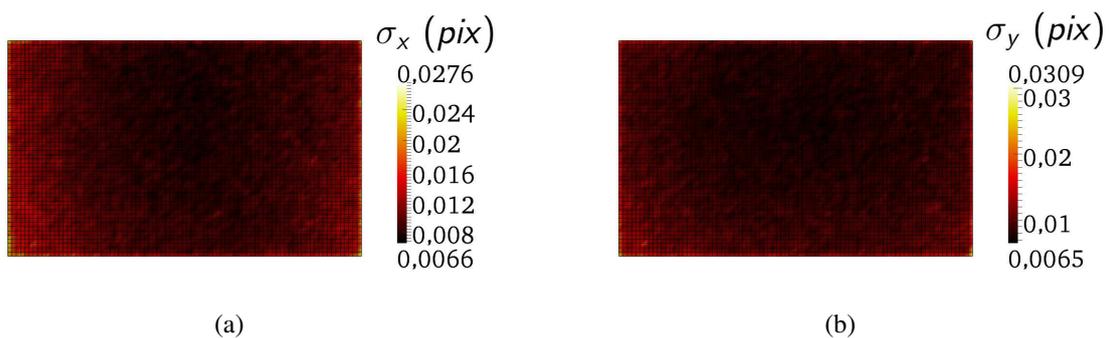


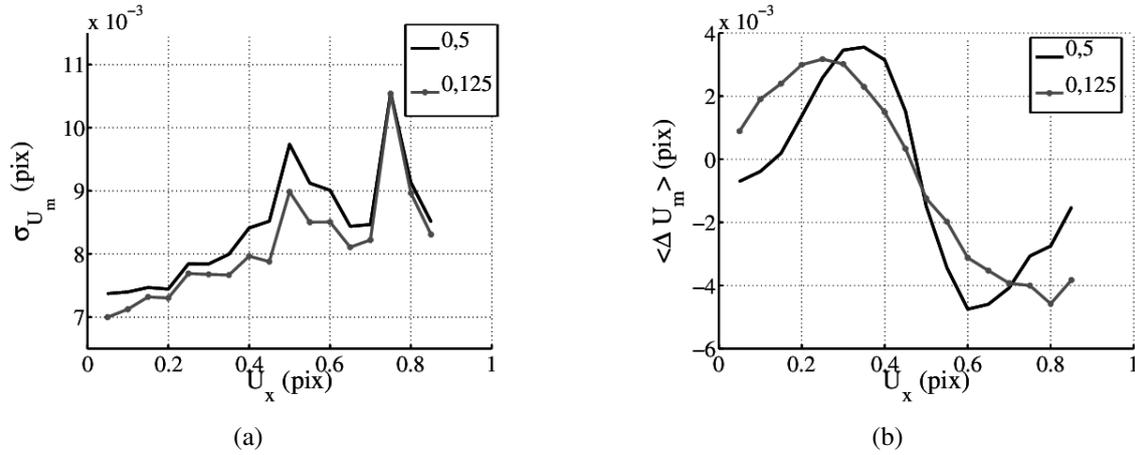
FIGURE 3.9: Incertitude pour une image artificiellement décalée.



**FIGURE 3.10:** Histogramme du bruit capteur, représenté par les  $\circ$ , obtenu par différence pixel à pixel de deux images prises au même état de déformation. Une gaussienne d'écart-type 78 pixels est tracée en trait plein.



**FIGURE 3.11:** Carte d'incertitude suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $y$  (b) due au bruit du capteur CCD.



**FIGURE 3.12:** Illustration du gain sur l'incertitude de mesure (a) et sur le biais (b) pour une discrétisation de 0,125 et de 0,5 pixel. Le temps de calcul,  $t_c$ , est multiplié par 11.

défini sur le domaine  $\Omega$ , dont la frontière est  $\partial\Omega = S_u \cup S_f$ , par les équations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} & \text{sur } S_f, \end{cases} \quad (3.9)$$

écrites dans l'hypothèse où aucune force de volume n'est présente, les équations de compatibilité

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } S_u, \end{cases} \quad (3.10)$$

et la relation de comportement

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.11)$$

Ces informations manquantes sont généralement des paramètres matériau, introduit dans la relation de comportement postulée, mais cela peut aussi être des conditions limites en effort ou en déplacement, ou même la géométrie du domaine  $\Omega$ . Il est donc nécessaire d'avoir des informations supplémentaires pour résoudre le problème EF direct. On suppose que ces dernières sont obtenues par mesure de champs cinématiques.

Prenons le cas le plus généralement rencontré où les inconnues du problème sont les paramètres constitutifs du matériau, c'est-à-dire  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  avec  $\boldsymbol{\theta} = \theta_1, \dots, \theta_m$ . Dans la plupart des cas, les champs de déplacement et de contraintes sont hétérogènes et le lien entre les quantités mesurées et les paramètres constitutifs sont implicites à travers les équations (3.9, 3.10, 3.11) et sont difficiles à exprimer explicitement. Il est donc indispensable de disposer d'un champ cinématique mesuré lors de l'essai. Récemment, plusieurs méthodes d'identification ont été développées afin de résoudre ces problèmes [Bonnet et Constantinescu, 2005, Avril *et al.*, 2008].

Premièrement, la méthode de recalage par éléments finis a été appliquée dans le cas de comportements anisotropes élastiques [Lecompte *et al.*, 2007, Witz *et al.*, 2008],

isotropes élasto-plastiques [Meuwissen *et al.*, 1998, Pottier *et al.*, 2011] ou isotropes visco-plastiques [Mahnken et Stein, 1996a, Mahnken et Stein, 1996b].

Deuxièmement, la méthode des champs virtuels a été appliquée sur des modèles de comportement linéaires [Avril et Pierron, 2007, Kashif *et al.*, 2008] ou non-linéaires [Chalal *et al.*, 2006].

Troisièmement, la méthode de l'écart à l'équilibre a été utilisée pour identifier des propriétés élastiques à petites échelles par exemple [Amiot *et al.*, 2007] ou bien des champs d'endommagement [Claire *et al.*, 2004, Crouzeix *et al.*, 2009].

Quatrièmement, la méthode de l'erreur en relation de comportement a été appliquée dans le cadre de l'élasticité [Florentin et Lubineau, 2010], le cadre mathématique dans lequel cette méthode peut s'appliquer à un comportement anisotrope a été étudié [Constantinescu, 1995], ainsi que son application à un cas réel [Geymonat *et al.*, 2002].

Et enfin, la méthode de l'écart à la réciprocité a été utilisée pour l'identification de fissure par exemple [Ben Abda *et al.*, 1999, Bui *et al.*, 2004].

Pour certaines études, une attention particulière a été portée à la prise en compte de l'effet du bruit de mesure sur l'identification [Avril *et al.*, 2004, Kashif *et al.*, 2008, Réthoré *et al.*, 2008, Leclerc *et al.*, 2009, Réthoré, 2010, Gras *et al.*, 2012].

### 2.1.1 Recalage par élément finis

La méthode la plus générique est le recalage par éléments finis (ou FEMU, Finite Element Model Updating). Cela consiste à minimiser l'écart entre un champ cinématique mesuré et un champ cinématique calculé, de même nature, par itérations successives sur les paramètres à identifier implémentés dans le calcul par éléments finis (EF). Un jeu de paramètres initial est supposé, puis plusieurs calculs directs actualisés exploitant la relation  $K(\theta)U = R$ , version numérique du problème linéaire défini par les équations (3.9, 3.10, 3.11) où  $K$  est la matrice de rigidité,  $U$  le champ de déplacement et  $R$  les forces de réaction aux nœuds, sont effectués. Le champ cinématique peut consister en un champ de déplacement ou de déformation, il peut être défini sur tout ou partie du domaine  $\Omega$ , ce qui confère une grande flexibilité à cette méthode.

## 2.2 Choix de la FEMU

La méthode choisie est la FEMU décrite de manière générale précédemment et initiée par les travaux de [Kavanagh et Clough, 1971]. Elle est basée sur une mesure de champ, ici un champ de déplacement. En parallèle, un calcul par éléments finis dans lequel les conditions aux limites représentent au mieux les conditions de l'essai et des valeurs initiales des paramètres identifiés sont introduites, pour obtenir un champ de déplacement. La minimisation de l'écart entre le champ de déplacement mesuré et le champ de déplacement calculé par itérations sur les paramètres du calcul éléments finis conduit à l'obtention du jeu de paramètres identifiés représentant au mieux l'essai pour la modélisation choisie (Figure 3.13). Pour être au plus près de la mesure, la comparaison des champs de déplacement est retenue. On limite, de ce fait, l'am-

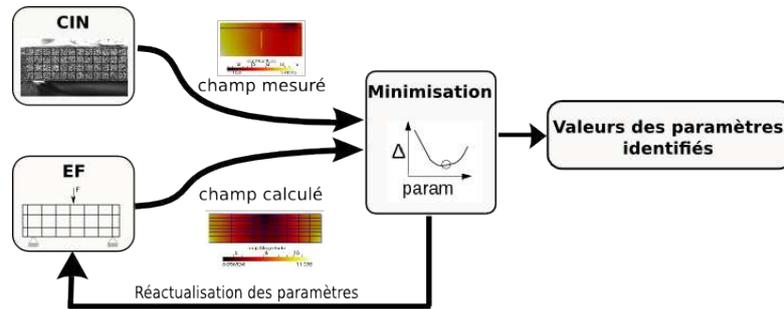


FIGURE 3.13: Schéma de principe de la méthode d'identification FEMU.

plification du bruit de mesure lors de la dérivation permettant d'obtenir un champ de déformation [Lecompte *et al.*, 2007, Grédiac, 2004]. La fonctionnelle à minimiser est donc

$$\mathcal{R}^2 = (\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\})^t [\mathbf{C}]^{-1} (\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\}) \quad (3.12)$$

Le système est pondéré par la matrice  $[\mathbf{C}]^{-1}$ . Le bruit de mesure est l'une des principales sources d'incertitudes, il consiste en une incertitude sur le déplacement mesuré aux nœuds du maillage et est un des inconvénients majeur de cette méthode. Du fait que l'on impose la continuité du champ de déplacement mesuré (à travers la formulation globale de la CIN basée sur les fonctions de forme de type EF), une incertitude au nœud  $i$  crée par conséquent aussi une incertitude au nœud  $j$ . Cela est caractérisé à travers la matrice de covariance du champ de déplacement,  $\langle u_i^{me} u_j^{me} \rangle$ . Du fait que le champ de déplacement mesuré soit pris comme référence pour la minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{R}^2$ , il est naturel de choisir une matrice poids prenant en compte l'incertitude aux nœuds du maillage due au bruit. La matrice  $\mathbf{C}$  est donc prise comme la matrice de covariance du champ de déplacement mesuré,  $[\mathbf{C}] = \langle u_i^{me} u_j^{me} \rangle$ . Or on peut aussi lier cette matrice de covariance à la matrice de corrélation  $\mathbf{M}$  et au bruit du capteur CCD [Roux et Hild, 2006]. Ainsi, la matrice de pondération n'est autre que la matrice de corrélation  $\mathbf{M}$ .

Dans le cas de la comparaison directe des champs de déplacement, les conditions aux limites introduites dans le modèle éléments finis doivent être définies avec attention pour correspondre au mieux à l'expérience. Du fait que le champ de déplacement mesuré est pris comme référence pour l'identification des paramètres matériau, il est important de maîtriser complètement la chaîne d'obtention de ce champ. Les choix retenus pour la CIN devront permettre d'obtenir un champ de déplacement le plus proche possible de la réalité. Pour cela, il est aussi nécessaire de quantifier l'incertitude associée à ce champ de déplacement (Section 1.2), et son influence sur l'identification des paramètres matériau détaillée par la suite.

### 3 La plateforme LMTpp

L'identification résulte, comme on l'a vu, d'un dialogue entre les mesures et la modélisation. Habituellement, la simulation et les mesures sont effectuées avec des logi-

ciels différents. En utilisant la méthode d'identification appelée FEMU et une mesure de champs telle que la CIN, on a besoin d'ajuster le champ de déplacement obtenu à partir de l'expérience sur le calcul, ou vice versa [Van Campen, 1992]. En conséquence, cette opération doit être prise en compte avant d'effectuer l'expérience, par exemple, en plaçant des points de référence qui seront situés dans la simulation par éléments finis. Cela introduit des erreurs d'interpolation et d'incertitude. Ce manque de précision est directement lié à la résolution de l'image. Néanmoins, en utilisant la CIN globale, le formalisme de description du champ de déplacement est le même pour la mesure et pour le calcul et est basé sur les fonctions de forme de type éléments finis. Il semble donc approprié de travailler dans un environnement commun et d'utiliser le même maillage pour réaliser la mesure de champ et le calcul EF afin d'atténuer les erreurs d'interpolation et de bénéficier d'informations cinématiques sur l'ensemble de la zone observée et modélisée.

L'environnement spécifique est un code C++ développé en interne, la plateforme  $LMT_{pp}$  [Leclerc, 2005, Leclerc, 2007]. Toutefois, nous verrons aussi par la suite, un cas pour lequel la zone observée ne coïncide pas avec la zone modélisée et le maillage utilisé pour la CIN diffère du maillage EF pour être adapté à la mésostructure du matériau.



# Chapitre 4

## Essai de flexion 3pts sur coupon court

*Dans ce chapitre, la méthode d'identification est validée sur un cas simplifié du problème défini pour le pied d'aube. Le matériau est considéré homogène et consiste en des éprouvettes de type standard.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Validation</b> . . . . .	<b>36</b>
1.1	Description de l'essai . . . . .	36
1.2	Modélisation . . . . .	38
1.3	Résumé de l'article . . . . .	38
1.4	Robustesse de l'identification . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Interface</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1	Matériau . . . . .	41
2.2	Description de l'essai . . . . .	43
2.3	Méthode numérique . . . . .	47
2.4	Modélisation avec interface parfaite . . . . .	50
2.5	Modélisation avec interface élastique . . . . .	54

---

# 1 Validation

La problématique générale de l'identification à partir d'essais sur pied d'aube a été présentée. Pour y répondre, nous disposons d'outils dont le fonctionnement a été décrit précédemment. Il convient, à présent, d'associer ces outils afin de mener une démarche d'identification depuis l'essai réalisé jusqu'à l'obtention de modules élastiques en exploitant la CIN. La prise en compte de l'ensemble des étapes servant à l'identification permet d'avoir une maîtrise de chaque outil participant à l'obtention du résultat et d'avoir une estimation raisonnée de sa qualité.

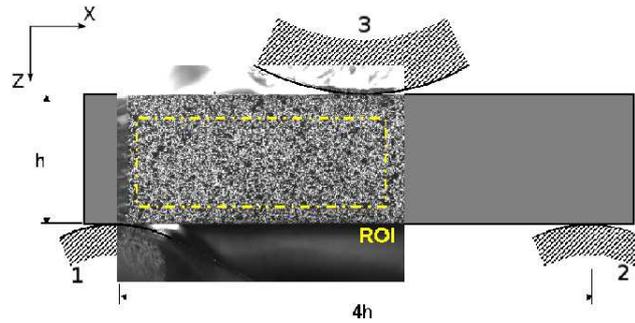
Dans ce chapitre, un premier essai validant la méthode est présenté. On considère un composite tissé 3D dont le tissage est périodique, duquel on extrait deux éprouvettes de type coupon court décrites en Section 1.4 et nommées par la suite  $C6_1$  et  $C6_2$ . Pour cette validation, l'objectif est l'identification du module de cisaillement hors-plan,  $G_{13}$ , du modèle orthotrope macroscopique équivalent du matériau composite. Une large part de ce travail est aussi décrite en annexe A, article soumis à *Journal of Experimental Mechanics*, vers lequel cette partie renvoie.

## 1.1 Description de l'essai

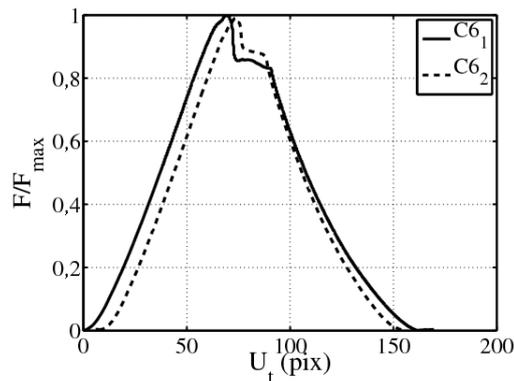
Afin de solliciter l'éprouvette en cisaillement, un montage d'essai de flexion à trois points rapprochés est utilisé. Contrairement à l'essai classiquement utilisé pour caractériser le cisaillement, l'essai de Iosipescu qui sollicite un plan unique, ce montage permet d'avoir une zone étendue entre l'appui central et les appuis extérieurs sollicitée en cisaillement. Considérant le matériau dont la mésostructure est grossière et le modèle homogène équivalent proposé, cela permet d'avoir une meilleure estimation des paramètres matériau correspondant à la modélisation.

Le montage consiste en deux appuis cylindriques parallèles, numérotés 1 et 2, sur lesquels repose l'éprouvette. Ceux-ci sont en liaison pivot par rapport au montage fixé à la traverse de la machine de traction. Un troisième appui central cylindrique, numéroté 3, en liaison rotule par rapport au montage vient en contact sur la face supérieure de l'éprouvette. L'effort est transmis à l'éprouvette par le déplacement de la traverse et est mesuré par la cellule d'effort située au niveau de l'appui central. Afin de caractériser le cisaillement hors-plan, l'éprouvette est positionnée de façon à avoir les torons de sens chaîne orientés horizontalement et ceux de sens trame, perpendiculaires aux derniers et parallèles aux appuis. La face de l'éprouvette observée lors de l'essai, le plan  $xz$ , correspond donc au plan 13 de la modélisation orthotrope du composite. Cette face est mouchetée, sur sa moitié gauche, à l'aide de peintures noire et blanche. L'essai est piloté en déplacement avec une vitesse de chargement faible,  $0,5 \text{ mm.min}^{-1}$ . L'effort résultant sur l'axe  $z$  est mesuré par la cellule d'effort. Un schéma de principe de l'essai est présenté sur la figure 4.1.

L'évolution de l'effort mesuré par la cellule d'effort en fonction du déplacement imposé de la traverse est tracée sur la figure 4.2. Pour les deux éprouvettes,  $C6_1$  et  $C6_2$ , dans la première partie de la courbe, il y a un durcissement apparent dû au position-

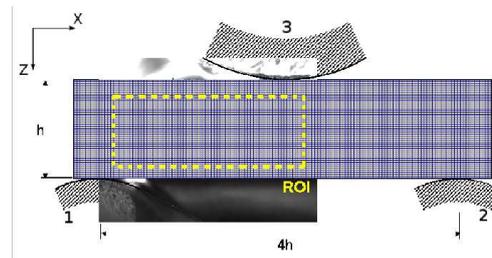


**FIGURE 4.1:** Schéma de principe de l'essai de flexion à trois points rapprochés. La face observée de l'éprouvette correspond au plan  $xz$  du composite tissé 3D, les torons de chaîne étant orientés suivant l'axe  $x$  et les torons de trame suivant l'axe  $y$ .



**FIGURE 4.2:** Effort mesuré, normalisé par la charge maximale, en fonction du déplacement imposé à la traverse,  $U_t$ , exprimé en pixel pour des raisons de confidentialité, pour l'éprouvette  $C6_1$  (respectivement  $C6_2$ ) en trait plein (respectivement en trait pointillé).

nement de l'éprouvette dans le montage et aux déformations localisées au niveau des appuis, principalement l'appui central sur lequel s'applique l'effort maximal. Ensuite, une charge linéaire est visible jusqu'à un niveau d'effort appliqué proche de l'effort maximal. Ici, selon un mode d'endommagement classiquement observé dans les composites, les décohésions entre fibres et matrice créent un adoucissement progressif sur la courbe macroscopique, suivi d'une rupture brutale faisant chuter l'effort mesuré et correspondant à une rupture multiple de fibre ou à la rupture d'un toron. Enfin, l'éprouvette est déchargée correspondant à un déplacement de la traverse d'environ 150 pixels. Au vu de cette courbe de chargement macroscopique, et des objectifs fixés d'identifier le module de cisaillement élastique macroscopique du composite sollicité, la partie linéaire du chargement sera étudiée. Afin d'avoir un aperçu du comportement de la méthode d'identification et du module identifié, la partie correspondant à l'adoucissement macroscopique sera aussi considérée dans l'étude.



**FIGURE 4.3:** Maillage EF 2D modélisant l'ensemble de l'éprouvette superposé à la zone observée pour la CIN. Les appuis sont schématisés par des arcs de cercle hachurés et numérotés 1, 2 et 3.

## 1.2 Modélisation

Le modèle de comportement macroscopique retenu est élastique orthotrope. Une hypothèse de déformation plane, justifiée par l'épaisseur de l'éprouvette importante devant sa hauteur et sa longueur, est utilisée pour obtenir le comportement 2D à partir de la modélisation 3D et des paramètres matériau 3D à identifier définis dans la matrice de souplesse  $A$  (eq. 1.1).

Le maillage EF recouvre l'ensemble de la tranche de l'éprouvette et consiste en une zone rectangulaire maillée avec des éléments quadrangulaires (Fig. 4.3). Les appuis ne sont pas pris en compte dans la modélisation, ce qui permet de s'affranchir de la problématique de contact entre appuis et éprouvette. Les conditions aux limites imposées au calcul EF sont réparties uniformément sur les nœuds pour les déplacements imposés ou sur les éléments pour les efforts imposés. Les nœuds ou éléments sur lesquels s'appliquent les conditions aux limites sont sélectionnés à partir de l'observation de l'image sur laquelle on définit la zone de contact. Elles consistent en un déplacement imposé sur  $x$  et  $z$  (respectivement  $z$ ) au niveau de l'appui 1 (respectivement 2) et un effort imposé sur  $x$  et  $z$  sur l'appui central 3. Les paramètres identifiés sont le module de cisaillement,  $G_{13}$ , les conditions limites en déplacement et l'effort imposé suivant l'axe  $x$ . Quant à l'effort imposé sur l'axe  $z$ , il est fixé égal à l'effort mesuré au cours de l'essai.

Les conditions aux limites imposées dans le calcul EF sont identifiées du fait que la zone observée, et par conséquent le champ de déplacement mesuré, ne recouvre pas l'ensemble de l'éprouvette modélisée. Il est à noter que ces conditions aux limites identifiées correspondent à une modélisation élastique. Or, du fait des larges déformations mesurées aux abords des appuis et notamment de l'appui central, on peut raisonnablement supposer que cette zone du composite subit des niveaux de déformations au delà de l'élasticité du matériau. On choisit donc d'occulter ces régions pour l'identification des différents paramètres matériau et conditions aux limites.

## 1.3 Résumé de l'article

Dans l'article, une première partie décrit l'essai de flexion trois points. Pour cela les dimensions de l'éprouvette, rapportées à la longueur  $h$  sont données, le montage est ex-

pliqué à travers le schéma de la figure 4.1 ainsi que l'instrumentation de l'essai, la mesure de l'émission acoustique d'une part et la préparation de l'éprouvette et du matériel d'acquisition d'images en vue d'obtenir une mesure de champ par CIN d'autre part. Les images sont prises avec une caméra d'acquisition, SENSICAM<sup>TM</sup>, ayant une résolution de  $1376 \times 1040$  pixels codés en niveaux de gris sur 12 bits.

Une seconde partie présente la méthode de CIN globale utilisée et les incertitudes associées obtenues de façon numérique par décalage artificiel de l'image d'une valeur de 0,5 pixel dans les deux directions du plan observé.

Ensuite, la méthode d'identification (FEMU) est décrite ainsi que la modélisation du calcul EF nécessaire à la résolution du problème direct à chaque itération. Une étude d'incertitude est menée afin de caractériser la précision de l'identification. On étudie la propagation du bruit du capteur CCD à travers la méthode d'identification et son impact sur les paramètres identifiés. Pour cela, une approche statistique basée sur un cas test d'une image déformée artificiellement est menée. Le champ de déplacement utilisé correspond à l'essai de flexion trois points et est obtenu par calcul EF. L'image déformée est ensuite entachée d'un bruit sur le niveau de gris ayant les caractéristiques (moyenne et écart-type) du bruit capteur mesuré sur les images. Deux cents tirages sont effectués afin de construire deux cents images déformées. La dispersion de module de cisaillement identifié à partir de ces images donne un écart-type de 1,5%.

Finalement, l'identification sur le cas réel est réalisée pour une paire d'image correspondant à une charge nulle pour l'image de référence et une charge de 0,2 fois la charge maximale pour l'image déformée. Un effet de la taille de maille du maillage de mesure est observé. Une étude paramétrique, faisant varier la taille de maille suivant les deux directions du plan  $xz$ , montre que la taille de maille idéale (c'est-à-dire pour laquelle le résidu d'identification normalisé,  $R_n = \sqrt{[(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})]/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})}$ , est le plus faible) correspond à la période de la mésostructure sous-jacente suivant la direction  $z$ . Pour ce qui est de la direction  $x$ , la périodicité de la mésostructure étant trop importante vis-à-vis de la zone observée, la taille de maille correspondante au minimum du résidu, permet de décrire assez fidèlement la cinématique de l'essai tout en restant à une description macroscopique du champ de déplacement. Pour ce maillage de mesure, le module de cisaillement identifié est de  $0,84G_{13_0}$ . Le module de cisaillement nominal,  $G_{13_0}$ , correspond à la valeur moyenne obtenu sur six essais de type Iosipescu.

On voit donc que l'identification des paramètres matériau du comportement macroscopique sur une telle éprouvette est fortement dépendante de la mésostructure. Il convient donc de prendre en compte cela lors de la mesure du champ de déplacement, sur laquelle se fonde l'identification, afin d'obtenir un filtrage naturel des variations dues à la mésostructure. Le résultat d'identification est validé par la carte des résidus de déplacement  $R = \mathbf{u}^{ca} - \mathbf{u}^{me}$  (Fig. 4.4). La dynamique faible des résidus indique que le comportement identifié correspond de manière assez fidèle à la mesure effectuée pendant l'essai.

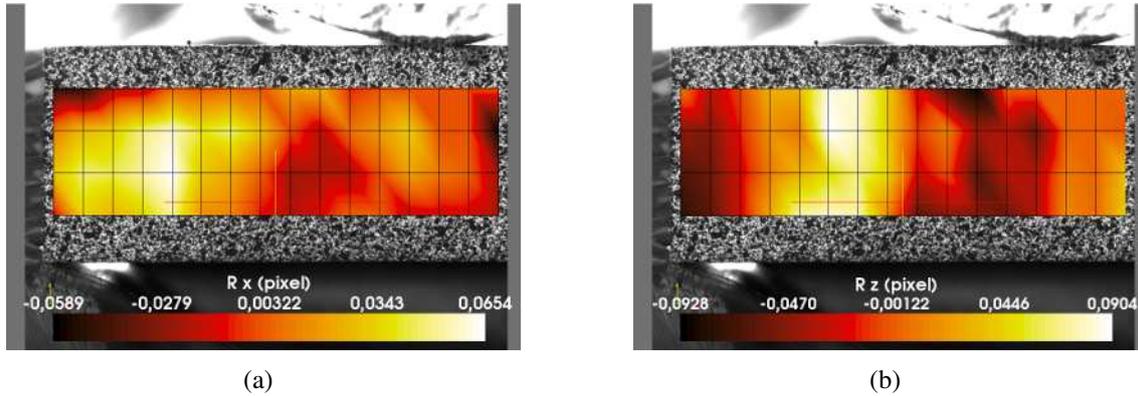


FIGURE 4.4: Cartes des résidus d'identification,  $R = \mathbf{u}^{ca} - \mathbf{u}^{me}$ , suivant la direction  $x$  (a) et  $z$  (b) tracées pour le maillage de CIN adapté à la mésostructure.

## 1.4 Robustesse de l'identification

L'identification menée pour une paire d'image, et correspondante à un niveau de chargement donné, peut être aussi menée pour l'ensemble des paires d'images prises au cours de l'essai afin d'avoir l'évolution du module de cisaillement identifié au cours de la charge. La figure 4.2 montre l'évolution de la charge mesurée en fonction du déplacement imposé à la traverse. Afin de s'affranchir de la partie non linéaire présente au début de l'essai, l'image de référence prise pour l'identification sur l'ensemble de la charge élastique correspond à un chargement de 3,5% de la charge maximale. Cela est effectué pour les deux éprouvettes testées,  $C6_1$  et  $C6_2$ . De plus, afin de garantir une matrice de souplesse définie positive et de travailler sur des sensibilités relatives, le logarithme du module de cisaillement,  $\ln(G_{13})$ , est identifié. Cela permet d'avoir une évolution possible du module de cisaillement sur l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  uniquement.

La figure 4.5a montre l'évolution du rapport du module de cisaillement identifié,  $G_{13}$ , sur le module de cisaillement nominal,  $G_{130}$ , en fonction de la charge appliquée, adimensionnée par rapport à la charge maximale prescrite durant l'essai. Au début de la charge, le faible ratio signal/bruit induit une dispersion sur le module identifié. Puis, un premier plateau peut être identifié jusqu'au chargement  $F/F_{max} = 0,5$ . La valeur correspondante du module de cisaillement adimensionné est comprise entre 0,75 et 0,8. On note une très bonne concordance entre les deux essais. Ensuite, pour l'éprouvette  $C6_1$ , cette valeur décroît petit à petit jusqu'au chargement  $F/F_{max} = 0,95$  correspondant à un fort endommagement repéré grâce à l'émission de salves acoustiques de haute amplitude ( $> 80$  dB), pour lequel la valeur identifiée chute brusquement. Pour l'éprouvette  $C6_2$ , le module identifié décroît lui aussi mais, on n'observe pas de variation brusque autour de  $F/F_{max} = 0,5$ .

La figure 4.5b montre aussi, pour  $F/F_{max} = 0,5$ , ce changement brusque dans les déplacements imposés identifiés suivant l'axe  $z$  pour l'éprouvette  $C6_1$ . On remarque aussi une petite différence sur les valeurs de déplacement identifiées suivant l'axe  $z$  entre les deux appuis extérieurs. Cette différence met en avant l'asymétrie de l'essai. Les

déplacements identifiés suivant l'axe  $x$  pour les deux essais sur les éprouvettes  $C6_1$  et  $C6_2$  montre un premier régime dans lequel il y a un glissement de l'éprouvette sur l'appui (dans le cas où l'on considère que l'appui ne se déplace que suivant l'axe  $x$  dans l'image, ce qui n'est peut-être pas le cas) jusqu'au chargement  $F/F_{max} = 0,3$  ; puis un deuxième régime dans lequel le déplacement suivant l'axe  $x$  de l'éprouvette se stabilise.

La figure 4.5c confirme l'asymétrie de l'essai du fait que le rapport entre l'effort suivant la direction  $x$  et l'effort mesuré est de l'ordre de 20%. Cela n'est pas négligeable et il est essentiel de le prendre en compte dans la modélisation afin d'être au plus près de l'essai réalisé.

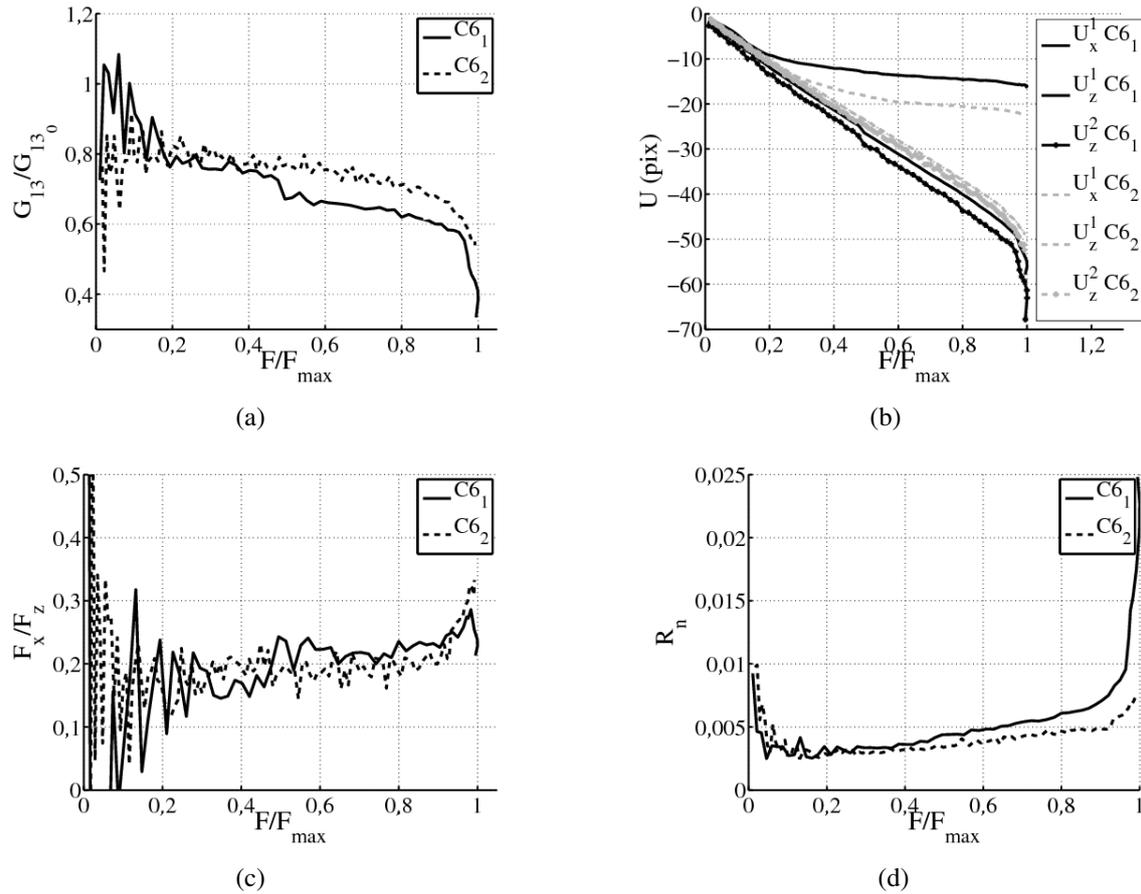
La figure 4.5d montre l'évolution du résidu adimensionné, calculé comme suit  $R_n = \sqrt{(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})}$  par rapport à la charge appliquée adimensionnée. Plus la sollicitation est importante, plus le résidu adimensionné augmente, soulignant l'écart entre la modélisation choisie et le comportement effectif du matériau. Notamment, le modèle élastique est-il valable sur l'ensemble de la charge macroscopique linéaire ? Nous allons voir dans la partie suivante l'importance de la bonne prise en compte de la modélisation pour décrire correctement le comportement du matériau.

## 2 Interface

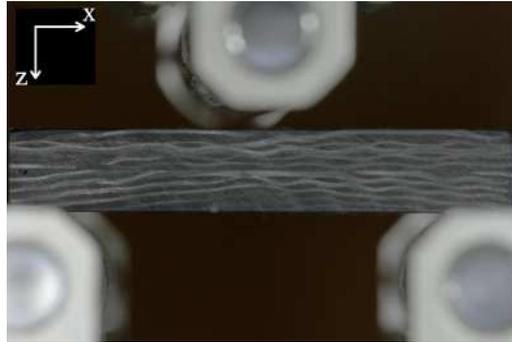
Grâce à l'étude précédente pour laquelle le matériau considéré était périodique et modélisé par un matériau équivalent homogène, la méthode d'identification a été validée. Néanmoins, dans le cas du pied d'aube, le tissage évolue au sein de la pièce. De ce fait, la modélisation élastique proposée pour décrire le comportement du pied, décrite plus précisément dans la Section 1, se compose de différentes zones ayant des paramètres matériau distincts. De plus, le modèle homogène équivalent implémenté pour chaque zone dépend fortement de la mésostructure sous-jacente. Par conséquent, il est proposé d'étudier, sur un cas test, l'influence que peut avoir la mésostructure, et surtout la modélisation que l'on en fait, sur les paramètres matériau identifiés.

### 2.1 Matériau

Le matériau proposé consiste en un assemblage par collage de deux composites tissés 3D de type angle interlock. Des torons en fibres de carbone de 24K et une matrice epoxy forment le composite. Entre les deux composites, seul diffère le tissage hors-plan. La période de tissage est constante et égale à 52 mm. Un premier tissage possède 100% de torons de chaîne venant entrelacer les torons de trame, le second seulement 30%. On les dénommera par la suite comme le composite 100% et le composite 30%. Je remercie Jean-Noël Périé de l'université Paul-Sabatier de Toulouse et le projet Vulcomp pour nous avoir fourni les préformes composites et permis de réaliser les éprouvettes. Ces deux préformes, de fibres de carbone, sont injectées par procédé RTM (Resin Transfer Molding) par plaques de dimensions  $250 \times 250 \times 3 \text{ mm}^3$  où l'axe  $x$  correspond au sens chaîne, l'axe  $y$  au sens trame et l'axe  $z$  au hors-plan. La matrice est un mélange de résine LY5052



**FIGURE 4.5:** Évolution du rapport du module de cisaillement identifié,  $G_{13}$ , sur le module de cisaillement nominal,  $G_{13_0}$  (a), des déplacements imposés au niveau des appuis extérieurs 1 et 2 (b), du rapport de l'effort identifié suivant l'axe  $x$  et de l'effort mesuré suivant l'axe  $z$  (c) et du résidu adimensionné (d) en fonction de la charge appliquée, adimensionnée par rapport à la charge maximale prescrite durant l'essai pour l'éprouvette  $C6_1$  et  $C6_2$ .



**FIGURE 4.6:** Vue de la face observée par CIN lors de l'essai avant dépôt du mouchetis.

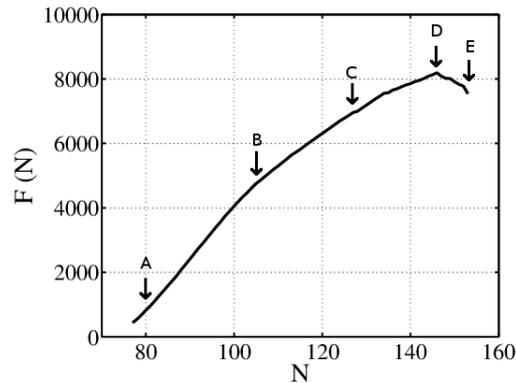
ARALDITE<sup>TM</sup> et de durcissant 5052 ARALDUR<sup>TM</sup>. Après injection, les plaques sont placées dans un four à une température de 120°C pour la phase de durcissement. Dans chaque plaque, un échantillon de dimensions  $125 \times 50 \times 3 \text{ mm}^3$  est prélevé. Ces deux échantillons ainsi prélevés sont assemblés par collage avec une colle époxyde, REDUX 420<sup>TM</sup>. Lors du collage, une pression est appliquée pour maintenir les deux composites ensemble et le durcissement a lieu à température ambiante. L'épaisseur de colle est assurée par disposition d'un fil calibré de diamètre  $80 \mu\text{m}$  entre les deux échantillons. Enfin, l'éprouvette de dimensions  $35 \times 25 \times 6 \text{ mm}^3$  est découpée dans l'assemblage. La réalisation des éprouvettes et des essais a été faite par Ali Treira lors de son stage de Master 2 que j'ai encadré. Une vue de la face observée pendant l'essai avant dépôt du mouchetis est montrée sur la figure 4.6. Le composite supérieur correspond au tissage dont 30% des torons de chaîne interceptent les torons de trame, tandis que dans la partie inférieure, le tissage correspond au 100%.

## 2.2 Description de l'essai

Un essai de flexion trois points est réalisé à l'aide d'un montage similaire au précédent. L'instrumentation de l'essai consiste en un mouchetis appliqué sur la tranche de l'éprouvette et un appareil photo, CANON<sup>TM</sup> EOS 7D, muni d'un objectif de 180 mm. Les images sont enregistrées au format '.raw' sur une dynamique de 8 bits. Ces images sont ensuite converties au format '.tif' suivant la démarche présentée dans la Section 1.1.1. La dynamique de niveau de gris des images utilisées est donc de 10 bits. La dimension physique du pixel est de  $13,5 \mu\text{m}$ .

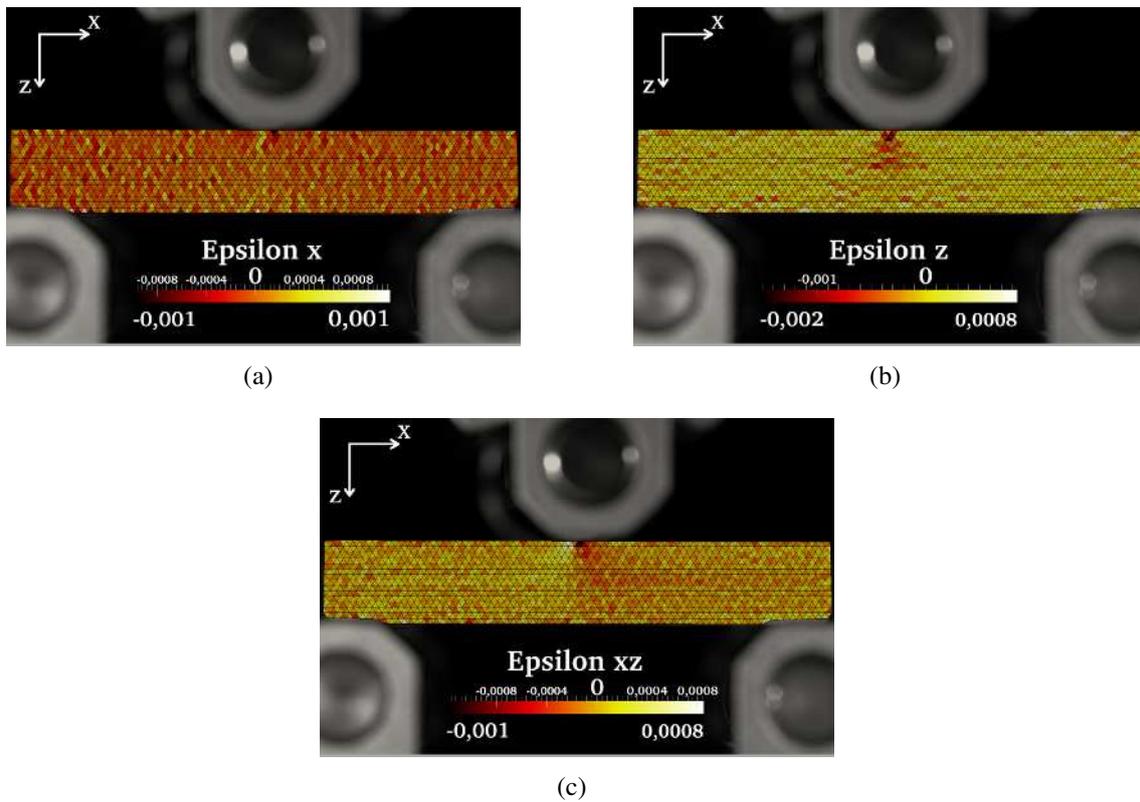
Une mise en position de l'éprouvette avant essai est effectuée par cyclage de charge-décharge à faible niveau d'effort. Ensuite, un chargement contrôlé en déplacement est appliqué à une vitesse de  $0,5 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$  jusqu'à rupture de l'éprouvette. La fréquence d'acquisition des images est de 0,1 Hz.

La courbe de l'évolution de l'effort mesuré en fonction du déplacement de la traverse imposé est montré sur la figure 4.7. Une première partie du chargement, de l'image 70 à 74, correspond à la mise en place et à l'écrasement du matériau sous les appuis. En effet, le champ de déformation obtenu entre ces deux images montre clairement une concen-

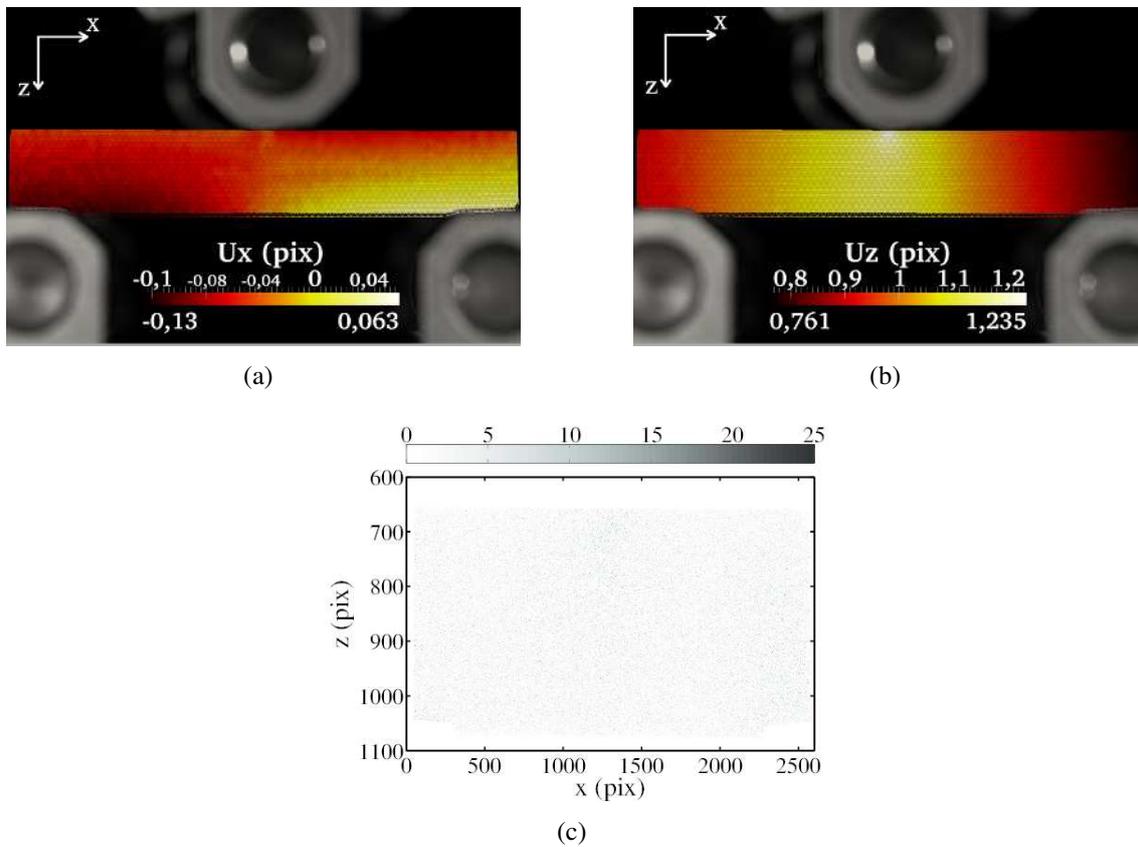


**FIGURE 4.7:** Évolution de l'effort mesuré au cours du chargement,  $F$ , en fonction du numéro d'image,  $N$ .

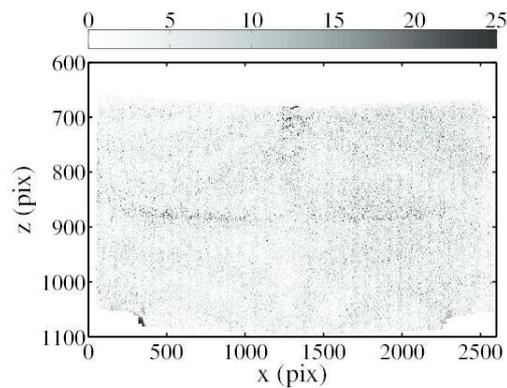
tration au droit de l'appui central (Fig. 4.8), tandis que le champ de déplacement (auquel est superposé la déformée) obtenu entre ces deux mêmes images fait apparaître un mouvement principal de corps rigide suivant l'axe  $z$  (Fig. 4.9b). Il est à noter la dynamique très faible des déplacements mesurés, inférieurs à 1 pixel sur l'axe  $z$  et inférieurs à 0,2 pixel sur l'axe  $x$  (Fig. 4.9a). On note également que les résidus de corrélation sont très faibles (Fig. 4.9c). Ensuite, un premier chargement linéaire est visible jusqu'à l'image 104, point  $B$  de la courbe de chargement, pour laquelle l'interface collée commence à s'endommager. On peut voir sur la carte de résidu du champ de déplacement en prenant pour image de référence, l'image 80 correspondant au point  $A$ , des résidus plus forts à ce niveau (Fig 4.10). Cela se traduit par un changement de pente dans la courbe de chargement. Entre l'image 104, point  $B$ , et 125, point  $C$ , l'interface s'endommage complètement, puis le composite inférieur étant soumis à une forte traction, une rupture de fibres a lieu. On peut voir cette fissuration grâce à la CIN, d'une part sur le champ de déplacement suivant la direction  $x$  (Fig. 4.11a), où l'on voit un saut brutal du déplacement autour de la fissure. Mais aussi, du fait que le sous-espace sur lequel le champ de déplacement est recherché, c'est-à-dire l'espace des champs continus, ne permet pas de rendre compte de la discontinuité induite par la fissure, la carte des résidus de corrélation montre clairement la position de cette dernière (Fig 4.11b). On peut également constater sur le champ de déplacement suivant l'axe  $x$  un saut de déplacement à l'interface traduisant un endommagement de cette dernière. Les résidus élevés observés également dans cette zone tendent à confirmer cela. Enfin, au delà de l'image 125, point  $C$ , le composite s'endommage progressivement, par rupture successive de fibres. Le tissage 3D permet au matériau de soutenir une charge encore élevée jusqu'à l'image 146, point  $D$ , pour laquelle une deuxième fissure se crée. Puis la résistance du composite chute jusqu'à la rupture totale correspondant à l'image 153, point  $E$ , où l'on peut voir, à travers la carte des résidus de corrélation, trois fissures transversales sur la partie inférieure de l'assemblage (Fig. 4.12a et Fig. 4.12c).



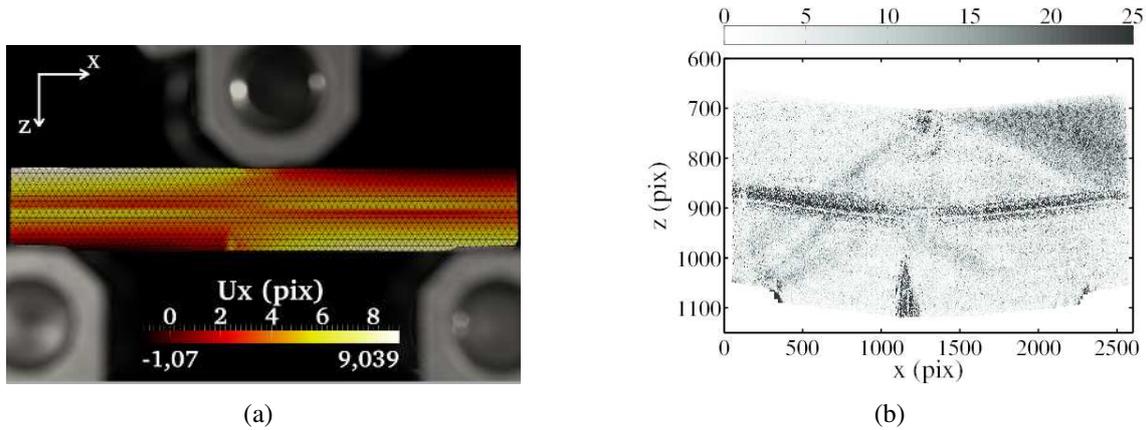
**FIGURE 4.8:** Champ de déformation mesuré entre les images 70 et 74 suivant la direction  $x$  (a), la direction  $z$  (b) et la direction de cisaillement  $xz$  (c).



**FIGURE 4.9:** Champ de déplacement mesuré entre les images 70 et 74 suivant la direction  $x$  (a) et la direction  $z$  (b) sur lequel est superposé le maillage déformé (amplifié 20 fois). Carte des résidus de corrélation,  $R = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})$ , correspondant (c).



**FIGURE 4.10:** Carte des résidus de corrélation correspondant au champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 104. Un plus fort niveau de résidu est observé au niveau de l'interface collée.



**FIGURE 4.11:** Champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 125, composante suivant l'axe  $x$  (a). Carte des résidus de corrélation correspondant (b). Un plus fort niveau de résidu est observé au niveau de l'interface collée et de la fissure.

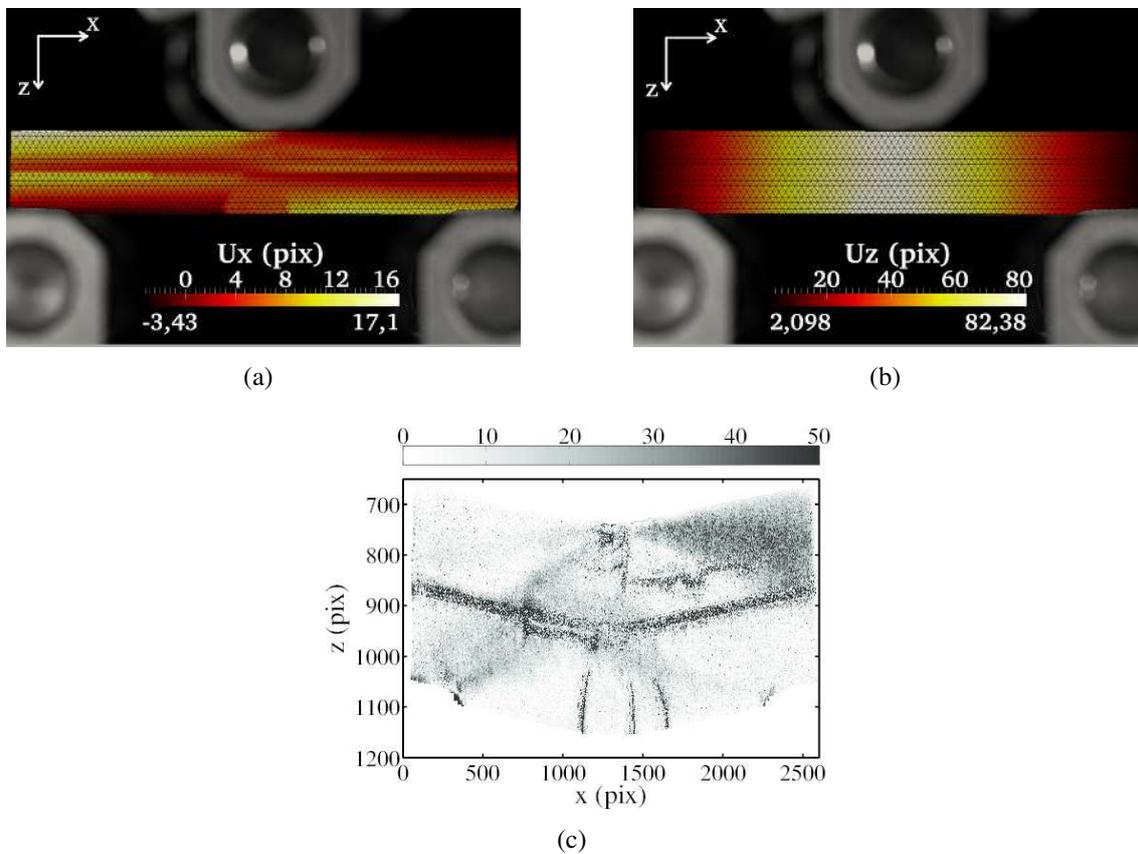
### 2.3 Méthode numérique

L'identification est menée à partir d'un champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et la succession d'images déformées depuis l'image 81 à l'image 110. Cela recouvre le premier chargement linéaire et le changement de pente afin de rendre compte, à travers l'identification des modules de cisaillement des différents matériaux, du changement de comportement après l'endommagement de l'interface, c'est-à-dire l'image 104.

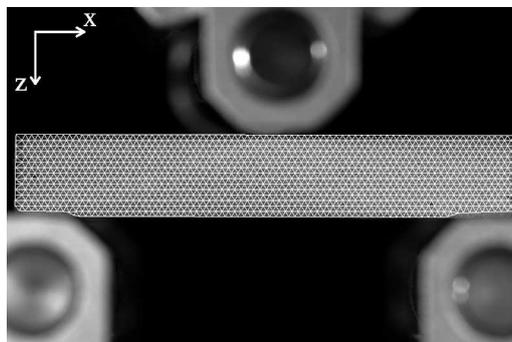
Le champ de déplacement est obtenu pour l'ensemble de ces images, en prenant le jeu de paramètres  $J_5^{cub}$  (Section 1.2). Le domaine d'étude, défini sur l'image de référence par repérage des bords de l'éprouvette, est maillé avec des éléments triangulaires dont les cotés font 32 pixels (Fig. 4.13). Les zones se trouvant proches des appuis extérieurs ont été retirées du domaine pour éliminer les erreurs dues à l'optique (flou de l'image au niveau des appuis due à l'utilisation d'un objectif non télécentrique). Le même maillage est utilisé pour le calcul EF.

Les conditions aux limites du calcul sont les déplacements mesurés aux nœuds situés près des appuis extérieurs et l'effort résultant mesuré, suivant l'axe  $z$ , réparti uniformément sur les nœuds situés sous l'appui central (Fig. 4.14). Le reste des nœuds de bords possèdent des conditions limites de bord libre. De même que dans le cas précédent, un calcul 2D avec hypothèse de déformations planes est effectué. Les paramètres identifiés sont donc les modules élastiques de la modélisation 3D.

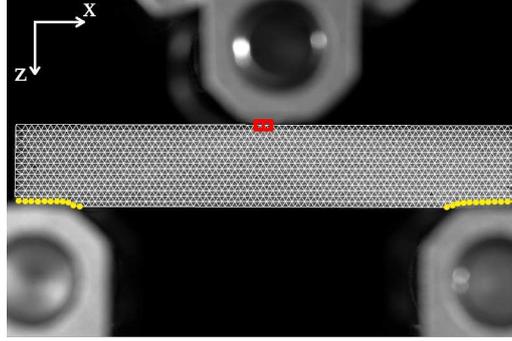
Les valeurs nominales des paramètres matériau des deux composites ne sont pas disponibles, il est donc choisi d'identifier pour chacun des composites, les modules élastiques  $E_1$ ,  $E_3$  et  $G_{13}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{13}$ . Néanmoins, l'essai de flexion à trois points ne permet pas de solliciter l'ensemble de ces huit paramètres, pour le cas



**FIGURE 4.12:** Champ de déplacement mesuré entre l'image de référence 80 et l'image déformée 153, composante suivant l'axe  $x$  (a) et composante suivant l'axe  $z$  (b). Carte des résidus de corrélation correspondant (c).



**FIGURE 4.13:** Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels.



**FIGURE 4.14:** Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels. Les nœuds notés  $\bullet$  sont ceux pour lesquels le déplacement est imposé, et les nœuds notés  $\square$ , ceux pour lesquels l'effort est imposé.

de deux composites assemblés. Il est donc nécessaire de rajouter de l'information *a priori* sur les différents paramètres matériau. Le but étant de pouvoir identifier le paramètre matériau à partir du champ de déplacement mesuré pendant l'essai, et le cas échéant, de le fixer à sa valeur nominale.

Afin de combiner intelligemment les informations disponibles à travers l'essai et les informations données *a priori*, une méthode de régularisation de la FEMU est mise en place. Cela consiste à venir minimiser la fonctionnelle combinée  $T_{tot} = T_1 + T_2$ .

D'une part, la première fonctionnelle est écrite ici sur les champs de déplacements  $T_1(\mathbf{p}) = \|\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca}(\mathbf{p})\|_M^2$  pour laquelle la norme est issue de la métrique induite par la matrice de covariance du champ de déplacement mesuré  $\mathbf{u}^{me}$  (Eq. 3.12). D'autre part, la seconde fonctionnelle est issue des valeurs nominales des différents paramètres identifiés et est écrite  $T_2(\mathbf{p}) = \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})$  où  $\Psi$  est une forme convexe atteignant son minimum à l'origine. La solution du problème régularisé est donc le minimum de la fonctionnelle  $T_{tot} = T_1 + T_2$ .

La difficulté est de trouver  $\Psi$  permettant une comparaison adaptée entre deux sources différentes d'informations sur  $\mathbf{p}$ . Comme dans la fonctionnelle  $T_1$ , la norme naturelle est fournie par la matrice de covariance des valeurs nominales,  $\mathbf{C}^{nom}$ . Toutefois, l'incertitude sur les valeurs nominales sont souvent obtenues de manière indépendante, on prendra donc  $\mathbf{C}_{ij}^{nom} = (\sigma_{ii}^{nom})^2 \delta_{ij}$ . Et la fonctionnelle  $T_2$  s'écrit :

$$T_2(\mathbf{p}) = A(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})^t [\mathbf{C}^{nom}]^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom}) \quad (4.1)$$

où  $A$  est un paramètre à déterminer. Afin de choisir ce paramètre de manière objective, la contribution de la fonctionnelle  $T_2$  correspondant aux incertitudes sur les valeurs nominales doit aussi correspondre à la contribution de la fonctionnelle  $T_1$  lorsque le bruit du capteur CCD est la seule source d'incertitude. On considère une incertitude globale sur les valeurs nominales, fixée à 30% dans ce cas-ci, (l'incertitude est élevée mais du fait que l'on suppose complètement les paramètres, cela permet de laisser une certaine liberté à l'identification tout en évitant au système de diverger) alors le seuil de régularisation est noté  $\lambda^* = A/(\sigma^{nom})^2$ . On peut noter que pour l'obtention des valeurs nominales

par une méthode d'homogénéisation, il est montré pour le cas de composites laminés dans [Rollet *et al.*, 2009] que les méconnaissances sur le comportement des matériaux constituant le composite se propagent à travers cette méthode. Cela donne des incertitudes sur les paramètres matériau macroscopiques équivalents deux à trois plus grandes que celles sur les matériaux constitutifs. Les incertitudes sur les paramètres matériau macroscopiques peuvent donc être élevées et doivent être prises en compte.

Et l'on peut écrire le système pondéré à partir de l'équation résolue pour le problème d'identification par la FEMU :

$$\{\delta\mathbf{p}\} = [\mathbf{N}^{-1}]\{\mathbf{b}\} \quad (4.2)$$

où  $\delta\mathbf{p}$  est le vecteur incrément sur les paramètres,  $[\mathbf{N}] = [\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}]$  est issu de la projection de la matrice de corrélation  $\mathbf{M}$  (Eq. 3.5) sur les champs de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux paramètres identifiés  $[\mathbf{P}] = \partial\{\mathbf{u}^{ca}\}/\partial\{\mathbf{p}\}$ , et  $\mathbf{b} = [\mathbf{P}](\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\})$ .

On remarque que l'incrément calculé pour chaque paramètre dépend directement de sa sensibilité par rapport au champ de déplacement mesuré. Par conséquent, un paramètre non sollicité par l'essai de flexion à trois points ne peut pas être identifié. Le système pondéré est :

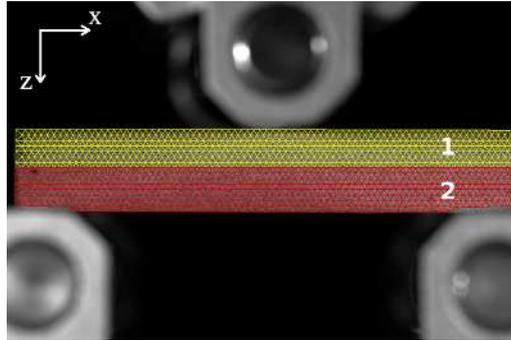
$$\{\delta\mathbf{p}\} = ([\mathbf{N}] + \lambda^*[\mathbf{I}])^{-1}(\{\mathbf{b}\} + \lambda^*(\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_{nom}\})) \quad (4.3)$$

où l'on suppose que l'incertitude nominale est uniforme sur l'ensemble des paramètres, et donc  $T_2$  est simplement proportionnelle à la norme Euclidienne du vecteur  $(\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_{nom}\})$ . Il en résulte que le couplage de ces deux problèmes peut être interprété grâce au spectre des valeurs propres de  $\mathbf{N}$ , ordonnées dans la matrice diagonale  $D$ . La fonctionnelle  $T_2$  propose un seuil pour les valeurs propres de  $T_1$  sélectionnant les modes déterminés par les informations issues de l'expérience et ceux principalement dirigés par les valeurs nominales. Les informations supplémentaires proposées étant simplement supposées, la régularisation est faible, et  $\lambda^* \equiv 10^{-5}D_{max}$ .

## 2.4 Modélisation avec interface parfaite

### 2.4.1 Modélisation

Considérons dans un premier temps une interface parfaite entre les deux composites, justifiée par l'allure linéaire de la courbe macroscopique de chargement. La modélisation correspond alors à une partition du maillage en deux zones, numérotées 1 et 2, ayant des propriétés matériau différentes (Fig. 4.15). La zone 1 correspond au composite à 30% et la zone 2 correspond au composite à 100%. La position de l'interface est établie à partir de la figure 4.6. Les directions principales du comportement orthotrope sont l'axe  $x$  pour la direction 1 et l'axe  $y$  pour la direction 2. Concernant le choix des valeurs nominales des paramètres matériau, le raisonnement se base sur le taux de torons de sens chaîne entrelaçant les torons de sens trame. Premièrement, l'embuvage est supérieur pour le composite 100% par rapport au composite à 30%, on peut donc supposer la relation suivante sur les modules élastiques en sens 1,  $E_1^2 < E_1^1$ . Deuxièmement, on peut supposer que



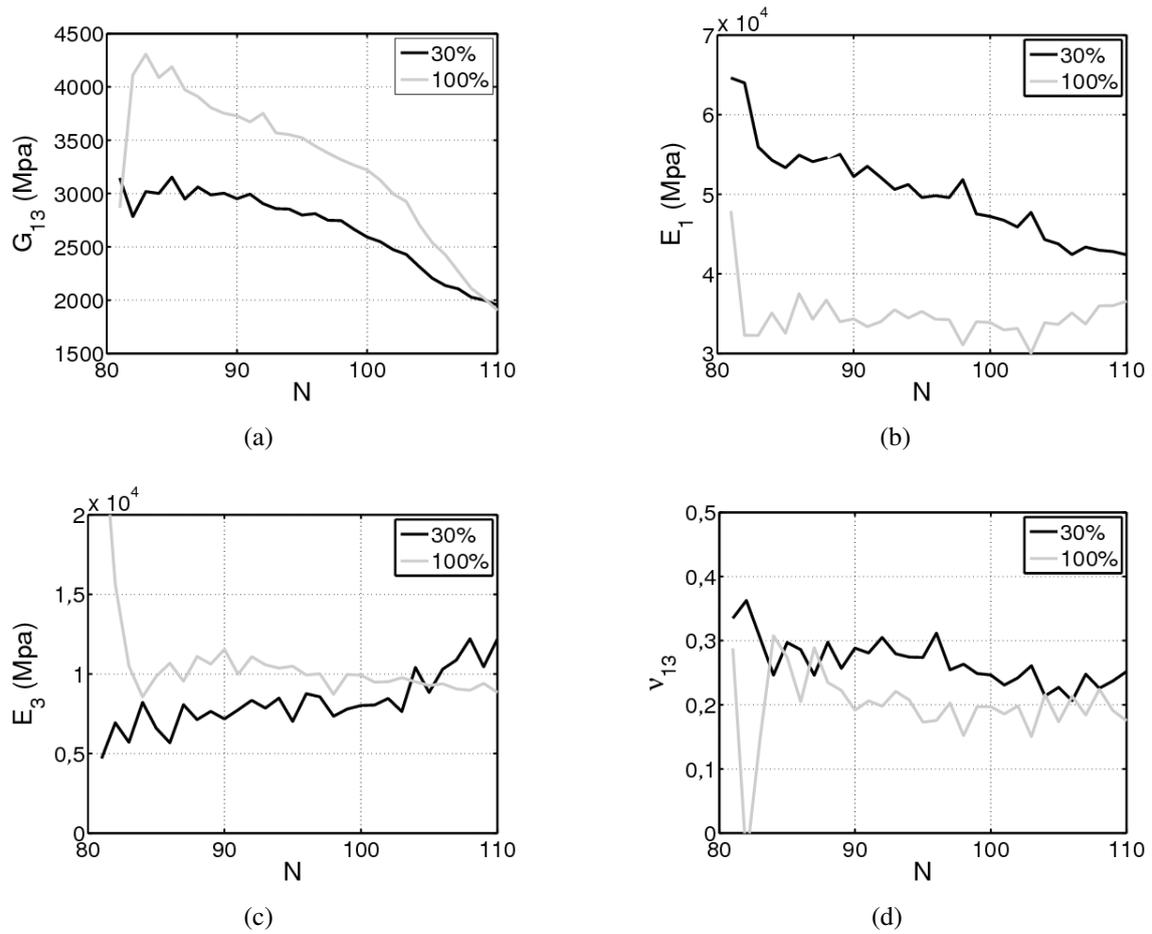
**FIGURE 4.15:** Domaine maillé avec des éléments triangulaires dont les côtés font 32 pixels. Partition horizontale du maillage en deux zones ayant des propriétés matériau différentes.

$E_3^1 < E_3^2$  et que  $G_{13}^1 < G_{13}^2$  du fait du plus fort taux de torons d'entrelacement sur le composite à 100%. Troisièmement, les coefficients de Poisson sont les paramètres les moins sensibles du plan (13) dans cet essai, la moyenne de la norme des cartes de sensibilité a été calculée pour différents paramètres dans le cas précédent (Annexe A Tableau 1) confirmant cela. Il est donc choisi de prendre une valeur de 0,33 pour les deux coefficients. Quatrièmement, les paramètres matériau concernant la direction 2 sont fixés et influent très peu sur le champ de déplacement pour une sollicitation de flexion. Les valeurs nominales proposées pour les différents paramètres sont résumées dans le tableau 4.1.

## 2.4.2 Résultats

Le résultat de l'identification pour l'ensemble des images est représenté sur la figure 4.16. La convergence des résultats est rapide et illustrée sur l'image 100 par la figure 4.17. Cette figure montre l'évolution des incréments  $\delta p$  pour chaque itération  $n$ . Après six itérations, la norme des incréments, calculée au sens de la norme infinie, sur chaque paramètre est inférieure à  $10^{-4}$ .

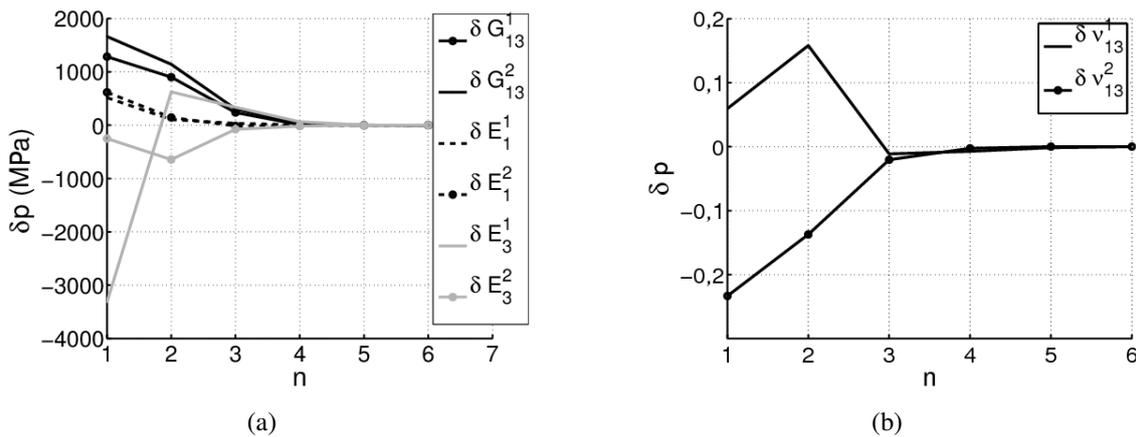
On note que la valeur des paramètres identifiés est assez erratique sur les premières images car le ratio signal/bruit est faible. Ensuite, les valeurs identifiées des coefficients de Poisson et des modules élastiques  $E_3$  sont assez stables du fait de la régularisation. En ce qui concerne les modules de cisaillement  $G_{13}^1$  et les modules élastiques  $E_1^1$  et  $E_1^2$ , on remarque un premier plateau entre les images 83 et 90 suivi d'une baisse régulière du module identifié jusqu'à l'image 104. Pour cette image, on a vu que l'interface commençait à s'endommager, et l'on remarque que les modules de cisaillement identifiés chutent à partir de ce moment. Cela tend à confirmer qu'il y a bien un changement de comportement de l'interface et que celui-ci influe sur les modules identifiés. Néanmoins, la valeur des modules de cisaillement identifiés chute au cours de l'essai indiquant un endommagement progressif du matériau alors que la charge macroscopique est élastique linéaire. Cela résulte d'une compensation due à une modélisation avec interface parfaite n'autorisant pas l'endommagement de cette dernière.



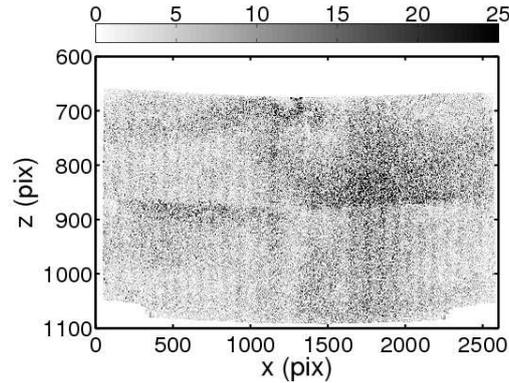
**FIGURE 4.16:** Évolution du module de cisaillement,  $G_{13}$  (a), du module élastique  $E_1$  (b), du module élastique  $E_3$  (c) et du coefficient de Poisson (d) identifiés en fonction du numéro d'image  $N$  dans les deux composites, tissage à 30% et à 100%.

**TABLE 4.1:** Valeurs nominales des paramètres matériau identifiés et valeurs imposées des paramètres matériau non identifiés.

Paramètre matériau identifié	Valeur nominale	Paramètre matériau fixé	Valeur imposée
$E_1^1$	43,9 GPa	$E_2^1$	32,9 GPa
$E_1^2$	32,9 GPa	$E_2^2$	32,9 GPa
$E_3^1$	8,2 GPa	$G_{12}^1$	2,7 GPa
$E_3^2$	10,9 GPa	$G_{12}^2$	2,7 GPa
$G_{13}^1$	2,7 GPa	$G_{23}^1$	2,7 GPa
$G_{13}^2$	3,8 GPa	$G_{23}^2$	2,7 GPa
$\nu_{13}^1$	0,33	$\nu_{12}^1$	0,33
$\nu_{13}^2$	0,33	$\nu_{12}^2$	0,33
-	-	$\nu_{23}^1$	0,33
-	-	$\nu_{23}^2$	0,33



**FIGURE 4.17:** Incrément calculé à chaque itération  $n$  pour les modules élastiques (a) et les coefficients de Poisson (b).



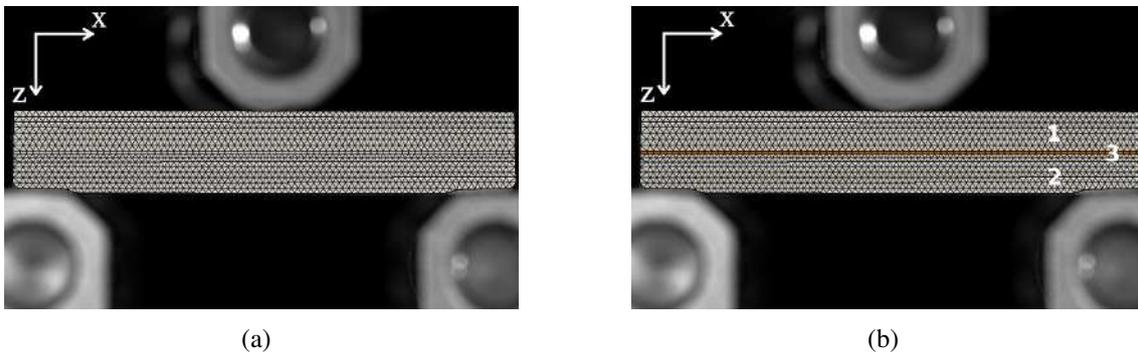
**FIGURE 4.18:** Carte des résidus issus du champ de déplacement calculé pour l'image 100 pour une modélisation d'interface parfaite.

La carte des résidus issus du champ de déplacement calculé,  $\rho_c = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}^{ca}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})$ , tracée pour l'image 100 (Fig. 4.18) montre des écarts accrus au niveau de l'interface. Cela tend à prouver que la modélisation retenue ici d'une interface parfaite n'est pas suffisante pour décrire le comportement du matériau.

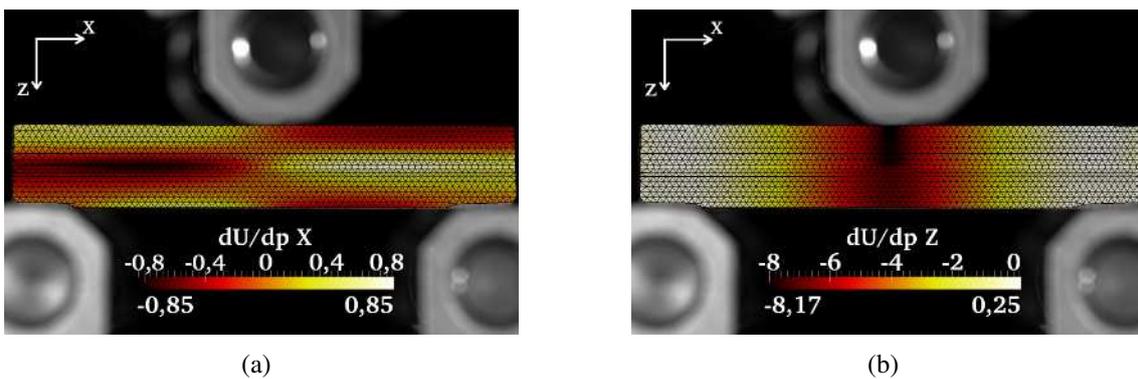
## 2.5 Modélisation avec interface élastique

### 2.5.1 Modélisation 1.0

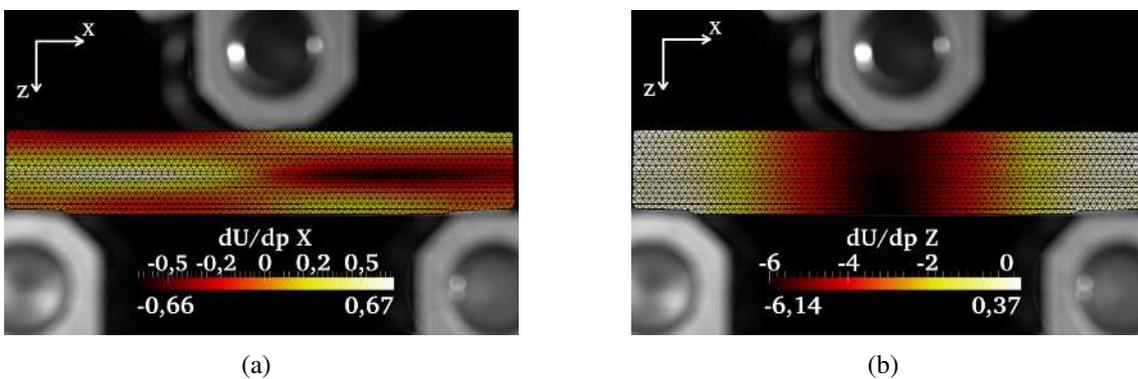
On crée un maillage prenant en compte l'interface en séparant le maillage précédent en deux parties, haute et basse et en rajoutant une ligne d'éléments quadrangles entre les deux, modélisant l'interface. Différentes épaisseurs sont modélisées allant d'une interface de 8 à 40 pixels. Le maillage, pour une interface de 32 pixels, est montré sur la figure 4.19a, le zonage correspondant aux composites 30% et 100% et à l'interface est représenté sur la figure 4.19b. Le comportement de l'interface est élastique isotrope, tandis que le comportement des deux composites 100% et 30% est identique à ce qui a été présenté précédemment. Pour l'interface seul le module élastique  $E$  est identifié, le coefficient de Poisson est quant à lui fixé à 0,33. Les cartes de sensibilité du champ de déplacement par rapport à chaque paramètre donnent un aperçu des paramètres sensibles sur cet essai. Certains paramètres sont très sensibles et ce sur l'ensemble du domaine d'étude, contrairement à d'autres paramètres, le module élastique  $E_3^1$  et les coefficients de Poisson  $\nu_{13}^1$  et  $\nu_{13}^2$ , sensibles uniquement dans des zones restreintes du domaine (Fig.4.20 à Fig.4.28). On remarque que le module élastique de l'interface est sensible sur une zone étendue du domaine, et non uniquement confiné sur l'interface elle-même. On voit donc dès à présent l'effet que peut avoir l'interface sur les modules identifiés dans les deux composites.



**FIGURE 4.19:** Maillage avec interface (a) dont les trois zones matériau sont la partie haute, notée 1, la partie basse, notée 2 et l'interface entre les deux, notée 3 (b).



**FIGURE 4.20:** Carte de sensibilité  $dU/dG_{13}^1$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).



**FIGURE 4.21:** Carte de sensibilité  $dU/dG_{13}^2$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

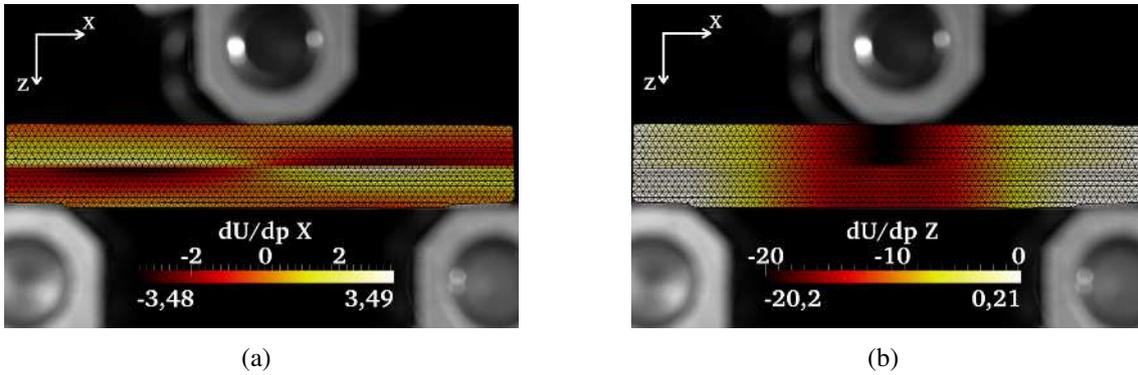


FIGURE 4.22: Carte de sensibilité  $dU/dG_{13}^{interface}$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

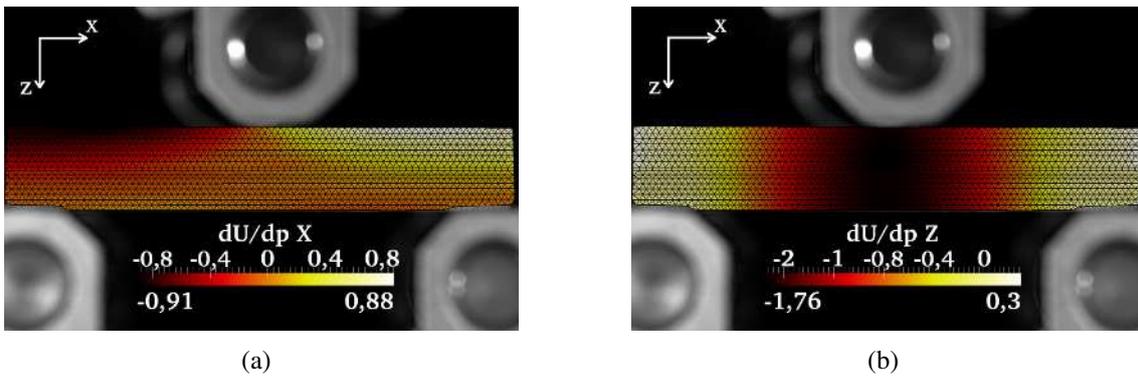


FIGURE 4.23: Carte de sensibilité  $dU/dE_1^1$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

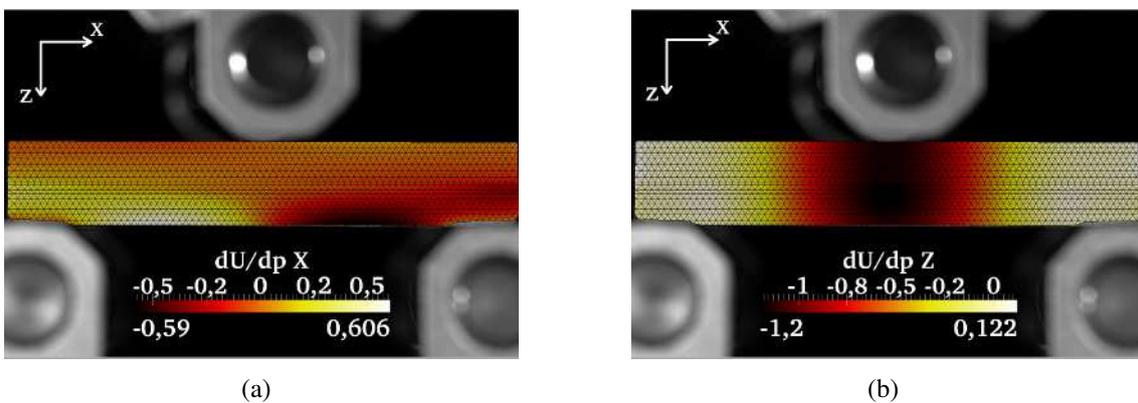


FIGURE 4.24: Carte de sensibilité  $dU/dE_1^2$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

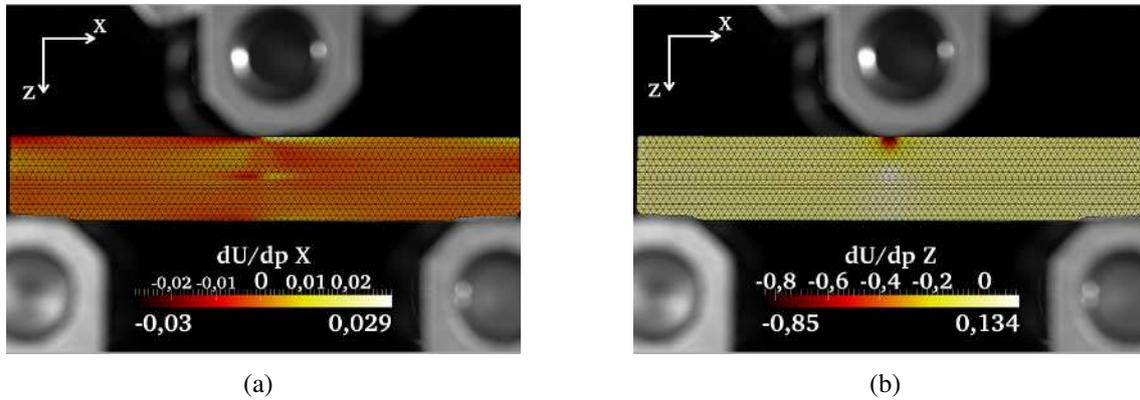


FIGURE 4.25: Carte de sensibilité  $dU/dE_3^1$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

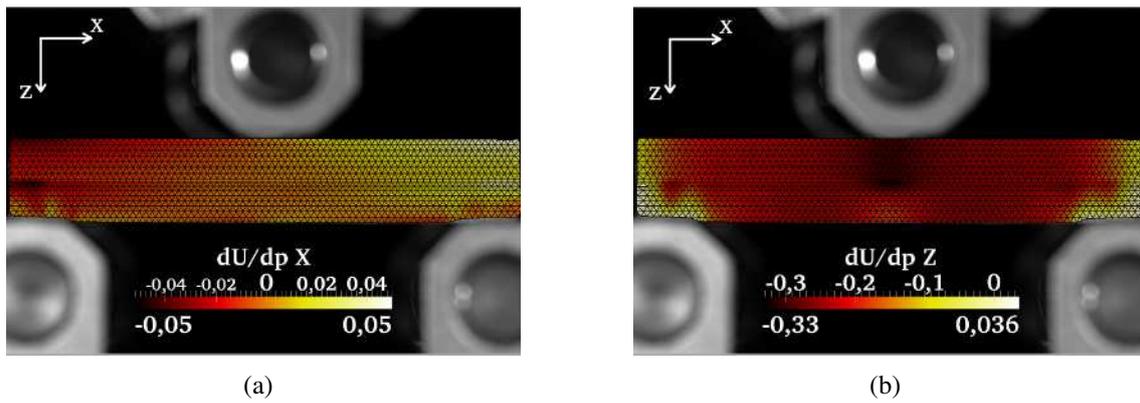


FIGURE 4.26: Carte de sensibilité  $dU/dE_3^2$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

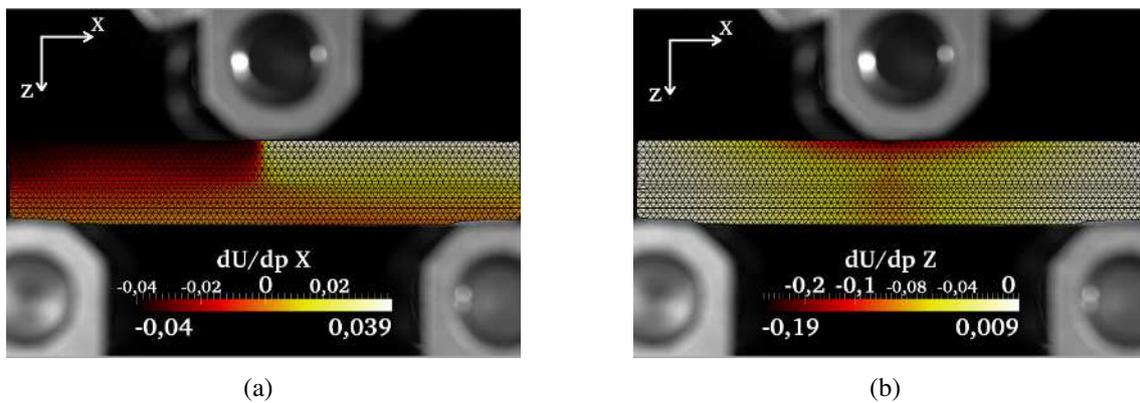


FIGURE 4.27: Carte de sensibilité  $dU/dv_{13}^1$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

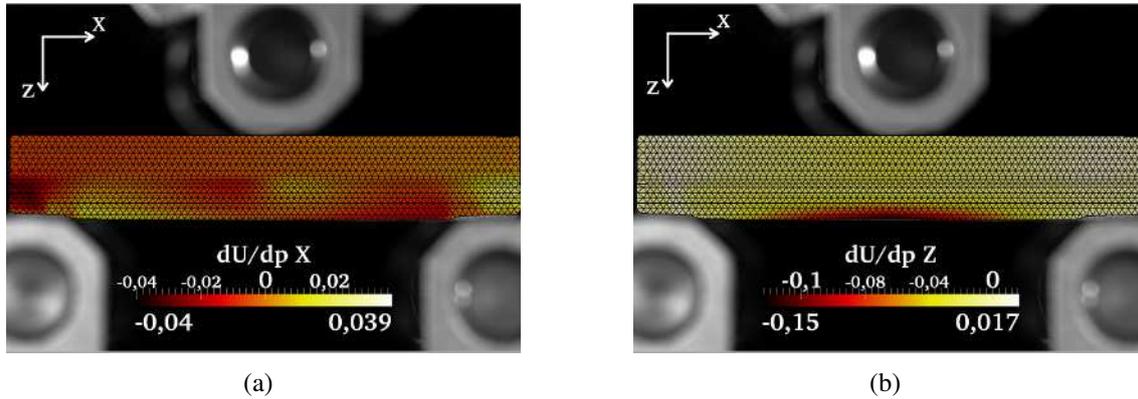


FIGURE 4.28: Carte de sensibilité  $dU/dv_{13}^2$  suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b).

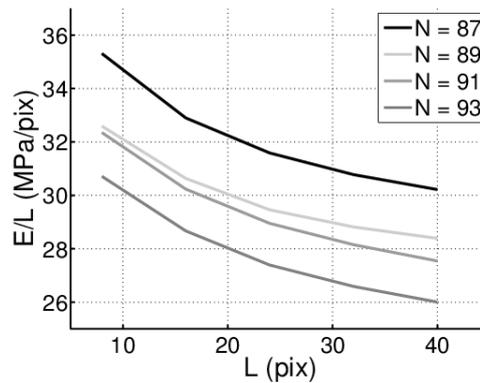
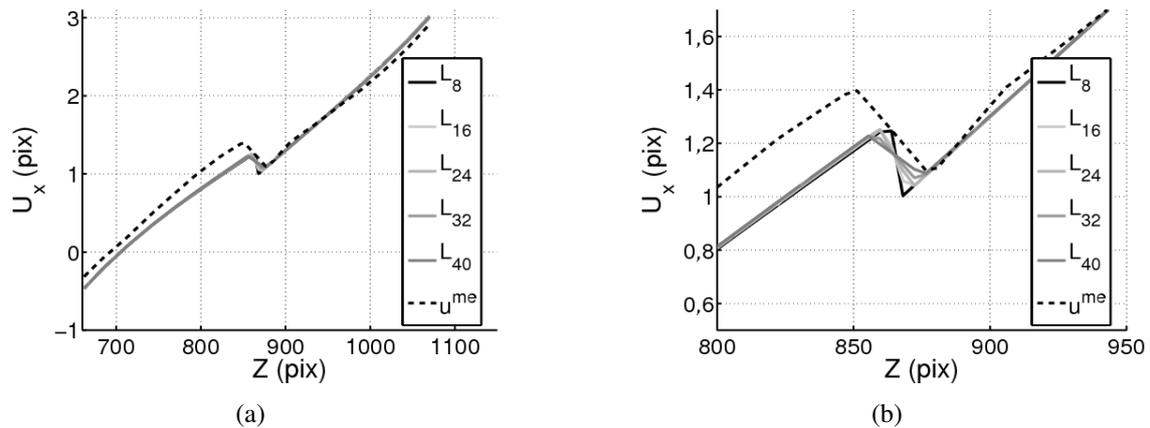


FIGURE 4.29: Évolution du rapport du module élastique identifié dans l'interface et de l'épaisseur de cette dernière en fonction de l'épaisseur d'interface,  $L$ , tracé pour différentes images  $N$  prises à différents niveaux de chargement.

### 2.5.2 Résultats

Premièrement, on peut regarder l'influence de l'épaisseur de l'interface. La figure 4.29 montre que pour chaque image, le rapport du module élastique identifié et de l'épaisseur d'interface,  $E/L$ , reste à peu près constant quelque soit l'épaisseur modélisée. L'évolution du déplacement suivant l'axe  $x$ , pour les différentes épaisseurs d'interface, le long d'une section suivant la direction  $z$  montre que le comportement aux abords de l'interface est le même tandis que le saut de déplacement à l'interface est réparti sur l'épaisseur de cette dernière (Fig. 4.30). En prenant la limite d'une interface d'épaisseur nulle, il est possible de décrire son comportement par une relation directe entre le saut de déplacement et la contrainte résultante. Cette étude n'est pas présentée ici.

Deuxièmement, les résultats d'identification sur des paramètres matériau des deux composites sont étudiés. Du fait de la déformation autorisée dans l'interface, les modules de cisaillement identifiés sont supérieurs à ceux identifiés précédemment (Fig. 4.32a). Néanmoins, on observe toujours la même dérive au cours de l'essai. Pour l'image 104, le



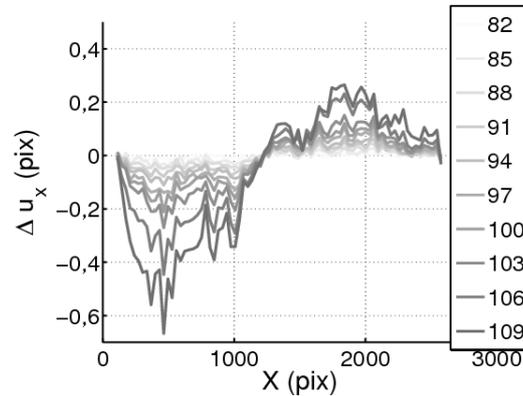
**FIGURE 4.30:** Évolution du déplacement suivant l'axe  $x$  dans une section suivant l'axe  $z$  située à  $x = 2100$  pixels.

changement brusque de comportement n'est plus visible sur les modules identifiés pour les deux composites. C'est bien l'interface qui s'endommage. Les modules élastiques  $E_1$  identifiés correspondent aux valeurs identifiées précédemment, ce qui est consistant avec la différence de modélisation entre les deux études. En effet, l'ajout d'une interface élastique ne modifie pas le comportement suivant la direction 1. Pour information, les résultats sur les modules élastiques  $E_3$  et les coefficients de Poisson  $\nu_{13}$  sont tracés sur la figure 4.32c et 4.32d, mais du fait de la faible sensibilité de ces paramètres sur l'essai de flexion trois points, les valeurs identifiées sont fortement influencées par la régularisation. La carte des résidus locaux, tracée pour l'image 100 à partir du champ de déplacement calculé, montre encore une différence entre la mesure et la modélisation, mais à l'interface les résidus sont réduits. Toutefois, la partie gauche et la partie droite ne se comportent pas de la même manière, du fait de la non symétrie de l'essai. L'endommagement de la colle est plus important à gauche. Le saut de déplacement mesuré pour la série d'images entre une mesure par CIN effectuée sur la partie basse de l'éprouvette et une mesure effectuée sur la partie haute montre une dissymétrie entre la partie gauche et la partie droite (Fig. 4.31).

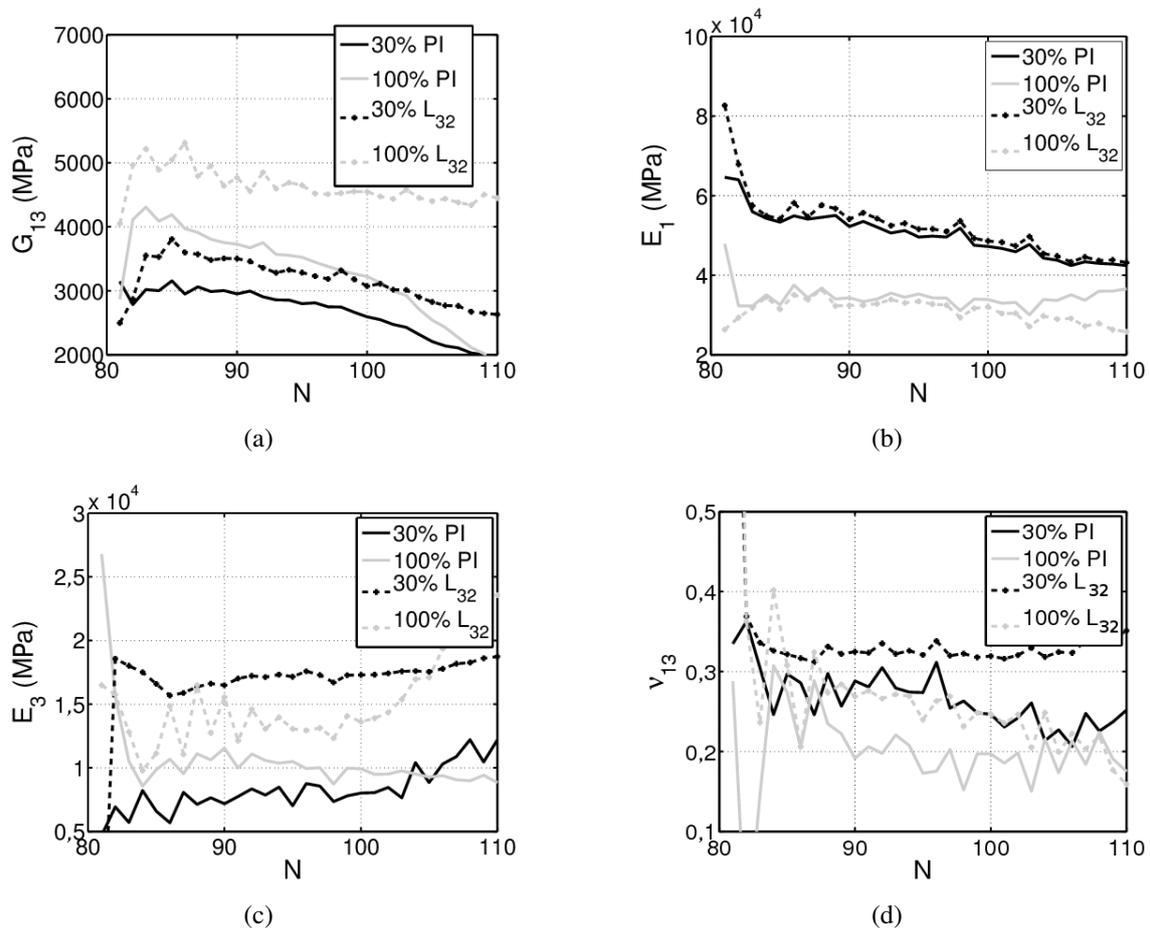
Du fait de la modélisation uniforme sur l'ensemble de l'éprouvette du comportement de la colle, un compromis entre la partie droite et la partie gauche est trouvé. Une modélisation de l'interface en séparant le comportement à gauche du comportement à droite est donc proposée.

### 2.5.3 Modélisation 2.0

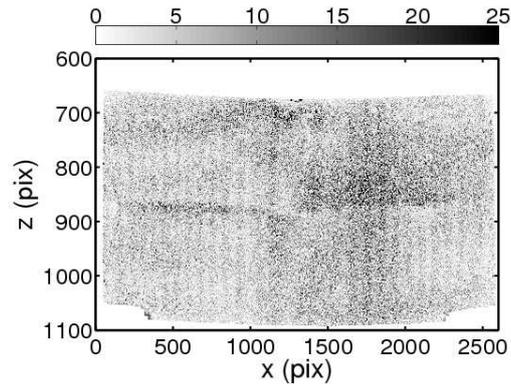
Le même maillage que précédemment est utilisé mais le comportement de l'interface dépend de la position suivant l'axe  $x$ , le module élastique prend une première valeur pour  $x < x_m$  et une seconde pour  $x > x_m$ , avec  $x_m = (x_{max} + x_{min})/2$  (Fig. 4.34).



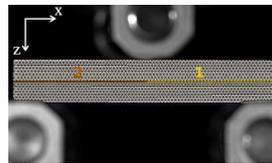
**FIGURE 4.31:** Évolution du saut de déplacement suivant l'axe  $x$  pour la série d'images allant de 82 à 109.



**FIGURE 4.32:** Évolution du module de cisaillement,  $G_{13}$  (a), du module élastique  $E_1$  (b), du module élastique  $E_3$  (c) et du coefficient de Poisson (d) identifiés en fonction du numéro d'image  $N$  dans les deux composites, tissage à 30% et à 100% pour une interface d'épaisseur 32 pixels, notée  $L_{32}$ , et pour une interface parfaite, notée  $PI$ .



**FIGURE 4.33:** Carte des résidus pour l'image 100 pour une modélisation avec interface élastique.

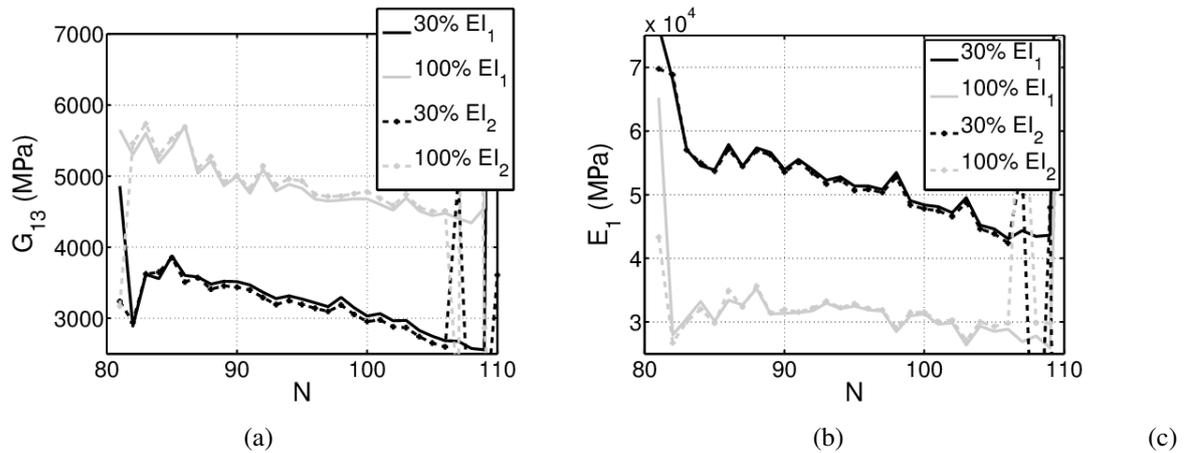


**FIGURE 4.34:** Maillage avec interface non homogène.

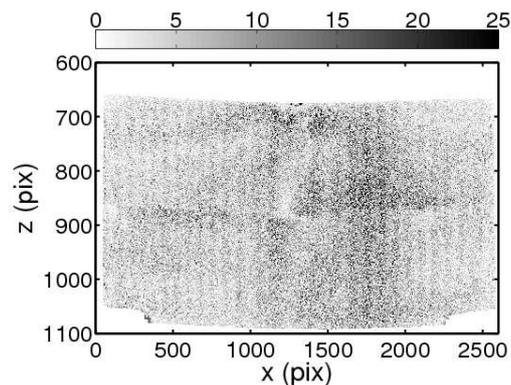
#### 2.5.4 Résultats

Les modules élastiques identifiés dans les deux composites sont inchangés par rapport à la modélisation avec interface homogène (Fig. 4.35). On observe, par contre, une différence sur les modules identifiés au sein de l'interface entre la partie droite et la partie gauche (Fig. 4.37). Il s'agit donc ici de décrire le comportement à l'interface. Et celui-ci n'a que peu d'effet sur le comportement des matériaux assemblés. La carte des résidus tracée pour l'image 100 montre une réduction des résidus au sein de l'interface (Fig. 4.36). Les figures 4.38 et 4.35 montrent une amélioration de la description de l'essai à travers l'évolution des résidus adimensionnés,  $R_n$ , au cours de l'essai pour les différentes modélisations proposées.

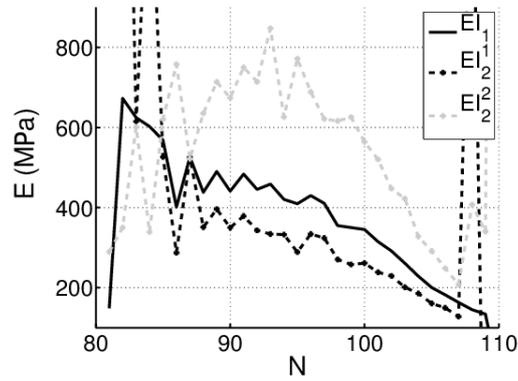
Finalement, cette étude montre l'importance de prendre en compte le comportement à l'interface afin d'obtenir des paramètres matériau permettant de décrire correctement les différentes zones de l'éprouvette. Nous avons appliqué la méthode d'identification sur des essais standards de flexion à trois points. Cela a permis de valider la méthode dans un premier temps et d'appréhender l'effet d'une modélisation non adéquate au vu de l'essai dans un second temps.



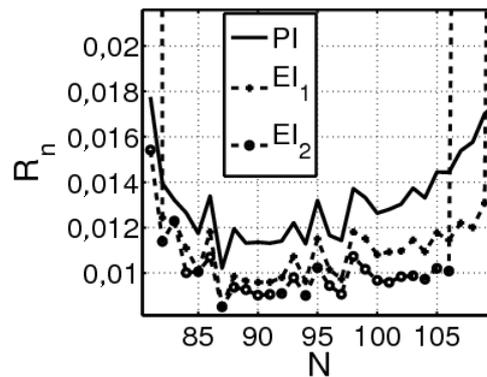
**FIGURE 4.35:** Évolution du module de cisaillement  $G_{13}$  (a) et du module élastique  $E_1$  (b) identifiés en fonction du numéro d'image  $N$  dans les deux composites, tissage à 30% et à 100%. La modélisation à une interface est notée  $E_{I_1}$ , tandis que la modélisation à deux interfaces est notée  $E_{I_2}$ .



**FIGURE 4.36:** Carte des résidus pour l'image 100 pour une modélisation avec interface élastique dont le comportement est différent suivant la position selon l'axe  $x$ .



**FIGURE 4.37:** Module identifié au sein de l'interface pour une interface homogène,  $EI_1$ , ou une interface hétérogène,  $EI_2^1$  correspondant à la partie droite et  $EI_2^2$  correspondant à la partie gauche de l'interface.



**FIGURE 4.38:** Évolution du résidu adimensionné,  $R_n$ , en fonction du numéro d'image  $N$  pour une interface parfaite,  $PI$ , une interface élastique homogène,  $EI_1$  et une interface élastique différente pour la partie gauche et droite de l'éprouvette,  $EI_2$ .



# Chapitre 5

## Pied d'aube

*Identification du comportement du pied d'aube à partir d'un essai de traction. On utilisera la CIN et la méthode d'identification régularisée présentée précédemment. Une analyse d'incertitude basée sur les équations de la CIN et de la FEMU permet d'avoir une estimation raisonnée de la qualité des résultats obtenus.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Essai de traction sur pied d'aube . . . . .</b>	<b>66</b>
1.1	Description de l'essai . . . . .	66
1.2	Approximation faite par la modélisation 2D . . . . .	75
1.3	Modélisation EF homogène . . . . .	78
1.4	Identification . . . . .	79
1.5	Modélisation avec zonage matériau . . . . .	87

---

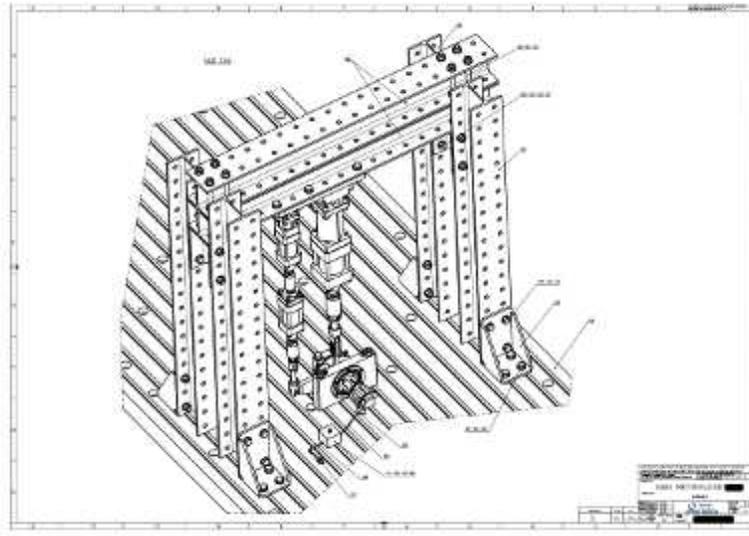


FIGURE 5.1: Montage de l'essai de traction/flexion sur pied d'aube.

## 1 Essai de traction sur pied d'aube

Un essai sur structure présente des difficultés additionnelles par rapport à un essai sur éprouvette matériau. Tout d'abord, le montage d'essai doit être adapté spécifiquement à la pièce, des précautions expérimentales particulières doivent être prises du fait de la réalisation d'un essai non standard. Ensuite, le comportement du matériau est complexe et les sollicitations imposées correspondent à celles vues par la pièce en service. L'identification d'un ensemble de paramètres matériau nécessite toutes les capacités des outils présenté précédemment. C'est à ce défi que ce chapitre est consacré.

### 1.1 Description de l'essai

L'essai consiste en une sollicitation de traction/flexion sur une éprouvette technologique de pied d'aube (Fig. 5.1). L'éprouvette de pied en forme de queue d'aronde est positionnée dans un mors. La sollicitation de traction est imposée grâce à un vérin sur la partie supérieure de l'éprouvette de pied. La figure 5.5b présente les perçages permettant de fixer le vérin de traction à l'éprouvette. Le contact entre ce dernier et l'éprouvette se fait au niveau des portées du pied sur lesquelles une bande de matériau à base de résine phénolique (appelée "wear strip") est apposée permettant d'avoir un coefficient de frottement maîtrisé.

L'allure générale de la courbe d'effort est tracée en fonction du numéro d'image, prise à intervalle régulier de temps, sur la figure 5.2. En premier lieu, des cycles de charge-décharge entre 5% et 10% de la charge maximale sont effectués pour une mise en position de l'éprouvette dans le mors (alignement de l'éprouvette avec le vérin). L'étude de l'évolution de la moyenne de la norme du déplacement mesuré en chaque nœud du mail-

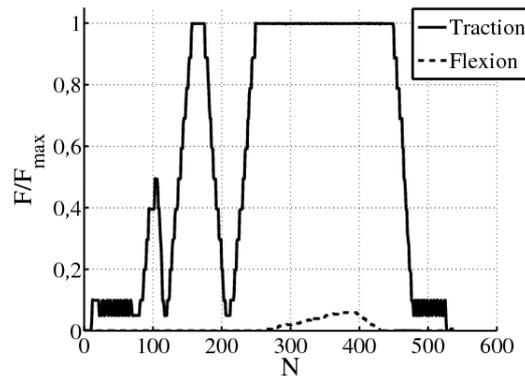


FIGURE 5.2: Effort mesuré en fonction du numéro d'image.

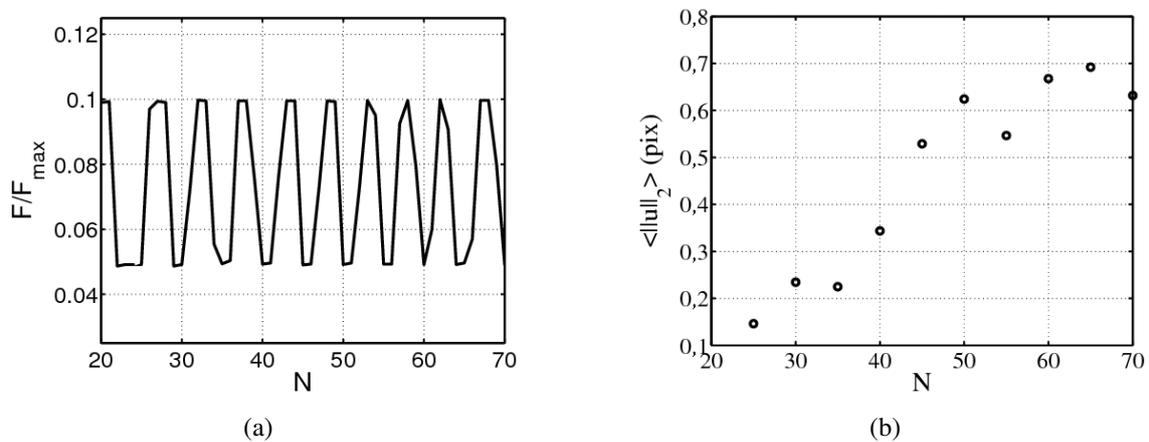


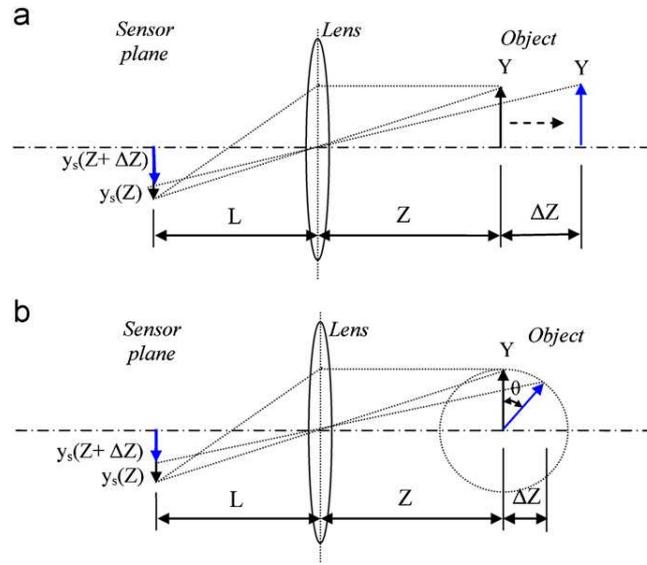
FIGURE 5.3: Effort adimensionné en fonction du numéro d'image,  $N$ , pour la phase de mise en position de l'éprouvette (a). Moyenne de la norme du déplacement mesuré en chaque nœud du maillage en fonction du numéro d'image  $N$  (b).

lage au cours des cycles permet de montrer l'efficacité de cette disposition (Fig. 5.3). On remarque que pour l'ensemble des images prises en décharge, c'est-à-dire pour l'effort normalisé de 5%, il y a une stabilisation au fil des cycles de la moyenne telle que calculée précédemment.

Ensuite une première charge/décharge à 50% de la charge maximale est appliquée, suivie d'une charge/décharge à 100%, ce qui correspond à la charge vue par le pied lorsque le moteur tourne à sa limite de fonctionnement. Enfin, le pied est rechargé à l'effort maximal, une fois atteint, un effort de flexion est transmis par rotation de l'éprouvette de pied par rapport à la direction de traction, simulant la flexion de l'aube.

L'essai est instrumenté avec :

- des jauges de déformation collées sur l'éprouvette dans la partie haute du pied,
- deux capteurs d'émission acoustique permettant de suivre l'endommagement éventuel du composite,



**FIGURE 5.4:** Effet d'une translation hors-plan (a) et d'une rotation hors-plan (b) sur la détermination du champ de déplacement dans le plan du capteur CCD dans le cas de l'utilisation d'un seul appareil photo [Sutton *et al.*, 2008].

- un appareil photo observant une face de l'éprouvette de pied préparée avec un mouchetis afin d'obtenir le champ de déplacement par CIN,
- deux capteurs LVDT,  $T_1$  et  $T_2$ , positionnés perpendiculairement à la face observée par CIN et mesurant le mouvement hors-plan de l'éprouvette (Fig. 5.5b).

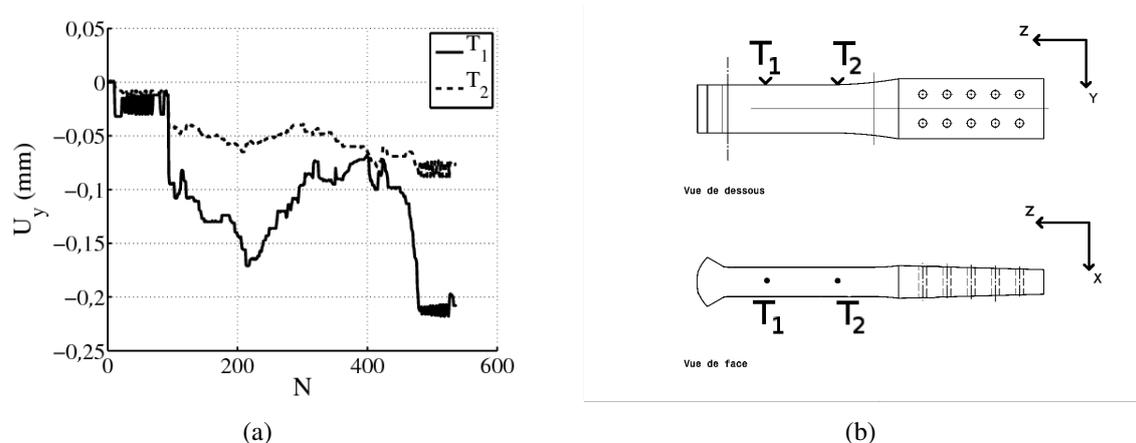
La maîtrise du mouvement hors-plan de l'éprouvette lors de l'essai est primordiale pour la mesure de champ de déplacement obtenue par CIN. Dans [Sutton *et al.*, 2008], il a été montré que pour une capture d'image faite avec un appareil photo muni d'un objectif standard, une translation, ou une rotation, hors-plan de l'éprouvette induit un champ de déplacement parasite. Les composantes suivant les deux axes du plan de mesure du champ de déplacement induites par une translation peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} U(\Delta Z) &\approx -\frac{L}{Z}X\left(-\frac{\Delta Z}{Z}\right) \\ V(\Delta Z) &\approx -\frac{L}{Z}Y\left(-\frac{\Delta Z}{Z}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $L$  est la distance entre l'image et la lentille du système optique,  $Z$  est la distance entre l'objet et la lentille et  $(X, Y)$  les dimensions de l'objet dans le plan (Fig. 5.4a). Les composantes suivant les deux axes du plan de mesure du champ de déplacement induites par une rotation d'angle  $\theta(\Delta Z)$  (Fig. 5.4b) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} U(\Delta Z) &\approx -\frac{L}{Z}X\left(-\frac{Y\sin\theta}{Z}\right) \\ V(\Delta Z) &\approx -\frac{L}{Z}Y\left(\cos\theta - 1 - \frac{Y\sin\theta\cos\theta}{Z}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pour l'essai considéré ici, le mouvement hors-plan n'est pas maîtrisé, mais la procédure expérimentale permet de le limiter. Les cycles de charge/décharge décrits



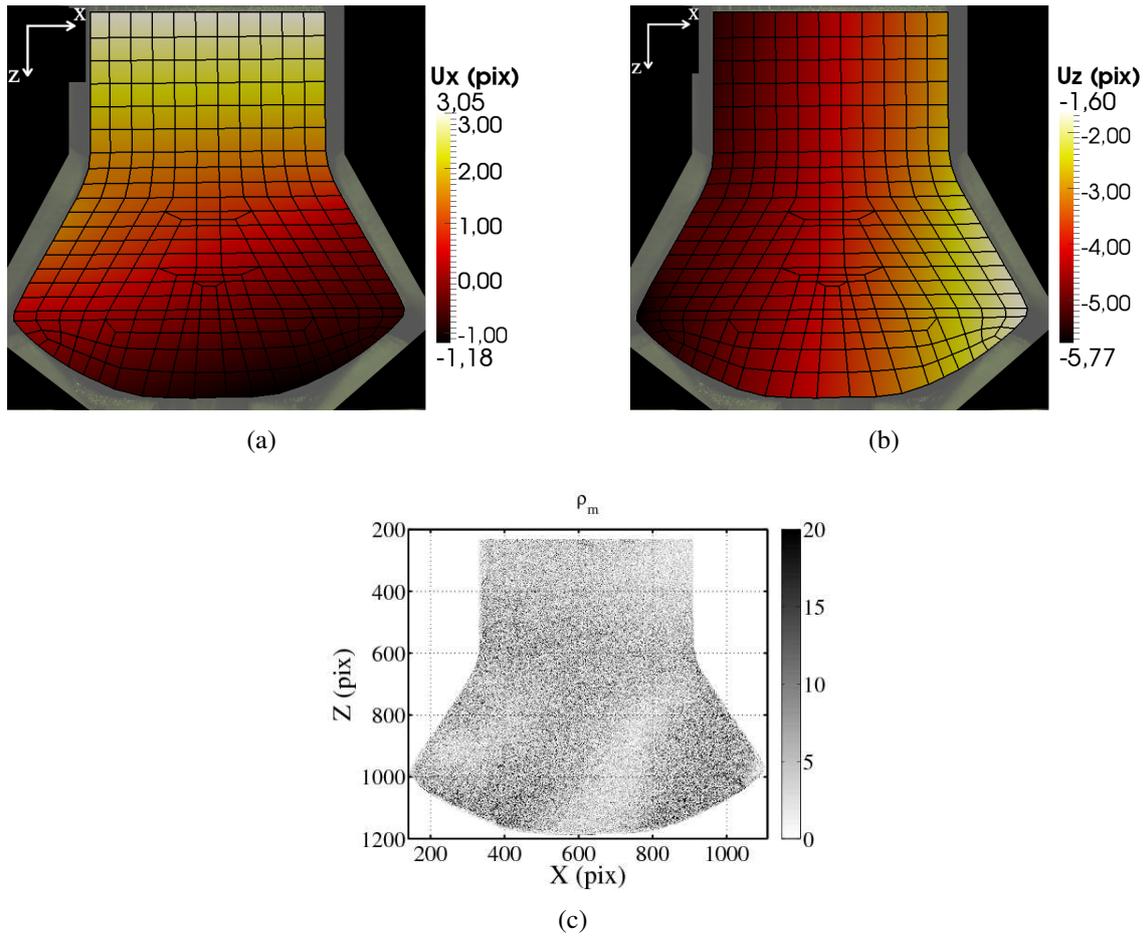
**FIGURE 5.5:** Évolution du déplacement mesuré par les capteurs LVDT (a). La position des capteurs LVDT est notée sur le plan de l'éprouvette de pied (b).

plus haut pour la mise en position assurent l'alignement du vérin et de l'éprouvette et par conséquent limitent le mouvement hors-plan pouvant apparaître durant l'essai. Deuxièmement, la mesure faite par les capteurs LVDT donne accès aux corrections éventuellement nécessaires pour obtenir un champ de déplacement mesuré non parasité.

Les variations mesurées par le capteur  $T_1$  sont de l'ordre de 0,1 mm (Fig. 5.5a). Une étude *a posteriori* de la planéité de l'éprouvette montre que le capteur a été placé dans la zone du congé de raccordement entre la face observée de l'éprouvette et la partie supérieure. L'éprouvette est positionnée à l'aide de plots de façon à avoir la face de mesure horizontale. On considère donc que le défaut de parallélisme entre la face de mesure et la face antérieure n'est pas pris en compte ici. Les mesures au comparateur faites dans un cercle de diamètre 6 mm autour de la position du capteur donnent des variations de l'ordre de 0,08 mm, ce qui est comparable aux variations observées par le capteur. Les variations observées sur le capteur  $T_2$  sont beaucoup plus faibles, de l'ordre de 0,04 mm. La mesure au comparateur dans un cercle de diamètre 6 mm autour de la position du capteur donne une variation de 0,03 mm. On considère donc qu'il n'y a pas de mouvement hors plan significatif du à un mauvais alignement suivant l'axe vertical de l'éprouvette de pied, mais simplement une variation due au défaut de planéité de la surface.

Une première mesure de champ de déplacement pour un chargement adimensionné de 50% montre que la sollicitation imposée à l'éprouvette n'est pas uniquement de la traction, on observe une légère sollicitation de flexion (Fig. 5.6). La rotation correspondante de la section supérieure du maillage est de  $0,27^\circ$ . On note ici l'importance de prendre en compte dans le calcul EF les conditions limites de l'essai et non celles supposées de traction simple. On observe sur le champ de déplacement une concentration de la zone de contact entre l'éprouvette et la portée gauche du mors. Celle-ci est due à la flexion induite par le chargement et entraînant une rotation du pied d'aube dans le mors. Par conséquent, les portées ne supportent plus uniformément la charge.

Grâce à cette première étude du chargement, on peut souligner le fait que les condi-



**FIGURE 5.6:** Champ de déplacement mesuré par CIN, pour un chargement adimensionné de 50%, suivant la direction horizontale  $x$  (a) et verticale  $z$  (b) exprimé en pixel. Carte des résidus correspondant à ce champ de déplacement mesuré (c).

tions de chargement ne sont pas exactement celles attendues. Néanmoins, on peut prendre en compte la flexion induite grâce à la CIN en utilisant les conditions aux limites mesurées en déplacement pour le calcul EF. De plus, un soin particulier a été apporté à la procédure expérimentale afin d'assurer un bon alignement de l'éprouvette et du vérin dans le plan de mesure ( $xz$ ).

### 1.1.1 Importation du maillage EF

Le maillage EF de l'éprouvette et du mors est défini par SNECMA dans le logiciel commercial ABAQUS<sup>TM</sup>. Comme précisé dans la Section 3, il s'agit de réaliser le calcul EF et la mesure par CIN sur le même maillage afin de limiter les erreurs d'interpolation et de profiter pleinement de l'ensemble du domaine d'étude et de la définition du zonage matériau et des directions d'orthotropie telles que proposées par SNECMA. Pour cela, il convient d'importer le maillage du pied d'aube dans l'environnement de travail, la plateforme LMTpp. Dans le premier cas de l'essai de flexion à trois points, la frontière du maillage était définie de manière parfaite par un rectangle. Dans le deuxième cas de l'assemblage de deux composites, les bords du maillage étaient définis à partir de la frontière de l'éprouvette observée sur l'image. Dans ce cas-ci, le maillage importé doit être ajusté sur l'image dans le repère de la CIN. La difficulté est de décrire au mieux les frontières réelles de l'éprouvette, mais aussi de garder le maillage conforme à la description donnée par SNECMA. Notamment, les angles et les zonages matériau doivent être respectés.

Considérons une description dans le plan complexe où la variable  $Z = x + iz$  représente le point de coordonnées  $(x, z)$ . Une fonction,  $f_r$ , recouvrant l'ensemble de l'image est définie telle que  $f_r(Z) = 1$  si  $Z$  est à l'intérieur du domaine, ici le pied d'aube, et 0 sinon. Le domaine, défini par une zone à l'intérieur de l'image et choisi par l'utilisateur, est appelé  $\Omega$ . De la même manière, le maillage issu de la modélisation EF est aussi décrit par une fonction  $f_m(\zeta) = 1$  si  $\zeta$  est à l'intérieur des frontières de ce dernier.

Le but étant de trouver la transformation permettant de passer de  $\zeta$  à  $Z$  à l'aide de  $N$  fonctions  $\psi_j(\zeta)$ , avec  $1 \leq j \leq N$  telles que

$$Z = \sum_j a_j \psi_j(\zeta) \quad (5.3)$$

où les  $a_j$  sont les amplitudes, inconnues, des fonctions  $\psi_j$ . Le cas le plus simple de transformation conservant les angles et les rapports de dimensions est une combinaison d'un mouvement de corps rigide et d'une homothétie. Ces deux transformations de base sont définies dans l'espace des complexes par les fonctions :

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) &= 1 \\ \psi_1(\zeta) &= \zeta \end{aligned} \quad (5.4)$$

Le terme  $a_0$ , complexe, représente la translation, sa partie réelle correspond à une translation suivant l'axe  $x$  et la partie imaginaire suivant l'axe  $z$ . Le terme  $a_1/|a_1|$  correspond à la rotation et  $|a_1|$  à l'homothétie. Ces termes sont complexes, de ce fait, afin d'avoir

des valeurs réelles d'amplitudes, les fonctions  $\psi_j$  et  $i\psi_j$  seront considérées comme deux degrés de liberté indépendants.

La transcription directe de l'algorithme de CIN adaptée pour ce cas-ci consiste en la minimisation sur les  $a_j$  de la fonctionnelle

$$\mathcal{W}^2(\mathbf{a}) = \iint_{\Omega} \left( f_r \left( \sum_j a_j \psi(\zeta) \right) - f_m(\zeta) \right)^2 d\zeta \quad (5.5)$$

Après linéarisation, cela consiste à résoudre de manière itérative le système

$$\delta \mathbf{a} = K^{-1} F \quad (5.6)$$

où

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla_x f_r(\zeta) \psi_i(\zeta) \nabla_x f_r(\zeta) \psi_j(\zeta) \quad (5.7)$$

et

$$F_i = \iint_{\Omega} \nabla f_r(\zeta) \psi_i(\zeta) (f_r - f_m) \quad (5.8)$$

La transformation correspondante est donc appliquée au maillage importé pour le recalcul sur l'éprouvette telle qu'apparaissant dans l'image.

La qualité de l'identification dépend directement de la précision de la modélisation proposée [Carrère *et al.*, 2009]. Il est donc primordial de recalculer le maillage sur l'image afin de décrire au mieux la géométrie de l'éprouvette dans sa configuration d'essai. Une méthode de détection de contour basée sur la CIN est présentée dans [Réthoré et François, 2011]. Dans le cas du pied d'aube, le maillage 2D est importé à partir d'un logiciel de CAO (Fig. 5.7). Une première transformation grossière, consistant en une translation de l'origine du repère CAO au centre de l'image et d'une homothétie permettant de passer des coordonnées en mm aux coordonnées en pixel, est effectuée.

Les frontières de l'éprouvette obtenues sur l'image de référence et à partir du modèle CAO recalculé grossièrement sont montrées sur la figure 5.8. Le champ de déplacement résultant de la minimisation de l'équation 5.5 est montré sur la figure 5.9. Ce champ de déplacement est exprimé en pixel et défini sur l'ensemble de l'image. Une fois appliqué au maillage EF, la frontière du modèle EF est proche de la géométrie réelle de l'éprouvette (Fig. 5.10). Néanmoins, on peut voir un écart non négligeable entre les deux frontières au niveau de la largeur de la partie supérieure du pied. Des écarts plus faibles sont aussi visibles au niveau des portées. Cela est due aux tolérances de fabrication du procédé RTM qui ne permettent pas d'obtenir une éprouvette aux dimensions exactes du modèle CAO. Il est donc nécessaire d'adapter le modèle CAO et donc le maillage EF à la géométrie réelle de l'éprouvette. Pour cela, les nœuds de bord sont projetés sur la frontière effective de l'éprouvette suivant sa normale. Le maillage est à présent parfaitement recalculé sur l'image (Fig. 5.11).

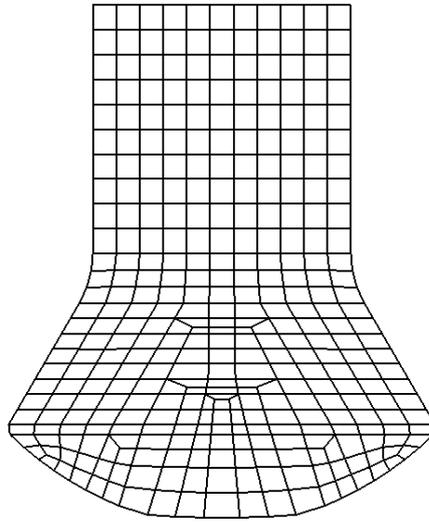


FIGURE 5.7: Maillage du pied d'aube extrait de la modélisation CAO.

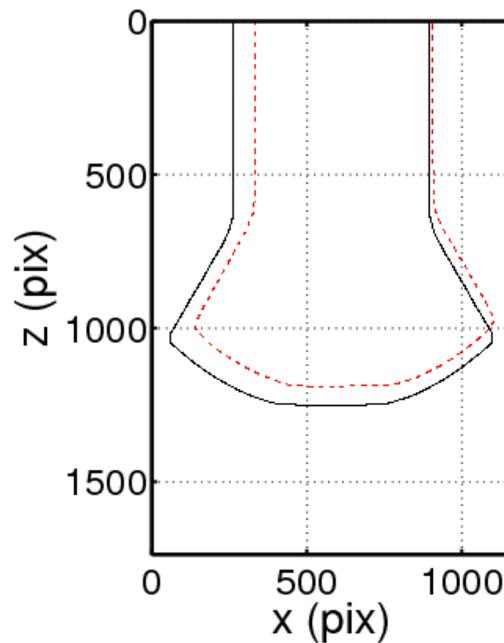
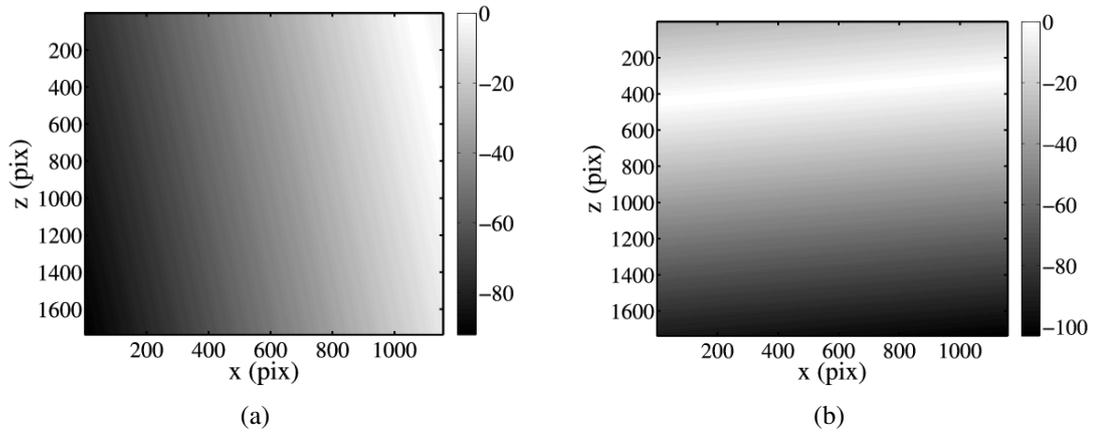
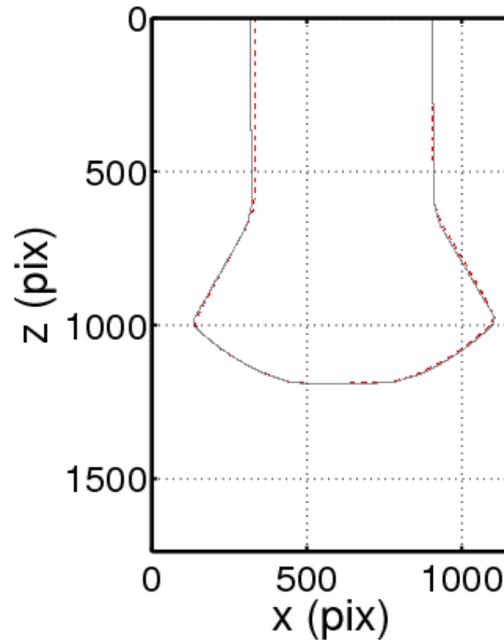


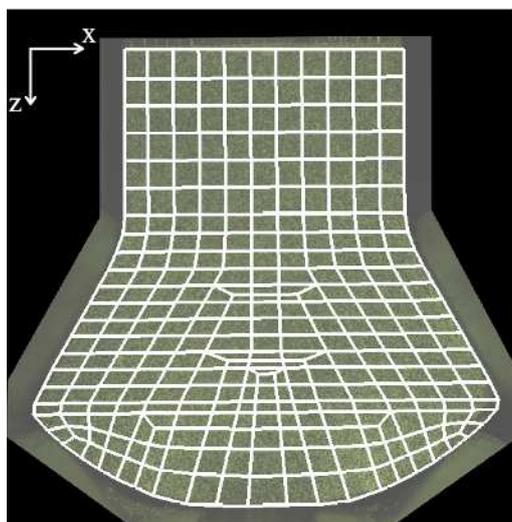
FIGURE 5.8: Frontière du modèle CAO importé et recentré grossièrement sur l'image en trait plein noir et frontière de l'éprouvette testée obtenue sur l'image de référence en trait pointillé.



**FIGURE 5.9:** Champ de déplacement sur l'ensemble de l'image exprimé en pixel sur l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b) permettant de recalibrer le maillage sur l'image.



**FIGURE 5.10:** Frontière du modèle EF, en trait plein gris, une fois ajusté sur la frontière de l'éprouvette testée, représentée en trait pointillé.

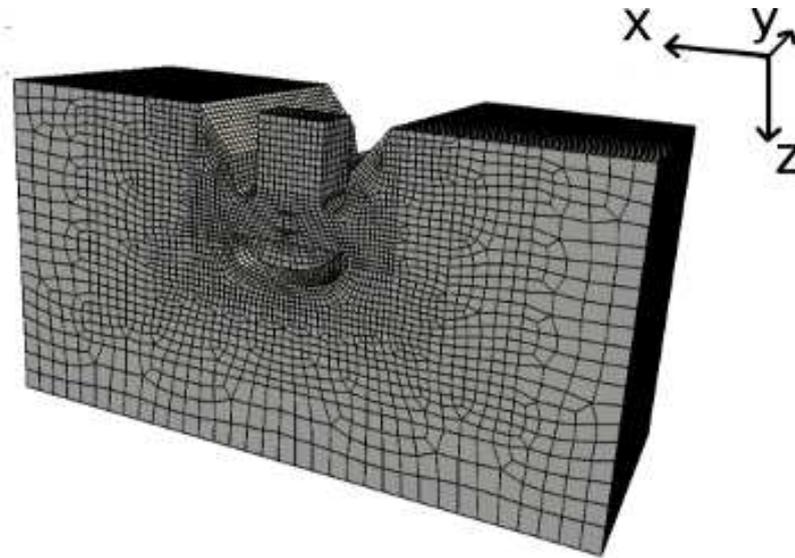


**FIGURE 5.11:** Maillage EF recalé sur l'image de référence après projection des nœuds de bords sur la frontière réelle de l'éprouvette.

## 1.2 Approximation faite par la modélisation 2D

La modélisation 2D est retenue pour faciliter le calcul EF et sa comparaison avec la mesure par CIN qui est faite en deux dimensions. Comme pour les applications précédentes, une hypothèse de déformations planes est choisie. Cette approximation du calcul 2D en déformations planes peut être justifiée par l'épaisseur de l'éprouvette relativement conséquente par rapport aux autres dimensions.

Une comparaison est proposée ici entre un calcul EF 3D et un calcul EF 2D afin de quantifier l'erreur commise par l'approximation de déformations planes. Une modélisation 3D de l'éprouvette et du mors est faite. L'éprouvette est tronquée dans sa partie supérieure n'ayant pas d'informations fiables sur le déplacement imposé à son extrémité par le vérin de traction. Le mors quant à lui est fixé sur le bâti et donc modélisé entièrement. Le maillage EF correspondant est montré sur la figure 5.12. Le comportement du pied d'aube évolue au sein de la structure, le modèle EF correspondant est donc divisé en zones ayant un comportement différent, les paramètres matériau sont définis par zone. Les directions d'orthotropie, quant à elles, sont définies par élément. Dans ce calcul 3D, la difficulté majeure consiste à prendre en compte le contact entre le mors et l'éprouvette de pied. Le contact retenu est un contact frottant, du fait de la présence de bande "wear strip" sur les portées de pied. Ces bandes ne sont pas prises en compte dans la modélisation, seul le coefficient de frottement,  $f$ , correspondant est appliqué au modèle. Une méthode de calcul a été développée au sein du laboratoire, dénommée LATIN [Blanze *et al.*, 1996, Champaney *et al.*, 1997], permettant de gérer les problèmes de contact entre différentes sous-structure de la modélisation 3D. Dans notre cas, chaque zone matériau est considérée comme une sous-structure ayant entre elle et une autre sous-structure du pied d'aube des conditions d'interface parfaitement continue et entre elle



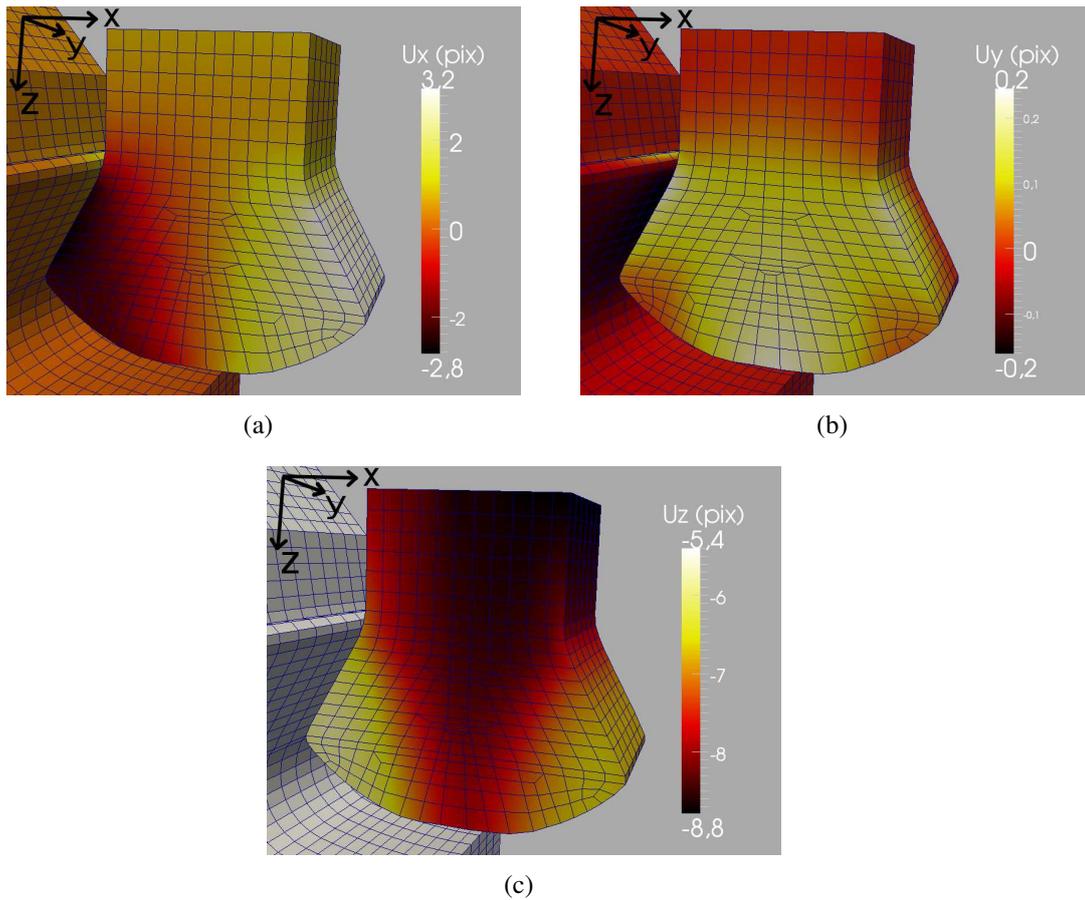
**FIGURE 5.12:** Maillage EF 3D du pied et du mors.

et le mors, si il y a contact, une interface de type contact frottant possédant le coefficient de frottement  $f$ . Celui-ci est considéré constant sur l'ensemble du contact entre l'éprouvette et le mors et constant dans le temps. La méthode de calcul est itérative, chaque sous-structure est calculée indépendamment des autres dans une première phase puis une seconde phase actualise les conditions limites aux interfaces. Les conditions limites du calcul sont imposées en déplacement. Premièrement, sur la face supérieure de l'éprouvette, on applique le déplacement mesuré par CIN sur la ligne supérieure du maillage 2D et extrapolée dans l'épaisseur, c'est-à-dire suivant l'axe  $y$ . Deuxièmement, sur la face inférieure du mors, un encastrement est imposé. Enfin, une condition de symétrie du problème est ajoutée suivant le plan  $(xz)$ . La méthode LATIN présente l'avantage de pouvoir traiter de gros problèmes avec des modèles d'interface très variés.

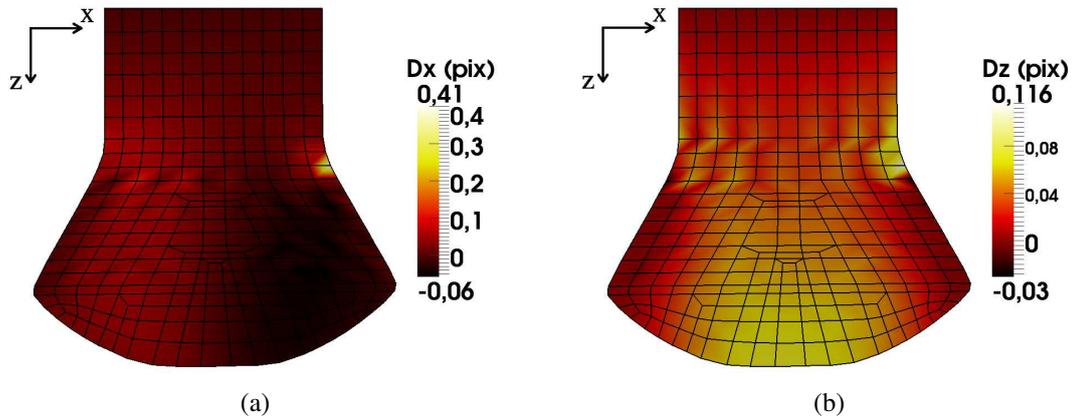
Le résultat du calcul est obtenu en 114 min sur un ordinateur équipé d'un processeur Intel Xeon W3520 de fréquence 2,6 GHz et de 8 Go de mémoire vive. Le champ de déplacement calculé du pied d'aube est présenté sur la figure 5.13 suivant les trois axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que définis sur les figures précédentes.

Premièrement, on remarque qu'il y a effectivement un déplacement hors-plan, suivant la direction  $y$  (Fig. 5.13b), au niveau de la surface observée par CIN. Bien que celui-ci soit faible, on réalise donc une approximation en modélisant uniquement un calcul 2D sous hypothèse de déformations planes. Deuxièmement, on retrouve la dissymétrie du chargement sur le champ de déplacement suivant l'axe  $x$  (Fig. 5.13a) et l'axe  $z$  (Fig. 5.13c).

Afin de caractériser cette erreur, l'écart entre ce calcul 3D et un calcul 2D est tracé sur la figure 5.14. Le calcul 2D est réalisé avec pour conditions aux limites les déplacements calculés avec le modèle 3D imposés au niveau des portées et de la face supérieure du pied d'aube. Cette différence reste faible, inférieure à 0,1 pixel, sauf en un point en sortie



**FIGURE 5.13:** Champ de déplacement calculé avec une modélisation 3D de l'essai projeté suivant la direction  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c). Le mors a été tronqué afin d'améliorer la visibilité.



**FIGURE 5.14:** Différence entre le champ de déplacement calculé avec la modélisation 3D et celui calculé avec la modélisation 2D.

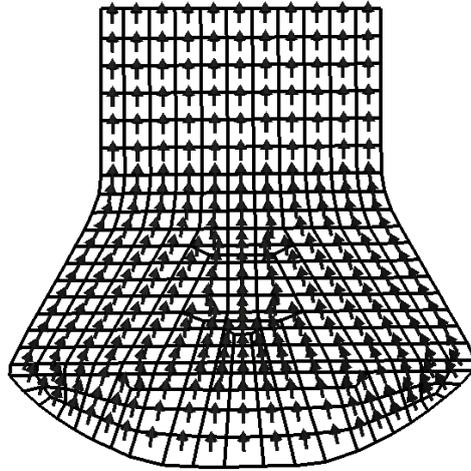
de portée droite (Fig. 5.14a). Celle-ci influence le résultat d'identification, néanmoins, on choisit dans cette étude de se limiter à une modélisation 2D pour le calcul EF et pour la mesure de champ par CIN.

### 1.3 Modélisation EF homogène

Comme décrit dans la Section 1.1.1, le maillage 3D est importé dans l'environnement de travail, on en extrait un maillage de peau 2D et on le recale sur les images afin d'avoir une description de la géométrie de l'éprouvette testée.

Dans un premier temps, on suppose un comportement local homogène sur l'ensemble du maillage du pied. Seules les directions d'orthotropie varient localement (Fig. 5.15). On possède ici l'avantage de disposer à travers la CIN d'informations cinématiques sur l'essai. Notamment, on peut se permettre de s'affranchir des problèmes de contact entre le mors et l'éprouvette en imposant les déplacements mesurés au niveau des portées du pied d'aube. De plus, par la disposition du montage d'essai, on peut identifier les bords libres et les définir comme tels dans le calcul EF. Enfin, on choisit aussi d'imposer les déplacements mesurés au niveau de la partie haute du pied pour prendre en compte le chargement "réel" appliqué à l'éprouvette (Fig. 5.16).

Les conditions aux limites sont donc de type cinématique. Il en résulte une identification relative des paramètres matériau par rapport à l'un d'eux qui est fixé. Néanmoins, on possède aussi une information statique, la résultante suivant l'axe  $z$  de l'effort de traction, mesuré au niveau du vérin. En toute rigueur, l'axe de traction diffère de l'axe  $z$  de l'image puisque l'orientation de l'appareil photo est seulement assurée par le montage expérimental et la qualité des surfaces de mise en position des différentes parties. L'appareil photo est ici fixé à un support encasté sur le mors afin de pouvoir suivre le chargement en flexion. Par conséquent, les erreurs de parallélisme et de planéité due aux



**FIGURE 5.15:** Directions principales d'orthotropie définies par élément sur le maillage 2D.

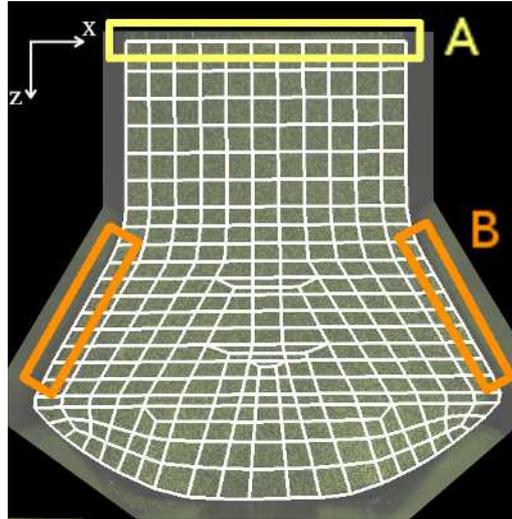
tolérances de fabrication et au mésalignement de l'éprouvette et du vérin de traction sont les seules sources d'écart entre l'axe  $z$  défini par l'image et l'axe de traction. On considère que les erreurs dues aux tolérances de fabrication sont du second ordre par rapport aux autres incertitudes prises en compte par la suite. Le défaut d'alignement du vérin de traction et du mors induit une sollicitation de flexion (Fig. 5.6). Toutefois, la projection de l'effort de traction, mesuré suivant l'axe du vérin, sur l'axe  $z$  de l'image entraîne une erreur faible,  $1 - \cos(0,27) \simeq 10^{-5}$ . Par la suite, on suppose donc que l'effort mesuré suivant l'axe du vérin de traction est égal à l'effort suivant l'axe  $z$  de l'image. Cette information statique permet ensuite de recalculer les modules relatifs en identifiant le paramètre matériau fixé dans un premier temps, ici  $E_1$ .

Enfin, la matrice de rigidité doit être définie positive. Cela impose des conditions sur les paramètres matériau dans le plan 13,  $G_{13} > 0$ ,  $E_3 > 0$ ,  $E_1 > 0$  et  $1 - \nu_{31}\nu_{13} > 0$ . Afin de garantir ces conditions et de travailler avec des sensibilités relatives, on propose de prendre comme paramètres matériau identifiés, le logarithme des rapports de module élastique,  $\ln(G_{13}/E_1)$ ,  $\ln(E_3/E_1)$  et  $\nu_{13}$  en bornant ce dernier.

## 1.4 Identification

L'identification est menée pour une paire d'image 123 – 139, correspondant à 50% de la charge maximale mesurée. La minimisation de  $\mathcal{R}$  (Eq. 3.12) est réalisée grâce à un algorithme de Newton-Raphson, itérant sur les paramètres  $\{\mathbf{p}\}$ . Leurs valeurs initiales seront dénommées  $\{\mathbf{p}^0\}$  et  $\{\mathbf{p}^{(s)}\}$ , leurs valeurs à l'itération  $s$ . L'incrément  $\{\delta\mathbf{p}^{(s+1)}\}$  est égal à  $\{\mathbf{p}^{(s+1)}\} - \{\mathbf{p}^{(s)}\}$  et est issu de la résolution de

$$\{\delta\mathbf{p}^{(s+1)}\} = ([\mathbf{P}^{(s)}]^t [\mathbf{M}] [\mathbf{P}^{(s)}])^{-1} [\mathbf{P}^{(s)}]^t [\mathbf{M}] (\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca(s)}\}) \quad (5.9)$$



**FIGURE 5.16:** Zones d'application des conditions aux limites en déplacement sur la partie supérieure du pied d'aube, A et les portées B.

avec

$$P_{ij}^{(s)} = \frac{\partial u_i^{ca(s)}}{\partial p_j^{(s)}} \quad (5.10)$$

L'algorithme de Newton-Raphson utilisé pour minimiser l'écart entre le champ de déplacement mesuré et calculé fait intervenir les champs de sensibilités des paramètres  $P_{ij}^{(s)}$  obtenus par calcul analytique. Ces champs reflètent l'influence des différents paramètres identifiés sur le champ de déplacement calculé. On remarque que dans le cas de la modélisation homogène proposée, la partie inférieure du pied présente un champ de déplacement sensible aux variations des paramètres identifiés (Fig. 5.17).

Lors de la résolution du problème itératif, l'équation 5.9 est relaxée telle que si l'incrément calculé est supérieur à 10% de la valeur nominale du paramètre  $p_i$ , alors l'incrément effectif est seulement  $0.1\{\delta p^{(s)}\}$ .

Le résultat de la première étape d'identification montre une convergence rapide de l'algorithme. L'évolution des différents paramètres et du résidu d'identification normalisé,  $R_n = [(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})] / (\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})$ , est montrée sur la figure 5.18. Bien que les valeurs initiales  $\{\mathbf{p}^0\}$  soient choisies proches des valeurs attendues, à convergence de l'algorithme, les valeurs identifiées sont éloignées des valeurs nominales. Notamment, le coefficient de Poisson identifié est trois fois supérieur à sa valeur nominale.

#### 1.4.1 Analyse d'incertitude

Comme cela a été présenté dans le Chapitre 4 Section 1, une analyse d'incertitude est menée afin d'avoir une estimation de la qualité des résultats d'identification obtenus.

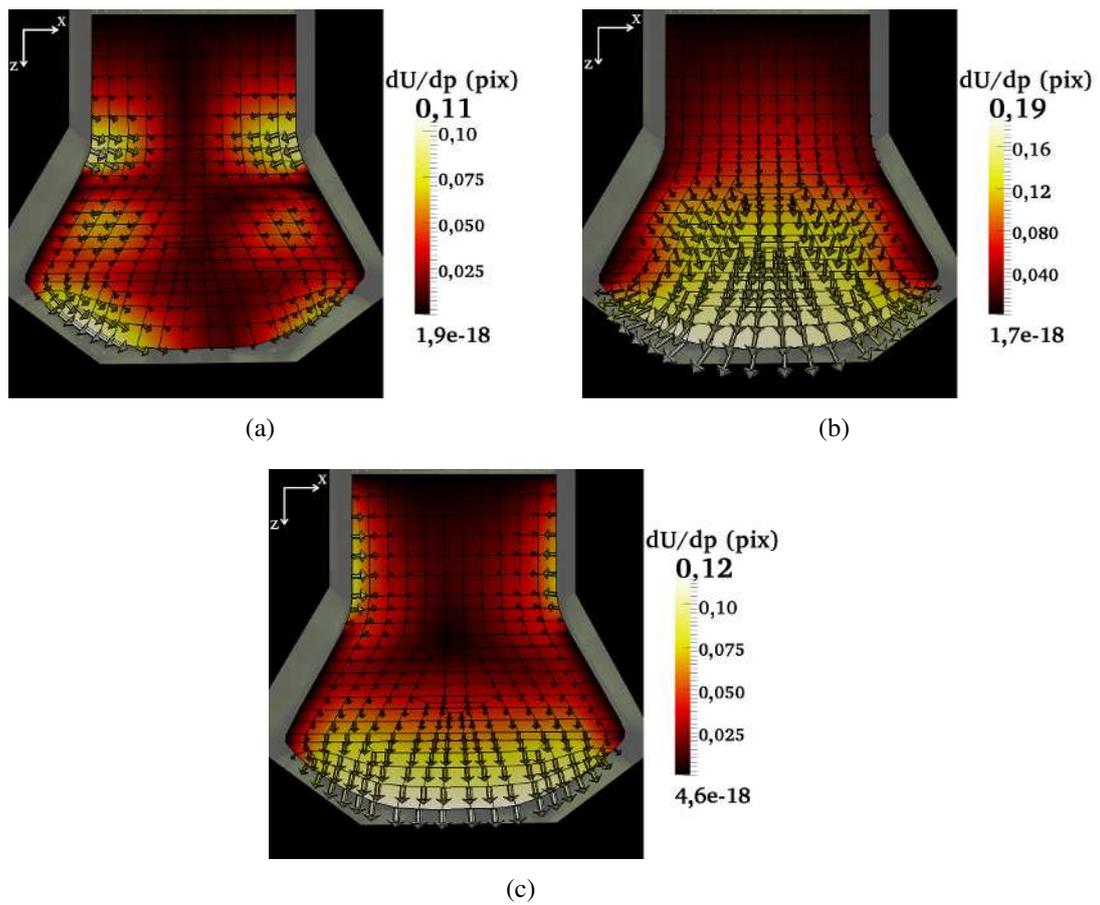
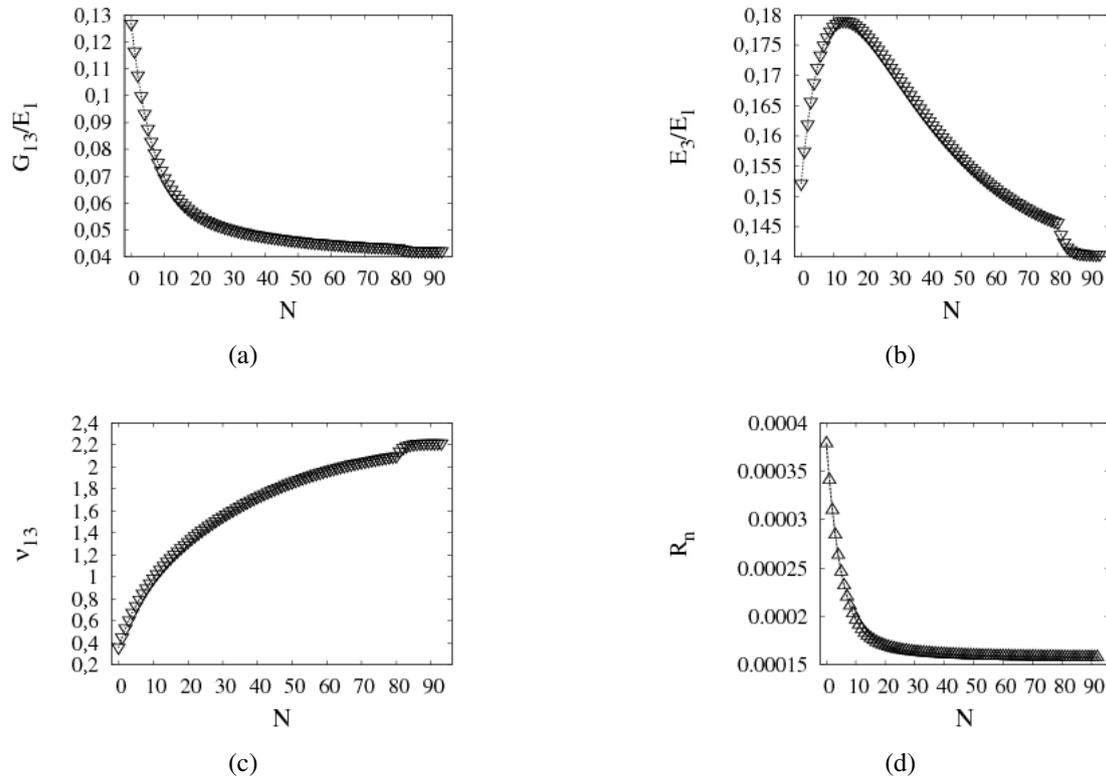


FIGURE 5.17: Champ de sensibilité pour les trois paramètres matériau identifiés,  $\ln(G_{13}/E_1)$  (a),  $\ln(E_3/E_1)$  (b) et  $\nu_{13}$  (c).



**FIGURE 5.18:** Évolution des trois paramètres matériau identifiés, (a)  $G_{13}/E_1$ , (b)  $E_3/E_1$  et (c)  $\nu_{13}$ , et (d) résidu normalisé  $R_n = \frac{(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})}{\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me}}$  en fonction du nombre d'itération.

L'analyse faite précédemment était une analyse statistique. Il est aussi possible de faire une analyse théorique grâce aux méthodes utilisées, la CIN et la FEMU.

L'analyse d'incertitude consiste à définir l'influence du bruit du capteur CCD sur les paramètres matériau identifiés. Il est montré dans [Roux et Hild, 2006] qu'il est possible analytiquement de relier,  $\sigma^2$ , la variance du bruit du capteur CCD, à l'incertitude sur le champ de déplacement mesuré à travers sa matrice de covariance  $[\mathbf{C}_U]$  et la matrice de corrélation  $[\mathbf{M}]$  :

$$[\mathbf{C}_U] \equiv \langle \{\delta \mathbf{u}\} \otimes \{\delta \mathbf{u}\} \rangle = 2\sigma^2 [\mathbf{M}]^{-1} \quad (5.11)$$

or, on peut aussi noter l'équation 5.9 comme

$$\{\delta \mathbf{p}\} = ([\mathbf{P}]^t [\mathbf{M}] [\mathbf{P}])^{-1} [\mathbf{P}]^t [\mathbf{M}] \{\delta \mathbf{u}\} \quad (5.12)$$

où  $\{\delta \mathbf{u}\}$  et  $\{\delta \mathbf{p}\}$  sont les variations des quantités  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  dues au bruit du capteur CCD. On peut alors obtenir la matrice de covariance des paramètres matériau directement liée au bruit de variance  $\sigma^2$  :

$$[\mathbf{C}_p] \equiv \langle \delta \mathbf{p} \otimes \delta \mathbf{p} \rangle = 2\sigma^2 ([\mathbf{P}]^t [\mathbf{M}] [\mathbf{P}])^{-1} \quad (5.13)$$

La diagonale de cette matrice de covariance  $[\mathbf{C}_p]$  donne les variances des différents paramètres pris indépendamment. Or dans l'algorithme d'identification, l'ensemble des paramètres est identifié simultanément, il convient donc de prendre en compte l'ensemble de la matrice de covariance afin d'estimer au mieux les incertitudes. La diagonalisation de la matrice  $[\mathbf{N}] \equiv [\mathbf{P}]^t [\mathbf{M}] [\mathbf{P}]$  (Eq.5.14) permet de se situer dans l'espace des valeurs propres où chaque combinaison de paramètres est indépendante des autres.

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{V}]^t [\mathbf{D}] [\mathbf{V}] \quad (5.14)$$

Il n'y a donc plus de couplage entre les différents paramètres. Une estimation de la variance,  $\tau_i$ , du paramètre correspondant au  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre peut donc être faite dans cet espace :

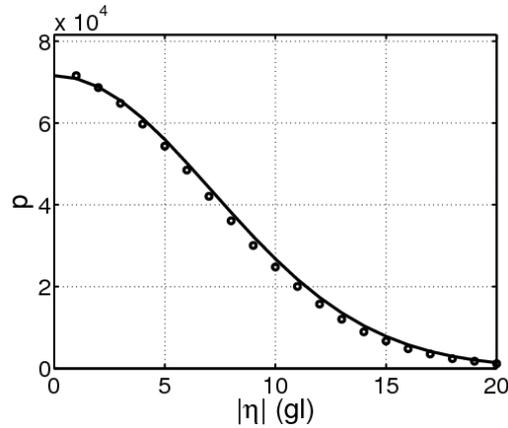
$$\tau_i^2 = \frac{2\sigma^2}{D_{ii}} \quad (5.15)$$

Puis, en projetant ce vecteur de variances dans l'espace des paramètres matériau identifiés, nous avons accès à la variance globale réelle  $\sigma_{p_k}^2$  de chacun d'eux, fonction de la variance du bruit du capteur CCD,  $\sigma^2$  (Eq. 5.16).

$$\sigma_{p_k}^2 = 2\sigma^2 \sum_i \frac{V_{ki}^2}{D_{ii}} \quad (5.16)$$

#### 1.4.2 Application au cas du pied d'aube

Premièrement, il convient de caractériser le bruit du capteur CCD. Pour cela, on dispose de  $n$  images prises pour le même état, non sollicité, de l'éprouvette. Ces  $n$  images doivent donc être exactement les mêmes mis à part le bruit du capteur CCD. Toutefois, des



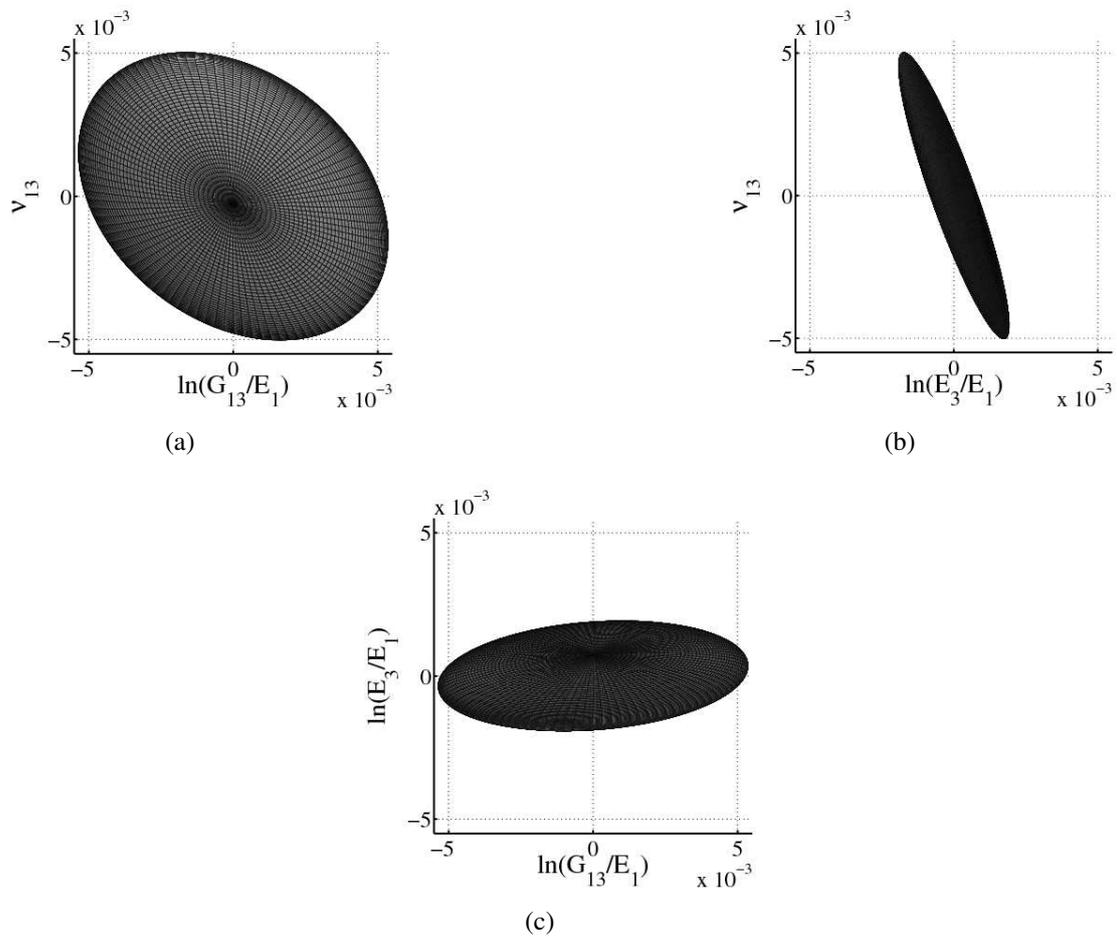
**FIGURE 5.19:** Histogramme de la valeur absolue de la différence pixel à pixel entre deux images. Les données obtenues sont tracées avec des cercles, une gaussienne ajustée sur ces points (courbe en trait plein) sert de guide. La dynamique des images est de 1024 niveaux de gris.

mouvements de corps rigide sont observables entre ces différentes images. Une mesure de champ de déplacement menée entre la première et toutes les autres images permet de corriger ces dernières pour les ramener sur la première image. On peut ensuite faire une simple différence pixel à pixel de deux images pour obtenir le signal du bruit du capteur présent sur les deux images. Prenons  $\sigma$  comme étant l'écart-type du bruit du capteur CCD, la variance du signal obtenu par différence pixel-à-pixel est donc  $2\sigma^2$ , on considère que le bruit du capteur CCD présent sur les deux images, de référence et déformée, est concentré sur l'image de référence. La moyenne est nulle. Pour l'ensemble des paires d'images, l'écart-type  $\sigma$  du bruit varie. On choisit de prendre la moyenne des différents écarts-types obtenus caractérisant au mieux le bruit du capteur CCD.

Les données obtenues pour une paire d'images dont l'écart-type correspond à la moyenne citée plus haut sont tracées sur la figure 5.19. On montre donc que l'on peut modéliser le bruit du capteur CCD par une gaussienne d'écart-type  $\sigma = 5,5$  niveaux de gris et de moyenne nulle.

À partir de la connaissance de la matrice  $[\mathbf{N}]$  à convergence de l'algorithme d'identification et de l'équation 5.16, on peut obtenir les incertitudes des trois paramètres matériau identifiés dans ce cas-ci. Le détail des calculs est présenté en annexe B. Les valeurs propres et vecteurs propres de  $[\mathbf{N}]$  permettent d'en avoir une représentation graphique dans l'espace des paramètres matériau (Fig. 5.20). On remarque que l'incertitude des paramètres pris indépendamment est bien inférieure à l'incertitude réelle (Table 5.1).

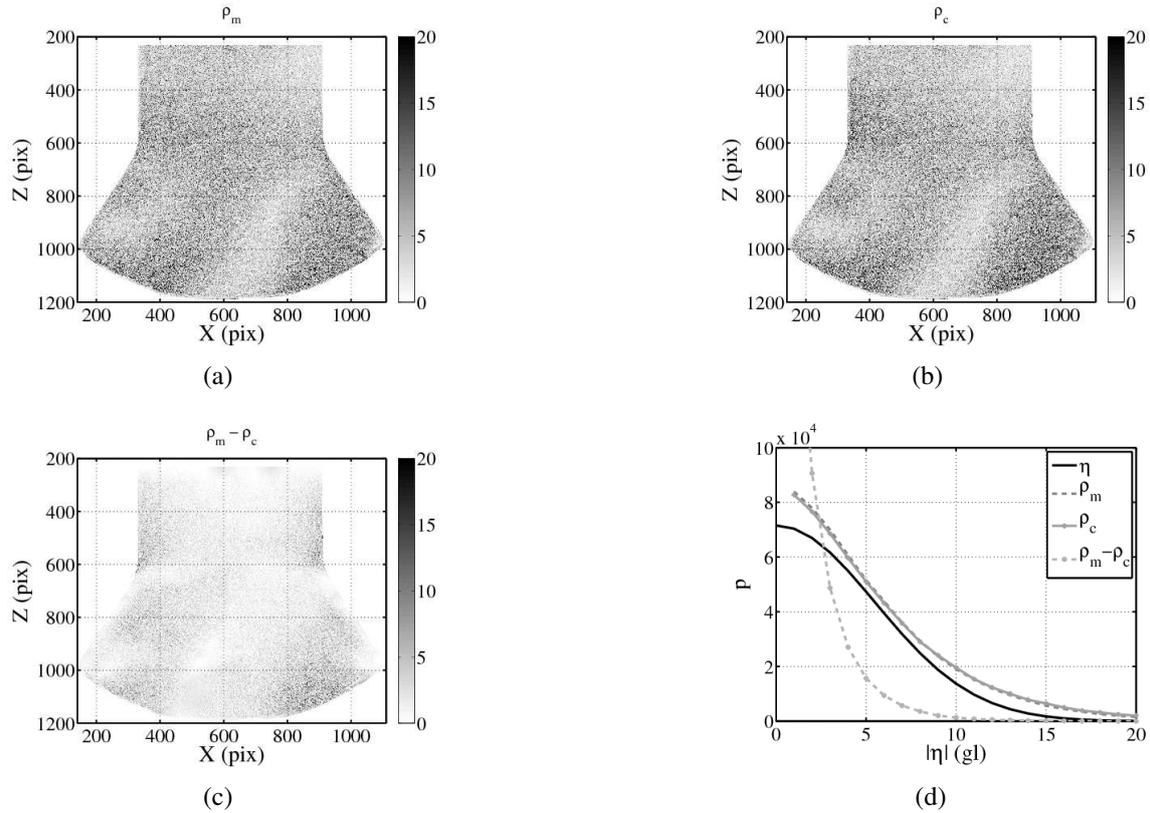
La qualité de l'identification peut aussi être estimée grâce à des cartes de résidus en niveaux de gris. De ce fait, l'étude, fondée sur les images numériques prises au cours de l'essai et la CIN, est validée sur ces mêmes images. Pour tout champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , l'image déformée  $g$  peut être corrigée par  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_m(\mathbf{x}))$  où  $\mathbf{u}_m$  est le champ de déplacement mesuré. Le résidu en niveau de gris est défini par  $\rho_m(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_m(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})$ . La figure 5.21a montre la carte des résidus  $\rho_m$ . Excepté en quelques points, celle-ci reste très



**FIGURE 5.20:** Projection des incertitudes dans les trois plans (a)  $(v_{13}, \ln(G_{13}/E_1))$ , (b)  $(v_{13}, \ln(E_3/E_1))$  et (c)  $(\ln(E_3/E_1), \ln(G_{13}/E_1))$ .

**TABLE 5.1:** Écart-type sur chaque paramètre identifié en considérant les autres fixés (colonne 2) ou en prenant en compte l'ensemble des incertitudes de chaque paramètre (colonne 3).

Paramètre	Valeur identifiée	Incertitude du paramètre seul	Incertitude globale
$\ln(G_{13}/E_1)$	$\ln(0,042)$	$5 \times 10^{-3}$	$5,3 \times 10^{-3}$
$\ln(E_3/E_1)$	$\ln(0,14)$	$0,8 \times 10^{-3}$	$1,9 \times 10^{-3}$
$v_{13}$	2,2	$2 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$



**FIGURE 5.21:** Résidus en niveau de gris associés à l'étape de mesure et à l'identification : (a) résidus de mesure  $\rho_m$ , (b) résidus d'identification  $\rho_c$ , (c)  $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histogrammes de niveaux de gris  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris.

faible. L'écart-type  $\sigma_m = 6,8$  niveaux de gris est très proche de celui correspondant au bruit seul ( $\sigma = 5,5$  niveaux de gris). Le champ de déplacement mesuré est validé pour son utilisation pour l'identification.

De même, on peut réaliser cette opération avec le champ de déplacement calculé à convergence de l'algorithme d'identification. Les résidus correspondants sont calculés en corrigeant l'image déformée  $g$ , telle que  $\rho_c(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_c(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{u}_c$  est le champ de déplacement calculé. Ce champ de résidu caractérise la qualité de l'identification. La figure 5.21b montre la carte de résidus correspondante. Elle apparaît semblable à la carte  $\rho_m(\mathbf{x})$  et son écart-type  $\sigma_c = 8,2$  niveaux de gris est très proche de celui du bruit seul ( $\sigma = 5,5$  niveaux de gris). Ce résultat valide la qualité de l'identification.

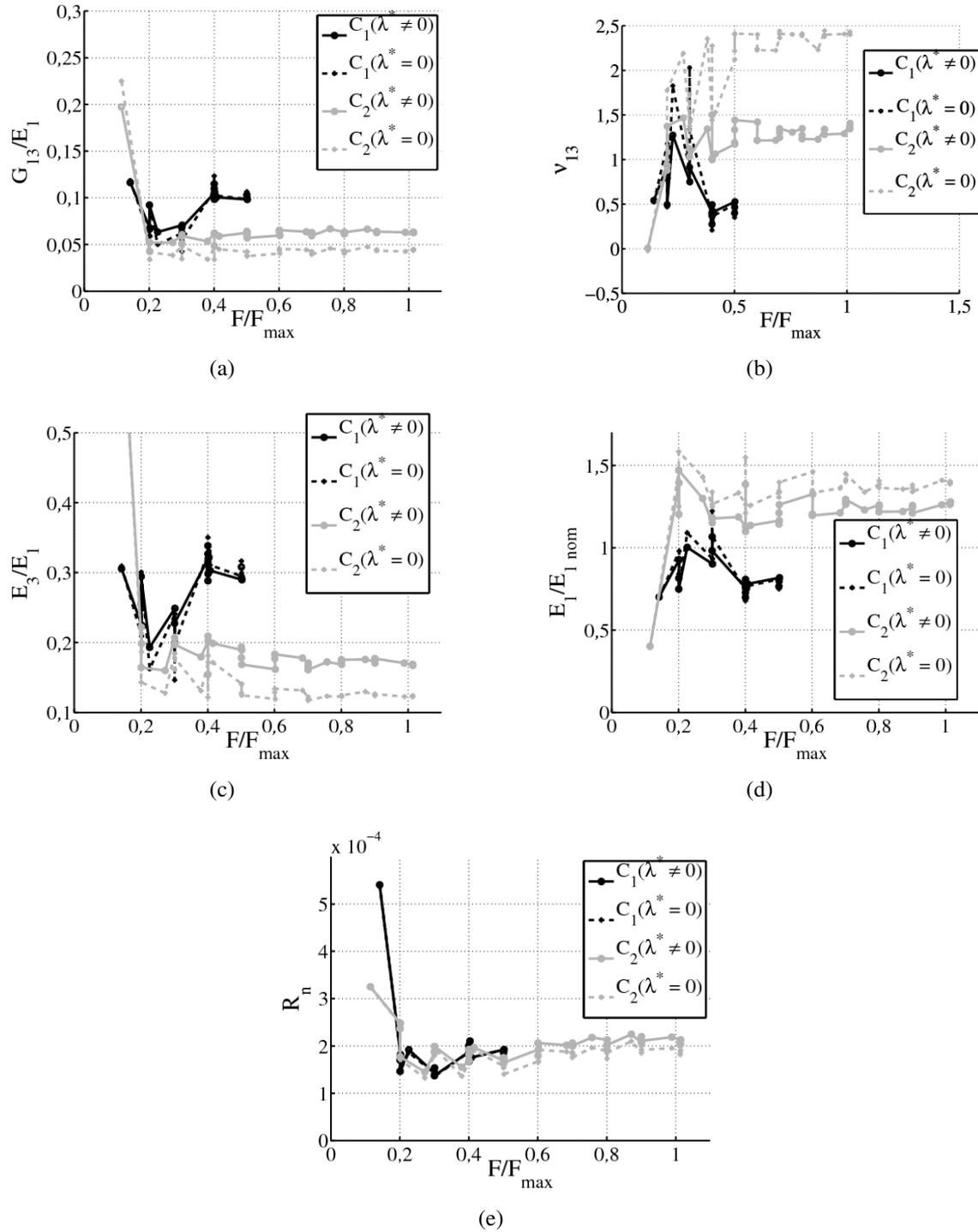
En dernier lieu, l'écart entre le champ de déplacement mesuré et calculé est représenté sur la figure 5.21c par la différence des deux champs précédents. Ces résultats sont résumés en termes d'histogramme sur la figure 5.21d. De légers écarts sont visibles entre le bruit du capteur CCD, le résidu mesuré et le résidu calculé. L'écart entre les champs de déplacement mesuré et calculé mène naturellement à des niveaux inférieurs.

Les résultats présentés jusqu'à présent correspondent à une paire d'images 123 – 139. Procédons maintenant à l'analyse de l'ensemble des images situées sur la courbe de chargement. On rajoute aussi une régularisation de l'algorithme d'identification, telle que présentée dans la Section 2.3. La première charge est nommée  $C_1$  et la seconde  $C_2$ . Les résultats d'identification sans régularisation ( $\lambda^* = 0$ ) sont en trait pointillé et avec régularisation ( $\lambda^* \neq 0$ ) en trait plein (Fig. 5.22). On remarque que les modules élastiques identifiés sur la seconde charge sont stables, mis à part pour les faibles chargements. Néanmoins, grâce à la régularisation, le coefficient de Poisson identifié dans les premiers niveaux de chargement est beaucoup moins erratique (Fig. 5.22b). Les résidus normalisés d'identification,  $R_n = [(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})]/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})$  sont faibles, excepté pour les premiers états de chargement correspondants aussi aux incertitudes les plus élevées (Fig. 5.23). Les incertitudes dues au bruit d'acquisition du capteur CCD décroissent très rapidement pour atteindre un niveau raisonnable, inférieur à 5%, pour une charge supérieure à 50% de la charge maximale.

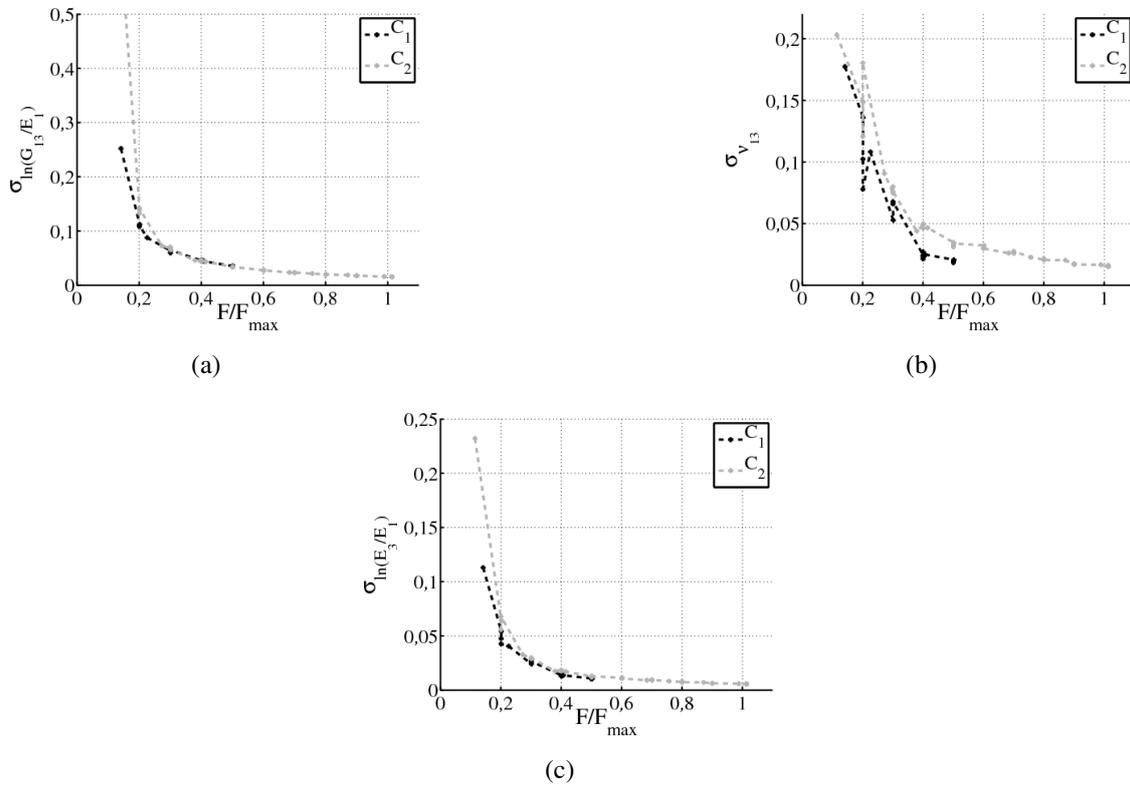
Toutefois, les résultats, et notamment la carte de résidus locaux (Fig. 5.21c), montre que la modélisation proposée ne permet pas de rendre compte du comportement du pied d'aube. Une modélisation plus complexe comportant un zonage matériau serait plus à même de correspondre au comportement recherché.

## 1.5 Modélisation avec zonage matériau

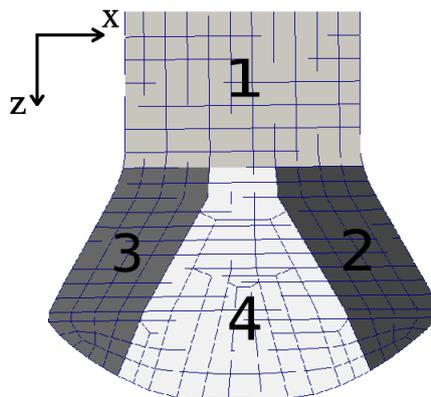
Dans un premier temps, une partition en quatre zones matériau est présentée (Fig. 5.24). Chacune des zones matériau possède un comportement orthotrope dont les paramètres matériau sont à identifier, les directions principales d'orthotropie sont fixées telles que précédemment (Fig. 5.15). Le nombre de paramètres à identifier augmente considérablement, les paramètres matériau étant de quatre dans chaque zone  $i = [1, 2, 3, 4]$ ,  $\ln(E_1^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\ln(E_3^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\ln(G_{13}^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\nu_{13}^i$ , excepté pour la zone 1 pour laquelle le module élastique  $E_1^1$  est fixé à sa valeur nominale. Une fois l'identification menée à partir des informations cinématiques disponibles par CIN, ce module élastique  $E_1^1$  est identifié grâce à la mesure d'effort résultant sur l'axe du vérin de traction. Cet effort résultant doit être égal à la somme des efforts nodaux de la ligne supérieure du maillage de pied d'aube (zone notée A sur la figure 5.16). Les valeurs nominales des différents paramètres matériau sont présentées dans le tableau 5.2 (celles-ci consistent en une estimation issue des paramètres matériau obtenus par homogénéisation proposés par SNECMA). Les résultats d'identification sont tracés sur la figure 5.26 pour la seconde rampe de chargement. On remarque que pour les premiers pas de chargement, les valeurs identifiées sont assez bruitées, puis à partir d'un chargement supérieur à 50%, on observe une stabilisation de celles-ci. Le ratio signal/bruit devient alors suffisant pour identifier l'ensemble des paramètres matériau laissés libres par la régularisation. On peut voir sur les courbes d'évolution de l'incertitude de ces paramètres due au bruit d'acquisition du capteur CCD en fonction du chargement (Fig. 5.27) que c'est à partir de ce niveau de chargement que les incertitudes sont inférieures à 5%. Notamment, le module élastique  $\nu_{13}$  de la partition 4 possède une incertitude élevée. Du fait de la sollicitation en traction de cette partie, ce



**FIGURE 5.22:** Valeurs identifiées pour la série d'images prises au cours de la première charge,  $C_1$ , et de la seconde charge,  $C_2$ , en fonction de la charge appliquée normalisée. Le résidu normalisé,  $R_n = [(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})]/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})$ , est aussi tracé en fonction du niveau de chargement.



**FIGURE 5.23:** Incertitudes dues au bruit d'acquisition du capteur CCD tracées pour les différents paramètres matériau et pour les deux rampes de chargement,  $C_1$  et  $C_2$  en fonction du chargement normalisé appliqué.



**FIGURE 5.24:** Zonage matériau du pied d'aube numéroté de 1 à 4. Chaque zone possède un comportement orthotrope.

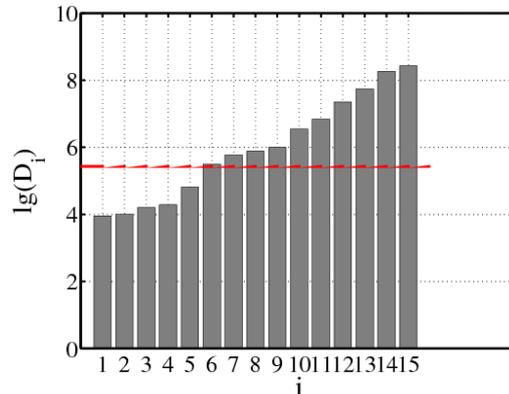
**TABLE 5.2:** Valeurs nominales des différents paramètres matériau pour chaque partition  $i$  du pied d'aube.

Parameter	Partition			
	i=1	i=2	i=3	i=4
$E_{1nom}^i/E_{1nom}^1$	-	0,645	0,645	0,607
$E_{3nom}^i/E_{1nom}^1$	0,087	0,11	0,11	0,092
$G_{13nom}^i/E_{1nom}^1$	0,037	0,083	0,083	0,055
$\nu_{13nom}^i$	0,38	0,49	0,49	0,47

résultat est tout à fait compréhensible.

D'autre part, la régularisation apportée à la méthode d'identification doit permettre de minimiser ces effets en forçant les paramètres peu identifiables vers leurs valeurs nominales. Néanmoins, comme cela est expliqué dans la section 2.3, la régularisation consiste à ajouter une seconde fonctionnelle  $T_2(\mathbf{p}) = A(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})^t [\mathbf{C}^{nom}]^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})$  à la fonctionnelle, utilisée ici, de la FEMU,  $T_1(\mathbf{p}) = \|\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca}(\mathbf{p})\|_M^2$ . La sévérité de la régularisation dépend donc de son poids dans la fonctionnelle totale  $T_{tot} = T_1 + T_2$ . En considérant une incertitude globale de 4% sur les valeurs nominales des paramètres matériau, le poids de la régularisation est  $\lambda^* = A/(\sigma^{nom})^2 \equiv 10^{-3}D_{max}$ . La figure 5.25 montre la répartition, sur une échelle logarithmique en base 10, des valeurs propres,  $D_i$ , de la matrice  $[\mathbf{N}]$  correspondant à la minimisation de la fonctionnelle  $T_1$  (voir Section 2.3) sur laquelle est superposée le poids de la régularisation, équivalent à la valeur de  $\lambda^*$ . On remarque que le poids de la régularisation est seulement dix fois supérieur à la plus petite valeur propre. Par conséquent, cette incertitude associée à la régularisation relativement faible induit une variabilité conséquente du paramètre matériau identifié. De plus, du fait des couplages possibles entre les différents paramètres, cette indétermination influe aussi sur l'identification des autres paramètres matériau. on observe aussi ces variations sur les autres paramètres dont l'incertitude est comparable, par exemple le module élastique  $E_3^1$  (Fig. 5.26b). La symétrie attendue entre les zones 2 et 3 est observée concernant les modules de cisaillement (Fig. 5.26c) et les modules élastiques  $E_1$  (Fig. 5.26a) et  $E_3$  (Fig. 5.26b) et dans une moindre mesure pour les coefficients de Poisson (Fig. 5.26d).

La qualité de l'identification est vérifiée à travers l'observation des résidus. Premièrement, les résidus adimensionnés,  $R_n$ , sont plus faibles que dans l'étude précédente avec une modélisation homogène (Fig. 5.26e). Deuxièmement, la carte des résidus d'identification tracée pour l'image 139 montre clairement une réduction de ceux-ci dans la partie basse du pied (Fig. 5.28a). Dans le cas d'une identification parfaite, la carte des résidus ne devrait laisser apparaître que le bruit dû au capteur CCD. On distingue encore ici quelques imperfections de modélisation. L'écart-type sur les niveaux de gris du résidu d'identification est  $\sigma_c = 7,3$ , ce qui se rapproche de celui du bruit seul,  $\sigma = 5,5$ . Les histogrammes en niveaux de gris du bruit d'acquisition du capteur CCD,  $\eta$ , des résidus de

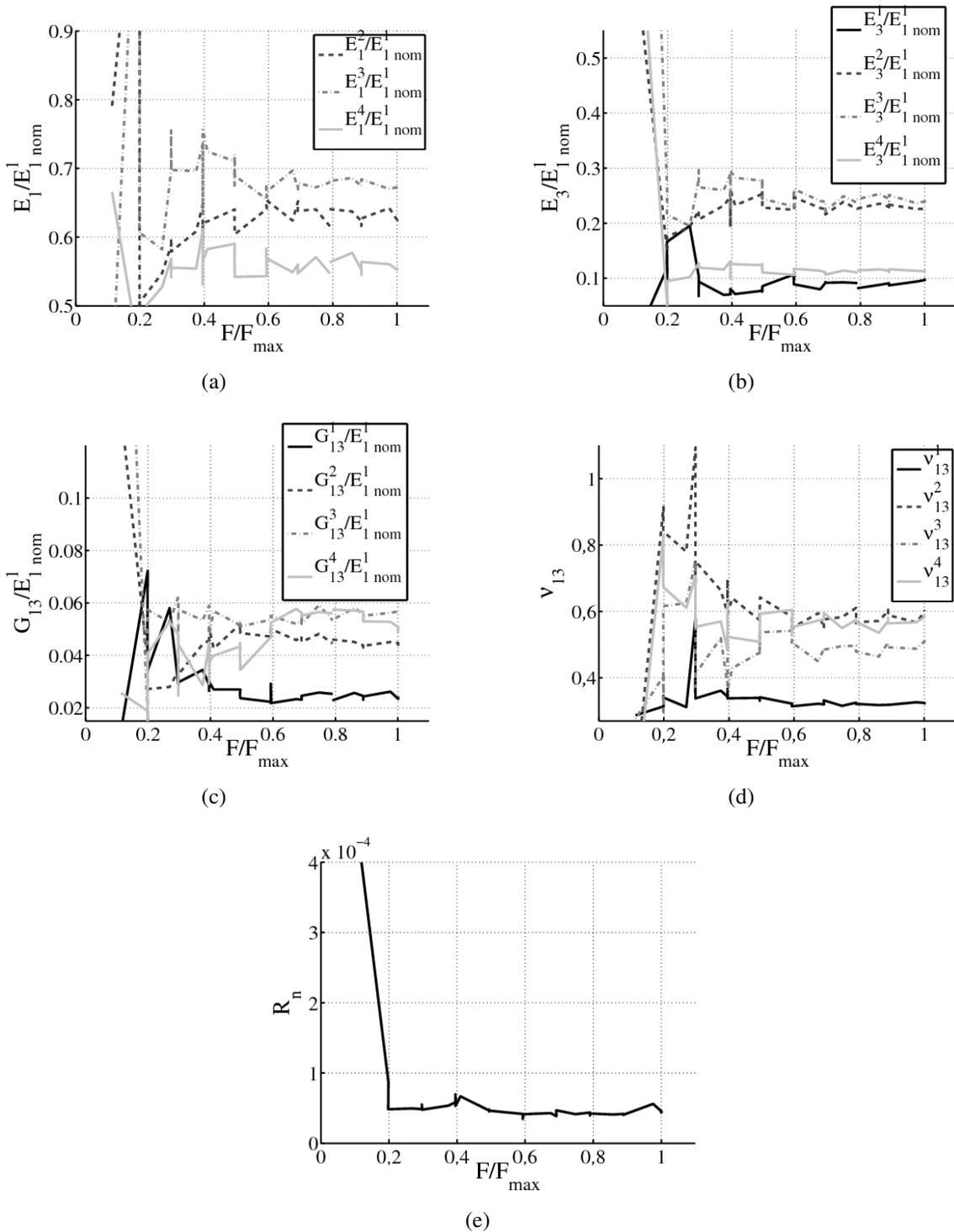


**FIGURE 5.25:** Répartition du logarithme des valeurs propres,  $D_i$ , de la matrice  $[\mathbf{N}]$  issue de la minimisation de la fonctionnelle  $T_1$  sur laquelle est superposée le niveau de pondération de la régularisation,  $\lambda^*$ , en trait pointillé rouge.

mesure,  $\rho_m$ , des résidus d'identification,  $\rho_c$  et de la différence entre les résidus de mesure et d'identification,  $\rho_m - \rho_c$ , tracés sur la figure 5.28b montrent cette amélioration. Les deux histogrammes des résidus de mesure et d'identification sont presque confondus.

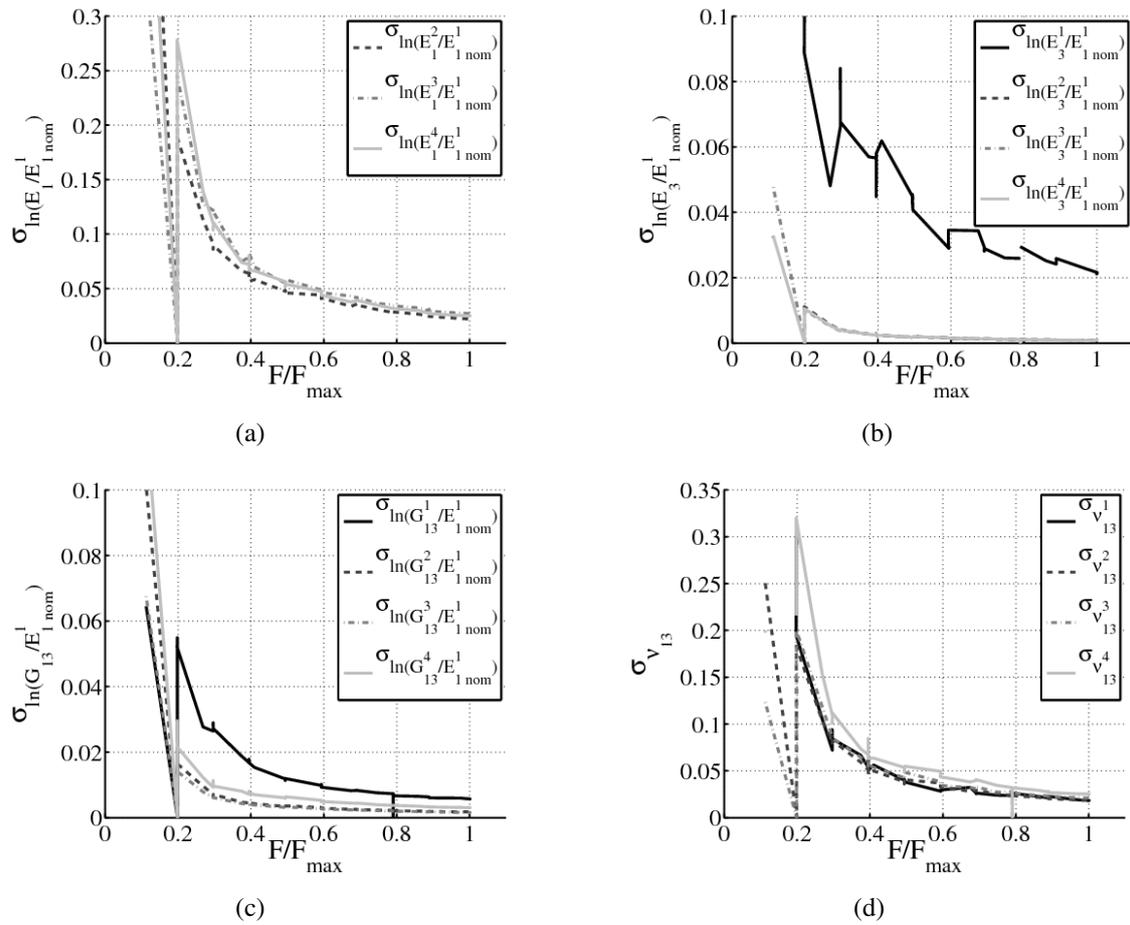
Les paramètres matériau identifiés, associés à leurs incertitudes  $\sigma_{p_k}$ , sont à comparer aux valeurs nominales, associées à leurs incertitudes,  $\sigma_{p_k \text{ nom}}$ , afin de vérifier la compatibilité des résultats. Regardons, par exemple, les résultats pour l'image 139. Les valeurs identifiées, ainsi que les incertitudes correspondantes sont récapitulées dans le tableau 5.3. En reprenant les valeurs nominales du tableau 5.2, et une incertitude sur celles-ci de 4%, on peut donc dire que les valeurs des modules élastique  $E_1^2$ ,  $E_1^3$  et  $E_3^4$  et les coefficients de Poisson  $\nu_{13}^3$  et  $\nu_{13}^4$  sont compatibles alors que les paramètres restant ne le sont pas.

Les incompatibilités que nous rapportons signifient que les valeurs des modules élastiques nominaux associés au zonage matériau ne permettent pas de rendre compte de la cinématique observée expérimentalement, alors que des valeurs différentes pour un même zonage permet un meilleur ajustement. Remettre en cause les valeurs nominales ou la modélisation (par exemple le zonage) pour aboutir à une description compatible avec l'expérience reste du ressort de l'ingénieur. Notre travail lui permet d'éclairer au mieux ses choix.

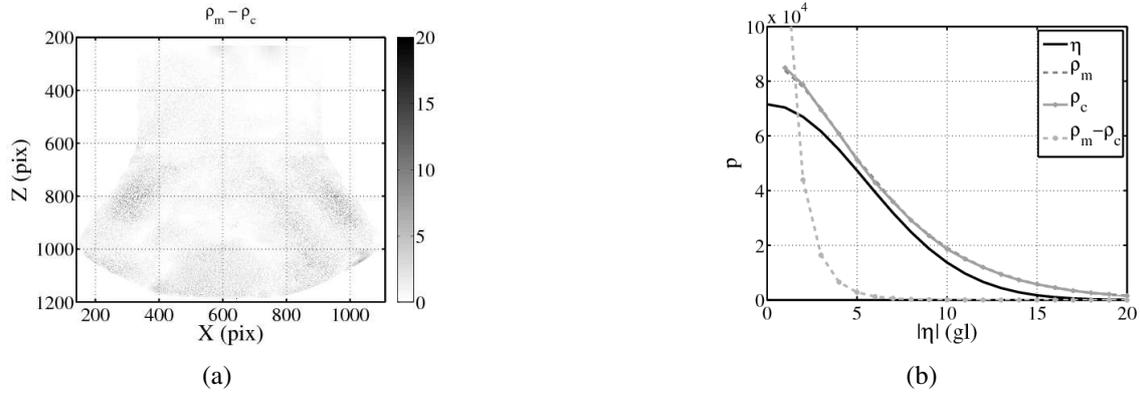


**FIGURE 5.26:** Valeurs identifiées pour la série d'images prises sur la seconde rampe en fonction du chargement normalisé appliqué pour la modélisation hétérogène.

*Identification de champs de propriétés élastiques fondée sur la mesure de champs : application sur un composite tissé 3D*



**FIGURE 5.27:** Incertitudes dues au bruit d'acquisition du capteur CCD pour la série d'images prises sur la seconde rampe en fonction du chargement normalisé appliqué pour la modélisation hétérogène.



**FIGURE 5.28:** Résidus en niveaux de gris associés à la mesure et à l'identification régularisée pour la modélisation hétérogène : (a) différence entre les résidus de mesure  $\rho_m$  et les résidus d'identification  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ , (b) histogrammes de niveaux de gris de  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris.

**TABLE 5.3:** Valeurs identifiées des différents paramètres matériau pour chaque partition  $i$  du pied d'aube ainsi que les incertitudes correspondantes pour l'image 139.

Parameter	Partition			
	i=1	i=2	i=3	i=4
$E_1^i/E_{1nom}^1$	-	$0,625 \pm 0,028$	$0,721 \pm 0,041$	$0,586 \pm 0,03$
$E_3^i/E_{1nom}^1$	$0,075 \pm 0,003$	$0,26 \pm 0,0004$	$0,282 \pm 0,0005$	$0,126 \pm 0,0002$
$G_{13}^i/E_{1nom}^1$	$0,025 \pm 0,0003$	$0,052 \pm 0,0001$	$0,053 \pm 0,0001$	$0,045 \pm 0,0003$
$\nu_{13}^i$	$0,33 \pm 0,01$	$0,59 \pm 0,02$	$0,47 \pm 0,02$	$0,51 \pm 0,02$
$E_{1nom}^i/E_{1nom}^1$	-	0,645	0,645	0,607
$E_{3nom}^i/E_{1nom}^1$	0,087	0,11	0,11	0,092
$G_{13nom}^i/E_{1nom}^1$	0,037	0,083	0,083	0,055
$\nu_{13nom}^i$	0,38	0,49	0,49	0,47

# Conclusion

Le travail réalisé pendant ces trois années avait pour but d'identifier les paramètres matériau du pied d'aube à l'aide de mesures de champs de déplacement par CIN. Nous avons au cours de ce document décrit la démarche mise en place afin de proposer une méthode d'identification solide dont l'ensemble de la chaîne est maîtrisée.

Premièrement, la quantification de la précision du moyen de mesure a été effectuée. La méthode d'identification utilisée étant fondée sur la mesure de champs de déplacement, il est primordial de quantifier les incertitudes liées à ce moyen. Les principales erreurs sont relatives à la détermination de déplacements subpixels. À travers un essai réalisé au laboratoire, les erreurs commises sur la détermination des déplacements subpixels ont été quantifiées par une approche paramétrique. Différents paramètres (ou options) sont disponibles dans la manière de réaliser la CIN. L'influence de la correction de contraste des images, de la discrétisation et de la longueur caractéristique choisie pour le calcul du gradient de l'image par différence finie, et de l'interpolation subpixel des niveaux de gris a été regardé. En prenant en compte l'erreur systématique commise et l'incertitude sur le champ de déplacement mesuré au cours de l'essai, le jeu de paramètres le mieux adapté inclue la correction de contraste, une discrétisation et une longueur caractéristique de 0,5 pixel pour le calcul du gradient de l'image, une lecture des niveaux de gris au demi-pixel et une interpolation subpixel de type spline cubique. Ce jeu de paramètres donne des incertitudes de l'ordre de  $10^{-2}$  pixel et des erreurs systématiques de l'ordre de  $3 \times 10^{-3}$  pixel. La CIN globale utilisée pour obtenir le champ de déplacement permet aussi d'avoir un estimateur de la qualité du champ de déplacement obtenu à travers la carte de résidu traçant la différence pixel à pixel en niveaux de gris de l'image de référence et de l'image déformée corrigée du champ de déplacement mesuré. Dans le cas où il n'y aurait aucun bruit sur le capteur CCD et que le champ de déplacement mesuré reflète exactement le déplacement de l'image vu par l'appareil photo, cette différence est nulle. Les niveaux de gris de la carte de résidu, relativement à la dynamique de l'image, reflètent directement les écarts entre le déplacement vu par l'appareil photo et le déplacement mesuré. Il est à noter cependant que le champ de déplacement mesuré peut représenter le déplacement vu par l'appareil photo mais que cela ne soit pas le déplacement effectivement vu par l'éprouvette. Notamment, un déplacement hors-plan de l'éprouvette est capté dans le champ de déplacement mesuré mais vient parasiter la mesure. Les précautions d'expérimentation relatives à ce problème sont donc observées lors de la réalisation des essais.

Deuxièmement, un essai de validation sur un cas simplifié du problème lié au pied

d'aube a été mené. Une sollicitation de cisaillement est appliquée à une éprouvette en composite tissé 3D de type coupon court standard par l'intermédiaire d'un essai de flexion à trois points rapprochés. Le matériau testé est considéré comme homogène, le tissage étant périodique, néanmoins les dimensions de l'éprouvette sont du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques de la mésostructure sous-jacente. Le module de cisaillement hors-plan du modèle orthotrope proposé pour rendre compte du comportement du matériau est identifié ainsi que les conditions aux limites du calcul EF. Une fois l'incertitude déterminée sur le champ de déplacement mesuré, il convient de regarder l'influence de cette incertitude sur les paramètres identifiés. Pour cela un cas test numérique dans lequel l'image déformée a été obtenue à l'aide d'un champ de déplacement calculé par EF. Il s'agit d'identifier les paramètres matériau et conditions aux limites tels que définis dans le problème originel en rajoutant du bruit sur le champ de déplacement mesuré. Cette étude est réalisée pour 200 bruits générés ayant les bonnes caractéristiques. Il résulte une dispersion des paramètres identifiés dont l'écart-type est égal à 1,5% sur le module de cisaillement hors-plan. L'identification des paramètres matériau sur le cas réel met en évidence une dépendance du maillage choisi pour la mesure. Cette dépendance apparaît liée à la mésostructure sous-jacente. En effet, il s'agit de filtrer intelligemment le champ de déplacement capté par la mesure afin d'en rendre compte comme résultant d'un matériau homogène. Le maillage de mesure adapté correspond donc à celui ayant une taille de maille égale à la périodicité du tissage du composite. De la même manière que la qualité de la mesure effectuée est quantifiée grâce à la carte de résidu sur les images, la qualité de l'identification est quantifiée, ici, par la carte de résidu en champ de déplacement, différence nodale entre le champ de déplacement calculé et le champ de déplacement mesuré.

Troisièmement, les incertitudes sur les paramètres identifiés résultant du bruit de mesure ont été intégrées à la méthode d'identification. On a vu précédemment une analyse statistique des incertitudes dues au bruit du capteur CCD. Or, il est possible d'en avoir une analyse théorique à travers les équations utilisées pour la résolution du problème d'identification. Dans un premier temps, l'incertitude sur le champ de déplacement mesuré est directement liée au mouchetis de l'image de référence et au maillage de mesure à travers la matrice de corrélation. Dans un second temps, l'incertitude sur les paramètres identifiés est liée à la matrice de corrélation projetée sur les champs de sensibilité du champ de déplacement calculé par rapport aux différents paramètres. Il est à noter que les incertitudes obtenues sont simplement celles dues au bruit du capteur CCD et la chaîne d'obtention des paramètres identifiés. Cela ne prend pas en compte les erreurs de modélisation. Par contre, ces dernières peuvent être détectées grâce à la carte de résidu d'identification. Un exemple dans le cas de deux composites collés soumis à un essai de flexion à trois points rapprochés montre que la modélisation proposée influe directement sur les paramètres matériau identifiés. Notamment, la modélisation du comportement à l'interface des deux composites influence le comportement identifié au sein des deux matériaux. Néanmoins, la carte de résidu montre clairement des résidus élevés au niveau de l'interface lorsque celle-ci ne reflète pas le comportement du matériau.

Quatrièmement, une méthode de régularisation du problème d'identification par l'a-

jout de connaissances *a priori* a permis de traiter des cas avec un grand nombre de paramètres. Dans le cas du pied d'aube, par exemple, un cas avec quatre zones matériau a été mené. Chaque zone matériau possède quatre inconnues matériau, ce qui fait seize paramètres à identifier. Il est évident que la sollicitation du pied en traction ne permet pas à chaque paramètre d'avoir une sensibilité suffisante sur le champ de déplacement pour être identifié proprement. La régularisation proposée, afin d'éviter dans ce type de configuration, d'avoir un résultat divergent dû à quelques paramètres peu sensibles, consiste à apporter une information supplémentaire sur chaque paramètres qui est sa valeur nominale. Le degré de confiance sur cette valeur, relativement à la sensibilité du paramètre correspondant, donne le poids de cette information dans le système régularisé.

Finalement, l'identification des paramètres matériau sur le cas du pied d'aube avec la modélisation proposée par SNECMA a été effectuée. Cette modélisation possède un zonage plus sophistiqué que celui présenté ici. Néanmoins, la mise en œuvre de la méthode d'identification régularisée permet alors l'identification des paramètres hors-plan du pied d'aube. Le résultat est satisfaisant par rapport à la modélisation proposée, les incompatibilités observées concernent seulement quelques paramètres et les résidus d'identification sont très faibles. Pour des raisons de confidentialité, cette étude n'est présentée qu'en Annexe ?? de la version non-publique de ce mémoire.



# Chapitre 6

## Perspectives

### 1 Essai de traction/flexion sur pied d'aube

À travers ce document, nous avons montré que la méthode d'identification mise en place donne des résultats satisfaisant. Néanmoins, il est encore possible d'améliorer la précision des résultats en utilisant l'ensemble des informations disponibles sur l'essai de traction/flexion sur pied d'aube. Précédemment, uniquement la sollicitation de traction a été prise en compte. Or, une sollicitation plus complexe permettrait d'avoir des champs de sensibilité plus importants et couvrant l'ensemble du domaine d'étude. Par conséquent, l'étude de la combinaison des sollicitations de traction et de flexion doit apporter plus de précision aux résultats.

#### 1.1 Étude spatio-temporelle

Il s'agit dans le problème de l'identification d'obtenir des paramètres matériau d'un comportement supposé. Dans le cadre d'un chargement quasi-statique compris dans le régime élastique du matériau, le comportement est constant sur l'ensemble de la charge. Jusqu'à présent, en traitant le problème d'identification par paire d'images, cette information n'est pas prise en compte. On remarque effectivement des variations du module élastique identifié au cours de la charge, cela étant dû principalement à l'incertitude de mesure et à la mésostructure du matériau influant sur le comportement macroscopique équivalent.

Étant donné que l'on cherche une unique solution du problème sur l'ensemble du chargement, on peut utiliser l'ensemble des paires d'images pour identifier les paramètres matériau. La très grande quantité d'information à disposition permet de réduire l'influence du bruit de mesure sur le résultat.

Dans le cas de l'essai sur l'éprouvette de pied d'aube, la charge élastique correspond à l'ensemble du chargement de traction. Il suffit ensuite de sommer l'ensemble des systèmes jusqu'à présent résolus par paires d'images. La présence dans chaque système de la matrice de corrélation, directement liée à la covariance du champ de déplacement, fournit une pondération naturelle pour chaque paire d'images. La fonctionnelle à minimiser s'écrit

**TABLE 6.1:** Valeurs des paramètres matériau identifiés sur une série d'images pour la charge  $C_1$  et  $C_2$  (fonctionnelle régularisée  $C_1^r$  et  $C_2^r$ ).

	$E_3/E_{1nom}$	$G_{13}/E_{1nom}$	$\nu_{13}$
$C_1$	0,29	0,09	0,47
$C_2$	0,13	0,04	2,31
$C_1^r$	0,29	0,09	0,5
$C_2^r$	0,17	0,06	1,29
Incertitudes $C_1$	$3 \times 10^{-4}$	$9,8 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-4}$
Incertitudes $C_2$	$3,2 \times 10^{-5}$	$8,2 \times 10^{-5}$	$8,7 \times 10^{-5}$

donc :

$$T_1(\mathbf{p}) = \sum_n \|\mathbf{u}_n^{me} - \mathbf{u}_n^{ca}(\mathbf{p})\|_{M_n}^2 \quad (6.1)$$

où  $n$  est la paire d'images prise en compte, à laquelle il est possible de rajouter une fonctionnelle de régularisation  $T_2(\mathbf{p}) = A(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})^t [\mathbf{C}^{nom}]^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})$ . Les paramètres identifiés sont  $\ln(E_3/E_{1nom})$ ,  $\ln(G_{13}/E_{1nom})$  et  $\nu_{13}$  pour une modélisation homogène élastique orthotrope. L'identification est menée sur la première (respectivement seconde) charge de traction sans régularisation  $C_1$  (respectivement  $C_2$ ) et avec régularisation  $C_1^r$  (respectivement  $C_2^r$ ). Les résultats sont présentés dans le tableau 6.1. Les incertitudes qui étaient de l'ordre de  $10^{-3}$  pour une unique paire d'images prise en compte sont ici bien inférieures, de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les valeurs identifiées sont très proches de celles obtenues dans le chapitre 5. L'évolution du résidu d'identification normalisé, recalculé pour chaque image après identification des paramètres matériau, pour les différents cas est présenté sur la figure 6.1. Pour l'image 139, les cartes de résidus sont recalculées (Fig. 6.2). La carte de résidu d'identification (Fig. 6.2c) est similaire à celle obtenue au chapitre 5 (Fig. 5.21c).

Le point principal est ici de profiter de l'ensemble de l'information disponible lors de l'essai pour identifier un jeu de paramètres matériau. On a vu sur un cas simple d'une modélisation homogène que cela permettait de réduire drastiquement les incertitudes dues au bruit du capteur CCD. Cela doit être combiné avec un essai mettant à disposition plusieurs sollicitations différentes de l'éprouvette afin de limiter l'effet nuisible des couplages entre paramètres à identifier. Une première sollicitation fera apparaître certains couplages induisant une indétermination de plusieurs paramètres, mais ces couplages varient avec la sollicitation. Si les différentes sollicitations proposées sont bien choisies, il est donc possible de déterminer l'ensemble des paramètres grâce à un unique essai.

Dans le cas du pied d'aube, nous avons traité la partie de traction de la courbe de chargement, il faut donc aussi prendre en compte la sollicitation de flexion.

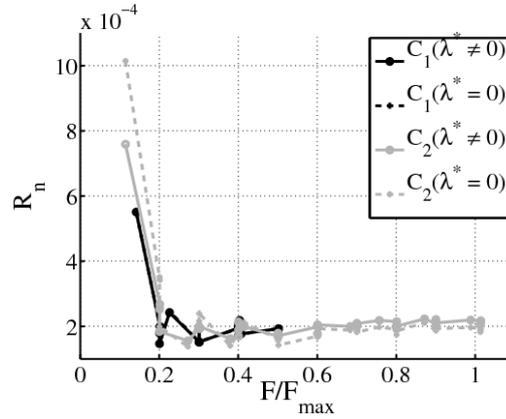


FIGURE 6.1: Résidus d'identification correspondant à une série d'images 86 – 104 pour  $C_1$  et 124 – 160 pour  $C_2$ .

## 1.2 CIN intégrée

Les biais dus au bruit du capteur CCD peuvent aussi être limités en réalisant la mesure et l'identification en une seule étape et non deux comme présenté jusqu'à présent. De plus, la CIN intégrée permet l'utilisation de maillages EF arbitrairement fins et d'images dont la texture est localement faible du fait de la régularisation apportée par la spécification d'un sous-espace de décomposition du champ de déplacement plus restreint.

### 1.2.1 Méthode

Dans ce qui a été présenté, le champ de déplacement mesuré est pris comme référence lors de l'identification. Or, dans la définition de la méthode de CIN globale, on a vu que le champ de déplacement est exprimé sur un sous-espace approprié que l'on a choisi jusqu'à présent comme étant les fonctions de forme EF afin d'assurer sa continuité. Les inconnues résultantes de cette décomposition sont les amplitudes des fonctions de forme. Il est possible de choisir les fonctions décrivant le sous-espace approprié telles que les inconnues soient directement les paramètres matériau à identifier. Cela permet de ne plus utiliser le champ de déplacement comme variable intermédiaire mais de l'intégrer complètement à la procédure d'identification. Le champ de déplacement mesuré et calculé ne font qu'un.

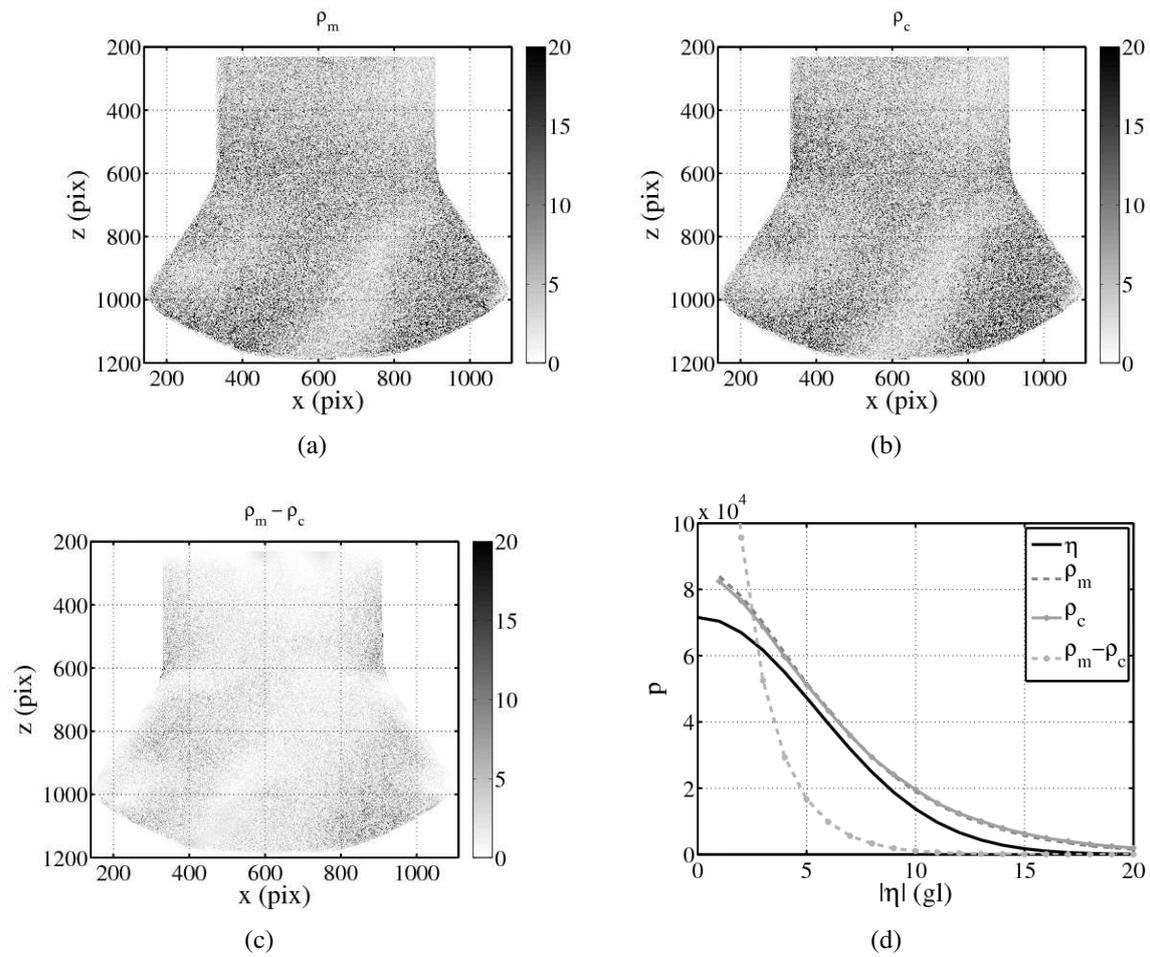
De la même manière que présenté précédemment, on cherche  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  tel que :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \quad (6.2)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$  peut être décomposé sur les fonctions de forme EF :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} \quad (6.3)$$

Il s'agit de réaliser à chaque itération l'assemblage du système permettant de calculer l'incrément de déplacement (Eq. 6.4), (on note que la résolution de ce système n'est pas



**FIGURE 6.2:** Résidus en niveau de gris associés à l'étape de mesure et à l'identification pour la paire d'image 123 – 139 : (a) résidus de mesure  $\rho_m$ , (b) résidus d'identification  $\rho_c$ , (c)  $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histogrammes de niveaux de gris  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . La dynamique de l'image de référence est de 1024 niveaux de gris.

nécessaire ici), et de calculer ensuite le vecteur incrément sur les paramètres identifiés  $\delta\mathbf{p}$  (Eq. 6.5) par projection du système précédent sur les champs de sensibilité,  $[\mathbf{P}]$ . On note  $[\mathbf{N}] = [\mathbf{P}]^t [\mathbf{M}] [\mathbf{P}]$  la projection de la matrice de corrélation et  $\{B\} = [\mathbf{P}]^t \{b^{(n)}\}$  la projection du second membre. Ces champs de sensibilité du champ de déplacement par rapport aux paramètres identifiés sont obtenus comme suit  $[\mathbf{P}] = \partial\{\mathbf{u}\}/\partial\{\mathbf{p}\}$ . Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est obtenu par résolution du calcul EF sur le maillage du pied d'aube dont le comportement et la modélisation sont définis tels que décrit dans le chapitre 5.

$$[\mathbf{M}]\{\delta a^{(n+1)}\} = \{b^{(n)}\} \quad (6.4)$$

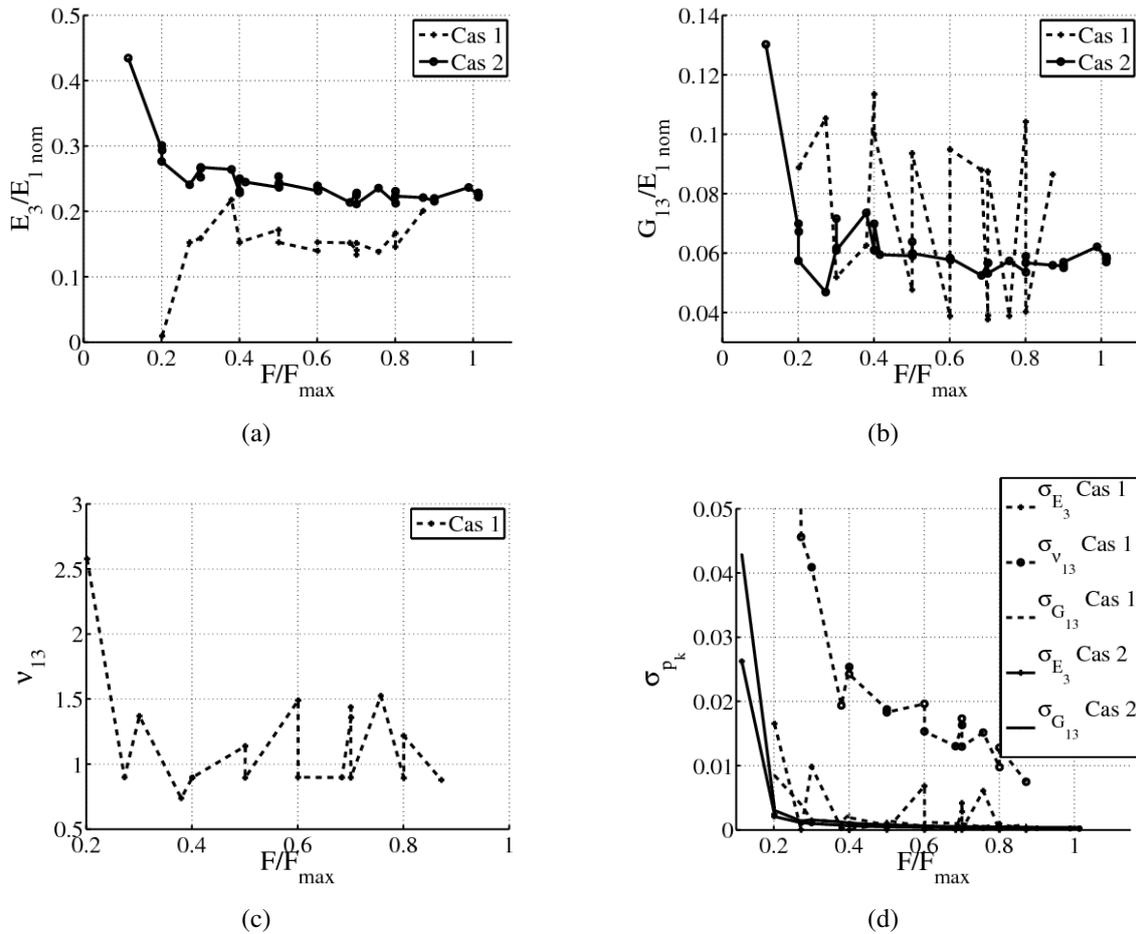
$$\{\delta\mathbf{p}\} = [\mathbf{N}^{-1}]\{B\} \quad (6.5)$$

Prenons, par exemple, le cas de la modélisation homogène élastique orthotrope du pied d'aube. Les paramètres identifiés correspondent ici aux déplacements imposés au niveau des portées de pied et de la partie supérieure du maillage et les quatre paramètres matériau de la modélisation élastique orthotrope proposée,  $\ln(E_3/E_{1nom})$ ,  $\ln(G_{13}/E_{1nom})$  et  $\nu_{13}$ . Une première détermination du champ de déplacement est obtenue par résolution du problème dans lequel les paramètres matériau sont fixés à leurs valeurs initiales, seules les conditions aux limites sont déterminées. Puis, une deuxième résolution du problème, à partir de la solution approchée calculée précédemment, prend en compte l'ensemble des paramètres, conditions aux limites et paramètres matériau.

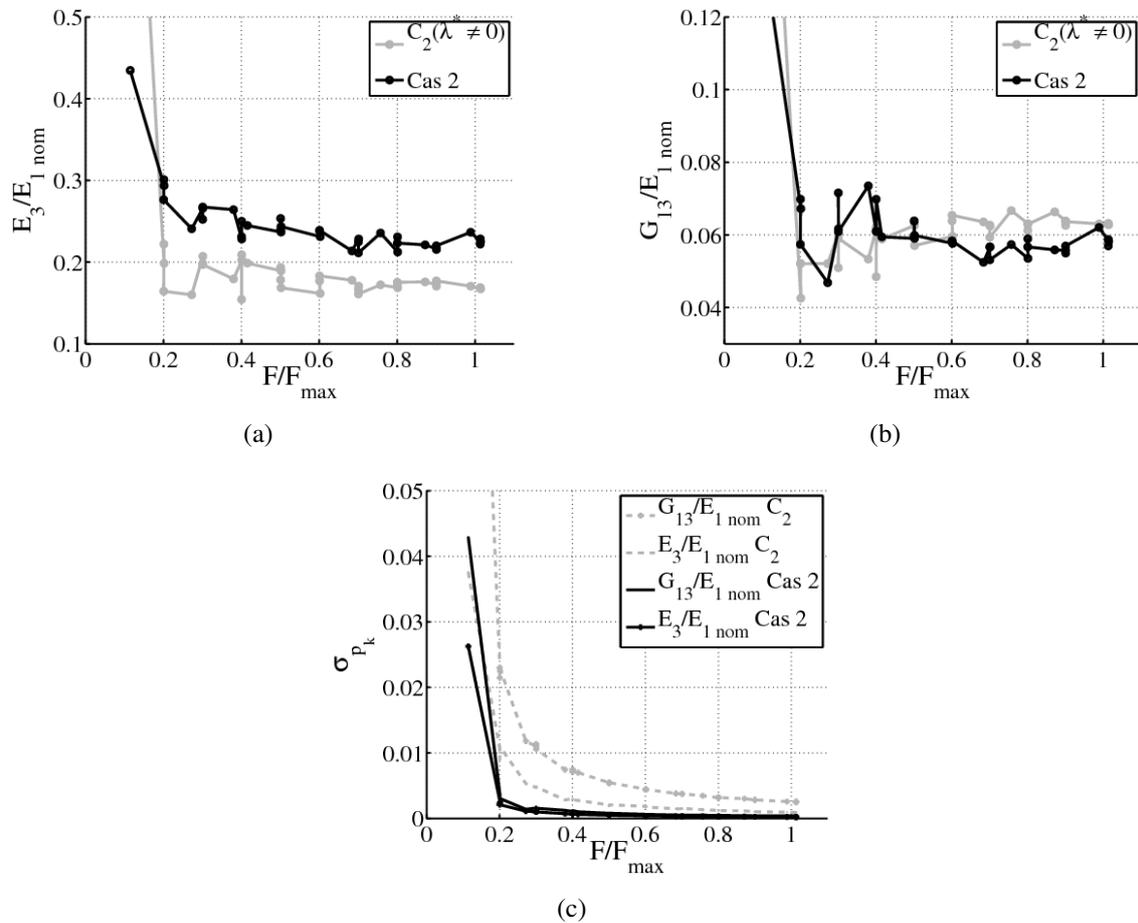
On obtient donc un champ de déplacement issu d'un calcul EF dont les paramètres matériau permettent de décrire au mieux le comportement du matériau sollicité lors de l'essai.

## 1.2.2 Charge $C_2$

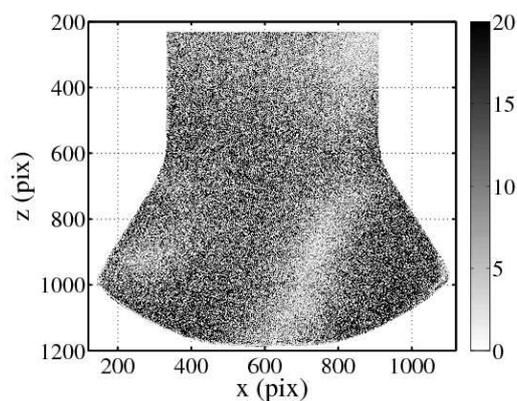
Dans un premier temps, le chargement de traction  $C_2$  est traité par paire d'images. Au vu du nombre important d'inconnues du problème (dû au fait qu'il faut déterminer aussi les conditions aux limites en plus des paramètres matériau), il est choisi de ne pas identifier le coefficient de Poisson,  $\nu_{13}$  étant donné que c'est le paramètre ayant le plus d'incertitudes et de le fixer à sa valeur nominale de 0,46. On remarque sur la figure 6.3 que le fait d'identifier les trois paramètres matériau du plan (13) induit une variabilité sur la valeur identifiée de  $\nu_{13}$  et  $\ln(G_{13}/E_{1nom})$  (cas 1). Pour le cas 2, où seulement  $\ln(E_3/E_{1nom})$  et  $\ln(G_{13}/E_{1nom})$  sont identifiés, les valeurs sont relativement stables le long du chargement. On note sur la figure 6.3d que l'incertitude sur le coefficient de Poisson pour le cas 1 est très supérieure aux autres. La figure 6.4 compare les résultats obtenus d'une part avec la méthode décrite dans le chapitre 5 en deux étapes ( $C_2(\lambda^* \neq 0)$ ), et d'autre part les résultats obtenus avec la méthode de CIN intégrée (Cas 2). On note que les valeurs obtenues dans les deux cas sont très proches concernant le module élastique de cisaillement. De plus, les incertitudes sont très faibles dans le cas de la CIN intégrée. La carte de résidu  $\rho = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})$  est montrée sur la figure 6.5. Les niveaux de résidus sont très faibles et comparables à ceux obtenus par la méthode en deux étapes.



**FIGURE 6.3:** Paramètre matériau identifié en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied,  $E_3/E_{1nom}$  (a),  $G_{13}/E_{1nom}$  (b),  $\nu_{13}$  (c) et incertitude correspondante (d) pour le cas 1 où les trois paramètres  $E_3/E_{1nom}$ ,  $G_{13}/E_{1nom}$  et  $\nu_{13}$  sont identifiés et pour le cas 2 où seulement  $E_3/E_{1nom}$  et  $G_{13}/E_{1nom}$  sont identifiés.



**FIGURE 6.4:** Paramètre matériau identifié en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied,  $E_3/E_{1\text{nom}}$  (a),  $G_{13}/E_{1\text{nom}}$  (b), et incertitude correspondante (c) pour le cas 1 où l'identification est post-traitée et pour le cas 2 où l'identification est intégrée à la mesure.



**FIGURE 6.5:** Carte de résidu correspondant à la paire d'image 123 – 139 à l'issue de la CIN intégrée. On rappelle que la dynamique de l'image est de 1024 niveaux de gris.

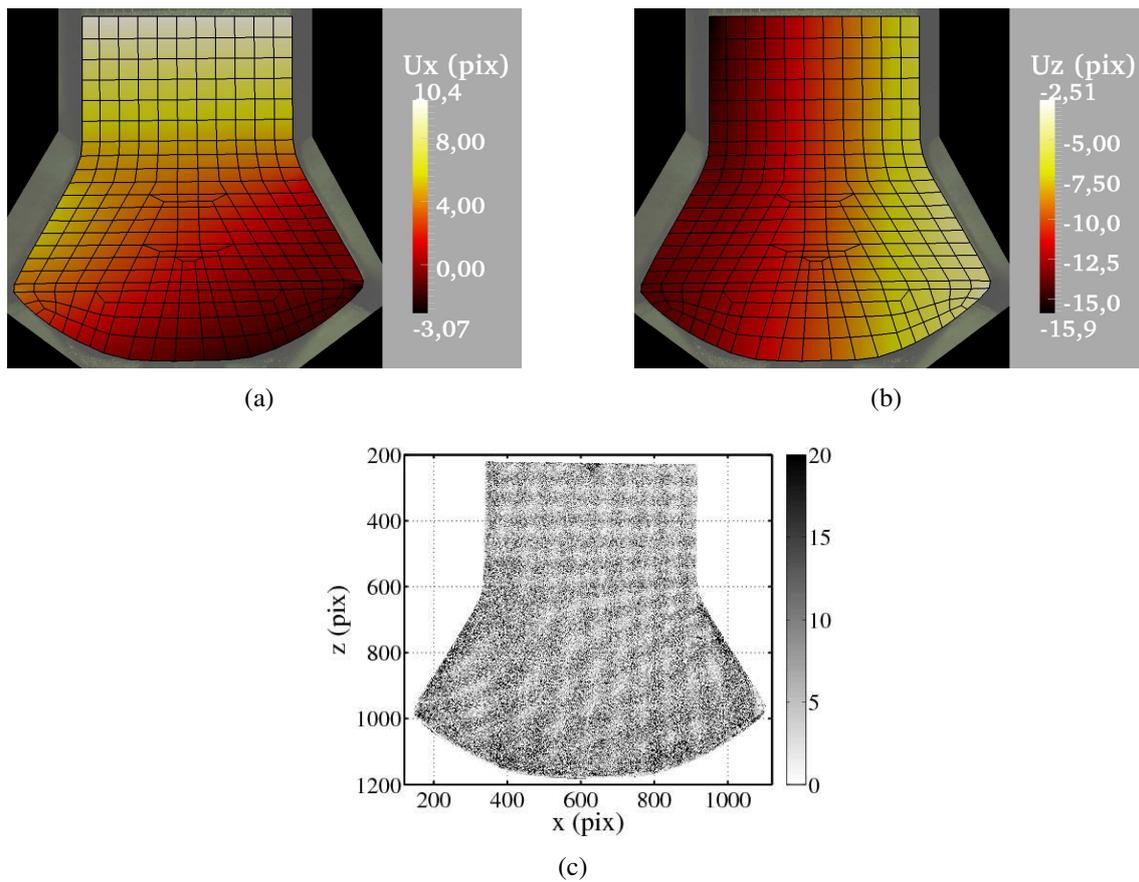
### 1.2.3 Pour aller plus loin

La prise en compte de la sollicitation de flexion permet d'avoir une sensibilité accrue des paramètres. Le chargement du pied d'aube consiste en un effort de traction et un effort de flexion. La sollicitation du pied d'aube est donc plus complexe que dans le cas de la traction seule. L'identification des paramètres matériau s'en trouve facilitée. On traite dans un premier temps les images 230 à 400 en prenant comme image de référence l'image 215. Le chargement de traction correspond aux images 230 à 258, puis de l'image 259 à 400 la sollicitation de flexion est ajoutée. La modélisation proposée est homogène élastique orthotrope. Les paramètres identifiés sont les modules élastiques  $\ln(E_3/E_{1nom})$  et  $\ln(G_{13}/E_{1nom})$ , ainsi que les conditions aux limites appliquées sur les portées de pied et sur la partie supérieure du maillage.

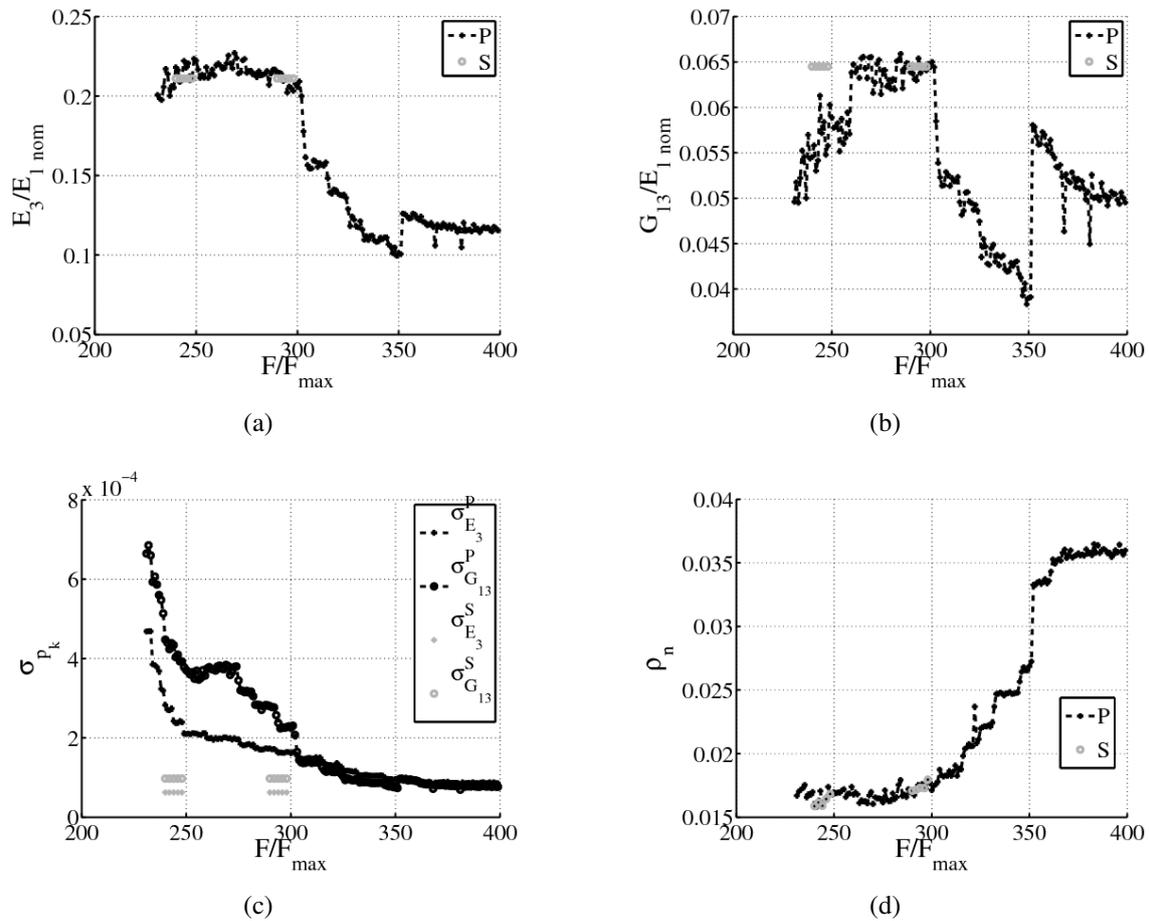
L'identification est menée par paire d'images, les résultats sont montrés sur la figure 6.7 en trait pointillé (P). On remarque premièrement que les valeurs identifiées pour la traction seule présentent plus de variabilité que dans la partie de sollicitation de flexion (images 259 à 300). Au delà de l'image 300, il y a une chute des modules identifiés et une augmentation du résidu de corrélation,  $\rho = \sqrt{\sum_i (f(x_i + \delta u_i) - g(x_i))^2} / (\max(f) - \min(f)) / \sum_i$ . L'éprouvette n'est plus sollicitée dans son régime élastique. Le champ de déplacement et la carte de résidu de corrélation pour la paire d'images 215 – 300 sont montrés sur la figure 6.6. Les incertitudes dues au bruit du capteur CCD sont plus faibles lorsque le pied d'aube est soumis à une sollicitation combinée de traction et de flexion (images 259 à 400 Fig. 6.7c). On voit l'apport que constitue une sollicitation complexe, de type traction/flexion par exemple, pour l'identification d'un jeu de paramètres.

On a déjà vu l'avantage de traiter l'ensemble des données issues d'un essai pour l'identification d'un unique jeu de paramètres sur l'ensemble du chargement. On a ensuite vu l'avantage de la CIN intégrée. On peut donc bénéficier maintenant des deux avantages simultanément. Cependant, sur une série d'images, les conditions aux limites varient d'une image à l'autre et comme cela a été dit précédemment, il est nécessaire de les identifier lors de la CIN intégrée. La sommation des systèmes construits pour chaque paire d'images consiste donc à ajouter les valeurs correspondantes aux indices des paramètres matériau et à concaténer les valeurs correspondantes aux indices des conditions aux limites en déplacement imposées aux nœuds du maillage. par conséquent, la taille du système à résoudre est fonction du nombre de degrés de liberté nodaux et du nombre de paires d'images prises en compte.

Il est choisi de prendre dix paires d'images, dont cinq dans la partie en traction et cinq dans la partie en traction/flexion. Les résultats d'identification sont présentés sur la figure 6.7 par les symboles gris (S). On remarque que les valeurs identifiées des modules élastiques sont une moyenne pondérée des précédentes valeurs identifiées pour chaque paire d'images (P). La pondération est plus importante sur les images situées dans la partie de traction/flexion, notamment, on note que le module de cisaillement identifié sur la série d'images Fig. 6.7b est égal au module identifié par paire d'images sur la partie en traction/flexion. Les incertitudes associées aux paramètres identifiés sont très faibles (Fig. 6.7c). En effet, avec seulement dix images, les niveaux d'incertitudes sont de l'ordre



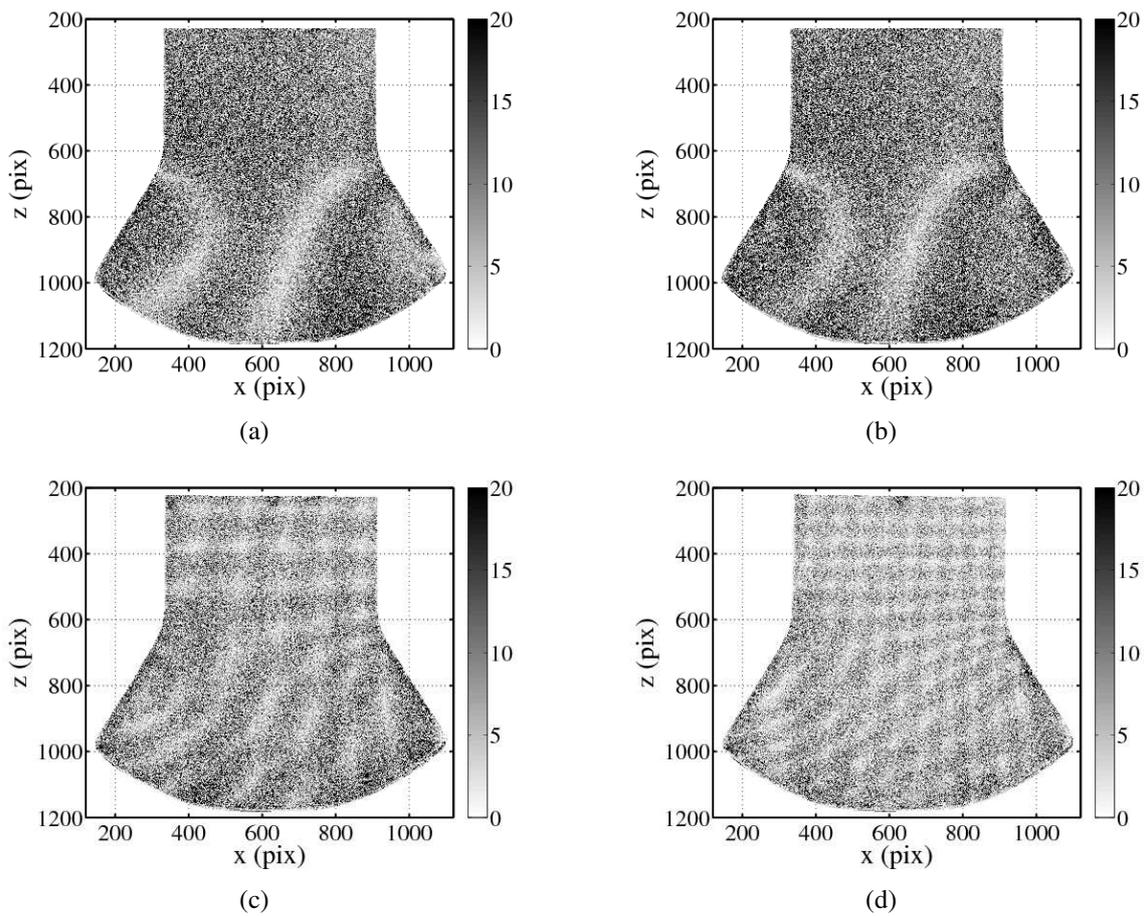
**FIGURE 6.6:** Champ de déplacement suivant l'axe  $x$  (a) et l'axe  $z$  (b) obtenu après identification par CIN intégrée pour la paire d'image 215 – 300. Carte des résidus de corrélation correspondant (c).



**FIGURE 6.7:** Paramètres matériau identifiés en fonction du chargement de traction appliqué à l'éprouvette de pied,  $E_3/E_{1\text{nom}}$  (a),  $G_{13}/E_{1\text{nom}}$  (b), incertitude correspondante (c) et résidus d'identification (d) pour le cas P où l'identification se fait par paire d'images et pour le cas S où l'identification se fait sur une série d'images (ici cinq pour la traction et cinq pour la traction/flexion).

de  $10^{-4}$ . Les cartes de résidus de corrélation recalculées pour chaque image sont montrées sur la figure 6.8 pour les images 240 et 246 pour la traction et 290 et 296 pour la flexion.

Ces différents cas présentés dans ce chapitre de perspectives sont menés avec une modélisation simplifiée du pied d'aube, mais on voit dès à présent les avantages apportés. Le traitement du cas complet du pied d'aube avec zonage matériau devrait permettre une meilleure identification du jeu de paramètre. Néanmoins, il faudrait éventuellement ajouter une fonctionnelle de régularisation tel que cela a été fait précédemment.



**FIGURE 6.8:** Cartes de résidus d'identification correspondant au champ de déplacement obtenu pour la paire d'image 215 – 240 (a), 215 – 246 (b), 215 – 290 (c) et 215 – 296 (d).

## 2 Régularisation

La régularisation se trouve à présent être uniforme sur l'ensemble des valeurs nominales des modules élastiques et coefficients de Poisson. Or, la détermination numérique de ces paramètres par une méthode d'homogénéisation ne donne pas les mêmes incertitudes pour chacun d'eux. Il faut donc une régularisation adaptée à chaque paramètre.

## 3 Segmentation

Suite à l'étude présentée ici, il serait intéressant de ne pas proposer *a priori* de partition matériau mais de définir cela à partir des connaissances issues du champ de déplacement mesuré. Ces informations rapportées à la modélisation (maillage, comportement) permettrait d'obtenir le meilleur zonage matériau pour décrire correctement le comportement du pied. Pour cela, les propriétés matériau sont définies et identifiées sur chaque élément du maillage. Une régularisation du système est apportée en limitant le gradient sur les paramètres matériau.

Pour la méthode d'identification en deux étapes, le champ de déplacement mesuré,  $\mathbf{u}^{me}$ , est obtenu par minimisation sur  $\mathbf{u}$  de la fonctionnelle définie sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} [g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \quad (6.6)$$

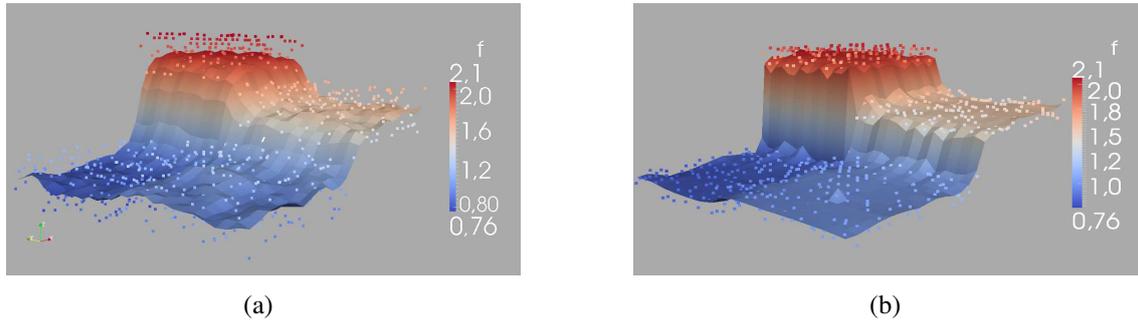
où  $f$  est l'image de référence et  $g$  l'image déformée. Ensuite, l'obtention des paramètres matériau se fait par minimisation de la fonctionnelle :

$$T_1(C) = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca}) M(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \xi \|\nabla C(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \quad (6.7)$$

où  $C(\mathbf{x}) = C_0(1 - d(\mathbf{x}))$  représente donc un champ de variation de propriétés matériau. On peut écrire aussi une version intégrée, issue de la régularisation de la CIN intégrée, comme étant la minimisation de la fonctionnelle :

$$T_2(C) = \int_{\Omega} [g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \xi \|\nabla C(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \quad (6.8)$$

L'évolution de  $C(\mathbf{x})$  sur le domaine  $\Omega$  doit être une fonction constante par morceaux. Or, la description du domaine par la fonction  $C(\mathbf{x})$  est directement dirigée par la norme de son gradient, tel que défini dans la fonctionnelle  $T_1$ . La norme adaptée est donc la norme d'ordre zéro pour laquelle l'énergie apportée par le saut de  $C(\mathbf{x})$  est nulle. Néanmoins, cette norme n'est pas convexe ce qui constitue un obstacle important pour le problème de minimisation. Une solution consiste à prendre une norme d'ordre un qui se situe à la limite de la convexité. En effet, seul le minimum présente un point singulier. Cela peut poser des problèmes de convergence lors de la minimisation de la fonctionnelle  $T_1$ . Toutefois, il est possible de régulariser ce point singulier en écrivant la norme  $\|\nabla C(\mathbf{x})\|_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla C(\mathbf{x})|^2}$  où  $\varepsilon$  est petit devant  $|\nabla C(\mathbf{x})|$  et autorise la dérivabilité en zéro [Bonnet, 2011].



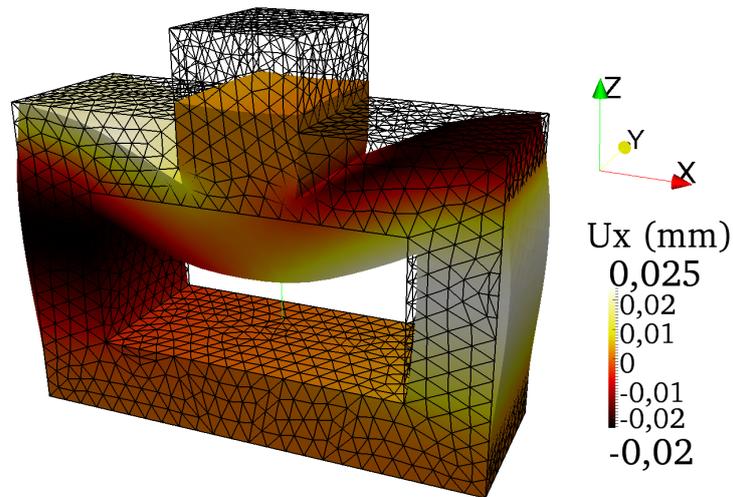
**FIGURE 6.9:** Résultat de minimisation entre la fonction  $f$  et le nuage de points pour une régularisation munie d'une norme 2 (a) et d'une norme 1 (b).

Une illustration est donnée à partir d'un nuage de points distribué sur le domaine  $\Omega$  suivant une fonction constante par morceaux auquel est rajouté un bruit sur la position verticale. La minimisation de l'écart suivant la méthode présentée précédemment entre ce nuage de points et une fonction  $f$  définie de manière discrète donne des résultats fonction de la norme choisie. La figure 6.9a montre le résultat pour une norme 2, on remarque que la transition entre les différents plateaux se fait de manière relativement lente. On ne décrit pas bien les frontières entre les différentes zones. La figure 6.9b montre le résultat pour une régularisation munie d'une norme 1. Dans ce cas-ci, les frontières sont mieux définies et les plateaux plus marqués. On peut donc envisager d'utiliser cette minimisation régularisée et munie de la norme 1 afin de déterminer le zonage matériau adapté au pied d'aube et à la technique de mesure de champ par CIN. Le degré de sensibilité de détermination des frontières, ou encore le nombre de frontières, est piloté par  $\xi$  jouant le rôle de poids donné à la minimisation du gradient de propriétés matériau vis-à-vis des propriétés identifiées.

## 4 A plus long terme

Afin de renforcer encore le niveau de connaissance du matériau en utilisant les possibilités apportées par la technique d'identification développée dans le cadre de ce travail, il serait nécessaire de réaliser d'autres études plus complexes telles que :

- la comparaison entre une mesure 2D d'une part et un calcul 3D d'autre part. Des hypothèses de comportement dans l'épaisseur doivent être postulées, mais il est aussi possible de voir les effets de variation de paramètres dans l'épaisseur sur le champ mesuré en surface et le cas échéant de déterminer ces paramètres.
- la réalisation d'essais *in situ* dans un tomographe afin de pouvoir comparer directement une mesure de champ de déplacement 3D avec un calcul 3D. La limitation actuelle se situe dans la capacité réduite des machines de traction pouvant être introduites dans le tomographe. Il est toutefois possible d'imaginer des premiers essais sur des éprouvettes de taille réduite et des sollicitations permettant d'obtenir un



**FIGURE 6.10:** Champ de déplacement suivant l'axe  $x$  exprimé sur la déformée d'un calcul 3D de compression entre la surface supérieure sur laquelle est transmis l'effort et la surface inférieure encastrée. Le maillage dans sa configuration non déformé est visible en trait plein.

champ de déplacement significatif et complexe pour un effort relativement faible. La figure 6.10 montre un calcul 3D réalisé sur une éprouvette permettant d'avoir des zones sollicitées en flexion et d'autres en compression sur le même matériau. L'effort est transmis en compression sur la surface supérieure tandis que la surface inférieure est encastrée. Le détail de la géométrie, tel les épaisseurs de chaque partie, est encore à optimiser afin de garantir une sensibilité suffisante des paramètres à identifier.

- le développement du modèle de comportement du composite. Nous avons traité le cas de l'élasticité, il serait aussi utile de rajouter des non linéarités afin de pouvoir traiter l'endommagement, la plasticité et éventuellement la viscosité du composite [Laurin *et al.*, 2007], ou bien les concentrations de contraintes au niveau des appuis dans le cas de la flexion trois points (ou des portées dans le cas du pied d'aube).

# **Annexe A**

## **Article flexion trois points**

## Identification of the out-of-plane shear modulus of a 3D woven composite

R. Gras · H. Leclerc · S. Roux · S. Otin ·  
J. Schneider · J.-N. Périé

Received: 12 September 2011 / Accepted: 16 September 2012

**Abstract** This study deals with the identification of macroscopic elastic parameters of a layer-to-layer interlock woven composite from a full-field measurement. As this woven composite has a coarse microstructure, the characteristic length of the weaving is not small as compared to the specimen size. A procedure based on an inverse identification method and full-field digital image correlation kinematic measurement is proposed to exploit a three-point bending test on short coupons to characterize the out-of-plane shear modulus. Each step of the proposed procedure is presented, and their respective uncertainty is characterized with the help of numerical simulations. The shear modulus is identified with an accuracy of about 1.5% and is 15% lower than the estimate obtained through Iosipescu tests. The proposed procedure shows a correlation between the ideal mesh size and the weav-

---

R. Gras, H. Leclerc, S. Roux  
LMT Cachan, ENS-Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris,  
61, Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France  
Tel.: +123-45-678910  
Fax: +123-45-678910  
E-mail: gras@lmt.ens-cachan.fr

S. Otin, J. Schneider  
Snecma Villaroche - Rond Point René Ravaud  
Réau 77550 Moissy-Cramayel, France

J.-N. Périé  
Université de Toulouse; INSA, UPS, Mines Albi, ISAE; ICA  
133, avenue de Rangueil, F-31077 Toulouse, France

ing period. It also reveals that the actual boundary conditions deviate from the ideal ones and hence a special attention is paid to their optimization.

## 1 Introduction

Composite materials, because of their remarkable compromise between weight and mechanical properties become more and more present in the aeronautic industry, even for demanding applications. During the past decade, a major step has been achieved through the development of 3D woven composites as their (especially through-thickness) resistance were considerably increased [1–3]. Indeed, in contrast with laminated composites where delamination is a major failure mode, 3D woven composites are strengthened by weaving the different layers together.

The design of components made out of those composites is based on a homogenized equivalent material. The homogenization technique has been intensively studied, and reviewed in [4–6]. Its predictive ability has been demonstrated in particular for elastic properties [7–9]. However, these approaches call for assumptions on the periodicity and the regularity of the fabric that the process can not reach. Consequently, the homogenized equivalent material behavior does not account for the scattered results observed in experimental tests [10, 11]. Alternatively, assumptions on the contact forces between weft and warp fibres, may lead to models whose parameters are to be finally determined from experimental tests [12].

In all those cases, either to identify parameters, or to validate a model, confrontations between modeling and experiment are required.

The present study is based on a layer-to-layer interlock woven composite developed by SNECMA (SAFRAN group) made out of carbon fiber tows and an epoxy matrix. The fibre volume fraction is 58%. The composite is periodic along the three directions  $(x, y, z)$ , containing respectively one period on the warp direction, two on the weft direction, and two on the out-of-plane direction. The unit cell is shown schematically in Figure 1.

[Fig. 1 about here.]

Homogenization methods predict that the homogenized elastic properties are orthotropic. However, the quantitative comparison between a homogenized material description and the actual material reveals a number of shortcomings, which call for a specific methodology explored in the present article. The major difficulty comes from the coarse microstructure of the material. Indeed, field measurement technique used in this study reveal very clearly the architecture of the material, and hence the spatial resolution of this experimental technique is potentially finer than the scale at which a homogenized material is expected to be a valid description. Adjusting the experimental technique, not at its best performance, but at the level where it can match the proposed modeling framework, constitutes a novel challenge addressed in the present work.

An additional focus of the proposed approach is to account faithfully for the actual experiment, modeling the test as it is and not as it should ideally be. Tolerance to deviation from ideality, reveals to be a major strength of the proposed methodology which nevertheless does not demand numerous or sophisticated additional sensors. Our analysis is indeed performed on a standard three point bending test, and a digital camera is the only required additional device as compared to a standard test.

Finally, as our objective is the quantitative evaluation of an elastic property, a special attention is devoted to the evaluation of uncertainties throughout the entire procedure.

Section 2 presents the mechanical three-point bending test to be exploited and that will be used to evaluate the performance of the different steps of the identification procedure. The proposed methodology is based on Digital Image Correlation (DIC) on the one hand, and the Finite Element Model Updating (FEMU) on the other hand, that are detailed in Sections 3 and 4 respectively. The former section introduces the software platform that hosts the entire procedure, presents the global DIC technique, and reports on the uncertainties attached to DIC per

se. Section 4 recalls the principle of the FEMU method, and its connection to DIC through the specific metric used. This section also provides an estimate of the uncertainty in the identified elastic modulus that results from the entire chain of analysis. It is shown that the uncertainties are very small, and that the main limitation of the methodology is the very concept of an equivalent homogenized medium. Indeed, DIC is sufficiently accurate to reveal strain modulations which are due to the weaving. Thus the issue of having a consistent identification with the sought simplified description brings to light an original issue of choosing a mesh which is adapted to the weaving periodicity, a point which is discussed in Section 5. Finally, Section 6 proposes some conclusions and perspectives.

## 2 Three-point bending test

In order to characterize the InterLaminar Shear Strength (ILSS) and the out-of-plane shear modulus, the sample is subjected to a standard three point bending test (referenced as ASTM D2344) and shown schematically in Figure 2.

[Fig. 2 about here.]

The specimen is placed onto two cylinder shaped supports parallel to the  $y$ -axis and referred to in the following as supports 1 and 2 for the left and right ones respectively. The load is applied on top with a third cylinder shaped contact element, called 3. The warp fiber direction of the specimen is along the horizontal  $x$ -axis whereas the weft fiber direction is along the  $y$ -axis. The sample geometry and size was determined based on the test standards and also considering the Representative Volume Element dimensions [13]. If the height (along the  $z$ -axis) is denoted by  $h$ , the length along the  $x$ -axis is  $5h$  and the depth (along the  $y$ -direction) is  $3h$ . The test is displacement controlled, with a velocity of  $8.33 \times 10^{-3} \text{ mm.s}^{-1}$ . During the test, the loading is registered and digital images are acquired at imposed time intervals in order to measure a two dimension full-field displacement on the surface sample by DIC. For this purpose a fine-grained black and white speckle pattern is

applied on the side face of the specimen. The choice was made to observe only the left half of the sample in order to increase the image resolution. An actual image showing the field of view (ROI) and surface pattern has been superimposed on the scheme shown in Figure 2. Images ( $1376 \times 1040$  pix.) are acquired by a digital 12-bit CCD camera system, Sensicam<sup>TM</sup>, providing a high signal-to-noise ratio.

As the aim of this test is to identify elastic properties, the absence of fibre breaking or debonding in the loading range considered in the present study was validated using acoustic emission technique. The loading rate was chosen as low to avoid significant viscosity effect. This is essential to secure the considered loading in the elastic regime.

### 3 Global Digital Image Correlation

#### 3.1 A specific software environment : the LMTpp platform

Identification involves a dialog between measurements and modeling. Usually, simulation and measurements are done with different softwares. The present study has been performed within a unique environment in order to provide an identification procedure of macroscopic elastic parameters with minimal sources of uncertainty and benefit from the entire field of view. The specific environment is a C++ environment, “LMTpp”, developed in house [14, 15]. Moreover, a global DIC algorithm is used [16] so that the displacement field is, from its basic formulation, expressed in a finite-element formalism. Note that DIC only uses the mesh and the finite-element shape functions as a convenient way to decompose the displacement field from the registration of images. However, no mechanical modeling is involved at this stage. The constitutive law and balance equations are not exploited in global DIC.

Mechanical modeling will be used later for the FEMU analysis. Based on parametrized boundary conditions, and constitutive parameters, the displacement field will be computed exploiting the mechanical equations. The boundary condi-

tions and elastic constants will then be optimized so that the DIC measured and the computed displacement fields coincide. This procedure is shown schematically through a flow diagram in Figure 3. We will come back in details on both DIC and FEMU procedures in the following, but we stress here that the homogeneity of the kinematic description, and of the LMTpp environment involves no loss in the dialog between the different parts of the entire identification procedure.

[Fig. 3 about here.]

### 3.2 Global DIC

DIC [17] aims at measuring a full-field displacement from images taken during the test on the side surface of the sample. These images are analyzed to calculate the displacement in each point of the observed area called Region Of Interest (ROI). In this study, a global DIC formulation was adopted [16]. A reference image is chosen, usually taken before any loading is applied. The user selects a ROI on this image, and meshes it with quadrilateral or triangle elements for which shape functions are bilinear. The grid can be structured or unstructured [18]. Global DIC consists in estimating the projection of the displacement field onto a suited basis, here given by finite-element shape functions, so that it matches the one used in the modeling.

The basic assumption of DIC is to assume that the image texture (i.e. surface patterns) is simply advected by the displacement, so that we can assume

$$g(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) = f(\underline{x}) + \eta(\underline{x}) \quad (1)$$

where  $f(\underline{x})$ , respectively  $g(\underline{x})$ , is the gray level at each point  $\underline{x}$  of reference image, respectively of the deformed image, and  $\eta(\underline{x})$  is the CCD sensor noise.

Introducing a decomposition of  $u(x)$  on the classical FE basis function, it is possible to estimate the solution  $u$  by minimizing over the entire domain  $\Omega$  the following

functional suited to a gaussian white noise :

$$\mathcal{T}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \left[ g \left( \underline{x} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} N_i(\underline{x}) \underline{e}_{\alpha} \right) - f(\underline{x}) \right]^2 d\underline{x} \quad (2)$$

where  $N_i$  are the finite element functions relative to node  $i$ , and  $\underline{e}_{\alpha}$  are unit vectors along the axes. The amplitudes  $a_{\alpha i}$  are the unknown degrees of freedom used to describe the kinematic field.

The above functional is strongly non-linear, because of the rapidly varying texture  $f$  and  $g$ . Hence, an iterative procedure is used, based on successive corrections of the deformed image,  $g^{(n)}$ , such that  $g^{(n)}(\underline{x} + \underline{u}^{(n)}(\underline{x})) = f(\underline{x})$  where  $\underline{u}^{(n)}$  is the displacement field determined at step  $n$  until  $g^{(n)}$  matches  $f$ . Incremental corrections of the displacement field  $\delta \underline{u}^{(n+1)}$  are computed from the minimization of the linearized form of the objective functional,  $\mathcal{T}_{lin}$

$$\mathcal{T}_{lin}(\delta \underline{u}^{(n+1)}) = \int_{\Omega} \left[ g^{(n)}(\underline{x}) - f(\underline{x}) - \delta \underline{u}^{(n+1)} \nabla f(\underline{x}) \right]^2 d\underline{x} \quad (3)$$

where a Taylor expansion of  $f$  has been used as well as a small strain assumption. Updating of the displacement field is simply  $\underline{u}^{(n+1)} = \underline{u}^{(n)} + \delta \underline{u}^{(n+1)}$ . It should be noted that the above linearized form is only useful for determining the correction, however, convergence is established based on the full (non-linear) functional  $\mathcal{T}$ . Thus, an approximate fulfillment of the small strain assumption does not endanger the quality of the final solution.

The main interest of the above writing is that the determination of the displacement increment  $\delta \underline{u}^{(n)} = \delta a^{(n)} N_{\underline{e}}$  resumes to the solution of linear system

$$M \cdot \delta a^{(n+1)} = b^{(n)} \quad (4)$$

where  $M$  is the matrix

$$M_{\alpha i; \beta j} = \int_{\Omega} [N_i(\underline{x}) N_j(\underline{x}) \partial_{\alpha} f(\underline{x}) \partial_{\beta} f(\underline{x})] d\underline{x} \quad (5)$$

and  $b$  is the vector

$$b_{\alpha i}^{(n)} = \int_{\Omega} [(g^{(n)}(\underline{x}) - f(\underline{x}))N_i(\underline{x})\partial_{\alpha} f(\underline{x})] d\underline{x} \quad (6)$$

Note that  $M$  is the same at all steps of the iteration, so that only  $b$  has to be updated.

Finally, the last difficulty is related to the use of a Taylor expansion to first order in order to estimate the displacement. This may cause trapping in secondary minima of the non-linear functional  $\mathcal{T}$ . To deal with this problem a multiscale approach is developed: a crude determination of the displacement is first performed based on strongly low-pass filtered images. Large displacements are captured by these first steps. Then, based on this first determination, finer and finer details are re-introduced in the images in order to progressively obtain a more accurate determination of the displacements. This procedure is carried down to unfiltered images in the final pass. The convergence criterion is based on the infinity norm of  $\delta\underline{u}^{(n)}$  displacement increment between two consecutive steps and is taken as  $\|\delta\underline{u}^{(n)}\|_{\infty} < 10^{-4}$ .

Several options and parameters are to be set in the DIC procedure: possible accounting of a brightness correction (relaxing the texture conservation Eq. (1)), the type of image interpolation for computing  $g^{(n)}$  or the computation of the gray level gradient  $\nabla f$ . Whereas brightness correction increases the number of degrees of freedom, the choice is made to use it in order to correct the brightness disparity between images. Following the literature [19,20], the spline interpolation for subpixel displacements of  $g$  is chosen to obtain better results in terms of systematic error and uncertainty. Gray level gradients are computed as centered finite differences.

### 3.3 Uncertainty due to DIC

The above presented global DIC is an ill-posed problem, the measured displacement field computed as such is limited by uncertainty, especially concerning sub-pixel displacement. Using the global DIC explained above with the chosen options, an uncertainty study is performed to quantify the uncertainty on the measured displacement field. As maximum uncertainty occurs for subpixel displacement of 0.5 pixel, an artificial deformed image is obtained by adding a half-pixel displacement to the reference image in both  $x$  and  $y$  direction. This is done by a Fast Fourier Transform (FFT) where the ROI size is reduced to the maximum power of 2 available as  $s = 2^n < \text{ROI size}$ . A new image,  $\tilde{f}$  of twice the size  $s$ , is created from the initial image,  $f$ , by symmetrizing the reduced ROI in order to satisfy the periodicity needed by the FFT. Then, in the Fourier space, the translated image  $\tilde{f}_t$  is obtained by :

$$\tilde{f}_t(\underline{x}) = \Re(\overline{\mathcal{F}}(\hat{f}(\underline{\lambda})e^{-i(\underline{\lambda} \cdot \underline{u})})) \quad (7)$$

where  $\hat{f}(\underline{\lambda})$  is the Fourier Transform of image  $f(\underline{x})$ ,  $\overline{\mathcal{F}}$  is the inverse Fourier Transform and  $\underline{u}$  is the needed translation displacement.  $\tilde{f}_t(\underline{x})$  is finally rescaled to the initial size of the reduced ROI (Fig. 4).

[Fig. 4 about here.]

Then, from the global DIC led on these two images,  $f$  and  $f_t$ , for different element size, from 16 to 64 pixels, the mean error and the uncertainty plotted on Figure 5 show a decreasing uncertainty and mean error as the element size increases. Hence, the uncertainty is much higher than the mean error. It is worth noting that if the kinematic field is not described by the basis function on which the displacement is sought, the error on the displacement field increases. Indeed, a complex kinematic field cannot be described accurately with a large element size.

[Fig. 5 about here.]

## 4 Finite Element Model Updating

### 4.1 Principles

Several techniques have been proposed to identify material parameters from kinematic field measurements [21,22]. The FEMU is the most generic and intuitive method [23]. It is based on over-determined data, a full-field displacement measurement in this case, and allows for dealing with a complex geometry. The principle consists in finding iteratively parameter values introduced in a Finite Element (FE) simulation to minimize the cost function,  $\mathcal{R}$ , measuring the gap between measured displacement fields by DIC,  $\underline{U}_{mes}$ , and calculated ones *i.e.*,  $\underline{U}_{cal}$  (Figure 3).

$$\mathcal{R}^2 = (\underline{U}_{mes} - \underline{U}_{cal})\mathbf{C}^{-1}(\underline{U}_{mes} - \underline{U}_{cal}) \quad (8)$$

Contrary to the classical approaches based on the comparison of strain fields [24], one notes that this objective functional is based on the displacement field itself. This specific character is important as it relaxes the sensitivity to spurious high frequency modes inevitably present in the measured displacement and very much amplified in strain evaluations (the alternative being to smooth out the strain field based on arbitrary a priori assumptions).

In the equation (8),  $\mathbf{C}^{-1}$  is the covariance matrix of the displacement measured by DIC, when noise is the dominant source of variability which can be evaluated exactly as proportional to the matrix  $M$  [25]. It provides a positive-definite weighting of the kinematic degrees of freedom based on the measurement.

The FE simulation, as the measured field, is performed in 2D, in the plane defined by the  $x$ -axis and  $z$ -axis, with a plane strain hypothesis. The latter is justified by the large thickness of the sample compared to the two other dimensions and the fact that it is the weft fibers orientation.

The boundary conditions chosen for the FE simulation are shown in Figure 6: At the contact point with the left support (called “support 1”), a displacement  $(U_x^1, U_z^1)$  is imposed. At the contact point with the right support (“support 2”),

only a vertical displacement is imposed  $U_z^2$ . The load being applied onto the central upper cylinder (“contact element 3”) is modeled through a distributed vertical force. Finally, as can be seen on Figure 7, the displacement field shows that the test does not obey the expected left-right symmetry. To account for this effect, and additional tangential (horizontal) force is applied on the contact element 3.

[Fig. 6 about here.]

[Fig. 7 about here.]

Besides, the strain in the vicinity of the contacts is quite large so that the linear elastic behavior assumed in the simulation is dubious. As a consequence, these areas will be omitted in the identification procedure.

The shear modulus  $G_{13}$ , as well as the displacements of the two outer cylinders and the tangential force applied on the central one are sought based on the FEMU method. The normal force is set to the experimentally measured value, and the contact surfaces are determined from the image. The three other elastic constants ( $E_1$ ,  $E_3$  and  $\nu_{13}$ ) are determined by homogenization.

Those elastic parameters ( $E_1$ ,  $E_3$  and  $\nu_{13}$ ) are issued from a modeling of the composite structure using the software *TexComp* [28]. The latter is based on a geometrical description of the fabric, and a homogenization procedure for the elastic properties of the textile composite based on the Eshelby inclusion method [26, 27]. Although this approach involves a number of simplifications and approximations, many studies have proved its efficiency. The major source of uncertainty comes from the difficulty of accounting for the transverse compression of fibres. As a result, in-plane constitutive parameters, and in particular  $E_1$ , agree quite well with their computed estimates [27]. Out-of-plane parameters are much more uncertain. One way to probe the effect of the uncertainty resulting from approximate estimates of the elastic constant is to compute the sensitivity fields,  $\partial U_{cal}/\partial p$  where  $p$  is either  $\ln(E_1)$ ,  $\ln(E_3)$  or  $\nu_{13}$ . The spatial mean of the modulus of the three sensitivity fields is reported in Table 1. The overall sensitivity of those parameters is quite modest (this could have been expected from the very choice of our test

which is chosen to maximize the sensitivity with respect to  $G_{13}$  : a few percent variation of  $\ln(E_3)$  or  $\nu_{13}$  cannot be resolved as the mean change in displacement is in the centi-pixel range.  $E_1$  is the most sensitive parameter, and indeed its value affect our estimate of  $G_{13}$  since it directly influences the deflected shape of the calculated sample. However, it is to be stressed that  $E_1$  is the constitutive parameter which is the most securely estimated either with the modeling code, or experimentally. Thus, the three elastic constants ( $E_1$ ,  $E_3$  and  $\nu_{13}$ ) are considered as trustful in the present study.

[Table 1 about here.]

## 4.2 Uncertainty in the identification process

One major source of uncertainty lies in the CCD sensor noise that induces an uncertainty on the measured displacement field. As the measured full-field displacement is taken as a reference for the identification step, it is necessary to know the propagation of this noise along the identification chain. For that purpose, the introduction of the camera noise on a synthetic image is characterized and propagated through the complete identification process to isolate the effect of the CCD sensor noise from other possible artifacts. The results are made dimensionless for confidentiality reasons. The reference value for the elastic shear modulus,  $G_{13_0}$ , is obtained from the mean value from Iosipescu tests led by SNECMA, with a scatter of  $\pm 4\%$  around this mean value.

### 4.2.1 Evaluation of the CCD sensor uncertainty

Besides the uncertainty due to DIC evaluated in Section 3.3, an other major source of uncertainty on the measured displacement field using the global DIC, is the CCD sensor noise. It is possible from  $N$  images of the same state considered as reference to characterize the noise due to the acquisition (essentially the intrinsic noise of the CCD sensor). Once this noise characterized, the attention would be

devoted to the propagation of the gray level noise along the identification process in Section 4.2.2.

A first DIC analysis is performed to evaluate a possible displacement between images. Choosing one image as a reference, the  $N - 1$  other images are chosen as deformed pictures. Typical translation evaluations reveal an unanticipated displacement of order 0.1 pixel at most. These small amplitude translations nevertheless contribute significantly to image differences.

An attempt was made to determine, in addition to noise, a gray level offset and rescaling, so that introducing the (unknown) noiseless reference image,  $f_0(\underline{x})$ , image number  $i$  is written

$$f_i(\underline{x}) = (1 + b_i)(a_i + f_0(\underline{x}) + \eta_i(\underline{x})) \quad (9)$$

where  $a_i$  is the gray level offset, and  $(1 + b_i)$  the gray level rescaling which may come from fluctuation in the exposure time (or lighting).  $\eta_i(\underline{x})$  is the noise whose spatial average is 0.

$$\langle f_i(\underline{x}) \rangle = (1 + b_i)(a_i + \langle f_0(\underline{x}) \rangle) \quad (10)$$

and, for  $i \neq j$ ,

$$\langle f_i(\underline{x})f_j(\underline{x}) \rangle - \langle f_i(\underline{x}) \rangle \langle f_j(\underline{x}) \rangle = (1 + b_i)(1 + b_j)(\langle f_0^2 \rangle - \langle f_0 \rangle^2) \quad (11)$$

This last set of  $N(N - 1)/2$  equations allows for the determination of the  $N$  unknowns  $b_i$  if one assumes  $\langle \log(1 + b_i) \rangle_i = 0$ . Similarly, assuming  $\langle a_i \rangle_i = 0$ , the first equation allows for estimating  $a_i$ . The above assumptions on  $a$  and  $b$  are needed because  $f_0$  is unknown. From the gray level corrected images,  $f'_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x})/(1 + b_i) - a_i$ , the noise  $\eta_i$  can be characterized

$$\langle f_i(\underline{x})^2 \rangle - \langle f_i(\underline{x}) \rangle^2 = (1 + b_i)^2(\langle f_0^2 \rangle - \langle f_0 \rangle^2) + \langle \eta_i(\underline{x})^2 \rangle \quad (12)$$

hence

$$\langle f'_i(\underline{x})^2 \rangle - \langle f'_i(\underline{x}) \rangle^2 = (\langle f_0^2 \rangle - \langle f_0 \rangle^2) + \langle \eta_i(\underline{x})^2 \rangle \quad (13)$$

The variance of each image noise  $\langle \eta_i(\underline{x})^2 \rangle$  can thus be estimated.

Images are encoded with a 16-bit deep gray level (thus ranging from 0 to 65535). The determined rescaling corrections  $b$  are of order of  $10^{-4}$ , and  $a$  of order 10 gray levels. Thus these corrections are very modest.

It is observed that the noise level is very similar in each image. Finally, the histogram of corrected image differences  $f'_i - f'_j$  can be computed, showing that it could be very well approximated by a Gaussian of zero mean and variance  $v^2$  as shown in Figure 8. The standard deviation is estimated to be  $v \approx 310$  gray levels, much larger than the above gray scale corrections.

[Fig. 8 about here.]

#### 4.2.2 Propagation of uncertainty along the identification chain

A reference image is artificially deformed with a displacement field issued from a finite element calculation for which the material properties are known. Thus, the material properties that have to be identified are known. However, the gray level value of a pixel for which the displacement assumes a non-integer value has to be interpolated from the reference image.

Once noise is added to the deformed image by specifying the mean and the standard deviation of a Gaussian distribution, as determined in the previous subsection, the FEMU identification is performed for two hundred random samples. The results are shown in Table 2. Both the mean difference between known and estimated parameters (termed “systematic error”) and the standard deviation of the estimates (termed “uncertainty”) are reported. This characterizes the uncertainty on the identified parameters due to the CCD sensor noise using the FEMU identification.

[Table 2 about here.]

The uncertainty on the displacement at support 1 (left) is much less than that of support 2 (right). The reason is that only the left part of the specimen was in the field of view of the camera and the displacement at support 2 has to be extrapolated at a far distance, inducing thereby a limited accuracy on this identified parameter. However, the uncertainties on the identified parameters are still rather small. The FEMU identification performances can thus be considered as reliable.

## 5 Suited mesh for identification

Taking into account a real material and experiment to feed the identification chain reveals yet another obstacle to overcome. The homogenized model used in the finite element method provides a smooth displacement field with slow variations. In the real case, the presence of the underneath textile architecture in the studied composite material induces large local modulations of the displacement field as shown in the Figure 9. These local variations have to be filtered out in order to compare both measured and calculated displacement fields. Let us stress that the challenge here is not to obtain the best accuracy from DIC, but rather to resort to a coarse analysis in order to match the chosen homogenized material description.

[Fig. 9 about here.]

The main difficulty with filtering the displacement field as a post-processing step after DIC is that correspondence with the experimental data is lost and hence all the effort invested in securing identification with experimental data would be ruined. Although such smoothing processes of DIC displacement field are often performed when strain are to be used, a clear appreciation of actual uncertainties would not recommend such a practice.

The proposed procedure is to filter the displacement field while preserving the connection to experimental images. Would the microstructure be ideally periodic, a DIC analysis performed with a mesh size equal to the period would indeed

directly filter the periodic component as required, yet preserving the DIC strategy to determine the long wavelength components of the displacement field.

In order to test the applicability of this idea, the systematic influence of the mesh size is studied.

Mesh sizes ranging from  $115 \times 130$  pixel to  $47 \times 22$  pixel are systematically explored without changing any other parameters in the identification chain. Figure 10 shows the impact of the mesh size on the estimated dimensionless shear modulus  $G_{13}$  normalized by the mean value obtained through Iosipescu tests,  $G_{13_0}$ .

[Fig. 10 about here.]

One notes that the mesh size along the  $x$ -direction has no or little systematic influence, whereas the  $z$ -direction has a very systematic influence.

To understand this sensitivity, it is of interest to consider the microstructure of the specimen surface prior to the application of the speckle pattern as shown in Figure 11. The microstructure appears as periodic along the  $z$ -axis but not along the  $x$ -axis (the period along this direction is about 200 pixels, and would require too coarse meshes to be seen).

[Fig. 11 about here.]

The power spectrum of the microstructure image in the Fourier domain along the  $z$ -axis shown in Figure 12 presents a well defined peak at a period of 62 pixels. In the same figure, the FEMU residual is also plotted showing a minimum for twice this size.

[Fig. 12 about here.]

The absolute lowest FEMU residual is reached for a mesh size equal to  $84 \times 122$  pixels.

For this mesh size, the residual maps of  $\underline{U}_{mes} - \underline{U}_{cal}$  along both space direction are shown in Fig. 13(a)(b). The computation of the difference is carried out on the nodes of the FEMU analysis, and the DIC displacement is interpolated at those nodes using a bi-linear interpolation. On this plot, the masked region underneath

the central cylinder is clearly visible. The range of displacement difference is about 0.12 pixel along the  $x$  axis and 0.25 pixel along the  $z$  axis.

The identification can also be led with this optimal correlation mesh and the difference of  $\underline{U}_{mes} - \underline{U}_{cal}$  along both space direction can be evaluated on the nodes of the DIC mesh, in order to benefit from the weight matrix estimated from DIC. The residual maps, shown in Fig. 13(c)(d), have a range of displacement difference slightly smaller than previously, about 0.12 pixel along the  $x$  axis and 0.18 pixel along the  $z$  axis. It shows the improvement in the identification coming from the use of the DIC correlation matrix. The values of the identified parameters, for this last identification, are shown in Table 3.

[Fig. 13 about here.]

[Table 3 about here.]

Let us stress that the best boundary conditions (displacement and forces at the contact points) applied to the finite element analysis are identified by the FEMU in order to be consistent with the measurement extracted from the experiment. It is observed that the horizontal force  $F_X$  taken into account in the modeling is far from being negligible. Indeed it is the order of 8.6% of the applied vertical load. This horizontal force — which would typically be ignored in modeling — is due to the asymmetry of the test, found consistently in the identified values of the two outer applied vertical displacements.

The final estimate of the out-of-plane shear modulus is finally determined with an accuracy of about 1.5%. It is to be observed that the main source of uncertainty results from the required modeling assumption which ignores the material microstructure. The camera noise contributes to about 0.5%, a rather small amount as compared to the homogeneity assumption.

However, the results differs from other experiments led by SNECMA on Iosipescu tests by a significant amount (much larger than the uncertainty level). One possible explanation of this discrepancy is the fact that the stress state is very heterogeneous for the latter tests, and for a composite material having a coarse microstruc-

ture, the relevance of an equivalent homogeneous material becomes questionable. The required scale separation between the microstructure and the spatial variability of the stress field is poorly satisfied. To clarify this issue, it would be extremely informative to apply a strategy similar to the one proposed herein, based on a combination of DIC and FEMU, to the Iosipescu test.

## 6 Conclusion and perspectives

This study was conducted on a model specimen with a coarse periodic weaving, although an homogenized elastic property was sought. The applicability of an identification procedure based on DIC and FEMU on such a material has been demonstrated. A continuous pathway has been paved from test images to the identified property allowing for a tracking of all sources of errors and uncertainties. One major source of uncertainty was shown to be due to the camera noise. However, the most limiting one is the constraint to ignore the influence of the microstructure although it could be clearly revealed by the DIC analysis.

The simplicity of the present methodology opens new horizons to identify elastic properties (or more generally stiffness) of complex materials and structures under arbitrary loadings (preserving however a two-dimensional kinematics). The detailed tracking of uncertainties, including camera noise, down to the final identification result not only provides an answer to the sought properties, but also a way to evaluate in an objective fashion the value of the determined information. Extension of the present approach to inelastic behaviors will be investigated in the future.

## References

- [1] Guénon V.A., Chou T.W. and Gillespie J.W. Jr, "Toughness properties of a three-dimensional carbon-epoxy composite," *Journal of materials science*, **24**, (1989), pp. 4168-4175.

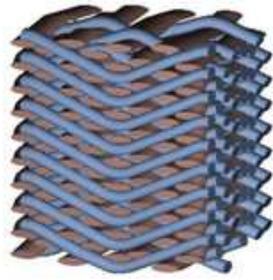
- 
- [2] Mouritz A.P., Bannister M.K., Falzon P.J. and Leong K.H., "Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites," *Composites Part A*, **30**, (1999), pp. 1445-61.
- [3] Mouritz A.P., "Tensile fatigue properties of 3D composites with through-thickness reinforcement," *Composites science and technology*, **68**, (2008), pp. 2503-2510.
- [4] Bensoussan A., Lions J.L. and Papanicolaou G., "Asymptotic analysis for periodic structures," *Studies in mathematics and its application*, Amsterdam: North Holland, (1978).
- [5] Oleinik O.A., "On homogenization problem," *Lecture notes in physics*, **195**, (1984), pp. 248-272.
- [6] Braides A., Defranceschi A., "Homogenization of multiple integrals," Oxford: Oxford University Press, (1998).
- [7] Holmbom A., Persson L.E. and Svanstedt N., "A homogenization procedure for computing effective moduli and microstresses in elastic composite materials," *Composites Engineering*, **2**, (1992), pp. 249-259.
- [8] Dasgupta A. and Bhandarkar S. M., "Effective thermomechanical behavior of plain-weave fabric-reinforced composites using homogenization theory," *Journal of Engineering Materials and Technology*, **116**, (1994), pp. 99-105.
- [9] Bystrom J., Jekabsons N. and Varna J., "An evaluation of different models for prediction of elastic properties of woven composites," *Composites: Part B*, **31**, (2000), pp. 7-20.
- [10] Cox B.N., Dadkhaha M.S., "The macroscopic elasticity of 3D woven composites." *Composites Materials*, **29**, (1995), pp. 785-819.
- [11] Buchanan S., Grigorash A., Archer E., McIlhagger A., Quinn J. and Stewart G., "Analytical elastic stiffness model for 3D woven orthogonal interlock composites," *Composite science and technology*, **70**, (2010), pp. 1597-1604.
- [12] Boisse P., Gasser A., Hagege B. and Billoet J.-L., "Analysis of the mechanical behavior of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level," *Journal of material science*, **40**, (2005), pp. 5955-5962.
- [13] Schneider J., Aboura Z., Khellil K., Benzeggagh M. and Marsal D., "Off-plane behaviour investigation of an interlock fabric," *Comptes Rendus des Journées Nationales sur les Composites 16*, (2009), France, Toulouse.
- [14] Leclerc H., "Nouveaux outils de mécanique et d'analyse numérique pour le LMT," In *Séminaire du LMT Cachan*, (2005), <http://www.lmt.ens-cachan.fr/seminaire/transparentes/leclerc-transparentes.pdf>.
- [15] Leclerc H., "Plateforme metal : optimisations et facilités liées à la génération de code," In *Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, (2007).

- 
- [16] Besnard G., Hild F. and Roux S., “ ‘Finite-element’ displacement fields analysis from digital images: Application to Portevin-Le-Châtelier bands,” *Experimental Mechanics*, **46**, (2006), pp. 789-804
- [17] Chu T.C., Ranson W.F. and Sutton M.A., “Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics,” *Experimental Mechanics*, **25**, (1985), pp. 232-245.
- [18] Leclerc H., Périé J.-N., Roux S. and Hild F., “Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Material Properties,” *Lecture notes in computer science*, **5496**, (2009), pp. 161-171.
- [19] Schreier H.W., Braasch J.R. and Sutton M.A., “Systematics errors in Digital Image Correlation caused by gray-value interpolation,” *Opt. Eng.*, **39**, (2000), pp. 2915-2921.
- [20] Bornert M., Brémand F., Doumalin P., Dupré J.-C., Fazzini M., Grédiac M., Hild F., Mistou S., Molimard J., Orteu J.-J., Robert L., Surrel Y., Vacher P. and Wattrisse P., “Assessment of Digital Image Correlation measurement errors: methodology and results,” *Experimental Mechanics*, **49**, (2009), pp. 353-370.
- [21] Grédiac M., “The use of full-field measurement methods in composite material characterization: interest and limitations,” *Composites Part A*, **35**, (2004), pp. 751-761.
- [22] Avril S., Bonnet M., Bretelle A.-S., Grédiac M., Hild F., Ienny P., Latourte F., Lemosse D., Pagano S., Pagnacco E. and Pierron F., “Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements,” *Experimental Mechanics*, **48**, (2008), pp. 381-402.
- [23] Kavanagh K.T. and Clough R.W., “Finite element applications in the characterization of elastic solids,” *Int. J. Solids Structures*, **7**, (1971), pp. 11-23.
- [24] Lecompte D., Smits A., Sol H., Vantomme J. and Van Hemelrijck D., “Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens,” *Int. J. Solids Structures*, **44**, (2006), pp. 1643-1656
- [25] Roux S. and Hild F., “Stress intensity factor measurements from digital image correlation: post-processing and integrated approaches” *Int. J. Fract.*, **140**, (2006), pp. 141-157.
- [26] Huysmans G., Verpoest I. and Van Houtte P., “A poly-inclusion approach for the elastic modelling of knitted fabric composites” *ACTA MATERIALIA*, **46**, (1998), pp. 3003-3013.
- [27] Lomov, S. V., Perie G., Ivanov D. S., Verpoest I., and Marsal D., “Modeling three-dimensional fabrics and three-dimensional reinforced composites: challenges and solutions” *Textile Research Journal*, **81**, (2011), pp. 28-41.
- [28] Verpoest I. and Lomov S. V., “Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis” *Composites Science and Technology*, **65**, (2005), pp. 2563-2574.

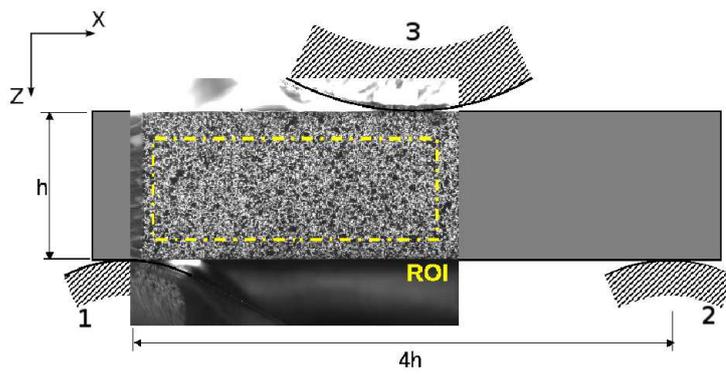
**List of Figures**

1	Example of a unit cell of an interlock woven composite used for the test. . . . .	23
2	Schematic view of the 3 point bending test. The specimen is placed on two cylinder shaped supports (labeled 1 and 2), and the load is applied through a third contact element (labeled 3). The field of view of the camera is shown as the inserted image. Note that only the left part of the specimen is seen. . . . .	24
3	Flow diagram of the identification procedure where DIC stands for Digital Image Correlation and FEA for Finite Element Analysis. DIC is used to measure the experimental displacement field. FEA is used to compute the displacement field from boundary conditions and material parameters which are determined so as to minimize the difference with the measured displacement field. . . . .	25
4	Procedure used to create a translated image $f_t$ of half a pixel on each direction from an original image $f$ . An image twice as large as the reference one is built from mirror symmetric copies. The result is now a periodic image suitable for FFT. Half a pixel translation is performed through a phase shift in Fourier space. Finally, the upper left quarter of the image is cropped, and saved as $f_t$ . . . . .	26
5	Uncertainty (a) and mean error (b) of the DIC analysis as a function of the element size are shown in a log-log plot. These data are obtained for the worst case of half a pixel displacement in both $x$ and $y$ directions. Dotted lines show a power-law going through the first data points. . . . .	27
6	Mesh used for FEA on which the boundary conditions are schematically represented. Note that a horizontal load has to be included at the upper contact element 3 to account for the observed dissymmetry of the test. The ROI on which DIC is performed is delimited as a dot-dashed rectangle. . . . .	28
7	Magnitude of the measured displacement field represented on the deformed mesh (amplified 50 times). Note that the expected left-right symmetry of the test is violated as can be clearly seen from the displacement underneath the central load bearing contact element 3. . . . .	29
8	Histogram obtained from the pixel-to-pixel difference between images. Data points are shown as $\circ$ symbols, and a Gaussian fit (bold curve) is drawn as a guide to the eye. . . . .	30
9	Horizontal component of the displacement field as measured by DIC with a regular square mesh of 16 pixel element size. A clear modulation can be seen which reflects the underlying microstructure. . . . .	31
10	Map of the identified dimensionless shear modulus $G_{13}/G_{13_0}$ as a function of the mesh size along $x$ and $z$ directions. . . . .	32
11	Microstructure of the specimen surface layer. The periodicity of the weaving along the $z$ -axis is clearly seen. . . . .	33

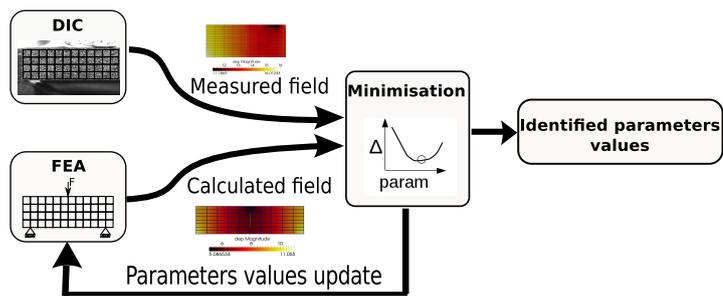
- 
- 12 FEMU residuals obtained for a regular square mesh whose size is  $L_z$  along the  $z$ -axis are shown with  $\bullet$  symbols. The power spectrum of the microstructure (shown in Fig. 11) along the  $z$  direction and averaged over  $x$  is shown on the same graph as a dotted curve, it is plotted as a function of  $L_z = 2\pi/k$ . A first peak is observed for the spatial period of the weaving, and a second one at twice the period. 34
- 13 Horizontal  $x$  component (a) (respectively (c)) and vertical  $z$  component (b) (respectively (d)) of the difference between measured and computed displacement fields. The data is shown for a correlation mesh of  $84 \times 122$  pixels. The minimization of  $\mathcal{R}$  (Eq. (8)) is made on the FE mesh (respectively on the correlation mesh) without (respectively with) making use of a weight matrix. Difference between measured and computed displacement fields decreases when using a weighting matrix. . . . . 35



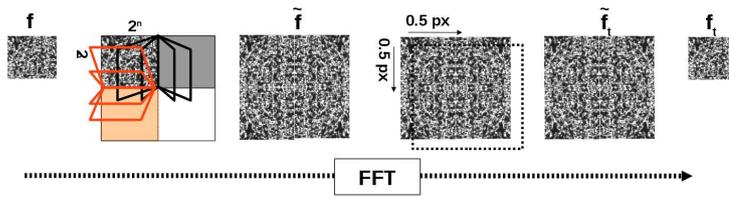
**Fig. 1** Example of a unit cell of an interlock woven composite used for the test.



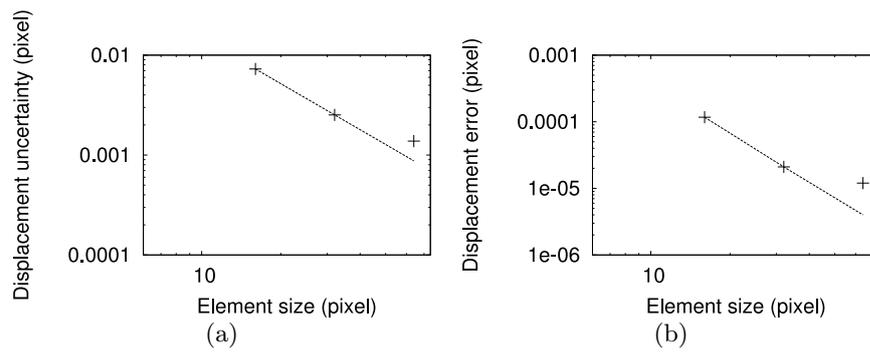
**Fig. 2** Schematic view of the 3 point bending test. The specimen is placed on two cylinder shaped supports (labeled 1 and 2), and the load is applied through a third contact element (labeled 3). The field of view of the camera is shown as the inserted image. Note that only the left part of the specimen is seen.



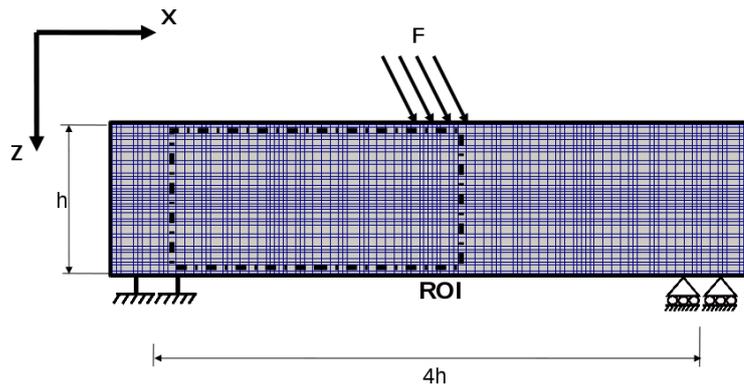
**Fig. 3** Flow diagram of the identification procedure where DIC stands for Digital Image Correlation and FEA for Finite Element Analysis. DIC is used to measure the experimental displacement field. FEA is used to compute the displacement field from boundary conditions and material parameters which are determined so as to minimize the difference with the measured displacement field.



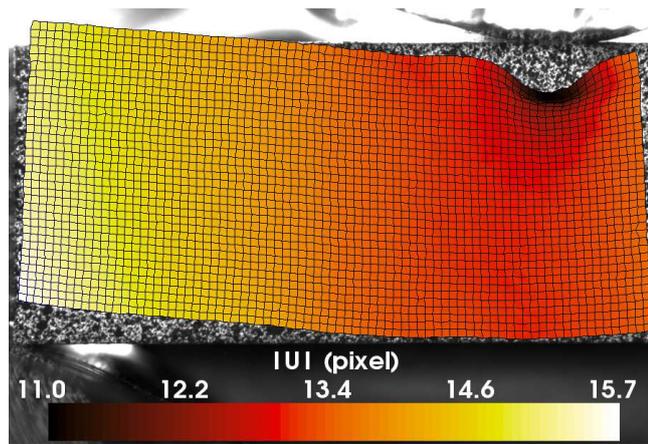
**Fig. 4** Procedure used to create a translated image  $f_t$  of half a pixel on each direction from an original image  $f$ . An image twice as large as the reference one is built from mirror symmetric copies. The result is now a periodic image suitable for FFT. Half a pixel translation is performed through a phase shift in Fourier space. Finally, the upper left quarter of the image is cropped, and saved as  $f_t$ .



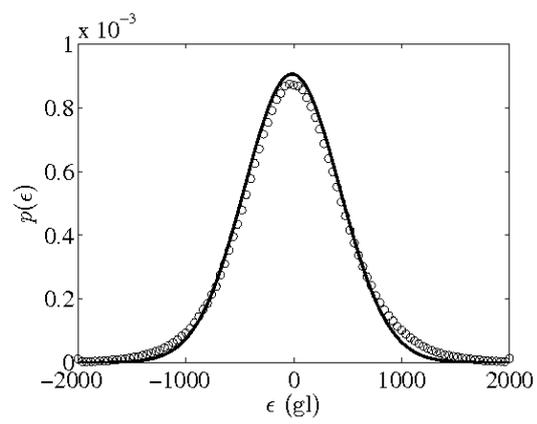
**Fig. 5** Uncertainty (a) and mean error (b) of the DIC analysis as a function of the element size are shown in a log-log plot. These data are obtained for the worst case of half a pixel displacement in both  $x$  and  $y$  directions. Dotted lines show a power-law going through the first data points.



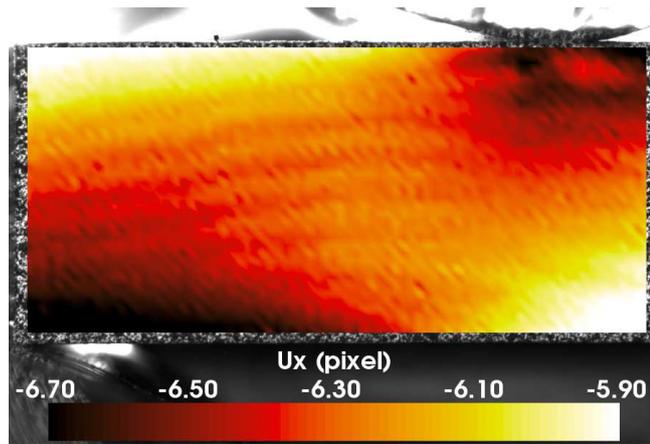
**Fig. 6** Mesh used for FEA on which the boundary conditions are schematically represented. Note that a horizontal load has to be included at the upper contact element 3 to account for the observed dissymmetry of the test. The ROI on which DIC is performed is delimited as a dot-dashed rectangle.



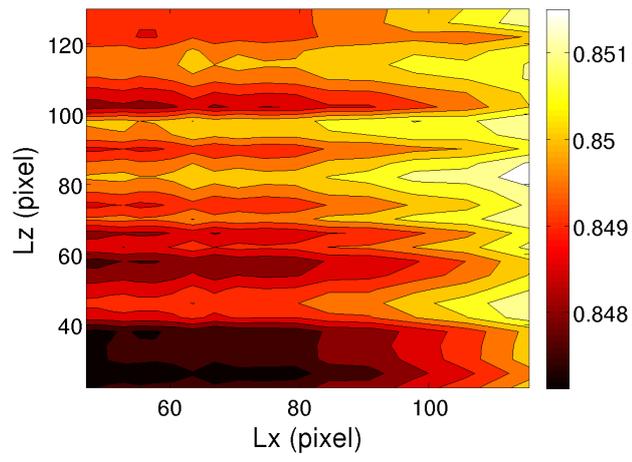
**Fig. 7** Magnitude of the measured displacement field represented on the deformed mesh (amplified 50 times). Note that the expected left-right symmetry of the test is violated as can be clearly seen from the displacement underneath the central load bearing contact element 3.



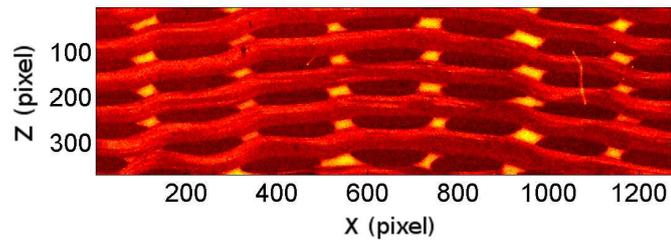
**Fig. 8** Histogram obtained from the pixel-to-pixel difference between images. Data points are shown as  $\circ$  symbols, and a Gaussian fit (bold curve) is drawn as a guide to the eye.



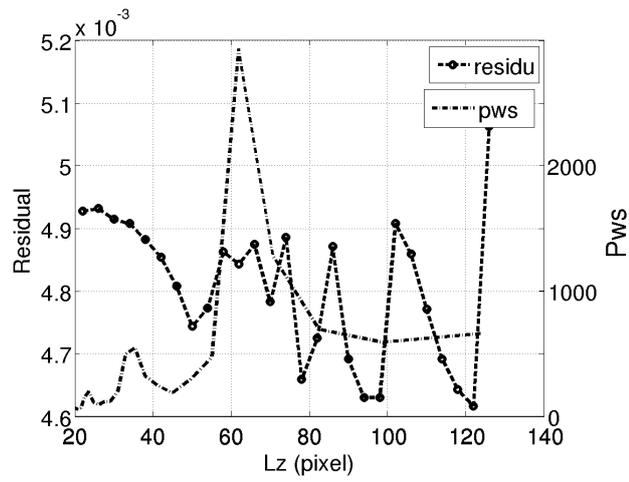
**Fig. 9** Horizontal component of the displacement field as measured by DIC with a regular square mesh of 16 pixel element size. A clear modulation can be seen which reflects the underlying microstructure.



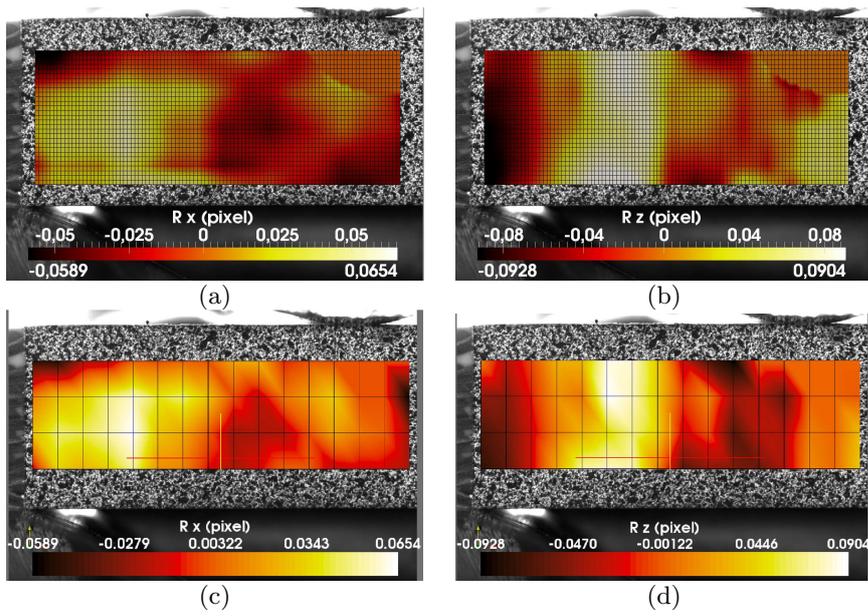
**Fig. 10** Map of the identified dimensionless shear modulus  $G_{13}/G_{13_0}$  as a function of the mesh size along  $x$  and  $z$  directions.



**Fig. 11** Microstructure of the specimen surface layer. The periodicity of the weaving along the  $z$ -axis is clearly seen.



**Fig. 12** FEMU residuals obtained for a regular square mesh whose size is  $L_z$  along the  $z$ -axis are shown with  $\bullet$  symbols. The power spectrum of the microstructure (shown in Fig. 11) along the  $z$  direction and averaged over  $x$  is shown on the same graph as a dotted curve, it is plotted as a function of  $L_z = 2\pi/k$ . A first peak is observed for the spatial period of the weaving, and a second one at twice the period.



**Fig. 13** Horizontal  $x$  component (a) (respectively (c)) and vertical  $z$  component (b) (respectively (d)) of the difference between measured and computed displacement fields. The data is shown for a correlation mesh of  $84 \times 122$  pixels. The minimization of  $\mathcal{R}$  (Eq. (8)) is made on the FE mesh (respectively on the correlation mesh) without (respectively with) making use of a weight matrix. Difference between measured and computed displacement fields decreases when using a weighting matrix.

---

**List of Tables**

1	Mean, $m$ , over the entire domain of the magnitude of the sensitivity map calculated analytically as $\partial U_{cal}/\partial p$ . . . . .	37
2	Uncertainty on the identified shear modulus and boundary condition parameters obtained from applying the proposed procedure to synthetic data and added noise. . . . .	38
3	Identified values for the best correlation mesh, the element size of which is $84 \times 122$ pixels. . . . .	39

---

Parameters $p$	$\ln(E_1)$	$\ln(E_3)$	$\nu_{13}$
$m$	1.344	0.433	0.096

**Table 1** Mean,  $m$ , over the entire domain of the magnitude of the sensitivity map calculated analytically as  $\partial U_{cal}/\partial p$ .

Parameters	$G_{13}/G_{13_0}$	$X_l$ (px.)	$Z_l$ (px.)	$Z_r$ (px.)	$F_X/F_Z$
Initial values	1	-5	-16.5	-14	11.26%
Identified values	0.993	-4.9993	-16.5004	-14.0212	11.33%
Systematic error	0.007	0.0007	-0.0004	-0.0212	0.07%
Uncertainty	0.0014	0.001	0.00036	0.0039	0.12%

**Table 2** Uncertainty on the identified shear modulus and boundary condition parameters obtained from applying the proposed procedure to synthetic data and added noise.

Parameters	$G_{13}/G_{13_0}$	$X_l$ (px.)	$Z_l$ (px.)	$Z_r$ (px.)	$F_X/F_Z$
Identified values	0.86	-6.35	-14.77	-17.72	8.6%
Systematic error	-0.007	-0.0007	-0.0004	-0.0212	0.07%
Standard deviation	0.0014	0.001	0.0004	0.0039	0.12%

**Table 3** Identified values for the best correlation mesh, the element size of which is  $84 \times 122$  pixels.

# **Annexe B**

## **Article pied d'aube**

# Identification of a set of macroscopic elastic parameters in a 3D woven composite: Uncertainty analysis and regularization

R. Gras<sup>a,b</sup>, H. Leclerc<sup>a</sup>, F. Hild<sup>a</sup>, S. Roux<sup>a</sup>, J. Schneider<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*LMT Cachan, ENS-Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris,  
61, Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France*

<sup>b</sup>*Snecma Villaroche - Rond Point René Ravaud  
Réau 77550 Moissy-Cramayel, France*

---

## Abstract

Performing a single but complex mechanical test on small structures rather than on coupons to probe multiple strain states / histories for identification purposes is nowadays possible thanks to full-field measurements. The aim is to identify many parameters thanks to the heterogeneity of mechanical fields. Such an approach is followed herein, focusing on a fan blade root made of 3D woven composite. The performed test, which is analyzed using global digital image correlation, provides heterogeneous kinematic field due to the particular shape of the sample. This displacement field is further processed to identify the four in-plane material parameters of the macroscopic equivalent orthotropic behavior. The key point, which may limit the ability to draw reliable conclusions, is the presence of acquisition noise in the original images that has to be tracked along the DIC / identification processing to provide uncertainties on the identified parameters. A further regularization based on *a priori* knowledge is finally introduced to compensate for a possible lack of experimental information needed for completing the

identification.

*Keywords:* B.elastic material, B.anisotropic material, C.finite elements,  
C.mechanical testing, Digital Image Correlation

---

## **1. Introduction**

Composite materials are more and more employed in the aeronautic and aerospace industries due to their attractive specific mechanical properties. Recently, the development of 3D woven composites prompted their use in new applications requiring high mechanical properties such as the engine fan blade [1]. Compared to layered architectures where delamination is a major failure mode, 3D woven composites are strengthened by a tow weaving pattern [2]. However, the principle of weaving induces more waviness in the material and hence the gain of strength on the out-of-plane direction results in a strength loss in the in-plane directions [3]. The fabrication process has been studied in order to optimize the position and orientation of the tows in the preform, and to design an injection route compatible with the fabric geometry limiting void generation [4, 5, 6]. Based upon these different works, the process is well understood and mastered, and it now allows for the design of fabric geometries that are tailored to a given component part with a large flexibility to accommodate for arbitrary geometry and loading conditions.

From the knowledge of the mesostructure and its mechanical properties [7], the elastic behavior of such materials can be modeled based on the homogenization theory [8, 9, 10]. Yet, experimental validation remains a challenge both for

validating the present fabrication of crucial parts, and for the design of new ones. The object of this study is to identify material parameters of a 3D woven composite from data extracted from a specific test on a fan blade dovetail root, which is explained in Section 2. The identification method is based on two-dimensional full-field measurements obtained through a *global* Digital Image Correlation (DIC) technique summarized in Section 4.1, and on a finite element model introduced in Section 3. This FE model is updated as explained in Section 4.2. Then, some specific points associated with numerical issues are discussed in Section 4.3. Last, Section 5 deals with the results obtained on the studied material and the corresponding uncertainties induced by picture acquisition noise.

## **2. Mechanical test and material**

The material, which is developed by SNECMA (SAFRAN Group) and considered in this study, is a layer-to-layer interlock woven composite for which a unit cell is shown in Figure 1. It is made of carbon fibers and an epoxy matrix. The weaving is specifically designed for 3D structures in order to reach stringent specifications under a variety of loading conditions representative of in-service and extreme conditions. To meet these severe requirements and due to the variation of the geometry, more specifically in the blade root, the weaving (*i.e.*, thickness and orientation of the tows) depends on the position within the part. Therefore up to the largest scale, the fan blade displays specific heterogeneities or modulations of the local material properties [11]. Frequency modal analysis allows material properties in the blade to be identified [12, 13]. However, these methods are not

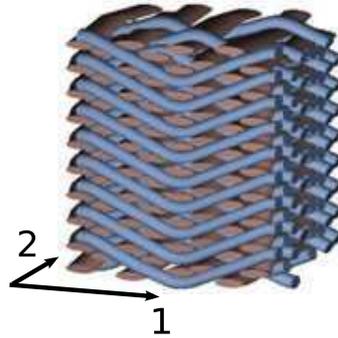


Figure 1: Example of a unit cell of an interlock woven composite used for the test. The warp tows, respectively the weft tows, are along direction 1, respectively direction 2.

suited for thick areas such as the root-blade where the bulk is mostly subjected to static loadings. Consequently, a novel identification methodology has to be devised. It is the aim of the present study to investigate the combination of full field kinematic measurements in conjunction with numerical modeling to assess a physically and mechanically reliable modeling.

The studied test consists in pulling a blade root technological specimen. The sample is put in a dovetail-shaped fixture such that the warp tows are in the observed plane  $Oxz$  and the weft tows are oriented along the normal to this plane. The load is applied on the top part of the sample by a hydraulic jack (Figure 2). Because of this set up, the displacement field is extremely heterogeneous, thereby providing rich kinematic fields that will be used for identification purposes. However, it is also very complex, namely, the boundary conditions are not well known due to contact and friction on the supporting fixture and the imperfect positioning of the sample. Therefore the present test is instrumented with special care:

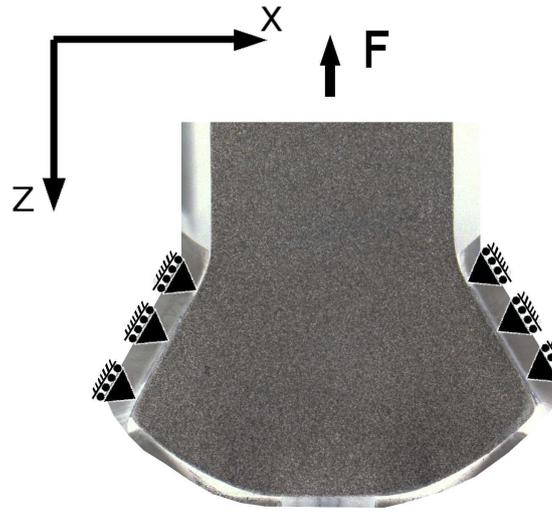


Figure 2: Schematic view of the studied test where  $F$  is the applied tensile force when the observed surface has been prepared for correlation purposes.

- First, acoustic emission is used with two sensors positioned close to the top of the sample to ensure that there is no major damage of the sample during the test.
- The test is also prepared for Digital Image Correlation (DIC) analyses (Figure 2). A single camera (definition  $1157 \times 1737$  pixels, digitization: 10 bits) is used for acquiring images along the test in order to measure the displacement field at each step (see Section 4.1).
- Last, two displacement transducers are positioned on the front surface of the sample to measure possible out-of-plane motions due to sample / actuator misalignments. It would have been possible to correct for them when

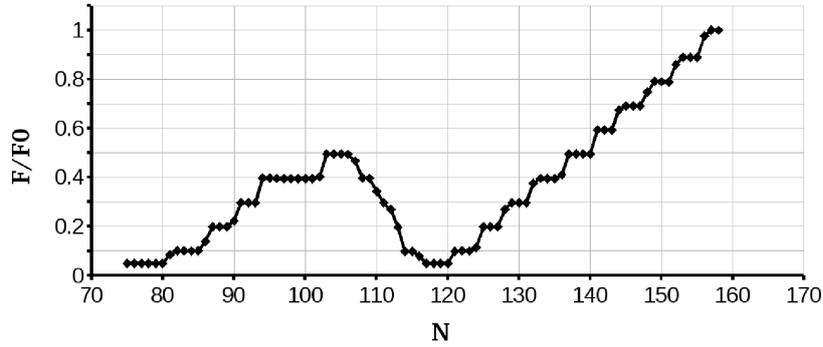


Figure 3: Dimensionless force versus image number.

needed as uncontrolled out-of-plane motions often induce artifacts in the measured in-plane displacement field [14]. However, the displacement measured by these transducers were small enough to neglect the effect of out-of-plane motions.

The loading history consists first in the application of a tensile force of half the maximum load level followed, after unloading, by a second force ramp up to the maximum level (Figure 3). The test is load-controlled with a rate of  $F_{\max}/50 \text{ s}^{-1}$  so that the loading conditions are quasi-static. During the whole test, images were acquired every five seconds, consequently, more than 100 images are available.

### 3. Finite Element Model

To compare experimental data with numerical simulations, a finite element model is considered. The latter consists of a two dimensional mesh with quadrilateral elements obtained from the complete three dimensional mesh that was used for design purposes. This mesh of the perfect geometry is ‘fitted’ to the actual ge-

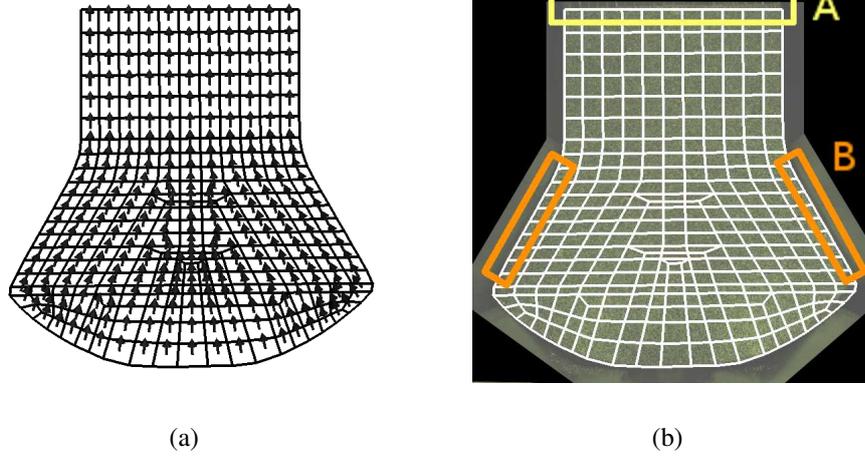


Figure 4: (a) Local orientations of the orthotropy basis are represented as black arrows on the FE mesh used for the simulation. Nodes on which Dirichlet boundary conditions are applied (b). A: top nodes (applied load), B: nodes located at the sample / fixture interface.

ometry as explained in Section 4.3.2. The two dimensional simplification is justified by the large thickness of the sample compared to the two other dimensions so that a plane strain hypothesis is a reasonable choice. Based on the classical modeling of composites as an orthotropic elastic medium prior to damage [15, 16], in the material frame given by weft and warp directions, a continuum approach is proposed with spatially varying orthotropy axis orientations. However, in the present study the *same* local elastic behavior is assumed (*i.e.*, that in the material frame). With the observed surface, material 3D parameters are the elastic moduli in the weft direction,  $E_1$ , and in the out-of-plane direction,  $E_3$ , the shear modulus,  $G_{13}$ , and Poisson's ratio  $\nu_{13}$ . Local orientations are shown in Figure 4a.

To be consistent with the performed test, the boundary conditions chosen in the simulations are extracted from displacement measurements as Dirichlet conditions

prescribed on nodes located on the top side [zone A in Figure 4b] and on the contact surface with the fixture (zone B in Figure 4b). Consequently, there is no need to model the complex interface between the sample and the dovetailed fixture. Elsewhere, a free-edge condition is assumed in accordance with the test. In the following, the study is conducted for a series of images taken during the two macroscopic elastic loadings. The reference image for each of the loading step is taken at the beginning of the ramp, corresponding to a load level equal to 10% of the maximum value. An example is shown in Figure 7 where the displacement field is measured by correlating an image pair where the deformed configuration corresponds to a load level equal to 50% of the maximum level.

## 4. Measurement and Identification Tools

### 4.1. Global Digital Image Correlation

Based on images taken during the test, a full-field measurement is performed using a global formulation of Digital Image Correlation (DIC). In the following, principles of *global* DIC are summarized (more details can be found in Ref. [17]). Section 5 will be devoted to the use of the estimated displacement fields from DIC for identification purposes and uncertainty analyses.

DIC consists in registering two images, a reference  $f(\mathbf{x})$ , and a deformed  $g(\mathbf{x})$  one, where  $f$  and  $g$  give the gray level value at pixel  $\mathbf{x}$ . It is assumed [18] that the gray level is conserved, up to the camera sensor noise,  $\eta(\mathbf{x})$ , so that

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}) \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}$  is the sought displacement field, and  $\eta$  characterizes the acquisition noise. The unknown displacement field is obtained from the minimization of the squared difference  $[g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})]^2$  summed over all the pixels belonging to the Region Of Interest (ROI)  $\Omega$ . The displacement field  $\mathbf{u}$  is decomposed over a basis of fields whose amplitude is to be determined by minimizing the sum of squared differences. The specificity of *global* DIC lies in the unrestricted choice of this basis of displacement fields. In particular, as will be the case in the present study, finite element shape functions supported by structured [17] or unstructured meshes can be used. It is worth noting that finite element only refers here to the (kinematic) shape functions, and not to the numerical modeling of an elastic solid. The unknowns of the problem thus become the nodal values of the displacement field,  $a_{\alpha i}$ , and the functional to be minimized is written as

$$\mathcal{T}(a_{\alpha i}) = \int_{\Omega} \left[ g \left( \mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n a_{\alpha i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} \right) - f(\mathbf{x}) \right]^2 dx \quad (2)$$

where  $N_i$  is the finite element shape function relative to node  $i$ , and  $\mathbf{e}_{\alpha}$  the unit vector along the  $\alpha$  direction. The functional  $\mathcal{T}$  is minimized iteratively by successive corrections of the deformed image  $g^{(n)}$ , such that  $g^{(n)}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})) \approx f(\mathbf{x})$  where  $\mathbf{u}^{(n)}$  is the displacement field determined at step  $n$  until  $g^{(n)}$  matches  $f$  (in the sense of a minimum L2-norm of their difference). Incremental corrections of the displacement field  $\delta \mathbf{u}^{(n+1)}$  are computed from the minimization of the linearized form of the objective functional,  $\mathcal{T}_{lin}$

$$\mathcal{T}_{lin}(\delta \mathbf{u}^{(n+1)}) = \int_{\Omega} [g^{(n)}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) - \delta \mathbf{u}^{(n+1)} \cdot \nabla f(\mathbf{x})]^2 dx \quad (3)$$

Corrections to the displacement field  $\delta \mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}$  are obtained from

this linear form but the convergence is established based on the full (non-linear) functional  $\mathcal{T}$ . Increments to the nodal displacements  $\delta a_{\alpha i}$ , which are gathered in vector  $\{\delta \mathbf{a}\}$ , are obtained from the solution to the following linear system

$$[\mathbf{M}]\{\delta a^{(n+1)}\} = \{b^{(n)}\} \quad (4)$$

where  $[\mathbf{M}]$  is the global matrix whose components read

$$M_{\alpha i, \beta j} = \int_{\Omega} \partial_{\alpha} f(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) \partial_{\beta} f(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (5)$$

and  $\{b^{(n)}\}$  the global vector at iteration  $n$

$$b_{\alpha i}^{(n)} = \int_{\Omega} [g^{(n)}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \partial_{\alpha} f(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (6)$$

Note that matrix  $[\mathbf{M}]$  is the same at all iteration steps so that only  $\{b\}$  has to be updated.

Last, the modified Newton scheme to solve the minimization problem may lead to trapping in secondary minima of the non-linear functional  $\mathcal{T}$  for large displacements. In order to find the global minimum, the first determination of the displacement field is performed on strongly low-pass filtered images, so that large displacements with a coarse description are captured. Based on this first determination, finer and finer details are re-introduced in the images in order to progressively obtain a more accurate determination of the displacements. This procedure is carried out down to unfiltered images in the final pass. The convergence criterion is based on the infinity norm of  $\delta \mathbf{u}^{(n)}$  displacement increment between two consecutive steps and is taken as  $\|\delta \mathbf{u}^{(n)}\|_{\infty} < 10^{-3}$  pixel.

Several variants of the implementation of the *global* DIC algorithm have been used in the present study:

- First, the choice is made to account for the gray level correction, by relaxing its conservation [Equation (1)]. More precisely, the “corrected-deformed” image,  $g^{(n)}$  is not only advected by the displacement field, but its gray level is rescaled by a quantity  $(1 + c(\mathbf{x}))$  where  $c$  is also decomposed over the same finite-element mesh and shape functions, and the minimization is performed over  $\mathbf{u}$  and  $c$  fields together. Although this procedure increases the number of degrees of freedom, it also corrects the contrast changes between images.
- Second, the gray level interpolation of images can be bilinear, cubic or quintic spline. According to the literature [19, 20], one of the best solutions, which is chosen herein, is computed with B-spline interpolation of gray levels.
- Third, based on this sub-pixel interpolation scheme, evaluations of local gradients and integrations of functional  $\mathcal{T}$  can be performed with a discretization that may differ from the pixel representation of the images. It was chosen to use a summation over the ROI based on midpoints between pixel centers, and to estimate gradients based on centered finite differences at the same midpoints and at the pixel centers.

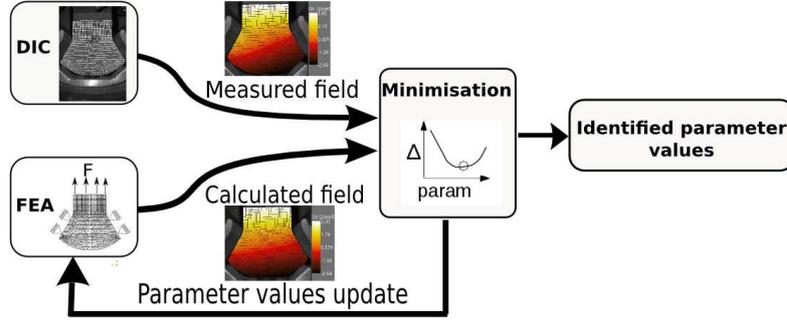


Figure 5: Principle of FEMU where DIC and Finite Element Analyses (FEA) are compared.

#### 4.2. Finite Element Model Updating

With the developments of full-field measurement techniques, several identification procedures to evaluate material parameters from these fields have been developed [21]. The Finite Element Model Updating [22] (FEMU) is the most generic and intuitive method. It is based on over-determined data, a full-field displacement measurement in the present case, and allows complex geometries and / or constitutive laws to be studied. The principle consists in finding iteratively parameter values introduced in a Finite Element (FE) simulation to minimize the cost function,  $\mathcal{R}$ , measuring the gap between measured nodal displacements, say by DIC,  $\{\mathbf{u}^{me}\}$ , and computed ones  $\{\mathbf{u}^{ca}\}$  (Figure 5)

$$\mathcal{R}^2 = (\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\})^t [\mathbf{C}]^{-1} (\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\}) \quad (7)$$

It is worth emphasizing that the cost function, Equation (7), is based on the displacement field itself, in contrast with most classical approaches that rely on strain fields [21, 23]. This choice is made to reduce the sensitivity to high frequency

noise modes present in the displacement field due to the very nature of the measurement technique, and amplified by the derivation of this field needed to obtain the strain field (the alternative being to smooth out the strain field based on arbitrary *a priori* assumptions). In Equation (7),  $[\mathbf{C}]$  is the covariance matrix of the nodal displacements measured by DIC. When noise is the dominant source of variability,  $[\mathbf{C}]$  can be evaluated exactly as proportional to matrix  $[\mathbf{M}]^{-1}$  [17, 24]. It provides a weighting of the kinematic degrees of freedom based on the measurement and the texture of the analyzed pictures.

The minimization of  $\mathcal{R}$  is performed with a Newton-Raphson algorithm updating the set of unknown parameters  $\{\mathbf{p}\}$  at each iteration. Let  $\{\mathbf{p}^0\}$  denote their initial value, and  $\{\mathbf{p}^{(s)}\}$  that of iteration  $s$ . The increment  $\{\delta\mathbf{p}^{(s+1)}\}$  is equal to  $\{\mathbf{p}^{(s+1)}\} - \{\mathbf{p}^{(s)}\}$ . The latter is shown to obey

$$\{\delta\mathbf{p}^{(s+1)}\} = ([\mathbf{P}^{(s)}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}^{(s)}])^{-1}[\mathbf{P}^{(s)}]^t[\mathbf{M}](\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca(s)}\}) \quad (8)$$

with

$$P_{ij}^{(s)} = \frac{\partial u_i^{ca(s)}}{\partial p_j^{(s)}} \quad (9)$$

where  $[\mathbf{P}^{(s)}]$  is the sensitivity of the displacement field  $\mathbf{u}^{ca(s)}$  with respect to the sought parameters  $\{\mathbf{p}^{(s)}\}$  at iteration  $s$ .

### 4.3. Numerical Implementation

#### 4.3.1. Specific environment

As described previously, the FEMU method relies on a comparison of displacement fields obtained by measurement, and taken as reference, and those obtained by an FEA. It is essential to superimpose the calculated displacement field

onto the measured one [25]. Usually, simulations and measurements are carried out with different softwares. Consequently, reference points that will be positioned in the simulation are considered but this introduces additional interpolation errors and uncertainties. The dialog between simulation and experimental data can also be limited by the common assumption that the loading conditions of the simulation are ideal boundary conditions that are not reflecting the inherent imperfection of the test. However, actual boundary conditions can be extracted from DIC measurements and (typically scarce) static loading information (*e.g.* resultant force or torque) measured by different sensors.

The recourse to DIC measured displacements as boundary conditions emphasizes the necessity to adjust precisely the mesh onto the actual geometry as captured in images. In order to mitigate (or even cancel out) the errors and uncertainties due to projection and interpolation, it is natural to work on the very same mesh for the measurement and the simulation steps. This is easier if a unique environment is utilized for global DIC and mechanical modeling as both of these tasks have been formalized in the same framework. Thus a specific C++ environment, called “Metil” [26, 27], has been designed in-house to efficiently manage the required *seamless* exchange of information between DIC and FEMU procedures.

#### 4.3.2. Mesh Import

A first mesh has been designed with the commercial FE code ABAQUS<sup>TM</sup>. It is proposed to import this mesh into the C++ environment and to adjust it onto the reference, on which the DIC analysis is based. The geometry, the different mate-

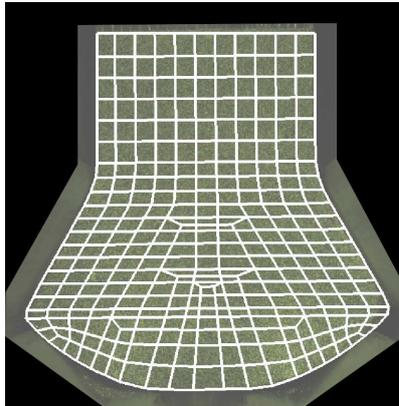


Figure 6: Finite-Element mesh fitted onto the reference picture using DIC with rigid-body motions and a pure dilatational field.

rial properties and the local orientation of the orthotropy axes [Figure 4a] are also imported by reading the input file generated by ABAQUS<sup>TM</sup>. Then, the mesh has to be adjusted and scaled onto the image since the references (and length units) are different. The proposed adjustment is based again on DIC between two binary masks, namely, one created on the reference picture and a second on the FE mesh. A global DIC is performed authorizing only rigid body motions and a uniform dilation. By applying the obtained displacement field to the FE mesh, the latter is adjusted onto the image (Figure 6). This procedure takes into account the real geometry of the sample and seeks for the best adjustment of the perfect mesh on the real sample geometry. However, slight differences between the perfect geometry and real boundaries may exist. These can be due to fabrication tolerances. Consequently, the considered mesh can be corrected to benefit from the knowledge of the *actual geometry* of the sample. A projection of the boundary nodes of the FE

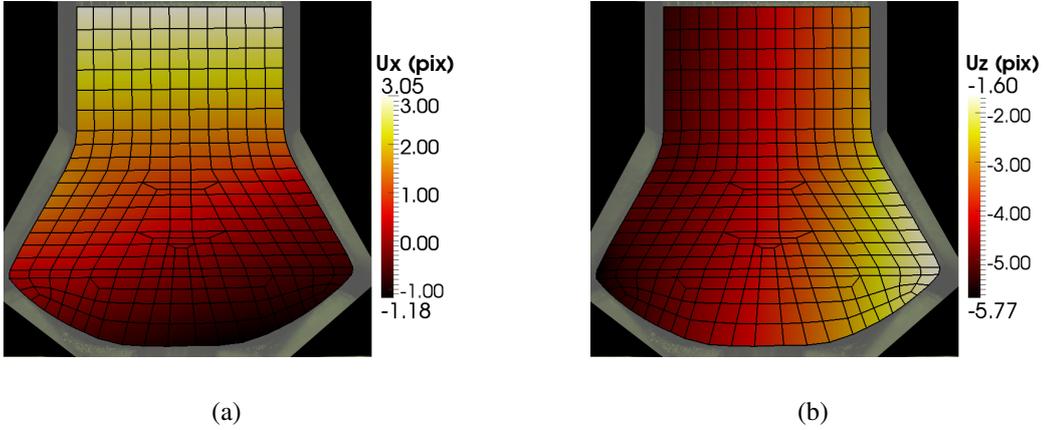


Figure 7: Measured displacement fields  $\mathbf{u}^{me}$  projected onto the  $x$ -axis (a) and the  $z$ -axis (b). For confidential reasons, units are in pixel.

mesh onto the known boundary of the real geometry is finally performed [28].

## 5. Identification and Uncertainty Analysis

### 5.1. Identification Results

As explained in Section 3, only kinematic data or free edge conditions are used as boundary conditions. They are extracted from the measured displacement field shown in Figure 7 for the pair of images 123 – 139, corresponding to 50% of the maximum load level. Since the macroscopic loading corresponds to an elastic step, the dynamic range of the displacement fields along the two in-plane directions is low and is about four pixels.

The identification of elastic parameters will be performed in two steps. First, the elastic modulus  $E_1$  is fixed to its nominal value, and the three other material parameters are identified as the ratios  $\ln(G_{13}/E_1)$  and  $\ln(E_3/E_1)$  and Poisson's

ratio  $\nu_{13}$ . Second, the elastic modulus is set so that the sum of nodal forces of nodes A [Figure 4b] matches the measured resultant force. The elastic parameters are ordered as  $\{\mathbf{p}\}^t = \{\ln(G_{13}/E_1), \ln(E_3/E_1), \nu_{13}\}$ . The chosen parameters are the logarithms of the elastic moduli so that the elastic constants always remain positive. Specific limits are imposed by breaking the iterative procedure if the Poisson's ratios do not satisfy the positivity of the elastic energy (*i.e.*,  $1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0$ ).

In the implemented FEMU technique, a Newton-Raphson algorithm is used to perform the minimization, and hence the sensitivity of the displacement field has to be characterized with respect to each sought parameter. The relative sensitivity maps are obtained from an FEA using a symbolic calculus approach as far as possible in the computation to ensure a good accuracy. The material properties are initially set to values close to the nominal ones (Figure 9). For the three material parameters, the relative sensitivity maps are shown in Figure 8. The location of sensitive parts is mainly on the lower part of the fan blade root, corresponding to large variations in the displacement field. Equation (8) is relaxed such as if one of the calculated increment  $\delta\mathbf{p}_i$  is greater than 10% of the nominal value of the corresponding parameter  $\mathbf{p}_i$ , then the effective increment at iteration  $s$  is  $0.1\{\delta\mathbf{p}^{(s)}\}$ . By solving iteratively Equation (8), a fast convergence to the solution that minimizes the residual,  $\mathcal{R}$ , is observed. This procedure is led for a pair of images corresponding to half the maximum load. The results of the first step, shown in Figure 9, indicate that the iterative scheme converges. However, the identified Poisson's ratio  $\nu_{13}$  is far from the nominal value. The break observed

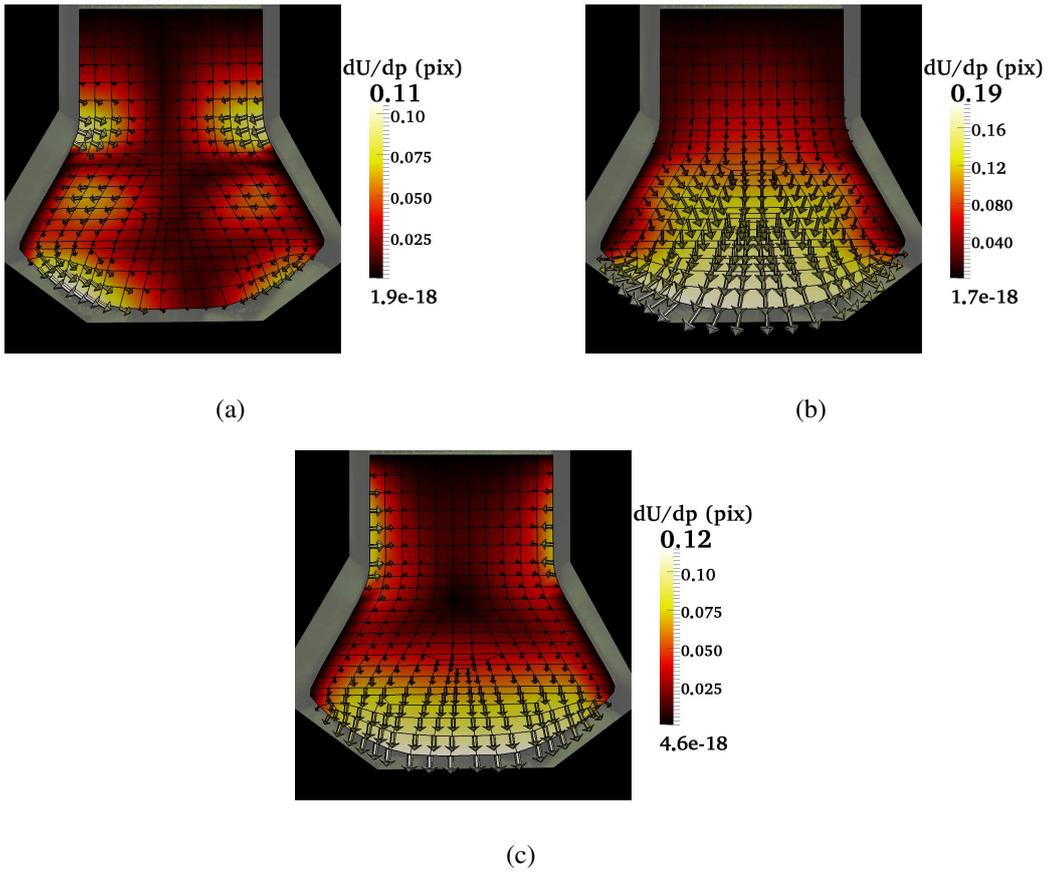


Figure 8: Norm of the relative sensitivity maps for the three material parameters, (a)  $\ln(G_{13}/E_1)$ , (b)  $\ln(E_3/E_1)$  and (c)  $\nu_{13}$ , are shown with nodal vectors amplified 500 times.

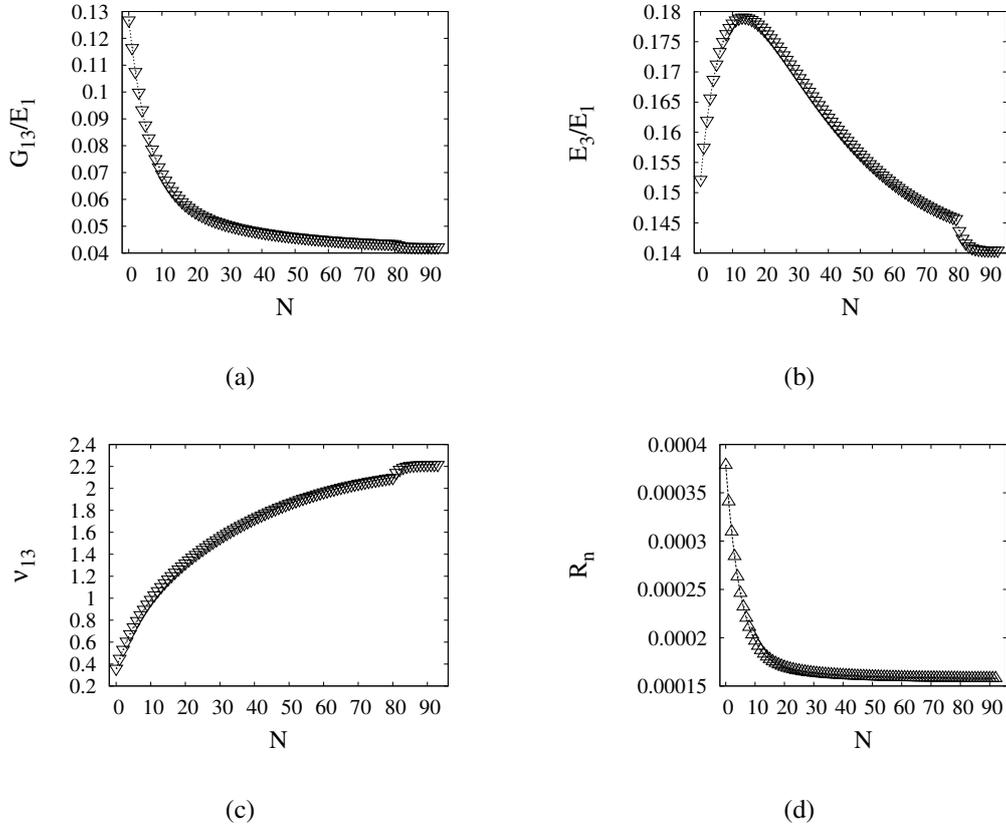


Figure 9: Evolution of the three identified material parameters, (a)  $G_{13}/E_1$ , (b)  $E_3/E_1$  and (c)  $\nu_{13}$ , and (d) the normalized residual  $R_n = \frac{(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})}{\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me}}$  with the iteration number.

around iteration 80 corresponds to the transition from relaxed increments to total ones.

In the following section, the effect of noise on the identification of material parameters will be discussed.

## 5.2. Uncertainty Analysis

The quantification of the uncertainty of each identified parameter based on the identification method is now addressed. The sensitivity maps are indicative of the expected uncertainty on each identified parameter due to the presence of noise in images. *Global* DIC, coupled with FEMU, is perfectly suited to trace these uncertainties. The covariance matrix of the displacement field measured by DIC, when noise is the dominant source of variability, is proportional to the inverse of the global matrix  $[\mathbf{M}]$  used in DIC [24, 29, 30]. In the following, let us focus on the uncertainties obtained at convergence of the identification algorithm. Consequently, the sensitivity matrix  $[\mathbf{P}]$  [see Equation (9)] is computed for this last step. Let  $\{\delta\mathbf{u}\}$  and  $\{\delta\mathbf{p}\}$  denote the deviations from the exact value of the displacement field and material parameters due to noise. They are related by an expression similar to Equation (8)

$$\{\delta\mathbf{p}\} = ([\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}])^{-1}[\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}]\{\delta\mathbf{u}\} \quad (10)$$

Defining  $\sigma^2$  the variance of image noise (assumed to be Gaussian and uncorrelated at the pixel scale), the covariance matrix of the identified parameters is readily obtained [17]

$$[\mathbf{C}_U] \equiv \langle \{\delta\mathbf{u}\} \otimes \{\delta\mathbf{u}\} \rangle = 2\sigma^2[\mathbf{M}]^{-1} \quad (11)$$

where  $\langle \bullet \rangle$  denotes the ensemble average, and Equation (10) leads to

$$[\mathbf{C}_p] \equiv \langle \delta\mathbf{p} \otimes \delta\mathbf{p} \rangle = 2\sigma^2([\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}])^{-1} \quad (12)$$

where the diagonal terms give the variance for each parameter separately, all the others being fixed at their nominal value, but the covariance matrix allows the

entire uncertainty to be further analyzed by taking into account all couplings between parameters.

The eigenvalues of matrix  $[\mathbf{N}] \equiv [\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}]$  give access to the modes that can be determined by the mechanical test sorted according to their uncertainty. We will come back later on to this crucial point and propose a regularization strategy to get a more operative method for identification purposes. Let us introduce the matrix  $[\mathbf{V}]$  of eigenvectors, and  $[\mathbf{D}]$  the diagonal matrix of eigenvalues, so that

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{V}]^t[\mathbf{D}][\mathbf{V}] \quad (13)$$

The variance of the determined amplitude of the  $i$ -th eigenvector reads

$$\tau_i^2 = \frac{2\sigma^2}{D_{ii}} \quad (14)$$

and that of parameter  $p_k$

$$\sigma_{p_k}^2 = 2\sigma^2 \sum_i \frac{V_{ki}^2}{D_{ii}} \quad (15)$$

Note that the latter equation takes into account the fluctuations of all parameters, and does not assume that they are fixed in contrast with just selecting the diagonal element of  $[\mathbf{N}]$ .

It is to be stressed that the above uncertainties are only those related to image noise coming from the CCD camera, but other factors may also affect the identification quality (such as an erroneous model framework, microstructure effects or imperfections in the test that are not taken into account in the modeling).

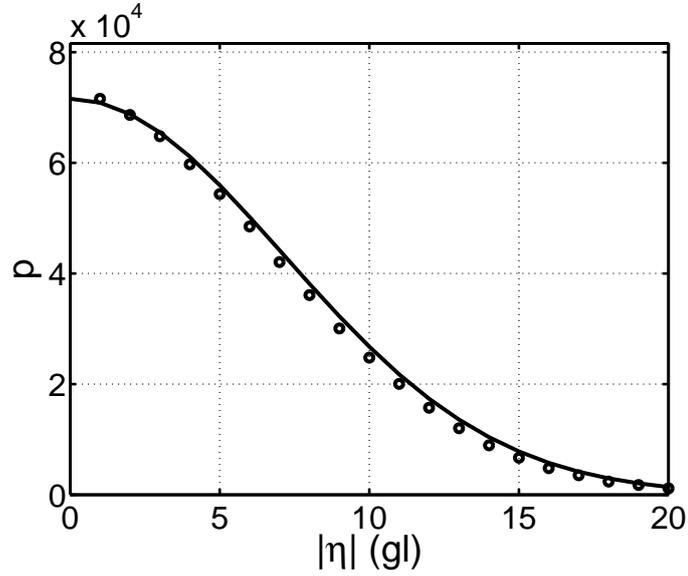


Figure 10: Histogram obtained from the pixel-to-pixel absolute difference between images. Data points are shown as open circles, and a Gaussian fit (solid curve) is shown as a guide to the eye. The dynamic range of the reference picture is 1024 gray levels.

### 5.3. Application

The sensor noise, characterized by its standard deviation  $\sigma$ , can be identified from several images taken at the same unloaded state. Each image is encoded over 10-bit deep gray levels (*i.e.*, ranging from 0 to 1024). The statistical distribution of gray level fluctuation for all the pixels is shown in Figure 10. It is observed that a Gaussian fit gives a very good account of these fluctuations. A standard deviation of  $\sigma = 5.5$  gray levels is obtained. Based on this characterization of camera noise, the displacement uncertainty on each mesh node is computed with Equation (11) and shown for the studied fan blade root mesh (Figure 11a-b). For the sake of simplicity, only the diagonal of matrix  $[M^{-1}]$  is considered. It is worth noting that the

latter is a band matrix so that non diagonal terms, which contribute to uncertainty, are not predominant. This theoretical result is compared with uncertainties obtained from 72 DIC calculations performed between image pairs taken for a load free specimen. The standard deviation of the displacement obtained for each node is also shown on the mesh (Figure 11c-d). The maps show that the displacement determination is more affected by noise on the boundary because external nodes are less constrained than the ones in the bulk [31]. Furthermore, the surface area of the element is also an influential factor so that the central small elements have a high uncertainty as compared with larger elements. The poor accuracy observed on the bottom part of the mesh is due to a poor gray level texture of the surface. The similarity of both maps for each displacement component validates the use of matrix  $[M]$  computed for DIC to model the displacement uncertainty resulting from the camera noise. This validation is important inasmuch as the covariance matrix provides the weighting used in Equation (7).

The quality of the identification can also be estimated in terms of gray level residuals in order to be compared with the previous results. For any displacement field  $\mathbf{u}$ , the picture in the deformed configuration  $g$  can be corrected to  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_m(\mathbf{x}))$ , where  $\mathbf{u}_m$  denotes the measured displacement field. The gray level residual is defined as  $\rho_m(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_m(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})$ . It would reduce to image noise (*i.e.*,  $\eta$ , see Equation (1) if the chosen displacement basis were consistent with the actual kinematics. Figure 12a shows the map of  $\rho_m$ . Except for a few points its level remains very low. Its standard deviation  $\sigma_m = 6.8$  gray levels is very close to that of pure noise (*i.e.*,  $\sigma = 5.5$  gray levels). This result validates

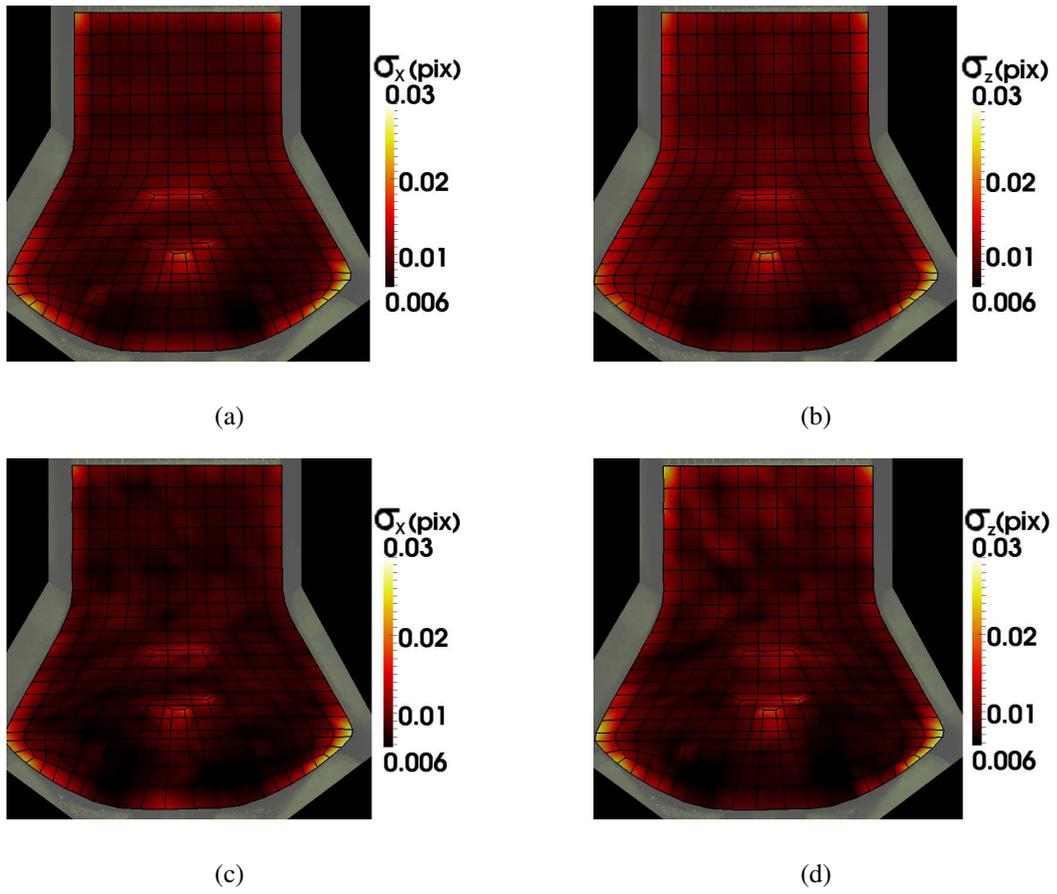


Figure 11: Uncertainty maps calculated on mesh nodes from matrix  $[M]$  used in DIC and the CCD sensor noise, (a) along the  $x$ -axis, (b) and  $z$ -axis, and obtained from several DIC calculations on image pairs, (c) along the  $x$ -axis, (d) and  $z$ -axis.

the use of the measured displacement field for identification purposes.

Similarly, the displacement field  $\mathbf{u}_c$  computed with the identified material parameters can be used to evaluate a gray level residual  $\rho_c(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_c(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})$ . The latter will quantify the quality of the identification and its distance to the gray level residuals induced by acquisition noise. Figure 12b shows the corresponding map, which is very close to that of  $\rho_m$ . The corresponding standard deviation  $\sigma_c = 8.2$  gray levels is again very close to that of pure noise (*i.e.*,  $\sigma = 5.5$  gray levels). This result validates the identification result. Last, to measure the distance between the measured and computed displacement fields, the difference of the two previous residuals is considered. There are fewer discrepancies than in the two previous maps (Figure 12c). All these results are summarized by plotting the histograms of Figure 12d. A slight increase is observed between the gray level residuals associated with noise alone, the measured and calculated displacement fields. However, when the difference between the measured and calculated displacement field is analyzed, it clearly leads to lower levels.

The evaluation of the uncertainty is now considered based on Equation (12). Let us recall that the elastic parameters have been chosen as  $\{\mathbf{p}\}^t = \{\ln(G_{13}/E_1), \ln(E_3/E_1), \nu_{13}\}$ . Matrix  $[\mathbf{N}] = [\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}][\mathbf{P}]$  is computed to be

$$[\mathbf{N}] = 10^6 \times \begin{pmatrix} 2.4 & 3.3 & 1.9 \\ 3.3 & 93.6 & 33.5 \\ 1.9 & 33.5 & 14.6 \end{pmatrix} \quad (16)$$

The resulting uncertainty from Equation (12) for each of the parameters considering the other ones to be known is simply read from the diagonal elements of

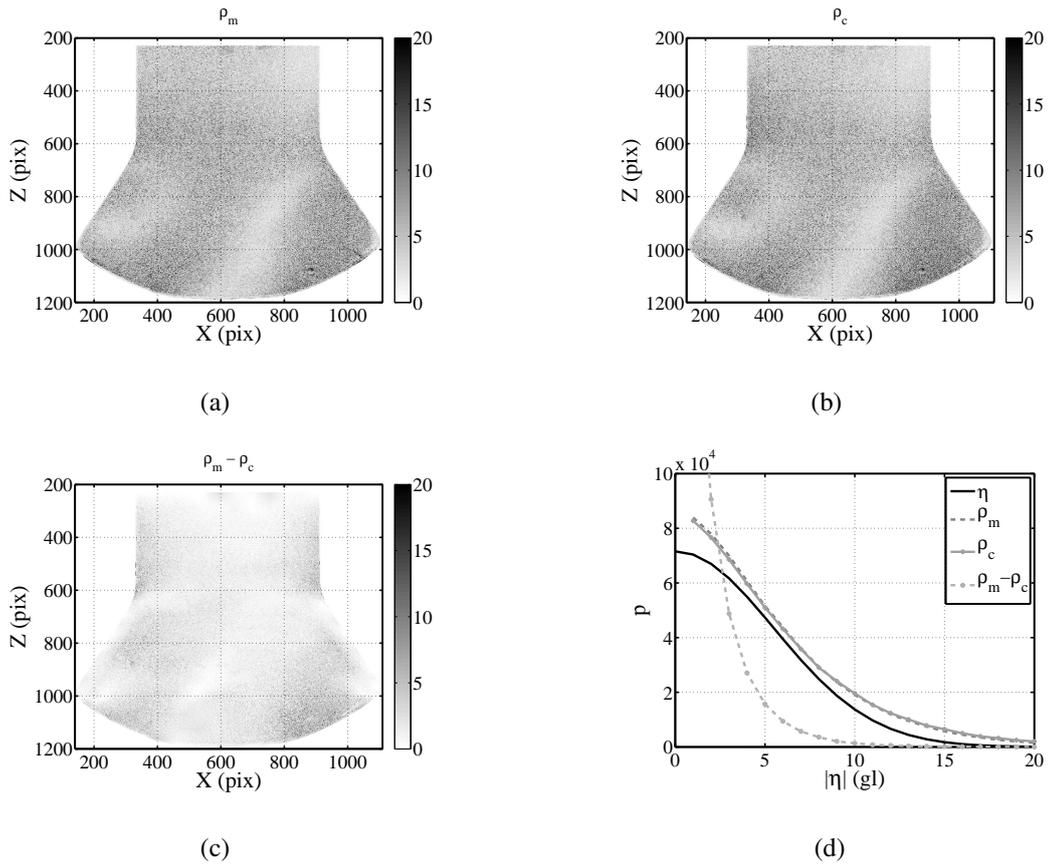


Figure 12: Gray level residuals associated with a measurement and an identification step: (a) measurement residual  $\rho_m$ , (b) identification residual  $\rho_c$ , (c)  $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histograms of gray levels of  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . The dynamic range of the reference picture is 1024 gray levels.

Table 1: Standard uncertainty of each identified parameter considering the other ones as fixed (column 2) or taking into account the full variability of each parameter (column 3).

Parameter	Identified value	Single parameter uncertainty	Full uncertainty
$\ln(G_{13}/E_1)$	$\ln(0.042)$	$5 \times 10^{-3}$	$5.3 \times 10^{-3}$
$\ln(E_3/E_1)$	$\ln(0.14)$	$0.8 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$
$\nu_{13}$	2.2	$2 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$

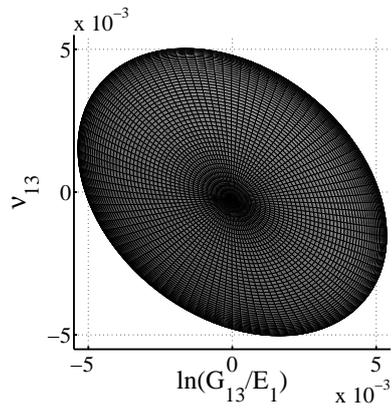
$[\mathbf{C}_p]$ , as listed in Table 1. In order to get a better understanding of the standard uncertainty, it is convenient to diagonalize matrix  $[\mathbf{N}]$ . The eigenvectors are the columns of matrix  $[\mathbf{V}]$

$$[\mathbf{V}] = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.21 & -0.66 \\ 0.69 & -0.27 & 0.66 \\ -0.04 & -0.94 & -0.34 \end{pmatrix} \quad (17)$$

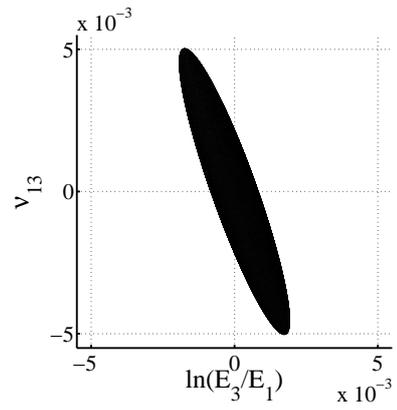
and the corresponding eigenvalues are

$$[\mathbf{D}] = 10^6 \times \begin{pmatrix} 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 \\ 0 & 0 & 106.1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

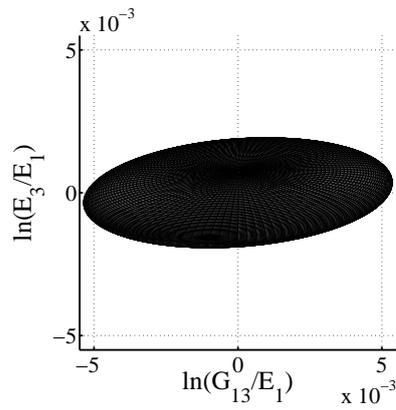
The two first eigenvectors of minimum eigenvalue are a combination of the first,  $\ln(G_{13}/E_1)$ , and third,  $\nu_{13}$ , identified parameters. And the third eigenvector is mostly aligned with the second parameter  $\ln(E_3/E_1)$ . This last eigenvector has a much higher eigenvalue, and consequently a lower uncertainty than that of Pois-



(a)



(b)



(c)

Figure 13: Uncertainty projection in the three planes (a)  $(\nu_{13}, \ln(G_{13}/E_1))$ , (b)  $(\nu_{13}, \ln(E_3/E_1))$  and (c)  $(\ln(E_3/E_1), \ln(G_{13}/E_1))$ .

son's ratio and shear modulus. Figure 13 shows the plots of the projection of the uncertainty domain in each plane of two parameters. The full parameter uncertainty can easily be read as the projections of the ellipsoid whereas the single parameter uncertainty corresponds to the intercept with the axis.

The variance of the amplitude of the three eigenmodes is given by

$$\tau^2 = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 37.8 \\ 20.2 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad (19)$$

As derived from Equation (15), the full standard uncertainties on the three parameters are given in Table 1. The noise is mostly affecting the determination of the Poisson's ratio and shear modulus, as the uncertainty reaches its highest value (*i.e.*, 0.005). However, the third parameter displays a low uncertainty with respect to the camera noise. Furthermore, the determination of the Poisson's ratio and shear modulus is coupled as shown by the eigenvectors [Equation (17)].

#### 5.4. Regularization

In cases where some parameters cannot be determined with the available mechanical test, it may lead to the conclusion that no parameter can be safely evaluated (*i.e.*, their full uncertainty may be prohibitively high or as it is the case herein, their coupling with other parameters impedes their evaluation) in spite of the fact that the identification may provide constraints on combinations of parameters. To deal with such a very common situation, it is proposed to introduce a regularization strategy.

Since the experimental data lack the needed information to provide in an autonomous fashion the evaluation of the sought parameters, the only option is to supply the identification procedure with some prior (exogenous) information on the parameters. This is designed to limit the degrees of freedom that are not determined by the experimental test and to leave mostly unaffected the other ones. This additional information is chosen as the proximity of parameters to nominal values  $\{\mathbf{p}^{nom}\}$  (e.g. estimated by a homogenization result or any other means unrelated to the present experiment). In that case, nominal values are obtained from simple traction test for in-plane elastic modulus,  $E_1$ , Iosipescu test for shear modulus,  $G_{13}$  and homogenization for Poisson's ratio,  $\nu_{13}$  and out-of-plane elastic modulus,  $E_3$  based on the Eshelby inclusion method [32, 9]. Six tests for each material parameter have been made from which the mean value is taken as nominal value and the standard deviation is taken as its uncertainty. The resulting dispersion is higher on the shear modulus, 4%, than on in-plane elastic modulus, 2%. However, the uncertainty coming from the homogenization can be difficult to estimate. To associate information coming from two different channels, it is proposed to minimize a joint objective functional. The one considered up to this point is written as  $T_1(\mathbf{p}) = \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_c(\mathbf{p})\|_M^2$ , where the norm is issued from the metric induced by the covariance matrix of  $\mathbf{u}^{me}$ . The additional information can be simply written as  $T_2(\mathbf{p}) = \Psi(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})$ , where  $\Psi$  is a convex function reaching its minimum at the origin. The solution to this regularized problem will be the minimum of  $T_{tot} = T_1 + T_2$ . The difficulty is to design a  $\Psi$  function that allows for a fair comparison of information on  $\mathbf{p}$  coming from different sources.

The common “gauge” is provided by the uncertainty. Thus the exogenous information  $\{\mathbf{p}^{nom}\}$  is assumed to be provided together with its uncertainty. The latter ideally should be a full covariance matrix,  $\mathbf{C}^{nom}$  but in most practical cases, the nominal values of  $\mathbf{p}$  will be determined independently from each other so that this covariance matrix is diagonal  $\mathbf{C}_{ij}^{nom} = (\sigma_{ii}^{nom})^2 \delta_{ij}$ . Thus it is proposed to choose as  $\Psi$  the norm induced by the inverse covariance metric,

$$T_2(\mathbf{p}) = A(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom})^t [\mathbf{C}^{nom}]^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{nom}) \quad (20)$$

where  $A$  is a parameter to be determined. Image noise by itself (assuming no other source of bias, or model error) will make the minimum value of  $T_1$  of the order of  $T_1^* = 6.46 \times 10^7$  as previously derived for the image pair 123–139. Thus a similar value of  $T_2$  should correspond to the nominal uncertainty on the corresponding parameters. It is chosen to consider a global uncertainty (*i.e.*, variance  $(\sigma^{nom})^2$ ) as the mean of the variance of each parameter. A fair global value of the uncertainty on material parameters can be fixed at 4% (Table 2). Thus  $A/(\sigma^{nom})^2 = \lambda^*$ .

The problem to solve now takes a form similar to the previous Newton-Raphson iteration

$$([\mathbf{N}] + \lambda^*[\mathbf{I}])\{\delta\mathbf{p}\} = [\mathbf{P}]^t[\mathbf{M}](\{\mathbf{u}^{me}\} - \{\mathbf{u}^{ca}\}) + \lambda^*(\{\mathbf{p}^{nom}\} - \{\mathbf{p}\}) \quad (21)$$

In the present example, it is further assumed that the nominal uncertainty is uniform on the chosen parameters so that  $T_2$  is simply proportional to the Euclidean norm of vector  $(\{\mathbf{p}^{nom}\} - \{\mathbf{p}\})$ . In this case, the interference between both parts of the problem  $T_1$  and  $T_2$  can simply be read according to the spectrum

of eigenvalues of  $\mathbf{N}$  since in the basis where  $T_1$  is diagonal, so will  $T_2$  be. The  $T_2$  functional provides a threshold for the  $T_1$  eigenvalues, selecting the modes set by the experimental observation, and those mostly dictated by the nominal values.

Minimization of the joint functional  $T_{tot}$  allows for finding a compromise between the two sources of information. However, the interpretation of the value of the resulting solution is a crucial point. It would be inappropriate to repeat the previous analysis of the resulting uncertainty based on the total functional, as it does not do justice to the compatibility between the experimental and nominal information. It is proposed to consider separately  $T_1$  and  $T_2$  for the obtained solution. Each of these two terms will provide a measurement of the likelihood of the corresponding result. Therefore one may find that either the additional information on the nominal values of the parameters is or is not consistent with the experimental observation and identification. An inconsistency may be the sign of an inappropriate modeling (*e.g.* unduly portraying the material as homogeneous) or an erroneous nominal value.

Due to the coupling between the three parameters [Equation (17)], the three identified values have changed. The uncertainties due to acquisition noise are recalled in Table 2 as well as the initial, nominal and identified values. Regarding, these uncertainties and the ones on the nominal values, the identified value of the elastic modulus  $E_3$  is compatible with the nominal value. However, this is not the case for the two other parameters, the shear modulus and Poisson's ratio.

Plots of the parameter change,  $p_i$ , with the iteration number  $N$  are shown in Figure 14. A stationary solution is reached within about 40 iterations. The global

Table 2: Identified values and full standard uncertainty of each parameter determined with the regularized approach.

Parameter	Initial value	Nominal value	Identified value	Full uncertainty from sensor noise	Uncertainty on nominal value
$\ln(G_{13}/E_1)$	$\ln(0.127)$	$\ln(0.097)$	$\ln(0.064)$	$5.3 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$
$\ln(E_3/E_1)$	$\ln(0.153)$	$\ln(0.182)$	$\ln(0.193)$	$1.9 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$
$\nu_{13}$	0.36	0.46	1.19	$5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-2}$

residual change (Figure 15) confirms this fast convergence. The elastic modulus  $E_1$  is finally adjusted so that the resulting tensile load obtained from the modeling matches the experimental value.

The difference between measured and computed displacements quantifies the quality of the identification (Figure 16). In the upper part of the mesh where a homogeneous modeling is appropriate for the effective microstructure, local residuals projected onto the  $z$ -axis are very low, *i.e.*, one to ten times the displacement uncertainty found in DIC (*i.e.*, 0.01 pixel). However, the local residuals projected onto the  $x$ -axis in the same region are about twenty to forty times higher than the displacement uncertainty. It is to be emphasized that the determination of the material parameters is uniform over the whole FE, and hence a compromise is selected in order to minimize the difference in displacements over the entire

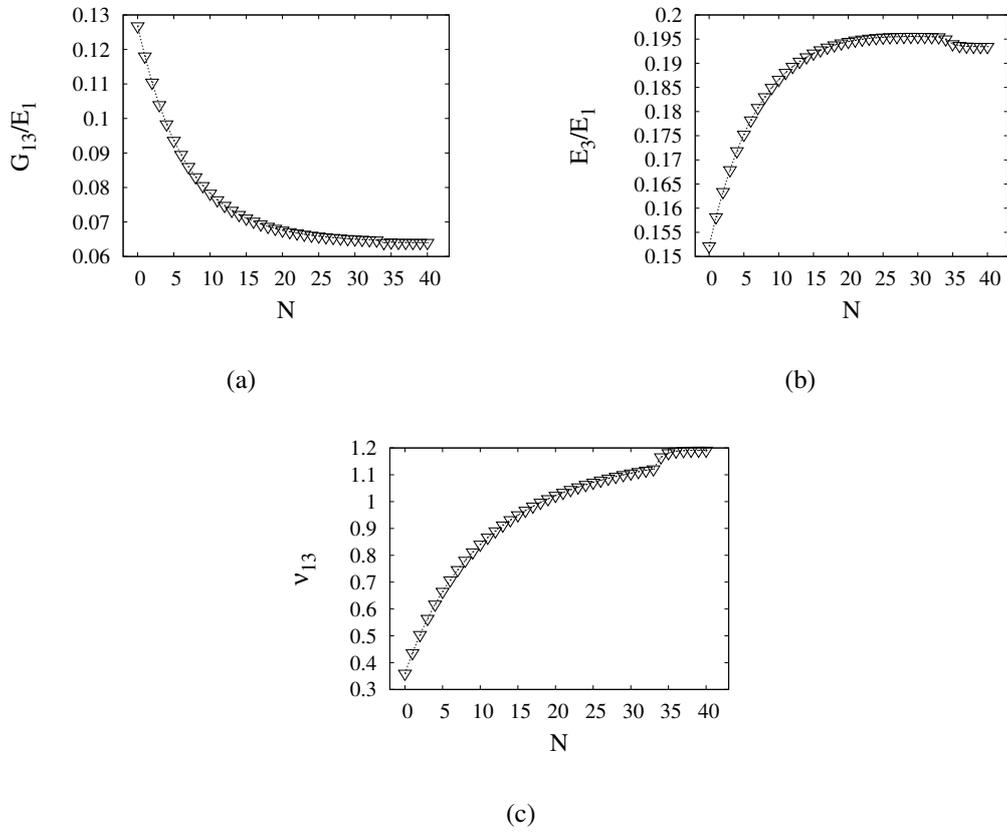


Figure 14: Parameter changes: (a)  $G_{13}/E_1$ , (b)  $E_3/E_1$  and (c)  $\nu_{13}$  versus the number of iterations  $N$ .

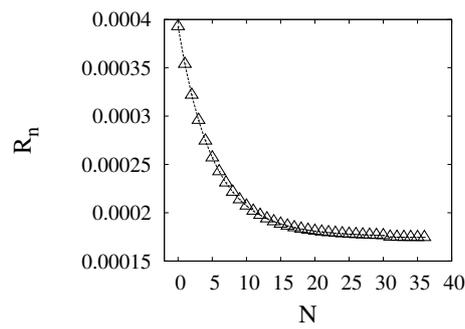


Figure 15: Change of the residual,  $R_n$ , with iteration numbers,  $N$ .

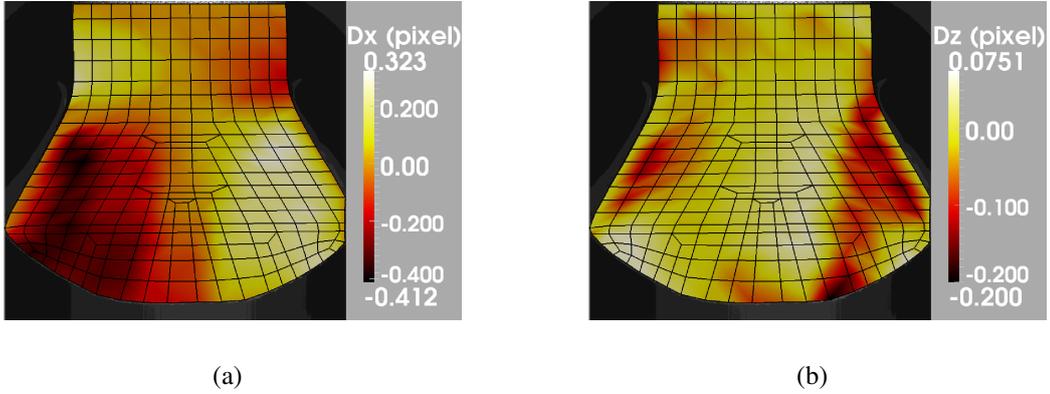


Figure 16: Local displacement residual (*i.e.*, difference  $\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_c$ ) projected onto the  $x$ -axis (a) and the  $z$ -axis (b). For confidential reasons, units are in pixel.

analyzed region. Figure 17a shows the gray level residual  $\rho_m$  for the measured displacement. Similarly, Figure 17b shows the capacity of the updated FE model to match the experiment. The error induced by the identification process is shown by the difference between the two gray level residuals (Figure 17c). These results are again summarized in terms of histograms in Figure 17d. The same trends as those observed in Section 5.3 are observed with the regularized approach.

The observed residual field (Figures 16 and 17c) signals that the modeling hypothesis (*i.e.*, homogeneous and orthotropic elasticity) is inappropriate to fully account for the observed displacement field in the sense that the residual field does not appear to be comparable to be simply noise. Large scale features in the residual field is a motivation to revisit the modeling framework. Let us stress that in practice the final decision on the appropriate framework is often a compromise between sophistication and simplicity. However, even if the chosen modeling is simpler than what could be considered, it is extremely valuable to come up with

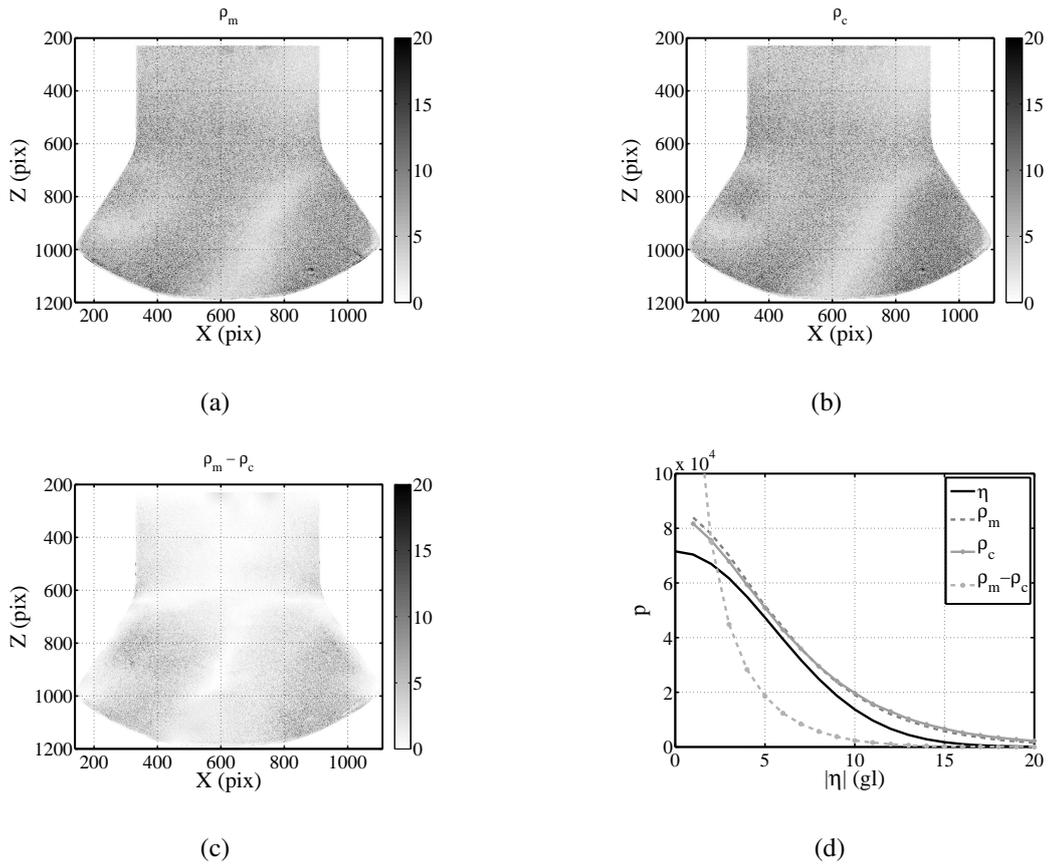


Figure 17: Gray level residuals associated with a measurement and a regularized identification step: (a) measurement residual  $\rho_m$ , (b) identification residual  $\rho_c$ , (c)  $\rho_m - \rho_c$ . (d) Histograms of gray levels of  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . The dynamic range of the reference picture is 1024 gray levels.

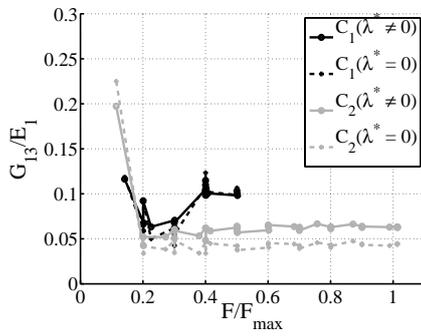
a tool that provides the most appropriate parameter values. In the present case, it appears likely that a refined description (*e.g.* spatially heterogeneous elastic properties) would allow for a better match between modeling and observation. This point will be addressed in Section 5.5.

Up to now, only a single pair of images was studied. The results obtained for the two loading ramps are shown in Figure 18. The first ramp up to half the maximum load is shown in dark color, and the second one in light gray, and for the original ( $\lambda^* = 0$ ) and regularized ( $\lambda^* \neq 0$ ) identification procedures.

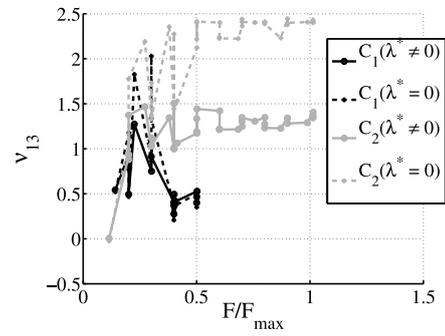
For small load levels without regularization, the material parameters are not well determined and exhibit high fluctuations due to coupling effects and low signal/noise ratios. This is shown by the high uncertainties observed in Figure 19. The global dimensionless residual,  $R_n = [(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})\mathbf{M}(\mathbf{u}^{me} - \mathbf{u}^{ca})]/(\mathbf{u}^{me}\mathbf{M}\mathbf{u}^{me})$ , is very high as compared with higher load levels. Thanks to the regularization, these erratic identified values are reasonably stabilized even for the beginning of the loading ramp. For higher levels, the identified values are almost constant for all the image pairs. It is worth noting that the benefit of the regularization is seen with a relatively good stabilization of the identified parameters, especially on Poisson's ratio.

### 5.5. Model Improvement

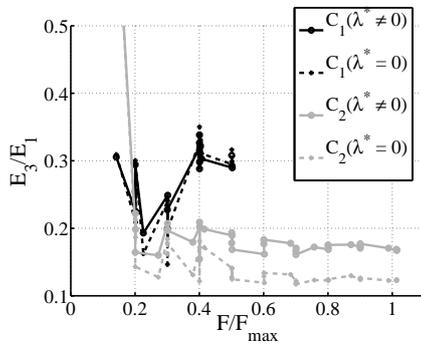
As explained above, a heterogeneous modeling should improve the description of the material behavior. It is proposed to describe the fan blade root behavior with four sets of material parameters. The same local orientations are chosen



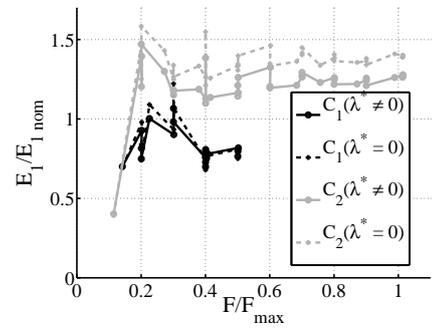
(a)



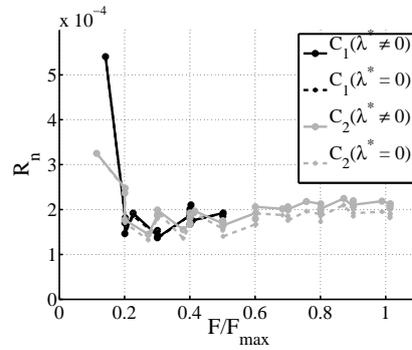
(b)



(c)

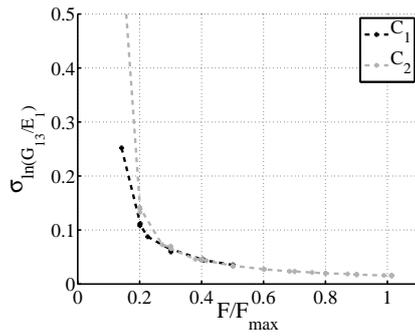


(d)

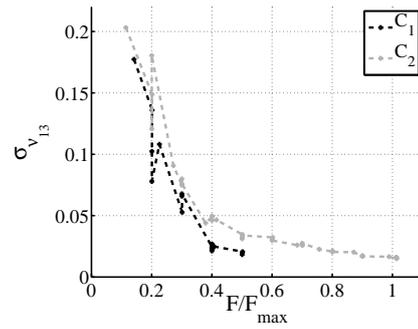


(e)

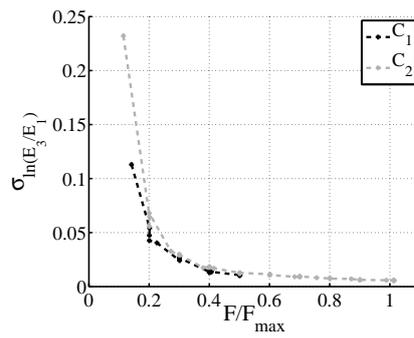
Figure 18: Identified values for the series of images taken during the test vs the applied load. The first (respectively second) ramp is shown in dark (respectively light gray).



(a)



(b)



(c)

Figure 19: Uncertainty values for the series of images taken during the test vs the applied load. The first (respectively second) ramp is shown in dark and labeled  $C_1$  (respectively light gray and labeled  $C_2$ ).

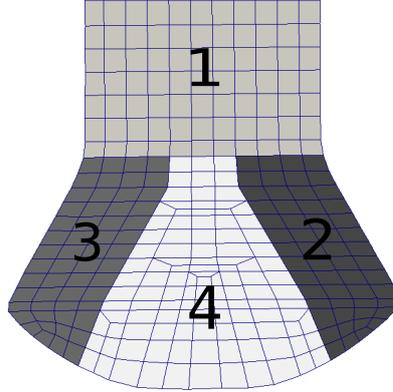


Figure 20: Spatial partitions of local orthotropy where each gray level represents a set of material parameters, numbered from 1 to 4.

(Figure 4a), but the local orthotropic behavior depends on the regions shown in Figure 20.

The same regularization procedure is applied to the second loading step, the number of identified parameters is four in each partition  $i = [1, 2, 3, 4]$ , namely,  $\ln(E_1^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\ln(E_3^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\ln(G_{13}^i/E_{1nom}^1)$ ,  $\nu_{13}^i$ , except for the partition located on the top part of the fan blade root for which the elastic modulus,  $E_1^1$ , is set to its nominal value. Nominal values are shown in Table 3, and their uncertainties are assumed to be equal to 4%, as previously.

The results shown in Figure 21 are reasonably stable even for this significant number of parameters. The dimensionless residual,  $R_n$  (Figure 21e), is much lower than with the homogeneous description. However, the uncertainties due to acquisition noise (Figure 22) are higher, except for the shear modulus and elastic modulus  $E_3$ . Thus, some parameters cannot be determined. The regularization is necessary to remedy the indeterminacy on these parameters.

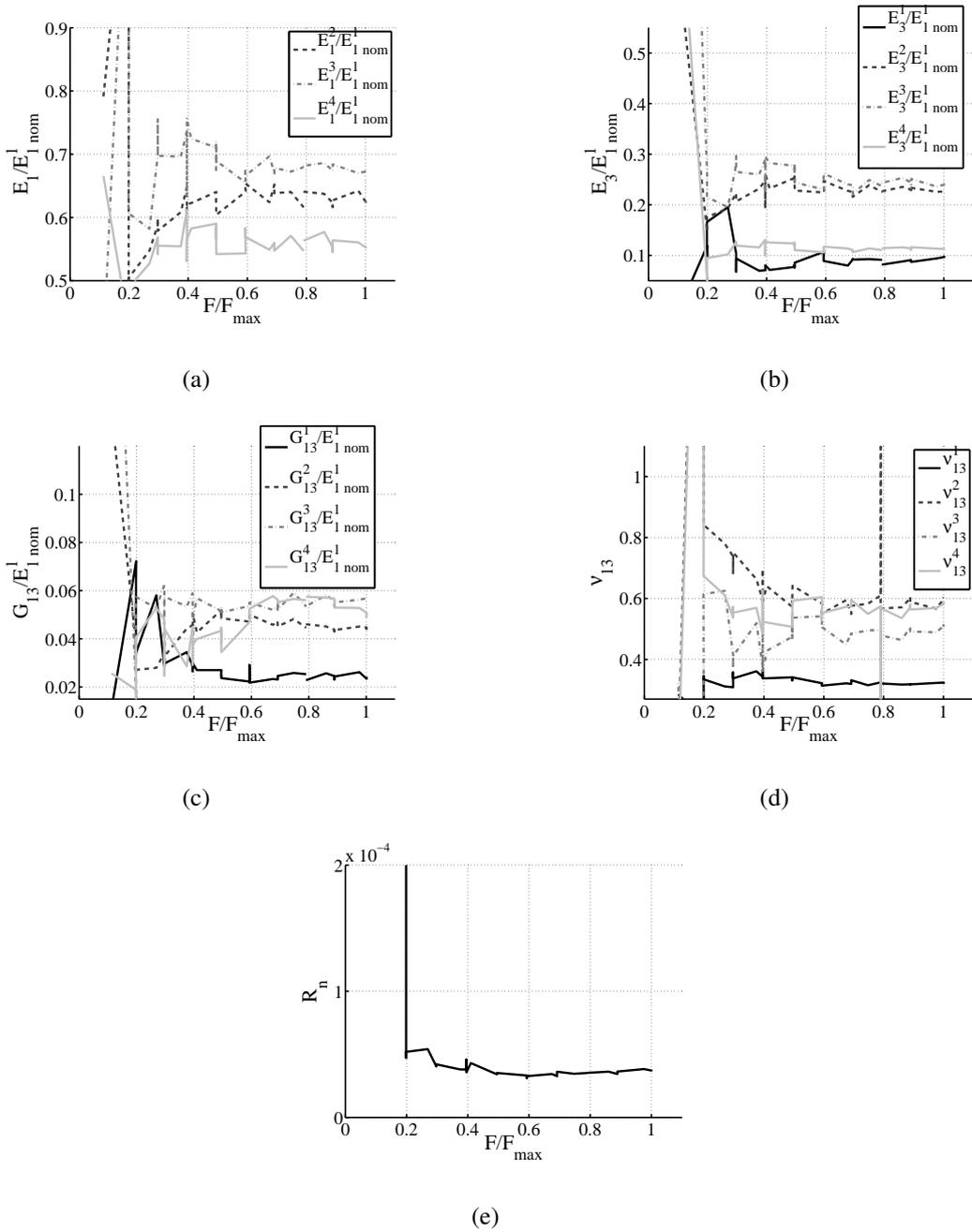
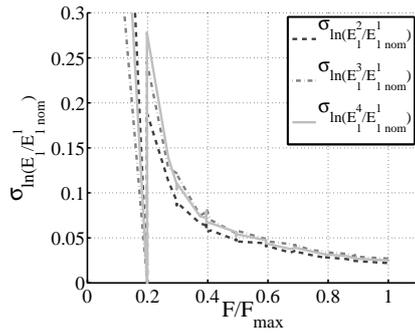
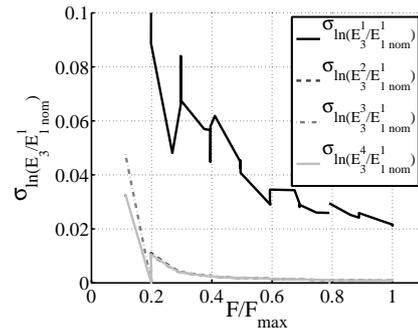


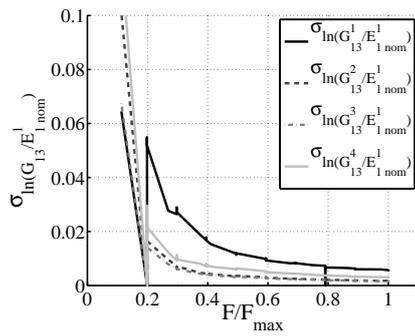
Figure 21: Identified values for the series of images taken during the test on the second loading step vs. the applied load for the heterogeneous modeling.



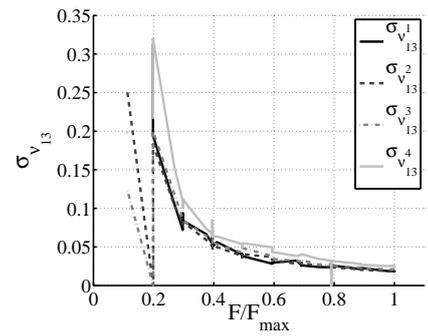
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 22: Uncertainty values for the series of images taken during the test on the second loading step vs. the applied load for the heterogeneous modeling.

Table 3: Nominals values of the differents material parameters for each partition  $i$  of the fan root blade.

Parameter	Partition			
	i=1	i=2	i=3	i=4
$E_{1nom}^i/E_{1nom}^1$	-	0.645	0.645	0.607
$E_{3nom}^i/E_{1nom}^1$	0.087	0.11	0.11	0.092
$G_{13nom}^i/E_{1nom}^1$	0.037	0.083	0.083	0.055
$\nu_{13nom}^i$	0.38	0.49	0.49	0.47

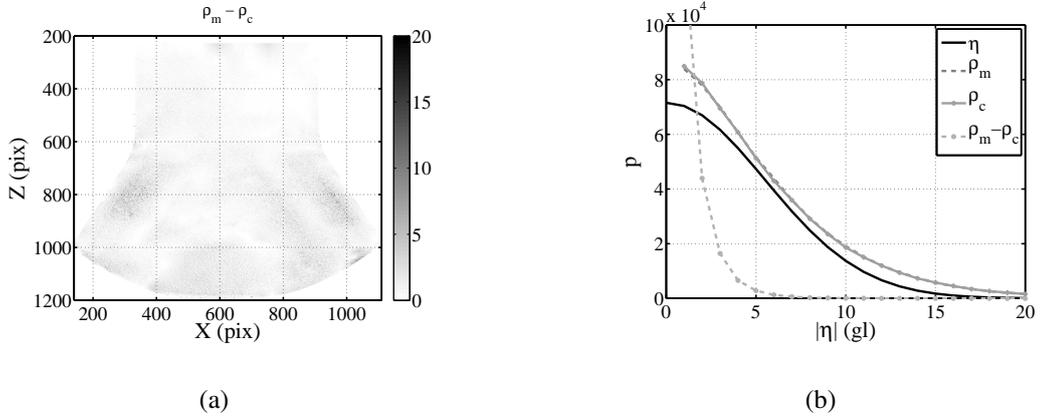


Figure 23: Gray level residuals associated with a measurement and a regularized identification step for the heterogeneous description: (a) difference between measurement residual  $\rho_m$  and identification residual  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . (b) Histograms of gray levels of  $\eta$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_m - \rho_c$ . The dynamic range of the reference picture is 1024 gray levels.

In the present case, the standard deviation of the identification residual  $\sigma_c = 7.3$  gray levels is very close to that of the measurement  $\sigma_c = 6.8$  gray levels and to that of pure noise (*i.e.*,  $\sigma = 5.5$  gray levels). These results are summarized by plotting the histograms of Figure 23b. The quality of the identification is shown by the difference between measured and calculated displacement fields. Figure 23a shows this difference for the image pair 123 – 139. The gain provided by the heterogeneous description is clearly seen, as the residuals are lower than in the homogeneous case, especially in the lower part of the fan blade root. The heterogeneous description provides a better representation of the behavior of the fan blade root.

## 6. Conclusion

Working in a unique numerical environment, the full-field global DIC measurement and FEMU identification procedures are performed within a compatible formalism. In particular, an *identical* unstructured mesh adjusted on the actual specimen geometry is utilized. To illustrate the methodology, its performance and limitations, the identification of homogeneous elastic properties of a complex composite part is carried out. It is shown that standard uncertainties resulting from image noise can be related to the identified material properties, and a regularization strategy is implemented to circumvent possible indeterminacy from the considered test (*i.e.*, lack of information to complete the sole identification).

The uncertainty analysis performed herein allows the user to judge from the displacement and gray level residual fields whether the modeling hypothesis is

appropriate or if it has the potential to be refined to provide for a more accurate description of the mechanical behavior. For the analyzed example, the residual fields prompt for such a finer description. However, an automated refinement of the mechanical description is a challenging perspective to the present work.

Another perspective is to resort to integrated (or regularized) approaches to identify material parameters (and boundary conditions) [33]. The present framework combining DIC and FEMU in a single environment is very well adapted to such procedures. In particular, the uncertainty estimates can be assessed by using the same framework as that used herein.

### **Acknowledgements**

The authors acknowledge the support provided by SNECMA (SAFRAN group).

- [1] J. Jewell, R. Kennedy, and A. Menard. CFM Unveils New LEAP-X Engine. *CFM press*, 2008.
- [2] V. A. Guénon, T. W. Chou, and J. W. Gillespie. Toughness properties of a three-dimensional carbon-epoxy composite. *Journal of Materials Science*, 24(11):4168–4175, 1989.
- [3] J. Brandt, K. Drechsler, and F. J. Arendts. Mechanical performance of composites based on various three-dimensional woven-fibre preforms. *Composites Science and Technology*, 56(3):381–386, 1996.

- [4] R. Kamiya, B. A. Cheeseman, P. Popper, and T.-W. Chou. Some recent advances in the fabrication and design of three-dimensional textile preforms: a review. *Composites Science and Technology*, 60(1):33–47, 2000.
- [5] P. Badel, E. Vidal-Sallé, E. Maire, and P. Boisse. Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, 68(12):2433–2440, 2008.
- [6] E. De Luycker, F. Morestin, P. Boisse, and D. Marsal. Simulation of 3D interlock composite preforming. *Composite Structures*, 88(4):615–623, 2009.
- [7] D. Durville. Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers. *International Journal of Material Forming*, 3(1241):1251, 2010.
- [8] C. El Hage, R. Younès, Z. Aboura, M.L. Benzeggagh, and M. Zoater. Analytical and Numerical Modeling of Mechanical Characteristics of Orthogonal 3D CFRP. In *14th JNC*, pages 699–708, 2005.
- [9] S. V. Lomov, G. Perie, D. S. Ivanov, I. Verpoest, and D. Marsal. Modeling three-dimensional fabrics and three-dimensional reinforced composites: challenges and solutions. *Textile Research Journal*, 81(1):28–41, JAN 2011.
- [10] P. Lapeyronnie, P. Le Grogneec, C. Binétruy, and F. Boussu. Homogenization of the elastic behavior of a layer-to-layer angle-interlock composite. *Composite Structures*, 93(11):2795–2807, 2011.

- [11] R. Gras, H. Leclerc, S. Roux, S. Otin, J. Schneider, and J. N. Périé. Identification of the Out-of-Plane Shear Modulus of a 3D Woven Composite. *Experimental Mechanics*, pages 1–12, 2012.
- [12] K. E. Fallstrom and M. Jonsson. A nondestructive method to determine material properties in anisotropic plates. *Polymer Composites*, 12(5):293–305, 1991.
- [13] E. O. Ayorinde. Elastic Constants of Thick Orthotropic Composite Plates . *Journal of Composite Materials*, 29:1025–1039, 1995.
- [14] M. A. Sutton, J. H. Yan, V. Tiwari, H. W. Schreier, and J. J. Orteu. The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10):746–757, 2008.
- [15] S. Buchanan, A. Grigorash, E. Archer, A. McIlhagger, J. Quinn, and G. Stewart. Analytical elastic stiffness model for 3D woven orthogonal interlock composites. *Composites Science and Technology*, 70(11):1597–1604, 2010.
- [16] S. Nehme, A. Hallal, F. Fardoun, R. Younes, B. Hagege, Z. Aboura, M. Benzeggagh, and F. Hage Chehade. Numerical/analytical methods to evaluate the mechanical behavior of interlock composites. *Journal of Composite Materials*, 45(16):1699–1716, 2011.
- [17] G. Besnard, F. Hild, and S. Roux. "Finite-element" displacement fields anal-

- ysis from digital images : application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46 :789–804, 2006. EM2 .
- [18] M. A. Sutton, W. J. Wolters, W. H. Peters, W. F. Ranson, and S. R. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139, 1983.
- [19] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, and B. Wattrisse. Assessment of Digital Image Correlation Measurement Errors: Methodology and Results. *Experimental Mechanics*, 49(3):353–370, 2009.
- [20] H. W. Schreier, J. R. Braasch, and M. A. Sutton. Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Optical Engineering*, 39(11):2915–2921, 2000.
- [21] S. Avril, M. Bonnet, A. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381–402, aug 2008.
- [22] K. T. Kavanagh and R. W. Clough. Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1):11–23, 1971.

- [23] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme, and D. V. Hemelrijck. Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1643–1656, 2007.
- [24] S. Roux and F. Hild. Stress intensity factor measurements from digital image correlation: post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, 140(1):141–157, 2006.
- [25] E.J.J. Van Campen. Parameter Identification of the Orthotropic Material Wood. Master’s thesis, Universiteit Eindhoven, <http://alexandria.tue.nl/repository/books/628249.pdf>, April 1992.
- [26] H. Leclerc. Nouveaux outils de mécanique et d’analyse numérique pour le LMT. Séminaire du LMT Cachan. <http://www.lmt.ens-cachan.fr/seminaire/transparentes/leclerc-transparentes.pdf>, 2005.
- [27] H. Leclerc. Plateforme metil : optimisations et facilités liées à la génération de code. Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2007.
- [28] J. Réthoré and M. François. Corrélation d’images pour la détection de contour. Besançon, 2011. 20ème Congrès Français de Mécanique.
- [29] J. Réthoré. A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6):631–660, 2010.

- [30] H. Leclerc, J.-N. Périé, S. Roux, and F. Hild. Voxel-Scale Digital Volume Correlation. *Experimental Mechanics*, 51(4):479–490, 2011.
- [31] F. Hild and S. Roux. Comparison of Local and Global Approaches to Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, In Press, 2012.
- [32] G. Huysmans, I. Verpoest, and P. Van Houtte. A poly-inclusion approach for the elastic modelling of knitted fabric composites. *ACTA MATERIALIA*, 46(9):3003–3013, MAY 22 1998.
- [33] H. Leclerc, J.-N. Périé, S. Roux, and F. Hild. Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Mechanical Properties. In *Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques*, pages 161–171. Springer Berlin / Heidelberg, 2009.



# Bibliographie

- [Adanur et Tam, 1997] ADANUR, S. et TAM, C. A. (1997). On-machine interlocking of 3D laminate structures for composites. *Composites Part B : Engineering*, 28(5-6):497–506.
- [Amiot *et al.*, 2007] AMIOT, F., HILD, F. et ROGER, J. P. (2007). Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9):2863–2887.
- [Avril *et al.*, 2008] AVRIL, S., BONNET, M., BRETTELLE, A., GRÉDIAC, M., HILD, F., IENNY, P., LATOURTE, F., LEMOSSE, D., PAGANO, S., PAGNACCO, E. et PIERRON, F. (2008). Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381–402.
- [Avril *et al.*, 2004] AVRIL, S., GRÉDIAC, M. et PIERRON, F. (2004). Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6):439–452.
- [Avril et Pierron, 2007] AVRIL, S. et PIERRON, F. (2007). General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(14-15):4978–5002.
- [Ayorinde, 1995] AYORINDE, E. O. (1995). Elastic Constants of Thick Orthotropic Composite Plates . *Journal of Composite Materials*, 29:1025–1039.
- [Azzi et Tsai, 1965] AZZI, V. et TSAI, S. (1965). Anisotropic strength of composites. *Experimental Mechanics*, 5(9):283–288.
- [Badel *et al.*, 2008] BADEL, P., VIDAL-SALLÉ, E., MAIRE, E. et BOISSE, P. (2008). Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, 68(12):2433–2440.
- [Ben Abda *et al.*, 1999] BEN ABDA, A., BEN AMEUR, H. et JAOUA, M. (1999). Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements. *INVERSE PROBLEMS*, 15(1):67–77. Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization, CARTHAGE, TUNISIA, APR 08-10, 1998.
- [Bensoussan *et al.*, 1978] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L. et PAPANICOLAOU, G. (1978). Asymptotic Analysis for Periodic Structures. In *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, volume 5, chapitre Studies in Mathematics and Its Applications. Elsevier.

- [Besnard *et al.*, 2006] BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). "Finite-element" displacement fields analysis from digital images : application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46 :789–804. EM2 .
- [Blanze *et al.*, 1996] BLANZE, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y. et LADEVÈZE, P. (1996). A modular approach to structure assembly computations : application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1):15–32.
- [Boisse *et al.*, 2005] BOISSE, P., GASSER, A., HAGEGE, B. et BILLOET, J.-L. (2005). Analysis of the mechanical behavior of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level. *Journal of Material Science*, 40(22):5955–5962.
- [Bonnet, 2011] BONNET, M. (2011). Introduction aux techniques d'identification. In GRÉDIAC, M. et HILD, F., éditeur : *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*, chapitre 8, pages 243–266. Traité MIM, (Hermès Science, Paris).
- [Bonnet et Constantinescu, 2005] BONNET, M. et CONSTANTINESCU, A. (2005). Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21:1–50.
- [Bornert *et al.*, 2009] BORNERT, M., BRÉMAND, F., DOUMALIN, P., DUPRÉ, J.-C., FAZZINI, M., GRÉDIAC, M., HILD, F., MISTOU, S., MOLIMARD, J., ORTEU, J.-J., ROBERT, L., SURREL, Y., VACHER, P. et WATTRISSE, B. (2009). Assessment of Digital Image Correlation Measurement Errors : Methodology and Results. *Experimental Mechanics*, 49(3):353–370.
- [Brandt *et al.*, 1996] BRANDT, J., DRECHSLER, K. et ARENDTS, F. J. (1996). Mechanical performance of composites based on various three-dimensional woven-fibre preforms. *Composites Science and Technology*, 56(3):381–386.
- [Buchanan *et al.*, 2010] BUCHANAN, S., GRIGORASH, A., ARCHER, E., MCILHAGGER, A., QUINN, J. et STEWART, G. (2010). Analytical elastic stiffness model for 3D woven orthogonal interlock composites. *Composites Science and Technology*, 70(11):1597–1604.
- [Bui *et al.*, 2004] BUI, H. D., CONSTANTINESCU, A. et MAIGRE, H. (2004). Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *INVERSE PROBLEMS*, 20(4):993–1001.
- [Byström *et al.*, 2000] BYSTRÖM, J., JEKABSONS, N. et VARNA, J. (2000). An evaluation of different models for prediction of elastic properties of woven composites. *Composites Part B : Engineering*, 31(1):7–20.
- [Carrère *et al.*, 2009] CARRÈRE, N., ROLLET, Y., RETEL, V., BOUBAKAR, L. et MAIRE, J. F. (2009). Composites structural modelling with uncertain data. *Composites Science and Technology*, 69(1):60–66.
- [Chalal *et al.*, 2006] CHALAL, H., AVRIL, S., PIERRON, F. et MERAGHNI, F. (2006). Experimental identification of a nonlinear model for composites using the grid technique coupled to the virtual fields method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(2):315–325. CompTest 2004.

- [Champaney *et al.*, 1997] CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y., DUREISSEIX, D. et LADEVÈZE, P. (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4):253–263.
- [Claire *et al.*, 2004] CLAIRE, D., HILD, F. et ROUX, S. (2004). A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:189–208.
- [Claire *et al.*, 2003] CLAIRE, D., ROUX, S. et HILD, F. (2003). Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs Identification of thermal conductivities and elastic properties by field analyses. *Mécanique & Industries*, 4(6):655–665.
- [Constantinescu, 1995] CONSTANTINESCU, A. (1995). On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1(4):293–313.
- [Cox *et al.*, 1996] COX, B. N., DADKHAH, M. S. et MORRIS, W. L. (1996). On the tensile failure of 3D woven composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(6):447–458.
- [Cox et Dadkhan, 1995] COX, B. N. et DADKHAN, M. S. (1995). The macroscopic elasticity of 3D woven composites. *Journal of composite materials*, 29(6):785–819.
- [Crouzeix *et al.*, 2009] CROUZEIX, L., PÉRIÉ, J.-N., COLLOMBET, F. et DOUCHIN, B. (2009). An orthotropic variant of the equilibrium gap method applied to the analysis of a biaxial test on a composite material. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(11):1732–1740.
- [Dasgupta et Bhandarkar, 1994] DASGUPTA, A. et BHANDARKAR, S. M. (1994). Effective Thermomechanical Behavior of Plain-Weave Fabric-Reinforced Composites Using Homogenization Theory. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116(1):99–105.
- [El Hage *et al.*, 2006] EL HAGE, C., ABOURA, Z., YOUNES, R., BENZEGGAGH, M. L. et ZOAETER, M. (2006). Analytical approach and experimental studies of 3D behavior textile composite with carbon reinforcement of the 2.5D interlock type. *In Congrès International Francophone de Mécanique Appliquée*.
- [Fallstrom et Jonsson, 1991] FALLSTROM, K. E. et JONSSON, M. (1991). A nondestructive method to determine material properties in anisotropic plates. *Polymer Composites*, 12(5):293–305.
- [Florentin et Lubineau, 2010] FLORENTIN, E. et LUBINEAU, G. (2010). Identification of the parameters of an elastic material model using the constitutive equation gap method. *Computational Mechanics*, 46(4):521–531.
- [Frederiksen, 1997] FREDERIKSEN, S. (1997). Parameter uncertainty and design of optimal experiments for the estimation of elastic constants. *International Journal of Solids and Structures*, 35(12):1241–1260.

- [Geymonat *et al.*, 2002] GEYMONAT, G., HILD, F. et PAGANO, S. (2002). Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *C. R., Méc., Acad. Sci. Paris*, 330(6):403–408.
- [Gras *et al.*, 2012] GRAS, R., ROUX, S., LECLERC, H., PÉRIÉ, J.-N., OTIN, S. et SCHNEIDER, J. (2012). Identification of out-of-plane shear modulus of a 3D woven composite. *Experimental Mechanics*.
- [Grédiac, 2004] GRÉDIAC, M. (2004). The use of full-field measurement methods in composite material characterization : interest and limitations. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(7-8):751–761.
- [Guéron *et al.*, 1989] GUÉNON, V. A., CHOU, T. W. et GILLESPIE, J. W. (1989). Toughness properties of a three-dimensional carbon-epoxy composite. *Journal of Materials Science*, 24(11):4168–4175.
- [Hild et Roux, 2006] HILD, F. et ROUX, S. (2006). Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a Review. *Strain*, 42(2):69–80.
- [Holmbom *et al.*, 1992] HOLMBOM, A., PERSSON, L. E. et SVANSTEDT, N. (1992). A homogenization procedure for computing effective moduli and microstresses in elastic composite materials. *Composites Engineering*, 2(4):249–259.
- [Huysmans *et al.*, 1998] HUYSMANS, G., VERPOEST, I. et VAN HOUTTE, P. (1998). A poly-inclusion approach for the elastic modelling of knitted fabric composites. *ACTA MATERIALIA*, 46(9):3003–3013.
- [Huysmans *et al.*, 1999] HUYSMANS, G., VERPOEST, I. et VAN HOUTTE, P. (1999). Es-helby models applied to woven fabric composites : a benchmark study. *In Mechanical Metallurgy Section*, page 800, Paris, France.
- [Kamiya *et al.*, 2000] KAMIYA, R., CHEESEMAN, B. A., POPPER, P. et CHOU, T.-W. (2000). Some recent advances in the fabrication and design of three-dimensional textile preforms : a review. *Composites Science and Technology*, 60(1):33–47.
- [Kashif *et al.*, 2008] KASHIF, S.-M., TOUSSAINT, E., GRÉDIAC, M., AVRIL, S. et KIM, J. H. (2008). Characterization of composite plates using the virtual fields method with optimized loading conditions. *Composite Structures*, 85(1):70–82.
- [Kavanagh et Clough, 1971] KAVANAGH, K. T. et CLOUGH, R. W. (1971). Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1):11–23.
- [Laurin *et al.*, 2007] LAURIN, F., CARRÈRE, N. et MAIRE, J. F. (2007). A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(1):198–209.
- [Leclerc, 2005] LECLERC, H. (2005). Nouveaux outils de mécanique et d'analyse numérique pour le LMT. Séminaire du LMT Cachan. <http://www.lmt.ens-cachan.fr/seminaire/transparents/leclerc-transparents.pdf>.

- [Leclerc, 2007] LECLERC, H. (2007). Plateforme metil : optimisations et facilités liées à la génération de code. Colloque National en Calcul des Structures, Giens.
- [Leclerc *et al.*, 2009] LECLERC, H., PÉRIÉ, J.-N., ROUX, S. et HILD, F. (2009). Integrated Digital Image Correlation for the Identification of Mechanical Properties. *In Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques*, pages 161–171. Springer Berlin / Heidelberg.
- [Lecompte *et al.*, 2007] LECOMPTE, D., SMITS, A., SOL, H., VANTOMME, J. et HEMELRIJCK, D. V. (2007). Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1643–1656.
- [Lomov *et al.*, 2008] LOMOV, S. V., BOISSE, P., DELUYCKER, E., MORESTIN, F., VANCLOOSTER, K., VANDEPITTE, D., VERPOEST, I. et WILLEMS, A. (2008). Full-field strain measurements in textile deformability studies. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8):1232–1244. Full-field Measurements in Composites Testing and Analysis.
- [Lomov *et al.*, 2007] LOMOV, S. V., IVANOV, D. S., VERPOEST, I., ZAKO, M., KURASHIKI, T., NAKAI, H. et HIROSAWA, S. (2007). Meso-FE modelling of textile composites : Road map, data flow and algorithms. *Composites Science and Technology*, 67(9):1870–1891.
- [Lomov *et al.*, 2011] LOMOV, S. V., PERIE, G., IVANOV, D. S., VERPOEST, I. et MARSAL, D. (2011). Modeling three-dimensional fabrics and three-dimensional reinforced composites : challenges and solutions. *Textile Research Journal*, 81(1):28–41.
- [Luycker *et al.*, 2009] LUYCKER, E. D., MORESTIN, F., BOISSE, P. et MARSAL, D. (2009). Simulation of 3D interlock composite preforming. *Composite Structures*, 88(4):615–623.
- [Mahnken et Stein, 1996a] MAHNKEN, R. et STEIN, E. (1996a). A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:225–258.
- [Mahnken et Stein, 1996b] MAHNKEN, R. et STEIN, E. (1996b). Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *International Journal of Plasticity*, 12(4):451–479.
- [McIlhagger *et al.*, 1995] MCILHAGGER, R., HILL, B. J., BROWN, D. et LIMMER, L. (1995). Construction and analysis of three-dimensional woven composite materials. *Composites Engineering*, 5(9):1187–1197.
- [Meuwissen *et al.*, 1998] MEUWISSEN, M., OOMENS, C., BAAIJENS, F., PETTERSON, R. et JANSSEN, J. (1998). Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, 75:204–211.
- [Mouritz, 2008] MOURITZ, A. P. (2008). Tensile fatigue properties of 3D composites with through-thickness reinforcement. *Composites Science and Technology*, 68(12):2503–2510.

- [Mouritz *et al.*, 1999] MOURITZ, A. P., BANNISTER, M. K., FALZON, P. J. et LEONG, K. H. (1999). Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 30(12):1445–1461.
- [Nehme *et al.*, 2011] NEHME, S., HALLAL, A., FARDOUN, F., YOUNES, R., HAGEGE, B., ABOURA, Z., BENZEGGAGH, M. et CHEHADE, F. H. (2011). Numerical/analytical methods to evaluate the mechanical behavior of interlock composites. *Journal of Composite Materials*, 45(16):1699–1716.
- [Pailhes *et al.*, 2002] PAILHES, J., CAMUS, G. et LAMON, J. (2002). A constitutive model for the mechanical behavior of a 3D C/C composite. *Mechanics of Materials*, 34(3):161–177.
- [Périé *et al.*, 2009] PÉRIÉ, J.-N., LECLERC, H., ROUX, S. et HILD, F. (2009). Digital image correlation and biaxial test on composite material for anisotropic damage law identification. *International Journal of Solids and Structures*, 46(11-12):2388–2396.
- [Pottier *et al.*, 2011] POTTIER, T., TOUSSAINT, F. et VACHER, P. (2011). Contribution of heterogeneous strain field measurements and boundary conditions modelling in inverse identification of material parameters. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(3): 373–382.
- [Quinn *et al.*, 2008] QUINN, J. P., MCILHAGGER, A. T. et MCILHAGGER, R. (2008). Examination of the failure of 3D woven composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(2):273–283.
- [Réthoré, 2010] RÉTHORÉ, J. (2010). A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6):631–660.
- [Réthoré et François, 2011] RÉTHORÉ, J. et FRANÇOIS, M. (2011). Corrélation d'images pour la détection de contour. Besançon. 20ème Congrès Français de Mécanique.
- [Réthoré *et al.*, 2008] RÉTHORÉ, J., ROUX, S. et HILD, F. (2008). Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(13):3763–3781.
- [Rollet *et al.*, 2009] ROLLET, Y., BONNET, M., CARRÈRE, N., LEROY, F. H. et MAIRE, J. F. (2009). Improving the reliability of material databases using multiscale approaches. *Composites Science and Technology*, 69(1):73–80.
- [Roux et Hild, 2006] ROUX, S. et HILD, F. (2006). Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, 140(1):141–157.
- [Roux et Hild, 2008] ROUX, S. et HILD, F. (2008). Digital Image Mechanical Identification (DIMI). *Experimental Mechanics*, 48(4):495–508. 10.1007/s11340-007-9103-3.
- [Schneider *et al.*, 2009] SCHNEIDER, J., ABOURA, Z., KHELLIL, K., BENZEGGAGH, M. et MARSAL, D. (2009). Off-plan behaviour investigation of an interlock fabric. *In Comptes Rendus des JNC 16*.

- [Schreier *et al.*, 2000] SCHREIER, H. W., BRAASCH, J. R. et SUTTON, M. A. (2000). Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Optical Engineering*, 39(11):2915–2921.
- [Spencer, 2000] SPENCER, A. J. M. (2000). Theory of fabric-reinforced viscous fluids. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(12):1311–1321.
- [Sun *et al.*, 2005] SUN, B., GU, B. et DING, X. (2005). Compressive behavior of 3-D angle-interlock woven fabric composites at various strain rates. *Polymer Testing*, 24(4):447–454.
- [Sun et Vaidya, 1996] SUN, C. T. et VAIDYA, R. S. (1996). Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2):171–179.
- [Sutton *et al.*, 1983] SUTTON, M. A., WOLTERS, W. J., PETERS, W. H., RANSON, W. F. et MCNEILL, S. R. (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139.
- [Sutton *et al.*, 2008] SUTTON, M. A., YAN, J. H., TIWARI, V., SCHREIER, H. W. et ORTEU, J. J. (2008). The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(10):746–757.
- [Triconnet *et al.*, 2009] TRICONNET, K., DERRIEN, K., HILD, F. et BAPTISTE, D. (2009). Parameter choice for optimized digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(6):728–737.
- [Tsai *et al.*, 2000] TSAI, K. H., CHIU, C. H. et WU, T. H. (2000). Fatigue behavior of 3D multi-layer angle interlock woven composite plates. *Composites Science and Technology*, 60(2):241–248.
- [Van Campen, 1992] VAN CAMPEN, E. (1992). Parameter Identification of the Orthotropic Material Wood. Mémoire de D.E.A., Universiteit Eindhoven, <http://alexandria.tue.nl/repository/books/628249.pdf>.
- [Vandeurzen *et al.*, 1996] VANDEURZEN, P., IVENS, J. et VERPOEST, I. (1996). A three-dimensional micromechanical analysis of woven-fabric composites : I. Geometric analysis. *Composites Science and Technology*, 56(11):1303–1315.
- [Verpoest et Lomov, 2005] VERPOEST, I. et LOMOV, S. V. (2005). Virtual textile composites software WiseTex : Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, 65(15–16):2563–2574.
- [Witz *et al.*, 2008] WITZ, J. F., ROUX, S., HILD, F. et RIEUNIER, J. B. (2008). Mechanical properties of crimped mineral wools : Identification from digital image correlation. *Journal of Engineering materials and technology*, 130.
- [Younes *et al.*, 2008] YOUNES, R., ABOURA, Z. et BENZEGGAGH, M. L. (2008). Optimisation du tissage de composites orthogonaux 3D. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(9):704–713.