



HAL
open science

Simulation numérique directe d'écoulements à l'aide d'une méthode de frontière immergée

Emeline Noël

► **To cite this version:**

Emeline Noël. Simulation numérique directe d'écoulements à l'aide d'une méthode de frontière immergée. Autre [cond-mat.other]. INSA de Rouen, 2012. Français. NNT : 2012ISAM0020 . tel-00845203

HAL Id: tel-00845203

<https://theses.hal.science/tel-00845203>

Submitted on 16 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

À L'INSA DE ROUEN

En vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSA DE ROUEN

Discipline : Physique
Spécialité : Mécanique des fluides et Énergétique

par

Emeline Noël

**Simulation numérique directe d'écoulements
à l'aide d'une méthode de frontière immergée**

Soutenue le lundi 19 novembre 2012

Composition du jury

Rapporteurs

Dominique Legendre Professeur des Universités, IMFT - Toulouse
Stéphane Vincent Maître de Conférences (HDR), I2M - Bordeaux

Examineurs

Jean-Luc Estivalezes Ingénieur de Recherche, ONERA - Toulouse
Alain Berlemont Directeur de Recherche, CORIA - Rouen
Jérôme Hélie Ingénieur Chef de projet, Continental Automotive SAS - Toulouse

Directeur de thèse

Jean Cousin Professeur des Universités, CORIA - Rouen

Co-Encadrant de thèse

Thibault Ménard Maître de Conférences, CORIA - Rouen

*« L'art de vivre est un subtil mélange
entre lâcher prise et tenir bon »
Henry Ellis*

Il y a certaines choses que l'on ne s'explique pas. Pourquoi enfant, déjà, j'adorais apprendre ? Pourquoi plus tard, j'éprouvais du plaisir à résoudre des équations ? Pourquoi pendant cette thèse, j'ai adoré écrire du code et pourquoi j'ai été fasciné par l'outil numérique ? Il y a d'autres choses que l'on s'explique plus facilement. Pourquoi on est démoralisé lorsqu'on se trouve face à un mur que l'on pense infranchissable ? Et pourquoi pour le surmonter, il est nécessaire d'avoir des appuis. L'équipe, Alain Berlemont, Jean Cousin, Thibaut Ménard, Mathieu Doring, a été le rocher dans la tempête, le sourire contre les larmes. Je vous remercie d'avoir été là. Jean, je te suis reconnaissante de m'avoir dirigé à la perfection, tu as su me guider tout en me laissant entreprendre, travailler avec toi fut un plaisir. Alain, tu es la pierre angulaire de cette équipe, celui qui motive, celui qui teste les codes, celui qui reconforte. Thibaut, tu as su me laisser faire tout en distillant tes connaissances. Mathieu, dans une certaine mesure, tu es mon père, tu m'a appris que programmer demande de structurer sa pensée et qu'il est plus facile de tester son code sur un petit cas pas trop compliqué !

D'aucuns diront que sans laboratoire il n'y aurait pas de doctorants et encore moins de docteurs, ceux-ci ont raison. Je remercie le directeur de l'unité mixte de recherche 6614 CORIA **Mourad Boukhalfa** qui m'a permis d'effectuer ces travaux au sein de son laboratoire. Afin d'être admise dans la communauté des docteurs, mon travail a du être jugé par mes pairs. Je remercie **Dominique Legendre** et **Stéphane Vincent** d'avoir accepté de rapporter ce travail. Je remercie mes examinateurs **Jean-Luc Estivalezes**, **Jérôme Hélie** et **Alain Berlemont** d'avoir porté leurs attentions sur ces travaux. Il est nécessaire de noter que comme toute thèse numérique l'accès aux ressources du CRIHAN, de l'IDRIS et du CINES a été un atout de première classe. Ainsi, je tiens à remercier ces établissements. Sans financement, ces travaux n'aurait pas pu être menés, je remercie le pôle de compétitivité Mov'eo d'avoir permis le développement du projet MAGIE et merci à **Jérôme Hélie** d'avoir porté le projet pour Continentale automotive permettant le financement de ces travaux.

La vie du doctorant est largement facilitée au CORIA grâce à l'efficacité des services communs du laboratoire : le service informatique, bien sûr, avec notamment la disponibilité de **Cédric Chambrelan**, de **Guillaume Edouard** et de **Hugues Aroux** ; le service de gestion avec notamment **Vanessa Picard**. Je souhaite remercier l'ensemble du personnel des services communs qui apportent tous leurs contributions au bon déroulement des thèses.

Enfin, *the last but not the least*, les collègues, les amis, les compagnons de routes. Il y a ceux qui sont partis : le tricky man forever **Jérémy Chesnel**, le lumineux **François Troadec**, la sympathique **Céline Tournebize**, le bérichon **Arnaud Gapin**, le petit **Nicolas Fdida**. Et puis il y a ceux qui sont encore là : le photographe **Guillaume Boutin**, le nippon **Yann Meslem**, le communiste anarchiste révolutionnaire et lyrique **Fabien Thiesset**, le techno-addict **Benoit Leveugle**, le tout feu tout flamme **Emilien Varea**, le Nox **François Pecquery**, le courageux des réunions tardives **Florian Lespinasse**, l'allumé **Guillaume Lodier**, et j'en passe et des meilleurs ! Toutes les routes mènent à Rome, nous vérifierons cela le moment venu. En tout cas, c'était cool de ramer avec vous, je me suis sentie moins seule. J'ai une pensée particulière pour ceux qui ont eu à me supporter, le ténébreux **Jean François Krawczynski** et le souriant **Philippe Desjonquères**.

Au commencement, il y a eu **mes parents**. Sans eux, rien de tout cela n'aurait pu être possible, je vous remercie d'avoir fait une petite soeur à **mon frère** et de la soutenir inconditionnellement. Tiens en parlant de lui, c'est lui qui a initié les études dans la famille, merci d'avoir dégagé la voie. Je remercie aussi ma soeur de coeur **Fanny** qui me permet de rester connectée au réel et qui est toujours près de moi quoi qu'il arrive. J'ai toujours eu un grand engagement personnel dans la poursuite de mes études et notamment pendant cette formation par la recherche qu'est une thèse. Cet engagement peut avoir des répercussions émotionnelles fortes. Je te remercie **Maxime** d'être le garant de ma sérénité.

Table des matières

1	Introduction de domaines irréguliers dans le code ARCHER : revue bibliographique	7
1.1	Simulation numérique d'écoulements dans un domaine régulier	7
1.1.1	Écoulements monophasiques	7
1.1.1.1	Méthode de projection	7
1.1.1.2	Équation de Poisson	8
1.1.1.3	Condition limite sur la pression	10
1.1.1.4	Schémas numériques utilisés	11
1.1.2	Écoulements diphasiques	11
1.1.2.1	Position du problème	11
1.1.2.2	Description de l'interface	12
1.1.2.3	Traitement des discontinuités matérielles et de la force singulière de tension	14
1.1.3	Réalisations	17
1.2	Simulation numérique d'écoulements monophasiques dans un domaine irrégulier	20
1.2.1	Position du problème	20
1.2.2	Principales approches	21
1.2.2.1	Approche continue	21
1.2.2.2	Approche discontinue	23
1.2.3	Conclusion	32
2	Mise en oeuvre de la méthode	35
2.1	Généralités et concepts de base	35
2.1.1	Introduction	35
2.1.2	Concepts de base	36
2.2	Imposition de la condition limite en vitesse	37
2.2.1	Traitement de la singularité $\alpha \ll 1$	37
2.2.2	Méthode algébrique	38
2.2.3	Méthode d'extrapolation	39
2.3	Imposition de la condition limite en pression	41
2.3.1	Problématique	41
2.3.2	Formulation de l'interpolation ε	43
2.3.3	Modification du Laplacien	44
2.4	Conclusion	45
3	Validation en écoulements monophasiques	47
3.1	Introduction	47
3.2	Écoulements de canal et de conduite	47
3.2.1	Écoulement dans un canal 2D	47
3.2.1.1	Écoulement de Poiseuille plan : paramètres physiques	47

3.2.1.2	Simulation : paramètres numériques	49
3.2.1.3	Résultats	50
3.2.2	Écoulement dans une conduite 3D	52
3.2.2.1	Écoulement de Hagen-Poiseuille : paramètres physiques	52
3.2.2.2	Simulation : paramètres numériques	53
3.2.2.3	Résultats	54
3.3	Écoulements autour d'un cylindre	56
3.3.1	Description de l'écoulement	56
3.3.2	Caractérisation des écoulements	57
3.3.3	Paramètres physiques et numériques de la simulation	58
3.3.4	Régime (B)	59
3.3.5	Régime (C)	61
3.4	Problématique sur l'imposition de la condition limite en pression	62
3.4.1	Introduction	62
3.4.2	Cas test analytique	64
3.4.2.1	Condition de <i>paroi</i>	66
3.4.2.2	Condition de divergence <i>fantôme</i>	71
3.4.2.3	Condition mixte	73
3.4.2.4	Conclusion	76
3.4.3	Condition de <i>paroi</i> : Application à l'écoulement autour d'un cylindre (régime(B))	77
3.4.3.1	Description du cas test	77
3.4.3.2	Résultats	78
3.4.4	Conclusion	79
3.5	Conclusion Générale	80
4	Inclusion d'une seconde phase dans la version bidimensionnelle	81
4.1	Introduction	81
4.2	Ligne de contact	81
4.2.1	Concepts de base	81
4.2.2	Condition de non-glissement	84
4.2.2.1	Monophasique	84
4.2.2.2	Diphasique	84
4.2.3	Angle de contact	88
4.2.3.1	Introduction	88
4.2.3.2	Régime quasi-statique	88
4.2.3.3	Régime dynamique	88
4.2.3.4	Conclusion	89
4.3	Mise en œuvre	89
4.3.1	Imposition de l'angle de contact	89
4.3.2	Application de la G.F.M pour la condition de pression	91
4.4	Validations	95
4.4.1	Indroduction	95
4.4.2	Angle statique	95
4.4.2.1	Description du cas test	95
4.4.2.2	Résultats en absence de gravité	97
4.4.2.3	Résultats avec gravité	101
4.4.3	Angle dynamique	104
4.4.3.1	Choix du modèle d'angle dynamique	104

4.4.3.2	Description du cas test	107
4.4.3.3	Tests préliminaires	108
4.4.3.4	Résultats	114
4.5	Conclusion	116
5	Applications	117
5.1	Introduction	117
5.2	Écoulements 2D	117
5.2.1	Injecteur convergent	117
5.2.1.1	Simulation : paramètres physiques et numériques	117
5.2.1.2	Caractérisation de l'écoulement	121
5.2.1.3	Comparaison avec l'expérience de Scholz <i>et al.</i> [85]	125
5.2.1.4	Analyse spectrale des écoulements interne et externe	126
5.2.2	Canaux à différents rapports L/D	129
5.2.2.1	Simulations : paramètres physiques et numériques	129
5.2.2.2	Profils de vitesses : moyennes et fluctuations	131
5.2.2.3	Analyse spectrale des écoulements interne et externe	132
5.2.3	Analyse comparative des différentes configurations	140
5.2.4	Conclusion	143
5.3	Écoulement 3D : Triple disque	144
5.3.1	Simulation : paramètres physiques et numériques	144
5.3.2	Caractérisation de l'écoulement	146
5.3.3	Analyse spectrale de l'écoulement interne (simulation) et externe (expérience)	151
5.4	Conclusion	152
	Conclusion	155
	Bibliographie	159

Chapitre 1

Introduction de domaines irréguliers dans le code ARCHER : revue bibliographique

1.1 Simulation numérique d'écoulements dans un domaine régulier

1.1.1 Écoulements monophasiques

1.1.1.1 Méthode de projection

Dans l'approximation des milieux continus, l'équation de bilan de quantité de mouvement d'un fluide newtonien en l'absence de forces volumiques extérieures s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1.1)$$

La masse volumique ρ est une inconnue de l'équation 1.1 car elle peut évoluer avec le temps. L'équation locale de conservation de masse 1.2 permet de décrire son évolution temporelle.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2)$$

La pression p est également une inconnue de l'équation 1.1. Lorsque l'écoulement est compressible, la pression peut être liée à la masse volumique et à la température par une équation d'état comme la loi des gaz parfait.

Enfin, la solution du système d'équations différentielles 1.1 et 1.2 est dépendante de la valeur (condition de Dirichlet) ou du gradient (condition de Neumann) de la vitesse aux limites du domaine fluide Ω . L'équation 1.3 présente une condition de Dirichlet sur l'ensemble du bord du domaine fluide $\delta\Omega$.

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b \quad (1.3)$$

Lorsque l'écoulement est incompressible, la variation temporelle et spatiale de la masse volumique est supposée négligeable. L'équation 1.2 se simplifie sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

L'équation 1.1 de bilan de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.5)$$

La pression ne peut plus être liée à la masse volumique et à la température par une équation d'état. La pression perd son sens thermodynamique et peut être considéré comme un multiplicateur de Lagrange permettant d'obtenir le champ de vitesse sous la contrainte d'incompressibilité. Cette vision de la variable de pression est à l'origine de la méthode à pas fractionnaire dite méthode de projection permettant de découpler le calcul de la vitesse de celui de la pression. Formellement, le découplage de ces variables est basé sur le théorème de décomposition orthogonale de Ladyzhenskaia [53]. Pérot [71] analyse la méthode à pas fractionnaire comme une décomposition LU par block du système d'équations de Navier-Stokes. Cette analyse permet une caractérisation de l'erreur due au fractionnement et offre un formalisme utilisable pour la construction de décomposition d'ordre plus élevé.

Au premier pas, un champ de vitesse intermédiaire qui ne respecte pas a priori la contrainte d'incompressibilité est évalué à partir de l'équation de quantité de mouvement sans la variable de pression. Au second pas, le champ divergent est projeté dans l'espace des champs à divergence nulle afin d'obtenir la vitesse et la pression au pas de temps considéré. Cette procédure est plus efficace que la résolution du système couplé et se traduit numériquement par une discrétisation temporelle simple des équations de Navier-Stokes.

La méthode de projection, initialement introduite par Chorin [19] et Temam [97] indépendamment, a connu différents axes de développement qui ont conduit à plusieurs formulations : les méthodes de correction de pression, les méthodes de correction de vitesse, et les méthodes fractionnaires consistantes. Guermond et *al* [39] proposent un panorama de ces techniques. E et Liu [28] présentent les problématiques de convergence et de couche limite numérique. La méthode de projection que nous utilisons est une méthode de correction de pression non-incremental d'ordre 1 (erreur due au fractionnement $\mathcal{O}(\Delta t)$).

1.1.1.2 Équation de Poisson

Nous souhaitons résoudre les équations de Navier-Stokes dans leur formulation incompressible (1.6) présentée ici sans forces volumiques extérieures.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Une discrétisation en temps de type Euler permet d'obtenir les équations (1.7).

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} = \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Nous découplons le système (1.7) en ignorant la contrainte d'incompressibilité dans un premier temps. Une vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* est calculée à partir de l'équation de quantité de mouvement. Dans un deuxième temps, la vitesse intermédiaire est projetée dans l'espace des champs solénoïdaux afin d'obtenir le champ de vitesse \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} .

Pour le premier ordre, la procédure est résumée par ce qui suit :

Étape 1 :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = \nu \Delta \mathbf{u}^* \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \delta\Omega \quad (1.9)$$

Le théorème de décomposition orthogonale ne permet pas d'imposer complètement la condition limite en vitesse (1.9) [76][53][77]. Seule la composante normale de la condition limite en vitesse peut être spécifiée (1.12).

Étape 2 :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (1.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \delta\Omega \quad (1.12)$$

En appliquant l'opérateur de divergence à la première équation du système (1.10) et en tenant compte de la contrainte d'incompressibilité, on obtient l'équation (1.13).

$$\frac{\Delta p^{n+1}}{\rho} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (1.13)$$

L'équation de type elliptique (1.13) est une équation de Poisson qui nécessite une condition aux limites sur $\delta\Omega$ permettant de garantir l'existence et l'unicité de la solution. Cependant, contrairement à la vitesse, on ne connaît pas de conditions aux limites *naturelles* pour la pression sur $\delta\Omega$.

1.1.1.3 Condition limite sur la pression

L'équation de quantité de mouvement (1.5) prescrit le gradient de pression fluide sur $\delta\Omega$. Dans un cadre bidimensionnel, la projection de l'équation (1.5) dans la direction normale n et la direction tangentielle t sur le bord $\delta\Omega$ s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mu \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \mu \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{t} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \quad \text{sur} \quad \delta\Omega \quad (1.14)$$

Hammouti [40] relève qu'ainsi il existe deux conditions de pression : une condition de type Neumann et une condition de type Dirichlet (à une constante près) [28][40]. Alors qu'une seule condition est nécessaire, le problème de Poisson sur p est muni d'une double condition.

Or, la projection de l'équation (1.10) dans la direction normale au bord $\delta\Omega$ est :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\mathbf{n} \cdot \nabla p^{n+1}}{\rho} \quad (1.15)$$

D'après la condition limite (1.12) et (1.9),

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* \quad \text{sur} \quad \delta\Omega \quad (1.16)$$

soit :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \delta\Omega \quad (1.17)$$

Hammouti [40] constate qu'alors le problème est inconsistant et des erreurs localisées au bord du domaine dans une couche limite numérique sont introduites dans la détermination de la pression et de la vitesse. Timmermans et al [99] proposent un schéma de type correction de pression dans une formulation incrémentale rotationnelle. Cette formulation permet de conserver la consistance pour la condition de pression de type Neumann mais ne garantit pas l'exactitude de la condition de Dirichlet.

Hammouti [40] relève qu'en principe, tout champ de pression calculé en résolvant le problème de Poisson avec la condition de Neumann doit nécessairement vérifier la condition de Dirichlet correspondante pour être solution de Navier-Stokes. Il interprète le surconditionnement du problème de Poisson comme une propriété des champs de vitesse admissibles comme solutions des équations de Navier-Stokes. Pour lui, les champs de vitesse solutions sont des sous-ensembles contraints des champs à divergence nulle. Ainsi, sa vision indique que la projection du champ de vitesse test sur l'ensemble des champs à divergence nulle ne contraint pas l'ensemble des solutions admissibles. Sa conclusion est qu'aucune méthode ne permet de restreindre l'ensemble des solutions admissibles aux champs à divergence nulle permettant d'obtenir un champ de pression respectant à la fois la condition de Neumann et la condition de Dirichlet. Ses travaux de thèse [40] ont permis des avancées dans la résolution de cette

problématique. L'utilisation d'une fonction de courant pour un écoulement bi-dimensionnel a permis d'obtenir une formulation consistante et correcte du problème de Poisson pour résoudre le problème de Stokes. Bien qu'il estime que la méthode puisse être étendue au problème de Navier-Stokes, il émet des réserves quant à une formulation tri-dimensionnelle. L'objectif de ce travail n'étant pas de résoudre cette problématique, nous utilisons la méthode de projection d'ordre 1 qui offre un bon compromis entre précision et rapidité.

1.1.1.4 Schémas numériques utilisés

Les équations 1.8 et 1.13 sont discrétisées par différences finies sur un maillage décalé (Marker and Cell). L'équation 1.8 contient un terme temporel, un terme convectif et un terme visqueux. Le terme convectif est discrétisé par un schéma WENO 5 [47]. Le terme visqueux et l'opérateur Laplacien de l'équation de Poisson 1.13 sont discrétisés par un schéma centré d'ordre 2. L'opérateur divergence de l'équation 1.13 et l'opérateur gradient de l'équation 1.10 par un schéma centré d'ordre 2 relatif au maillage MAC. L'avancement en temps utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou 3. L'équation de Poisson 1.13 discrète mène à un système linéaire qui est inversé à chaque étape de Runge-Kutta par une méthode de gradient conjugué pré-conditionné par une approche multigrille géométrique [66].

1.1.2 Écoulements diphasiques

1.1.2.1 Position du problème

L'objectif est de prendre en compte l'interaction entre deux fluides non miscibles. Chaque fluide obéit aux équations de Navier-Stokes. À l'interface, les molécules constitutives de chacun des fluides sont en contact avec un autre fluide aux propriétés physiques différentes. Pour se maintenir à l'interface, le niveau d'énergie des molécules doit être plus élevé qu'à l'intérieur de chacun des fluides. Ce plus fort niveau d'énergie s'exprime macroscopiquement par l'intermédiaire de la tension de surface σ en $N.m^{-1}$. À l'interface, une force résultante de cette tension de surface \mathbf{T}_σ est à prendre en compte dans le bilan de quantité de mouvement.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{T}_\sigma \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

avec $\mathbf{T}_\sigma = \sigma \kappa \mathbf{n}_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)$, σ est le coefficient de tension de surface, κ est la courbure, \mathbf{n}_f est la normale à l'interface, \mathbf{x}_f la position de l'interface et δ la distribution de Dirac.

L'inclusion d'une force singulière peut être effectuée par discrétisation de la distribution de Dirac. Il s'agit classiquement de l' "*Immersed Boundary Method*" développée par Peskin [72]. Cependant ici, les propriétés physiques des sous domaines fluides sont différentes : il y a discontinuité de la viscosité μ et de la densité ρ . L'ensemble de ces discontinuités peut être approximé par des fonctions de Dirac et d'Heaviside discrètes. Néanmoins ce type de résolution numérique impose un étalement de l'interaction des sous domaines [37].

Par ailleurs, la position et le mouvement de l'interface doivent être décrits. En l'absence de transition de phase, l'interface constitue une surface matérielle dont le mouvement est régi par :

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_f) \quad (1.19)$$

L'indice f se réfère à un point de l'interface et \mathbf{v}_f est la vitesse locale du fluide. Le mouvement de l'interface peut alors être décrit par la résolution de l'équation 1.19 pour une collection de marqueurs lagrangiens ("interface tracking") qui peuvent être reliés ou non par de portions de droite ou de courbe. Les ruptures ou coalescences ne s'effectuent pas naturellement et un critère arbitraire doit définir l'instant de jonction ou de séparation des interfaces. De plus, les marqueurs doivent être régulièrement redistribués dans le domaine de calcul pour éviter un peuplement ou un dépeuplement des marqueurs qui altèrent la description de l'interface [37].

Une alternative est d'utiliser un champ scalaire représentatif de cette interface qui est transporté par le champ de vitesse grâce à une équation de transport ("interface capturing"). Ces méthodes manipulent les changements topologiques naturellement. On distingue les méthodes *Volume of fluid* et les méthodes *Level Set*. Les méthodes *Volume of fluid* sont conservatives par nature mais les propriétés algébriques sont insuffisantes, la localisation de l'interface est diffuse ce qui rend imprécis le calcul des grandeurs caractéristiques telles que la courbure ou la normale. Les méthodes *Level Set* ne sont pas conservatives par nature mais ont des propriétés algébriques suffisantes permettant de décrire finement l'interface et facilitant le calcul des grandeurs caractéristiques.

D'une manière synthétique, une simulation d'écoulement diphasique par rapport à une simulation d'écoulement monophasique requiert le traitement de différents aspects détaillés par la suite :

- La prise en compte de l'action de la force singulière \mathbf{T}_σ
- La prise en compte des discontinuités matérielles
- La description de l'interface

1.1.2.2 Description de l'interface

Les travaux de thèse de Tanguy [95] ont porté sur la construction d'un solveur permettant la simulation d'écoulements diphasiques (ARCHER). Une méthode *Level Set* a été développée. Le champ scalaire choisi est une fonction distance signée ($|\nabla\phi| = 1$) :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{à l'interface} \\ \phi(\mathbf{x}, t) > 0 & \text{fluide 1} \\ \phi(\mathbf{x}, t) < 0 & \text{fluide 2} \end{cases} \quad (1.20)$$

Le champ scalaire ϕ est transporté par le champ de vitesse fluide :

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.21)$$

Cependant, cette formulation ne garantit pas la conservation de sa propriété essentielle de fonction distance ($|\nabla\phi| \neq 1$). À chaque pas de temps, il est donc nécessaire de corriger le champ scalaire sans modifier le niveau $\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$. La résolution itérative de l'équation suivante permet cette correction :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \text{sign}(\phi)(1 - |\nabla\phi|) \quad (1.22)$$

avec

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} -1 & \phi < -dx \\ \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + dx^2}} & |\phi| \leq dx \\ 1 & \phi > dx \end{cases} \quad (1.23)$$

Cette méthode de réinitialisation peut être vue comme une formulation de la méthode d'extrapolation d'Aslam [4] lorsque la région inconnue est de part et d'autre de la surface $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$.

Soit la normale du champ scalaire :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (1.24)$$

La normale \mathbf{n} est dirigée vers les valeurs croissantes de ϕ . Lorsque la direction d'extrapolation est vers les valeurs croissantes de ϕ , on peut écrire :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \mathbf{n}\nabla\phi = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + |\nabla\phi| = 1 \quad (1.25)$$

Lorsque la direction d'interpolation est vers les valeurs décroissantes de ϕ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \mathbf{n}\nabla\phi = -1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial\xi} - |\nabla\phi| = -1 \quad (1.26)$$

De manière générique, il s'agit d'une extrapolation constante : à l'équilibre le gradient dans la direction normale d'extrapolation est imposé. La formulation compacte des équations 1.25 et 1.26 est :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \alpha|\nabla\phi| = \alpha \quad (1.27)$$

Afin de ne pas modifier la position de l'interface, il est souhaitable que α soit nul lorsque $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$. On remarque par ailleurs que la valeur de α en dehors de cette contrainte et du respect de la direction de propagation de l'extrapolation, n'a pas d'importance (à l'équilibre $|\nabla\phi| = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$). La fonction $\text{sign}(\phi)$ (1.23) donne une valeur de α compatible avec les contraintes énoncées plus avant.

Cette méthode présente un défaut de conservation de masse qui a été amélioré grâce aux travaux de thèse de Ménard [66] par un couplage avec une méthode *Volume of fluid*. Ce type de couplage est nommé CLSVOF, mais n'est pas considéré dans ce travail.

1.1.2.3 Traitement des discontinuités matérielles et de la force singulière de tension

La représentation de l'interface choisie est une représentation non diffuse. Tanguy [95] a préféré un traitement raide des discontinuités afin d'éviter le lissage induit par la discrétisation des distributions de Dirac et d'Heaviside. La *Ghost Fluid Method* [48] permet de traiter les discontinuités sans les lisser tout en restant une méthode robuste et précise. Le principe n'est plus d'inclure explicitement les discontinuités mais de les inclure implicitement au travers des sauts qu'elles engendrent sur les variables à résoudre (\mathbf{u} et p). La connaissance de ces sauts permet de construire une variable *ghost* utilisable par le schéma de différences finies lorsque que le stencil traverse une interface. Finalement, il s'agit d'ajouter au schéma de différences finies le saut résultant de l'interface traversée. Cette méthode présente des similitudes avec le formalisme de l'*immersed interface method* [57], bien que cette dernière n'a montré sa capacité à traiter des discontinuités matérielles que récemment [41].

L'élément clé de la méthode est l'établissement des sauts. L'écriture de la conservation de la quantité de mouvement du fluide *réel* ($\mathbf{F}_{\rho\mathbf{u}}^R$) dans le repère liée à l'interface ($\mathbf{N}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$) se déplaçant à la vitesse du fluide est [32] :

$$\mathbf{F}_{\rho\mathbf{u}}^R = Q(pI - \tau)\mathbf{N}^T + \sigma\kappa\mathbf{N} \quad (1.28)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

avec τ le tenseur des contraintes.

La conservation de la quantité de mouvement entre le fluide *réel* (R) et le fluide *ghost* (G) se traduit par :

$$Q(p^R I - \tau^R)\mathbf{N}^T + \sigma\kappa\mathbf{N} = Q(p^G I - \tau^G)\mathbf{N}^T \quad (1.30)$$

Les sauts à l'interface ([.]) entre la variable fluide *réel* et la variable fluide *ghost* s'écrivent alors :

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} (pI - \tau)\mathbf{N}^T \right] = \begin{pmatrix} \sigma\kappa \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

L'équation 1.30 montre que le fluide *ghost* est construit pour tenir compte implicitement de la force singulière et des discontinuités matérielles. En tenant compte du fait que le fluide est visqueux :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= 0 \\ [\nabla u \cdot \mathbf{T}_1] &= [\nabla v \cdot \mathbf{T}_1] = [\nabla w \cdot \mathbf{T}_1] = 0 \\ [\nabla u \cdot \mathbf{T}_2] &= [\nabla v \cdot \mathbf{T}_2] = [\nabla w \cdot \mathbf{T}_2] = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

le saut de la variable p s'écrit,

$$[p] = \sigma\kappa + [2\mu](\nabla u \cdot \mathbf{N}, \nabla v \cdot \mathbf{N}, \nabla w \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} = a_\Gamma \quad (1.33)$$

et le saut du tenseur visqueux $\mu \nabla \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} [\mu u_x] & [\mu u_y] & [\mu u_z] \\ [\mu v_x] & [\mu v_y] & [\mu v_z] \\ [\mu w_x] & [\mu w_y] & [\mu w_z] \end{pmatrix} &= [\mu] \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} + \\ [\mu] \mathbf{N}^T \mathbf{N} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{N} - [\mu] \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.34)$$

La continuité de la vitesse à travers l'interface implique que l'accélération Lagrangienne est continue également [48] :

$$\left[\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right] = 0 \quad (1.35)$$

ce qui permet d'écrire des conditions de sauts pour le terme du gradient de pression sur la masse volumique de l'équation de quantité de mouvement des fluides :

$$\begin{aligned} \left[\frac{p_x}{\rho} \right] &= \left[\frac{(2\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y + (\mu(u_z + w_x))_z}{\rho} \right] \\ \left[\frac{p_y}{\rho} \right] &= \left[\frac{(\mu(u_y + v_x))_x + (2\mu v_y)_y + (\mu(v_z + w_y))_z}{\rho} \right] \\ \left[\frac{p_z}{\rho} \right] &= \left[\frac{(\mu(u_z + w_x))_x + (\mu(v_z + w_y))_y + (2\mu w_z)_z}{\rho} \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Néanmoins, Kang et al [48] précisent que la résolution de l'équation de Poisson peut être faite en supposant $\left[\frac{p_x}{\rho} \right] = \left[\frac{p_y}{\rho} \right] = \left[\frac{p_z}{\rho} \right] = 0$. L'équation de quantité de mouvement étant continue, la divergence globale de cette équation peut être prise sans prendre en compte ces sauts. A contrario, la discrétisation particulière d'une partie des équations, comme le laplacien, doit prendre en compte les conditions de sauts (1.33). Le saut du tenseur visqueux peut également être omis ce qui provoque alors un étalement du terme de visqueux autour de l'interface [48].

Une description de l'application de la méthode sur l'équation de Poisson peut être trouvée dans Liu et al [61]. Nous allons présenter la méthode pour une variable discontinue afin de montrer simplement son application. La figure 1.1 montre une configuration 1D où la variable S est discontinue, nous cherchons à estimer sa dérivée seconde en i . Le saut de S au passage du domaine Ω^+ au domaine Ω^- vaut $[S] = S^+ - S^- = a_\Gamma$.

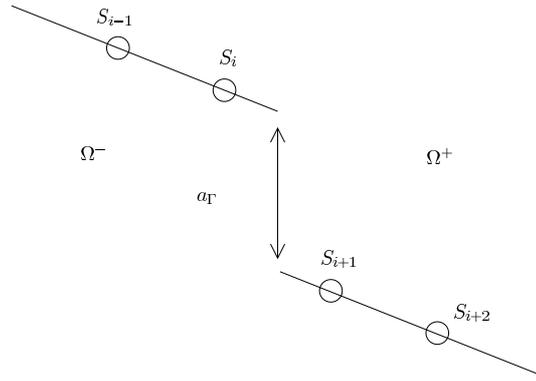


FIGURE 1.1: Différentielle d'une variable discontinue.

Si on considère un schéma de différences finies centré d'ordre deux, la discrétisation de la dérivée seconde donne :

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i = \frac{S_{i+1} + S_{i-1} - 2S_i}{\Delta x^2} \quad (1.37)$$

Or, $(S_{i-1}, S_i) \in \Omega^-$ alors que $(S_{i+1}) \in \Omega^+$, ce qui en fait de médiocres candidats pour permettre une bonne estimation de la dérivée seconde. La proposition de la *Ghost Fluid Method* est de remplacer $(S_{i+1}) \in \Omega^+$ par $(S_{i+1}) \in \Omega^-$ par l'intermédiaire du saut de cette variable.

$$S_{i+1}^- = S_{i+1}^+ - a_\Gamma \quad (1.38)$$

L'équation 1.37 est remplacée par :

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i = \frac{S_{i+1} + S_{i-1} - 2S_i - a_\Gamma}{\Delta x^2} \quad (1.39)$$

L'expression du saut n'étant disponible que sur la grille cartésienne, il est nécessaire d'effectuer une interpolation grâce à la fonction distance afin d'obtenir le saut à l'interface :

$$a_\Gamma = \frac{a(x_{i+1})|\phi(x_i)| + a(x_i)|\phi(x_{i+1})|}{|\phi(x_{i+1})| + |\phi(x_i)|} \quad (1.40)$$

Cette vision intuitive est formalisée par Wiegmann et Bube [107] mais dans le contexte de l'*Immersed Interface Method*. Le développement de Taylor d'une variable discontinue en $x_\alpha > x_i$ doit être corrigé par les sauts de cette variable sur les différents termes de la série de Taylor :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + f''(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots + J_\alpha \quad (1.41)$$

avec

$$\begin{aligned} J_\alpha &= [f]_\alpha + [f']_\alpha h^+ + \frac{1}{2!}[f'']_\alpha (h^+)^2 + \dots \\ h^+ &= x_{i+1} - x_\alpha \end{aligned} \quad (1.42)$$

Afin de garder l'ordre d'approximation du schéma de départ ($O(2)$), il est nécessaire de connaître le saut de la variable S et de ses dérivées première, seconde et tierce [59][56] :

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i = \frac{S_{i+1} + S_{i-1} - 2S_i}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{m=0}^3 \frac{(h^+)^m}{m!} [S^{(m)}] + O(\Delta x^2) \quad (1.43)$$

Il apparaît clairement que les formalismes de la *Ghost Fluid Method* et de l'*Immersed Interface Method* sont similaires. Cependant, la vision intuitive et simple de la *Ghost Fluid Method* a permis un développement rapide, malgré la perte formelle de l'ordre d'approximation des dérivées. De plus, la *Ghost Fluid Method* conserve la structure symétrique de l'équation de Poisson, ce qui permet de maintenir une bonne efficacité des solveurs. Un problème majeur dans l'application de l'*Immersed Interface Method* à des écoulements diphasiques est que la dérivation de conditions de saut est encore au stade de l'incorporation d'une force singulière mais ne traite pas les discontinuités matérielles [113][115][56][57]. Récemment, Harahap et Miura [41] proposent une dérivation de conditions de sauts permettant de traiter à la fois la force singulière et les discontinuités matérielles, leur champ d'application concerne la simulation numérique de la dynamique des plasmas. La méthode est complexe et engendre des matrices qui peuvent être fortement dissymétriques détériorant l'efficacité des solveurs.

1.1.3 Réalisations

Le code ARCHER avec suivi d'interface *Level Set* "pur", a démontré sa capacité à reproduire des collisions de gouttes [96]. Les nombres adimensionnels caractéristiques des collisions de gouttes sont le nombre de Weber, le nombre de Ohnesorge, le rapport des diamètres entre goutte Δ et le paramètre d'impact I .

$$We = \frac{\rho_l U_c^2 d_p}{\sigma} \quad Oh = \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma d_p}} \quad \Delta = \frac{d_p}{d_g} \quad I = \frac{2b}{d_p + d_g} \quad (1.44)$$

d_p est le diamètre de la petite goutte, d_g est le diamètre de la grosse goutte, b est la distance entre deux lignes parallèles passant aux centres des gouttes, U_c est la vitesse relative entre les gouttes, ρ_l et μ_l respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du liquide (ici,

de l'eau) et σ le coefficient de tension de surface du couple eau/air.

Une comparaison exhaustive des prédictions du code ARCHER et des résultats expérimentaux de Ashgriz et Poo [3] peut être trouvée dans la thèse de Tanguy [95]. Nous montrons en figure 1.2 une comparaison pour une séparation avec zéro satellite. L'évolution topologique de l'interface est fidèlement reproduite.

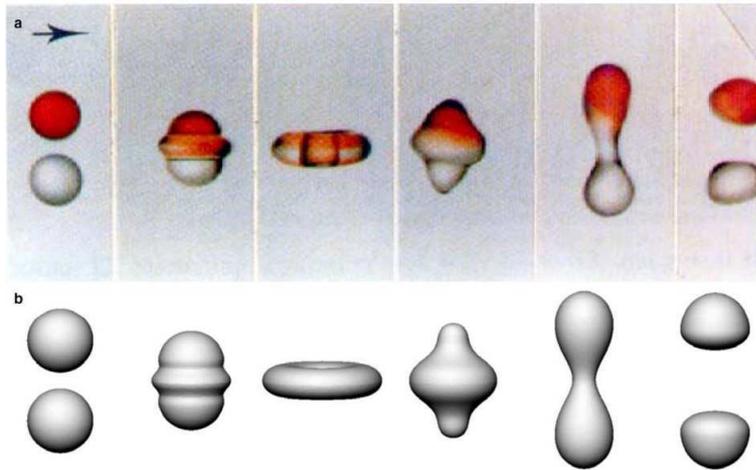


FIGURE 1.2: Régime de collisions avec séparation : séparation avec zéro satellite. $We = 23$, $I = 0.0$, $\Delta = 1$, $Oh = 0.0047$ (Maillage 80×160). Résultat expérimental en haut [3]. Résultat numérique en bas [96]

La mise en place par Ménard [66] d'un couplage de la méthode *Level Set* avec une méthode *V.O.F* (CLSVOF) a permis de remédier au défaut des méthodes *Level Set* pures : la perte de masse. Cet apport est crucial pour la simulation de jets liquides à forte vitesse car les nombreuses structures créées sont plongées dans de forts cisaillements. Les déformations successives doivent être traitées de manière à conserver la masse pour obtenir une représentation fidèle des processus d'atomisation. La figure 1.3 montre la simulation d'un jet haute vitesse [67].

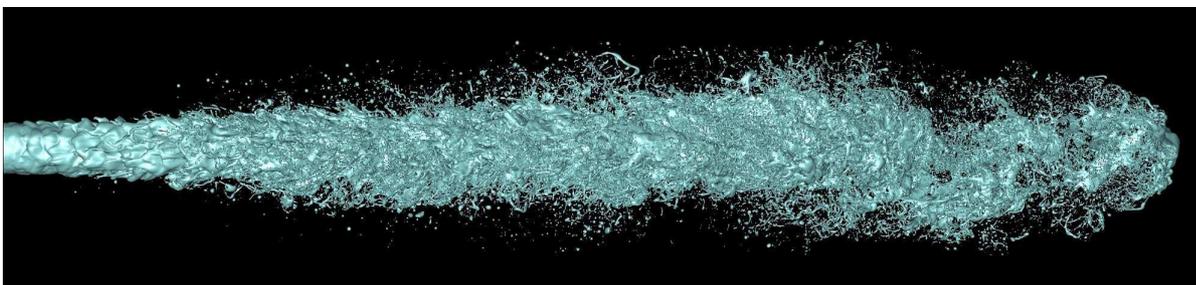


FIGURE 1.3: Simulation d'un jet liquide ($d = 100 \mu m$) à la vitesse débitante de $100 m.s^{-1}$.
 $\rho_l = 696 kg.m^{-3}$, $\rho_g = 25 kg.m^{-3}$, $\mu_G = 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$, $\mu_L = 1.2 \times 10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$,
 $\sigma = 0.06 N.m^{-1}$. (Maillage $256 \times 256 \times 2048$)

Les travaux récents réalisés au CORIA se sont intéressés à la simulation de la rupture d'un jet issu d'un injecteur basse-pression (triple disque) [21]. Ces travaux montrent l'importance

des conditions initiales d'injection pour obtenir des résultats numériques cohérents avec les résultats expérimentaux. Ils sont en accord avec les observations de Sander et Weigand [83] et de Faeth *et al.* [31] concernant l'importance de la turbulence générée dans l'injecteur sur les caractéristiques du spray. L'écoulement interne dans un injecteur triple disque a été simulé avec le logiciel *Fluent* où la turbulence a été modélisée avec une approche RANS. Le profil de vitesse en sortie de buse est introduit en condition initiale de la simulation diphasique. La partie (b) de la figure 1.4 est en désaccord avec l'image en partie (a) issue de l'expérience. L'injection de turbulence (méthode de Klein [52]) sur le profil moyen issu de la simulation RANS en partie (c) montre quant à lui une topologie d'écoulement plus proche de l'expérience. Il apparaît clairement et assez logiquement qu'il existe une grande influence des conditions initiales sur les simulations diphasiques. La mise en place d'un outil prédictif requiert la prise en compte de cette influence.

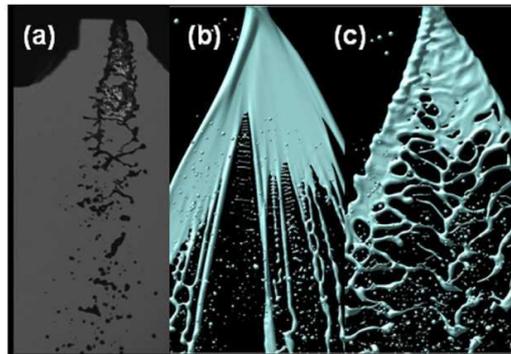


FIGURE 1.4: Écoulement en sortie de l'injecteur triple disque : a) expérience b) simulation avec profil d'entrée constant c) simulation avec profil d'entrée constant et ajout de turbulence [21]. (Maillage $256 \times 128 \times 512$)

Une simulation LES de l'écoulement interne a également été réalisée. La figure 1.5 montre une topologie d'écoulement très proche de l'expérience avec notamment une meilleure prédiction de l'angle du spray.

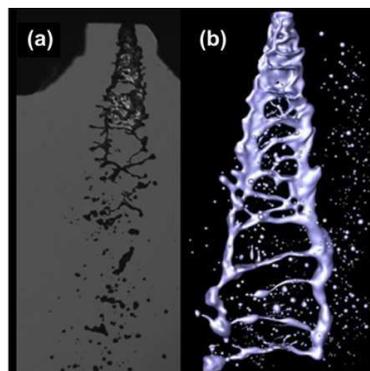


FIGURE 1.5: Écoulement en sortie de l'injecteur triple disque : a) expérience b) simulation avec profil d'entrée LES [21]. (Maillage $256 \times 128 \times 512$)

Ainsi, le code ARCHER prédit avec fidélité les collisions de gouttes et l'ajout d'une méthode numérique conservatrice en masse (CLSVOF) a permis de simuler l'atomisation d'un jet haute vitesse. Ce type de simulation pose nécessairement la question de la condition d'entrée. Des conditions d'entrée turbulentes synthétiques peuvent être introduits par l'intermédiaire de la méthode de Klein ou par l'utilisation d'un spectre énergétique typique d'une turbulence. Néanmoins, les simulations effectuées sur la configuration du triple disque montrent que la structure turbulente résultant de l'écoulement interne est difficile à modéliser *a priori*. L'augmentation du pouvoir prédictif des simulations de jet passe par une meilleure prise en compte de l'écoulement en sortie de buse. Dans cette optique, il est nécessaire d'étendre les capacités du code ARCHER à la simulation de domaine fluide de forme quelconque (domaine irrégulier) et cela constitue la motivation principale de ce travail.

1.2 Simulation numérique d'écoulements monophasiques dans un domaine irrégulier

1.2.1 Position du problème

Le maillage cartésien est simple à définir et permet l'utilisation de solveurs rapides et précis. Néanmoins, il ne peut traiter intrinsèquement que des domaines fluides rectangulaires (2D) ou cubiques (3D) dits domaines *réguliers*. Or, la plupart des écoulements fluides se produisent dans une géométrie quelconque dit domaine *irrégulier*. Le maillage cartésien n'est pas naturellement adapté à la définition de ce type de domaine. Un maillage conforme au domaine *irrégulier* peut être construit (figure 1.6), les qualités du maillage cartésien sont alors abandonnées. Par ailleurs, l'obtention d'un maillage de qualité pour des domaines *irréguliers* est parfois difficile notamment pour des géométries complexes. Une alternative est l'utilisation du concept de domaine fictif, il s'agit de représenter le domaine *irrégulier* sur un domaine fictif *régulier*. Le maillage cartésien peut être conservé (figure 1.7) mais un traitement spécifique doit prendre en compte l'immersion du domaine *irrégulier* dans le domaine fictif.

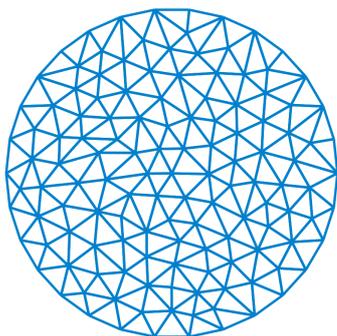


FIGURE 1.6: Maillage conforme

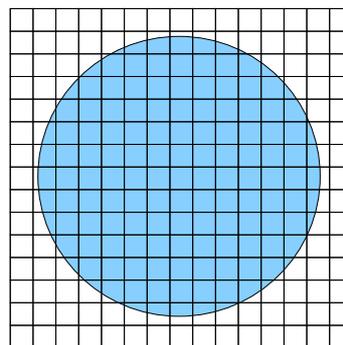


FIGURE 1.7: Maillage non-conforme

À ce stade, il apparaît une distinction fondamentale entre l'interface fluide/fluide définie à la section 1.1.2 et l'immersion d'un domaine *irrégulier* dans un domaine fictif. En effet ici, seul le domaine *irrégulier* est gouverné par les équations de Navier-Stokes. L'intersection des deux domaines est une **frontière** pour le domaine *irrégulier*. A contrario, l'intersection entre les deux domaines fluides de la section 1.1.2 est une **interface**.

1.2.2 Principales approches

Soit Ω_f le domaine fluide *irrégulier* immergé dans le domaine fictif *régulier* Ω , un terme de forçage (\mathbf{f}) est ajouté à l'équation de quantité de mouvement dont le domaine de définition est étendu au domaine fictif :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \Omega \quad (1.45)$$

Idéalement, le terme de forçage doit être nul sur le domaine fluide et ne s'appliquer qu'à la frontière du domaine (1.46) afin d'imposer la condition cinématique.

$$\begin{cases} \mathbf{f} = 0 & \Omega_f \\ \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{u} & \Omega - \Omega_f \\ \mathbf{f} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b & \delta\Omega_f \end{cases} \quad (1.46)$$

Cette force est singulière dans le sens où elle ne s'applique qu'à la frontière du domaine fluide, néanmoins contrairement à la force singulière de tension, sa définition est intrinsèquement liée à l'équation de quantité de mouvement. Il s'agit d'utiliser le principe d'action/réaction, la force exercée par le solide sur le fluide est l'opposé de la force exercée par le fluide sur le solide. La difficulté initiale est que la connaissance *exacte* de la force exercée par le solide sur le fluide présuppose de connaître *a priori* la force exercée par le fluide sur le solide.

Les différentes approches se divisent en deux catégories principales : les approches *continues* et les approches *discontinues* [69]. Les approches *continues* modélisent le terme \mathbf{f} par une fonction continue, la modélisation ne dépend pas de la discrétisation. Les approches *discontinues* ne modélisent pas le terme \mathbf{f} mais le calculent de manière explicite ou implicite, le calcul est alors dépendant de la discrétisation.

1.2.2.1 Approche continue

L'approche continue est attribuée à Peskin [72] qui a simulé l'écoulement sanguin dans une valve mitrale, puis dans un coeur à très faible nombre de Reynolds [65]. La frontière est modélisée par un ensemble de fibres élastiques. La propriété d'élasticité est utilisée pour la construction de la modélisation du terme \mathbf{f} : la force exercée par la fibre sur le fluide est la force de tension de la fibre. La tension de la fibre est liée à son étirement (loi de Hooke). Les fibres sont représentées par des marqueurs lagrangiens transportés à la vitesse locale du fluide. La force de tension exercée par les fibres sur le fluide est calculée pour chaque marqueur lagrangien et propagée sur la grille cartésienne par la discrétisation d'une distribution de Dirac.

Dans le cas d'un solide rigide, le terme \mathbf{f} ne peut plus être modélisé par une force de tension. Une modélisation de type ressort est alors construite, le déplacement par rapport à une position de référence (χ_k^e) du marqueur lagrangien k induit une force proportionnelle à une constante :

$$\mathbf{f}_k = -\beta(\chi_k - \chi_k^e) \quad (1.47)$$

Afin de respecter correctement la rigidité du solide, il est nécessaire d'imposer une valeur élevée de β (constante positive). Dans le cadre d'un solveur explicite, la réduction du pas de temps peut être prohibitive [54]. Goldstein *et al.* [35] propose un modèle d'oscillateur amorti *the Virtual Boundary Method* issu de la théorie du contrôle des systèmes linéaires :

$$\mathbf{f}_k = \underbrace{\alpha \int_0^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dt}_{\text{contrôleur intégral}} + \underbrace{\beta(\mathbf{u} - \mathbf{v})}_{\text{contrôleur proportionnel}} \quad (1.48)$$

\mathbf{v} est la condition de Dirichlet à la frontière avec \mathbf{u} la vitesse du fluide à la frontière. α et β sont des constantes négatives. Il s'agit d'un modèle **PI** (proportional-integral) [114] contrôleur, contrôleur à rétroaction (*feedback*). Il calcule un terme d'*erreur* comme étant la différence entre la valeur du système et la valeur désirée ($\mathbf{u} - \mathbf{v}$). Le contrôleur proportionnel dépend de l'erreur *actuelle* alors que le contrôleur intégral dépend de l'accumulation de l'erreur *passée*. Le choix des paramètres de gain (α, β) est difficile dans la mesure où il conditionne la stabilité du système contrôlé. α influence la rapidité de la réponse du système au contrôle et peut engendrer un dépassement de la valeur désirée (*overshoot*). β augmente la rapidité de la réponse du système mais augmente également son temps de stabilisation, l'erreur résiduelle du contrôleur proportionnel est éliminée. D'une manière générale, un **PI** contrôleur souffre d'un retard du contrôle de la valeur à la valeur désirée et est intrinsèquement construit pour des systèmes linéaires. Ce type de modèle paraît peu adapté aux frontières mobiles (modification de la valeur désirée) et aux hauts Reynolds (forte non linéarité du système). De plus, un traitement explicite de ce terme implique une réduction du pas de temps en fonction des valeurs α et β . Cette méthode a été utilisée par Saiki et Biringen [82] afin de simuler avec succès l'écoulement autour d'un cylindre fixe pour un nombre de Reynolds modéré ($Re < 400$) et d'un cylindre oscillant ($Re = 200$). Goldstein *et al.* [35] ont simulé l'écoulement dans un canal turbulent avec rainures et le début d'un écoulement autour d'un cylindre fixe ($Re = 550$).

Une approche similaire a été développée par Angot *et al.* [2] et Khadra *et al.* [50], le domaine fictif et ses inclusions (domaines irréguliers) sont modélisés par des milieux de porosité différentes et l'ensemble est régi par les équations de Navier-Stokes/Brinkman. Un terme est ajouté aux équations de Navier-Stokes usuelles sous la forme d'une force :

$$\mathbf{f}_k = \frac{\mu}{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (1.49)$$

K est la perméabilité du milieu définie idéalement comme étant infinie pour le fluide et nulle pour le solide. En pratique la variation de K est étalée sur plusieurs mailles autour de la frontière et varie entre une valeur forte dans le fluide et faible dans le solide. Ce terme s'apparente à

un contrôleur proportionnel seul ($\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\mu}{K}$). L'utilisation unique de ce type de contrôleur engendre une erreur résiduelle et ne permet pas de garantir l'imposition correcte de la vitesse à la frontière [69]. Cette méthode a été utilisée pour simuler efficacement l'écoulement autour d'un cylindre ($Re_{max} = 200$) et l'écoulement derrière une marche.

Classiquement, la force singulière modélisant l'action du solide sur le fluide est calculée sur des marqueurs Lagrangien puis propagée au maillage cartésien Eulérien par la discrétisation de la distribution de Dirac [54][82][35]. Ce type de propagation engendre un lissage de la force singulière et altère la représentation de la frontière qui est alors diffuse [69], la précision près de la frontière est réduite au premier ordre. Le développement de l'*Immersed Interface Method* [107] [113] a permis de ne plus propager la force singulière mais de la traiter comme une discontinuité en introduisant des conditions de sauts [57] [114] [115].

1.2.2.2 Approche discontinue

Afin de s'affranchir d'une modélisation du terme \mathbf{f} présentant des coefficients arbitraires, Mohd-Yusof [70] propose d'extraire le terme \mathbf{f} directement de la solution numérique. Reprenons l'équation 1.45 en effectuant une semi-discrétisation temporelle de type Euler et en introduisant les termes convectif, visqueux et le gradient de pression dans une variable RHS :

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = RHS_i + \mathbf{f}_i \quad (1.50)$$

Soit $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_b$ la condition de Dirichlet à la frontière, le terme \mathbf{f} est alors défini :

$$\mathbf{f}_i = -RHS_i + \frac{\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} \quad (1.51)$$

Le terme \mathbf{f} est construit de manière à respecter implicitement la condition de Dirichlet. L'équation 1.51 n'est correcte que si la localisation de l'imposition de la condition de Dirichlet correspond à un point du maillage cartésien. Ce cas n'est pas celui que souhaite traiter l'inclusion de domaine *irrégulier*, une procédure d'interpolation est nécessaire. Comme détaillé ci-dessous, le calcul de \mathbf{f} peut être effectué explicitement de manière indirecte pour des points intérieurs au domaine *irrégulier* [30][7] et implicitement de manière directe pour des points extérieurs [102].

Calcul explicite indirect de \mathbf{f}

Le calcul explicite de la force dépend de la méthode de résolution du système des équations de Navier-Stokes. L'idée générale consiste à calculer un premier avancement en temps de la solution sans prendre en compte le terme \mathbf{f} . Le forçage a lieu aux points fluides appartenant à Ω_f voisins de la frontière (figure 1.8).

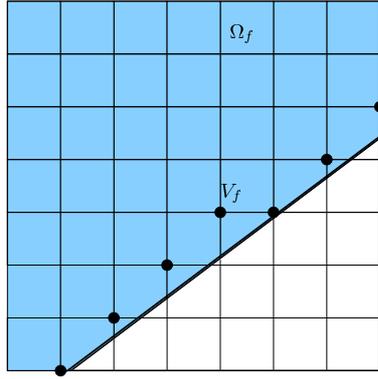


FIGURE 1.8: Domaine fluide irrégulier où le forçage a lieu aux points fluides appartenant à Ω_f .
Les points marqués par • sont les points intérieurs interpolés puis forcés

Soit ε un opérateur d'interpolation, la vitesse \mathbf{V}_f s'exprime en fonction de la condition de Dirichlet \mathbf{u}_b et des vitesses fluides calculées sans le terme \mathbf{f}

$$\mathbf{V}_f = \varepsilon(\mathbf{u}_{\Omega_f}^*, \mathbf{u}_b) \quad (1.52)$$

Le terme \mathbf{f} est ensuite calculé selon l'équation 1.51 en remplaçant \mathbf{u}_b par la valeur \mathbf{V}_f :

$$\mathbf{f}_f = -RHS_f + \frac{\mathbf{V}_f - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} \quad (1.53)$$

Ce type de méthodologie est notamment utilisé par Fadlun *et al.* [30], Balaras [7], Cristallo et Verzicco [24] ou encore Yang et Stern [117]. La différence majeure entre ces implémentations réside dans le schéma d'interpolation utilisé et les directions d'interpolations. Par exemple, Fadlun *et al.* [30] proposent une interpolation unidirectionnelle cartésienne tandis que Balaras propose une interpolation pluridirectionnelle.

Certains auteurs ont une autre utilisation de l'équation 1.51 et calculent le terme \mathbf{f} pour des marqueurs lagrangiens de la frontière [73] [118] [105].

Soit la définition d'une variable intermédiaire $\bar{\mathbf{u}}$,

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \Delta t RHS \quad (1.54)$$

l'interpolation ε de cette variable sur le marqueur k donne :

$$\bar{\mathbf{U}}_k = \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \quad (1.55)$$

Le terme de forçage associé au marqueur k s'exprime :

$$\mathbf{f}_k = \frac{\mathbf{u}_b - \bar{\mathbf{U}}_k}{\Delta t} \quad (1.56)$$

Cette méthode nécessite de propager la force singulière sur le maillage cartésien (distribution de Dirac lissée).

Calcul implicite direct de f

Dans les méthodes indirectes, l'idée générale consiste à corriger le champ de vitesse à l'intérieur du domaine *irrégulier* afin de respecter la condition de Dirichlet. Dans les méthodes directes, l'idée générale est que l'évolution du champ de vitesse à l'intérieur du domaine *irrégulier* doit tenir compte de la condition de Dirichlet. Schématiquement, les méthodes indirectes sont des corrections *a posteriori* et les méthodes directes des évolutions *a priori* qui permettent de respecter la condition de Dirichlet.

Les premiers développements des méthodes directes peuvent être trouvés dans la littérature sous la dénomination *Cartesian Grid Method*. Pour faire évoluer la vitesse en prenant en compte la condition de Dirichlet, soit le schéma de différences finies (*Ghost-cell* [102] [34] [33] [10] [17] [45] ou *Embedded Boundary* [64] [60] [111]) doit être modifié, soit le schéma de volumes finis (*Cut-cell*) [119] [103] [16] [42] doit être modifié au voisinage de la frontière. Des formulations hybrides ont également été développées [46].

▷ *Ghost-cell et Embedded Boundary* :

Les conditions limites à imposer dans le cadre de l'utilisation d'une méthode de projection sont [71] [77] :

Au pas intermédiaire,

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \quad (1.57)$$

À la projection, n étant la normale locale à la frontière,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (1.58)$$

Tseng et Ferziger [102] proposent de calculer une vitesse *ghost* à l'extérieur du domaine fluide qui respecte la condition de Dirichlet :

$$\mathbf{u}^G = \varepsilon(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}_b) \quad (1.59)$$

et une pression *ghost* à l'extérieur du domaine fluide qui respecte la condition de Neumann :

$$p^G = \varepsilon(p, \frac{\partial p}{\partial n}) \quad (1.60)$$

Cette prolongation de la solution rappelle la *Ghost Fluid Method* détaillée précédemment mais ici, il n'existe aucune variable de l'autre côté de la frontière et le saut n'est pas connu.

Cependant, la valeur ou son gradient à la frontière est connue, la solution est donc prolongée pour les respecter. Prenons l'exemple 1D de la détermination de la dérivée seconde d'une variable S (figure 1.9) :

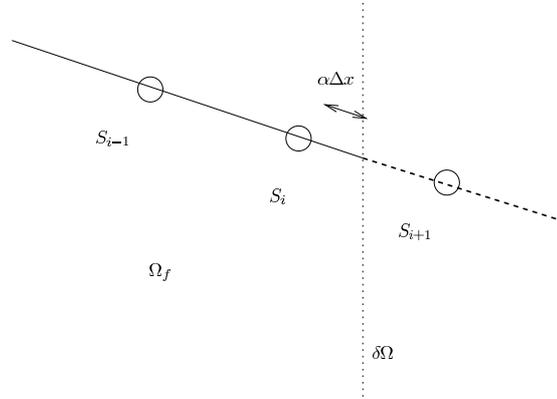


FIGURE 1.9: Prolongation de la solution dans le solide

Utilisons un développement de Taylor pour la variable à la frontière et la variable en $i - 1$:

$$\begin{aligned} S_{\delta\Omega} &= S_i + \alpha \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_i \Delta x + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_i \Delta x^2 \\ S_{i-1} &= S_i - \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_i \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_i \Delta x^2 \end{aligned} \quad (1.61)$$

soit,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{2S_{\delta\Omega} + 2\alpha S_{i-1} - 2S_i(1 + \alpha)}{(\alpha^2 + \alpha)\Delta x^2} \quad (1.62)$$

La valeur *ghost* de prolongation est la différence entre le schéma classique de différences finies (centré d'ordre 2) et le schéma construit à partir de la valeur à la frontière :

$$S_{i+1} = \frac{S_i(2\alpha^2 - 2) + S_{i-1}(\alpha - \alpha^2) + 2S_{\delta\Omega}}{(\alpha^2 + \alpha)} \quad (1.63)$$

L'équation 1.63 est une interpolation quadratique de S_{i+1} . On peut donc soit construire une variable *ghost* par interpolation (*ghost-cell* : équation 1.63) [102] et utiliser un schéma de différences finies classique soit construire un schéma de différences finies modifié (*embedded boundary* : équation 1.62) [64], les deux démarches sont équivalentes et la représentation de la frontière est non diffuse.

Une démarche similaire est développée par Linnick et Fasel [59] bien qu'utilisant les concepts de *Immersed Interface Method*. Les sauts ajoutés aux développements de Taylor ne sont pas définis à partir d'une fonction de forçage modélisée mais par des schémas de différences finies

décentrés du côté fluide. Linnick et Fasel utilisent des développements jusqu'à l'ordre 4 mais regardons la méthode à l'ordre 2.

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i = \frac{S_{i-1} - 2S_i + S_{i+1} - J_\alpha}{\Delta x^2} \quad (1.64)$$

avec,

$$J_\alpha = [S]_{\delta\Omega} + \left[\frac{\partial S}{\partial x} \right]_{\delta\Omega} h^+ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right]_{\delta\Omega} (h^+)^2 \quad (1.65)$$

$$h^+ = x_{i+1} - x_{\delta\Omega}$$

Les valeurs de S en dehors du domaine fluide sont considérées nulles, et les sauts sont définis de manière usuelle :

$$[S] = S^+ - S^- \quad (1.66)$$

soit,

$$J_\alpha = -S_{\delta\Omega}^- - \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\delta\Omega}^- h^+ - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{\delta\Omega}^- (h^+)^2 \quad (1.67)$$

Les dérivées de S sont calculées par des schémas de différences finies décentrés :

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\delta\Omega}^- = (C_{\delta\Omega_1} S_{\delta\Omega}^- + C_{i_1} S_i + C_{i-1_1} S_{i-1}) \quad (1.68)$$

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{\delta\Omega}^- = (C_{\delta\Omega_2} S_{\delta\Omega}^- + C_{i_2} S_i + C_{i-1_2} S_{i-1})$$

avec,

$$C_{\delta\Omega_1} = \frac{1+2\alpha}{\alpha+\alpha^2} \quad C_{i_1} = \frac{1+2\alpha+\alpha^2}{-\alpha-\alpha^2} \quad C_{i-1_1} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad (1.69)$$

$$C_{\delta\Omega_2} = \frac{2}{\alpha+\alpha^2} \quad C_{i_2} = \frac{2+2\alpha}{-\alpha-\alpha^2} \quad C_{i-1_2} = \frac{2}{1+\alpha}$$

En incluant la définition des dérivées 1.68 dans la définition du saut 1.67, la dérivée seconde 1.64 s'écrit :

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i = \frac{2S_{\delta\Omega} + 2\alpha S_{i-1} - 2S_i(1+\alpha)}{(\alpha^2 + \alpha)\Delta x^2} \quad (1.70)$$

La démarche de Linnick et Fasel [59] est donc équivalente à la démarche de Tseng et Ferziger [102] ou Marella *et al.* [64]. Une différence est néanmoins à souligner : Linnick et Fasel et Marella *et al.* travaillent direction par direction alors que Tseng et Ferziger utilisent la direction normale

à la frontière. Les premiers ont donc plusieurs valeurs équivalentes *ghost* possibles pour un même nœud du maillage cartésien. Linnick et Fasel n'utilisent pas le premier point fluide S_i qui peut engendrer des problèmes de stabilité numérique. Ces problèmes de stabilité sont liés à la divergence de l'équation 1.70 lorsque α tend vers zéro. Marella *et al.* modifient arbitrairement la valeur de α , Tseng et Ferziger utilisent un point image.

▷ *Cut-cell* :

Les méthodes de volumes finis utilisent la forme intégrale des équations de Navier-Stokes ce qui permet de garantir la conservation globale et locale de la masse et de la quantité de mouvement. Lorsque le domaine fluide est *irrégulier*, les volumes de contrôle au voisinage de la frontière ne sont plus cartésiens. Il est donc nécessaire d'adapter la discrétisation des intégrales et notamment l'estimation de la masse et le calcul des flux convectifs, diffusifs et du gradient de pression. La première approche portée par Ye *et al.* [119] est de construire des volumes fluides proches de la frontière qui englobent les parties de cellule rognées par la frontière ("reshape cell"). La figure 1.10 montre un volume de contrôle modifié.

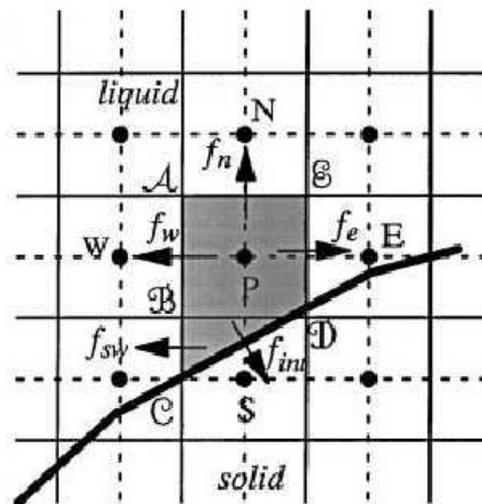


FIGURE 1.10: Volume de contrôle modifié au voisinage de la frontière [119]

Soit ϕ une variable de l'écoulement dont la valeur aux faces du volume de contrôle est demandée afin d'évaluer les flux. ϕ à la face AB est calculé par une interpolation linéaire entre les points W et P . Du fait de la position équidistante de la face AB par rapport aux interpolants (W,P) , l'interpolation est d'ordre 2. La valeur de ϕ à la face BC ne peut pas être évaluée de cette manière, l'interpolant S n'appartenant pas au domaine fluide. Ye *et al.* propose donc de modifier l'interpolation de cette variable (équation 1.71) nécessaire à l'évaluation du flux f_{sw} .

$$\phi = C_1xy^2 + C_2y^2 + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6 \quad (1.71)$$

La figure 1.11 montre le stencil d'interpolation pour l'évaluation de ϕ sur la face BC.

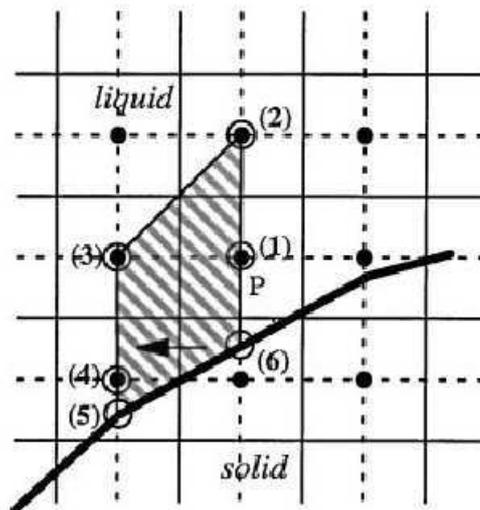


FIGURE 1.11: Stencil d'interpolation : les 6 points entourés ○ [119]

La formulation de l'interpolation est linéaire en x et quadratique en y menant à une interpolation de ϕ à l'ordre 2 car la face BC est équidistante aux interpolants en x . Cette méthodologie a notamment été utilisée par Udaykumar *et al.* [103] pour la simulation d'un modèle de micro-pompe avec quelques adaptations pour la prise en compte de frontière mobile. La procédure d'interpolation engendre des dépendances qui sortent du stencil à 5 points (2D). La résolution des systèmes linéaires (advection-diffusion et équations de Poisson) doit être effectuée pour des matrices non-symétriques. La génération de volume de contrôle modifié dans le cas 3D est délicate car le nombre de possibilités est important.

La méthode de Ye *et al.* utilise une grille collocalisée, les variables de vitesses, de pression et autres scalaires sont situées au même point. Cheny développe dans sa thèse [15] une discrétisation en volumes finis pour des volumes quelconques avec un arrangement décalé des variables, les vitesses sont situées sur les faces et la pression est au "centre" des volumes. La position exacte de la variable de pression n'est pas importante car elle est considérée comme constante dans une cellule. La figure 1.13 montre le volume de contrôle standard pour la variable u . Le volume de contrôle pour la variable u est situé entre les points "centraux" i et $i+1$ et le volume de contrôle pour la variable v est située entre les points "centraux" j et $j+1$. Un set des configurations de cellules est constitué et les éléments d'intégrations volumiques et surfaciques sont calculés selon le type de cellule grâce à l'utilisation d'une fonction distance (méthode *Level Set*). La figure 1.12 montre un volume de contrôle non standard.

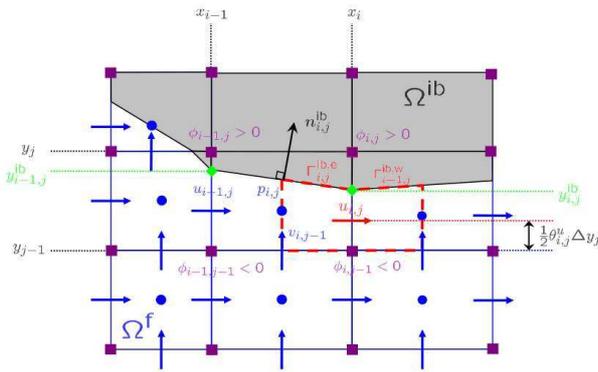


FIGURE 1.12: Volume de contrôle non standard [15]

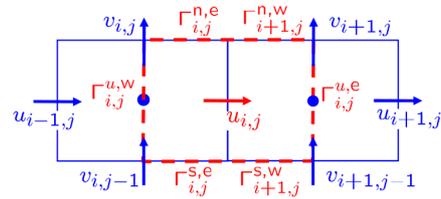


FIGURE 1.13: Volume de contrôle standard $\Omega_{i,j}^u$ [15]

La construction de la discrétisation s'appuie sur les travaux de Verstappen et Veldman [104]. La discrétisation de l'équation de conservation de la masse permet de construire l'opérateur de divergence. Le gradient de pression est construit comme le dual de l'opérateur de divergence ($G = -D^T$). Le terme convectif respecte une condition d'antisymétrie, c'est à dire que le terme de convection sur la face Est d'une cellule i, j doit être l'opposé du terme de convection sur la face Ouest d'une cellule $i + 1, j$. Cette condition est intuitive : la face Est de i, j étant la face Ouest de $i + 1, j$, il paraît cohérent que les termes convectifs soient opposés. Cette condition est dérivée à partir de la conservation de l'énergie cinétique pour un fluide non visqueux. La discrétisation est unifiée, aux propriétés géométriques près, en ce qui concerne les flux de pression, de contraintes normales et de contraintes de cisaillement mais les flux convectifs doivent être construits séparément pour chaque *cut-cell* afin de respecter la condition d'antisymétrie. L'apport conséquent de ce travail est la conservation du stencil à 5 points ce qui permet de conserver une efficacité élevée des solveurs. Le point fort de la méthode est la rigueur de la construction de la discrétisation mais il s'agit également de son point faible. L'extension 3D augmente le set des configurations de cellules et ainsi le nombre de discrétisations des termes convectifs. Une problématique sur la discrétisation des termes de cisaillement est également notée par Cheny [15]. La méthode a été développée pour la simulation d'écoulements visqueux incompressibles en géométries complexes, notamment pour des fluides viscoélastiques.

Calcul implicite indirect de f : méthode originale de Taira et Colonius [93]

Cette méthode a été développée par Taira et Colonius [93], elle se base sur une approche par décomposition LU par bloc [71] du système des équations de Navier-Stokes modifiées. La difficulté initiale est le couplage intrinsèque entre la valeur du terme f et les valeurs du champ de vitesse. Nous avons vu que pour éliminer ce couplage dans l'approche discontinue, certains auteurs calculent des valeurs prévisionnelles du champ de vitesse puis applique le principe d'action/réaction. Taira et Colonius proposent d'éliminer ce couplage de la même manière que le couplage pression-vitesse pour les écoulements incompressibles, la contrainte associée au terme f étant la condition de Dirichlet.

Le système de Navier-Stokes modifié à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} + \int_s \mathbf{f}(\xi(s, t)) \delta(\xi - \mathbf{x}) ds \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(\xi(s, t)) &= \int_x \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\mathbf{x} = \mathbf{u}_b(\xi(s, t)) \end{aligned} \quad (1.72)$$

$\xi(s, t)$ sont les positions des marqueurs lagrangiens appartenant à la frontière paramétrée par s . $\mathbf{u}_b(\xi(s, t))$ est la condition de Dirichlet à la frontière. Le système peut être réécrit suivant une décomposition LU par bloc (ϕ pseudo-pression) :

$$\begin{bmatrix} A & G & -H \\ D & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \phi \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^n \\ 0 \\ \mathbf{u}_b^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc_1 \\ bc_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

H est l'opérateur de propagation de la force lagrangienne sur le maillage eulérien et E est l'opérateur d'interpolation de la vitesse du maillage eulérien sur les marqueurs lagrangiens. Ces opérateurs sont des arrangements de distributions de Dirac lissées ce qui engendre une représentation diffuse de la frontière. A , G et D sont les opérateurs discrets implicites pour la vitesse, le gradient et la divergence. \mathbf{r}^n est le second membre connu explicite de l'équation de quantité de mouvement, bc_1 et bc_2 sont les vecteurs de conditions limites résultant de la discrétisation des opérateurs laplacien et divergence près de la frontière. Le système peut être écrit sous forme compacte :

$$\begin{bmatrix} A & Q \\ Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

Les opérateurs gradient/divergence, et propagation/interpolation sont construits de manière à être la transposition l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} D &= G^T \\ -H &= E^T \end{aligned} \quad (1.75)$$

soit,

$$\begin{aligned} Q &\equiv [G, E^T] \\ \lambda &\equiv \begin{pmatrix} \phi \\ f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Le système exprimé sous la forme 1.74 peut se décomposer en une matrice par bloc L et une matrice par bloc U :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ Q^T & -Q^T B^N Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B^N Q \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

B^N est une approximation de A^{-1} . Le système est résolu de la même manière qu'une méthode de projection usuelle :

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}^* &= r_1 && \text{intermédiaire} \\ Q^T B^N Q \lambda &= Q^T \mathbf{u}^* - r_2 && \text{projection} \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^* - B^N Q \lambda && \text{correction} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Le pas intermédiaire ne prend en compte ni le terme de pression, ni le terme de forçage. Le pas de projection permet de respecter la condition d'incompressibilité et de Dirichlet à la frontière. Finalement, le terme de forçage est formulé comme une interpolation de la variable intermédiaire \mathbf{u}^* et de la variable de pseudo-pression ϕ :

$$\mathbf{f} = \varepsilon \left(\mathbf{u}^* - \frac{\nabla \phi \Delta t}{\rho}, \mathbf{u}_b^{n+1} \right) = \varepsilon (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}_b^{n+1}) \quad (1.79)$$

L'équation 1.79 montre que la densité du solide est traitée comme étant égale à celle du fluide. Elle montre également que le terme de forçage tient compte de la correction de pression qui sera appliquée à \mathbf{u}^* et ainsi la condition de non glissement est respectée au temps $n + 1$. Le terme de forçage s'applique comme une correction du champ de vitesse \mathbf{u}^* . Cette formulation est très intéressante, elle a notamment permis d'étudier l'écoulement 3D autour d'ailes à faible rapport de forme pour de faibles nombres de Reynolds [94]. Cependant cette approche est difficilement transposable à des écoulements diphasiques (discontinuité de la masse volumique) et la représentation de la frontière reste diffuse.

1.2.3 Conclusion

L'approche continue se base sur la modélisation d'un terme de forçage qui représente l'action du solide sur le fluide. Les modélisations utilisées sont de type ressort ou contrôleur, elles impliquent des constantes dont la valeur doit être arbitrairement choisie. Ces approches ont l'avantage d'être simples à mettre en œuvre : le terme de forçage modélisé est discrétisé grâce à une distribution de Dirac et ajouté au bilan de quantité de mouvement. La contrepartie est l'étalement de la frontière donnant une représentation diffuse peu adaptée au traitement fort du couplage solide/fluide. De plus, les coefficients arbitraires peuvent être difficiles à choisir car une valeur faible ne peut garantir le respect de la condition de Dirichlet alors qu'une valeur élevée implique des problèmes de stabilité sur le contrôle du système notamment pour les contrôleurs de type **P** ou **PI**. Le traitement explicite du terme de forçage implique également une limitation du pas de temps en rapport avec les constantes choisies. Il est possible de s'affranchir de l'étalement dû à la discrétisation de la distribution de Dirac en choisissant de traiter le terme

de forçage par l' *Immersed Interface Method*. L'approche est alors complexifiée et donne lieu à des systèmes linéaires (équations d'advection-diffusion ou/et de Poisson) fortement dissymétriques ce qui réduit l'efficacité des solveurs. Globalement, ces approches ne correspondent pas à notre intention de développer une méthode rapide, précise et flexible ne contenant pas de coefficients arbitraires.

L'approche discontinue permet de nous affranchir des coefficients arbitraires. Cette approche rappelle que ce terme de forçage n'est autre que la différence entre une discrétisation prenant en compte la condition de Dirichlet et une discrétisation ne la prenant pas en compte. Le calcul indirect de ce terme illustre cette vision en calculant en son absence une première solution puis en déduisant de celle-ci le terme de forçage permettant de retrouver la condition de Dirichlet. Néanmoins, il est dommageable pour le coût CPU d'effectuer un double calcul. Le calcul implicite indirect de Taira et Colonius [93] présente un formalisme élégant mais l'utilisation d'opérateurs de régularisation et de propagation basés sur des distributions de Dirac empêche une représentation raide de la frontière. Idéalement, le calcul implicite direct permet une représentation non diffuse de la frontière et l'évolution en temps de la solution numérique ne requiert pas un double calcul. Les schémas numériques sont directement modifiés. Les méthodes *Cut-cell* sont adaptés aux volumes finis et la formulation de Cheny [15] apporte la conservation du stencil à 5 points et garantit de part sa construction la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique totale. Malheureusement, elle n'est pas encore dérivée pour des applications 3D. De plus, notre solveur de base étant en différences finies, l'approche *Cut-cell* n'est pas adaptée. Le calcul implicite direct adapté au solveur ARCHER est les *Ghost-cell* ou *Embedded Boundary*.

Les méthodes *Ghost-cell* sont particulièrement flexibles puisqu'elles permettent une modification de la discrétisation au voisinage de la frontière de manière quasi-transparente : il suffit d'extrapoler une variable fictive à l'ordre voulu. Facilement transposable en 3D, les méthodes *Ghost-cell* sont en adéquation avec le solveur ARCHER et permettent rapidité, flexibilité et précision.

Chapitre 2

Mise en oeuvre de la méthode

2.1 Généralités et concepts de base

2.1.1 Introduction

La méthode de *direct forcing* consiste en l'application d'un champ de vitesse et de pression fictif dans le solide de telle manière que les conditions limites à la frontière soient respectées. Dans le cadre d'une méthode à pas fractionnaire, les conditions limites à imposer sont :

Au pas intermédiaire

$$\mathbf{u}^{n+1*}|_{\delta\Omega} = \mathbf{u}_{\delta\Omega}(x, t_{n+1}) \quad (2.1)$$

Au pas final

$$\left. \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} \right|_{\delta\Omega} = 0 \quad (2.2)$$

Connaissant la valeur de la vitesse à la frontière, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la variation de la vitesse en proche paroi ; cette variation définit l'ordre d'interpolation. Munis d'une formulation d'interpolation et d'une contrainte sur celle-ci, nous sommes en mesure de construire un champ de vitesse fictif de telle manière que la condition limite en vitesse soit respectée. Il est évident que le choix de la formulation d'interpolation conditionne la manière d'imposer la condition limite. Regardons l'imposition de la condition limite sous l'angle de la méthode des différences finies. La figure 2.1 représente la discrétisation d'un problème de diffusion 1D sur la variable U .

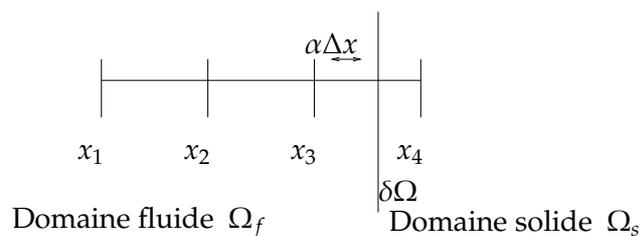


FIGURE 2.1: Discrétisation 1D

Le point 4 n'appartient pas au domaine de résolution qui est borné à $\delta\Omega$. Nous cherchons à connaître la valeur d'un terme de diffusion $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3$ au point 3. À partir des développements de Taylor tronqués à l'ordre 2, nous déterminons :

$$U_{\delta\Omega} = U_3 + \alpha \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_3 \Delta x + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3 \Delta x^2 \quad (2.3)$$

$$U_2 = U_3 - \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_3 \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3 \Delta x^2 \quad (2.4)$$

soit,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3 = \frac{2U_{\delta\Omega} + 2\alpha U_2 - 2U_3(1 + \alpha)}{(\alpha^2 + \alpha)\Delta x^2} \quad (2.5)$$

Le schéma centré d'ordre 2 du terme de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3 = \frac{U_2 - 2U_3 + U_4}{\Delta x^2} \quad (2.6)$$

Pour obtenir la même estimation du terme de diffusion, il est nécessaire que l'équation 2.5 soit égale à l'équation 2.6 ce qui détermine la valeur fictive en 4 :

$$U_4 = \frac{U_3(2\alpha^2 - 2) + U_2(\alpha - \alpha^2) + 2U_{\delta\Omega}}{(\alpha^2 + \alpha)} \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une détermination de U_4 sous l'hypothèse d'une variation quadratique de la variable U au voisinage du bord. Nous remarquons qu'une singularité apparaît lorsque α tend vers zéro. Des faibles valeurs de α entraînent de fortes valeurs du point 4. Ces fortes valeurs entraînent une divergence d'ordre numérique. Estimer la dérivée $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_3$ en utilisant les équations 2.3 ne paraît pas adéquat lorsque α tend vers zéro puisque ce terme est négligeable dans le développement de Taylor de $U_{\delta\Omega}$.

D'une manière générale, la détermination du champ fictif est subordonnée à l'ordre d'interpolation. Cette interpolation est conditionnée par la valeur de la variable à l'interface et déterminée par les valeurs de la variable dans le champ réel.

2.1.2 Concepts de base

Dans un premier temps, nous devons nous doter d'un outil capable de représenter les limites du domaine fluide sur un maillage cartésien. Nous avons choisi d'utiliser une fonction distance signée *level set* dont la valeur est nulle sur la frontière. L'utilisation d'une telle fonction permet de séparer facilement les points du maillage appartenant au domaine fluide de ceux appartenant au solide. De plus, sa caractéristique de fonction distance nous donne accès aux caractéristiques géométriques indispensables à la construction des interpolations. Dans un deuxième temps, il est nécessaire de nous doter de points extérieurs au domaine fluide qui composeront notre

champ fluide fictif. Ces points sont communément appelés *ghosts*. La détermination de leur valeur s'effectue par une interpolation qui requiert l'utilisation de points fluides appelés *adjacents*. La fonction *level set*, les points *ghosts* et les points *adjacents* sont les trois éléments de base nécessaire à la mise en oeuvre de la méthode. La figure 2.2 illustre notre propos.

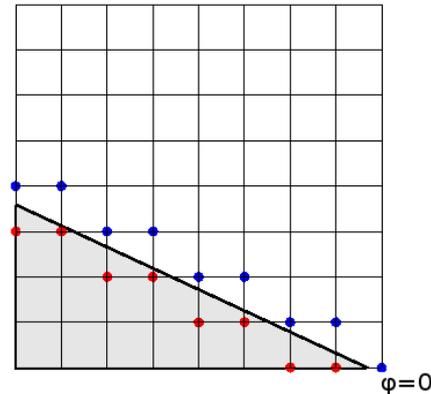


FIGURE 2.2: Délimitation du domaine fluide par une fonction distance signée *level set* nulle à la frontière. Les marqueurs rouges montrent les points *ghosts* et les marqueurs bleus les points *adjacents*

2.2 Imposition de la condition limite en vitesse

2.2.1 Traitement de la singularité $\alpha \ll 1$

La méthode algébrique utilisée par Tseng et Ferziger [102] ou Mittal et *al* [68] correspond à la vision des frontières immergées décrites en section 2.1.1. Comme énoncé précédemment, la méthode présente un défaut majeur : lorsque le point *ghost* est très loin des points *adjacents* le champ de vitesse fictif prend des valeurs très élevées qui font diverger la simulation. La figure 2.3 illustre ce problème.

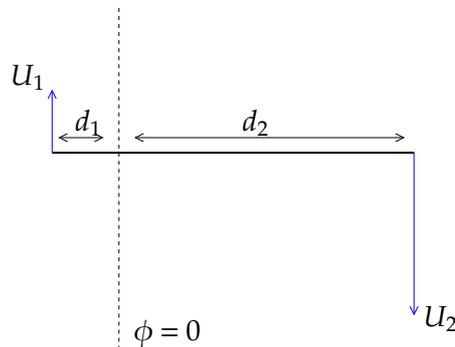


FIGURE 2.3: Problématique de l'interpolation algébrique sur une interpolation linéaire 1D.

Soit la vitesse U_1 d'un point *adjacent* appartenant au fluide et la vitesse U_2 d'un point *ghost* appartenant au solide, sous l'hypothèse d'une variation linéaire de la vitesse proche du bord, la détermination de la vitesse U_2 à partir de U_1 s'écrit simplement :

$$U_2 = -\frac{U_1 d_2}{d_1} \quad (2.8)$$

Nous remarquons qu'une singularité apparait lorsque d_1 tend vers 0. Afin de remédier à ce défaut, différents auteurs [102], [68], [51], [30] utilisent un point *image* ou une modification de l'interface à décrire.

L'utilisation d'un point *image* est illustrée en figure 2.4.

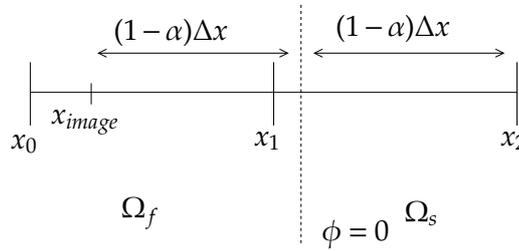


FIGURE 2.4: Définition du point *image*

La valeur en x_2 est obtenue par un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$U_2 = 2U_{\delta\Omega} - U_{image} \quad (2.9)$$

L'utilisation du développement de Taylor à l'ordre 1 implique que la dérivée seconde à $\delta\Omega$ est considérée comme nulle.

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{\delta\Omega} = \frac{U_2 - 2U_{\delta\Omega} + U_{image}}{(1-\alpha)^2 \Delta x^2} = 0 \quad (2.10)$$

L'utilisation du point *image* fait l'hypothèse de la linéarité du comportement de U entre le point *image* et le point *ghost*. L'ajout de cette hypothèse permet d'éviter l'imposition d'une variation trop élevée de la dérivée au point 1 qui mènerait à une discontinuité à l'origine d'une valeur trop forte de U_2 .

2.2.2 Méthode algébrique

Soit ε une interpolation d'une composante de la variable de vitesse au bord ($\delta\Omega$), on peut relier implicitement la valeur de cette composante à celles du domaine fluide Ω :

$$u_{ghost} = \varepsilon u_{\Omega} \quad (2.11)$$

Afin d'imposer la condition limite en vitesse, il suffit d'introduire cette contrainte sur l'interpolation ε . En supposant une variation linéaire des composantes de vitesse en proche paroi, dans un cadre bidimensionnel, on peut écrire :

$$u = a_0 + a_1X + a_2Y \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad u_b = a_0 + a_1X_{\delta\Omega} + a_2Y_{\delta\Omega} \quad \text{sur } \delta\Omega \quad (2.12)$$

$$v = b_0 + b_1X + b_2Y \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad v_b = b_0 + b_1X_{\delta\Omega} + b_2Y_{\delta\Omega} \quad \text{sur } \delta\Omega \quad (2.13)$$

L'utilisation de deux points fluides *adjacents* et de la condition limite permet de constituer deux systèmes d'équations.

$$u = aB \iff a = B^{-1}u \quad (2.14)$$

$$v = bC \iff b = C^{-1}v \quad (2.15)$$

La formulation de l'interpolation ε est déduite de la résolution des systèmes d'équations.

$$u = B_{1,1}^{-1}u_b + B_{1,2}^{-1}u_{adjacent} + B_{1,3}^{-1}u_{adjacent} \quad (2.16)$$

$$v = C_{1,1}^{-1}v_b + C_{1,2}^{-1}v_{adjacent} + C_{1,3}^{-1}v_{adjacent} \quad (2.17)$$

Cette méthode souffre de la singularité évoquée à la section 2.1.1. L'évaluation du point *image* permet de s'en affranchir. Bien que l'évaluation du point *image* puisse être effectuée de la manière algébrique décrite plus avant, nous avons choisi d'utiliser une évaluation déduite d'une approche différentielle proposée par Chiu et al [17]. L'approche différentielle utilise une méthode d'extrapolation multidimensionnelle présentée par Aslam [4]. L'avantage d'une telle formulation est qu'elle dispense de définir une structure d'*adjacents* ce qui est appréciable dans une optique de compatibilité avec une extension aux frontières mobiles.

2.2.3 Méthode d'extrapolation

Aslam [4] propose une méthodologie générale permettant l'extrapolation multidimensionnelle d'une variable. Soit Ψ une fonction level set qui délimite la région connue ($\Psi < 0$) et inconnue ($\Psi > 0$) de la variable que nous souhaitons extrapoler. Nous définissons la normale à l'interface entre les deux régions et la fonction Heaviside comme suit :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{|\vec{\nabla}\Psi|} \quad (2.18)$$

$$H(\Psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi > 0 \\ 0 & \text{si } \Psi \leq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

L'extrapolation constante d'une variable à travers une interface de normale \vec{n} correspond à une dérivée normale nulle. De sorte qu'une extrapolation constante au travers de l'interface correspond à :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = 0 \quad \text{pour} \quad \Psi > 0 \quad (2.20)$$

Au lieu d'écrire le développement de Taylor au premier ordre de la variable u dans la direction n en imposant l'équation 2.20, Aslam propose de résoudre le problème de manière itérative. L'idée est de faire varier u dans la région inconnue jusqu'à ce que la dérivée normale soit nulle. Soit la *pseudo équation de transport* suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + H(\Psi) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = 0 \quad (2.21)$$

Lorsque la variation de u entre deux itérations est nulle, l'équation 2.20 est respectée. ξ est un *pseudo-temps* qui permet la comparaison de u entre deux itérations successives. La fonction Heaviside permet de ne modifier que les valeurs inconnues de la variable u . De manière similaire, une extrapolation linéaire suppose une dérivée seconde normale nulle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u_n = 0 \quad \text{avec} \quad u_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u \quad (2.22)$$

On résout alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} + H(\Psi) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u_n = 0 \quad (2.23)$$

L'équation 2.23 détermine la dérivée normale de u au travers de l'interface sachant que la dérivée seconde normale est nulle. En reprenant l'équation 2.21, on constate qu'à présent nous souhaitons une dérivée normale non nulle ce qui revient à ajouter un terme source :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + H(\Psi) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = u_n \quad (2.24)$$

Chacune des directions pouvant être traitée de manière équivalente, l'extension au cas tri-dimensionnel est aisée. De plus, la méthodologie permet une augmentation facile de l'ordre d'extrapolation.

Cette extrapolation permet de prolonger les caractéristiques de la variable telles que les dérivées dans le domaine inconnu sans tenir compte de la valeur connue à l'interface (condition limite). Chiu et al [17] montre que la détermination du point *image*, à partir de la méthode d'extrapolation d'Alsam [4], peut être déduite d'un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$u_{image} = u_{extrapolation} - 2\Psi \frac{\partial u}{\partial n} + 2\Psi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad (2.25)$$

Les dérivées $\frac{\partial u}{\partial n}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ sont disponibles grâce à une extrapolation quadratique $\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} = 0$.

En utilisant l'équation 2.9, nous déterminons la variable $ghost$ comme suit :

$$u_{ghost} = 2u_{\delta\Omega} - u_{image} \quad (2.26)$$

La méthode ne demande aucune structure de données propre autre que la level set déterminant les frontières du domaine fluide, l'extension tridimensionnelle et l'augmentation de l'ordre est aisée. Enfin, cette méthode a un fort potentiel de simplicité d'utilisation dans le cadre de frontières mobiles.

2.3 Imposition de la condition limite en pression

2.3.1 Problématique

L'équation de Poisson sur la pression issue de la méthode de projection présentée au chapitre 1 doit être munie d'une condition limite sur le bord $\delta\Omega$. La section 1.1.1.3 montre que pour notre formulation à pas fractionnaire, la condition limite correcte est un gradient de pression nul dans la direction normale à $\delta\Omega$.

$$\left. \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} \right|_{\delta\Omega} = 0 \quad (2.27)$$

Dans un premier temps, on considère un bord régulier d'un domaine fluide bi-dimensionnel représenté en figure 2.5.

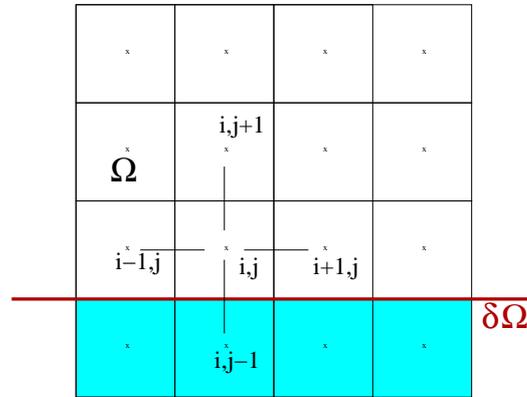


FIGURE 2.5: Domaine fluide Ω avec un bord régulier $\delta\Omega$ et le stencil de discrétisation

Une discrétisation centrée d'ordre 2 du Laplacien de la pression permet d'obtenir l'équation (2.28), notre maillage étant régulier $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

$$\Delta p_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y} = \frac{-4p_{i,j} + p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{\Delta} \quad (2.28)$$

La discrétisation fait appel à $p_{i,j-1}$ qui n'appartient pas au domaine fluide. La variable $p_{i,j-1}$ ne peut pas être obtenue par projection de la vitesse intermédiaire. Nous allons l'obtenir par l'imposition discrète de la condition de bord :

$$\frac{p_{i,j-1} - p_{i,j}}{\Delta} = 0 \quad (2.29)$$

soit :

$$p_{i,j-1} = p_{i,j} \quad (2.30)$$

Le positionnement du bord régulier à égale distance des points de pression $p_{i,j}$ et $p_{i,j-1}$ permet d'imposer facilement la condition limite en modifiant la discrétisation de l'opérateur laplacien (2.31).

$$\Delta p_{i,j} = \frac{-3p_{i,j} + p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1}}{\Delta} \quad (2.31)$$

On considère à présent un domaine fluide Ω de forme quelconque représenté en figure (2.6).

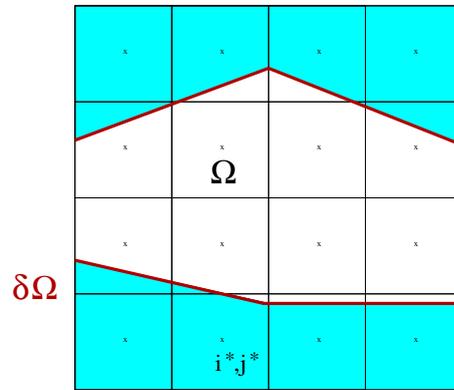


FIGURE 2.6: Domaine fluide Ω avec un bord irrégulier $\delta\Omega$

L'irrégularité du bord par rapport au maillage engendre la présence de nombreux points i^*, j^* qui appartiennent au domaine de discrétisation Ω_i sans appartenir au domaine fluide Ω . De plus, la normale au bord du domaine ne concorde plus avec un des axes du maillage et la distance entre le bord et chacun des points est quelconque. L'utilisation d'une fonction distance signée ϕ_S nous permet d'avoir accès aux caractéristiques indispensables à la construction de la condition limite.

De la même manière que précédemment, on cherche à imposer la condition limite discrète. Soit ε une interpolation de la variable de pression au bord, on peut relier implicitement la valeur de p_{i^*, j^*} aux valeurs de pression du domaine Ω :

$$p_{i^*, j^*} = p_{ghost} = \varepsilon p_{\Omega} \quad (2.32)$$

L'imposition de la condition limite sur la pression est inhérente au choix de la formulation de l'interpolation. Afin d'imposer la condition limite (2.27), il suffit d'introduire cette contrainte sur l'interpolation ε . À ce stade, on peut noter que cette formulation autorise l'imposition de la condition limite de son choix.

L'équation (2.32) est couplée au système de Poisson, le système final est totalement implicite :

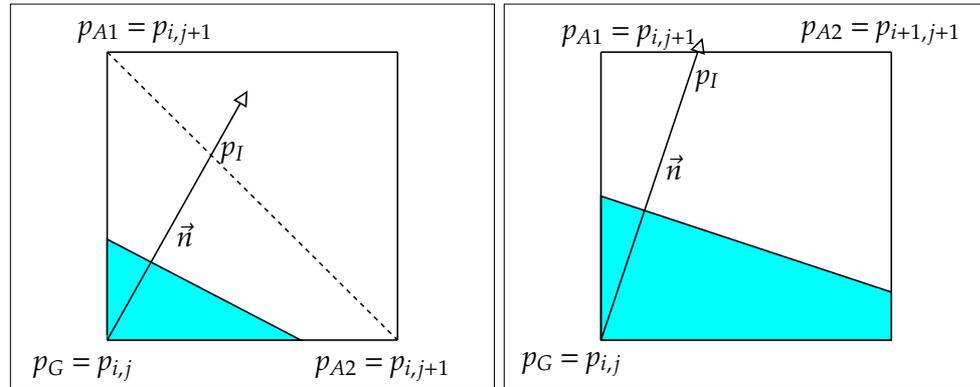
$$\begin{cases} \Delta p_{\Omega}^{n+1} = \rho \frac{\nabla \mathbf{u}^*}{\Delta t} & \text{sur } \Omega_i \in \Omega \\ p_{ghost}^{n+1} = \varepsilon p_{\Omega}^{n+1} & \text{sur } \Omega_i \notin \Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

2.3.2 Formulation de l'interpolation ε

L'interpolation ε de la pression doit inclure la condition limite en pression (2.27). Dans un cadre bidimensionnel, la décomposition du gradient normal au bord $\delta\Omega$ sur le repère lié au maillage s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= n_x \vec{x} + n_y \vec{y} \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y \end{aligned} \quad (2.34)$$

La figure 2.7 présente deux configurations bidimensionnelles des points adjacents p_{A1} et p_{A2} au point de pression inconnue p_G . Les points adjacents ne peuvent être dans le domaine solide représenté par la zone bleu.



(a) Configuration diagonale

(b) Configuration linéaire

FIGURE 2.7: Exemples de configuration bidimensionnelle des points adjacents

Soit les coordonnées réduites suivantes :

$$X = \frac{x - x_G}{\Delta} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y - y_G}{\Delta} \quad (2.35)$$

Sous l'hypothèse d'une variation linéaire de la pression au voisinage de $\delta\Omega$, la variation spatiale de la variable de pression dans le repère local lié au point $i, j = G$ s'écrit :

$$p = a_0 + a_1 X + a_2 Y \quad (2.36)$$

soit

$$p_{ghost} = a_0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = a_1 n_x + a_2 n_y \quad (2.38)$$

À l'aide de deux pressions adjacentes p_{A_1} et p_{A_2} et de la condition limite 2.38 un système d'équation est constitué :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ 1 & X_{A_1} & Y_{A_1} \\ 1 & X_{A_2} & Y_{A_2} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ p_{A_1} \\ p_{A_2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (2.39)$$

soit :

$$\mathbf{a} = B^{-1} \mathbf{p} \quad (2.40)$$

$$p_{ghost} = a_0 = B_{1,2}^{-1} p_{A_1} + B_{1,3}^{-1} p_{A_2} \quad (2.41)$$

La construction de l'interpolation linéaire est généralisable en trois dimensions, elle ne requiert que l'ajout d'une inconnue au système et d'une pression adjacente.

L'inclusion de la relation 2.41 dans le système de Poisson engendre une perte de symétrie du système. En effet, dans la configuration linéaire de la figure 2.7(b), la pression adjacente $p_{A_2} = p_{i+1,j+1}$ n'appartient pas au stencil de discrétisation présenté en figure 2.5. L'inversion de ce système ne peut plus être effectuée par l'application de la méthode du gradient conjugué. L'implantation d'un bi-gradient conjugué (BICGSTAB) a donc été nécessaire [90].

2.3.3 Modification du Laplacien

La section précédente présente la construction du champ fictif de pression par interpolation. Cette construction engendre une modification du Laplacien qu'il est possible d'écrire directement. La formulation linéaire de ε (2.41) s'exprime explicitement de la manière suivante :

$$p_{ghost} = \frac{\left(\frac{n_y}{n_x} X_{A_2} - Y_{A_2}\right) p_{A_1} + \left(Y_{A_1} - \frac{n_y}{n_x} X_{A_1}\right) p_{A_2}}{\left(Y_{A_1} - Y_{A_2}\right) + \frac{n_y}{n_x} \left(X_{A_2} - X_{A_1}\right)} \quad (2.42)$$

soit,

$$p_{ghost} = p_{A_1} + \frac{(p_{A_1} - p_{A_2})(\alpha X_{A_1} - Y_{A_1})}{(Y_{A_1} - Y_{A_2}) + \alpha(X_{A_2} - X_{A_1})} \quad (2.43)$$

avec

$$\alpha = \frac{n_y}{n_x} \quad (2.44)$$

soit,

$$p_{ghost} - p_{A_1} = p_{i,j} - p_{A_1} = \alpha_G (p_{A_1} - p_{A_2}) \quad (2.45)$$

avec

$$\alpha_G = \frac{(\alpha X_{A_1} - Y_{A_1})}{(Y_{A_1} - Y_{A_2}) + \alpha (X_{A_2} - X_{A_1})} \quad (2.46)$$

Par exemple, pour la configuration 2.7(b), le Laplacien de la pression au point p_{A_1} s'écrit :

$$\Delta p_{A_1} = \Delta p_{i,j+1} = \frac{p_{i+1,j+1} - p_{A_1} + p_{i-1,j+1} - p_{A_1} + p_{i,j+2} - p_{A_1} + p_{i,j} - p_{A_1}}{\Delta^2} \quad (2.47)$$

L'inclusion de la relation 2.43 donne :

$$\Delta p_{A_1} = \frac{p_{A_2} - p_{A_1} + p_{i-1,j+1} - p_{A_1} + p_{i,j+2} - p_{A_1} + \alpha_G (p_{A_1} - p_{A_2})}{\Delta^2} \quad (2.48)$$

$$\Delta p_{A_1} = \frac{(1 - \alpha_G)(p_{A_2} - p_{A_1}) + p_{i-1,j+1} - p_{A_1} + p_{i,j+2} - p_{A_1}}{\Delta^2} \quad (2.49)$$

L'écriture de la formulation linéaire 2.42 sous la forme 2.43 permet d'établir directement la modification du Laplacien 2.49 engendrée par la condition limite de pression.

2.4 Conclusion

La méthode de frontière immergée implantée est une méthode *Ghost-cell*. L'utilisation de la méthode d'extrapolation d'Aslam [4] pour la détermination de la vitesse *ghost* permet une grande flexibilité de la méthode dans le choix de l'ordre d'interpolation. De plus, aucune structure de données -points adjacents, points ghosts- n'est requise mis à part la *Level set* décrivant les frontières du domaine fluide. La détermination de la pression se base sur une interpolation linéaire qui est couplée au système de Poisson existant. De part sa dissymétrie, la résolution du système linéaire final doit faire appel à une méthode de gradient bi-conjugué. Cette méthode est plus coûteuse en temps de calcul que la méthode de gradient conjugué initialement implanté dans le code ARCHER. Néanmoins, dans la suite de ce travail, la méthode démontrera ses capacités à traiter des domaines fluides de forme quelconque.

Chapitre 3

Validation en écoulements monophasiques

3.1 Introduction

Le chapitre 2 a présenté la mise en place de la méthode de *direct forcing*. Des versions 2D et 3D sont disponibles. Un soin particulier a été porté sur les performances du code avec notamment le développement d'une méthode multigrille (préconditionnement du BICGSTAB) adaptée au nouveau système de Poisson et une parallélisation par échange de message *MPI*. Nous présentons dans ce chapitre le comportement de la méthode sur un écoulement de canal (2D), un écoulement de conduite (3D) et sur un écoulement autour d'un cylindre (2D). Les écoulements laminaires de canal ou de conduite possèdent des solutions analytiques en régime établi stationnaire et l'écoulement autour d'un cylindre est un cas test documenté de la littérature. Enfin une dernière partie est consacrée au traitement de la problématique de pression sous-jacente à la méthode de frontière immergée.

3.2 Écoulements de canal et de conduite

3.2.1 Écoulement dans un canal 2D

3.2.1.1 Écoulement de Poiseuille plan : paramètres physiques

On considère un écoulement entre deux plaques planes parallèles illustré en figure 3.1.

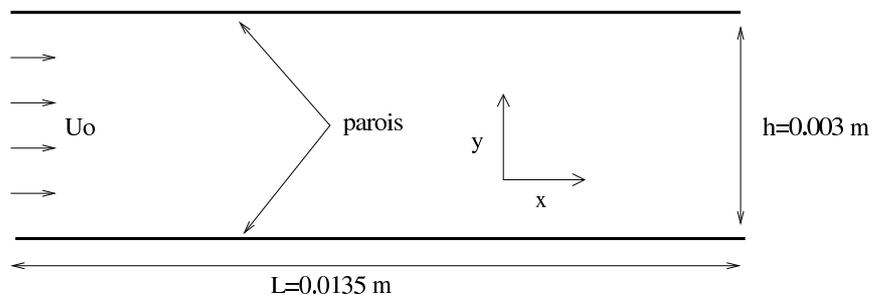


FIGURE 3.1: Écoulement entre deux plaques planes parallèles

Le nombre de Reynolds est défini comme suit :

$$Re = \frac{|U_0|h}{2\nu} \quad (3.1)$$

Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 5000, le régime est laminaire. Sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire établi, il existe une solution analytique aux équations de Navier-Stokes : l'écoulement de Poiseuille menant à un profil de vitesse parabolique.

$$\vec{v} = u(y)\vec{x} = -6U_0 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) \vec{x} \quad (3.2)$$

Le gradient de pression selon x est également analytique :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-12U_0\mu}{h^2} \quad (3.3)$$

À partir d'un profil de vitesse uniforme en entrée, l'observation de l'établissement du profil de vitesse parabolique est subordonnée à la longueur du canal. Baber et Emerson [6] présentent deux relations empiriques pour calculer la longueur d'établissement proposées par Atkinson et al [5] et Chen [14].

Relation de Atkinson et al [5]

$$\frac{L}{h} = 0.3125 + 0.011Re \quad (3.4)$$

Relation de Chen [14]

$$\frac{L}{h} = \frac{0.315}{0.0175Re + 1} + 0.011Re \quad (3.5)$$

Les paramètres choisis suivant permettent l'observation de l'écoulement de Poiseuille :

$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\ \mu &= 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\ U_0 &= 0.0256 \text{ m.s}^{-1} \\ L &= 0.0135 \text{ m} \\ h &= 0.003 \text{ m} \\ Re &= 38.4 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le choix de la longueur L , nous assure de l'établissement du profil ($L = 0.0022m$ [5] et $L = 0.0018m$ [14])

3.2.1.2 Simulation : paramètres numériques

Nous simulons l'écoulement pour la configuration de la figure 3.1 avec les paramètres physiques 3.6. Les conditions limites de cette simulation sont résumées dans le tableau 3.1.

	Entrée	Sortie
Vitesse	$\vec{v} = U_0 \vec{x}$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{dp}{dx} = 0$	$p = 0$

TABLE 3.1: Conditions aux limites

Afin d'évaluer le comportement de la méthode, nous effectuons la simulation pour trois maillages présentés en tableau 3.2. Les maillages sont cartésiens uniformes.

Nom	$N_x \times N_y$
MESH1	128×32
MESH2	256×64
MESH3	512×128

TABLE 3.2: Dénomination des maillages utilisés

Les dimensions du domaine de calcul sont :

$$\begin{aligned} L_x &= L \\ L_y &= \left(\frac{N_y - 1}{N_x - 1} \right) L_x \end{aligned} \quad (3.7)$$

La figure 3.2 montre la frontière immergée utilisée pour délimiter le domaine fluide Ω . Elle est placée à la distance $\frac{h}{2}$ du milieu du domaine de calcul dans la direction y .

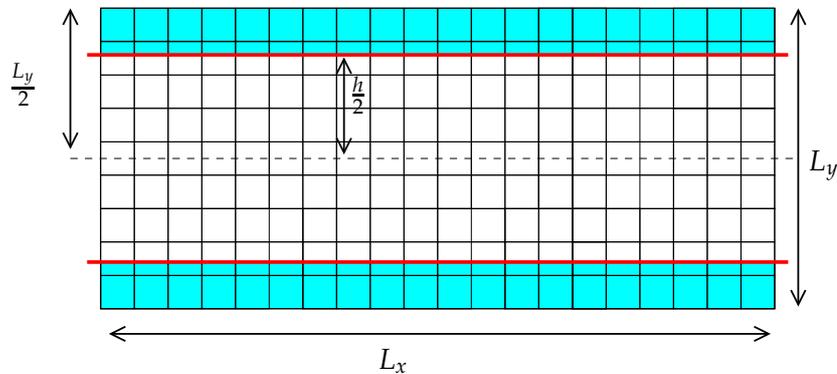


FIGURE 3.2: Emplacement de la frontière immergée (en rouge)

3.2.1.3 Résultats

La figure 3.3 présente l'évolution temporelle du profil de vitesse longitudinale à la sortie du canal. Le profil de vitesse à $t = 0.59$ s est établi. Il est cohérent avec la solution analytique de l'équation 3.2.

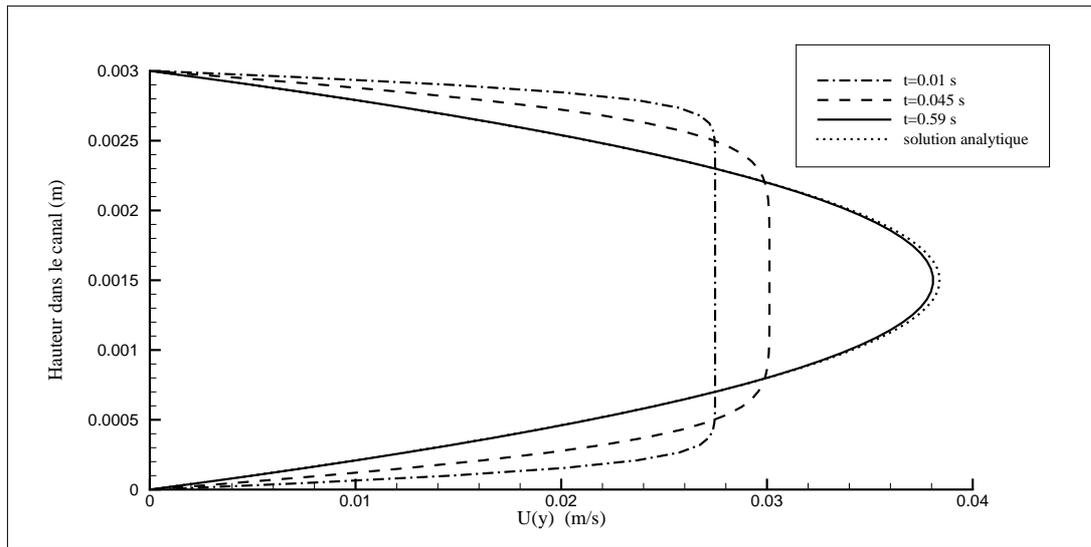


FIGURE 3.3: Évolution temporelle du profil de vitesse à la sortie du canal (maillage MESH2)

Nous définissons l'erreur relative maximale au profil de vitesse analytique comme suit :

$$erreur_{max} = \max \left| \frac{U_{calcul} - U_{analytique}}{U_{analytique}} \right| \quad (3.8)$$

Le tableau 3.3 présente l'erreur relative maximale au profil analytique pour les trois maillages utilisés.

Maillage	MESH1	MESH2	MESH3
$erreur_{max}(\%)$	4.3×10^{-2}	1×10^{-2}	2.8×10^{-3}

TABLE 3.3: Erreur relative maximale au profil analytique pour les différents maillages

La figure 3.4 présente l'erreur maximale réduite par le maillage le plus fin (MESH3) en fonction de la taille de maille réduite par le maillage le plus fin. Nous montrons qu'une diminution par 4 de la taille de maille engendre une diminution par 16 de l'erreur maximale. Globalement, la méthode est d'ordre 2.

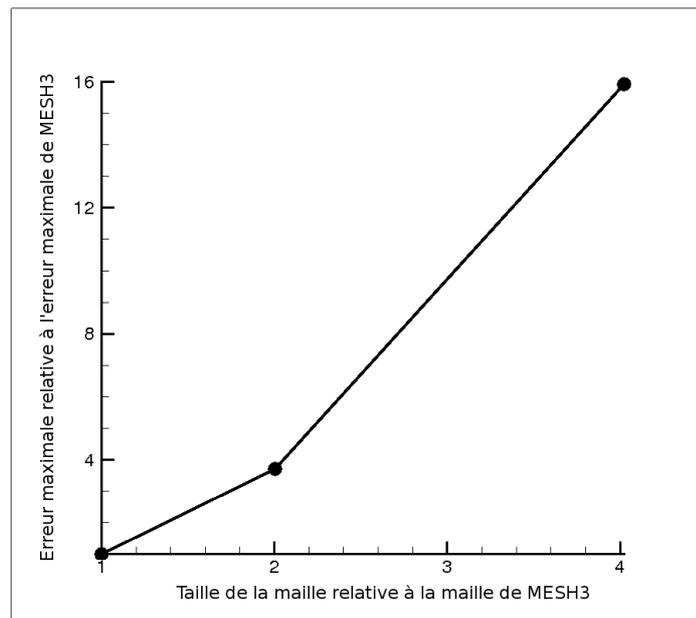


FIGURE 3.4: Comportement de l'erreur maximale en fonction du maillage.

Lorsque l'écoulement est établi, le gradient longitudinal de pression est donné par l'équation 3.9. La figure 3.5 confirme que l'évolution de ce gradient avec la position X tend vers la valeur analytique.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-12U_0\mu}{h^2} = -34.133 \text{ Pa.m}^{-1} \quad (3.9)$$

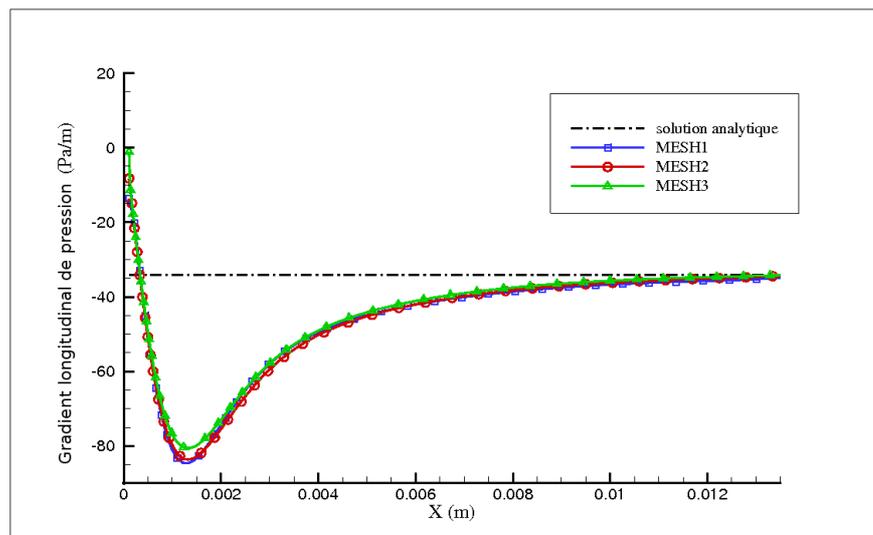


FIGURE 3.5: Évolution du gradient longitudinal de pression en fonction de la position X .

3.2.2 Écoulement dans une conduite 3D

3.2.2.1 Écoulement de Hagen-Poiseuille : paramètres physiques

Considérons un écoulement dans une conduite cylindrique illustré en figure 3.6. L'injection s'effectue en Z égal à 1.

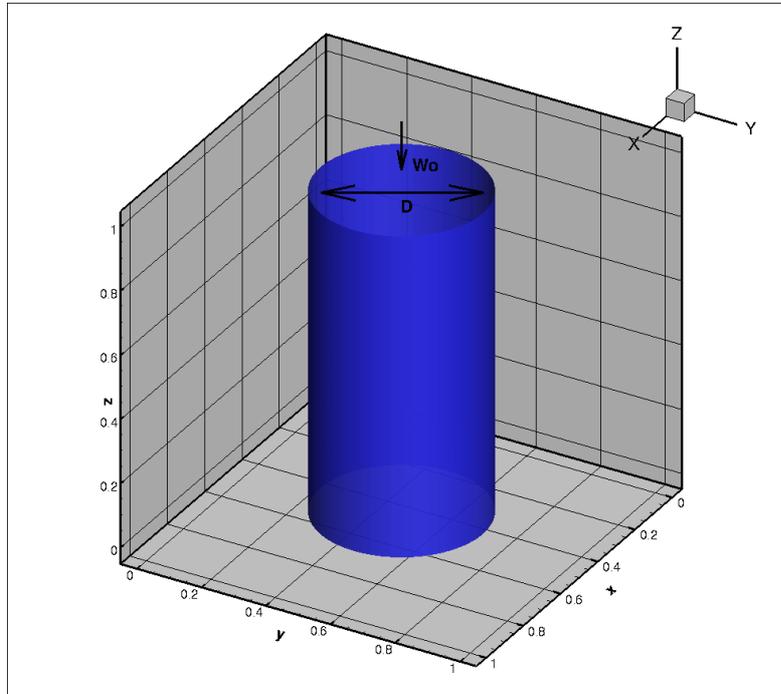


FIGURE 3.6: Écoulement dans une conduite cylindrique.

Le nombre de Reynolds est défini comme suit, avec R le rayon de la conduite. :

$$Re = \frac{|W_0|2R}{\nu} \quad (3.10)$$

Pour un nombre de Reynolds inférieur à 2000 le régime est laminaire. Sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire établi, il existe une solution analytique aux équations de Navier-Stokes : l'écoulement de Hagen-Poiseuille menant à un profil de vitesse parabolique dans le système de coordonnées cylindriques.

$$\vec{v} = w(r)\vec{z} = 2W_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{z} \quad (3.11)$$

Le gradient de pression selon z est également déterminé :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{-W_0 8\mu}{R^2} \quad (3.12)$$

À partir d'un profil de vitesse uniforme en entrée, l'observation de l'établissement du profil est subordonnée à la longueur de la conduite. Par exemple, Tritton [101] propose une relation empirique pour calculer la longueur d'établissement.

Relation de Tritton [101]

$$\frac{L}{2R} = 0.06Re \quad (3.13)$$

Les paramètres choisis suivant permettent l'observation de l'écoulement de Hagen-Poiseuille ($L = 0.3m$ [101]) :

$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\ \mu &= 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\ W_0 &= -2 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1} \\ L &= 1 \text{ m} \\ R &= 0.25 \text{ m} \\ Re &= 10 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.2.2 Simulation : paramètres numériques

Nous simulons l'écoulement pour la configuration 3.6 avec les paramètres physiques 3.14. Les conditions limites de cette simulation sont résumées dans le tableau 3.4.

	Entrée	Sortie
Vitesse	$\vec{v} = W_0 \vec{z}$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$	$p = 0$

TABLE 3.4: Conditions limites de la simulation

Nous effectuons la simulation pour les deux maillages présentés dans le tableau 3.5. Les maillages sont cartésiens uniformes.

Nom	$N_x \times N_y \times N_z$
MESH1	32^3
MESH2	64^3

TABLE 3.5: Dénomination des maillages utilisés

Les dimensions du domaine de calcul sont :

$$L_x = L_y = L_z = L \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

L'axe de la conduite est placée en $x_c = \frac{L_x}{2}$ et $y_c = \frac{L_y}{2}$.

3.2.2.3 Résultats

Pour certains points du maillage, la distance r au centre de la conduite tend vers le rayon de la conduite R . La solution analytique du profil de vitesse (équation 3.11) tend vers *zero*. Pour ces points, l'erreur relative maximale définie en équation 3.8 augmente artificiellement et n'a plus de sens. Nous employons alors l'équation 3.17.

Nous définissons l'erreur normalisée au profil de vitesse analytique comme suit :

$$erreur = \left| \frac{W_{calcul} - W_{analytique}}{W_0} \right| \quad (3.17)$$

Dans la section 3.2.1.3, la position de la frontière immergée a été choisie de manière à n'être pas trop proche des points du maillage. Ce choix a permis d'établir l'ordre formel de la méthode. Du point de vue de la géométrie, un tel contrôle sur la position de la conduite dans le maillage n'est pas réalisable. Les figures 3.7 et 3.8 présentent le pourcentage d'erreur normalisée pour les maillages MESH1 et MESH2 respectivement. Ces simulations montrent qu'au delà de l'ordre formel de la méthode, il existe une forte dépendance de l'erreur à la position de la frontière immergée. Néanmoins, l'erreur normalisée maximale diminue avec la taille de maille ce qui indique un bon comportement de la méthode.

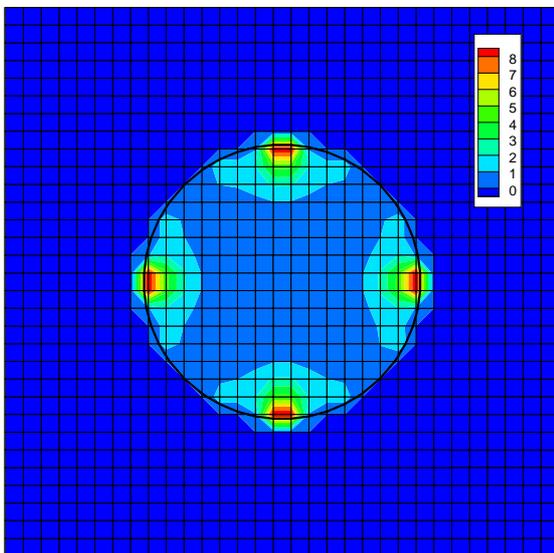


FIGURE 3.7: Erreur normalisée en %
MESH1

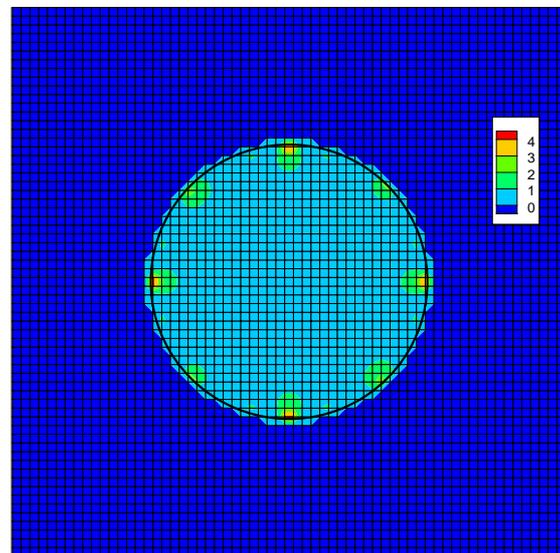


FIGURE 3.8: Erreur normalisée en %
MESH2

La figure 3.9 montre une coupe en $x = 0.5 \text{ m}$ du profil de vitesse longitudinale en sortie de la conduite. La vitesse longitudinale est normalisée par la vitesse longitudinale analytique et la position transversale y est normalisée par le diamètre de la conduite. L'augmentation de l'erreur au voisinage des parois est notable néanmoins le profil après établissement est cohérent avec la solution analytique.

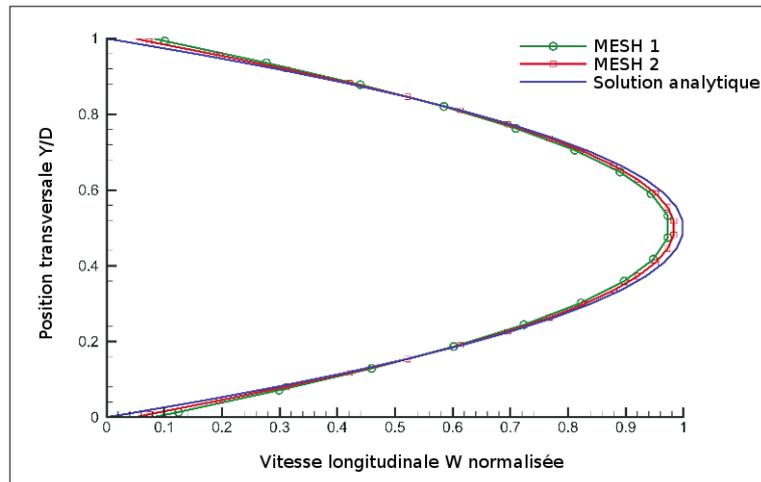


FIGURE 3.9: Profil de vitesse en sortie de la conduite

Lorsque l'écoulement est établi, le gradient longitudinal de pression est donné par l'équation 3.12. Le coefficient de perte de charge laminaire est défini comme suit :

$$\lambda = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{2D}{\rho W^2} = \frac{64}{Re} \quad (3.18)$$

La figure 3.10 montre l'évolution du coefficient de perte de charge normalisé par sa valeur analytique en fonction de la position longitudinale Z. Le coefficient tend vers la valeur analytique.

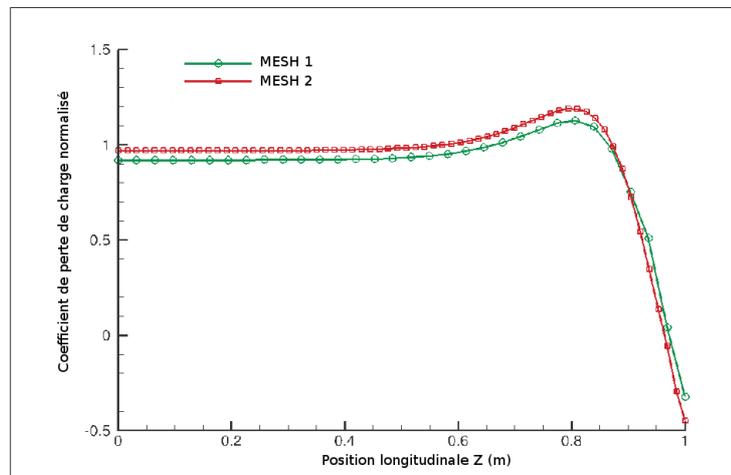


FIGURE 3.10: Évolution du coefficient de perte de charge normalisé en fonction de la position Z (injection en Z = 1)

3.3 Écoulements autour d'un cylindre

3.3.1 Description de l'écoulement

La structure de l'écoulement en aval d'un cylindre de diamètre D est dépendante du nombre de Reynolds défini à partir de la vitesse du fluide en amont U_0 .

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu} \quad (3.19)$$

La figure 3.11 présente la structure de l'écoulement aval du cylindre en fonction du nombre de Reynolds. Pour un Reynolds de l'ordre de 1 (A), les lignes de courant épousent l'obstacle. Pour un nombre de Reynolds inférieur à 50 (B) les lignes de courant sont déviées formant deux tourbillons qui restent attachés en aval du cylindre. Lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 50 et 5000 (C), un détachement périodique de deux tourbillons contra-rotatifs est observé. Ce détachement est appelé allée de Von Kàrmàn. Pour un nombre de Reynolds compris entre 5000 et 200000 (D), la couche limite reste laminaire du côté amont et devient turbulente à partir d'un point de décollement situé à un angle de l'ordre de 80 degrés. Il existe un large sillage turbulent, c'est le régime sous critique. Enfin au delà d'un nombre de Reynolds de 200000 (E), le décollement s'effectue plus en aval pour un angle de l'ordre de 120 degrés. Le sillage est alors plus étroit et la force de traînée chute brutalement.

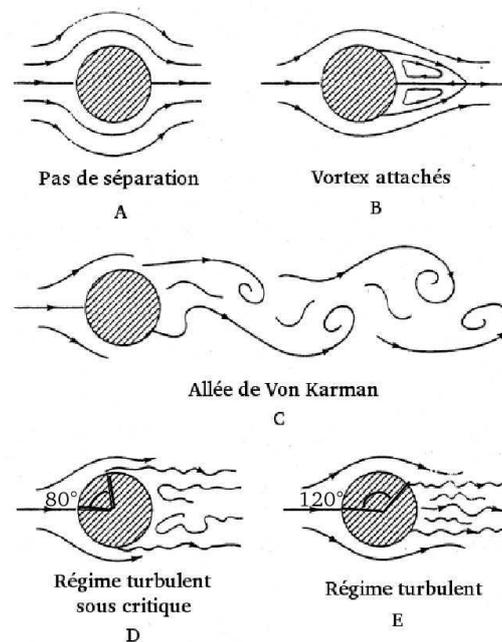


FIGURE 3.11: Différentes structures de l'écoulement en aval d'un cylindre [92]

Dans le cadre de la simulation numérique directe, seuls les régimes (A,B,C) sont abordables en termes de coût CPU. Dans l'objectif de valider la méthode, nous nous intéressons au régime (B) pour des nombres de Reynolds de 20 et 40, ainsi qu'au régime (C) avec un nombre de Reynolds de 100.

3.3.2 Caractérisation des écoulements

Le régime d'écoulement (B) est caractérisé par la taille longitudinale des vortex L , la distance verticale entre les centres des vortex b et la distance longitudinale entre le cylindre et le centres des vortex a . La figure 3.12 présente ces différentes caractéristiques. L'angle θ à partir duquel les lignes de courants sont déviées pour former les vortex en aval est appelé angle de séparation. Cet angle s'ajoute aux caractéristiques définies précédemment.

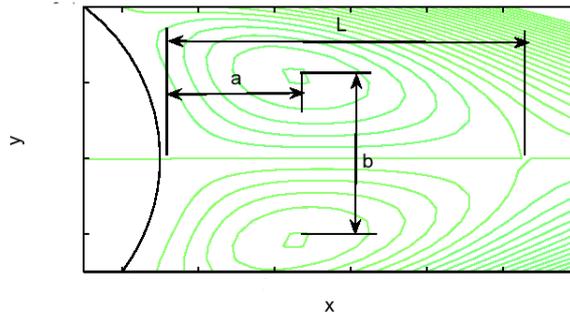


FIGURE 3.12: Localisation de a , b et L caractérisant le régime (B) [112]

Le coefficient de traînée C_D et le coefficient de portance C_L du cylindre sont définis par l'équation 3.20. F_x et F_y désignent respectivement la composante longitudinale et transversale de la force par unité de longueur exercée par le fluide sur le cylindre.

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 D} \\ C_L &= \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 D} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La force exercée par le fluide sur le cylindre est définie par l'équation 3.21, où $\overline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes et \vec{n} la normale sortante au cylindre. Les dérivées tangentielles au cylindre ont été négligées.

$$\vec{F}_{f \rightarrow s} = \int_0^{2\pi} \overline{\sigma} \vec{n} R d\theta \quad (3.21)$$

Le régime d'écoulement (C) est caractérisé en plus par un détachement périodique de vortex contra-rotatifs. La fréquence de détachement f des vortex est caractérisée par le nombre de Strouhal défini par :

$$St = \frac{fD}{U_0} \quad (3.22)$$

3.3.3 Paramètres physiques et numériques de la simulation

La figure 3.13 présente la configuration. Le centre (x_c, y_c) du cylindre a les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{L_x}{4} \\ y_c &= \frac{L_y}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

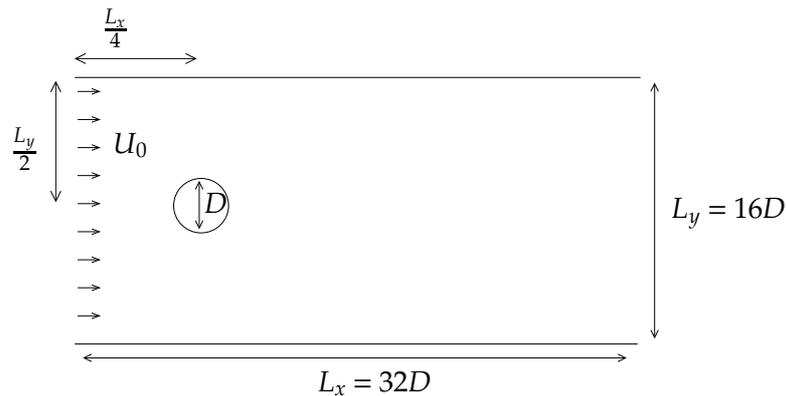


FIGURE 3.13: Écoulement autour d'un cylindre : configuration

Le tableau 3.6 présente les nombres de Reynolds associés aux régimes d'écoulement simulés.

Régime d'écoulement	(B)	(C)
Nombre de Reynolds	20, 40	100

TABLE 3.6: Nombre de Reynolds des régimes d'écoulement simulés

Le maillage est cartésien uniforme. Le tableau 3.7 présente les maillages utilisés pour les différents régimes.

Dénomination	MESH1	MESH2	MESH3
$N_x \times N_y$	256×128	512×256	1024×512
Régime (B)	$Re = 20, 40$	$Re = 20, 40$	$Re = 40$
Régime (C)	\emptyset	$Re = 100$	\emptyset

TABLE 3.7: Maillage des configurations étudiées

Les conditions limites utilisées sont résumées dans le tableau 3.8.

	Haut	Bas	Entrée	Sortie
Vitesse	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$	$\vec{v} = U_0 \vec{x}$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$p = 0$

TABLE 3.8: Conditions limites pour les simulations

3.3.4 Régime (B)

Les tourbillons attachés en aval du cylindre caractéristiques du régime (B) sont observables en figure 3.14.

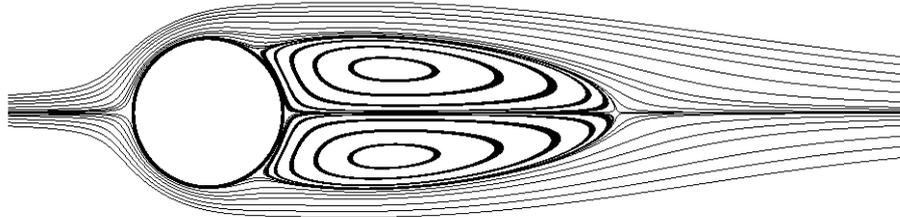


FIGURE 3.14: Lignes de courant à $Re = 40$ (MESH3)

Nous comparons la structure de l'écoulement obtenue avec les résultats de la littérature dans les tableaux 3.9 et 3.10. Les références choisies permettent de comparer la méthode de *direct forcing* implantée aux méthodes de *feedback forcing* (Xu [112], Xu et Wang [114]), de *direct forcing* en différences finies (Tseng et Ferziger [102]), de *direct forcing* en volumes finis (Choi et al [18], Ye et al [119]) et enfin de frontière intégrée (Marella et al [64], Xie et Desjardin [111]). Les résultats expérimentaux de Coutanceau et Bouard [22] sont également rapportés.

	$Re = 20$			
	L	a	b	θ
Xu [112]	0.93	0.36	0.43	44
Ye et al [119]	0.92	–	–	–
Xie et Desjardin [111]	1	–	–	43.9
Coutanceau et Bouard ‡ [22]	0.93	0.33	0.46	45
Xu et Wang [114]	0.92	–	–	44.2
Choi et al [18]	0.90	–	–	40.8
MESH1	0.96	0.4	0.44	43.8
MESH2	0.91	0.336	0.428	45.5

TABLE 3.9: Comparaison de la structure de l'écoulement à $Re = 20$ avec la littérature (‡ résultats expérimentaux)

Nos résultats sont en accord avec ceux présentés dans la littérature. Le maillage *MESH1* semble surestimer la taille longitudinale des vortex. La méthode de frontière intégrée implantée par Xie et Desjardin [111] surestime légèrement la taille longitudinale des vortex malgré l'utilisation de raffinement de maillage. Les valeurs de a et b que nous obtenons sont cohérentes avec les résultats de la littérature.

L'utilisation de trois maillages (tableau 3.10) permet de mettre en évidence une convergence des paramètres de longueur (L, a, b) sur le maillage *MESH2*. Néanmoins, la capture de l'angle de séparation θ montre une dépendance à la taille de maille. Un maillage grossier sous-estime

ce paramètre. Un maillage fin permet une meilleure résolution des lignes de courant et ainsi une meilleure mesure de l'angle de séparation.

	$Re = 40$			
	L	a	b	θ
Tseng et Ferziger [102]	2.21	–	–	–
Ye et al [119]	2.27	–	–	–
Xu [112]	2.24	0.72	0.60	53.8
Choi et al [18]	2.25	–	–	51
Coutanceau et Bouard ‡ [22]	2.13	0.76	0.59	53.8
Xie et Desjardin [111]	2.26	–	–	54.5
Xu et Wang [114]	2.21	–	–	53.5
Marella et al [64]	2.3	–	–	–
MESH1	2.3	0.77	0.62	49.7
MESH2	2.22	0.7	0.6	50
MESH3	2.23	0.7	0.6	54.4

TABLE 3.10: Comparaison de la structure de l'écoulement à $Re = 40$ avec la littérature (‡ résultats expérimentaux)

Au regard des résultats, la méthode capture efficacement la structure de l'écoulement engendrée par le cylindre, mais la convergence de l'angle de séparation et des coefficient de traînée et de portance (tableau 3.11) n'est pas atteinte. Une étude plus poussée de la convergence de ces grandeurs serait souhaitable.

Le tableau 3.11 présente un comparatif des coefficients de traînée obtenus par notre méthode et rapportés dans la littérature. Le coefficient de traînée à $Re = 20$ présente peu de variation, mis à part les résultats de Xu [112] et de Xie et Desjardin [111]. Le coefficient de traînée à $Re = 40$ montre une plus grande variation dépendante notamment du maillage utilisé. L'ensemble de nos valeurs s'intègre dans la gamme présente dans la littérature.

	$Re = 20$	$Re = 40$
	C_D	C_D
Xu [112]	2.23	1.66
Xie et Desjardin [111]	2.19	1.60
Wieselsberger ‡ [108]	2.05	1.70
Taira et Colonius [93]	2.06	1.54
Chiu et al [17]	–	1.52
Cheny et Botella [16]	–	1.50
Ye et al [119]	2.03	1.52
MESH1	2.01	1.47
MESH2	2.08	1.54
MESH3	–	1.60

TABLE 3.11: Comparaison des coefficients de traînée avec la littérature (‡ résultats expérimentaux)

3.3.5 Régime (C)

Le régime (C) est simulé pour un nombre de Reynolds de 100. L'allée de Von Karman caractéristique de ce régime est captée par la simulation. Cette allée est observable en figure 3.15.

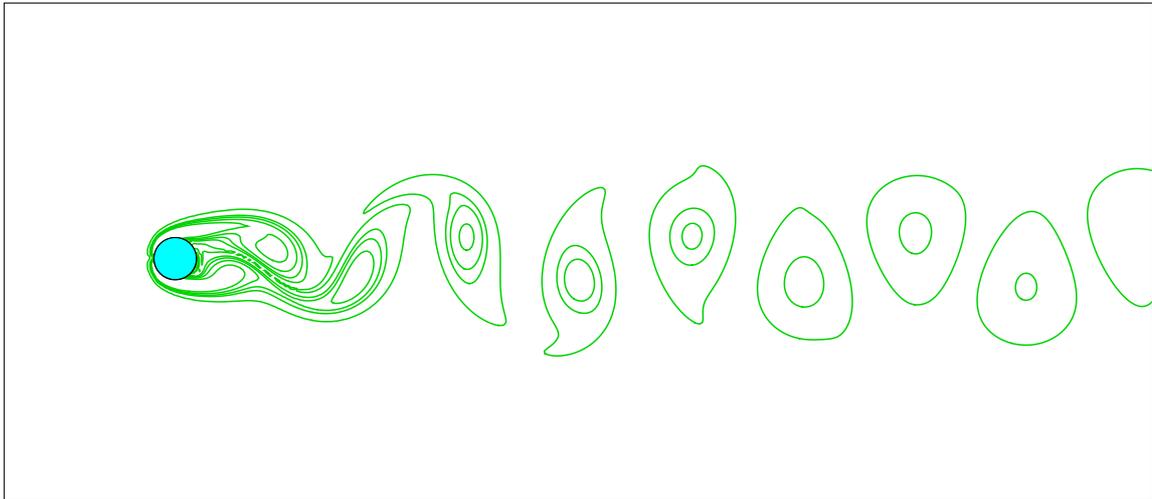


FIGURE 3.15: Contours de vorticité $Re = 100$

Les évolutions temporelles des coefficients de traînée et de portance sont présentées en figures 3.16 et 3.17. Le nombre de Strouhal est déduit de la détermination de la fréquence du signal du coefficient de portance $f = 0.166 \text{ Hz}$ par une transformée de Fourier. Lorsque le détachement tourbillonnaire est établi, le coefficient de traînée a une fréquence d'oscillation $f = 0.33 \text{ Hz}$ double de la fréquence de détachement et le coefficient de portance une fréquence d'oscillation égale à la fréquence de détachement $f = 0.166 \text{ Hz}$. Ce comportement est celui attendu.

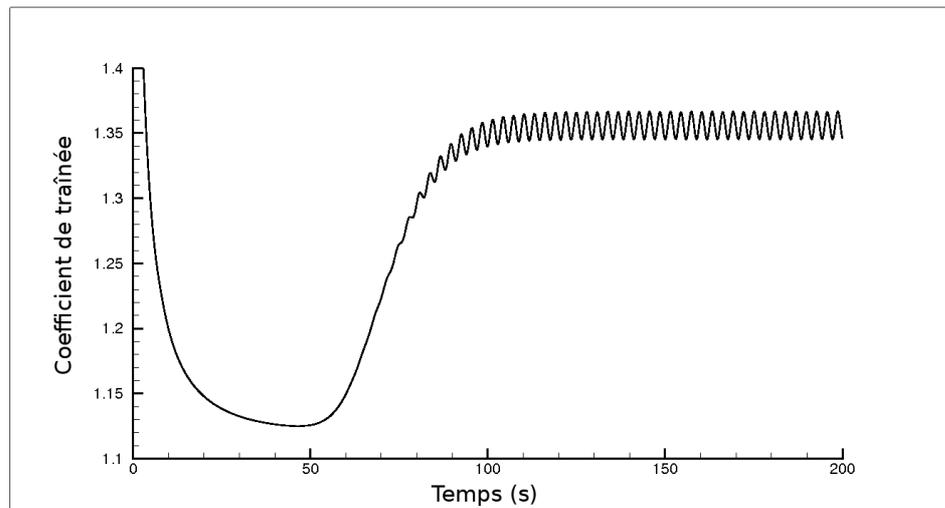


FIGURE 3.16: Évolution temporelle du coefficient de traînée C_D

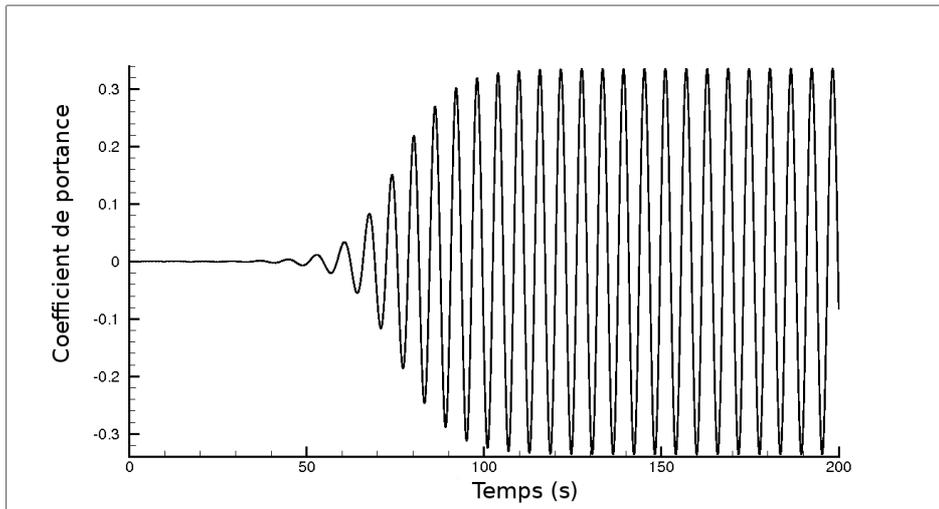


FIGURE 3.17: Évolution temporelle du coefficient de portance C_L

Le tableau 3.12 montre un comparatif du nombre de Strouhal et des coefficients de traînée et de portance. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de la littérature.

	$Re = 100$		
	C_D	C_L	St
Choi et al [18]	1.34 ± 0.011	± 0.315	0.164
Chiu et al [17]	1.35 ± 0.012	± 0.303	0.167
Xu [112]	1.42 ± 0.010	± 0.353	0.172
Berger et Wille † [9]	–	–	0.16 – 0.17
MESH2	1.355 ± 0.008	± 0.335	0.166

TABLE 3.12: Comparaison des coefficients de traînée, de portance et du Strouhal avec la littérature († résultats expérimentaux)

3.4 Problématique sur l'imposition de la condition limite en pression

3.4.1 Introduction

Le chapitre 2 a présenté la mise en oeuvre de la méthode de *direct forcing* en écoulement monophasique. La condition limite en pression est imposée par l'intermédiaire d'une interpolation. L'imposition de la condition limite par interpolation a l'avantage d'être flexible et simple à coupler avec l'équation de Poisson. Néanmoins, l'erreur d'interpolation dépend de la position de la frontière dans le maillage.

3.4. PROBLÉMATIQUE SUR L'IMPOSITION DE LA CONDITION LIMITE EN PRESSION 67

Considérons en figure (3.18), un domaine fluide Ω bi-dimensionnel où deux bords $\delta\Omega_1$ et $\delta\Omega_2$ de même forme sont inclus au domaine de calcul.

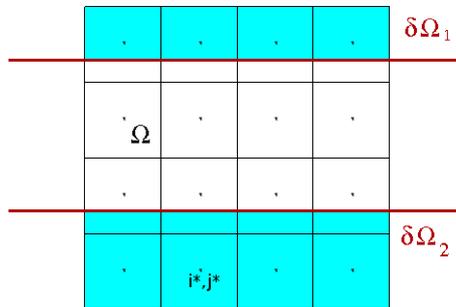


FIGURE 3.18: Domaine fluide Ω avec deux bords $\delta\Omega_1$ et $\delta\Omega_2$ de même forme .

La pression sur les bords s'exprime par l'intermédiaire de l'interpolation choisie (2.32) afin de déterminer les pressions p_{i^*,j^*} à l'extérieur du domaine fluide Ω :

$$\begin{cases} p_{\delta\Omega_1} = \varepsilon(p_\Omega) + \varepsilon(\delta\Omega_1) \\ p_{\delta\Omega_2} = \varepsilon(p_\Omega) + \varepsilon(\delta\Omega_2) \end{cases} \quad (3.24)$$

où :

- $\varepsilon(\delta\Omega_1)$ est l'erreur d'interpolation due à la position de la frontière $\delta\Omega_1$
- $\varepsilon(\delta\Omega_2)$ est l'erreur d'interpolation due à la position de la frontière $\delta\Omega_2$

Bien que les deux bords soient strictement identiques du point de vue géométrique, le traitement numérique de la condition limite de pression implique que les pressions à la frontière sont entachées d'une erreur différente. Cette problématique, peu détaillée dans la littérature à notre connaissance, se révèle notamment lorsque la position du cylindre (cf. section 3.3.3) est décalée par rapport au centre du maillage par exemple d'un quart de maille en y .

$$y_c = \frac{L_y}{2} + \frac{\Delta x}{4} \quad (3.25)$$

La figure 3.19 présente l'évolution temporelle du coefficient de portance pour un nombre de Reynolds de 40. Le différentiel d'erreur due à la position dissymétrique du cylindre dans le maillage engendre un différentiel de la force exercée par le fluide sur le solide. Le coefficient de portance est donc non nul bien que physiquement il doit être nul. Le décalage du centre $y_c = \frac{L_y}{2}$ par un nombre entier de Δx en y ou par un nombre non-entier de Δx en x n'a quand à lui aucun effet sur la valeur attendue du coefficient de portance.

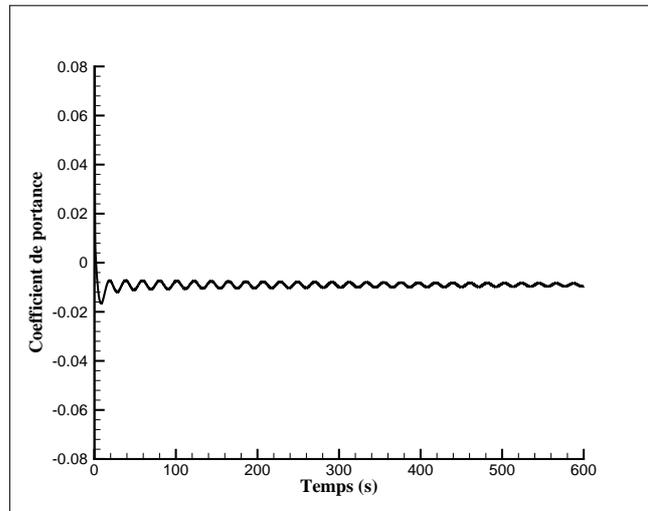


FIGURE 3.19: Évolution temporelle du coefficient de portance à $Re = 40$ (Régime (B))

Seule une interpolation *exacte* permettrait de s'affranchir de cette erreur, mais cela supposerait de connaître par avance la forme du champ de pression ce qui est antinomique avec l'idée de le résoudre.

D'une manière générale les auteurs [102, 119, 49, 116] qui utilisent une méthode de projection imposent une condition limite de type Neumann pour la pression à la frontière du domaine $\delta\Omega$ que nous appelons condition de *paroi*. Cependant, certains abordent un point de vue plus général sur la formulation de la frontière immergée et introduisent le concept de ce que nous appellerons *divergence fantôme*. Nous proposons dans ce qui suit un cas test analytique permettant d'explorer la problématique de la condition de pression ainsi qu'une mise en application sur l'écoulement autour d'un cylindre de l'imposition de la condition de *paroi* par une interpolation linéaire et quadratique.

3.4.2 Cas test analytique

Dans le cadre des frontières immergées, l'imposition d'une condition limite discrète pour l'équation de Poisson pose des problèmes d'ordre numérique : les termes d'erreurs dépendent de la position de la frontière. Pour nous permettre d'évaluer l'efficacité de l'imposition discrète de la condition limite, nous utilisons un cas test analytique.

Nous définissons un système synthétique (3.26) constitué d'un champ de pression, d'un champ de vitesse divergent, d'un champ de vitesse solénoïdal et d'une condition limite en vitesse.

$$\{p^{n+1}, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}_{\delta\Omega_N}\} \quad (3.26)$$

3.4. PROBLÉMATIQUE SUR L'IMPOSITION DE LA CONDITION LIMITE EN PRESSION 69

Le champ solénoïdal est solution de la projection du champ divergent. La masse volumique et le pas de temps étant considérés comme unitaire, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Ce qui donne lieu à l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta p = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (3.28)$$

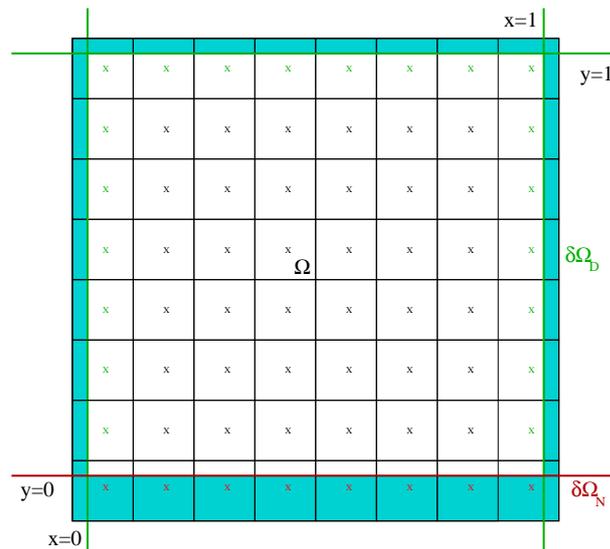


FIGURE 3.20: Domaine fluide Ω de résolution de l'équation de Poisson, imposition de la solution (points vert), condition limite IBM (points rouge)

L'équation (3.28) est résolue dans le domaine fluide Ω bi-dimensionnnel de dimension $[0, 1] \times [0, 1]$ représenté en figure (3.20). Nous imposons la solution de pression sur les noeuds les plus proches des bords $\delta\Omega_D$. Le bord $\delta\Omega_N$ constitue notre frontière immergée sur laquelle nous imposons, soit une condition de *paroi* [102], soit une condition de *divergence fantôme* (Ikeno *et al.*) [45], soit une condition mixte (Berthelsen *et al.*) [10]. Ces méthodes seront présentées par la suite.

Nous nous dotons de deux cas tests : pour un champ de pression quadratique (3.29 : cas quadratique) et pour un champ de pression cubique (3.30 : cas cubique). Nous utilisons deux maillages $N_x \times N_y$ (64×64 , 128×128). La position de la frontière immergée dans la maille varie de 0 à Δx par pas de $0,1\Delta x$.

$$\begin{cases} p^{n+1} = y^2 \\ u^* = y \\ u^{n+1} = y \\ u_{\delta\Omega_N} = 0 \end{cases}, \begin{cases} v^* = x + 2y \\ v^{n+1} = x \\ v_{\delta\Omega_N} = x \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} p^{n+1} = y^3 \\ u^* = xy \\ u^{n+1} = xy \\ u_{\delta\Omega_N} = 0 \end{cases}, \begin{cases} v^* = -\frac{5}{2}y^2 \\ v^{n+1} = -\frac{y^2}{2} \\ v_{\delta\Omega_N} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Procédure du cas test

Initialement nous imposons dans le domaine fluide Ω le champ de vitesse divergent \mathbf{u}^* . Nous utilisons la méthode d'extrapolation et les méthodes proposées par Ikeno et *al* [45] et Berthelsen et *al* [10] afin de calculer les vitesses *ghost* permettant de respecter la condition limite de vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$. Ensuite, nous résolvons l'équation de Poisson couplée à l'équation permettant d'obtenir p_{i^*,j^*} . Puis, nous corrigeons le champ de vitesse divergent pour obtenir le champ solénoïdal solution. Nous comparons la solution de pression obtenue à la solution analytique.

3.4.2.1 Condition de *paroi*

La condition de *paroi* rappelée ici, a été présentée précédemment (chapitre 2) car elle est utilisée dans la méthode *Ghost-cell* que nous avons choisie d'implémenter. La définition de nos cas tests implique un gradient normal de pression suivant la direction y nul à la frontière $\delta\Omega_N$ (3.31).

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\delta\Omega_N} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\delta\Omega_N} = 0 \quad (3.31)$$

Interpolation linéaire

Nous utilisons une interpolation linéaire de la pression au voisinage du bord $\delta\Omega_N$:

$$p = a + bx + cy \quad (3.32)$$

Nous nous plaçons dans le repère du point de pression p_{i^*,j^*} (points rouge en figure 3.20) .

$$X = \frac{x - \mathbf{x}}{\Delta x} \quad Y = \frac{y - \mathbf{y}}{\Delta y} \quad (3.33)$$

$$p = a^* + b^*X + c^*Y \quad \text{soit} \quad p_{\mathbf{x}} = a^* \quad (3.34)$$

Le gradient normal de pression à la frontière se décompose sur x, y :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\delta\Omega_N} = nx \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\delta\Omega_N} + ny \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\delta\Omega_N} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = nx \mathbf{x} + ny \mathbf{y} \quad (3.35)$$

3.4. PROBLÉMATIQUE SUR L'IMPOSITION DE LA CONDITION LIMITE EN PRESSION 71

Soit deux pressions p_1 et p_2 appartenant au domaine fluide Ω , on peut écrire le système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & nx & ny \\ 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\delta\Omega_N} \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (3.36)$$

La pression au point i^*, j^* s'exprime alors en fonction des pressions p_1 et p_2 :

$$p_x = B_{1,1}^{-1} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\delta\Omega_N} + B_{1,2}^{-1} p_1 + B_{1,3}^{-1} p_2 \quad (3.37)$$

En tenant compte de la condition de *paroi* (3.31) :

$$p_x = B_{1,2}^{-1} p_1 + B_{1,3}^{-1} p_2 \quad (3.38)$$

Résultats

Pour le cas test quadratique, la figure 3.21 présente l'erreur absolue sur la pression - premier point appartenant au domaine fluide - en fonction de la position de la frontière immergée. Nous observons une erreur absolue de l'ordre de 10^{-3} avec une convergence d'ordre 1 pour le champ test quadratique.

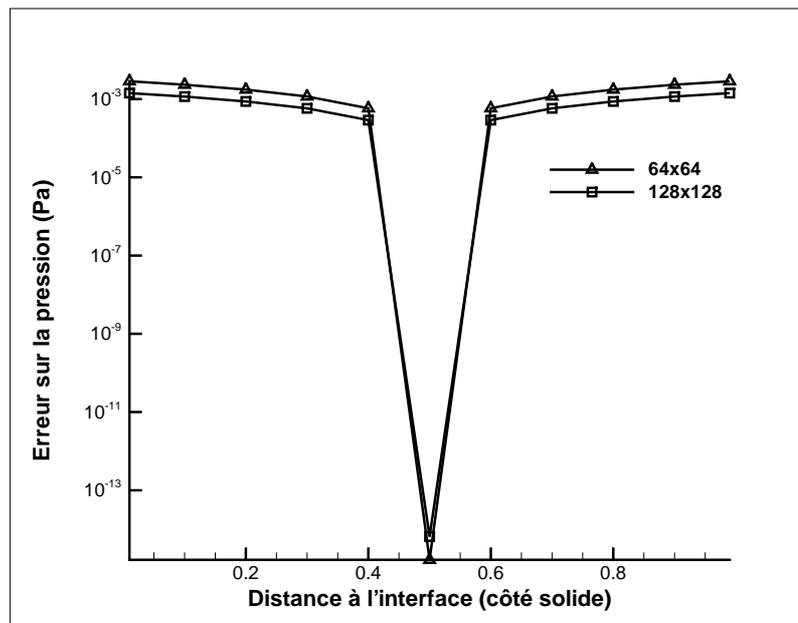


FIGURE 3.21: Cas test quadratique avec imposition d'une condition de *paroi* par interpolation linéaire

Nous remarquons une erreur de l'ordre de l'erreur machine lorsque la distance à la frontière du point p_{i^*,j^*} est de $0,5\Delta x$. Considérons le schéma en figure (3.22) représentant cette configuration.

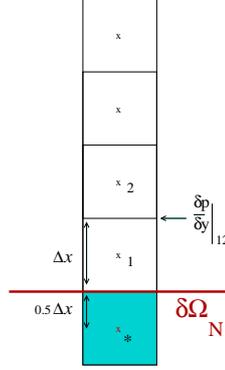


FIGURE 3.22: Configuration où la distance à la frontière du point p_{i^*,j^*} est de $0,5\Delta x$

L'opérateur laplacien de p en 1 s'écrit :

$$\Delta p_1 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_1 + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Big|_1 \quad (3.39)$$

Or, notre champ de pression ne dépend que de y :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Big|_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta p_1 = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Big|_1 = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{12} - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{1^*}}{\Delta x} \quad (3.40)$$

L'utilisation d'une interpolation linéaire implique :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{1^*} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Big|_1 = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{12} - 0}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{12} \quad (3.41)$$

La dérivée selon y et la dérivée seconde de notre champ de pression solution donne :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 \quad (3.42)$$

or, la dérivée selon y au point (1,2) est située à Δx :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{12} = 2\Delta x \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \Big|_1 = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \quad (3.43)$$

La position particulière de la frontière $\delta\Omega_N$ à Δx du gradient de pression au point (1,2) permet de recouvrir la solution exacte. Nous constatons que la position de la frontière à $0,5\Delta x$ est une singularité.

Pour le cas test cubique, la figure 3.23 présente l'erreur absolue sur la pression - premier point appartenant au domaine fluide - en fonction de la position de la frontière immergée.

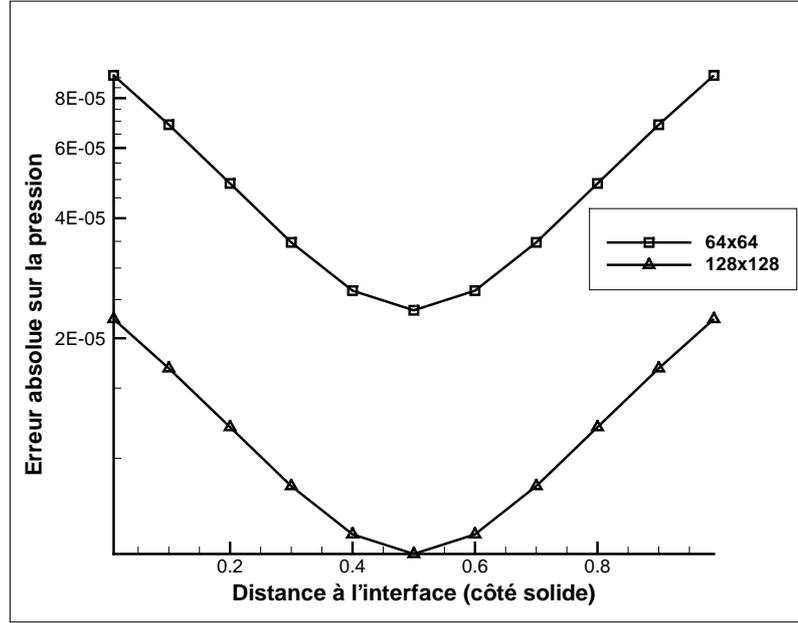


FIGURE 3.23: Cas test cubique avec imposition d'une condition de *paroi* par interpolation linéaire

L'erreur sur le champ de pression cubique est de l'ordre de 10^{-5} et l'ordre de convergence est de 2 bien que l'interpolation linéaire soit une méthode d'ordre 1. On constate également un minimum pour une position de frontière immergée au centre d'une maille.

Interpolation quadratique

Nous utilisons une interpolation quadratique de la pression au bord $\delta\Omega_N$ du domaine fluide :

$$p = a^* + bX^* + cY^* + dX^*Y^* + eX^{*2} + fY^{*2} \quad (3.44)$$

En procédant de la même manière que pour l'interpolation linéaire, nous obtenons un système de 6 équations dans lequel 5 points de pression du domaine fluide Ω sont requis :

$$\mathbf{a} = B^{-1}\mathbf{p} \quad (3.45)$$

La figure 3.24 présente un exemple de choix des pressions appartenant au domaine fluide utilisées pour l'interpolation. La pression au point p_G s'exprime alors en fonction des pressions p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 :

$$p_G = B_{1,2}^{-1} p_1 + B_{1,3}^{-1} p_2 + B_{1,4}^{-1} p_3 + B_{1,5}^{-1} p_4 + B_{1,6}^{-1} p_5 \quad (3.46)$$

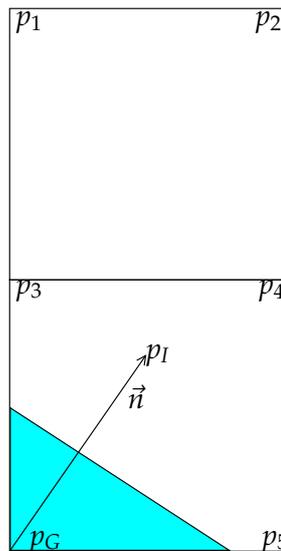


FIGURE 3.24: Exemple de configuration du point *ghost* et de ses *adjacents* dans le cas de l'interpolation quadratique (partie solide en bleu)

Résultats

Comme nous le remarquons en figure (3.25), l'interpolation quadratique d'un champ de pression quadratique est une interpolation *exacte* à l'erreur machine près.

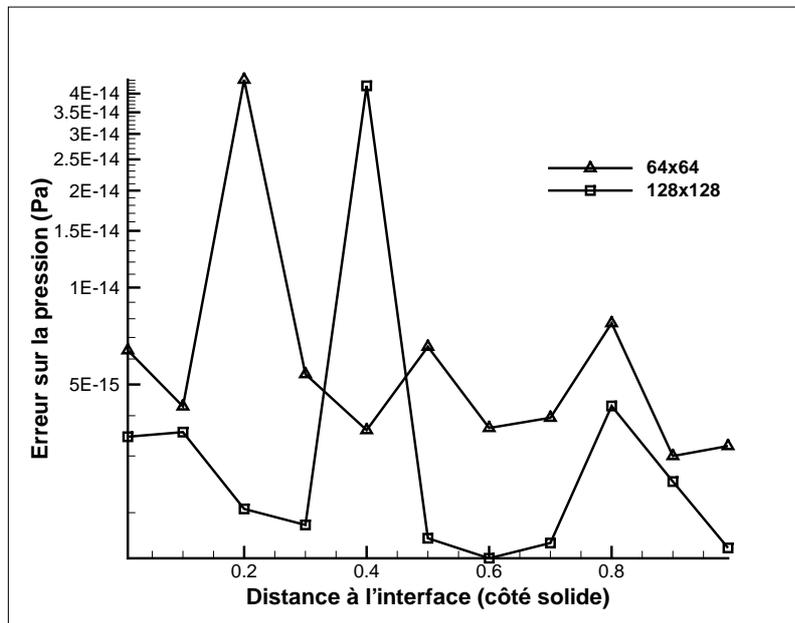


FIGURE 3.25: Cas test quadratique avec imposition d'une condition de *paroi* par interpolation quadratique ($N_x \times N_y = 128 \times 128$).

Cependant, l'interpolation quadratique sur un champ de pression cubique (figure (3.26)) induit des erreurs de l'ordre de 10^{-5} comparables à celles obtenues avec l'interpolation linéaire. L'ordre de convergence est de 2 comme celle de l'interpolation linéaire pour le champ de

pression cubique. À ce stade, nous constatons que le comportement de l'erreur d'interpolation en dehors des champs du même ordre est difficile à maîtriser.

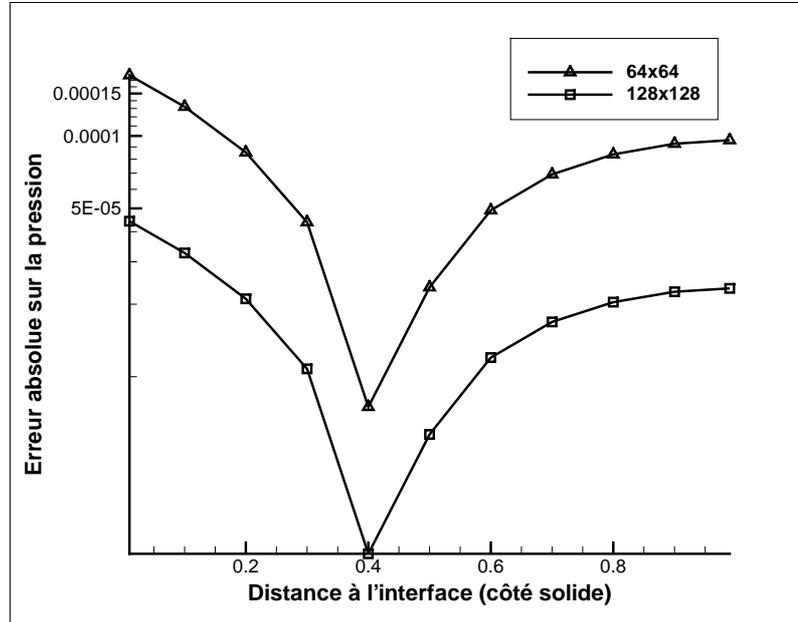


FIGURE 3.26: Cas test cubique avec imposition d'une condition de *paroi* par interpolation quadratique ($N_x \times N_y = 128 \times 128$).

3.4.2.2 Condition de divergence *fantôme*

La condition limite que nous appelons de *divergence fantôme* est proposée par Ikeno et *al* [45]. Les auteurs constatent que le respect de la condition limite en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$ au pas intermédiaire des méthodes de projection ne garantit pas son respect au pas final $n + 1$. De sorte que la divergence nulle de la cellule fluide/solide n'est pas respectée.

Soit ε la relation entre les vitesses fluides et *ghost* au pas intermédiaire, cette relation doit être conservée au pas final :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_G^* = \varepsilon \mathbf{u}_\Omega^* \\ \mathbf{u}_G^{n+1} = \varepsilon \mathbf{u}_\Omega^{n+1} \end{cases} \quad (3.47)$$

or,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G^{n+1} &= \mathbf{u}_G^* - \Delta t \nabla_G p^{n+1} \\ &= \varepsilon \mathbf{u}_\Omega^{n+1} \\ &= \varepsilon (\mathbf{u}_\Omega^* - \Delta t \nabla_\Omega p^{n+1}) \\ &= \varepsilon \mathbf{u}_\Omega^* - \Delta t \varepsilon \nabla_\Omega p^{n+1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

soit,

$$\nabla_G p^{n+1} = \varepsilon \nabla_{\Omega} p^{n+1} \quad (3.49)$$

Afin de conserver la relation ε en vitesse au temps $n + 1$, la même relation ε doit être imposée sur le gradient de pression *ghost*

Résultats

Nous comparons l'erreur sur la pression pour la condition de *paroi* quadratique et la condition de *divergence fantôme* sur le champ de pression quadratique (figure 3.27). Le cas test quadratique est choisi car l'interpolation quadratique est une interpolation *exacte* pour ce cas. Ainsi, il est possible de déterminer si une condition sur la divergence est suffisante pour assurer une bonne approximation de la solution. La relation ε étant une composition d'interpolation linéaire, nous retrouvons la singularité évoquée dans le cadre de l'imposition de la condition de *paroi* linéaire. Cependant, l'erreur est plus faible que pour la condition de *paroi* linéaire de l'ordre de 10^{-10} mais plus élevée que la condition de *paroi* quadratique.

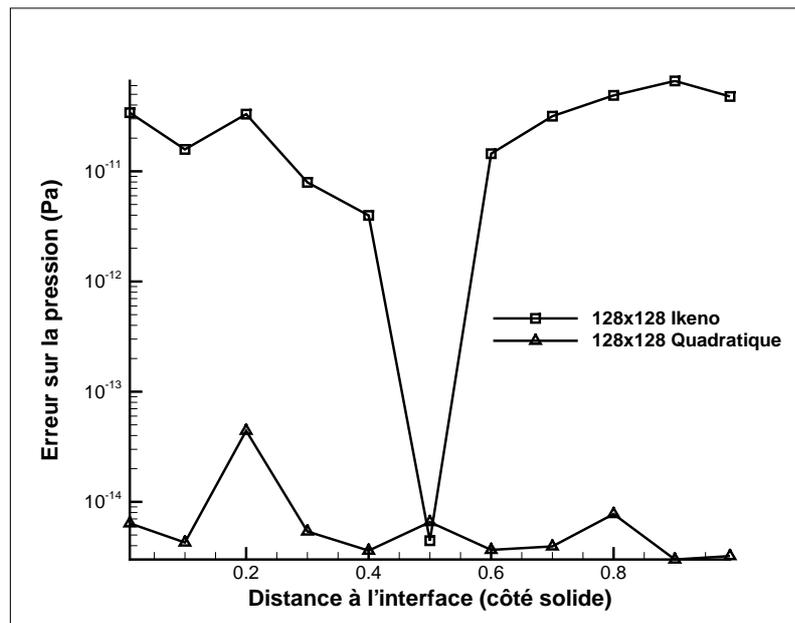


FIGURE 3.27: Cas quadratique : comparaison entre la condition de *paroi* quadratique et la condition de *divergence fantôme* ($N_x \times N_y = 128 \times 128$).

Nous avons calculé la divergence des cellules fluide/solides après correction des vitesses par le gradient de pression : $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$. Nous montrons en figure (3.28) la comparaison entre l'imposition de la condition de *paroi* quadratique et de la condition de *divergence fantôme*. L'objectif de divergence nulle est atteint avec une meilleure précision dans le cas de l'imposition de la condition de *divergence fantôme*. Néanmoins, la solution en pression est meilleure dans le cas de la condition de *paroi* quadratique.

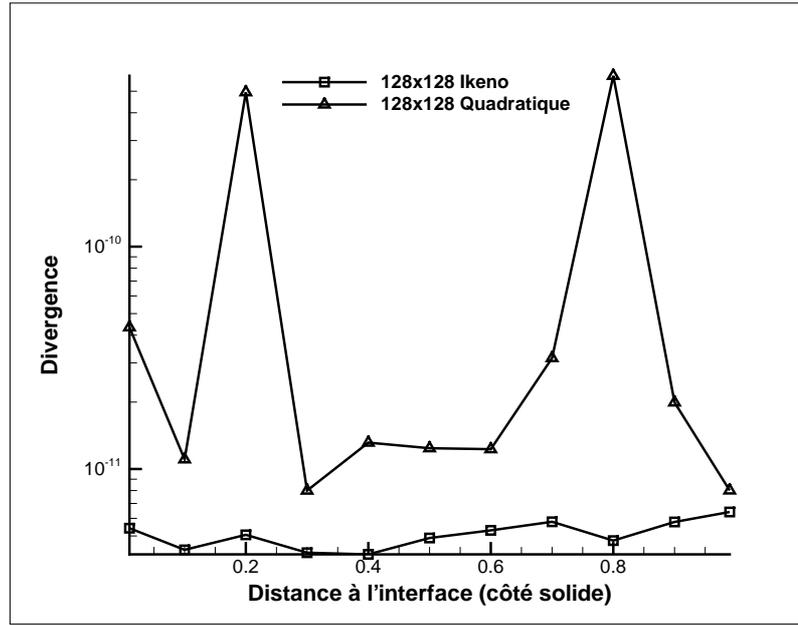


FIGURE 3.28: Cas quadratique : comparaison entre la condition de *paroi* quadratique et la condition de *divergence fantôme* ($N_x \times N_y = 128 \times 128$).

3.4.2.3 Condition mixte

Berthelsen et Faltinsen [10], de la même manière que Ikeno et al [45], s'attachent au respect de la condition limite en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$ au pas final $n + 1$.

Soit I une relation d'interpolation entre le champ de vitesse *ghost* et fluide satisfaisant la condition à la frontière en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G^{n+1} &= I(\mathbf{u}_\Omega^{n+1}) \\ &= I(\mathbf{u}_\Omega^* - \Delta t \nabla p_\Omega) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Contrairement à Ikeno et al [45], Berthelsen et Faltinsen [10] fractionnent l'opérateur d'interpolation I en un opérateur I_1 pour la vitesse et un opérateur I_2 pour la pression.

$$\mathbf{u}_G^{n+1} = I_1(\mathbf{u}_\Omega^*) - \Delta t I_2(\nabla p_\Omega) \quad (3.51)$$

avec

- I_1 satisfaisant la condition en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$
- I_2 satisfaisant la condition en pression $\nabla p_{\delta\Omega_N} = \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\delta\Omega_N} = 0$

Les auteurs utilisent un polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 2 pour les opérateurs I_1 et I_2 . Nous en présentons ici une formulation synthétique :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{u}_\Omega^*) &= \alpha \mathbf{u}_{\delta\Omega_N}^{n+1} + \beta \mathbf{u}_1^* + \gamma \mathbf{u}_2^* \\ I_2(\nabla p_\Omega) &= \alpha \nabla p_{\delta\Omega_N} + \beta \nabla p_1 + \gamma \nabla p_2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 &\in \Omega \\ p_1, p_2 &\in \Omega \end{aligned} \quad (3.53)$$

soit,

$$I(\mathbf{u}_\Omega^{n+1}) = I_1(\mathbf{u}_\Omega^*) - \Delta t I_2(\nabla p_\Omega) \quad (3.54)$$

alors,

$$I(\mathbf{u}_\Omega^{n+1}) = \alpha(\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}^{n+1} - \Delta t \nabla p_{\delta\Omega_N}) + \beta(\mathbf{u}_1^* - \Delta t \nabla p_1) + \gamma(\mathbf{u}_2^* - \Delta t \nabla p_2) \quad (3.55)$$

Le gradient de pression imposé à la frontière étant nul $\nabla p_{\delta\Omega_N} = 0$:

$$\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}^{n+1} - \Delta t \nabla p_{\delta\Omega_N} = \mathbf{u}_{\delta\Omega_N}^{n+1} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}_G^{n+1} = I(\mathbf{u}_\Omega^{n+1}) = \alpha(\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}^{n+1}) + \beta(\mathbf{u}_1^{n+1}) + \gamma(\mathbf{u}_2^{n+1}) \quad (3.57)$$

Berthelsen et Faltinsen ont introduit une condition mixte respectant à la fois la condition limite usuelle de l'équation de Poisson $\nabla p_{\delta\Omega_N} = 0$ et la condition limite en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$ au temps final $n + 1$. Le fractionnement des opérateurs permet d'intégrer la condition de *paroi* pour la pression sur I_2 et la condition en vitesse $\mathbf{u}_{\delta\Omega_N}$ sur I_1 . L'emploi d'une même forme d'interpolation permet de recouvrir la condition limite en vitesse au temps $n + 1$.

Résultats

Nous comparons la condition de *paroi* quadratique et la condition mixte sur le champ de pression quadratique en figure (3.29). Nous observons une singularité en $0.5\Delta x$ où le polynôme de Lagrange se comporte de la même manière que l'interpolation linéaire.

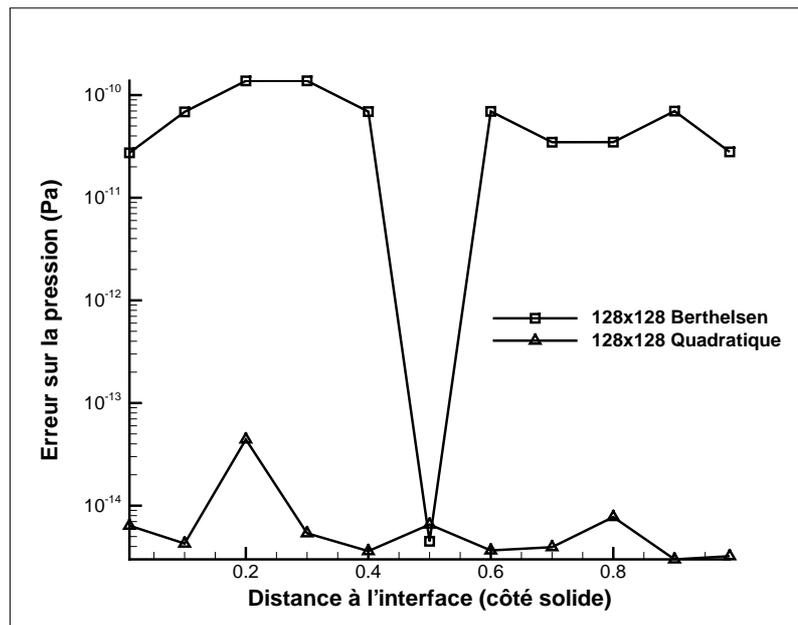


FIGURE 3.29: Cas test quadratique : comparaison de l'erreur sur la pression entre la condition de *paroi* quadratique et la condition mixte ($N_x \times N_y = 128 \times 128$)

La divergence des cellules fluide/solide en figure (3.30) est plus faible dans le cas de la condition mixte que dans le cas de la condition de *paroi* quadratique. De manière équivalente à la condition de *divergence fantôme*, l'objectif de divergence nulle est atteint avec une meilleure précision. Cependant, cela ne garantit pas une bonne approximation de la solution.

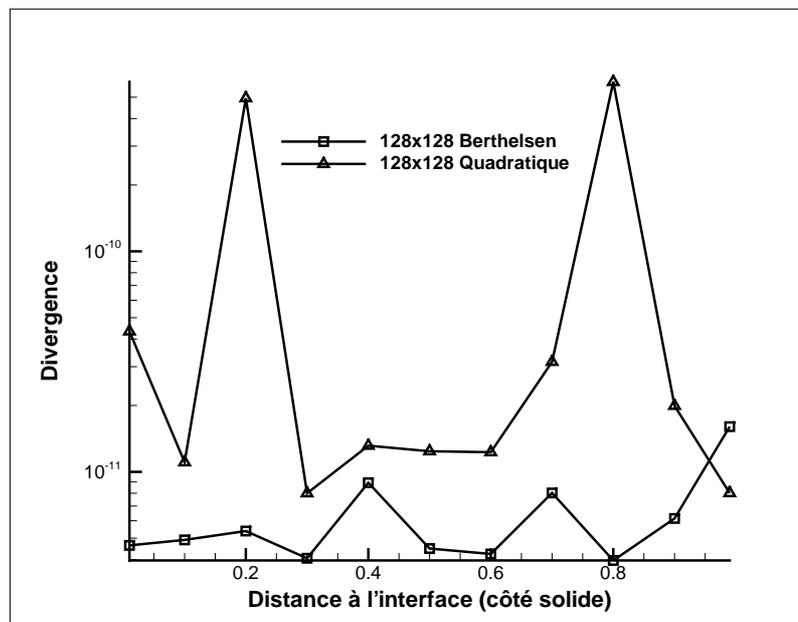


FIGURE 3.30: Cas test quadratique : comparaison de la divergence finale entre la condition de *paroi* quadratique et la condition mixte ($N_x \times N_y = 128 \times 128$)

La figure (3.31) représente la comparaison de la condition de *paroi* quadratique et de la condition mixte pour le champ de pression cubique. Les comparaisons de la divergence des cellules fluide/solide et de l'erreur sur la pression sont rassemblées. Globalement l'approximation de la solution est meilleure dans le cas de la condition mixte. Cependant, la position de la frontière à $0.4\Delta x$ admet une erreur en pression plus faible pour la condition de *paroi* quadratique alors que la divergence est plus faible pour la condition mixte. Ceci illustre qu'atteindre une divergence faible ne garantit pas une bonne approximation de la solution.

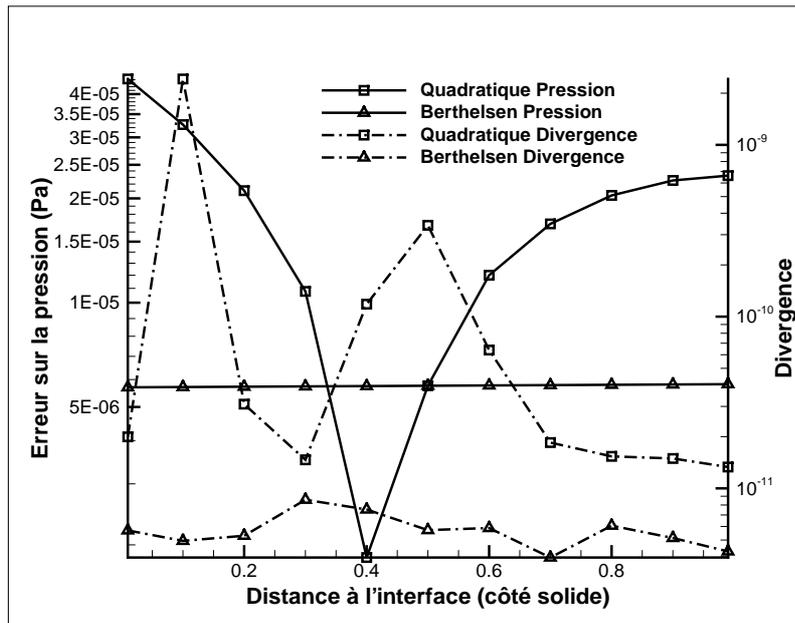


FIGURE 3.31: Cas test cubique : comparaison entre la condition de *paroi* quadratique et la condition mixte ($N_x \times N_y = 128 \times 128$)

3.4.2.4 Conclusion

L'imposition discrète d'une condition limite à l'équation de Poisson à diverses positions de la frontière engendre des termes d'erreurs différents. Cette problématique est inhérente au traitement numérique. À partir de ce constat, nous avons proposé l'étude de l'efficacité de l'imposition discrète à l'aide d'un cas test analytique.

Nous avons présenté la condition limite usuelle dite condition de *paroi*, la condition de *divergence fantôme* et la condition mixte proposées dans la littérature. La condition de *paroi* peut être imposée grâce à des interpolations diverses. Nous avons choisi de présenter les formes linéaire et quadratique largement utilisées dans la littérature. La condition de *divergence fantôme* et la condition mixte posent la problématique du respect de la condition limite en vitesse au temps final au travers de la vitesse *ghost*. Ces alternatives à la condition limite usuelle sont les seules présentes dans le cadre de la formulation de *direct forcing*.

L'interpolation linéaire et l'interpolation quadratique impliquent des erreurs d'ordre similaires sur un champ cubique. La convergence est d'ordre 2 pour les deux maillages utilisés. Dès

lors, le choix d'une formulation d'interpolation s'avère délicat.

La condition limite de *divergence fantôme* apparaît comme intrinsèque à la formulation IBM. A première vue, le concept de frontière immergée sous-tend l'idée que la vitesse *ghost* doit respecter la condition limite en vitesse au temps final. Cependant, à ce temps final la vitesse *ghost* n'exerce plus de contrainte sur l'équation de Navier-Stokes. L'utilisation d'une méthode de projection implique que la contrainte en vitesse ne s'exerce qu'au temps intermédiaire. Le temps final n'étant que la projection de ce temps intermédiaire. La condition limite de ce temps final est la condition limite sur l'équation de Poisson. C'est de l'imposition *juste* de cette condition limite sur l'équation de Poisson dont dépend la correction de la vitesse *ghost*. Cependant, la correction par le gradient de pression de la vitesse *ghost* n'a plus de rapport avec la contrainte du système de Navier-Stokes.

Concrètement, dans le cas de l'interpolation quadratique de la condition limite de *paroi* sur un champ de pression quadratique, nous obtenons une bonne approximation de la solution en pression. Ceci induit une correction *juste* de la vitesse *ghost*. Mais dans le cas de l'imposition de la condition limite de *divergence fantôme* sur ce même champ, l'introduction de la condition sur une correction *juste* de la vitesse *ghost* ne garantit pas une bonne approximation de la solution.

La condition limite mixte tend à combiner la condition sur l'équation de Poisson et la condition limite en vitesse. Cependant, de la même manière que pour la condition de *divergence fantôme* la focalisation sur la condition limite en vitesse au temps final s'avère insuffisante pour l'obtention d'une bonne approximation de la solution. Dans cette formulation, le respect de la condition limite en vitesse par la vitesse *ghost* est essentiellement atteinte par l'utilisation d'une même forme d'interpolation pour la pression et la vitesse.

Au regard de la méthode de projection et des résultats du cas test analytique, l'imposition de la condition de *divergence fantôme* et mixte ne permet pas d'obtenir une bonne approximation de la solution. Contraindre la vitesse *ghost* sur la base du respect de la condition limite en vitesse au pas final se révèle peu efficace. Le problème du respect de la condition limite en vitesse au temps final relève d'un questionnement intéressant sur la formulation des frontières immergées. Mais l'application d'une méthode de projection est à prendre en considération dans cette réflexion. La condition limite en vitesse s'applique au temps intermédiaire, si la condition limite en pression sur l'équation de Poisson est un gradient normal nul alors la condition limite en vitesse au temps final est d'autant respectée que les erreurs d'interpolations en pression et en vitesses sont les mêmes. La question est donc prise dans un mauvais sens, ce n'est pas la condition limite en vitesse au temps final qu'il faut garantir mais l'imposition *juste* de la condition limite de l'équation de Poisson. Dans cette optique, la condition de *paroi* nous apparaît comme la plus cohérente et sera appliquée dans la suite de ce travail.

3.4.3 Condition de *paroi*: Application à l'écoulement autour d'un cylindre (régime(B))

3.4.3.1 Description du cas test

La configuration utilisée est celle décrite en section 3.3 pour le régime d'écoulement (B) avec un nombre de Reynolds de 40. Le cylindre est décalé d'un quart de maille en y ($y_c = \frac{L_y}{2} \frac{\Delta x}{4}$).

La condition de *paroi* est imposée à l'aide d'une interpolation linéaire ou quadratique. Nous utilisons le coefficient de portance C_L qui nous permet de quantifier le défaut de symétrie de l'écoulement dû aux erreurs d'interpolation. Bien que la position du cylindre dans le maillage ait une importance primordiale, la littérature ne fait pas référence de cas en position non symétrique ou ne précise pas la position de l'objet.

3.4.3.2 Résultats

Nous comparons en figure (3.32) le décalage par rapport à la valeur nulle selon les méthodes d'interpolations et le maillage.

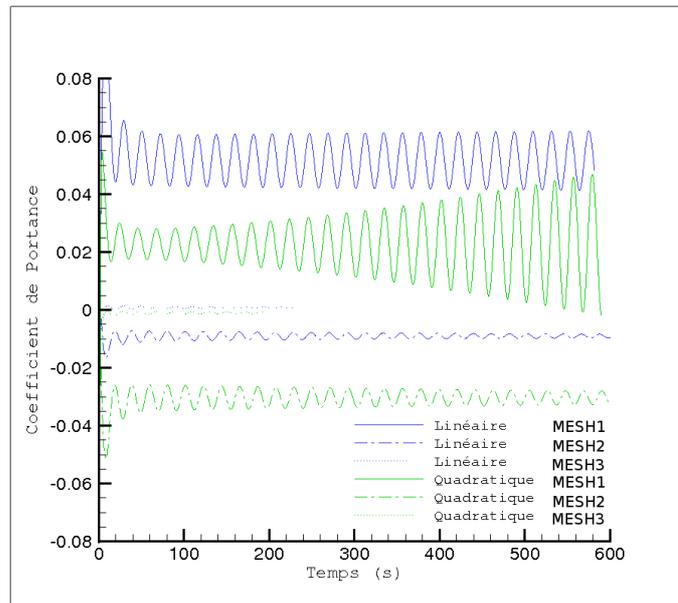


FIGURE 3.32: Coefficient de portance en fonction du temps pour les différents maillages et les différentes interpolations.

De manière générale, l'emploi de la méthode d'interpolation quadratique implique une plus grande oscillation du coefficient de portance avant la stabilisation. À cet égard, le maillage *MESH1* paraît insuffisant pour permettre une simulation correcte de l'écoulement : ce maillage est sous résolu.

Pour les deux autres maillages le décalage par rapport à la valeur nulle est présenté dans le tableau (3.13).

	C_L	
	Linéaire	Quadratique
MESH2	8.8×10^{-3}	3×10^{-2}
MESH3	8.4×10^{-4}	9×10^{-4}

TABLE 3.13: Décalage du coefficient de portance par rapport à la valeur nulle

Les temps de calcul et le nombre de processeurs utilisés sont reportés dans le tableau 3.14. L'interpolation quadratique se révèle légèrement plus coûteuse en terme de temps de calcul.

	Linéaire		Quadratique	
	Temps de calcul	processeurs	Temps de calcul	processeurs
<i>MESH1</i>	11 minutes	8	17 minutes	8
<i>MESH2</i>	53 minutes	32	1 heure	32
<i>MESH3</i>	10 heures	32	13 heures	32

TABLE 3.14: Temps de calcul et nombre de processeurs utilisés sur la machine Vargas (IDRIS)

L'interpolation linéaire permet pour les maillages étudiés d'obtenir un coefficient de portance plus proche de sa valeur théorique. Le facteur de diminution de l'erreur avec le maillage est de 10 pour l'interpolation linéaire et de 30 pour l'interpolation quadratique entre les deux maillages *MESH2* et *MESH3*. Nous observons que la convergence n'est pas strictement liée à l'ordre théorique de la méthode mais également à la forme du champ de pression. Cette observation concorde avec les résultats obtenus sur le cas test analytique (cf section 3.4.2 en page 64). L'erreur d'interpolation est difficile à maîtriser en dehors des champs du même ordre.

Dans un premier temps, bien que l'erreur soit moindre dans le cas de l'interpolation linéaire le facteur de diminution tend à penser que l'interpolation quadratique lui est préférable. Cependant, l'oscillation plus importante de la solution est à prendre en compte notamment dans le cas de l'étude d'écoulements instables. Les instabilités pourraient être amplifiées par la méthode d'interpolation quadratique. Nous concluons qu'il est préférable d'utiliser l'interpolation linéaire dans la suite de ce travail.

3.4.4 Conclusion

L'utilisation d'une méthode de projection pour la résolution des équations de Navier-Stokes permet de découpler le système initial. La résolution du système découplé est plus efficace mais engendre une équation de Poisson sur la pression. L'existence et l'unicité de la solution de cette équation de type elliptique n'est garanti que par l'introduction d'une condition limite. Cependant, la pression n'admet pas de condition limite *naturelle*. L'application de l'équation de quantité de mouvement au bord du domaine prescrit deux gradients : un gradient tangentiel assimilable à une condition de Dirichlet et un gradient normal assimilable à une condition de Neumann. Dès lors, le problème est inconsistant puisqu'une seule condition est nécessaire à la résolution de l'équation de Poisson alors que le champ de pression solution de Navier-Stokes doit respecter deux conditions.

Au delà de cette problématique générale, l'application de la méthode de projection aux frontières immergées implique l'utilisation d'une interpolation. L'interpolation engendre des erreurs dépendantes de la position de la frontière. Le traitement numérique de la condition limite sur une frontière de même forme mais placée différemment sur le maillage implique un différentiel de pression. La formulation de la méthode de frontière immergée sous-tend que la vitesse *ghost* doit respecter la condition limite en vitesse au temps final de la méthode de projection. Certains auteurs ont choisi d'utiliser cette condition afin d'imposer la condition limite

à l'équation de Poisson. Cependant, la prise en considération du découplage du calcul de la vitesse et de la pression par la méthode de projection montre que la contrainte en vitesse ne s'applique qu'au temps intermédiaire. Nous avons pu montrer à l'aide d'un cas test analytique que les méthodes développées par ces auteurs ne garantissent pas une bonne approximation de la solution. Nous nous sommes alors consacrés à l'étude du comportement de l'imposition de la condition limite usuelle de *paroi* à l'aide d'une interpolation linéaire puis quadratique sur le cas test du cylindre. Bien que l'erreur d'interpolation ne dépende pas uniquement de l'ordre mais également de la forme du champ de pression, nous avons isolé un comportement oscillatoire de l'interpolation quadratique. Ce comportement tend à penser que l'utilisation de l'interpolation quadratique sur un écoulement instable et complexe s'avère délicat. Par conséquent, nous choisissons d'employer la méthode d'interpolation linéaire.

À ce stade, nous sommes conscient des compromis effectués. D'un point de vue général, le traitement numérique de la frontière immergée engendre des erreurs numériques dépendantes de sa position. L'ébauche d'une solution est à entrevoir dans l'utilisation d'un raffinement du maillage au bord du domaine permettant de réduire l'erreur numérique.

3.5 Conclusion Générale

La méthode de frontière immergée implantée a démontré sa capacité à reproduire un écoulement de Poiseuille 2D et de Hagen-Poiseuille 3D sur un maillage cartésien. La simulation sur différents maillages de l'écoulement de Poiseuille a permis d'établir l'ordre 2 formel de la méthode. Néanmoins, la simulation de l'écoulement de Hagen-Poiseuille montre que l'erreur de la méthode est tributaire de la position de la frontière immergée dans le maillage. Une diminution de l'erreur avec le maillage est cependant observée, ce qui implique un bon comportement numérique de la méthode.

Les structures d'écoulement en aval d'un cylindre pour les nombres de Reynolds de 20, 40 et 100 ont été correctement reproduites lorsque le cylindre est positionné symétriquement dans la direction y du domaine de calcul. Le déplacement du centre du cylindre montre une dépendance à la position de la frontière immergée de l'erreur sur la détermination de la pression. Le travail sur le système de Poisson synthétique a permis d'évaluer les alternatives à la condition de *paroi* inhérente à la méthode de projection. La motivation fondamentale de ces alternatives est la problématique de la condition de divergence nulle pour les cellules fluide/solide à la fin du pas de temps. Il a été démontré que cette problématique est mal posée au regard de la méthode de projection, seule prescriptrice de la condition limite en pression. L'imposition de la condition limite de *paroi* par une interpolation linéaire est apparue comme la plus judicieuse au regard de la configuration dissymétrique de l'écoulement autour d'un cylindre. Ce cas test montre un bon comportement de la méthode avec une diminution de l'erreur avec le maillage. Dès lors, l'utilisation d'un raffinement de maillage en proche paroi apparaît comme une perspective intéressante.

Chapitre 4

Inclusion d'une seconde phase dans la version bidimensionnelle

4.1 Introduction

Les chapitres 2 et 3 présentent respectivement la mise en œuvre et la validation de la méthode pour des écoulements monophasiques. Afin d'évoluer vers un outil numérique permettant de simuler l'ensemble du système d'atomisation, nous devons étendre la méthode de frontière immergée implantée. Nous souhaitons être capable de simuler l'avancement du liquide dans l'injecteur et son rattachement à la sortie de la buse : l'ensemble du système d'atomisation sera alors simulé par un même outil numérique. Les questions à résoudre sont :

- Que représente le contact entre une interface fluide/fluide et la frontière ?
- Comment l'interface peut se déplacer sur une frontière où la vitesse est nulle ?
- Comment l'angle entre l'interface et la frontière évolue et en fonction de quoi ?

La première partie explore ces questions et permet d'orienter nos choix dans la construction d'un modèle pour la prise en compte du contact entre une interface fluide/fluide et la frontière. La deuxième partie présente la mise en œuvre numérique de la modélisation retenue. Enfin, la dernière partie se consacre à la validation du modèle proposé.

4.2 Ligne de contact

4.2.1 Concepts de base

La ligne de contact est l'intersection entre la surface formée par l'interface entre deux fluides non-miscibles et la surface solide. Cette ligne est une interface dite *ligne triple* représentée sur la figure 4.1.

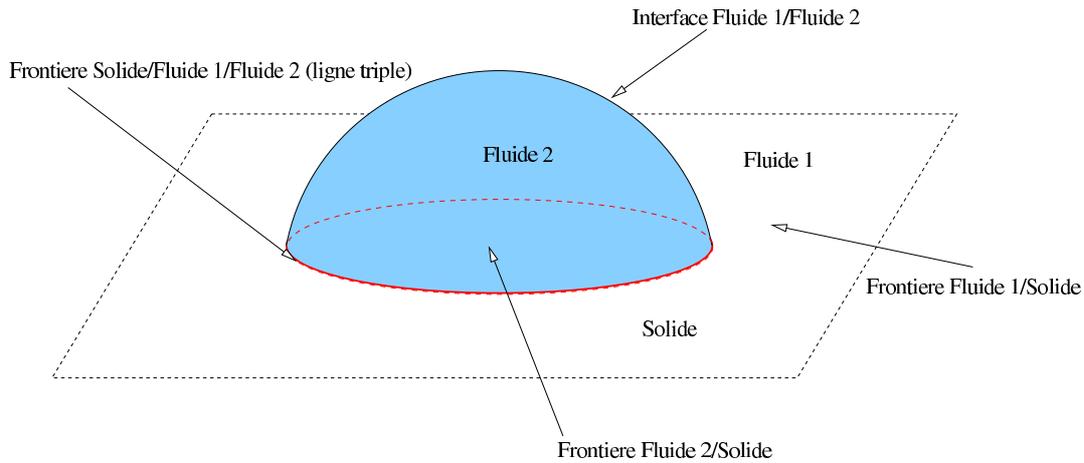


FIGURE 4.1: Définition de la ligne triple

L'interface et les frontières sont caractérisées par des énergies par unité de surface :

- σ_{12} énergie par unité de surface entre le Fluide 1 et le Fluide 2
- σ_{1S} énergie par unité de surface entre le Fluide 1 et le Solide
- σ_{2S} énergie par unité de surface entre le Fluide 2 et le Solide

En configuration bidimensionnelle, la ligne de contact se réduit à un point : le *point triple*. Les énergies de surface et le *point triple* sont présentés sur la figure 4.2.

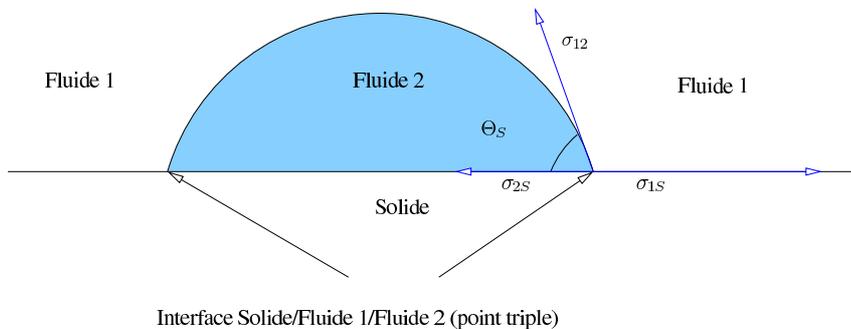


FIGURE 4.2: Définition du point triple et des énergies de surface

σ_{12} est la tension de surface couramment utilisée dans la caractérisation des systèmes diphasiques. σ_{1S} et σ_{2S} ne sont pas directement connus car leurs valeurs dépendent des états de surfaces, de la vitesse de la ligne de contact et du champ de vitesse au voisinage des interfaces [8] [12] [29] [109]. La minimisation des énergies de surface permet de décrire la topologie des interfaces à l'équilibre thermodynamique. Sous les trois hypothèses suivantes :

1. Les énergies d'interfaces varient faiblement
2. La surface du solide est faiblement rugueuse
3. Le solide est rigide

on peut décrire l'équilibre thermodynamique par la relation de Young-Dupré (4.1).

$$\sigma_{12}\cos(\Theta_S) + \sigma_{2S} = \sigma_{1S} \quad (4.1)$$

Θ_S est appelé angle de contact à l'équilibre ou angle statique. Il caractérise la mouillabilité d'une surface par un liquide : un angle nul correspond à une surface parfaitement mouillable (*hydrophile*) au contraire d'un angle élevé correspondant à une surface non-mouillable (*hydrophobe*). Le déplacement de l'interface Fluide 1/Fluide 2 engendre une modification des énergies de surface ce qui modifie l'angle de contact. Cet angle noté Θ_d , varie en fonction du temps et est appelé angle de contact dynamique.

Outre la classification cinématique de l'angle de contact, la ligne triple est dotée d'une notion d'échelle [86] dépendante de la longueur caractéristique considérée :

- l'échelle nanométrique (*microhydrodynamique*)
- l'échelle millimétrique (*hydrodynamique*)
- l'échelle macroscopique (*macrohydrodynamique*)

La prise en compte d'une longueur caractéristique comparable à l'épaisseur de l'interface rend nécessaire l'introduction de forces de nature non-hydrodynamique telles que les forces de Van der Waals. La problématique se situe alors au niveau de l'échelle nanométrique. À l'échelle millimétrique, la longueur caractéristique est nettement supérieure à l'épaisseur de l'interface mais inférieure aux caractéristiques du solide (rugosité). À l'échelle macroscopique, la longueur caractéristique est à la fois nettement supérieure à l'épaisseur de l'interface et aux caractéristiques du solide. Le problème se réduit à la considération d'un solide sans défaut.

La définition de l'angle de contact dépend de la longueur considérée mais également des concepts qui lui sont associés. A l'échelle nanométrique l'angle de contact Θ_S s'écarte peu de la valeur de l'angle statique définie par la relation de Young-Dupré car les phénomènes prépondérants sont d'origine moléculaire [8]. A l'échelle macroscopique, l'angle de contact dépend essentiellement de la vitesse de la ligne de contact. L'angle de contact est appelé angle dynamique Θ_d . Lorsque le solide est considéré comme réel (échelle millimétrique) l'angle de contact est également dynamique mais dépend alors préférentiellement de l'état de surface. Enfin la notion d'angle apparent Θ_{app} correspond à la mesure de l'angle de contact à une certaine distance du solide. Il est utilisé comme concept auxiliaire permettant d'interpréter les résultats numériques ou expérimentaux [1] [86]. La figure 4.3 présente ces différents angles.

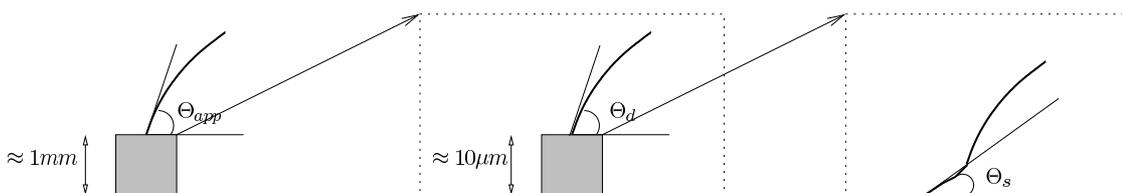


FIGURE 4.3: Définition de l'angle de contact à différentes échelles

4.2.2 Condition de non-glissement

4.2.2.1 Monophasique

Goldstein [36] développe dans une note de son livre *Modern Development in Fluid Mechanics* l'histoire du choix de la condition de non-glissement comme condition limite usuelle à la surface de contact d'un fluide avec un corps solide. Aux prémices du développement des équations de Navier-Stokes, différents chercheurs s'attachent à définir des conditions limites appropriées. Trois hypothèses apparaissent alors, la première adoptée par Stokes considère qu'il n'y a pas de glissement :

$$U_{\delta\Omega}^{slip} = 0 \quad (4.2)$$

La seconde développée par Girard fait état de la présence d'une fine couche de fluide attachée à la paroi sur laquelle une seconde couche connaît un mouvement de glissement. La dernière déduite d'hypothèses moléculaires par Navier implique un glissement proportionnel à la contrainte de cisaillement :

$$\beta U_{\delta\Omega}^{slip} = \mu \frac{\partial u_{\tau}}{\partial n} \quad (4.3)$$

L'application de cette condition a permis à Navier d'expliquer les observations expérimentales de Girard. β est un coefficient de glissement, n est la coordonnée dans la direction normale à la paroi $\delta\Omega$ et u_{τ} est la vitesse du fluide dans la direction tangentielle.

La conclusion de ce débat qui pris place au XIX^e siècle auquel ont participé entre autre Navier, Stokes, Poiseuille, Helmholtz, Darcy, Poisson, Maxwell, Girard, Coulomb, Bernouilli, fut que s'il existait un glissement à la paroi celui-ci était trop faible pour se distinguer de la condition de non-glissement dans l'établissement des solutions théoriques et dans les observations expérimentales. La condition de non-glissement est depuis lors couramment utilisée.

L'essor de la simulation de la dynamique moléculaire a permis d'apporter des preuves de l'existence d'un glissement à la paroi. Ainsi, Thompson et Troian [98] montrent qu'il existe une relation générale entre l'importance du glissement à la paroi et la contrainte de cisaillement. Leurs résultats indiquent que la condition de Navier (4.3) est la limite à faible taux de cisaillement d'une condition plus générale où la relation entre le taux de cisaillement et le glissement devient non linéaire. Cependant dans les applications macroscopiques courantes la condition de non-glissement reste une hypothèse de travail valide [75].

4.2.2.2 Diphasique

Le mouvement d'une interface entre deux fluides non-miscibles en contact avec un solide engendre une ligne de contact dont la vitesse de déplacement est non nulle. Huh et Scriven [43] indiquent qu'il s'agit de la première violation évidente de la condition de non-glissement. Ils pensent que la condition de non-glissement associée au déplacement de deux fluides sur une paroi sont deux concepts incompatibles cinématiquement. Cependant, Dussan [27] indique qu'il existe une distinction entre la condition de non-glissement et la condition d'adhérence.

La condition de non-glissement implique qu'une particule fluide en contact avec un solide ne peut jamais être en contact avec plus d'un point matériel solide. Mais cela n'exclut pas la possibilité que la particule fluide puisse à un instant donné quitter le solide. La condition d'adhérence exclut cette possibilité. Son analyse montre l'existence de surfaces d'émissions ou d'injections dans l'hypothèse d'une condition de non-glissement. Les concepts de condition de non-glissement et de mouvement de la ligne de contact deviennent alors cinématiquement compatibles. Il en résulte que le champ de vitesse proche de la ligne de contact prend plusieurs valeurs [11] et n'est donc pas bien défini. La limite du champ de vitesse le long de la surface solide est zéro alors que la limite le long de l'interface fluide est différente de zéro.

L'application de la condition de non-glissement prédit qu'une force infinie est nécessaire au mouvement de la ligne de contact car la contrainte de cisaillement diverge et n'est pas intégrable [27]. La présentation simplifiée du problème par Qian et *al* [75] est que l'application de la condition de non-glissement implique une variation de la contrainte de cisaillement tangentielle de la forme :

$$\frac{\nu V}{x} \quad (4.4)$$

x étant la distance normale à la paroi, V la vitesse de la paroi dans le référentiel mobile de l'interface fluide/fluide et ν la viscosité cinématique. Lorsque x tend vers *zero* la contrainte de cisaillement diverge, elle est non-intégrable et implique une dissipation visqueuse infinie.

Qian et *al* [75] s'appuient sur le principe de minimisation de l'énergie de dissipation pour proposer une condition généralisée de la condition limite de Navier (GNBC : Generalized Navier Boundary Condition) (4.5) où le glissement est proportionnel à l'ensemble des contraintes tangentielles visqueuses et de Young.

$$\beta(\phi)U_{\delta\Omega}^{slip} = \underbrace{-\mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \right)}_{\text{visqueuses}} + \underbrace{\left(K \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_{sf}(\phi)}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \tau}}_{\text{Young}} \quad (4.5)$$

ϕ est la fonction de phase, K est un paramètre de la fonctionnelle d'énergie libre de Cahn-Hilliard et $\sigma_{sf}(\phi)$ est l'énergie de surface solide/fluide qui dépend de la phase $\sigma_{sf}(\phi_1) = \sigma_{s1}$ et $\sigma_{sf}(\phi_2) = \sigma_{s2}$. $\beta(\phi)$ est le coefficient de frottement. L'équation qui définit l'évolution temporelle de ϕ fait apparaître un coefficient de mobilité inconnu qui est un paramètre du modèle et la condition limite fait apparaître un coefficient phénoménologique indéterminé. L'utilisation de la GNBC a pu reproduire les résultats d'une simulation de dynamique moléculaire tout en conservant une formulation compatible avec les milieux continus.

Les simulations de dynamique moléculaire de Weiqing et E [106] et de Qian et *al* [75] montrent que le glissement à la paroi est significatif sur une longueur L_{slip} d'environ 30 fois la distance de Lennard-Jones σ_{LJ} (distance de quelques ångström à laquelle le potentiel d'attraction entre deux particules est nul). Weiqing et E [106] simulent un écoulement de canal 2D de $150\sigma_{LJ} \times 30\sigma_{LJ}$, les deux parois ont une vitesse constante u_p de sens opposé. Les résultats présentés

sont adimensionnés par la distance de Lennard-Jones σ_{LJ} , la masse moléculaire m et ϵ valeur du potentiel où la liaison entre deux molécules est en équilibre.

Un temps adimensionnel peut être défini à partir des variables de bases précédentes :

$$\tau = \sqrt{\frac{m\sigma_{LJ}^2}{\epsilon}} \quad (4.6)$$

La vitesse des parois est adimensionnée par :

$$U_p = \frac{u_p}{\sigma_{LJ}\tau} \quad (4.7)$$

La figure 4.4 montre l'évolution spatiale de la vitesse de glissement à la paroi. La position de la ligne de contact correspond au maximum de la vitesse de glissement.

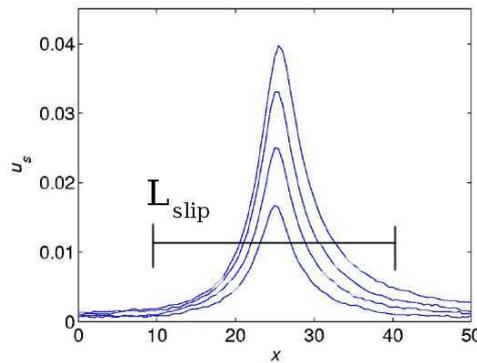


FIGURE 4.4: Vitesse de glissement à la paroi, de la courbe la plus basse à la plus haute U_p vaut respectivement 0.02, 0.03, 0.04, 0.05. (Weiqinq et Weinan [106])

La figure 4.5 montre l'évolution spatiale de la force de frottement pour les différentes vitesses de parois de la même manière que la figure 4.4. La ligne discontinue représente le cas statique $U_p = 0$. La lecture de ces courbes indique que la longueur significative du glissement à la paroi L_{slip} est de l'ordre de $30\sigma_{LJ}$. La distance de Lennard-Jones qui dépend des fluides considérés est de l'ordre de l'ångström soit une longueur de glissement L_{slip} de l'ordre du nanomètre.

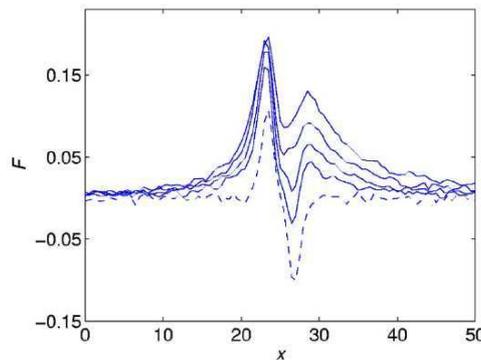


FIGURE 4.5: Force de frottement à la paroi. (Weiqinq et Weinan [106])

Fondamentalement les caractéristiques nanométriques de la ligne de contact s'écartent du modèle des milieux continus [13]. Ce type de résolution n'est pas le but d'une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes. Bonn et *al* [13] dans une revue récente sur les mécanismes de mouillage et d'impact, indiquent que le traitement numérique de la ligne de contact peut se faire par une coupure de l'écoulement avant l'échelle nanométrique ce qui permet d'utiliser la condition de non-glissement sans faire apparaître la singularité sur la contrainte de cisaillement. L'angle de contact est alors une condition limite imposée directement et le champ de vitesse fluide loin de l'échelle nanométrique est compatible avec la condition de non-glissement [87]. Dans la littérature le traitement numérique de la condition limite en vitesse fait apparaître deux stratégies : l'imposition d'une condition de glissement [60][91][63][26][58][62] et l'imposition d'une condition de non-glissement [79][1][81][120]. D'après Afkami et *al* [1], les méthodes de suivis d'interface explicites (*Level set*, *Marqueurs lagrangien*) doivent être dotées d'une condition de glissement sur les mailles en contact avec la ligne triple. Les méthodes de suivis d'interface implicites telle que la méthode VOF peuvent se passer de cette condition car elles introduisent implicitement une longueur de glissement due à l'utilisation des vitesses normales aux faces des cellules pour transporter le fluide. Cependant, la longueur de glissement implicite dépend de la taille de la maille et la convergence avec le maillage est biaisée. L'utilisation d'une représentation diffuse de l'interface même dans les cas d'un suivi explicite permet également d'introduire une longueur de glissement qui est dépendante de l'épaisseur de l'interface.

La condition de glissement à la paroi U_τ la plus utilisée est la condition de Navier :

$$\beta U_{\delta\Omega}^{slip} = \mu \frac{\partial u_\tau}{\partial n} \quad \Longrightarrow \quad U_{\delta\Omega}^{slip} = \lambda \frac{\partial u_\tau}{\partial n} \quad (4.8)$$

λ est la longueur de glissement qui est un paramètre à spécifier. Afkami et *al* [1], Spelt [91] et Dupont et Legendre [26] montrent que le résultat pour une longueur de glissement donnée converge avec le maillage lorsque celle-ci est résolue, c'est à dire lorsque $\lambda \geq \Delta x$. Le résultat est alors dépendant de la taille de maille et du paramètre λ choisi. Pour s'affranchir du paramètre λ , Afkami et *al* proposent l'imposition d'un angle de contact Θ_{num} associé à une condition de non-glissement. Θ_{num} dépend de la vitesse de la ligne triple et de la taille de la maille. Ce travail s'appuie sur la théorie de Cox [23]. Zahedi et *al* [120] imposent également un angle de contact déduit de la théorie de Cox associé à une condition de non-glissement. Renardy et *al* [79] montrent que l'imposition d'une condition de glissement augmente la vitesse de la ligne de contact. Les auteurs imposent donc une condition de non-glissement associée à un angle de contact.

En conclusion, les auteurs qui imposent un angle de contact réalisent une coupure spatiale de l'écoulement avant l'échelle nanométrique. Cette coupure spatiale permet de s'affranchir de la problématique de la singularité sur la contrainte de cisaillement même lorsque la dernière maille est en contact avec la ligne triple. En effet, cette maille n'est plus résolue par les équations de Navier-Stokes mais modélisée par l'imposition de l'angle de contact.

La méthode de frontière immergée par nature engendre une coupure spatiale de l'écoulement puisqu'elle ne se conforme pas au maillage. L'imposition d'un angle de contact peut alors être

vue comme un modèle de sous-maille permettant de rendre compte macroscopiquement des effets microscopiques [29]. Au vue des éléments existants, il apparait que dans le contexte des frontières immergées l'utilisation d'une condition de non-glissement et l'imposition d'un angle de contact est une méthodologie pertinente.

4.2.3 Angle de contact

4.2.3.1 Introduction

Les sections précédentes permettent de mettre en évidence le caractère multi-échelle de la problématique de la ligne triple. À l'échelle macroscopique, le couplage entre la vitesse de la ligne triple et l'angle de contact se divise en deux régimes : quasi-statique et dynamique. Le régime quasi-statique correspond à une faible vitesse de la ligne triple. La mouillabilité de la surface est la caractéristique prépondérante. L'angle de contact est prescripteur du mouvement de l'interface. Le régime dynamique correspond à une vitesse élevée de la ligne de contact. Le mouvement de l'interface pilote la valeur de l'angle de contact.

4.2.3.2 Régime quasi-statique

Dans ce régime la mouillabilité de la surface est caractérisée par un angle d'avancée Θ_A et de recul Θ_R (figure 4.6).

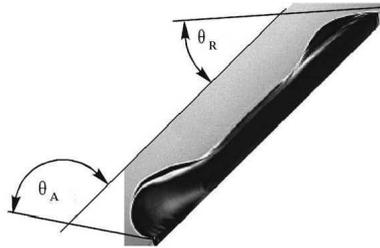


FIGURE 4.6: Angle d'avancée Θ_A et angle de recul Θ_R (Sikalo et al [88])

Un phénomène d'hystérisis est observé entre l'angle d'avancée et de recul. L'angle de contact Θ varie sans induire de mouvement. La dépendance entre l'angle de contact et la vitesse de la ligne triple U_{cl} prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \Theta > \Theta_A & & U_{cl} > 0 \\
 \Theta < \Theta_R & & U_{cl} < 0 \\
 \Theta_R \leq \Theta \leq \Theta_A & & U_{cl} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

4.2.3.3 Régime dynamique

Dans des écoulements où la vitesse est importante, notamment dans les phénomènes d'impact, la valeur de l'angle de contact présente une dépendance à la vitesse de la ligne de contact [8]. La littérature fait état principalement de 8 modèles basés sur l'hydrodynamique, la cinématique moléculaire ou l'expérience permettant de prendre en compte cette dépendance. Il s'agit des

modèles de Blake, Bracke, Cox, Jiang, Kalliadasis, Kister, Newman et Shikhmurzaev [81]. Aucun d'entre eux ne permet de couvrir l'ensemble des conditions d'écoulements. Le nombre capillaire (équation 4.10) est un paramètre fondamental de ces modèles.

$$Ca = \frac{|U_{cl}|\mu_l}{\sigma_{12}} \quad (4.10)$$

Les modèles empiriques ne sont valides que pour des nombres capillaires Ca inférieur à 3×10^{-2} [63]. La théorie de Cox et de Shikhmurzaev ne s'applique que pour des nombres capillaire Ca inférieur à 0.1. D'une manière générale l'ensemble des modèles ne sont valides que pour $Ca \ll 1$. L'étude expérimentale de Blake et al [12] suggère que l'angle dynamique Θ_d ne dépend pas uniquement de la vitesse de la ligne de contact mais également du champ de vitesse et de la géométrie au voisinage de l'interface. L'étude numérique de Wilson et al [109] et l'étude théorique de Shikhmurzaev [87] suggèrent un comportement similaire.

4.2.3.4 Conclusion

Dans le cadre d'un écoulement d'injection les vitesses élevées engendre un déplacement de la ligne triple à forte vitesse. Le régime abordé est dynamique. Cependant le domaine de validité des modèles est trop faible. De plus, l'unicité de la dépendance de l'angle de contact avec la vitesse de l'interface est remise en cause. Certains éléments mettent à jour la possibilité d'une dépendance élargie au champ de vitesse et à la géométrie au voisinage de l'interface. Néanmoins, la mise en place d'un couplage entre la dynamique de l'écoulement et les propriétés géométriques paraît primordiale. Ce couplage peut mettre en évidence certaines interactions entre la géométrie de l'injecteur et la déformation de l'interface. Dans une première approche, nous proposerons de modifier le modèle de Jiang en s'appuyant sur des comportements expérimentaux. La méthodologie adoptée reste compatible avec la mise en place d'autres modèles.

4.3 Mise en œuvre

4.3.1 Imposition de l'angle de contact

À l'intérieur du solide, la *level set* fluide ϕ perd sa définition d'interface fluide/fluide. Les nœuds solides les plus proches du bord $\delta\Omega$ servent à imposer la condition limite : l'angle de contact.

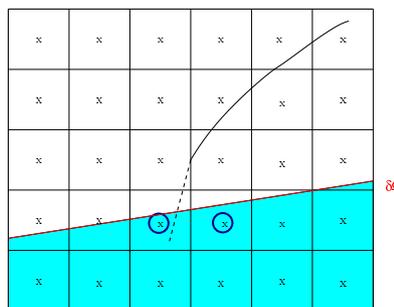


FIGURE 4.7: Imposition de l'angle de contact

Plus précisément, les noeuds au voisinage de ϕ (cercle bleu figure 4.7) imposent l'angle de contact, les autres noeuds sont évalués de manière à respecter la propriété de fonction distance. Les noeuds loin du bord $\delta\Omega$ n'ont pas d'interaction avec le calcul du domaine fluide.

Le repère lié à la paroi est présenté en figure 4.8. \vec{n} est le vecteur normal au bord $\delta\Omega$ et $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent définis par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi_S}{\|\vec{\nabla}\phi_S\|} \quad (4.11)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$$

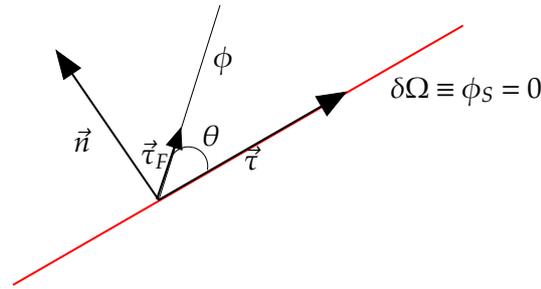


FIGURE 4.8: Repère à la paroi

$\vec{\tau}_F$ est le vecteur tangent à ϕ au point triple.

$$\vec{\tau}_F = \cos\Theta \vec{\tau} + \sin\Theta \vec{n} \quad (4.12)$$

Le gradient de ϕ à la paroi s'écrit :

$$\vec{\nabla}\phi_{\delta\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\delta\Omega} \vec{n} + \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\Big|_{\delta\Omega} \vec{\tau} \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla}\phi_{\delta\Omega} = \cos\Theta \vec{n} - \sin\Theta \vec{\tau}$$

La méthode d'extension d'Aslam [4] permet d'étendre un champ à travers une interface. L'extension peut être constante, linéaire, quadratique ou d'ordre plus élevée. L'intérêt de la méthode est d'une part la simplicité de son formalisme, d'autre part les propriétés de continuité de la fonction étendue. Notre objectif est d'effectuer une extension de ϕ qui permette d'imposer le gradient au bord $\delta\Omega$ (équation 4.13).

L'extension constante s'écrit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1 - \text{sign}(\phi_S)}{2} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (4.14)$$

avec

$$\text{sign}(\phi_S) \begin{cases} -1 & \phi_S \leq 0 \\ 1 & \phi_S > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

A l'équilibre,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.16)$$

soit

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (4.17)$$

L'équation 4.17 signifie qu'à l'équilibre le gradient de ϕ dans la direction normale \vec{n} au bord $\delta\Omega$ est nul : la valeur de ϕ est constante. L'angle de contact résultant est $\frac{\pi}{2}$. L'angle Θ est imposé par la prescription du gradient normal au bord $\delta\Omega$ (équation 4.18) à l'équilibre.

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\delta\Omega} = \cos\Theta \quad (4.18)$$

L'équation 4.14 devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1 - \text{sign}(\phi_S)}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi - \cos\Theta) = 0 \quad (4.19)$$

La condition limite sur l'angle n'est imposée que pour les points au voisinage de ϕ (cercle bleu figure 4.7). Les autres points sont étendus par une extension constante non modifiée (équation 4.14). Un algorithme de redistance permet d'assurer la propriété de fonction distance [66][95].

4.3.2 Application de la G.F.M pour la condition de pression

L'équation à résoudre sur la pression (section 1.1.1.2) est l'équation de Poisson :

$$\frac{\Delta p^{n+1}}{\rho} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (4.20)$$

La figure 4.9 introduit les problématiques de la prise en compte d'une frontière immergée lors d'un calcul diphasique.

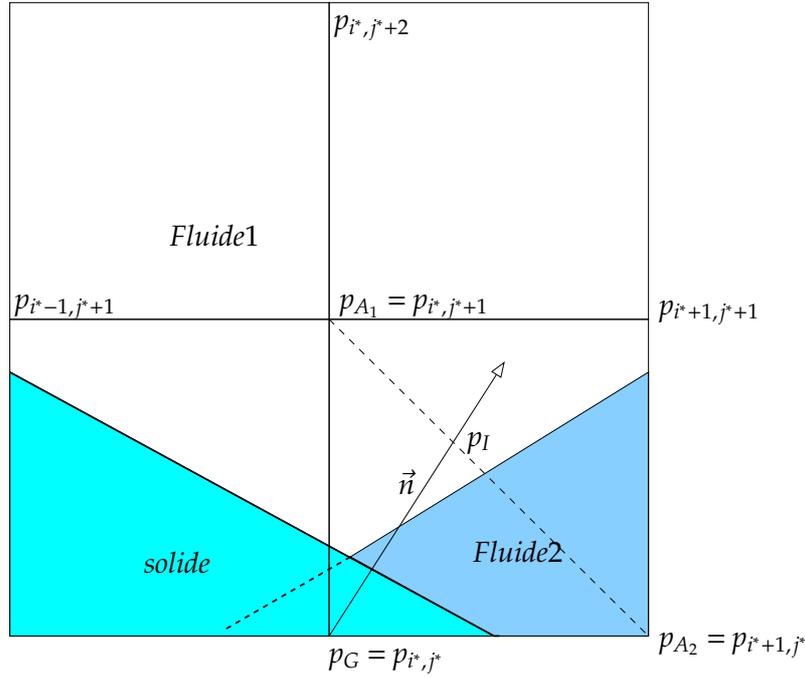


FIGURE 4.9: Configuration de couplage frontière immergée/diphasique et stencil de discrétisation de p_{i^*, j^*+1}

La discrétisation de l'équation (4.20) au point p_{i^*, j^*+1} s'exprime :

$$\frac{\Delta p_{i^*, j^*+1}}{\rho} = \frac{\frac{1}{\rho_{i^*+\frac{1}{2}, j^*+1}} \frac{p_{i^*+1, j^*+1} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta} - \frac{1}{\rho_{i^*-\frac{1}{2}, j^*+1}} \frac{p_{i^*, j^*+1} - p_{i^*-1, j^*+1}}{\Delta} + \frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{3}{2}}} \frac{p_{i^*, j^*+2} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta} - \frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{1}{2}}} \frac{p_{i^*, j^*+1} - p_{i^*, j^*}}{\Delta}}{\Delta} \quad (4.21)$$

soit,

$$\frac{\Delta p_{i^*, j^*+1}}{\rho} = \frac{\frac{1}{\rho_{i^*+\frac{1}{2}, j^*+1}} \frac{p_{i^*+1, j^*+1} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta} + \frac{1}{\rho_{i^*-\frac{1}{2}, j^*+1}} \frac{p_{i^*-1, j^*+1} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta} + \frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{3}{2}}} \frac{p_{i^*, j^*+2} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta} + \frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{1}{2}}} \frac{p_{i^*, j^*} - p_{i^*, j^*+1}}{\Delta}}{\Delta} \quad (4.22)$$

p_{i^*+1, j^*+1} , p_{i^*-1, j^*+1} , p_{i^*, j^*+1} et p_{i^*, j^*+2} appartiennent au domaine fluide 1, par conséquent :

$$\frac{1}{\rho_{i^*+\frac{1}{2}, j^*+1}} = \frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho_{i^*-\frac{1}{2}, j^*+1}} = \frac{1}{\rho_1} \quad (4.23)$$

L'équation 4.22 prend donc la forme :

$$\frac{\Delta p_{i^*, j^*+1}}{\rho} = \underbrace{\frac{\frac{1}{\rho_1} (p_{i^*+1, j^*+1} + p_{i^*-1, j^*+1} + p_{i^*, j^*+2} - 3p_{i^*, j^*+1})}{\Delta^2}}_A + \underbrace{\frac{\frac{1}{\rho_{i^*, j^*+\frac{1}{2}}} (p_{i^*, j^*} - p_{i^*, j^*+1})}{\Delta^2}}_B \quad (4.24)$$

Sous cette forme le terme B n'est pas défini puisque :

1. p_{i^*,j^*} n'est pas défini
2. $\frac{1}{\rho_{i^*,j^*+\frac{1}{2}}}$ n'est pas défini

L'équation 2.45 de la section 2.3.3 détermine p_{i^*,j^*} où α_G est donnée par l'équation 2.46 :

$$p_{i^*,j^*} = p_{A_1} + \alpha_G (p_{A_1} - p_{A_2}) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\frac{1}{\rho_{i^*,j^*+\frac{1}{2}}} \alpha_G (p_{A_1} - p_{A_2})}{\Delta^2} \quad (4.25)$$

Or,

- $p_{A_1} \in$ Fluide 1
- $p_{A_2} \in$ Fluide 2

Ce qui implique qu'à priori la continuité de B à travers l'interface n'est pas garantie (figure 4.10).

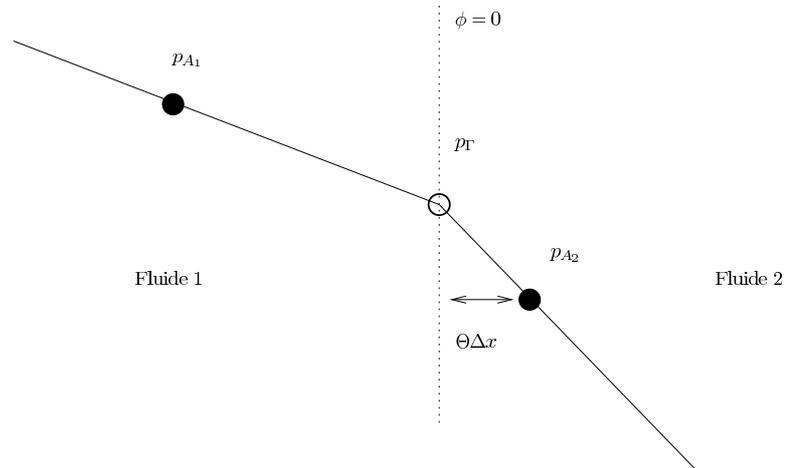


FIGURE 4.10: Schéma monodimensionnel de la discontinuité *a priori* de B

B est alors défini sur chacun des domaines fluides. Dans un premier temps, nous supposons une absence de saut de la pression à la traversée de l'interface $[p] = 0$, soit $p_{\Gamma}^{fluide1} = p_{\Gamma}^{fluide2}$. Sous cette hypothèse, le terme B s'écrit sur chacun des domaines fluides comme suit :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\alpha_G (p_{\Gamma} - p_{A_1})}{(1 - \theta) \Delta^2} && \text{sur le domaine fluide 1} \\ B &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\alpha_G (p_{A_2} - p_{\Gamma})}{\theta \Delta^2} && \text{sur le domaine fluide 2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Avec θ la position de sous maille de l'interface fluide définie par :

$$\theta = \frac{|\phi_{A_2}|}{|\phi_{A_1}| + |\phi_{A_2}|} \quad (4.27)$$

Le terme A de l'équation 4.24 étant défini sur le domaine fluide 1, le terme B doit être défini sur ce même domaine. Or, d'une part la pression p_Γ à l'interface n'est pas connue, d'autre part une singularité peut naître d'une faible valeur de θ . Sous l'hypothèse de l'absence de saut de la dérivée de pression sur la masse volumique $\left[\frac{p_x}{\rho}\right]$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{(p_\Gamma - p_{A_1})}{(1-\theta)\Delta} = \frac{1}{\rho_2} \frac{(p_{A_2} - p_\Gamma)}{\theta\Delta} \implies p_\Gamma = \frac{(1-\theta)\rho_1 p_{A_2} + \theta\rho_2 p_{A_1}}{\theta\rho_2 + (1-\theta)\rho_1} \quad (4.28)$$

Soit,

$$B = \frac{1}{\rho_*} \frac{\alpha_G (p_{A_2} - p_{A_1})}{\Delta^2} \quad \text{sur le domaine } fluide = fluide1 \cup fluide2 \quad (4.29)$$

Avec ρ_* la masse volumique effective définie par :

$$\rho_* = \theta\rho_2 + (1-\theta)\rho_1 \quad (4.30)$$

Les deux indéterminations, sur p_{i^*,j^*} et sur $\frac{1}{\rho_{i^*,j^*+\frac{1}{2}}}$, sont alors levées.

Cependant les pressions p_{A_1} et p_{A_2} appartiennent à deux domaines distincts et le saut le pression à l'interface fluide n'est pas nul.

$$[p] = p^{Fluide1} - p^{Fluide2} = \sigma\kappa(\phi) + 2[\mu](\nabla u.N, \nabla v.N).N = a_\Gamma \quad (4.31)$$

Avec $\kappa(\phi)$ la courbure de l'interface et $[\mu]$ le saut de la viscosité.

Le terme A est défini sur le domaine fluide 1. D'après la *Ghost Fluid Method* [61], la pression p_{A_2} s'exprime sur le domaine fluide 1 par l'intermédiaire du saut de pression.

$$[p] = p_{A_2}^{Fluide1} - p_{A_2}^{Fluide2} = a_\Gamma \implies p_{A_2}^{Fluide1} = p_{A_2}^{Fluide2} + a_\Gamma \quad (4.32)$$

Soit,

$$B = \frac{1}{\rho_*} \frac{\alpha_G (p_{A_2} + a_\Gamma - p_{A_1})}{\Delta^2} \quad \text{sur le domaine fluide 1} \quad (4.33)$$

Finalement, l'équation 4.24 correctement définie en incluant à la fois la condition de pression à la paroi et les conditions de sauts de pression à l'interface fluide s'exprime :

$$\frac{\Delta p_{i^*,j^*+1}}{\rho} = \frac{\frac{1}{\rho_1} (p_{i^*+1,j^*+1} + p_{i^*-1,j^*+1} + p_{i^*,j^*+2} - 3p_{i^*,j^*+1})}{\Delta^2} + \frac{1}{\rho_*} \frac{\alpha_G (p_{A_2} + a_\Gamma - p_{A_1})}{\Delta^2} \quad (4.34)$$

Pour rappel α_G est donné par l'équation 2.46, et les pressions p_{A_1} et p_{A_2} par :

$$p_{A_1} = p_{i^*,j^*+1} \quad p_{A_2} = p_{i^*+1,j^*} \quad (4.35)$$

4.4 Validations

4.4.1 Indroduction

Dans un cadre bidimensionnel, la méthode développée est une extension pour les écoulements diphasiques de la méthode de frontière immergée. Au delà des conditions de saut à l'interface fluide et des conditions limites à la paroi, l'angle de contact apparait comme une modélisation de l'interaction fluide/paroi à l'échelle nanométrique. Dans la première partie, la validation s'appuie sur la solution analytique de la forme à l'équilibre d'une goutte posée sur une paroi. Ce cas test, notamment utilisé par Dupont et Legendre [26], met en jeu un angle de contact constant égal à l'angle statique. Dans la seconde partie, un modèle dynamique pour le calcul de l'angle de contact est proposé et validé par l'intermédiaire de considérations expérimentales.

L'efficacité de la méthode de frontière immergée est testée, soit sur une paroi horizontale ($\alpha = 0^\circ$), soit sur une paroi inclinée par rapport au maillage d'un angle α (figure 4.11).

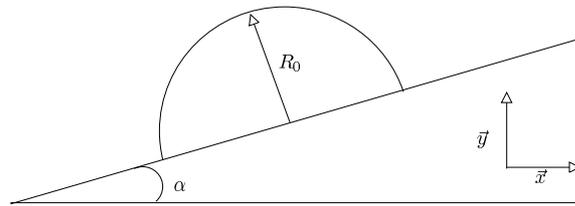


FIGURE 4.11: Inclinaison de la paroi par rapport au maillage

Lorsque $\alpha = 0^\circ$, la position de la frontière immergée est en " $\frac{1}{2}$ maille" (figure 4.12).

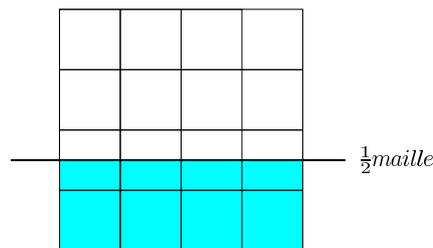


FIGURE 4.12: Position de la frontière immergée pour $\alpha = 0$

4.4.2 Angle statique

4.4.2.1 Description du cas test

La forme à l'équilibre d'une goutte posée sur une paroi dépend des forces de gravité, des forces de tension superficielle et de l'angle statique. Le nombre adimensionnel d'Eotvos est le rapport entre les forces de gravité et les forces de tension superficielle :

$$E_0 = \frac{\rho_2 g R_0^2}{\sigma_{12}} \quad (4.36)$$

Initialement, la goutte est un demi-cercle et l'angle de contact est de 90 degrés. Elle est caractérisée par son rayon initial R_0 . La figure 4.13 présente la configuration étudiée. La goutte initialement déposée sur la paroi oscille jusqu'à atteindre son état d'équilibre. À tout instant, l'angle de contact est supposé constant et égal à l'angle statique.

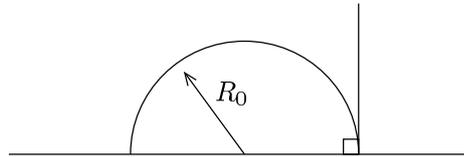


FIGURE 4.13: Configuration initiale de la goutte

Pour des nombres d'Eotvos faible ($Eo \ll 1$) le système est contrôlé par la tension de surface et la forme d'équilibre de la goutte est un arc de cercle. Les caractéristiques de la forme à l'équilibre sont le rayon final R , la longueur d'étalement L et la hauteur e , qui sont définis sur la figure 4.14.

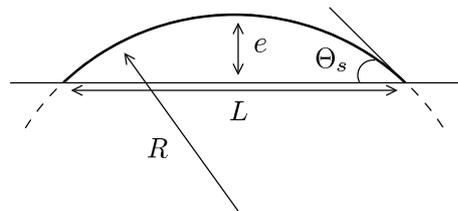


FIGURE 4.14: Caractéristiques de la forme de la goutte à l'équilibre $Eo \ll 1$

Comme mentionné par Dupont et Legendre [26], en utilisant la conservation de la masse, il est possible par des considérations géométriques de calculer les caractéristiques de la forme de la goutte à l'équilibre.

$$R = R_0 \sqrt{\frac{\pi}{2(\Theta_s - \sin\Theta_s \cos\Theta_s)}}, \quad L = 2R \sin\Theta_s, \quad e = R(1 - \cos\Theta_s) \quad (4.37)$$

Pour des nombres d'Eotvos plus élevés ($Eo \gg 1$) le système est contrôlé par les forces de gravité et à l'équilibre la goutte est aplatie (figure 4.15).

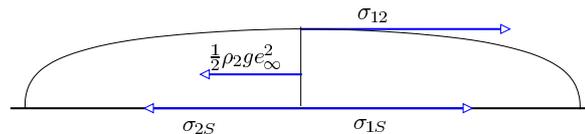


FIGURE 4.15: Caractéristiques de la forme de la goutte à l'équilibre ($Eo \gg 1$). Représentation du bilan de forces pour $Eo \rightarrow \infty$

Le poids tend à déformer la goutte dans le sens d'une augmentation de l'étalement alors que la force de tension superficielle tend à réduire son étalement afin de minimiser son énergie de surface. Pour des nombre d'Eotvos élevés ($Eo \rightarrow \infty$), la force de tension superficielle et la force de gravité peuvent être considérées comme parallèles à la paroi. Cette hypothèse permet d'écrire le bilan des forces agissant sur la goutte de la manière suivante :

- Bilan de forces

$$\sigma_{1S} + \sigma_{12} = \sigma_{2S} + \frac{1}{2} \rho g e_{\infty}^2 \quad (4.38)$$

- Relation de Young à l'équilibre

$$\sigma_{2S} = \sigma_{12} \cos \Theta_s + \sigma_{1S} \quad (4.39)$$

Les équations (4.38) et (4.39) permettent d'obtenir l'épaisseur de la goutte pour $Eo \rightarrow \infty$:

$$e_{\infty} = 2 \sqrt{\frac{\sigma_{12}}{\rho_2 g}} \sin \frac{\Theta_s}{2} \quad (4.40)$$

Un raisonnement similaire sur la longueur et la surface permet d'obtenir la longueur pour $Eo \rightarrow \infty$:

$$L_{\infty} = \frac{\pi R_0}{4 \sin \frac{\Theta_s}{2}} \sqrt{E_0} \quad (4.41)$$

4.4.2.2 Résultats en absence de gravité

Le domaine a une taille $L_x \times L_y = 0.004 \text{ m} \times 0.004 \text{ m}$ discrétisé par un premier maillage appelé MESH1 où $N_x \times N_y = 64 \times 64$ et par un deuxième maillage MESH2 où $N_x \times N_y = 128 \times 128$. Les paramètres physiques des simulations sont :

- $R_0 = 0.04/63 \text{ m}$
- $\rho_1 = 1.204 \text{ kg.m}^{-3}$
- $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- $\mu_1 = 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- $\mu_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- $\sigma_{12} = 7.09 \times 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$
- $g = 0 \text{ m.s}^{-2}$
- $\Theta_s = 30^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 120^\circ$
- $\alpha = 0^\circ, 18^\circ$

En absence de gravité le nombre d'Eotvos est nul et les caractéristiques de la goutte à l'équilibre sont données par l'équation (4.37).

La figure 4.16 montre la comparaison entre les caractéristiques géométriques analytiques de la goutte et les résultats de simulations à l'équilibre pour le maillage MESH1 avec $\alpha = 0^\circ$. Les résultats sont proches de la solution analytique malgré la faible résolution du maillage ($R_0 = 10\Delta x$). Une perte de précision est observée pour les grands et petits angles statiques. L'erreur d'interpolation sur la condition limite de l'angle est dépendante de sa valeur.

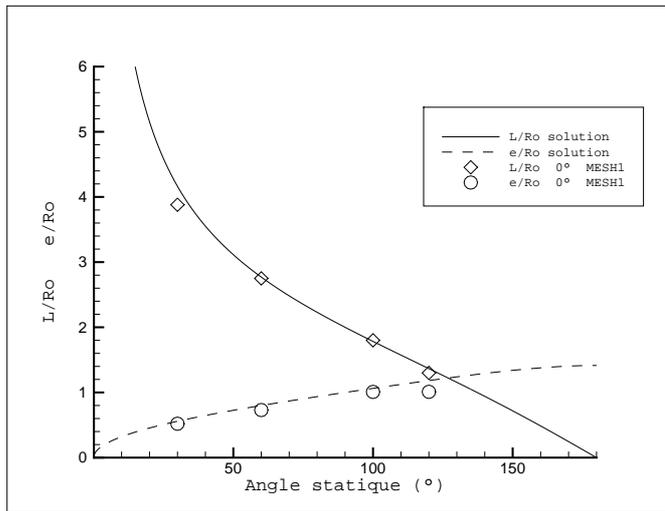


FIGURE 4.16: Caractéristiques géométriques de la goutte en fonction de l'angle ($E_0 = 0$ et $\alpha = 0^\circ$)

Pour le maillage MESH1 malgré un bon comportement global, une perte de précision est observée en figure 4.17 lorsque α est différent de 0° . L'augmentation de la résolution avec le maillage MESH2 permet d'accroître la précision notamment pour les grands et petits angles statiques.

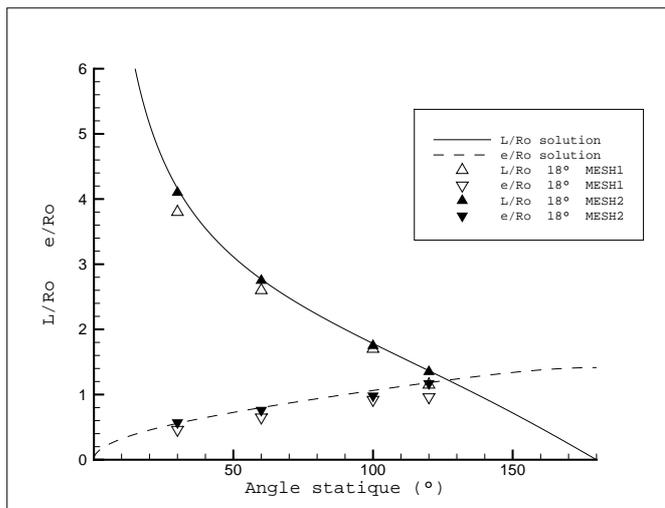


FIGURE 4.17: Caractéristiques géométriques de la goutte en fonction de l'angle ($E_0 = 0$ et $\alpha = 18^\circ$)

La méthode développée permet de retrouver les caractéristiques géométriques analytiques. Cependant, les résultats présentés sur les figures 4.16 et 4.17 montrent que la position de la frontière immergée a un impact sur le résultat de la simulation. Nous reprenons le cas simplifié où $\alpha = 0$ avec $\Theta_s = 60^\circ$, la position de la frontière immergée initialement en $\frac{1}{2}$ maille est déplacée en $\frac{1}{4}$ maille (figure 4.18).

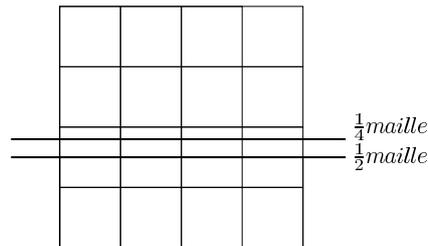


FIGURE 4.18: Positions de la frontière immergée dans le maillage cartésien

D'une part, les erreurs d'interpolation sur les conditions limites sont maintenant dues à une position en $\frac{1}{4}$ maille, d'autre part, l'angle de contact est maintenant imposé sur une longueur de $\frac{1}{4}$ maille. La figure 4.19 présente l'évolution temporelle de la longueur d'étalement de la goutte en fonction du temps pour les deux positions de frontière immergée. Le résultat à l'équilibre pour la position en $\frac{1}{4}$ maille est moins précis que pour la position en $\frac{1}{2}$ maille sur un maillage équivalent. L'augmentation de la résolution avec le maillage MESH2 permet d'obtenir une très bonne approximation de la solution.

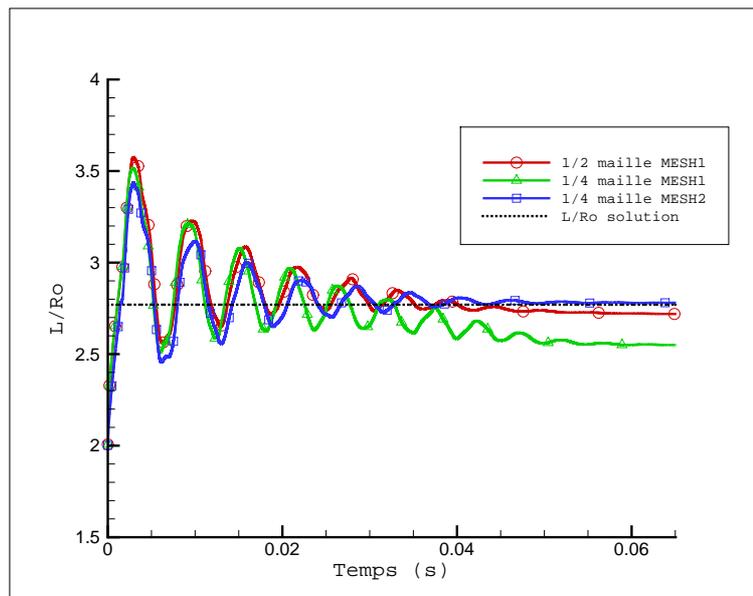


FIGURE 4.19: Effet de la position de la frontière immergée ($\alpha = 0$ et $\Theta_s = 60^\circ$)

La maîtrise des erreurs d'interpolations passe par une augmentation de la résolution. La question de l'ordre d'interpolation peut également être posée. La section 3.4 a permis d'aboutir au résultat suivant : l'augmentation de l'ordre d'interpolation de la condition limite en pression sur un champ de pression quelconque ne garantit pas une meilleure approximation de la solution. Dans ce cadre, l'augmentation de l'ordre d'interpolation ne semble pas une voie de développement judicieuse.

La longueur caractéristique d'imposition de l'angle de contact dépend du maillage. Afkhami et al [1] proposent la construction d'un angle numérique dépendant de la taille de maille à partir d'une analogie avec la théorie de Cox. Cette stratégie permet de remédier à la dépendance avec le maillage de la longueur caractéristique d'imposition de l'angle. Dans une première approche, nous n'utilisons pas cette construction qui pourra faire l'objet d'un futur développement.

La perte de précision est essentiellement due aux erreurs d'interpolations sur les conditions limites qui sont à l'origine d'une altération de la masse initiale. La figure 4.20 montrent la modification de la masse initiale en fonction de l'angle statique considéré pour l'ensemble des résultats précédents. Pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 18^\circ$ sur le maillage MESH1, l'erreur d'interpolation sur la condition limite de l'angle est importante sur les grands et petits angles statiques et engendre une forte perte de masse. Nous montrons qu'un raffinement du maillage permet une décroissance rapide de l'erreur d'interpolation sur la condition limite de l'angle et implique une faible perte de masse.

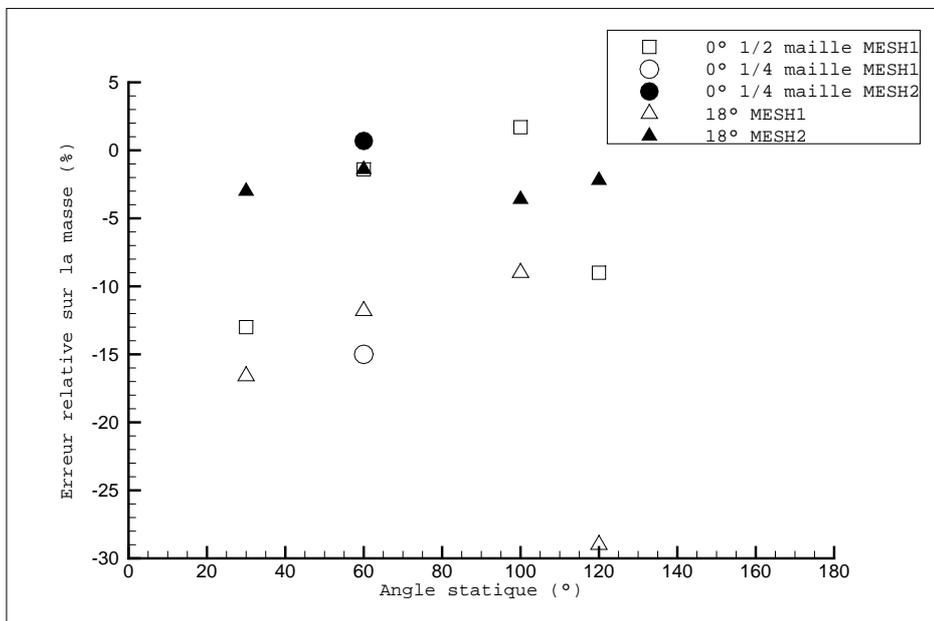


FIGURE 4.20: Modification de la masse initiale

La figure 4.19 montre que la dynamique du retour à l'équilibre présente un caractère oscillatoire. La figure 4.21 présente la fréquence d'oscillation de la goutte en fonction de l'angle statique. La concordance des fréquences indique une dynamique correctement décrite.

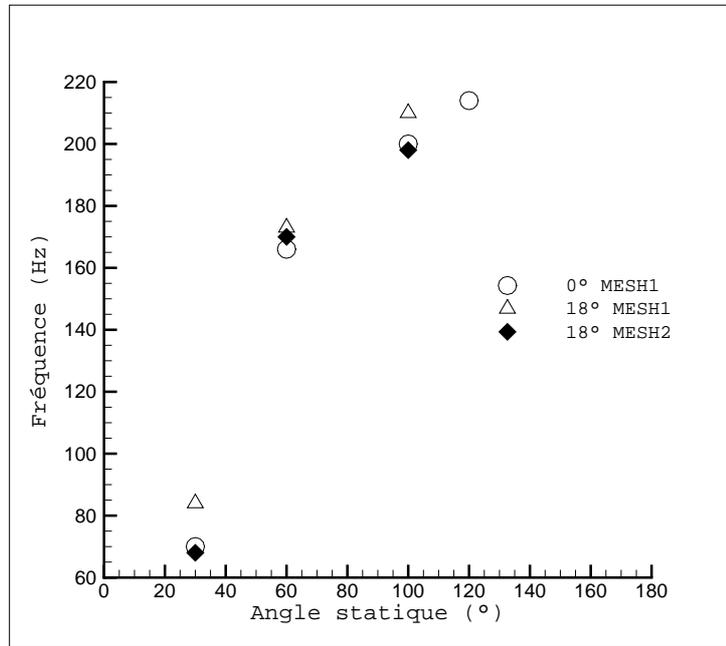


FIGURE 4.21: Fréquence d'oscillation de la goutte en fonction de l'angle statique.

4.4.2.3 Résultats avec gravité

Nous simulons le retour à l'équilibre d'une goutte posée sur une paroi inclinée ($\alpha = 18^\circ$) ou non ($\alpha = 0^\circ$) pour différents nombre d'Eotvos.

Les paramètres physiques sont :

- $\rho_1 = 1.204 \text{ kg.m}^{-3}$
- $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- $\mu_1 = 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$
- $\mu_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$
- $\sigma_{12} = 7.09 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$
- $g_{\vec{n}} = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$
- $\Theta_s = 60^\circ$

La force de gravité est orientée selon la normale à la paroi. Le nombre d'Eotvos est modifié par une variation du rayon de la goutte. Ce choix amène à considérer des tailles de domaine et des discrétisations différentes en fonction du nombre d'Eotvos.

La taille des domaines et les discrétisations utilisées sont présentées dans le tableau 4.1.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 18^\circ$
$E_0 = 0.14$	$R_0 = 0.02/63m$ MESH2 : $L_x = 0.004m \ L_y = 0.001m$ $N_x = 256 \ N_y = 64$	
$E_0 = 1$	$R_0 = 0.055/63m$ MESH2 : $L_x = 0.0055m \ L_y = 0.001375m$ $N_x = 256 \ N_y = 64$	$R_0 = 0.055/63$ MESH3 : $L_x = 0.0055m \ L_y = 0.00274$ $N_x = 512 \ N_y = 256$
$E_0 = 8$	$R_0 = 0.15/63m$ MESH1 : $L_x = 0.1m \ L_y = 0.0125m$ $N_x = 512 \ N_y = 64$	$R_0 = 0.15/63m$ MESH3 : $L_x = 0.09m \ L_y = 0.01123m$ $N_x = 4096 \ N_y = 512$
$E_0 = 14$	$R_0 = 0.2/63m$ MESH1 : $L_x = 0.04m \ L_y = 0.005m$ $N_x = 128 \ N_y = 64$ MESH2 : $L_x = 0.04m \ L_y = 0.01m$ $N_x = 256 \ N_y = 64$	
$E_0 = 32$	$R_0 = 0.3/63$ MESH1 : $L_x = 0.15m \ L_y = 0.01875m$ $N_x = 512 \ N_y = 64$	

TABLE 4.1: Tailles des domaines et discrétisations pour les différents nombres d'Eotvos et inclinaison.

Afin de permettre une meilleure lecture des résultats, nous avons constitué des familles de maillages :

MESH1	MESH2	MESH3
$R_0 < 20\Delta x$	$R_0 > 20\Delta x$	$R_0 > 50\Delta x$

TABLE 4.2: Familles de maillages

Lorsque le nombre d'Eotvos est faible ($E_0 \ll 1$) la forme de la goutte tend vers la forme obtenue pour un nombre d'Eotvos nul.

$$\frac{L}{L_0} \rightarrow 1$$

$$\frac{e}{e_0} \rightarrow 1 \tag{4.42}$$

Lorsque le nombre d'Eotvos est élevé ($Eo \gg 1$) la forme de la goutte s'approche de la forme obtenu pour un nombre d'Eotvos tendant vers l'infini. Les relations suivantes sont déduites des équations 4.37, 4.40 ,4.41 :

$$\frac{L}{L_0} \rightarrow \frac{\sqrt{E_0}}{8 \sin \frac{\Theta_s}{2} \sin \Theta_s} \sqrt{2\pi(\Theta_s - \cos(\Theta_s) \sin(\Theta_s))}$$

$$\frac{e}{e_0} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\Theta_s}{2}}{\sqrt{E_0(1 - \cos \Theta_s)} \sqrt{\frac{\pi}{2(\Theta_s - \cos \Theta_s \sin \Theta_s)}}} \quad (4.43)$$

Les comportements asymptotiques (équations 4.42 et 4.43) ainsi que les résultats des simulations sont reportés en figure 4.22 en ce qui concerne la longueur et en figure 4.23 en ce qui concerne l'épaisseur. Comme il a été évoqué en section 4.4.2.2, l'inclinaison de la paroi génère une augmentation globale de l'erreur sur les paramètres de forme. Ainsi, les résultats pour la paroi inclinée sur le maillage *MESH1* et *MESH2* restent éloignés des tendances asymptotiques et ne sont pas montrés ici. Cependant, l'utilisation d'un maillage plus fin *MESH3* permet d'obtenir des résultats proche des tendances asymptotiques. L'ensemble des résultats décrit correctement ces tendances.

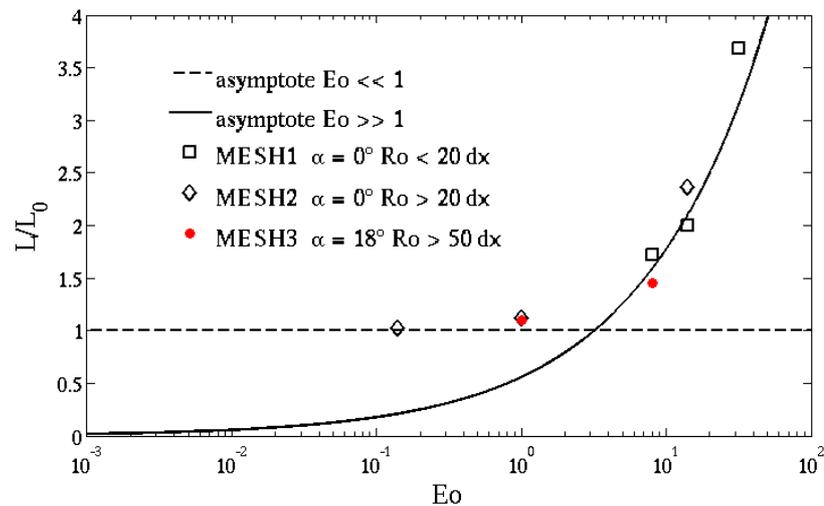


FIGURE 4.22: Longueur adimensionnée de la goutte en fonction du nombre d'Eotvos

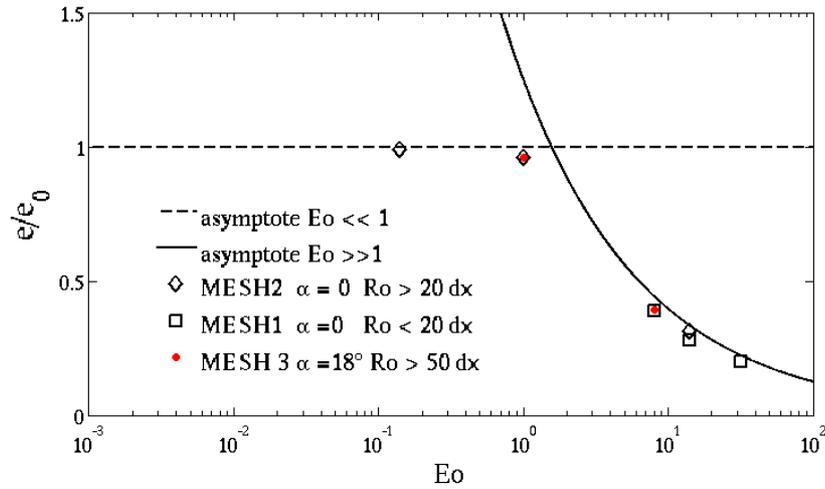


FIGURE 4.23: Épaisseur adimensionnée de la goutte en fonction du nombre d'Eotvos

4.4.3 Angle dynamique

4.4.3.1 Choix du modèle d'angle dynamique

Historiquement, la dynamique de l'angle de contact a été abordée du point de vue de sa dépendance à la vitesse de la ligne de contact. L'évolution des techniques de mesure a permis la mise en évidence d'une dépendance complexe de la dynamique de l'angle à l'écoulement diphasique [12][88][87][109]. Néanmoins, aucune modélisation prédictive de cette dépendance n'est encore disponible. De ce fait, nous nous sommes tournés vers les modélisations ne prenant en compte qu'une dépendance unique à la vitesse de la ligne de contact. Nous présentons en figure 4.24, l'évolution de l'angle dynamique en fonction du nombre capillaire pour les modèles de Jiang, de Bracke et de Cox. Ces modèles sont les plus utilisés dans la littérature [63].

- Modèle de Jiang

$$\Theta_d = \arccos(\cos\Theta_s - (1 + \cos\Theta_s)\tanh(4.96Ca^{0.702})) \quad (4.44)$$

- Modèle de Bracke

$$\Theta_d = \arccos(\cos\Theta_s - (1 + \cos\Theta_s)2.24Ca^{0.54}) \quad (4.45)$$

- Modèle de Cox

$$\Theta_d = (\Theta_s^3 + 9DCa)^{1/3} \quad (4.46)$$

avec $D = \ln\left(\frac{L}{s}\right)$, L longueur caractéristique du système, s longueur de glissement.

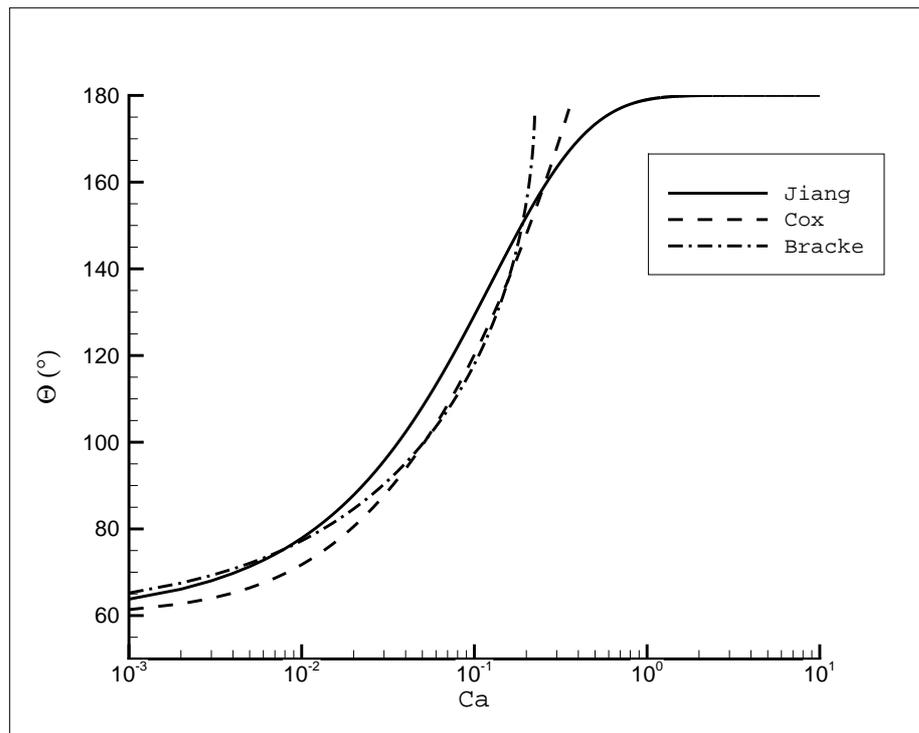


FIGURE 4.24: Évolution de l'angle dynamique en fonction du nombre capillaire pour un angle statique de 60° . Pour le modèle de Cox les paramètres sont $s = 10^{-9}$ et $L = 10^{-5}$ (Dupont et Legendre [26])

Ces modèles ne sont valides que pour des nombres capillaires très inférieurs à 1, qu'ils proviennent d'un ajustement à des valeurs expérimentales (Jiang et Bracke) ou d'un développement asymptotique (Cox). Nous remarquons que les modèles sont similaires. Les modèles de Bracke et de Cox tendent vers des valeurs d'angle dynamique supérieur à 180° ce qui n'est pas physiquement recevable et explique leurs limitations en terme de nombre capillaire. En revanche, la formulation du modèle de Jiang permet de rester dans un cadre physiquement acceptable où l'angle dynamique tend vers l'angle limite de 180° .

Dans le cas de l'injection de liquide dans une buse d'atomisation les nombres capillaires sont beaucoup plus élevé que 1. Les modèles de Bracke et de Cox sont donc à proscrire. La justification d'un modèle comportant un *plateau* peut également s'appuyer sur des considérations expérimentales. Sikalo et al [88] comparent en figure 4.25 leurs résultats expérimentaux d'évolution de l'angle dynamique en fonction du nombre capillaire à des corrélations existantes. L'évolution de l'angle en fonction du nombre capillaire est similaire à une tangente hyperbolique. Nous observons une modification de cette caractéristique pour de fort nombre capillaire. L'expérience conduite par Sikalo et al [88] concerne des impacts de gouttes. La phase initiale d'impact correspondante à de forts nombres capillaires est caractérisée par un entraînement de gaz à l'intérieur de la goutte. Ce phénomène influe sur l'évolution de l'angle dynamique mais ne représente pas une caractéristique des écoulements que nous souhaitons décrire.

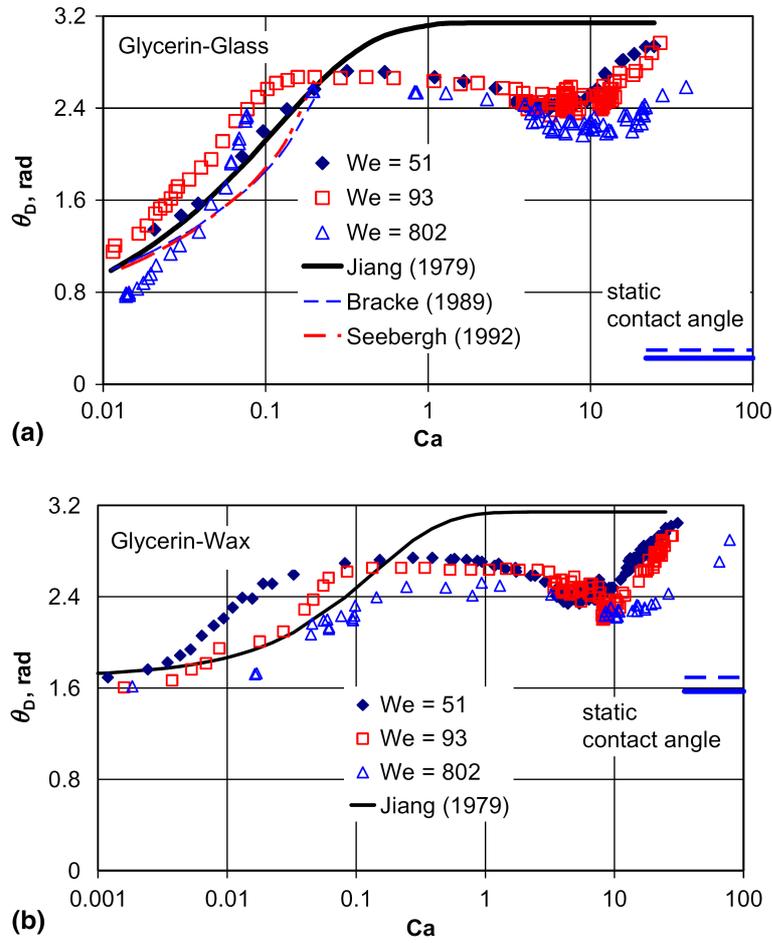


FIGURE 4.25: Évolution de l'angle dynamique en fonction du nombre capillaire. Impact d'une goutte de glycérine sur une paroi horizontale constitué de verre (« glass ») ou de paraffine (« wax »), Sikalo et al [88]

Bien que le modèle de Jiang soit éloigné des résultats expérimentaux, en ne tenant pas compte de la phase initiale d'impact, l'évolution en forme de tangente hyperbolique semble cohérente. Au regard de leurs résultats, il est évident que l'angle de contact n'est pas uniquement une fonction de la vitesse de la ligne de contact, ce sujet a été abordé en section 4.2.3.3. Néanmoins, le modèle de Jiang est le modèle disponible le plus cohérent.

Dans sa formulation originale, le modèle de Jiang comprend deux paramètres a et b (équation (4.47)). Le paramètre a contrôle le nombre capillaire où l'angle dynamique est maximum et le paramètre b la raideur de la tangente hyperbolique. Nous proposons un troisième paramètre R^* prenant en compte le fait que l'angle maximum n'est pas 180° . Pour les résultats de Sikalo et al[88], R^* est estimé à 0.8. Dans une première approche, nous conservons les valeurs de a et b de la formulation originale et nous utilisons R^* égal à 0.8.

$$\Theta_d = a \cos(\cos \Theta_s - (1 + \cos \Theta_s) \tanh(aCa^b)R^*) \quad (4.47)$$

4.4.3.2 Description du cas test

Lavi et Marmur [55] proposent pour des impacts en situation de mouillage partiel, à partir de résultats expérimentaux, une équation de l'évolution temporelle de l'aire de contact à la paroi d'une goutte. Dans le cas d'un mouillage total, c'est à dire quand l'angle de contact statique est nul, la relation communément admise est une loi de puissance :

$$A = K\tau^n \quad (4.48)$$

où A est l'aire de la goutte en fonction du temps, K et n sont des coefficients empiriques et τ est le temps adimensionnel défini par :

$$\tau = \frac{\sigma_{12}t}{\mu_2 V^{\frac{1}{3}}} \quad (4.49)$$

V est le volume de la goutte, σ_{12} la tension de surface entre les deux fluides et μ_2 la viscosité du fluide constituant la goutte.

Les résultats expérimentaux de Lavi et Marmur [55] suggèrent pour une situation de mouillage partiel une évolution de l'aire de la goutte de la forme :

$$\frac{A}{A_f} = 1 - \exp\left(-\frac{K}{A_f}\tau^n\right) \quad (4.50)$$

où A_f est l'aire finale de la goutte.

L'équation (4.50) est utilisée par Dupont et Legendre [26] afin de valider leur approche concernant l'évolution de l'angle dynamique (modèle de Cox). En effectuant des simulations bidimensionnelles, nous ne pouvons comparer directement nos résultats à l'expérience de Lavi et Marmur [55]. Nous faisons l'hypothèse d'une similarité pour le cas 2D du comportement exponentiel de l'évolution de la longueur de contact de la goutte en fonction du temps. Nous transformons l'équation (4.50) pour l'adapter aux dimensions de notre simulation :

$$\frac{L}{L_f} = 1 - \exp\left(-\frac{K}{L_f}\tau^n\right) \quad (4.51)$$

L est la longueur de la goutte en fonction du temps, L_f la longueur finale. S étant la surface de la goutte, τ est défini par :

$$\tau = \frac{\sigma_{12}t}{\mu_2 S^{\frac{1}{2}}} \quad (4.52)$$

La configuration initiale est présentée en figure 4.26. Le centre de la goutte est placée à une distance $0.9R_0$ de la paroi. La longueur de la goutte augmente et l'angle dynamique diminue afin d'atteindre l'état d'équilibre décrit par L_f et Θ_s .

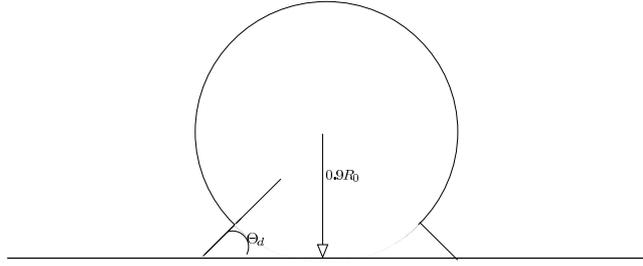


FIGURE 4.26: Configuration initiale de la goutte. R_0 est le rayon initial.

Nous remarquons qu'en absence de gravité la longueur finale de la goutte correspond à la longueur définie par des considérations géométriques abordé en section 4.4.2.1. La nouvelle forme initiale modifie l'expression de R .

$$L_f = 2R\sin(\Theta_s) \quad R = R_0 \sqrt{\frac{\pi - \Theta_0 - \sin\Theta_0\cos\Theta_0}{\Theta_s - \sin\Theta_s\cos\Theta_s}} \quad \Theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(0.9) \quad (4.53)$$

4.4.3.3 Tests préliminaires

Le domaine a une taille $L_x \times L_y = 0.0006 \text{ m} \times 0.0003 \text{ m}$ discrétisé par $N_x \times N_y = 128 \times 64$. La goutte est constituée du fluide 2. L'inclinaison de la paroi par rapport au maillage est nul $\alpha = 0^\circ$ et la paroi est imposée en $\frac{1}{2}$ maille. Les paramètres physiques de la simulation sont :

- $R_0 = 0.004/63 \text{ m}$
- $\rho_1 = \rho_2 = 0.1 \text{ kg.m}^{-3}$
- $\mu_1 = 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- $\mu_2 = 2.519 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- $\sigma_{12} = 1 \text{ N.m}^{-1}$
- $\Theta_s = 45^\circ$
- $S = 1.26 \times 10^{-8} \text{ m}^2$
- $g = 0 \text{ m.s}^{-2}$

En tenant compte de la gravité, le nombre d'Eotvos est de l'ordre de 10^{-9} indiquant que l'étalement de la goutte est piloté par les effets capillaires. La prise en compte de la gravité n'est pas nécessaire ($g = 0 \text{ m.s}^{-2}$). Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'influence du paramètre R^* du modèle de Jiang modifié en section 4.4.3.1. Nous définissons une longueur adimensionnelle L^* :

$$L^* = \frac{L - L_0}{L_f - L_0} \quad (4.54)$$

L_0 est la longueur à l'instant initial, L_f la longueur à l'instant final (équation (4.53)) et L la longueur en fonction du temps.

La figure 4.27 montre l'évolution de la longueur adimensionnelle L^* en fonction du temps adimensionnel τ défini par l'équation (4.52), pour différentes valeurs de R^* .

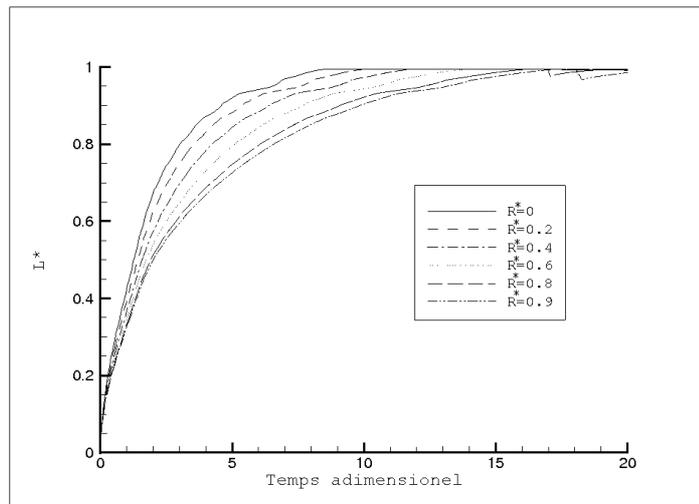


FIGURE 4.27: Influence du paramètre R^*

Une augmentation du R^* produit une augmentation du temps final d'équilibre. La figure 4.28 montre que l'évolution du temps adimensionnel d'équilibre en fonction du paramètre R^* est linéaire. D'un point de vue pratique, cela signifie que ce paramètre peut être évalué empiriquement.

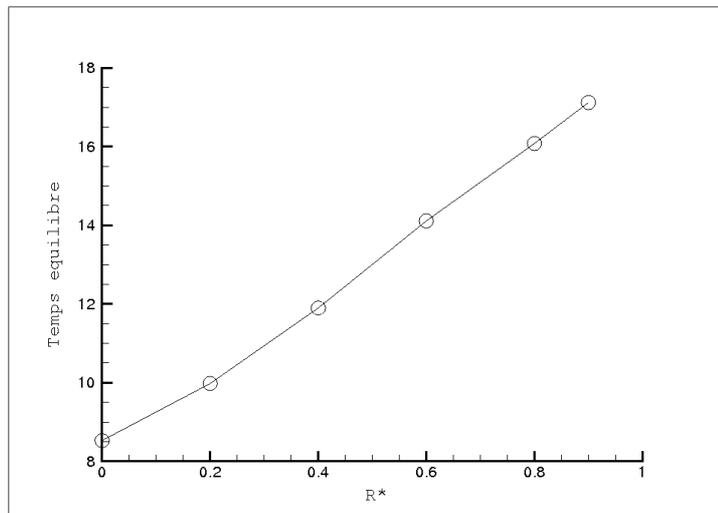


FIGURE 4.28: Évolution du temps d'équilibre en fonction du paramètre R^*

Lorsque le paramètre R^* est nul, la simulation correspond au cas test sur l'angle statique section 4.4.2.1 où la forme initiale est modifiée. Nous notons que pour le cas précédent (figure 4.19) le retour à l'équilibre présentait un caractère oscillatoire. Le nombre de Laplace permet de comparer les effets visco-capillaire aux effets inertio-capillaire :

$$La = \frac{\rho_2 \sigma_{12} R_0}{\mu_2^2} = \frac{Re^2}{We} \quad (4.55)$$

Dans le cas test de la section 4.4.2.1 $La = 45015$ et dans le cas test de cette section $La = 1$. Le caractère oscillatoire du retour à l'équilibre semble dépendre du nombre de Laplace. Nous présentons en figure 4.29 l'évolution de la longueur de contact en fonction du temps adimensionnel pour différents nombre de Laplace. La figure 4.29 montre que nous obtenons un comportement différent en fonction du nombre de Laplace, notamment une diminution de la longueur de la goutte est observable pour le nombre de Laplace égal à $La = 500$.

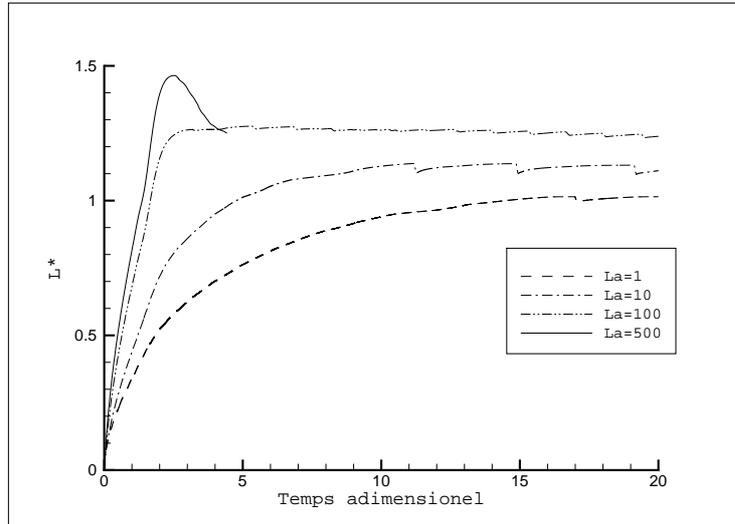


FIGURE 4.29: Dynamique du retour à l'équilibre en fonction du nombre de Laplace. Seule la viscosité du fluide 2 est modifiée : $La = 1$ avec $\mu_2 = 2.519 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $La = 10$ avec $\mu_2 = 7.968 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $La = 100$ avec $\mu_2 = 2.519 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $La = 500$ avec $\mu_2 = 1.13 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

Schématiquement la structure de l'écoulement est présentée en figure 4.30. La paroi contraint la goutte qui est initialement en déséquilibre. Ce déséquilibre engendre des tourbillons qui naissent au niveau des points triples et qui parcourent l'interface fluide de la paroi au sommet et du sommet à la paroi.

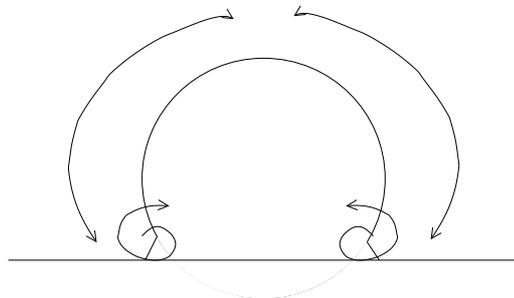


FIGURE 4.30: Schéma de la structure de l'écoulement

La figure 4.31 permet de visualiser cette structure d'écoulement sur des résultats de simulation à différents temps pour $La = 10$. Les parties (a),(b),(c) de la figure montrent la montée des tourbillons vers le sommet et les parties (d),(e),(f) montrent leurs descente.

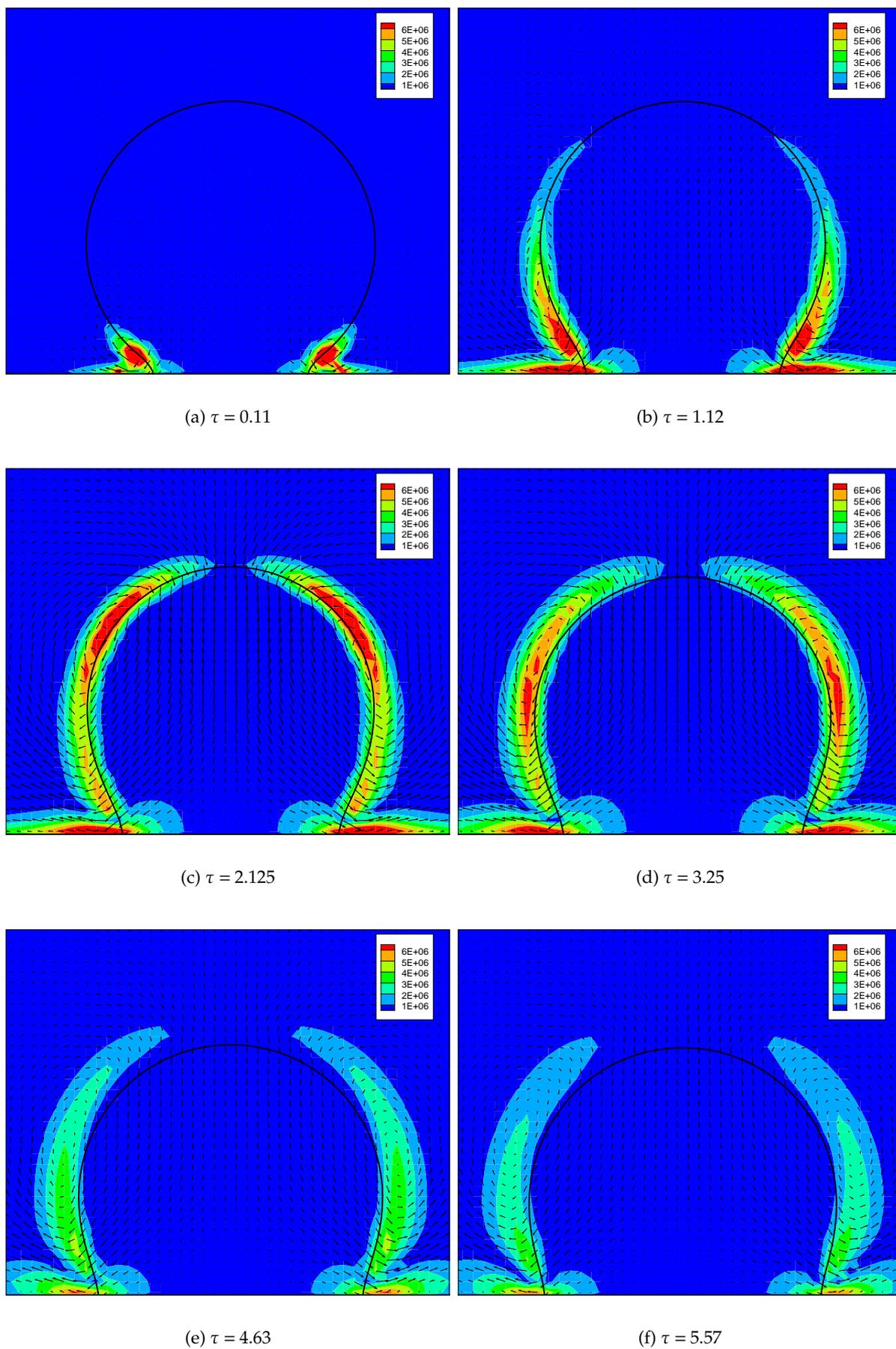


FIGURE 4.31: Évolution temporelle de l'écoulement $La = 10$, champ de vitesse et norme de la vorticité (échelle de couleurs en s^{-2})

Pour $La = 10$ et $La = 500$, la figure 4.32 représente l'énergie cinétique totale du domaine de calcul réduite par sa valeur maximale et nous suivons la vitesse U proche d'un point triple réduite par la vitesse U maximale. Le temps adimensionnel est réduit par le temps où l'énergie cinétique est proche de zéro.

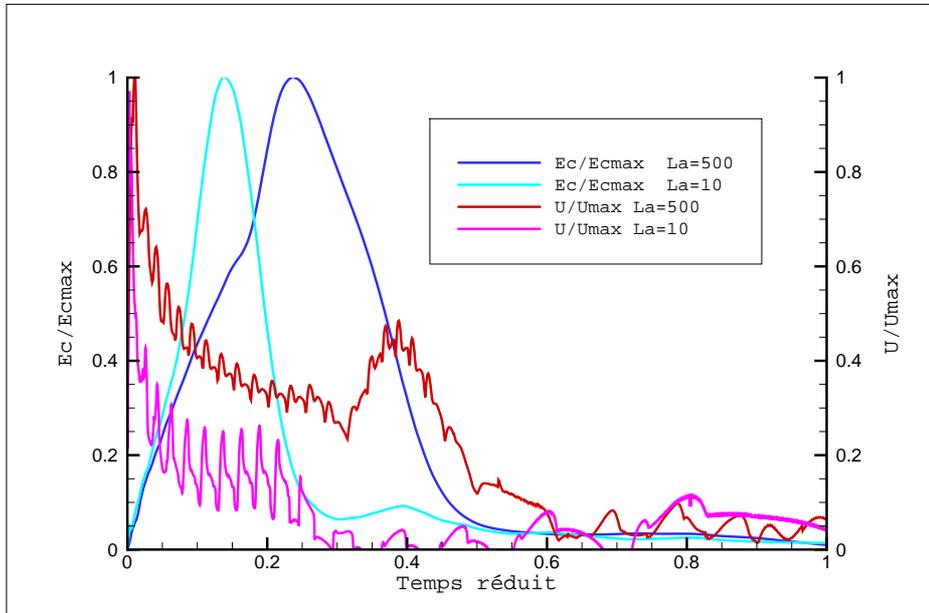


FIGURE 4.32: Évolution de l'énergie cinétique totale réduite et de la vitesse réduite près du point triple en fonction du temps réduit.

L'énergie cinétique permet une approche globale de la dynamique de l'écoulement. La figure 4.32 montre que le transfert visqueux de la quantité de mouvement est plus efficace dans le cas $La = 10$ ce qui réduit le transfert d'énergie visqueuse vers l'énergie de surface. La déformation de l'interface fluide est ainsi moins importante dans le cas $La = 10$ que dans le cas $La = 500$ comme l'indique la figure 4.29. Le système pour le cas $La = 10$ est visqueux au contraire du système pour le cas $La = 500$ qui est inertiel.

Le suivi temporel de la vitesse U proche d'un point triple est une image de la dynamique du point triple. Nous constatons dans le cas inertiel une augmentation de la vitesse au voisinage du point triple. Cette accroissement de la vitesse du point triple est à relier à la structure de l'écoulement et correspond au retour des tourbillons vers la ligne triple. Le cas étant inertiel, les gradients de vitesses sont encore importants et engendrent une accélération de la ligne triple. Cette accélération est en désaccord avec une évolution temporelle exponentielle de longueur de contact. Nous constatons sur la figure 4.29 pour $La = 500$ un phénomène de recollement, c'est à dire une rétractation de la longueur de la goutte.

Sikalo et al [88] montrent l'effet de la viscosité du liquide sur l'évolution du diamètre d'impact en fonction du temps en figure 4.33. Le phénomène de recollement est bien visible sur l'impact de la goutte d'eau où le nombre de Laplace vaut 198283. Un faible recollement est observé pour l'impact de la goutte de glycérine où $La = 14$.

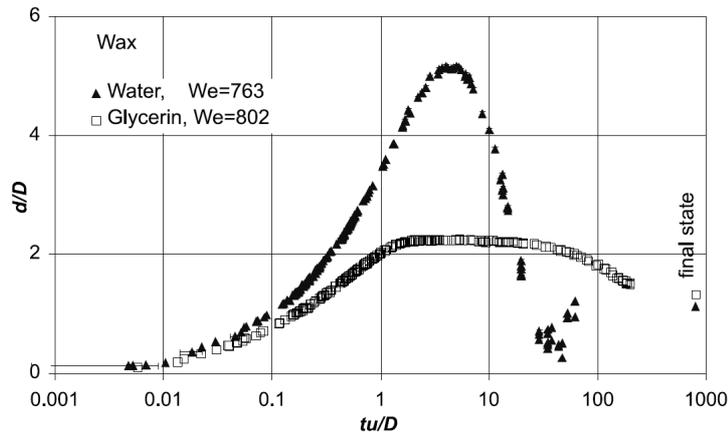


FIGURE 4.33: Effet de la viscosité sur l'évolution temporelle du diamètre d'impact. Glycérine $Re = 107$ soit $La = 14$ et Eau $Re = 12300$ soit $La = 198283$ impactant sur une paroi constituée de parafine. Sikalo et al [88]

Nos résultats présentés sous la même forme que Sikalo et al en figure 4.34 montrent le même effet du nombre de Laplace.

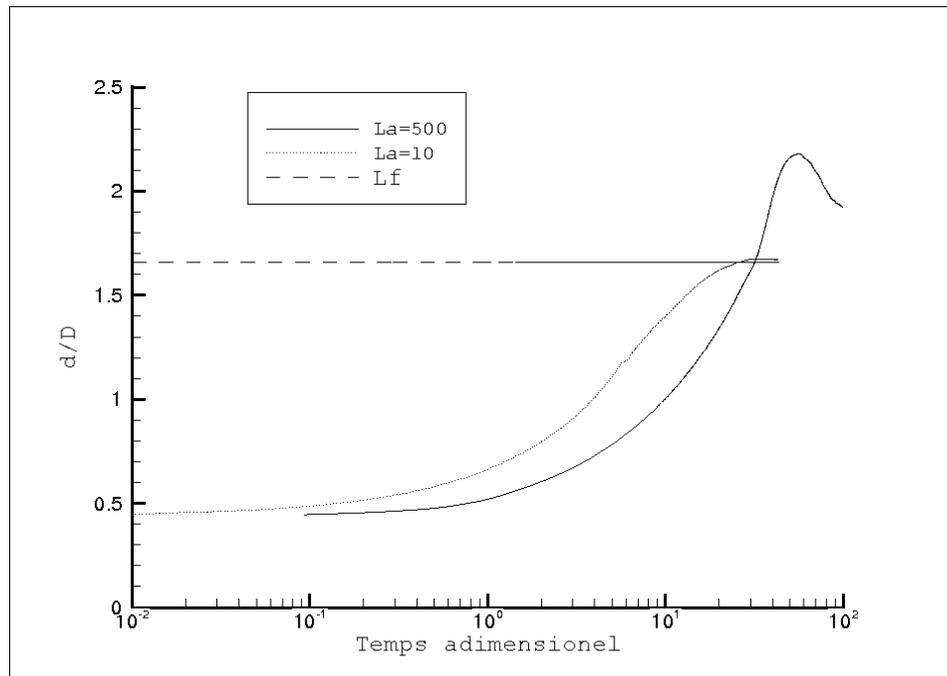


FIGURE 4.34: Dynamique du retour à l'équilibre en fonction du nombre de Laplace

En conclusion, il existe une limitation en terme de nombre de Laplace de la relation (4.50) proposée par Lavi et Marmur [55]. Nous ne pouvons conclure sur les bornes de cette limitation au delà de la modélisation bi-dimensionnelle cartésienne proposée. Dans notre cas, le nombre de Laplace doit être inférieur à 100 et dans la suite de ce travail le nombre de Laplace $La = 10$ est utilisé.

4.4.3.4 Résultats

Les paramètres physiques, le domaine et la discrétisation de cette section correspondent à ceux de la section 4.4.3.3 où seule la viscosité du fluide 2 est modifiée $\mu_2 = 7.968 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Le nombre de Laplace est de 10. D'après les tests préliminaires, il s'agit d'un cas visqueux où l'évolution de la longueur de contact en fonction du temps présente un caractère exponentiel.

La figure 4.35 présente l'évolution de la longueur adimensionnelle L^* de la goutte en fonction du temps adimensionnel. Le modèle adapté de Lavi et Marmur [55] (équation 4.51) avec $K = 0.28L_f$ et $n = 1.35$ est globalement en accord avec le résultat de la simulation. Ce choix de paramètres pour le modèle exponentiel défavorise l'accord du modèle avec la partie initiale. Il apparaît que la totalité de la dynamique n'est pas décrite par ce modèle. La théorie hydrodynamique et la théorie de cinématique moléculaire démontrent pour le mouillage total qu'il existe plusieurs régimes de la loi de puissance $A = K\tau^n$ avec une première phase où $n \approx 1/7$ et une seconde où $n \approx 1/10$. Les résultats expérimentaux de Roques-Carmes et al [80] confirment l'existence de ces différents régimes. La phase initiale décrite par la simulation a une évolution temporelle plus rapide que le choix des paramètres du modèle permettant la description de la seconde partie de la dynamique. Ce résultat est en accord avec la variation qualitative de l'évolution temporelle des régimes pour la loi de puissance.

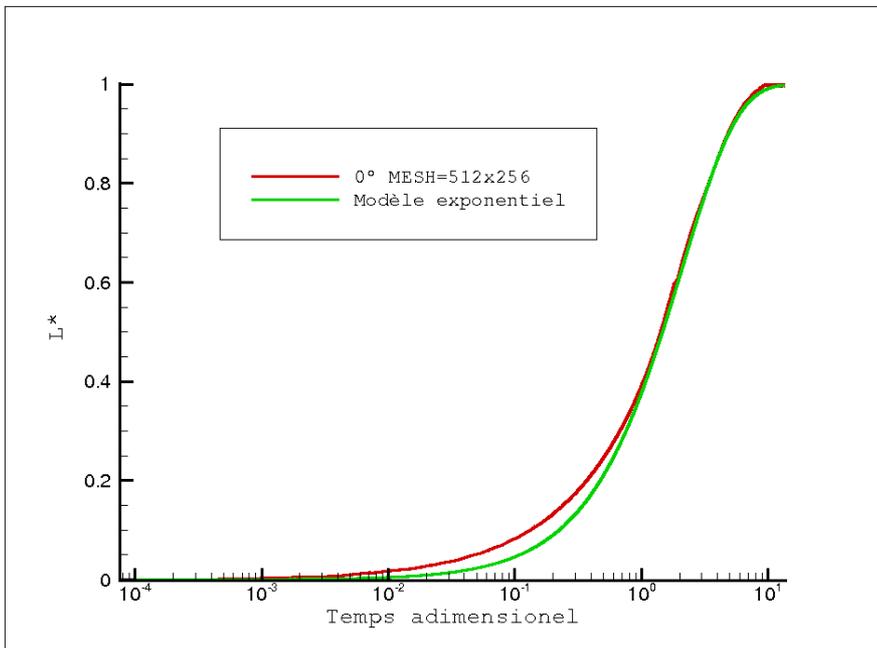


FIGURE 4.35: Évolution de la longueur adimensionnelle L^* de la goutte en fonction du temps adimensionnel τ ($\alpha = 0^\circ$). Représentation de l'adaptation du modèle de Lavi et Marmur [55] (équation 4.51) avec $K = 0.35L_f$ et $n = 1.35$

La paroi est inclinée par rapport au maillage d'un angle $\alpha = 5^\circ$. Nous comparons les résultats pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 5^\circ$ en figure 4.36. La majeure partie de la dynamique est décrite de manière semblable entre les deux cas d'inclinaison. La valeur de la longueur finale L_f est d'autant affectée par l'erreur numérique que la vitesse de la ligne triple devient faible.

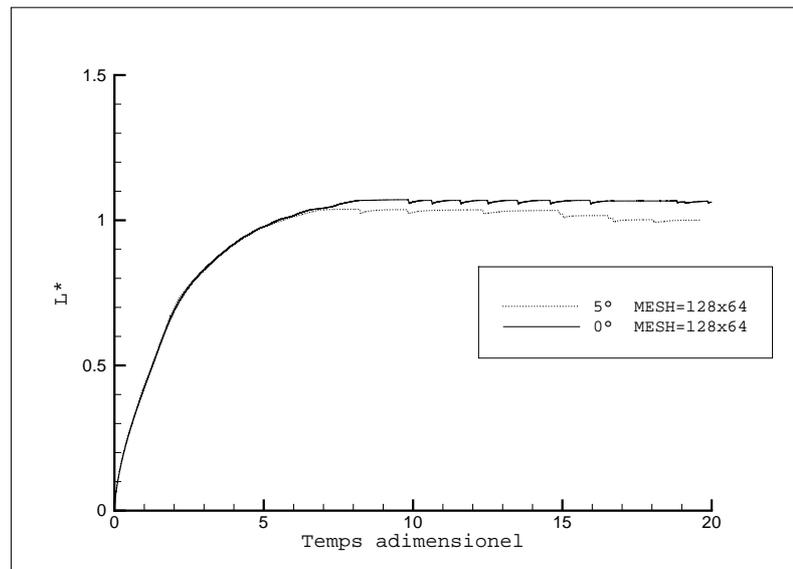


FIGURE 4.36: Évolution de la longueur adimensionnelle L^* de la goutte en fonction du temps adimensionnel τ pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 5^\circ$.

La figure 4.37 montre l'évolution de l'angle dynamique Θ_d en fonction du temps adimensionnel τ pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 5^\circ$. L'angle dynamique décroît jusqu'à atteindre la valeur de l'angle statique $\Theta_s = 45^\circ$. Globalement l'évolution de l'angle dynamique est semblable.

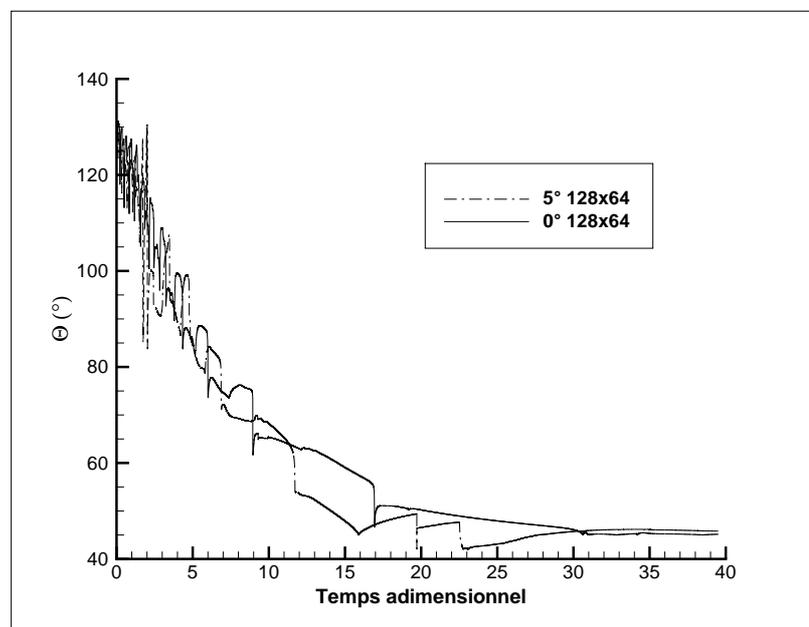


FIGURE 4.37: Évolution de l'angle dynamique Θ_d en fonction du temps adimensionnel τ pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 5^\circ$.

4.5 Conclusion

La méthode développée a démontré sa capacité à traiter un domaine irrégulier dans le cadre d'écoulements diphasiques. Une description dynamique de l'angle a été implantée et présente un bon comportement. Bien qu'une perte de résolution soit observée pour des bords fortement irréguliers ($\alpha \neq 0$), la méthode permet de retrouver un comportement global proche des solutions analytiques ou de la littérature. Un raffinement du maillage permet une augmentation de la résolution ce qui indique un bon comportement numérique de la méthode. Un défaut concernant la longueur caractéristique d'imposition de l'angle a été relevé. L'angle numérique proposé par Afkhami et al [1] peut être une réponse à ce défaut. Néanmoins, la dynamique globale est correctement reproduite. Il n'est pas apparu que le développement d'un angle numérique soit prioritaire tant la dépendance de l'angle dynamique aux paramètres et aux caractéristiques de l'écoulement pose encore question.

Chapitre 5

Applications

5.1 Introduction

Les chapitres 3 et 4 ont présenté la validation de la méthode de frontière immergée dans le cadre d'écoulements monophasiques (2D,3D) et d'écoulements diphasiques (2D). La version 2D diphasique est un outil numérique capable de simuler dans un domaine unique l'écoulement interne et l'écoulement externe produit. Nous proposons d'étudier l'influence de l'écoulement interne sur la déstabilisation du système fluide. Une première configuration est un injecteur convergent pour lequel des données expérimentales sont disponibles (Scholz *et al.* [85]) et qui possède une géométrie de forme complexe. Une seconde configuration est un injecteur parallèle dont l'orifice présente différents rapports de longueur sur diamètre ($L/D = 11.4$ et $L/D = 1$). Cette configuration nous permettra d'étudier l'influence de l'établissement du profil de vitesse sur les mécanismes de rupture primaire. Enfin, nous utilisons la version 3D monophasique pour simuler la configuration triple disque pour laquelle des données expérimentales sont disponibles (Cousin *et al.* [21]).

5.2 Écoulements 2D

5.2.1 Injecteur convergent

5.2.1.1 Simulation : paramètres physiques et numériques

Scholz *et al.* [85] propose une étude expérimentale de l'interaction entre l'écoulement interne et la déstabilisation du système fluide produit pour une gamme de nombres de Reynolds comprise entre 3500 et 23400. L'écoulement interne de trois injecteurs transparents constitués de quartz synthétique est analysé grâce à la technique de vélocimétrie par image de particule (PIV). À partir de 80 à 100 mesures de la vitesse axiale instantanée, les profils de vitesses moyennes et de fluctuations sont calculés au voisinage de la sortie des injecteurs. Les rapports de forme élevés des buses et des nappes planes produites autorisent une simulation bidimensionnelle. La configuration que nous avons choisie est l'injecteur référencé C qui est une buse convergente présentant une dissymétrie sur la longueur du canal plan de sortie d'environ 0.075 mm [85]. La figure 5.1 montre la géométrie adoptée pour la simulation.

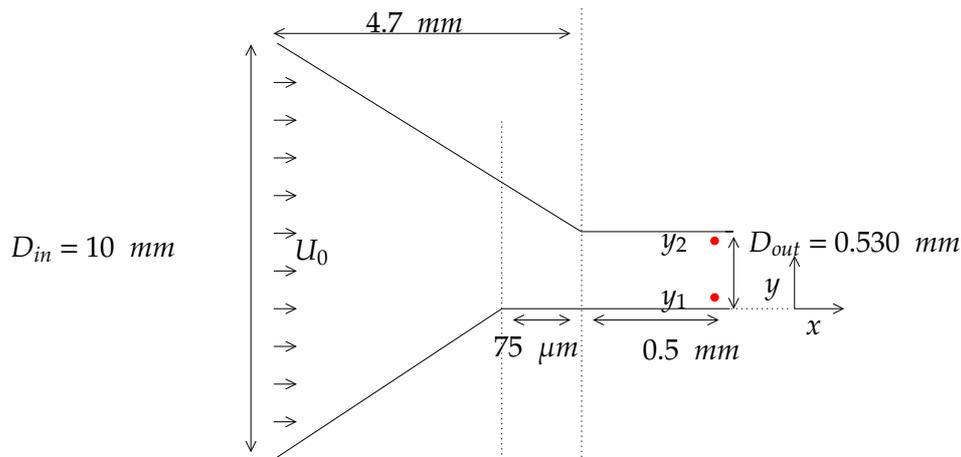


FIGURE 5.1: Configuration du convergent (défaut d'échelle)

Nous définissons la paroi basse de sortie de l'injecteur comme étant l'origine du repère (x, y) . Nous définissons deux points particuliers dans l'écoulement -points rouge sur la figure 5.1- relativement à ce repère $y_1 = 1.5855 \times 10^{-5} \text{ m}$ et $y_2 = 5.14 \times 10^{-4} \text{ m}$. Ces deux points étant placés au voisinage du plan de sortie de l'injecteur et près des parois, l'évolution temporelle de leurs vitesses sera un indicateur pertinent pour connaître l'effet de l'écoulement interne sur la déstabilisation du système liquide.

Conformément aux données de Scholz et *al.*, les paramètres physiques sont :

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_1 &= 0.73 \times 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \rho_2 &= 1.204 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_2 &= 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \sigma_{12} &= 0.0709 \text{ N.m}^{-1} \\
 U_0 &= 0.2555 \text{ m.s}^{-1} \\
 L_x &= 0.02 \text{ m} \\
 L_y &= 0.02 \text{ m} \\
 D_{out} &= 530 \times 10^{-6} \text{ m} \\
 D_{in} &= 0.01 \text{ m} \\
 \theta &= 120^\circ \\
 Re &= 3500
 \end{aligned}$$

(5.1)

Les indices 1 et 2 désignent respectivement les propriétés du liquide et du gaz. D_{out} est le diamètre de sortie de l'injecteur, L_x et L_y la taille du domaine de calcul et U_0 est la vitesse en entrée du convergent supposée constante. D_{in} est le diamètre d'entrée de l'injecteur. σ_{12} est le coefficient de tension de surface. Au début de la simulation, l'interface liquide/gaz est placée à

$1.5\Delta x$ de l'entrée du domaine et l'avancée de l'interface au sein de l'injecteur est suivi. La figure 5.2 présente l'avancement de l'interface liquide/gaz au sein de l'injecteur. L'angle de contact entre les parois et l'interface liquide/gaz est supposé constant et est fixé arbitrairement à 120° . Nous avons choisi une valeur élevée afin de tenir compte de l'augmentation de la valeur de l'angle de contact avec la vitesse de la ligne de contact.

Le nombre de Reynolds est défini classiquement par la relation :

$$Re = \frac{\rho_1 U_0 D_{in}}{\mu_1} \quad (5.2)$$

Les conditions limites de la simulation sont résumées dans le tableau 5.1.

	Entrée	Sortie	Haut	Bas
Vitesse	$\vec{v} = U_0 \vec{x}$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	$p = 0$	$p = 0$	$p = 0$

TABLE 5.1: Conditions limites de la simulation

L'estimation de la discrétisation spatiale requise se base sur les relations données par Sander et Weigand [83].

$$\lambda_k = \frac{L_t}{Re_t^{3/4}} \quad Re_t = \frac{\rho_1 u' L_t}{\mu_1} \quad (5.3)$$

avec

$$L_t \approx \frac{D_{in}}{10} \quad u' \approx 0.1 \frac{D_{in} U_0}{D_{out}} \quad (5.4)$$

L'estimation de la plus petite échelle de dissipation λ_k donne $3.68 \mu m$. Nous utilisons un maillage $N_x \times N_y = 2048 \times 2048$ pour un domaine $L_x \times L_y = 0.02 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}$, soit une taille de maille $\Delta x = \Delta y = 9.77 \mu m$. La taille de maille de la simulation est assez proche de l'estimation de λ_k ce qui permet d'assurer une représentation correcte de la turbulence. Les calculs ont été effectués sur Babel à l'IDRIS sur 2048 processeurs. Le temps de calcul est d'environ 20 heures pour 8000 pas de temps. Le nombre total de pas de temps est de 480000. Avant d'initier ce calcul, nous avons effectué une estimation de l'efficacité de la parallélisation. Ainsi, sur un maillage 4096×2048 dans la configuration d'une goutte sur un plan incliné avec gravité, une très bonne efficacité de 0.91 est observée entre 32 et 2048 processeurs.

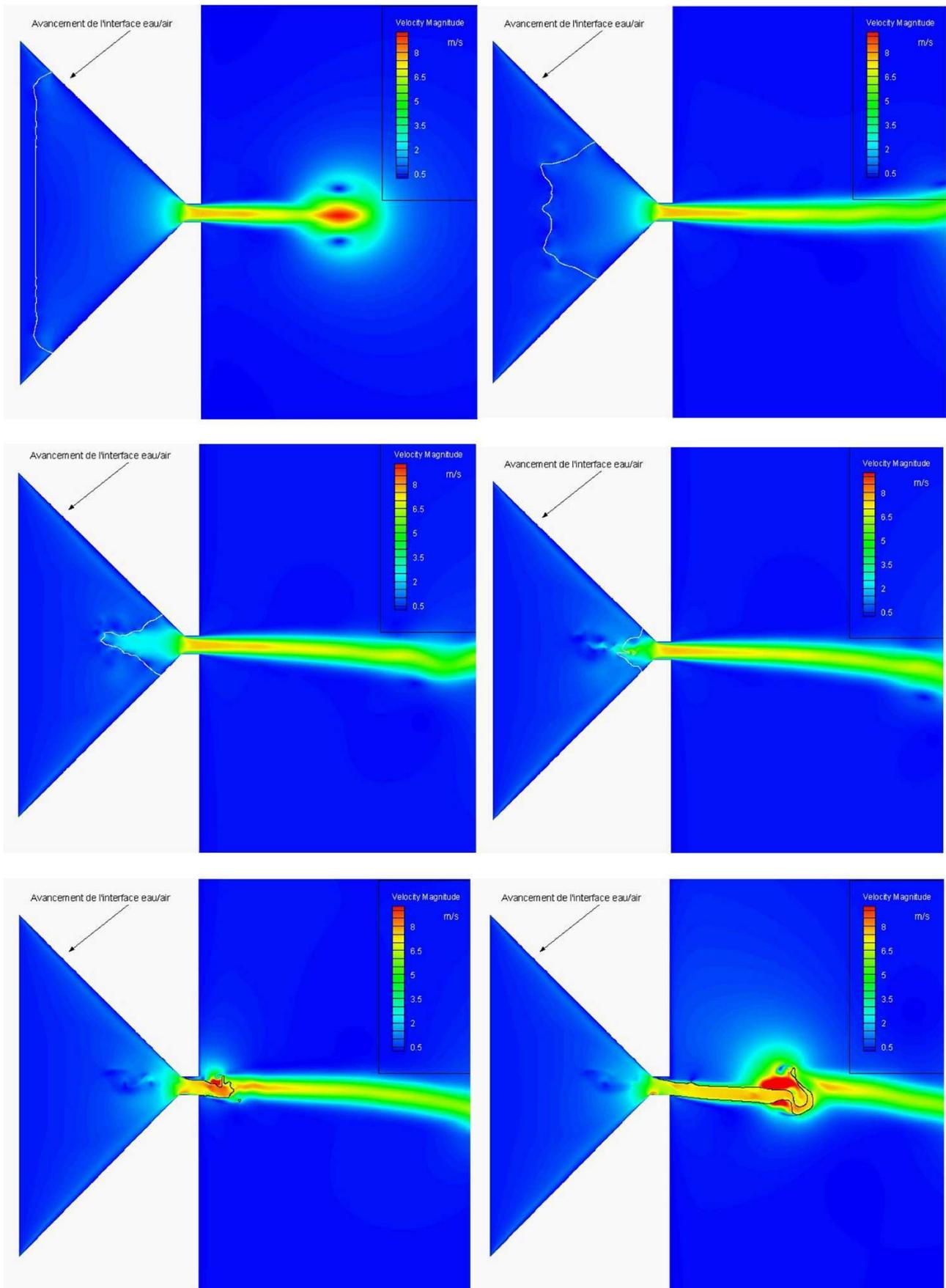


FIGURE 5.2: Suivi de l'avancée de l'interface au sein de l'injecteur et contours de la norme de vitesse (échelle de couleur en $m.s^{-1}$)

5.2.1.2 Caractérisation de l'écoulement

La figure 5.3 montre un champ de pression instantané représentatif de la topologie de l'écoulement à la bifurcation convergent/canal. Nous observons un gradient de pression négatif dans la partie convergente de l'injecteur. La diminution de la section engendre, de par la conservation de la masse, une augmentation de la vitesse. Cette augmentation se traduit sur une ligne de courant par une diminution de la pression. Deux zones de faibles pression sont visibles en aval du changement d'orientation des parois. Ces zones de dépressions engendrent un décollement des couches limites.

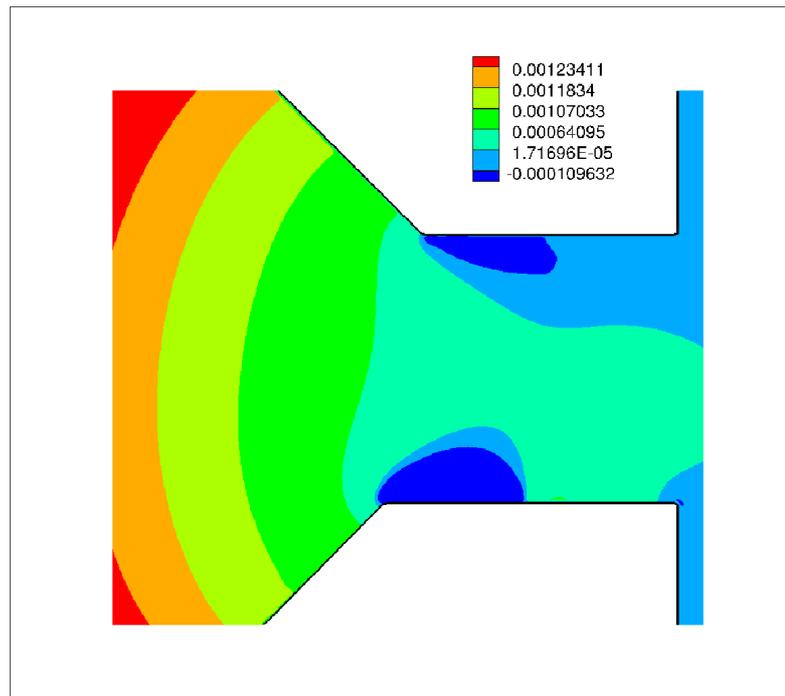


FIGURE 5.3: Champ de pression instantané dans le canal de sortie de l'injecteur (en Pa)

Les figures 5.5 et 5.4 montrent respectivement la norme de la vitesse et la norme de la vorticité du champ de vitesse instantané. Les zones de vorticité élevée correspondent à la présence de la couche limite. Le champ de vorticité révèle également le décollement des deux couches limites haute et basse et un recollement de la couche limite basse. Ces observations sont les mêmes que celles émises par Scholz *et al.*.

L'absence de recollement de la couche limite haute implique la création d'une grande zone de recirculation en aval de la bifurcation. Cette zone à faible vitesse engendre une stagnation de l'interface liquide/gaz au sein de l'injecteur ; cette interface est représentée par un trait noir sur les figures 5.5 et 5.4. Ainsi, dans ce cas d'étude l'écoulement dans la buse est aussi diphasique en régime permanent. Ce phénomène de *flip* n'est observé par Scholz *et al.* que pour leurs expériences à $Re \geq 3800$. Les seuils de transitions des régimes d'écoulement sont fortement dépendants des conditions expérimentales (état de surface, température, pression ambiante). Notre simulation ne peut reproduire ce type de conditions expérimentales, dès lors il est naturel d'obtenir numériquement un seuil de transition légèrement différent de l'expérience.

Néanmoins, la naissance du phénomène de *flip* observé expérimentalement se situe dans la gamme de transition $Re = 3500 - 3800$, gamme assez réduite pour valider le comportement numérique observé.

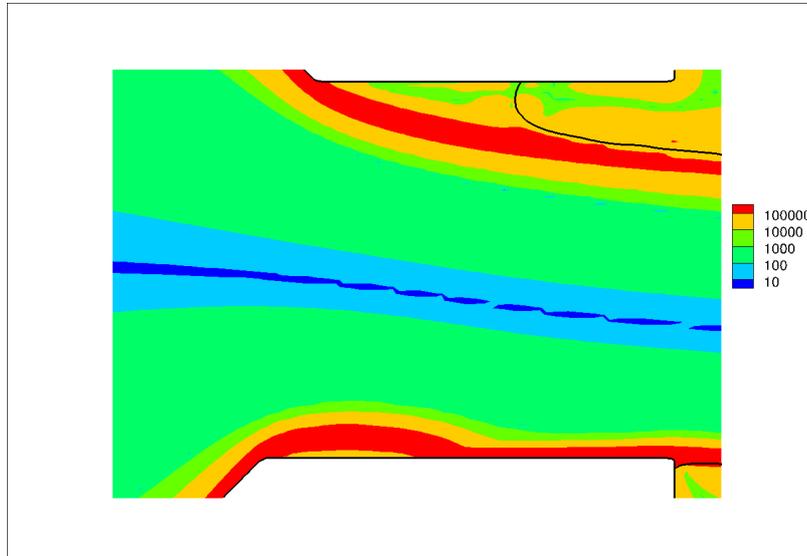


FIGURE 5.4: Norme de la vorticité sur un champ instantané dans le canal de sortie de l'injecteur (en s^{-1})

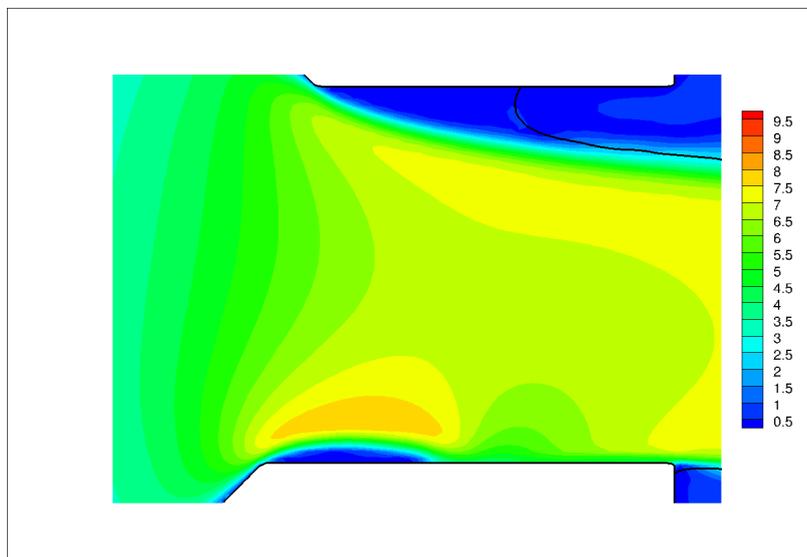


FIGURE 5.5: Norme de la vitesse sur un champ instantané dans le canal de sortie de l'injecteur (en $m.s^{-1}$)

La figure 5.5 montre une norme de la vitesse élevée près de la paroi basse. En outre, le comportement instationnaire observé présente une évolution temporelle périodique. Sur la figure 5.6, le suivi temporel de la vitesse au point $y_1 = 1.5855 \times 10^{-5} \text{ m}$ montre une oscillation basse fréquence à $f_{basse} \approx 540\text{Hz}$ et quelques fréquences plus élevées sur cette oscillation sont distinguables. Le suivi temporel de la vitesse au point $y_2 = 5.14 \times 10^{-4} \text{ m}$ présente la même basse fréquence et des hautes fréquences clairement visibles. Les deux signaux présentent une distribution fréquentielle équivalente. Cependant, la symétrie de la fluctuation (skewness) basse fréquence par rapport à la moyenne est différente. Au point y_1 , le skewness est faible, la fluctuation basse fréquence s'organise symétriquement par rapport à la moyenne. Au point y_2 , le skewness est négatif, la fluctuation basse fréquence s'organise dissymétriquement par rapport à la moyenne en valeurs plus faibles.

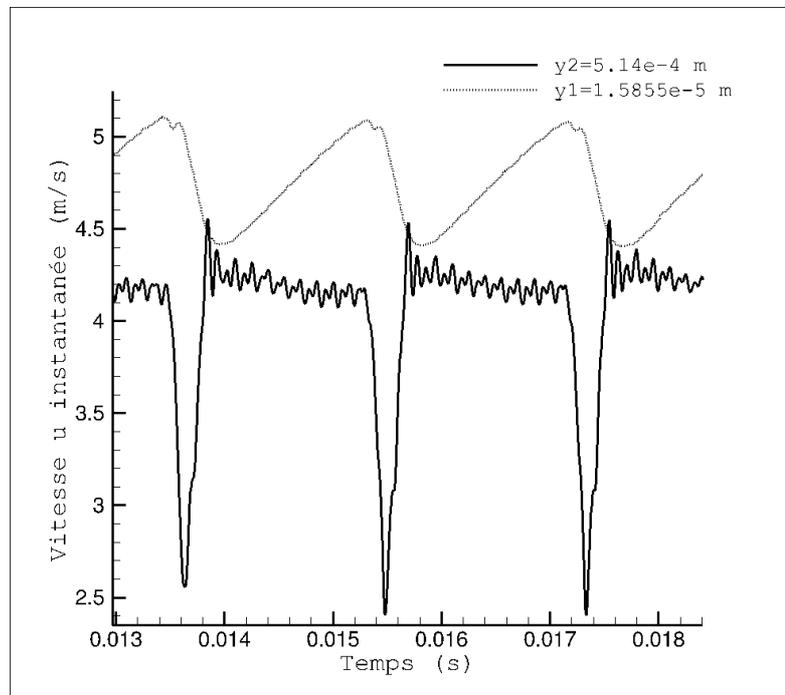


FIGURE 5.6: Suivi temporel des vitesses axiales pour les points y_1 et y_2

La figure 5.7 présente l'évolution temporelle de la zone de décollement de la couche limite basse nommée zone A dans ce qui suit. Quelques iso-valeurs des contours de la norme de la vitesse (en $m.s^{-1}$) sont représentées. En se référant au repère marquant la longueur minimale de la zone A, on observe que l'augmentation de taille de la zone A est lente ((a), (b), (c), (d), (e) avec $\Delta t = 1.36 \times 10^{-3}s$) alors que sa rétractation est plus soudaine ((f) avec $\Delta t = 3.7 \times 10^{-4}s$). Au voisinage de la couche limite décollée haute, la norme de la vitesse chute brutalement pendant la phase de rétractation. La vitesse instantanée en y_1 (figure 5.6) varie plus faiblement. Le battement de la zone A est attribué à la dissymétrie des bifurcations convergent/canal. À la sortie du convergent, le profil de vitesse entame sa relaxation en écoulement de canal mais la dissymétrie ne permet pas une relaxation stable du profil.

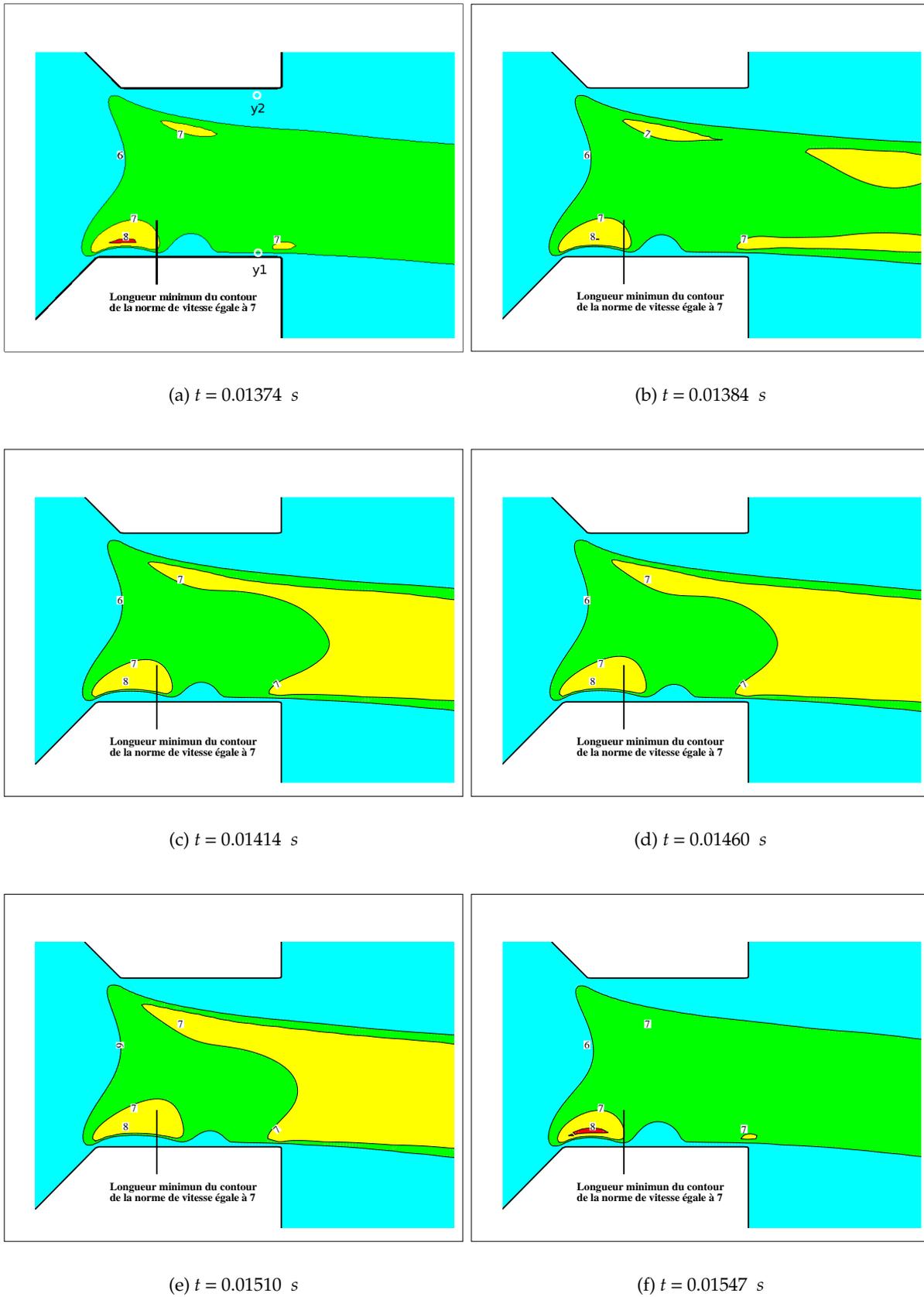


FIGURE 5.7: Battement de la zone de décollement de la couche limite basse (norme de la vitesse en $m.s^{-1}$)

5.2.1.3 Comparaison avec l'expérience de Scholz *et al.* [85]

La comparaison de la simulation avec les profils de vitesses expérimentaux souffre du déclenchement précoce du phénomène de *flip* dans le cas numérique. Ceci entraîne un décalage du profil de vitesse moyen vers la paroi basse. La figure 5.8 montre les profils de vitesse moyenne axiale calculés et mesurés. La vitesse moyenne est adimensionnalisée par la vitesse moyenne de la ligne centrale et la hauteur est adimensionnalisée par la hauteur totale (convention de Scholz *et al.*). Nous observons sur les données expérimentales les prémices de la zone de *flip* avec une vitesse moyenne axiale négative sur 1/20e de la hauteur totale. La simulation montre une zone de *flip* plus épaisse avec une vitesse moyenne axiale négative sur 1/10e de la hauteur totale. Bien qu'une comparaison point à point soit impossible puisque l'écoulement simulé a passé la transition au phénomène de *flip*, le profil moyen extrait de la simulation est consistant avec le profil expérimental.

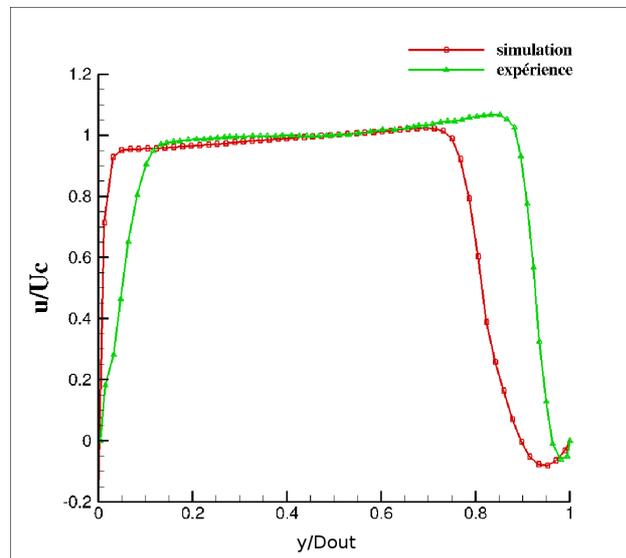


FIGURE 5.8: Vitesse axiale moyenne adimensionnalisée en fonction de la hauteur adimensionnalisée dans le canal

La figure 5.9 présente le profil des fluctuations de la vitesse axiale. La fluctuation de la vitesse axiale est adimensionnalisée par la vitesse moyenne de la ligne centrale et la hauteur est adimensionnalisée par la hauteur totale. Nous observons un décalage du pic de fluctuation proche de la paroi haute, ce qui est en adéquation avec l'apparition du phénomène de *flip*. Globalement, les fluctuations de l'écoulement simulé sont en deçà des observations expérimentales. Dans une communication précédente où le système de mesure est présenté [84], les auteurs précisent que les taux de turbulence (u'/Uc) inférieurs à 0.05 sont dans la gamme de l'incertitude de mesures (dynamique de mesure). Seules les fluctuations axiales mesurées dans la couche limite sont représentatives [84]. Nous notons l'absence de pic prononcé de fluctuations sur la paroi basse. Bien que les profils des fluctuations présentent des similitudes, l'analyse est biaisée d'une part par l'apparition du phénomène de *flip* dans le cas numérique et d'autre part par le faible échantillonnage expérimental des mesures PIV (80 à 100 champs).

De plus, le premier point de maillage y_{first} est situé légèrement en dehors de la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) [74] pour la paroi basse :

$$y^+ = \frac{U_p y_{first}}{\nu_2} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_2}} y_{first}}{\nu_2} \approx 6.38 \quad (5.5)$$

avec

$$\tau_p = \mu_2 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_{first}} \quad (5.6)$$

τ_p est estimé à partir de la vitesse moyenne au point y_{first} . Nous notons qu'à la paroi haute la présence du gaz permet de rester dans la sous-couche visqueuse $y^+ \approx 0.39$.

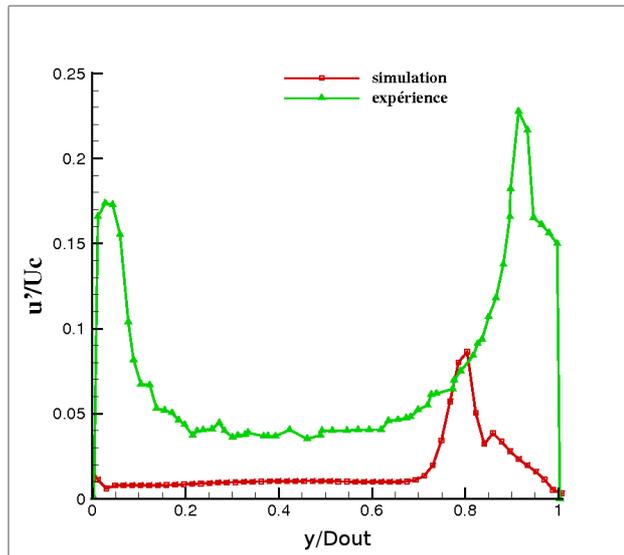


FIGURE 5.9: Fluctuations de la vitesse axiale moyenne adimensionnée en fonction de la hauteur adimensionnée dans le canal

Le faible échantillonnage des mesures PIV, la problématique de la dynamique de mesure et la situation du premier point de maillage y_{first} en dehors de la sous-couche visqueuse ne permettent pas de conclure sur les fluctuations. L'ensemble des remarques précédentes ne sont pas limitatives pour l'analyse spectrale proposée dans la suite de ce travail. Nous nous intéressons aux liens entre l'écoulement interne simulé et l'écoulement externe simulé de sorte que l'analyse est cohérente dans sa structure causale interne/externe.

5.2.1.4 Analyse spectrale des écoulements interne et externe

À partir du suivi temporel des vitesses aux points $y_1 = 1.5855 \times 10^{-5} \text{ m}$ et $y_2 = 5.14 \times 10^{-4} \text{ m}$ définis à la section 5.2.1.1, nous calculons le carré du module de la transformée de Fourier du suivi temporel de vitesse divisée par le temps d'intégration T (densité spectrale de puissance

PSD). Ne disposant d'aucun signal temporel pour caractériser la déformation de l'interface, nous extrayons le contour de l'interface à partir de la valeur nulle de la fonction distance liquide/gaz. Puisque nous avons mis en évidence une dissymétrie de l'écoulement fluide en sortie de buse, nous distinguons le signal spatial d'interface haute du signal d'interface basse. Nous repassons dans le domaine fréquentiel en divisant la coordonnée spatiale par la vitesse débitante en sortie de l'injecteur. La présence du phénomène de *flip* réduit la section de passage du liquide et la vitesse débitante vaut alors $U_{out\,nozzle} = 6.08 \text{ m.s}^{-1}$. Une *PSD* moyenne est calculée sur la collection de signaux d'interface pseudo-temporels.

La figure 5.10 montre la densité spectrale de puissance des fluctuations de vitesses et du signal d'interface pseudo-temporel au point y_2 (interface haute). La distribution fréquentielle de puissance des signaux de vitesses montre une basse fréquence à $f_0 \approx 550 \text{ Hz}$, faiblement déterminée par le manque d'événement dans la simulation, mais clairement identifiable sur la figure 5.6. Cette fréquence correspond au battement de la zone de décollement basse zone *A*. Les autres fréquences observables sur la *PSD* en figure 5.10 sont :

$$f_1 \approx 6.1 \text{ kHz}$$

$$f_2 \approx 12 \text{ kHz}$$

$$f_3 \approx 19 \text{ kHz}$$

La *PSD* du signal d'interface présente les mêmes fréquences. L'organisation de la déstabilisation du système liquide répond donc à l'excitation fréquentielle de l'écoulement interne.

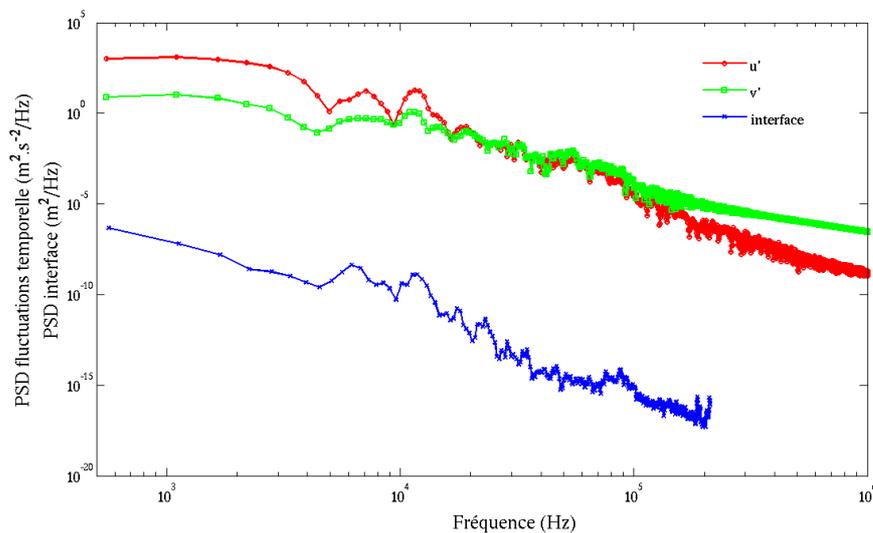


FIGURE 5.10: Densité spectrale de puissance des fluctuations de vitesse au point $y_2 = 5.14 \times 10^{-4} \text{ m}$ et du signal d'interface pseudo-temporel ($\Delta t_{simulation} \approx 10^{-8} \text{ s}$)

La figure 5.11 montre la densité spectrale de puissance des fluctuations de vitesses et du signal d'interface pseudo-temporel au point y_1 (interface basse). La distribution fréquentielle de puissance des signaux de vitesses est la même que pour l'interface haute. Cependant, la

densité spectrale est légèrement plus faible et engendre de plus faibles perturbations spatiales de l'interface.

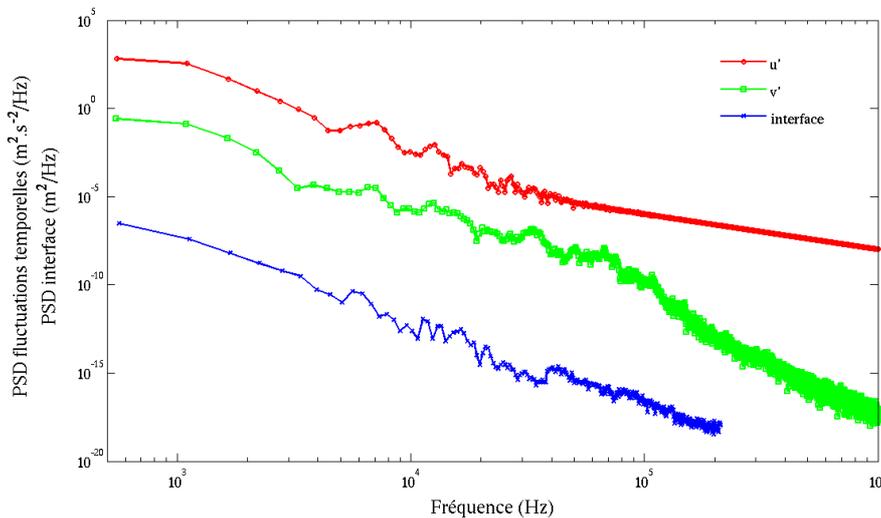


FIGURE 5.11: Densité spectrale de puissance des fluctuations de vitesse au point $y_1 = 1.5855 \times 10^{-5}m$ et du signal d'interface pseudo-temporel ($\Delta t_{simulation} \approx 10^{-8}$)

La figure 5.12 présente une image instantanée de l'interface liquide/gaz. Une forte déformation à grande longueur d'onde et quelques déformations à petites longueurs d'ondes sont visibles sur l'interface haute. La première longueur d'onde $\lambda \approx 0.5 \text{ mm}$ correspond à la fréquence $f_1 \approx 6.1 \text{ kHz}$ et la deuxième longueur d'onde $\lambda \approx 1 \text{ mm}$ correspond à la fréquence $f_2 \approx 12 \text{ kHz}$. L'interface basse présente peu de déformations distinguables à l'œil. Ces observations sont en adéquation avec l'information donnée par les PSD.

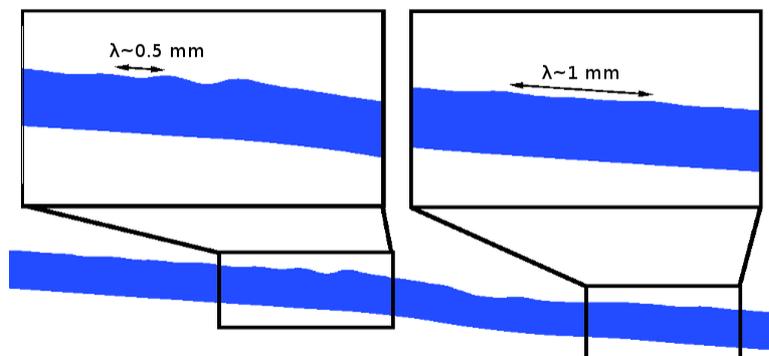


FIGURE 5.12: Image instantanée de l'interface liquide/gaz

5.2.2 Canaux à différents rapports L/D

5.2.2.1 Simulations : paramètres physiques et numériques

Sander et Weigand [83] analysent l'effet de quelques paramètres turbulents de l'écoulement d'entrée sur la déstabilisation de nappes liquides planes. La procédure est vue comme une *expérience numérique* où les paramètres peuvent être modifiés individuellement. Un profil de vitesse moyenne correspondant à différentes géométries d'injecteurs est introduit en condition initiale de simulation diphasiques 2D ou 3D. Des fluctuations de vitesse sont superposées au profil moyen par l'intermédiaire de la méthode de Klein [52] en imposant différentes échelles intégrales et de taux de turbulence. Les simulations sont majoritairement conduites pour un nombre de Reynolds de 4000 et un nombre de Weber de 340, hormis quelques simulations pour étudier l'effet de ces nombres adimensionnels. Les profils moyens de vitesses sont caractérisés par un flux d'énergie cinétique à l'entrée du domaine de calcul normalisé par un profil plat équivalent :

$$\varepsilon = \frac{1}{U_0^3 A} \int_0^A u_i^3 dA \quad (5.7)$$

La figure 5.13 montre les résultats obtenus par Sander et Weigand [83] pour différents rapports L/D : le short nozzle ($L/D < 1$) et le long nozzle ($L/D > 10$).

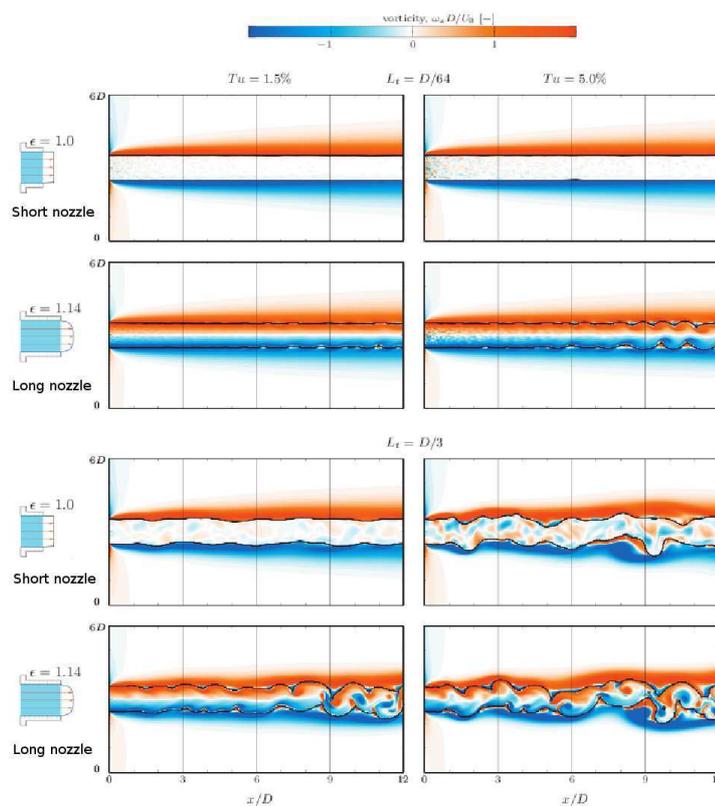


FIGURE 5.13: Contours de vorticité pour une nappe à $Re = 4000$, $We = 340$ pour un profil de vitesse plat (short nozzle) et un profil de vitesse de canal turbulent développé (long nozzle) pour différentes valeurs d'échelle intégrale et de taux de turbulence [83]

Le niveau du flux d'énergie cinétique a été identifié par les auteurs comme le paramètre influençant l'apparition d'instabilités comparativement aux nombres adimensionnels ou aux quantités turbulentes. Les couches de cisaillement de certains profils de vitesse moyen (divergent ou injecteur à vitesse différentielle) ont également montré leur importance dans le développement des instabilités.

Nous avons simulé l'écoulement interne et externe d'un short nozzle ($L/D = 1$) et d'un long nozzle ($L/D = 11.4$) en souhaitant apporter une information sur la distribution fréquentielle de l'énergie des fluctuations de vitesses.

Les paramètres physiques de la simulation sont :

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_1 &= 1 \times 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \rho_2 &= 1.204 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_2 &= 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \sigma_{12} &= 0.0709 \text{ N.m}^{-1} \\
 U_0 &= 8 \text{ m.s}^{-1} \\
 L_x &= 0.014 \text{ m} \\
 L_y &= 0.007 \text{ m} \\
 D &= 500 \times 10^{-6} \text{ m} \\
 \theta &= 120^\circ \\
 Re &= 4000 \\
 We &= 450 \\
 L_{long \text{ nozzle}} &= 0.0057 \text{ m} \\
 L_{short \text{ nozzle}} &= 500 \times 10^{-6} \text{ m}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Les conditions limites de la simulation sont résumées dans le tableau 5.2

	Entrée	Sortie	Haut	Bas
Vitesse	$\vec{v} = U_0 \vec{x}$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$	$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{dp}{dx} = 0$	$p = 0$	$p = 0$	$p = 0$

TABLE 5.2: Conditions limites de la simulation

L'estimation de la plus petite échelle de dissipation (équation 5.3) λ_k donne $3.14 \mu\text{m}$. Nous utilisons un maillage $N_x \times N_y = 2048 \times 1024$ pour un domaine $L_x \times L_y = 0.014 \text{ m} \times 0.007 \text{ m}$, soit une taille de maille $\Delta x = \Delta y = 6.8 \mu\text{m}$. La taille de maille de la simulation est assez proche de l'estimation ce qui permet d'assurer une représentation correcte de la turbulence. Le coefficient y^+ vaut approximativement 7, la première maille de la simulation est située légèrement en dehors de la zone de la sous-couche visqueuse (équation 5.5). Les calculs ont été effectués sur

Antares au CRIHAN sur 128 processeurs. Le temps de calcul est d'environ 20 heures pour 14000 pas de temps. Le nombre total de pas de temps est de 162000.

5.2.2.2 Profils de vitesses : moyennes et fluctuations

Les figures 5.14 et 5.15 présentent les profils de vitesse axiale (moyennes et fluctuations) respectivement pour le long nozzle et le short nozzle en sortie de l'orifice. Les profils de vitesse sont symétrique à l'instar de la géométrie. Dans le cas du short nozzle, le profil moyen de la vitesse axiale présente un fort gradient de vitesse en proche paroi et une vitesse constante sur une grande partie de l'orifice de sortie. Cette configuration est très proche du profil plat d'entrée : les couches limites n'ont pas le temps de se développer. Dans le cas du long nozzle, le profil moyen de la vitesse axiale montre un gradient plus faible en proche paroi et la partie à vitesse constante est moins large. Les couches limites sont développées et la vitesse moyenne sur le plateau est plus importante que la vitesse d'entrée. La forme du profil de fluctuation est globalement équivalente dans les deux configurations. Les fluctuations à la sortie du short nozzle sont plus importantes qu'à la sortie du long nozzle : les couches limites se développent, le gradient de vitesse en proche paroi est encore important.

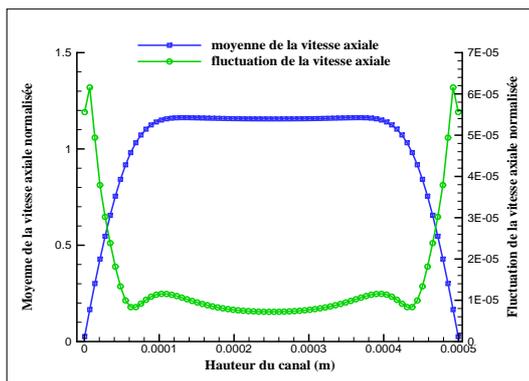


FIGURE 5.14: Profils de vitesse axiale (moyennes et fluctuations) en sortie pour le long nozzle normalisés par la vitesse d'entrée

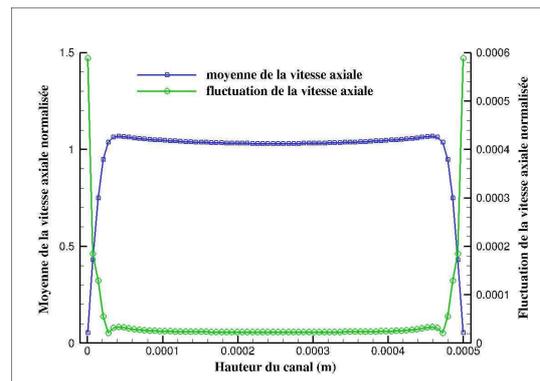


FIGURE 5.15: Profils de vitesse axiale (moyennes et fluctuations) en sortie pour le short nozzle normalisés par la vitesse d'entrée

Dans le cas du canal à différents rapport L/D , le flux d'énergie cinétique caractérise le développement des couches limites qui impliquent une augmentation de la vitesse axiale au centre. Le flux d'énergie cinétique (équation 5.7) de chacune des configurations est :

$$\varepsilon_{long\ nozzle} = 1.16 \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{short\ nozzle} = 1.05 \quad (5.10)$$

Les figures 5.16 et 5.17 présentent les profils de vitesse transversale (moyennes et fluctuations) respectivement pour le long nozzle et le short nozzle en sortie de l'orifice. Les vitesses transversales moyennes sont plus élevées dans le cas du short nozzle. Un pseudo plateau de vitesse au centre est observable. Globalement la forme du profil moyen est semblable entre les deux configurations. Les fluctuations sont plus importantes dans le cas du short nozzle avec une forte augmentation en proche paroi.

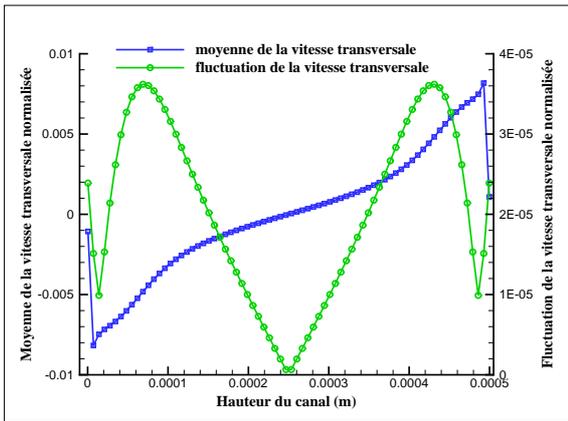


FIGURE 5.16: Profils de vitesse transversale (moyennes et fluctuations) en sortie pour le long nozzle normalisés par la vitesse d'entrée.

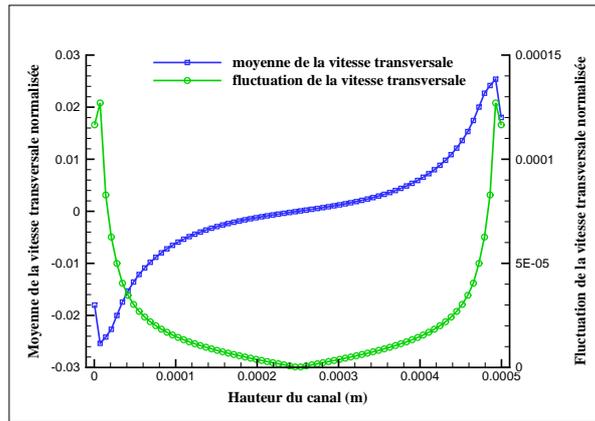


FIGURE 5.17: Profils de vitesse transversale (moyennes et fluctuations) en sortie pour le short nozzle normalisés par la vitesse d'entrée.

5.2.2.3 Analyse spectrale des écoulements interne et externe

À partir du suivi temporel des vitesses au point $y_1 = 7.205 \times 10^{-6} \text{ m}$ à l'orifice de sortie, nous calculons la densité spectrale de puissance PSD du suivi temporel de vitesse. Le caractère symétrique de l'écoulement permet l'utilisation d'un unique point. La figure 5.18 montre la position du point y_1 et la définition de la longueur d'interface. La longueur des segments en rouge sur la figure 5.18 est calculée à chaque pas de temps.

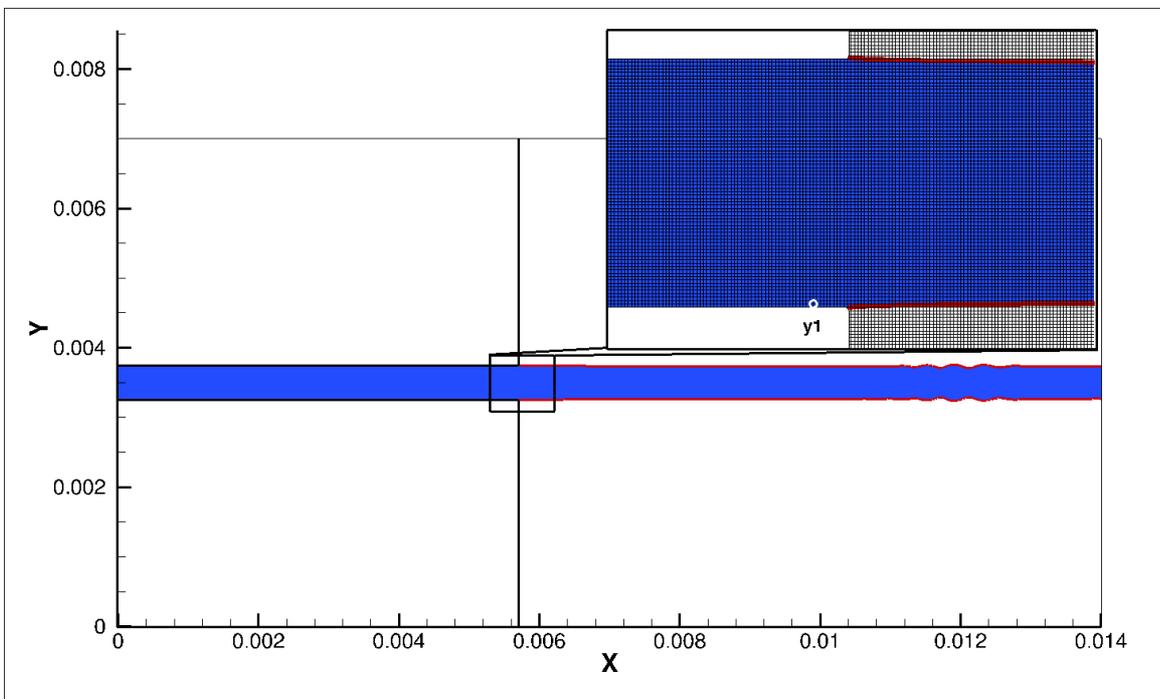


FIGURE 5.18: Définition de la longueur d'interface (en rouge) et de la position du point y_1 (cercle blanc)

La figure 5.19 montre en *ligne continue* l'évolution temporelle de la longueur d'interface pour la simulation du long nozzle. La *ligne discontinue* correspond à l'estimation *a priori* de la longueur d'interface $L_{interface} = 2 \times (L_x - L_{long\ nozzle})$. La première partie du signal de longueur d'interface correspond à la sortie du liquide de la buse. Durant cette phase, le liquide avance dans le gaz porteur, la longueur d'interface augmente donc linéairement avec le temps jusqu'à atteindre le plan de sortie du domaine de calcul ($t \approx 0.0018\ s$). Une partie transitoire est ensuite observable ($t \approx 0.0018 - 0.0028\ s$) puis une dernière partie montre une production d'interface périodique ($t \geq 0.0028\ s$). Le calcul de la PSD sur le signal d'évolution temporelle de la longueur d'interface permet de caractériser la déformation de l'interface directement dans le domaine fréquentiel.

Nous extrayons également le contour de l'interface à partir de la valeur nulle de la fonction distance liquide/gaz. Ce signal permet une caractérisation spatiale de l'interface sur lequel la PSD est également calculée.

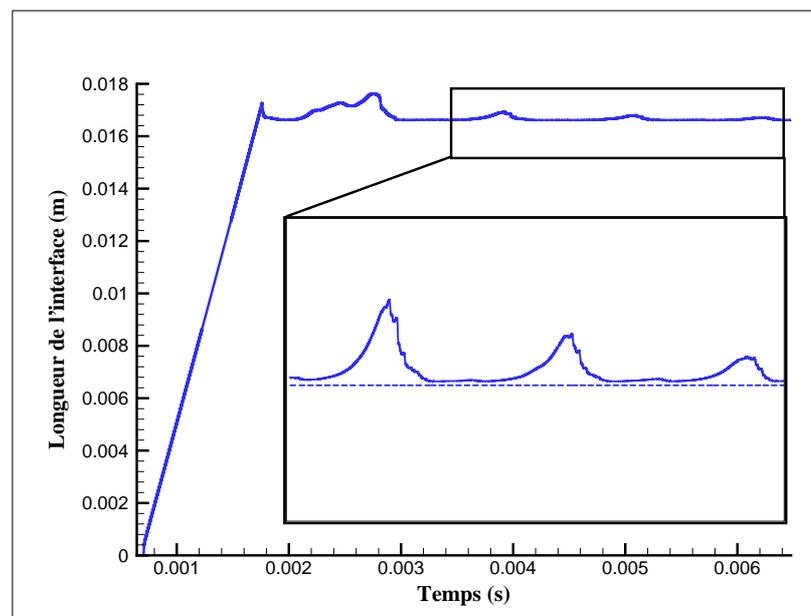


FIGURE 5.19: Évolution temporelle de la longueur d'interface en fonction du temps pour le long nozzle (*ligne continue*) et estimation *a priori* de la longueur d'interface (*ligne discontinue*)

Les figures 5.20 et 5.21 montrent respectivement la densité spectrale de puissance du signal d'interface pour le long nozzle et le short nozzle. La distribution spatiale du signal d'interface du long nozzle montre quatre longueurs d'onde $1/\lambda_1 \approx 2600\ m^{-1}$, $1/\lambda_2 \approx 5300\ m^{-1}$, $1/\lambda_3 \approx 7900\ m^{-1}$ et $1/\lambda_4 \approx 10500\ m^{-1}$. La distribution spatiale du signal d'interface du short nozzle ne montre aucune longueur d'onde privilégiée et la densité de puissance est globalement faible. Les visualisations de l'interface en figure 5.22 et 5.23 sont en adéquation avec les résultats de la PSD d'interface : l'écoulement diphasique externe du short nozzle ne montre aucune déformation visible.

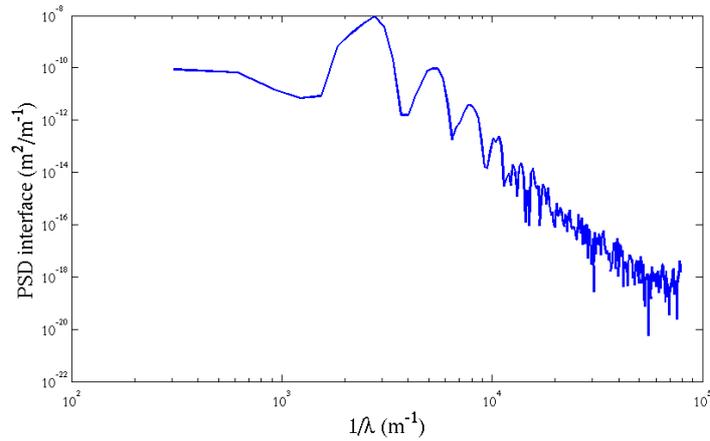


FIGURE 5.20: Densité spectrale de puissance du signal spatial d'interface pour le long nozzle ($L/D = 11.4$)

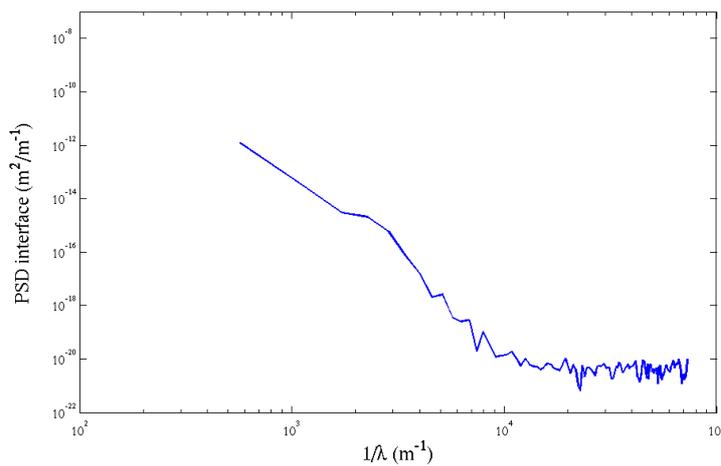


FIGURE 5.21: Densité spectrale de puissance du signal spatial d'interface pour le short nozzle ($L/D = 1$)

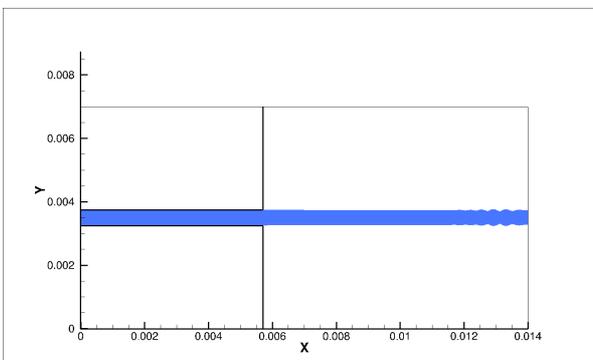


FIGURE 5.22: Visualisation de l'écoulement diphasique externe du long nozzle

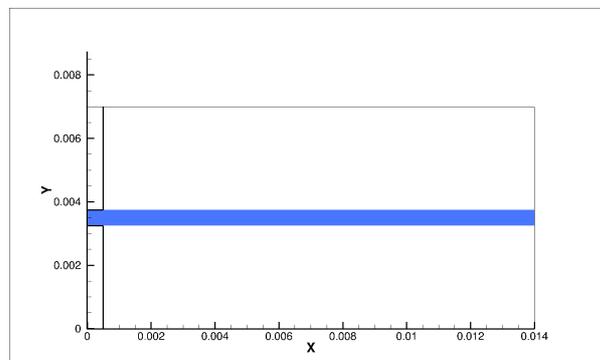


FIGURE 5.23: Visualisation de l'écoulement diphasique externe du short nozzle

La figure 5.24 montre la distribution fréquentielle de puissance des signaux de vitesses et de quantité d'interface (longueur de l'interface) pour le long nozzle. La basse fréquence visible sur la figure 5.19 est faiblement déterminée par la *PSD*, néanmoins elle peut être estimée *visuellement* à partir des signaux temporels. La basse fréquence est $f_0 \approx 860 \text{ Hz}$. Les autres fréquences observables sur les *PSD* sont :

$$f_1 \approx 21.6 \text{ kHz}$$

$$f_2 \approx 43.2 \text{ kHz}$$

$$f_3 \approx 64 \text{ kHz}$$

$$f_4 \approx 88 \text{ kHz}$$

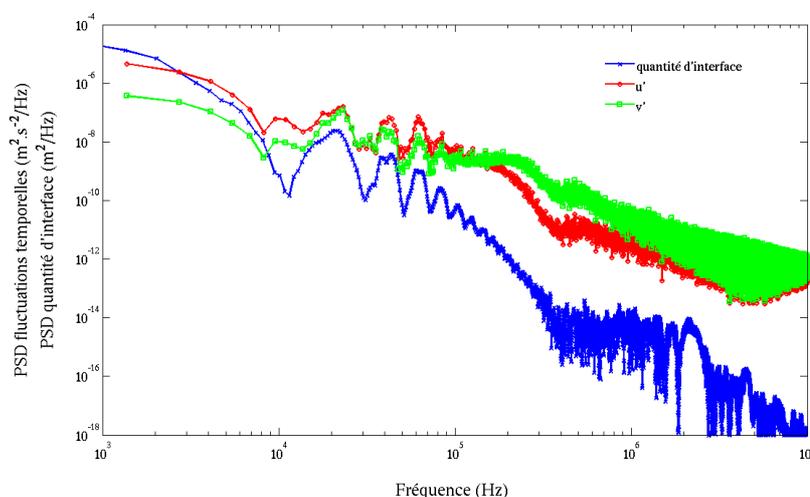


FIGURE 5.24: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse et du signal de la quantité d'interface pour le long nozzle ($\Delta t_{simulation} \approx 10^{-8} \text{ s}$)

L'utilisation de la vitesse débitante $U_d = 8 \text{ m.s}^{-1}$ permet de transformer les longueurs d'ondes de la *PSD* du signal spatial d'interface (figure 5.20) en fréquences :

$$\widehat{f}_1 \approx \frac{U_d}{\lambda_1} \approx 21 \text{ kHz} \approx f_1$$

$$\widehat{f}_2 \approx \frac{U_d}{\lambda_2} \approx 42.4 \text{ kHz} \approx f_2$$

$$\widehat{f}_3 \approx \frac{U_d}{\lambda_3} \approx 63.2 \text{ kHz} \approx f_3$$

$$\widehat{f}_4 \approx \frac{U_d}{\lambda_4} \approx 84 \text{ kHz} \approx f_4$$

La figure 5.25 présente une image instantanée de l'interface liquide/gaz. Une forte déformation à la longueur d'onde λ_1 est visible. La distribution fréquentielle des fluctuations de vitesses de l'écoulement interne en sortie d'orifice contrôle la distribution spatiale de la déstabilisation de la nappe.

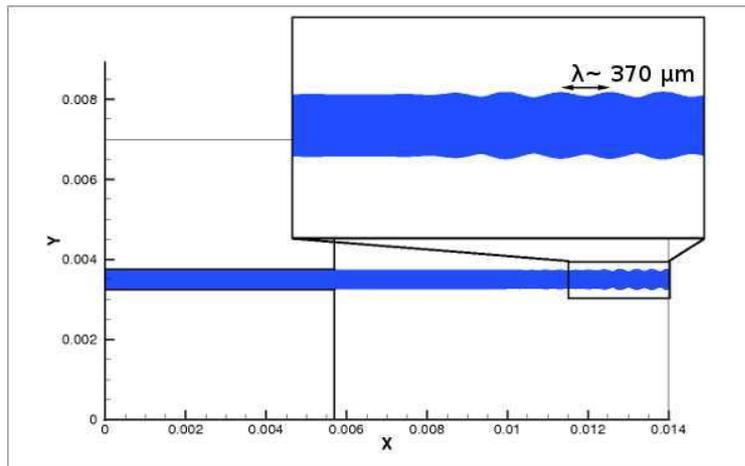


FIGURE 5.25: Image instantanée de l'interface liquide/gaz

La figure 5.26 montre la distribution fréquentielle de puissance des signaux de vitesses et de quantité d'interface pour le short nozzle. Aucune fréquence n'est remarquable. La distribution fréquentielle est proche d'une distribution fréquentielle de bruit blanc.

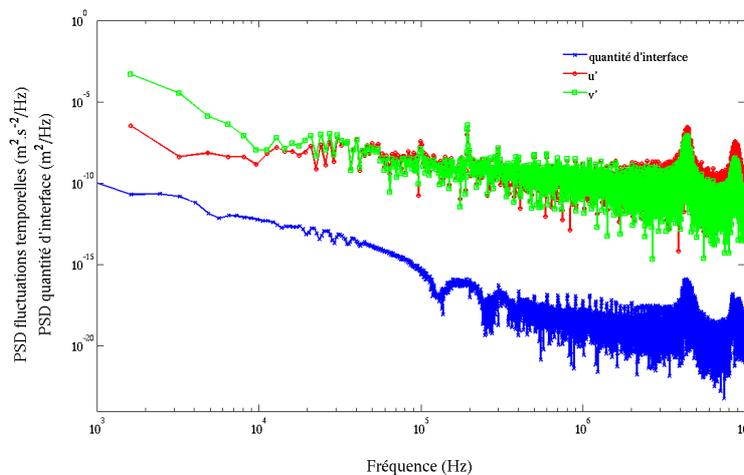


FIGURE 5.26: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse et du signal de la quantité d'interface pour le short nozzle ($\Delta t_{simulation} \approx 10^{-8}$ s)

Analyse de stabilité du système liquide/gaz dans le cadre de la théorie linéaire

Les simulations présentées auparavant ont permis de montrer que les perturbations de vitesse dans le liquide agissent sur la morphologie de la nappe déchargée dans la phase porteuse, en l'occurrence de l'air sous condition atmosphérique. Cette partie du travail se consacre à l'étude de la stabilité de la nappe de liquide produite par la buse « long nozzle » uniquement. Nous souhaitons savoir si les perturbations de vitesse générées à la sortie de la buse sont naturellement instables sous l'effet des forces aérodynamiques.

L'application de la théorie linéaire est en mesure de nous apporter des éléments de réponse.

Cette théorie repose sur l'hypothèse qu'une unique perturbation initiale de faible amplitude caractérisée par son nombre d'onde k se développe sur une interface liquide-gaz. L'écriture des équations de la mécanique des fluides et des sauts de propriétés physiques à la traversée de l'interface permet notamment d'aboutir à une équation de dispersion qui relie le taux de croissance de la perturbation à son nombre d'onde. Dans le cas d'un taux de croissance favorable et en description temporelle du phénomène, l'amplitude de perturbation croît exponentiellement avec le temps. La représentation graphique de cette équation s'appelle communément le diagramme de dispersion. Cette approche simplifiée permet d'obtenir des informations, certes partielles, mais quantitatives sur les caractéristiques des instabilités naturelles qui sont souvent utilisées comme conditions initiales de simulations avancées dédiées à reproduire les phénomènes de rupture primaire. La théorie linéaire a été appliquée sur les jets cylindriques ainsi que sur les nappes planes et annulaires.

Dans le cadre de l'utilisation de la théorie linéaire appliquée à la déformation des nappes planes, le travail de thèse de Cousin [20] s'est penché sur l'introduction de la viscosité dans la phase liquide. En conduisant une analyse dimensionnelle, il a montré que le nombre M défini par :

$$M = \frac{\mu_1 \rho_2^2 U_0^3 D}{2 \rho_1 \sigma_{12}^2} \quad (5.11)$$

permet de savoir si la viscosité du liquide influe sur le diagramme de dispersion. Une série de calculs a permis de montrer que dans le cas où M est inférieur à 0.001, la viscosité du liquide n'a aucune influence sur le processus physique modélisé. En conséquence, seules les forces aérodynamiques et de tension superficielle seront en compétition. Dans notre cas d'étude, M vaut 3.69×10^{-5} ; ainsi sans l'ajout de la viscosité du liquide, l'équation de dispersion se simplifie et permet d'obtenir une forme analytique exprimant le taux de croissance ω en fonction du nombre d'onde k . La forme retenue est proposée par Sirignano et Mehring [89] :

$$\omega = +kU_0 \sqrt{\frac{C\rho}{(C+\rho)^2} - \frac{kD}{2We_2(C+\rho)}} \quad (5.12)$$

avec

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad We_2 = \frac{\rho_1 U_0^2 D}{2\sigma_{12}} \quad (5.13)$$

L'utilisation de cette relation permet de montrer que deux modes sont instables dans la même gamme de nombres d'onde ; à savoir la perturbation symétrique ($C = \coth\left(\frac{kD}{2}\right)$) et la perturbation anti-symétrique ($C = \tanh\left(\frac{kD}{2}\right)$). Les résultats montrent que la perturbation anti-symétrique offre un plus fort taux de croissance que la perturbation symétrique dans le cas où le rapport de masses volumiques ρ est très petit devant l'unité. Ceci signifie que dans des situations à faibles valeurs de ρ si les amplitudes de perturbation initiale sont du même ordre de grandeur, la perturbation anti-symétrique pilotera le processus de rupture. En revanche ce

ne sera pas le cas si la perturbation symétrique est doté d'une amplitude de perturbation plus importante.

La figure 5.27 présente le diagramme de dispersion dans le domaine fréquentiel ($f = \frac{kU_0}{2\pi}$) pour le système eau/air -cas du long nozzle- dit cas initial. La faible valeur de ρ implique un taux de croissance plus élevé du mode anti-symétrique. Néanmoins, les déformations de l'interface observées (figure 5.22) pour le long nozzle sont symétriques car le forçage naturel de l'écoulement interne est symétrique. La basse fréquence $f_0 \approx 860 \text{ Hz}$, identifiée sur le signal de longueur d'interface, est une perturbation instable.

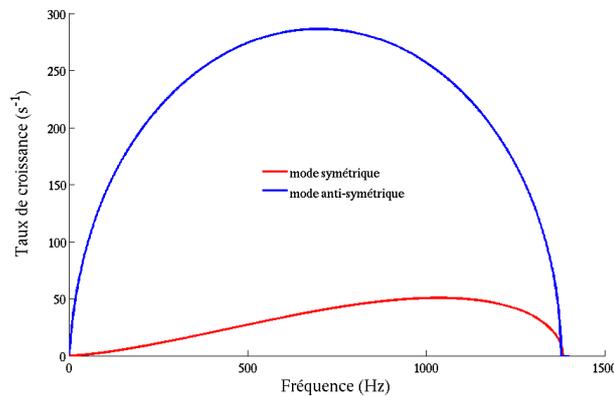


FIGURE 5.27: Diagramme de dispersion du système eau/air : cas initial

L'augmentation de la masse volumique du gaz $\rho_2 = 3.5 \text{ kg.m}^{-3}$ accroît les forces aérodynamiques agissant sur la déstabilisation du système liquide. Ce cas est appelé cas modifié. Munie de cette nouvelle propriété, le nombre M ($M = 3.69 \times 10^{-4}$) reste faible indiquant une influence négligeable de la viscosité du liquide sur sa déformation. En se basant sur les résultats de la théorie linéaire, la gamme fréquentielle des perturbations instables est élargie. La figure 5.28 présente le diagramme de dispersion dans le domaine fréquentiel ($f = \frac{kU_0}{2\pi}$) pour le système eau/gaz du cas modifié.

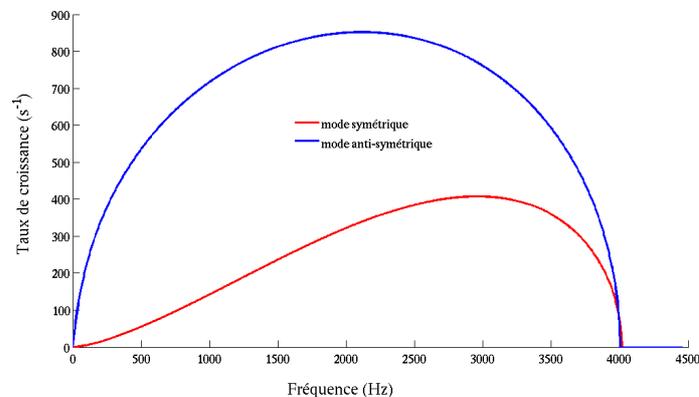


FIGURE 5.28: Diagramme de dispersion du système eau/gaz modifié : cas modifié

La figure 5.29 présente la *PSD* des signaux temporels de la longueur d'interface. Les densités spectrales sont globalement plus élevées pour le cas modifié : la déformation de l'interface est légèrement plus importante. Cependant, dans la gamme de fréquences $[10^4 \text{ Hz}, 10^7 \text{ Hz}]$, les perturbations restent stables. La légère amplification est attribuée à la plus forte déstabilisation des perturbations à basse fréquence.

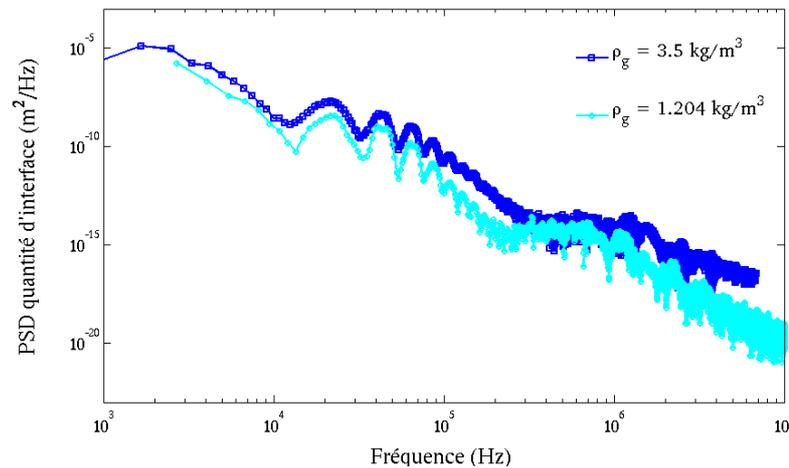


FIGURE 5.29: Densité spectrale de puissance des signaux temporels de quantité d'interface (longueur d'interface).

Les basses fréquences beaucoup plus énergétiques que les hautes fréquences sont mal représentées par les *PSD*. Visuellement, ces basses fréquences sont discernables sur l'évolution temporelle des signaux de longueurs d'interface présentée sur la figure 5.30. Pour le cas initial, la fréquence $f_0 \approx 860 \text{ Hz}$ présente une forte amplitude et la fréquence $f \approx 1720 \text{ Hz}$ une faible amplitude. Pour le cas modifié, le diagramme de dispersion en figure 5.28 montre que la fréquence $f \approx 1720 \text{ Hz}$ est instable contrairement au cas initial. En effet, nous constatons en figure 5.30 que l'amplitude de cette perturbation est plus forte que dans le cas initial.

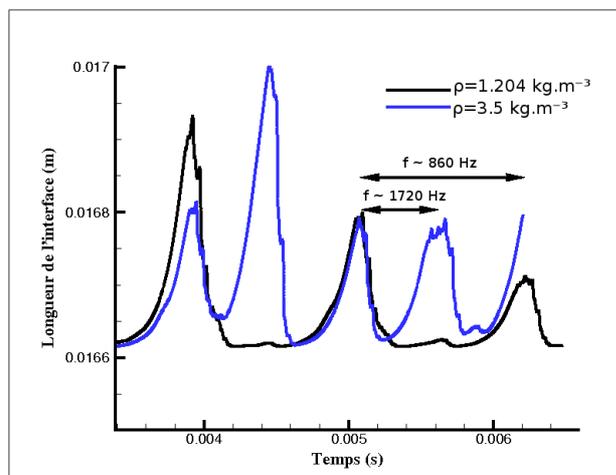


FIGURE 5.30: Évolution temporelle des signaux de longueurs d'interface.

5.2.3 Analyse comparative des différentes configurations

Nous avons démontré l'importance d'une caractérisation fine de l'écoulement interne pour reproduire les phénomènes de déstabilisation de jet. La distribution fréquentielle des fluctuations de vitesses en sortie engendre la même distribution spatiale des instabilités sur l'écoulement externe. Le couplage entre l'écoulement interne du convergent dissymétrique et l'écoulement externe présente deux comportements distincts en fonction de l'interface considérée (haute ou basse). Bien que le niveau énergétique des fluctuations de l'écoulement interne du convergent soit plus élevée que celui du long nozzle, l'interface basse du convergent se déstabilise peu. Cette différence de comportement indique qu'un facteur autre que la distribution fréquentielle ou que le niveau énergétique des fluctuations de vitesse intervient dans le couplage entre l'écoulement interne et externe. Sander et Weigand [83] identifient le niveau du flux d'énergie cinétique (équation 5.7) comme le paramètre prépondérant dans l'apparition d'instabilités. Le flux d'énergie cinétique calculé pour chacune des configurations est :

$$\varepsilon_{short\ nozzle} = 1.05 \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{long\ nozzle} = 1.16 \quad (5.15)$$

$$\varepsilon_{convergent} = 1.40 \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

Le niveau énergétique des fluctuations de l'écoulement en sortie de la buse convergente et son niveau de flux d'énergie cinétique sont importants, cependant la réponse de l'écoulement externe est faible. Ceci indique que le niveau d'énergie cinétique n'est pas toujours significatif. Dans le cas du canal, l'augmentation du flux d'énergie cinétique mène bien à une augmentation de la déstabilisation du système. Mais cette augmentation du flux d'énergie cinétique est due à l'augmentation du rapport L/D . Dans le cadre de jet cylindrique, l'effet du rapport L/D a notamment été mis en évidence par Wu *et al.* [110]. La figure 5.31 présente deux photographies de jet cylindrique proche de la sortie de l'injecteur pour différents rapports L/D . La faible déformation de l'interface dans le cas $L/D = 4$ est clairement visible. L'étude menée par les auteurs conclut entre autre que la présence de vorticité (due à la turbulence ou aux couches limites) joue un rôle prédominant sur la déformation de l'interface.

Pour le long nozzle et le short nozzle, le flux d'énergie cinétique est représentatif du gradient de vitesse axiale. L'augmentation du rapport L/D permet d'augmenter la taille de la couche limite, le gradient de vitesse axial est faible, ainsi la zone de vorticité en proche paroi est élargie.   contrario, dans le cas du convergent le phénomène de *flip* augmente le flux d'énergie cinétique mais pas le développement des couches limites. En comparant les trois profils de vitesse axiale moyenne en figure 5.32, nous observons la similarité entre les profils du convergent et du short nozzle pour la partie basse de l'orifice de sortie. Le profil du convergent possède un fort gradient en bas ($y/D = 0$) et un faible gradient en haut ($y/D \approx 0.7 - 0.9$) c'est à dire semblable au profil du long nozzle.

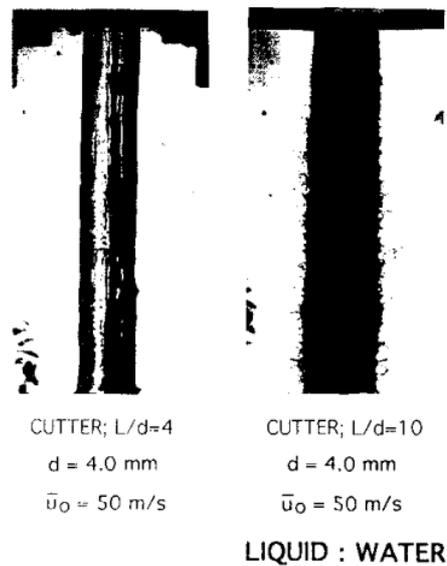


FIGURE 5.31: Photographies de jet cylindrique en proche sortie d’orifice pour différents rapport L/D . Une section de contraction est utilisée avant l’entrée dans l’injecteur afin de supprimer la couche limite pré-injecteur (cutter) [110]

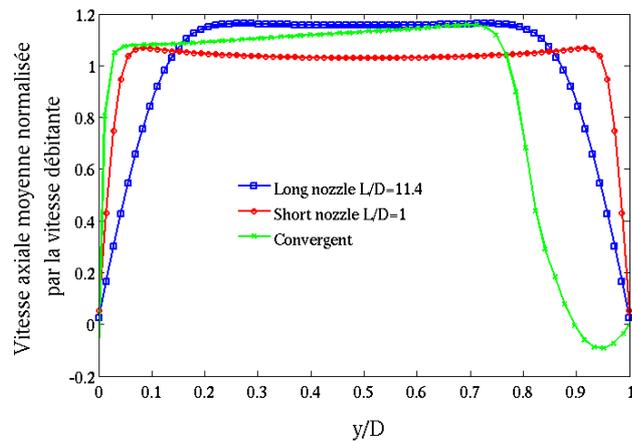


FIGURE 5.32: Profils de vitesse axiale moyenne des trois configurations étudiées.

Les figures 5.33 et 5.34 montrent les contours de vorticit   pr  s de l’orifice de sortie pour le long nozzle et le short nozzle respectivement. L’interface liquide est repr  sent  e par un trait noir dans la partie droite de chaque image. Le d  veloppement des couches limites est faible. Le liquide sort rapidement avec une faible zone de vorticit   sur chacune des interfaces haute et basse. Le long nozzle pr  sente, au contraire, des couches limites fortement d  velopp  es. Le liquide sort avec une forte zone de vorticit   sur chacune des interfaces.

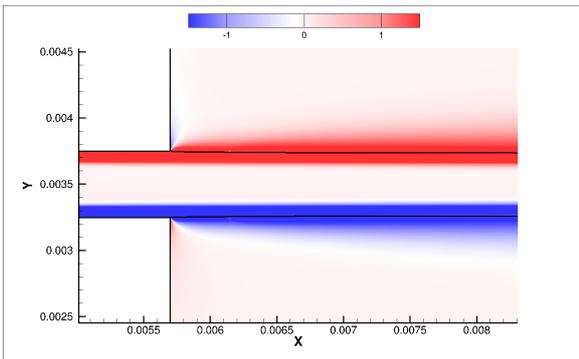


FIGURE 5.33: Contour de vorticité normalisée ($\omega_z D/U_0$) pour le long nozzle

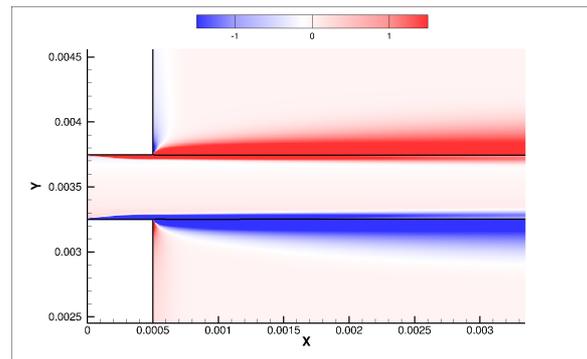


FIGURE 5.34: Contour de vorticité normalisée ($\omega_z D/U_0$) pour le short nozzle

La figure 5.35 montre les contours de vorticité près de l'orifice de sortie pour le convergent. Dans la partie convergente, l'accélération de la vitesse axiale implique une vitesse transversale négative en raison de la condition d'incompressibilité. Cet effet contribue à l'amincissement de la couche limite. La couche limite déjà fine subit un décollement sur la paroi basse et la partie canal est trop courte pour épaissir la couche limite. Le fluide sort de l'orifice avec une faible zone de vorticité sur la paroi basse. Le *flip* sur la paroi haute de la partie canal permet un léger épaississement de la couche limite. Le fluide sort de l'orifice avec une plus forte zone de vorticité.

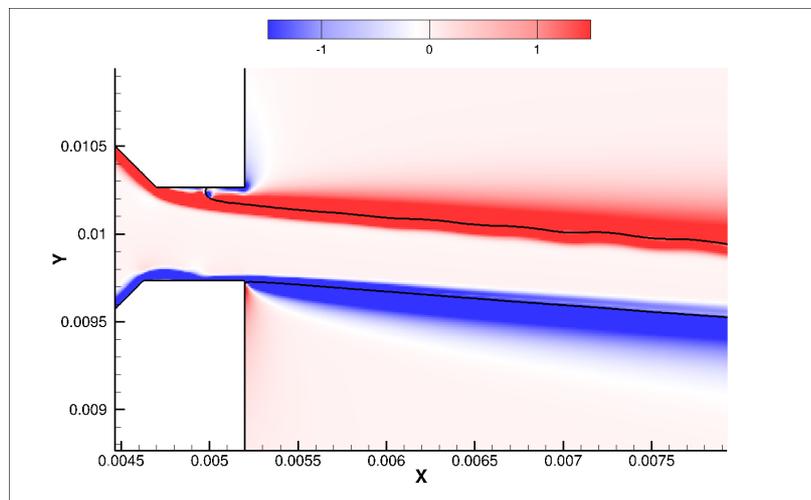


FIGURE 5.35: Contour de vorticité normalisée ($\omega_z D/U_0$) pour le convergent

Le tableau 5.3 présente les échelles intégrales des fluctuations de vitesses dans la direction axiale. Pour la configuration de canal à différents rapports L/D , les échelles intégrales sont similaires. Les échelles intégrales pour le convergent sont plus importantes, les structures pouvant naître en sortie d'orifice sont plus grande. La fréquence $f_1 = 6100 \text{ Hz}$ du convergent correspond à une longueur d'onde $\lambda_1 \approx U_d/f_1 \approx 1.88D$ alors que dans le cas du long nozzle la fréquence $f_1 = 21.6 \text{ kHz}$ correspond à une longueur d'onde $\lambda_1 \approx U_d/f_1 \approx 0.74D$. Néanmoins ce paramètre n'est pas discriminant dans le cas du canal à différents rapports L/D .

	Échelle intégrale axiale sur u	Échelle integrale axiale sur v
Short nozzle	$1.7 \times 10^{-3}m$	$5.2 \times 10^{-5}m$
Long nozzle	$1.8 \times 10^{-3}m$	$5.2 \times 10^{-5}m$
Convergent (Haut)	$2.6 \times 10^{-3}m$	$1.3 \times 10^{-3}m$
Convergent (Bas)	$3 \times 10^{-3}m$	$1.6 \times 10^{-3}m$

TABLE 5.3: Échelles intégrales des fluctuations de vitesses au voisinage de la paroi dans la direction axiale

Le tableau 5.4 présente le taux de turbulence moyen des fluctuations de vitesses au voisinage de la paroi. Le taux de turbulence important du convergent ne permet pas de s'assurer d'une déformation importante de l'interface. La déstabilisation du système est plus fort dans le cas du long nozzle alors que le taux de turbulence reste faible.

	Taux de turbulence moyen sur u	Taux de turbulence moyen sur v
Short nozzle	0.003%	0.3%
Long nozzle	0.0086%	1%
Convergent	18.8%	8%

TABLE 5.4: Taux de turbulence moyen des fluctuations de vitesses en proche paroi

D'une manière générale, les cas étudiés ne peuvent être discriminés sur le critère des échelles intégrales ou du taux de turbulence. Dans le cas du canal parallèle, le niveau du flux d'énergie cinétique paraît discriminant car il mesure le développement des couches limites et donc l'épaisseur des zones de vortacité. Cependant, dans le cas du convergent, cette mesure n'est pas appropriée. Le caractère prédominant de l'épaisseur de la zone de vortacité semble se dégager. À ce stade, une étude quantitative raffinée de l'effet de la taille de la zone de vortacité semble intéressante à conduire.

5.2.4 Conclusion

Les configurations étudiées dans ce chapitre révèlent deux points cruciaux sur l'interaction entre l'écoulement interne et l'écoulement externe. Dans un premier temps, la distribution fréquentielle des fluctuations de vitesses de l'écoulement interne impose la distribution spatiale des instabilités naissant en sortie de l'injecteur. Cependant, l'efficacité du transfert de quantité de mouvement entre les deux écoulements est liée à la taille des zones de vortacité. Cette observation est en adéquation avec les observations expérimentales de Wu *et al.* et avec les observations numériques de Sander et Weigand [83]. L'interprétation par Sander et Weigand [83] du caractère prédominant du flux d'énergie cinétique sur l'apparition d'instabilités n'est valable que lorsque ce critère est une mesure de la taille des zones de vortacité. Ce critère sur la vortacité est notamment évoqué par les auteurs qui ont observé l'apparition de forte instabilités pour des profils de vitesse moyen contenant des couches de cisaillement (divergent ou injecteur à vitesse différentielle).

L'importance de la déformation du système liquide dépend du transfert de quantité de mouvement entre l'écoulement interne et externe mais également des fréquences naturellement instables du système liquide. L'efficacité énergétique d'un système d'atomisation, c'est à dire le taux de transfert de l'énergie cinétique en énergie de surface, semble conditionnée par l'interaction de trois paramètres :

- les fréquences et l'intensité des perturbations du système d'injection (écoulement interne)
- le taux de transfert de la quantité de mouvement (taille des zones de vortacité)
- les fréquences des perturbations instables du système liquide/gaz (écoulement externe)

5.3 Écoulement 3D : Triple disque

5.3.1 Simulation : paramètres physiques et numériques

Les injecteurs triple disques sont des injecteurs basse pression essence montrant des performances intéressantes en terme de taille de gouttes produites. Ce type de géométrie a retenu l'attention de l'équipementier automobile Siemens VDO Automotive (aujourd'hui Continental Automotive) pour lequel des études ont été réalisées notamment dans les travaux de thèse de Triballier [100] et de Grout [38]. L'étude expérimentale de Triballier a porté sur une géométrie d'injecteur triple disque simplifiée où les buses sont munies d'un seul orifice de décharge. Du fait des faibles nombres de Weber gazeux, les forces aérodynamiques sont négligeables [100] dans les processus de rupture. Cette situation implique un rôle important de l'écoulement interne. L'écoulement interne a été simulé par Triballier à l'aide d'un code commercial avec une approche RANS. Plusieurs assemblages de disques ont été utilisés avec une variation de l'épaisseur des deux derniers disques et de l'excentricité du dernier disque. L'écoulement en sortie de buse a été caractérisé par son énergie cinétique turbulente et son énergie cinétique non axiale. Ces deux paramètres ont permis de constituer une cartographie à deux dimensions classifiant les comportements observés. Les travaux de Triballier concernent principalement l'écoulement externe qui est notamment caractérisé en terme de distributions volumiques de tailles de gouttes et en terme de dimension fractale pour l'analyse de la rupture primaire des jets liquides. Grout [38] reprend dans sa thèse l'analyse fractale en se concentrant sur une seule géométrie d'injecteur. Il introduit une nouvelle caractéristique du système liquide en phase d'atomisation : la distribution surfacique d'échelle.

Nous avons simulé la configuration du triple disque étudiée par Grout [38] en souhaitant apporter la richesse d'un formalisme DNS en terme de représentation de la turbulence. La géométrie est montrée en figure 5.36. Compte tenu de la présence d'un axe de symétrie la simulation n'a concerné qu'une moitié d'injecteur.

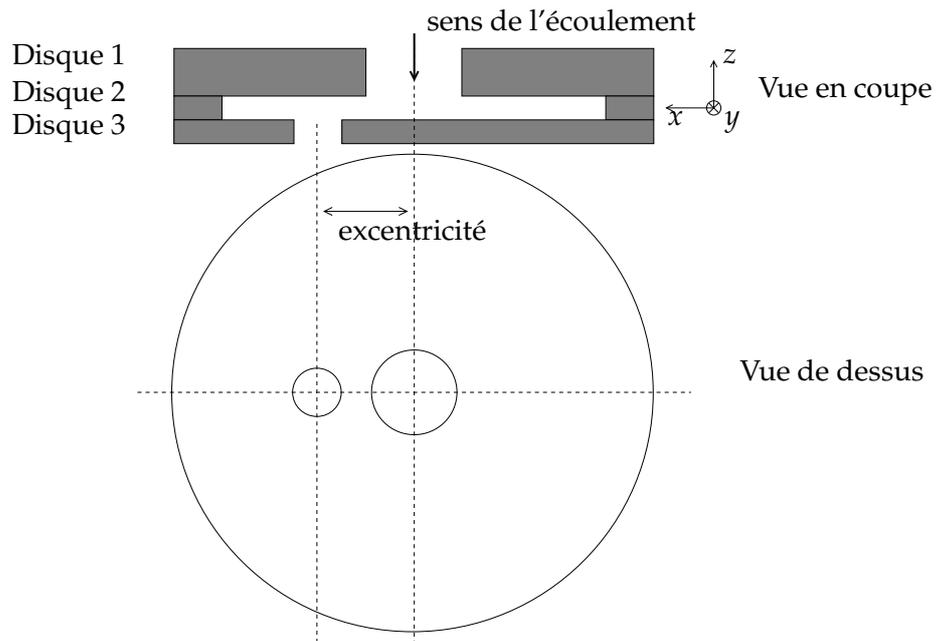


FIGURE 5.36: Schéma de la buse triple disque.

Les paramètres physiques de la simulation sont :

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_1 &= 1 \times 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \rho_2 &= 1.204 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \mu_2 &= 1.78 \times 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \\
 \sigma_{12} &= 0.0709 \text{ N.m}^{-1} \\
 W_0 &= -5.9586 \text{ m.s}^{-1} \\
 L_x &= 0.00119 \text{ m} \\
 L_y &= 0.07738 \text{ m} \\
 L_z &= 6.39 \times 10^{-4} \text{ m} \\
 Re &= 2979
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Le calcul du nombre de Reynolds est basé sur le diamètre et la vitesse débitante en sortie de buse. Les dimensions des disques constituant la buse sont présentées dans le tableau 5.5.

Disque	Épaisseur (μm)	Diamètre (μm)	Excentricité (μm)
1	177	300	0
2	75	2254	0
3	76	180	200

TABLE 5.5: Dimensions des disques constituant la buse

Un plenum de longueur $l = 1.73D_{\text{orifice}}$ est intégré au domaine de calcul afin de rendre l'écoulement simulé indépendant des conditions de sortie. Dans la direction z , le domaine de calcul est donc supérieur à l'épaisseur totale des 3 disques. Les conditions limites de la simulation sont résumées dans le tableau 5.6.

	Haut z^+	Bas z^-	Droite x^+	Gauche x^-	Avant y^+	Arrière y^-
Vitesse	$\vec{v} = W_0 \vec{z}$					$\nabla \cdot \vec{v} = 0$
Pression	$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$					$p = 0$

TABLE 5.6: Conditions limites de la simulation

L'estimation de la plus petite échelle de dissipation (équation 5.3) λ_k donne $1.41 \mu\text{m}$. Le maillage est $N_x \times N_y \times N_z = 448 \times 896 \times 240$. La taille de maille de la simulation $\Delta = 2.67 \mu\text{m}$ est assez proche de l'estimation ce qui permet d'assurer une représentation correcte de la turbulence. Les coefficients y^+ pour les mailles au voisinage de la paroi sont inférieurs à 3. Les calculs ont été effectués sur Vargas à l'IDRIS sur 384 processeurs. Le temps de calcul est d'environ 15 heures pour 150 pas de temps. Le nombre total de pas de temps est de 10000.

5.3.2 Caractérisation de l'écoulement

La figure 5.37 présente les lignes de courant dans l'injecteur triple disque qui sont artificiellement arrêtées à la sortie du disque 3. La figure permet de distinguer les trois disques et une surface plane représentant le début du plenum. Les lignes de courant s'organisent globalement en giration autour du centre des deux premiers disques. Néanmoins, la dissymétrie engendrée par l'excentricité de l'orifice de décharge implique la présence d'une zone perturbée en y^- dans son mouvement de giration. Nous remarquons une perturbation du mouvement de giration en sortie du disque 1 où les lignes de courant sont déviées selon z . La figure 5.38 montre que les lignes de courants partant du bord du diamètre du disque 1 sortent dans le disque 2 en s'enroulant. Cette organisation en vortex toroïdal est modifiée par l'orifice de décharge du disque 3 et forme une structure hélicoïdale. Afin de permettre une meilleure visualisation des ces structures, nous utilisons le critère Q défini par Hunt et *al.* [44]. La quantité Q est la somme du tenseur de rotation $Q_\Omega = \frac{1}{2}\Omega^2$ et de cisaillement $Q_S = -\frac{1}{2}S^2$. Les valeurs positives du champ Q représentent des régions dominées par le tenseur rotation et sont alors considérées comme identifiant des tourbillons. Dans le cas d'écoulement incompressible, la formulation du terme Q s'écrit en notation indicelle comme suit :

$$Q = -\frac{1}{2}u_{i,j}u_{j,i} \quad (5.19)$$

La figure 5.39 présente une iso-surface positive de critère Q en superposition avec les lignes de courant (figure 5.37). Nous observons la formation de trois structures toroïdales : une première attachée à la jonction entre le disque 1 et 2, une seconde correspondante aux lignes de courant visibles en figure 5.38 et une dernière plus petite proche de la déviation selon z observée plus avant des lignes de courant. En figure 5.40, une valeur positive supérieure du champ Q associée aux lignes de courant de la figure 5.38 permet de distinguer la création de la structure hélicoïdale par jonction des différents structures toroïdales dans l'orifice de décharge du disque 3.

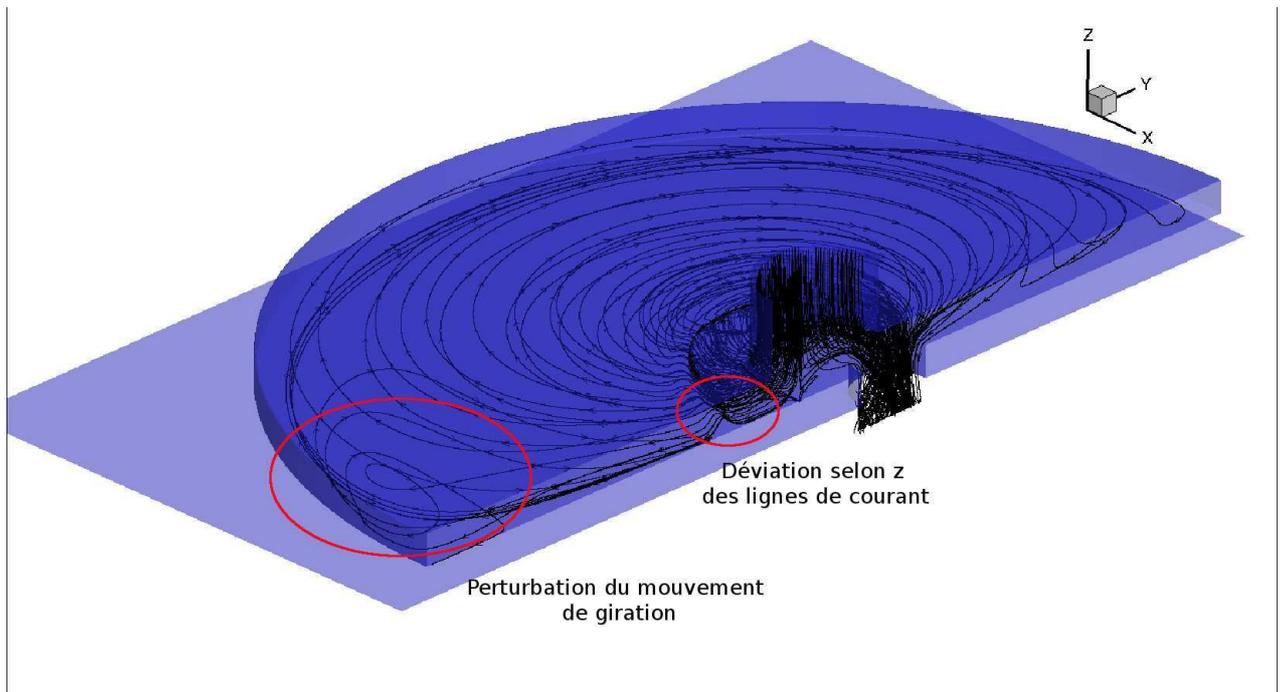


FIGURE 5.37: Lignes de courant de l'écoulement global dans l'injecteur triple disque

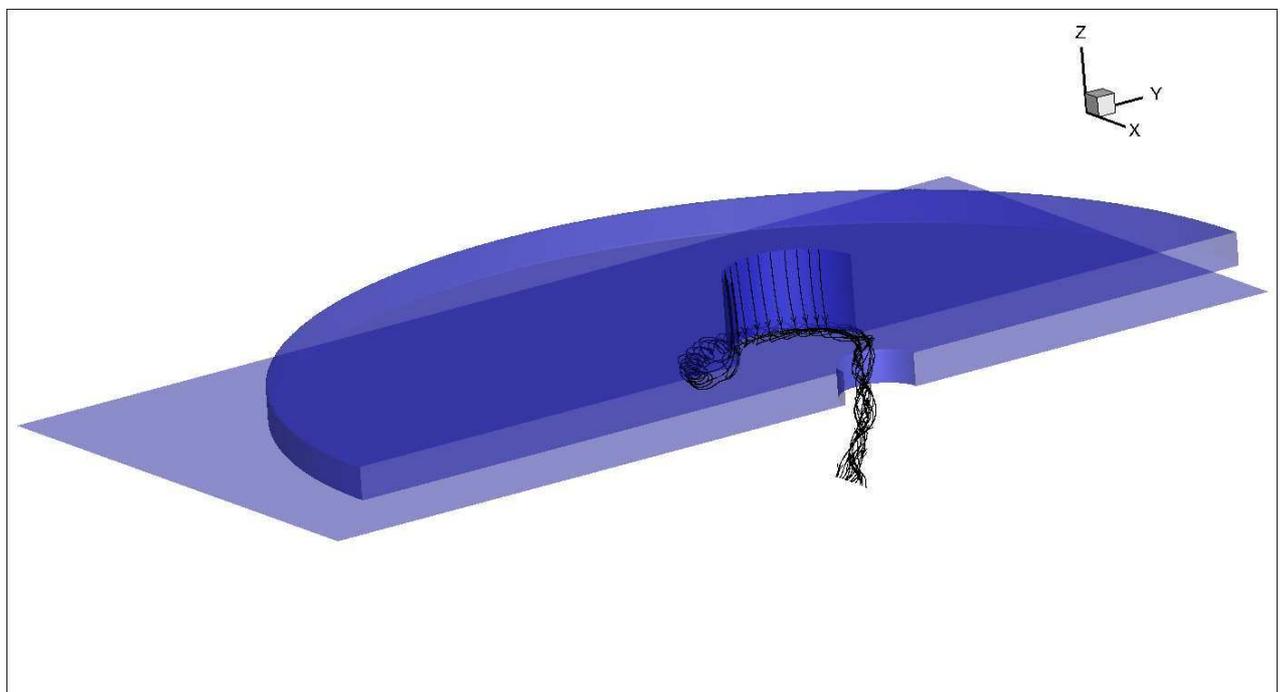


FIGURE 5.38: Lignes de courant au voisinage de la sortie du disque 1

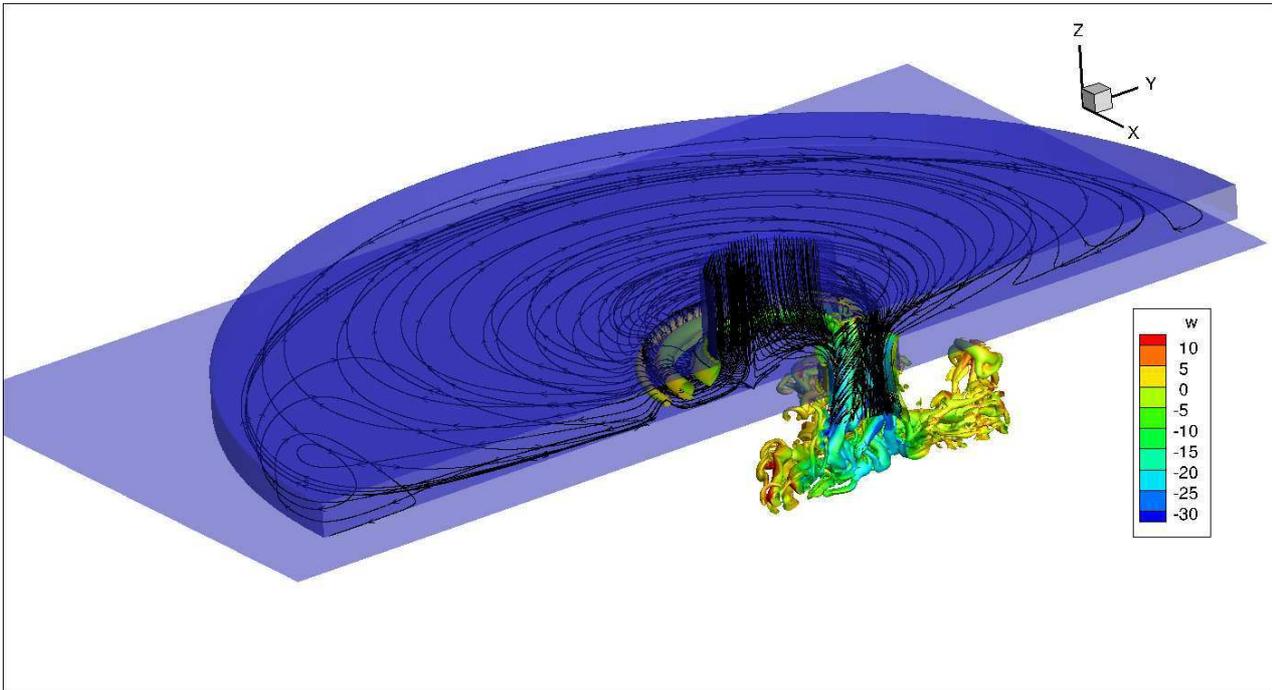


FIGURE 5.39: Lignes de courant de l'écoulement global et iso-surface de critère Q coloriée par la vitesse selon z

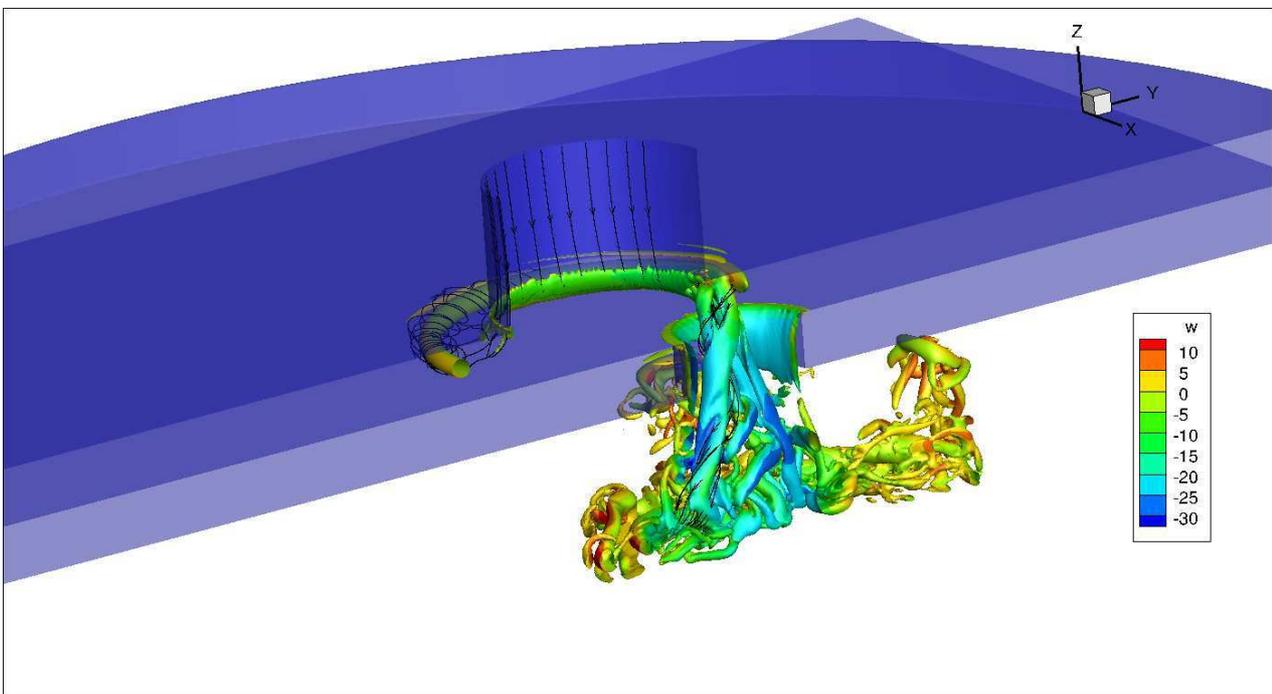


FIGURE 5.40: Lignes de courant au voisinage de la sortie du disque 1 et iso-surface de critère Q coloriée par la vitesse selon z

La figure 5.41 est un agrandissement de l'orifice de décharge et présente une iso surface de champ Q . La jonction des différentes structures toroïdales est clairement visible. Dumouchel et *al.* [25] ont montré que l'excentricité de l'orifice de décharge (disque 3) et l'épaisseur du disque 2 sont les deux dimensions de la buse ayant le plus d'influence sur la production d'énergie cinétique non-axiale et de turbulence. Or, la simulation montre que la structure de l'écoulement secondaire dans l'orifice de décharge est engendrée par la création de vortex *ring* dans le disque 2 et par leurs jonctions dans le disque 3. Ainsi, la création de vortex *ring* peut être liée à une caractéristique du disque 2 (épaisseur) et leurs jonctions à une caractéristique du disque 3 (excentricité).

Une structure tourbillonnaire plane attachée à la jonction entre le disque 2 et 3 est également visible. L'espace entre la paroi du disque et cette structure est caractérisée par des vitesses en z positives ce qui indique un phénomène de *flip*. Ren et Sayar [78] ont montré lors de l'étude d'injecteurs multi-disque qu'un détachement du liquide peut survenir dans l'orifice de sortie.

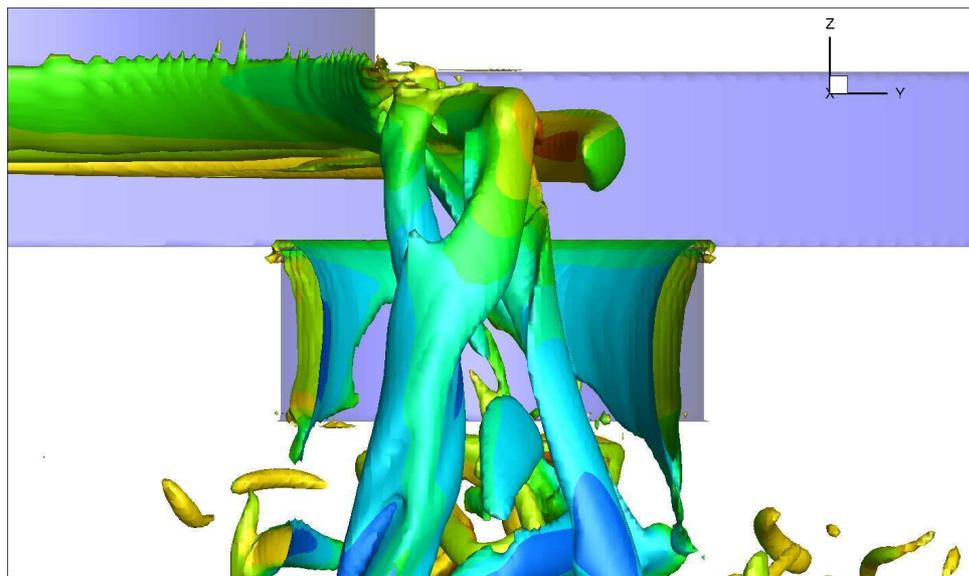


FIGURE 5.41: Iso-surface de critère Q colorisée par la vitesse selon z (même échelle que précédemment) dans l'orifice de décharge du disque 3

Les figures 5.42 et 5.43 présentent la structure de l'écoulement moyen caractérisée par les vecteurs tangents au plan de sortie. La figure 5.42 présente également les contours de vitesses moyennes dans la direction z et la figure 5.43 la norme de la vitesse. L'écoulement dans le plan est constitué de deux vortex contra-rotatif. Ces vortex engendrent une expansion latérale du jet [100]. La figure 5.42 montre que la vitesse moyenne dans la direction z est positive au voisinage de la paroi, indiquant un phénomène de *flip*. Une trace de la structure hélicoïdale est visible sur la figure 5.43 où un contour (25 m.s^{-1}) de la norme de vitesse est dissymétrique par rapport au centre des vortex.

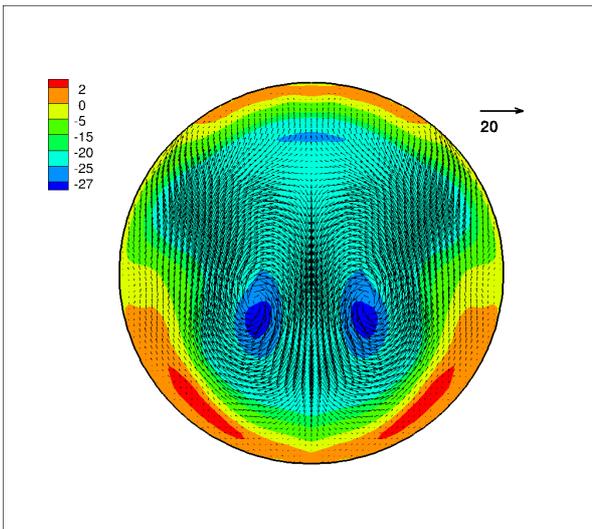


FIGURE 5.42: Vitesses moyennes dans l'orifice de décharge. Vecteurs tangents au plan de sortie et contours de vitesse en $m.s^{-1}$ dans la direction z (*symétrie*)

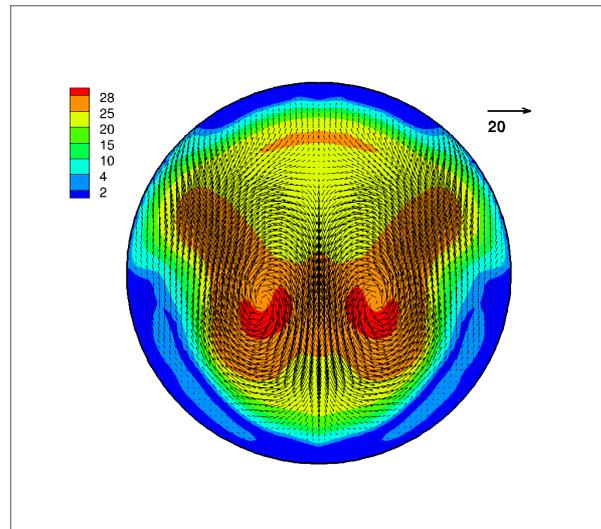


FIGURE 5.43: Vitesses moyennes dans l'orifice de décharge. Vecteurs tangents au plan de sortie et contours de la norme de la vitesse en $m.s^{-1}$ (*symétrie*)

Cousin *et al.* [21] proposent un couplage entre l'écoulement interne du triple disque simulé par le code *Fluent* (approches RANS et LES) et l'écoulement externe simulé par le code *ARCHER* (approche DNS). Les profils moyens de vitesse V à la sortie de l'orifice sont comparés à des mesures par fil chaud sur une maquette à l'échelle 24/1. La vitesse V définie par l'équation 5.20 est la vitesse mesurée par le fil chaud. La dimension du fil n'est pas négligeable par rapport à la dimension de l'orifice de sortie et une intégration spatiale des résultats de simulation le long du fil a été nécessaire.

$$V = \frac{\sum_i \sqrt{v_i^2 + w_i^2}}{\sum_i i} \quad (5.20)$$

Les figures 5.44 et 5.45 présentent les profils moyens de vitesses issus des simulations *Fluent*, des mesures par fil chaud et de la présente simulation (DNS). Dans la direction x , le profil moyen extrait de la présente simulation est très proche des mesures expérimentales. Notamment, le gradient au voisinage de la paroi est correctement reproduit. Dans la direction y , le gradient au voisinage de la paroi est proche des mesures expérimentales cependant les valeurs au centre sont sous estimées. Comparativement aux autres simulations, l'effet des parois est mieux reproduit par la simulation DNS. Les fluctuations ne peuvent être présentées car la convergence n'est pas atteinte. Le temps de calcul important ne permettait pas de faire converger les fluctuations dans le temps imparti.

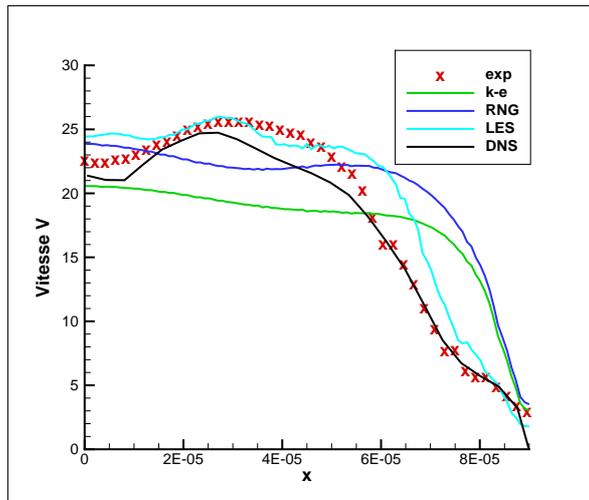


FIGURE 5.44: Profils moyens de vitesse V dans la direction x à la sortie de l'orifice

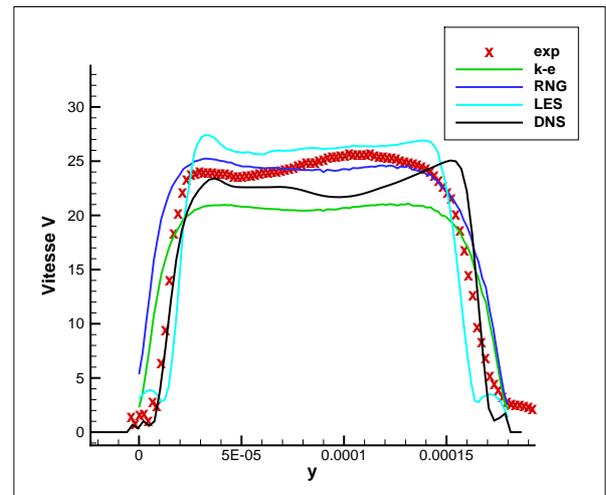


FIGURE 5.45: Profils moyens de vitesse V dans la direction y à la sortie de l'orifice

5.3.3 Analyse spectrale de l'écoulement interne (simulation) et externe (expérience)

À partir du suivi temporel des vitesses au point y_1 dont la position est définie sur la figure 5.46, nous calculons la densité spectrale de puissance du suivi temporel de vitesse. Nous ne disposons pas de l'écoulement externe pour cette simulation. Nous utilisons des photographies, dans le plan yz d'expansion du jet, de l'écoulement externe observé expérimentalement pour les mêmes conditions de fonctionnement. Nous extrayons les contours des images binarisées. La caractérisation spatiale offerte par ce signal est transposée dans l'espace temporel en utilisant la vitesse débitante $W_d = 16.55 \text{ m.s}^{-1}$. La densité spectrale de puissance PSD de ce signal temporel est alors calculée. Ainsi, nous obtenons une PSD caractéristique de l'écoulement interne simulé et une PSD caractéristique de l'écoulement externe observé expérimentalement. Le temps de simulation ne permet pas de rendre compte des fluctuations basses fréquences sur les PSD néanmoins le signal est suffisant en ce qui concerne les hautes fréquences.

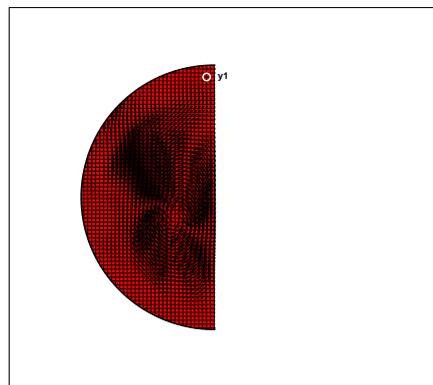


FIGURE 5.46: Position du point y_1

La figure 5.47 présente les PSD des 3 composantes de vitesses calculées et la PSD amplifiée d'un facteur 10^4 du signal temporel d'interface afin de comparer le 4 signaux sur la même figure.

Les PSD des vitesses présentent deux fréquences discernables $f_1 \approx 200 \text{ kHz}$ et $f_2 \approx 400 \text{ kHz}$. Une seule fréquence $f_1 \approx 200 \text{ kHz}$ est visible sur la PSD du signal d'interface.

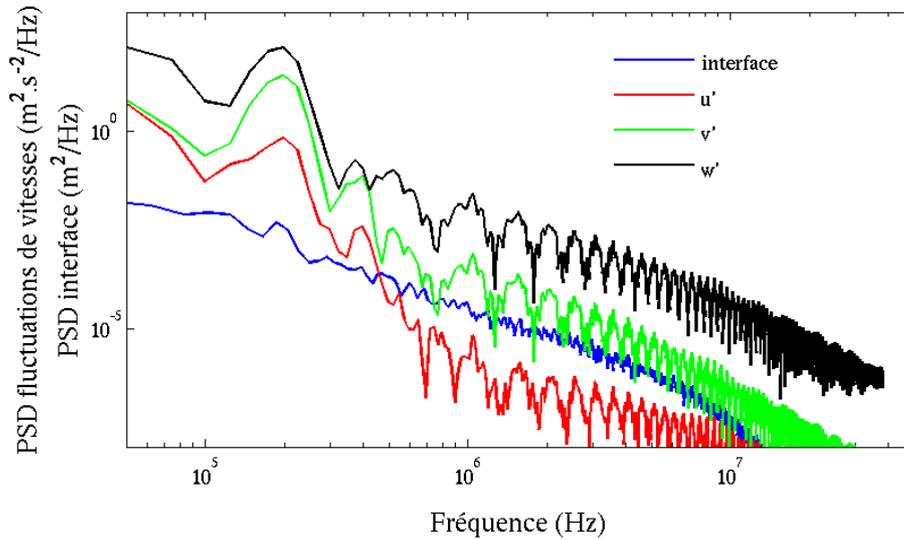


FIGURE 5.47: Densité spectrale de puissance du signal de vitesse et du signal d'interface ($\Delta t_{simulation} \approx 10^{-8} \text{ s}$)

La figure 5.48 présente une photographie binarisée de l'écoulement externe. La fréquence $f_1 \approx 200 \text{ kHz}$ correspond à une longueur d'onde $\lambda_1 \approx 85 \mu\text{m}$. Cette longueur d'onde λ_1 est identifiable sur l'image. Bien que les forces aérodynamiques recourbent les ligaments observables, la fréquence spatiale de leur développement, notamment au voisinage de l'orifice, semble proche de cette longueur d'onde.

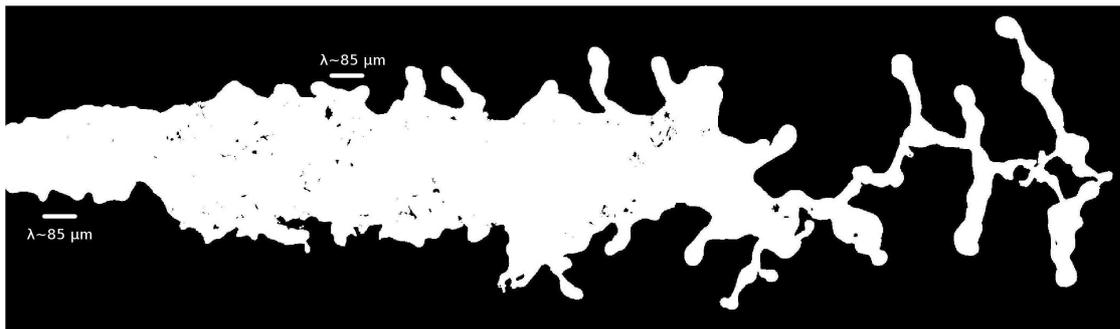


FIGURE 5.48: Photographie expérimentale binarisée de l'écoulement externe

5.4 Conclusion

En 2D, la méthode de frontière immergée développée permet de simuler simultanément l'écoulement interne et l'écoulement externe produits par des buses d'atomisation en utilisant les mêmes méthodes numériques. Les écoulements produits par une buse convergente ont été

simulés. L'écoulement interne a fait l'objet de mesures PIV par Scholz *et al.* [85]. L'écoulement interne simulé présente une transition précoce au phénomène de *flip* mais le profil moyen de vitesse axiale est cohérent avec les mesures de Scholz *et al.*[85]. Le profil des fluctuations de vitesse axiale est éloigné des résultats expérimentaux. Néanmoins, Scholz *et al.* indiquent que la dynamique de mesure du système PIV est trop faible pour capter correctement les faibles fluctuations ($u'/U_c < 0.05$) [84]. De plus, le nombre de mesure PIV (80 à 100) semble faible pour obtenir un traitement statistique correct. La première maille de la simulation sort également de la sous-couche visqueuse. Dans ce cadre, il est difficile de conclure sur les fluctuations. Les écoulements produits par des canaux présentant différents rapports L/D ont également été simulés. Ces géométries correspondent aux géométries produisant les écoulements externes étudiées par Sander et Weigand [83]. Cependant, leur étude a porté sur l'effet du profil moyen et des fluctuations introduits en condition d'entrée d'un calcul diphasique. Pour notre part, nous avons simulé l'écoulement interne et l'écoulement externe. Cette stratégie permet d'étudier les liens entre les deux écoulements. L'étude de l'interaction entre les écoulements s'est basée sur une analyse spectrale. L'analyse spectrale a permis d'identifier les composantes fréquentielles (temporelles) énergétiques des signaux de vitesses et de les comparer aux composantes fréquentielles (spatiales ou temporelles) énergétiques des signaux d'interfaces (contours spatiaux ou suivi temporel de la longueur d'interface). Les cas étudiés ont montré que la distribution fréquentielle de l'écoulement interne engendre la même distribution fréquentielle de l'écoulement externe. Autrement dit, les échelles temporelles de l'écoulement interne pilotent les échelles spatiales de l'écoulement externe. Une analyse comparative des configurations a été menée. Cette analyse s'est basée sur certaines des quantités dont l'influence a été étudiée par Sander et Weigand [83] : échelle intégrale, taux de turbulence, flux d'énergie cinétique. Ces grandeurs ne permettent pas de prédire l'importance de la déformation de l'interface pour les cas étudiés. La taille des zones de vorticité entre la phase liquide et gazeux est apparue comme déterminante. Cette observation est en accord avec les observations de Sander et Weigand [83], de Wu *et al* [110] ou encore de Faeth *et al.* [31].

En 3D, la méthode de frontière immergée développée permet de simuler l'écoulement interne d'une géométrie quelconque de buse d'atomisation. L'écoulement interne d'un injecteur triple disque mono-trou a été simulé. Les mesures expérimentales disponibles [21] ont permis de valider la reproduction de l'écoulement par la simulation. La présence de vortex *ring* dans le disque 2 a été observée sur l'écoulement numérique. Ces vortex *ring* sont à l'origine d'une structure hélicoïdale dans l'orifice de décharge (disque 3). Cette structure se manifeste dans le plan de sortie de la buse par la création de vortex contra-rotatif. Ces vortex ont été mis en évidence par les simulations de Triballier [100], de Cousin [21], ou encore de Ren et Sayar [78]. Dans la continuité des travaux menés en 2D, une analyse spectrale des liens entre l'écoulement interne et l'écoulement externe a été proposée. Ne disposant pas de la simulation simultanée des écoulements interne et externe, l'écoulement externe a été caractérisé grâce à des photographies de l'écoulement pour les mêmes conditions de fonctionnement. Les PSD caractéristiques des deux écoulements présentent une fréquence commune. Cette fréquence semble correspondre à la fréquence spatiale de développement des ligaments visibles sur les photographies.

En conclusion, les travaux menés en 2D ont permis de démontrer que les échelles temporelles de l'écoulement interne sont transmises en terme d'échelles spatiales à l'écoulement externe.

L'analyse comparative des configurations a permis de nuancer cette dépendance. En effet, le transfert de quantité de mouvement entre les deux écoulements paraît également dépendant de la taille des zones de vorticité entre les phases liquide/gaz. Les travaux menés en 3D ont permis de simuler l'écoulement interne d'un injecteur triple disque par une approche DNS. La création de vortex *ring* dans le disque 2 apparaît comme l'origine de la structure de l'écoulement secondaire dans l'orifice de décharge.

Conclusion

Le code ARCHER permet la simulation numérique directe d'écoulements diphasiques dans un domaine fluide régulier. Le domaine de calcul est nécessairement rectangulaire ($2D$) ou cubique ($3D$). Une contribution majeure de ce solveur, pour la modélisation et la compréhension de l'atomisation primaire, a été sa capacité à simuler l'atomisation d'un jet liquide haute vitesse. Dans ce type de simulation, une turbulence synthétique est injectée en condition initiale. Dans certaines situations, telles que la simulation de l'atomisation liquide du jet issu d'un injecteur triple disque, l'importance de la prise en compte de la structure de l'écoulement interne a été démontrée. Fondamentalement, il s'agit de qualifier et de quantifier l'effet de l'écoulement au sein de l'injecteur sur l'atomisation primaire d'un jet liquide. Afin d'éviter une interaction parasite entre différentes approches numériques, il est souhaitable de construire un outil utilisant les mêmes approches numériques pour les deux écoulements.

Ainsi, l'objectif de ce travail était de rendre le code ARCHER capable de simuler des écoulements confinés, éventuellement diphasiques, dans des géométries complexes. Pour atteindre cet objectif, il a été nécessaire d'implanter, de valider et d'étendre aux cas diphasiques une méthode de frontière immergée.

Le chapitre 1 rappelle, dans une première partie, les méthodes utilisées par le code ARCHER afin de simuler des écoulements diphasiques dans un domaine fluide régulier. Cette partie mentionne notamment que la résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection engendre la nécessité d'introduire une condition limite sur la pression qui est inconsistante avec le problème physique et qui entraîne une couche limite numérique dans la détermination de la pression. Une seconde partie présente les différentes approches existantes permettant de simuler des écoulements monophasiques dans un domaine fluide irrégulier sur un maillage cartésien. L'approche retenue, pour sa compatibilité avec le code ARCHER et sa flexibilité, est la méthode des *Ghost-cell*. Le chapitre 2 présente la mise en œuvre de cette méthode qui consiste en la construction d'un champ fictif de vitesse et de pression à l'extérieur du domaine fluide irrégulier. Ce chapitre évoque notamment la nécessité d'incorporer une relaxation dans la construction du champ de vitesse fictif afin de remédier à une divergence numérique de la méthode. Le chapitre 3 vérifie le comportement de la méthode, implantée en configurations $2D$ et $3D$, sur un écoulement de canal ($2D$), un écoulement de conduite ($3D$) et sur un écoulement autour d'un cylindre ($2D$). L'application de la méthode pour la simulation d'un écoulement de canal a permis de montrer que la méthode est d'ordre 2. Cependant, les simulations des écoulements de conduite ($3D$) et des écoulements autour d'un cylindre ($2D$) ont montré que l'efficacité de la méthode est affectée d'une forte dépendance à la position de la frontière immergée. Malgré un bon comportement de la méthode, avec une diminution

de l'erreur avec le maillage, l'ordre 2 de la méthode n'est pas retrouvée; il s'agit d'un ordre formel. La dépendance de l'erreur de la méthode à la position de la frontière immergée, s'est avérée critique lors de la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds de 40, où un coefficient de portance non nul a été trouvé lorsque la position du cylindre était dissymétrique par rapport au maillage. Des alternatives à l'interpolation de pression classiquement utilisée dans le formalisme des *Ghost-cell* ont été testées sur la résolution de l'équation de Poisson d'un cas test analytique. L'interpolation linéaire est apparue comme la plus cohérente et efficace au regard de la problématique posée. Le chapitre 4 présente l'extension de la méthode de frontière immergée implantée pour le traitement des écoulements diphasiques. Une première partie aborde les problématiques liées à la modélisation physique de l'interaction entre une paroi et deux fluides non-miscibles et s'intéresse à leurs répercussions sur leurs contreparties numériques. Une deuxième partie évoque la mise en œuvre des choix de modélisation et montre la mise en place du couplage nécessaire entre la méthode de frontière immergée et la méthode *Ghost Fluid*. Enfin, une dernière partie vérifie le comportement de la méthode sur la relaxation d'une goutte posée sur une surface solide avec et sans gravité pour un angle de contact constant, et sur l'évolution exponentielle de la longueur d'étalement d'une goutte en situation de mouillage partiel pour un modèle d'angle de contact dynamique. Globalement, un bon comportement de la méthode est observé. Le chapitre 5, dans une première partie, présente l'application de la méthode de frontière immergée, étendue aux écoulements diphasiques (2D), avec la simulation simultanée d'écoulements internes et externes issus d'une buse convergente et de canaux à différents rapports L/D . Une analyse spectrale est proposée afin d'étudier les liens entre les deux écoulements. Cette analyse est complétée par une analyse comparative des différentes buses basée sur des grandeurs caractéristiques de la turbulence. Dans une seconde partie, la méthode implantée en version 3D est appliquée à la simulation de l'écoulement au sein d'un injecteur triple disque. La structure de l'écoulement est présentée et dans la continuité des travaux menés en 2D une analyse spectrale est proposée. Cette analyse se base sur l'écoulement interne simulé et sur l'écoulement externe observé expérimentalement.

Les travaux menés mettent en exergue des erreurs sur la détermination de la pression. Le point de départ de ces erreurs est l'utilisation de la méthode de projection classiquement employée dans la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. La méthode de projection est issue d'un théorème mathématique qui montre qu'un champ à divergence non nulle peut être décomposé en un champ à divergence nulle et en un champ à divergence non nulle. Le champ à divergence nulle est supposé solution de la variable de vitesse et le champ à divergence non nulle comme solution de la variable de pression. Cependant, cette décomposition implique de résoudre une équation elliptique sur la pression et requiert l'ajout d'une condition limite en pression artificielle. En effet, la condition limite en pression est déduite du théorème mathématique et est inconsistante avec le problème physique. Ainsi, malgré l'efficacité de la méthode, en terme de temps de calcul et de recouvrement des solutions, une couche limite numérique est introduite et influe sur la précision des solutions sur les bords du domaine fluide. Ce point est crucial dans son interaction avec la méthode de frontière immergée. Effectivement, la position quelconque des bords du domaine fluide sur le maillage cartésien implique des couches limites numériques d'épaisseur variable. Cette variabilité entraînant des erreurs différentes est par exemple à l'origine du coefficient de portance non nul relevé sur la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre ($Re = 40$) dont la position est décalée sur le maillage.

Dans la littérature, le problème est souvent posé différemment et reflète un grand sujet de questionnement autour des méthodes de frontières immergées : la *véritable* condition limite sur la vitesse est-elle respectée à la fin du pas de projection, ou autrement dit, la divergence nulle de la cellule cartésienne coupée par la frontière est-elle respectée. Des méthodes ont été développées en se basant sur le respect de la condition limite sur la vitesse et sur la divergence nulle des cellules mixtes (fluide/solide). Afin de clarifier la problématique et d'apporter des éléments de réponse, ces méthodes ainsi que la méthode classique ont été testées sur la résolution de l'équation de Poisson d'un cas test analytique. Il en ressort que la construction d'un opérateur d'interpolation sous la contrainte de la condition limite en vitesse et/ou de la divergence nulle ne permet pas de garantir une approximation de la solution égale à une interpolation *exacte*. Cela signifie que les contraintes peuvent être respectées sans amélioration de la solution en pression et en vitesse. La méthode de projection lie intrinsèquement les variables de pression et de vitesse et impose la condition limite en pression. Ainsi dans le formalisme de la méthode, une bonne approximation de ces variables repose sur une imposition correcte des conditions limites naturelles en vitesse et artificielle en pression. Cependant, l'exactitude de l'interpolation de la condition limite en pression est conditionnée par l'interaction entre son ordre et la forme du champ de pression interpolé. L'interpolation linéaire a été retenue tant pour sa simplicité que pour la faible dissymétrie du système linéaire qu'elle engendre. La problématique telle qu'elle ressort dans ce travail suggère qu'il serait souhaitable d'effectuer une interpolation de la pression à une distance constante de la frontière ce qui permettrait d'éviter la variabilité des erreurs de pression en fonction de sa position.

L'investigation des solutions du traitement numérique de la ligne triple, qui peuvent être tirées des modélisations physiques existantes, montre plusieurs difficultés. La condition limite en vitesse communément admise des équations de Navier-Stokes sur une paroi est une condition de non glissement. Dans ce contexte, il est difficile de concevoir le mouvement d'une interface, entre deux fluides non-miscibles, sur une paroi et la contrainte de cisaillement diverge au voisinage de la paroi. De plus, la modélisation de la jonction entre l'interface et la paroi, c'est à dire l'angle de contact, est basée sur un bilan des énergies de surface mais les énergies de surface entre le solide et chacun des fluides sont inconnues et certaines études montrent leur dépendance à la vitesse de la ligne de contact (ou point triple en 2D), à l'état de surface du solide ou encore au champ de vitesse au voisinage de la paroi. La valeur de l'angle de contact est aussi dépendante de l'échelle considérée, à l'échelle nanométrique, par exemple, sa valeur est supposée constante. Fondamentalement, la problématique de la ligne de contact relève de la problématique de la jonction entre sa description moléculaire et sa description dans le formalisme des milieux continus. Dans une approche continue, une coupure spatiale de la problématique avant l'échelle nanométrique permet d'éviter la singularité sur la contrainte de cisaillement. L'angle de contact imposé est une modélisation des effets microscopiques. Néanmoins, cette modélisation est dépendante de la taille de la maille et la convergence des résultats est biaisée. De plus, la variation de l'angle de contact avec la vitesse de la ligne triple se base sur des lois empiriques ou des développements asymptotiques qui ne permettent pas de traiter des situations où la vitesse de la ligne triple est élevée. Ainsi, le modèle de Jiang a été préféré pour son absence de divergence lorsque la vitesse de la ligne triple est importante. Ce travail ne considère pas les angles d'avancée et de recul impliqués dans le régime quasi-statique mais cette facette peut être intéressante à investiguer puisque, par exemple, elle peut

éventuellement jouer un rôle sur le *flip* observé au sein de la buse convergente. Le traitement de la ligne triple est une clé de la simulation simultanée des écoulements internes et externes, il est souhaitable d'introduire son traitement dans la version tridimensionnelle.

Les travaux conduits sur les liens entre l'écoulement interne et l'écoulement externe mettent en avant l'interaction entre trois paramètres : la distribution fréquentielle de l'énergie de l'écoulement interne, l'intensité énergétique de cette distribution et le transfert de quantité de mouvement entre les deux écoulements. La distribution fréquentielle de l'énergie de l'écoulement interne pilote la distribution fréquentielle de l'énergie de l'écoulement externe. Cela signifie qu'entre les deux écoulements, il y a conversion des échelles temporelles en échelles spatiales. Il s'agit du but premier d'un système d'atomisation basé sur une buse d'injection : convertir l'énergie cinétique en énergie de surface. L'analyse proposée permet d'identifier les échelles de conversion privilégiées par la distribution fréquentielle de l'énergie de l'écoulement interne. Une analyse comparative entre les différentes configurations révèle que les zones de vorticité sont les zones où la conversion prend place. Cela signifie qu'une intensité énergétique importante de l'écoulement interne peut ne pas donner lieu à une forte conversion si la taille des zones de transfert de quantité de mouvement est trop faible. Afin d'apporter des éléments plus solides sur les liens entre les deux écoulements, il est souhaitable d'utiliser l'outil numérique conçu pour mener des investigations plus poussées. Notamment, il est envisageable d'effectuer des *expériences numériques* où chacun des paramètres pourrait être étudié séparément à l'instar de la démarche de Sander et Weigand [83].

En addition aux suggestions reportées plus avant, certaines évolutions du code sont souhaitables. Une meilleure capture des couches limites au voisinage des parois et une meilleure maîtrise des erreurs de pression pourraient être acquises par l'implantation d'une méthode de raffinement de maillage. Un code de raffinement de maillage automatique (AMR) est en développement au laboratoire. L'intégration des deux compétences est une perspective intéressante. La mise en place du couplage entre la méthode *Level set* et une méthode *Volume Of Fluid* déjà réalisée dans le cas du code en l'absence de frontière immergée permettrait d'envisager des simulations simultanées à haute vitesse proche de configurations réelles des systèmes d'injection utilisés par l'industrie automobile notamment. Dans cette optique de rapprochement vers les procédés industriels, tant le traitement de frontière mobile que l'extraction de la géométrie à partir de CAO sont souhaitables. La simulation de cas réels implique une optimisation plus poussée du code en terme de temps de calcul même si des efforts sur la parallélisation MPI et sur le pré-conditionnement du système linéaire ont déjà été effectués. D'ores et déjà, l'étude des phénomènes d'occlusions gazeuses peut être menée par la version 2D et ouvrir une porte sur les effets de l'injection effervescente à faible densité de bulles ou de la cavitation à poche.

Bibliographie

- [1] S. Afkhami, S. Zaleski, and M. Bussmann. A mesh-dependent model for applying dynamic contact angles to vof simulations. *Journal of Computational Physics*, 228 :5370–5389, 2009.
- [2] P. Angot, C-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81 :497–520, 1999.
- [3] N. Ashgriz and J. Y. Poo. Coalescence and separation in binary collisions of liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 221 :183–204, 1990.
- [4] T. Aslam. A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *Journal of Computational Physics*, 193 :349–355, 2004.
- [5] B. Atkinson, M. P. Brocklebank, C. C. H. Card, and J. M. Smith. Low reynolds number developing flows. *AIChE J.*, 15 :548–553, 1969.
- [6] R. W. Baber and D. Emerson. The influence of knudsen number on the hydrodynamic development length within parallel plate micro-channels. *Advances in fluid mechanics IV WIT Press, Southampton, UK*, pages 207–216, 2002.
- [7] E. Balaras. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed cartesian grids in large-eddy simulations. *Computers and Fluids*, 33 :375–404, 2004.
- [8] I. Bayer and C Megaridis. Contact angle dynamics in droplets impacting on flat surfaces with different wetting characteristics. *Journal of Fluid Mechanics*, 558 :415–449, 2006.
- [9] R. Berger, E. et Wille. Peroidic flow phenomena. *Annual Review in Fluids Mechanics*, 4 :313–340, 1972.
- [10] P. A. Berthelsen and O. M. Faltinsen. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Journal of Computational Physics*, 227 :4354–4397, 2008.
- [11] L. A. Bertozzi. The mathematics of moving contact lines in thin liquid films. *The notice of AMS*, 45 :689–697, 1998.
- [12] T.D. Blake, M. Bracke, and Y.D. Shikhmurzaev. Experimental evidence of nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle. *Physics of fluids*, 11 :1995–2007, 1999.
- [13] D. Bonn, J. Eggers, J. Indekeu, J. Meunier, and E. Rolley. Wetting and spreading. *Reviews of modern physics*, 81 :739–806, 2009.
- [14] R. Y. Chen. Flow in the entrance region at low reynolds numbers. *J. Fluids Eng.*, 95 :153–158, 1973.

- [15] Y. Cheny. *La Méthode LS STAG*. PhD thesis, Université Henri Poincaré Nancy, 2009.
- [16] Y. Cheny and O. Botella. The ls stag method : A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. *Journal of Computational Physics*, 229 :1043–1076, 2010.
- [17] P.H. Chiu, R.K. Lin, and T.W.H. Sheu. A differentially interpolated direct forcing immersed boundary method for predicting incompressible navier-stokes equations in time-varying complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 229(12) :4476–4500, 2010.
- [18] J. Choi, R.C. Oberoi, J. R. Edwards, and J. A. Rosati. An immersed boundary method for complex incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 224 :757–784, 2007.
- [19] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, 22 :745–762, 1968.
- [20] J. Cousin. *Prédiction des distributions granulométriques par le formalisme d'entropie maximum. Applications à plusieurs injecteurs mécaniques*. PhD thesis, Université de Rouen, 1996.
- [21] J. Cousin, A. Berlemont, T. Ménard, and S. Grout. Primary breakup simulation of a liquid jet discharged by a low-pressure compound nozzle. *Computers and Fluids*, 63 :165–173, 2012.
- [22] R. Coutanceau, M. et Bouard. Experimental determination of main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1 steady flow. *Journal of Fluids Mechanics*, 79 :4018–4037, 1977.
- [23] R. G. Cox. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. part 1. viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 168 :169–194, 1986.
- [24] A. Cristallo and R. Verzicco. Combined immersed boundary/large-eddy-simulations of incompressible three dimensional complex flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 77 :3–26, 2006.
- [25] C. Dumouchel, J. Cousin, and K. Triballier. On the role of the liquid flow characteristics on low-weber number atomization processes. *Experiments in Fluids*, 38 :637–647, 2005.
- [26] J. B. Dupont and D. Legendre. Numerical simulation of static and sliding drop with contact angle hysteresis. *Journal of Computational Physics*, 229 :2453–2478, 2010.
- [27] E. Dussan and S. Davis. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *Journal of Fluids Mechanics*, 65 :71–95, 1974.
- [28] W. E and J. G. Liu. Projection method i : Convergence and numerical boundary layers. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 :1017–1057, 1995.
- [29] J. J. Eggers and H. A. Stone. Characteristic lengths at moving contact lines for a perfectly wetting fluid : the influence of speed on the dynamic contact angle. *Journal of Fluid Mechanics*, 505 :309–321, 2004.
- [30] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 161 :35–60, 2000.
- [31] G.M. Faeth, L.-P. Hsiang, and P.-K. Wu. Structure and breakup properties of sprays. *International Journal of Multiphase Flow*, 21 :99–127, 1995.

- [32] R. Fedkiw and X.-D. Liu. The ghost fluid method for viscous flows. *Progress in Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, 1998.
- [33] T. Gao, Y. H. Tseng, and X. Y. Lu. An improved hybrid cartesian/immersed boundary method for fluid–solid flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 55 :1189–1211, 2007.
- [34] R. Ghas, R. Mittal, and H. Dong. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 225 :528–553, 2007.
- [35] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, 105 :354–366, 1993.
- [36] S. Goldstein. *Note on the conditions at surface of contact of a fluid with a solid body*, In *Modern Development in Fluid Mechanics*. Modern Development in Fluid Mechanics, 1965.
- [37] M. Gorokhovski and M. Herrmann. Modeling primary atomization. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40 :343–366, 2008.
- [38] S. Grout. *Analyse multi-échelle des processus d’atomisation et des sprays : Application aux injecteurs triple disque*. PhD thesis, Université de Rouen, 2009.
- [39] J.L. Guermond, P. Mineev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :6011–6045, 2006.
- [40] A. Hammouti. *Simulation numérique directe en différence finie de l’écoulement d’un fluide incompressible en présence d’interfaces rigides*. PhD thesis, Ecole des Ponts et Chaussees, 2009.
- [41] C. O. Harahap and h. Miura. Derivation of jump conditions in multiphase incompressible flows with singular forces. *Plasma and Fusion Research*, 3 :S1052–S1052, 2008.
- [42] X.Y. Hu, B.C. Khoo, N.A. Adams, and F.L. Huang. A conservative interface method for compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 219 :553–578, 2006.
- [43] C. Huh and L.E Scriven. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *Journal of Colloid and Interface Science*, 35 :85–101, 1971.
- [44] J.C.R. Hunt, A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. Technical report, Center for Turbulence Research Report CTR-S88, 1988.
- [45] T. Ikeno and T. Kajishima. Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 226 :1485–1508, 2007.
- [46] H. Ji, F. S. Lien, and E. Yee. A robust and efficient hybrid cut-cell/ghost-cell method with adaptive mesh refinement for moving boundaries on irregular domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :432–448, 2008.
- [47] G.S. Jiang and C. W. Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126 :202–228, 1996.
- [48] M. Kang, R. P. Fedkiw, and X. D. Liu. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *Journal of Scientific Computing*, 15 :323–360, 2000-09-01.
- [49] S. Kang, G. Iaccarino, F. Ham, and P. Moin. Prediction of wall-pressure fluctuation in turbulent flows with an immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 228 :6753–6772, 2009.

- [50] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J. P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier–stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34 :651–684, 2000.
- [51] J. Kim, D. Kim, and H. Choi. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 171 :132–150, 2001.
- [52] M. Klein, A. Sadiki, and J. Janicka. A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, 186 :652–665, 2003.
- [53] O. A. Ladyzhenskaia. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach, 1969.
- [54] M. C. Lai and C. S. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160 :705–719, 2000.
- [55] B. Lavi and A. Marmur. The exponential power law : partial wetting kinetics and dynamic contact angles. *Colloids and surfaces A*, 250 :409–414, 2004.
- [56] D.V. Le, B.C. Khoo, and J. Peraire. An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries. *Journal of Computational Physics*, 220 :109–138, 2006.
- [57] Z. Li and M. C. Lai. The immersed interface method for the navier stokes equations with singular forces. *Journal of Computational Physics*, 171 :822–842, 2001.
- [58] Z. Li, M. C. Lai, G. He, and H. Zhao. An augmented method for free boundary problems with moving contact lines. *Computers and Fluids*, 39 :1033–1040, 2010.
- [59] M. N. Linnick and H. F. Fasel. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 204 :157–192, 2005.
- [60] H. Liu, S. Krishnan, S. Marella, and H.S. Udaykumar. Sharp interface cartesian grid method ii : A technique for simulating droplet interactions with surfaces of arbitrary shape. *Journal of Computational Physics*, 210 :32–54, 2005.
- [61] X. D. Liu, R. P. Fedkiw, and M. Kang. A boundary condition capturing method for poisson’s equation on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 160 :151–178, 2000.
- [62] M. Maglio and D. Legendre. Numerical simulation of drop-wall interaction : sliding and coalescence. In *7th international conference on Multiphase Flow*, 2010.
- [63] S. Manservigi and R. Scardovelli. A variational approach to the contact angle dynamics of spreading droplets. *Computers and Fluids*, 38 :406–424, 2009.
- [64] S. Marella, S. Krishnan, H. Liu, and H.S. Udaykumar. Sharp interface cartesian grid method i : An easily implemented technique for 3d moving boundary computations. *Journal of Computational Physics*, 210 :1–31, 2005.
- [65] D. M McQueen and C. S. Peskin. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart. ii. contractile fibers. *Journal of Computational Physics*, 82 :289–297, 1989.

- [66] T. Ménard. *Développement d'une méthode Level Set pour le suivi d'interface Application à la rupture de jet*. PhD thesis, Université de Rouen, 2007.
- [67] T. Ménard, S. Tanguy, and A. Berlemont. Coupling level set/vof/ghost fluid methods : Validation and application to 3d simulation of the primary break up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow*, 33 :510–524, 2007.
- [68] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, and A. von Loebbecke. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Computational Physics*, 227 :4825–4852, 2008.
- [69] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, pages 239–261, 2005.
- [70] J Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulations of flow in complex geometries. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.
- [71] J.Blair Perot. An analysis of the fractional step method. *Journal of Computational Physics*, 108 :51–58, 1993.
- [72] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10 :252–271, 1972.
- [73] A. Pinelli, I.Z. Naqavi, U. Piomelli, and J. Favier. Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier-stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229 :9073–9091, 2010.
- [74] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [75] T. Qian, X. P. Wang, and P. Sheng. A variational approach to moving contact line hydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 564 :333–360, 2006.
- [76] L. Quartapelle. *Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations*. Birkhuser Basel, 1993.
- [77] D. Rempfer. On boundary conditions for incompressible navier-stokes problems. *Appl. Mech. Rev.*, 59 :107–125, 2006.
- [78] W. M. Ren and H. Sayar. Influence of nozzle geometry on spray atomization and shape for port fuel injector. Technical report, SAE Technical Paper, 2001.
- [79] M. Renardy, Y. Renardy, and J. Li. Numerical simulation of moving contact line problems using a volume-of-fluid method. *Journal of Computational Physics*, 171 :243–263, 2001.
- [80] T. Roques-Carnes, V. Mathieu, and A.R Gigante. Experimental contribution to the understanding of the dynamics of spreading of newtonian fluids : Effect of volume, viscosity and surfactant. *Journal of Colloid and Interface Science*, 344 :180–197, 2010.
- [81] A. A. Saha and S. K. Mitra. Effect of dynamic contact angle in a volume of fluid (vof) model for a microfluidic capillary flow. *Journal of Colloid and Interface Science*, 339 :461–480, 2009.
- [82] E.M. Saiki and S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : Application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, 123 :450–465, 1996.
- [83] W. Sander and B. Weigand. Direct numerical simulation and analysis of instability enhancing parameters in liquid sheets at moderate reynolds numbers. *Phys. of Fluids*, 20 :053301–18, 2008.

- [84] J. Scholz, K. Roetmann, and V. Beushausen. Piv investigations of internal slit nozzle flows and their influence on liquid sheet breakup. In *Institute for liquid atomisation and spray systems*, 2002.
- [85] J. Scholz, K. Roetmann, and V. Beushausen. Influence of the internal flow conditions of slit nozzles on the stability of liquid sheets : Experimental results. In *International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems*, 2003.
- [86] Y. D. Shikhmurzaev. Moving contact lines in liquid/liquid/solid systems. *Journal of Fluids Mechanics*, 334 :211–249, 1997.
- [87] Y.D. Shikhmurzaev. Singularities at the moving contact line. mathematical, physical and computational aspects. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 217 :121–133, 2006.
- [88] S. Sikalo, C. Tropea, and E.N. Ganic. Dynamic wetting angle of a spreading droplet. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 29(7) :795–802, 2005.
- [89] W.A. Sirignano and C. Mehring. Review of theory of distortion and disintegration of liquid streams. *Progress in Energy and Combustion Science*, 26 :609–655, 2000.
- [90] G. L.G. Sleijpen and H. A. Van der Vorst. An overview of approaches for the stable computation of hybrid bicg methods. *Applied Numerical Mathematics*, 19 :235–254, 1995.
- [91] P. D.M. Spelt. A level-set approach for simulations of flows with multiple moving contact lines with hysteresis. *Journal of Computational Physics*, 207 :389–404, 2005.
- [92] Universite Paris sud 11. Cours en ligne. www.meca.u-psud.fr/cours, 2007.
- [93] K. Taira and T. Colonius. The immersed boundary method : A projection approach. *Journal of Computational Physics*, 225 :2118–2137, 2007.
- [94] K. Taira and T. Colonius. Three-dimensional flows around low-aspect-ratio flat-plate wings at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 623 :187–207, 2009.
- [95] S. Tanguy. *Développement d'une méthode de suivi d'interface. Applications aux écoulements diphasiques*. PhD thesis, Universit de Rouen, 2004.
- [96] S. Tanguy and A. Berlemont. Application of a level set method for simulation of droplet collisions. *International Journal of Multiphase Flow*, 31 :1015–1035, 2005.
- [97] R. Temam. Sur l'approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (i). *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 32 :135–153, 1969.
- [98] P. Thompson and S. Troian. A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces. *Nature*, 389 :360–362, 1997.
- [99] L. J. P. Timmermans, P. D. Minev, and F. N. Van de Vosse. An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22 :673–688, 1996.
- [100] K. Triballier. *Étude énergétique des processus d'atomisation primaire : application au comportement des injecteurs essence basse pression à triple disque*. PhD thesis, Université de Rouen, 2003.
- [101] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications, 1988.
- [102] Y. Tseng and J. H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 192 :593–623, 2003.

- [103] H.S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampungoon, and A. Khanna. A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 174 :345–380, 2001.
- [104] R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman. Symmetry-preserving discretization of turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, 187 :343–368, 2003.
- [105] Z. Wang, J. Fan, and K. Cen. Immersed boundary method for the simulation of 2d viscous flow based on vorticity–velocity formulations. *Journal of Computational Physics*, 228 :1504–1520, 2009.
- [106] R. Weiqing and W. E. Boundary conditions for moving contact line problem. *Physics of fluids*, 19 :1–15, 2007.
- [107] A. Wiegmann and K. Bube. The explicit-jump immersed interface method : Finite difference methods for pdes with piecewise smooth solutions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 :827–862, 2000.
- [108] C. Wieselsberger. New data on the laws of fluid resistance. Technical report, National advisory committee for aeronautics, 1922.
- [109] M. C. T. Wilson, J. L. Summers, Y. D. Shikhmurzaev, A. Clarke, and T. D. Blake. Nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle : Slip models versus experiment. *Phys. Rev. E*, 73 :041606–, 2006.
- [110] P. Wu, R. Miranda, and G. Faeth. Effects of initial flow conditions on primary breakup of nonturbulent and turbulent liquid jets. In *32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1994.
- [111] W. Xie and P. E. Desjardin. A level set embedded interface method for conjugate heat transfer simulations of low speed 2d flows. *Computers & Fluids*, 37(10) :1262–1275, December 2008.
- [112] S. Xu. The immersed interface method for simulating prescribed motion of rigid objects in an incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 227 :5045–5071, 2008.
- [113] S. Xu and Z. Wang. Systematic derivation of jump conditions for the immersed interface method in three-dimensional flow simulation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27 :1948–1980, 2006.
- [114] S. Xu and Z. J. Wang. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 216 :454–493, 2006.
- [115] S. Xu and Z. J. Wang. A 3d immersed interface method for fluide/solid interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :2068–2086, 2008.
- [116] J. Yang and E. Balaras. An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 215 :12–40, 2006.
- [117] J. Yang and F. Stern. Sharp interface immersed-boundary/level-set method for wave–body interactions. *Journal of Computational Physics*, 228 :6590–6616, 2009.
- [118] X. Yang, X. Zhang, Z. Li, and G. W. He. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations. *Journal of Computational Physics*, 228 :7821–7836, 2009.

- [119] T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, and W. Shyy. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156(2) :209–240, 1999.
- [120] S. Zahedi, K. Gustavsson, and G. Kreiss. A conservative level set method for contact line dynamics. *Journal of Computational Physics*, 228(17) :6361–6375, 2009.