# SUITES DIGITALES ET SUITES $k$-REGULIERES

Emmanuel CATELAND

école doctorale de mathématiques
de Bordeaux

N° d'ordre : 775

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITE BORDEAUX I

**POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR**

SPECIALITE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

par

**Emmanuel CATELAND**

---

## SUITES DIGITALES ET SUITES $k$-REGULIERES

---

Soutenue le 3 juin 1992, devant la Commission d'Examen :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | R. CORI | *Président* |
| | J.-P. ALLOUCHE | |
| | P. FLAJOLET | |
| | P. LIARDET | *Examinateurs* |
| | M. MENDES FRANCE | |
| | G. TENENBAUM | |

– 1992 –

PRÉSENTATION.

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première partie, nous partons d'un théorème de Delange relatif à la valeur moyenne, sur les $m$ premiers entiers, de la suite "somme des chiffres"; la formule de Delange dit que cette valeur moyenne consiste en un "terme principal", qui indique que $s_q(n)$ a pour ordre moyen $\frac{q-1}{2}\log_q n$, et en un "terme reste" qui est une fonction continue, périodique de période 1 et "fractale", (c'est-à-dire nulle part dérivable) de $\log_q m$.

Partant de cette suite $(s_q(n))_{n\in\mathbb{N}}$, nous définissons de nouvelles suites, appelées "suites digitales" (le mot digit faisant allusion aux chiffres de $n$ écrit en base $q \geq 2$ ); ces suites consistent à se donner un entier $s \geq 1$ et une application $F : \{0,1,...,q-1\} \to \mathbb{C}$, telle que $F(0,0,...,0) = 0$; on développe l'entier $n$ en base $q$ avec une "queue infinie" de zéros à gauche, c'est-à-dire

$$n = \sum_{l\geq 0} \epsilon_l(n) q^l,$$

où $\epsilon_l(n) = [n/q^l] - q[n/q^{l+1}] \in \{0,1,...,q-1\}$,
$\epsilon_l(n) = 0$ dès que $l > [\log_q n]$ pour $n \geq 1$,
$\epsilon_l(0) = 0, \forall l \geq 0$.

Le terme de rang $n$ de la suite digitale $u_F$ correspondante est alors donné par

$$u_F(n) = \sum_{l\geq 0} F(\epsilon_l(n), \epsilon_{l+1}(n), ..., \epsilon_{l+s-1}(n)).$$

En d'autres termes, ces suites consistent à promener des "fenêtres" de longueur $s$ sur l'écriture de $n$ en base $q$.

Ainsi, pour retrouver $s_q$, il suffit de prendre $s = 1$ et $F = Id_{\{0,1,...,q-1\}}$.

A la fonction $F : \{0,1,...,q-1\} \to \mathbb{C}$ est naturellement associée sa valeur moyenne

$$M_F = \frac{1}{q^s} \sum_{(\epsilon_0,\epsilon_1,...,\epsilon_{s-1})\in\{0,1,...,q-1\}} F(\epsilon_0, \epsilon_1, ...\epsilon_{s-1}).$$

Après avoir donné deux exemples de suites digitales (décomptes de blocs et un exemple arithmétique lié au problème des entiers s'écrivant comme somme de trois carrés d'entiers), nous montrons des propriétés simples concernant leur $q-$régularité (notion généralisant celle de $q-$automaticité), puis nous montrons que ces suites digitales ont pour ordre moyen et pour ordre normal $M_F \log_q n$.

Pour finir cette première partie, nous généralisons à nos nouvelles suites la partie "facile" du théorème de Delange, à savoir l'existence, pour leur valeur moyenne sur les $m$ premiers entiers, d'une fonction de $\log_q m$, continue, périodique de période 1; le développement en série de Fourier de cette fonction donne une série absolument convergente dont les coefficients sont reliés de manière relativement simple aux valeurs des fonctions zéta de Hurwitz, de paramètres $r/q^s$ $(r = 1,2,...,q^s)$ aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, $k \in \mathbb{Z}$. Concernant ces coefficients de Fourier, nous trouvons des formules bizarres (i.e. que nous ne savons pas expliquer) les reliant aux résidus en $\frac{2k\pi i}{\log q}$ d'une fonction liée à la suite digitale étudiée, fonction qui est holomorphe sur le demi-plan $\Re z > 0$ et méromorphe sur $\mathbb{C}$. Expliquer ces formules constitue un problème ouvert, terminant cette première partie.

Dans la deuxième partie, plus longue et plus complexe, nous cherchons à montrer l'autre partie du théorème de Delange, à savoir que la fonction sommatoire des suites digitales, que nous appellerons $G_F$, est nulle part dérivable.
Après avoir essayé d'imiter Delange, c'est-à-dire de montrer cette propriété "à la main", ce qui ne donne rien ici, nous avons tenté de nous inspirer d'un article de Brillhart, Erdös et Morton concernant la fonction sommatoire de la suite de Rudin-Shapiro, pour montrer que notre fonction $G_F$ est presque nulle part dérivable; mais, ici encore, cet essai fut sans résultat.
C'est alors que nous sommes tombé sur deux théorèmes de Dumont et Thomas concernant la fonction sommatoire de suites qui sont points fixes de substitutions, pas forcément de longueur constante.
En utilisant le premier théorème, et en étudiant au passage les suites $Q_{a,b} = (Q_{a,b}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$Q_{a,b}(n) = \sum_{l\geq 0}[a\frac{n}{q^l} + b],$$

où $a$ et $b$ sont deux réels satisfaisant $a > 0,\ 0 \leq b < 1$, nous obtenons le résultat très partiel suivant :
Si $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite digitale relative à l'entier $s = 1$, à la base $q \geq 2$ et à une application $F : \{0, 1, ..., q-1\} \to \mathbb{C}$ telle que $F(0) = F(q-1) = 0$, alors la fonction $G_F$ est nulle part dérivable, dès lors que $M_F \neq 0$.
Puis, en utilisant le deuxième théorème de Dumont et Thomas, qui demande beaucoup plus de travail car il nécessite un moyen de représenter de manière unique tout entier $\geq 1$ relativement à une substitution satisfaisant certaines conditions, nous améliorons le résultat ci-dessus concernant les suites digitales relatives à l'entier $s = 1$, en ce sens que la condition $F(q-1) = 0$ disparaît.
Pour finir cette deuxième partie, il suffisait de généraliser le deuxième théorème de Dumont-Thomas à notre cas particulier, c'est-à-dire de passer de "$s = 1$" à "$s \geq 2$". En définitive, nous obtenons bien que, pour une suite digitale quelconque, c'est-à-dire relative à un entier $s \geq 1$, à une base $q \geq 2$ et à une application $F : \{0, 1, ..., q-1\} \to \mathbb{C}$, de moyenne $M_F$, la fonction sommatoire $G_F$ de la première partie est bien nulle part dérivable, pourvu que $M_F \neq 0$.

La troisième partie est indépendante des deux autres, nous nous y intéressons à la représentation en base $(q, d)$ des entiers, où $q$ et $d$ sont deux entiers satisfaisant à $q \geq 2$ et $2 - q \leq d \leq 0$. Après avoir rappelé la manière de représenter les entiers naturels dans ces systèmes en base $q$ avec des chiffres négatifs, nous étudions les suites $u$ strictement croissantes des entiers "évitant" un certain chiffre parmi les $q$ possibles, ainsi que la suite caractéristique $\chi$ de l'ensemble $Im\ u$. Nous montrons alors que $u$ est $(q-1)$-régulière, que $\chi$ est $q$-automatique, et de plus nous avons un moyen simple (dépendant si le chiffre à éviter est $> 0$ ou $\leq 0$) de calculer le terme de rang $n$ de $u$, soit $u(n)$, à partir de l'écriture de $n$ dans une certaine base. Pour finir, nous généralisons les propriétés précédentes à l'exclusion de plusieurs chiffres : si $u$ est la suite strictement croissante des entiers naturels écrits en base $(q, d)$ avec seulement $p$ chiffres parmi les $q$ possibles, et si $\chi$ est la suite caractéristique

correspondante, alors nous montrons que $u$ est $p$−régulière, que $\chi$ est $q$−automatique, et, moyennant des conditions simples sur $p$ et $q$, nous donnons encore une manière relativement facile de calculer $u(n)$ à partir de l'écriture de $n$ dans une certaine base.
Le fait que $u$ soit $p$−régulière et de fonction caractéristique $q$−automatique est à rapprocher du théorème de Cobham (mais ne le contredit pas !) qui stipule qu'une suite à la fois $p$ et $q$−automatique (avec $p$ et $q$ multiplicativement indépendants ) est ultimement périodique. Notons pour finir que le résultat ne subsiste pas si on exclut un "bloc" de chiffres.

Deux articles issus de ce travail sont en préparation : le premier correspond essentiellement aux parties I et II, nous y indiquerons de plus le lien avec les "suites chaînées" introduites par Allouche et Liardet, et nous y ajouterons une bibliographie plus complète (nous avons répertorié pour le moment une quarantaine de références). Le second article en préparation correspond à la partie III et à ses développements en cours.

Emmanuel CATELAND (Université de Bordeaux I)

Exposé au séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux le 19 avril 1991.

## SUITES DIGITALES, GÉNÉRALITÉS.

Résumé L'objectif de cet exposé est de généraliser à de nouvelles suites, que nous appellerons "suites digitales", certains résultats gouvernant la suite "somme des chiffres"; le mot "digital" fait évidemment allusion aux chiffres (digits en anglais) de l'écriture des entiers dans une base fixée.

Plan I) INTRODUCTION - RAPPELS SUR $s_q$.

II) SUITES RÉGULIÈRES - SUITES DIGITALES

1 - Définitions

2 - Exemples de suites digitales

3 - Régularité des suites digitales

III) ORDRE MOYEN-ORDRE NORMAL DES SUITES DIGITALES

IV) FONCTION SOMMATOIRE DES SUITES DIGITALES

V) PROBLÈMES OUVERTS

1 - Coefficients de Fourier de G.

2 - Non-dérivabilité de G.

### I) INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, $q$ est un entier fixé, $q \geqq 2$, et l'on note $\Sigma_q = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ l'ensemble des chiffres en base $q$, qui peut être considéré comme un alphabet servant à représenter les entiers en base $q$, de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite $(\varepsilon_l(n))_{l\geq 0} \in \Sigma_q^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Sigma_q$ telle que l'on ait $\underline{\underline{n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) q^l}}$, avec $\varepsilon_l(n) = 0$ pour $l > [\log_q n]$ si $n \geq 1$, $\varepsilon_l(0) = 0$, $\forall\, l \geq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on convient de noter $n_{(q)}$ le mot infini sur $\Sigma_q$ représentant $n$ en base $q$, mot commençant par une "queue infinie" de zéros à gauche, c'est-à-dire

$$\underline{\underline{n_{(q)} = \cdots 00 \cdots 0 \varepsilon_{[\log_q n]}(n) \cdots \varepsilon_1(n) \varepsilon_0(n),}}$$

et on note enfin $\omega$ le mot vide sur $\Sigma_q$, qui représente 0 en base $q$ $\underline{\underline{(i.\ e.\ 0_{(q)} = \omega)}}$

Définition de $s_q$ : $s_q = (s_q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite "somme des chiffres en base $q$" ; elle est définie terme à terme par :

$$\underline{\underline{s_q(n) = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n)}} \quad \text{si} \quad \underline{\underline{n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) q^l}}$$

Propriétés de $s_q$

1) $\forall k \geq 0$, $\forall r \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq r < q^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $s_q(q^k n + r) = s_q(n) + s_q(r)$

(Cette propriété est un cas particulier de la q-additivité).

En particulier, il en résulte que le $\mathbb{Z}$-module engendré par l'ensemble des sous-suites $N_q(s_q) = \{(s_q(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}} / k \geq 0,\ 0 \leq r < q^k\}$ est de rang 2, engendré par $s_q$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite constante de valeur 1)

2) $\forall m$ entier $\geq 2$, la suite réduite $(s_q(n) \mod m)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_m^{\mathbb{N}}$ est $q$-automatique.

3) Ordre moyen de $s_q$ : $s_q(n)$ a pour ordre moyen $\frac{q-1}{2} \log_q n$ (lorsque $n$ tend vers $+\infty$); plus précisément, Mirsky ([10]) a montré en 1949 que, si $x \to +\infty$, on a la formule

$$\sum_{0\leq n\leq x} s_q(n) = \frac{q-1}{2} x \log_q x + O(x),$$

et ce résultat est le meilleur possible, en ce sens que le terme d'erreur $O(x)$ ne peut pas être remplacé par un $o(x)$.

4) Fonction sommatoire de $s_q$ Nous avons ici le très beau

Théorème (Delange, 1975) ([6])

*Il existe une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, périodique de période 1, nulle part dérivable, telle que pour tout entier $m \geq 1$, on a la formule :*

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} s_q(n) = \frac{q-1}{2} \log_q m + G(\log_q m).$$

*De plus, $G$ a une série de Fourier absolument convergente, dont les coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log\ q}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.*

## II) SUITES RÉGULIÈRES - SUITES DIGITALES

### 1- Définitions

Soient $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers, $q$ un entier $\geq 2$ et $N_q(u) = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}} / k \geq 0,\ 0 \leq r < q^k\}$ le q-noyau de u.

i) on dit que u est q-automatique si $N_q(u)$ est fini,

ii) on dit que u est q-régulière si le $\mathbb{Z}$-module engendré par $N_q(u)$ est de type fini (définition introduite par J.-P. Allouche et J. Shallit) ([2]).

Ainsi, $s_q$ est bien q-régulière. Remarquons que les deux notions sont identiques lorsque $u$ est à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, et que, si $u$ est q-régulière, alors pour tout entier $m \geq 2$, la suite réduite $(u(n) \mod m)_{n\in\mathbb{N}}$ est q-automatique.

Nous pouvons maintenant définir les suites digitales comme suit :

Définitions des suites digitales

Soient $s$ un entier $\geq 1$, $q$ un entier $\geq 2$ et $F : \Sigma_q^s \to \mathbb{Z}$ une application telle que $F(0,0,\cdots,0) = 0$. On appelle suite digitale (relative à $s$, $q$ et $F$) la suite $U_F$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ définie terme à terme par

$$U_F(n) = \sum_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n)) \text{ si } n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) q^l$$

Ainsi, $s_q$ est la suite digitale relative à $s = 1$ et $F = Id_{\Sigma_q}$.

2 - Exemples de suites digitales

1) Soit $P = \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0 \in \Sigma_q^s$ un mot de longueur $s$ sur $\Sigma_q$, différent du mot $\underbrace{00\cdots0}_{s \text{ fois zéro}}$ et soit $F : \Sigma_q^s \to \{0,1\}$ l'application telle que $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) = 1$ , $F \equiv 0$ ailleurs.
Alors $U_F = e_P$, suite étudiée par Morton et Mourant ([11]), où, pour $n \in \mathbb{N}$, $e_P(n)$ compte le nombre d'occurrences, pouvant se recouper, du mot $P$ dans le mot $n_{(q)}$.

Remarquons de plus que ces suites de "décomptes de blocs de longueur $s$" engendrent toutes les suites digitales d'entiers, dans le sens que l'on peut toujours écrire

$$U_F = \sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) e_{\varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0}.$$

2) Soit $Q = \{n \in \mathbb{N}^*/n$ est somme de 3 carrés d'entiers, zéro compris $\}$.
- En écrivant, de manière unique, tout $n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme

$$n = 4^l(8k + r) \text{ où } l = v_4(n) \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\},$$

Gauss a montré que $n \in Q$ si et seulement si $r \neq 7$.
- Pour $x$ réel $\geq 1$, soit $Q(x) = \sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ n\in Q}} 1$ la fonction sommatoire de la suite caractéristique de $Q$. En 1908, Landau ([9]) a montré que $Q$ a pour densité asymptotique $5/6$, c'est à dire que $Q(x) \sim \frac{5x}{6}$ $(x \to +\infty)$. En fait, si $\Delta(x) = Q(x) - \frac{5x}{6}$ est le terme d'erreur associé, alors l'argument de Landau montre que

- pour $x$ entier, on a $\Delta(x) = \frac{x}{6} - \sum_{l\geq 0} [\frac{1}{8}(\frac{x}{4^l} + 1)]$
- $\Delta(x) \ll \log x$ $(x \to +\infty)$.
- En 1940, Chakrabarti ([4]) donna la formule suivante pour $\Delta(n)$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ :

$$\text{si } n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) 2^l, \text{ alors } \Delta(n) = \frac{2}{3}n_0 + \frac{1}{3}n_1 - n_2 - \frac{\varepsilon_0(n)}{2} ,$$

avec $n_0 = \Sigma_{l\geq 0}\epsilon_{2l}(n), n_1 = \Sigma_{l\geq 0}\epsilon_{2l+1}(n), n_2 = \Sigma_{l\geq 0}\epsilon_l^*(n)$,

$$\text{et où } \varepsilon_l^*(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_{2l-2}(n) = \varepsilon_{2l-1}(n) = \varepsilon_{2l}(n) = 1 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } l \geq 0.$$

- Mais cette formule ne permet pas, a priori, de calculer l'ordre moyen et l'ordre normal de $\Delta(n)$, ce qui fut possible grâce à Shiu ([12], [13]) qui, en 1988, remplaça la base 2 par la base 4 et obtint la formule suivante pour $\Delta(n)$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ :

$$\text{si } n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) 4^l, \quad \text{alors } \Delta(n) = \frac{\varepsilon_0(n)}{6} + \sum_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n),\ \varepsilon_{l+1}(n)),$$

avec $F \ : \ \Sigma_4^2 \to \mathbb{Q}$ , $F(\varepsilon, \varepsilon')$ étant donnée dans le tableau ci-contre. Ainsi, au terme $\frac{\varepsilon_0(n)}{6}$, près (ce terme est périodique de période 4), nous voyons que $\Delta = (\Delta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite digitale de nombres rationnels, relative aux entiers $s = 2$, $q = 4$ et à l'application $F = \Sigma_4^2 \to \mathbb{Q}$, telle que $F(0,0) = 0$, donnée ci-dessus.

| $\varepsilon'$ \ $\varepsilon$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2/3 | 2/3 | 2/3 | -1/3 |
| 2 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 |

3 - Régularité des suites digitales

Proposition Soit $U_F = (U_F(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite digitale d'entiers, relative à un entier $s \geq 1$,une base $q \geq 2$ et une application $F \ : \ \Sigma_q^s \to \mathbb{Z}$ telle que $F(0, 0, \cdots, 0) = 0$. Alors $U_F$ est $q$-régulière.

Preuve L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels étant un anneau noethérien, on sait qu'il suffit de trouver un $\mathbb{Z}$-module de type fini $\mathcal{M}$ qui contient $N_q(U_F)$, car alors le $\mathbb{Z}$-module engendré par $N_q(U_F)$, soit $< N_q(U_F) >_{\mathbb{Z}}$, sera lui aussi de type fini.

Nous prenons $\mathcal{M} =< (1)_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ (U_F(q^k n+r))_{n\in\mathbb{N}}\ /0 \leq k \leq s-1,\ 0 \leq r < q^k >_{\mathbb{Z}}$ qui est bien un $\mathbb{Z}$-module de type fini, puisqu'engendré par au plus $1+1+q+q^2+\cdots+q^{s-1} = \frac{q^s-1}{q-1}+1$ suites distinctes. Nous montrons maintenant par récurrence sur $k \geq s-1$ que, pour $r \in \mathbb{N}\ /\ 0 \leq r < q^k$, on a $(U_F(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}}\ \in \mathcal{M}$, ce qui démontrera la proposition.

Il n'y a rien à montrer pour $k = s-1$ ; supposons maintenant que la propriété soit vraie pour l'entier $k \geq s-1$, et montrons qu'elle l'est encore pour l'entier $k+1$.

Soit donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r < q^{k+1}$, nous développons $r$ en base $q$ avec $k+1$ chiffres, soit $r = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon_l(r) q^l$ où $\varepsilon_l(r) \in \Sigma_q$ (et avec peut-être $\varepsilon_k(r) = 0$ si $r < q^k$.) On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $n_{(q)}$ le mot qui représente $n$ en base $q$

([voir I]), on a $q^{k+1}\ n_{(q)} = n_{(q)}\ \underbrace{00\cdots0}_{(k+1)\text{ zéros}}$

$$\text{et } (q^{k+1}\ n+r)_{(q)} = n_{(q)}\ \varepsilon_k(r)\ \varepsilon_{k-1}(r)\cdots\varepsilon_1(r)\varepsilon_0(r).$$

Soit $R\in\mathbb{N}$ donné par $R=\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l(r)\,q^{l-1}$ $(=[r/q])$, alors on a $0\le R<q^k$, et $(q^k\ n+R)_{(q)} = n_{(q)}\ \varepsilon_k(r)\ \varepsilon_{k-1}(r)\cdots\varepsilon_1(r)$. Ainsi, la définition de $U_F$ montre que l'on a :

$$U_F(q^{k+1}n+r) = U_F(q^kn+R) + F(\varepsilon_0(r),\ \varepsilon_1(r),\cdots,\varepsilon_{s-1}(r)).$$

Mais $F(\varepsilon_0(r),\ \varepsilon_1(r),\cdots,\varepsilon_{s-1}(r))$ est un entier indépendant de $n\in\mathbb{N}$, puisque $k+1\ge s$, et d'autre part la sous-suite $(U_F(q^kn+R))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{M}$ par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $(U_F(q^{k+1}n+r))_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(U_F(q^kn+R))_{n\in\mathbb{N}}}_{\in\mathcal{M}} + \underbrace{(F(\varepsilon_0(r),\cdots,\varepsilon_{s-1}(r))}_{\in\mathbb{Z}}\ \cdot\ \underbrace{(1)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in\mathcal{M}}$

ce qui termine la preuve.

## III) <u>ORDRE MOYEN - ORDRE NORMAL DES SUITES DIGITALES</u>

Dorénavant, nous fixons $s$ un entier $\ge 1$, $q$ un entier $\ge 2$ et $F\ :\ \Sigma_q^s\to\mathbb{C}$ une application telle que $F(0,0,\cdots,0)=0$, et la suite digitale $U_F=(U_F(n))_{n\in\mathbb{N}}\ \in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, à valeurs complexes, est donnée par :

$$U_F(n)=\sum_{l\ge0}F(\varepsilon_l(n),\ \varepsilon_{l+1}(n),\cdots,\varepsilon_{l+s-1}(n)) \text{ si } n=\sum_{l\ge0}\varepsilon_l(n)q^l.$$

Enfin, nous désignerons par $M_F$ la valeur moyenne de $F$, c'est-à-dire :

$$M_F=\frac{1}{q^s}\sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s}F(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1}).$$

Notons que, pour $U_F=s_q$, nous avons $M_{Id_{\Sigma_q}}=\frac{1}{q}\sum_{\varepsilon=1}^{q-1}\varepsilon=\frac{q-1}{2}$.

Généralisant la proposition de Mirsky, nous obtenons la

<u>Théorème</u> $U_F(n)$ a pour ordre moyen et ordre normal $M_F\log_q n$ ; plus précisément, au voisinage de l'infini, on a les formules :

(i) $\sum_{0\le n\le x}U_F(n)=M_F\ x\log_q x+O(x)$;

(ii) $\forall\varepsilon>0$, Card $\{n\in\mathbb{N}; 0<n\le x$ et $|U_F(n)-M_F\log_q n|>(\log\ n)^{\frac12+\varepsilon}\}=o(x)$.

De plus, pour $s=1$ et $F\not\equiv 0_{\Sigma_q}$, alors, dans i), le $O(x)$ ne peut pas être remplacé par $o(x)$.

<u>Preuve de (i)</u>

<u>Lemme</u> Soient $n \in \mathbb{N}$ , $n = \sum\limits_{l \geq 0} \varepsilon_l(n) q^l$ , et $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) \in \Sigma_q^s$. Alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $(\varepsilon_k(n),\ \varepsilon_{k+1}(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1})$ si et seulement s'il existe $m$ et $\mu$ dans $\mathbb{N}$ tels que l'on ait $n = q^{k+s}m + \mu$ avec $\sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k$

<u>Preuve du lemme</u>

- Supposons d'abord $(\varepsilon_k(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1})$ et écrivons

$$\begin{aligned} n = \sum_{l \geq 0} \varepsilon_l(n) q^l &= \sum_{l=0}^{k+s-1} \varepsilon_l(n) q^l + \sum_{l \geq k+s} \varepsilon_l(n) q^l \\ &= \sum_{l=0}^{k+s-1} \varepsilon_l(n) q^l + q^{k+s} \sum_{l \geq k+s} \varepsilon_l(n) q^{l-(k+s)} = \mu + q^{k+s} m \end{aligned}$$

avec $m = \sum\limits_{l \geq k+s} \varepsilon_l(n) q^{l-(k+s)}$ et $\mu = \sum\limits_{l=0}^{k+s-1} \varepsilon_l(n) q^l =$

$= \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varepsilon_l(n) q^l + \sum\limits_{l=k}^{k+s-1} \varepsilon_l(n) q^l = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varepsilon_l(n) q^l + \sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r}$,

et l'on remarque que $0 \leq \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varepsilon_l(n) q^l \leq (q-1) \sum\limits_{l=0}^{k-1} q^l = q^k - 1$, ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

- Réciproquement, supposons qu'il existe $m$ et $\mu$ entiers $\geq 0$ tels que $n = q^{k+s}m + \mu$ avec $\sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k$ et montrons que

$$(\varepsilon_k(n), \varepsilon_{k+1}(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}).$$

Comme l'entier $p = \mu - \sum\limits_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r}$ vérifie les inégalités $0 \leq p < q^k$, sa représentation en base $q$ avec $k$ chiffres est de la forme $p = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \varepsilon_l(p) q^l$. Si $m = \sum\limits_{l \geq 0} \varepsilon_l(m) q^l$, on a alors

$$\begin{aligned} n = \mu + q^{k+s} m &= p + \sum_{l=0}^{s-1} \varepsilon_l q^{k+l} + q^{k+s} \sum_{l \geq 0} \varepsilon_l(m) q^l \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon_l(p) q^l + \sum_{l=0}^{s-1} \varepsilon_l q^{k+l} + \sum_{l \geq k+s} \varepsilon_{l-(k+s)}(m) q^l \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \varepsilon_l(n) q^l. \end{aligned}$$

Mais on sait que la suite $(\varepsilon_l(n))_{l \geq 0} \in \Sigma_q^{\mathbb{N}}$ des chiffres représentant $n$ en base $q$ est unique, donc, par identification des puissances $k^{\text{ème}}, (k+1)^{\text{ème}}, \cdots, (k+s-1)^{\text{ème}}$ de $q$, on en déduit

$$(\varepsilon_k(n),\ \varepsilon_{k+1}(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) \ \square$$

Montrons maintenant le résultat i) de la proposition sur l'ordre moyen de $U_F(n)$. Pour $x$ réel $\geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) \in \Sigma_q^s$, définissons $f(x, k, \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0)$ comme le nombre d'entiers $n \geq 0$ tels que $\begin{cases} (\varepsilon_k(n), \varepsilon_{k+1}(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}), \\ 0 \leq n \leq x. \end{cases}$

donc $f(x, k, \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq n \leq x \\ (\varepsilon_k(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{s-1})}} 1$ .

Grâce au lemme précédent, on a $\begin{cases} 0 \leq n \leq x, \\ (\varepsilon_k(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{s-1}). \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n \leq x \\ \exists m, \mu \in \mathbb{N}; n = q^{k+s}m + \mu \text{ avec } \displaystyle\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k, \end{cases}$$

donc $f(x, k, \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0) = \displaystyle\sum_{\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k} \;\; \sum_{0 \leq mq^{k+s} + \mu \leq x} 1.$

Soit $\mu$ fixé tel que $\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k$, on a alors

$$\sum_{0 \leq mq^{k+s} + \mu \leq x} 1 = \text{ Card } \{m \in \mathbb{N}/mq^{k+s} + \mu \leq x\} =$$

$$\text{Card } \{m \in \mathbb{N}; m \leq \frac{x-\mu}{q^{k+s}}\}$$

$$= \left[\frac{x-\mu}{q^{k+s}}\right] + 1 = \frac{x}{q^{k+s}} + 1 - \frac{\mu}{q^{k+s}} - \left\{\frac{x-\mu}{q^{k+s}}\right\},$$

mais nous avons

$1 - \dfrac{\mu}{q^{k+s}} - \left\{\dfrac{x-\mu}{q^{k+s}}\right\} = O(1)$ $(x \to +\infty)$, donc $\displaystyle\sum_{0 \leq mq^{k+s} + \mu \leq x} 1 = \frac{x}{q^{k+s}} + O(1)$

et $f(x, k, \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0) = \displaystyle\sum_{\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k} \left(\frac{x}{q^{k+s}} + O(1)\right)$

$$= \frac{x}{q^{k+s}} \sum_{\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k} 1 + \sum_{\sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} \leq \mu < \sum_{r=0}^{s-1} \varepsilon_r q^{k+r} + q^k} O(1)$$

$= \dfrac{x}{q^{k+s}} q^k + O(q^k)$ $(x \to +\infty)$ soit finalement :

$$f(x, k, \varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0) = \frac{x}{q^s} + O(q^k) \; (x \to +\infty)$$

Par ailleurs, on a $\displaystyle\sum_{0 \leq n \leq x} U_F(n) = \sum_{0 \leq n \leq x} \sum_{k \geq 0} F(\varepsilon_k(n), \varepsilon_{k+1}(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)),$

or, pour $k > \log_q x$, et pour tout entier $n$ tel que $0 \leq n \leq x$, on a

$$(\varepsilon_k(n), \cdots, \varepsilon_{k+s-1}(n)) = (0, 0, \cdots, 0).$$

Comme $F(0,0,\cdots,0)=0$, il vient :

$$\sum_{0\le n\le x} U_F(n) = \sum_{0\le n\le x}\ \sum_{0\le k\le \log_q x} F(\varepsilon_k(n),\varepsilon_{k+1}(n),\cdots,\varepsilon_{k+s-1}(n))$$

$$= \sum_{0\le k\le \log_q x}\ \sum_{0\le n\le x} F(\varepsilon_k(n),\varepsilon_{k+1}(n),\cdots,\varepsilon_{k+s-1}(n))$$

$$= \sum_{0\le k\le \log_q x}\ \sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1}) \sum_{\substack{0\le n\le x\\ (\varepsilon_k(n),\cdots,\varepsilon_{k+s-1}(n))=(\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{s-1})}} 1$$

$$= \sum_{0\le k\le \log_q x}\ \sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\ f(x,k,\varepsilon_{s-1}\varepsilon_{s-2}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0).$$

Supposons $x$ assez grand, alors grâce à l'estimation précédente de $f(x,k,\varepsilon_{s-1},\cdots,\varepsilon_1\varepsilon_0)$, nous avons la formule :

$$\sum_{0\le n\le x} U_F(n) = \sum_{0\le k\le \log_q x}\ \sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\left(\frac{x}{q^s}+O(q^k)\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{q^s}\sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{s-1})\right)\left(\sum_{0\le k\le \log_q x} 1\right)$$

$$+ \sum_{0\le k\le \log_q x} O(q^k)$$

$$= xM_F([\log_q x]+1)+O(x) = M_F x\log_q x + O(x) \text{ pour } x\to+\infty,$$

ce qui termine la preuve de (i).

Preuve de "De plus,...". On suppose maintenant $s=1$ et $F\not\equiv 0_{\Sigma_q}$. Soit $\varepsilon_0 = min\{\varepsilon\in\Sigma_q\ ;\ F(\varepsilon)\neq 0\}$, donc $\varepsilon_0\in\Sigma_q/\{0\}$.

Considérons la suite $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_N=\varepsilon_0 q^N(q+1)$ ; comme $[\log_q x_N]=N+1$, on sait que $\sum_{0\le n\le x_N} U_F(n) = \sum_{k=0}^{N+1}\sum_{\varepsilon\in\Sigma_q} F(\varepsilon)f(x_N,k,\varepsilon) =$

$= \sum_{k=0}^{N+1}\sum_{\varepsilon=\varepsilon_0}^{q-1} F(\varepsilon)f(x_N,k,\varepsilon)$ où, pour $0\le k\le N+1$ et $\varepsilon\in\Sigma_q$, $f(x_N,k,\varepsilon)$ est le nombre d'entiers $n$ tels que $0\le n\le x_N$ et $\varepsilon_k(n)=\varepsilon$. Comme la représentation de $x_N$ en base $q$ est $x_N=\varepsilon_0 q^{N+1}+\varepsilon_0 q^N$, on sait que celle de $n\in\mathbb{N}$ tel que $0\le n\le x_N$ est de la forme $n=\sum_{l=0}^{N+1}\varepsilon_l(n)q^l$, où $\varepsilon_{N+1}(n)\in\{0,1,\cdots,\varepsilon_0\}$.

Cas 1 : $\varepsilon_{N+1}(n)\in\{0,1,\cdots,\varepsilon_0-1\}$, alors chacun des $N+1$ chiffres précédants de $n_{(q)}$ peut prendre les $q$ valeurs $0,1,\cdots,q-1$, et alors $n$ décrira les entiers $0,1,\cdots,\varepsilon_0 q^{N+1}-1$ ;

Cas 2 : $\varepsilon_{N+1}(n)=\varepsilon_0$, donc $n=\varepsilon_0 q^{N+1}+\sum_{l=0}^{N}\varepsilon_l(n)q^l\le\varepsilon_0 q^{N+1}+\varepsilon_0 q^N$, et l'on doit donc discuter selon la valeur de $\varepsilon_N(n)\in\{0,1,\cdots,\varepsilon_0\}$

<u>Cas 2a</u> : $\varepsilon_N(n) \in \{0, 1, \cdots, \varepsilon_0 - 1\}$, alors, ici encore chacun des $N$ chiffres précédants de $n_{(q)}$ peut prendre les valeurs $0, 1, \cdots, q-1$, et $n$ décrira alors les entiers $\varepsilon_0 q^{N+1}, \varepsilon_0 q^{N+1} + 1, \cdots, \varepsilon_0 q^{N+1} + \varepsilon_0 q^N - 1$ ;

<u>Cas 2b</u> : $\varepsilon_N(n) = \varepsilon_0$, alors, tous les chiffres précédants de $n_{(q)}$ sont nuls, et l'on a $n = \varepsilon_0 q^{N+1} + \varepsilon_0 q^N = x_N$.

Grâce à ces remarques, calculons maintenant $f(x_N, k, \varepsilon)$ lorsque $0 \leq k \leq N+1$ et $\varepsilon \in \Sigma_q \setminus \{0\}$.

<u>Pour $k = N + 1$</u>

- si $\varepsilon \in \{1, 2, \cdots, \varepsilon_0 - 1\}$, on est dans le cas 1 et l'on a $f(x_N, N+1, \varepsilon) = q^{N+1}$
- si $\varepsilon = \varepsilon_0$, on est dans le cas 2 et l'on a alors $f(x_N, N+1, \varepsilon_0) = \varepsilon_0 q^N + 1$
- si $\varepsilon \in \{\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_0 + 2, \cdots, q-1\}$, alors $f(f_N, N+1, \varepsilon) = 0$

<u>Pour $k = N$</u>

- si $\varepsilon \in \{1, 2, \cdots, \varepsilon_0 - 1\}$, alors il y aura $\varepsilon_0 q^N$ entiers provenant du cas 1 et $q^N$ entiers provenant du cas 2a, donc $f(x_N, N, \varepsilon) = (\varepsilon_0 + 1) q^N$
- si $\varepsilon = \varepsilon_0$, alors il y aura encore $\varepsilon_0 q^N$ entiers provenant du cas 1 et un seul entier $x_N$ provenant du cas 2b, donc $f(x_N, N, \varepsilon_0) = \varepsilon_0 q^N + 1$
- si $\varepsilon \in \{\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_0 + 2, \cdots, q-1\}$, il n'y a donc alors plus que les $\varepsilon_0 q^N$ entiers provenant du cas 1, donc $f(x_N, N, \varepsilon) = \varepsilon_0 q^N$

<u>Pour $0 \leq k \leq N-1$</u>, alors pour tout $\varepsilon \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, on aura $\varepsilon_0 q^N$ entiers provenant du cas 1 et $\varepsilon_0 q^{N-1}$ entiers provenant du cas 2a, donc $f(x_N, k, \varepsilon) = \varepsilon_0 q^{N-1}(q+1)$.

Ainsi, on a $\sum\limits_{0 \leq n \leq x_N} U_F(n) = \sum\limits_{k=0}^{N+1} \sum\limits_{\varepsilon = \varepsilon_0}^{q-1} F(\varepsilon) f(x_N, k, \varepsilon) =$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\varepsilon=\varepsilon_0}^{q-1} F(\varepsilon)\varepsilon_0 q^{N-1}(q+1) + F(\varepsilon_0)(\varepsilon_0 q^N + 1) + \sum_{\varepsilon=\varepsilon_0+1}^{q-1} F(\varepsilon)\varepsilon_0 q^N + F(\varepsilon_0)(\varepsilon_0 q^N + 1)$$

$$= \left(\sum_{\varepsilon=\varepsilon_0}^{q-1} F(\varepsilon)\right) \varepsilon_0 q^{N-1}(q+1) \left(\sum_{k=0}^{N-1} 1\right) + \left(\sum_{\varepsilon=\varepsilon_0}^{q-1} F(\varepsilon)\right) \varepsilon_0 q^N + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N + 2F(\varepsilon_0)$$

$$= qM_F \varepsilon_0 q^{N-1}(q+1)N + qM_F \varepsilon_0 q^N + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N + 2F(\varepsilon_0)$$

$$= M_F \varepsilon_0 q^N (q+1) N + M_F \varepsilon_0 q^{N+1} + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N + 2F(\varepsilon_0) ,$$

mais il s'agit maintenant de mettre cette formule sous la forme :

$\sum\limits_{0 \leq n \leq x_N} U_F(n) = M_F x_N \log_q x_N + O(x_N)$, et de montrer que l'on a bien $O(x_N) \to +\infty$ quand $N$ tend vers $+\infty$.

Comme $x_N = \varepsilon_0(q+1)q^N$, on a $\log_q x_N = \log_q(\varepsilon_0(q+1)) + N$, donc $M_F x_N \log_q x_N = (\log_q(\varepsilon_0(q+1)+N) M_F \varepsilon_0 (q+1) q^N$, et il vient alors $O(x_N) = \sum\limits_{0 \leq n \leq x_N} U_F(n) - M_F x_N \log_q x_N$

$$\begin{aligned} &= M_F \varepsilon_0 q^N (q+1) N + M_F \varepsilon_0 q^{N+1} + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N + 2F(\varepsilon_0) \\ &- N M_F \varepsilon_0 (q+1) q^N - M_F \varepsilon_0 (q+1) q^N \log_q(\varepsilon_0(q+1)) \end{aligned}$$

$$= 2F(\varepsilon_0) + M_F \varepsilon_0 q^{N+1} + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N - M_F \varepsilon_0 (q+1) q^N \log_q(\varepsilon_0(q+1))$$

$= 2F(\varepsilon_0) + c_N x_N,$

avec $c_N = c$ indépendant de $N$,

$$c = \frac{M_F\varepsilon_0 q^{N+1} + F(\varepsilon_0)\varepsilon_0 q^N - M_F\varepsilon_0(q+1)q^N \log_q(\varepsilon_0(q+1))}{\varepsilon_0(q+1)q^N}$$

$$= \frac{qM_F}{q+1} + \frac{F(\varepsilon_0)}{q+1} - M_F \log_q(\varepsilon_0(q+1)) = \frac{F(\varepsilon_0) + qM_F}{q+1} - M_F \log_q(\varepsilon_0(q+1)),$$

et il ne reste plus qu'à montrer que $c \neq 0$.

- D'abord, si $M_F = 0$, alors $c = \dfrac{F(\varepsilon_0)}{q+1} \neq 0$.

- Ensuite, si $M_F \neq 0$ et si l'on suppose que $c = 0$, alors $M_F \log_q(\varepsilon_0(q+1)) =$ $= \dfrac{F(\varepsilon_0) + qM_F}{q+1}$ serait un nombre rationnel, donc il en serait de même de $\log_q(\varepsilon_0(q+1))$,

c'est à dire qu'il existerait $A, B \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\log_q(\varepsilon_0(q+1)) = \dfrac{A}{B}$, soit $\log(\varepsilon_0(q+1))^B = \log q^A$, donc $\varepsilon_0(q+1)^B = q^A$, ce qui est manifestement impossible pour $\varepsilon_0 \in \Sigma_q\backslash\{0\}$, puisque $q$ et $q+1$ sont premiers entre eux ; donc ceci montre bien que, dans i), le $O(x)$ ne peut pas être remplacé par un $o(x)$, dans le cas où $s = 1$ et $F : \Sigma_q \to Q$ tel que $F(0) = 0, F \not\equiv 0$.

Preuve de (ii) La difficulté essentielle de la preuve résidant dans le passage du cas "$s = 1$" au cas "$s \geq 2$", nous allons montrer le résultat dans le cas où $s = 2$, ce qui a le double avantage de donner l'idée principale de la démonstration et de simplifier considérablement les notations du cas $s$ quelconque $\geq 2$.

Soit donc $F : \Sigma_q^2 \to \mathbb{C}$ une application telle que $F(0,0) = 0$, et $U_F = (U_F(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est la suite digitale correspondante, donnée par

$$U_F(n) = \sum_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n)) \text{ si } n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n)q^l.$$

Soit enfin $M_F = \dfrac{1}{q^2} \sum\limits_{(\varepsilon,\ \varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon,\ \varepsilon')$ la valeur moyenne de $F$.

Sous ces hypothèses, la proposition prend la forme suivante :

*$U_F(n)$ a pour ordre moyen et ordre normal $M_F \log_q n$ ; plus précisément, lorsque $x \to +\infty$, on a les formules :*

*(iii)* $\sum\limits_{0\leq n\leq x} U_F(n) = M_F x \log_q x + O(x)$

*(iv)* $\forall \varepsilon > 0$, *Card* $\{n \in \mathbb{N}; 0 < n < x$ *et* $|U_F(n) - M_F \log_q n| > (\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}$ *est un* $o(x)$.

Afin de montrer (iv), nous allons redémontrer (iii) d'une autre manière que précédemment, et la méthode que nous allons donner s'adaptera bien à la preuve de (iv).

Preuve de (iii) Nous supposons $x$ entier, nous l'écrivons en base $q$ sous la forme

$$x = b_m q^m + b_{m-1}q^{m-1} + \cdots + b_1 q + b_0$$

avec $m = [\log_q x] \in \mathbb{N}$, $b_i \in \Sigma_q$ pour $0 \leq i \leq m$ et $b_m \neq 0$.

Nous posons $x_i = b_m q^m + \cdots + b_i q^i$ pour $0 \leq i \leq m$, donc $x_0 = x$ et $x_{m+1} = 0$.

Comme $0 = x_{m+1} \leq x_m \leq x_{m-1} \leq \cdots \leq x_i \leq x_{i-1} \leq \cdots \leq x_1 \leq x_0 = x$, nous avons $\sum_{0\leq n<x} U_F(n) = \sum_{x_{m+1}\leq n\leq x_m} U_F(n) + \sum_{x_m\leq n<x_{m-1}} U_F(n) + \cdots + \sum_{x_1\leq n<x_0} U_F(n)$

soit : $\underline{\underline{\sum_{0\leq n<x} U_F(n) = D_m + D_{m-1} + \cdots + D_0,}}$

avec $\underline{\underline{D_i = \sum_{x_{i+1}\leq n<x_i}}} U_F(n)$ pour $0 \leq i \leq m$ . Nous cherchons une estimation de $D_i$ avec une erreur en $O((m-i+1)q^i)$ lorsque $m \to +\infty$, c'est-à-dire lorsque $x \to +\infty$. Pour cela, nous supposons $i$ fixé ($0 \leq i \leq m$), et nous écrivons la variable $n$ en base $q$ sous la forme $\underline{\underline{n = a_m q^m + a_{m-1} q^{m-1} + \cdots + a_1 q + a_0}}$

avec $a_j \in \Sigma_q$ pour $0 \leq j \leq m$ (et avec $a_m = 0$ si $n < q^m$).

Alors

$$x_{i+1} \leq n < x_i \Leftrightarrow b_m q^m + \cdots + b_{i+1} q^{i+1} \leq \sum_{j=0}^{m} a_j q^j < b_m q^m + \cdots + b_{i+1} q^{i+1} + b_i q^i$$

$$\Leftrightarrow a_m = b_m, a_{m-1} = b_{m-1}, \cdots, a_{i+1} = b_{i+1},$$
$$0 \leq a_i < b_i, \text{ et } 0 \leq a_j \leq q-1 \text{ pour } 0 \leq j \leq i-1.$$

Ainsi, on a :

$$D_i = \sum_{\substack{n = b_m q^m + \cdots + b_{i+1} q^{i+1} + a_i q^i + a_{i-1} q^{i-1} + \cdots + a_1 q + a_0 \\ a_i \text{ varie de } 0 \text{ à } b_i - 1 \\ a_j \text{ varie de } 0 \text{ à } q-1 \text{ pour } 0 \leq j \leq i-1}} U_F(n)$$

$$= \sum_{(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)}' F(a_0, a_1) + \cdots + F(a_{i-1}, a_i) + F(a_i, b_{i+1}) + \cdots + F(b_m, 0)$$

soit finalement $\underline{\underline{D_i = \sum'_{(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)}}} (S_i + T_i)$ avec $(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0) \in \Sigma_q^{i+1}$, où le prime (') dénote la condition supplémentaire $a_i < b_i$, et où, pour chacun des $b_i q^i$ $(i+1)$-uplets $(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)$, nous avons posé :

$$\begin{cases} \underline{\underline{S_i = F(a_{i-1}, a_i) + F(a_i, b_{i+1}) + F(b_{i+1}, b_{i+2}) + \cdots + F(b_{m-1}, b_m) + F(b_m, 0)}} \\ \underline{\underline{T_i = F(a_0, a_1) + F(a_1, a_2) + F(a_2, a_3) + \cdots + F(a_{i-2}, a_{i-1}).}} \end{cases}$$

Soit $C = \operatorname{Max}_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} |F(\varepsilon, \varepsilon')|$. Comme, pour chacun des $b_i q^i$ $(i+1)$-uplets $(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)$, $S_i$ comprend $m - i + 2$ termes, nous avons

$* \; |S_i| \leq C(m - i + 2)$, donc il vient

$* \; \left| \sum'_{(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)} S_i \right| \leq C(m - i + 2) b_i q^i$, d'où

$$\sum'_{(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1, a_0)} S_i = O((m - i + 2) b_i q^i) = O((m - i + 1) q^i) \; (m \to +\infty)$$

Soit $D_i = \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} T_i + O((m-i+1)q^i)\ (m \to +\infty)$.

On a alors

$$\sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} T_i = \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} (F(a_0,a_1) + F(a_1,a_2) + \cdots + F(a_{i-2},a_{i-1}))$$

$$= \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} F(a_0,a_1) + \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} F(a_1,a_2) + \cdots + \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} F(a_{i-2},a_{i-1})$$

$$= (i-1) \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} F(a_0,a_1)$$

$$= (i-1)q^{i-2} \sum'_{(a_i,a_1,a_0)} F(a_0,a_1)$$

$$= (i-1)b_i q^{i-2} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon,\varepsilon')$$

$= (i-1)b_i q^{i-2} q^2 M_F \quad = (i-1)b_i q_i M_F$ , donc on a

$$\begin{aligned} D_i &= M_F(i-1)b_i q^i + O((m-i+1)q^i) \\ &= M_F i b_i q^i - M_F b_i q^i + O((m-i+1)q^i) \\ &= M_F i b_i q^i + O((m-i+1)q^i) \\ &= M_F m b_i q^i + M_F(i-m)b_i q^i + O((m-i+1)q^i) \\ &= M_F m b_i q^i + O((m-i+1)q^i)\ , \quad \text{ceci pour } i\ ;\ 0 \le i \le m \end{aligned}$$

lorsque $x \to +\infty$ (ou encore $m \to +\infty$). On obtient finalement

$$\sum_{0\le n\le x} U_F(n) = \sum_{i=0}^m D_i = \sum_{i=0}^m (M_F\ m b_i q^i + O((m-i+1)q^i))$$

$$= m\ M_F \sum_{i=0}^m b_i q^i + O\left(\sum_{i=0}^m (m-i+1)q^i\right)$$

soit $\sum_{0\le n<x} U_F(n) = M_F m x + O(x) \quad$ où $m = [\log_q x]$

soit enfin $\sum_{0\le n<x} U_F(n) = M_F x \log_q x + O(x)\ (x \to +\infty)$, d'où la formule (iii)

Preuve de (iv)

Lemme De même que $U_F(n)$ a pour ordre moyen $M_F \log_q n$ , $U_F(n)^2$ a pour ordre moyen $(M_F \log_q n)^2$ ; plus précisement, si $x \to +\infty$, on a la formule :

$$\sum_{0\le n<x} U_F^2(n) = (M_F \log_q x)^2 x + O(x \log x).$$

Preuve du lemme. Avec les notations de la preuve précédente, on a aussi

$$\sum_{0\le n<x} U_F(n)^2 = \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{x_{i+1}\le n<x_i} U_F(n)^2\right).$$

On suppose $i$ fixé $(0 \le i \le m)$ et on cherche une estimation de

$E_i = \sum_{x_{i+1}\le n<x_i} U_F(n)^2$ avec une erreur en $O(m(m-i+1)q^i)$

lorsque $m \to +\infty$.

On a alors $E_i = \sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} (S_i+T_i)^2 = U_i + V_i + W_i$ avec

$U_i = \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} S_i^2$ , $V_i = \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} 2S_iT_i$ et $W_i = \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} T_i^2$.

- D'abord, on a $-C(m-i+2) \le S_i \le C(m-i+2)$ pour chacun des $b_iq^i$ $(i+1)$-uplets $(a_i, a_{i-1}, \cdots, a_1a_0)$, donc il vient

$0 \le U_i \le b_iq^iC^2(m-i+2)^2 = O(m(m-i+1)q^i)$

soit $U_i = O(m(m-i+1)q^i)$ $(m \to +\infty)$.

- Ensuite, on a vu que $\sum'_{(a_i,a_{i-1},\cdots,a_1,a_0)} T_i = M_F(i-1)b_iq^i$ et que

$-C(m-i+2) \le S_i \le C(m-i+2)$, ce qui nous donne alors

$-2C(m-i+2)M_F(i-1)b_iq^i \le V_i \le 2C(m-i+2)M_F(i-1)b_iq^i$,

soit $V_i = O(m(m-i+1)q^i)$ $(m \to +\infty)$

- Donc il reste maintenant $\sum_{x_{i+1}\le n<x_i} U_F(n)^2 = W_i + O(m(m-i+1)q^i)$

avec $W_i = \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} T_i^2 = \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} (F(a_0,a_1) + F(a_1,a_2) + \cdots + F(a_{i-2},a_{i-1}))^2$

$$= \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} \sum_{0\le k,l\le i-2} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1})$$

$$= \sum_{0\le k,l\le i-2} \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{i-2} \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} F(a_k,a_{k+1})^2 + 2\sum_{0\le k<l\le i-2} \sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1})$$

Calculons alors chacun des termes de cette dernière égalité.

- D'une part, pour $k$ fixé $(0 \le k \le i-2)$, nous avons

$$\sum'_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)} F(a_k,a_{k+1})^2 = q^{i-2} \sum'_{(a_i,\varepsilon,\varepsilon')} F(\varepsilon,\varepsilon')^2$$

$$= b_iq^{i-2} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon,\varepsilon')^2$$

donc $\sum_{k=0}^{i-2} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})^2 = (i-1)b_i q^{i-2} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon,\varepsilon')^2$

- D'autre part, $2 \sum_{0\le k<l\le i-2} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1}) =$

$$= 2 \sum_{\substack{0\le k<l\le i-2\\ k\neq l-1}} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1})$$
$$+2\sum_{k=0}^{i-3} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_{k+1},a_{k+2})$$
$$= 2\sum_{k=0}^{i-4}\sum_{l=k+2}^{i-2} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1})$$
$$+2\sum_{k=0}^{i-3} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_{k+1},a_{k+2})$$

avec

- tout d'abord, pour $k$ et $l$ fixés tels que $0 \le k \le i-4$ et $k+2 \le l \le i-2$, on a

$$\sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1}) = q^{i-4} \sum_{(a_i,a_k,a_{k+1},a_l,a_{l+1})}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1}) =$$
$$= b_i q^{i-4} \sum_{(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\Sigma_q^4} F(\varepsilon_0,\varepsilon_1)F(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$$
$$= b_i q^{i-4}\left(\sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon,\varepsilon')\right)\left(\sum_{(\varepsilon'',\varepsilon''')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon'',\varepsilon''')\right)$$
$$= b_i q^{i-4}(M_F q^2)(M_F q^2) = M_F^2 b_i q^i$$ , donc il vient

$$2\sum_{k=0}^{i-4}\sum_{l=k+2}^{i-2} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_l,a_{l+1}) = 2M_F^2 b_i q^i \sum_{k=0}^{i-4}\sum_{l=k+2}^{i-2} 1$$
$$= 2M_F^2 b_i q^i \sum_{k=0}^{i-4}(i-k-3) = M_F^2 b_i q^i\,(i-2)(i-3)$$

- ensuite, pour $k$ fixé tel que $0 \le k \le i-3$, on a

$$\sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_{k+1},a_{k+2}) = q^{i-3}b_i \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'')\in\Sigma_q^3} F(\varepsilon,\varepsilon')F(\varepsilon',\varepsilon'').$$

donc

$$2\sum_{k=0}^{i-3} \sum_{(a_i,\cdots,a_1,a_0)}^{\prime} F(a_k,a_{k+1})F(a_{k+1},a_{k+2}) = 2(i-2)q^{i-3}b_i \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'')\in\Sigma_q^3} F(\varepsilon,\varepsilon')F(\varepsilon',\varepsilon'').$$

En reportant tous ces résultats intermédiaires et en ne gardant que les termes faisant intervenir $i^2$, nous obtenons alors

$$\sum_{x_{i+1}\le n<x_i} U_F(n)^2 = i^2 M_F^2 b_i q^i + O(m(m-i+1)q^i)$$
$$= m^2 M_F^2 b_i q^i + O(m(m-i+1)q^i) + (i^2-m^2)M_F^2 b_i q^i$$

$= m^2 M_F^2 b_i q^i + O(m(m-i+1)q^i)$ $(m \to +\infty)$,

ceci pour tout $i$ fixé tel que $0 \leq i \leq m$, donc finalement nous avons

$$\sum_{0\leq n<x} U_F(n)^2 = \sum_{i=0}^{m} \left( \sum_{x_{i+1}\leq n<x_i} U_F(n)^2 \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (M_F^2 m^2 b_i q^i + O(m(m-i+1)q^i))$$

$$= m^2 M_F^2 \sum_{i=0}^{m} b_i q^i + O\left( \sum_{i=0}^{m} m(m-i+1)q^i \right)$$

$$= m^2 M_F^2 x + O(mx) \ ,$$

or $m = [\log_q x] = \log_q x + O(1)$, soit finalement :

$\sum_{0\leq n<x} U_F(n)^2 = (M_F \log_q x)^2 x + O(x \log x) \quad (x \to +\infty)$,

ce qui termine la preuve du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la propriété $(iv)$ sur l'ordre normal de $U_F(n)$. En effet, grâce à une sommation par parties, on peut montrer très simplement que, lorsque $x \to +\infty$, on a les égalités :

$$\sum_{0<n<x} U_F(n) \log_q n = M_F x \log_q^2 x + O(x \log x)$$

$$\text{et} \quad \sum_{0<n<x} \log_q^2 n = x \log_q^2 x + O(x \log x).$$

Par conséquent, en utilisant le lemme, nous obtenons

$$\sum_{0<n<x} (U_F(n) - M_F \log_q n)^2 = \sum_{0<n<x} (U_F(n)^2 + M_F^2 \log_q n^2 - 2M_F U_F(n) \log_q n)$$

$$= \left( (\frac{M_F}{\log q})^2 + M_F^2 (\frac{1}{\log q})^2 - 2M_F (\frac{M_F}{(\log q)^2}) \right) x \log^2 x + O(x \log x)$$

soit $\underline{\underline{\sum_{0<n<x} (U_F(n) - M_F \log_q n)^2 = O(x \log x) \ (x \to +\infty)}}$

Soit alors $\varepsilon > 0$ ; supposons par l'absurde qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel qu'il y ait $\delta x$ entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < n < x$ et satisfaisant l'inégalité $|U_F(n) - M_F \log_q n| > (\log n)^{1/2+\varepsilon}$, nous aurions alors $\sum_{0<n<x} (U_F(n) - M_F \log_q n)^2 > \sum_{0<n<\delta x} (\log n)^{1+2\varepsilon}$ ,

or on sait que $\sum_{0<n<\delta x} (\log n)^{1+2\varepsilon} \sim \delta x (\log_q \delta x)^{1+2\varepsilon} \quad (x \to +\infty)$

donc en particulier $\sum_{0<n<\delta x} (\log n)^{1+2\varepsilon} > \delta x (\log x)^{1+\varepsilon}$ pour $x$ assez grand; nous aurions donc finalement :

$\sum_{0<n<x} (U_F(n) - M_F \log_q n)^2 \ > \delta x (\log x)^{1+\varepsilon}$ ce qui contredit l'égalité soulignée plus haut, et termine donc la preuve de (iv).

IV) FONCTIONS SOMMATOIRES DES SUITES DIGITALES

Sous les hypothèses du début du §III, nous obtenons le résultat suivant, qui généralise aux suites digitales quelconques le théorème de Delange, qui assure l'existence d'une fonction périodique "fractale" (c'est-à-dire continue et nulle part dérivable) pour la fonction sommatoire de la suite $s_q$ ("somme des chiffres en base $q$") sur les n premiers entiers, ou plutôt pour leur fonction "valeur moyenne".

En effet, nous allons montrer le :

Théorème. Il existe une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et périodique de période 1 et il existe une suite $\delta = (\delta(m))_{m\in\mathbb{N}^*}$, périodique de période $q^{s-1}$, telles que pour tout entier $m \geq 1$, on a la formule :

$$(E) \qquad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = M_F \log_q m + G(\log_q m) + \frac{\delta(m)}{m}$$

De plus, $G$ a une série de Fourier absolument convergente, dont les coefficients s'expriment à l'aide des valeurs des fonctions zêta de Hurwitz, de paramètres $\frac{r}{q^s}$ pour $r = 1, 2, \cdots, q^s$, aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, si l'on pose $C(z) = \sum_{n\geq 1} U_F(n)(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z})$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re\ z > 1$, alors on montre que la fonction $C(z)$ ainsi définie sur le demi-plan $\{Re\ z > 1\}$ admet :

- un prolongement holomorphe au demi-plan $\{Re\ z > 0\}$
- un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$
- une infinité de "candidats"-pôles (tous simples) aux points $\gamma_k = \frac{2k\pi i}{\log q}$ (ainsi qu'au demi-réseau de leurs translatés à gauche $\gamma_{k,n} = \gamma_k - n\ ,\ n \in \mathbb{N}$).

Enfin, si nous notons $C_k = \int_0^1 G(x) e^{-2i\pi kx} dx$ (le $k^e$ coefficient de Fourier de $G$) et $R_k = \text{Rés}_{z=\gamma_k} C(z)$, alors on a les relations suivantes entre $\gamma_k, R_k$ et $c_k$ (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

- si $k \in \mathbb{Z}^*$ , alors $R_k = c_k \gamma_k (\gamma_k + 1)$
- si $k = 0$ , alors $R_0 = \frac{M_F}{\log q}$

Remarque : pour $s = 1$, on a $\delta \equiv 0$ dans $(E)$ de sorte qu'on retrouve , pour $F = Id_{\Sigma_q}$ et $U_F = s_q$, la formule exacte de Delange (sans terme d'erreur dans $(E)$).

Démonstration du Théorème

(i) Définitions de $G$ et de $\delta$.

(i1) Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \psi(t) = F([q^s t] - q[q^{s-1}t],\ [q^{s-1}t] - q[q^{s-2}t], \cdots,$$
$$, \cdots, [q^2 t] - q[qt], [qt] - q[t]) - M_F.$$

Comme, pour $1 \leq k \leq s$ , la fonction $t \mapsto [q^k t] - q[q^{k-1}t]$ est périodique de période 1, il en est de même de $\psi$, que nous étudions sur l'intervalle $[0, 1[$, intervalle que nous découpons en les $q^s$ intervalles

$$Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0} = [\sum_{l=0}^{s-1} \varepsilon_l q^{l-s}, \sum_{l=0}^{s-1} \varepsilon_l q^{l-s} + q^{-s}[,$$

ceci pour tout s-uplet $(\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s-2}, \cdots, \varepsilon_1, \varepsilon_0) \in \Sigma_q^s$. On calcule alors $\psi(t)$ pour $t \in Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0}$, en utilisant le fait que $[t] = 0$ et que, pour $1 \leq k \leq s$, on a $[q^k t] = \sum_{l=s-k}^{s-1} \varepsilon_l q^{l-(s-k)}$ ; ainsi, pour $1 \leq k \leq s$, nous obtenons $[q^k t] - q[q^{k-1}t] = \varepsilon_{s-k}$, de sorte que : $\forall (\varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s-2}, \cdots, \varepsilon_1, \varepsilon_0) \in \Sigma_q^s$, $\forall t \in Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0}$, on a

$$\psi(t) = F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) - M_F.$$

Ainsi, la valeur moyenne de $\psi$, c'est à dire en fait son intégrale sur l'intervalle $[0, 1[= \bigsqcup_{(\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0)\in\Sigma_q^s} Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0}$, vaut

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi(t)dt &= \sum_{(\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0)\in\Sigma_q^s} \int_{Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0}} \psi(t)dt \\
&= \sum_{(\varepsilon_{s-1},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0)\in\Sigma_q^s} (F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) - M_F) \text{ mes } (Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0}) \\
&= \frac{1}{q^s} \sum_{(\varepsilon_{s-1},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0)\in\Sigma_q^s} F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) - M_F = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\psi$ est périodique de période 1 et de moyenne nulle.

(i2) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto g(x) = \int_0^x \psi(t)dt.$$

$g$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}$, et l'on a pour $x \in \mathbb{R}$ , $g(x+1) = g(x) + \int_x^{x+1} \psi(t)dt$, avec $\psi$ périodique de période 1 et de moyenne nulle, donc $\int_x^{x+1} \psi(t)dt = 0$, et $g$ est aussi périodique de période 1; en particulier, $g$ est bornée, et remarquons aussi qu'elle s'annule sur $\mathbb{Z}$.

(i3) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto h(x) = \sum_{l\geq 0} \frac{g(q^l x)}{q^l}.$$

Comme $g$ est bornée, et comme la série géométrique $\sum_{l\geq 0} \frac{1}{q^l}$ converge pour $q \geq 2$, la série définissant $h$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et, $g$ étant continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $h$, qui de plus est aussi périodique de période 1, et nulle sur $\mathbb{Z}$.

(i4) Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto G(x) = M_F([x]+1-x) + q^{[x]+s-x}h(q^{x-s-[x]}).$$

Comme la fonction $x \longmapsto [x]-x$ est périodique de période 1, il en est de même de $G$, que l'on étudie sur l'intervalle $[0,1[$ ; pour la continuité, distinguons 2 cas selon que l'on étudie la continuité en un point entier ou non.

Pour $x \in ]0,1[$, on a $G(x) = M_F(1-x) + q^{s-x}h(q^{x-s})$ donc $G$ est continue en $x$, et, par périodicité, $G$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Continuité de $G$ en 0 ? On a $G(0) = M_F + q^s h(q^{-s})$. Montrons que, quand $x$ tend vers zéro par valeurs supérieures ou inférieures, alors $G(x)$ tend vers $G(0)$.

Si $x \to 0, x > 0$, alors $G(x) = M_F(1-x) + q^{s-x}h(q^{x-s}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} G(0)$

Si $x \to 0, x < 0$, ceci revient à prendre $x \to 1, x < 1$, et alors

$$G(x) = M_F(1-x) + q^{s-x}h(q^{x-s}) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} q^{s-1}h(q^{1-s}),$$

de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a $q^{s-1}h(q^{1-s}) = M_F + q^s h(q^{-s})$.

- On a d'une part $h(q^{-s}) = \sum\limits_{l=0}^{+\infty} \dfrac{g(q^{l-s})}{q^l}$, mais, pour $l \geq s$, on a $q^{l-s} \in \mathbb{Z}$, donc $g(q^{l-s}) = 0$, et $h(q^{-s}) = \sum\limits_{l=0}^{s-1} \dfrac{g(q^{l-s})}{q^l}$, d'où $G(0) = M_F + \sum\limits_{l=0}^{s-1} q^{s-l}g(q^{l-s})$.

- On a d'autre part $h(q^{1-s}) = \sum\limits_{l=0}^{+\infty} \dfrac{g(q^{l+1-s})}{q^l} = \sum\limits_{l=0}^{s-2} \dfrac{g(q^{l+1-s})}{q^l}$,

d'où $q^{s-1}h(q^{1-s}) = \sum\limits_{l=1}^{s-1} q^{s-l}g(q^{l-s})$.

- Ainsi, nous sommes amenés à montrer que $M_F + q^s g(q^{-s}) = 0$; or on a en effet $g(q^{-s}) = \int_0^{q^{-s}} \psi(t)dt = \int_{Z_{0,0,\cdots,0}} \psi(t)dt$, mais on a vu en i1) que, pour $t \in Z_{0,0,\cdots,0}$, on a $\psi(t) = F(0,0,\cdots,0) - M_F = -M_F$, donc $g(q^{-s}) = -M_F$ mes $(Z_{0,0,\cdots,0}) = -\dfrac{M_F}{q^s}$, d'où finalement $q^s g(q^{-s}) = -M_F$, donc $G$ est continue en 0, donc finalement sur $\mathbb{R}$.

(i5) Soit enfin $\delta :\ \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$m \longmapsto \delta(m) = \begin{cases} 0 \text{ si } s = 1, \\ -\sum\limits_{l=1}^{s-1} q^l g(m/q^l) \text{ si } s \geq 2. \end{cases}$$

Vérifions que $\delta$ est bien périodique, de période $q^{s-1}$. En effet, pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\delta(m+q^{s-1}) = -\sum_{l=1}^{s-1} q^l g(\frac{m+q^{s-1}}{q^l}),$$

avec $g$ périodique de période 1, donc avec $g(\dfrac{m+q^{s-1}}{q^l}) = g(\dfrac{m}{q^l})$ pour $1 \leq l \leq s-1$, d'où

$$\delta(m+q^{s-1}) = -\sum_{l=1}^{s-1} q^l g(m/q^l) = \delta(m).$$

(ii) Démonstration de la formule $(E)$.

(ii1) Commençons par remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $l \geq 0$, on a $\varepsilon_l(n) = [n/q^l] - q[n/q^{l+1}]$ (en effet, ceci résulte de ce que l'on a $[n/q^l] = \sum_{k \geq l} \varepsilon_k(n) q^{k-l}$ et $\{n/q^l\} = \sum_{k=0}^{l-1} \varepsilon_k(n) q^{k-l}$).

- D'autre part, pour $t$ réel, $t \in [n, n+1[$, on a $[t/q^l] = [n/q^l]$ pour tout $l \geq 0$; en effet, ceci est évident pour $l = 0$, et, si $l \geq 1$, écrivons $t = n + \varepsilon$ où $0 \leq \varepsilon < 1$, alors $\frac{t}{q^l} = \frac{n}{q^l} + \frac{\varepsilon}{q^l} = [n/q^l] + \{n/q^l\} + \varepsilon/q^l$ avec $0 \leq \{n/q^l\} = \sum_{0 \leq k \leq l-1} \varepsilon_k(n) q^{k-l} \leq 1 - q^{-l}$, donc $0 \leq \{n/q^l\} + \varepsilon/q^l < 1 - q^{-l} + q^{-l} = 1$.

- Ainsi, comme le faisait Delange pour la suite "somme des chiffres", la formule
$F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n)) =$
$= F([n/q^l] - q[n/q^{l+1}], [n/q^{l+1}] - q[n/q^{l+2}], \cdots, [n/q^{l+s-1}] - q[n/q^{l+s}])$ peut se réécrire sous la forme intégrale suivante :

$$\underline{\underline{F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n))}} = \underline{\underline{\int_n^{n+1} F([t/q^l] - q[t/q^{l+1}], \cdots, [t/q^{l+s-1}] - q[t/q^{l+s}]) dt}}$$

ceci $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall l \geq 0$.

(ii2) Ces remarques étant faites, soit $m$ un entier $\geq 1$, et soit $L = \log_q m$; on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n \leq m-1$, on a $\varepsilon_l(n) = 0$ pour $l > [L]$, donc, comme $F(0, 0, \cdots, 0) = 0$, la formule $\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = \sum_{n=0}^{m-1} (\sum_{l \geq 0} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n)))$
devient $\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = \sum_{n=0}^{m-1} (\sum_{l=0}^{[L]} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n)))$, donc, en changeant l'ordre des sommations, nous obtenons :

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = \sum_{l=0}^{[L]} (\sum_{n=0}^{m-1} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n))).}}$$

(ii3) Soit alors $l$ fixé tel que $0 \leq l \leq [L]$, on a alors, vu ii1), que
$\sum_{n=0}^{m-1} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \cdots, \varepsilon_{l+s-1}(n)) =$
$= \int_0^m F([t/q^l] - q[t/q^{l+1}], [t/q^{l+1}] - q[t/q^{l+2}], \cdots, [t/q^{l+s-1}] - q[t/q^{l+s}]) dt$
$= \int_0^m (F([t/q^l] - q[t/q^{l+1}], [t/q^{l+1}] - q[t/q^{l+2}], \cdots, [t/q^{l+s-1}] - q[t/q^{l+s}]) - M_F) dt + m M_F.$
Dans l'intégrale précédente, on effectue le changement de variable $t = q^{l+s} u$, elle devient alors :
$q^{l+s} \int_0^{m/q^{l+s}} (F([q^s u] - q[q^{s-1} u], [q^{s-1} u] - q[q^{s-2} u], \cdots, [qu] - q[u]) - M_F) du =$
$= q^{l+s} \int_0^{m/q^{l+s}} \psi(u) du = q^{l+s} g(m/q^{l+s})$, de sorte que l'on a :

$$\underline{\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = \sum_{l=0}^{[L]} q^{l+s} g(m/q^{l+s}) + ([L]+1)mM_F.}$$

(ii4) Dans cette formule, considérons la somme $\sum\limits_{l=0}^{[L]} q^{l+s} g(m/q^{l+s})$, où l'on effectue le changement d'indice $k = [L] - l$, on a donc

$$\sum_{l=0}^{[L]} q^{l+s} g(m/q^{l+s}) = \sum_{k=0}^{[L]} q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s}).$$

Supposons que l'indice $k$ soit $\geq [L] + s$, alors on a

$m/q^{[L]-k+s} = mq^{k-[L]-s} \in \mathbb{Z}$,

donc $g(m/q^{[L]-k+s}) = 0$ pour $k \geq [L] + s$, alors que, si $k = [L] + l$ où $l = 1, 2, \cdots, s-1$, alors le terme correspondant $q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s})$ vaut $q^{s-l} g(m/q^{s-l})$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{[L]} q^{l+s} g(m/q^{l+s}) &= \sum_{k\geq 0} q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s}) - \sum_{l=1}^{s-1} q^{s-l} g(m/q^{s-l}) \\
&= \sum_{k\geq 0} q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s} - \sum_{l=1}^{s-1} q^{l} g(m/q^{l}) =
\end{aligned}$$

$= \sum\limits_{k\geq 0} q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s}) + \delta(m)$, donc la formule de ii3) devient alors :

$$\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) = \sum_{k\geq 0} q^{[L]-k+s} g(m/q^{[L]-k+s}) + \delta(m) + ([L]+1)mM_F;$$

en divisant par $m = q^L$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) &= q^{[L]+s-L} \sum_{k\geq 0} \frac{g(q^k q^{L-s-[L]})}{q^k} + \frac{\delta(m)}{m} + ([L]+1)M_F \\
&= q^{[L]+s-L} h(q^{L-s-[L]}) + \frac{\delta(m)}{m} + ([L]+1)M_F,
\end{aligned}$$

mais, $U_F(n)$ étant d'ordre moyen $M_F \log_q n$, c'est en fait $M_F \log_q m = M_F L$ le terme principal de cette formule, on le fait donc apparaître, pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} U_F(n) &= LM_F + ([L]+1-L)M_F + q^{[L]+s-L} h(q^{L-s-[L]}) + \frac{\delta(m)}{m} \\
&= LM_F + G(L) + \frac{\delta(m)}{m},
\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la formule $(E)$ du théorème.

(iii) Détermination de la série de Fourier de $G$.

Comme $G$ est périodique de période 1, soit $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{+2i\pi kx}$ son développement en série de Fourier; il converge absolument en tout réel $x$, donc la limite y est égale à $G(x)$.

On a $c_k = \int_0^1 G(x)e^{-2i\pi kx}dx$ or, pour $0 \leq x < 1$, on a $G(x) = M_F(1-x) + q^{s-x}h(q^{x-s})$, donc :

$$\underline{\underline{c_k = a_k + b_k}} \text{ avec } \underline{a_k = M_F \int_0^1 (1-x)e^{-2i\pi kx}dx}$$

$$\text{et } \underline{b_k = \int_0^1 q^{s-x}h(q^{x-s})e^{-2i\pi kx}dx}$$

ceci $\forall k \in \mathbb{Z}$.

On a d'abord $\underline{\underline{a_k = \dfrac{M_F}{2ik\pi} \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^*}}$, et $\underline{\underline{a_0 = \dfrac{M_F}{2}}}$.

On calcule ensuite $b_k = \displaystyle\int_0^1 q^{s-x}h(q^{x-s})e^{-2i\pi kx}dx$

$$= \int_0^1 q^{s-x}\sum_{l\geq 0}\frac{g(q^{l+x-s})}{q^l}e^{-2i\pi kx}dx;$$

comme $g$ est bornée, la série $\sum\limits_{l\geq 0} q^{s-l-x}g(q^{l+x-s})$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ et l'on peut écrire

$$b_k = \sum_{l\geq 0}\int_0^1 q^{s-l-x}g(q^{l+x-s})e^{-2i\pi kx}dx;$$

on calcule l'intégrale par le changement de variable $x = s-l+\log_q u$, c'est-à-dire $u = q^{x-s+l}$, donc il vient :

$$\int_0^1 q^{s-l-x}g(q^{l+x-s})e^{-2i\pi kx}dx = \frac{1}{\log q}\int_{q^{l-s}}^{q^{l-s+1}}\frac{g(u)}{u}e^{-2i\pi k\log_q u}\frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{\log q}\int_{q^{l-s}}^{q^{l-s+1}}\frac{g(u)}{u^{2+\frac{2ik\pi}{\log q}}}du, \text{ donc } b_k = \frac{1}{\log q}\sum_{l\geq 0}\int_{q^{l-s}}^{q^{l-s+1}}\frac{g(u)du}{u^{2+\frac{2ik\pi}{\log q}}}$$

Soit $\underline{\underline{b_k = \dfrac{1}{\log q}\int_{1/q^s}^{+\infty}\frac{g(u)du}{u^{2+\frac{2ik\pi}{\log q}}}}}$

On remarque que l'intégrale $\int_{1/q^s}^{+\infty}\frac{g(u)}{u^{z+1}}du$ est absolument convergente sur le demi-plan $\{Re\ z > 0\}$ (car $g$ est bornée), et que la fonction $\underline{\underline{H(z) = \int_{1/q^s}^{+\infty}\dfrac{g(u)}{u^{z+1}}du}}$ ainsi définie sur $\{Re\ z > 0\}$ y est holomorphe.

Comme $\underline{\underline{b_k = \dfrac{1}{\log q}H(1+\dfrac{2ik\pi}{\log q})}}$, on est amené à determiner la fonction $H$, que l'on calcule grâce à une intégration par parties :

$$H(z) = \left[-\frac{1}{z}\frac{g(u)}{u^z}\right]_{1/q^s}^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty}\frac{g'(u)}{u^z}du,$$

or on sait que $g$ est bornée, et que $g(u) = \int_0^u \psi(t)dt$, donc $g'(u) = \psi(u)$, et enfin que $g(1/q^s) = -M_F \, . \, \frac{1}{q^s}$, de sorte qu'il vient alors $H(z) = -M_F \, . \, \frac{q^{s(z-1)}}{z} + \frac{1}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty} \frac{\psi(u)}{u^z}du$, pour $Re\ z > 0$.

Supposons maintenant que $Re\ z > 1$ ;
comme $\psi(u) = F([q^s u] - q[q^{s-1}u],\ [q^{s-1}u] - q[q^{s-2}u], \cdots, [qu] - q[u]) - M_F$, on a

$$H(z) = -M_F \, . \, \frac{q^{s(z-1)}}{z} + \frac{1}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty} F([q^s u] - q[q^{s-1}u], \cdots, [qu] - q[u])\frac{du}{u^z} - \frac{M_F}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty}\frac{du}{u^z},$$

or on a $\int_{1/q^s}^{+\infty}\frac{du}{u^z} = \frac{q^{s(z-1)}}{(z-1)}$, donc

$$H(z) = -M_F \, . \, q^{s(z-1)}\left(\tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{z(z-1)}\right) + \frac{1}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty} F([q^s u] - q[q^{s-1}u], \cdots, [qu] - q[u])\frac{du}{u^z}$$

donc finalement

$$\underline{\underline{\text{Pour } Re\ z > 1, H(z) = -M_F \, . \, \frac{q^{s(z-1)}}{z-1} + \frac{1}{z}\int_{1/q^s}^{+\infty} F([q^s u] - q[q^{s-1}u], \cdots, [qu] - q[u])\frac{du}{u^z}}}$$

On suppose maintenant que $Re\ z > 2$, et on calcule l'intégrale en utilisant le fait que la fonction $u \mapsto F([q^s u] - q[q^{s-1}u], \cdots, [qu] - q[u])$ est périodique de période 1, et que, grâce au §i1), elle vaut $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1})$ sur tout intervalle

$$Z_{\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-2},\cdots,\varepsilon_1,\varepsilon_0} = [\sum_{l=0}^{s-1}\varepsilon_l q^{l-s}\ \sum_{l=0}^{s-1}\varepsilon_l q^{l-s} + q^{-s}[$$

Donc en écrivant que $\left[\frac{1}{q^s},\ +\infty\right[ = \bigcup_{r=1}^{q^s-1}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[n + \frac{r}{q^s},\ n + \frac{r+1}{q^s}\right[ \ \bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[n, n + \frac{1}{q^s}[$, et en écrivant, pour $0 \leq r \leq q^s - 1$, $r \in \mathbb{N}$, $r$ en base $q$ avec $s$ chiffres sous la forme $r = \sum_{l=0}^{s-1}\varepsilon_l q^l$ où $\varepsilon_l \in \Sigma_q$ (et peut être $\varepsilon_{s-1} = 0$) et enfin $\tilde{r} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{s-1}) \in \Sigma_q^s$, nous obtenons

$$\int_{1/q^s}^{+\infty} F([q^s u] - q[q^{s-1}u], [q^{s-1}] - q[q^{s-2}u], \cdots, [qu] - q[u])\frac{du}{u^z} =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F(\tilde{0})\int_n^{n+\frac{1}{q^s}} + \sum_{r=1}^{q^s-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} F(\tilde{r})\int_{n+\frac{r}{q^s}}^{n+\frac{r+1}{q^s}}\frac{du}{u^z}$$

or nous savons que $F(\tilde{0}) = F(0, 0, \cdots, 0) = 0$, donc nous avons

$$\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{u^{1-z}}{1-z}\right]_{n+\frac{r}{q^s}}^{n+\frac{r+1}{q^s}} = \frac{1}{(1-z)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{(n+\frac{r+1}{q^s})^{z-1}} - \frac{1}{(n+\frac{r}{q^s})^{z-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-z)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1)\right), \text{ si } \zeta_a(.)$$

est la fonction zêta de Hurwitz de paramètre $a$, pour $0 < a \leq 1$.

Ainsi, pour $Re\ z > 2$, on a :

$$\underline{\underline{H(z) = -M_F \, . \, \frac{q^{(z-1)}}{(z-1)} - \frac{1}{z(z-1)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1)\right)}}$$

Mais, en raison de l'holomorphie de $H$ sur le demi-plan $\{Re\ z > 0\}$, cette formule y est valable (sauf évidemment pour $z = 1$). En particulier, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, nous avons :

$$H(1+\frac{2k\pi i}{\log q}) = -M_F \cdot \frac{\log q}{2k\pi i} - \frac{\log q}{2k\pi i}(1+\frac{2k\pi i}{\log q})^{-1}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q})\right)$$

$$= \frac{i\log q}{2k\pi}\left(M_F + (1+\frac{2k\pi i}{\log q})^{-1}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}))\right)$$

$$\text{donc } b_k = \frac{i}{2k\pi}\left(M_F + (1+\frac{2k\pi i}{\log q})^{-1}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}))\right)$$

et comme $c_k = a_k + b_k$ avec $a_k = \dfrac{M_F}{2k\pi i} = -\dfrac{iM_F}{2k\pi}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$, nous avons donc
$c_k = \dfrac{i}{2k\pi}(1+\dfrac{2k\pi i}{\log q})^{-1}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\dfrac{2k\pi i}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\dfrac{2k\pi i}{\log q})\right)$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

En particulier, comme $\zeta_a(ik) << |k|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ pour $|k| \to +\infty$, ceci $\forall\varepsilon > 0$, on voit que la série de Fourier de $G$ est absolument convergente.

Calculons maintenant $b_0 = \dfrac{1}{\log q}H(1)$. Comme $H$ est une fonction analytique sur le demi-plan $Re\ z > 0$, nous avons
$H(1) = \lim_{z\to 1} H(z)$

$$= \lim_{z\to 1}\left(-M_F \cdot \frac{q^{s(z-1)}}{(z-1)} - \frac{1}{z(z-1)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1))\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}(-M_F \cdot \frac{q^{s(z-1)}}{(z-1)} - \frac{1}{z(z-1)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1))$$
$$+\frac{1}{z}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1)))$$

Lorsque $z$ tend vers 1, le dernier terme de cette expression tend vers
$\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(0))$, mais l'on sait que $\zeta_a(0) = \dfrac{1}{2} - a$ pour $0 < a \leq 1$, donc ce dernier terme vaut en fait $\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(-\dfrac{1}{q^s}) = -\sum_{r=1}^{q^s-1}\dfrac{F(\tilde{r})}{q^s} = -M_F$, d'où
$H(1) = -M_F - \lim_{z\to 1}\left(M_F \cdot \dfrac{q^{s(z-1)}}{(z-1)} + \dfrac{1}{(z-1)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1))\right)$ puis nous écrivons
$\dfrac{1}{(z-1)}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1)\right) =$

$$= \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \frac{\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1)}{(z-1)} - \frac{\zeta_{\frac{r}{q^s}}(z-1)}{(z-1)} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \frac{\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(0)}{(z-1)} - \frac{\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z-1) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(0)}{(z-1)} \right)$$

$$-\frac{1}{(z-1)} \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta_{\frac{r}{q^s}}(0) - \zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(0) \right);$$

on remarque alors que, lorsque $z \to 1$, la première somme de cette expression tend vers $\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right)$, et d'autre part, on a $\zeta_{\frac{r}{q^s}}(0) - \zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(0) = \frac{1}{q^s}$ pour $1 \leq r \leq q^s - 1$, d'où

$$H(1) = -M_F - \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right) - \lim_{z \to 1} \left( M_F \, . \, \frac{q^{s(z-1)}}{(z-1)} - \frac{1}{(z-1)} \underbrace{\sum_{r=1}^{q^s-1} \frac{F(\tilde{r})}{q^s}}_{=M_F} \right)$$

$$= -M_F - \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right) - M_F \lim_{z \to 1} \frac{q^{s(z-1)} - 1}{(z-1)}$$

$$= -M_F - \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right) - M_F \, . \, s \log q$$

donc $b_0 = \frac{H(1)}{\log q} = -\frac{M_F}{\log q} - \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right) - sM_F$

et comme $c_0 = a_0 + b_0$ avec $a_0 = \frac{M_F}{2}$, on a finalement :

$$\underline{\underline{c_0 = -M_F(s + \frac{1}{\log q} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta'_{\frac{r+1}{q^s}}(0) - \zeta'_{\frac{r}{q^s}}(0) \right)}}$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{Z}^* \, , \; c_k = \frac{i}{2k\pi}(1 + \frac{2ik\pi}{\log q})^{-1} \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \left( \zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2k\pi i}{\log q}) \right)}} \quad .$$

<u>Remarque</u> On peut donner une autre expression pour $c_0$, en utilisant le fait que $\zeta'_a(0) = \log \Gamma(a) - \frac{1}{2} \log(2\pi)$, ce qui donne :

$$c_0 = -M_F(s + \frac{1}{\log q} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r}) \log \frac{\Gamma(\frac{r+1}{q^s})}{\Gamma(\frac{r}{q^s})}.$$

<u>(iv) Etude de la fonction $C$.</u> Par souci de simplicité, commençons par le

<u>(iv1) Cas où $s = 1$.</u> on se donne donc $F : \Sigma_q \to \mathbb{C} \ / \ F(0) = 0$, et $U_F = (U_F(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par $U_F(n) = \sum_{l \geq 0} F(\varepsilon_l(n))$ si $n = \sum_{l \geq 0} \varepsilon_l(n) q^l$. Comme $U_F(n) = O(\log n)$ $(n \to +\infty)$,

et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^z} dx$ est convergente pour $z \in \mathbb{C}$ / $Re\ z > 1$, on peut définir les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{U_F(n)}{n^z}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{U_F(n)}{(n+1)^z}$, qui sont absolument convergentes pour $Re\ z > 1$.

Posons $A(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{U_F(n)}{n^z}$ et $B(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{U_F(n)}{(n+1)^z}$, fonctions holomorphes sur le demi-plan $\{Re\ z > 1\}$.

Commençons par chercher un lien entre $A$ et $B$.

Pour $Re\ z > 1$, on a

$$A(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{U_F(n)}{n^z} = \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m\geq 0} \frac{U_F(qm+r)}{(qm+r)^z} + \sum_{m\geq 1} \frac{U_F(qm)}{(qm)^z}.$$

Mais, dans ce cas où $s = 1$, on a $U_F(qm+r) = U_F(m) + F(r)$ pour $m \geq 0$ et $r = 1, 2, \cdots, q-1$, donc

$U_F(qm) = U_F(m)$ pour $m \geq 1$, donc

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m\geq 0} \frac{U_F(m)+F(r)}{(qm+r)^z} + \sum_{m\geq 1} \frac{U_F(m)}{(qm)^z} \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m\geq 0} \frac{U_F(m)}{(qm+r)^z} + \sum_{r=1}^{q-1} F(r) \sum_{m\geq 0} \frac{1}{(qm+r)^z} + \frac{1}{q^z} \sum_{m\geq 1} \frac{U_F(m)}{m^z} \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m\geq 0} \frac{U_F(m)}{(qm+r)^z} + \frac{1}{q^z} \sum_{r=1}^{q-1} F(r) \zeta_{\frac{r}{q}}(z) + \frac{A(z)}{q^z}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m\geq 0} \frac{U_F(m)}{(qm+r)^z} = (1 - q^{-z}) A(z) - q^{-z} \sum_{r=1}^{q-1} F(r) \zeta_{\frac{r}{q}}(z) \text{ pour } Re\ z > 1.$$

De même que, toujours pour $Re\ z > 1$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
B(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{U_F(n)}{(n+1)^z}\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(qm+r-1)}{(qm+r)^z}+\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(qm+q-1)}{(qm+q)^z}\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)+F(r-1)}{(qm+r)^z}+\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)+F(q-1)}{(q(m+1))^z}\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(qm+r)^z}+\sum_{r=1}^{q-1}F(r-1)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(qm+r)^z}+\\
&\quad \frac{1}{q^z}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(m+1)^z}++F(q-1)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(qm+q)^z}\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(qm+r)^z}+\sum_{r=1}^{q-1}F(r-1)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(qm+r)^z}+\\
&\quad F(q-1)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(qm+q)^z}+\frac{B(z)}{q^z}\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(qm+r)^z}+\sum_{r=1}^{q-1}F(r)\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(qm+r+1)^z}+\frac{B(z)}{q^z}\ (\text{car } F(0)=0)\\
&= \sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(qm+r)^z}+\frac{1}{q^z}\sum_{r=1}^{q-1}F(r)\zeta_{\frac{r+1}{q}}(z)+\frac{B(z)}{q^z},
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\underline{\underline{\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{m\geq 0}\frac{U_F(m)}{(qm+r)^z}=(1-q^{-z})B(z)-q^{-z}\sum_{r=1}^{q-1}F(r)\zeta_{\frac{r+1}{q^*}}(z)\ \text{si } Re\ z>1}}
$$

En comparant les deux relations obtenues, nous déduisons que, pour $Re\ z>1$, on a :

$(1-q^{-z})(A(z)-B(z))=q^{-z}\sum_{r=1}^{q-1}F(r)(\zeta_{\frac{r}{q}}(z)-\zeta_{\frac{r+1}{q}}(z))$ mais l'on remarque, avec

$C(z)=\sum_{n\geq 1}U_F(n)\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{(n+1)^z}\right)=A(z)-B(z)$

comme définie dans l'énoncé du théorème, que l'on peut aussi exprimer sous forme intégrale, à condition de poser $U_F(x)=U_F([x])$ pour $x\in\mathbb{R}^+$

(c'est à dire en fait si $x=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varepsilon_l(x)q^l$,alors $U_F(x)=\sum_{l\geq 0}F(\varepsilon_l(x)))$,

$$\text{en effet, } C(z) = \sum_{n\geq 1} U_F(n)\left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}\right)$$
$$= \sum_{n\geq 1} U_F(n) z \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{z+1}}$$
$$= z \sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} \frac{U_F(x)}{x^{z+1}} dx$$
$$= z \int_1^{+\infty} \frac{U_F(x)}{x^{z+1}} dx.$$

Ainsi, on a finalement :

$$\underline{\underline{C(z) = z \int_1^{+\infty} \frac{U_F(x)}{x^{z+1}} dx = \frac{1}{q^z - 1} \sum_{r=1}^{q-1} F(r)\left(\zeta_{\frac{r}{q}}(z) - \zeta_{\frac{r+1}{q}}(z)\right)}}$$

A priori, cette formule n'est valable que pour $Re\ z > 1$, mais il se trouve que le dernier membre définit une fonction holomorphe sur $Re\ z > 0$ et méromorphe sur $\mathbb{C}$, de sorte que, par prolongement analytique, il en est de même de $C$.

Par exemple, en utilisant le fait que $\zeta_a(z) \sim \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ lorsque $z$ tend vers 1, nous obtenons :

$$\underline{\underline{C(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{U_F(n)}{n(n+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{U_F(x)}{x^2} dx = \frac{1}{q-1} \sum_{r=1}^{q-1} F(r)\left(\frac{\Gamma'(\frac{r+1}{q})}{\Gamma(\frac{r+1}{q})} - \frac{\Gamma'(\frac{r}{q})}{\Gamma(\frac{r}{q})}\right)}}$$

De plus, grâce à nos connaissances sur les fonctions zêta de Hurwitz, on voit que $C(z)$ admet une infinité de "candidats" pôles aux points $\gamma_k = \dfrac{2k\pi i}{\log q}$ , $k \in \mathbb{Z}$, qu'ils sont tous simples, et que :

$$R_k := \operatorname*{Res}_{z=\gamma_k} C(z) = \lim_{z\longrightarrow\gamma_k} \frac{z-\gamma_k}{q^z-1} \sum_{r=1}^{q-1} F(r)\left(\zeta_{\frac{r}{q}}(z) - \zeta_{\frac{r+1}{q}}(z)\right)$$

$$\text{soit } \underline{\underline{R_k = \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q-1} F(r)\left(\zeta_{\frac{r}{q}}(\gamma_k) - \xi_{\frac{r+1}{q}}(\gamma_k)\right), \ \forall k \in \mathbb{Z}.}}$$

Prenons d'abord $k = 0$, et utilisons le fait que $\zeta_a(0) = \dfrac{1}{2} - a$, alors

$$R_0 = \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q-1} F(r)\left(\zeta_{\frac{r}{q}}(0) - \zeta_{\frac{r+1}{q}}(0)\right) = \frac{1}{\log q} \sum_{r=1}^{q-1} \frac{F(r)}{q}$$

soit $\underline{\underline{R_0 = \dfrac{M_F}{\log q}}}$

Prenons ensuite $k \in \mathbb{Z}^*$, et considérons l'expression $\dfrac{R_k}{\gamma_k(\gamma_k+1)} =$

$$= \frac{\log q}{2ik\pi}\left(1+\frac{2ik\pi}{\log q}\right)^{-1}\frac{1}{\log q}\sum_{r=1}^{q-1}F(r)\left(\zeta_{\frac{r}{q}}(\frac{2ik\pi}{\log q})-\zeta_{\frac{r+1}{q}}(\frac{2ik\pi}{\log q})\right)$$

$$= \frac{i}{2k\pi}\left(1+\frac{2ik\pi}{\log q}\right)^{-1}\sum_{r=1}^{q-1}F(r)\left(\zeta_{\frac{r+1}{q}}(\frac{2ik\pi}{\log q})-\zeta_{\frac{r}{q}}(\frac{2ik\pi}{\log q})\right)$$

d'où

$\underline{\underline{R_k = c_k\gamma_k(\gamma_k+1)\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}^*.}}$

(iv2) <u>Cas général: $s$ quelconque $\geq 1$</u>, et $F\ :\ \Sigma_q^s \to \mathbb{C}\ /\ F(0,0,\cdots,0) = 0$ et $U_F = (U_F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ où $U_F(n) = \sum\limits_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n),\cdots,\varepsilon_{l+s-1}(n))$ si $n = \sum\limits_{l\geq 0}\varepsilon_l(n)q^l$,

et par extension,

$U_F(x) = \sum\limits_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(x),\cdots,\varepsilon_{l+s-1}(x))$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = \sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty}\varepsilon_l(x)q^l$.

Alors la même technique que pour $s = 1$ (en remplaçant $q-1$ par $q^s-1$) permet de montrer que, pour $Re\ z > 1$, on a :

(en appelant toujours $C(z) = \sum\limits_{n\geq 1} U_F(n)\left(\dfrac{1}{n^z}-\dfrac{1}{(n+1)^z}\right)$.)

$$\underline{\underline{C(z) = z\int_1^{+\infty}\frac{U_F(x)}{x^{z+1}}dx = \frac{1}{q^z-1}\cdot\frac{1}{q^{(s-1)z}}\sum_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\xi_{r/q^s}(z)-\xi_{\frac{r+1}{q^s}}(z)\right)}}$$

formule qui définit le prolongement holomorphe de $C$ sur $\{Re z > 0\}$ et méromorphe à $\mathbb{C}$ ; en prenant $z = 1$, on a :

$$C(1) = \sum_{n\geq 1}\frac{U_F(n)}{n(n+1)} = \int_1^{+\infty}\frac{U_F(x)}{x^2}dx = \frac{1}{q^s-q^{s-1}}\sum_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r}{q^s}}(1)-\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(1)\right)$$

$$\underline{\underline{\text{soit } C(1) = \sum_{n\geq 1}\frac{U_F(n)}{n(n+1)} = \int_1^{+\infty}\frac{U_F(x)}{x^2}dx = \frac{1}{q^s-q^{s-1}}\sum_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\frac{\Gamma'(\frac{r+1}{q^s})}{\Gamma(\frac{r+1}{q^s})}-\frac{\Gamma'(\frac{r}{q^s})}{\Gamma(\frac{r}{q^s})}\right)}}$$

Ici encore, $C(z)$ admet une infinité de pôles éventuels, tous simples, aux points $\gamma_k = \dfrac{2k\pi i}{\log q}$ , $k \in \mathbb{Z}$, et, si $R_k = \mathrm{Res}_{z=\gamma_k}\, C(z)$, alors

$$R_k = \lim_{z\to\gamma_k}\frac{z-\gamma_k}{q^z-1}\frac{1}{q^{z(s-1)}}\sum_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r}{q^s}}(z)-\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(z)\right),$$

$$\underline{\underline{\text{soit } R_k = \frac{1}{\log q}\sum_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r}{q^s}}(\gamma_k)-\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\gamma_k)\right),\ \forall k \in \mathbb{Z}.}}$$

Prenant $k = 0$, alors $R_0 = \dfrac{1}{\log q}\sum\limits_{r=1}^{q^s-1}F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r}{q^s}}(0)-\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(0)\right) = \dfrac{1}{\log q}\sum\limits_{r=1}^{q^s-1}\dfrac{F(\tilde{r})}{q^s}$

soit $\underline{\underline{R_0 = \dfrac{M_F}{\log q}}}$.

Enfin, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, calculons l'expression

$$\frac{R_k}{\gamma_k(\gamma_k+1)} = \frac{\log q}{2ik\pi}(1+\frac{2ik\pi}{\log q})^{-1}\frac{1}{\log q}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2ik\pi}{\log q}) - \zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2ik\pi}{\log q})\right)$$

$$= \frac{i}{2k\pi}(1+\frac{2ik\pi}{\log q})^{-1}\sum_{r=1}^{q^s-1} F(\tilde{r})\left(\zeta_{\frac{r+1}{q^s}}(\frac{2ik\pi}{\log q}) - \zeta_{\frac{r}{q^s}}(\frac{2ik\pi}{\log q})\right)$$

$= C_k$ soit : $\underline{\underline{C_k = \dfrac{R_k}{\gamma_k(\gamma_k+1)},\ \forall k \in \mathbb{Z}^*}}$

## V) PROBLÈMES OUVERTS

### 1. Coefficients de Fourier de $G$

Il s'agirait d'expliquer les formules du théorème du §IV donnant le lien entre $c_k$, $\gamma_k$ et $R_k$.

Une première idée pour cela consiste à s'inspirer d'un article de J.-P. Allouche et H. Cohen ([1]) qui prolongent de manière méromorphe (et même entière) à $\mathbb{C}$ les fonctions

$$A(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{\xi^{s_q(n)}}{n^z} \text{ et } B(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\xi^{s_q(n)}}{(n+1)^z},$$

définies a priori pour $Re\ z > 1$ (où $\xi = e^{2i\pi/q}$), et qui vérifient des "équations fonctionnelles infinies".

Une deuxième idée serait d'utiliser des méthodes d'analyse complexe, en particulier d'appliquer la formule de Perron.

### 2. Non-dérivabilité de $G$

On voudrait montrer que, de même que celle de Delange pour $U_F = s_q$, notre fonction $G$ est nulle-part dérivable. La première idée consiste à appliquer la définition de la dérivabilité, et de montrer "à la main" qu'elle n'est jamais vérifiée; mais, même dans le cas "$s = 1$", ceci ne donne pas grand chose.

La deuxième idée consiste à montrer que $G$ est presque nulle part dérivable, en s'inspirant d'un article de Brillhart, Erdös et Morton ([3]), où $U_F$ est remplacée par $(-1)^{e_{11}}$ (suite de Rudin-Shapiro).

La troisième idée, qui semble être la bonne puisqu'elle est la seule à donner des résultats, partiels mais intéressants, et d'adapter à nos suites digitales deux résultats de Dumont et Thomas ([7], [8]) étudiant des fonctions sommatoires de suites qui sont points fixes de substitutions (de longueurs pas nécessairement constantes). Les résultats partiels sont alors que, pour une suite digitale $U_F = (U_F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant à l'entier $s = 1$ et à l'application $F : \Sigma_q \to \mathbb{C}$ telle que $F(0) = 0$, alors la fonction $G$ du §IV est nulle part dérivable pourvu que $M_F \neq 0$.

On souhaiterait maintenant passer de "$s = 1$" (résolu) à "$s \geq 2$".

[1] J.-P. ALLOUCHE et H. COHEN, "Dirichlet series and curious infinite products" Bull. Lond. Math. Soc, 17, 1985, p. 531-538.

[2] J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT, "The ring of q-regular sequences", Preprint, à paraître dans Theoretical Computer Science.

[3] J. BRILLHART, P. ERDÖS et P. MORTON, "On sums of Rudin-Shapiro coefficients II", Pac. Jour. Math., 107, 1983, p. 39-69.

[4] M. C. CHAKRABARTI, "On the limit points of a function connected with the three square problem", Bull. Calcutta Math. Soc., 32, 1942, p. 1-6.

[5] J. COQUET, "A summation formula related to the binary digits", Invent. Math. 73, 1983, p. 107-115.

[6] H. DELANGE, "Sur la fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres", Ens. Math. (2), 21, 1975, p. 31-47.

[7] J.-M. DUMONT et A. THOMAS, "Systèmes de numération et fonctions sommatoires relatifs aux subsitutions", Theor. Comp. Sci. 65, 1989, p. 153-169.

[8] J.-M. DUMONT et A. THOMAS, "Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet" preprint, à paraître.

[9] E. LANDAU, "Über die Einteilung..." Arch. Math. Phys. (3) 13, 1908, p. 303-312.

[10] L. MIRSKY, "A theorem on representations of integers in the scale of $r$" Scripta Math. 15, 1949, p. 11-12.

[11] P. MORTON et W. J. MOURANT, "Paperfolding, digit patterns and groups of arithmetic fractals" Proc. Lond. Math. Soc. (3), 59, 1989, p. 253-293.

[12] P. SHIU, "Counting sums of three squares" Bull. Lond. Math. Soc., 20, 1988, p. 203-208.

[13] P. SHIU et A. H. OLBADESTIN, "A correlated digital sum problem associated with sums of three squares" Bull. Lond. Math. Soc., 21, 1989, p. 369-374.

# Suites digitales.

Emmanuel Cateland

18 septembre 1991

## 1 INTRODUCTION.

L'objectif de ce chapitre est de compléter notre généralisation d'un théorème de Delange relatif à la fonction sommatoire de la suite "somme des chiffres en base $q$".

Nous notons $q$ un entier fixé, $q \geq 2$, et par $\Sigma_q = \{0,\ 1,\ \ldots,\ q-1\}$ l'ensemble des chiffres en base $q$. Rappelons qu'une suite $u_F = (u_F(n))_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels est dite digitale (en base $q$) s'il existe un entier $s \geq 1$ et une application $F : \Sigma_q^s \longrightarrow \mathbf{R}$, telle que $F(0,0,\ldots,0) = 0$; alors

$$u_F(n) = \sum_{l \geq 0} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n), \ldots, \varepsilon_{l+s-1}(n))$$

$$\text{si} \qquad n = \sum_{l \geq 0} \varepsilon_l(n) q^l$$

est la représentation-standard de $n$ en base $q$.

A l'application $F$, nous associons sa valeur moyenne

$$M_F = \frac{1}{q^s} \sum_{(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}) \in \Sigma_q^s} F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}).$$

Généralisant le théorème de Delange, [2] , nous avons obtenu au chapitre précédent le résultat suivant :

**Proposition 1** *Il existe une fonction $G_F : \mathbf{R}^{+*} - \mathbf{R}$, continue et il existe une suite $\delta_F = (\delta_F(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$, périodique de période $q^{s-1}$(et identiquement nulle si $s = 1$), telles que :*

1. *Pour tout entier $m \geq 1$, on a $\sum_{0 \leq n \leq m-1} u_F(n) = m M_F \log_q m + m G_F(m) + \delta_F(m)$ ;*
2. *Pour tout réel $x > 0$, on a $G_F(qx) = G_F(x)$.*

*De plus, si l'on pose $G_F(x) = g_F(\log_q(x))$ pour $x > 0$, alors la fonction $g_F$ : $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, qui est continue et périodique de periode 1, admet une série de Fourier absolument convergente, dont les coefficients s'expriment à l'aide des valeurs des fonctions $\zeta$ de Hurwitz, de paramètres $\frac{r}{q^s}$ $(r = 0, 1, ..., q^s - 1)$, aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, $k \in \mathbf{Z}$.*

Le problème est maintenant de trouver des conditions sur $F$ pour que la fonction $G_F$ soit nulle part dérivable, ce qui généraliserait complètement le théorème de Delange, pour qui l'on a $s = 1, F = Id_{\Sigma_q}, u_F = s_q$ est la "somme des chiffres en base $q$", et Delange montre "à la main" que $G_{Id_{\Sigma_q}}$ est nulle part dérivable. La méthode que nous adoptons consiste à appliquer deux théorèmes de Dumont et Thomas. Au passage, nous étudions aussi les suites $Q_{a,b} = (Q_{a,b}(n))_{n\in\mathbf{N}}$, définies par $Q_{a,b}(n) = \sum_{l\geq 0}[a\frac{n}{q^l} + b]$, où $a$ et $b$ sont deux réels.

# 2 GENERALITES SUR $Q_{a,b}$.

## 2.1 Ordre de grandeur de $Q_{a,b}(x)$.

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a > 0$, $0 \leq b < 1$; pour $x > 0$, posons

$$Q_{a,b}(x) = \sum_{l\geq 0}[a\frac{x}{q^l} + b].$$

La condition $b \in [0, 1[$ est là pour avoir convergence de la série, qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls; en effet, dès que l'indice $l \geq 0$ est tel que $a\frac{x}{q^l} + b < 1$, c'est-à-dire dès que $l > log_q(\frac{a}{1-b}x)$, alors $[a\frac{x}{q^l} + b] = 0$. D'où

$$Q_{a,b}(x) = \sum_{0\leq l\leq [log_q(\frac{a}{1-b}x)]} [a\frac{x}{q^l} + b].$$

Supposons que $\frac{a}{1-b} \leq 1$, alors $log_q(\frac{a}{1-b}x) \leq log_q x$, inégalité se conservant pour les parties entières, de sorte que l'on obtient $Q_{a,b}(x) = \sum_{0\leq l\leq [log_q x]} [a\frac{x}{q^l}+b]$. Posons $L = [log_q x] + 1$, de sorte que l'on a $q^{L-1} \leq x < q^L$; en écrivant $[y] = y - \{y\}$ pour y réel, il vient :

$$Q_{a,b}(x) = \sum_{l=0}^{L-1}[a\frac{x}{q^l}+b] = \sum_{l=0}^{L-1}(a\frac{x}{q^l}+b-\{a\frac{x}{q^l}+b\}) = ax\sum_{l=0}^{L-1}\frac{1}{q^l}+bL-\sum_{l=0}^{L-1}\{a\frac{x}{q^l}+b\},$$

soit :

$$Q_{a,b}(x) = \frac{aq}{q-1}x - \frac{aq}{q-1}\frac{x}{q^L} + bL - \sum_{l=0}^{L-1}\{a\frac{x}{q^l} + b\},$$

formule valable pour $x > 0$, $a \leq 1 - b$, $L = [log_q x] + 1$. Dans cette formule, $\frac{aq}{q-1}x$ est le "terme principal", et le reste est le "terme d'erreur"; en effet, pour tout $x > 0$, posons :

$$\Delta_{a,b}(x) = -\frac{aq}{q-1}x + Q_{a,b}(x) = -\frac{aq}{q-1}\frac{x}{q^L} + bL - \sum_{l=0}^{L-1}\{a\frac{x}{q^l} + b\},$$

alors, comme $\frac{x}{q^L} < 1$ et $\{a\frac{x}{q^l} + b\} < 1$, on a la majoration $|\Delta_{a,b}(x)| < \frac{aq}{q-1} + (1+b)L < \frac{aq}{q-1} + 2([log_q x] + 1)$, soit :

$$\Delta_{a,b}(x) = O(log x).$$

Dans le cas général, c'est-à-dire si l'on n'a plus $a \leq 1 - b$, il suffit de remplacer $L = [log_q x] + 1$ par $L = [log_q cx] + 1$ où $c = \frac{a}{1-b}$, puis le reste est identique, d'où le résultat suivant :

**Proposition 2** *Pour* $a \geq 0$, $0 \leq b < 1$, *on a* $Q_{a,b}(x) = \frac{aq}{q-1}x + \Delta_{a,b}(x)$ *avec* $\Delta_{a,b}(x) = O(\log x)$. *Plus précisément, on a :*

1. *Si* $a \leq 1 - b$, *alors* $\Delta_{a,b}(x) = -\frac{aq}{q-1}\frac{x}{q^L} + bL - \sum_{l=0}^{L-1}\{a\frac{x}{q^l} + b\}$ *pour* $x > 0$ *et* $L = [\log_q x] + 1$;

2. *Si* $a > 1 - b$, *alors* $\Delta_{a,b}(x) = -\frac{aq}{q-1}\frac{x}{q^L} + bL - \sum_{l=0}^{L-1}\{a\frac{x}{q^l} + b\}$ *pour* $x > 0$, $c = \frac{a}{1-b}$ *et* $L = [\log_q cx] + 1$.

## 2.2 Un exemple simple : La suite $Q_{\frac{1}{q},0}$.

On a $Q_{\frac{1}{q},0}(0) = 0$ et, pour $n \geq 1$, nous allons calculer $Q_{\frac{1}{q},0}(n)$ de deux manières différentes.

D'une part, on sait que, lorsque $n = \sum_{l\geq 0}\varepsilon_l(n)q^l$ est la représentation standard de $n$ en base $q$, alors $\varepsilon_l(n) = [\frac{n}{q^l}] - q[\frac{n}{q^{l+1}}]$, ceci pour tout $l \geq 0$. Ainsi, $s_q(n) = \sum_{l\geq 0}\varepsilon_l(n) = \sum_{l\geq 0}([\frac{n}{q^l}] - q[\frac{n}{q^{l+1}}]) = n + \sum_{l\geq 1}([\frac{n}{q^l}] - q[\frac{n}{q^l}]) = n + (1-q)\sum_{l\geq 0}[\frac{1}{q}\frac{n}{q^l}] = n + (1-q)Q_{\frac{1}{q},0}(n)$, d'où:

$$Q_{\frac{1}{q},0}(n) = \frac{n - s_q(n)}{q-1},$$

pour tout entier $n$. En particulier, $Q_{\frac{1}{q},0}$ est une suite $q$-régulière d'entiers et, avec les notations du paragraphe précédent, nous avons

$$\Delta_{\frac{1}{q},0}(n) = -\frac{s_q(n)}{q-1},$$

pour tout entier $n$. En d'autres termes, $\Delta_{\frac{1}{q},0} \in \mathbb{Q}^{\mathbf{N}}$ est la suite digitale relative à la base $q$, l'entier $s = 1$ et à l'application $F : \Sigma_q \to \mathbb{Q}$ donnée par $F(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{q-1}$.

D'autre part, on a, toujours pour $n \geq 1$, $Q_{\frac{1}{q},0}(n) = \sum_{l\geq 0}[\frac{1}{q}\frac{n}{q^l}] = [\frac{n}{q}]+[\frac{n}{q^2}]+[\frac{n}{q^3}]+...+[\frac{n}{q^l}]+... = 1([\frac{n}{q}]-[\frac{n}{q^2}])+2([\frac{n}{q^2}]-[\frac{n}{q^3}])+3([\frac{n}{q^3}]-[\frac{n}{q^4}])+...+l([\frac{n}{q^l}]-[\frac{n}{q^{l+1}}])+... = \sum_{l\geq 0} l([\frac{n}{q^l}]-[\frac{n}{q^{l+1}}])$. Mais il est facile de montrer que, pour tous entiers $n \geq 1$ et $l \geq 0$, on a

$$[\frac{n}{q^l}]-[\frac{n}{q^{l+1}}] = Card\{m \in \mathbf{N}/1 \leq m \leq n \ et \ v_q(m) = l\}.$$

En effet, il suffit de retrancher aux $[\frac{n}{q^l}]$ multiples de $q^l$ de 1 à $n$ les $[\frac{n}{q^{l+1}}]$ multiples de $q^{l+1}$ du même intervalle. Ainsi, $Q_{\frac{1}{q},0}(n) = \sum_{l\geq 0} l \times Card\{m \in \mathbf{N}/1 \leq m \leq n \ et \ v_q(m) = l\} = \sum_{m=1}^{n} v_q(m)$. Finalement, nous obtenons la proposition :

**Proposition 3** *Soient $q$ un entier $\geq 2$, et $v_q : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ la valuation $q$-adique. Alors on a l'égalité :*

$$\sum_{m=1}^{n} v_q(m) = \sum_{l\geq 0}[\frac{1}{q}\frac{n}{q^l}] = Q_{\frac{1}{q},0}(n) = \frac{n-s_q(n)}{q-1},$$

*ceci pour tout entier $n$.*

Remarques.
1. Si $q$ est supposé premier, alors on a de plus $\sum_{m=1}^{n} v_q(m) = v_q(n!)$.
2. La suite $Q_{\frac{1}{q},0}$ apparaît donc comme la fonction sommatoire de la suite $v_q \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}^*}$, qui est évidemment $q$-régulière grâce aux relations

$$v_q(qm) = v_q(m) + 1$$

et

$$v_q(qm + r) = 0$$

valables pour $m \geq 0$ et $r \in \Sigma_q, r \neq 0$. Ainsi, $Q_{\frac{1}{q},0}$ est aussi $q$-régulière, grâce à un résultat dû à Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, qui assure la $q$-régularité de la fonction sommatoire d'une suite $q$-régulière.
3. Remarquons que $Q_{1,0}(n) = \sum_{l\geq 0}[\frac{n}{q^l}] = n + Q_{\frac{1}{q},0}(n)$, ceci pour tout entier $n$, donc $Q_{1,0}$ est aussi $q$-régulière, puisque $Q_{\frac{1}{q},0}$ et $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ le sont. Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, nous avons

$$Q_{q^k,0}(n) = \sum_{l\geq 0}[q^k\frac{n}{q^l}] = \sum_{l=0}^{k} q^l n + Q_{\frac{1}{q},0}(n) = (\frac{q^{k+1}-1}{q-1})n + Q_{\frac{1}{q},0}(n),$$

ce qui montre que $Q_{q^k,0}$ est encore $q$-régulière.
4. D'autre part, toujours pour tout entier $k \geq 1$, nous avons

$$Q_{\frac{1}{q^k},0}(n) = \sum_{l\geq 0}[\frac{1}{q^k}\frac{n}{q^l}]$$

$$= \sum_{l \geq k} [\frac{n}{q^l}] = Q_{\frac{1}{q},0}(n) - \sum_{l=1}^{k-1} [\frac{n}{q^l}],$$

donc $Q_{\frac{1}{q^k},0}$ est encore une suite $q$-régulière. En effet, grâce au résultat d'Allouche-Shallit citeAlsh mentionné à la deuxième remarque, il suffit de montrer que, pour $l$ tel que $1 \leq l \leq k-1$, la suite $([\frac{n}{q^l}])_{n \in \mathbf{N}}$ est $q$-régulière. Or justement, cette suite apparaît comme la fonction sommatoire d'une suite $q$-automatique puisque, pour tout entier $n \geq 1$, on a $[\frac{n}{q^l}] = \sum_{1 \leq m \leq n,\ m \text{ multiple de } q^l} 1 = \sum_{m=1}^{n} a_l(m)$, où $a_l = (a_l(m))_{m \in \mathbf{N}}$ est la suite $q$-automatique, à valeurs dans $\{0\ ,\ 1\}$, définie par: $a_l(m) = 1$ si $m$ est multiple de $q^l$, et $a_l(m) = 0$ sinon. Finalement, nous avons montré la proposition :

**Proposition 4** *Pour tout entier relatif $k$, la suite $Q_{q^k,0}$ est $q$-régulière.*

# 3 UTILISATION D'UN PREMIER THEOREME DE DUMONT-THOMAS.

Dans cette partie, nous allons utiliser un théorème de Dumont et Thomas, donné dans [3], que nous rappellerons mais ne redémontrerons pas. En appliquant ce théorème à une suite bien particulière, et en comparant le résultat obtenu avec celui donné par la proposition de l'introduction, nous obtiendrons une réponse très partielle à la question qui nous intéresse : si $u_F$ est une suite digitale relative à la base $q$, à l'entier $s = 1$ et à l'application $F : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $F(0) = F(q-1) = 0$, alors la fonction $G_F$ donnée par la proposition en question est nulle part dérivable, pourvu que $M_F \neq 0$. En particulier, remarquons que ce résultat ne s'applique pas à la suite "somme des chiffres"; par contre, l'intérêt réside essentiellement dans le fait que nous verrons naturellement intervenir les suites $Q_{\frac{1}{q},\frac{r}{q}}$ pour $r = 1, 2, ..., q-1$, dont nous montrerons qu'elles sont non seulement $q$-régulières, mais même digitales (à un terme linéaire près, à savoir $\frac{n}{q-1}$ ).

## 3.1 Définition d'une suite $v$.

Soient $a_1, a_2, ..., a_{q-1}$ des réels non tous nuls. Soit $v = (v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie comme suit : Pour $n \geq 1$, il existe un unique triplet $(l, k, r)$ tel que $n = q^l(kq+r)$, avec $r \in \{1, 2, ..., q-1\}$ et $l, k$ deux entiers; en effet, $l = v_q(n)$, puis on divise $\frac{n}{q^l}$ par $q$, donc le reste est bien un élément non nul de $\Sigma_q$. On pose alors $v_n = a_r$. Remarquons que, si l'on développe $n$ en base $q$ de la manière habituelle, soit

$$n_{(q)} = \varepsilon_{[log_q n]}(n)\varepsilon_{[log_q n]-1}(n)...\varepsilon_1(n)\varepsilon_0(n) \in \Sigma_q^*,$$

avec $\varepsilon_i(n) \in \Sigma_q$ pour $0 \leq i \leq [log_q n]$, et avec $\varepsilon_{[log_q n]}(n) \neq 0$ puisque $n \geq 1$, alors on a $l$ qui est le plus petit indice $i$ tel que $\varepsilon_i(n) \neq 0$, puis $v_n = a_{\varepsilon_l(n)}$. Remarquons que cette suite ressemble beaucoup aux suites de Toeplitz.

## 3.2 $v$ est une suite $q$-automatique.

En effet, nous allons montrer que son $q$-noyau

$$N_q(v) = \{(v_{q^k n})_{n\geq 1}/k \geq 0\} \bigcup \{(v_{q^k n+r})_{n\geq 0}/k > 0, 0 < r < q^k\}$$

est un ensemble fini.

Prenons $k = 0$ et posons $v^0 = v = (v_n)_{n\geq 1}$.

Prenons $k = 1$;

Pour $r = 0$, alors $v_{qn} = v_n, \forall n \geq 1$, donc $(v_{qn})_{n\geq 1} = v^0$.

Pour $r \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, alors $v_{qn+r} = a_r, \forall n \geq 0$, de sorte que nous définissons maintenant $q-1$ sous-suites constantes de $v$, à savoir $v^1 = (v_{qn+1})_{n\geq 0}(= (a_1)_{n\geq 0}), v^2 = (v_{qn+2})_{n\geq 0}(= (a_2)_{n\geq 0}), ..., v^{q-1} = (v_{qn+q-1})_{n\geq 0}(= (a_{q-1})_{n\geq 0})$.

Prenons $k = 2$ et étudions les sous-suites de $v$ de terme général $v_{q^2n+r}$ pour $0 \leq r < q^2$.

Supposons d'abord $r \equiv 0 \ (mod\ q)$, soit $r = qs$ avec $s \in \Sigma_q$, alors :

- Si $s = 0$, $v_{q^2n} = v_{qn} = v_n, \forall n \geq 1$, donc $(v_{q^2n})_{n\geq 1} = v^0$;
- Si $s \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, $v_{q^2n+qs} = v_{qn+s} = a_s, \forall n \geq 0$, donc $(v_{q^2n+r})_{n\geq 0} = v^s$.

Supposons ensuite que $r \equiv s \ (mod\ q)$, où $s \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, alors $v_{q^2n+r} = a_s, \forall n \geq 0$, donc ici encore $(v_{q^2n+r})_{n\geq 0} = v^s$.

Comme à ce rang $k = 2$, on n'a pas créé de nouvelle sous-suite de $v$, c'est bien que $N_q(v)$ est fini, de cardinal $q$, soit

$$N_q(v) = \{v^0 = (v_n)_{n\geq 1}(= v); v^r = (v_{qn+r})_{n\geq 0}(= (a_r)_{n\geq 0}), r \in \Sigma_q \setminus \{0\}\},$$

et $v$ est donc bien $q$-automatique.

## 3.3 Donnons $\mathcal{A}$ un $q$-automate reconnaissant $v$ en lecture inverse.

Les états sont les $v^r$, pour $r \in \Sigma_q$;

L'état initial est $v^0$;

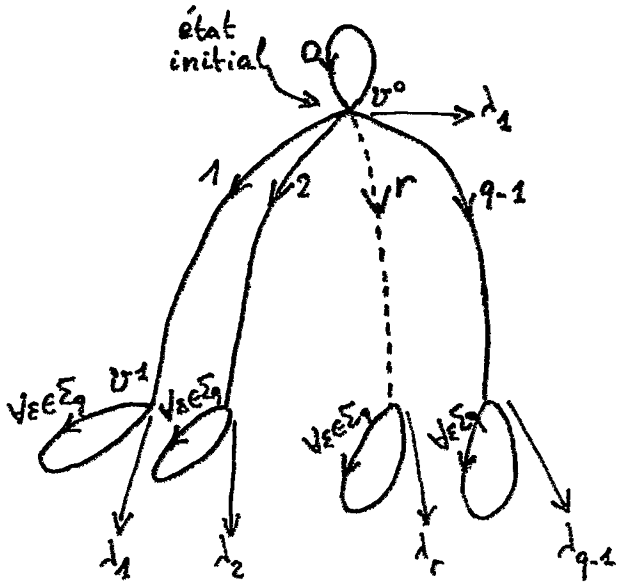
La fonction de sortie $\tau$ est donnée par:

- $\tau(v^0) = v^0(1) = v_1 = a_1$;
- $\tau(v^r) = v^r(0) = v_r = a_r, r \in \Sigma_q \setminus \{0\}$;

Enfin, pour $r, s \in \Sigma_q$, la flèche $s$ agit sur l'état $v^r$ par: $s(v^r) = v^t$ où $t \in \Sigma_q$ est tel que $v^r(qn+s) = v^t(n), \forall n$. Donc :

- si $r = 0$, on a $0(v^0) = v^0$ et $s(v^0) = v^s, s \in \Sigma_q \setminus \{0\}$;
- si $r \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, la suite $v^r$ étant constante (égale à $a_r$), nous aurons $s(v^r) = v^r, \forall s \in \Sigma_q$.

Ainsi, le $q$-automate $\mathcal{A}$ reconnaissant $v$ en lecture inverse est symbolisé par la figure ci dessous:




## 3.4 Donnons $S$ une $q$-substitution engendrant $v$.

Pour cela, soit $V = (V(n))_{n \geq 1}$ la suite, à valeurs dans $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q$, définie terme à terme par $V(n) = (v^0(n), v^1(n), ..., v^{q-1}(n))$, $\forall n \geq 1$.
En particulier, $V(1) = (v_1, v_{q+1}, v_{q+2}, ..., v_{2q-1}) = (a_1, a_1, a_2, a_3, ..., a_{q-1})$.
Soit $r \in \Sigma_q$, comme $N_q(v)$ est stable par l'application $n \mapsto qn + r$, on va trouver $s_r$, permutation de $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q$, telle que :

$$\forall n \geq 1, V(qn + r) = s_r V(n).$$

- Prenons d'abord $r = 0$, alors, $\forall n \geq 1$, on a

$$V(qn) = (v_{qn}, v_{q^2n+1}, v_{q^2n+2}, ..., v_{q^2n+q-1}) = (v_n, v_{qn+1}, v_{qn+2}, ..., v_{qn+q-1})$$

$$= (v^0(n), v^1(n), v^2(n), ..., v^{q-1}(n)) = s_0 V(n),$$

avec $s_0 = Id_{\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q}$.

- Prenons ensuite $r \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, alors, $\forall n \geq 1$, on a

$$V(qn+r) = (v^0(qn+r), v^1(qn+r), v^2(qn+r), ..., v^{q-1}(qn+r))$$

$$= (v_{qn+r}, v_{q^2n+qr+1}, v_{q^2n+qr+2}, ..., v_{q^2n+qr+q-1})$$

$$= (v_{qn+r}, v_{qn+1}, v_{qn+2}, ..., v_{qn+q-1})$$

$$= (v^r(n), v^1(n), v^2(n), ..., v^{q-1}(n)) = s_r V(n),$$

avec ici $s_r$ est la permutation de $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q$ donnée par

$$s_r : (x_0, x_1, x_2, ..., x_{q-1}) \mapsto (x_r, x_1, x_2, ..., x_{q-1}).$$

Ainsi, $V$ est le point fixe, commençant par $(a_1, a_1, a_2, ..., a_{q-1})$, de la $q$-substitution $S$ sur $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q$ donnée par $S = s_0 s_1 s_2 ... s_{q-1}$ (concaténation des $q$ permutations $s_0$, $s_1$, $s_2$, ..., $s_{q-1}$ définies ci-dessus), puis $v$ est alors l'image de $V$ par la première projection $f$ de $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}^q$ sur $\{a_1, a_2, ..., a_{q-1}\}$.

Donc, a priori, $v$ est l'image par $f$ d'une $q$-substitution $S$ sur un alphabet à $(q-1)^q$ éléments; mais nous allons montrer qu'en fait on peut se restreindre à un alphabet à $q-1$ éléments seulement.
En effet, on part de $A_1 = (a_1, a_1, a_2, ..., a_{q-1})$, donc $f(A_1) = a_1$, et l'on a

$$S(A_1) = (a_1, a_1, a_2, ..., a_{q-1}; a_1, a_1, a_2, ..., a_{q-1}; a_2, a_1, a_2, ..., a_{q-1}; ...; a_{q-1}, a_1, a_2, ..., a_{q-1}),$$

soit encore $S(A_1) = A_1 A_1 A_2 A_3 ... A_{q-1}$, où, pour $2 \leq r \leq q-1$, on note $A_r = (a_r, a_1, a_2, ..., a_{q-1})$, donc $f(A_r) = a_r$, et $S(A_r) = A_r A_1 A_2 A_3 ... A_{q-1}$.
Ainsi, en adoptant les notations classiques, ceci montre que $v$ est l'image par $f$ du point fixe commençant par 1 de la $q$-substitution $S$ sur l'alphabet $A = \{1, 2, ..., q-1\}$ donnée par :

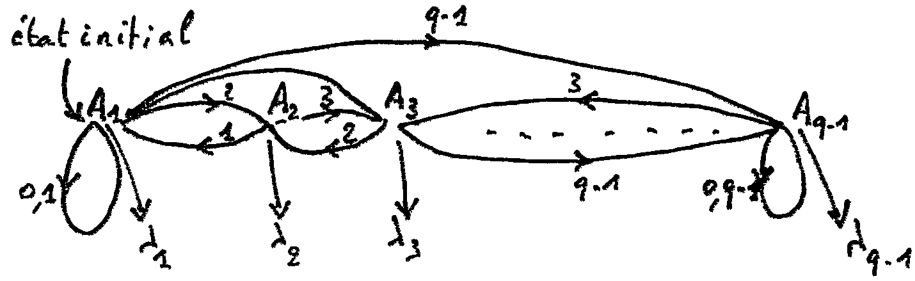
$$\forall r \in A, S(r) = r123...(q-1), f(r) = a_r.$$

### 3.5 Donnons $\mathcal{B}$ un $q$-automate reconnaissant $v$ en lecture directe.

Les états sont $A_1, A_2, ..., A_{q-1}$;
L'état initial est $A_1$;
La fonction de sortie $f$ est donnée par $f(A_r) = a_r$, pour $1 \leq r \leq q-1$;
Enfin, pour $i \in \Sigma_q$, la fonction de transition $i$ est donnée par :

- Pour $i = 0$, on a $0(A_r) = A_r$, pour $1 \leq r \leq q-1$;
- Pour $i \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, on a $i(A_r) = A_i$, pour $1 \leq r \leq q-1$.

Ainsi, le $q$-automate $\mathcal{B}$ reconnaissant $v$ en lecture directe est symbolisé par la figure ci-dessous :




En chaque état $A_i$ arrivent toutes les flèches $i$ ;
Toutes les flèches 0 sont des boucles ;
Enfin, chaque état $A_i$ a pour fonction de sortie $\lambda_i$

## 3.6 Rappel du premier théorème de Dumont-Thomas.

### 3.6.1 Quelques notations.

Nous introduisons ici quelques notations relatives aux substitutions, pas forcément de longueur constante, que nous utiliserons aussi dans la prochaine section concernant le deuxième théorème de Dumont-Thomas.

Dorénavant, $d$ est un entier fixé, $d \geq 2$, et $A = \{1, 2, ..., d\}$ est un alphabet de cardinal $d$. Les lettres de $A$ seront notées $a, b, ...$, et les mots sur $A$, c'est à dire les éléments de $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, seront notés $M, N, ...$, la longueur d'un mot $M$ de $A^*$ sera notée $|M|$, et le mot vide $\omega$ est le seul mot de longueur 0. Pour $a \in A$ et $M \in A^*$, l'entier $L_a(M)$ désigne le nombre d'apparitions de la lettre $a$ dans le mot $M$. Enfin, pour $M, N \in A^*$, la relation $M \preceq N$ signifie que le mot $M$ est un préfixe du mot $N$, et $M \prec N$ signifie que $M \preceq N$ et que $M \neq N$, c'est-à-dire $M$ est préfixe strict de $N$.

Dans la suite du chapitre, $\sigma$ désignera une substitution sur $A$, c'est à dire une application de $A$ dans $A^*$, telle que $1 \prec \sigma(1)$. On supposera que $\sigma(a) \neq \omega$, $\forall a \in A$. Nous désignerons par $u = (u_i)_{i \geq 1}$ l'unique point fixe de $\sigma$ commençant par 1. Nous appellerons matrice associée à $\sigma$, et nous noterons $M_\sigma$, la matrice d'ordre $d \times d$ à coefficients entiers, de terme général $L_i(\sigma(j))$, pour $(i, j) \in A \times A$. Soit $\{\theta_i, 1 \leq i \leq \delta\}$ l'ensemble des différentes valeurs propres de $M_\sigma$, ordonné de sorte que $i \leq j \Rightarrow |\theta_i| \geq |\theta_j|$. Nous supposerons que $M_\sigma$ est primitive, et que

$\theta = \theta_1$ est un réel, $\theta > 1$.

Comme conséquences, on a $i \geq 2 \Rightarrow |\theta_i| < \theta$, et de plus il existe un unique vecteur propre $\mu = (\mu_a)_{a\in A}$ pour la matrice $M_\sigma$ et la valeur propre $\theta$, à coordonnées $> 0$, normalisé par la condition $\sum_{a\in A} \mu_a = 1$. Enfin, nous supposerons l'existence d'une base de $\mathbf{C}^d$ constituée de vecteurs propres pour la matrice transposée de $M_\sigma$.

### 3.6.2 Enoncé du Théorème.

**H1** On se place dans les conditions du paragraphe précédent, et l'on suppose de plus que $\theta_2 = 1$, et que $i \geq 3 \Rightarrow |\theta_i| < 1$.

**H2** Soit $f : A \to \mathbf{R}$ une application que nous prolongeons en morphisme, c'est-à-dire $f(a_1 a_2 ... a_i) = f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_i)$ pour $a_1, a_2, ..., a_i \in A$.

**H3** Définissons une suite $s^f = (s^f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ par : $s^f(0) = 0$ et, pour $n \geq 1, s^f(n) = f(u_1 u_2 ... u_n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)$.

**H4** Sans perte de généralité, si ( , ) désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbf{C}^d$, nous pouvons supposer que $(\mu, f) = 0$ (sinon, on remplace $f$ par le vecteur $f' = (f'(a))_{a\in A}$ tel que $f'(a) = f(a) - (\mu, f), a \in A$).

**C1** Alors, il existe une constante $\alpha$ et une fonction $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue, telles que :

**(i)** $\forall m$ entier $\geq 1$, on a $\sum_{n=0}^{m-1} s^f(n) = \alpha m \log_\theta m + mG(m) + o(m)$;

**(ii)** $\forall x > 0, G(\theta x) = G(x)$.

**C2** Plus précisément, on a $\alpha = \theta^{-1} \sum_{Mc \preceq \sigma(a)} \mu_a f_2(M) \varepsilon(c)$, où la somme est étendue à tous les triplets $(a, M, c) \in A \times A^* \times A$ tels que $Mc \preceq \sigma(a)$, et où :

- $f = \sum_{i=1}^{\delta} f_i$, avec $f_i$ vecteur propre pour la matrice ${}^t M_\sigma$ et la valeur propre $\theta_i$, pour $1 \leq i \leq \delta$ (et donc $f_1 = 0_{\mathbf{C}^d}$ car $(\mu, f) = 0$);
- $\varepsilon(c) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sigma^n(c)|}{\theta^n}$ pour $c \in A$.

**C3** Enfin, si $\alpha \neq 0$, alors la fonction $G$ est nulle part dérivable.

## 3.7 Application de ce théorème à la suite $v$.

Ici, nous avons $d = q - 1$, $A = \{1, 2, ..., q - 1\}$, et $\sigma$ est la $q$-substitution sur A donnée par $\sigma(r) = r12...(q-1)$ pour $r \in A$. Si $u = (u_i)_{i\geq 1}$ est l'unique point fixe de $\sigma$ commençant par 1, alors $v = (v_i)_{i\geq 1}$ est l'image de $(u_i)_{i\geq 1}$ par $f$, où $f$ est définie par $f(r) = a_r$ pour $r \in A$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $s^f(n) = \sum_{1\leq i\leq n} v_i = \sum_{1\leq i\leq n} f(u_i)$, et $s^f(0) =$

0.
Soit $M_\sigma$ la matrice de $\sigma$, donc ici $M_\sigma$ est la matrice carrée d'ordre $q-1$ ayant des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. $M_\sigma$ est donc primitive, et l'ensemble de ses différentes valeurs propres est $\{\theta = q, \theta_2 = 1\}$, avec :

- $\theta = q$ valeur propre simple de $M_\sigma$, le sous-espace propre correspondant étant la droite de $\mathbf{C}^{q-1}$ engendrée par le vecteur $\mu = (\frac{1}{q-1}, \frac{1}{q-1}, ..., \frac{1}{q-1})$ ;
- $\theta_2 = 1$ valeur propre d'ordre $q-2$ de $M_\sigma$, le sous-espace propre correspondant étant l'hyperplan de $\mathbf{C}^{q-1}$ dont une équation est $x_1+x_2+...+x_{q-1} = 0$.

Ainsi, il existe bien une base de $\mathbf{C}^{q-1}$ constituée de vecteurs propres pour la matrice ${}^t M_\sigma = M_\sigma$.
Si ( , ) désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbf{C}^{q-1}$, nous avons $(\mu, f) = \sum_{r\in A} \mu_r f(r) = \frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r$ qui est donc la moyenne des $q-1$ réels $a_1, a_2, ..., a_{q-1}$, en général non nulle. Il convient donc de remplacer $f$ par $f'$ définie par :

$$\forall r \in A, f'(r) = f(r) - (\mu, f) = a_r - (\mu, f) = a_r - \frac{1}{q-1}\sum_{s\in A} a_s.$$

Concernant la suite $s^f = (s^f(n))_{n\in\mathbf{N}}$, nous avons alors : pour $n \geq 1, s^f(n) = \sum_{1\leq i\leq n} v_i = \sum_{1\leq i\leq n} f(u_i) = \sum_{1\leq i\leq n}(f'(u_i) + (\mu, f))$, soit :

$$s^f(n) = (\frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r)n + s^{f'}(n), \forall n \in \mathbf{N},$$

où $s^{f'} = (s^{f'}(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite définie par $s^{f'}(0) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $s^{f'}(n) = \sum_{1\leq i\leq n} f'(u_i)$, avec maintenant le vecteur

$$f' = (a_1 - \frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r, a_2 - \frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r, ..., a_{q-1} - \frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r)$$

qui vérifie bien la condition $(\mu, f') = 0$.
Donc le théorème cité plus haut prend la forme suivante :

**Proposition 5** *Il existe une constante $\alpha$ et il existe une fonction $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue, telles que :*

**(i)** *Pour tout entier $m \geq 1$, on a $\sum_{n=0}^{m-1} s^{f'}(n) = \alpha m \log_q m + mG(m) + o(m)$;*

**(ii)** $\forall x > 0,\ G(qx) = G(x)$.

*De plus, $G$ est nulle part dérivable, dès que $\alpha \neq 0$.*
*Enfin, concernant la suite $v$, on a la formule :*

**(iii)** *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$\sum_{n=0}^{m-1} s^f(n) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{1 \leq i \leq n} v_i$$

$$= \left(\frac{1}{q-1}\sum_{r\in A} a_r\right)\frac{m(m-1)}{2} + \alpha m \log_q m + mG(m) + o(m).$$

## 3.8 Calcul de $\alpha$.

On a la formule $\alpha = \theta^{-1}\sum_{Mc \preceq S(a)} \mu_a f_2'(M)\varepsilon(c)$, avec ici :

- $\theta = q$;
- $f' = \sum_{i=1}^{2} f_i'$, $f_i'$ étant vecteur propre pour ${}^tM_S$ et $\theta_i$, or $f_1' = 0_{\mathbf{C}^{q-1}}$, $f_2' = f'$, c'est-à-dire $f_2'(r) = a_r - \frac{1}{q-1}\sum_{s\in A} a_s$, $\forall r \in A$ (et $f_2'$ est prolongée aux mots par concaténation);
- $\varepsilon(c) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|S^n(c)|}{q^n} = 1$, $\forall c \in A$ (car $S$ est une $q$-substitution);
- enfin, on a $S(a) = a12...(q-1)$, $\mu_a = \frac{1}{q-1}$, $\forall a \in A$.

Comme nous savons que $\sum_{r\in A} f_2'(r) = 0$, il vient $\alpha = \frac{1}{q}(f_2'(1) + f_2'(12) + ... + f_2'(12...(q-2)))$, soit, en utilisant la propriété de "concaténation":

$$\alpha = \frac{1}{q}((q-2)f_2'(1) + (q-3)f_2'(2) + ... + 2f_2'(q-3) + f_2'(q-2)).$$

Or on a $\sum_{r=1}^{q-1}(q-r) = \frac{q(q-1)}{2}$, donc finalement nous obtenons

$$\alpha = \frac{1}{2q}\sum_{r=1}^{q-1}(q-2r)a_r.$$

## 3.9 Quelques exemples.

### 3.9.1 Exemple 1 : $q = 2$.

Ce cas est trivial, puisque la suite $v$ est ici constante, de valeur $a_1$, et l'on a alors $\alpha = 0$, $G \equiv 0$, et la formule de la Proposition 5 devient la formule exacte suivante :

$$\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{1\leq i\leq n} a_1 = a_1\frac{m(m-1)}{2}.$$

### 3.9.2 Exemple 2 : $q = 3$.

Ici, $v = (v_n)_{n\geq 1}$ est définie comme suit :

$$\forall n \geq 1, \exists!(l,k,r) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\{1,\ 2\}/n = 3^l(3k+r);\ \text{alors } v_n = a_r,$$

où $a_1$, $a_2$ sont deux réels non tous nuls. En appliquant les résultats précédents, nous trouvons :

$$\theta = 3,\ \theta_2 = 1,\ \mu = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}),\ (\mu,\ f) = \frac{a_1+a_2}{2},\ f'(1) = \frac{a_1-a_2}{2},\ f'(2) = -f'(1),$$

et enfin

$$\alpha = \frac{a_1-a_2}{6},$$

donc nous devons distinguer deux cas :

**Cas 1 :** $a_1 = a_2$. Alors $v$ est constante, et l'on retrouve le cas du premier exemple.

**Cas 2 :** $a_1 \neq a_2$. Alors il existe une fonction $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue et nulle part dérivable, telle que :

**(i)** $\forall m$ entier $\geq 1$, $\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{1\leq i\leq n} v_i = \frac{(a_1+a_2)m(m-1)}{4} + \frac{a_1-a_2}{6} m\log_3 m + mG(m) + o(m)$;

**(ii)** $\forall x > 0,\ G(3x) = G(x)$.

### 3.9.3 Exemple 3 : $q = 4$.

Ici, $v = (v_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \exists!(l,k,r) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\{1,2,3\}/n = 4^l(4k+r);\ \text{alors } v_n = a_r,$$

où $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. On trouve alors $\alpha = \frac{a_1-a_3}{4}$, de sorte qu'ici aussi nous devons distinguer deux cas :

**Cas 1 :** $a_1 = a_3$. Alors il existe une fonction $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue, telle que :

**(i)** $\forall m$ entier $\geq 1$, $\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{1\leq i\leq n} v_i = \frac{(2a_1+a_2)m(m-1)}{6} + mG(m) + o(m)$;

**(ii)** $\forall x > 0,\ G(4x) = G(x)$.

**Cas 2 :** $a_1 \neq a_3$. Alors il existe une fonction $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue et nulle part dérivable, telle que :

**(i)** $\forall m$ entier $\geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{1\leq i\leq n} v_i = \frac{(a_1+a_2+a_3)m(m-1)}{6} + \frac{a_1-a_3}{4} m\log_4 m + mG(m) + o(m);$$

**(ii)** $\forall x > 0,\ G(4x) = G(x)$.

### 3.9.4 Remarques

1. On voit sur ce dernier exemple que, si $q$ est pair, soit $q = 2k$ où $k \geq 2$, alors le choix de $a_k$ n'intervient pas dans le calcul de $\alpha$, et aussi que l'on aura $\alpha = 0$ dès que $a_1 = a_{q-1}, a_2 = a_{q-2}, ..., a_{k-1} = a_{k+1}$.

2. Si $q = 2k + 1$ est impair, alors les $q - 1$ valeurs servent au calcul de $\alpha$, qui vaudra encore 0 lorsque $a_1 = a_{q-1}, a_2 = a_{q-2}, ..., a_{k-1} = a_{k+2}, a_k = a_{k+1}$.

## 3.10 Liens avec les problèmes de l'introduction.

Nous avons défini plus haut la suite $s^f = (s^f(n))_{n \in \mathbf{N}}$ comme la fonction sommatoire de la suite $v$. En particulier, remarquons que, si $R$ désigne le plus petit sous-anneau de $\mathbf{R}$ contenant les $q - 1$ réels $a_1, a_2, ..., a_{q-1}$, alors la suite $s^f$ est une suite $(\mathrm{R}, q)$−régulière.

Nous pouvons écrire, pour $n \geq 1$,

$$s^f(n) = \sum_{r=1}^{q-1} a_r \sum\nolimits_{k,l \in \mathbf{N}, 1 \leq q^l(kq+r) \leq n} 1.$$

Soit $r$ fixé tel que $1 \leq r \leq q - 1$, et soit $l$ fixé dans $\mathbf{N}$, alors

$$\sum_{k \in \mathbf{N}, 1 \leq q^l(kq+r) \leq n} 1 = Card\{k \in \mathbf{N}/k \leq \frac{1}{q}(\frac{n}{q^l} - r)\},$$

d'où $\sum_{k,l \in \mathbf{N}, 1 \leq q^l(kq+r) \leq n} 1 = \sum_{l \geq 0} [\frac{1}{q}\frac{n}{q^l} + 1 - \frac{r}{q}] = Q_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}(n)$, soit finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, s^f(n) = \sum_{r=1}^{q-1} a_r Q_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}(n).$$

## 3.11 Etude de la suite $Q_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}$ pour $r$ fixé tel que $1 \leq r \leq q - 1$.

Commençons par noter

$$\mathbf{N}_r = \{q^l(kq + r)/; k, l \in \mathbf{N}\},$$

de sorte que $\mathbf{N}^* = \bigcup_{r'=1}^{q-1} \mathbf{N}_{r'}$ et que, pour $n \geq 1, Q_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}(n)$ compte le nombre d'entiers $1 \leq i \leq n$ qui sont dans $\mathbf{N}_r$.

Comme on l'a vu plus haut, on peut écrire :

$$Q_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}(n) = \frac{n}{q-1} + \Delta_{\frac{1}{q}, 1-\frac{r}{q}}(n),$$

où, dans cette égalité, $\frac{n}{q-1}$ est le "terme principal"(ce qui est naturel puisque, $\mathbf{N}_r$ étant l'un des $q - 1$ ensembles qui partitionnent $\mathbf{N}^*$, il est logique que

$Q_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(n)$ ait pour équivalent $\frac{n}{q-1}$) et où $\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(n) = O(\log n)$ est le "terme d'erreur"; plus précisément, comme $a = 1/q \leq 1 - b = r/q$, la proposition 2 donne

$$\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(n) = -\frac{1}{q-1}\frac{n}{q^L} + (1 - r/q)L - \sum_{l=0}^{L-1}\{\frac{1}{q}\frac{n}{q^l} + 1 - r/q\},$$

avec $n \geq 1$, $L = [\log_q n] + 1$, et $\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(0) = 0$.

Ainsi, revenant à la suite $s^f$, nous avons :

$$\forall n \in \mathbf{N}, s^f(n) = (\frac{1}{q-1}\sum_{r=1}^{q-1} a_r)n + \sum_{r=1}^{q-1} a_r \Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(n);$$

Mais par ailleurs, nous avons aussi la formule :

$$\forall n \in \mathbf{N}, s^f(n) = (\frac{1}{q-1}\sum_{r=1}^{q-1} a_r)n + s^{f'}(n).$$

En comparant ces deux dernières formules, nous obtenons alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, s^{f'}(n) = \sum_{r=1}^{q-1} a_r \Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}(n),$$

et l'on est donc ramené à :

## 3.12 Etude de la suite $\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}$ pour $r$ fixé tel que $1 \leq r \leq q-1$.

Pour alléger les notations, posons $Q = Q_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}$ et $\Delta = \Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}$. Comme $Q(0) = \Delta(0) = 0$, on prend $n$ un entier non nul, et soit $L = [\log_q n]+1$, et nous cherchons une formule simple pour $\Delta(n)$.

### 3.12.1

Commençons par le cas où $\log_q n$ est un entier, c'est-à-dire où $n$ est une puissance de $q$, soit $n = q^{L-1}$, et la formule de la section précédente devient :

$$\Delta(q^{L-1}) = -\frac{1}{q(q-1)} + (1 - \frac{r}{q})L - \sum_{l=0}^{L-1}\{\frac{q^l}{q} + 1 - \frac{r}{q}\}.$$

Mais l'on remarque alors que :

- Si $l = 0$, alors $\{\frac{q^l}{q} + 1 - \frac{r}{q}\} = \{1/q + 1 - r/q\}$ vaut 0 si $r = 1$ et $1/q + 1 - r/q$ si $r \neq 1$;

- Si $l \geq 1$, alors, $q^{l-1}$ étant entier, on a $\{\frac{q^l}{q} + 1 - \frac{r}{q}\} = 1 - r/q$.

Donc, après sommation :

**Pour** $L = 1$ on a $\Delta(q^{L-1}) = \Delta(1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q-1} & \text{si } r = 1, \\ -\frac{1}{q-1} & \text{si } r \neq 1. \end{cases}$

**Pour** $L > 1$ on a $\Delta(q^{L-1}) = \Delta(1)$.

En définitive, nous obtenons :

$$\forall l \geq 0,\ \Delta(q^l) = \delta_r(1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q-1} & \text{si } r = 1, \\ -\frac{1}{q-1} & \text{si } r \neq 1. \end{cases}$$

### 3.12.2

Continuons en supposant que $n = \varepsilon.q^{L-1}$ où $\varepsilon \in \{1, 2, ..., q-1\}$, alors on a :

$$\Delta(\varepsilon.q^{L-1}) = -\frac{1}{q-1}.\frac{\varepsilon}{q} + (1 - \frac{r}{q})L - \sum_{l=0}^{L-1}\{\frac{\varepsilon}{q}.q^l + 1 - \frac{r}{q}\}.$$

Or, de même que ci-dessus, nous avons :

- Si $l = 0$, alors $\{\varepsilon/q + 1 - r/q\}$ vaut $\frac{\varepsilon - r}{q}$ si $\varepsilon \geq r$ et $1 + \frac{\varepsilon - r}{q}$ si $\varepsilon < r$;
- Si $l \geq 1$, alors, $\varepsilon.q^{l-1}$ étant entier, on a $\{\frac{\varepsilon}{q}.q^l + 1 - \frac{r}{q}\} = 1 - r/q$.

Finalement, nous obtenons :

$$\forall l \geq 0,\ \forall \varepsilon \in \Sigma_q,\ \Delta(\varepsilon.q^l) = \delta_r(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{q-1} & \text{si } r \leq \varepsilon, \\ -\frac{\varepsilon}{q-1} & \text{si r} > \varepsilon. \end{cases}$$

### 3.12.3

Maintenant, on cherche à "descendre", c'est-à-dire : on se donne un entier $l \geq 1$, un chiffre non nul $\varepsilon \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, et un "reste" $z \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leq z < q^l$, et on cherche à passer du calcul de $\Delta(z)$ et de $\Delta(\varepsilon.q^l) = \delta_r(\varepsilon)$ à celui de $\Delta(\varepsilon.q^l + z)$.

Pour cela, soit $m$ un entier tel que $0 < m < q^l$, et soit $n = \varepsilon.q^l + m$, on veut savoir si les conditions $m \in \mathbf{N}_r$ et $n \in \mathbf{N}_r$ sont équivalentes ou non. Ecrivons $m = q^{l'}(kq + r')$ avec $l' = v_q(m) \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $r' \in \Sigma_q \setminus \{0\}$, de sorte que $m \in \mathbf{N}_r$ si et seulement si $r' = r$; remarquons que, comme $m < q^l$, on a $l' < l$; alors $n = \varepsilon.q^l + m = \varepsilon.q^l + q^{l'}(kq + r') = q^{l'}((k + \varepsilon.q^{l-l'-1})q + r')$ avec $l' = v_q(n)(= \inf(v_q(\varepsilon.q^l), v_q(m)))$, et avec $k + \varepsilon.q^{l-l'-1} \in \mathbf{N}$, de sorte que cette écriture montre qu'ici encore, on a $n \in \mathbf{N}_r$ si et seulement si $r' = r$.

Ainsi, $\forall m \in \mathbf{N}/0 < m < q^l$, on a $m \in \mathbf{N}_r$ si et seulement si $n = \varepsilon.q^l + m \in \mathbf{N}_r$, donc $\forall z \in \mathbf{N}/0 \leq z < q^l$, on a $Q(\varepsilon.q^l + z) = Q(\varepsilon.q^l) + Q(z)$. Or on sait que $Q(n) = \frac{n}{q-1} + \Delta(n)$, donc :

$$\forall l \geq 0,\ \forall \varepsilon \in \Sigma_q,\ \forall z \in \mathbf{N}/0 \leq z < q^l,\ \Delta(\varepsilon.q^l + z) = \Delta(\varepsilon.q^l) + \Delta(z).$$

Ceci montre que, si $n = \sum_{l=0}^{L-1} \varepsilon_l(n)q^l$ est le développement $q$-adique de l'entier $n$, alors $\Delta(n) = \sum_{l=0}^{L-1} \Delta(\varepsilon_l(n)q^l) = \sum_{l=0}^{L-1} \delta_r(\varepsilon_l(n))$. Or on a $\delta_r(0) = 0$, donc finalement :

$$n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n)q^l \Rightarrow \Delta(n) = \sum_{l \geq 0} \delta_r(\varepsilon_l(n)).$$

En d'autres termes, $\Delta = \Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}} = u_{\delta_r}$ est la suite digitale relative à la base $q$, à l'entier $s = 1$ et à l'application $\delta_r : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{Q}$ donnée par

$$\delta_r(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{q-1} & \text{si } \varepsilon = 0,\ 1,\ \ldots, \mathrm{r}-1, \\ 1 - \frac{\varepsilon}{q-1} & \text{si } \varepsilon = \mathrm{r},\ \mathrm{r}+1,\ \ldots, \mathrm{q}-1. \end{cases}$$

**3.12.4**

Par la proposition 1 de l'introduction, il est associé à la suite digitale $\Delta = u_{\delta_r}$ une fonction $G_{\delta_r} : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$, continue, telle que :

(i) $\forall m \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{n=0}^{m-1} \Delta(n) = M_{\delta_r} m \log_q m + mG_{\delta_r}(m)$;

(ii) $\forall x > 0$, $G_{\delta_r}(qx) = G_{\delta_r}(x)$.

Grâce aux valeurs de $\delta_r(\varepsilon)$ données plus haut, nous trouvons $M_{\delta_r} = \frac{q-2r}{2q}$.

**3.12.5**

D'autre part, on a $s^{f'} = \sum_{r'=1}^{q-1} a_{r'} \Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r'}{q}}$, donc il suffit de prendre $a_{r'} = 0$ pour $1 \leq r' \leq q-1$, $r' \neq r$, et $a_r = 1$, pour que la suite correspondante (qui est aussi digitale comme somme de $q-1$ telles suites) soit précisément égale à $\Delta$ et la constante $\alpha$ correspondante vaut encore $\frac{q-2r}{2q} = M_{\delta_r}$. Finalement, en comparant le résultat ci-dessus et celui donné par la proposition 5, nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 6** *Pour $1 \leq r \leq q-1$, le terme d'erreur $\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}$ de $Q_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}}$, donné par la proposition 2, est une suite digitale pour la base $q$, l'entier $s = 1$ et l'application $\delta_r$, de moyenne $M_{\delta_r} = \frac{q-2r}{2q}$. De plus, la fonction $G_{\delta_r}$ qui lui est associée par la proposition 1 est nulle part dérivable, sauf peut-être si $q = 2k$ est pair et que $r = k$.*

### 3.12.6 Remarques.

1. Grâce à la forme de $\delta_r$, on remarque que, si $e_\varepsilon = (e_\varepsilon(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite digitale dont le terme général $e_\varepsilon(n)$ compte le nombre de lettres $\varepsilon \in \Sigma_q \setminus \{0\}$ dans le mot $n_{(q)}$ ("représentation standard" de $n$ en base $q$), alors on a $\Delta_{\frac{1}{q},1-\frac{r}{q}} = \sum_{\varepsilon=r}^{q-1} e_\varepsilon - \frac{s_q}{q-1}$. En particulier, pour $q = 2$ et $r = 1$, on a $\Delta_{1/2,1/2} = e_1 - s_2 = 0$, donc il est logique de trouver que $G_{\delta_1}$, toujours nulle, ne soit pas nulle part dérivable. Par contre, cela parait moins évident pour $q = 4$ et $r = 2$, auquel cas $\Delta_{1/4,1/2} = \sum_{\varepsilon=2}^{3} e_\varepsilon - \frac{s_4}{3} = \frac{e_2-e_1}{3}$. 2. Il est à noter que ces suites digitales $\Delta_{1/q,1-r/q} = u_{\delta_r}$ sont relatives à des applications $\delta_r$ telles que $\delta_r(0) = \delta_r(q-1) = 0$ pour tout $r = 1, 2, ..., q-1$; elles sont donc bien particulières.

## 3.13 Applications à certaines suites digitales.

### 3.13.1

Comme $s^{f'} = \sum_{r=1}^{q-1} a_r \Delta_{1/q,1-r/q}$, la suite $s^{f'} = (s^{f'}(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est digitale pour la base $q$, l'entier $s = 1$ et l'application $F_{f'} : \Sigma_q \to \mathbf{R}$ donnée par $F_{f'} = \sum_{r=1}^{q-1} a_r \delta_r$. Ainsi, il suffit de connaitre $F_{f'}(0) = 0, F_{f'}(1), ..., F_{f'}(q-1)$ pour connaitre toute la suite $s^{f'}$. Or on a

$$s^{f'}(\varepsilon) = F_{f'}(\varepsilon) = a_1 + a_2 + ... + a_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{q-1} \sum_{r\in A} a_r, \ \forall \varepsilon \in \Sigma_q \setminus \{0\}.$$

### 3.13.2

Soit alors $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite digitale de réels pour la base $q$, l'entier $s = 1$ et l'application $F : \Sigma_q \to \mathbf{R}$, telle que $F(0) = F(q-1) = 0$; il est alors toujours possible de trouver $q-1$ réels $a_1, a_2, ..., a_{q-1}$ tels que les $q-2$ conditions $\sum_{r=1}^{\varepsilon} a_r - \frac{\varepsilon}{q-1} \sum_{s\in A} a_s = F(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon = 1, 2, ..., q-2$, soient toutes vérifiées; en effet, il suffit de prendre $a_\varepsilon = F(\varepsilon) - F(\varepsilon - 1)$ pour $1 \le \varepsilon \le q-2$, puis $a_{q-1} = -\sum_{r=1}^{q-2} a_r$. Alors $s^{f'}$ et $u_F$ sont égales, et de plus on a $M_F = \alpha$. Donc le résultat de la Proposition 5 prend la forme suivante :

**Proposition 7** *Soit $u_F$ une suite digitale relative à la base $q$, l'entier $s = 1$ et l'application $F : \Sigma_q \to \mathbf{R}$, telle que $F(0) = F(q-1) = 0$, de moyenne $M_F = 1/q \sum_{\varepsilon=1}^{q-2} F(\varepsilon)$. Alors il existe une fonction $G_F : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$, continue, telle que :*

1. *Pour tout entier $m \ge 1$, on a $\sum_{n=0}^{m-1} u_F(n) \doteq m M_F \log_q m + m G_F(m)$;*
2. *$\forall x > 0$, $G_F(qx) = G_F(x)$.*

*De plus, $G_F$ est nulle part dérivable dès que $M_F \neq 0$.*

### 3.13.3

Nous avons donc montré que toute suite digitale pour l'entier $s = 1$ et relative à une application $F : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $F(0) = F(q-1) = 0$ peut s'écrire comme la fonction sommatoire d'une suite $q$−automatique. Il serait donc intéressant de montrer qu'une suite digitale pour $s = 1$ et relative à une application $F : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $F(0) = 0$ mais $F(q-1) \neq 0$ ne peut pas s'écrire de la sorte, ce qui montrerait que cette condition $F(q-1) = 0$ est essentielle pour pouvoir appliquer ce premier théorème de Dumont et Thomas.

# 4 UTILISATION D'UN DEUXIEME THEOREME DE DUMONT-THOMAS.

Maintenant, nous allons utiliser et redémontrer un théorème de Dumont et Thomas, donné dans [4], et qui nous permettra de résoudre complètement la question principale dans le cas où $s = 1$: alors la fonction $G_F$ associée par la Proposition 1 à la suite digitale $u_F$ est nulle part dérivable dès que $M_F \neq 0$.

Dorénavant, $\sigma$ désignera une substitution sur un alphabet $A$ satisfaisant aux conditions du paragraphe intitulé "Quelques notations" ci-dessus, et nous noterons par $P = \{M \in A^*/ \exists\, a,\ b \in A :\ Ma \preceq \sigma(b)\}$ l'ensemble (fini) des préfixes stricts des images des lettres de $A$ par la substitution $\sigma$.

## 4.1 Systèmes de numération associés à une substitution.

**Définition 1** *Soit $\nu \in \mathbf{N}$ un entier et, pour chaque entier $i$ tel que $0 \leq i \leq \nu$, soit $(M_i, a_i)$ un élément de $A^* \times A$. Soit enfin $a \in A$. On dit que la suite finie $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ est $a$−admissible si :*

$$1 \leq i \leq \nu \Rightarrow M_{i-1}a_{i-1} \preceq \sigma(a_i);\ \ M_\nu a_\nu \preceq \sigma(a).$$

**Définition 2** *Soient $a \in A$ et, pour chaque entier $i \geq 1$, soit $(M_i, a_i)$ un élément de $A^* \times A$. On dit que la suite infinie $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ est $a$−admissible si :*

(i) $M_1 a_1 \preceq \sigma(a)$, $i \geq 2 \Rightarrow M_i a_i \preceq \sigma(a_{i-1})$;

(ii) $\forall I \in \mathbf{N}^*$, $\exists i \geq I \ /\ M_i a_i \prec \sigma(a_{i-1})$.

La première définition va servir à représenter les entiers, alors que la deuxième servira à représenter les réels de $[0,\ 1[$.

### 4.1.1 Représentation des entiers.

Commençons par remarquer que deux suites finies, de même cardinal, toutes deux $a$−admissibles, et ayant la même suite de mots, ont forcément la même

suite de lettres. En effet, si $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ et $(M_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ sont nos deux suites, alors :
$M_\nu a_\nu$ et $M_\nu a'_\nu$ préfixes de $\sigma(a) \Rightarrow a_\nu = a'_\nu$;
$M_{\nu-1}a_{\nu-1}$ et $M_{\nu-1}a'_{\nu-1}$ préfixes de $\sigma(a_\nu) = \sigma(a'_\nu) \Rightarrow a_{\nu-1} = a'_{\nu-1}$;
etc...
$M_0 a_0$ et $M_0 a'_0$ préfixes de $\sigma(a_1) = \sigma(a'_1) \Rightarrow a_0 = a'_0$.

**Lemme 1** *Soient $\nu \in \mathbf{N}$, $a \in A$ et $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ une suite $a$−admissible. Alors*

$$\sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M_l)| < |\sigma^\nu(M_\nu a_\nu)|.$$

Preuve : par récurrence sur $\nu \in \mathbf{N}$.
Pour $\nu = 0$, le résultat est trivial puisque l'inégalité s'écrit $|M_0| < |M_0 a_0|$.
Supposons le lemme vrai pour $\nu - 1$, et montrons-le pour $\nu \in \mathbf{N}^*$. Comme la suite $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu-1}$ est $a_\nu$−admissible, l'hypothèse de récurrence donne l'inégalité suivante :

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} |\sigma^l(M_l)| < |\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1}a_{\nu-1})|.$$

Or on sait que $M_{\nu-1}a_{\nu-1}$ est préfixe de $\sigma(a_\nu)$, donc $|\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1}a_{\nu-1})| \leq |\sigma^\nu(a_\nu)|$, de sorte que l'on obtient :

$$\sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M_l)| < |\sigma^\nu(a_\nu)| + |\sigma^\nu(M_\nu)| = |\sigma^\nu(M_\nu a_\nu)|.$$

**Lemme 2** *Soit $a \in A$ tel que $a \preceq \sigma(a)$. Soient $\nu$ et $\nu'$ deux entiers et $n$ un entier avec $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ et $(M'_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,\nu'}$ deux suites finies $a$−admissibles telles que :*

**(i)** $M_\nu \neq \omega$, $M'_{\nu'} \neq \omega$;

**(ii)** $n = \sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M_l)| = \sum_{l=0}^{\nu'} |\sigma^l(M'_l)|$.

*Alors $\nu = \nu'$.*

Preuve : d'après (ii) et le lemme 1, on a $|\sigma^{\nu'}(M'_{\nu'})| \leq n < |\sigma^\nu(M_\nu a_\nu)|$. Supposons par l'absurde que $\nu \neq \nu'$, par exemple $\nu' > \nu$, donc $\nu' \geq \nu + 1$ et $n \geq |\sigma^{\nu'}(M'_{\nu'})| \geq |\sigma^{\nu+1}(M'_{\nu'})| = |\sigma^\nu(\sigma(M'_{\nu'}))|$, mais on a $M'_{\nu'} \neq \omega$, donc $M'_{\nu'}$ commence par la lettre $a$ (en effet, $\sigma(a)$ commence à la fois par $a$ et par $M'_{\nu'}a'_{\nu'}$), et l'on aurait donc $n \geq |\sigma^\nu(\sigma(a))|$. Mais $\sigma(a)$ commence aussi par le mot $M_\nu a_\nu$, donc on aurait $n \geq |\sigma^\nu(M_\nu a_\nu)|$, ce qui contredit la première inégalité de la preuve.
Donc $\nu' > \nu$ est impossible, de même que $\nu > \nu'$ par le même raisonnement, d'où $\nu = \nu'$.

**Lemme 3** *Soit $\nu$ un entier. Supposons qu'il existe $a \in A$ et deux suites finies $a-$admissibles $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ et $(M'_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$, tels que :*

$$n = \sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M_l)| = \sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M'_l)|.$$

*Alors, $\forall i,\ 0 \leq i \leq \nu$, on a $(M_i, a_i) = (M'_i, a'_i)$.*

Preuve : par récurrence sur $\nu \in \mathbf{N}$.
Pour $\nu = 0$, on a $n = |M_0| = |M'_0|$, et $\sigma(a)$ commence à la fois par les mots $M_0 a_0$ et $M'_0 a'_0$, donc $(M_0, a_0) = (M'_0, a'_0)$.
Supposons le lemme vrai pour $\nu - 1$, et montrons le pour $\nu \in \mathbf{N}^*$. Supposons par l'absurde que $M'_\nu \neq M_\nu$; Comme $\sigma(a)$ commence à la fois par les mots $M'_\nu a'_\nu$ et $M_\nu a_\nu$, on a forcément $|M'_\nu| \neq |M_\nu|$. Supposons par exemple que $|M'_\nu| < |M_\nu|$, alors, toujours pour la même raison, on peut écrire que $M_\nu = M'_\nu a'_\nu M$, où $M \in A^*$. Alors le lemme 1 donne $n \geq |\sigma^\nu(M_\nu)| \geq |\sigma^\nu(M'_\nu a'_\nu)| > n$, ce qui est absurde. Donc $M'_\nu = M_\nu$, et $a'_\nu = a_\nu$; on applique alors l'hypothèse de récurrence aux deux suites $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu-1}$ et $(M'_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,\nu-1}$, qui sont toutes les deux $a_\nu = a'_\nu-$admissibles, et le lemme est démontré.

**Lemme 4** *Soient $k$ un entier $\geq 1$, $a$ un élément de $A$ et $M \in A^*$ un préfixe strict du mot $\sigma^k(a)$. Alors il existe un triplet $(M', a', M'')$ de $A^* \times A \times A^*$ tel que :*
*$M'a'$ est préfixe de $\sigma(a)$;*
*$M''$ est préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a')$;*
*$M = \sigma^{k-1}(M')M''$.*

Preuve : posons $\sigma(a) = a_1 a_2 \ldots a_l$, où $l \in \mathbf{N}^*$ et $a_i \in A$ pour $1 \leq i \leq l$.

1. Si $|M| < |\sigma^{k-1}(a_1)|$, alors $M$ est préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a_1)$, et le triplet $(M', a', M'') = (\omega, a_1, M)$ répond à la question.
2. Si $|M| \geq |\sigma^{k-1}(a_1)|$, alors il existe un unique entier $j$, $1 \leq j \leq l-1$, tel que l'on ait l'inégalité :

$$\sum_{h=1}^{j} |\sigma^{k-1}(a_h)| \leq |M| < \sum_{h=1}^{j+1} |\sigma^{k-1}(a_h)|.$$

En effet, sinon, on aurait $|M| \geq \sum_{h=1}^{l} |\sigma^{k-1}(a_h)| = |\sigma^k(a)|$, ce qui est impossible puisque $M$ est préfixe strict de $\sigma^k(a)$.
On pose alors $M' = a_1 a_2 \ldots a_j$ et $a' = a_{j+1}$; on a bien $M'a'$ préfixe de $\sigma(a)$, et l'on vérifie facilement que $\sigma^{k-1}(M') = \sigma^{k-1}(a_1 a_2 \ldots a_j)$ est préfixe de $M$. Ainsi, il existe un mot $M'' \in A^*$ tel que $M = \sigma^{k-1}(M')M''$, et, grâce à l'inégalité stricte $|M| < \sum_{h=1}^{j+1} |\sigma^{k-1}(a_h)|$, on a $M''$ préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a_{j+1})$, de sorte que le triplet $(M', a', M'')$ est trouvé.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat principal de ce paragraphe :

**Proposition 8** *Soit $n$ un entier $\geq 1$, alors il existe un unique entier $\nu = \nu(n) \in \mathbf{N}$ et il existe une unique suite finie 1−admissible $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$, telle que $M_\nu \neq \omega$ et que l'on ait :*

$$u_1u_2 \ldots u_n = \sigma^\nu(M_\nu)\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1})\ldots\sigma^1(M_1)\sigma^0(M_0).$$

Preuve : l'unicité de $\nu$ et de la suite $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ résultent directement des lemmes 2 et 3, puisque l'on a $n = \sum_{l=0}^{\nu} |\sigma^l(M_l)|$ et $1 \prec \sigma(1)$.
Montrons maintenant l'existence. L'entier $n \geq 1$ étant donné, il existe un unique entier $\nu = \nu(n) \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $|\sigma^\nu(1)| \leq n < |\sigma^{\nu+1}(1)|$. Le mot $M = u_1u_2 \ldots u_n$ est donc préfixe strict de $\sigma^{\nu+1}(1)$, et le lemme 4 avec $k = \nu+1 \geq 1$ et $a = 1$ donne l'existence d'un triplet $(M_\nu, a_\nu, M'') \in A^* \times A \times A^*$ tel que l'on ait :
$M_\nu a_\nu$ préfixe de $\sigma(1)$;
$M''$ préfixe strict de $\sigma^\nu(a_\nu)$;
$M = u_1u_2 \ldots u_n = \sigma^\nu(M_\nu)M''$.
De plus, grâce à la démonstration du lemme 4, on a $M_\nu \neq \omega$, puisque $|M| = n \geq |\sigma^\nu(1)|$. On applique alors $\nu$ fois ce lemme 4 à partir de $M''$ et de $a_\nu$, et on obtient l'existence.

**Définition 3** *Pour $n$ entier $\geq 1$, l'unique suite finie 1−admissible donnée par la proposition 8 s'appelle la représentation 1−admissible de $n$, et l'on admet que le mot vide $\omega$ est la représentation 1−admissible de 0.*

Terminons cette section sur la représentation des entiers par une propriété simple qui nous sera utile plus tard :

**Lemme 5** *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ sa représentation 1−admissible, alors $u_{n+1} = a_0$.*

Preuve :

**(i)** Si $n = 0$, alors $\nu = 0$ et $(M_0, a_0) = (\omega, 1)$ donc le résultat dit simplement que $u_1 = 1$;

**(ii)** Si $n \geq 1$, alors la définition de la représentation 1−admissible de $n$ entraîne que
$$\sigma^\nu(M_\nu)\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1})\ldots\sigma^1(M_1)\sigma^0(M_0)a_0 \preceq \sigma^{\nu+1}(1),$$
ce qui montre bien que $u_{n+1} = a_0$.

### 4.1.2 Représentation des réels.

Comme on a supposé que $M_\sigma$ est primitive, et que $\theta > 1$, nous pouvons poser, pour $a \in A$,
$$\varepsilon(a) = \lim_{n \to +\infty} \frac{|\sigma^n(a)|}{\theta^n},$$

l'existence et la stricte positivité de cette limite étant vraies grâce à ces deux hypothèses.(Voir l'article de Martine Queffelec, LN 1294, Substitution Dynamical Systems- Spectral Analysis. On peut montrer que, $\forall a \in A$, la suite de vecteurs $\frac{1}{\theta^n} L(\theta^n(a))$ converge vers le vecteur propre correspondant à $\theta$.) Nous prolongeons alors $\varepsilon$ à $A^*$ par concaténation, c'est-à-dire, pour $m \in A^*$, on pose

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = \omega, \\ \sum_{j=1}^{k} \varepsilon(a_j) & \text{si } m = a_1 a_2 \ldots a_k,\ a_j \in A. \end{cases}$$

En particulier, remarquons que, $\forall a \in A$, $\varepsilon(\sigma(a)) = \theta\varepsilon(a)$.

**Lemme 6** *Soient $a_0 \in A$, $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ une suite (infinie) $a_0-$admissible, et, pour $k$ entier $\geq 1$, $r_k = \sum_{i\geq k} \varepsilon(M_i)\theta^{k-i}$. Alors $r_k < \theta\varepsilon(a_{k-1})$.*

Preuve : comme les mots $M_i$ sont tous éléments de $P$, les $\varepsilon(M_i)$ sont uniformément bornés, donc la convergence de la série (positive) définissant $r_k$ est immédiate, puisque $\theta > 1$. De plus, pour tout $i \geq k$, on a $\varepsilon(\sigma(a_i)) = \theta\varepsilon(a_i) \geq \varepsilon(M_{i+1}a_{i+1})$, puisque $M_{i+1}a_{i+1}$ est préfixe de $\sigma(a_i)$. Or on a $r_k = \varepsilon(M_k a_k) - \sum_{j=k}^{+\infty}(\theta\varepsilon(a_j) - \varepsilon(M_{j+1}a_{j+1}))\theta^{-j+k-1}$, avec $\varepsilon(M_k a_k) = \varepsilon(M_k) + \varepsilon(a_k)$, donc $r_k \leq \varepsilon(M_k a_k) \leq \varepsilon(\sigma(a_{k-1})) = \theta\varepsilon(a_{k-1})$. Supposons que $r_k = \theta\varepsilon(a_{k-1})$, alors $r_k = \varepsilon(M_k a_k)$ et, pour tout $j \geq k$, $\varepsilon(\sigma(a_j)) = \varepsilon(M_{j+1}a_{j+1})$, d'où $\sigma(a_j) = M_{j+1}a_{j+1}$ (puisque $\varepsilon(a) > 0$, $\forall a \in A$). Mais ceci est en contradiction avec (ii) de la définition 2, d'où l'inégalité stricte $r_k < \theta\varepsilon(a_{k-1})$.

Donnons maintenant l'analogue de la Proposition 8 pour les nombres réels :

**Proposition 9** *Soient $a \in A$ et $x \in [0, \varepsilon(a)[$, alors il existe une unique suite infinie $a-$admissible $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ telle que :*

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}.$$

*Cette suite s'appelle alors la représentation $a-$admissible du réel $x \in [0, \varepsilon(a)[$.*

Preuve : l'unicité résulte directement du lemme 6. Pour l'existence, on définit par récurrence sur l'entier $k \geq 1$ la suite $(M_k, a_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $A^* \times A$ telle que $M_k a_k$ soit préfixe de $\sigma(a_{k-1})$ (avec $a_0 = a$), et que l'on ait les inégalités suivantes :

$$0 \leq \theta^k (x - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}) < \varepsilon(a_k).$$

Pour $k = 1$, la relation $0 \leq \theta x < \theta\varepsilon(a) = \varepsilon(\sigma(a))$ entraîne qu'il existe $(M_1, a_1) \in A^* \times A$ avec $M_1 a_1$ préfixe de $\sigma(a)$ et $\varepsilon(M_1) \leq \theta x < \varepsilon(M_1 a_1)$.
Supposons qu'on connaisse $(M_i, a_i)_{i=1,2,\ldots,k}$, et posons $I_k = \theta^k(x - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i})$, alors, comme $0 \leq I_k < \varepsilon(a_k)$, on a $0 \leq \theta I_k < \theta\varepsilon(a_k) = \varepsilon(\sigma(a_k))$, donc il existe $(M_{k+1}, a_{k+1})$ dans $A^* \times A$ avec $M_{k+1}a_{k+1}$ préfixe de $\sigma(a_k)$ et $\varepsilon(M_{k+1}) \leq$

$\theta I_k < \varepsilon(M_{k+1}a_{k+1})$; de ceci l'on déduit facilement que les inégalités souhaitées sont vraies pour $k+1$, ce qui permet de construire la suite $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$. Enfin, toujours ces inégalités, où l'on fait tendre $k$ vers l'infini, nous donnent l'écriture annoncée de $x$.

## 4.2 Une première expression pour $S(m)$.

Dorénavant, nous nous donnons $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $f(\omega) = 0$. Soient $m$ un entier $\geq 1$, $\nu = \nu(m) \in \mathbf{N}$ et $(M_i, a_i)_{i=0,1,\dots,\nu}$ sa représentation 1$-$admissible donnée par la proposition 8, avec $M_\nu \neq \omega$. Pour $n \in \mathbf{N}$ $/1 \leq n \leq m-1$, nous noterons par $(M_i(n), a_i(n))_{i=0,1,\dots,\nu}$ sa représentation 1$-$admissible, avec peut-être ici $M_\nu(n) = \omega$. Pour être très précis, la proposition 8 nous donne l'existence de $\nu(n) \in \mathbf{N}$ et de la suite $(M_i(n), a_i(n))_{i=0,1,\dots,\nu(n)}$ telle que $u_1u_2\dots u_n = \sigma^{\nu(n)}(M_{\nu(n)}(n))\dots\sigma^0(M_0(n))$ et $M_{\nu(n)}(n) \neq \omega$; il suffit alors de poser $(M_i(n), a_i(n)) = (\omega, 1)$ pour $\nu(n)+1 \leq i \leq \nu$, dans le cas où $\nu(n) < \nu$, pour pouvoir écrire que :

$$u_1u_2\dots u_n = \sigma^\nu(M_\nu(n))\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1}(n))\dots\sigma^1(M_1(n))\sigma^0(M_0(n)),$$

pour tout $n \in \{1, \dots, m-1\}$. Enfin, 0 est représenté par le mot vide $\omega$. Le but est de calculer la somme double :

$$S(m) = \sum_{n=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\nu} f(M_l(n)).$$

### 4.2.1 Notations.

Rappelons que l'on a supposé l'existence d'une base $\eta_i$ de vecteurs propres pour ${}^tM_\sigma$ (les valeurs propres sont bien sûr celles de $M_\sigma$.)

Pour $1 \leq i \leq \delta$, nous définissons un vecteur $\varepsilon_i$ de $\mathbf{C}^d$ par :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\delta} \alpha_i\eta_i = \sum_{i=1}^{\delta} \varepsilon_i$$

dans $\mathbf{C}^d$, et ${}^tM_\sigma\varepsilon_i = \theta_i\varepsilon_i$ (c'est-à-dire $\varepsilon_i = \alpha_i\eta_i$ est vecteur propre pour ${}^tM_\sigma$ et la valeur propre $\theta_i$.)

Pour $1 \leq i \leq \delta$ et $a \in A$, nous définissons un vecteur $\lambda_i(a)$ de $\mathbf{C}^d$ par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\delta} \beta_i(a)\eta_i = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i(a)$$

dans $\mathbf{C}^d$, (où le 1 est en position $a$ ) et ${}^tM_\sigma \lambda_i(a) = \theta_i \lambda_i(a)$ (c'est-à-dire $\lambda_i(a) = \beta_i(a)\eta_i$ est vecteur propre pour ${}^tM_\sigma$ et la valeur propre $\theta_i$.)

Les composantes de $\varepsilon_i$ (resp. de $\lambda_i(a)$) seront notées $\varepsilon_i(a)$, $a \in A$ (resp. $\lambda_i(a,b)$, $b \in A$ ). Rappelons enfin que $\mu = (\mu_a)_{a\in A}$ est l'unique vecteur propre pour $M_\sigma$ et la valeur propre $\theta$, à coordonnées $> 0$, normalisé par la condition $\sum_{a\in A} \mu_a = 1$.
L'intoduction des $\varepsilon_i$ et $\eta_i$ se justifie par le lemme suivant :

**Lemme 7** *Pour toute lettre $a \in A$, nous avons :*

**(i)** $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\sigma^n(a)| = \sum_{i=1}^{\delta} \varepsilon_i(a)\theta_i^n$;

**(ii)** $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall b \in A$, $L_b(\sigma^n(a)) = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i(a,b)\theta_i^n$;

**(iii)** $\varepsilon_1(a) = \varepsilon(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sigma^n(a)|}{\theta^n}$;

**(iv)** $\forall b \in A$, $(\varepsilon(a))^{-1}\lambda_1(a,b) = \lim_{n\to+\infty} \frac{L_b(\sigma^n(a))}{|\sigma^n(a)|} = \mu_b$.

*$\mu_b$ apparaît donc comme la fréquence limite, lorsque $n$ tend vers l'infini, du nombre d'apparitions de la lettre $b$ dans le mot $\sigma^n(a)$, ceci pour toute lettre $a \in A$.*

Preuve de (i) .

$${}^tM_\sigma.{}^t(1)_{a\in A} = \begin{pmatrix} L_1(\sigma(1)) & L_2(\sigma(1)) & \cdots & L_d(\sigma(1)) \\ L_1(\sigma(2)) & L_2(\sigma(2)) & \cdots & L_d(\sigma(2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_1(\sigma(d)) & L_2(\sigma(d)) & \cdots & L_d(\sigma(d)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\sigma(1)| \\ |\sigma(2)| \\ \vdots \\ |\sigma(d)| \end{pmatrix}.$$

De même, pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$${}^tM_\sigma.{}^t(|\sigma^n(a)|)_{a\in A} = \begin{pmatrix} |\sigma^{n+1}(1)| \\ |\sigma^{n+1}(2)| \\ \vdots \\ |\sigma^{n+1}(d)| \end{pmatrix},$$

puisque, $\forall a \in A$, $|\sigma^{n+1}(a)| = |\sigma^n(\sigma(a))| = \sum_{b \in A} L_b(\sigma(a))|\sigma^n(b)|$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, on a ${}^tM_\sigma.{}^t(|\sigma^n(a)|)_{a\in A} = {}^t(|\sigma^{n+1}(a)|)_{a\in A}$, donc, grâce à la définition des vecteurs $\varepsilon_i$, nous obtenons bien (i).
Preuve de (ii) . La même démonstration, où l'on remplace le vecteur ${}^t(|\sigma^n(a)|)_{a\in A}$ par le vecteur ${}^t(L_b(\sigma^n(a)))_{a\in A}$, et où l'on remplace le vecteur ${}^t(1)_{a\in A}$ par le vecteur n'ayant que des 0 sauf un 1 en position $a$, montre la propriété (ii).
Preuve de (iii) . Comme $|\sigma^n(a)| = \sum_{i=1}^{\delta} \varepsilon_i(a)\theta_i^n$ avec $2 \le i \le \delta \Rightarrow |\theta_i| < \theta$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\sigma^n(a)|}{\theta^n} = \varepsilon_1(a)$, que l'on avait appelé $\varepsilon(a)$ au paragraphe précédent.
Preuve de (iv) . De même, comme $L_b(\sigma^n(a)) = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i(a,b)\theta_i^n$ avec $2 \le i \le \delta \Rightarrow |\theta_i| < \theta$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{L_b(\sigma^n(a))}{\theta^n} = \lambda_1(a,b)$, ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\lambda_1(a,b)(\varepsilon(a))^{-1} = (\lim_{n\to+\infty} \frac{L_b(\sigma^n(a))}{\theta^n})(\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta^n}{|\sigma^n(a)|}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{L_b(\sigma^n(a))}{|\sigma^n(a)|},$$

d'où la première égalité de (iv). Enfin, pour montrer que cette quantité est égale à $\mu_b$, il s'agit de remarquer que les deux vecteurs $(\varepsilon(a))_{a\in A}$ et $(\lambda_1(a,b))_{a\in A}$ sont tous les deux à coordonnées positives et vecteurs propres pour ${}^tM_\sigma$ et la valeur propre $\theta$, donc qu'ils sont homothétiques, le coefficient de proportionnalité étant positif. Donc $\exists \lambda'_b > 0 \ / \ \forall a \in A$, $\varepsilon(a)^{-1}\lambda_1(a,b) = \lambda'_b$. Mais comme $\lambda_1(a)_{a\in A}$ est vecteur propre de ${}^tM_\sigma$, alors le vecteur $(\lambda'_b)_{b\in A}$ est vecteur propre pour $M_\sigma$ et la valeur propre $\theta$, et comme $\sum_{b=1}^{d} \lambda_1(a,b) = \lim \frac{|\sigma^n(\theta)|}{\theta^n}$ et $\lambda'_b = \frac{\lambda_1(a,b)}{\varepsilon(a)}$, on en tire $\sum_{b\in A} \lambda'_b = 1$. Ainsi, grâce à la primitivité de $M_\sigma$, on a donc bien $\lambda'_b = \mu_b$, $\forall b \in A$, ce qui termine la preuve du lemme.

### 4.2.2 Expression pour $S(m)$.

En gardant les notations du début de ce paragraphe, rappelons que l'on cherche à calculer

$$S(m) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\nu} f(M_l(n)).$$

Pour cela, nous posons :

$$\forall l \ , \ 0 \le l \le \nu, \ S_l = \sum_{n=0}^{m-1} f(M_l(n)),$$

de sorte que l'on a clairement :

$$S(m) = \sum_{0\le l\le \nu} S_l.$$

**Lemme 8** • *Posons d'abord* $S'_\nu = 0$ *et*

$$S'_l = \sum_{(M,c)\in E(l)} f(M)|\sigma^l(c)|, \ \forall l \ , \ 0 \le l \le \nu - 1,$$

*avec*

$$E(l) = \{(M,c) \in A^* \times A \;/ \exists (M',b) \in A^* \times A : M'b \preceq N_l, \; Mc \preceq \sigma(b)\},$$

*et où*

$$N_l = \sigma^{\nu-l-1}(M_\nu)...\sigma^1(M_{l+2})\sigma^0(M_{l+1}) \in A^*.$$

- *Posons ensuite*

$$S_l'' = \sum_{(M,b)\in A^*\times A \;/ Mb \preceq M_l} f(M)|\sigma^l(b)|, \; \forall l \;, \; 0 \le l \le \nu.$$

- *Posons enfin* $S_0''' = 0$ *et* $S_l''' = f(M_l)|\sigma^{l-1}(M_{l-1})...\sigma^0(M_0)|, \; \forall l \;, \; 1 \le l \le \nu$.

- *Alors, pour* $0 \le l \le \nu$, *on a* $S_l = S_l' + S_l'' + S_l'''$.

Preuve : nous allons démontrer le résultat en distinguant 3 cas selon que $l = \nu$, que $1 \le l \le \nu - 1$ ou que $l = 0$, mais, dans chaque cas, nous utiliserons le fait que, comme $(M_i, a_i)_{i=0,1,...,\nu}$ (resp. $(M_i(n), a_i(n))_{i=0,1,...,\nu}$ ) est la représentation 1−admissible de l'entier $m \ge 1$ (resp. de l'entier $n$ ; $1 \le n \le m-1$ ), on a les inégalités strictes suivantes :

$$0 < n = \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i(n))| < m = \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)|.$$

Premier cas : $l = \nu$. Grâce à l'inégalité précédente et comme les deux mots $M_\nu(n)a_\nu(n)$ et $M_\nu a_\nu$ sont préfixes de $\sigma(1)$, on a nécessairement $M_\nu(n)$ préfixe de $M_\nu$. Distinguons alors 2 cas :
(i) : $M_\nu(n) = M_\nu$, c'est-à-dire $n \ge |\sigma^\nu(M_\nu)|$, alors on a $Card\{n \in \mathbf{N} \;/ 1 \le n \le m-1 \;:\; M_\nu(n) = M_\nu\} = \sum_{i=0}^{\nu-1} |\sigma^i(M_i)| = \left|\sum_{i=0}^{\nu-1} \sigma^i(M_i)\right|$, et il vient donc :

$$\sum_{n=0,\; M_\nu(n)=M_\nu}^{m-1} f(M_\nu(n)) = f(M_\nu)\left|\sum_{i=0}^{\nu-1} \sigma^i(M_i)\right| = S_\nu'''.$$

(ii) : $M_\nu(n) \prec M_\nu$. c'est-à-dire $n < |\sigma^\nu(M_\nu)|$, alors $M_\nu(n)$ est préfixe strict de $M_\nu$. Supposons que $M_\nu = b_0b_1...b_{k-1}$, où $b_i \in A$ pour $0 \le i \le k-1$, et où $k = |M_\nu| \in \mathbf{N}^*$. Alors $M_\nu(n)$ peut prendre $k$ valeurs, à savoir $\omega$ pour $|\sigma^\nu(b_0)|$ entiers $n$, ou $b_0$ pour $|\sigma^\nu(b_1)|$ entiers $n$, etc..., ou $b_0b_1...b_{k-2}$ pour $|\sigma^\nu(b_{k-1})|$ entiers $n$; ce qui donne :

$$\sum_{n=0,\; M_\nu(n)\prec M_\nu}^{m-1} f(M_\nu(n)) = \sum_{Mb \preceq M_\nu} f(M)|\sigma^\nu(b)| = S_\nu''.$$

Donc le lemme est démontré pour $l = \nu$, à condition de poser $S'_\nu = 0$.

Deuxième cas : $1 \leq l \leq \nu - 1$. Nous allons ici distinguer 3 cas :

(i) : $(M_\nu(n), M_{\nu-1}(n), ..., M_l(n)) = (M_\nu, M_{\nu-1}, ..., M_l(n))$ donc aussi $(a_\nu(n), a_{\nu-1}(n), ..., a_l(n)) = (a_\nu, a_{\nu-1}, ..., a_l)$, c'est-à-dire que l'on a les inégalités suivantes :

$$\sum_{i=l}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| \leq n < \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| = m,$$

donc il y a exactement $|\sum_{i=0}^{l-1} \sigma^i(M_i)|$ entiers $n$ satisfaisant (i), et l'on obtient alors $S'''_l$.

(ii) : $(M_\nu(n), M_{\nu-1}(n), ..., M_{l+1}(n)) = (M_\nu, M_{\nu-1}, ..., M_{l+1})$, mais $M_l(n) \neq M_l$. Alors, comme les deux mots $M_l(n)a_l(n)$ et $M_l a_l$ sont tous les deux préfixes du mot $\sigma(a_{l+1}(n)) = \sigma(a_{l+1})$, on a $M_l(n)$ préfixe strict de $M_l$. En faisant exactement comme dans le premier cas (cas(ii)), on obtient le terme $S''_l$.

(iii) : $\exists i \ / \ l+1 \leq i \leq \nu,\ M_i(n) \neq M_i$, on a donc ici

$$n < \sum_{j=l+1}^{\nu} |\sigma^j(M_j)|,$$

et remarquons au passage que, si $k$ est le plus grand des entiers $i$ tels que $l+1 \leq i \leq \nu$ et $M_i(n) \neq M_i$, alors $M_k(n)$ est préfixe strict de $M_k$. Posons $M' = \sigma^{\nu-l-1}(M_\nu(n))...\sigma^1(M_{l+2}(n))\sigma^0(M_{l+1}(n))$, alors l'hypothèse (iii) se traduit par le fait que $M'$ est préfixe strict du mot $N_l$ donné dans l'énoncé du lemme, donc $\exists b \in A$ tel que $M'b \preceq N_l$, et en fait le lemme 5 nous dit que $b = a_{l+1}(n)$. Supposons le couple $(M', b) \in A^* \times A$ fixé tel que $M'b \preceq N_l$, on sait qu'alors le mot $M_l(n)a_l(n)$ est préfixe du mot $\sigma(b) = \sigma(a_{l+1}(n))$. Supposons que $\sigma(b) = c_0c_1...c_{k-1}$ où $k = |\sigma(b)| \in \mathbf{N}$ et où $c_i \in A$ pour $0 \leq i \leq k-1$, alors le mot $M_l(n)$ peut prendre $k$ valeurs distinctes, à savoir $\omega$ pour $|\sigma^l(c_0)|$ entiers $n$, ou $c_0$ pour $|\sigma^l(c_1)|$ entiers $n$, etc..., ou enfin $c_0c_1...c_{k-2}$ pour $|\sigma^l(c_{k-1})|$ entiers $n$. Ainsi, nous obtenons dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{m-1} f(M_l(n)) = \sum_{M'b \preceq N_l} \sum_{Mc \preceq \sigma(b)} f(M)|\sigma^l(c)| = S'_l.$$

Comme ces trois cas épuisent toutes les possibilités, le lemme est encore vrai pour $1 \leq l \leq \nu - 1$.

Troisième cas : $l = 0$. En fait, il suffit de copier la démonstration précédente, sauf que le cas (i) n'existe plus, c'est-à-dire qu'il suffit de prendre $S'''_0 = 0$, et le lemme est alors entièrement démontré.

Dorénavant, nous posons $\theta' = |\theta_2|$, et nous définissons trois cas distincts :

- Cas 1 : $\theta' > 1$;
- Cas 2 : $\theta' = 1$;

- Cas 3 : $\theta' < 1$.

**Lemme 9** *Soient* $E = \{(b, M, c) \in A \times A^* \times A \; / Mc \preceq \sigma(b)\}$ *et*

$$\alpha = \theta^{-1} \sum_{(b,M,c)\in E} \mu_b f(M)\varepsilon(c).$$

*Alors il existe pour chaque lettre* $a \in A$ *un réel* $\mu(a)$ *tel que, si l'on prolonge* $\mu$ *à* $A^*$ *par concaténation, on ait la formule :*

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} S'_l = \alpha \sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=1}^{\nu} \mu(M_i)\theta^i + \begin{cases} O(\nu\theta'^{\nu}) & \textit{dans le cas 1}, \\ O(\nu^2) & \textit{dans le cas 2}, \\ O(1) & \textit{dans le cas 3}. \end{cases}$$

Preuve : grâce au lemme précédent, nous pouvons écrire, pour $0 \leq l \leq \nu - 1$,

$$S'_l = \sum_{(b,M,c)\in E} L_b(N_l) f(M) |\sigma^l(c)|,$$

or, comme $N_l = \sigma^{\nu-l-1}(M_\nu)...\sigma^1(M_{l+2})\sigma^0(M_{l+1})$, on a

$$L_b(N_l) = \sum_{i=l+1}^{\nu} L_b(\sigma^{i-l-1}(M_i));$$

mais avec le lemme 7(ii), on a

$$L_b(\sigma^{i-l-1}(M_i)) = \sum_{j_1=1}^{\delta} \lambda_{j_1}(M_i, b)\theta_{j_1}^{i-l-1}.$$

Puis le lemme 7(i) donne

$$|\sigma^l(c)| = \sum_{j_2=1}^{\delta} \varepsilon_{j_2}(c)\theta_{j_2}^l.$$

On a donc :

$$S'_l = \sum_{(b,M,c)\in E} \sum_{i=l+1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{\delta} \sum_{j_2=1}^{\delta} \lambda_{j_1}(M_i, b)\varepsilon_{j_2}(c) f(M)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta_{j_2}^l.$$

Notons $\Delta = \{1, 2, ..., \delta\}$ et, pour $(j_1, j_2) \in \Delta^2$ et $W \in A^*$, posons

$$\alpha(j_1, j_2, W) = \sum_{(b,M,c)\in E} \lambda_{j_1}(W, b)\varepsilon_{j_2}(c) f(M),$$

de sorte que :

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} S'_l = \sum_{l=0}^{\nu-1} \sum_{i=l+1}^{\nu} \sum_{(j_1,j_2)\in\Delta^2} \alpha(j_1,j_2,M_i)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l},$$

soit, en changeant l'ordre des sommations :

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} S'_l = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{(j_1,j_2)\in\Delta^2} \alpha(j_1,j_2,M_i)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l}.$$

Dans cette formule, nous allons distinguer 4 cas selon les positions respectives de $j_1$ et de $j_2$ par rapport à 1.

**(a)** : $(j_1,j_2) = (1,1)$. Alors $\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l} = \theta^{i-1}$, et, pour $W \in A^*$, nous avons

$$\alpha(1,1,W) = \sum_{(b,M,c)\in E} \lambda_1(W,b)\varepsilon(c)f(M) = \sum_{(b,M,c)\in E} \varepsilon(W)\frac{\lambda_1(W,b)}{\varepsilon(W)}\varepsilon(c)f(M),$$

or le lemme 7(iv), ou plutôt son extension aux mots de $A^* \setminus \{\omega\}$, donne $\frac{\lambda_1(W,b)}{\varepsilon(W)} = \mu_b$, donc

$$\alpha(1,1,W) = \varepsilon(W) \sum_{(b,M,c)\in E} \mu_b f(M)\varepsilon(c) = \varepsilon(W)\theta\alpha, \ \forall W \in A^*,$$

de sorte que l'on obtient ici le premier terme de l'égalité du lemme, puisque :

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1} \alpha(1,1,M_i)\theta_1^{i-l-1}\theta_1^{l} = \alpha\sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i.$$

**(b)** : $j_1 = 1,\ j_2 \neq 1$. Alors $\theta_{j_1} = \theta \neq \theta_{j_2}$ et, pour $2 \leq j_2 \leq \delta$ et $W \in A^*$, on a

$$\alpha(1,j_2,W) = \varepsilon(W) \sum_{(b,M,c)\in E} \mu_b\varepsilon_{j_2}(c)f(M),$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{j_2=2}^{\delta} \alpha(1,j_2,M_i)\theta^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l} = \sum_{i=1}^{\nu}\varepsilon(M_i)\sum_{j_2=2}^{\delta}\sum_{(b,M,c)\in E}\mu_b\varepsilon_{j_2}(c)f(M)\sum_{l=0}^{i-1}\theta^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l}.$$

Comme $\theta_{j_2} \neq \theta$, $\sum_{l=0}^{i-1}\theta^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l} = \frac{\theta^i-\theta_{j_2}^i}{\theta-\theta_{j_2}}$ ; Pour $a \in A$, nous posons :

$$\mu'(a) = \varepsilon(a)\sum_{j_2=2}^{\delta}\frac{1}{\theta-\theta_{j_2}}\sum_{(b,M,c)\in E}\mu_b\varepsilon_{j_2}(c)f(M) \ \in \mathbf{R},$$

puis nous prolongeons cette fonction $\mu' : A \to \mathbf{R}$ à $A^*$ par concaténation, de sorte que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{j_2=2}^{\delta} \alpha(1,j_2,M_i)\theta^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l} = \sum_{i=1}^{\nu}\mu'(M_i)\theta^i - \left\{\sum_{i=1}^{\nu}\varepsilon(M_i)\sum_{j_2=2}^{\delta}\sum_{(b,M,c)\in E}\mu_b\varepsilon_{j_2}(c)f(M)\frac{\theta_{j_2}^i}{\theta-\theta_{j_2}}\right\}.$$

On remarque alors que, les $M_i$ étant éléments de l'ensemble fini $P$, la quantité

$$\varepsilon(M_i)\sum_{j_2=2}^{\delta}\mu_b\varepsilon_{j_2}(c)f(M)\frac{1}{\theta-\theta_{j_2}}$$

est uniformément bornée pour $1 \le i \le \nu$, de sorte que le terme entre accolades à la fin de l'égalité ci-dessus est en $O(\sum_{i=1}^{\nu}\theta'^i)$ lorsque $\nu \to +\infty$, quantité qui est elle-même en

$$\begin{cases} O(\theta'^\nu) & \text{dans le cas 1,}\\ O(\nu) & \text{dans le cas 2,}\\ O(1) & \text{dans le cas 3.}\end{cases}$$

(c) : $j_2 = 1,\ j_1 \neq 1$. Alors $\theta_{j_1} \neq \theta_{j_2} = \theta$ et, pour $2 \le j_1 \le \delta$ et $W \in A^*$, on a

$$\alpha(j_1,1,W) = \sum_{(b,M,c)\in E}\lambda_{j_1}(W,b)\varepsilon(c)f(M),$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{j_1=2}^{\delta}\alpha(j_1,1,M_i)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta^l = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j_1=2}^{\delta}\left(\sum_{l=0}^{i-1}\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta^l\right)\left(\sum_{(b,M,c)\in E}\lambda_{j_1}(M_i,b)\varepsilon(c)f(M)\right).$$

Comme $\theta_{j_1} \neq \theta$, $\sum_{l=0}^{i-1}\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta^l = \frac{\theta^i-\theta_{j_1}^i}{\theta-\theta_{j_1}}$; nous définissons une deuxième fonction $\mu'' : A^* \to \mathbf{R}$, en la définissant sur les lettres $a \in A$ par :

$$\mu''(a) = \sum_{j_1=2}^{\delta}\frac{1}{\theta-\theta_{j_1}}\sum_{(b,M,c)\in E}\lambda_{j_1}(a,b)\varepsilon(c)f(M) \ \in \mathbf{R},$$

et en la prolongeant par concaténation, comme d'habitude, et l'on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{j_1=2}^{\delta}\alpha(j_1,1,M_i)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta^l = \sum_{i=1}^{\nu}\mu''(M_i)\theta^i - \left\{\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j_1=2}^{\delta}\sum_{(b,M,c)\in E}\lambda_{j_1}(M_i,b)f(M)\varepsilon(c)\frac{\theta_{j_1}^i}{\theta-\theta_{j_1}}\right\}.$$

Pour la même raison que ci-dessus, le terme entre accolades est du même ordre que précédemment, et il est négligeable devant l'erreur de l'énoncé du lemme; nous posons maintenant $\mu : A^* \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par :

$$\mu(M) = \mu'(M) + \mu''(M),\ \forall M \in A^*,$$

et nous avons :

$$\sum_{l=0}^{\nu-1} S_l' = \alpha \sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=1}^{\nu} \mu(M_i)\theta^i + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{j_1=2}^{\delta}\sum_{j_2=2}^{\delta} \alpha(j_1, j_2, M_i)\theta_{j_1}^{i-l-1}\theta_{j_2}^{l} + E,$$

où le terme d'erreur $E$ est, pour l'instant, en $O(\theta'^{\nu})$ (respectivement $O(\nu)$ ou $O(1)$) selon que l'on est dans le cas 1 (respectivement 2 ou 3).

**(d)** : $j_1 \neq 1$, $j_2 \neq 1$. Alors il s'agit de distinguer deux cas selon que $\theta_{j_1} = \theta_{j_2}$ ou que $\theta_{j_1} \neq \theta_{j_2}$; on vérifie sans peine que, dans ce dernier cas, la sommation donne lieu à une erreur en $O(\sum_{i=1}^{\nu} \theta'^i)$, c'est-à-dire encore en $E$, alors que, dans le cas où $\theta_{j_1} = \theta_{j_2}$, la sommation donne une erreur en $O(\sum_{i=1}^{\nu} i\theta'^i)$, erreur qui est elle-même en $O(\nu\theta'^{\nu})$ (respectivement $O(\nu^2)$ ou $O(1)$) selon le cas étudié, ce qui termine la preuve du lemme.

Nous en arrivons maintenant au résultat principal de cette section :

**Théorème 1** *Pour $M \in P$, posons*

$$\alpha(M) = \mu(M) + \sum_{M'b \preceq M} f(M')\varepsilon(b),$$

*où la somme est étendue à tous les couples $(M', b) \in P \times A$ tels que $M'b$ soit préfixe de $M$. Posons d'autre part*

$$M_i^+ = M_{i+1}M_{i+2}\dots M_\nu \ \in A^*,\ \forall i,\ 0 \leq i \leq \nu - 1,$$

*et $M_\nu^+ = \omega$, et où l'on rapelle que $(M_i, a_i)_{0\leq i\leq\nu}$ est le $1-$développement de $m$. Alors on a la formule :*

$$S(m) = \alpha \sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=0}^{\nu}(\alpha(M_i) + f(M_i^+)\varepsilon(M_i))\theta^i + \begin{cases} O(\nu\theta'^{\nu}) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu^2) & \text{dans le cas 2,} \\ O(\nu) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

<u>Démonstration.</u> Grâce au lemme 8, on a

$$S(m) = \sum_{0\leq l\leq\nu} (S_l' + S_l'' + S_l'''),$$

et le lemme 9 nous donne $\sum_{0\leq l\leq\nu} S_l'$.

D'une part, nous avons $\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l'' = \sum_{l=0}^{\nu}\sum_{Mb\preceq M_l} f(M)|\sigma^l(b)|$, or le lemme 7(i) donne $|\sigma^l(b)| = \sum_{i=1}^{\delta}\varepsilon_i(b)\theta_i^l = \varepsilon(b)\theta^l + O(\theta'^l)$, donc

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l'' = \sum_{i=0}^{\nu}\sum_{Mb\preceq M_i} f(M)\varepsilon(b)\theta^i + O(\sum_{i=0}^{\nu}\theta'^i);$$

D'autre part, nous avons $\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l''' = \sum_{l=1}^{\nu} f(M_l)|\sigma^{l-1}(M_{l-1})...\sigma^0(M_0)|$, et encore le lemme 7(i) donne $|\sigma^{l-1}(M_{l-1})...\sigma^0(M_0)| = \sum_{i=0}^{l-1}\varepsilon(M_i)\theta^i + O(\sum_{i=0}^{l-1}\theta'^i)$, donc

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l''' = \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{l=i+1}^{\nu} f(M_l)(\varepsilon(M_i)\theta^i + O(\theta'^i)).$$

Nous obtenons donc :

$$S(m) = \alpha\sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=1}^{\nu}\mu(M_i)\theta^i + \sum_{i=0}^{\nu}\sum_{M'b\preceq M_i} f(M')\varepsilon(b)\theta^i$$

$$+ \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{l=i+1}^{\nu} f(M_l)\varepsilon(M_i)\theta^i + O(\sum_{i=0}^{\nu}\theta'^i) + O(\sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{l=i+1}^{\nu}\theta'^i) + E,$$

où $E$ est l'erreur du lemme 9. Dans cette formule, en écrivant $\sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{l=i+1}^{\nu} f(M_l)\varepsilon(M_i)\theta^i = \sum_{i=0}^{\nu}\varepsilon(M_i)f(M_i^+)\theta^i$, nous trouvons comme "terme principal" :

$$\alpha\sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=0}^{\nu}(\alpha(M_i) + f(M_i^+)\varepsilon(M_i))\theta^i,$$

comme annoncé; quant au "terme d'erreur", le plus important est

$$O(\sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{l=i+1}^{\nu}\theta'^i),$$

dont on vérifie sans peine qu'il est bien, dans chaque cas, comme annoncé dans le théorème.

Nous terminons cette section par un lemme qui nous sera utile par la suite :

**Lemme 10** *On a la formule :*

$$\sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i = m\log_\theta m - m\log_\theta(\sum_{i=0}^{\nu}\varepsilon(M_i)\theta^{i-\nu-1}) - \sum_{i=0}^{\nu}(\nu+1-i)\varepsilon(M_i)\theta^i + E,$$

*où l'erreur $E$ est du même ordre que dans le théorème 1.*

Preuve : il est clair que le lemme sera prouvé lorsqu'on aura montré que

$$m \log_\theta m = \sum_{i=0}^{\nu} (\nu+1)\varepsilon(M_i)\theta^i + m\log_\theta(\sum_{j=0}^{\nu} \varepsilon(M_j)\theta^{j-\nu-1}) + E.$$

Comme $(M_i, a_i)_{i=0,1,\dots,\nu}$ est la représentation 1−admissible de $m$, on a $m = \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| = \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon(M_i)\theta^i + O(\sum_{i=0}^{\nu} \theta'^i)$, soit :

$$m = \sum_{i=0}^{\nu} \varepsilon(M_i)\theta^i + \begin{cases} O(\theta'^\nu) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu) & \text{dans le cas 2,} \\ O(1) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

En prenant les logarithmes en base $\theta$, on a :

$$\log_\theta m = \nu + 1 + \log_\theta \left( \sum_{j=0}^{\nu} \varepsilon(M_j)\theta^{j-\nu-1} + \begin{cases} O((\frac{\theta'}{\theta})^\nu) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu\theta^{-\nu}) & \text{dans le cas 2,} \\ O(\theta^{-\nu}) & \text{dans le cas 3.} \end{cases} \right)$$

Il suffit alors de faire le produit de ces deux égalités pour obtenir celle annoncée au début de la preuve.

## 4.3 Une deuxième expression pour $S(m)$.

### 4.3.1 Définition et propriétés des fonctions $F_a(x)$.

**Définition 4** *Soit $a \in A$; pour $x \in [0, \varepsilon(a)[$, soit $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ sa représentation $a$−admissible (donnée par la proposition 9). Soient $\alpha$ et $\alpha(M)$, $M \in P$ définies aux lemmes 9 et théorème 1. Posons $M_1^- = \omega$, et $M_i^- = M_1 M_2 \dots M_{i-1}$ pour $i \geq 2$. Nous définissons alors une fonction $F_a : [0, \varepsilon(a)[ \to \mathbf{R}$ par :*

$$F_a(x) = -\alpha x \log_\theta x + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \alpha(M_i) + \varepsilon(M_i) f(M_i^-)\right)\theta^{-i},$$

*où l'on convient que $x\log_\theta x = 0$ pour $x = 0$.*

**Lemme 11 (i)** *Si $a, b \in A$ sont telles que $b \preceq \sigma(a)$, et si $x \in [0, \varepsilon(b)[$, alors $x\theta^{-1} \in [0, \varepsilon(a)[$, et l'on a $F_a(x\theta^{-1}) = \theta^{-1}F_b(x)$.*

**(ii)** *Soit $x \in [0, \varepsilon(a)[$ comme dans la définition 4, et, pour $k$ entier $\geq 1$, soient $x_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ et $t_k = x - x_k$. On a alors la formule :*

$$F_a(x) = F_a(x_k) + \theta^{-k} F_{a_k}(\theta^k t_k) - \alpha(x\log_\theta x - x_k \log_\theta x_k) + \alpha t_k \log_\theta t_k + f(M_{k+1}^-)t_k.$$

Preuve de (i) : comme $b \preceq \sigma(a)$, et comme $\varepsilon$ est une fonction strictement positive sur les lettres de $A$, on a $\varepsilon(b) \leq \varepsilon(\sigma(a)) = \theta\varepsilon(a)$, donc $0 \leq x < \varepsilon(b) \leq \theta\varepsilon(a) \Rightarrow 0 \leq x\theta^{-1} < \varepsilon(a)$, d'où $x\theta^{-1} \in [0, \varepsilon(a)[$, de sorte que l'on peut calculer $F_a(x\theta^{-1})$.

On remarque alors que, si $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ est la représentation $b$-admissible de $x \in [0, \varepsilon(b)[$, c'est-à-dire si l'on a $x = \sum_{i\geq 1} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ avec $M_1 a_1 \preceq \sigma(b)$ et $i \geq 2 \Rightarrow M_i a_i \preceq \sigma(a_{i-1})$, alors on a $x\theta^{-1} = \sum_{i\geq 2} \varepsilon(M_{i-1})\theta^{-i}$; donc, en posant $(M_0, a_0) = (\omega, b)$, on voit que la suite $(M_i, a_i)_{i\geq 0}$ est $a$-admissible, et que c'est la représentation $a$-admissible de $x\theta^{-1} = \sum_{i\geq 1} \varepsilon(M_{i-1})\theta^{-i}$; donc

$$F_a(x\theta^{-1}) = -\alpha x\theta^{-1} \log_\theta(x\theta^{-1}) + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-i\alpha\varepsilon(M_{i-1}) + \alpha(M_{i-1}) + \varepsilon(M_{i-1}) f(M_{i-1}^-)\right) \theta^{-i}.$$

Mais comme $M_0 = \omega$, on a $\varepsilon(M_0) = \alpha(M_0) = 0$, d'où facilement :

$$F_a(x\theta^{-1}) = \theta^{-1} F_b(x) + \alpha\theta^{-1} \left( x - \sum_{i\geq 1} \varepsilon(M_i)\theta^{-i} \right) = \theta^{-1} F_b(x).$$

Preuve de (ii) :

- $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$, où $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ est la représentation $a$-admissible de $x \in [0, \varepsilon(a)[$;
- $x_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$, où $(M_i, a_i)_{i=1,2,\ldots,k}(\omega, 1)_{i\geq k+1}$ est la représentation $a$-admissible de $x_k \in [0, \varepsilon(a)[$;
- Enfin, $\theta^k t_k = \sum_{i\geq k+1} \varepsilon(M_i)\theta^{k-i} = \theta^{-1} r_{k+1}$, où $r_{k+1} = \sum_{i\geq k+1} \varepsilon(M_i)\theta^{k+1-i}$ a été défini au lemme 6 et vérifie $r_{k+1} < \theta\varepsilon(a_k)$, donc $\theta^k t_k \in [0, \varepsilon(a_k)[$, et il a pour représentation $a_k$-admissible $\theta^k t_k = \sum_{i\geq 1} \varepsilon(M_{k+i})\theta^{-i}$, avec la suite $(M_{k+i}, a_{k+i})_{i\geq 1}$ qui est bien $a_k$-admissible, puisque $M_{k+1}a_{k+1} \preceq \sigma(a_k)$, et que $i \geq 2 \Rightarrow M_{k+i}a_{k+i} \preceq \sigma(a_{k+i-1})$.

Il suffit alors de calculer le membre de droite de l'égalité (ii) pour s'apercevoir que l'on tombe précisément sur $F_a(x)$.

**Lemme 12** *Soient $a \in A$, $x \in [0, \varepsilon(a)[$ d'écriture $a$-admissible $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ et, pour $k$ entier $\geq 1$, $x_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$. Alors :*

(i) $F_a(x) = O(1)$;

(ii) $|F_a(x) - F_a(x_k)| = O(k\theta^{-k})$.

Preuve de (i) : $F_a(x) = -\alpha x \log_\theta x + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \alpha(M_i) + \varepsilon(M_i) f(M_i^-)\right) \theta^{-i}$, avec $\varepsilon(M_i)$ et $\alpha(M_i)$ qui sont en $O(1)$ puisque les $M_i$ sont dans l'ensemble fini $P$. D'autre part, $f(M_i^-) = f(M_1 M_2 \ldots M_{i-1})$ est quant à lui en $O(i)$, donc finalement on a :

$$F_a(x) = O\left(\sum_{i=1}^{+\infty} i\theta^{-i}\right) = O(1),$$

puisque $\theta > 1$.
Preuve de (ii) : nous utiliserons les notations et le résultat du lemme 11(ii), à savoir :

$$|F_a(x) - F_a(x_k)| = |\theta^{-k} F_{a_k}(\theta^k t_k) - \alpha R_k + f(M_{k+1}^-)t_k|,$$

où l'on a noté $R_k = x \log_\theta x - x_k \log_\theta x_k - t_k \log_\theta t_k$.

1. D'abord, comme on l'a vu dans la preuve du lemme 11(ii), on a $\theta^k t_k \in [0, \varepsilon(a_k)[$, donc $\theta^k t_k = O(1)$ et $t_k = O(\theta^{-k})$; et, grâce au (i) de ce lemme, on a $F_{a_k}(\theta^k t_k) = O(1)$, d'où :

$$\theta^{-k} F_{a_k}(\theta^k t_k) = O(\theta^{-k}).$$

2. Ensuite, écrivons $R_k = (x - x_k)\log_\theta x - (x_k - x)\log_\theta x_k + x_k \log_\theta x - x \log_\theta x_k - t_k \log_\theta t_k$, soit :

$$R_k = t_k(\log_\theta x + \log_\theta x_k - \log_\theta t_k) + x_k \log_\theta x - x \log_\theta x_k.$$

   Distinguons deux cas selon que $x_k = 0$ ou $x_k \neq 0$.

   - Si $x_k = 0$, alors $t_k = x$ et l'on trouve $R_k = 0$.
   - Si $x_k \neq 0$, comme $x_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$, on a $x_k = O(k\theta^{-k})$, donc les deux termes $x_k \log_\theta x$ et $x \log_\theta x_k$ sont en $O(k\theta^{-k})$; d'autre part, comme $\log_\theta x + \log_\theta x_k = O(1)$ et $t_k = O(\theta^{-k})$, on a $\log_\theta t_k = O(-k)$, et il vient finalement :

$$R_k = O(k\theta^{-k}).$$

3. Enfin, comme $M_{k+1}^- = M_1 M_2 ... M_k$, on a $f(M_{k+1}^-) = O(k)$, donc :

$$f(M_{k+1}^-)t_k = O(k\theta^{-k}).$$

4. Finalement, nous obtenons bien, compte-tenu des trois estimations ci-dessus, que $|F_a(x) - F_a(x_k)| = O(k\theta^{-k})$, ce qui termine la preuve de ce lemme 12.

### 4.3.2 Expression pour $S(m)$.

Rappelons que nous avons distingué trois cas selon la position de $\theta' = |\theta_2|$ par rapport à 1 :

- Cas 1 : $\theta' > 1$;
- Cas 2 : $\theta' = 1$;
- Cas 3 : $\theta' < 1$.

**Lemme 13** *Si $x, y \in [0, \varepsilon(1)[$ ont tous deux une représentation $1-$admissible finie, soit $x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ et $y = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(N_i)\theta^{-i}$, alors :*

$$|F_1(y) - F_1(x)| = \begin{cases} O(|y-x|k + k(\frac{\theta'}{\theta})^k) & \text{dans le cas } 1, \\ O(|y-x|k + k^2\theta^{-k}) & \text{dans le cas } 2, \\ O(|y-x|k + k\theta^{-k}) & \text{dans le cas } 3. \end{cases}$$

Preuve : l'hypothèse de finitude des écritures $1-$admissibles des réels $x, y \in [0, \varepsilon(1)[$ se traduit de la manière suivante :

- $x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$, où la suite (finie) $(M_i, a_i)_{i=1,2,\ldots,k}$ est $1-$admissible;
- $y = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(N_i)\theta^{-i}$, où la suite (finie) $(N_i, b_i)_{i=1,2,\ldots,k}$ est $1-$admissible;
- l'entier $k \in \mathbf{N}^*$ est tel que $(M_k, N_k) \neq (\omega, \omega)$.

Maintenant, définissons deux mots $u$ et $v$ de $A^*$ par :

- $u = \sigma^{k-1}(M_1)\sigma^{k-2}(M_2)\ldots\sigma^1(M_{k-1})\sigma^0(M_k)$;
- $v = \sigma^{k-1}(N_1)\sigma^{k-2}(N_2)\ldots\sigma^1(N_{k-1})\sigma^0(N_k)$.

On remarque alors que, comme $M_1a_1 \preceq \sigma(1)$ (resp. $N_1b_1 \preceq \sigma(1)$), et $2 \leq i \leq k \Rightarrow M_ia_i \preceq \sigma(a_{i-1})$ ( resp. $N_ib_i \preceq \sigma(b_{i-1})$), on a :

- La suite $(M_i, a_i)_{i=k,k-1,\ldots,2,1}$ est la représentation $1-$admissible de l'entier $m = |u|$;
- La suite $(N_i, b_i)_{i=k,k-1,\ldots,2,1}$ est la représentation $1-$admissible de l'entier $m' = |v|$.

Maintenant, nous cherchons des estimations permettant de comparer, d'une part $F_1(x)$ et $F_1(y)$, d'autre part $S(m)$ et $S(m')$.

1. Commençons par remarquer que l'on a

$$m = |u| = \sum_{i=1}^{k} |\sigma^{k-i}(M_i)| = \sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{\delta} \varepsilon_j(M_i)\theta_j^{k-i}) = \sum_{i=1}^{k}(\varepsilon(M_i)\theta^{k-i} + \sum_{j=2}^{\delta} \varepsilon_j(M_i)\theta_j^{k-i})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\varepsilon(M_i)\theta^{k-i} + O(\theta'^{k-i})) = \theta^k \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i} + O(\sum_{i=0}^{k-1} \theta'^i),$$

soit :

$$m = \theta^k x + \begin{cases} O(\theta'^k) & \text{dans le cas } 1, \\ O(k) & \text{dans le cas } 2, \\ O(1) & \text{dans le cas } 3. \end{cases}$$

Et la même relation est valable en remplaçant $m$ par $m'$ et $x$ par $y$.

2. Ensuite, si l'on note $(M_l(n), a_l(n))_{l=0,1,...,k-1}$ la représentation $1-$admissible de l'entier $n \ / \ 0 \leq n \leq m-1$, avec éventuellement $M_{k-1}(n) = \omega$ si $n < |\sigma^{k-1}(c_1)|$ (où $c_1$ est la première lettre de $M_1$), alors le théorème 1 nous permet de calculer la somme $S(m) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{k-1} f(M_l(n))$, et donne comme résultat :

$$S(m) = \alpha \sum_{i=1}^{k-1} i\varepsilon(M_{k-i})\theta^i + \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha(M_{k-i}) + f(M_{k-i}^+)\varepsilon(M_{k-i}))\theta^i + E,$$

avec $E = O(k\theta'^k)$ (resp. $O(k^2)$ ou $O(k)$) selon que l'on est dans le cas 1 (resp. 2 ou 3), et ici encore cette relation est valable en remplaçant $m$ par $m'$ et $M_j$ par $N_j$ pour $1 \leq j \leq k$.

3. Utilisons maintenant le lemme 10 qui s'écrit ici :

$$\sum_{i=1}^{k-1} i\varepsilon(M_{k-i})\theta^i = m \log_\theta m - m \log_\theta (\sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon(M_{k-i})\theta^{i-k}) - \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\varepsilon(M_{k-i})\theta^i + E.$$

On remarque alors que, d'une part $\sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon(M_{k-i})\theta^{i-k} = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i} = x$, et d'autre part $\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)\varepsilon(M_{k-i})\theta^i = \sum_{i=1}^{k} i\varepsilon(M_i)\theta^{k-i}$, de sorte qu'en remplaçant tout ceci dans la dernière égalité donnée en 2, nous obtenons :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m - \alpha m \log_\theta x + \sum_{i=1}^{k} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \alpha(M_i) + f(M_i^+)\varepsilon(M_i)\right) \theta^{k-i} + E,$$

où l'on remarque que, dans cette expression, compte-tenu de l'écriture $1-$admissible de $m = |u|$ donnée en 1, on a $M_1^+ = \omega$, et $2 \leq i \leq k \Rightarrow M_i^+ = M_1 M_2 ... M_{i-1}$.

4. Maintenant, appliquons la définition 4 pour calculer $F_1(x)$ lorsque $x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i} \in [0, \varepsilon(1)[$, il vient :

$$F_1(x) = -\alpha x \log_\theta x + \sum_{i=1}^{k} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \alpha(M_i) + \varepsilon(M_i) f(M_i^-)\right) \theta^{-i},$$

avec ici $M_1^- = \omega$ et $M_i^- = M_1 M_2 ... M_{i-1}$, donc $f(M_i^-) = f(M_i^+)$. En remplaçant cette expression dans la formule donnée en 3 pour $S(m)$, nous obtenons :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + \theta^k F_1(x) + E - \alpha m \log_\theta x + \theta^k \alpha x \log_\theta x.$$

On utilise alors le fait que :

$$\begin{array}{ll} Cas\ 1: & E = O(k\theta'^k),\ m = \theta^k x + O(\theta'^k), \\ Cas\ 2: & E = O(k^2),\ m = \theta^k x + O(k), \\ Cas\ 3: & E = O(k),\ m = \theta^k x + O(1). \end{array}$$

Nous obtenons finalement :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + \theta^k F_1(x) + E,$$

et de même :

$$S(m') = \alpha m' \log_\theta m' + \theta^k F_1(y) + E.$$

5. Supposons alors que $x \neq y$, par exemple que $y > x$ (et donc aussi $m' > m$), alors :

$$S(m') - S(m) = \sum_{m \le n < m'} \sum_{l=0}^{k-1} f(M_l(n));$$

or tous les mots $M_l(n)$, $(l, n \in \mathbf{N})$ sont dans l'ensemble fini $P$, donc $f(M_l(n)) = O(1)$, d'où $S(m') - S(m) = O(k(m'-m))$, et comme $k \simeq \log_\theta m'$, on a $S(m') - S(m) = O((m'-m)\log m')$. D'autre part, grâce aux estimations du 1. pour $m$ et $m'$, on a :

$$\frac{m'-m}{\theta^k} = y - x + \begin{cases} O((\frac{\theta'}{\theta})^k) & \text{dans le cas 1,} \\ O(k\theta^{-k}) & \text{dans le cas 2,} \\ O(\theta^{-k}) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

Enfin, nous avons aussi :

$$m' \log_\theta m' - m \log_\theta m = O((m'-m)\log m').$$

6. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme, puisque, grâce à 4., on a :

$$F_1(y) - F_1(x) = \frac{S(m') - S(m)}{\theta^k} + \alpha \frac{m \log_\theta m - m' \log_\theta m'}{\theta^k} + \theta^{-k} E,$$

donc :

$$|F_1(y) - F_1(x)| \le \left| \frac{S(m') - S(m)}{\theta^k} \right| + \alpha \left| \frac{m' \log_\theta m' - m \log_\theta m}{\theta^k} \right| + \theta^{-k} E,$$

d'où :

$$|F_1(y) - F_1(x)| = O\left( \frac{(m'-m)\log m'}{\theta^k} \right) + \theta^{-k} E,$$

ce qui donne le résultat souhaité, compte-tenu de l'estimation de $\frac{m'-m}{\theta^k}$ donnée en 5., et du fait que $\log m' = O(k)$.

**Lemme 14** *Si $x, y \in [0, \varepsilon(1)[$, et $x \neq y$, alors :*

$$|F_1(y) - F_1(x)| = \begin{cases} O(|y-x|^{1+\log_\theta \theta'} \log|y-x|) & \text{dans le cas 1,} \\ O(|y-x|(\log|y-x|)^2) & \text{dans le cas 2,} \\ O(|y-x| \log|y-x|) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

*Ainsi, $F_1$ est dans tous les cas une fonction continue sur $[0, \varepsilon(1)[$.*

Preuve : supposons que $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ (resp. que $y = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(N_i)\theta^{-i}$), où la suite infinie $(M_i, a_i)_{i\geq 1}$ (resp. $(N_i, b_i)_{i\geq 1}$) est $1-$admissible. Pour $k$ entier $\geq 1$, soit $t_k = \theta^k|y-x| = |\sum_{i=1}^{+\infty}(\varepsilon(N_i) - \varepsilon(M_i))\theta^{k-i}|$, et choisissons l'entier $k$ tel que l'on ait $\theta^{-1} \leq t_k < 1$, puis posons $x_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$ et $y_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(N_i)\theta^{-i}$. En écrivant $F_1(y) - F_1(x) = (F_1(y) - F_1(y_k)) + (F_1(y_k) - F_1(x_k)) + (F_1(x_k) - F_1(x))$, nous avons :

$$|F_1(y) - F_1(x)| \leq |F_1(y) - F_1(y_k)| + |F_1(y_k) - F_1(x_k)| + |F_1(x_k) - F_1(x)|.$$

D'abord, grâce au lemme 13, nous avons :

$$|F_1(y_k) - F_1(x_k)| = \begin{cases} O(|y_k - x_k|k + k(\frac{\theta'}{\theta})^k) & \text{dans le cas 1,} \\ O(|y_k - x_k|k + k^2\theta^{-k}) & \text{dans le cas 2,} \\ O(|y_k - x_k|k + k\theta^{-k}) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

Ensuite, grâce au lemme 12, les termes $|F_1(y) - F_1(y_k)|$ et $|F_1(x_k) - F_1(x)|$ sont tous les deux en $O(k\theta^{-k})$.
Enfin, grâce à la définition de $k$, nous avons les estimations :

$$\theta^{-k} = O(|y-x|),\ k = O(\log|y-x|),\ |y_k - x_k| = O(|y-x|),$$

qui, remplacées dans l'estimation de $|F_1(y_k) - F_1(x_k)|$ donnée ci-dessus, donnent exactement le résultat du lemme.

**Lemme 15** *Si $\alpha \neq 0$, alors $F_a$ est une fonction nulle part dérivable sur $[0, \varepsilon(a)[$, ceci $\forall a \in A$.*

Preuve : il suffit évidemment de montrer que la fonction :

$$G_a(x) = F_a(x) + \alpha x \log_\theta x$$

est nulle part dérivable sur $[0, \varepsilon(a)[$.
Commençons par remarquer que, pour $b \in A$, comme $M_\sigma$ est primitive, il existe $i$ assez grand tel que $|\sigma^i(b)| \geq 2$ et il existe $c_i \in A$ telle que le réel $\tau_i = \varepsilon(c_i)\theta^{-i}$ ait pour représentation $b-$admissible $\tau_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon(M_j)\theta^{-j}$, où la suite infinie $(M_j, a_j)_{j\geq 1}$ est $b-$admissible, avec $M_i = c_i$ et $M_j = \omega$ pour $j \neq i$. Alors, grâce à la définition de $F_b$, nous avons $G_b(\tau_i) = \sum_{j=1}^{+\infty}(-j\alpha\varepsilon(M_j) + \alpha(M_j) + \varepsilon(M_j)f(M_j^-))\theta^{-j}$, expression qui se réduit ici à :

$$G_b(\tau_i) = (-i\alpha\varepsilon(c_i) + \alpha(c_i) + \varepsilon(c_i)f(M_i^-))\theta^{-i},$$

or on a $M_i^- = \omega$, donc $f(M_i^-) = 0$ et $G_b(\tau_i) = (-i\alpha\varepsilon(c_i) + \alpha(c_i))\theta^{-i}$; ainsi, nous obtenons :

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{G_b(\tau_i)}{\tau_i} = \lim_{i\to+\infty}(-i\alpha + \frac{\alpha(c_i)}{\varepsilon(c_i)}) = \pm\infty,$$

puisque $\alpha \neq 0$.
Supposons alors par l'absurde l'existence de $a \in A$ et de $x \in [0, \varepsilon(a)[$ tels que $G_a$ soit dérivable en $x$, et soit $(M_j, a_j)_{j\geq 1}$ l'écriture $a$-admissible de $x$, c'est-à-dire $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon(M_j)\theta^{-j}$. Comme $Card\ A = d < +\infty$, $\exists b \in A$ et $\exists J$, sous-ensemble infini de $\mathbf{N}^*$, tels que $k \in J \Rightarrow a_k = b$. Soit $t$ un nombre réel arbitraire de $]0, \varepsilon(b)[$ et, pour $k \in J$, soient $x_k = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon(M_j)\theta^{-j}$ et $x'_k = x_k + t\theta^{-k}$. Alors $x'_k \in ]0, \varepsilon(a)[$ (vérification immédiate) et on peut appliquer le lemme 11(ii) en prenant $x = x'_k$, $t_k = x'_k - x_k = t\theta^{-k}$, $a_k = b$, de sorte que l'on obtient :

$$G_a(x'_k) = G_a(x_k) + \theta^{-k}G_b(t) + f(M_{k+1}^-)t\theta^{-k} - k\alpha t\theta^{-k}.$$

En divisant les deux côtés de cette égalité par $x'_k - x_k = t\theta^{-k}$, il vient :

$$\frac{G_a(x'_k) - G_a(x_k)}{x'_k - x_k} = \frac{G_b(t)}{t} + f(M_1 M_2 \ldots M_k) - k\alpha.$$

Comme on a supposé que $G_a$ était dérivable en $x$, et comme l'on a $J$ infini et $k \in J \Rightarrow x_k \leq x \leq x'_k$, nous aurions donc :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{G_a(x'_k) - G_a(x_k)}{x'_k - x_k} = G'_a(x).$$

Donc, grâce à l'égalité obtenue plus haut, nous obtenons :

$$\frac{G_b(t)}{t} = G'_a(x) - \lim_{k \to +\infty} [f(M_1 M_2 \ldots M_k) - k\alpha] = K,$$

quantité indépendante de $t$, donc $G_b(t) = Kt$, ce qui est évidemment en contradiction avec l'existence de la suite $(\tau_i)_{i\geq 1}$ qui tend vers zéro et telle que $\lim_{i \to +\infty} \frac{G_b(\tau_i)}{\tau_i} = \pm\infty$. Ainsi, dès que $\alpha \neq 0$, $F_a$ est nulle part dérivable sur $[0, \varepsilon(a)[$, $\forall a \in A$.

## 4.4 Enoncé du théorème de Dumont et Thomas.

Afin de pouvoir l'appliquer à certaines suites digitales, nous allons rappeler les hypothèses du théorème.

**Théorème 2 (H1)** *Soient $A = \{1, 2, \ldots, d\}$ un alphabet, $\sigma : A \to A^*$ une substitution telle que $1 \prec \sigma(1)$, $u = \lim_{k \to +\infty} \sigma^k(1)$ l'unique suite infinie point fixe de $\sigma$ commençant par 1, et $P = \{M \in A^* / \exists a, c \in A \ :\ Mc \preceq \sigma(a)\}$ l'ensemble (fini) des préfixes stricts des images des lettres de $A$ par $\sigma$.*

**(H2)** *Pour $n$ entier $\geq 1$, on appelle "représentation 1-admissible de $n$" l'unique suite (finie) $(M_i(n), a_i(n))_{i=0,1,\ldots,\nu(n)}$ d'éléments de $P \times A$ telle que :*

- $M_{\nu(n)}(n)a_{\nu(n)}(n) \preceq \sigma(1)$; $1 \leq i \leq \nu(n) \Rightarrow M_{i-1}(n)a_{i-1}(n) \preceq \sigma(a_i(n))$.
- $M_{\nu(n)}(n) \neq \omega$ ; $u_1u_2...u_n = \sigma^{\nu(n)}(M_{\nu(n)}(n))...\sigma^1(M_1(n)\sigma^0(M_0(n))$.

**(H3)** *Soit $f : P \to \mathbf{R}$ une application telle que $f(\omega) = 0$.*

**(H4)** *Soit $s^f = (s^f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :*

- $s^f(0) = 0$;
- $s^f(n) = \sum_{i=0}^{\nu(n)} f(M_i(n))$ *si* $n = \sum_{i=0}^{\nu(n)} |\sigma^i(M_i(n))| \geq 1$.

**(H5)** *Soient $M_\sigma = (L_i(\sigma(j))_{(i,j)\in A\times A} \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbf{N})$ la "matrice de $\sigma$", et $\{\theta_i \ / \ 1 \leq i \leq \delta\}$ l'ensemble des différentes valeurs propres de $M_\sigma$, ordonné de sorte que $i \leq j \Rightarrow |\theta_i| \geq |\theta_j|$.*

**(H6)** *Nous supposons que $M_\sigma$ est primitive, et que $\theta = \theta_1$ est un réel $> 1$. Comme conséquences, on a :*

- $i \geq 2 \Rightarrow |\theta_i| < \theta$;
- *Il existe un unique vecteur $\mu = (\mu_a)_{a\in A}$, propre pour $M_\sigma$ et la valeur propre $\theta$, à coordonnées $> 0$, normalisé par la condition $\sum_{a\in A}\mu_a = 1$.*

**(H7)** *Enfin, nous supposons l'existence d'une base de $\mathbf{C}^d$ constituée de vecteurs propres pour la matrice ${}^tM_\sigma$.*

**(C1)** *Alors il existe une constante $\alpha$ et il existe une fonction $G$, définie et continue sur $\mathbf{R}^{+*}$, telles que :*

**(i)** *Pour tout entier $m \geq 1$, on a $\sum_{n=0}^{m-1} s^f(n) = \alpha m \log_\theta m + mG(m) + o(m)$;*

**(ii)** *Pour tout réel $x > 0$, on a $G(\theta x) = G(x)$.*

**(C2)** *Plus précisément, on a $\alpha = \theta^{-1}\sum_{Mc\preceq\sigma(a)} \mu_a f(M)\varepsilon(c)$, où,*

$$\forall c \in A, \ \varepsilon(c) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sigma^n(c)|}{\theta^n} > 0.$$

**(C3)** *Enfin, si $\alpha \neq 0$, alors la fonction $G$ est nulle part dérivable.*

Démonstration. Grâce au lemme 11(i) et au fait que $1 \prec \sigma(1)$, la propriété : $0 \leq x < \varepsilon(1) \Rightarrow F_1(\theta^{-1}x) = \theta^{-1}F_1(x)$, et la continuité de $F_1$ sur $[0, \varepsilon(1)[$, entraînent l'existence d'une fonction $F$ définie et continue sur $\mathbf{R}^{+*}$, dont $F_1$ est la restriction à $[0, \varepsilon(1)[$, et telle que :

$$\forall x > 0, \ F(\theta x) = \theta F(x).$$

Soit alors $m$ un entier $\geq 1$, dont la suite $\{(M_\nu, a_\nu), (M_{\nu-1}, a_{\nu-1}), ..., (M_1, a_1)\}$ d'éléments de $P \times A$ constitue l'écriture 1−admissible, ce qui signifie :

- $M_1 \neq \omega$; $2 \leq i \leq \nu \Rightarrow M_i a_i \preceq \sigma(a_{i-1})$;
- $u_1 u_2 ... u_m = \sigma^{\nu-1}(M_1)\sigma^{\nu-2}(M_2)...\sigma^1(M_{\nu-1})\sigma^0(M_\nu)$.

Alors le théorème 1 appliqué à $m$ donne :

$$S(m) = \alpha \sum_{i=1}^{\nu-1} i\varepsilon(M_{\nu-i})\theta^i + \sum_{i=0}^{\nu-1} \left(\alpha(M_{\nu-i}) + f(M^+_{\nu-i})\varepsilon(M_{\nu-i})\right) \theta^i + E,$$

avec $E = O(\nu\theta'^\nu)$ (resp. $O(\nu^2)$ ou $O(\nu)$) selon que $\theta' > 1$ (resp. $\theta' = 1$ ou $\theta' < 1$). Puis le lemme 10 donne par ailleurs :

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} i\varepsilon(M_{\nu-i})\theta^i = m \log_\theta m - m \log_\theta \left( \sum_{i=0}^{\nu-1} \varepsilon(M_{\nu-i})\theta^{i-\nu} \right) - \sum_{i=0}^{\nu-1} (\nu-i)\varepsilon(M_{\nu-i})\theta^i + E',$$

où $E'$ est du même ordre que $E$. Ainsi, la formule pour $S(m)$ devient :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m - \alpha m \log_\theta \left( \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon(M_j)\theta^{-j} \right) - \alpha \sum_{j=1}^{\nu} j\varepsilon(M_j)\theta^{\nu-j} + \sum_{j=1}^{\nu} \left(\alpha(M_j) + f(M_j^+)\varepsilon(M_j)\right) \theta^{\nu-j} + E,$$

où, vu l'écriture 1−admissible de $m$, on a $M_1^+ = \omega$ et $2 \leq j \leq \nu \Rightarrow M_j^+ = M_1 M_2 ... M_{j-1}$.
Soit alors $x$ le réel de $[0, \varepsilon(1)[$ dont l'écriture 1−admissible est la suite (finie) $\{(M_1, a_1), (M_2, a_2), ..., (M_\nu, a_\nu)\}$, c'est-à-dire $x = \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$; alors la définition 4 donne, pour $F_1(x) = F(x)$ :

$$F(x) = -\alpha x \log_\theta x + \sum_{i=1}^{\nu} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \alpha(M_i) + \varepsilon(M_i) f(M_i^-)\right) \theta^{-i},$$

où, ici aussi, on a $M_1^- = \omega$ et

$$2 \leq i \leq \nu \Rightarrow M_i^- = M_1 M_2 ... M_{i-1}.$$

En reportant ce résultat dans la dernière expression pour $S(m)$, nous obtenons :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + \theta^\nu F(x) + \alpha \log_\theta x(\theta^\nu x - m) + E.$$

Puis, en utilisant le lemme 7(i) et les écritures 1−admissibles de $m = \sum_{i=0}^{\nu-1} |\sigma^i(M_{\nu-i})|$ et de $\theta^\nu x = \sum_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon(M_i)\theta^{\nu-i}$, nous avons $m - \theta^\nu x = O(\sum_{i=0}^{\nu-1} \theta'^{-i})$, erreur qui, dans chacun des trois cas, est un $o(E)$. Ainsi, on a :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + \theta^\nu F(x) + E;$$

mais, $\nu$ étant un entier, on a aussi :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + F(\theta^\nu x) + E.$$

Puis. en appliquant à $F$ le lemme 14 avec $x = m$ et $y = \theta^\nu x$, nous avons :

$$|x-y| = \begin{cases} O(\theta'^\nu) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu) & \text{dans le cas 2,} \\ O(1) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

et

$$\log|x-y| = \begin{cases} O(\nu) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\log\nu) & \text{dans le cas 2,} \\ O(1) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

Donc ce lemme 14 donne :

$$F(\theta^\nu \sum_{i=1}^{\nu} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}) = F(m) + \begin{cases} O(\nu(\theta'^\nu)^{1+\log_\theta \theta'}) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu(\log\nu)^2) & \text{dans le cas 2,} \\ O(1) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

Remarquons que, dans les cas 2 et 3, cette erreur est négligeable devant $E$, ce qui n'est pas le cas dans le cas 1. Finalement, on a :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + F(m) + \begin{cases} O(\nu(\theta'^\nu)^{1+\log_\theta \theta'}) & \text{dans le cas 1,} \\ O(\nu^2) & \text{dans le cas 2,} \\ O(\nu) & \text{dans le cas 3.} \end{cases}$$

On remarque que, dans tous les cas, l'erreur est en $o(m)$, puisque $\nu \simeq \log_\theta m$. D'où enfin :

$$S(m) = \alpha m \log_\theta m + F(m) + o(m).$$

Il suffit alors de définir $G : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ par $G(x) = \frac{F(x)}{x}$, $\forall x > 0$, de sorte que l'on a bien $G(\theta x) = G(x)$, et l'on obtient bien la formule (i) de l'énoncé du théorème.

Enfin, si $\alpha \neq 0$, alors $F_1$ est nulle part dérivable sur $[0, \varepsilon(1)[$ grâce au lemme 15, donc il en est de même de $F$ sur $\mathbf{R}^+$ puis de $G$ sur $\mathbf{R}^{+*}$, ce qui termine la démonstration du théorème.

## 4.5 Application à certaines suites digitales.

Ici, nous prenons comme d'habitude $q$ un entier $\geq 2$, $\Sigma_q = \{0, 1, ..., q-1\}$ l'ensemble des chiffres en base $q$, et $F : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $F(0) = 0$; alors la suite digitale correspondante $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est donnée par $u_F(n) = \sum_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n))$ si $n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) q^l$, où $\varepsilon_l(n) = [n/q^l] - q[n/q^{l+1}] \in \Sigma_q$, $\forall l \geq 0$. Le but est d'appliquer le théorème précédent à cette suite $u_F$.

Pour cela, nous prendrons pour alphabet $A = \{1, 2, ..., q\}$ et pour substitution la $q$—substitution constante $\sigma$ donnée par :

$$\sigma(a) = 12...q, \ \forall a \in A.$$

Ainsi, la suite $u$, unique point fixe de $\sigma$ commençant par 1 n'est autre que la suite périodique $u = 12...q12...q...$, et l'ensemble $P$ des préfixes stricts des images des lettres de $A$ par $\sigma$ est :

$$P = \{\omega, 1, 12, ..., 12...(q-1)\}.$$

On définit alors $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$ par :

$$f(\omega) = 0;\ f(1) = F(1);\ \text{si } q \geq 3,\ \text{alors } f(12...\varepsilon) = F(\varepsilon) \text{ pour } 2 \leq \varepsilon \leq q-1.$$

A chaque "chiffre" de $\Sigma_q$, on fait correspondre bijectivement le "mot" de $P$ dont il est la longueur, c'est-à-dire :

- le chiffre 0 est associé au mot vide $\omega$;
- le chiffre 1 est associé au mot 1;
- le chiffre 2 est associé au mot 12;
- etc...
- le chiffre $q-1$ est associé au mot $12...(q-1)$.

Notons par $M_l(n) \in P$ le mot associé dans cette bijection au chiffre $\varepsilon_l(n) \in \Sigma_q$, et remarquons au passage que $a_l(n) = |M_l(n)| + 1 = \varepsilon_l(n) + 1$. Ainsi, pour $n$ entier $\geq 1$, la représentation 1−admissible de $n$ (relativement à cette $q$−substitution $\sigma$ ) donnée par la proposition 8 n'est autre que l'écriture usuelle de $n$ en base $q$, puisque $\nu(n) = [\log_q n]$, et que :

$$n = \sum_{l=0}^{\nu(n)} \varepsilon_l(n) q^l = \sum_{l=0}^{\nu(n)} |\sigma^l(M_l(n))|,$$

avec $M_{\nu(n)}(n) \neq \omega$ puisque $\varepsilon_{\nu(n)}(n) \neq 0$. Ainsi, les suites $u_F$ et $s^f$ sont identiques, puisqu'on a alors :

$$s^f(n) = \sum_{l=0}^{\nu(n)} f(M_l(n)) = \sum_{l=0}^{\nu(n)} F(\varepsilon_l(n)) = u_F(n).$$

Montrons maintenant que toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées.
Nous avons ici $M_\sigma$ qui est la matrice carrée d'ordre $q$ constituée de 1 uniquement, donc $M_\sigma$ est bien primitive, et elle admet pour différentes valeurs propres les réels :

- $\theta_1 = \theta = q$, valeur propre simple, le sous-espace propre correspondant étant la droite de $\mathbf{C}^q$ engendrée par le vecteur $\mu = (1/q, 1/q, ..., 1/q)$;
- $\theta_2 = 0$, valeur propre d'ordre $q-1$, le sous-espace propre correspondant étant l'hyperplan de $\mathbf{C}^q$ dont une équation est $x_1 + x_2 + ... + x_q = 0$.

Enfin, nous avons bien l'existence d'une base de $\mathbf{C}^q$ constituée de vecteurs propres pour la matrice ${}^tM_\sigma = M_\sigma$, et le calcul de $\alpha = \theta^{-1}\sum_{Mc\preceq\sigma(1)}\mu_a f(M)\varepsilon(c)$ est très facile, et donne :

$$\alpha = \frac{1}{q}\sum_{M\in P} f(M) = \frac{1}{q}\sum_{\varepsilon\in\Sigma_q} F(\varepsilon) = M_F.$$

Donc, en comparant ce que l'on obtient par le théorème 2 au résultat donné par la proposition 1 de l'introduction, où le terme d'erreur $\delta_F(m)$ est identiquement nul puisque $s = 1$, nous obtenons le résultat complet pour les suites digitales relatives à l'entier $s = 1$, et ne faisant plus apparaître de condition sur $F(q-1)$, contrairement à la proposition 7.

**Proposition 10** *Soient $q$ un entier $\geq 2$, $F : \Sigma_q \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $F(0) = 0$, de moyenne $M_F = 1/q\sum_{\varepsilon\in\Sigma_q} F(\varepsilon)$, et $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite digitale correspondante.*
*Alors il existe une fonction $G_F : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$, continue, et telle que :*

(i) *Pour tout entier $m \geq 1$, on a $\sum_{n=0}^{m-1} u_F(n) = mM_F\log_q m + mG_F(m)$;*

(ii) *Pour tout réel $x > 0$, on a $G_F(qx) = G_F(x)$.*

*Enfin, si $M_F \neq 0$, alors la fonction $G_F$ est nulle part dérivable.*

# 5 GENERALISATION DU DEUXIEME THEOREME DE DUMONT-THOMAS.

## 5.1 Introduction.

Dans cette section, nous allons généraliser le théorème de Dumont-Thomas dans le sens suivant : au lieu de se donner $f : P \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $f(\omega) = 0$, et d'étudier la somme double $S(m) = \sum_{n=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\nu(n)} f(M_l(n))$, où $(M_l(n), a_l(n))_{l=0,1,\ldots,\nu(n)}$ est la représentation 1−admissible de l'entier $n$ / $1 \leq n \leq m-1$, nous prendrons maintenant $s$ un entier $\geq 1$ et $g : P^s \longrightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $g(\omega, \omega, \ldots, \omega) = 0$, et le but est d'étudier, de manière analogue à celle de la section précédente, la somme double :

$$S(m) = \sum_{n=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\nu(n)} g(M_l(n), M_{l+1}(n), \ldots, M_{l+s-1}(n)).$$

Comme on s'en rend compte aisément, la difficulté essentielle consiste de passer de "$s = 1$" à "$s = 2$", le passage de "$s = 2$" à "$s \geq 3$" n'étant plus qu'une question de notations. C'est pourquoi, afin d'alléger les notations, nous prendrons le cas "$s = 2$"; ainsi, dans cette section, nous définissons une application

$g : P \times P \longrightarrow \mathbf{R}$, telle que $g(\omega, \omega) = 0$. Puis, comme dans la section précédente, on se donne $m$ un entier fixé $\geq 1$, tel que :

$$u_1 u_2 \ldots u_m = \sigma^{\nu}(M_\nu)\sigma^{\nu-1}(M_{\nu-1})\ldots\sigma^0(M_0),$$

c'est-à-dire $\nu = \nu(m)$ et la suite $(M_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,\nu}$ est l'écriture 1−admissible de $m$, avec $M_\nu \neq \omega$. De même, pour $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 \leq n \leq m-1$, nous noterons $(M_i(n), a_i(n))_{i=0,1,\ldots,\nu}$ son écriture 1−admissible avec $(\nu+1)$ termes, c'est-à-dire avec peut-être $M_\nu(n) = \omega$ si $n < |\sigma^\nu(b_1)|$, où $b_1$ est la première lettre de $M_\nu$; enfin, l'entier 0 est représenté par le mot vide $\omega$. On cherche alors à calculer la somme double :

$$S(m) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\nu} g(M_l(n), M_{l+1}(n)).$$

Pour cela, remarquons qu'en suivant la démonstration du théorème 2 depuis son début, l'étape la plus importante est certainement le lemme 8, que nous allons généraliser.

## 5.2 Généralisation du lemme 8.

Posons, pour $0 \leq l \leq \nu$,

$$S_l = \sum_{n=0}^{m-1} g(M_l(n), M_{l+1}(n)),$$

de sorte que l'on a clairement :

$$S(m) = \sum_{0 \leq l \leq \nu} S_l.$$

Alors que, dans la preuve du lemme 8, nous avions distingué trois cas pour décomposer $S_l$ en trois sommes, nous allons ici considérer quatre cas selon la position de $n$. Pour être tranquilles, supposons que l'indice $l$ soit ni trop près de $\nu$, ni trop près de zéro; plus précisément, nous supposerons d'abord que $1 \leq l \leq \nu - 2$ (ce qui suppose $\nu \geq 3$, ce qui importe peu puisque $\nu$ est appelé à tendre vers l'infini). Les quatre cas à distinguer sont alors :

(i) : $(M_\nu(n), M_{\nu-1}(n), \ldots, M_{l+1}(n), M_l(n)) = (M_\nu, M_{\nu-1}, \ldots, M_{l+1}, M_l)$, on a donc aussi $(a_\nu(n), \ldots, a_{l+1}(n), a_l(n)) = (a_\nu, \ldots, a_{l+1}, a_l)$, et l'entier $n$ correspondant satisfait aux inégalités :

$$\sum_{i=l}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| \leq n = \sum_{i=l}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| + \sum_{i=0}^{l-1} |\sigma^i(M_i(n))| < \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| = m;$$

Alors

$$Card\{n \in \mathbf{N} \,/\, 1 \leq n \leq m-1 \text{ et } M_i(n) = M_i \text{ pour } l \leq i \leq \nu\} = \sum_{i=0}^{l-1} |\sigma^i(M_i)|,$$

ce qui donne, pour ce premier cas :

$$\sum_{n=0}^{m-1} g(M_l(n), M_{l+1}(n)) = g(M_l, M_{l+1}) \left| \sum_{i=0}^{l-1} \sigma^i(M_i) \right|,$$

somme que nous noterons $S_l^{(4)}$, et remarquons au passage que c'est ce terme qui oblige à supposer $l \geq 1$, puisque le cas analogue à (i) est impossible pour $l = 0$, donc nous poserons $S_0^{(4)} = 0$.

**(ii)** : $(M_\nu(n), M_{\nu-1}(n), ..., M_{l+1}(n)) = (M_\nu, M_{\nu-1}, ..., M_{l+1})$, mais $M_l(n) \neq M_l$,
on a donc aussi $(a_\nu(n), a_{\nu-1}(n), ..., a_{l+1}(n)) = (a_\nu, a_{\nu-1}, ..., a_{l+1})$, et l'entier $n$ correspondant satisfait aux inégalités :

$$\sum_{i=l+1}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| \leq n = \sum_{i=l+1}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| + \sum_{i=0}^{l} |\sigma^i(M_i(n))| < \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| = m;$$

Comme les deux mots $M_l(n)a_l(n)$ et $M_l a_l$ sont tous deux préfixes du mot $\sigma(a_{l+1}(n)) = \sigma(a_{l+1})$, on a forcément $M_l(n)$ préfixe strict de $M_l$. Supposons que $M_l = b_0 b_1 ... b_{k-1}$ où $k = |M_l| \in \mathbf{N}$ et $b_i \in A$ pour $0 \leq i \leq k-1$, alors le mot $M_l(n)$ peut prendre $k$ valeurs distinctes, à savoir $\omega$ pour $|\sigma^l(b_0)|$ entiers $n$, ou $b_0$ pour $|\sigma^l(b_1)|$ entiers $n$, etc..., ou enfin $b_0 b_1 ... b_{k-2}$ pour $|\sigma^l(b_{k-1})|$ entiers $n$; ainsi, nous obtenons dans ce deuxième cas :

$$\sum_{n=0}^{m-1} g(M_l(n), M_{l+1}(n)) = \sum_{Mb \preceq M_l} g(M, M_{l+1}) |\sigma^l(b)|,$$

somme que nous noterons $S_l^{(3)}$.

**(iii)** : $(M_\nu(n), M_{\nu-1}(n), ..., M_{l+2}(n)) = (M_\nu, M_{\nu-1}, ..., M_{l+2})$, mais $M_{l+1}(n) \neq M_{l+1}$,
on a donc aussi $(a_\nu(n), a_{\nu-1}(n), ..., a_{l+2}(n)) = (a_\nu, a_{\nu-1}, ..., a_{l+2})$, et l'entier $n$ correspondant satisfait aux inégalités :

$$\sum_{i=l+2}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| \leq n = \sum_{i=l+2}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| + \sum_{i=0}^{l+1} |\sigma^i(M_i(n))| < \sum_{i=0}^{\nu} |\sigma^i(M_i)| = m;$$

Comme les deux mots $M_{l+1}(n)a_{l+1}(n)$ et $M_{l+1}a_{l+1}$ sont tous deux préfixes du mot $\sigma(a_{l+2}(n)) = \sigma(a_{l+2})$, on a forcément $M_{l+1}(n)$ préfixe strict de

$M_{l+1}$. Supposons le mot $M_{l+1}(n)$ fixé, il existe donc $b \in A$ et $M \in A^*$ tels que $M_{l+1} = M_{l+1}(n)bM$, et en fait on a $b = a_{l+1}(n)$; on sait qu'alors le mot $M_l(n)a_l(n)$ est préfixe du mot $\sigma(a_{l+1}(n)) = \sigma(b)$. Supposons que $\sigma(b) = c_0c_1...c_{k-1}$ où $k = |\sigma(b)| \in \mathbf{N}$ et $c_i \in A$ pour $0 \le i \le k-1$, alors le mot $M_l(n)$ peut prendre $k$ valeurs distinctes, à savoir $\omega$ pour $|\sigma^l(c_0)|$ entiers $n$, ou $c_0$ pour $|\sigma^l(c_1)|$ entiers $n$, etc..., ou enfin $c_0c_1...c_{k-2}$ pour $|\sigma^l(c_{k-1})|$ entiers $n$; ainsi, nous obtenons dans ce troisième cas :

$$\sum_{n=0}^{m-1} g(M_l(n), M_{l+1}(n)) = \sum_{M'b \preceq M_{l+1}} \sum_{Mc \preceq \sigma(b)} g(M, M')|\sigma^l(c)|,$$

somme que nous noterons $S_l^{(2)}$.

**(iv)** : $\exists i \,/\, l+2 \le i \le \nu$ et $M_i(n) \ne M_i$, donc l'entier $n$ satisfait ici à :

$$n < \sum_{j=l+2}^{\nu} |\sigma^j(M_j)|,$$

et notons que, si l'on pose $I = \max\{i \in \mathbf{N} \,/\, l+2 \le i \le \nu \,:\, M_i(n) \ne M_i\}$, alors on a $M_I(n)$ préfixe strict de $M_I$. Posons

$$M'' = \sigma^{\nu-l-2}(M_\nu(n))...\sigma^1(M_{l+3}(n))\sigma^0(M_{l+2}(n)) \in A^*,$$

alors l'hypothèse (iv) se traduit par le fait que $M''$ est préfixe strict du mot

$$N_l = \sigma^{\nu-l-2}(M_\nu)...\sigma^1(M_{l+3})\sigma^0(M_{l+2}),$$

de sorte qu'il existe $b \in A$ telle que $M''b \preceq N_l$, et en fait le lemme 5 dit que $b = a_{l+2}(n)$.

- Supposons le couple $(M'', b) \in A^* \times A$ fixé tel que $M''b \preceq N_l$, alors on sait que le mot $M_{l+1}(n)a_{l+1}(n)$ est préfixe du mot $\sigma(a_{l+2}(n)) = \sigma(b)$.
- Supposons de même le couple $(M_{l+1}(n), a_{l+1}(n)) = (M', c) \in A^* \times A$ fixé tel que $M'c \preceq \sigma(b)$, alors on sait que le mot $M_l(n)a_l(n)$ est préfixe du mot $\sigma(a_{l+1}(n)) = \sigma(c)$.
- Supposons enfin que $\sigma(c) = d_0d_1...d_{k-1}$ avec $k = |\sigma(c)| \in \mathbf{N}$ et $d_i \in A$ pour $0 \le i \le k-1$.

Alors le mot $M_l(n)$ peut prendre $k$ valeurs distinctes, à savoir $\omega$ pour $|\sigma^l(d_0)|$ entiers $n$, ou $d_0$ pour $|\sigma^l(d_1)|$ entiers $n$, etc..., ou enfin $d_0d_1...d_{k-2}$ pour $|\sigma^l(d_{k-1})|$ entiers $n$; ainsi, nous obtenons dans ce quatrième et dernier cas :

$$\sum_{n=0}^{m-1} g(M_l(n), M_{l+1}(n)) = \sum_{M''b \preceq N_l} \sum_{M'c \preceq \sigma(b)} \sum_{Md \preceq \sigma(c)} g(M, M')|\sigma^l(d)|,$$

somme que nous noterons $S_l^{(1)}$.

Ainsi, comme ces quatre cas (i) à (iv) épuisent toutes les possibilités, nous avons :

$$S_l = S_l^{(1)} + S_l^{(2)} + S_l^{(3)} + S_l^{(4)} \text{ pour } 1 \leq l \leq \nu - 2.$$

Il reste à examiner les trois termes $S_0$, $S_{\nu-1}$ et $S_\nu$, et en les décomposant de manière semblable à ce que l'on vient de faire dans le cas général, nous obtenons finalement le résultat suivant :

**Lemme 16** *Nous convenons que $M_{\nu+1} = \omega$. Définissons quatre sommes :*

- *D'abord, posons $S_\nu^{(1)} = S_{\nu-1}^{(1)} = 0$ et*

$$S_l^{(1)} = \sum_{M''b \preceq N_l} \sum_{M'c \preceq \sigma(b)} \sum_{Md \preceq \sigma(c)} g(M, M')|\sigma^l(d)|, \ \forall l \ / \ 0 \leq l \leq \nu - 2,$$

*avec*

$$N_l = \sigma^{\nu-l-2}(M_\nu)...\sigma^1(M_{l+3})\sigma^0(M_{l+2}).$$

- *Puis, posons $S_\nu^{(2)} = 0$ et*

$$S_l^{(2)} = \sum_{M'b \preceq M_{l+1}} \sum_{Mc \preceq \sigma(b)} g(M, M')|\sigma^l(c)|, \ \forall l \ / \ 0 \leq l \leq \nu - 1.$$

- *Ensuite, posons*

$$S_l^{(3)} = \sum_{Mb \preceq M_l} g(M, M_{l+1})|\sigma^l(b)|, \ \forall l \ / \ 0 \leq l \leq \nu.$$

- *Enfin, posons $S_0^{(4)} = 0$ et*

$$S_l^{(4)} = g(M_l, M_{l+1}) \left| \sum_{i=0}^{l-1} \sigma^i(M_i) \right|, \ \forall l \ / \ 1 \leq l \leq \nu.$$

*Alors, pour $0 \leq l \leq \nu$, on a :*

$$S_l = S_l^{(1)} + S_l^{(2)} + S_l^{(3)} + S_l^{(4)}.$$

Remarquons que, dans ce résultat, le terme $S_l^{(1)}$ est l'analogue du terme $S_l'$ du lemme 8, de sorte que ce sont tous ces réels $S_l^{(1)}$ que nous devons sommer pour obtenir la :

## 5.3 Généralisation du lemme 9.

Le but est ici de calculer la somme $\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l^{(1)}$, sachant que $S_{\nu-1}^{(1)} = S_\nu^{(1)} = 0$, et que, pour $0 \leq l \leq \nu - 2$, on peut écrire :

$$S_l^{(1)} = \sum_{b\in A} L_b(N_l) \sum_{M'c\preceq\sigma(b)} \sum_{Md\preceq\sigma(c)} g(M, M')|\sigma^l(d)|.$$

Pour cela, on pose :

$$E = \{(b, M, c, M', d) \in A \times A^* \times A \times A^* \times A \ / \ M'c \preceq \sigma(b), \ \ Md \preceq \sigma(c) \ \},$$

de sorte que :

$$S_l^{(1)} = \sum_{(b,M,c,M',d)\in E} L_b(N_l)g(M, M')|\sigma^l(d)|.$$

Puis, comme dans la preuve du lemme 9, avec $\Delta = \{1, \ 2, \ ..., \ \delta\}$, nous définissons, pour $(j_1, j_2) \in \Delta^2$ et $W \in A^*$, la fonction :

$$\alpha(j_1, j_2, W) = \sum_{(b,M,c,M',d)\in E} \lambda_{j_1}(W, b)\varepsilon_{j_2}(d)g(M, M'),$$

et l'on a alors :

$$S_l^{(1)} = \sum_{i=l+2}^{\nu} \sum_{(j_1,j_2)\in\Delta^2} \alpha(j_1, j_2, M_i)\theta_{j_1}^{i-l-2}\theta_{j_2}^l.$$

En faisant la somme de tous ces termes, nous obtenons :

$$\sum_{l=0}^{\nu-2} S_l^{(1)} = \sum_{i=2}^{\nu}\sum_{l=0}^{i-2} \sum_{(j_1,j_2)\in\Delta^2} \alpha(j_1, j_2, M_i)\theta_{j_1}^{i-l-2}\theta_{j_2}^l.$$

Il suffit ensuite d'adopter la même démarche que dans la section précédente, c'est-à-dire de distinguer quatre cas selon les positions de $j_1$ et $j_2$ par rapport à 1, pour obtenir le résultat suivant :

**Lemme 17** *Soient* $E = \{(b, M, c, M', d) \in A \times A^* \times A \times A^* \times A \ / \ M'c \preceq \sigma(b), \ \ Md \preceq \sigma(c)\}$ *et*

$$\alpha = \theta^{-2} \sum_{(b,M,c,M',d)\in E} \mu_b g(M, M')\varepsilon(d).$$

*Alors il existe pour chaque lettre* $a \in A$ *un réel* $\mu(a)$ *tel que, si l'on prolonge* $\mu$ *à* $A^*$ *par concaténation, on ait la formule :*

$$\sum_{l=0}^{\nu-2} S_l^{(1)} = \alpha \sum_{i=2}^{\nu}(i-1)\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=2}^{\nu} \mu(M_i)\theta^{i-1} + E',$$

*où l'erreur* $E'$ *est la même que dans le lemme 9.*

Nous en sommes maintenant à la :

## 5.4 Généralisation du théorème 1.

Le but est de calculer $S(m) = \sum_{0\leq l\leq \nu} S_l$, donc, grâce à la décomposition de $S_l$ donnée au lemme 16, il s'agit de calculer les quatre sommes :

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l^{(j)} \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4.$$

- Pour $j = 1$, le calcul vient d'être fait au lemme 17.
- Pour $j = 2$, nous obtenons :

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l^{(2)} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \sum_{M'b\preceq M_{i+1}} \sum_{Mc\preceq\sigma(b)} g(M, M')\varepsilon(c)\theta^i + E'.$$

- Pour $j = 3$, on a :

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l^{(3)} = \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{Mb\preceq M_i} g(M, M_{i+1})\varepsilon(b)\theta^i + E'.$$

- Enfin, pour $j = 4$, nous obtenons :

$$\sum_{0\leq l\leq \nu} S_l^{(4)} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \sum_{i=l+1}^{\nu} g(M_l, M_{l+1})\varepsilon(M_i)\theta^i + E,$$

où ici l'erreur $E$ est la même que dans le théorème 1.

Il suffit maitenant d'adapter la démonstration du théorème 1 à notre cas particulier, notamment en changeant les fonctions $\alpha(M)$ et $f(M_i^+)$ en respectivement $\beta(M, M')$ et $g(M_i^+)$, pour obtenir le résultat suivant :

**Théorème 3** • *Nous convenons que $M_{\nu+1} = \omega$, et soient $\alpha$ et $\mu$ comme dans le lemme 17.*

- *Nous posons $M_\nu^+ = \omega$ et $M_i^+ = M_{i+1}M_{i+2}...M_\nu$ pour $0 \leq i \leq \nu - 1$.*
- *Nous posons $g(M_\nu^+) = 0$ et :*

  $0 \leq i \leq \nu-1 \Rightarrow g(M_i^+) = g(M_{i+1}, M_{i+2}) + g(M_{i+2}, M_{i+3}) + ... + g(M_{\nu-1}, M_\nu) + g(M_\nu, \omega)$.
- *Pour $(N, N') \in P \times P$, soit $\beta(N, N') = \sum_{Mb\preceq N} g(M, N')\varepsilon(b)$.*
- *Enfin, pour $N \in P$, soit :*

$$\gamma(N) = \theta^{-1}\left(\mu(N) + \sum_{M'b\preceq N} \sum_{Mc\preceq\sigma(b)} g(M, M')\varepsilon(c)\right).$$

*Alors nous avons la formule suivante pour* $S(m) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\nu} g(M_l(n), M_{l+1}(n))$ :

$$S(m) = \alpha \sum_{i=1}^{\nu} i\varepsilon(M_i)\theta^i + \sum_{i=0}^{\nu} \left(\gamma(M_i) + \beta(M_i, M_{i+1}) + \varepsilon(M_i)(g(M_i^+) - \alpha)\right) \theta^i + E,$$

*où l'erreur $E$ est la même que dans le théorème 1.*

Maintenant, nous en arrivons à la partie essentielle, à savoir la

## 5.5 Généralisation des fonctions $F_a(x)$.

**Définition 5** *Soit $a \in A$; pour $x \in [0, \varepsilon(a)[$, soit*

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$$

*sa représentation $a-$admissible. Soient $\alpha$ et $\gamma(N)$, $\beta(N, N')$ pour $N, N' \in P$ définies comme ci-dessus.*
*Enfin, nous posons $M_1^- = \omega$ et, pour $i \geq 2$, $M_i^- = M_{i-1}M_{i-2}...M_1$. Comme $M_0 = \omega$, on pose*

$$g(M_i^-) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = 1; \\ g(M_{i-1}, M_{i-2}) + g(M_{i-2}, M_{i-3}) + \ldots + g(M_2, M_1) + g(M_1, \omega) & \text{pour } i \geq 2. \end{cases}$$

*En convenant que $x \log_\theta x = 0$ pour $x = 0$, nous posons alors :*

$$F_a(x) = -\alpha x \log_\theta x + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-i\alpha\varepsilon(M_i) + \gamma(M_i) + \beta(M_i, M_{i+1}) + \varepsilon(M_i)(g(M_i^-) - \alpha)\right) \theta^{-i}.$$

On peut alors imiter presque mot-à-mot les preuves des lemmes 11 et 12 pour obtenir successivement :

**Lemme 18** **(i)** *Si $a, b \in A$ sont telles que $b \preceq \sigma(a)$, et si $x \in [0, \varepsilon(b)[$, alors $x\theta^{-1} \in [0, \varepsilon(a)[$, et l'on a $F_a(x\theta^{-1}) = \theta^{-1}F_b(x)$.*

**(ii)** *Soient $a \in A$, $x \in [0, \varepsilon(a)[$ de représentation $a-$admisible $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$; pour $k$ entier $\geq 1$, soient $x_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(M_i)\theta^{-i}$, et $t_k = x - x_k$.*
*Alors, avec $\alpha_k = g(M_{k+1}, \omega) - \alpha - g(M_{k+1}, M_k)$ et $\beta_k = \beta(M_{k+1}, M_k) - \beta(M_{k+1}, \omega)$, on a :*

$$F_a(x) = F_a(x_k) + \theta^{-k} F_{a_k}(\theta^{-k} t_k) - \alpha(x \log_\theta x - x_k \log_\theta x_k)$$

$$+$$

$$\alpha t_k \log_\theta t_k + (g(M_{k+2}^-) - g(M_{k+1}, \omega))t_k + \theta^{-k-1}(\varepsilon(M_{k+1}\alpha_k + \beta_k).$$

**Lemme 19** *Avec $x$ et $x_k$ comme dans le lemme précédent, on a :*

**(i)** $F_a(x) = O(1)$;

**(ii)** $|F_a(x) - F_a(x_k)| = O(k\theta^{-k})$.

On peut ensuite suivre pas à pas les preuves des lemmes 13 et 14 qui s'appliquent parfaitement à notre cas particulier, et donnent exactement les mêmes résultats, que nous ne réécrivons pas.

Enfin, quant à la généralisation du lemme 15, nous gardons les mêmes notations que dans sa démonstration et nous obtenons, pour $\tau_i = \varepsilon(c_i)\theta^{-i}$, que :

$$G_b(\tau_i) = \left(-i\alpha\varepsilon(c_i) + \gamma(c_i) + \beta(c_i,\omega) + \varepsilon(c_i)(g(M_i^-) - \alpha)\right)\theta^{-i},$$

avec $M_j = \omega$ si $j \neq i$, donc $M_i^- = \omega$, $\forall i$, d'où

$$G_b(\tau_i) = \left(-i\alpha\varepsilon(c_i) + \gamma(c_i) + \beta(c_i,\omega)\right)\theta^{-i},$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{G_b(\tau_i)}{\tau_i} = \lim_{n\to+\infty} \left(-i\alpha + \frac{\gamma(c_i) + \beta(c_i,\omega)}{\varepsilon(c_i)}\right) = \pm\infty,$$

puisque $\alpha \neq 0$. La suite de la preuve est identique et l'on obtient bien que, dès que $\alpha \neq 0$, la fonction $F_1$ est nulle part dérivable.

De même, la démonstration du théorème 2 peut se recopier presque mot-à-mot, et nous obtenons finalement la généralisation suivante du théorème 2 de Dumont-Thomas :

## 5.6 Enoncé de la généralisation.

**Théorème 4** • *Nous gardons les hypothèses du théorème 2 pour tout ce qui concerne la substitution $\sigma$ et les représentations $1-$admissibles $(M_l(n), a_l(n))_{0\leq l\leq\nu(n)}$ des entiers $n \in \mathbf{N}$, ainsi que pour la matrice $M_\sigma$.*

- *Soit $g : P \times P \to \mathbf{R}$ une application telle que $g(\omega,\omega) = 0$, et soit $s^g = (s^g(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $s^g(0) = 0$ et :*

$$n = \sum_{l=0}^{\nu(n)} |\sigma(M_l(n))| \geq 1 \;\Rightarrow s^g(n) = \sum_{l=0}^{\nu(n)} g(M_l(n), M_{l+1}(n)).$$

- *Alors il existe une constante $\alpha$ et il existe une fonction $G$, définie et continue sur $\mathbf{R}^{+*}$, telles que l'on ait :*

  **(i)** *Pour tout entier $m \geq 1$, on a la formule :*

$$\sum_{n=0}^{m-1} s^g(n) = \alpha m \log_\theta m + mG(m) + o(m);$$

**(ii)** *Pour tout réel $x > 0$, on a $G(\theta x) = G(x)$.*

- *Plus précisément, on a*

$$\alpha = \theta^{-2} \sum_{(b,M,c,M',d)\in E} \mu_b \varepsilon(d) g(M,M') \in \mathbf{R},$$

*avec*

$$E = \{(b,M,c,M',d) \in A \times A^* \times A \times A^* \times A \ : M'c \preceq \sigma(b),\ Md \preceq \sigma(c)\}.$$

- *Enfin, si $\alpha \neq 0$, alors la fonction $G$ est nulle part dérivable.*

## 5.7 Application à certaines suites digitales.

Maintenant, nous prenons $q$ un entier $\geq 2$, $\Sigma_q = \{0, 1, ..., q-1\}$ l'ensemble des chiffres en base $q$, et $F : \Sigma_q^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $F(0,0) = 0$; alors la suite digitale $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ correspondante est donnée par :

$$n = \sum_{l\geq 0} \varepsilon_l(n) q^l \ \Rightarrow\ u_F(n) = \sum_{l\geq 0} F(\varepsilon_l(n), \varepsilon_{l+1}(n)).$$

Alors, comme à la fin de la section précédente, soit $A = \{1, 2, ...q\}$ puis $\sigma : A \rightarrow A^q$ la $q$–substitution constante donnée par :

$$\sigma(a) = 12..q,\ \forall a \in A.$$

Alors $P = \{\omega, 1, 12, ..., 12...(q-1)\}$, et il suffit de définir l'application $g : P \times P \rightarrow \mathbf{R}$ par $g(\omega,\omega) = 0$, et :

$$g(12...\varepsilon, 12...\varepsilon') = F(\varepsilon, \varepsilon'),\ \forall (\varepsilon, \varepsilon') \in \Sigma_q^2,$$

pour que les deux suites $u_F$ et $s^g$ soient égales.

On peut alors appliquer d'une part le théorème 4 à la suite $s^g$, et d'autre part la proposition 1 de l'introduction à la suite $u_F$, pour obtenir le résultat suivant :

**Théorème 5** *Soient $q$ un entier $\geq 2$, $F : \Sigma_q^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application telle que $F(0,0) = 0$, de moyenne $M_F = \frac{1}{q^2} \sum_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\Sigma_q^2} F(\varepsilon, \varepsilon')$, et $u_F = (u_F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite digitale correspondante.*
*Alors il existe une fonction $G_F : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ continue, et il existe une suite $\delta_F = (\delta_F(m))_{m\geq 1}$, périodique de période $q$, telles que l'on ait :*

**(i)** *Pour tout entier $m \geq 1$, on a la formule :*

$$\sum_{n=0}^{m-1} u_F(n) = m M_F \log_q m + m G_F(m) + \delta_F(m);$$

(ii) *Pour tout réel* $x > 0$, *on a* $G_F(qx) = G_F(x)$.

*Enfin, si* $M_F \neq 0$, *alors la fonction* $G_F$ *est nulle part dérivable.*

Généralisation à $s$ quelconque : la fonction $G_F$ associée à la suite digitale $u_F$ par la proposition 1 est nulle part dérivable, dès que la moyenne $M_F$ est non nulle.

# References


[1] Jean-Paul ALLOUCHE et Jeffrey SHALLIT, *"The ring of k-regula r sequences"*, Theor. Comp. Sci, 98, 1992, p.163-187.

[2] Hubert DELANGE, *"Sur la fonction sommatoire de la suite som me des chiffres"*, Ens. Math. (2), 21, 1975, p.31-47.

[3] Jean-Marie DUMONT et Alain THOMAS, *"Systèmes de numération et fonctions relatifs aux substitutions"*, Math. Comp. Sci. 65, 1989, p.153-169.

[4] Jean-Marie DUMONT et Alain THOMAS, *"Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet"*, prépublication URA 225, 21 (1990)

# Sur la représentation en base $(q, d)$.

Emmanuel Cateland

15 Avril 1992

## 1 INTRODUCTION

Après avoir rappelé les propriétés de la représentation en base $(q, d)$ des entiers naturels, nous considérerons dans un premier temps les suites obtenues par l'exclusion d'un chiffre; alors ces suites sont $(q-1)$−régulières, et leur fonction caractéristique donne naissance à une suite $q$−automatique, et nous donnerons un moyen simple de calculer le terme de rang $n$ de ces suites en fonction de l'écriture de $n$ dans une certaine base.

Dans un deuxième temps, nous généraliserons les propriétés précédentes aux suites obtenues par l'exclusion de plusieurs chiffres.

## 2 REPRESENTATION EN BASE $(q, d)$

### 2.1 Notations.

Soient $q$ un entier $\geq 2$, $d$ un entier tel que $2 - q \leq d \leq 0$, et

$$\Sigma_q^{(d)} = \{d, d+1, ..., d+q-1\}$$

l'ensemble de $q$ "chiffres" qui va servir à représenter tous les entiers naturels. Nous partitionnons cet alphabet $\Sigma_q^{(d)}$ en deux sous-ensembles, à savoir :

- $\Sigma_q^{(d)+} = \{1, 2, ...d+q-1\}$ est l'ensemble des $d+q-1$ chiffres $> 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$;
- $\Sigma_q^{(d)-} = \{d, d+1, ..., -1, 0\}$ est l'ensemble des $-d+1$ chiffres $\leq 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$.

Pour finir, si $M = \varepsilon_{L-1}\varepsilon_{L-2}...\varepsilon_1\varepsilon_0$ est un mot de longueur $L \geq 1$ sur l'alphabet $\Sigma_q^{(d)}$, nous noterons $v(M)$ l'entier de $\mathbf{Z}$ qu'il est censé représenter en base $(q, d)$, c'est à dire $v(M) = \sum_{l=0}^{L-1} \varepsilon_l q^l$; et si $M = \omega$ est le mot vide sur $\Sigma_q^{(d)}$, alors $v(M) = 0$.

## 2.2 Représentation des entiers naturels en base $(q,d)$.

- D'abord, on convient que $0_{(q,d)} = \omega$;
- Ensuite, si $n$ est un entier $\geq 1$, alors :
  Il existe un unique
  $$L = [\log_q n - \log_q(1 + \frac{d}{q-1})] \in \mathbf{N}$$
  et il existe une unique suite finie
  $$(\varepsilon_l(n))_{0 \leq l \leq L} \in (\Sigma_q^{(d)})^{L+1}$$
  tels que l'on ait
  $$n = \sum_{l=0}^{L} \varepsilon_l(n) q^l,$$
  avec la condition essentielle $\varepsilon_L(n) \in \Sigma_q^{(d)+}$.
- De plus on montre sans peine que, pour $0 \leq l \leq L$, on a :
  $$\varepsilon_l(n) = [\frac{n}{q^l} - \frac{d}{q-1}] - q[\frac{n}{q^{l+1}} - \frac{d}{q-1}].$$
- On convient alors que le mot représentant $n$ en base $(q,d)$ est :
  $$n_{(q,d)} = \varepsilon_L(n)\varepsilon_{L-1}(n)...\varepsilon_1(n)\varepsilon_0(n),$$
  et, avec les notations précédentes, on a donc $n = v(n_{(q,d)})$.

## 2.3 Remarques.

- D'abord, $0_{(q,d)} = \omega$;
- Ensuite, on a $1_{(q,d)} = 1, 2_{(q,d)} = 2, ..., d+q-1_{(q,d)} = d+q-1$, qui sont les seuls mots de longueur 1 servant à représenter des entiers naturels.
- Enfin, si $n \geq 1$ est tel que l'on connaisse le mot $n_{(q,d)}$, alors nous aurons :
  $$\begin{cases} qn + d_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.d, \\ qn + d + 1_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.(d+1), \\ \cdots & = & \cdots \\ qn + d + q - 1_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.(d+q-1). \end{cases}$$
  où, ici, le point. représente l'opération de concaténation.
- Donc, en définitive, on peut dire que, parmi les $q-1$ systèmes de représentation possibles en base $q$ (correspondant à $q-1$ valeurs de $d'$ telles que $2-q \leq d' \leq 0$ ), la représentation en base $(q,d)$ est le seul de ces systèmes qui comporte exactement $d+q-1$ chiffres $> 0$, à savoir ceux de $\Sigma_q^{(d)+}$.

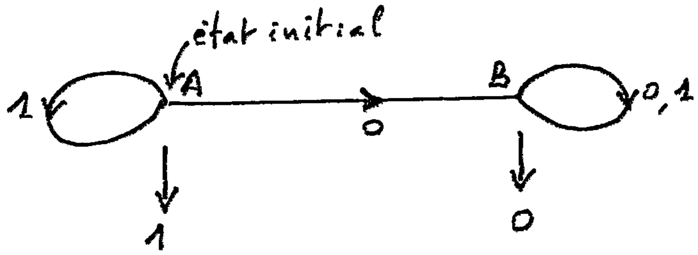
# 3 SUITES OBTENUES EN ENLEVANT UN CHIFFRE DE $\Sigma_q^{(d)}$

Maintenant, soit $\varepsilon \in \Sigma_q^{(d)}$, nous noterons :

- $u^\varepsilon$ la suite strictement croissante des entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que le mot $n_{(q,d)}$ ne contienne pas le chiffre $\varepsilon$;
- $\chi^\varepsilon$ la suite caractéristique de l'ensemble-image de $u^\varepsilon$.

Examinons à part le cas $q = 2$, car alors $d = 0$ et l'on est en représentation 2-adique usuelle des entiers.

**Si** $\varepsilon = 0$, alors $u^0$ est la suite croissante des entiers sans 0 dans leur développement usuel en base 2, donc on a $u^0(n) = 2^n - 1, \forall n \in \mathbf{N}$ et cette suite n'est jamais $k$−régulière, pour aucun entier $k \geq 2$, puisqu'elle croît trop vite. Quant à la suite $\chi^0$ correspondante, elle est évidemment 2-automatique, un 2-automate reconnaissant $\chi^0$ étant donné par :




**Si** $\varepsilon = 1$, alors $u^1$ est réduit au singleton $\{0\}$, puisque tout entier $n \geq 1$ est tel que le mot $n_{(2,0)}$ commence par le chiffre 1.

Nous supposerons donc maintenant que $q \geq 3$, et soit $d$ tel que $2 - q \leq d \leq 0$. Nous distinguerons deux cas :

## 3.1 Cas A : $\varepsilon \in \Sigma_q^{(d)+}$.

D'abord, on a $u^\varepsilon(0) = 0$. Ensuite, remarquons que, dans $\Sigma_q^{(d)} \setminus \{\varepsilon\}$, il ne reste plus que $d + q - 2$ chiffres $> 0$; mais comme on veut au moins un chiffre $> 0$, le cas $d = 2 - q$ pose un problème et sera traité plus tard.

Remarquons enfin que, si $n$ est un entier $\geq 1$ tel que l'on connaisse le mot $u^\varepsilon(n)_{(q,d)}$, alors les $q - 1$ entiers obtenus par concaténation de ce mot avec les $q - 1$ chiffres de $\Sigma_q^{(d)} \setminus \{\varepsilon\}$ seront encore dans $Im\ u^\varepsilon$.

Supposons alors que l'entier $n$ soit représenté en base $(q - 1, d)$, c'est à dire avec les chiffres de

$$\Sigma_{q-1}^{(d)} = \{d, d + 1, ..., -1, 0, 1, ..., d + q - 2\},$$

ensemble comportant lui aussi $d+q-2 \geq 1$ chiffres $> 0$ (et ceci a bien un sens puisque la condition $2-(q-1) = 3-q \leq d \leq 0$ est bien vérifiée, car on a supposé $q \geq 3$).
Nous avons donc montré le résultat suivant :

**Théorème 1** *Renumérotons $\Sigma_q^{(d)+} \setminus \{\varepsilon\}$ sous la forme suivante :*

$$\Sigma_q^{(d)+} \setminus \{\varepsilon\} = \{c_1, c_2, ..., c_{d+q-2}\},$$

*avec $1 \leq c_1 < c_2 < ... < c_{d+q-2} \leq d+q-1$, puis posons de même :*

$$\Sigma_q^{(d)-} = \{c_d = d, c_{d+1} = d+1, ..., c_{-1} = -1, c_0 = 0\}.$$

*Alors on a la formule suivante pour $u^\varepsilon(n)$ :*

$$n = \sum_{l=0}^{L} \varepsilon_l(n)(q-1)^l \Rightarrow u^\varepsilon(n) = \sum_{l=0}^{L} c_{\varepsilon_l(n)} q^l,$$

*où ici l'on a :*

$$L = [\log_{(q-1)} n - \log_{(q-1)}(1 + \frac{d}{q-2})],$$

*et où*

$$\varepsilon_l(n) \in \Sigma_{q-1}^{(d)}.$$

<u>Remarque.</u> Un cas particulièrement facile est celui où $\varepsilon = d+q-1$, car alors on a $c_i = i$ pour $d \leq i \leq d+q-2$ et il est évident, en pensant à l'ordre lexicographique, que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u^{d+q-1}(n) = v_{(q)}(n_{(q-1,d)}).$$

De l'expression donnée plus haut pour $u^\varepsilon(n)$, nous déduisons les relations :

$$\begin{cases} u^\varepsilon((q-1)n+d) & = & qu^\varepsilon(n) + c_d, \\ u^\varepsilon((q-1)n+d+1) & = & qu^\varepsilon(n) + c_{d+1}, \\ \cdots & = & \cdots \\ u^\varepsilon((q-1)n+d+q-2) & = & qu^\varepsilon(n) + c_{d+q-2}. \end{cases}$$

De ces relations, nous allons montrer que la suite $u^\varepsilon$ est $(q-1)-$ régulière. En effet, réécrivons ces relations sous la forme :

$$\begin{cases} u^\varepsilon((q-1)n) & = & qu^\varepsilon(n), & & \\ u^\varepsilon((q-1)n+1) & = & qu^\varepsilon(n) + c_1, & & \\ \cdots & & & & \\ u^\varepsilon((q-1)n+d+q-2) & = & qu^\varepsilon(n) + c_{d+q-2}, & & \\ u^\varepsilon((q-1)n+d+q-1) & = & u^\varepsilon((q-1)(n+1)+d) & = & qu^\varepsilon(n+1)+d, \\ u^\varepsilon((q-1)n+d+q) & = & u^\varepsilon((q-1)(n+1)+d+1) & = & qu^\varepsilon(n+1)+d+1, \\ \cdots & & & & \\ u^\varepsilon((q-1)n+q-2) & = & u^\varepsilon((q-1)(n+1)-1) & = & qu^\varepsilon(n+1)-1. \end{cases}$$

Ces relations sont valables $\forall n \in \mathbf{N}$. Pour montrer que $u^\varepsilon$ est $(q-1)$−régulière, on sait qu'il suffit de trouver un $\mathbf{Z}$−module de type fini $\mathcal{M}$, contenant $u^\varepsilon$, et tel que, pour chaque générateur $S$ de $\mathcal{M}$, les $q-1$ sous-suites $(S(q-1)n+r)_{n\in\mathbf{N}}$ (pour $0 \leq r \leq q-2$) soient dans $\mathcal{M}$.

Pour cela, prenons $\mathcal{M}$ le $\mathbf{Z}$−module engendré par les trois suites $u^\varepsilon$, $v$, $w$ où $v = (u^\varepsilon(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (1)_{n\in\mathbf{N}}$.

**Pour** $S = w$, la vérification est triviale, puisque $w$ est constante.

**Pour** $S = u^\varepsilon$, distinguons deux cas :

- Si $0 \leq r \leq d+q-2$, alors $(u^\varepsilon(q-1)n+r)_{n\in\mathbf{N}} = qu^\varepsilon + c_r w \in \mathcal{M}$,
- Si $d+q-1 \leq r \leq q-2$, alors $(u^\varepsilon(q-1)n+r)_{n\in\mathbf{N}} = qv+(r-q+1)w \in \mathcal{M}$.

**Pour** $S = v$, distinguons encore deux cas :

- Si $0 \leq r \leq q-3$, alors $(v(q-1)n+r)_{n\in\mathbf{N}} = (u^\varepsilon(q-1)n+r+1)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien un élément de $\mathcal{M}$ grâce à la vérification précédente,
- Enfin, si $r = q-2$, alors $(v(q-1)n+q-2)_{n\in\mathbf{N}} = qv \in \mathcal{M}$.

Donc ceci montre bien que $u^\varepsilon$ est une suite $(q-1)$−régulière, et que le $\mathbf{Z}$−module engendré par son $(q-1)$−noyau est de rang trois.

Montrons maintenant que $\chi^\varepsilon$ est une suite $q$−automatique, en utilisant les relations suivantes :

$$\forall r \in \Sigma_q^{(d)},\ \forall n \in \mathbf{N}^*, qn + r_{(q,d)} = n_{(q,d)}.r,$$

donc on a :

$$\forall r \in \Sigma_q^{(d)} \setminus \{\varepsilon\},\ (\chi^\varepsilon(qn+r))_{n\in\mathbf{N}^*} = (\chi^\varepsilon(n))_{n\in\mathbf{N}^*},$$

mais

$$(\chi^\varepsilon(qn+\varepsilon))_{n\in\mathbf{N}^*} = (0)_{n\in\mathbf{N}^*}.$$

Nous devons montrer que

$$N_q(\chi^\varepsilon) = \{(\chi^\varepsilon(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}} \ / k \geq 0, 0 \leq r < q^k\}$$

est un ensemble fini, or nous allons montrer que l'on a :

$$N_q(\chi^\varepsilon) = \{\chi^\varepsilon, (\chi^\varepsilon(n+1))_{n\in\mathbf{N}}, (\chi^\varepsilon(qn+\varepsilon))_{n\in\mathbf{N}} (= (0)_{n\in\mathbf{N}})\}.$$

En effet, il suffit de vérifier que, pour tout $S$ élément de $N_q(\chi^\varepsilon)$, les $q$ sous-suites $(S(qn+r))_{n\in\mathbf{N}}$ (pour $0 \leq r \leq q-1$ ) sont encore des éléments de $N_q(\chi^\varepsilon)$.

- D'abord, si $S = (0)_{n\in\mathbf{N}}$, le résultat est trivial;

- Ensuite, si $S = \chi^\varepsilon$, alors on a :
  - si $0 \leq r \leq d+q-1$ et $r \neq \varepsilon$, alors $(\chi^\varepsilon(qn+r))_{n\in\mathbf{N}} = \chi^\varepsilon$,
  - puis $(\chi^\varepsilon(qn+\varepsilon))_{n\in\mathbf{N}} = (0)_{n\in\mathbf{N}}$,
  - enfin, si $d+q \leq r \leq q-1$, alors $(\chi^\varepsilon(qn+r))_{n\in\mathbf{N}} = (\chi^\varepsilon(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$.
- Enfin, la propriété pour $(\chi^\varepsilon(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$ se vérifie de la même manière.

Exception au Cas A. Comme on l'a vu plus haut, c'est le cas où $d = 2-q$, car alors on a $\Sigma_q^{(2-q)+} = \{1\}$, et la suite $u^1$ consiste en l'ensemble des entiers dont la représentation en base $(q, 2-q)$ ne fait pas apparaître le chiffre 1, donc seul l'entier 0 (représenté par le mot vide $\omega$) satisfait à cette condition et, comme pour $q = 2$ et $\varepsilon = 1$, ceci n'a plus aucun interêt.

### 3.2 Cas B : $\varepsilon \in \Sigma_q^{(d)-}$.

Afin d'alléger les notations, notons $u = u^\varepsilon$ et $\chi = \chi^\varepsilon$. D'abord, on a $u(0) = 0$. Ensuite, remarquons que, dans $\Sigma_q^{(d)} \setminus \{\varepsilon\}$, il reste toujours $d+q-1$ chiffres $> 0$, à savoir ceux de $\Sigma_q^{(d)+}$, mais il ne reste plus que $-d$ chiffres $\leq 0$; le cas $d = 0$ pose ainsi un problème et sera traité plus tard.

Remarquons enfin que, si $n$ est un entier $\geq 1$ tel que l'on connaisse le mot $u(n)_{(q,d)}$, alors les $q-1$ entiers obtenus par concaténation de ce mot avec les $q-1$ chiffres de $\Sigma_q^{(d)} \setminus \{\varepsilon\}$ seront encore des éléments de $Im\ u$.

Supposons alors que l'entier $n$ soit représenté en base $(q-1, d+1)$, c'est-à-dire avec les chiffres de l'ensemble :

$$\Sigma_{q-1}^{(d+1)} = \{d+1, d+2, ..., -1, 0, 1, ..., d+q-1\},$$

ensemble comportant lui aussi $d+q-1$ chiffres $> 0$ (et ceci a bien un sens puisque la condition $2-(q-1) = 3-q \leq d+1 \leq 0$ est bien vérifiée, car on a pris le soin de prendre $q \geq 3$ et $d \neq 0$). De même que dans le cas A, ceci nous donne le résultat suivant :

**Théorème 2** *Renumérotons $\Sigma_q^{(d)-} \setminus \{\varepsilon\}$ sous la forme suivante :*

$$\Sigma_q^{(d)-} \setminus \{\varepsilon\} = \{c_{d+1}, c_{d+2}, ..., c_{-1}, c_0\},$$

*avec $d \leq c_{d+1} < c_{d+2} < ... < c_0 \leq 0$, puis posons de même :*

$$\Sigma_q^{(d)+} = \{c_1 = 1, c_2 = 2, ..., c_{d+q-1} = d+q-1\}.$$

*Alors on a la formule suivante pour $u(n)$ :*

$$n = \sum_{l=0}^{L} \varepsilon_l(n)(q-1)^l \ \Rightarrow u(n) = \sum_{l=0}^{L} c_{\varepsilon_l(n)} q^l,$$

*où ici l'on a :*
$$L = [\log_{(q-1)} n - \log_{(q-1)}(1 + \frac{d+1}{q-2})],$$
*et où :*
$$\varepsilon_l(n) \in \Sigma_{q-1}^{(d+1)}.$$

Remarque. Un cas particulièrement facile est celui où $\varepsilon = d$, car alors l'on a $c_i = i$ pour $d+1 \leq i \leq d+q-1$, et il est évident, en pensant à l'ordre lexicographique, que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u^d(n) = v_{(q)}(n_{(q-1,d+1)}).$$

De l'expression pour $u(n)$ donnée par le théorème, nous pouvons déduire les relations :
$$\begin{cases} u((q-1)n+d+1) &= qu(n) + c_{d+1}, \\ u((q-1)n+d+2) &= qu(n) + c_{d+2}, \\ \dots &= \dots \\ u((q-1)n+d+q-1) &= qu(n) + c_{d+q-1}. \end{cases}$$
Alors, en adoptant la même démarche que dans le cas A, on peut montrer facilement que la suite $u$ est $(q-1)$-régulière, en trouvant un $\mathbf{Z}$-module de rang 4, contenant $u$, et stable par les opérations consistant à extraire d'une suite $(S(n))_{n \in \mathbf{N}}$ les $q-1$ sous-suites de la forme $(S((q-1)n+r))_{n \in \mathbf{N}}$, pour $0 \leq r \leq q-2$.

De même, l'on peut montrer facilement que la suite $\chi$ caractéristique de l'ensemble $Imu$ est $q$-automatique, et l'on peut trouver simplement un $q$-automate reconnaissant cette suite en lecture inverse.

Exception au Cas B. Comme on l'a vu plus haut, c'est le cas où $d = 0$, car alors le fait de représenter l'entier $n$ en base $(q-1, 1)$ n'a plus de sens, de sorte que nous allons traiter ce cas à part :

$u$ est ici la suite strictement croissante des entiers naturels qui, écrits en base $(q, 0)$, c'est-à-dire en base $q$ usuelle, ne font pas apparaître le chiffre 0. Comme $0_{(q,0)} = \omega$, on a $u(0) = 0$, puis $u(1) = 1, u(2) = 2$, etc..., et enfin $u(q-1) = q-1$, qui sont les seuls mots de une lettre sur l'alphabet
$$\Sigma_q^{(0)} = \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$
servant à représenter des entiers naturels.

Puis remarquons que, si $n \geq 1$ est tel que l'on connaisse le mot $u(n)_{(q,0)}$, alors les $q-1$ entiers obtenus par concaténation de ce mot avec les $q-1$ chiffres de $\Sigma_q^{(0)} \setminus \{0\} = \{1, 2, ...q-1\}$ seront encore dans $Im\ u$. On a ainsi un décalage d'une unité par rapport au développement $(q-1)$-adique usuel de l'entier $n \geq 1$.

En d'autres termes, l'on a les relations suivantes :
$$\begin{cases} u((q-1)n+1) &= qu(n) + 1, \\ u((q-1)n+2) &= qu(n) + 2, \\ \dots &= \dots \\ u((q-1)n+q-1) &= qu(n) + q - 1. \end{cases}$$

relations valables pour tout entier $n \geq 0$. Afin de montrer que $u$ est $(q-1)$-régulière, écrivons ces relations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u((q-1)n) & = & qu(n-1)+q-1, & \forall n \geq 1, \\ u((q-1)n+1) & = & qu(n)+1, & \forall n \geq 0, \\ u((q-1)n+2) & = & qu(n)+2, & \forall n \geq 0, \\ \ldots & & & \\ u((q-1)n+q-2) & = & qu(n)+q-2, & \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Comme $u(0)=0$, il suffit de poser $u(-1)=\frac{1-q}{q}$ pour que la première relation soit valable pour $n=0$.
Pour montrer que $u$ est $(q-1)$-régulière, on sait qu'il suffit de trouver un $\mathbf{Z}$-module de type fini $\mathcal{M}$, contenant $u$, et tel que, pour tout générateur $(S(n))_{n\in\mathbf{N}}$, les $q-1$ sous-suites $(S(q-1)n+r)_{n\in\mathbf{N}}$ (pour $r=0,1,2,...,q-2$) soient encore des éléments de $\mathcal{M}$. Ici, nous prenons $\mathcal{M}=< u,v,w,x >_{\mathbf{Z}}$ avec :

- $v=(u(n-1))_{n\in\mathbf{N}}$;
- $w=(1)_{n\in\mathbf{N}}$;
- $x=(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $x(n)=1$ si $n=0$, $x(n)=0$ sinon.

On vérifie alors sans peine la propriété de $(q-1)$-régularité de $u$.

D'autre part, si $\chi$ dénote la suite caractéristique de $Im\ u$, alors en utilisant les relations :

$$\begin{cases} qn_{(q,0)} & = & n_{(q,0)}.0, \\ qn+1_{(q,0)} & = & n_{(q,0)}.1, \\ \ldots & & \\ qn+q-1_{(q,0)} & = & n_{(q,0)}.(q-1). \end{cases}$$

nous obtenons que $\chi(qn)=0, \forall n \geq 1$ et que $\chi(qn+r)=\chi(n), \forall n \geq 0, \forall r = 1,2,...,q-1$.

Ceci permet alors de montrer sans difficulté que $\chi$ est une suite $q$-régulière, car l'ensemble

$$N_q(\chi)=\{(\chi(q^k n+r))_{n\in\mathbf{N}}\ /\ k\geq 0,\ 0\leq r<q^k\ \}$$

est fini, réduit à :

$$\{\chi,\ (\chi(qn))_{n\in\mathbf{N}},\ (\chi(q^2n+1))_{n\in\mathbf{N}}\},$$

puis l'on peut facilement donner un $q$-automate reconnaissant $\chi$ en lecture inverse.

# 4 GENERALISATION : EXCLUSION DE PLUSIEURS CHIFFRES DE $\Sigma_q^{(d)}$.

## 4.1 Un exemple.

Avant de traiter le cas général, montrons sur un exemple simple comment les propriétés des suites vues à la section précédente se conservent.

Pour cela, prenons $q = 7$, $d = -4$; on se place ainsi sur l'alphabet

$$\Sigma_7^{(-4)} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\},$$

et nous noterons $u$ la suite croissante des entiers naturels qui, écrits en base $(7, -4)$, ne font apparaître ni le chiffre -3, ni le chiffre -1, ni le chiffre 1.
Par analogie avec le cas où l'on exclut un chiffre, nous allons montrer trois propriétés :

- que $u$ est 4-régulière;
- que $u(n)$ peut être obtenu à partir de l'écriture de $n$ en base $(4, -2)$;
- que $\chi$ (suite caractéristique de l'ensemble $Im\ u$ ) est 7-automatique.

### 4.1.1 Premiers termes de $u$.

D'abord, on a $u(0) = 0$, puis l'on part de $u(1) = 2$, seul chiffre autorisé et $> 0$ de $\Sigma_7^{(-4)}$; ensuite, on remarque que, si $n$ est un entier $\geq 1$ tel que l'on connaisse le mot $u(n)_{(7,-4)}$, alors les quatre entiers qui sont représentés en base $(7, -4)$ par les mots :

$$u(n)_{(7,-4)}.(-4),\ u(n)_{(7,-4)}.(-2),\ u(n)_{(7,-4)}.0,\ u(n)_{(7,-4)}.2$$

sont encore dans l'ensemble $Im\ u$.

### 4.1.2 Expression de $u(n)$ grâce à $n_{(4,-2)}$.

Supposons que l'entier $n$ soit représenté en base $(4, -2)$, c'est-à-dire à l'aide des chiffres de

$$\Sigma_4^{(-2)} = \{-2, -1, 0, 1\},$$

et posons :

$$c_{-2} = -4,\ c_{-1} = -2,\ c_0 = 0,\ c_1 = 2.$$

Alors on a :

$$n = \sum_{l=0}^{L} \varepsilon_l(n) 4^l \ \Rightarrow u(n) = \sum_{l=0}^{L} c_{\varepsilon_l(n)} 7^l.$$

### 4.1.3 $u$ est une suite 4-régulière.

Grâce à l'expression de $u(n)_{(7,-4)}$ en fonction de $n_{(4,-2)}$, nous déduisons les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(4n-2) &= 7u(n)-4, & \forall n \geq 1, \\ u(4n-1) &= 7u(n)-2, & \forall n \geq 1, \\ u(4n) &= 7u(n), & \forall n \geq 0, \\ u(4n+1) &= 7u(n)+2, & \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire ces 4 relations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(4n) &= 7u(n), & \forall n \geq 0, \\ u(4n+1) &= 7u(n)+2, & \forall n \geq 0, \\ u(4n+2) &= 7u(n+1)-4, & \forall n \geq 0, \\ u(4n+3) &= 7u(n+1)-2, & \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Pour montrer que $u$ est 4-régulière, soit $\mathcal{M}$ le $\mathbf{Z}$-module de rang 3 engendré par les suites $u$, $v = (u(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$ et $w = (1)_{n\in\mathbf{N}}$ , nous montrons alors que, pour tout générateur $(S(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}$, les 4 sous-suites $(S(4n+r))_{n\in\mathbf{N}}$ (pour $r = 0, 1, 2, 3$ ) sont encore dans $\mathcal{M}$.

Ceci est trivial pour $S = w$, puisqu'alors $(w(4n+r))_{n\in\mathbf{N}} = w$.

**Pour** $S = u$, on a :

$$(u(4n)) = 7u,\ (u(4n+1)) = 7u+2w,\ (u(4n+2)) = 7v-4w,\ (u(4n+3)) = 7v-2w.$$

**Pour** $S = v$, on a de même $(v(4n+r)) = (u(4n+r+1)) \in \mathcal{M}$ si $r = 0, 1, 2$, puis $(v(4n+3)) = (7u(n+1)) = 7v \in \mathcal{M}$.

### 4.1.4 $\chi$ est une suite 7-automatique.

Comme on est en base $(7, -4)$, on a, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $r \in \Sigma_7^{(-4)}$, la propriété :

$$7n + r_{(7,-4)} = n_{(7,-4)}.r$$

Ainsi, on a donc:

$$\begin{cases} \chi(7n-4) &= \chi(n), \\ \chi(7n-3) &= 0, \\ \chi(7n-2) &= \chi(n), \\ \chi(7n-1) &= 0, \\ \chi(7n) &= \chi(n), \\ \chi(7n+1) &= 0, \\ \chi(7n+2) &= \chi(n). \end{cases}$$

Réécrivons ces sept relations sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \chi(7n) & = & \chi(n), \\ \chi(7n+1) & = & 0, \\ \chi(7n+2) & = & \chi(n), \\ \chi(7n+3) & = & \chi(n+1), \\ \chi(7n+4) & = & 0, \\ \chi(7n+5) & = & \chi(n+1), \\ \chi(7n+6) & = & 0. \end{cases}$$

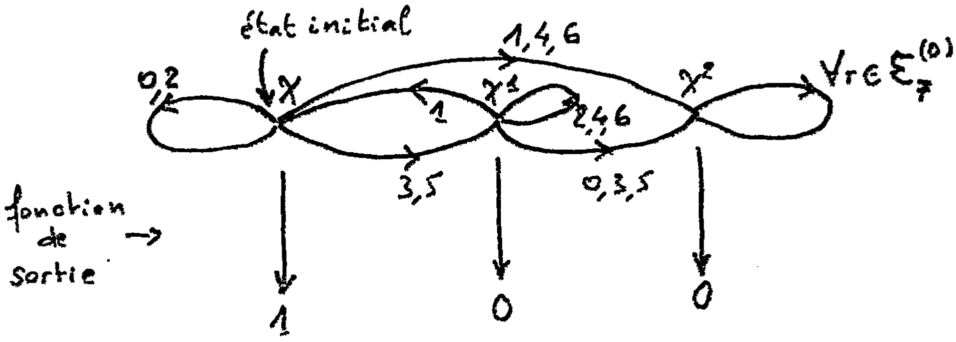
Nous savons que ces 7 relations sont valables pour tout entier $n \geq 0$. Ceci permet d'affirmer que l'ensemble :

$$N_7(\chi) = \{(\chi(7^k n + r))_{n\in\mathbf{N}} \ / \ k \geq 0, \ 0 \leq r < 7^k\}$$

est un ensemble fini, de cardinal 3, réduit à :

$$N_7(\chi) = \{\chi, \ \chi^1, \ \chi^2\},$$

avec : $\chi^1 = (\chi(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$, et $\chi^2 = (\chi(7n+1))_{n\in\mathbf{N}} (= (0)_{n\in\mathbf{N}})$. On peut alors facilement en déduire un 7-automate reconnaissant la suite $\chi$ en lecture inverse :



## 4.2 Cas général.

Nous supposerons la base $q \geq 3$ fixée, ainsi que l'entier $d$ tel que $2-q \leq d \leq 0$, et rappelons que nous avons partitionné l'ensemble $\Sigma_q^{(d)}$ en deux sous-ensembles, à savoir :

$$\Sigma_q^{(d)+} = \{1, 2, ..., d+q-1\}$$

est l'ensemble des $d+q-1$ chiffres $> 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$, et

$$\Sigma_q^{(d)-} = \{d, d+1, ..., -1, 0\}$$

est l'ensemble des $-d+1$ chiffres $\leq 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$.

Maintenant, soit $p$ un entier tel que $2 \leq p \leq q-2$, nous allons considérer $u$ la suite strictement croissante des entiers naturels qui, écrits en base $(q, d)$, ne font apparaitre que $p$ chiffres donnés de $\Sigma_q^{(d)}$, et soit $\chi$ la suite caractéristique de l'ensemble $Im\ u$. Ecrivons $p = p^- + p^+$, avec :
$p^-$ est le nombre de chiffres “autorisés” de $\Sigma_q^{(d)-}$, et
$p^+$ est le nombre de chiffres “autorisés” de $\Sigma_q^{(d)+}$.

Ainsi, dans l'exemple précédent, nous avions :

$$q = 7,\ d = -4,\ p = 4,\ p^+ = 1,\ p^- = 3.$$

Par analogie avec cet exemple, nous allons essayer de montrer 3 propriétés :

- que $u$ est $p$−régulière;
- que $u(n)$ peut être obtenu à partir de l'écriture de $n$ en base $(p, -p^- + 1)$;
- que $\chi$ est une suite $q$−automatique.

Pour cela, numérotons les $p^+$ éléments autorisés de $\Sigma_q^{(d)+}$ sous la forme $c_1, c_2, ..., c_{p^+}$ avec $1 \leq c_1 < c_2 < ... < c_{p^+} \leq d+q-1$, et numérotons de même les $p^-$ éléments autorisés de $\Sigma_q^{(d)-}$ sous la forme $c_{-p^-+1}, c_{-p^-+2}, ..., c_0$ avec $d \leq c_{-p^-+1} < c_{-p^-+2} < ... < c_0 \leq 0$.
Ces notations étant fixées, nous allons facilement montrer ce que l'on veut.

### 4.2.1 Quelques remarques.

Rappelons que l'on veut donner l'expression de $u(n)$ à partir de l'écriture de $n$ en base $(p, -p^- + 1)$, c'est-à-dire à l'aide des chiffres de :

$$\Sigma_p^{(-p^-+1)} = \Sigma_p^{(-p^-+1)-} \bigcup \Sigma_p^{(-p^-+1)+},$$

avec :

$$\Sigma_p^{(-p^-+1)-} = \{-p^- + 1, -p^- + 2, ..., 0\}$$

et
$$\Sigma_p^{(-p^-+1)+} = \{1, 2, ..., -p^- + 1 + p - 1 = p - p^- = p^+\},$$
ensembles à respectivement $p^-$ et $p^+$ éléments.

D'autre part, remarquons que l'on a $u(0) = 0$, puis que l'on part de $u(1) = c_1$, $u(2) = c_2$, ..., $u(p^+) = c_{p^+}$, qui sont les seuls chiffres $> 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$ autorisés.

Enfin, si $n \geq 1$ est tel que l'on connaisse le mot $u(n)_{(q,d)}$, alors les $p$ mots obtenus par concaténation de ce mot avec les $p$ chiffres autorisés de $\Sigma_q^{(d)}$ sont encore dans l'ensemble $Im\ u$.

### 4.2.2 Expression de $u(n)$ grâce à $n_{(p,-p^-+1)}$.

Nous avons donc montré le résultat suivant :

**Théorème 3** *Supposons que l'entier $n \geq 1$ soit représenté en base $(p, -p^- + 1)$, c'est-à-dire à l'aide des $p$ chiffres*
$$-p^- + 1, -p^- + 2, ..., -1, 0, 1, 2, ..., p^+.$$
*Alors on a la formule suivante pour $u(n)$ :*
$$n = \sum_{l=0}^{L} \varepsilon_l(n) p^l \Rightarrow u(n) = \sum_{l=0}^{L} c_{\varepsilon_l(n)} q^l,$$
*avec ici $\varepsilon_l(n) \in \Sigma_p^{(-p^-+1)}$.*

### 4.2.3 $u$ est une suite $p$−régulière.

Grâce à ce qui précéde, nous obtenons les relations :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u(pn) & = & qu(n) + c_0, \\ u(pn+1) & = & qu(n) + c_1, \\ \cdots & = & \cdots \\ u(pn+p^+) & = & qu(n) + c_{p^+}, \\ u(pn+p^++1) & = & qu(n+1) + c_{-p^-+1}, \\ u(pn+p^++2) & = & qu(n+1) + c_{-p^-+2}, \\ \cdots & = & \cdots \\ u(pn+p-1) & = & qu(n+1) + c_{-1}. \end{array}\right.$$

Il est alors très facile de montrer que $u$ est $p$−régulière; en effet, il suffit alors de considérer le $\mathbf{Z}$−module de rang 4, engendré par les suites $u$, $v$, $w$, $z$, avec $v = (u(n+1))_{n \in \mathbf{N}}$, puis $w = (1)_{n \in \mathbf{N}}$, et $z = (z(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $z(n) = 1$ si $n = 0$, $z(n) = 0$ sinon.

Il s'agit maintenant de vérifier que, si $S = (S(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est l'un de ces 4 générateurs, alors on a $(S(pn+r))_{n \in \mathbf{N}}$ (pour $r = 0, 1, 2, ..., p-1$) est encore dans le $\mathbf{Z}$−module en question.

<u>Vérifications.</u>

**(i)** Pour $S = u$, on a :

- D'abord, $(u(pn))_{n\in\mathbf{N}} = qu + c_0 w - c_0 z$;
- Ensuite, $(u(pn+r))_{n\in\mathbf{N}} = qu + c_r w$, pour $1 \leq r \leq p^+$;
- Enfin, $(u(pn+r))_{n\in\mathbf{N}} = qv + c_{r-p} w$, pour $p^+ + 1 \leq r \leq p-1$.

**(ii)** Pour $S = v$, alors on a $(v(pn+r))_{n\in\mathbf{N}} = (u(pn+r+1))_{n\in\mathbf{N}}$ pour $0 \leq r \leq p-2$ qui est bien un élément du $\mathbf{Z}$-module grâce à (i), puis, pour $r = p-1$, on a $(v(pn+p-1))_{n\in\mathbf{N}} = (u(p(n+1)))_{n\in\mathbf{N}} = qv + c_0 w$.

**(iii)** Pour $S = w$, alors évidemment $(w(pn+r))_{n\in\mathbf{N}} = w$.

**(iv)** Enfin, pour $S = z$, alors $(z(pn))_{n\in\mathbf{N}} = z$, et $(z(pn+r))_{n\in\mathbf{N}} = (0)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $1 \leq r \leq p-1$.

Conclusion: $u$ est bien une suite $p$-régulière.

#### 4.2.4 $\chi$ est une suite $q$-automatique.

Comme on est en base $(q,d)$, on sait que, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout chiffre $r \in \Sigma_q^{(d)}$, on a :

$$qn + r_{(q,d)} = n_{(q,d)}.r$$

On peut écrire ces relations sous la forme :

$$\begin{cases} qn_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.0, \\ qn+1_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.1, \\ \dots & = & \dots \\ qn+d+q-1_{(q,d)} & = & n_{(q,d)}.(d+q-1). \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} qn+d+q_{(q,d)} & = & (n+1)_{(q,d)}.d, \\ qn+d+q+1_{(q,d)} & = & (n+1)_{(q,d)}.(d+1), \\ \dots & = & \dots \\ qn+q-1_{(q,d)} & = & (n+1)_{(q,d)}.(-1). \end{cases}$$

de sorte que l'on obtient successivement :

$$\begin{cases} \chi(qn) & = & \chi(n)\chi(0), \\ \chi(qn+1) & = & \chi(n)\chi(1), \\ \dots & = & \dots \\ \chi(qn+d+q-1) & = & \chi(n)\chi(d+q-1), \\ \chi(qn+d+q) & = & \chi(n+1)\chi(d), \\ \chi(qn+d+q+1) & = & \chi(n+1)\chi(d+1), \\ \dots & = & \dots \\ \chi(qn+q-1) & = & \chi(n+1)\chi(-1). \end{cases}$$

relations qui sont valables pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

Ainsi, le $q$–Noyau de $\chi$, c'est à dire l'ensemble :

$$N_q(\chi) = \{(\chi(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}} \ / \ k \geq 0, \ 0 \leq r < q^k\}$$

est un ensemble fini, réduit à :

$$N_q(\chi) = \{\chi, \ \chi^1, \ \chi^2\},$$

avec $\chi^1 = (\chi(n+1))_{n \in \mathbf{N}}$ et $\chi^2 = (0)_{n \in \mathbf{N}} = (\chi(qn+r))_{n \in \mathbf{N}}$, où $r$ est un chiffre non-autorisé.

On pourrait alors donner un $q$–automate reconnaissant la suite $\chi$ en lecture inverse, mais ce serait beaucoup de travail pour pas grand chose.

### 4.2.5 Restrictions.

Nous sommes partis de $q \geq 3$ et de $d$ tel que $2 - q \leq d \leq 0$, et nous n'avons gardé que $p$ chiffres de $\Sigma_q^{(d)}$, à savoir :

- $p^+$ chiffres $> 0$ parmi les $d + q - 1$ de $\Sigma_q^{(d)+} = \{1, 2, ..., d + q - 1\}$,
- $p^-$ chiffres $\leq 0$ parmi les $-d + 1$ de $\Sigma_q^{(d)-} = \{d, d + 1, ..., -1, 0\}$.

La première chose à exiger est que $p^+ \geq 1$, car sinon $u$ est réduite au singleton $\{0\}$.

Comme $p = p^+ + p^-$ et qu'on veut parler de $p$–régularité de $u$, la deuxième chose à exiger est que $p \geq 2$.

Enfin, nous avons parlé de la représentation de $n$ en base $(p, -p^- + 1)$ et, pour que ceci ait un sens, il faut que l'on ait les inégalités:

$$2 - p \leq -p^- + 1 \leq 0.$$

La deuxième inégalité $-p^- + 1 \leq 0$ exige que l'on ait aussi $p^- \geq 1$, et la première inégalité $2 - p^+ - p^- \leq -p^- + 1$ redonne $p^+ \geq 1$.

Donc finalement, tout ce qui précède est valable dès que l'on a $p = p^+ + p^- \geq 2$, avec à la fois $p^+ \geq 1$ et $p^- \geq 1$.

Il s'agirait ainsi d'examiner à part le cas où $p^- = 0$, c'est à dire où l'on ne garde aucun chiffre $\leq 0$, mais où l'on garde au moins 2 chiffres $> 0$ de $\Sigma_q^{(d)}$.

### 4.2.6 Remarque.

Prenons $q = 3$ et $d = 0$, donc $\Sigma_q^{(d)} = \{0, 1, 2\}$ et, si $r$ est un chiffre de cet ensemble, notons par $u^r$ la suite strictement croissante des entiers naturels tels que le mot $n_{(3,0)}$ ne fait pas intervenir le chiffre $r$.

On sait qu'alors $u^r$ est 2-régulière. Cependant, $u^0 \bigcap u^1$ consiste en la suite des entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que l'on ait à la fois $0 \notin n_{(3,0)}$ et $1 \notin n_{(3,0)}$; donc cette suite $v$ n'est autre que la suite des entiers qui, écrits en base $(3,0)$, ne font intervenir que le chiffre 2.

Ainsi, on a $v(0) = 0$, puis, pour $n \geq 1$, on a

$$v(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2.3^l = 3^n - 1.$$

Donc $v$ n'est jamais $k-$régulière, pour aucun entier $k \geq 2$.

Ceci donne un exemple de deux suites 2-régulières dont l'intersection n'est jamais $k-$régulière, $\forall k \geq 2$.

## Bibliographie complémentaire


[1] J.-P. Allouche, *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. 5 (1987), 239–266.

[2] J.-P. Allouche et H. Cohen, *Dirichlet series and curious infinite products*, Bull. Lond. Math. Soc. **17** (1985), 531-538.

[3] J.-P. Allouche et P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arithmetica **60** (1991).

[4] J.-P. Allouche et J. Shallit, *The ring of k-regular sequences*, Theor. Comp. Sci. **98** (1992), 163–187.

[5] R. Bellman and H.N. Shapiro, *On a problem in additive number theory*, Ann. Math. 49 (1948), 333–340.

[6] D.W. Boyd, J. Cook and P. Morton, *On sequences of ±1's defined by binary patterns*, Diss. Math. **283** (**60 p.**) (1989).

[7] J. Brillhart, P. Erdös and P. Morton, *On sums of Rudin-Shapiro coefficients II*, Pac. J. Math. **107** (1983), 39–69.

[8] J. Brillhart and P. Morton, *Über Summen von Rudin-Shapiroschen Koeffizienten*, Ill. J. Math. **22** (1978), 126–148.

[9] L.E. Bush, *An asymptotic formula for the average sums of the digits of integers*, Amer. Math. Monthly 47 (1940), 154–156.

[10] M.C. Chakrabarti, *On the limit points of a function connected with the three square problem*, Bull. Calcutta Math. Soc. **32** (1940), 1–6.

[11] P. Cheo and S. Yien, *A problem on the K-adic representation of positive integers*, Acta Math. Sinica **5** (1955), 433–438.

[12] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates finis et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401–419.

[13] G.F. Clements and B. Lindström, *A sequence of (± 1) determinants with large values*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 548–550.

[14] J. Coquet, *Formules sommatoires et séries de Dirichlet*, Non publié.

[15] J. Coquet, *A summation formula related to the binary digits*, Invent. Math. **73** (1983), 107–115.

[16] J. Coquet, *Power sums of digital sums*, J. Number Theory 22 (1986), 250–257.

[17] J. Coquet et P. Van den Bosch, *A summation formula involving Fibonacci digits*, J. Number Theory **22** (1986), 250–257.

[18] H. Delange, *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres"*, Ens. Math. 21 (1975), 31–47.

[19] M.P. Drazin and J.S. Griffith, *On the decimal representation of integers*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952), 555–565.

[20] J.M. Dumont, *Formules sommatoires et systèmes de numération liés aux substitutions*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux Exposé n 39 (1987/88).

[21] J.M. Dumont et A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theor. Comp. Sci. 65 (1989), 153–169.

[22] J.M. Dumont et A. Thomas, *Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet*, Preprint à paraître.

[23] P. Flajolet et L. Ramshaw, *A note on Gray code and odd-even merge*, SIAM J. Comp. 9 (1980), 142–158.

[24] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhoffer, H. Prodinger and R. Tichy, *Mellin transforms and asymptotics : digital sums*, To appear in Theor. Comp. Sci.

[25] D.M. Foster, *Estimates for a remainder term associated with the sum of digits function*, Glasgow Math. J. 29 (1987), 109–129.

[26] P.J. Grabner and R.F. Tichy, *Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences*, J. Number Theory 36 (1990), 160–169.

[27] H. Harboth, *Number of odd binomial coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977), 19–22.

[28] H. Kano and I. Shiokawa, *On sums of digits in integer sequences*, Semin. Math. Sci. (Zbl. Math. 678, 10008) 12 (1988), 43–44.

[29] J. Honkala, *On number systems with negative digits*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A. I. Mathematica 14 (1989), 149–156.

[30] R.E. Kennedy and C.N. Cooper, *An extension of a theorem by Cheo and Yien concerning digital sums*, Fibonacci Quarterly 29 (1991), 145–149.

[31] P. Kirschenhoffer, *Subblock occurrences in the q-ary representation of n*, Siam J. Alg. Disc. Meth. 4 (1983), 231–236.

[32] P. Kirschenhoffer and H. Prodinger, *Subblock occurrences in positional number systems and Gray code representation*, J. Inf. Opt. Sci. 5 (1984), 29–42.

[33] P. Kirschenhoffer and R.F. Tichy, *On the distribution of digits in Cantor representations of integers*, J. Number Theory 18 (1984), 121–134.

[34] E. Landau, *Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate*, Arch. Math. Phys. (3) 13 (1908), 303–312.

[35] G. Larcher and R.F. Tichy, *Some number-theoretical properties of generalized sum-of-digit functions*, Acta. Arith. 52 (1989), 183–196.

[36] M.D. Mac Ilroy, *The number of 1's in binary integers : bounds and extremal properties*, SIAM J. Comput. 3 (1974), 225–261.

[37] L. Mirsky, *A theorem on representations of integers in the scale of r*, Scripta Math. 15 (1949), 11–12.

[38] P. Morton and W.J. Mourant, *Paperfolding, digit patterns and groups of arithmetic fractals*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 59 (1989), 253–293.

[39] D.J. Newman, *On the number of binary digits in a multiple of three*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 719–721.

[40] A. Pethő and R.F. Tichy, *On digit expansions with respect to linear recurrences*, J. Number Theory 33 (1989), 243–256.

[41] H. Prodinger, *Generalizing the "sum of digits" function*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 3 (1982), 35–42.

[42] I. Shiokawa, *On a problem in additive number theory*, Math. J. Okayama Univ. 16 (1974), 167–176.

[43] P. Shiu, *Counting sums of three squares*, Bull. Lond. Math. Soc. 20 (1988), 203–208.

[44] P. Shiu and A.H. Osbaldestin, *A correlated digital sum problem associated with sums of three squares*, Bull. Lond. Math. Soc. 21 (1989), 369–374.

[45] A.H. Stein, *Exponential sums related to binomial coefficient parity*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 526–530.

[46] A.H. Stein, *Exponential sums of an iterate of the binary sum of digit function*, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 309–315.

[47] A.H. Stein, *Exponential sums of sum-of-digit functions*, Ill. J. Math. 30 (1986), 660–675.

[48] A.H. Stein, *Exponential sums of digit counting functions*, Compte-rendus de la conférence internationale de Théorie des Nombres, Laval 5–18/7/87 (1989), 861–868, J.M. de Koninck et C. LeVesque Ed., Walter de Gruyter, Berlin-New York.

[49] K.B. Stolarski, *Digital sums and binomial coefficients*, Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975), A 669, Abstract ♯ 728-A7.

[50] K.B. Stolarski, *Power and exponential sums related to binomial digit parity*, SIAM J. Appl. Math. 32 (1977), 717–730.

[51] J.R. Trollope, *Generalized bases and digital sums*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 690–694.

[52] J.R. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*, Math. Mag. 41 (1968), 21–25.

## RÉSUMÉ.

Nous étudions les fonctions sommatoires des suites digitales. Ces suites sont obtenues en "promenant une fenêtre" sur le développement des entiers en base q, et sont une sous-classe des suites q-régulières. Le comportement asymptotique des fonctions sommatoires est précisé, avec la mise en évidence d'une oscillation "fractale", qui fait intervenir une fonction continue nulle part dérivable. Dans la dernière partie nous nous intéressons à des suites d'entiers à la Cantor, qui s'écrivent dans une base donnée en évitant certains chiffres.

### Mots-clés.

Fonctions sommatoires, suites digitales, "fonctions fractales", automates finis, substitutions, ensembles d'entiers "à la Cantor".

école doctorale de mathématiques de Bordeaux

Université Bordeaux I
33405 TALENCE-CEDEX FRANCE
(33) 56 84 60 53