



HAL
open science

Systemes dynamiques quantiques ouverts

Dominique Fellah

► **To cite this version:**

Dominique Fellah. Systemes dynamiques quantiques ouverts. Physique mathématique [math-ph]. Université du Sud Toulon Var, 2004. Français. NNT: . tel-00845012

HAL Id: tel-00845012

<https://theses.hal.science/tel-00845012>

Submitted on 16 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

UFR DE SCIENCES ET TECHNIQUES

N°

Doctorat de Mathématiques

Spécialité : Physique Mathématique

présenté et soutenu publiquement par

Dominique FELLAH

le jeudi 19 février 2004

**SYSTEMES DYNAMIQUES QUANTIQUES
OUVERTS**

Thèse dirigée par Claude-Alain PILLET

Jury :

Mr Jean-Michel COMBES, *Président*

Mr Stéphane ATTAL, *Rapporteur*

Mr Stéphane DE BIEVRE

Mr Hans-Rudolf JAUSLIN, *Rapporteur*

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier le Professeur Jean-Michel COMBES d'avoir accepté la présidence de ce jury.

Je suis honoré par la présence du Professeur Stéphane DE BIÈVRE, spécialiste des systèmes quantiques.

J'adresse tous mes remerciements aux deux rapporteurs ; le Professeur Hans-Rudolf JAUSLIN et Monsieur Stéphane ATTAL.

Le Professeur Claude-Alain PILLET a fait preuve d'une patience à toute épreuve à mon égard. Il est impossible ici de résumer tout ce qu'il a pu m'apporter pendant ces longues années. Je dirai simplement pour conclure que j'ai éprouvé de la joie à côtoyer un tel milieu scientifique.

Avant-propos

On étudie quelques opérateurs qui interviennent lors du couplage d'un système dynamique ouvert et d'un environnement, habituellement appelé «réservoir».

Si \mathcal{S} désigne le petit système et \mathcal{R} le réservoir, la question naturelle est de connaître l'évolution d'une observable A de \mathcal{S} , donnée par la dynamique du système complet $\mathcal{S} + \mathcal{R}$. Les phénomènes de mémoire ou de retard interviennent.

Historiquement, les physiciens, théoriciens et expérimentateurs, se sont toujours intéressés à ce problème d'interaction comme en témoignent les ouvrages pédagogiques de Dirac [DIR], de Landau [LL1] [LL2] et plus récemment les travaux de Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc et Grynberg résumés dans [CDG]. L'équation maîtresse tient un rôle important dans la théorie de la décohérence décrite et interprétée dans l'ouvrage de Omnès [OM].

Le modèle mathématique est parfaitement connu et amène de façon inéluctable à l'équation « intégral-différentielle » de Volterra, appelée souvent équation maîtresse généralisée. Lorsque le terme de couplage est faible et tend vers zéro, quel est le comportement de cette équation ?

On arrive aux résultats conjecturés par Van Hove ([VH1] [VH2]) et à l'opérateur associé au noyau de l'opérateur intégral de Volterra que nous avons introduit au premier chapitre. La preuve rigoureuse de la dynamique asymptotiquement markovienne fut donnée par Davies dans une série d'articles [D1], [D2]. Il découvre un nouvel opérateur, appelé dans la suite générateur de Davies, car c'est en fait un « bon candidat » à une évolution markovienne comme il l'a démontré lorsque le réservoir est un espace de Fock fermionique. On reprend dans le premier chapitre les résultats de Davies en insistant sur le lien entre la méthode des projections NPRZ et l'équation de Volterra. On propose une méthode de calcul formel de ces opérateurs et on note que le générateur de Davies n'est pas nécessairement complètement positif. Ce dernier point est souvent acquis automatiquement dans les modèles physiques où l'on dispose d'un état qui demeure invariant par la dynamique.

La récente théorie mathématique des systèmes dynamiques quantiques, résumée par Pillet [P3], donne une solide formulation générale de l'étude d'un système dynamique quantique ouvert, en y introduisant les algèbres de von Neumann où les différentes topologies apportent de nouveaux concepts ; en particulier la notion de «Liouvillien» . Les algèbres de von Neumann considérées dans la suite admettent un état normal et fidèle de sorte que l'on puisse appliquer la théorie de Tomita-Takesaki [T] pour définir les opérateurs liouvilliens.

Lorsque l'on se préoccupe des propriétés d'ergodicité, on doit étudier, selon le critère de von Neumann [P3], la simplicité de la valeur propre 0 du liouvillien. Ce qui explique une manipulation assez constante des différents liouvilliens dans le chapitre trois afin de découvrir des propriétés spectrales. On retrouve quelques résultats spectraux, dont certains ont été établis de façon plus abstraite par Dereziński et Jacksic [DJ3]. Mais notre méthode est complètement différente et fait plus appel aux calculs des fonctions à deux points. Le lien établi entre le noyau de Volterra et la fonction self-énergie (opérateur de déplacement pour les physiciens) est un résultat intéressant car il conduit à une décomposition en somme directe du générateur de Davies où interviennent les valeurs spectrales du liouvillien du système.

On se limite cependant à quelques restrictions. Dans presque tous les cas, le système \mathcal{S} est représenté par un espace de Hilbert de dimension finie.

Un cas de dimension infinie est traité dans le chapitre 2, \mathcal{S} représente une famille finie d'oscillateurs harmoniques quantiques tandis que la conception du réservoir est assimilée à un espace de Fock bosonique. On prouve le retour à l'équilibre lorsque toutes les températures des oscillateurs sont égales. On aurait pu appliquer une version générale du théorème de Frigerio due à Fagnola-Rebolledo [FR1], mais notre méthode montre que l'on obtient la relaxation exponentielle selon la forme de la condition initiale de l'équation maîtresse. Notre démarche consiste à transformer l'équation maîtresse du physicien (agissant sur les matrices de densité) en une équation aux dérivées partielles du premier ordre que l'on résout par la méthode des systèmes caractéristiques. Des estimations asymptotiques permettent le passage à la limite et précisent la vitesse de convergence.

A température non nulle, on utilise la représentation d'Araki-Woods dans laquelle le calcul des fonctions à deux points produit les expressions de l'opérateur de Van Hove et du générateur de Davies. Différentes comparaisons sont effectuées selon la nature des liouvilliens utilisés. Lorsqu'il y a qu'un seul réservoir alors le générateur de Davies associé au liouvillien standard et celui associé au \mathcal{C} -liouvillien ont le même spectre que celui construit par l'approche hamiltonienne. Résultat qui n'est plus vrai s'il y a au moins deux

réservoirs à températures distinctes.

Dans le dernier chapitre, on aboutit à une évolution markovienne d'une matrice de densité du système lorsque le réservoir à température nulle est l'espace Fock symétrique construit sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et lorsque le terme d'interaction du réservoir est un champ de Segal $\Phi(\mathbf{h})$ où \mathbf{h} est une fonction *rationnelle* de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. On explicite une représentation d'une algèbre de von Neumann commutative qui interprète la dynamique de l'environnement $\Phi(\mathbf{h})$ comme un processus gaussien stationnaire. La caractérisation de Hida ([HI1], [HH]) des processus gaussiens stationnaires et multiples markoviens est liée à la rationalité de la fonction \mathbf{h} . Ce qui nous montre comment le retournement d'un processus de Markov fournit une dynamique markovienne pour la matrice de densité. Le modèle physique simple auquel s'appliquent ces résultats est celui de l'équation de Langevin. C'est en définitive un résultat très mathématique. Pour l'appliquer à d'autres modèles physiques, il faut étudier l'existence d'une mesure invariante d'un processus de Markov. Rechercher cette mesure, parmi les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{4N} , revient à résoudre la difficile équation de Fokker-Planck stationnaire. Notre approche conduit en fait à un problème de filtrage qu'on doit pouvoir expérimenter par des simulations numériques. C'est l'avantage de ce point de vue par rapport à d'autres comme la théorie des probabilités quantiques [MEY],[PA] ou le calcul dit de Malliavin.

A température non nulle, la méthode peut s'appliquer mais alors le réservoir ne doit pas être à température d'équilibre si on veut conserver une réalité physique. La construction initiale des algèbres est mathématiquement accessible grâce à la représentation d'Araki-Woods et la démarche stochastique est totalement similaire.

Table des matières

Remerciements	i
Avant-propos	iii
Notations	III
1 Systèmes dynamiques quantiques à couplage faible	1
1.1 Introduction	2
1.2 Systèmes quantiques	4
1.2.1 Quelques définitions	4
1.2.2 Théorie modulaire	6
1.2.3 Résultats de Dereziński-Jakšić-Pillet	10
1.2.4 Semi-groupes quantiques	15
1.3 Résultats de Davies	22
1.3.1 Équation NPRZ	22
1.3.2 Couplage faible	24
1.4 Retour à l'équilibre	36
1.4.1 Théorèmes de Frigerio	36
1.4.2 Résultat de Fagnola-Rebolledo	38
2 Exemples	41
2.1 Oscillateurs harmoniques	41
2.1.1 Système d'un seul oscillateur harmonique	42
2.1.2 Système formé de d oscillateurs harmoniques	56
2.2 Système Spin-Boson	62
2.2.1 Description du modèle	62
2.2.2 Calculs de \mathbf{K} , \mathbf{K}^\sharp	65
2.2.3 Conséquences	65
2.3 Représentation d'Araki-Woods	69
2.3.1 Description du modèle «Système-Réservoir»	71
2.3.2 Calculs de générateurs \mathbf{K}^\sharp	77

2.3.3	Résultat d'ergodicité	83
3	Théorie spectrale des opérateurs de Lindblad	85
3.1	Méthode des projections	86
3.1.1	Formule de Feshbach	86
3.1.2	Cas particulier	89
3.1.3	Expression de la résolvante	91
3.1.4	Lien avec le résultat de Davies	93
3.2	Étude du système couplé à une famille de réservoirs	95
3.2.1	Représentation du système	95
3.2.2	Construction d'Araki Woods avec plusieurs réservoirs	96
3.2.3	Décomposition selon la méthode de Feshbach	99
3.2.4	Cas d'un seul réservoir	100
3.2.5	Relations entre ces différents opérateurs	101
3.2.6	Cas général	103
4	Systèmes dynamiques quantiques à couplage fort	105
4.1	Modèle abstrait	106
4.1.1	Couplage Système-Réservoir	106
4.1.2	Propriétés de la famille $(e^{i\Phi t})_{t \in \mathbb{R}}$	109
4.1.3	Décomposition d'un processus gaussien stationnaire	115
4.1.4	Propriété N-Markovienne	117
4.2	Équations d'interaction de ρ et de z	122
4.2.1	Équations et estimations de ρ et de z	122
4.2.2	Évolution markovienne de ρ_π et de z_π	124
4.3	Exemple. Equation de Langevin	127
	Perspectives	131
A	Annexe du chapitre 1	133
A.1	Preuve du théorème 1.1	133
A.2	Preuve de la proposition 1.1	134
A.3	Calculs	135
A.3.1	Couplage faible	137
A.3.2	Propriétés algébriques de \mathbb{K}^\sharp	138
B	Annexe du chapitre 2	141
B.1	Oscillateur harmonique	141
B.1.1	Justifications du calcul de l'opérateur de Van Hove	141
B.1.2	Construction du semi-groupe $e^{t\mathbf{K}}$	142
B.1.3	Preuve du théorème 2.1	146

B.2	Système Spin-Boson	161
B.3	Représentation de Araki-Woods	163
B.3.1	CCR-algèbre et le théorème d'Araki-Segal	163
B.3.2	Isomorphisme entre $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})$ et $\mathfrak{H} \otimes \tilde{\mathfrak{H}}$	165
B.3.3	Construction de Chaiken & Araki-Woods	165
B.3.4	Relations CCR-AW. Fonctions à deux points	168
B.3.5	Démonstration du théorème 2.3	170
B.4	Ergodicité : preuve du théorème 2.4	171
C	Annexe du chapitre 3	177
C.1	Preuve du théorème 3.3	177
D	Annexe du chapitre 4	181
D.1	Algèbre de von Neumann Φ	181
D.2	Preuve du théorème 4.4	186
D.3	Équation de ρ_t	190
	Bibliographie	195

Notations

$A \equiv B$	par définition l'expression A est égale à B
χ_E	fonction indicatrice de l'ensemble E
\mathcal{B}	éléments d'un espace de Banach
\mathcal{U}, \mathcal{B}	\mathbf{C}^* -algèbres
$A, B, \dots, M,$	éléments d'une algèbre de von Neumann
$\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathfrak{M}$	algèbre de von Neumann
$\mathfrak{H}, \mathcal{H}$	espace de Hilbert
Ω, ξ, Ψ	éléments d'un espace de Hilbert
(ξ, ψ)	produit scalaire des éléments ξ et ψ d'un espace de Hilbert
$\Gamma_s(\mathfrak{H})$	espace Fock bosonique (ou symétrique) construit sur l'espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$	algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes
$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$	espace des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$	espace des opérateurs à trace d'un espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\mathcal{L}_+^1(\mathfrak{H})$	espace des opérateurs auto-adjoints positifs à trace d'un espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H})$	espace des matrices de densité d'un espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})$	espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert \mathfrak{H}
$\text{CCR}(\mathcal{D})$	la CCR algèbre définie par le sous espace \mathcal{D} d'un espace de Hilbert \mathfrak{H}
$[A, B]$	commutateur des opérateurs A et B, $[A, B] \equiv AB - BA$
$\{A, B\}$	anticommutateur des opérateurs A et B, $\{A, B\} \equiv AB + BA$
$\mathbb{1}$	l'identité sur une algèbre d'opérateurs
I	l'identité sur un espace de Banach
Δ	opérateur modulaire
J	conjugaison modulaire
$\mathcal{B}(\mathcal{B})$	l'espace des opérateurs bornés sur l'espace de Banach \mathcal{B}
(\mathfrak{H}, π)	représentation sur \mathfrak{H}
$(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$	représentation cyclique sur \mathfrak{H} de vecteur cyclique Ω
$(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$	représentation cyclique définie par l'état ω
\mathfrak{H}_ω	espace de Hilbert d'une représentation cyclique définie par l'état ω

\mathbf{K}	opérateur de Van Hove
\mathbf{K}^\sharp	générateur de Davies
L_Ω	le Ω -liouvillien
$L_{\mathcal{C}}$ ou L_∞	le \mathcal{C} -liouvillien
$\pi^\sharp(A)$	représentation duale
$J\pi(A)J$	
$a^*(f)$	opérateur de création sur l'espace de Fock symétrique $\Gamma_s(\mathfrak{H})$
$a(f)$	opérateur d'annihilation sur l'espace de Fock symétrique $\Gamma_s(\mathfrak{H})$
$\phi(f)$	champ d'opérateur de Segal $\phi(f) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(f))$
$W(f)$	opérateur de Weyl $W(f) \equiv e^{i\phi(f)}$
$E[X]$	espérance d'un processus X
$E[X \mathcal{G}]$	espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu \mathcal{G}

Chapitre 1

Systemes dynamiques quantiques à couplage faible

Dans ce chapitre, on précise les outils mathématiques nécessaires à la compréhension des problèmes abordés. En particulier, on rappelle le lien entre l'opérateur modulaire et le Ω -liouvillien d'un système dynamique quantique KMS. L'équation maîtresse, via la méthode des projections NPRZ, est formulée de façon générale à l'aide des algèbres de von Neumann qui nous donnent certaines souplesses pour la suite. Cependant toutes les algèbres de von Neumann considérées, issues de la physique, seront σ -finies, admettant donc un état fidèle et normal. Ainsi, la théorie modulaire de Tomita-Takesaki ([BR1],[T]) s'y applique. En particulier la notion de Ω -liouvillien¹ ([DJP]) coïncide avec celle de liouvillien standard lorsque Ω est un vecteur cyclique et séparableur.

On présente alors de façon formelle les différents opérateurs « liouvilliens » des systèmes perturbés :

$$\begin{aligned}L_V &= L + V - JVJ; \\L_p &= L + V - J\Delta^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} V \Delta^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} J, \quad p \geq 1;\end{aligned}$$

qui seront utilisés par la suite.

Quelques commentaires sur les groupes positifs montrent qu'en général un opérateur de type Davies \mathbf{K}^\sharp ,

$$\mathbf{K}^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \alpha^t K \alpha^{-t} \right\},$$

et intervenant dans les couplages « Système-Réservoir », ne définit pas nécessairement un groupe complètement positif. Il faut étudier le signe de la

1. On peut rencontrer l'orthographe Liouvillien; on a suivi la tradition qui tolère les minuscules comme gaussien, hamiltonien, markovien, ...

transformée de Fourier de la fonction « à deux points ».

Lorsqu'on obtient réellement un opérateur de Lindblad (caractéristique de la complète positivité), \mathbf{K}^\sharp se décompose sous la forme suivante

$$\mathbf{K}^\sharp(A) = i [H, A] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_{\alpha}, A] V_{\alpha}^* + V_{\alpha} [A, V_{\alpha}^*] \right).$$

Et on peut s'intéresser au « retour » à l'équilibre. Les résultats de Frigerio et ses extensions, dues à Chebotarev Fagnola et Rebolledo sur le comportement asymptotique des groupes complètement positifs, pourront alors s'appliquer sous certaines conditions, précisées à la fin de ce chapitre.

1.1 Introduction

L'une des principales raisons de l'utilisation de l'équation maîtresse de la Mécanique Quantique par les Physiciens est la simplification obtenue lorsque les effets de mémoire sont négligeables. Les résultats de limite faible, conjecturés par Van Hove ([VH1],[VH2]), ont été prouvés, de façon rigoureuse, par Davies pour certains systèmes.

Dans l'article [D1], il considérait un système en dimension finie couplé à un réservoir de chaleur à une infinité de degré de liberté ; la dynamique du système ouvert devenait markovienne lorsque le couplage était « faible ». Quelques restrictions, dues aux conditions techniques, étaient nécessaires : d'une part l'hamiltonien du système de spectre discret et celui du réservoir, selon la modélisation des espaces Fock fermioniques, satisfaisaient les relations d'anticommutation (CAR) et d'autre part l'échelle des temps prenait la forme $\tau = \lambda^2 t$ en restant constant avec le terme de force du couplage $\lambda \searrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ (limite de Van Hove).

Comme première application, il démontre le retour à l'équilibre de Gibbs pour un système de dimension finie faiblement couplé à un réservoir à la température non nulle.

La généralisation à des réservoirs bosoniques avec des couplages physiquement réalistes (minimal, dipolaire, . . .) reste un problème largement ouvert qui ne sera pas abordé dans cette thèse.

Dans l'article [D2], Davies aboutissait à une généralisation, très concise, vers une limite faible des solutions de certaines équations d'évolution de Volterra que l'on rappelle .

Soit P une projection de norme 1 sur un espace de Banach $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1$, avec $\mathcal{B}_0 = P\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1 = (1 - P)\mathcal{B}$.

Dans l'interprétation usuelle «Système-Réservoir», l'espace \mathcal{B} est une \mathbf{C}^* -algèbre représentant les observables du système couplé, l'espace \mathcal{B}_0 est

l'algèbre des observables du système alors que \mathcal{B}_1 décrit les observables de son environnement (réservoir).

Dans la représentation d'interaction, la dynamique du système couplé est décrite par le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} f'(t) = \lambda A(t)f(t) & , \quad t \geq 0; \\ f(0) = f_0 \in \mathcal{B}_0; \end{cases}$$

où $(A(t))_{\geq 0}$ est une famille fortement continue d'opérateurs bornés sur \mathcal{B} . Sans restriction de généralité, on peut admettre :

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad PA(t)P = 0 .$$

Pour décrire l'évolution du système, on pose :

$$x_\lambda(\tau) = Pf(\tau/\lambda^2), \quad \tau \geq 0,$$

où f est solution de (\mathcal{S}) avec la condition initiale $f_0 \in \mathcal{B}_0$.

La limite de Van Hove de la dynamique (dite aussi limite faible) du système est alors donnée par la fonction :

$$x(\tau) \equiv \lim_{\lambda \searrow 0} x_\lambda(\tau).$$

Transformant (\mathcal{S}) en une équation intégrale et en appliquant la projection P , on obtient l'équation satisfaite par la fonction x_λ :

$$x_\lambda(\tau) = f(0) + (\widetilde{K}_\lambda x_\lambda)(\tau), \quad (1.1)$$

où \widetilde{K}_λ est un opérateur intégral de Volterra de noyau $K_\lambda(\tau, \sigma)$ qui est donné par :

$$(\widetilde{K}_\lambda g)(\tau) = \int_0^\tau d\sigma K_\lambda(\tau, \sigma)g(\sigma);$$

et

$$K_\lambda(\tau, \sigma) = \int_{\sigma\lambda^{-2}}^{\tau\lambda^{-2}} ds PA(s)V_\lambda(s, \sigma\lambda^{-2})(1-P)A(\sigma\lambda^{-2})P.$$

L'opérateur V_λ , agissant sur \mathcal{B} , est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(V_\lambda(t, s)) = \lambda(1-P)A(t)(1-P)V_\lambda(t, s) & , \quad 0 \leq s \leq t; \\ V_\lambda(s, s) = 1. \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir des conditions suffisantes **(H 1)** et **(H 2)** ci-dessous pour l'existence de la limite de Van Hove.

Théorème 1.1 (Davies [D2])

Soit $\tau_0 > 0$ et $X = (C^0([0, \tau_0]; \mathcal{B}_0), \|\cdot\|)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, \tau_0]$ à valeurs dans \mathcal{B}_0 .

On suppose :

(H 1) il existe $C > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \leq 1$, et tout $0 \leq \sigma \leq \tau \leq \tau_0$

$$\|K_\lambda(\tau, \sigma)\| \leq C;$$

(H 2) l'opérateur \widetilde{K}_λ converge fortement sur X vers l'opérateur de Volterra \widetilde{K}_0 sur X de noyau constant K_0 , opérateur borné sur \mathcal{B}_0 .

Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sup_{0 \leq \tau \leq \tau_0} \|x_\lambda(\tau) - e^{\tau K_0} f_0\| \right) = 0.$$

On propose dans l'annexe A (page 133) une preuve différente, basée essentiellement sur le lemme de Gronwall (lemme A.1).

1.2 Systèmes quantiques

1.2.1 Quelques définitions

Les méthodes récentes (selon [BR1], [JP3], [P3], [RU]) construisent l'algèbre des observables d'un système dynamique à l'aide des algèbres de von Neumann.

Dans tout ce qui suit, \mathfrak{M} désigne une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} .

Les éléments de \mathfrak{M} sont associés aux observables d'un système mécanique quantique. L'évolution dans le temps des observables est décrite par un groupe $(\tau^t)_t$.

Les états physiques du système sont représentés par les états de \mathfrak{M} .

Un état ω de \mathfrak{M} est une forme linéaire de \mathfrak{M} à valeurs dans \mathbb{C} telle que ω est positive :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \quad \omega(A^* A) \geq 0,$$

et

$$\omega(I) = 1.$$

Ce qui équivaut à la continuité de ω (prop 2.3.11 dans [BR1]) et

$$\|\omega\| = \sup\{|\omega(A)|; \|A\| = 1\} = 1.$$

Définition 1.1

Un état ω de \mathfrak{M} est dit normal s'il existe une matrice de densité ρ de $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ ($\rho^* = \rho$, $\rho \geq 0$ et $\mathbf{tr}(\rho) = 1$) telle que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \quad \omega(A) = \mathbf{tr}(\rho A).$$

Un état ω de \mathfrak{M} est dit fidèle si,

$$\forall A \in \mathfrak{M} : \quad \omega(A^* A) = 0 \iff A = 0.$$

Définition 1.2

Un W^* -système dynamique est un couple (\mathfrak{M}, τ) où \mathfrak{M} est une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} et $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau^t$ est un groupe faiblement continu de W^* -automorphismes de \mathfrak{M} ; c'est-à-dire que, pour tout état ω de \mathfrak{M} et tout élément A de \mathfrak{M} , l'application $t \mapsto \omega(\tau^t(A))$ est continue sur \mathbb{R} .

Définition 1.3

Un système dynamique quantique est un triplet $(\mathfrak{M}, \tau, \omega)$ où (\mathfrak{M}, τ) est un W^* -système dynamique, ω est un état fidèle normal et τ -invariant :

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \omega(\tau^t(A)) = \omega(A).$$

Parmi les diverses représentations des algèbres de von Neumann, on utilisera essentiellement la représentation canonique cyclique (la construction GNS Gelfand, Naimark et Segal) :

si \mathfrak{M} est une algèbre de von Neumann, à tout état normal ω , on peut lui associer :

- un espace de Hilbert \mathfrak{H}_ω ;
- une représentation normale $\pi_\omega : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H}_\omega)$;
- un vecteur cyclique $\Omega \in \mathfrak{H}_\omega$, l'ensemble $\mathfrak{M}\Omega$ est dense dans \mathfrak{H}_ω et tel que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \quad \omega(A) = (\Omega, \pi_\omega(A)\Omega).$$

Si ω est de plus fidèle alors π_ω est injective ce qui permet d'identifier \mathfrak{M} et $\pi_\omega(\mathfrak{M})$.

Le vecteur Ω de \mathfrak{H}_ω est dit séparant si l'assertion suivante est satisfaite :

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \quad \pi_\omega(A)\Omega = 0 \implies A = 0.$$

Cette notion assure alors que π_ω est injective ; de plus on a l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

- (c) Ω est cyclique pour $\pi_\omega(\mathfrak{M})$;
- (s) Ω est séparant pour $\pi_\omega(\mathfrak{M})'$.

Le résultat suivant peut être trouvé dans [BR1].

Théorème 1.2

Soit $(\mathfrak{M}, \tau, \omega)$ un système dynamique quantique et $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ la représentation canonique cyclique de \mathfrak{M} associée à ω .

Alors il existe un et un seul opérateur L de \mathfrak{H} tel que :

- (i) $L^* = L$,
- (ii) $\forall t, \forall A \in \mathfrak{M} : \pi(\tau^t(A)) = e^{itL}\pi(A)e^{-itL}$,
- (iii) $L\Omega = 0$.

On dit que L est le Ω -liouvillien de τ (ou l'hamiltonien d'équilibre) du système.

1.2.2 Théorie modulaire

• Résultats de Tomita-Takesaki

Lorsqu'une algèbre de von Neumann \mathfrak{M} est munie d'un état normal et fidèle ω , elle peut être identifiée, par sa représentation GNS $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega)$, à l'algèbre de von Neumann de $\mathfrak{N} = \pi_\omega(\mathfrak{M})$ dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\omega)$.

Dans la suite, on considère les algèbres de von Neumann contenues dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ où \mathfrak{H} est un espace de Hilbert.

Soit \mathfrak{N} une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} et $\Psi \in \mathfrak{H}$ un vecteur cyclique et séparant. L'opérateur $A\Psi \mapsto A^*\Psi$ définit un opérateur anti-linéaire, non borné de domaine dense dans \mathfrak{H} et fermable, il admet un prolongement S sur \mathfrak{H} de décomposition polaire

$$S = J\Delta^{1/2},$$

où la phase J est l'opérateur anti-linéaire appelé la conjugaison modulaire et le module Δ est appelé l'opérateur modulaire, associés au couple (\mathfrak{N}, Ψ) .

Le résultat principal de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki ([BR1], [T]) est :

$$\begin{aligned} J\mathfrak{N}J &= \mathfrak{N}', \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Delta^{it}\mathfrak{N}\Delta^{-it} &= \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

De plus, les relations suivantes,

$$\begin{aligned} J\Psi &= \Psi, \quad J = J^* \quad , \quad J^2 = \mathbf{1}; \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Delta^{it}\Psi &= \Psi \quad , \quad \Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J; \\ \forall (A, B) \in \mathfrak{N}^2, \quad (\Delta^{1/2}A\Psi, \Delta^{1/2}B\Psi) &= (JA^*\Psi, JB^*\Psi) \\ &= (B^*\Psi, A^*\Psi), \end{aligned}$$

seront souvent utilisées.

La théorie modulaire associe le cône naturel positif \mathfrak{H}^+ , c'est-à-dire la fermeture de $\{AJ(A)\Psi : A \in \mathfrak{N}\}$ dans \mathfrak{H} où $J(A) = JAJ$.

\mathfrak{H}^+ engendre \mathfrak{H} et il est auto-polaire :

$$\mathfrak{H}^+ = \{\eta : \eta \in \mathfrak{H} / \forall \xi \in \mathfrak{H}^+ ; (\xi, \eta) \geq 0\}.$$

Soit $\xi \in \mathfrak{H}^+$ alors ξ est cyclique pour \mathfrak{N} si et seulement si ξ est séparant pour \mathfrak{N} .

La propriété intrinsèque du cône naturel positif s'utilise sous la forme suivante :

soit $\xi \in \mathfrak{H}^+$ cyclique, on peut associer au couple (\mathfrak{N}, ξ) la conjugaison modulaire J_ξ et le cône naturel positif \mathfrak{H}_ξ^+ , la fermeture de $\{AJ_\xi(A)\Psi : A \in \mathfrak{N}\}$, alors :

$$J_\xi = J \quad , \quad \mathfrak{H}_\xi^+ = \mathfrak{H}^+.$$

Le second résultat important est la caractérisation des états normaux de \mathfrak{N} : pour tout état ω normal de \mathfrak{N} , il existe un et un seul $\xi \in \mathfrak{H}^+$ tel que :

$$\forall A \in \mathfrak{N} \quad , \quad \omega(A) = (\xi, A\xi).$$

• Etats KMS

Exemple 1.1

Le modèle de la mécanique statistique quantique des systèmes **finis** à la température T et d'hamiltonien H est défini par les données suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathcal{L}(\mathbb{C}^n); \\ \beta &= \frac{1}{kT} \quad , \quad k \text{ constante de Boltzmann}; \\ \tau_t(A) &= e^{itH} A e^{-itH}; \\ \omega(A) &= \frac{\mathbf{tr}(A e^{-\beta H})}{\mathbf{tr}(e^{-\beta H})} \quad , \quad \text{état d'équilibre de Gibbs.} \end{aligned}$$

Soient A et B deux éléments de \mathfrak{M} , la fonction $z \mapsto \tau_z(B)$ est un polynôme de la variable complexe z et à valeurs dans \mathfrak{M} et la fonction, définie par

$$F_{A,B}(z) = \omega(A\tau_z(B)),$$

est un polynôme en z et à valeurs complexes.

De plus, grâce à la propriété de cyclicité de la trace ($\mathbf{tr}(ABC) = \mathbf{tr}(CAB) = \mathbf{tr}(BCA)$), on a aisément :

$$(\star) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad , \quad \omega(A\tau_z(B)) = \omega(\tau_{z-i\beta}(B)A),$$

en particulier, les conditions dites aux bords :

$$(CB) \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, F_{A,B}(t) &= \omega(A\tau_t(B)); \\ F_{A,B}(t + i\beta) &= \omega(\tau_t(B)A). \end{cases}$$

Et pour $z = i\beta$ dans (\star) , il vient :

$$\omega(BA) = \omega(A\tau_{i\beta}(B)).$$

Lorsque que le système n'est pas fini et que l'hamiltonien H vérifie

$$\mathbf{tr}(e^{-\beta H}) < \infty,$$

la démarche précédente montre que la fonction $F_{A,B}$ est analytique dans l'ouvert $\mathcal{D}_\beta = \{z/0 < \text{Im}(z) < \beta\}$ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \omega(A\tau_{t+i\beta}(B)) = \omega(\tau_t(B)A);$$

et elle satisfait les conditions (CB) aux bords de \mathcal{D}_β .

Ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 1.4

Soit (\mathfrak{M}, τ) un W^* -système dynamique. Soit β un réel.

Un état normal ω est un (β, τ) -KMS état si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) pour tout $(A, B) \in \mathfrak{M}^2$, il existe une fonction $F_{A,B}$ analytique dans l'ensemble ouvert \mathcal{D}_β , où :

$$\mathcal{D}_\beta = \begin{cases} \{z : z \in \mathbb{C} / 0 < \text{Im}(z) < \beta\}, & \text{si } \beta > 0; \\ \{z : z \in \mathbb{C} / \beta < \text{Im}(z) < 0\}, & \text{si } \beta < 0; \\ \mathbb{R} & \text{si } \beta = 0; \end{cases}$$

et telle que :

- (2) $F_{A,B}$ est continue et bornée sur $\overline{\mathcal{D}_\beta}$;

- (3) pour tout réel t :

$$\begin{aligned} F_{A,B}(t) &= \omega(A\tau_t(B)); \\ F_{A,B}(t + i\beta) &= \omega(\tau_t(B)A). \end{aligned}$$

En pratique, on peut se limiter à A et B appartenant à une sous \mathbf{C}^* -algèbre invariante par τ et dense dans \mathfrak{M} .

On montre que si ω est un état (β, τ) -KMS alors il est τ -invariant et vérifie en particulier

$$\omega(BA) = \omega(A\tau_{i\beta}(B)) = \omega(\tau_{-i\beta/2}(A)\tau_{i\beta/2}(B)).$$

Il est important de noter ([BR2] prop 5.3.3) que chacune de ces dernières égalités réalise une condition suffisante à l'obtention de la propriété KMS.

Si $\beta = 0$ alors ω est un état dit état de trace ($\omega(AB) = \omega(BA)$).

De sorte que, lorsque $\beta \neq 0$, la propriété KMS peut être considérée comme une mesure par τ du défaut de trace de l'état ω .

Pour $\beta = -1$, on dit simplement que ω est τ -état KMS. Dans ce cas si $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ est la représentation canonique cyclique de $(\mathfrak{M}, \tau, \omega)$ alors Ω_ω est séparant pour $\pi_\omega(\mathfrak{M})''$.

• Relation entre le Ω -liouvillien et l'opérateur modulaire

Soit $(\mathfrak{M}, \tau, \omega)$ un système dynamique quantique, on lui associe sa représentation canonique cyclique $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$, on désigne par Δ_ω et J_ω l'opérateur modulaire et la conjugaison modulaire, les opérateurs modulaires associés au couple $(\pi_\omega(\mathfrak{M}), \Omega_\omega)$ et σ_t^ω le groupe modulaire :

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad , \quad \sigma_t^\omega(A) = \pi_\omega^{-1}(\Delta_\omega^{it} \pi_\omega(A) \Delta_\omega^{-it}).$$

La propriété KMS et le groupe d'automorphismes modulaires sont liés par le théorème de Takesaki-Winnink ([T], [BR2] Thm 5.3.10) : le groupe d'automorphismes modulaires $(\sigma_t^\omega)_t$ est l'unique groupe à un paramètre d'automorphismes de \mathfrak{M} qui vérifie la condition KMS pour $\beta = -1$.

Les propriétés de Δ_ω et de J donnent :

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathfrak{M}^2 \quad , \quad \omega(BA) &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(B)\pi_\omega(A)\Omega_\omega) \\ &= (\pi_\omega(B)^* \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) \\ &= (J\Delta_\omega^{1/2} \pi_\omega(B)\Omega_\omega, J\Delta_\omega^{1/2} \pi_\omega(A)^* \Omega_\omega) \\ &= (\Delta_\omega^{1/2} \pi_\omega(A)^* \Omega_\omega, \Delta_\omega^{1/2} \pi_\omega(B)\Omega_\omega) \\ &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Delta_\omega \pi_\omega(B)\Omega_\omega) \\ &= \omega(A\sigma_{-i}(B)), \end{aligned}$$

donc ω est un σ -KMS état.

Le lien entre le groupe modulaire et la dynamique définie par le Ω_ω -liouvillien,

$$\tau_t(A) = \pi_\omega^{-1}(e^{itL_\omega} \pi_\omega(A) e^{-itL_\omega}),$$

est donné par le fait que si ω est un (β, τ) -KMS état, alors :

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathfrak{M}^2 \quad , \quad \omega(BA) &= \omega(A\tau_{i\beta}(B)) \\ &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\pi_\omega(\tau_{i\beta}(B))\Omega_\omega) \\ &= (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)e^{-\beta L_\omega}\pi_\omega(B)\Omega_\omega). \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta_\omega = e^{-\beta L_\omega}. \quad (1.2)$$

En particulier, il en résulte :

$$\tau_t = \sigma_{-\beta t}^\omega.$$

1.2.3 Résultats de Dereziński-Jakšić-Pillet

• Notion de liouvillien standard

Nous utiliserons les résultats de [DJP] de la théorie de perturbation des systèmes W^* -dynamiques.

Soit \mathfrak{H} un espace de Hilbert, $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ une algèbre de von Neumann.

On dit que le quadruplet $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, J, \mathfrak{H}^+)$ est une forme standard de \mathfrak{M} si les six conditions suivantes sont réalisées.

(s1) J est une involution anti-unitaire (anti-linéaire, $J^2 = J, J^* = J$).

(s2) \mathfrak{H}^+ est un cône positif auto-polaire :

$$\mathfrak{H}^+ = \{\eta : \eta \in \mathfrak{H} / \forall \xi \in \mathfrak{H}^+ : (\xi, \eta) \geq 0\}.$$

(s3) $J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}'$.

(s4) $JAJ = A^*$, pour tout A appartenant au centre $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ de \mathfrak{M} .

(s5) $J\Psi = \Psi$, pour tout $\Psi \in \mathfrak{H}^+$.

(s6) $AJAJ\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H}^+$, pour tout $A \in \mathfrak{M}$.

Exemple 1.2

L'exemple fondamental sera le suivant :

soit \mathfrak{N} une algèbre de von Neumann munie d'un état fidèle et normal ω , de représentation GNS $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega)$ alors $(\pi_\omega(\mathfrak{N}), \mathfrak{H}_\omega, J, \mathfrak{H}_\omega^+)$ est une forme standard de $\pi_\omega(\mathfrak{N})$, où J est la conjugaison modulaire et \mathfrak{H}_ω^+ le cône naturel positif, ces éléments sont issus de la théorie modulaire. On dira alors que $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, J, \mathfrak{H}_\omega^+)$ est la représentation standard de \mathfrak{N} .

L'un des résultats importants de [DJP] est que si (τ^t) est un groupe à un paramètre, simplement σ -faiblement continu ($\tau^s(A) \rightarrow \tau^t(A)$ lorsque $s \rightarrow t$ pour la topologie faible des opérateurs, $A \in \mathfrak{M}$) de \mathbf{C}^* -automorphismes de \mathfrak{M} alors il existe un unique opérateur L auto-adjoint de \mathfrak{H} tel que :

(L1) $\tau^t(A) = e^{itL}Ae^{-itL}$, pour tout $A \in \mathfrak{M}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(L2) $e^{itL}\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H}^+$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On dit que L est le liouvillien standard de τ .

Le noyau de cet opérateur permet de caractériser les états τ -invariants.

Par exemple :

(1) $\dim \text{Ker}L = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'états normaux τ -invariants.

(2) $\dim \text{Ker}L = 1$ si et seulement s'il existe un et un seul état normal τ -invariant.

De plus, nous avons la comparaison entre les liouvilliens.

Soit $(\mathfrak{M}, \tau, \omega)$ un système dynamique quantique et (\mathfrak{H}, Ω) sa représentation canonique cyclique de \mathfrak{M} associée à ω , ($\omega(A) = (\Omega, A\Omega)$).

Soit L un opérateur auto-adjoint de \mathfrak{H} tel que :

$$\tau^t(A) = e^{itL}Ae^{-itL},$$

alors L est le Ω -liouvillien de τ ($L\Omega = 0$) si et seulement si L est son liouvillien standard.

Les notions de Ω -liouvillien et de liouvillien standard de τ coïncident.

Dans le cas des perturbations de la dynamique τ , la question est de connaître le liouvillien standard associé.

On suppose $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, J, \mathfrak{H}^+)$ est une forme standard de \mathfrak{M} sur \mathfrak{H} et L un opérateur auto-adjoint sur \mathfrak{H} tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathfrak{M} : \tau^t(A) = e^{itL}Ae^{-itL}.$$

Soit V un opérateur affilié à \mathfrak{M} ($e^{itV} \in \mathfrak{M}$), c'est-à-dire que V vérifie :

(1) V est un opérateur sur \mathfrak{H} de domaine $D(V)$ dense dans \mathfrak{H} ;

(2) $A'D(V) \subset D(V)$, pour tout $A' \in \mathfrak{M}'$;

(3) $A'V = VA'$ sur $D(V)$, pour tout $A' \in \mathfrak{M}'$.

La formule du produit de Trotter permet de définir la dynamique

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathfrak{M} : \tau_V^t(A) = e^{it(L+V)}Ae^{-it(L+V)},$$

dès que $L+V$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(V)$.

Soit

$$L_V \equiv L + V - JVJ, \tag{1.3}$$

si L_V est essentiellement auto-adjoint sur $D(L) \cap D(V) \cap D(JVJ)$ alors L_V est le liouvillien standard de τ_V , c'est-à-dire :

(L1) $\tau_V^t(A) = e^{itL_V}Ae^{-itL_V}$, pour tout $A \in \mathfrak{M}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(L2) $e^{itL_V}\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H}^+$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• **Notion de \mathcal{C} -liouvillien**

Cette notion selon [JP5] a été utilisée dans le cadre du couple « Système-Réservoirs », les réservoirs étant des systèmes fermioniques.

Soit $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ un algèbre de von Neumann. Soit Ω un vecteur cyclique pour \mathfrak{M} , on associe la forme standard $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, J, \mathfrak{H}^+)$ de sorte que J et Δ soient la conjugaison modulaire et l'opérateur modulaire associés au couple (\mathfrak{M}, Ω) . L'espace \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} = \mathfrak{M}\Omega = \{A\Omega : A \in \mathfrak{M}\},$$

est dense dans \mathfrak{H} et considérons l'isomorphisme canonique d'espaces de Banach Ψ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\rightarrow \mathcal{C} \\ A &\rightarrow \Psi(A) = A\Omega; \\ \|A\Omega\|_\infty &\equiv \|A\|. \end{aligned}$$

Lorsque τ est un semi-groupe sur \mathfrak{M} , on définit sur \mathcal{C}

$$T^t(A\Omega) = \tau^t(A)\Omega.$$

La question est de savoir si T admet un générateur sur \mathfrak{H} dès que τ possède un générateur de la forme $L+V$.

• **Cas borné**

Soit $V = V^* \in \mathfrak{M}$ définissant un opérateur *borné* sur \mathfrak{H} , typiquement V est l'interaction de la forme

$$V = Q \otimes \varphi(\alpha),$$

où $\varphi(\alpha)$ décrit un champ fermionique.

Le semi-groupe (T_V^t) ,

$$T_V^t A \Omega = \tau_V^t(A)\Omega,$$

est un groupe d'isométries de \mathcal{C} avec

$$T_V^t A T_V^{-t} = \tau_V^t(A), T_V^t \Omega = \Omega.$$

Son générateur, noté L_∞ est appelé le \mathcal{C} -liouvillien, que l'on calcule formellement (voir [JP5]) en différentiant l'égalité

$$e^{itL_\infty} A \Omega = e^{it(L+V)} A e^{-it(L+V)} \Omega.$$

Et tenant compte de

$$L\Omega = 0 \quad , \quad J\Delta^{1/2}A\Omega = A^*\Omega \quad ,$$

alors on obtient :

$$L_\infty A \Omega = (L + V) A \Omega - (VA^*)^* \Omega.$$

D'où :

$$L_\infty = L + V - J \Delta^{1/2} V J \Delta^{1/2}. \quad (1.4)$$

Remarque 1.1

Cette égalité nécessite au moins quelques remarques.

D'une part, supposons que

$$\Delta = e^{-\beta L},$$

en tenant compte que J et iL commutent, alors une équivalence entre le liouvillien de τ , L_V donné par (1.3) et le \mathcal{C} -liouvillien L_∞ de (1.4),

$$L_\infty = e^{-\beta(L+V)/2} L_V e^{\beta(L+V)/2},$$

est vraie sur $D(e^{\beta(L+V)/2}) \cap D(e^{-\beta(L+V)/2})$.

D'autre part, L est le générateur (en pratique un Ω -liouvillien) d'une représentation issue d'une dynamique sur une algèbre de von Neumann possédant un état fidèle et normal, lorsque cette dernière est perturbée par une dérivation $[V, \cdot]$, de sorte que

$$\mathfrak{M} \ni A \longmapsto LA + VA - AV \in \mathfrak{M}$$

soit un opérateur bien défini. Alors son image par l'isomorphisme Ψ donne naturellement

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \Psi(LA + [V, A]) = L_\infty \Psi(A) \quad .$$

Enfin, on verra pour les systèmes bosoniques que les opérateurs, de la forme

$$a^\sharp(\alpha) - J \Delta^{1/2} a^\sharp(\alpha) J \Delta^{1/2},$$

se calculent aisément lorsque $a^\sharp(\alpha)$ désigne soit l'opérateur de création $a(\alpha)$ soit l'opérateur $a^*(\alpha)$ d'annihilation et $\Delta = e^{-\beta d\Gamma(\omega)}$.

Ces deux opérateurs L_V et L_∞ interviendront dans la suite dans le calcul des opérateurs de type Davies.

• Cas non borné

On rencontrera dans la suite (chapitre 2) des systèmes (finis dans le cas Spin-Boson, infinis dans le cas des oscillateurs harmoniques, . . .) couplés à un champ bosonique où interviendront naturellement des opérateurs non bornés a^* et a de création et d'annihilation. Les observables du système sont représentées par

$$\mathfrak{M}_s = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s),$$

tandis que celles du réservoir sont représentées par une algèbre de von Neumann \mathfrak{M}_r , contenue dans $\mathcal{B}(\Gamma_s(\mathfrak{H}_r))$ où $\Gamma_s(\mathfrak{H}_r)$ est l'espace de Fock symétrique construit sur l'espace de Hilbert \mathfrak{H}_r du réservoir.

On suppose que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s \otimes \mathfrak{M}_r$ caractérise les observables du couplage « Système-Réservoir » et qu'il existe un état ω normal et fidèle de sorte que la théorie modulaire s'applique. La dynamique libre, en l'absence d'interaction, est définie par un groupe $(\tau^t)_{t \in \mathbb{R}}$,

$$\tau^t(A) = e^{itL} A e^{-itL},$$

où L est un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r$ et qu'il existe un vecteur cyclique pour \mathfrak{M} , $\Omega \in \mathfrak{H}$ tel que :

$$\omega(A) = (\Omega, A\Omega) \quad , \quad L\Omega = 0.$$

On suppose que le terme d'interaction est de la forme $V = Q \otimes \Phi$ où $Q \in \mathfrak{M}_s$ (donc borné), Φ est un opérateur non borné de \mathfrak{M}_r et tel que V soit affilié à \mathfrak{M} et la dynamique pour ce couplage est donnée par :

$$\tau_V^t(A) = e^{it(L+V)} A e^{-it(L+V)}.$$

Le groupe $(T_V^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est bien défini sur \mathcal{C} . La recherche de son générateur reste un problème ouvert sauf dans des cas particuliers qui dépendent essentiellement du choix de Φ car le terme Q est un opérateur borné qui ne pose pas de réelles difficultés.

Ce qui explique le choix qui suit.

On suppose ici que $\mathfrak{M} = \mathcal{B}(\Gamma_s(\mathfrak{H}))$ pour simplifier.

On pose $L = d\Gamma(s)$ et τ_0^t la dynamique définie sur \mathfrak{M} par

$$\tau_0^t(W(\alpha)) = W(e^{its}\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{H}.$$

Soit $V = a^\sharp(f)$, $f \in \mathfrak{H}$, est un opérateur non borné affilié à \mathfrak{M} .

$D(V) = D(\sqrt{N})$ où N est l'opérateur nombre sur $\Gamma_s(\mathfrak{H})$:

$$\Psi = (\psi^{(n)})_{n \geq 0}, \quad N\Psi = (n\psi^{(n)})_{n \geq 0}, \quad D(N) = \left\{ (\psi^{(n)})_{n \geq 0} \middle/ \sum n^2 \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\}$$

et $D(N)$ est dense dans $\Gamma_s(\mathfrak{H})$, contenu dans $D(\sqrt{N})$ et $\mathfrak{M}' = \mathbb{C} \cdot 1$.

Proposition 1.1

Le semi-groupe $(T_V^t)_{t \geq 0}$ admet comme générateur

$$L_\infty = L + a^\sharp(\alpha) - J\Delta^{1/2} a^\sharp(\alpha) J\Delta^{1/2}.$$

La preuve², donnée en annexe (A.2, page 134), s'appuie sur des estimations usuelles sur les termes des méthodes perturbatives d'Araki-Dyson, fournissant des moyens analytiques pour la dérivation.

2. C'est un résultat nouveau

1.2.4 Semi-groupes quantiques

• Applications positives des \mathbf{C}^* -algèbres

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux \mathbf{C}^* -algèbres avec un élément identité, une application linéaire φ de \mathcal{A} dans \mathcal{B} est positive si :

$$\varphi(\mathcal{A}_+) \subset \mathcal{B}_+.$$

Lorsque $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, la positivité de l'application linéaire φ équivaut à $\|\varphi\| = 1$ (par le corollaire 3.2.6 de [BR1]).

Il est bien connu, selon [BR1] (corol 3.2.12), que si $t \mapsto \alpha^t$ est un groupe à un paramètre, continu fortement de \mathcal{A} dans \mathcal{A} alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) α^t est un $*$ -automorphisme de \mathcal{A} , pour tout réel t ;
- (2) $\alpha^t(\mathcal{A}_+) \subset \mathcal{A}_+$, pour tout réel t ;
- (3) $\|\alpha^t\| \leq 1$.

Dans le cadre des algèbres de von Neumann \mathfrak{M} , les équivalences sont vraies, dès que \mathfrak{M} est un facteur $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \mathbf{C} \cdot \mathbb{1}$ ou \mathfrak{M} est commutative, pour les groupes à un paramètre σ -faiblement continus qui sont des $*$ -automorphismes et sont donc toutes des applications positives. Cette notion devient alors peu utile. Cependant cette notion devient importante pour décrire la dynamique réduite à un sous système.

Remarque 1.2

On rappelle quelques points historiques sur les applications positives, définies sur une \mathbf{C}^ -algèbre possédant un élément identité.*

Le point départ de la théorie a été la preuve de l'inégalité de type Schwarz par Stinespring :

si $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est linéaire, positive et telle que $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ alors

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad , \quad A^*A = AA^* \implies \varphi(A^*A) \geq \varphi(A)^* \varphi(A).$$

Et sa généralisation fut donnée par Evans :

soit δ une application linéaire définie sur une \mathbf{C}^ -algèbre \mathfrak{U} telle que :*

$$\forall A \in \mathfrak{U} \quad , \quad \delta(A^*) = \delta(A)^*.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \forall A \in \mathfrak{U} \quad , \quad e^{t\delta}(A^*A) \geq e^{t\delta}(A^*)e^{t\delta}(A)$;
- (2) $\forall A \in \mathfrak{U} \quad , \quad \delta(A^*A) \geq \delta(A^*)A + A^*\delta(A)$.

Stinespring construisait une représentation (une généralisation de la construction GNS proposition 3.2.4 dans [BR1]) π de \mathcal{A} telle que :

$$\varphi(A) = V^* \pi(A) V.$$

Dans l'étude des semi-groupes, la notion d'applications complètement positives, introduite et caractérisée par Stinespring, a une place prépondérante.

• Applications complètement positives des \mathbf{C}^* -algèbres

Définition 1.5

Soit n un entier. Soient \mathfrak{U} et \mathfrak{V} deux \mathbf{C}^* -algèbres.

On désigne par \mathfrak{U}_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des éléments de \mathfrak{U} .

Étant donnée une application linéaire $\phi : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$, on définit l'application $\phi_n : \mathfrak{U}_n \rightarrow \mathfrak{V}_n$ par :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \quad \forall A_{i,j} \in \mathfrak{U}, \quad \phi_n((A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}) = (\phi(A_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

L'application ϕ est dite n -positive si ϕ_n est positive.

L'application ϕ est dite complètement positive si ϕ est n -positive, pour tout entier naturel n non nul.

Il est immédiat que la somme d'applications complètement positives et la composée d'applications complètement positives sont des applications complètement positives.

On peut utiliser l'un des critères suivants pour établir la complète positivité.

Lemme 1.1

L'application ϕ est dite complètement positive si et seulement si pour tout entier naturel N , A_1, \dots, A_N éléments de \mathfrak{U} , et pour B_1, \dots, B_N éléments de \mathfrak{V} , on a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} B_i^* \phi(A_i^* A_j) B_j \geq 0.$$

Il en résulte que tout $*$ -homomorphisme de \mathbf{C}^* -algèbres est une application complètement positive.

Lemme 1.2

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} . Une application φ de \mathcal{M} dans \mathcal{M} , linéaire, normale et telle que

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad , \quad \varphi(A^*) = \varphi(A)^*,$$

est complètement positive si et seulement s'il existe une famille $\{V_\alpha\}$ de $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad , \quad \varphi(A) = \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* A V_{\alpha},$$

la convergence ayant lieu pour la topologie faible des opérateurs.

La famille est dénombrable (resp. finie) dès que \mathfrak{H} est séparable (resp. de dimension finie).

Exemple 1.3

Soit \mathfrak{H} un espace de Hilbert. Soient $H = H^*$, $R = R^*$ et V trois éléments de $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Posons

$$\gamma_1(A) = i[H, A], \quad \gamma_2(A) = AR + RA, \quad \gamma_3(A) = V^*AV.$$

Alors les applications linéaires, définies pour chaque $t \geq 0$ par

$$\begin{aligned} e^{t\gamma_1}(A) &= e^{itH} A e^{-itH}, \\ e^{t\gamma_2}(A) &= e^{-tR} A e^{-tR}, \\ e^{t\gamma_3}(A) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \gamma_3^n(A); \end{aligned}$$

sont complètement positives. La composition d'applications complètement positives et la formule de Trotter montrent que l'application,

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \ni A \longmapsto e^{t(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)}(A) \quad ,$$

est complètement positive.

Le résultat suivant, dû à Christensen et Evans (voir [BR2]), donne la forme générale des générateurs des semi-groupes complètement positifs.

Théorème 1.3

Soit $(e^{t\delta})_{t \geq 0}$ un semi-groupe continu en norme d'applications linéaires complètement positives, défini sur une \mathbf{C}^* -algèbre \mathfrak{A} agissant sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} .

Alors il existe une application complètement positive ϕ de \mathfrak{A} sur la fermeture faible $\overline{\mathfrak{A}}$ et il existe un élément auto-adjoint $H = H^*$ de $\overline{\mathfrak{A}}$ tels que :

$$\delta(A) = i[H, A] - \{R, A\}/2 + \phi(A),$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ dénote l'anticommutateur.

Notons que $R = \phi(1) - \delta(1)$.

• Semi-groupes dynamiques quantiques

Définition 1.6

Soit \mathfrak{M} une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} . Une famille d'opérateurs linéaires $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe dynamique quantique si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) $T_0 = \mathbb{1}$, $T_{s+t} = T_s T_t$, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$;
- (2) T_t est σ -faiblement continu ;
- (3) T_t est normale, pour tout $t \geq 0$;
- (4) T_t est une application complètement positive, pour tout $t \geq 0$;
- (5) $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, pour tout $t \geq 0$.

Lindblad ([LI]) avait résumé les résultats des semi-groupes dynamiques quantiques complètement positifs sur une algèbre de von Neumann.

Corollaire 1.1 (Lindblad)

Soit $(e^{t\delta})_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'applications linéaires σ -faiblement continu défini sur une algèbre de von Neumann \mathfrak{M} agissant sur un espace de Hilbert \mathfrak{H} tel que : $e^{t\delta}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

$(e^{t\delta})_{t \geq 0}$ est complètement positif si et seulement si :

- (1) il existe une famille d'opérateurs $\{V_\alpha\}$ de $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tel que l'opérateur

$$R = \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* V_{\alpha}$$

est un opérateur borné de \mathfrak{M} et

$$\forall A \in \mathfrak{M}, \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* A V_{\alpha} \in \mathfrak{M};$$

- (2) il existe un opérateur auto-adjoint $H = H^* \in \mathfrak{M}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathfrak{M}, \delta(A) &= i[H, A] - \{R, A\}/2 + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* A V_{\alpha} \\ &= i[H, A] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_{\alpha}^*, A] V_{\alpha} + V_{\alpha}^* [A, V_{\alpha}] \right). \end{aligned}$$

Il existe des extensions dans le cas des opérateurs de Lindblad non bornés ([CF], [D3], [RE2]) en considérant les opérateurs non bornés de la forme

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \delta(A) = GA + AG^* + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* A V_{\alpha},$$

où G est le générateur d'un semi-groupe fortement continu de contractions dans \mathfrak{H} , le domaine des opérateurs V_{α} contenant le domaine $D(G)$ de G , la condition $\delta(\mathbb{1}) = 0$ se traduisant par :

$$\forall (u, v) \in D(G)^2, (v, Gu) + (Gv, u) + \sum_{\alpha} (V_{\alpha} v, V_{\alpha} u) = 0.$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, on définit au sens faible une forme sesquilinéaire $\delta(A)$ sur \mathfrak{H} par :

$$\forall (u, v) \in D(G)^2, (v, \delta(A)u) = (v, AGu) + (Gv, Au) + \sum_{\alpha} (V_{\alpha}v, AV_{\alpha}u).$$

On prouvera dans le chapitre 2, qu'il est possible de construire, à l'aide d'une méthode itérative de Picard ([CF],[FR1]), un semi-groupe $(T^t)_{t \geq 0}$ par :

$$\forall (u, v) \in D(G)^2, (v, T^t(A)u) = (v, Au) + \int_0^t ds (v, \delta(T^s(A))u).$$

Selon les travaux cités, il n'y a pas unicité. Cependant il existe un seul semi-groupe dynamique dit minimal $(T_m^t)_{t \geq 0}$: c'est-à-dire pour toute famille d'applications positives $(T^t)_{t \geq 0}$ σ -faiblement continues satisfaisant l'équation ci-dessus, on a :

$$\forall A \in \mathcal{B}_+(\mathfrak{H}), T_m^t(A) \leq T^t(A).$$

• Principe quantique du bilan détaillé

Exemple 1.4 (Exemple classique (selon [CDG]))

Soit (\mathcal{S}) un système de dimension deux, décrit par un hamiltonien H_s ayant deux niveaux d'énergie $E_1 < E_2$ correspondant aux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, l'algèbre des observables est $\mathcal{M}_s = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, il est couplé à un réservoir (\mathcal{R}) à la température $1/\beta$ dont l'hamiltonien H_r est discret non dégénéré de niveaux E_{μ}, E_{ν}, \dots d'états propres $|\mu\rangle, |\nu\rangle, \dots$, on le supposera de plus dans un état stationnaire à l'équilibre thermodynamique.

Le couplage est caractérisé par un opérateur V qui vérifie :

$$\forall (\mu, \nu) \quad | \langle 1, \mu | V | 2, \nu \rangle | = | \langle 2, \nu | V | 1, \mu \rangle |.$$

L'étude du couplage faible (limite de Van Hove) amène à la considération des opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{M}_s, \quad K(A) &= i[H, A] + \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}}{2} (2|1\rangle\langle 2|A|2\rangle\langle 1| - \{A, |1\rangle\langle 1|\}) \\ &+ \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 1}}{2} (2|2\rangle\langle 1|A|1\rangle\langle 2| - \{A, |2\rangle\langle 2|\}); \\ L(\rho) &= -i[H, \rho] + \frac{\Gamma_{1 \rightarrow 2}}{2} (2|2\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 2| - \{\rho, |1\rangle\langle 1|\}) \\ &+ \frac{\Gamma_{2 \rightarrow 1}}{2} (2|1\rangle\langle 2|\rho|2\rangle\langle 1| - \{\rho, |2\rangle\langle 2|\}); \end{aligned}$$

où ρ désigne une matrice de densité du système, ces deux opérateurs sont reliés par l'égalité

$$\mathbf{tr}(\rho K(A)) = \mathbf{tr}(L(\rho)A).$$

La quantité $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$ est la probabilité pour que le système effectue une transition du niveau E_1 vers le niveau E_2 et vaut :

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = 2\pi \sum_{\substack{\mu, \nu \\ \nu - \mu = E_2 - E_1}} p(\nu) |\langle 2, \nu | V | 1, \mu \rangle|^2,$$

avec

$$p(\mu) = e^{-\beta E_\mu} / Z, \quad Z = \text{tr}(e^{-\beta H_r}).$$

Autrement dit, $p(\mu)$ est la probabilité pour que le réservoir soit dans l'état $|\mu\rangle$. De même pour $\Gamma_{2 \rightarrow 1}$. Tandis que H commute avec H_s donc H possède la forme diagonale $a_1|1\rangle\langle 1| + a_2|2\rangle\langle 2|$, a_1 et a_2 réels.

On démontre la relation fondamentale :

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} \Gamma_{2 \rightarrow 1}.$$

Écrite sous la forme,

$$e^{-\beta E_1} \Gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{-\beta E_2} \Gamma_{2 \rightarrow 1},$$

cette relation, dite du « bilan détaillé », exprime physiquement que le nombre de transitions de $|1\rangle$ vers $|2\rangle$ compense celui de $|2\rangle$ vers $|1\rangle$.

En effectuant un simple calcul matriciel, on obtient l'équivalence :

$$L(\rho) = 0 \iff \rho = \rho_e \equiv e^{-\beta H_s} / \text{tr}(e^{-\beta H_s})$$

il en résulte que $\mathcal{M}_s \ni A \mapsto \omega(A) = \text{tr}(\rho_e A)$ est un état normal, fidèle et Λ_t -invariant où Λ est le semi-groupe de générateur K .

En posant :

$$\begin{aligned} K_a &= i[H, \cdot] \quad , \quad K_s = K - K_a; \\ \Omega_s &= \rho_e^{1/2} \quad , \quad (A, B) = \text{tr}(A^* B); \end{aligned}$$

alors $\omega(A) = (\Omega_s, A \Omega_s)$.

Et pour le produit scalaire suivant :

$$\langle A, B \rangle_{\rho_e} \equiv \langle A \Omega_s, B \Omega_s \rangle = \text{tr}(\rho_e A^* B) = \omega(A^* B);$$

on obtient :

$$K_s^* = K_s \quad , \quad K_a^* = -K_a.$$

Notons puisque que le commutant de $\{|1\rangle\langle 2|, |2\rangle\langle 1|\}$ est égal à $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ alors le théorème 1.8 de Frigerio montre que le système (\mathcal{S}) « parvient » également à un équilibre thermodynamique à la même température.

Autrement dit :

$$\forall \eta \in \mathcal{M}_{s^*} \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_s^2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(B \Lambda_t(A)) = \text{tr}(\rho_e A) \eta(B).$$

On en déduit, pour toute matrice de densité ρ , que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tL^*} \rho = \rho_e.$$

• **Formulation abstraite**

On adopte le cadre abstrait donné dans [FGKV].

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann et $(\Lambda_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe dynamique quantique. Soit ω un état normal et fidèle de \mathcal{M} , Λ_t -invariant. On désigne par $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ la représentation canonique GNS de \mathcal{M} associée à ω . On peut définir $(\widehat{\Lambda}_t)$ le semi-groupe de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\omega)$,

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \widehat{\Lambda}_t \pi_\omega(A) \Omega_\omega = \pi_\omega(\Lambda_t(A)) \Omega_\omega.$$

On note \widehat{L} le générateur du semi-groupe $(\widehat{\Lambda}_t)_t$ fortement continu de contractions sur \mathfrak{H}_ω .

Définition 1.7

On dit que $(\widehat{\Lambda}_t)_{t \geq 0}$ satisfait «le principe du bilan détaillé» relativement à ω s'il existe deux opérateurs \widehat{L}_s et \widehat{L}_a tels que :

$$\widehat{L} = \widehat{L}_s + \widehat{L}_a,$$

sur un sous espace dense de \mathfrak{H}_ω , avec :

- (i) $\pi_\omega(\alpha_t(A)) \Omega_\omega = e^{\widehat{L}_a t} (\pi(A)) \Omega_\omega$ tel que $(\alpha_t)_t$ soit un groupe σ -faiblement continu d'automorphismes de \mathcal{M} ;
- (ii) $\pi_\omega(\Gamma_t(A)) \Omega_\omega = e^{\widehat{L}_s t} (\pi(A)) \Omega_\omega$ tel que $(\Gamma_t)_t$ soit un semi-groupe dynamique quantique de \mathcal{M} .

On dit que (α_t) est la partie hamiltonienne de (Λ_t) et que (Γ_t) en est la partie dissipative.

On démontre que si une telle décomposition existe avec

$$\widehat{L}_s = \widehat{L}_s^* \quad , \quad \widehat{L}_a = -\widehat{L}_a^*,$$

alors elle est unique.

L'état ω est invariant par (α_t) et par (Γ_t) , de plus ces derniers commutent avec le groupe modulaire σ_t^ω associé au couple $(\pi_\omega(\mathcal{M}), \Omega_\omega)$.

Exemple 1.5

L'exemple usuel, utilisé dans [LS], considère $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ où \mathfrak{H} est un espace de Hilbert séparable.

Soit $\rho_0 \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, une matrice de densité, invariante par un semi-groupe $(e^{tL})_{t \geq 0}$ ($L(\rho_0) = 0$), on peut définir sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ le produit scalaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})^2, \quad \langle A, B \rangle_{\rho_0} \equiv \mathbf{tr}(A^* B \rho_0).$$

Le semi-groupe $(e^{tL})_{t \geq 0}$ satisfait au «principe du bilan détaillé» relativement à ρ_0 si L^* se décompose sous la forme :

$$L^* = L_a^* + L_s^*$$

avec $L_a = i[H, \cdot]$, $H = H^*$ et $[H, \rho_0] = 0$ et

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})^2, \quad \langle L_a^*(A), B \rangle_{\rho_0} = - \langle A, L_a^*(B) \rangle_{\rho_0}$$

et L_s^* est symétrique :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})^2, \quad \langle L_s^*(A), B \rangle_{\rho_0} = \langle A, L_s^*(B) \rangle_{\rho_0}.$$

Les auteurs [LS] ont précisé les liens entre ces différentes notions (le principe du bilan détaillé, la limite de Van Hove et la condition KMS) que l'on schématise sous la forme :

le principe du bilan détaillé + la limite Van Hove \longrightarrow la condition KMS.

1.3 Résultats de Davies

Les objectifs sont d'illustrer les techniques vues dans l'introduction, en particulier aboutir rapidement à l'équation de Volterra. Le théorème 1.1 nous permet de définir deux opérateurs \mathbf{K} et \mathbf{K}^\sharp . Une formulation abstraite garantit que ces opérateurs existent sous la seule hypothèse d'intégrabilité d'une «fonction à deux points». Afin d'étudier le semi-groupe $(e^{t\mathbf{K}^\sharp})_{t \geq 0}$, en particulier la complète positivité, on constate que \mathbf{K}^\sharp admet une décomposition «semblable» à celle de Lindblad, et on donne des conditions suffisantes pour que \mathbf{K}^\sharp soit complètement positive.

1.3.1 Équation NPRZ

L'étude classique de l'interaction entre deux systèmes amène de manière inéluctable aux produits tensoriels d'algèbres des observables.

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r$ une algèbre de von Neumann sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_r$.

\mathcal{M}_s représente l'algèbre des observables du système alors que celle du réservoir est \mathcal{M}_r .

Soit $(\alpha_0^t)_t$ un groupe σ -faiblement continu de \mathcal{M} de générateur δ_0 avec

$$\alpha_0^t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Autrement dit :

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad \alpha_0^t(M) = e^{t\delta_0}(M).$$

On considère δ_1 un opérateur borné de \mathcal{M} . Alors $\delta = \delta_0 + \delta_1$ est le générateur d'un groupe à un paramètre σ -faiblement continu $\alpha^t = e^{t\delta}$ de \mathcal{M} .

On s'intéresse à l'évolution dans le couplage de l'élément $X \otimes \mathbb{1}_r$ du système.

Cet élément sera systématiquement identifié à $X \in \mathcal{M}_s$.
Soit alors P une projection de \mathcal{M} sur $\mathcal{M}_s \otimes \mathbb{1}_r$ telle que :

$$(H1) \quad P \delta_0 = \delta_0 P.$$

On pose

$$Q = 1 - P,$$

nous désignons par $\bar{\alpha}^t$ le groupe à un paramètre de générateur

$$\bar{\delta} = P\delta P + Q\delta Q.$$

$\bar{\delta}$ représente les parties diagonales de δ , de sorte que :

$$[P, \bar{\delta}] = 0.$$

La méthode des projections de Zwanzig (détaillée par exemple dans [AG]) permet d'obtenir directement l'équation d'évolution du groupe projeté ($P\alpha^t P$). En effet, les égalités :

$$(1) \quad \alpha^t = \alpha_0^t + \int_0^t du \alpha_0^{t-u} \delta_1 \alpha^u;$$

$$(2) \quad \alpha^t = \bar{\alpha}^t + \int_0^t du \bar{\alpha}^{t-u} (P\delta_1 Q + Q\delta_1 P) \alpha^u;$$

impliquent :

$$P\alpha^t P = P\alpha_0^t P + \int_0^t du P\alpha_0^{t-u} \delta_1 P\alpha^u P$$

$$+ \int_0^t du P\alpha_0^{t-u} \delta_1 Q\alpha^u P;$$

$$Q\alpha^u P = \int_0^u ds Q\bar{\alpha}^{u-s} Q\delta_1 P\alpha^s P.$$

D'où :

$$P\alpha^t P = P\alpha_0^t P + \int_0^t du (P\alpha_0^{t-u} P) (P\delta_1 P) (P\alpha^u P)$$

$$+ \int_0^t du \int_0^u ds P\alpha_0^{t-u} P (P\delta_1 Q\bar{\alpha}^{u-s} Q\delta_1 P) P\alpha^s P,$$

et finalement on aboutit à la proposition suivante.

Proposition 1.2

En posant

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{0, 1\}^2, \delta_1^{i,j} &\equiv (iQ + (1-i)P) \delta_1 (j(Q + (1-j)P)), \\ X_1(t) &\equiv (P\alpha^t P)(X \otimes 1) \quad , \quad X \in \mathcal{M}_s, \\ K_1(t) &\equiv \delta_1^{0,1} \bar{\alpha}^t \delta_1^{1,0}, \end{aligned}$$

alors on obtient l'équation intégral-différentielle généralisée NPRZ (Nakajima-Prigogine-Résibois-Zwanzig) :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (P\alpha_0^t P)(A \otimes \mathbb{1}) + \int_0^t du (P\alpha_0^{t-u} P)(\delta_1^{0,0})X_1(u) \\ &\quad + \int_0^t du \int_0^u ds (P\alpha_0^{t-u} P)K_1(u-s)X_1(s). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ou encore par dérivation, elle s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(X_1(t)) = (\delta_0 + \delta_1^{0,0})(X_1(t)) + \int_0^t ds K_1(t-s)X_1(s). \quad (1.6)$$

Remarque 1.3

1) Il est d'usage d'appeler les équations (1.5) et (1.6), les équations maîtresses généralisées.

Parfois les équations approchées de ces dernières sont également appelées équations maîtresses ou équations pilotes (selon [CDG]).

2) Le noyau intégral K_1 du membre de droite de l'équation (1.6) décrit la mémoire du système et conduit généralement à une dynamique non markovienne du système.

3) L'hypothèse (H1) n'est pas superflue puisqu'en l'absence d'interaction, on a bien :

$$(P\alpha_0^t P)(X \otimes \mathbb{1}_r) = \alpha_0^t(X \otimes \mathbb{1}_r).$$

1.3.2 Couplage faible

Afin d'appliquer le théorème 1.1, on doit obtenir l'équation intégrale de Volterra qui correspond à l'interaction de la forme

$$\delta_1 = \lambda \delta', \quad \lambda > 0.$$

Afin de simplifier l'expression de l'équation maîtresse (1.5), on supposera

$$(H2) \quad P\delta'P = 0 \quad .$$

Les hypothèses (H1) et (H2) montrent que le générateur de $\bar{\alpha}$ est

$$\bar{\delta} = \delta_0 + \lambda Q \delta' Q.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_s$, on pose :

$$A_\lambda(t) = (P\alpha_0^{-t}\alpha^t P)(A \otimes \mathbb{1}_r), \quad A_\lambda(0) = A \otimes \mathbb{1}_r,$$

dans l'intégrale double de l'équation maîtresse (1.5), on intervertit l'ordre et on obtient aisément, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} A_\lambda(t) &= A \otimes \mathbb{1} + \int_0^t ds \left(\alpha_0^{-s} \left\{ \int_0^{t-s} dr P \alpha_0^{-r} K_1(r) \right\} \alpha_0^s \right) A_\lambda(s), \\ K_1(r) &= \lambda^2 P \delta' Q \bar{\alpha}^r Q \delta' P. \end{aligned}$$

Soit

$$x_\lambda(\tau) = A_\lambda(\tau/\lambda^2),$$

alors x_λ satisfait l'équation de Volterra :

$$\begin{aligned} x_\lambda(\tau) &= A \otimes \mathbb{1} + \int_0^\tau du \mathcal{K}_\lambda(\tau - u, u) x_\lambda(u), \\ \mathcal{K}_\lambda(t, u) &\equiv \alpha_0^{-u\lambda^{-2}} \left(\int_0^{t\lambda^{-2}} ds P \alpha_0^{-s} P \delta' Q \bar{\alpha}^s Q \delta' P \right) \alpha_0^{u\lambda^{-2}}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses du théorème 1.1, on en déduit que l'application (limite de Van Hove) $\tau \mapsto x(\tau) = \lim_{\lambda \searrow 0} x_\lambda(\tau)$ suit l'équation markovienne :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x(0) + \int_0^\tau du \mathbf{K}^\sharp x(u), \quad x(0) = A \otimes \mathbb{1}_r; \\ \frac{d}{d\tau}(x(\tau)) &= \mathbf{K}^\sharp x(\tau), \end{aligned} \tag{1.7}$$

où l'opérateur \mathbf{K}^\sharp agissant sur \mathcal{M}_s est défini par la formule

$$\mathbf{K}^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T ds (P \alpha_0^s P) \mathbf{K} (P \alpha_0^{-s} P), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{+\infty} ds P \alpha_0^{-s} P \delta' Q \alpha_0^s Q \delta' P. \tag{1.9}$$

Ainsi, pour tout $a > 0$, pour tout $A \in \mathfrak{M}_s$:

$$\lim_{\lambda \searrow 0} (x_\lambda(\tau \lambda^{-2})) = e^{\tau \mathbf{K}^\sharp} (A \otimes \mathbb{1}_r) = x(t), \tag{1.10}$$

pour la convergence forte dans \mathfrak{M}_s et uniformément sur $[0, a]$.

Exemple 1.6 (Exemple de Davies [D1], [D2], [LS])

Dans ce qui suit, soit

$$\delta_I = i\lambda [Q \otimes \Phi, \cdot] \quad \text{et} \quad \lambda > 0,$$

où $Q \in \mathfrak{M}_s$ et Φ est un champ fermionique.

Soit ω_r un état de \mathcal{M}_r .

On suppose :

$$\begin{aligned} Q &= Q^* \quad , \quad \Phi^* = \Phi; \\ \omega_r(\Phi) &= 0 \quad , \quad \omega_r(\mathbb{1}_r) = 1. \end{aligned}$$

La projection P sur \mathcal{M} est définie par la «trace partielle» par rapport au réservoir :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \forall B \in \mathcal{M}_r \quad : \quad P[A \otimes B] = (A \otimes \mathbb{1}_r) \omega_r(B),$$

qui satisfait à

$$P \delta_I P = 0,$$

et à la propriété classique des espérances conditionnelles :

pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_s^2$ et tout $M \in \mathcal{M}$,

$$P[(A_1 \otimes I)M(A_2 \otimes \mathbb{1}_r)] = (A_1 \otimes I)P[M](A_2 \otimes \mathbb{1}_r).$$

De plus P n'intervient pas dans l'évolution du système, libre de l'interaction :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad P\alpha_0^t = \alpha_0^t P,$$

ce qui implique que $\alpha_s \equiv P\alpha_0^t$ est un *-automorphisme de \mathcal{M}_s (identifiée à $\mathcal{M}_s \otimes \mathbb{1}_r$) et $t \mapsto \alpha_s^t$ est un groupe à un paramètre faiblement continu sur \mathcal{M}_s .

$\delta_s \equiv P\delta_0$, le générateur infinitésimal de ce groupe, est une dérivation de la forme :

$$\delta_s = i [H_s, \cdot].$$

La dynamique libre en l'absence d'interaction se représente sous la forme :

$$\alpha_0^t(A \otimes B) = \alpha_s^t(A) \otimes \alpha_r^t(B).$$

On supposera que $(\mathfrak{M}_r, \alpha_r)$ est un W^* -système dynamique.

On considère les opérateurs qui interviennent dans la décomposition en série de $\bar{\alpha}$

$$\begin{aligned} K_0(t) &= -P\alpha_0^{-t}[Q \otimes \Phi, \cdot]\alpha_0^t[Q \otimes \Phi, \cdot]P; \\ K_n(t) &= -P \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \alpha_0^{-t}[Q \otimes \Phi, \cdot]\alpha_0^t V(t_1) \dots V(t_n)[Q \otimes \Phi, \cdot]P; \\ V(u) &:= \alpha_0^{-u}((1-P)[Q \otimes I, \cdot](1-P))\alpha_0^u. \end{aligned}$$

Si les conditions suivantes (trouvées dans [D1] et [LS]),

$$(D1) \quad \int_0^\infty dt \|\mathbf{K}_0(t)\| < \infty;$$

$$(D2) \quad \limsup_n \left\{ \left(\sup_{t \geq 0} \left[\|\mathbf{K}_n(t)\| t^{-n/2} \right] \right)^{1/n} \right\} = 0;$$

$$(D3) \quad \forall \varepsilon > 0, \sup_{t \geq 0} \left[\|\mathbf{K}_n(t)\| t^{\varepsilon - n/2} \right] < \infty;$$

$$(D4) \quad \text{le spectre de } \delta_s \text{ est discret ;}$$

sont satisfaites alors le théorème 1.1 s'applique et l'opérateur \mathbf{K}^\sharp se calcule explicitement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\sharp &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T ds \left(P \alpha_0^s P \right) \mathbf{K} \left(P \alpha_0^{-s} P \right) \\ &= \sum_{\mu \in \sigma(\delta_s)} \Pi_\mu \mathbf{K} \Pi_\mu \end{aligned}$$

Π_μ projecteur spectral de H_s associé à la valeur propre μ ,

$$\text{où } \mathbf{K} = - \int_0^\infty ds P \alpha_0^{-s} P [Q \otimes \Phi, \cdot] \alpha_0^s [Q \otimes \Phi, \cdot] P.$$

Remarque 1.4

On obtient : $[\mathbf{K}^\sharp, \delta_s] = 0$.

Si $[\mathbf{K}, \delta_s] = 0$ alors $\mathbf{K}^\sharp = \mathbf{K}$.

Ce qui suggère que \mathbf{K}^\sharp est en quelque sorte la projection de \mathbf{K} sur l'ensemble des opérateurs de \mathcal{M}_s commutant avec δ_s .

• Opérateurs de Van Hove et générateur de Davies

Soit \mathfrak{M} une algèbre de von Neumann, α_0 un groupe faiblement continu de générateur δ_0 et P une projection, δ un opérateur de \mathfrak{M} tel que

$$\forall \lambda \geq 0, \quad D(\delta_0 + \lambda \delta) = D(\delta_0).$$

Définition 1.8

On appellera l'opérateur de Van Hove associé au triplet (α_0, δ, P) , l'opérateur \mathbf{K} défini dans \mathfrak{M} par :

$$\mathbf{K} = \int_0^{+\infty} dt P \alpha_0^{-t} P \delta Q \alpha_0^t Q \delta P, \quad (1.11)$$

de domaine

$$D(\mathbf{K}) = \left\{ M : M \in \mathfrak{M} / \int_0^{+\infty} dt \|(P \alpha_0^{-t} P \delta Q \alpha_0^t Q \delta P)(M)\| < \infty \right\} .$$

Le générateur de Davies \mathbf{K}^\sharp , associé à \mathbf{K} , est donné selon un procédé ergodique :

$$\mathbf{K}^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^T dt P \alpha_0^{-t} P \mathbf{K} P \alpha_0^t P \right). \quad (1.12)$$

• **Expression formelle de \mathbf{K}^\sharp et opérateur de Lindblad associé**

Précisons le modèle Système(\mathcal{S})-Réservoir(\mathcal{R}) choisi en s'inspirant de l'exemple 1.6.

L'algèbre de von Neumann des observables $\mathcal{M} = \mathfrak{M}_s \otimes \mathfrak{M}_r$ dont la dynamique, définie par un groupe faiblement continu $(\alpha_0^t)_{t \in \mathbb{R}}$, est libre en l'absence d'interaction :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s \forall B \in \mathfrak{M}_r, \alpha_0^t(A \otimes B) = \alpha_s^t(A) \otimes \alpha_r^t(B).$$

L'interaction entre (\mathcal{S}) et (\mathcal{R}) est donnée par :

$$\delta_1 = i\lambda [Q \otimes \Phi, \cdot] \quad , \lambda > 0.$$

Soit ω_r un état de \mathfrak{M}_r et :

$$Q = Q^* \in \mathfrak{M}_s \quad , \quad \Phi^* = \Phi \in \mathfrak{M}_r; \quad (1.13)$$

$$\omega_r(\Phi) = 0 \quad , \quad \omega_r(\mathbb{1}_r) = 1. \quad (1.14)$$

La projection sur le système est définie par une «trace partielle» par rapport au réservoir :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s \quad , \quad \forall B \in \mathfrak{M}_r \quad : \quad P[A \otimes B] = (A \otimes \mathbb{1}_r) \omega_r(B).$$

On a : $P \delta_1 P = 0$.

L'hypothèse

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad P \alpha_0^t = \alpha_0^t P$$

assure que $t \mapsto \alpha_s \equiv P \alpha_0^t$ est un groupe à un paramètre faiblement continu sur \mathfrak{M}_s d'automorphismes de \mathfrak{M}_s de générateur infinitésimal δ_s avec :

$$\delta_s = i [H_s, \cdot].$$

Nous donnons la forme générale du générateur de Davies \mathbf{K}^\sharp utilisée dans la suite.

Proposition 1.3

Sous l'hypothèse supplémentaire d'intégrabilité de la fonction à deux points :

$$(I) \quad \begin{cases} \forall u \in \mathbb{R} \quad , \quad \Phi \alpha_r^u(\Phi) \in \mathfrak{M}_r; \\ \int_{\mathbb{R}} du \quad |\omega_r(\Phi \alpha_r^u(\Phi))| < \infty; \end{cases}$$

on définit les éléments de \mathfrak{M}_s :

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv \int_0^\infty du \quad \alpha_s^{-u}(Q) \omega_r(\Phi \alpha_r^u(\Phi)), \\ &\left(= \int_0^\infty du \quad e^{-iuH_s} Q e^{iuH_s} \omega_r(\Phi \alpha_r^u(\Phi)) \right); \\ Q_2 &\equiv \int_0^\infty du \quad \alpha_s^{-u}(Q) \omega_r(\alpha_r^u(\Phi) \Phi). \end{aligned}$$

Alors, on a :

- (1) $Q_2 = Q_1^*$;
- (2) l'opérateur de Van Hove (1.11),

$$\mathbf{K} = - \int_0^{+\infty} ds P \alpha_0^{-s} [Q \otimes \Phi, \cdot] \alpha_0^s [Q \otimes \Phi, \cdot] P,$$

est caractérisé par :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathfrak{M}_s \quad , \quad \mathbf{K}(A) &= [Q, A] Q_1^* - Q_1 [Q, A] \\ &= Q A Q_1^* + Q_1 A Q - Q_1 Q A - A Q Q_1^*. \end{aligned}$$

Démonstration

Les propriétés $\Phi^* = \Phi$, $Q^* = Q$ et $\omega_r \geq 0$ donnent :

$$\begin{aligned} \forall B_r \in \mathfrak{M}_r \quad , \quad \overline{\omega_r(B_r)} &= \omega_r(B_r^*); \\ Q_1^* &= \int_0^\infty du \quad \alpha_s^{-u}(Q^*) \overline{\omega_r(\Phi \alpha_r^u(\Phi))} \\ &= \int_0^\infty du \quad \alpha_s^{-u}(Q) \omega_r(\alpha_r^u(\Phi^*) \Phi^*) \\ &= \int_0^\infty du \quad \alpha_s^{-u}(Q) \omega_r(\alpha_r^u(\Phi) \Phi) \\ &= Q_2. \end{aligned}$$

L'égalité suivante, vraie pour tout $A \in \mathfrak{M}_s$,

$$\begin{aligned} P \alpha_0^{-u} P [Q \otimes \Phi, \cdot] \alpha_0^u [Q \otimes \Phi, \cdot] P (A) &= \alpha_s^{-u}(Q) [Q, A] \omega_r(\Phi \alpha_r^u(\Phi)) \\ &\quad - [Q, A] \alpha_s^{-u}(Q) \omega_r(\alpha_r^u(\Phi) \Phi). \end{aligned}$$

établit le second point. \square

Ce qui fournit une formulation abstraite mais simple de l'expression (1.12) du générateur \mathbf{K}^\sharp .

Théorème 1.4 (Décomposition de \mathbf{K}^\sharp)

Soient les opérateurs L , R et H définis sur \mathfrak{M}_s à valeurs dans \mathfrak{M}_s par :

$$L(A) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T du \alpha_s^u(Q_1) A \alpha_s^u(Q) \right); \quad (1.15)$$

$$R \equiv L(\mathbb{1}) + L^*(\mathbb{1}); \quad (1.16)$$

$$H \equiv \frac{1}{2i} \cdot (L^*(\mathbb{1}) - L(\mathbb{1})); \quad (1.17)$$

$$\{R, A\} \equiv AR + RA.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathfrak{M}_s, \quad L^*(A) &= (L(A^*))^*; \\ \text{et} \quad \mathbf{K}^\sharp(A) &= L(A) + L^*(A) - (AL(I_s) + L^*(I_s)A) \\ &= i[H, A] + (L(A) + L^*(A) - \{R, A\})/2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Démonstration

Il suffit de noter que le calcul de $\alpha_s^u \mathbf{K} \alpha_s^{-u} A$ donne grâce à l'expression de \mathbf{K}

$$\begin{aligned} \alpha_s^u \mathbf{K} \alpha_s^{-u} A &= \alpha_s^u \left([Q, \alpha_s^{-u}(A)] Q_1^* \right) - \alpha_s^u \left(Q_1 [Q, \alpha_s^{-u}(A)] \right) \\ &= [\alpha_s^u(Q), A] (\alpha_s^u(Q_1))^* - \alpha_s^u(Q_1) [\alpha_s^u(Q), A] \\ &= \alpha_s^u(Q_1) A \alpha_s^u(Q) + \alpha_s^u(Q) A (\alpha_s^u(Q_1)^*) \\ &\quad - \alpha_s^u(Q_1) \alpha_s^u(Q) A - A \alpha_s^u(Q) \alpha_s^u(Q_1^*). \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Remarque 1.5

A priori, il n'est pas clair que l'expression fournie par (1.18) assure que le semi-groupe $e^{t\mathbf{K}^\sharp}$ soit complètement positif.

• Cas du spectre discret

On revient au cas général de l'expression (1.18) et on cherche des conditions pour que le semi-groupe $e^{t\mathbf{K}^\sharp}$ soit complètement positif.

S'inspirant de l'exemple fondamental (Exemple 1.3), il suffit que l'application ϕ , définie sur \mathfrak{M}_s par :

$$\phi(A) = L(A) + L^*(A),$$

soit complètement positive.

Nous allons utiliser la décomposition spectrale de H_s pour préciser ces différents opérateurs et donner des conditions suffisantes afin d'obtenir la complète positivité.

On suppose que H_s a un spectre discret :

$$\sigma(H_s) = \{E_0 < E_1 < \dots < E_n < \dots\},$$

avec

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_{n \geq 0} E_n P_n, \\ P_n &= \sum_{i=1}^{g(n)} |n^i \rangle \langle n^i| \quad , \quad g(n) \geq 1, \\ |n^i \rangle \langle n^i| |m^j \rangle \langle m^j| &= \delta_{ij} \delta_{mn}. \end{aligned}$$

On désigne par Λ le spectre de $[H_s, \cdot]$:

$$\Lambda = \{E_m - E_n / (m, n) \in \mathbb{N}^2\}.$$

On pose :

$$\forall \alpha \in \Lambda : c(\alpha) = \int_0^{+\infty} dt e^{-it\alpha} \omega_r(\Phi \alpha_r^t(\Phi)), \quad (1.19)$$

$$P_\alpha(A) = \sum_{\substack{i,f \\ E_i - E_f = \alpha}} P_i A P_f. \quad (1.20)$$

Nous avons :

$$P_\alpha(A)^* = P_{-\alpha}(A^*) \quad , \quad [H_s, \cdot] = \sum_{\alpha \in \Lambda} \alpha P_\alpha.$$

En particulier, il en résulte :

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad , \quad P_\alpha^*(Q) = P_{-\alpha}(Q); \quad (1.21)$$

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha_s^u(P_\alpha(Q)) = e^{iu\alpha} P_\alpha(Q). \quad (1.22)$$

On suppose

$$\mathbf{(H1)} \quad \Lambda \text{ est un ensemble fini.}$$

Alors, il vient :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{\alpha \in \Lambda} c(\alpha) P_\alpha(Q), \\
L(A) &= \sum_{\alpha \in \Lambda} c(\alpha) P_\alpha(Q) A P_\alpha^*(Q), \\
H &= \sum_{\alpha \in \Lambda} s(\alpha) P_\alpha(Q) P_\alpha^*(Q) \quad , \quad s(\alpha) \equiv -\text{Im}(c(\alpha)), \\
R &= \sum_{\alpha \in \Lambda} 2 \text{Re}(c(\alpha)) P_\alpha(Q) P_\alpha^*(Q).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

On suppose

$$(\mathbf{H2}) \quad \forall \alpha \in \Lambda : \text{Re}(c(\alpha)) \geq 0.$$

Soit

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{2 \text{Re}(c(\alpha))}.$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_s$:

$$\phi(A) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \gamma^2(\alpha) P_\alpha(Q) A P_\alpha^*(Q),$$

et le critère de complète positivité du lemme 1.2 prouve que ϕ est une application complètement positive.

D'où la décomposition de Lindblad.

Théorème 1.5 (Décomposition de Lindblad)

Si les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont satisfaites alors on pose, pour tout $\alpha \in \Lambda$:

$$Q_\alpha \equiv P_\alpha(Q); \tag{1.24}$$

$$V_\alpha \equiv \gamma(\alpha) Q_\alpha \quad , \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{2 \text{Re}(c(\alpha))}; \tag{1.25}$$

puis

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha V_\alpha^*; \\
H &= \sum_{\alpha \in \Lambda} s(\alpha) Q_\alpha Q_\alpha^* \quad , \quad s(\alpha) = -\text{Im}(c(\alpha)); \\
G &= -iH - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} V_\alpha V_\alpha^*.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \mathbf{K}^\sharp(A) &= i \cdot [H, A] - \{R, A\}/2 + \sum_{\alpha} V_\alpha A V_\alpha^* \\
&= i \cdot [H, A] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_\alpha, A] V_\alpha^* + V_\alpha [A, V_\alpha^*] \right) \\
&= \sum_{\alpha} V_\alpha A V_\alpha^* + G^* A + A G \quad ,
\end{aligned}$$

et le semi-groupe $(e^{t\mathbf{K}^\sharp})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe dynamique quantique.

Maintenant, on ne suppose plus que l'hypothèse **(H2)** est vraie.

D'après l'expression discrète (1.23), on a, pour $N \geq 1$, A_1, \dots, A_N et B_1, \dots, B_N des éléments de \mathcal{M}_s , l'égalité suivante :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} B_i^* \phi(A_i^* A_j) B_j^* = \sum_{\alpha \in \Lambda} 2 \operatorname{Re}(c(\alpha)) \left(\sum_{i=1}^N A_i P_\alpha(Q) B_i \right)^* \left(\sum_{i=1}^N A_i P_\alpha(Q) B_i \right). \quad (1.26)$$

Considérons l'hypothèse

$$\mathbf{(H3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \Lambda / \operatorname{Re}(c(\alpha)) \neq 0, \quad \text{on a :} \\ \forall (i, f) / E_i - E_f = \alpha, \quad P_i Q P_f \neq 0. \end{array} \right.$$

Remarque 1.6

1) Notons que cette hypothèse n'est pas artificielle; elle est réalisée, pratiquement, dans tous les cas connus [D1], [LS], [CDG]. En pratique, souvent $c(0) = 0$.

Retenons que

$$Q = \sum_{i,j} P_i Q P_j = \sum_i P_i Q P_i + \sum_{i \neq j} P_i Q P_j$$

Il n'y a pas de condition sur les termes diagonaux $P_i Q P_i$.

La condition de **(H3)** signifie, dans le cas d'un spectre discret ,

$$\langle P_i | Q | P_f \rangle \neq 0.$$

Autrement dit, les transitions de l'état E_i à l'état E_f se font avec une probabilité non nulle.

2) Utilisant le vocabulaire probabiliste markovien, cette condition signifie que les états (qui sont en nombre fini d'après **(H1)**) communiquent, la chaîne de Markov définie par la matrice de transition $((P_i Q P_j)_{i,j}$ est récurrente et irréductible et il existe une distribution stationnaire (théorème de Chacon-Ornstein).

3) La proposition suivante établit une équivalence entre la complète positivité de ϕ et l'hypothèse **(H2)**.

Proposition 1.4

Sous les hypothèses **(H1)** et **(H3)**, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) ϕ est complètement positive ;
- (ii) $\forall \alpha \in \Lambda, \operatorname{Re}(c(\alpha)) \geq 0$.

La preuve est dans l'annexe A (page 137).

- Cas où ω_r est α_r -invariant

Si ω_r est α_r -invariant alors

$$\omega_r(\alpha_r^t(\Phi)\Phi) = \omega_r(\Phi\alpha_r^{-t}(\Phi)),$$

d'où

$$\overline{c(\alpha)} = \int_{-\infty}^0 dt e^{-it\alpha} \omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi)),$$

donc

$$\forall \alpha \in \Lambda, \quad \gamma^2(\alpha) = 2\text{Re}(c(\alpha)) = \int_{\mathbb{R}} dt e^{-it\alpha} \omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi)).$$

Il est usuel de poser :

$$\forall \alpha \in \Lambda, \quad \hat{h}(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}} dt e^{-it\alpha} \omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi)). \quad (1.27)$$

La fonction $t \mapsto \omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi))$ est de type positif, le théorème de Bochner (selon [HI2] ou [DM]) montre le résultat suivant sur la positivité de \hat{h} .

Proposition 1.5

Si ω_r est α_r -invariant alors :

$$\forall \alpha \in \Lambda : \quad \hat{h}(\alpha) \geq 0.$$

- Cas où ω_r est (α_r, β) -KMS état

Dans ce cas, ω_r est α_r -invariant et donc l'hypothèse **(H2)** est satisfaite. De plus, on a l'importante relation, parfois dite également «KMS» .

Proposition 1.6

Si ω_r est (α_r, β) -KMS état de \mathcal{M}_r alors

$$\forall \alpha \in \Lambda : \quad \hat{h}(-\alpha) = e^{-\beta\alpha} \hat{h}(\alpha). \quad (1.28)$$

Démonstration

En effet, la relation KMS au bord donne

$$\begin{aligned} \omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi)) &= \omega_r(\alpha_r^t(\Phi)\alpha_r^{i\beta}(\Phi)) \\ &= \omega_r(\alpha^{t-i\beta}(\Phi)\Phi). \end{aligned}$$

Soit pour $\beta \geq \text{Im}(z) > 0$, $f(z) = e^{i\alpha z}$, la fonction $z \mapsto f(z)\omega_r(\alpha_r^z(\Phi)\Phi)$ est analytique. La formule de Cauchy permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\hat{h}(-\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} dt f(t)\omega_r(\Phi\alpha_r^t(\Phi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt f(t)\omega_r(\alpha_r^{t-i\beta}(\Phi)\Phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt f(t+i\beta)\omega_r(\alpha_r^t(\Phi)\Phi) \\ &= e^{-\beta\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{it\alpha}\omega(\Phi\alpha_r^{-t}(\Phi)) \\ &= e^{-\beta\alpha}\hat{h}(\alpha).\end{aligned}$$

□

Exemple 1.7

Donnons un exemple classique, selon [LS], d'un couplage avec un réservoir à la température $\frac{1}{\beta}$, on utilisera le résultat de la remarque suivante.

Remarque 1.7 (Expressions duales avec les matrices de densité)

Soit \mathcal{M}_{s^*} le prédual de \mathcal{M}_s . Il est bien connu que $\mathcal{M}_s = (\mathcal{M}_{s^*})^*$ par la dualité suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \forall \omega \in \mathcal{M}_{s^*} : \langle \omega, A \rangle = \omega(A).$$

Soit $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ l'ensemble des opérateurs à trace de \mathfrak{H}_s alors on considère l'opérateur \mathbf{L} appliquant $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ sur lui-même :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \forall \rho = \rho^* \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) : \mathbf{tr}(\rho K^\sharp(A)) = \mathbf{tr}(\mathbf{L}(\rho)A).$$

ainsi de la propriété usuelle de la trace ($\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$), on obtient la forme classique de l'opérateur de Lindblad agissant sur les matrices de densité :

$$\forall \rho \in \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s) : \mathbf{L}(\rho) = -i \cdot [H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_{\alpha}^* \rho, V_{\alpha}] + [V_{\alpha}^*, \rho V_{\alpha}] \right). \quad (1.29)$$

Considérons la matrice de densité $\rho_0 = Z^{-1} e^{-\beta H_s}$, $Z = \mathbf{tr}(e^{-\beta H_s})$.

Soient

$$\begin{aligned}K_a^\sharp(A) &= i \cdot [H, A]; \\ K_s^\sharp(A) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_{\alpha}^*, A] V_{\alpha} + V_{\alpha}^* [A, V_{\alpha}] \right); \\ L_a(\rho) &= -i \cdot [H, \rho]; \\ L_s(\rho) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left([V_{\alpha} \rho, V_{\alpha}^*] + [V_{\alpha}, \rho V_{\alpha}^*] \right).\end{aligned}$$

Proposition 1.7

Nous avons pour tout A ,

- (i) $L_a(\rho_0) = 0$,
- (ii) $L_s(A\rho_0) = K_s^\sharp(A)\rho_0$.

Par suite le semi-groupe $(e^{t\mathbf{L}})_{t \geq 0}$ satisfait le principe du bilan détaillé relativement à ρ_0 .

La preuve est donnée dans l'annexe A (page 137).

Remarque 1.8

Dans la théorie des systèmes quantiques ouverts, les physiciens considèrent souvent l'équation maîtresse sous la forme préduale dans l'ensemble des matrices de densité. Ils l'écrivent, de façon formelle :

$$\rho_t = e^{t\mathbf{L}}(\rho),$$

soit

$$\partial_t \rho_t = \mathbf{L}\rho_t, \tag{1.30}$$

$\rho_0 = \rho$ étant une matrice de densité.

1.4 Retour à l'équilibre

1.4.1 Théorèmes de Frigerio

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} . Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe dynamique quantique, on désigne par $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble des points fixes par T :

$$\mathcal{M}(T) \equiv \left\{ A : A \in \mathcal{M} / \forall t \geq 0, T_t(A) = A \right\}.$$

Théorème 1.6 (Frigerio[F2])

On suppose qu'il existe un état normal, fidèle et T -invariant.

Alors, il existe une unique espérance conditionnelle T_∞ , normale T -invariante de \mathcal{M} sur $\mathcal{M}(T)$ donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{M}, T_\infty(A) = w^* - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} T_t(A).$$

Ce qui permet d'obtenir les conséquences suivantes :

- 1) toute fonctionnelle normale φ sur \mathcal{M} est T-invariante si et seulement si elle est de la forme

$$\varphi = \varphi|_{\mathcal{M}(T)} \circ T_\infty;$$

- 2) il existe un et un seul état T-invariant dans \mathcal{M}_* si et seulement si :

$$\mathcal{M}(T) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}.$$

On désigne par D_t la fonction de dissipation définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ à valeurs dans \mathcal{M} :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : D_t(A, B) \equiv T_t(A^* B) - T_t(A^*) T_t(B),$$

et par $\mathcal{N}(T)$ son noyau :

$$\mathcal{N}(T) \equiv \left\{ A : A \in \mathcal{M} / \forall t \geq 0 D_t(A, A) = 0 \right\}.$$

Théorème 1.7 (Frigerio[F2])

On suppose qu'il existe un état normal, fidèle et T-invariant.

Si $\mathcal{N}(T) = \mathcal{M}(T)$ alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} T_t(A) = T_\infty(A).$$

Autrement dit :

$$\forall \eta \in \mathcal{M}_* \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}^2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(B T_t(A)) = \eta(B) T_\infty(A).$$

• Cas particulier important

On choisit $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ où \mathfrak{H} est un espace de Hilbert séparable et

$$T_t = e^{t\mathbf{K}^\sharp},$$

\mathbf{K}^\sharp ayant la décomposition de Lindblad du théorème 1.5.

On dira que le sous espace $\text{vect}\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ engendré par les V_α est auto-adjoint s'il est stable pour l'adjonction :

$$\forall M \in \text{vect}\{V_\alpha\} \implies M^* \in \text{vect}\{V_\alpha\}.$$

Soit

$$\mathcal{S} = \{V_\alpha, \alpha \in \Lambda\}, \quad \mathcal{S}' = \{A : A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) / \forall \alpha \in \Lambda, [A, V_\alpha] = 0\}.$$

Théorème 1.8 (Frigerio[F2])

Les hypothèses **(F1)**, **(F2)** et **(F3)** :

- (F1)** il existe un état ω_e normal et T-invariant;
- (F2)** $\text{vect}\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ est auto-adjoint;
- (F3)** $\mathcal{S}' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$;

impliquent :

- (i) ω_e est fidèle;
- (ii) $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$;

Donc, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ et pour toute matrice de densité ρ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr}(\rho T_t(A)) = \omega_e(A).$$

1.4.2 Résultat de Fagnola-Rebolledo

Ces résultats de Frigerio peuvent être prolongés lorsque les opérateurs ne sont pas bornés (par exemple les travaux de Fagnola-Rebolledo [FR1], [FR2] fournissent des exemples physiques, et des conditions suffisantes données dans [CF]).

On résume les résultats.

On pose

$$G = -iH - \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* V_{\alpha},$$

on considère les formes sesquilinéaires \mathcal{L} et $\widetilde{\mathcal{L}}$ (cette dernière consiste à remplacer G par G^*) :

$$\forall X \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \quad \mathcal{L}(X) = G^* X + XG + \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* X V_{\alpha},$$

$$\forall (h, k) \in D(G)^2, \quad (h, \mathcal{L}(X)k) = (Gh, Xk) + (h, XGk) + \sum_{\alpha} (V_{\alpha} h, X V_{\alpha} k).$$

On suppose que les hypothèses ci-dessous (1) à (5) sont satisfaites.

- (1) G est le générateur d'un semi-groupe fortement continu de contractions.
- (2) Il existe un ensemble D dense dans \mathfrak{H} contenu dans $D(G)$ et dans $D(G^*)$ qui soit un domaine essentiel pour G et pour G^* , c'est-à-dire :

$$\overline{G|_D} = G \quad , \quad \overline{G^*|_D} = G^* .$$

- (3) V_{α} et V_{α}^* sont fermés et $D(G) \subset D(V_{\alpha})$ et $D(G^*) \subset D(V_{\alpha}^*)$ de plus les restrictions ont des fermetures égales respectivement à V_{α} et V_{α}^* .

(4) $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = \mathbf{0} = \widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{1})$ au sens faible (des formes sesquilinéaires)

(5) Pour tout $u \in D$, $(n - G)^{-1}u \in D(G^*)$ et $(nG^*(n - G)^{-1}u)_{n \geq 1}$ converge fortement G^*u .

On peut définir les semi-groupes T et \widetilde{T} associés aux générateurs respectivement \mathcal{L} et $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Théorème 1.9 (Fagnola-Rebolledo)

On suppose que T possède un état stationnaire invariant et fidèle

$$\mathcal{B}(\mathfrak{H}) \ni X \longmapsto \mathbf{tr}(\rho X),$$

où ρ est une matrice de densité sur \mathfrak{H} .

Si le commutant généralisé de la famille des opérateurs (V_α, V_α^*) est égal à $\mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ alors :

$$w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} T_t(X) = \mathbf{tr}(\rho X) \cdot \mathbb{1}.$$

Chapitre 2

Exemples

2.1 Oscillateurs harmoniques

On montre dans cet exemple que les opérateurs de Van Hove \mathbf{K} et de Davies \mathbf{K}^\sharp sont égaux lorsque le système est constitué d'un seul oscillateur harmonique. Ce résultat tombe lorsqu'il y a au moins deux oscillateurs.

Dans le premier cas, le système (\mathcal{S}) n'est pas de dimension finie puisque assimilé à un oscillateur harmonique quantique de fréquence ω_0 . La construction du réservoir (\mathcal{R}) par une famille finie d'oscillateurs à l'aide de moyennes de Riemann peut être considérée comme une approximation de l'espace Fock symétrique $\Gamma_s(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+, d\omega))$.

On établit que l'opérateur $\mathbf{L} = (\mathbf{K}^\sharp)^$ est toujours un opérateur non borné de Lindblad, défini au sens faible des formes sesquilinéaires et que son noyau est de dimension supérieure ou égale à 1.*

L'équation maîtresse,

$$\partial_t \rho_t = \mathbf{L} \rho_t, \quad \rho_0 = \rho,$$

admet une et une seule solution.

De plus, on obtient le retour exponentiellement rapide à l'équilibre dès que la condition initiale ρ a toutes ses diagonales nulles à partir d'une certaine distance par rapport à la diagonale principale.

Physiquement, lorsque le nombre $n(\omega_0)$ de photons à la fréquence ω_0 est suffisamment grand, alors la température T_{equ} d'équilibre vérifie :

$$\mathbf{k} T_{equ} \approx \omega_0 n(\omega_0),$$

où \mathbf{k} est la constante de Boltzmann.

Dans le deuxième cas, les opérateurs de Van Hove et de Davies sont différents. Cependant, ils se décomposent en une somme directe d'opérateurs de la forme du premier cas. Ces opérateurs commutent de sorte que les techniques

utilisées pour un système formé d'un seul oscillateur s'appliquent grâce à une sommation finie. Le système retourne à l'équilibre si et seulement si toutes les températures sont égales.

Le principal intérêt des oscillateurs harmoniques est de pouvoir calculer complètement l'évolution de leur ensemble et d'obtenir une équation maîtresse lorsque l'environnement est initialement dans un état d'équilibre thermique.

De nombreux modèles physiques s'appuient sur l'exemple suivant : le système est une charge élastiquement liée à l'origine et le réservoir représente les divers modes du rayonnement, on s'intéresse alors à l'amortissement de la charge par l'émission spontanée, l'absorption et l'émission induite du rayonnement. Une description complète peut être trouvée dans l'ouvrage de [CDG]. On a suivi également l'ouvrage de [OM] où l'étude de l'équation maîtresse est mise en relation étroite avec la théorie de la décohérence.

2.1.1 Système d'un seul oscillateur harmonique

1. Description du modèle

Le système (\mathcal{S}) est assimilé à un oscillateur harmonique à une dimension à la fréquence ω_0 soit a^* et a les opérateurs de création et d'annihilation associés, l'hamiltonien sera noté H_s ¹ :

$$\begin{aligned} H_s &= \omega_0 a^* a \quad , \quad \sigma(H_s) = \{n\omega_0 : n \in \mathbb{N}\}; \\ H_s |n\rangle &= n\omega_0 |n\rangle \quad ; \\ D(a) = D(a^*) &= \left\{ \sum_n h_n |n\rangle, \sum_n n |h_n|^2 < \infty \right\}; \\ D(a^* a) &= \left\{ \sum_n h_n |n\rangle, \sum_n n^2 |h_n|^2 < \infty \right\}; \\ a^* |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad , \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a |0\rangle = 0; \\ [a, a^*] &= 1 \quad ; \end{aligned}$$

et $(|n\rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o.n. de \mathfrak{H}_s .

L'espace de Hilbert \mathfrak{H}_s peut être identifié à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Le sous espace

$$D \equiv D(a^* a)$$

1. L'expression physique usuelle étant $H_s = \omega_0(a^* a + \frac{1}{2})$, mais par commodité calculatoire, on a supprimé systématiquement le terme $\omega_0 \frac{1}{2}$.

est contenu et dense dans \mathfrak{H}_s .

L'algèbre des observables et la dynamique sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s &= \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s); \\ \forall A \in \mathcal{M}_s \quad , \quad \alpha_s^t(A) &= e^{itH_s} A e^{-itH_s}; \\ &= \sum_{n,m} e^{it\omega_0(n-m)} \langle n|A|m\rangle |n\rangle\langle m|; \\ L_s &= [H_s, \cdot] \quad , \quad \sigma(L_s) = \{(n-m)\omega_0 / (n, m) \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Le réservoir (\mathcal{R}) est constitué d'une famille finie de N oscillateurs harmoniques à une dimension dont les fréquences appartiennent à Ω où :

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \quad , \quad \omega_j = j \frac{\kappa}{N} \quad \text{où } \kappa > 0.$$

Dans la suite, on va faire tendre $N \rightarrow \infty$ pour obtenir un spectre continu de fréquences puis $\kappa \rightarrow \infty$ pour obtenir un spectre remplissant \mathbb{R}^+ .

Soient a_ω^* et a_ω les opérateurs de création et d'annihilation associés à l'oscillateur de fréquence ω dont les vecteurs propres associés à $a_\omega^* a_\omega$ seront notés $|n_\omega\rangle$, et qui constituent une b.o.n. de l'espace de Hilbert \mathfrak{H}_ω .

On choisit l'algèbre des observables

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_r) \quad , \quad \mathfrak{H}_r = \otimes_{\omega \in \Omega} \mathfrak{H}_\omega.$$

L'hamiltonien est fourni par une moyenne de «Riemann» ,

$$H_r = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega} \omega a_\omega^* a_\omega.$$

Pour tout $\tilde{n} = (n_{\omega_1}, n_{\omega_2}, \dots, n_{\omega_N}) \in \mathbb{N}^N$, on pose :

$$|\tilde{n}\rangle = \otimes_{\omega \in \Omega} |n_\omega\rangle \equiv |n_{\omega_1}\rangle \otimes |n_{\omega_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{\omega_N}\rangle; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}| &= \otimes_{\omega \in \Omega} \langle n_\omega|; \\ \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle &= \prod_{\omega \in \Omega} \delta_{n_\omega, m_\omega}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} a_\omega^* |n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega_N}\rangle &= \sqrt{n_\omega + 1} |n_{\omega_1}, \dots, n_\omega + 1, \dots, n_{\omega_N}\rangle, \\ a_\omega |n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega_N}\rangle &= \sqrt{n_\omega} |n_{\omega_1}, \dots, n_\omega - 1, \dots, n_{\omega_N}\rangle, \end{aligned}$$

et l'énergie de l'état $|\tilde{n}\rangle$ est :

$$E_{\tilde{n}} = \frac{1}{N} \sum_{\omega} \omega n_\omega.$$

Cette définition est justifiée par l'égalité

$$H_r |\tilde{n}\rangle = E_{\tilde{n}} |\tilde{n}\rangle. \quad (2.3)$$

La dynamique du réservoir est définie par :

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{M}_r, \quad \alpha_r^t(B) &= e^{itH_r} B e^{-itH_r} \\ &= \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} e^{it(E_{\tilde{n}} - E_{\tilde{m}})} \langle \tilde{n} | B | \tilde{m} \rangle |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{m}|. \end{aligned}$$

Le couplage du «Système-Réservoir» est entièrement déterminé par

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r); \\ H_0 &= H_s \otimes I + I \otimes H_r; \\ \text{et } \forall (A, B) \in \mathcal{M}_s \times \mathcal{M}_r, \quad \alpha_0^t(A \otimes B) &= \alpha_s^t(A) \otimes \alpha_r^t(B). \end{aligned}$$

L' hamiltonien d'interaction prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} H_I &= a \otimes \phi^+ + a^* \otimes \phi^- \\ \text{avec } \phi^- &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) a_\omega \quad ; \quad \phi^+ = (\phi^-)^*. \end{aligned}$$

Il est usuel dans ce type de modèle de ne pas tenir compte des termes d'anti-résonance du type $a \otimes a_\omega$ et $a^* \otimes a_\omega^*$.

• La projection P

Soit la densité de rayonnement ρ_r :

$$\begin{aligned} \rho_r &= \sum_{\tilde{n}} p(\tilde{n}) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|; \\ p(\tilde{n}) &\geq 0, \quad \sum_{\tilde{n}} p(\tilde{n}) = 1; \\ \forall B \in \mathcal{M}_r, \quad \omega_r(B) &= \mathbf{tr}(\rho_r B) \\ &= \sum_{\tilde{n}} p(\tilde{n}) \langle \tilde{n} | B | \tilde{n} \rangle \\ &\equiv \langle B \rangle_r. \end{aligned}$$

Et P la trace partielle par rapport au réservoir :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_s \times \mathcal{M}_r, \quad P(A \otimes B) = (A \otimes I) \langle B \rangle_r. \quad (2.4)$$

Comme $\langle \tilde{n} | \phi^\sharp | \tilde{n} \rangle = 0$, pour tout $\sharp \in \{-, +\}$, alors :

$$\omega_r(\phi^\sharp) = 0.$$

Il en résulte que l'on a :

$$P\delta_1 P = 0 \quad , \quad \delta_1 = i[H_1, \cdot].$$

L'égalité

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n} | \alpha_r^t(B) | \tilde{n} \rangle &= \sum_{\tilde{k}, \tilde{l}} \langle \tilde{k} | B | \tilde{l} \rangle e^{it(E_{\tilde{k}} - E_{\tilde{l}})} \langle \tilde{n} | \tilde{k} \rangle \langle \tilde{l} | \tilde{n} \rangle \\ &= \langle \tilde{n} | B | \tilde{n} \rangle, \end{aligned}$$

montre que ω_r est α_r -invariant.

• **Les fonctions à deux points. Limites $N \rightarrow \infty$ puis $\kappa \rightarrow \infty$.**

La détermination des fonctions à deux points non nulles s'obtient aisément en utilisant les propriétés des opérateurs a_ω et a_ω^* , en particulier :

$$\langle \tilde{n} | a_\omega^* a_{\omega'} | \tilde{n} \rangle = n_\omega \delta(\omega - \omega') \quad , \quad \langle \tilde{n} | a_\omega a_{\omega'}^* | \tilde{n} \rangle = (n_\omega + 1) \delta(\omega - \omega').$$

Soit $n(\omega)$ le nombre moyen de photons ayant la fréquence ω :

$$n(\omega) = \sum_{\tilde{n}} n_\omega p(\tilde{n}). \quad (2.5)$$

Remarque 2.1

On peut considérer que p définit une mesure de probabilités sur \mathbb{N}^Ω . Pour ω fixé dans Ω , la variable aléatoire X_ω , donnée par

$$X_\omega(\tilde{n}) = n_\omega,$$

peut être vue comme la ω -ième coordonnée de $\tilde{n} = (n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega_N})$. Par suite

$$\mathbb{E}(X_\omega) = n(\omega).$$

Ce qui suffit à justifier cette terminologie.

On obtient de la décomposition spectrale de H_r et des propriétés de a_ω ,

$$\phi^-(t) \equiv e^{itH_r} \phi^- e^{-itH_r} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega \in \Omega} e^{-it\omega} \lambda(\omega) a_\omega,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \phi^+(t) \phi^- \rangle_r &= \frac{1}{N} \sum_{\omega} |\lambda(\omega)|^2 n(\omega) e^{it\omega} \\ &= \overline{\langle \phi^+ \phi^- \rangle_r}; \\ \langle \phi^- \phi^+(t) \rangle_r &= \frac{1}{N} \sum_{\omega} |\lambda(\omega)|^2 (n(\omega) + 1) e^{it\omega} \\ &= \overline{\langle \phi^-(t) \phi^+ \rangle_r}. \end{aligned}$$

On suppose que lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\kappa \rightarrow \infty$ que $\tilde{n} \mapsto n_\omega p(\tilde{n})$ est sommable sur les multiples entiers $\tilde{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ de sorte que la fonction

$$\omega \mapsto n(\omega)$$

soit bien définie.

On suppose que les fonctions

$$\omega \mapsto \lambda(\omega) \quad , \quad \omega \mapsto n(\omega)$$

vérifient les conditions d'intégrabilité suivantes :

$$\omega \mapsto \lambda(\omega) \sqrt{n(\omega)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+, d\omega) \quad \text{et} \quad \omega \mapsto \lambda(\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+, d\omega).$$

Soient les fonctions de type positif :

$$\begin{aligned} h_1(t) &\equiv \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \phi^- \phi^+ \rangle_r = \int_0^{+\infty} d\omega |\lambda(\omega)|^2 (n(\omega) + 1) e^{it\omega}; \\ h_0(t) &\equiv \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \phi^+ \phi^- \rangle_r = \int_0^{+\infty} d\omega |\lambda(\omega)|^2 n(\omega) e^{it\omega}. \end{aligned}$$

Les égalités suivantes,

$$\langle \phi^+ \phi^- \rangle_r = \overline{\langle \phi^+ \phi^- \rangle_r} \quad , \quad \langle \phi^- \phi^+ \rangle_r = \overline{\langle \phi^- \phi^+ \rangle_r},$$

montrent que l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad h_j(-t) = \overline{h_j(t)}.$$

On suppose que les fonctions h_j et p_j vérifient

$$h_j \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, dt) \quad , \quad \lim_{|t| \nearrow \infty} |h_j(t)| \searrow 0 \quad , \quad j \in \{0, 1\};$$

$$p_j : \omega \mapsto |\lambda(\omega)|^2 (n(\omega) + j) \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}^+.$$

La distribution suivante

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-itx} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{+\infty} e^{it(x+i\varepsilon)} = \pi \delta(x) + i \text{VP} \left(\frac{1}{x} \right)$$

et la continuité des p_j donnent :

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-it\omega} h_j(t) = \Gamma_j(\omega) + i S_j(\omega) \quad , \quad j \in \{0, 1\};$$

où :

$$\begin{aligned} \Gamma_j(\omega) &= \pi |\lambda(\omega)|^2 (n(\omega) + j); \\ S_j(\omega) &= \text{VP} \left(\int_0^{+\infty} du \frac{|\lambda(u)|^2 (n(u) + j)}{u - \omega} \right). \end{aligned}$$

On peut remarquer que les réels $\Gamma_1(\omega) - \Gamma_0(\omega)$ et $S_1(\omega) - S_0(\omega)$ ne dépendent pas du nombre de photons $n(\omega)$ alors que

$$\Gamma_1(\omega)/\Gamma_0(\omega) = 1 + \frac{1}{n(\omega)}$$

est une fonction de $n(\omega)$ uniquement.

2. Construction d'un semi-groupe de générateur \mathbf{K}^\sharp

• Expression de l'opérateur de Van Hove \mathbf{K}

Les propriétés obtenues précédemment permettent de calculer

$$\mathbf{K} = \int_0^{+\infty} dt \left(\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P \alpha_s^{-t} \delta_1 \alpha_0^t \delta_1 P \right).$$

Les justifications calculatoires sont données en annexe B (page 141).

Posons :

$$\Gamma_j \equiv \Gamma_j(\omega_0) > 0 \quad , \quad S_j \equiv S_j(\omega_0) \quad , \quad j \in \{0, 1\}.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(A) &= (\Gamma_0 - iS_0) a[A, a^*] + (\Gamma_1 + iS_1) a^*[A, a] \\ &\quad - (\Gamma_0 + iS_0)[A, a] a^* - (\Gamma_1 - iS_1)[A, a^*] a. \end{aligned}$$

\mathbf{K} est défini au sens faible des formes sesquilineaires, c'est-à-dire :

$$\forall (u, v) \in D^2 \quad , \quad (u; \mathbf{K}(A) v) = (u, AGv) + (Gu, Av) + \sum_{j=0}^1 (L_j u, AL_j v),$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} G &= -\Gamma_0 aa^* - \Gamma_1 a^* a + iS a^* a; \\ L_0 &= \sqrt{2\Gamma_0} a^*; \\ L_1 &= \sqrt{2\Gamma_1} a; \\ S &= S_1 - S_0. \end{aligned}$$

L'égalité $aa^* = a^*a + 1$ montre que les opérateurs $A \mapsto aAa^*$, $a \mapsto a^*Aa$, $A \mapsto aa^*A$, $A \mapsto a^*aA$, $A \mapsto Aaa^*$, $A \mapsto Aa^*a$, commutent avec le «liouvillien» L_S : $A \mapsto [a^*a, A]$.

Ainsi on a :

$$\mathbf{K}^\sharp = \mathbf{K}.$$

Et

$$\forall A \in \mathcal{M}_s \quad , \quad \mathbf{K}(A) = \Gamma_0(2aAa^* - \{aa^*, A\}) + \Gamma_1(2a^*Aa - \{a^*a, A\}) \\ + i(S_1 - S_0)[A, a^*a].$$

On précise la construction d'un unique semi-groupe quantique minimal

$$(\mathbf{T}_t)_{t \geq 0} \equiv (e^{t\mathbf{K}})_{t \geq 0},$$

sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, associé au triplet (G, L_0, L_1) .

Toutes les preuves sont données en annexe B (pages 142-146) ; elles s'appuient sur la méthode de Chebotarev-Fagnola-Rebolledo ([CF],[F] et [RE1]).

On commence par vérifier les propriétés décrites ci-dessous.

Lemme 2.1

Nous avons.

- (i) G est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ fortement continu de contractions sur \mathfrak{H}_s .
- (ii) Les opérateurs L_j , ($j = 0, 1$), sont tels que $\text{dom}(G) = D \subset \text{dom}(L_j)$.
- (iii) $\mathbf{K}(\mathbb{1}) = 0$ au sens faible des formes sesquilinéaires :

$$\forall (u, v) \in D^2 \quad , \quad (u, Gv) + (Gu, v) + \sum_{j=0}^1 (L_j u, L_j v) = 0.$$

L'idée qui suit est en quelque sorte une représentation intégrale des opérateurs de type Lindblad.

Considérons les deux équations d'évolution, pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$,

$$\forall (u, v) \in D^2 : (u, T_t(X)v) = (u, Xv) + \int_0^t ds (u, \mathbf{K}(T_s(X))v), \quad (2.6)$$

et

$$(u, T_t(X)v) = (P_t u, X P_t v) \\ + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds (L_j P_{t-s} u, (T_s(X)) P_{t-s} L_j v). \quad (2.7)$$

Lemme 2.2

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ qui est w^* -continue et

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad \|X_t\| \leq \|X\|.$$

Alors, on a les équivalences des assertions suivantes :

- (i) $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie l'équation (2.6);
(ii) $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie l'équation (2.7).

Une solution de l'équation (2.7) est construite par la méthode itérative de Picard, précisée dans ce qui suit.

Soit $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, $X \geq 0$, on définit par récurrence la suite $(T_t^{(n)}(X))_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in D^2, \forall t \geq 0; \\ (u, T_t^{(0)}(X)v) = (P_t u, X P_t v); \\ (u, T_t^{(n+1)}(X)v) = (P_t u, X P_t v) + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds (L_j P_{t-s} u, T_s^{(n)}(X) L_j P_{t-s} v). \end{cases} \quad (2.8)$$

On démontre aisément par récurrence les propriétés de cette suite.

Lemme 2.3

Nous avons.

- (1) $T_t^{(n)}(X) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$ et tout entier n .
(2) $(T_t^{(n)}(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
(3) $0 \leq T_t^{(n)}(X) \leq \|X\| \cdot 1$, pour tout $t \geq 0$ et tout entier n .

On définit

$$T_t(X) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} T_t^{(n)}(X). \quad (2.9)$$

La question de l'unicité, qui justifie le qualificatif «minimal», est réglée par la proposition suivante dont le point essentiel est l'inégalité :

$$\forall \lambda, 0 < \lambda \leq 1, \forall u \in D : (u, Gu) + (Gu, u) + \lambda^2 \sum_{j=0}^1 \|L_j u\|^2 \leq 0.$$

Proposition 2.1

Soit $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ avec $X \geq 0$.

- (a) Soit une famille w^* -continue $(X_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie l'équation (2.7) alors

$$\forall t \geq 0, T_t(X) \leq X_t.$$

- (b) Soit $0 < \lambda \leq 1$, il existe un et un seul semi-groupe $({}^{(\lambda)}T_t(X))_{t \geq 0}$, dit associé au triplet $(G, \lambda L_0, \lambda L_1)$ qui satisfait l'équation :

$$(u, {}^{(\lambda)}T_t(X)v) = (P_t u, X P_t v) + \lambda^2 \sum_j \int_0^t ds (L_j P_{t-s} u, {}^{(\lambda)}T_s(X) L_j P_{t-s} v), \quad (2.10)$$

pour tout $(u, v) \in D^2$ et tout $t \geq 0$.

De plus,

$$T_t(X) = \sup_{0 < \lambda \leq 1} {}^{(\lambda)}T_t(X).$$

Comme tout élément de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ est une combinaison linéaire de quatre éléments positifs de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, on a ainsi construit un et un seul semi-groupe associé au triplet (G, L_0, L_1) qui est complètement positif tel que $T_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Il vérifie les propriétés de continuité suivantes.

(f) Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ une suite qui converge faiblement vers $X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ alors la suite $(T_t(X_n))_n$ converge faiblement vers $T_t(X)$.

(w* c) T_t est w^* -continue, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \forall \rho \in \mathcal{L}^1 \quad ; \quad \lim_{t \searrow 0} \text{tr}(\rho T_t(X)) = \text{tr}(\rho X).$$

Son générateur infinitésimal est donné par :

$$\mathbf{K} = w^* - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t - \mathbb{1}}{t}.$$

On peut lui associer, le semi-groupe $(e^{t\mathbf{L}})_{t \geq 0}$, défini sur l'espace des opérateurs à trace $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ par l'égalité,

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s, \forall \rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) \quad , \quad \text{tr}(\rho \mathbf{K}(A)) = \text{tr}(\mathbf{L}(\rho)A).$$

Il est positif, conserve la trace, continue en norme $\|\cdot\|_1$ et contractant au sens

$$\forall t \geq 0, \forall \rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) : \quad \|e^{t\mathbf{L}}\rho\|_1 \leq \|\rho\|_1.$$

Enfin, \mathbf{L} possède la forme non bornée de Lindblad :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\rho) &= \Gamma_1 \left([a\rho, a^*] + [a, \rho a^*] \right) + \Gamma_0 \left([a^* \rho, a] + [a^*, \rho a] \right) \\ &\quad + iS [a^* a, \rho], \quad S = S_1 - S_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Retour à l'équilibre. Relaxation exponentielle

Énonçons le principal résultat de ce paragraphe.

On considère l'équation maîtresse

$$\partial_t \rho_t = \mathbf{L} \rho_t. \quad (2.12)$$

Théorème 2.1

Pour toute matrice de densité ρ d'énergie finie, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(\rho H_s) = \sum_n n \rho_n < \infty,$$

il existe une et seule solution de l'équation (2.12) avec la condition initiale $\rho_0 = \rho$ et qui satisfait au retour à l'équilibre ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathrm{tr}(\rho_t A) = \mathrm{tr}(\rho_{equ} A),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

L'état d'équilibre ρ_{equ} étant donné par :

$$\rho_{equ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta - 1}{\theta^{n+1}} |n\rangle\langle n| \text{ et } \theta = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}. \quad (2.13)$$

La preuve est détaillée dans l'annexe B (pages 146-160.)

Cependant, on donne quelques commentaires.

Ce résultat peut être démontré en vérifiant les conditions du théorème de Fagnola-Rebolledo (théorème 1.9) mais nous avons choisi une autre méthode afin de préciser la vitesse de convergence pour des choix particuliers de A et de ρ .

A cette fin, soit

$$\forall A \equiv (A_{k,l})_{k,l} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \quad d(A) \equiv \sup\{|k-l| / A_{k,l} \neq 0\}.$$

On a les propriétés suivantes, quels que soient les éléments considérés de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$:

$$\begin{aligned} d(A+B) &\leq d(A) + d(B); \\ d(AB) &\leq d(A) + d(B); \\ d(A^*) &= d(A). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A} \equiv \{A : A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) / d(A) < \infty\},$$

est une sous C^* -algèbre de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ mais qui n'est pas dense dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$.

Par contre,

Lemme 2.4

$$\mathcal{D} \equiv \{\rho : \rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) / d(\rho) < \infty\},$$

est dense dans \mathcal{L}^1 .

On établit, au cours de la preuve, la relaxation exponentielle.

Proposition 2.2

Pour tout $\rho \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s)$, il existe une constante $C(d(\rho)) > 0$ telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \|\rho_t - \rho_{equ}\|_1 \leq C(d(\rho)) \times e^{-2t(\Gamma_1 - \Gamma_0)}. \quad (2.14)$$

Par une démarche similaire, on a aussi.

Proposition 2.3

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe une constante $C(d(A)) > 0$ telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad |\mathrm{tr}(\rho_t A) - \mathrm{tr}(\rho_{equ} A)| \leq C(d(A)) \times e^{-2t(\Gamma_1 - \Gamma_0)}. \quad (2.15)$$

Précisons les principales idées des étapes de la preuve du théorème.

L'idée est d'obtenir à partir de l'équation maîtresse (2.12) un système infini d'équations indépendantes qui nous conduira à une équation aux dérivées partielles du premier ordre que l'on résout par la méthode des systèmes caractéristiques. On obtient des estimations de la solution à l'aide d'une série de lemmes techniques (lemme B.2, lemme B.3, lemme B.4).

D'abord, pour tout $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$, on a :

$$\begin{aligned} \forall (k, l), \quad (\mathbf{L}\rho)_{k,l} &= \Gamma_0(2\sqrt{kl}\rho_{k-1,l-1} - (2+k+l)\rho_{k,l}) \\ &+ \Gamma_1(2\sqrt{(k+1)(l+1)}\rho_{k+1,l+1} - (k+l)\rho_{k,l}) \\ &+ iS(k-l)\rho_{k,l}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On se restreint aux éléments auto-adjoints $\rho = \rho^*$.

On pose :

$$f_k^{(D)} = \rho_{k,k+D}, \quad (k, D) \in \mathbb{N}^2.$$

Ainsi, on a la décomposition

$$\rho_{k,l} = \begin{cases} f_k^{(l-k)} & \text{si } l \geq k; \\ f_l^{(k-l)} & \text{si } k \geq l; \end{cases} \quad (2.17)$$

puis celle de ρ

$$\rho = \sum_k f_k^{(0)} |k\rangle\langle k| + \sum_{D>0, k \in \mathbb{N}} f_k^{(D)} |k\rangle\langle k+D| + \sum_{D>0, k \in \mathbb{N}} \overline{f_k^{(D)}} |k+D\rangle\langle k|.$$

On introduit la norme suivante pour les suites bornées $f \equiv (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\|f\|_{1,n} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n |f_k| \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

Identifions la suite f à la fonction analytique,

$$f(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k,$$

on a :

$$\sup_{|z| \leq 1} |\partial_z^n f(z)| \leq \|f\|_{1,0}.$$

De plus, si $f_k \geq 0$, pour tout entier k , alors d'après le théorème d'Abel, il vient :

$$\|f\|_{1,0} = f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z).$$

Les relations entre ces normes et l'espace de Banach $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ sont fournies par les deux points suivants.

Lemme 2.5

(i) Si $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$, $\rho = \rho^*$ tel que

$$\rho(H_s^n) \equiv \mathbf{tr}(\rho H_s^n) < \infty,$$

alors $f^{(\mathbf{D})} = (f_k^{(\mathbf{D})})_k$ définie par (2.17) vérifie, pour tout entier \mathbf{D} :

$$\|f^{(\mathbf{D})}\|_{1,n} \leq \rho(H_s^n).$$

(ii) Si $f^{(\mathbf{D})} = (f_k^{(\mathbf{D})})_k$, donnée pour tout entier \mathbf{D} telle que

$$\sum_{\mathbf{D} \in \mathbb{N}} \|f^{(\mathbf{D})}\|_{1,0} < \infty,$$

alors ρ défini par (2.17) vérifie :

$$\rho = \rho^* \quad \text{et} \quad \mathbf{tr}(|\rho|) \leq 2 \sum_{d \in \mathbb{N}} \|f^{(\mathbf{D})}\|_{1,0}.$$

L'équation maîtresse (2.12) donne alors un système infini de problèmes de Cauchy indépendants

$$\partial_t f_t^{(\mathbf{D})} = \mathbf{L}^{(\mathbf{D})} f_t^{(\mathbf{D})}, \quad (2.18)$$

où les opérateurs $\mathbf{L}^{(\mathbf{D})}$ sont calculés explicitement par :

$$\begin{aligned} \forall k, \quad (\mathbf{L}^{(\mathbf{D})} f)_k &= \Gamma_0(2\sqrt{k(k+\mathbf{D})} f_{k-1} - (2+2k+\mathbf{D}) f_k) \\ &+ \Gamma_1(2\sqrt{(k+1)(k+\mathbf{D}+1)} f_{k+1} - (2k+\mathbf{D}) f_k) \\ &+ i S \mathbf{D} f_k. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On commence par éliminer les radicaux, en considérant l'opérateur de multiplication

$$g \equiv e^F f \quad , \quad g_k^{(D)} = e^{F_k^{(D)}} f_k^{(D)} ,$$

où :

$$F_k^{(D)} \equiv \frac{1}{2} \log \begin{pmatrix} k+D \\ D \end{pmatrix} .$$

L'équation (2.18) montre que $g_t^{(D)}$ satisfait l'équation

$$\partial_t g_t^{(D)} = \mathcal{L}^{(D)} g_t^{(D)} , \quad (2.20)$$

avec $\mathcal{L}^{(D)} \equiv e^{F^{(D)}} \mathbf{L}^{(D)} e^{-F^{(D)}}$.

Un calcul simple établit :

$$\begin{aligned} \forall k, \quad (\mathcal{L}^{(D)} g)_k &= \Gamma_0(2(k+D) g_{k-1} - (2+2k+D) g_k) \\ &+ \Gamma_1(2(k+1) g_{k+1} - (2k+D) g_k) \\ &+ i S D g_k . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ce qui permet de montrer que la série entière,

$$g_t^{(D)}(z) = \sum_k (g_t)_k^{(D)} z^k ,$$

est analytique dans le disque ouvert unité et satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\partial_t g_t^{(D)}(z) = 2\Gamma_0 \left((1-z) \left((\theta-z) \partial_z - (D+1) \right) - D\xi \right) g_t^{(D)}(z) \quad (2.22)$$

$$\text{où } \theta = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} \quad , \quad \xi = \frac{\theta-1}{2} + i \frac{S}{2\Gamma_0} .$$

La méthode des systèmes caractéristiques permet la résolution de l'équation (2.22), en posant :

$$\begin{cases} g_t^{(D)}(w) &= \alpha \times g_0^{(D)}(z); \\ w &\equiv w(t, z) , w(0, z) = z; \\ \alpha &\equiv \alpha(t, z) , \alpha(0, z) = 1; \end{cases}$$

Le système permettant le calcul des intégrales premières est donc :

$$dt = - \frac{dw}{2\Gamma_0(1-w)(\theta-w)} = - \frac{d\alpha}{2\Gamma_0 \left((D+1)(1-w) + D\xi \right) \alpha} .$$

Ou encore d'équation caractéristique

$$\partial_t w = -2\Gamma_0(1-w)(\theta-w);$$

et l'équation dite de transport :

$$\partial_t \alpha = -2\Gamma_0 \left((D+1)(1-w) + D\xi \right) \alpha.$$

Ce qui permet d'obtenir en définitive :

$$g_t^{(D)}(w) = \varepsilon^{D/2} e^{-iSDt} \left(\frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \right)^{D+1} (w_0-w)^{-D-1} g_0^{(D)} \left(\lambda \frac{w_1-w}{w_0-w} \right), \quad (2.23)$$

avec

$$\varepsilon = e^{-2t(\Gamma_1-\Gamma_0)}, \quad \lambda = \frac{1-\varepsilon\theta}{1-\varepsilon}, \quad w_0 = \frac{\theta-\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad w_1 = \frac{\theta(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon\theta}.$$

Les trois inégalités (lemme B.2, lemme B.3, lemme B.4) permettent d'obtenir les comportements asymptotiques de $f_t^{(D)}$ pour la diagonale principale $D=0$ et pour les autres diagonales $D>0$.

Donnons un commentaire physique sur ce retour à l'équilibre thermodynamique.

D'une part, on peut reformuler ce résultat de la façon suivante.

En posant

$$e^{\beta_{equ}\omega_0} \equiv \theta = 1 + \frac{1}{n(\omega_0)} \quad \text{soit} \quad \beta_{equ} = \frac{1}{\omega_0} \log \left(1 + \frac{1}{n(\omega_0)} \right),$$

alors l'état ω_{equ} , défini sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ par

$$\omega_{equ}(A) = \mathbf{tr}(\rho_{equ}A),$$

où on note que

$$\rho_{equ} = \frac{e^{-\beta_{equ}H_s}}{\mathbf{tr}(e^{-\beta_{equ}H_s})},$$

est un état normal, fidèle et T_t -invariant.

Alors le retour à l'équilibre se traduit par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)^2, \forall \eta \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)_* : \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(BT_t(A)) = \eta(B)\omega_{equ}(A).$$

D'autre part, supposons que $n(\omega_0)$ soit très grand alors la température d'équilibre,

$$\mathbf{k}T_{equ} \equiv \frac{1}{\beta_{equ}},$$

où \mathbf{k} est la constante de Boltzmann, est le produit du nombre de photons à la fréquence ω_0 par cette fréquence,

$$\mathbf{kT}_{equ} \approx n(\omega_0)\omega_0.$$

Supposons maintenant que le réservoir soit à l'équilibre thermodynamique à la température \mathbf{kT}_{equ} , c'est-à-dire :

$$p(\tilde{n}) = Z^{-1} e^{-\beta_{equ} \sum n_\omega \omega}.$$

Alors on obtient aisément

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta_{equ} \omega} - 1}. \quad (2.24)$$

D'où :

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = e^{\beta_{equ} \omega_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{kT}_{equ} = n(\omega_0)\omega_0.$$

Autrement dit la température d'équilibre du système est celle du réservoir.

2.1.2 Système formé de d oscillateurs harmoniques

La modélisation du réservoir n'est pas modifiée.

Le système est constitué de d oscillateurs harmoniques de fréquences respectives $\omega_1, \dots, \omega_d$.

Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_s &= \left\{ \sum \rho_{n_1, \dots, n_d} |n_1, \dots, n_d\rangle \mid \sum |\rho_{n_1, \dots, n_d}|^2 < \infty \right\}; \\ \mathbf{H}_s &= \sum_{k=1}^d \omega_k a_k^* a_k; \\ a_k^* |n_1, \dots, n_d\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_1, \dots, n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1}, \dots, n_d\rangle; \\ a_k |n_1, \dots, n_d\rangle &= \sqrt{n_k} |n_1, \dots, n_{k-1}, n_k - 1, n_{k+1}, \dots, n_d\rangle. \end{aligned}$$

On suppose que l'application,

$$(n_1, \dots, n_d) \mapsto \sum n_j \omega_j,$$

est une injection de \mathbb{N}^d dans \mathbb{R} de sorte que le spectre de \mathbf{H}_s n'est pas dégénéré. Comme dans le cas $d = 1$, le couplage est défini sans termes résonnants du type aa_k et $a^* a_k^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \sum_{k=1}^d a_k \otimes \phi_k^+ + a_k^* \otimes \phi_k^-; \\ \phi_k^- &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda_k(\omega) a_\omega \quad , \quad \phi_k^+ = (\phi_k^-)^*. \end{aligned}$$

L'opérateur de Van Hove (voir annexe B page 141) est :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(A) &= \sum_{k,l} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{it\omega_k} \lim_{N,k} \langle \phi_k^+ \phi_l^- (t) \rangle_r \right) (a_k A a_l^* - a_k a_l^* A) \\
&+ \sum_{k,l} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-it\omega_k} \lim_{N,k} \langle \phi_k^- \phi_l^+ (t) \rangle_r \right) (a_k^* A a_l - a_k^* a_l A) \\
&- \sum_{k,l} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-it\omega_k} \lim_{N,k} \langle \phi_l^+ (t) \phi_k^- \rangle_r \right) (A a_l a_k^* - a_l A a_k^*) \\
&- \sum_{k,l} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{it\omega_k} \lim_{N,k} \langle \phi_l^- (t) \phi_k^+ \rangle_r \right) (A a_l^* a_k - a_l^* A a_k).
\end{aligned}$$

On calcule facilement l'expression de

$$\mathbf{K}^\sharp(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{itH_s} \mathbf{K} (e^{-itH_s} A e^{itH_s}) e^{-itH_s}.$$

Par exemple pour le premier terme de l'égalité; on tient compte de

$$a_k^*(t) \equiv e^{itH_s} a_k e^{-itH_s} = e^{it\omega_k} a_k^*,$$

alors, il vient :

$$e^{itH_s} a_k e^{-itH_s} A e^{itH_s} a_l^* e^{-itH_s} = e^{it(\omega_l - \omega_k)} a_k A a_l^*.$$

Il en résulte que, dans la sommation, il ne reste que les termes $k = l$. Les autres expressions se traitent de la même façon.

En définitive, on trouve que \mathbf{K}^\sharp est une somme directe d'opérateurs correspondant à chaque fréquence ω_k .

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^\sharp(A) &= \sum_{k=1}^d \mathbf{K}_k^\sharp(A); \\
\mathbf{K}_k^\sharp(A) &= \Gamma_0(\omega_k) (2a_k A a_k^* - \{a_k a_k^*, A\}) + \Gamma_1(\omega_k) (2a_k^* A a_k - \{a_k^* a_k, A\}); \\
&+ i (S_1(\omega_k) - S_0(\omega_k)) [A, a_k^* a_k];
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
j \in \{0, 1\} \quad , \quad \Gamma_j(\omega_k) &= \pi |\lambda_k(\omega_k)|^2 (n(\omega_k) + j); \\
S_j(\omega_k) &= \text{VP} \left(\int_0^{+\infty} du \frac{|\lambda_k(u)|^2 (n(u) + j)}{u - \omega_k} \right).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\rho) &= \sum_{k=1}^d \mathbf{L}_k(\rho); \\
\mathbf{L}_k(\rho) &= \Gamma_1(\omega_k) \left([a_k \rho, a_k^*] + [a_k, \rho a_k^*] \right) + \Gamma_0(\omega_k) \left([a_k^* \rho, a_k] + [a_k^*, \rho a_k] \right) \\
&+ i [(S_1(\omega_k) - S_0(\omega_k)) a_k^* a_k, \rho].
\end{aligned}$$

Proposition 2.4

On a

(i) Pour tout $(k; l) \in \{1, \dots, d\}^2$, $[\mathbf{L}_k, \mathbf{L}_l] = 0$.

(ii) $\text{Dim Ker}(\mathbf{L}) \geq 1$.

(iii) Soit $\beta > 0$.

La matrice de densité $\rho = \mathbf{Z}^{-1} e^{-\beta H_s}$ appartient au noyau de \mathbf{L} si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \dots, d\} \quad , \quad \beta_{1, equ} = \dots = \beta_{d, equ} = \beta,$$

où

$$e^{\beta_{k, equ} \omega_k} = \frac{\Gamma_1(\omega_k)}{\Gamma_0(\omega_k)} = 1 + \frac{1}{n(\omega_k)}.$$

Remarquons que la dernière égalité équivaut à

$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, \quad n(\omega_k) = \frac{1}{e^{\beta \omega_k} - 1},$$

ceci est réalisé, d'après (2.24), que si le réservoir est à l'équilibre à la température $1/\beta$.

Démonstration

Le premier point est clair puisque les opérateurs $a_k^\#$ et $a_l^{\#'}$ commutent où $(\#, \#') \in \{, *\}^2$ pour $k \neq l$.

Définissons pour chaque k ,

$$\beta_{k, equ} = \frac{1}{\omega_k} \ln \left(1 + \frac{1}{n(\omega_k)} \right),$$

et considérons la matrice de densité ρ_e où \mathbf{Z} est la constante de normalisation :

$$\mathbf{Z} \rho_e = e^{-\sum \beta_{k, equ} \omega_k a_k^* a_k} = \sum_{n_1, \dots, n_d} e^{-\beta_{1, equ} \omega_1 n_1 - \dots - \beta_{d, equ} \omega_d n_d} |n_1, \dots, n_d\rangle \langle n_1, \dots, n_d|.$$

L'égalité

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k(\rho_1 \cdots \rho_d) &= \mathbf{L}_k(\rho_k) \rho_1 \cdots \rho_{k-1} \rho_{k+1} \cdots \rho_d, \\ \text{où } \rho_j &\equiv \sum_{n_j} \rho_{n_j} |n_j\rangle \langle n_j|, \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

montre que $\mathbf{L}(\rho_e) = 0$.

Ce qui établit (ii).

Si $\beta_1 = \dots = \beta_d \equiv \beta$ alors on trouve l'équilibre thermodynamique de Gibbs

$$\rho_e = Z^{-1} e^{-\beta H_s}, \quad Z = \prod_k (1 - e^{-\beta \omega_k}).$$

Inversement, supposons que $\rho = e^{-\beta H_s}$ vérifie $\mathbf{L}(\rho) = 0$. Comme

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\rho) &= \sum_{n_1, \dots, n_d} \left(\sum_{k=1}^d 2\Gamma_0(\omega_k) e^{-\beta \omega_k n_k} \alpha_k(n_k) \right) |n_1, \dots, n_d\rangle \langle n_1, \dots, n_d| \\ \alpha_k(n) &\equiv (n+1) (e^{(\beta_k - \beta)\omega_k} - 1) + n (e^{\beta \omega_k} - e^{\beta_k \omega_k}) \end{aligned}$$

on doit avoir :

$$\forall (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \quad \Gamma_0(\omega_1) e^{-\beta \omega_1 n_1} \alpha_1(n_1) + \dots + \Gamma_0(\omega_d) e^{-\beta \omega_d n_d} \alpha_d(n_d) = 0.$$

Fixons l'un des entiers n_j et faisant tendre les autres vers l'infini alors, il vient :

$$\forall k, 1 \leq k \leq d, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k(n) = 0.$$

D'où $\beta_k = \beta$ pour tout k , $1 \leq k \leq d$.

Ce qui établit le point (iii). \square

On remarque que la «température» $\mathbf{kT}_{k, equ} = 1/\beta_{k, equ}$ de chaque oscillateur vérifie pour tout k ,

$$\omega_k n(\omega_k) \leq \mathbf{kT}_{k, equ}.$$

De plus si tous les $n(\omega_k)$ sont assez grands,

$$\mathbf{kT}_{k, equ} \approx \omega_k n(\omega_k).$$

Cependant pour atteindre l'équilibre thermodynamique (toutes les températures $T_{k, equ}$ sont égales), il suffit d'avoir

$$\omega_1 n(\omega_1) = \dots = \omega_d n(\omega_d).$$

Physiquement ceci signifie qu'un système harmonique couplé à un réservoir de densité d'énergie $n(\omega)$ n'atteint l'équilibre thermodynamique que si la densité $n(\omega)$ prend la même valeur en toutes les fréquences propres du système.

On convient de quelques notations sur les multi-indices

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d; \\ \tilde{n}_k \pm 1 &= (n_1, \dots, n_{k-1}, n_k \pm 1, n_{k+1}, \dots, n_d); \\ \tilde{m} - \tilde{n} \geq 0 &\iff m_k - n_k \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, d; \\ |\tilde{m} - \tilde{n}| &= \max_{1 \leq k \leq d} |m_k - n_k|; \\ S(\omega_k) &= S_1(\omega_k) - S_0(\omega_k). \end{aligned}$$

Pour $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$, on pose

$$d(\rho) = \sup\{|\tilde{n} - \tilde{m}| : (\tilde{n}, \tilde{m}) \in (\mathbb{N}^d)^2 / \rho_{\tilde{n}, \tilde{m}} \neq 0\}.$$

Le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$,

$$\mathcal{D} \equiv \{\rho : \rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) / d(\rho) < \infty\},$$

est *dense* dans $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$.

Par une démarche similaire que l'on ne détaillera pas, on aboutit au résultat suivant.

Théorème 2.2

On suppose

$$\beta_{1, equ} = \dots = \beta_{d, equ} = \beta,$$

et soit

$$\rho_{equ} = \frac{e^{-\beta H_s}}{\mathbf{tr}(e^{-\beta H_s})}.$$

Alors, pour tout $\rho \in \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s)$ d'énergie finie,

$$\mathbf{tr}(\rho H_s) < \infty,$$

l'équation maîtresse,

$$\partial_t \rho_t = \mathbf{L} \rho_t, \quad \rho_0 = \rho,$$

admet une et une seule solution.

Et

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{tr}(\rho_t A) = \mathbf{tr}(\rho_{equ} A).$$

De plus, si $\rho \in \mathcal{D}$ alors il existe une constante $C(d(\rho)) > 0$ telle que :

$$\|\rho_t - \rho_{equ}\|_1 \leq C(d(\rho)) \times e^{-\alpha t},$$

avec

$$\alpha = 2 \min_{1 \leq k \leq d} (\Gamma_1(\omega_k) - \Gamma_0(\omega_k)) > 0.$$

On indique seulement comment on peut se ramener aux techniques utilisées dans le cas d'un seul oscillateur.

Le point de départ est le calcul suivant

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_k(\rho))_{\tilde{n}, \tilde{m}} &= \Gamma_0(\omega_k) \left(2\sqrt{n_k m_k} \rho_{\tilde{n}_k-1, \tilde{m}_k-1} - (2 + n_k + m_k) \rho_{\tilde{n}, \tilde{m}} \right) \\ &\quad + \Gamma_1(\omega_k) \left(2\sqrt{(n_k + 1)(m_k + 1)} \rho_{\tilde{n}_k+1, \tilde{m}_k+1} - (n_k + m_k) \rho_{\tilde{n}, \tilde{m}} \right) \\ &\quad + iS(\omega_k)(n_k - m_k) \rho_{\tilde{n}, \tilde{m}}. \end{aligned}$$

Soit $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$, $\rho = \rho^*$, on lui associe la suite $f \equiv (f_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})})_{\tilde{n}, \tilde{D} \in \mathbb{N}^d}$ définie par :

$$\rho_{\tilde{n}, \tilde{m}} = \begin{cases} f_{\tilde{n}}^{(\tilde{m}-\tilde{n})} & \text{si } \tilde{m} - \tilde{n} \geq 0; \\ f_{\tilde{m}}^{(\tilde{n}-\tilde{m})} & \text{si } \tilde{n} - \tilde{m} \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\rho = \sum_{\tilde{n} \in \mathbb{N}^d} f_{\tilde{n}}^{(\tilde{0})} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}| + \sum_{\tilde{D} > \tilde{0}, \tilde{n} \in \mathbb{N}^d} f_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} + \tilde{D}| + \sum_{\tilde{D} > \tilde{0}, \tilde{n} \in \mathbb{N}^d} \overline{f_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})}} |\tilde{n} + \tilde{D}\rangle \langle \tilde{n}|.$$

Pour $\tilde{D} \in \mathbb{N}^d$, on définit les opérateurs $\mathbf{L}^{(\tilde{D})}$, $e^{\mathbf{F}^{(\tilde{D})}}$ et $\mathcal{L}^{(\tilde{D})}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^{(\tilde{D})} f)_{\tilde{n}} &= \sum_{k=1}^d \Gamma_0(\omega_k) \left(2\sqrt{n_k(n_k + D_k)} f_{\tilde{n}_{\tilde{k}-1}} - (2 + 2n_k + D_k) f_{\tilde{n}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^d \Gamma_1(\omega_k) \left(2\sqrt{(n_k + 1)(n_k + D_k + 1)} f_{\tilde{n}_{\tilde{k}+1}} - (2n_k + D_k) f_{\tilde{n}} \right) \\ &\quad - i \sum_{k=1}^d D_k \mathcal{S}(\omega_k) f_{\tilde{n}}; \\ \mathbf{g} \equiv e^{\mathbf{F}} f & \quad / \quad \mathbf{g}_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})} = e^{\mathbf{F}_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})}} f_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})}; \\ \mathbf{F}_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})} &= \frac{1}{2} \log \left\{ \binom{D_1 + n_1}{D_1} \cdots \binom{D_d + n_d}{D_d} \right\}; \\ (\mathcal{L}^{(\tilde{D})} \mathbf{g})_{\tilde{n}} &= \sum_{k=1}^d \Gamma_0(\omega_k) \left(2(n_k + D_k) g_{\tilde{n}_{\tilde{k}-1}} - (2 + 2n_k + D_k) g_{\tilde{n}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^d \Gamma_1(\omega_k) \left(2(n_k + 1) g_{\tilde{n}_{\tilde{k}+1}} - (2n_k + D_k) g_{\tilde{n}} \right) \\ &\quad - i \sum_{k=1}^d D_k \mathcal{S}(\omega_k) g_{\tilde{n}}. \end{aligned}$$

Identifiant $\mathbf{g}^{(\tilde{D})}$ à la fonction analytique de d variables complexes $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_d)$,

$$\mathbf{g}^{(\tilde{D})}(\tilde{z}) = \sum_{\tilde{n}=(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d} \mathbf{g}_{\tilde{n}}^{(\tilde{D})} z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}.$$

L'équation maîtresse, pour \tilde{D} fixé dans \mathbb{N}^d ,

$$\partial_t \mathbf{g}_t^{(\tilde{D})} = \mathcal{L}^{(\tilde{D})} \mathbf{g}_t^{(\tilde{D})},$$

conduit à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre,

$$\partial_t g_t^{(\tilde{D})}(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^d 2\Gamma_0(\omega_k) \left((1-z_k) \left((\theta_k - z_k) \partial_{z_k} - (D_k + 1) \right) - D_k \xi_k \right) g_t^{(\tilde{D})}(\tilde{z})$$

où :

$$\theta_k = \frac{\Gamma_1(\omega_k)}{\Gamma_0(\omega_k)}, \quad \xi_k = \frac{\theta_k - 1}{2} + i \frac{S(\omega_k)}{2\Gamma_0(\omega_k)}.$$

On détermine la solution par la méthode des systèmes caractéristiques puis des estimations techniques permettent d'étudier le comportement asymptotique des parties diagonales ($\tilde{D} = \tilde{0}$, $\tilde{D} > \tilde{0}$).

2.2 Système Spin-Boson

On calcule ici explicitement les opérateurs \mathbf{K} , \mathbf{K}^\sharp pour un système fini et on montre que \mathbf{K}^\sharp est la projection orthogonale de \mathbf{K} sur le commutant de \mathbf{L}_S .

2.2.1 Description du modèle

- Le système est décrit par un espace de Hilbert de dimension finie

$$\mathfrak{H}_s = \mathbb{C}^2.$$

Soient σ_0 , σ_x , σ_y et σ_z les matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\forall (a, b, c) \in \{x, y, z\}^3, \quad [\sigma_a, \sigma_b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c.$$

L'algèbre des observables est l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M}_s = \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ de dimension 4, engendrée par σ_0 , σ_x , σ_y et σ_z .

On note

$$S_0 = \sigma_0, \quad S_x = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{1}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{1}{2}\sigma_z,$$

de sorte que :

$$\forall (a, b, c) \in \{x, y, z\}^3, \quad [S_a, S_b] = i \epsilon_{abc} S_c.$$

La dynamique est définie par

$$\begin{aligned} H_s &= S_z, \quad \sigma(H_s) = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \forall A \in \mathcal{M}_s, \alpha_s^t(A) &= e^{itS_z} A e^{-itS_z}. \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\sigma([\mathbf{H}_s, \cdot]) &= \{-1, 0, 1\}; \\ \text{Ker}([\mathbf{H}_s, \cdot]) &= \langle \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_z \rangle; \\ \text{Ker}([\mathbf{H}_s, \cdot] - \mathbf{1}) &= \langle -i\mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y \rangle; \\ \text{Ker}([\mathbf{H}_s, \cdot] + \mathbf{1}) &= \langle i\mathbf{S}_x + \mathbf{S}_y \rangle.\end{aligned}$$

- Le réservoir est construit sur l'espace de Fock

$$\Gamma_s(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)) \equiv \mathfrak{H}_r,$$

les opérateurs a et a^* d'annihilation et de création vérifient les relations CCR

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k - k').$$

Les opérateurs $e^{i\phi(f)}$ du champ de Weyl correspondant sont donnés par :

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k (a(k) \bar{f}(k) + a^*(k) f(k)).$$

On désigne par ω_r l'état défini la fonction caractéristique :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \mathfrak{s}(f) = \omega_r(e^{i\phi(f)}) = e^{-\|f\|^2/4}.$$

Les propriétés suivantes de cet état, obtenues par dérivation de la fonction caractéristique, seront utilisées :

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \omega_r(\phi(f)) &= 0 \quad , \quad \omega_r(\mathbb{1}) = 1; \\ \forall (f, g) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)^2, \omega_r(\phi(f)\phi(g)) &= \frac{1}{2}(f, g).\end{aligned}$$

L'algèbre des observables du réservoir \mathcal{M}_r est l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $e^{i\phi(f)}$, $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ selon la méthode des CCR-algèbre et du théorème d'Araki-Segal (voir annexe B page 163 et théorème B.1), donc :

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_r).$$

Soit $k \mapsto \omega(k) = |k|$ la fonction d'énergie telle que l'hamiltonien \mathbf{H}_r , obtenue par la seconde quantification $\mathbf{H}_r = d\Gamma(\omega)$, satisfait donc les relations

$$\begin{aligned}[\mathbf{H}_r, a(k)] &= -\omega(k)a(k); \\ i[\mathbf{H}_r, \phi(f)] &= \phi(i\omega f); \\ \alpha_r^t : e^{i\phi(f)} &\longmapsto e^{it\mathbf{H}_r} e^{i\phi(f)} e^{-it\mathbf{H}_r} = e^{i\phi(e^{it\omega}f)}.\end{aligned}$$

Sur l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r$, la dynamique du système couplé est définie par l'hamiltonien

$$H_\lambda = H_s \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_r + \lambda S_x \otimes \phi(\rho) \quad , \quad \lambda > 0,$$

et

$$M \in \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r \quad , \quad \alpha_\lambda^t(M) = e^{itH_\lambda} M e^{-itH_\lambda}.$$

La projection P est la trace partielle par rapport au réservoir d'état ω_r :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_s \times \mathcal{M}_r \quad , \quad P(A \otimes B) = (A \otimes \mathbb{1}_r) \omega_r(B).$$

La fonction à deux points du réservoir est

$$\begin{aligned} h(t) &\equiv \omega_r(\phi(\rho) e^{itH_r} \phi(\rho) e^{-itH_r}) = \omega_r(\phi(\rho) \phi(\rho e^{it\omega})) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k |\rho(k)|^2 e^{it\omega(k)}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses suivantes :

- (I) $k \mapsto \frac{|\rho(k)|}{|k|} = \mathcal{O}(|k|^{-\alpha})$, $\alpha < 1$ au voisinage de 0;
- (II) $h : t \mapsto h(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$;
- (III) l'application $s \mapsto s^2 \int_{S^2} d\sigma(\hat{k}) |\rho(|s|\hat{k})|^2$

est continue sur \mathbb{R} .

On montre que :

$$\hat{h}(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \forall \alpha \leq 0; \\ 2\pi\alpha^2 \int_{S^2} d\sigma(\hat{k}) |\rho(\alpha\hat{k})|^2 & , \alpha > 0; \end{cases}$$

(voir l'annexe B, page 161).

Soit

$$s(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int_{\mathbb{R}} du \frac{\hat{h}(\alpha)}{u - \alpha} \right),$$

ainsi par la transformée de Hilbert, on a

$$\int_0^\infty dt h(t) e^{-it\alpha} = \frac{1}{2} \hat{h}(\alpha) - i s(\alpha).$$

2.2.2 Calculs de \mathbf{K} , \mathbf{K}^\sharp

Nous allons préciser les opérateurs \mathbf{K} , \mathbf{K}^\sharp et $\mathbf{L}_s = [H_s, \cdot]$. Avec les notations du chapitre 1, on obtient les expressions matricielles de ces opérateurs d'après les calculs matriciels effectués dans l'annexe B (page 162). Soient les nombres réels suivants

$$a = -\frac{\hat{h}(1)}{8}, b = \frac{s(1) - s(-1)}{4},$$

alors, relativement à la base (S_0, S_x, S_y, S_z) de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, on trouve :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \mathbf{K}^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \mathbf{L}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Conséquences

En particulier, on notera que

$$\sigma(\mathbf{K}^\sharp) = \{0, 2a, a + ib, a - ib\}.$$

En désignant par $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre 4 dont le seul terme non nul est celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1, le commutant $\{\mathbf{L}_s\}'$ de \mathbf{L}_s est

$$\{\mathbf{L}_s\}' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & -\delta & \gamma & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \middle/ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) \in \mathbb{C}^6 \right\}.$$

C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$ de dimension 6 dont une base est

$$\mathbf{b} = (E_{1,1}, E_{1,4}, E_{2,2} + E_{3,3}, -E_{3,2} + E_{2,3}, E_{4,1}, E_{4,4}).$$

Munissant $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$ du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbf{tr}(X^* Y),$$

alors l'égalité

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

montre aisément que tout élément E de la base \mathbf{b} vérifie

$$\langle E, \mathbf{K} - \mathbf{K}^\sharp \rangle = 0.$$

Donc \mathbf{K}^\sharp est la projection orthogonale de \mathbf{K} sur $\{\mathbf{L}_s\}'$.
On peut noter que si $a = 0$ alors

$$\mathbf{K}^\sharp = -ibL_s$$

et la valeur propre 0 n'est pas simple.
Si $a \neq 0$ donc $a < 0$ et $\text{Ker}(\mathbf{K}^\sharp) = \{t\mathbf{S}_0 / t \in \mathbb{C}\}$.
On choisit le produit scalaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$\forall (U, V) \in (\mathcal{L}(\mathbb{C}^2))^2, \langle U, V \rangle = \text{tr}(U^*V),$$

dont $(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z)$ est une base orthogonale.
On désigne par $\|\cdot\|$ la norme associée et par $\|\|\cdot\|\|$ la norme subordonnée associée aux opérateurs. On a :

$$\|\alpha\mathbf{S}_0 + x\mathbf{S}_x + y\mathbf{S}_y + z\mathbf{S}_z\| = \sqrt{2|\alpha|^2 + \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)}.$$

La proposition suivante montre que le système dynamique quantique est mélangant d'où ergodique.

Proposition 2.5

Sous l'hypothèse

$$a < 0,$$

la projection \mathbf{P}_∞ , avec

$$\mathbf{P}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vérifie :

$$\forall t \geq 0, \|\|e^{t\mathbf{K}^\sharp} - \mathbf{P}_\infty\|\| \leq C \times e^{at},$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration

Un calcul élémentaire sur la diagonalisation donne :

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}^\sharp\mathbf{T} = \text{diag}(0, a+ib, a-ib, 2a), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on trouve

$$e^{t\mathbf{K}^\sharp} = \mathbf{T} \operatorname{diag}(1, e^{t(a+ib)}, e^{t(a-ib)}, e^{2at}) \mathbf{T}^{-1}.$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\mathbf{K}^\sharp} = \mathbf{T} \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0) \mathbf{T}^{-1} \equiv \mathbf{P}_\infty.$$

De plus

$$\| \| e^{t\mathbf{K}^\sharp} - \mathbf{P}_\infty \| \| \leq \| \| \mathbf{T} \| \| \times \| \| \operatorname{diag}(0, e^{t(a+ib)}, e^{t(a-ib)}, e^{2at}) \| \| \times \| \| \mathbf{T}^{-1} \| \|.$$

L'égalité,

$$\| \| \operatorname{diag}(0, e^{t(a+ib)}, e^{t(a-ib)}, e^{2at}) (\alpha \mathbf{S}_0 + x \mathbf{S}_x + y \mathbf{S}_y + z \mathbf{S}_z) \| \|^2 = e^{2at} \left(\frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2) + \frac{e^{2at}}{2} |z|^2 \right),$$

montre que

$$\| \| \operatorname{diag}(0, e^{t(a+ib)}, e^{t(a-ib)}, e^{2at}) \| \| = e^{at}.$$

En définitive, il vient :

$$\forall t \geq 0, \quad \| \| e^{t\mathbf{K}^\sharp} - \mathbf{P}_\infty \| \| \leq (\| \| \mathbf{T} \| \| \times \| \| \mathbf{T}^{-1} \| \|) \times e^{at}.$$

□

Remarque 2.2

• L'équation du mouvement de $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r$ est donnée par les équations de Heisenberg

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_\lambda^t(\mathbf{M})) &= i[\mathbf{H}_\lambda, \alpha_\lambda^t(\mathbf{M})] \\ &= e^{it\mathbf{H}_\lambda} i[\mathbf{H}_\lambda, \mathbf{M}] e^{-it\mathbf{H}_\lambda} \end{aligned}$$

On rappelle ici la complexité du mouvement du vecteur spin $\begin{pmatrix} \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_z \end{pmatrix}$.

En utilisant la table algébrique

M	$i[H_\lambda, M]$
S_x	$-S_y$
S_y	$S_x - \lambda S_z \otimes \phi(\rho)$
S_z	$\lambda S_y \otimes \phi(\rho)$
$a(k)$	$-i\omega(k)a(k) - i\lambda 2^{-1/2}\rho(k)S_x$
$a^*(k)$	$i\omega(k)a^*(k) + i\lambda 2^{-1/2}\bar{\rho}(k)S_x$

l'évolution du champ est dirigée par

$$\alpha_\lambda^t(\phi(f)) = \phi(e^{it\omega} f) - \lambda \int_0^t ds \alpha_\lambda^s(S_x) \text{Im}(\rho, e^{i(t-s)\omega} f).$$

En particulier, pour $f = \rho$, il vient :

$$\rho_\lambda(t) \equiv \alpha_\lambda^t(\phi(\rho)) = \phi(e^{it\omega} \rho) - \lambda \int_0^t ds D(t-s) \alpha_\lambda^s(S_x),$$

où D désigne le noyau (dit de mémoire),

$$D(t) = \text{Im}(\rho, e^{it\omega} \rho) = \int d^3 k |\rho(k)|^2 \sin(\omega(k)t).$$

L'équation du mouvement du vecteur spin est donnée par

$$S_\lambda^t = e^{itH_\lambda} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} e^{-itH_\lambda}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit

$$\frac{d}{dt}(S_\lambda^t) = e_z \wedge S_\lambda^t + \lambda (e_x \wedge S_\lambda^t) \rho_\lambda(t). \quad (2.25)$$

En reprenant les méthodes du premier chapitre, on peut interpréter ces résultats de la façon suivante.

Posons

$$x_\lambda(t) = (P\alpha_0^{-t}\alpha_\lambda^tP)(A \otimes \mathbb{1}),$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur spin initial $\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$.

La limite de Van Hove s'écrit :

$$\forall \tau \geq 0, \lim_{\lambda \searrow 0} x_\lambda(\tau\lambda^{-2}) = e^{\tau\mathbf{K}^\sharp}(A).$$

Ce qui conduit à poser

$$x_\lambda(t) = e^{t\lambda^2\mathbf{K}^\sharp}(A) + o(\lambda).$$

Tenant compte de $P\alpha_0^t = \alpha_s^t = e^{it[H_s, \cdot]}$, alors :

$$x_\lambda(t) = e^{-it[H_s, \cdot]}S_\lambda^t.$$

Et du fait que \mathbf{K}^\sharp commute avec $[H_s, \cdot]$, on a formellement :

$$S_\lambda^t \approx e^{it[H_s, \cdot] + t\lambda^2\mathbf{K}^\sharp}(A),$$

ce qui permet d'obtenir une approximation de l'équation (2.25) du mouvement sous la forme, parfois appelée «approximation de Pauli-Born» (λ petit et t grand),

$$\frac{d}{dt}(S_\lambda^t) \approx i[H_s, S_\lambda^t] + \lambda^2\mathbf{K}^\sharp S_\lambda^t, \quad S_\lambda^0 = A.$$

2.3 Représentation d'Araki-Woods

Physiquement le postulat de symétrisation (principe de Pauli) de la mécanique quantique (selon [LL2], [CDL] vol I), conduit mathématiquement ([BR2] par exemple), aux espaces de Fock symétriques. Historiquement, ils ont été utilisés pour décrire un système de particules identiques (un gaz parfait composé de bosons) telles que les fonctions d'ondes soient symétriques et dont le nombre d'occupation des états quantiques n'est pas limité.

La distribution moment d'équilibre des bosons parmi les différents états quantiques d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et d'énergie $\varepsilon = \hbar\omega(\mathbf{k})$ à température inverse β est donnée par la loi de Planck :

$$\varrho(\mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\hbar\beta\omega(\mathbf{k})} - 1} \quad (2.26)$$

Il est d'usage, dans le contexte mathématique, de prendre $\hbar = 1$.

Dans tout ce qui suit, on envisage une fonction ϱ plus générale.

ϱ est une fonction mesurable et positive définie sur \mathbb{R}^3 , dépendant seulement de $|\mathbf{k}|$ ($\varrho(\mathbf{k}) = \varrho(|\mathbf{k}|)$) et on note :

$$\mathfrak{D}_\varrho = \left\{ f : f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) / (1 + 2\varrho)^{1/2} f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

Pour la modélisation du réservoir, la représentation d'Araki-Woods fournit la représentation régulière et cyclique de la CCR(\mathfrak{D}_ϱ) (selon [BR2], [P3]), qui correspond à la modélisation d'un gaz idéal de Bose, associée à la fonction génératrice s_ϱ , avec :

$$\forall f \in \mathfrak{D}_\varrho, s_\varrho(f) = e^{-\frac{1}{4}\|(1+2\varrho)f\|^2}.$$

On présente dans la suite le calcul des opérateurs \mathbf{K} et \mathbf{K}^\sharp du premier chapitre dans un cadre assez général.

Les objectifs sont triples.

On compare ces opérateurs entre la formulation hamiltonnienne de Davies et la formulation liouvillienne.

Soit \mathbf{K}^\sharp le générateur de Davies associé aux observables \mathcal{M}_s par la dynamique correspondant à l'hamiltonien,

$$\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r + \lambda \mathbf{Q} \otimes \phi(\alpha).$$

On a :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \quad \mathbf{K}^\sharp(A) = i[\mathbf{H}, A] + \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} [\mathbf{V}_\mu, A] \mathbf{V}_\mu^* + \mathbf{V}_\mu [A, \mathbf{V}_\mu^*];$$

$$\mathbf{V}_\mu = \sqrt{\hat{h}(\mu)} Q_\mu, \quad \mathbf{H} = \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) Q_\mu Q_\mu^*;$$

$$s(\mu) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int_{\mathbb{R}} dt \frac{\hat{h}(t)}{t - \mu} \right).$$

Si $(\mathcal{H}_s, \pi_s, \Omega_s)$ est la représentation GNS associée à $(\mathcal{M}_s, \omega_s)$, on considère \mathbf{K}_1^\sharp l'opérateur de Davies correspondant au liouvillien

$$L_\lambda = \lambda_0 + \lambda V - \lambda J V J.$$

Alors, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\pi_s} & \pi_s(\mathcal{M}_s) \\ \mathbf{K}^\sharp \downarrow & & \downarrow \mathbf{K}_1^\sharp \\ \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\pi_s} & \pi_s(\mathcal{M}_s), \end{array} \quad (2.27)$$

c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \pi_s(K^\sharp(A)) = K_1^\sharp(\pi_s(A)).$$

Ensuite, on compare ces opérateurs de Davies pour les liouilliens standard et \mathcal{C} -liouillien L_∞ dans le cas thermique que l'on résume par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \pi(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{C} & \xrightarrow{j} & \mathcal{H} \\ \text{P} \downarrow & & \downarrow \text{P}_{\mathcal{C}} & & \downarrow \text{P}_{\mathcal{H}} \\ \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{C}_s & \xrightarrow{j_s} & \mathcal{H}_s \\ K_1^\sharp \downarrow & & \downarrow \Sigma_{\mathcal{C}}^\sharp & & \downarrow L_\infty \\ \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{C}_s & \xrightarrow{j_s} & \mathcal{H}_s. \end{array} \quad (2.28)$$

Enfin, on obtient un théorème d'ergodicité de la dynamique markovienne sous des hypothèses assez simples à vérifier :

- (H1) $[H_s, Q] \neq 0$;
- (H2) $\exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \neq m \implies \langle n | Q^N | m \rangle \neq 0$;
- (H3) H_s admet un spectre discret non dégénéré.

Alors :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad w^* - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tK^\sharp}(A) = \Lambda_\infty(A),$$

où :

$$\Lambda_\infty(A) = \mathbf{tr}(\rho_e A), \quad \rho_e \equiv e^{-\beta H_s} / \mathbf{tr}(e^{-\beta H_s}).$$

2.3.1 Description du modèle «Système-Réservoir»

• Système

Le système est représenté par un espace de Hilbert \mathfrak{H}_s de dimension finie. On suppose que l'hamiltonien H_s admet la décomposition spectrale suivante :

$$H_s = \sum_{n \geq 0} E_n P_n, \quad P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |n^i\rangle \langle n^i|, \quad g_n \in \mathbb{N}^*;$$

$$E_0 < E_1 < \dots < E_n < \dots, \quad \sum g_n = \dim(\mathfrak{H}_s).$$

La famille $(|n^i\rangle)_{n,1\leq i\leq g_n}$, satisfaisant

$$\langle n^i | m^j \rangle = \delta_{n,m} \delta_{i,j},$$

est une base orthonormée de \mathfrak{H}_s .

$\mathcal{M}_s = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ désigne l'algèbre des observables. \mathcal{M}_{s*} est le préduel de l'algèbre de von Neumann \mathcal{M}_s .

Pour ρ , matrice de densité inversible exprimée comme une fonction de H_s :

$$\rho = \sum_{n\geq 0} \bar{\rho}(E_n) P_n, \quad \bar{\rho}(E_n) > 0, \quad \sum_n \bar{\rho}(E_n) g_n = 1;$$

on définit l'état ω_s par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \omega_s(A) = \mathbf{tr}(\rho A).$$

Puisque ρ inversible et \mathfrak{H}_s séparable alors ω_s est un état normal fidèle sur \mathcal{M}_s .

La dynamique sur \mathcal{M}_s est définie par le groupe

$$\tau_s^t : A \longmapsto e^{itH_s} A e^{-itH_s}.$$

Soit $(\mathcal{H}_s, \pi_s, \Omega_s)$ la représentation cyclique canonique GNS associée à $(\mathcal{M}_s, \omega_s)$, elle est explicitée par :

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s), \quad \Omega_s = \rho^{1/2}$$

où \mathcal{H}_s est muni du produit scalaire

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{H}_s^2, \quad (X, Y)_s = \mathbf{tr}(X^* Y).$$

La représentation π_s est la multiplication à gauche

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \pi_s(A) : \begin{cases} \mathcal{H}_s \mapsto \mathcal{H}_s \\ X \mapsto AX. \end{cases}$$

Ω_s est de plus séparent, la théorie modulaire appliquée au système donne le liouvillien L_s et ses principales propriétés :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \pi_s(e^{itH_s} A e^{-itH_s}) &= e^{itL_s} \pi_s(A) e^{-itL_s}; \\ L_s &= [H_s, \cdot]; \\ L_s \Omega_s &= 0; \\ \omega_s(A) &= (\Omega_s, \pi_s(A) \Omega_s). \end{aligned}$$

On a :

$$\sigma(L_s) = \{E_k - E_l \mid k \text{ et } l \in \mathbb{N}^*\}.$$

L'opérateur modulaire et la conjugaison modulaire sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{H}_s, \quad \Delta_s X &= \rho X \rho^{-1}; \\ J_s X &= X^*. \end{aligned}$$

Le groupe modulaire étant alors

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \sigma_s^t(A) = \rho^{it} \pi_s(A) \rho^{-it}.$$

La représentation duale est donnée par l'application anti-linéaire π_s^\sharp :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \forall X \in \mathcal{H}_s, \quad \pi_s^\sharp(A)(X) = J_s \pi_s(A) J_s = X A^*.$$

En particulier, nous utiliserons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad L_s J_s &= -J_s L_s, \quad J_s e^{itL_s} = e^{itL_s} J_s; \\ \forall A \in \mathcal{M}_s, \quad \pi_s^\sharp(e^{itH_s} A e^{-itH_s}) &= e^{itL_s} \pi_s^\sharp(A) e^{-itL_s}; \\ \overline{\omega_s(A)} &= (\Omega_s, \pi_s^\sharp(A) \Omega_s). \end{aligned}$$

• Réservoir

On utilise ici les résultats sur les CCR algèbres (rappelés dans l'annexe B.3.1) et le théorème B.1 d'Araki-Segal.

L'espace de Hilbert du réservoir est l'espace de Fock symétrique construit sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\mathfrak{H}_r = \Gamma_s(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)),$$

dont le vecteur vide est noté Ω_r .

La dynamique est définie par un groupe unitaire fortement continu

$$e^{iH_r t} = \Gamma(e^{i\omega t}),$$

où $\omega(k)$ est une fonction seulement de $|k|$ (physiquement l'énergie d'un boson de moment $|k|$).

Si $a^*(k)$ et $a(k)$ désignent les opérateurs de création et d'annihilation, alors :

$$H_r = d\Gamma(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \omega(k) a^*(k) a(k).$$

Soit \mathcal{A}_ρ la sous *-algèbre de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_r)$, ensemble des combinaisons linéaires finies des opérateurs de Weyl $W(f)$, $f \in \mathcal{D}_\rho$.

On désigne alors par $\text{CCR}(\mathfrak{D}_\varrho)$ la fermeture de \mathcal{A}_ϱ qui est une \mathbf{C}^* -algèbre de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_r)$.

On définit l'état ω_r sur $\text{CCR}(\mathfrak{D}_\varrho)$ par sa fonction génératrice \mathfrak{s}_ϱ :

$$\forall f \in \mathfrak{D}_\varrho, \mathfrak{s}_\varrho(f) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (1 + 2\varrho(k)) |f(k)|^2 \right\}.$$

Il est clair que cette application satisfait les conditions du théorème d'Araki-Segal (théorème B.1) et donc ω_r est un état régulier sur $\text{CCR}(\mathfrak{D}_\varrho)$.

La représentation d'Araki-Woods^{2,3} établit que le triplet $(\mathcal{H}_r, \pi_{\text{AW}}, \Omega_A)$ est une représentation régulière et cyclique de la \mathbf{C}^* -algèbre $\text{CCR}(\mathfrak{D}_\varrho)$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r &= \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_r); \\ \Omega_A &= |\Omega_r \rangle \langle \Omega_r|. \end{aligned}$$

Le produit scalaire sur \mathcal{H}_r (espace des opérateurs Hilbert-Schmidt sur \mathfrak{H}_r) est

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{H}_r^2 : (X, Y)_r = \text{tr}(X^* Y),$$

dont le champ de Segal provient de

$$\pi_{\text{AW}}(W(f)) : X \longmapsto W(\sqrt{1+\varrho}f) X W(\sqrt{\varrho}f), \quad X \in \mathcal{H}_r.$$

Et on a :

$$(\Omega_A, \pi_{\text{AW}}(W(f))\Omega_A)_r = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (1 + 2\varrho(k)) |f(k)|^2 \right\}.$$

Un calcul explicite d'Araki-Woods donne

$$\begin{aligned} \pi_{\text{AW}}(W(f)) &= e^{i\Phi_A(f)}; \\ \text{avec } \Phi_A(f)X &= \phi(\sqrt{1+\varrho}f)X + X\phi(\sqrt{\varrho}f), \quad X \in \mathcal{H}_r. \end{aligned}$$

Nous choisissons l'algèbre des observables du réservoir \mathcal{M}_r par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r &\equiv \pi_{\text{AW}}(\mathcal{A}_r)'' = \pi_{\text{AW}}(\text{CCR}(\mathfrak{D}_\varrho))''; \\ \forall A \in \mathcal{A}_r, \pi_{\text{AW}}(e^{itH_r} A e^{-itH_r}) &= e^{itL_r} \pi_{\text{AW}}(A) e^{-itL_r}; \end{aligned}$$

où L_r est le Ω_A -liouvillien, obtenu grâce à l'égalité

$$\pi_{\text{AW}}(e^{itH_r} W(f) e^{-itH_r})\Omega_A = e^{itL_r} \pi_{\text{AW}}(W(f))\Omega_A,$$

2. Systématiquement utilisée pour un réservoir à température non nulle.

3. On s'inspire ici de l'article précurseur [AW], puis de l'article de synthèse plus abstrait de [CH] et on a été guidé par les méthodes récentes de [JP3] et [P3].

et satisfait les deux conditions suivantes :

$$L_r = [d\Gamma(\omega), \cdot]; \quad (2.29)$$

$$L_r \Omega_A = 0. \quad (2.30)$$

On identifiera systématiquement \mathcal{M}_r à $\pi_r(\mathcal{M}_r)$ où (\mathcal{H}_r, π_r) est la représentation à gauche de \mathcal{M}_r ($\pi_r(\mathbf{M})(\mathbf{X}) = \mathbf{M}\mathbf{X}$, $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_r$ et $\mathbf{X} \in \mathcal{H}_r$).

Soit J_r la conjugaison modulaire et Δ_r l'opérateur modulaire associés à $(\mathcal{M}_r, \Omega_A)$.

En particulier, on a :

$$J_r \Delta_r^{1/2} \pi_{\text{AW}}(W(f)) \Omega_A = \pi_{\text{AW}}(W(f))^* \Omega_A$$

la représentation duale est donnée par :

$$\pi_r^\sharp(\mathbf{M}) = J_r \pi_r(\mathbf{M}) J_r.$$

Dans le cas de la loi de Planck,

$$\omega(|k|) = |k| \quad \text{et} \quad \varrho(|k|) = \frac{1}{e^{\beta|k|} - 1},$$

on obtient par un calcul explicite :

$$J_r(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^* \quad , \quad \Delta_r = e^{-\beta L_r}.$$

• Couplage «Système-Réservoir»

La structure modulaire du couplage «Système-Réservoir» en l'absence d'interaction a un état sur $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r$ donné par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r, \quad \omega_0(A \otimes B) = \omega_s(A) \omega_r(B).$$

Il existe une représentation cyclique canonique (\mathcal{H}, π, Ψ) de \mathcal{M} associée à ω_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_r; \\ \pi &= \pi_s \otimes \pi_r \quad , \quad \pi^\sharp = \pi_s^\sharp \otimes \pi_r^\sharp; \\ \Psi &= \Omega_s \otimes \Omega_A. \end{aligned}$$

Le ψ -liouvillien libre correspondant en l'absence du couplage est

$$L_0 = L_s \otimes \mathbb{1}_r + \mathbb{1}_s \otimes L_r. \quad (2.31)$$

L'interaction est donnée par :

$$V = \pi_s(Q) \otimes \Phi_A(\alpha), \quad \text{où} \quad Q = Q^* \in \mathcal{M}_s, \quad \alpha \in \mathfrak{D}_\varrho.$$

La dynamique du couple «Système-Réservoir» est

$$\forall M \in \mathcal{M}, \alpha_\lambda^t(\pi(M)) = e^{itL_\lambda} \pi(M) e^{-itL_\lambda},$$

où

$$L_\lambda = L_0 + \lambda V - \lambda J V J, \lambda \geq 0. \quad (2.32)$$

Exemple 2.1

Dans l'article [JP3], les auteurs établissent que le liouvillien du système couplé «Système-Réservoir» pour le modèle Spin-Boson, est :

$$\begin{aligned} L_\lambda &= L_0 + \lambda L_1, \lambda \geq 0; \\ L_1 &= \pi_s(Q) \otimes \Phi_A(\alpha) - \pi_s^\sharp(Q) \otimes \Phi_A^\sharp(\alpha); \\ \Phi_A^\sharp(\alpha)(X) &= \Phi(\sqrt{\varrho}\alpha)X + X\Phi(\sqrt{1+\varrho}\alpha), X \in \mathcal{H}_r. \end{aligned}$$

Introduisons les opérateurs issus de ces représentations :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}_\varrho, \forall X \in \mathcal{H}_r, a_A(f)X &= a(\sqrt{1+\varrho}f)X + Xa(\sqrt{\varrho}f); \\ a_A^*(f)X &= a^*(\sqrt{1+\varrho}f)X + Xa^*(\sqrt{\varrho}f); \\ a_A^\sharp(f) &= J_r a_A(f) J_r \quad (\text{linéaire}); \\ a_A^{*\sharp}(f) &= J_r a_A^*(f) J_r \quad (\text{anti-linéaire}). \end{aligned}$$

de sorte que l'on ait :

$$\Phi_A(f) = 2^{-1/2}(a_A(f) + a_A^*(f)) \quad , \quad \Phi_A^\sharp(f) = 2^{-1/2}(a_A^\sharp(f) + a_A^{*\sharp}(f)).$$

Utilisant les relations CCR de a et a^* , on donne dans l'annexe B, les propriétés de ces opérateurs.

En particulier, les deux représentations donnent des champs de Weyl indépendants, grâce aux relations

$$[a_A(f), a_A^\sharp(g)] = 0 = [a_A(f), a_A^{*\sharp}(g)] \quad , \quad [\Phi_A(f), \Phi_A^\sharp(g)] = 0.$$

Pour les interactions entre le système et le réservoir, on a besoin des expressions des huit fonctions à deux points non nulles, pour tout $(i, j) \in \{, *, \sharp, * \sharp\}^2$, f et g éléments de \mathcal{D}_ϱ

$$\langle a_A^i(f) a_A^j(g) \rangle \equiv (\Omega_A, a_A^i(f) a_A^j(g) \Omega_A)_r = \mathbf{tr}((\Omega_A)^* a_A^i(f) a_A^j(g) \Omega_A). \quad (2.33)$$

Ces calculs sont donnés en annexe B (page 169).

Ils utilisent les relations CCR de a et de a^* et les propriétés de la théorie modulaire (la conjugaison modulaire J est anti-unitaire, $\Delta^z \Omega = \Omega$, $J \Omega = \Omega$) ce qui permet d'obtenir.

Proposition 2.6

Pour tous les éléments f et g de \mathfrak{D}_ϱ et pour tout $(i, j) \in \{, *, \sharp, * \sharp\}^2$, alors :

$$a_\Lambda^i(f)\Omega_\Lambda \quad \text{et} \quad a_\Lambda^i(f)a_\Lambda^j(g)\Omega_\Lambda$$

sont des éléments de \mathcal{H}_r .

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \langle a_\Lambda(f)a_\Lambda^*(g) \rangle &= ((1+\varrho)f, g) \quad , \quad \langle a_\Lambda^*(f)a_\Lambda(g) \rangle = (\varrho g, f); \\ \langle a_\Lambda^\sharp(f)a_\Lambda^{*\sharp}(g) \rangle &= ((1+\varrho)g, f) \quad , \quad \langle a_\Lambda^{*\sharp}(f)a_\Lambda^\sharp(g) \rangle = (\varrho f, g); \\ \langle a_\Lambda(f)a_\Lambda^\sharp(g) \rangle &= (\sqrt{\varrho}f, \sqrt{1+\varrho}g) \quad , \quad \langle a_\Lambda^*(f)a_\Lambda^{*\sharp}(g) \rangle = (\sqrt{1+\varrho}g, \sqrt{\varrho}f); \\ \langle a_\Lambda^\sharp(f)a_\Lambda(g) \rangle &= (\sqrt{\varrho}g, \sqrt{1+\varrho}f) \quad , \quad \langle a_\Lambda^{*\sharp}(f)a_\Lambda^*(g) \rangle = (\sqrt{1+\varrho}f, \sqrt{\varrho}g). \end{aligned}$$

Tous les autres calculs sont nuls.

2.3.2 Calculs de générateurs \mathbf{K}^\sharp

Lorsque l'on s'intéresse aux observables du couple «Système-Réservoir», on calcule les expressions théoriques, vues au premier chapitre, des opérateurs \mathbf{K} et de \mathbf{K}^\sharp agissant sur l'algèbre de von Neumann $\pi_s(\mathcal{M}_s)$ lorsque la perturbation est U_j , $j = 1, 2$ pour les deux cas suivants :

$$\begin{aligned} U_1(\pi(\mathbf{M})) &= [V, \pi(\mathbf{M})]; \\ U_2(\pi(\mathbf{M})) &= V\pi(\mathbf{M}) - \pi(\mathbf{M})V'; \\ V &= \pi_s(Q) \otimes \Phi_\Lambda(\alpha); \\ V' &= \pi_s(Q') \otimes \Phi_\Lambda(\alpha'); \\ Q^* = Q, Q'^* = Q' \quad , \quad (\alpha, \alpha') &\in \mathfrak{D}_\varrho^2. \end{aligned}$$

dont les calculs se feront uniquement pour U_2 puisque le cas $V' = V$ donne $U_1 = U_2$.

L'idée est que l'on disposera alors d'une famille d'opérateurs $L_0 + \lambda U$ qui, sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)** ci-dessous, donne le même générateur de Davies \mathbf{K}^\sharp .

En effet puisque,

$$e^{it\lambda J W J} = J e^{it\lambda W} J \in \pi(\mathcal{M})', W \in \pi(\mathcal{M})$$

nous obtenons, grâce à la formule de Trotter, la même dynamique :

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda^t(\pi(\mathbf{M})) &= e^{it(L_0 + \lambda V)} \pi(\mathbf{M}) e^{-it(L_0 + \lambda V)} \\ &= e^{it(L_0 + \lambda V - \lambda J W J)} \pi(\mathbf{M}) e^{-it(L_0 + \lambda V - \lambda J W J)}. \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{M}) &= \pi_s(\mathcal{M}_s) \otimes \pi_r(\mathcal{M}_r) \longmapsto \pi(\mathcal{M}) \\ \text{P :} \quad \quad \quad \text{A} \otimes \text{B} &\longmapsto (\text{A} \otimes \text{I}_r) \langle \text{B} \rangle \\ &\langle \text{B} \rangle \equiv (\Omega_A, \text{B}\Omega_A) = \langle \Omega | \text{B} | \Omega \rangle \end{aligned}$$

est un projecteur de $\pi(\mathcal{M})$, $\text{Q} \equiv 1 - \text{P}$ et :

$$\text{P}\text{U}_j\text{P} = 0 \quad \text{et} \quad \text{P}\text{U}_j\text{Q} = \text{P}\text{U}_j, \quad j \in \{1, 2\}.$$

La considération des groupes sur $\pi(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} \alpha_{L_\lambda^j}^t(\pi(\text{M})) &= e^{itL_\lambda^j} \pi(\text{M}) e^{-itL_\lambda^j} \\ &= \alpha_\lambda^t(\pi(\text{M})); \\ \text{U}_{L_\lambda^j}^t &= \text{P} \alpha_{L_\lambda^j}^t(t) \text{P}, \quad L_\lambda^j = L_0 + \lambda \text{U}_j; \end{aligned}$$

et qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}, [\text{P}, \text{U}_{L_\lambda^j}(t)] = 0,$$

conduit, selon le chapitre 1, à calculer les opérateurs

$$\text{K}_j = - \int_0^\infty dr \text{U}_0(-r) \text{P}\text{U}_j \text{Q} \alpha_0(r) \text{Q}\text{U}_j \text{P}, \quad j \in \{1, 2\},$$

et

$$\mathbf{K}_j^\sharp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{itL_s} \text{K}_j e^{-itL_s}.$$

Considérons les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(H1)} \quad \forall \mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}, (\alpha(|\mu|\cdot); \alpha'(|\mu|\cdot))_{S^2} &= (\alpha'(|\mu|\cdot); \alpha(|\mu|\cdot))_{S^2} \\ &= \|\alpha(|\mu|\cdot)\|_{S^2}^2 \\ &= \|\alpha'(|\mu|\cdot)\|_{S^2} \end{aligned}$$

et

$$\text{(H2)} \quad \forall \mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}, \quad \text{Q}_\mu = \text{Q}'_\mu;$$

où

$$\begin{aligned} \forall (\varphi, \psi) \in \mathbb{L}^2(S^2), (\varphi; \psi)_{S^2} &= \int_{S^2} d\sigma(\hat{\mathbf{k}}) \overline{\varphi(\hat{\mathbf{k}})} \psi(\hat{\mathbf{k}}); \\ \forall M \in \mathcal{M}_s, M_\mu &= \sum_{\substack{i,f \\ E_i - E_f = \mu}} P_i M P_f; \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ E_k - E_l = \mu}} \sum_{i=1}^{g(k)} \sum_{j=1}^{g(l)} \langle k^i | M | l^j \rangle \langle k^i | \langle l^j |. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} h(t) &\equiv \langle \Phi_A(\alpha) \Phi_A(e^{it\omega} \alpha') \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int ((1 + \varrho) e^{it\omega} \bar{\alpha} \alpha' + \varrho e^{-it\omega} \bar{\alpha}' \alpha); \\ \langle \Phi_A(e^{it\omega} \alpha) \Phi_A(\alpha') \rangle &= h(-t); \\ c(t) &\equiv \langle \Phi_A(\alpha) \Phi_A(e^{it\omega}) \rangle = \frac{1}{2} \int |\alpha|^2 ((1 + \varrho) e^{it\omega} + \varrho e^{-it\omega}); \\ c'(t) &\equiv \langle \Phi_A(e^{it\omega} \alpha') \Phi_A(\alpha') \rangle = \frac{1}{2} \int |\alpha'|^2 ((1 + \varrho) e^{-it\omega} + \varrho e^{it\omega}). \end{aligned}$$

On utilise, dans les calculs, la transformation de Hilbert qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dt c(t) e^{-it\mu} &= \frac{1}{2} \hat{c}(\mu) - i s_c(\mu); \\ s_c(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int dt \frac{\hat{c}(t)}{t - \mu} \right). \end{aligned}$$

On obtient la forme générale suivante.

Théorème 2.3

Pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^\dagger(\pi_s(A)) &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \hat{h}(\mu) \pi_s(Q_\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q_\mu^{I*}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \hat{c}(\mu) \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) \pi_s(A) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \hat{c}'(-\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q'_\mu Q_\mu^{I*}) \\ &\quad + i \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s_c(\mu) \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) \pi_s(A) \\ &\quad + i \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s_{c'}(-\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q'_\mu Q_\mu^{I*}) *. \end{aligned} \tag{2.34}$$

La preuve est fournie dans l'annexe **B** (page 170).
Comme cas particulier important, il vient :

Corollaire 2.1

Soient les opérateurs définis sur $\pi_s(\mathcal{M}_s)$:

$$\begin{aligned}\forall \mu \in \sigma(L_s), \mathbf{V}_\mu &= \sqrt{\hat{h}(\mu)} \pi_s(Q_\mu); \\ \mathbf{H} &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*).\end{aligned}$$

Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, on obtient la décomposition de Lindblad :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1^\sharp(\pi_s(A)) &= \mathbf{K}_2^\sharp(\pi_s(A)); \\ \mathbf{K}_1^\sharp(\pi_s(A)) &= i[\mathbf{H}, \pi_s(A)] + \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} [\mathbf{V}_\mu, \pi_s(A)] \mathbf{V}_\mu^* + \mathbf{V}_\mu [\pi_s(A), \mathbf{V}_\mu^*].\end{aligned}\quad (2.35)$$

Démonstration du corollaire

Elle résulte essentiellement des identités suivantes.

Lemme 2.6

Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, pour tout $\mu \in \sigma(L_s)$, il vient :

$$\begin{aligned}\hat{c}(\mu) &= \hat{h}(\mu); \\ \hat{c}'(-\mu) &= \hat{c}(\mu); \\ s_{c'}(-\mu) &= -s_c(\mu).\end{aligned}$$

En effet, l'hypothèse **(H1)** donne

$$\begin{aligned}\hat{h}(\mu) &= \pi \int_{\mathbb{R}} s^2 ds \left((1 + \varrho(|s|)) \delta(\omega(|s|) - \mu) (\alpha(|s|\cdot); \alpha'(|s|\cdot))_{S^2} \right. \\ &\quad \left. + \varrho(|s|) \delta(\omega(|s|) + \mu) (\alpha'(|s|\cdot); \alpha(|s|\cdot))_{S^2} \right) \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}} s^2 ds \left((1 + \varrho(|s|)) \delta(\omega(|s|) - \mu) + \varrho(|s|) \delta(\omega(|s|) + \mu) \right) \|\alpha(|s|\cdot)\|_{S^2} \\ &= \hat{c}(\mu).\end{aligned}$$

La seconde identité résulte de **(H1)** et des égalités suivantes :

$$c'(t) = c(-t) = \overline{c(t)}.$$

La dernière est une conséquence de la seconde par simple changement de variable dans la valeur principale de Cauchy. \square

Exemple 2.2 (Cas de la loi de Planck)

Dans ce cas

$$\omega(|s|) = |s| \quad \text{et} \quad \varrho(|s|) = \frac{1}{e^{\beta|s|} - 1},$$

d'où, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$,

$$\widehat{h}(\mu) = \begin{cases} \frac{\pi\mu^2}{2} \frac{e^{\beta\mu/2}}{|\sinh(\beta\mu/2)|} (\alpha(|\mu|\cdot), \alpha'(|\mu|\cdot))_{S^2}^2 & , \quad \mu > 0; \\ \frac{\pi\mu^2}{2} \frac{e^{\beta\mu/2}}{|\sinh(\beta\mu/2)|} (\alpha'(|\mu|\cdot), \alpha(|\mu|\cdot))_{S^2}^2 & , \quad \mu < 0; \end{cases}$$

$$(\alpha(|\mu|\cdot), \alpha'(|\mu|\cdot))_{S^2} \equiv \int_{S^2} d\sigma(\hat{\mathbf{k}}) \overline{\alpha(|\mu|\hat{\mathbf{k}})} \alpha'(|\mu|\hat{\mathbf{k}});$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{c}(\mu) &= \frac{\pi\mu^2}{2} \frac{e^{\beta\mu/2}}{|\sinh(\beta\mu/2)|} \|\alpha(|\mu|\cdot)\|_{S^2}^2; \\ \widehat{c}'(\mu) &= \frac{\pi\mu^2}{2} \frac{e^{\beta\mu/2}}{|\sinh(\beta\mu/2)|} \|\alpha'(|\mu|\cdot)\|_{S^2}^2. \end{aligned}$$

Finalement, on a le résultat énoncé.

Proposition 2.7

Soit \mathbf{K}_D^\sharp le générateur de Davies associé aux observables \mathcal{M}_s par la dynamique correspondant à l'hamiltonien :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r + \lambda \mathbf{Q} \otimes \phi(\alpha), \quad \lambda \geq 0.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, on a :

$$\mathbf{K}_D^\sharp(A) = i[\mathbf{H}_D, A] + \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} [\mathbf{V}_{D,\mu}, A] \mathbf{V}_{D,\mu}^* + \mathbf{V}_{D,\mu} [A, \mathbf{V}_{D,\mu}^*], \quad (2.36)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{D,\mu} &= \sqrt{\widehat{h}(\mu)} Q_\mu; \\ \mathbf{H}_D &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) [Q_\mu Q_\mu^*, \cdot]. \end{aligned}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\pi_s} & \pi_s(\mathcal{M}_s) \\ \mathbf{K}_D^\sharp \downarrow & & \downarrow \mathbf{K}_1^\sharp \\ \mathcal{M}_s & \xrightarrow{\pi_s} & \pi_s(\mathcal{M}_s) \end{array}$$

est commutatif :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \pi_s(\mathbf{K}_D^\sharp(A)) = \mathbf{K}_1^\sharp(\pi_s(A)).$$

• **Comparaison entre le liouvillien standard et le \mathcal{C} -liouvillien**

Soit Ψ l'isomorphisme canonique entre les espaces de Banach $(\pi(\mathcal{M}), \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{C} = \{A\Psi : A \in \pi(\mathcal{M})\}, \|\cdot\|_\infty)$ avec :

$$\begin{array}{ccc} \pi(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{C} \\ A & \longrightarrow & A\Psi \end{array} \quad (2.37)$$

$$\|A\Psi\|_\infty = \|A\|.$$

On a , pour tout $A \in \pi(\mathcal{M})$:

$$(L_0A + \pi(V)A - A\pi(V'))\Psi = (L_0 + \pi(V) - J\Delta^{1/2}\pi(V')J\Delta^{1/2})A\Psi.$$

En particulier, lorsque $V = V'$, on obtient le \mathcal{C} -liouvillien (1.4) :

$$L_\infty = L_0 + \pi(V) - J\Delta^{1/2}\pi(V)J\Delta^{1/2}.$$

On considère les opérateurs

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathcal{C}}^\sharp &= \Psi_s \circ \mathbf{K}_1^\sharp \circ \Psi_s^{-1}; \\ P_{\mathcal{C}} &= \Psi \circ P \circ \Psi^{-1}. \end{aligned}$$

L'image de $P_{\mathcal{C}}$ est l'espace de Banach $\mathcal{C}_s = \{\pi_s(A)\Omega_s : A \in \mathcal{M}_s\}$ isomorphe à $\pi_s(\mathcal{M}_s)$ et de fermeture faible égale à \mathcal{H}_s .

j et j_s désignent les injections canoniques.

$$\begin{array}{ccccc} \pi(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{C} & \xrightarrow{j} & \mathcal{H} \\ P \downarrow & & \downarrow P_{\mathcal{C}} & & \downarrow P_{\mathcal{H}} \\ \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{C}_s & \xrightarrow{j_s} & \mathcal{H}_s \\ \mathbf{K}_1^\sharp \downarrow & & \downarrow \Sigma_{\mathcal{C}}^\sharp & & \downarrow L_\infty \\ \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{C}_s & \xrightarrow{j_s} & \mathcal{H}_s \end{array}$$

Les résultats suivants, obtenus par définition de l'opérateur modulaire Δ_s ,

$$\begin{aligned} \Delta_s^{1/2}\pi_s(Q_\mu)\Delta_s^{-1/2} &= \rho^{1/2}\pi_s(Q_\mu)\rho^{-1/2}; \\ \Delta_s^{1/2}\pi_s(Q_\mu Q_\mu^*)\Delta_s^{-1/2} &= \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*); \end{aligned}$$

établissent la proposition qui suit.

Proposition 2.8

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathcal{G}}^{\sharp} &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \widehat{h}(\mu) \pi_s(Q_\mu) J_s \Delta_s^{1/2} \pi_s(Q_\mu) J_s \Delta_s^{1/2} \\
&- \frac{\widehat{h}(\mu)}{2} (\pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) + J_s \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) J_s) \\
&+ i \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) (\pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) - J_s \pi_s(Q_\mu Q_\mu^*) J_s).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Le prolongement \mathbf{L}_∞ à \mathcal{H}_s sera étudié dans le chapitre suivant par une méthode différente (méthode de Feshbach).

Cependant, pour tout $X \in \mathcal{H}_s$, le résultat (2.38) montre que l'on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_\infty(X) &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \widehat{h}(\mu) Q_\mu X \rho^{-1/2} Q_\mu^* \rho^{1/2} \\
&- \frac{\widehat{h}(\mu)}{2} (Q_\mu Q_\mu^* X + X Q_\mu Q_\mu^*) \\
&+ i \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) [Q_\mu Q_\mu^*, X].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

En particulier, on a :

$$\mathbf{L}_\infty(\rho^{1/2}) = 0.$$

2.3.3 Résultat d'ergodicité

On note $(\Lambda_t)_{t \geq 0} = (e^{t\mathbf{K}^\sharp})_{t \geq 0}$ le semi-groupe dynamique quantique à un paramètre défini sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, avec :

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \mathbf{K}^\sharp(A) &= i[\mathbf{H}, A] + \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} [\mathbf{V}_\mu, A] \mathbf{V}_\mu^* + \mathbf{V}_\mu [A, \mathbf{V}_\mu^*]; \\
\mathbf{V}_\mu &= \sqrt{\widehat{h}(\mu)} Q_\mu; \\
\mathbf{H} &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} s(\mu) Q_\mu Q_\mu^*; \\
s(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int_{\mathbb{R}} dt \frac{\widehat{h}(t)}{t - \mu} \right).
\end{aligned}$$

On rappelle que les valeurs propres de H_s sont $E_0 < E_1 < \dots < E_k < \dots$ et P_i est le projecteur spectral associé à E_i de sorte que :

$$Q_\mu = \sum_{\substack{i, f \\ E_i - E_f = \mu}} P_i Q P_f.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_s(\Lambda)$ des points fixes par Λ est une sous algèbre de von Neumann de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$.

On note

$$\mathcal{S} = \{Q_\mu : \mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}\}.$$

Puisque $Q_\mu^* = Q_{-\mu}$ pour tout μ , alors $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$: donc \mathcal{S}' est une sous algèbre de von Neumann de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$.

Afin d'appliquer le théorème 1.8 de Frigerio, nous commençons par construire explicitement un état ω_e Λ -invariant, fidèle et normal .

Mais l'égalité, $V_\mu = \sqrt{\hat{h}(\mu)} Q_\mu$ où $\hat{h}(\mu) > 0$, pour tout $\mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}$, montre que :

$$\{V_\mu : \mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}\}' = \mathcal{S}'.$$

Remarquons que si H_s et Q commutent alors il vient $Q_\mu = 0$, pour tout $\mu \in \sigma(L_s) \setminus \{0\}$ ($Q_0 = Q$).

Il est donc nécessaire que l'hypothèse

$$[H_s, Q] \neq 0$$

soit réalisée.

On pose :

$$\rho_e = Z^{-1} e^{-\beta H_s/2}, \quad Z = \mathbf{tr}(e^{-\beta H_s/2}).$$

Nous avons.

Proposition 2.9

L'état normal ω_e défini par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \quad \omega_e(A) = \mathbf{tr}(\rho_e A),$$

est Λ -invariant, normal et fidèle.

Nous obtenons la propriété ergodique suivante.

Théorème 2.4

Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** :

- (H1)** $[H_s, Q] \neq 0$;
- (H2)** $\exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \neq m \implies \langle n | Q^N | m \rangle \neq 0$;
- (H3)** H_s admet un spectre discret non dégénéré;

on obtient :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \forall \rho \in \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s) : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{tr}(\rho e^{tK^\sharp}(A)) = \mathbf{tr}(\rho_e A).$$

La preuve (donnée dans l'annexe B, pages 171-176) consiste à satisfaire les conditions d'applications du théorème 1.8 de Frigerio.

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs de Lindblad

La méthode de Feshbach est intervenue dans des travaux assez récents ([\[DJ1\]](#), [\[DJ2\]](#), [\[DJ3\]](#), [\[BFS1\]](#) et [\[BFS2\]](#)) pour étudier la théorie perturbative des opérateurs, dits de Pauli-Fierz, que l'on rencontre en couplant un «petit» système d'hamiltonien H_s ($H_s = H_s^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s)$) à un réservoir bosonique $\Gamma_s(\mathfrak{H}_r)$.

Si ω désigne l'énergie d'une particule, l'hamiltonien H de Pauli-Fierz est par définition

$$H \equiv H_s \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\omega) + \lambda V,$$

où $V = \varphi(\alpha)$ est un champ d'opérateurs avec $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r)$.

Dans ce qui suit, on se base sur les mêmes techniques.

On montre que la résolvante projetée du système-réservoir est la somme directe des fonctions de résonances, définies par le spectre de l'hamiltonien libre projeté. Ce résultat nous permet de faire le lien avec la théorie du couplage faible de Davies.

Ayant obtenu une formule explicite, on compare en travaillant dans la représentation d'Araki-Woods, les générateurs de Davies du liouillien standard et du \mathcal{C} -liouillien. En particulier, à l'équilibre thermodynamique, on a l'égalité.

Nos résultats sont similaires à ceux de [\[DJ3\]](#) (règle d'or de Fermi, formulation plus abstraite), mais on les a obtenu par le calcul directement. De plus, on établit une relation entre le noyau de Volterra de l'équation NPRZ et la fonction de self-énergie.

3.1 Méthode des projections

3.1.1 Formule de Feshbach

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert décomposé en somme directe :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\nu \oplus \mathcal{H}^{\bar{\nu}}.$$

Les projections sur \mathcal{H}^ν et $\mathcal{H}^{\bar{\nu}}$ sont notées $\mathbf{1}_\nu$ et $\mathbf{1}_{\bar{\nu}}$.

Utilisant cette décomposition, on considère les opérateurs écrits sous la forme matricielle :

$$H = \begin{pmatrix} H^{\nu\nu} & H^{\nu\bar{\nu}} \\ H^{\bar{\nu}\nu} & H^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_\nu = \begin{pmatrix} 1^{\nu\nu} & 0^{\nu\bar{\nu}} \\ 0^{\bar{\nu}\nu} & 0^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_{\bar{\nu}} = \begin{pmatrix} 0^{\nu\nu} & 0^{\nu\bar{\nu}} \\ 0^{\bar{\nu}\nu} & 1^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}.$$

On convient de noter \oplus une décomposition diagonale :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\nu) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\bar{\nu}}) \quad , \quad A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0^{\nu\bar{\nu}} \\ 0^{\bar{\nu}\nu} & B \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Ainsi, nous avons :

$$H^{\nu\nu} = \mathbf{1}_\nu H \mathbf{1}_\nu \quad , \quad H^{\bar{\nu}\bar{\nu}} = \mathbf{1}_{\bar{\nu}} H \mathbf{1}_{\bar{\nu}}.$$

On suppose que $H^{\nu\nu}$ et $H^{\bar{\nu}\bar{\nu}}$ sont des opérateurs fermés sur \mathcal{H}^ν et sur $\mathcal{H}^{\bar{\nu}}$ respectivement et les opérateurs,

$$\begin{aligned} H^{\bar{\nu}\nu} &: \mathcal{H}^\nu \longmapsto \mathcal{H}^{\bar{\nu}}, \\ H^{\nu\bar{\nu}} &: \mathcal{H}^{\bar{\nu}} \longmapsto \mathcal{H}^\nu, \end{aligned}$$

sont des opérateurs supposés être bornés.

Ainsi H est fermé et son domaine satisfait

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H^{\nu\nu}) \oplus \mathcal{D}(H^{\bar{\nu}\bar{\nu}}).$$

Pour tout $z \notin \sigma(H^{\bar{\nu}\bar{\nu}})$, on définit l'énergie propre¹ $W_\nu(z)$ et la fonction de résonance $G_\nu(z)$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} W_\nu(z) &= H^{\nu\bar{\nu}}(z\mathbf{1}^{\bar{\nu}\bar{\nu}} - H^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1}H^{\bar{\nu}\nu}; \\ G_\nu(z) &= z\mathbf{1}^{\nu\nu} - H^{\nu\nu} - W_\nu(z). \end{aligned}$$

On peut résumer, dans ce qui suit, les principales propriétés de la fonction énergie propre.

1. self-energy en anglais

Proposition 3.1

La fonction énergie $z \mapsto W_\nu(z)$ est un opérateur analytique sur $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{H}^{\bar{\nu}\nu})$.

Si $\mathbf{H}^{\nu\nu}$ et $\mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}}$ sont auto-adjoints et $(\mathbf{H}^{\nu\nu})^* = \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}}$ alors \mathbf{H} est auto-adjoint et nous avons $W_\nu(z)^* = W_\nu(\bar{z})$.

De plus $iW_\nu(z)$ est dissipatif si $\text{Im}(z) \geq 0$; c'est-à-dire :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \text{Re}(h; iW_\nu(z)h) \leq 0.$$

En particulier le semi-groupe,

$$0 \leq t \longmapsto e^{itW_\nu(z)},$$

est de contractions.

Démonstration

Les premiers points sont clairs, en particulier l'analyticité provient de l'implication suivante :

$$\forall w / |z - w| < \|(z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1}\| \implies (w - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (z - w)^n (z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-n-1}.$$

Établissons la dissipativité.

Notons d'abord que l'égalité

$$\text{Re}(h, iW_\nu(z)h) = -(h, \text{Im}W_\nu(z)h)$$

montre que la dissipativité est équivalente   :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad (h, \text{Im}(W_\nu(z))h) \geq 0.$$

De

$$(z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}}) - (\bar{z} - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}}) = 2i \text{Im}(z) \mathbf{I},$$

il vient donc :

$$(\bar{z} - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} - (z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} = 2i \text{Im}(z) (\bar{z} - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} (z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1}.$$

D'o  :

$$\text{Im}(W_\nu(z)) = \text{Im}(z) \left((z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \right)^* \left((z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \right).$$

Il en résulte :

$$\forall h \in \mathcal{D}(W_\nu(z)) \quad , \quad (h, \text{Im}(W_\nu(z))h) = \text{Im}(z) \|(z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}} h\|^2.$$

La fonction $t \longmapsto \|e^{itW_\nu(z)} h\|^2$ décroît sur \mathbb{R}^+ car

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad , \quad f'(t) &= 2 \text{Re}(e^{itW_\nu(z)} h, iW_\nu(z) e^{itW_\nu(z)} h) \\ &= -2 \text{Im}(z) \|(z - \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1} \mathbf{H}^{\bar{\nu}\bar{\nu}} e^{itW_\nu(z)} h\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

donc : $f(t) \leq f(0) = \|h\|^2$, pour tout $t \geq 0$. □

Nous rappelons le résultat bien connu (voir [DJ1], [HO]).

Proposition 3.2 (Formule de Feshbach)

Si $z \notin \sigma(\mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})$ alors :

(i) $z \in \sigma(\mathbf{H}) \iff 0 \in \sigma(\mathbf{G}_\nu(z))$;

(ii) Si $0 \notin \sigma(\mathbf{G}_\nu(z))$ alors :

$$(z - \mathbf{H})^{-1} = \mathcal{B}(z)(\mathbf{G}_\nu^{-1}(z) \oplus (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1})\mathcal{A}(z).$$

Où $\mathcal{A}(z)$ et $\mathcal{B}(z)$ sont des éléments inversibles de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}^{\nu\nu} & \mathbf{H}^{\nu\bar{v}}(z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1} \\ \mathbf{0}^{\bar{v}\nu} & \mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}(z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}^{\nu\nu} & \mathbf{0}^{\nu\bar{v}} \\ (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}\mathbf{H}^{\bar{v}\nu} & \mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui donne les quatre éléments matriciels de la résolvante $(z - \mathbf{H})^{-1}$ de \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} ((z - \mathbf{H})^{-1})^{\nu\nu} &= \mathbf{G}_\nu^{-1}(z), & (3.2) \\ ((z - \mathbf{H})^{-1})^{\nu\bar{v}} &= \mathbf{G}_\nu^{-1}(z)\mathbf{H}^{\nu\bar{v}}(z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}, \\ ((z - \mathbf{H})^{-1})^{\bar{v}\nu} &= (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}\mathbf{H}^{\bar{v}\nu}\mathbf{G}_\nu^{-1}(z), \\ (z - \mathbf{H})^{-1})^{\overline{v\bar{v}}} &= (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}\mathbf{H}^{\bar{v}\nu}\mathbf{G}_\nu^{-1}(z)\mathbf{H}^{\nu\bar{v}}(z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1} \\ &\quad + (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}. \end{aligned}$$

On écrit, suivant la convention (3.1), ces formules sous la forme condensée :

$$\begin{aligned} (z - \mathbf{H})^{-1} &= \left(\mathbf{1}^{\nu\nu} + (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1}\mathbf{H}^{\bar{v}\nu} \right) \mathbf{G}_\nu^{-1}(z) \left(\mathbf{1}^{\nu\nu} + \mathbf{H}^{\nu\bar{v}}(z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1} \right) \\ &\quad + \left(z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Démonstration

Pour $z \notin \sigma(\mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})$ alors $\mathcal{A}(z)$ et $\mathcal{B}(z)$ sont des éléments inversibles de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et on obtient :

$$\mathcal{A}(z)(z - \mathbf{H})\mathcal{B}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_\nu(z) & \mathbf{0}^{\nu\bar{v}} \\ \mathbf{0}^{\bar{v}\nu} & z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}} \end{pmatrix}.$$

Ce qui établit, d'une part, l'équivalence (i).

D'autre part, il vient donc :

$$(z - \mathbf{H})^{-1} = \mathcal{B}(z)(\mathbf{G}_\nu^{-1}(z) \oplus (z\mathbf{1}^{\overline{v\bar{v}}} - \mathbf{H}^{\overline{v\bar{v}}})^{-1})\mathcal{A}(z).$$

Le calcul matriciel par blocs donne les résultats énoncés. □

Remarque 3.1

1. La formule (3.2) s'écrit aussi sous la forme

$$\left((z-H)^{-1}\right)^{\nu\nu} = (z\mathbf{1}^{\nu\nu} - \ell(z))^{-1} \quad , \quad \ell(z) = z\mathbf{1}^{\nu\nu} - G_\nu(z)$$

$\ell(z)$ est un opérateur borné de \mathcal{H}^ν , dit la matrice de Livsic [HO].

2. Décomposant H sous la forme $H = H_0 + V$, avec

$$H_0 = \begin{pmatrix} H^{\nu\nu} & 0^{\nu\bar{\nu}} \\ 0^{\bar{\nu}\nu} & H^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} 0^{\nu\nu} & H^{\nu\bar{\nu}} \\ H^{\bar{\nu}\nu} & 0^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}$$

alors on obtient :

$$G_\nu(z) = \mathbf{1}_\nu \left(z - H_0 - \{V + V\mathbf{1}_{\bar{\nu}}(z - H^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1}\mathbf{1}_{\bar{\nu}}V\} \right) \mathbf{1}_\nu.$$

L'opérateur $D(z)$,

$$D(z) \equiv V + V\mathbf{1}_{\bar{\nu}}(z - H^{\bar{\nu}\bar{\nu}})^{-1}\mathbf{1}_{\bar{\nu}}V$$

est appelé l'opérateur de déplacement selon l'interprétation physique de [CDG].

$\mathbf{1}_\nu D(z) \mathbf{1}_\nu$ peut être considéré, physiquement, comme un «hamiltonien» qui s'ajoutant à $\mathbf{1}_\nu H_0 \mathbf{1}_\nu$ permet de préciser les déplacements des niveaux perturbés par rapport aux niveaux non perturbés.

3. Une seconde preuve du théorème s'appuie sur la méthode des projections de Golberger-Watson [GW], [AG].

En notant $R(z) = (z - H)^{-1}$, on multiplie chaque membre de l'égalité,

$$(z - H)R(z) = \mathbf{1},$$

une première fois à gauche par $\mathbf{1}_\nu$ et à droite par $\mathbf{1}_\nu$ puis une seconde fois à gauche par $\mathbf{1}_{\bar{\nu}}$ et à droite par $\mathbf{1}_{\bar{\nu}}$.

On obtient ainsi un système qui permet d'isoler $\mathbf{1}_\nu R(z) \mathbf{1}_\nu$ et $\mathbf{1}_{\bar{\nu}} R(z) \mathbf{1}_{\bar{\nu}}$.

On retrouve ainsi les fomules ci-dessus.

3.1.2 Cas particulier

On suppose que \mathcal{H}^ν se décompose en une somme directe finie :

$$\mathcal{H}^\nu = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} \mathcal{H}_\mu^\nu \quad , \quad \Lambda \text{ fini.}$$

Ainsi le projecteur $\mathbf{1}_\nu$ se décompose en une somme directe de projecteurs :

$$\mathbf{1}_\nu = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} \mathbf{1}_\mu.$$

Ces projecteurs $\mathbf{1}_\mu$ satisfont les relations algébriques suivantes; pour tout $(\mu, \nu) \in \Lambda^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\mu \mathbf{1}_\nu &= \delta_{\mu, \nu} \mathbf{1}_\mu; \\ \mathbf{1}_{\bar{\mu}} &= \mathbf{1} - \mathbf{1}_\mu \quad , \quad \mathbf{1}_{\bar{\mu}} \mathbf{1}_\nu = (1 - \delta_{\mu, \nu}) \mathbf{1}_\nu; \\ \mathbf{1}_{\bar{\nu}} \mathbf{1}_\mu &= 0. \end{aligned}$$

Soient L_0 et L_1 des opérateurs auto-adjoints agissant sur \mathcal{H} tels que :

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} L_0^{\nu\nu} & 0^{\nu\bar{\nu}} \\ 0^{\bar{\nu}\nu} & L_0^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} L_0^{\nu\nu} \oplus L_0^{\bar{\nu}\bar{\nu}}; \\ \forall \mu \in \Lambda \quad , \quad [L_0, \mathbf{1}_\mu] &= 0; \\ \forall (\mu, \nu) \in \Lambda^2 \quad , \quad \mathbf{1}_\mu L_1 \mathbf{1}_\nu &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$L = L_0 + L_1 = \begin{pmatrix} L_0^{\nu\nu} & L_1^{\nu\bar{\nu}} \\ L_1^{\bar{\nu}\nu} & L_0^{\bar{\nu}\bar{\nu}} + L_1^{\bar{\nu}\bar{\nu}} \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de déterminer une décomposition de la résolvante projetée :

$$\mathbf{1}_\nu (z - L)^{-1} \mathbf{1}_\nu.$$

Remarque 3.2

Considérons le cas d'une seule projection $\mathbf{1}_\mu$ la formule de Feshbach donne simplement

$$\mathbf{1}_\mu (z - L)^{-1} \mathbf{1}_\mu = G_\mu^{-1}(z)$$

où :

$$G_\mu(z) \equiv z \mathbf{1}^{\mu\mu} - L_0^{\mu\mu} - L_1^{\mu\bar{\mu}} (z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1} L_1^{\bar{\mu}\mu}.$$

Par applications des formules bien connues

$$\begin{aligned} A^{-1} &= B^{-1} + B^{-1}(B - A)A^{-1} \quad (\text{droite}), \\ A^{-1} &= B^{-1} + A^{-1}(B - A)B^{-1} \quad (\text{gauche}), \\ A^{-1} &= B^{-1} + B^{-1} \sum_{n \geq 1} ((B - A)B^{-1})^n, \end{aligned}$$

et en choisissant

$$A = z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}} \quad \text{et} \quad B = z \mathbf{1}^{\mu\mu} - L_0^{\mu\mu},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \left(z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}} \right)^{-1} &= \left(z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} \right)^{-1} \\ &+ \left(z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} \right)^{-1} \sum_{n \geq 1} \left(L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}} (z \mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1} \right)^n. \end{aligned}$$

On peut présenter $G_\mu(z)$ sous la forme d'une sommation :

$$G_\mu(z) = G_\mu^0(z) - L_1^{\mu\bar{\mu}} \sum_{n \geq 1} (L_1^{\mu\bar{\mu}}(z\mathbf{1}^{\mu\bar{\mu}} - L_0^{\mu\bar{\mu}})^{-1})^n L_1^{\mu\bar{\mu}}.$$

où

$$G_\mu^0(z) = z\mathbf{1}^{\mu\mu} - L_0^{\mu\mu} - L_1^{\mu\bar{\mu}}(z\mathbf{1}^{\mu\bar{\mu}} - L_0^{\mu\bar{\mu}})^{-1}L_1^{\bar{\mu}\mu}.$$

L'intérêt est que l'on a immédiatement si $L_1 = \mathcal{O}(\lambda)$, $\lambda > 0$ alors :

$$G_\mu(z) = z\mathbf{1}^{\mu\mu} - L_0^{\mu\mu} + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Cependant, ce sont des formules peu maniables.

Grâce à la formule de Feshbach, on propose, en utilisant des formules exactes, une décomposition en somme directe de la résolvante projetée qui nous paraît plus simple.

3.1.3 Expression de la résolvante

On suppose que

$$\Lambda = \sigma(L_0^{\nu\nu})$$

de sorte que

$$\mathbf{1}_\nu L_0 = L_0 \mathbf{1}_\nu = L_0^{\nu\nu} = \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} \mu \mathbf{1}_\mu.$$

La méthode de Feshbach, appliquée à l'opérateur $H = iL$, fournit les opérateurs :

$$G_\mu(z) \equiv z\mathbf{1}^{\mu\mu} - i\mu\mathbf{1}^{\mu\mu} - W_1^\mu(z); \quad (3.4)$$

$$W_1^\mu(z) \equiv -L_1^{\mu\bar{\mu}}(z\mathbf{1}^{\mu\bar{\mu}} - i(L_0^{\mu\bar{\mu}} + L_1^{\mu\bar{\mu}}))^{-1}L_1^{\bar{\mu}\mu}. \quad (3.5)$$

L'essentiel de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.1

Soit z un nombre complexe qui vérifie :

$$z \notin \sigma(L_0^{\mu\bar{\mu}} + L_1^{\mu\bar{\mu}}) \quad \text{avec} \quad \text{Im}(z) < 0.$$

On suppose que

$$\forall \mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu}), \quad 0 \notin \sigma(G_\mu(iz)).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\nu(z-L)^{-1}\mathbf{1}_\nu &= i \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} (G_\mu(iz))^{-1} \\ &= \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} \left(z\mathbf{1}^{\mu\mu} - \mu\mathbf{1}^{\mu\mu} - L_1^{\mu\bar{\mu}}(z\mathbf{1}^{\mu\bar{\mu}} - L_0^{\mu\bar{\mu}} - L_1^{\mu\bar{\mu}})^{-1}L_1^{\bar{\mu}\mu} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration

On pose

$$X_\nu(t) = \mathbf{1}_\nu e^{itL} \mathbf{1}_\nu$$

et on considère le noyau de mémoire K_1^μ qui intervient dans les équations intégral-différentielles de type Volterra ;

$$\begin{aligned} K_1^\mu(t) &= - \int_0^t du \mathbf{1}_\mu e^{-iuL_0} \mathbf{1}_\mu L_1 \mathbf{1}_{\bar{\mu}} e^{iu(L_0 + L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}})} \mathbf{1}_{\bar{\mu}} L_1 \mathbf{1}_\mu \\ &\stackrel{\text{par(3.1)}}{=} - \int_0^t du e^{-iuL_0} L_1^{\mu\bar{\mu}} e^{iu(L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} + L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}})} L_1^{\bar{\mu}\mu}. \end{aligned}$$

La méthode des projections NPRZ, vue au premier chapitre, permet d'obtenir facilement.

Proposition 3.3

Nous avons

$$X_\nu(t) = \sum_{\mu \in \Lambda} X_\mu(t) + \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \Lambda^2 \\ \mu \neq \nu}} X_{\mu, \nu}(t), \quad (3.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} X_\mu(t) &\equiv \mathbf{1}_\mu X_\nu(t) \mathbf{1}_\mu = \mathbf{1}_\mu e^{itL} \mathbf{1}_\mu; \\ X_{\mu, \nu}(t) &\equiv \mathbf{1}_\mu X_\nu(t) \mathbf{1}_\nu = \mathbf{1}_\mu e^{itL} \mathbf{1}_\nu. \end{aligned}$$

X_μ et $X_{\mu, \nu}$ vérifient les équations intégrales :

$$X_\mu(t) = e^{itL_0} \mathbf{1}_\mu + \int_0^t ds \mathbf{1}_\mu e^{i(t-s)L_0} K_1^\mu(t-s) X_\mu(s)$$

et

$$X_{\mu, \nu}(t) = \int_0^t ds \mathbf{1}_\mu e^{i(t-s)L_0} K_1^\mu(t-s) X_{\mu, \nu}(s).$$

La transformée de Laplace de X_ν existe , puisque $\|X_\nu(t)\| \leq 1$, pour tout réel t :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad : \quad \widehat{X}_\nu(z) = \int_0^{+\infty} dt X_\nu(t) e^{-tz}.$$

Alors, on obtient.

Proposition 3.4

Pour tout $z \notin \sigma(i(L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}} + L_1^{\bar{\mu}\bar{\mu}}))$, pour tout $\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})$, nous obtenons l'équivalence

$$z \notin \sigma(iL) \iff 0 \notin \sigma(G_\mu(z)).$$

Soit $z \notin \sigma(i(L_0^{\overline{\mu\mu}} + L_1^{\overline{\mu\mu}}))$, tel que $0 \notin \sigma(G_\mu(z))$.

Pour tout $\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})$ avec $\text{Re}(z) > 0$, il vient :

$$z\widehat{K}_1^\mu(z) = W_1^\mu(z + i\mu). \quad (3.7)$$

Par suite, on a :

$$\widehat{X}_\mu(z) = (G_\mu(z))^{-1}; \quad (3.8)$$

$$\widehat{X}_{\mu,\nu}(z) = 0. \quad (3.9)$$

D'où :

$$\widehat{X}_\nu(z) = \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} (G_\mu(z))^{-1}.$$

En conclusion, substituant z par iz , on obtient l'égalité désirée du théorème 3.1. \square

On peut retenir que la relation (3.7) est intéressante, puisqu'elle relie la fonction d'énergie propre W_1^μ et le noyau K_1^μ par sa transformée de Laplace.

3.1.4 Lien avec le résultat de Davies

Dans le cas de «couplage faible», on utilisera la proposition.

Proposition 3.5

Soit U un opérateur agissant sur \mathcal{H} . On suppose :

$$L_1 = \lambda U \quad , \quad \lambda > 0,$$

avec

$$\forall (\mu, \nu) \in \sigma(L_0^{\nu\nu})^2, \quad \mathbf{1}_\mu U \mathbf{1}_\nu = 0.$$

On pose

$$Y_\nu(t) = \mathbf{1}_\nu e^{-itL_0} e^{itL} \mathbf{1}_\nu = e^{-itL_0} X_\nu(t),$$

alors :

$$\widehat{Y}_\nu(z) = \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} \widehat{X}_\mu(z + i\mu) + \sum_{\substack{\mu, \nu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})^2 \\ \mu \neq \nu}} \widehat{X}_{\mu,\nu}(z + i\mu).$$

De plus, pour tout z tel que

$$\lambda^2 z + i\mu \notin \sigma(i(L_0^{\overline{\mu\mu}} + \lambda U^{\overline{\mu\mu}})) \quad , \quad 0 \notin \sigma(G_\mu(\lambda^2 z + i\mu))$$

et pour tout $\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})$, on a :

$$\lambda^2 \widehat{Y}_\nu(\lambda^2 z) = \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{\nu\nu})} \left(z \mathbf{1}^{\mu\mu} - i U^{\mu\bar{\mu}} ((\mu - i\lambda^2 z) \mathbf{1}^{\overline{\mu\mu}} - L_0^{\overline{\mu\mu}} - \lambda U^{\overline{\mu\mu}})^{-1} U^{\overline{\mu\mu}} \right)^{-1} \mathbf{1}_\mu.$$

Ce qui nous permet de préciser les résultats de Davies du chapitre 1. En particulier le générateur de Davies K_v^\sharp est une somme directe des générateurs de Davies réduits aux sous espaces propres.

Théorème 3.2

Soit K_v^\sharp un opérateur agissant sur \mathcal{H}^v tel que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \searrow 0} Y_v(t\lambda^{-2}) &= \mathbf{1}_v e^{tK_v^\sharp} \mathbf{1}_v = \begin{pmatrix} e^{tK_v^\sharp} & 0^{v\bar{v}} \\ 0^{\bar{v}v} & 0^{\bar{v}\bar{v}} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{par(3.1)}}{=} e^{tK_v^\sharp}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour tout $\mu \in \sigma(L_0^{vv})$, on suppose :

$$U^{\mu\bar{\mu}}((\mu - i0)\mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1}U^{\bar{\mu}\mu} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} U^{\mu\bar{\mu}}((\mu - i\varepsilon)\mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1}U^{\bar{\mu}\mu}$$

existe.

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^2 \widehat{Y}_v(\lambda^2 z) &= \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{vv})} \left(z\mathbf{1}^{\mu\mu} - iU^{\mu\bar{\mu}}((\mu - i0)\mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1}U^{\bar{\mu}\mu} \right)^{-1} \\ &= (z\mathbf{1}^{vv} - K_v^\sharp)^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$K_v^\sharp = \sum_{\mu \in \sigma(L_0^{vv})} K_v^{\sharp\mu}; \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} K_v^{\sharp\mu} &= iU^{\mu\bar{\mu}}((\mu - i0)\mathbf{1}^{\bar{\mu}\bar{\mu}} - L_0^{\bar{\mu}\bar{\mu}})^{-1}U^{\bar{\mu}\mu} \\ &= \int_0^{+\infty} dt e^{-t0} U_\mu(t) \\ &\equiv \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{+\infty} dt e^{-t\varepsilon} U_\mu(t); \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \text{où } U_\mu(t) &\equiv -e^{-it\mu} \mathbf{1}_\mu U \mathbf{1}_{\bar{\mu}} e^{itL_0} \mathbf{1}_{\bar{\mu}} U \mathbf{1}_\mu \\ &= -e^{-it\mu} \mathbf{1}_\mu U e^{itL_0} U \mathbf{1}_\mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ainsi, il en résulte une propriété sur le spectre de K_v^\sharp :

$$\sigma(K_v^\sharp) = \sigma\left(\bigoplus_{\mu \in \sigma(L_0^{vv})} K_v^{\sharp\mu} \right).$$

Remarque 3.3

On note que si $L = L_0 + \lambda(U + W)$ où W est un opérateur qui commute avec L_0^{vv} , donc $[I_\mu, W] = 0$, pour tout $\mu \in \sigma(L_0^{vv})$ alors

$$I_{\bar{\mu}}(U + W)I_\mu = I_{\bar{\mu}}U I_\mu, \quad I_\mu(U + W)I_{\bar{\mu}} = I_\mu U I_{\bar{\mu}}$$

et l'expression de K_v^\sharp est inchangée.

On retrouve aussi que K_v^\sharp commute avec L_0^{vv} puisque

$$I_\mu K_v^\sharp = K_v^\sharp I_\mu = K_v^\mu.$$

3.2 Étude du système couplé à une famille de réservoirs

3.2.1 Représentation du système

Le système est représenté par un espace de Hilbert \mathfrak{H}_s de dimension finie. On suppose que l'hamiltonien H_s du système admet la décomposition spectrale :

$$H_s = \sum_{n \geq 0} E_n P_n, \quad P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |n^i\rangle\langle n^i|, \quad g_n \in \mathbb{N}^*;$$

$$E_0 < E_1 < \dots < E_n < \dots$$

Nous avons $\langle n^i | m^j \rangle = \delta_{n,m} \delta_{i,j}$, $(|n^i\rangle)_{n, 1 \leq i \leq g_n}$ est une base orthonormée de \mathfrak{H}_s , $\mathfrak{M}_s = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_s)$ désigne naturellement l'algèbre des observables. \mathfrak{M}_{s^*} est le préduel de l'algèbre de von Neumann \mathfrak{M}_s .

Soit ρ une matrice de densité inversible, fonction de H_s :

$$\rho = \bar{\rho}(H_s) = \sum_n \bar{\rho}(E_n) P_n, \quad \bar{\rho}(E_n) > 0, \quad \sum_n g(n) \bar{\rho}(E_n) = 1.$$

Soit l'état ω_s normal et fidèle défini par

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s, \quad \omega_s(A) = \text{tr}(\rho A).$$

La dynamique sur \mathfrak{M}_s est définie par le groupe

$$\tau_s^t : A \longmapsto e^{itH_s} A e^{-itH_s}.$$

Soit $(\mathcal{H}_s, \pi_s, \Omega_s)$ la représentation cyclique canonique associée à $(\mathfrak{M}_s, \omega_s)$, obtenue par multiplication à gauche, avec :

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s), \quad \Omega_s = \rho^{1/2},$$

où \mathcal{H}_s est muni du produit scalaire :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{H}_s^2, \quad (X, Y) = \mathbf{tr}(X^* Y).$$

Ω_s est de plus séparant, la théorie modulaire appliquée au système donne le liouvillien L_s .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathfrak{M}_s \forall t \in \mathbb{R}, \quad \pi_s(e^{itH_s} A e^{-itH_s}) &= e^{itL_s} \pi_s(A) e^{-itL_s}; \\ L_s \Omega_s &= 0; \\ L_s &= [H_s, \cdot] = \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} \mu \mathbf{1}_\mu^s; \\ \mathbf{1}_\mu^s(X) &= \sum_{\substack{n, m \\ E_n - E_m = \mu}} P_n X P_m. \end{aligned}$$

L'opérateur modulaire et l'opérateur de conjugaison modulaire sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{H}_s, \quad \Delta_s X &= \rho X \rho^{-1}; \\ J_s X &= X^*. \end{aligned}$$

Le groupe modulaire étant alors

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s, \quad \sigma_s^t(A) = \rho^{it} \pi_s(A) \rho^{-it}.$$

La représentation duale est définie par l'application anti-linéaire π_s^\sharp :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_s \forall X \in \mathcal{H}_s, \quad \pi_s^\sharp(A)(X) = J_s \pi_s(A) J_s X = X A^*.$$

Puisque les $|n^i \rangle \langle m^j|$, $1 \leq i \leq g(n)$, $1 \leq j \leq g(m)$, $(n, m) \in \mathbb{N}$ forment une base de \mathcal{H}_s , on note que :

$$\forall X \in \mathcal{H}_s, \quad X = \bigoplus_{\mu \in \sigma(L_s)} \mathbf{1}_\mu^s(X), \quad \mathbf{1}_\mu^s(X) \in \text{Ker}(\mu - L_s).$$

Donc :

$$\mathcal{H}_s = \bigoplus_{\mu \in \sigma(L_s)} \text{Ker}(\mu - L_s).$$

3.2.2 Construction d'Araki Woods avec plusieurs réservoirs

On considère une famille $(\mathfrak{R}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ (où Λ est une partie finie de \mathbb{N}^*) de réservoirs bosoniques dont chaque \mathfrak{R}_α suit le modèle décrit dans 2.3, (69)

L'espace de Hilbert du réservoir est l'espace de Fock symétrique construit sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, $\mathfrak{H}_r^\alpha = \Gamma_s(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))$ dont le vecteur vide est noté Ω . La dynamique est définie par un groupe unitaire fortement continu

$$e^{itH_r^\alpha} = \Gamma(e^{i\omega^\alpha t}),$$

où $\omega^\alpha(k)$ est l'énergie d'un boson de moment k .

Si $a_\alpha^*(k)$ et $a_\alpha(k)$ désignent les opérateurs de création et d'annihilation, alors :

$$H_r^\alpha = d\Gamma(\omega^\alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \omega^\alpha(k) a_\alpha^*(k) a_\alpha(k).$$

L'algèbre des observables \mathcal{A}_r^α produit la CCR(\mathfrak{D}_α) engendrée par le champ d'opérateurs de Weyl $\{W(f_\alpha), f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha\}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\alpha &= \left\{ f : f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) / (\omega^\alpha)^{1/2} f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), (\omega^\alpha)^{-1/2} f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \right\}; \\ \Phi(f_\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k (a_\alpha^*(k) f_\alpha(k) + a_\alpha(k) \bar{f}_\alpha(k)); \\ W(f_\alpha) &= e^{i\Phi(f_\alpha)}, \quad f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha. \end{aligned}$$

La distribution moment d'équilibre des bosons à température inverse β_α est donnée par la loi de Planck :

$$\varrho_\alpha(k) = \frac{1}{e^{\beta_\alpha \omega^\alpha(k)} - 1}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} (\Omega_r^\alpha; W(f_\alpha) \Omega_r^\alpha) &= \exp -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k |f_\alpha(k)|^2; \\ H_r^\alpha \Omega_r^\alpha &= 0; \\ e^{itH_r^\alpha} W(f_\alpha) e^{-itH_r^\alpha} &= W(e^{it\omega^\alpha} f_\alpha). \end{aligned}$$

La dynamique sur \mathcal{A}_r^α est définie par le groupe

$$\tau_r^\alpha(t) : \mathcal{A} \longrightarrow e^{itH_r^\alpha} \mathcal{A} e^{-itH_r^\alpha}.$$

On note ω_r^α l'état normal de \mathcal{A}_r^α donné par :

$$A \in \mathcal{A}_r^\alpha, \quad \omega_r^\alpha(A) = \langle \Omega | A | \Omega \rangle.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_r &= \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{H}_r^\alpha, \quad \Omega_r = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \Omega; \\ \mathfrak{D} &= \left\{ \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha / f_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha, \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} \coth(\beta_\alpha \omega^\alpha / 2) |f_\alpha|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \right\}. \end{aligned}$$

Il existe une représentation régulière et cyclique $(\mathcal{H}_r, \pi_\Lambda, \Omega_\Lambda)$ de la CCR(\mathfrak{D}), enveloppante de la \mathbf{C}^* -algèbre \mathcal{A}_r engendrée par les combinaisons linéaires finies des éléments de $\{W(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha) / \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \in \mathfrak{D}\}$ et associée à la fonction génératrice

$$\mathfrak{s}(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \coth(\beta_\alpha \omega^\alpha(k)/2) |f_\alpha(k)|^2 \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r &= \mathfrak{L}^2(\mathfrak{H}_r) \quad , \quad \Omega_\Lambda = |\Omega_r\rangle \langle \Omega_r|; \\ \langle \Omega_\Lambda | \pi_\Lambda(W(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)) | \Omega_\Lambda \rangle &= \mathfrak{s}(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha). \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \pi_\Lambda(W(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)) &= e^{i\phi_\Lambda(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)}; \\ \mathcal{M}_r &= \pi_\Lambda(\mathcal{A}_r)'', \end{aligned}$$

avec

$$\forall X_\alpha \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{H}_r^\alpha), \phi_\Lambda(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{\left(\phi((1 + \varrho_\alpha)^{1/2} f_\alpha) X_\alpha + X_\alpha \phi(\varrho_\alpha^{1/2} f_\alpha) \right)}_{\phi_\Lambda^\alpha(f_\alpha)(X_\alpha)}.$$

Soit

$$H_r = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_r^\alpha, \quad H_r^\alpha = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \underbrace{d\Gamma(\omega^\alpha)}_\alpha \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots$$

On désigne par $L_r = [H_r, \cdot]$ le liouvillien du système dynamique quantique (CCR(\mathfrak{D}), ω_r, τ_r), où :

$$\omega_r = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \omega_r^\alpha, \quad \tau_r = \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} \tau_r^\alpha.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}_r, \pi_\Lambda(e^{itH_r} A e^{-itH_r}) &= e^{itL_r} \pi_\Lambda(A) e^{-itL_r}; \\ L_r \Omega_\Lambda &= 0; \\ L_r &= \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} L_r^\alpha, \quad L_r^\alpha = [H_r^\alpha, \cdot]. \end{aligned}$$

La représentation cyclique de la famille $(\mathfrak{R}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de réservoirs est $(\mathcal{H}_r, \pi_r, \Omega_\Lambda)$, où :

$$\forall M \in \mathcal{M}_r, \quad \pi_r(M) = M \quad (\pi_r \text{ est la multiplication à gauche}).$$

On peut considérer l'opérateur modulaire Δ_r et l'opérateur de conjugaison modulaire J_r du couple $(\pi_r(\mathcal{M}_r), \Omega_A)$:

$$\begin{aligned}\Delta_r &= \bigotimes_{\alpha \in \Lambda} e^{-\beta^\alpha L_r}; \\ \forall X \in \mathcal{H}_r, J_r(X) &= X^*; \\ \forall M \in \mathcal{M}_r, \pi_r^\sharp(M) &= J_r \pi_r(M) J_r.\end{aligned}$$

Le résultat de la théorie de Tomita-Takesaki s'écrit

$$\begin{aligned}J_r \Omega_A &= \Omega_A \quad , \quad \pi_r^\sharp(\mathcal{M}_r) = \pi_r(\mathcal{M}_r)'; \\ \Delta_r^{it} \Omega_A &= \Omega_A \quad , \quad \Delta_r^{it} \pi_r(\mathcal{M}_r) \Delta_r^{-it} = \pi_r(\mathcal{M}_r).\end{aligned}$$

Dans la suite, on ne distinguera plus $\pi_r(\mathcal{M}_r)$ et \mathcal{M}_r , ainsi que $\pi_r(\mathcal{M}_r)'$ et \mathcal{M}_r' .

3.2.3 Décomposition selon la méthode de Feshbach

Le couplage «Système-Réservoirs» sera défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_r = \mathcal{H}^v \oplus \mathcal{H}^{\bar{v}}; \\ \mathcal{H}^v &= \bigoplus_{\mu \in \sigma(L_s)} (\text{Ker}(\mu - L_s) \otimes \mathbb{C} \cdot \Omega_A); \\ \mathcal{H}^{\bar{v}} &= \mathcal{H}_s \otimes (\mathcal{H}_r \setminus \mathbb{C} \cdot \Omega_A); \\ \mathbf{1}_v &= \bigoplus_{\mu \in \sigma(L_s)} \mathbf{1}_\mu; \\ \mathbf{1}_\mu(X \otimes Y) &= (\mathbf{1}_\mu^s(X) \otimes \Omega_A) \langle \Omega_r | Y | \Omega_r \rangle.\end{aligned}$$

La théorie modulaire fournit les éléments correspondants :

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_s \otimes \Delta_r; \\ J &= J_s \otimes J_r; \\ \Omega &= \Omega_s \otimes \mathbf{1}_r; \\ \pi &= \pi_s \otimes \pi_r.\end{aligned}$$

Soit les opérateurs qui agissent sur \mathcal{H} :

$$L_0 = L_s \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes L_r \quad , \quad L = L_0 + \lambda U.$$

On se propose de calculer le générateur de Davies K_v (théorème 3.2) pour les deux cas suivants :

$$\begin{aligned}U_1 &= \pi(V) - \pi^\sharp(V) \quad , \quad U_2 = \pi(V) - \Delta^{-1/2} \pi^\sharp(V) \Delta^{1/2}; \\ V &= \sum_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha \otimes \phi_\alpha(f) \quad , \quad f = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha; \\ \phi_\alpha(f) &\equiv \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \phi_A^\alpha(f_\alpha) \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots.\end{aligned}$$

3.2.4 Cas d'un seul réservoir

On effectue d'abord les calculs dans le cas d'un seul réservoir, l'indice α étant systématiquement supprimé.

On supposera de plus

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi_s(Q) \otimes (a_A(f) + a_A^*(g)) - \frac{1}{\sqrt{2}} \pi_s^\sharp(Q') \otimes (a_A^\sharp(h) + a_A^{*\sharp}(k)).$$

Puisque

$$\forall j \in \{, *, \sharp, * \sharp\}, \forall l \in \{f, g, h, k\}, \langle \Omega_r | a_A^j(l) | \Omega_r \rangle = \langle \Omega_r | \Omega_r \rangle = 0,$$

il en résulte que pour tout $(\mu, \nu) \in \sigma(L_s)$

$$\mathbf{1}_\mu U \mathbf{1}_\nu = 0.$$

On utilisera les égalités suivantes.

Lemme 3.1

$$\begin{aligned} J_s \Delta_s^{1/2} \pi_s(Q) J_s \Delta_s^{1/2} &= \pi_s^\sharp(\rho^{1/2} Q \rho^{-1/2}), \\ J_r \Delta_r^{1/2} a_A^*(f) J_r \Delta_r^{1/2} &= a_A^{*\sharp}(e^{-\beta\omega/2} f). \end{aligned}$$

Les cas considérés s'écrivent :

$$\begin{aligned} U_1 &= U, \\ \text{avec } f = g = h = k &, \quad Q' = Q; \\ U_2 &= U, \\ \text{avec } f = g, h = e^{\beta\omega/2} f, k = e^{-\beta\omega/2} f &, \quad Q' = \rho^{1/2} Q \rho^{-1/2}. \end{aligned}$$

Conservant les notations des chapitres précédents, on rappelle que :

$$Q_\mu \equiv \mathbf{1}_\mu^s(Q) = \sum_{\substack{i,f \\ E_i - E_f = \mu}} P_i X P_f. \quad (3.14)$$

Théorème 3.3

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
K_\nu^1 &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) e^{-\beta\nu/2} \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\sharp(Q_\nu) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \left(\pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) + \pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) \right) \\
&\quad + i \sum_{\nu} s_c(\nu) \left(\pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) - \pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) \right); \\
K_\nu^2 &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\sharp(\rho^{1/2} Q_\nu \rho^{-1/2}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \left(\pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) + \pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) \right) \\
&\quad + i \sum_{\nu} s_c(\nu) \left(\pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) - \pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) \right).
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\hat{c}(\nu) &= \frac{\pi\nu^2}{2} \frac{e^{\beta\nu/2}}{|\sinh(\beta\nu/2)|} \|f(|\nu|\cdot)\|_{S^2}^2; \\
s_c(\mu) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int_{\mathbb{R}} dt \frac{\hat{c}(t)}{t-\mu} \right); \\
\|f(|\nu|\cdot)\|_{S^2}^2 &= \int_{S^2} d\sigma(\hat{\mathbf{k}}) |f(|\nu|\hat{\mathbf{k}})|^2.
\end{aligned}$$

La preuve est donnée dans l'annexe C (page 177).

3.2.5 Relations entre ces différents opérateurs

Considérons l'opérateur de Lindblad défini sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_D(X) &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) Q_\nu X Q_\nu^* - \frac{1}{2} \{ \mathbf{R}_D, X \} - i [\mathbf{H}_D, X]; \\
\mathbf{R}_D &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) Q_\nu Q_\nu^*; \\
\mathbf{H}_D &= \sum_{\nu} s_c(\nu) Q_\nu Q_\nu^*.
\end{aligned}$$

Puisque l'on a :

$$e^{\gamma\mathbf{H}_s} Q_\nu e^{-\gamma\mathbf{H}_s} = e^{\gamma\nu} Q_\nu,$$

on obtient aisément les résultats suivants.

Théorème 3.4

Notons γ_β l'application linéaire inversible définie dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s)$:

$$\forall X \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \quad \gamma_\beta(X) = e^{-\beta H_s/2} X,$$

alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) & \xrightarrow{\gamma_\beta} & \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s) \\ \mathbf{L}_D \downarrow & & \downarrow \mathbf{K}_\nu^1 \\ \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) & \xrightarrow{\gamma_\beta} & \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s), \end{array}$$

est commutatif.

D'où la relation fondamentale :

$$\gamma_\beta^{-1} \circ \mathbf{K}_\nu^1 \circ \gamma_\beta = \mathbf{L}_D. \quad (3.15)$$

De plus, pour tout $X \in \mathcal{H}_s$:

$$e^{-\beta H_s/4} \mathbf{L}_D(e^{\beta H_s/4} X e^{\beta H_s/4}) e^{-\beta H_s/4} = \mathbf{K}_\nu^1(X); \quad (3.16)$$

$$\mathbf{L}_D(X \rho^{-1/2}) \rho^{1/2} = \mathbf{K}_\nu^2(X). \quad (3.17)$$

Rappelons, puisque \mathfrak{H}_s est de dimension finie que l'on a :

$$\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) = \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s).$$

La relation (3.15) peut être établie dans le cas de la dimension infinie, par des hypothèses supplémentaires qui justifieront la sommabilité des séries.

Il en résulte que les relations (3.15) et (3.17) montrent que les opérateurs \mathbf{K}_ν^1 , \mathbf{L}_D et \mathbf{K}_ν^2 ont le même spectre.

Comme cas particulier, on trouve.

Proposition 3.6

À l'équilibre thermodynamique,

$$\rho = \rho_e \equiv \frac{e^{-\beta H_s}}{\mathbf{tr}(e^{-\beta H_s})},$$

nous avons :

$$\mathbf{K}_\nu^1 = \mathbf{K}_\nu^2.$$

On précise la relation entre ces opérateurs dans le cas général grâce à l'isomorphisme canonique Ψ_s entre les espaces de Banach $\pi_s(\mathcal{M}_s)$ et $\mathcal{B}_s = \pi_s(\mathcal{M}_s)\Omega_s$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{B}_s \\ \mathbf{K}_1^\# \downarrow & & \downarrow \mathbf{K}_{\nu|\mathcal{B}_s}^2 \\ \pi_s(\mathcal{M}_s) & \xrightarrow{\Psi_s} & \mathcal{B}_s \end{array}$$

alors on retrouve la commutativité de ce diagramme.

Théorème 3.5

On a :

$$K_1^\sharp = \Psi_s^{-1} \circ K_{\nu|\mathcal{B}_s}^2 \circ \Psi_s.$$

Autrement dit pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, on a :

$$K_\nu^2(\pi_s(A)\rho^{1/2}) = K_1^\sharp(\pi_s(A))\rho^{1/2}.$$

En particulier, il vient

$$K_\nu^2(\rho^{1/2}) = 0.$$

3.2.6 Cas général

Lorsque l'on considère la famille de réservoirs, soient les notations adaptées à chaque réservoir

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_D^\alpha(X) &= \sum_{\nu} \hat{c}_\alpha(\nu) Q_\nu X Q_\nu^* - \frac{1}{2} \{ \mathbf{R}_D^\alpha, X \} - i [\mathbf{H}_D^\alpha, X]; \\ \mathbf{R}_D^\alpha &= \sum_{\nu} \hat{c}_\alpha(\nu) Q_\nu Q_\nu^*; \\ \mathbf{H}_D^\alpha &= \sum_{\nu} s_{c_\alpha}(\nu) Q_\nu Q_\nu^*. \end{aligned}$$

De même pour $K_\nu^{1,\alpha}$.

L'indépendance des réservoirs donne immédiatement.

Théorème 3.6

Pour tout $X \in \mathcal{H}_s$, nous avons :

$$K_\nu^1(X) = \sum_{\alpha \in \Lambda} e^{-\beta^\alpha H_s/4} \mathbf{L}_D^\alpha(e^{\beta^\alpha H_s/4} X e^{\beta^\alpha H_s/4}) e^{-\beta^\alpha H_s/4}; \quad (3.18)$$

$$K_\nu^2(X) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{L}_D^\alpha(X \rho^{-1/2}) \rho^{1/2}. \quad (3.19)$$

Remarque 3.4

Posons

$$\forall \nu \in \sigma(L_s), \quad \widehat{c}_\Lambda(\nu) \equiv \sum_{\alpha} \hat{c}_\alpha(\nu), \quad s_\Lambda(\nu) \equiv \sum_{\alpha} s_{c_\alpha}(\nu);$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_D^\Lambda(X) &= \sum_{\nu} \widehat{c}_\Lambda(\nu) Q_\nu X Q_\nu^* - \frac{1}{2} \{ \mathbf{R}_D^\Lambda, X \} - i [\mathbf{H}_D^\Lambda, X]; \\ \mathbf{R}_D^\Lambda &= \sum_{\nu} \widehat{c}_\Lambda(\nu) Q_\nu Q_\nu^*; \\ \mathbf{H}_D^\Lambda &= \sum_{\nu} s_{c_\Lambda}(\nu) Q_\nu Q_\nu^*. \end{aligned}$$

La question intéressante et ouverte jusqu'à la publication de [JP5] était d'étudier l'existence d'un opérateur γ inversible de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_s)$ tel que :

$$\gamma^{-1} \circ \mathbf{K}_\nu^1 \circ \gamma = \mathbf{L}_D^\Lambda. \quad (3.20)$$

Si un tel opérateur existait sous la forme $\gamma(\mathbf{X}) = \Gamma\mathbf{X}$ alors la relation fondamentale (3.20) s'écrit :

$$\mathbf{K}_\nu^1(\Gamma\mathbf{X}) = \Gamma\mathbf{L}_D^\Lambda(\mathbf{X}),$$

qui implique une condition de la «balance détaillée» comme il a été démontré pour un seul réservoir par Dereziński et Jakšić dans [DJ3].

Cependant Jakšić et Pillet ont établi dans [JP5] que si un système est couplé à des réservoirs fermioniques (au moins deux) alors le liouvillien standard n'a pas de résonance 0 alors que le \mathcal{C} -liouvillien en admet une. D'une part, il en résulte que la relation (3.20) n'est pas vraie et d'autre part l'étude spectrale du \mathcal{C} -liouvillien présente un intérêt certain.

Chapitre 4

Systemes dynamiques quantiques à couplage fort

On s'intéresse ici au couplage «Système-Réservoir» à température nulle où ce dernier est représenté par un espace de Fock symétrique construit sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Le terme d'interaction de cet environnement est de la forme $\phi(\mathbf{h}) = (a^(\mathbf{h}) + a(\mathbf{h}))/\sqrt{2}$.*

On montre, sous les hypothèses de symétries et de rationalité portant uniquement sur le module de la fonction \mathbf{h} et non sur sa phase, que l'on obtient une évolution markovienne de la dynamique d'une matrice de densité du système. Une telle étude avait déjà été faite dans [P1],[P2] où l'hamiltonien dépendait aléatoirement du temps, de la forme

$$H(t) = H_0 + V(\xi_t),$$

et $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus de Markov homogène.

De tels systèmes étaient utilisés pour décrire la propagation d'électrons dans un milieu désordonné. On y admettait la forme du générateur que nous obtenons.

L'idée est de se ramener à la théorie des équations différentielles stochastiques linéaires; on y parvient en construisant un processus gaussien stationnaire et multiplement markovien grâce à la rationalité de la fonction \mathbf{h} . On représente l'environnement qui intervient dans l'évolution des matrices de densité dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathcal{S})$, (\mathcal{S} étant l'espace de Schwartz). L'un des intérêts est que l'évolution dans le temps de l'image de $\phi(\mathbf{h})$ est une fonction linéaire d'un processus gaussien stationnaire et à valeurs réelles.

4.1 Modèle abstrait

4.1.1 Couplage Système-Réservoir

- Le système est représenté par l'algèbre de ses observables

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s),$$

où \mathfrak{H}_s est un espace de Hilbert séparable.

On désigne par $H_s(t)$ l'hamiltonien dépendant du temps du système et la dynamique est définie par les propagateurs $(\alpha_s^{t,t'})$ de \mathcal{M}_s :

$$\forall A \in \mathcal{M}_s, \alpha_s^{t,t'}(A) = U_s(t, t') A U_s^*(t, t').$$

Les opérateurs unitaires $U_s(t, t')$ satisfont les relations (voir [MES],[CDL]) que nous appellerons les conditions habituelles (4.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dr H_s(r) U_s(r, t'); \\ U_s^*(t, t') = 1 + i \int_{t'}^t dr U_s^*(r, t') H_s(r); \\ \frac{\partial}{\partial t} U_s(t, t') = -i H_s(t) U_s(t, t'); \\ \frac{\partial}{\partial t} U_s^*(t, t') = i U_s^*(t, t') H_s(t); \\ U_s^*(t, t') = U_s(t', t), \quad U_s(t, t'') = U_s(t, t') U_s(t', t''), \quad U_s(t, t) = I. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Par exemple, dans le cas stationnaire, $H_s(t) = H_s$ est indépendant du temps et on a :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, U_s(t, t') = e^{-i(t-t')H_s}.$$

- L'algèbre \mathcal{M}_r des observables du réservoir est construit sur l'espace Fock symétrique $\mathfrak{H}_r = \Gamma_s(\mathbb{L}^2(\mathbb{R}))$ de vecteur vide noté Ω ;

$$\mathcal{M}_r = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_r).$$

Les opérateurs de création et d'annihilation a^* et a sont définis (voir par exemple [BR2], [JP3]) par, pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$:

$$a^*(f) = \int_{\mathbb{R}} d\omega f(\omega) a^*(\omega) \quad , \quad a(f) = \int_{\mathbb{R}} d\omega \bar{f}(\omega) a(\omega), \quad (4.2)$$

où les opérateurs $a^*(\omega)$ et $a(\omega)$ vérifient les relations CCR :

$$[a(\omega'), a^*(\omega)] = \delta(\omega' - \omega) \cdot I \quad , \quad [a(\omega'), a(\omega)] = [a^*(\omega'), a^*(\omega)] = 0. \quad (4.3)$$

L'hamiltonien $H_r = d\Gamma(\omega)$ est caractérisé par son action sur les opérateurs a^* et a par :

$$[H_r, a(\omega)] = -\omega a(\omega) \quad , \quad [H_r, a^*(\omega)] = \omega a^*(\omega). \quad (4.4)$$

La dynamique est définie par un groupe unitaire fortement continu :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad , \quad \alpha_r^t(a^*(f)) = e^{itH_r} a^*(f) e^{-itH_r} = a^*(e^{it\omega} f). \quad (4.5)$$

La famille $(U_r(t, t'))$ de propagateurs, associée à cette dynamique, est alors stationnaire et explicitée par :

$$U_r(t, t') = e^{-i(t-t')H_r}.$$

Les opérateurs de Weyl seront notés $W(f)$ avec :

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (a^*(f) + a(f)); \\ W(f) &= \exp\{i\Phi(f)\}; \\ W(f)W(g) &= e^{-i\text{Im}(f,g)/2} W(f+g). \end{aligned}$$

Soit ω_r l'état défini sur \mathcal{M}_r par sa fonction génératrice

$$\omega_r(W(f)) \equiv \mathfrak{s}(f) \equiv \langle \Omega | W(f) | \Omega \rangle = \exp -\frac{\|f\|^2}{4}.$$

• L'algèbre des observables du système couplé est $\mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r$, d'espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r$ et l'hamiltonien est :

$$\begin{aligned} H(t) &= H_s(t) \otimes \mathbb{1}_r + \mathbb{1}_s \otimes H_r + H_I; \\ H_I &= Q \otimes \phi(h); \\ H_0(t) &= H_s(t) \otimes \mathbb{1}_r + \mathbb{1}_s \otimes H_r; \quad (\text{hamiltonien libre}) \\ Q \in \mathcal{M}_s \quad , \quad h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

L'évolution du couplage «Système-Réservoir» est donnée par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{M}_r \quad , \quad \alpha^{t,t'}(M) = U(t, t') M U^*(t, t'),$$

où la famille de $(U(t, t'))$ vérifie les conditions habituelles (4.1.)

Soit ρ une matrice de densité de $\mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s)$, on pose :

$$\sigma(t, t') \equiv U(t, t') (\sigma \otimes \mathbb{1}_r) U^*(t, t'); \quad (4.6)$$

$$\rho(t, t') \equiv U_0^*(t, t') \sigma(t, t') U_0(t, t'); \quad (4.7)$$

$$z(t, t') \equiv U_r^*(t, t') \sigma(t, t') U_r(t, t'). \quad (4.8)$$

Alors, on obtient aisément, grâce aux conditions habituelles (4.1), les évolutions de ces matrices de densité.

Lemme 4.1

Pour tout $t' \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\sigma(t, t')) = [\mathbf{H}(t), \sigma(t, t')]; \quad (4.9)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\rho(t, t')) = [\mathbf{Q}_{t,t'} \Phi_{t-t'}, \rho(t, t')]; \quad (4.10)$$

$$\text{où } \mathbf{Q}_{t,t'} \equiv \mathbf{U}_s^*(t, t') \mathbf{Q} \mathbf{U}_s(t, t') \otimes \mathbb{1}_r;$$

$$\text{et } \Phi_t \equiv \mathbb{1}_s \otimes e^{it\mathbf{H}_r} \phi(h) e^{-it\mathbf{H}_r} = \mathbb{1}_s \otimes \phi(e^{it\omega} h);$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} (z(t, t')) = [\mathbf{H}_s(t) + \mathbf{Q} \Phi_{t-t'}, z(t, t')]. \quad (4.11)$$

La proposition suivante, prouvée dans l'annexe **D** (page 181), établit des propriétés de commutativité avec la famille (Φ_t) .

Proposition 4.1

Pour tout couple (s, t) de nombres réels, nous avons :

$$[\rho(t), \Phi_s] = 0 \quad , \quad [z(t), \Phi_s] = 0.$$

Remarque 4.1

On peut interpréter ces résultats de la façon suivante.

- L'équation (4.9) est l'équation générale de Heisenberg et n'apporte aucune simplification pour rechercher une dynamique markovienne.
- L'équation (4.10) fait disparaître les effets des dynamiques libres du système et du réservoir. On pourrait ainsi l'appeler l'équation de $\sigma \otimes \mathbb{1}_r$ en pure interaction car seule l'évolution de l'interaction $\mathbf{Q} \otimes \phi(h)$ intervient et $\Phi_{t-t'}$ joue le rôle d'un paramètre.
- Enfin, l'équation (4.11) montre que l'évolution de la matrice de densité du système $\rho \otimes \mathbb{1}_r$ ne dépend essentiellement par son interaction avec le réservoir que de la dynamique du champ $\phi(h)$, dépendant elle-même que par la durée $t' - t$ de son action. La stationarité du propagateur \mathbf{U}_r tient un rôle essentiel dans cette conception.

Par exemple, dans le cas stationnaire, $\mathbf{H}_s(t) = \mathbf{H}_s$, $t' = 0$ et en supposant que Φ_t est constant alors le processus $(z(t))_t$ est markovien de la forme $z(t) = e^{t\mathbf{L}} z(0)$ où \mathbf{L} est l'opérateur égal à $-i[\mathbf{H}_s + \mathbf{Q}\phi, \cdot]$.

On justifie l'écriture («physique-mathématique») $\phi(e^{it\omega} h)$ en général de la façon suivante .

Soit χ_t la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \chi_t(\omega) = e^{it\omega}.$$

On considère S_t l'opérateur unitaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ donné par la multiplication par χ_t :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (S_t f)(\omega) = e^{it\omega} f(\omega).$$

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(e^{it\omega} h) \equiv \phi(S_t h). \quad (4.12)$$

4.1.2 Propriétés de la famille $(e^{i\phi_t})_{t \in \mathbb{R}}$

On suppose dans tout ce qui suit :

$$\text{(H1)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |h(-\omega)| = |h(\omega)|;$$

$$\text{(H2)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\ln(|h(\omega)|)}{1 + \omega^2} > -\infty.$$

Notons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\ln(|h(\omega)|)}{1 + \omega^2} \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{|h(\omega)|^2}{1 + \omega^2} < \infty.$$

Par application à la mesure de probabilité $d(\omega)/\|h\|^2$ du théorème de Bochner ([HH]), on obtient une fonction de covariance.

Lemme 4.2

Sous l'hypothèse (H1) l'égalité suivante,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad [a(e^{is\omega} h), a^*(e^{it\omega} h)] &= (e^{is\omega} h, e^{it\omega} h) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\omega |h(\omega)|^2 e^{i(t-s)\omega}, \end{aligned}$$

montre que la fonction Γ définie par

$$\Gamma : \mathbb{R} \ni u \longmapsto \Gamma(u) = \int_{\mathbb{R}} d\omega |h(\omega)|^2 e^{iu\omega},$$

est une fonction de covariance.

De plus, Γ est paire.

On arrive à un premier résultat qui est un fil conducteur pour la suite.

Proposition 4.2

La famille $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$,

$$\phi_t \equiv \phi(e^{it\omega} h),$$

est une famille commutante d'opérateurs auto-adjoints et non bornés de \mathfrak{H}_r :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \phi_t^* &= \phi_t; \\ \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad [\phi_s, \phi_t] &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration

Ce qui résulte de la parité de Γ et des égalités :

$$\begin{aligned} [\phi_s, \phi_t] &= \frac{1}{2} \left([a(e^{is\omega}h), a^*(e^{it\omega}h)] + [a^*(e^{is\omega}h), a(e^{it\omega}h)] \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma(t-s) - \Gamma(s-t)) = 0. \end{aligned}$$

□

La commutativité permet de calculer les «fonctions caractéristiques» .

Corollaire 4.1

Quels que soient les n -uplets (u_1, \dots, u_n) et (t_1, \dots, t_n) de nombres réels, on a :

$$\omega_r \left(\exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k \phi_{t_k} \right\} \right) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n u_k u_l \Gamma(t_k - t_l) \right\}. \quad (4.13)$$

En particulier, il vient :

$$\begin{aligned} \omega_r(\phi_t) &= 0; \\ \omega_r(\phi_t \phi_s) &= \frac{1}{2} \Gamma(t-s). \end{aligned}$$

Et plus généralement, on obtient les formules connues pour ce type de fonctions caractéristiques :

$$\begin{aligned} \omega_r(\phi_t^{2n+1}) &= 0 \quad , \quad \omega_r(\phi_t^{2n}) = \gamma(0)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}; \\ \omega_r((\phi_t - \phi_s)^{2n}) &= \frac{(\Gamma(0) - \Gamma(t-s))^n}{2^n n!}; \end{aligned}$$

pour tout couple (s, t) de nombres réels et pour tout entier n .

L'idée directrice, suggérée par ces égalités, est de construire un processus gaussien stationnaire associé à Γ .

Pour cela, on construit par application du théorème de Minlos-Bochner (annexe D, théorème D.1 page 182) une mesure de probabilité gaussienne attachée à une «fonction caractéristique» de forme quadratique $\Gamma/2$.

Ensuite on explicite une représentation π d'une algèbre de von Neumann

commutatitve telle que « $\pi(\Phi_t) = \varphi_t$ », de façon plus précise $\pi(e^{i\Phi_t}) = e^{i\varphi_t}$, puisque $e^{i\varphi_t}$ est borné.

On désigne par \mathcal{S} l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} , indéfiniment dérivables au sens usuel, et décroissant, ainsi que chacune de leurs dérivées, pour $|x| \rightarrow \infty$, plus rapidement que tout inverse de polynôme, c'est-à-dire telles que :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^k \xi^{(p)}(x)| = 0,$$

pour tout entier p et pour tout entier $k \geq 0$.

Notons que la transformée de Fourier d'une telle fonction possède la même propriété de décroissance à l'infini (car $t^n \hat{\xi}^{(m)}(t) \approx A \int d\omega \omega^m \xi^{(n)}(\omega) e^{-it\omega}$ où A est une constante).

L'espace \mathcal{S} ([HI2], [GV],[DL] chap. VIII), est un espace métrisable et complet, muni de la famille de normes $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \xi \in \mathcal{S}, \quad \|\xi\|_n \equiv \max_{0 \leq k \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^n |\xi^{(k)}(x)|.$$

\mathcal{S} est dénombrablement hilbertien lorsqu'on lui associe la famille de normes hilbertiennes $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \xi \in \mathcal{S}, \quad \|\xi\|_n^2 \equiv \sum_{k=0}^n \int_{\mathbb{R}} dx (1+x^2)^n |\xi^{(k)}(x)|^2.$$

De plus, on démontre que pour tout $n \geq 1$, il existe des constantes réelles positives C_n et D_n telles que :

$$\forall \xi \in \mathcal{S}, \quad C_n \times \|\xi\|_{n-1} \leq \|\xi\|_n \leq D_n \times \|\xi\|_{n+1}.$$

Alors ces deux familles de normes confèrent à \mathcal{S} la même topologie d'espace localement convexe. On prouve en outre que \mathcal{S} est un espace nucléaire.

On commence par appliquer le théorème D.1 de Minlos-Bochner à la fonction caractéristique C définie par :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \quad C(f) = e^{-\frac{1}{2}(f, \mathbf{Q}f)},$$

où \mathbf{Q} est la forme quadratique donnée par :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{S}, \quad (f, \mathbf{Q}f) &= \frac{1}{2} \iint dt ds \overline{\hat{f}(t)} \hat{f}(s) \Gamma(s-t) \\ &= \int d\omega |f(\omega)|^2 dp(\omega), \\ \text{où} \quad dp(\omega) &\equiv 2\pi^2 |h(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Le triplet de Gelfand considéré sera :

$$\mathcal{S} \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; d\omega) \subset \mathcal{S}'.$$

Les injections sont continues et d'images denses.

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur $(\mathcal{S}', \mathcal{B})$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \int_{\mathcal{S}'} d\mu(\varphi) e^{i\varphi(f)} = e^{-\frac{1}{2}(f, \mathbf{Q}f)}.$$

On dit que μ est la mesure gaussienne centrée et de covariance \mathbf{Q} .

On retiendra le fait important :

$$\forall f \in \mathcal{S}, \forall \varphi \in \mathcal{S}' \implies \varphi(f) \in \mathbb{R}.$$

On utilisera les notations probabilistes :

$$X_f(\varphi) = \varphi(f) \tag{4.14}$$

pour signaler que l'on considère le processus \mathcal{B} -mesurable

$$\varphi \in \mathcal{S}' \longmapsto X_f(\varphi).$$

Et \mathbb{E}_μ l'espérance conditionnelle associée à l'espace probabilisé $(\mathcal{S}', \mathcal{B}, \mu)$.

De plus, si $: e^{i\varphi(f)} :$ désigne le produit de Wick ordonné,

$$: e^{i\varphi(f)} : \equiv e^{\frac{1}{2}(f, \mathbf{Q}f)} e^{i\varphi(f)},$$

alors pour tout f_1, \dots, f_n de \mathcal{S} , on a :

$$\int_{\mathcal{S}'} d\mu(\varphi) \left[\prod_{j=1}^n : e^{i\varphi(f_j)} : \right] = \exp \left\{ - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (f_i, \mathbf{Q}f_j) \right\}.$$

On peut prolonger aux éléments de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, dp)$, en particulier, on a :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; dp), \quad \mathbb{E}_\mu[X_f^2] = \int |f(\omega)|^2 dp(\omega) < \infty,$$

donc $|X_f| < \infty$, μ -p.s.

Ce qui s'applique aussi pour $f = \chi_t$ ($\chi_t(\omega) = e^{it\omega}$).

Enfin, on convient de noter

$$\varphi \longmapsto \varphi_t \equiv X_{\chi_t}(\varphi) = \varphi(\chi_t). \tag{4.15}$$

On obtient.

Théorème 4.1

Le processus $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien réel, centré et stationnaire de covariance $\gamma \equiv \frac{1}{2} \cdot \Gamma$.

De plus, on a les égalités bien connues :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu[\varphi_t^{2n+1}] &= 0 \quad , \quad \mathbb{E}_\mu[\varphi_t^{2n}] = \gamma(0)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}; \\ \mathbb{E}_\mu[(\varphi_t - \varphi_s)^{2n}] &= \frac{(\Gamma(0) - \Gamma(t-s))^n}{2^n n!}. \end{aligned}$$

En particulier, le processus stochastique $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est continu en moyenne d'ordre deux.

Démonstration

Soient u_1, u_2, \dots, u_n et t_1, t_2, \dots, t_n des nombres réels, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[\exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k \varphi_{t_k} \right\} \right] &= \omega_r \left(e^{i\phi(\sum_{k=1}^n u_k e^{it_k \omega} h)} \right) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left\| \sum_{k=1}^n u_k e^{it_k \omega} h \right\|^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^n u_k u_l \Gamma(t_k - t_l) \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui établit que la variable aléatoire réelle $\sum_{k=1}^n u_k \varphi_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée et de covariance $\frac{1}{2} \Gamma$.

Cette dernière égalité assure que $(\varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_n})$ et $(\varphi_{t_1+s}, \dots, \varphi_{t_n+s})$ ont la même loi ce qui implique la stationnarité du processus.

En particulier, on a :

$$\mathbb{E}_\mu[\varphi_t] = 0, \quad \mathbb{E}_\mu[\varphi_t \varphi_s] = \gamma(t-s).$$

On peut noter que des propriétés de régularité de la fonction γ impliquent des propriétés pour (φ_t) .

En particulier, la continuité provient des égalités

$$\mathbb{E}_\mu[(\varphi_t - \varphi_s)^2] = 2(\gamma(0) - \gamma(t-s)) = 2 \int d\omega (1 - e^{i(t-s)\omega}) |h(\omega)|^2,$$

et dont on peut appliquer le théorème de la convergence dominée à la dernière puisque $h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. \square

Soit Φ l'algèbre de von Neumann dans \mathfrak{H}_r , engendrée par la famille $(e^{i\phi_t})_{t \in \mathbb{R}}$ alors Φ est commutative.

Remarque 4.2

On peut démontrer, sous l'hypothèse **(H2)**, que Ω est cyclique pour Φ , il en résulte (Lemma 4.3.15 de [BR1]) que Φ est maximale, c'est-à-dire

$$\Phi' = \Phi.$$

En fait, la méthode que nous avons suivie n'utilisera pas ce résultat bien que la propriété de maximalité (selon [DL]) soit importante pour la diagonalisation simultanée d'une famille d'opérateurs dans un cadre abstrait. On propose dans l'annexe D (pages 183-185) une méthode différente dont le point de départ est l'existence d'une mesure spectrale basique bornée d'une \mathbf{C}^* -algèbre commutative.

La méthode utilisée permet de construire explicitement une représentation π de Φ ,

$$\pi : \Phi \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{L}^2(\mathcal{S}', d\mu)),$$

de la façon suivante.

Soit

$$\mathcal{C}_h = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}/\omega \mapsto \left(\int dt e^{it\omega} f(t) \right) h(\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

On pose

$$\forall f \in \mathcal{C}_h, \quad \phi(f) \equiv \int dt f(t) \phi_t,$$

de sorte que l'algèbre de von Neumann engendrée par les $e^{i\phi(f)}$, $f \in \mathcal{C}_h$ soit égale à Φ .

On définit :

$$\forall f \in \mathcal{C}_h : (\pi(e^{i\phi(f)})Y)(\varphi),$$

en multipliant à gauche par $e^{i \int dt f(t) \varphi_t}$ soit :

$$\forall Y \in \mathbb{L}^2(\mathcal{S}', d\mu), \forall \varphi \in \mathcal{S}' : (\pi(e^{i\phi(f)})Y)(\varphi) = e^{i \int dt f(t) \varphi_t} Y(\varphi);$$

ce qui a un sens puisque

$$\varphi \mapsto e^{i \int dt f(t) \varphi_t} \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{S}', \mu).$$

On obtient aisément :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}_h^2, \quad \pi(e^{i\phi(f)} e^{i\phi(g)}) = \pi(e^{i\phi(f)}) \pi(e^{i\phi(g)}).$$

Par suite π est une représentation de Φ dans $\mathbb{L}^2(\mathcal{S}', \mu)$.

La dynamique se détermine de la façon suivante.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note T_s l'application définie sur \mathcal{C}_h par :

$$(T_s f)(t) = f(t - s).$$

Alors, grâce à la méthode des sommes de Riemann, il vient :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}_h, \quad \pi(e^{isH_r} e^{i\phi(f)} e^{-isH_r}) &= \pi(e^{i\phi(T_s f)}) \\ &= e^{i \int du f(u-s)\varphi_u}. \end{aligned}$$

Remarque 4.3

1) Notons Ω_π , l'élément unité de $\mathbb{L}^2(\mathcal{S}', \mu)$, ($\Omega_\pi(\varphi) = 1$, $\varphi \in \mathcal{S}'$). On peut définir le liouvillien standard L_π de cette représentation satisfaisant les relations fondamentales :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}_h, \quad \pi(e^{isH_r} e^{i\phi(f)} e^{-isH_r})\Omega_\pi &= e^{isL_\pi}(\pi(e^{i\phi(f)})\Omega_\pi); \\ L_\pi\Omega_\pi &= 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, on peut trouver de façon formelle (par dérivation) que :

$$L_\pi(\pi(e^{i\phi(f)})\Omega_\pi) = -\left(\int du f'(u)\varphi_u\right)\pi(e^{i\phi(f)})\Omega_\pi.$$

2) Les opérateurs S_t et T_s vérifient les relations CCR dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad T_s S_t = e^{ist} S_t T_s,$$

qui interviennent dans l'étude ([HE]) des sous-espaces invariants de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

4.1.3 Décomposition d'un processus gaussien stationnaire

On applique la théorie générale de la décomposition canonique des processus gaussiens stationnaires complexes, commencée par P. Lévy [LV] et aboutissant à la forme donnée par Hida (voir [HI1], [HI2], [HH], [KN]).

On rappelle que l'hypothèse **(H2)**,

$$\text{(H2)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\ln(|h(\lambda)|)}{1+\lambda^2} > -\infty,$$

est satisfaite.

L'espace probabilisé est $(\mathcal{S}', \mathcal{B}, \mu)$ dans lequel on désigne par \mathbb{E}_μ l'espérance associée.

On se limite au processus $\mathbf{X} = (X_t)_t$ de covariance γ qui est la forme complexifiée du processus $\varphi = (\varphi_t)_t$, soit :

$$X_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_t(z) + i\psi_t(z)).$$

où $\psi = (\psi_t)_t$ est un processus gaussien réel stationnaire de même loi que φ et indépendant de φ .

Il existe une fonction G (appelé noyau canonique) et un «mouvement brownien complexe» $\mathbf{B} = (B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ vérifiant :

$$X_t = \int_{-\infty}^t G(t-u) dB_u,$$

où

$$B_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_t^1(z) + iB_t^2(z)).$$

Les processus B^1 et B^2 sont des processus browniens de Lévy sur \mathbb{R} (processus gaussiens indépendants et de même loi, centrés avec $\mathbb{E}[(B_t^1 - B_s^1)^2] = |t - s|$).

La fonction G est obtenue de la façon suivante.

\mathbf{X} admet la représentation spectrale suivante dans laquelle $(Z_\lambda)_\lambda$ est un processus gaussien complexe à accroissements indépendants :

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dZ_\lambda; \\ \mathbb{E}(|dZ_\lambda|^2) &\equiv f(\lambda) d\lambda; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{\ln(f(\lambda))}{1+\lambda^2} &> -\infty. \end{aligned}$$

Alors, on montre que :

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\lambda} c(\lambda) d\lambda; \\ c(\lambda) &\equiv \lim_{b \uparrow 0} (c(\lambda + ib)); \\ c \in H^2(\mathbb{C}^-), c(z) &= \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{1+\lambda z \ln(f(\lambda))}{\lambda - z} \frac{1}{1+\lambda^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En outre, il vient :

$$\begin{aligned} G(u) &= 0 \quad \text{si } u < 0; \\ \mathbb{E}[X_{t+s} \overline{X_s}] &= \gamma(t) = \int d\lambda e^{it\lambda} f(\lambda); \\ \frac{|\widehat{G}(\lambda)|^2}{2\pi} = f(\lambda) &= \frac{1}{2} |h(\lambda)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} |c(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

On note par $\sigma_t(\mathbf{X})$ la tribu engendrée par les variables aléatoires X_s , $s \leq t$ et $\sigma_{t+}(\mathbf{X}) = \bigcap_{u>t} \sigma_u(\mathbf{X})$, $\sigma_{t-}(\mathbf{X}) = \bigvee_{u<t} \sigma_u(\mathbf{X})$ la plus petite tribu contenant les

$\sigma_u(\mathbf{X})$ avec $u < t$.

La terminologie «représentation canonique» vient des égalités importantes pour les questions de prédiction :

$$\begin{aligned}\sigma_t(\mathbf{X}) &= \sigma_t(\mathbf{B}); \\ \sigma_{t+}(\mathbf{X}) &= \sigma_{t+}(\mathbf{B}); \\ \sigma_{t-}(\mathbf{X}) &= \sigma_{t-}(\mathbf{B}).\end{aligned}$$

On dit que \mathbf{B} est un processus d'innovation associé à \mathbf{X} .

On note par $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ le sous espace de $\mathbb{L}^2(\mathcal{S}', \mu)$ engendré par les X_t , $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.4

1) En général, un processus gaussien en temps continu et non stationnaire n'admet pas nécessairement de décomposition canonique unique (voir [HH], chapitre 4). La stationarité dans notre cas est fondamentale.

2) Considérons le processus gaussien

$$X(t) = f(t) \int_{-\infty}^t g(u) dB(u) \quad , \quad g(u) \neq 0,$$

f continue et g continue de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alors on a $\sigma_t(\mathbf{B}) = \sigma_t(\mathbf{X})$ pour tout t . Ce qui entraîne la propriété de Markov de \mathbf{X} :

$$\mathbb{E}(X(t)|\sigma_s(\mathbf{X})) = \mathbb{E}(X(t)|X(s)) \quad , \quad s \leq t.$$

4.1.4 Propriété N-Markovienne

• Note historique

Lorsque l'on connaît les valeurs d'un processus de Markov \mathbf{M} à l'instant présent t alors les valeurs de ce processus avant et après t sont conditionnellement indépendantes.

Autrement dit, soient les tribus $\sigma_t(\mathbf{M})$ et $\sigma^t(\mathbf{M})$ engendrées par $\{\mathbf{M}(u) : u \leq t\}$ et $\{\mathbf{M}(u) : u \geq t\}$ respectivement, on a :

$$\forall A \in \sigma_t(\mathbf{M}) \forall B \in \sigma^t(\mathbf{M}) \quad , \quad \mathbb{P}(A \cap B | \mathbf{M}(t)) = \mathbb{P}(A | \mathbf{M}(t)) \times \mathbb{P}(B | \mathbf{M}(t)).$$

Ce qui implique

$$\forall B \in \sigma^t(\mathbf{M}) \quad , \quad \mathbb{P}(B | \sigma_t(\mathbf{M})) = \mathbb{P}(B | \mathbf{M}(t)).$$

Lorsqu'il y a *dépendance*, la question était de définir une notion assez proche de celle d'un processus de Markov. Intuitivement, une première réponse

consistait à affirmer que c'était un processus tel que les valeurs du passé et celles du futur de l'instant t étaient conditionnellement indépendantes dès que les valeurs de ce processus étaient connues dans un *voisinage* de t .

Pour un processus gaussien X , X sera dit markovien d'ordre de multiplicité égal à N , entier non nul, s'il existe un vecteur \hat{X} de dimension N , fonction *seulement* de X , qui soit markovien. Il était assez naturel de noter que si X est $(N-1)$ fois «différentiable» alors

$$\hat{X}(t) = (X(t), X'(t), \dots, X^{(N-1)}(t))$$

était le bon candidat.

A l'aide de ces idées, Doob [DO] puis Lévy [LV] proposèrent les définitions suivantes.

Définition 4.1 (Doob, 1944)

Soit X un processus gaussien réel stationnaire.

Si X est $(N-1)$ -fois différentiable en moyenne quadratique et s'il satisfait une équation différentielle :

$$\sum_{k=0}^N a_k X^{(N-k)}(t) = \dot{B}(t),$$

alors X est dit processus gaussien de Markov d'ordre de multiplicité N .

B est un mouvement brownien et les dérivées $X^{(j)}$ et \dot{B} (bruit blanc) sont prises au sens des distributions.

Pour $N = 1$, on retrouve exactement l'équation de Langevin

$$a_0 X'(t) + a_1 X(t) = \dot{B}(t) \quad , \quad a_1 > 0.$$

Définition 4.2 (Lévy, 1956)

Soit X un processus gaussien .

Si X est $(N-1)$ -fois différentiable et si

$$\mathbb{E}(X(t) | \sigma_s(X)) \quad , \quad s \leq t$$

est une fonction seulement de $(X(s), X'(s), \dots, X^{(N-1)}(s))$ alors X est dit processus gaussien de Markov d'ordre de multiplicité N au sens faible.

Le caractère gaussien implique que $\mathbb{E}(X(t) | \sigma_s(X))$ est une combinaison linéaire des variables $X(s), X'(s), \dots, X^{(N-1)}(s)$.

Dans le cas stationnaire ces deux notions coïncident.

Voulant éviter la notion de différentiabilité, Hida note que ces notions dépendent essentiellement que de la structure linéaire définie par un processus gaussien.

En particulier, il remarque que si

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^N f_k(t) \mathbf{M}_k(t) \quad , \quad \mathbf{M}_k(t) = \int^t g_k(u) d\mathbf{B}(u),$$

alors

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}(t) | \sigma_s(\mathbf{X})) = \sum_{k=1}^N f_k(t) \mathbf{M}_k(s) \quad , \quad s \leq t$$

est une combinaison linéaire des $\mathbf{M}_k(s)$, indépendamment de toute notion de différentiabilité.

Dans la suite, on adopte la terminologie processus N-markovien pour processus de Markov d'ordre de multiplicité égal à N.

• Représentation d'un processus gaussien stationnaire N-markovien

Soit N un entier naturel non nul.

Définition 4.3 (Hida)

Un processus gaussien \mathbf{X} est dit N-markovien si les assertions (i) et (ii) suivantes sont réalisées.

- (i) Pour tout $t_0 \leq t_1 < \dots < t_N$, les variables aléatoires $\mathbb{E}[\mathbf{X}(t_i) | \sigma_{t_0}(\mathbf{X})]$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbf{H}(\mathbf{X})$.
- (ii) Pour tout $t_0 \leq t_1 < \dots < t_{N+1}$, les variables aléatoires $\mathbb{E}[\mathbf{X}(t_i) | \sigma_{t_0}(\mathbf{X})]$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbf{H}(\mathbf{X})$.

On notera ici que $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ est l'espace gaussien engendré par \mathbf{X} .

On utilisera la caractérisation ([HH], Théorème 5.1.)

Théorème 4.2

Pour qu'un processus gaussien \mathbf{X} , de représentation canonique

$$\mathbf{X}_t = \int_{-\infty}^t \mathbf{F}(t, u) d\mathbf{B}_u,$$

soit N-markovien il faut et il suffit que son noyau $\mathbf{F}(t, u)$ soit un noyau de Goursat d'ordre N, c'est-à-dire ayant la forme suivante :

$$\mathbf{F}(t, u) = \sum_{i=1}^N f_i(t) g_i(u), \quad u \leq t \quad (4.17)$$

avec :

(i) pour tout N-uplet (t_1, \dots, t_N) de nombres réels, la matrice à coefficients complexes $f_i(t_j)$ vérifie :

$$\det(f_i(t_j)) \neq 0;$$

et

(ii) les fonctions g_1, \dots, g_N sont linéairement indépendantes dans l'espace de Hilbert \mathbb{L}_t^2 où :

$$\mathbb{L}_t^2 = \left\{ f; \int_{-\infty}^t f^2(u) \mathbb{E}(dB_u^2) < \infty \right\}.$$

Utilisant une caractérisation des noyaux de Goursat d'ordre N, fonction de $t - u$, on aboutit au résultat fondamental suivant.

Théorème 4.3

Pour qu'un processus gaussien complexe et stationnaire \mathbf{X} de représentation canonique,

$$\mathbf{X}_t = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t-u) d\mathbf{B}_u,$$

soit N-markovien il faut et il suffit que son noyau $\mathbf{G}(t-u)$ soit de la forme :

$$\mathbf{G}(t-u) = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{n_l} a_{k,l} (t-u)^k e^{-z_l(t-u)} \quad , \quad u \leq t, \quad (4.18)$$

où les nombres complexes a_k et z_l sont tels que : $\text{Re}(z_l) > 0$.

Les entiers n_l et r vérifient :

$$\sum_{l=1}^r (n_l + 1) = N.$$

De plus,

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} du e^{-i u \lambda} \mathbf{G}(u) = \frac{\mathbf{P}(i\lambda)}{\mathbf{Q}(i\lambda)}$$

est une fonction rationnelle en $i\lambda$, où les polynômes $\mathbf{P}(z)$ et $\mathbf{Q}(z)$ n'ont pas de racines dans \mathbb{C}^- et $d(\mathbf{P}) < d(\mathbf{Q}) = N$.

On a explicitement

$$c(\lambda) = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{n_l} \frac{k! a_{k,l}}{(z_l + i\lambda)^{k+1}}.$$

Et plus généralement pour tout z tel que $\text{Im}(z) < 0$:

$$c(z) = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{n_l} \frac{k! a_{k,l}}{(z_l + iz)^{k+1}} = \frac{\mathbf{N}(z)}{\prod_{l=1}^r (z_l + iz)^{n_l+1}}.$$

On supposera dans la suite

$$\begin{aligned} \text{(H3)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad \frac{|N(\lambda)|}{|N(-\lambda)|} &= \prod_{l=1}^r \left| \frac{z_l + i\lambda}{z_l - i\lambda} \right|^{n_l+1}; \\ z_l = \lambda_l + i\mu_l \quad , \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r \quad , \quad \mu_l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité

$$\frac{1}{\pi} |c(\lambda)|^2 = |h(\lambda)|^2,$$

assure que l'hypothèse (H1) est satisfaite. De plus les pôles de h appartiennent à \mathbb{C}^+ .

L'essentiel de ce paragraphe consiste à établir le résultat suivant.

Théorème 4.4

Sous l'hypothèse (H3), il existe un processus markovien (Y_t) de dimension $4N$ et une matrice uniligne B de $\mathfrak{M}_{4N,1}$ qui vérifie

$$\varphi_t = B \times Y_t.$$

La preuve est donnée dans l'annexe D (pages 186-190). Après une lecture de celle-ci, on constatera que l'on ne propose pas une forme optimale; dans certains cas ($\mu_l = 0$), il existe des simplifications.

Nous aurons besoin d'utiliser le retournement du temps (selon [DM] par exemple) d'un processus Markov homogène, sous la forme simplifiée suivante.

Lemme 4.3

On suppose que le processus de Markov $(Y_t)_t$ admet une mesure invariante μ_0 sur \mathbb{R}^{4N} .

On désigne par L le générateur du processus Y et par L^* l'adjoint de L par rapport à la mesure μ_0 .

Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{4N}; \mu_0(dx))$, on a :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, s \leq t \implies \mathbb{E}[f(Y_s)|Y_t] = (e^{(t-s)L^*} f)(Y_t). \quad (4.19)$$

Démonstration

On peut se limiter aux fonctions f et g μ_0 -mesurables, bornées (ou positives) et à valeurs réelles.

On utilise les égalités bien connues sur les espérances conditionnelles (règle des projections orthogonales)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Y_t)f(Y_s)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Y_t)|Y_s]f(Y_s)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_s)|Y_t]g(Y_t)]. \end{aligned}$$

La première égalité donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Y_t)|Y_s]f(Y_s)] &= \mathbb{E}[(e^{(t-s)\mathbf{L}}\mathbf{g})(Y_s)f(Y_s)] \\
&= (f; e^{(t-s)\mathbf{L}}\mathbf{g})_{\mu_0} \\
&= (e^{(t-s)\mathbf{L}^*}f; \mathbf{g})_{\mu_0} \\
&= \int \mu_0(dx) \overline{e^{(t-s)\mathbf{L}^*}f}(x) g(x) \\
&= \int \mu_0(dx) (e^{(t-s)\mathbf{L}^*}f)(x) g(x).
\end{aligned}$$

La seconde s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Y_t)f(Y_s)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(Y_s)|Y_t]g(Y_t)] \\
&= \int \mu_0(dx) \mathbb{E}[f(Y_s)|Y_t = x] g(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, μ_0 -presque sûrement, il vient :

$$\mathbb{E}[f(Y_s)|Y_t = x] = (e^{(t-s)\mathbf{L}^*}f)(x).$$

D'où le résultat désiré. □

4.2 Équations d'interaction de ρ et de z

Afin d'exploiter les propriétés markoviennes du processus $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, on transporte les équations d'évolution des matrices de densité ρ_t et z_t à l'aide de la représentation $\pi_s \otimes \pi$ où π_s est l'application identique de $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ sur lui-même, on la notera simplement π .

Autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s), \forall f \in \mathcal{C}_h; \pi(A \otimes e^{i\Phi(f)}) \equiv A \otimes \pi(e^{i\Phi(f)}).$$

4.2.1 Équations et estimations de ρ et de z

Nous nous intéressons aux équations des matrices de densité (4.10) et (4.11), le terme t' sera systématiquement omis en prenant $t' = 0$, on peut les réécrire sous la forme

$$i \partial_t \rho_t = \Phi_t [Q_t, \rho_t]; \tag{4.20}$$

$$Q_t \equiv U_s^*(t) Q U_s(t) \otimes \mathbb{1}_r;$$

$$i \partial_t z_t = [H_s(t) + Q \Phi_t, z_t]. \tag{4.21}$$

Contrairement aux méthodes du couplage faible, on ne projette pas directement sur le système \mathcal{M}_s ce qui évite une équation «intégré-différentielle» du type NPRZ mais on ne peut pas affirmer que $\rho_t \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, pour tout réel t . Il n'est pas possible de transporter directement ces équations à l'aide de la représentation π puisque ϕ_t n'est pas borné.

On commence par déterminer des équations approchées à l'aide d'approximations de ϕ_t par les opérateurs bornés et auto-adjoints $(\phi_t^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ où :

$$\begin{aligned}\phi_t^\varepsilon &= \frac{1}{2\varepsilon}((\varepsilon\phi_t + i)^{-1} + (\varepsilon\phi_t - i)^{-1}) \\ &= \phi_t(1 + \varepsilon^2\phi_t^2)^{-1}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Le résultat fondamental suivant ([DL],[GS]) est utilisé lorsqu'on considère des opérateurs auto-adjoints et non bornés.

Théorème 4.5

Soit A un opérateur auto-adjoint non borné de domaine dense d'un espace de Hilbert \mathfrak{H} , alors, pour tout nombre complexe z tel que $\text{Im}(z) \neq 0$, l'opérateur $A - z\mathbb{1}$ a un inverse borné dans \mathfrak{H} et qui satisfait à

$$\|(A - z\mathbb{1})^{-1}\| \leq |\text{Im}(z)|^{-1}.$$

Il en résulte que l'on a :

$$\|(\varepsilon\phi_t \pm i)^{-1}\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\phi_t^\varepsilon\| \leq \frac{1}{\varepsilon}.\quad (4.23)$$

Le résultat suivant permet de déterminer exactement la représentation de l'équation d'évolution de ρ_t (preuve dans l'annexe D page 190).

Lemme 4.4

Pour tout réel t et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\pi(\phi_t^\varepsilon) = \varphi_t^\varepsilon,$$

où $\varphi_t^\varepsilon = \phi_t(1 + \varepsilon^2\phi_t^2)^{-1}$.

On considère uniquement l'approximation de l'équation (4.20), la démarche est similaire pour l'équation (4.21).

Soit le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_t^\varepsilon = \phi_t^\varepsilon \mathcal{L}_t(\rho_t^\varepsilon); \\ \rho_0^\varepsilon = \rho, \quad \rho \in \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s); \\ \text{où } \mathcal{L}_t = -i[Q_t, \cdot]. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Posons $\rho_\pi^\varepsilon(t) \equiv \pi(\rho_t^\varepsilon)$, alors la matrice de densité ρ_π^ε est un processus stochastique, solution du problème de Cauchy écrit sous la forme intégrale :

$$\rho_\pi^\varepsilon(t) = \rho + \int_0^t ds \varphi_s^\varepsilon \mathcal{L}_s(\rho_\pi^\varepsilon(s)).$$

L'estimation, énoncée ci-après et prouvée dans l'annexe D (page 191) permet le passage à la limite lorsque ε tend vers zéro.

Lemme 4.5

Pour $\tau > 0$ et $R > 0$, on pose :

$$\Omega_{R,\tau} = \left\{ \varphi : \varphi \in \mathcal{S}' / \sup_{[0,\tau]} |\varphi_s| \leq R \right\}.$$

Alors $\Omega_{R,\tau} \uparrow \mathcal{S}'$ lorsque $R \uparrow \infty$ et il existe $C(R, \tau) > 0$ et une fonction positive $\Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon')$ telle que, pour tout $0 \leq t \leq \tau$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{R,\tau}} \|\rho_\pi^\varepsilon(t) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(t)\|_1 \right] \leq C(R, \tau) \Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon').$$

Et

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon') = 0.$$

On obtient aisément les équations satisfaites par $\rho_\pi(t)$ et $z_\pi(t)$ qui sont des limites définies μ presque partout.

Proposition 4.3

Les processus $(\rho_\pi(t))$ et $(z_\pi(t))$ vérifient μ -presque sûrement :

$$i\partial_t \rho_\pi(t) = \varphi_t [Q_t, \rho_\pi(t)]; \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} i\partial_t z_\pi(t) &= [H_s(t) + Q\varphi_t, z_\pi(t)] \\ &= [H_s(t), z_\pi(t)] + [Q, z_\pi(t)]\varphi_t. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dans ces équations, on peut concevoir φ_t comme un paramètre réel aléatoire.

4.2.2 Évolution markovienne de ρ_π et de z_π

On utilise les propriétés stochastiques de (φ_t) fournies par le processus de Markov $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$,

$$\varphi_t = BY_t.$$

On convient de quelques notations.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}' \mapsto \rho(\varphi)$ une matrice de densité du système telle que :

$$\rho \in \mathbb{L}^1(\mathcal{S}'; \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s)), \quad \rho(\varphi) = \sum_{n,m} \rho^{n,m}(\varphi) |n\rangle\langle m|.$$

Si \mathcal{F} est une sous tribu de \mathcal{B} alors l'espérance conditionnelle de ρ par rapport à \mathcal{F} est :

$$\mathbb{E}[\rho|\mathcal{F}] \equiv \sum_{n,m} \mathbb{E}[\rho^{n,m}|\mathcal{F}] |n\rangle\langle m|.$$

En particulier, on peut considérer la fonction :

$$x \in \mathbb{R}^{4N} \mapsto \mathbb{E}[\rho|_{Y_t=x}].$$

Et si A est un opérateur agissant sur des fonctions définies dans \mathbb{R}^{4N} , on pose

$$A(\rho)(x) \equiv \sum_{n,m} (A\rho^{n,m})(x) |n\rangle\langle m|,$$

dès que $x \mapsto \rho^{n,m}(x)$ est une fonction bien définie.

On pose :

$$\begin{aligned} \overline{\rho_\pi(t)} &= \mathbb{E}[\rho_\pi(t)|_{Y_t}] \quad , \quad \overline{z_\pi(t)} = \mathbb{E}[z_\pi(t)|_{Y_t}]; \\ \rho_\pi(0) &\equiv \rho_0(Y_0); \\ \forall x \in \mathbb{R}^{4N}, \quad \overline{\rho_\pi(t)}(x) &= \mathbb{E}[\rho_\pi(t)|_{Y_t=x}] \quad , \quad \overline{z_\pi(t)}(x) = \mathbb{E}[z_\pi(t)|_{Y_t=x}]; \\ z_\pi(0) &\equiv z_0(Y_0). \end{aligned}$$

Intuitivement, on peut voir $\overline{\rho_\pi(t)}(x)$ comme la matrice de densité d'évolution donnée par l'équation (4.25) et pour laquelle la valeur du paramètre φ_t est égale au nombre réel Bx .

Théorème 4.6

On suppose que le processus de Markov Y admet une mesure invariante μ_0 sur \mathbb{R}^{4N} .

Le processus $(\overline{\rho_\pi(t)})_{t \geq 0}$ satisfait l'équation :

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{L}_\rho(t)(u); \quad (4.27)$$

$$\mathfrak{L}_\rho(t)(u) \equiv -i[Q_t, \Psi(u)] + \mathbf{L}^*(u). \quad (4.28)$$

Et le processus $(\overline{z_\pi(t)})_{t \geq 0}$ satisfait l'équation :

$$\frac{du}{dt} = \mathfrak{L}_z(t)(u); \quad (4.29)$$

$$\mathfrak{L}_z(t)u \equiv -i[H_s(t) + Q, \Psi(u)] + \mathbf{L}^*(u). \quad (4.30)$$

Où Ψ est l'opérateur linéaire défini par :

$$(\Psi u)(x) \equiv Bx \times u(x),$$

pour toute fonction u ,

$$x \in \mathbb{R}^{4N} \longmapsto u(x) \in \mathcal{L}_{1,+}^1(\mathfrak{H}_s).$$

Démonstration

Les deux preuves sont similaires. On se limite à la première.

De l'équation (4.25) et de la propriété de projection des espérances conditionnelles, il vient :

$$\begin{aligned} \rho_\pi(t) &= \rho_0 - i \int_0^t ds [Q_s B Y_s, \rho_\pi(s)]; \\ \overline{\rho_\pi(t)} &= \mathbb{E}\{\rho_0(Y_0)|Y_t\} - i \int_0^t ds \mathbb{E}\{[Q_s, \rho_\pi(s)] B Y_s | Y_t\} \\ &= \mathbb{E}\{\rho_0(Y_0)|Y_t\} - i \int_0^t ds \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{[Q_s, \rho_\pi(s)]|Y_s\} B Y_s | Y_t\}. \end{aligned}$$

Tenant compte de la propriété retournée (lemme 4.3) du processus de Markov (Y_t) de mesure invariante μ_0 , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{[Q_s, \rho_\pi(s)]|Y_s\} B Y_s | Y_t\} &= \mathbb{E}\{[Q_s, \mathbb{E}\{\rho_\pi(s)|Y_s\}] B Y_s | Y_t\} \\ &= e^{(t-s)L^*} [Q_s, \mathbb{E}\{\rho_\pi(s)|Y_t\}] B Y_t \\ &= e^{(t-s)L^*} [Q_s, \overline{\rho_\pi(s)}(Y_t)] B Y_t \\ \mathbb{E}\{\rho_0(Y_0)|Y_t\} &= e^{tL^*} \rho_0(Y_t). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^{4N}$, on obtient :

$$\overline{\rho_\pi(t)}(x) = e^{tL^*} \rho_0(x) - i \int_0^t ds e^{(t-s)L^*} [Q_s, \overline{\rho_\pi(s)}(x)] Bx.$$

Par différentiation, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\rho_\pi(t)}(x)}{dt} &= L^* \left(e^{tL^*} \rho_0(x) - i \int_0^t ds e^{(t-s)L^*} [Q_s, \overline{\rho_\pi(s)}(x)] Bx \right) \\ &\quad - i [Q_t, \overline{\rho_\pi(t)}(x)] Bx. \end{aligned}$$

Soit, puisque Bx est un nombre réel :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\rho_\pi(t)}(x)}{dt} &= L^* \left(\overline{\rho_\pi(t)}(x) - i [Q_t, \overline{\rho_\pi(t)}(x)] Bx \right) \\ &= L^* \left(\overline{\rho_\pi(t)}(x) - i [Q_t, \Psi \left(\overline{\rho_\pi(t)}(x) \right)] \right). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.5

La démarche suivie peut s'apparenter à la théorie du filtrage ([\[ARN\]](#), [\[O\]](#)). En présentant le problème sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{(système)} \quad d\rho_\pi(t) &= -i[Q_t, \rho_\pi(t)]BY_t dt + L^*(\rho_\pi(t))dt; \\ \text{(observation)} \quad dY_t &= \Delta Y_t dt + \Gamma dW_t. \end{aligned}$$

Il est connu alors que des schémas de simulation numérique sont possibles. Ce qui peut présenter un intérêt pour ces méthodes dites classiques.

- **Application à l'observation du système**

Dans le cas stationnaire,

$$H_s(t) = H_s,$$

on note

$$\mathfrak{L}_z u = -i[H_s + Q, \Psi(u)] + L^*(u).$$

Alors, on a immédiatement :

$$\overline{z_\pi}(t) = e^{t\mathfrak{L}_z} \overline{z_\pi}(0).$$

D'où l'évolution markovienne de la moyenne de $z_\pi(t)$:

$$\mathbb{E}[z_\pi(t)] = \mathbb{E}[\overline{z_\pi}(t)] \equiv e^{tL_z} \mathbb{E}[\overline{z_\pi}(0)].$$

Et l'opérateur L_z est donné par :

$$L_z(\mathbb{E}[\overline{z_\pi}(0)]) = \int d\mu_0(x) (\mathfrak{L}_z z_0)(x).$$

4.3 Exemple. Equation de Langevin

Ce cas est très particulier car φ_t est un processus réel de Markov,

$$\varphi_t = BY_t, \quad B = 1.$$

Considérons le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck où

$$\varphi_t = \int_{-\infty}^t e^{-\omega_0(t-u)} dB_u;$$

ce qui correspond à $|h(\omega)|^2 = 1/(\omega^2 + \omega_0^2)$, $\omega_0 > 0$.
Ce processus satisfait l'équation de Langevin

$$d\varphi_t = -\omega_0\varphi_t dt + dB_t.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} L &= -\omega_0 x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}; \\ L^T &= \omega_0 \frac{d}{dx}(x \cdot) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}; \\ p &= \sqrt{\omega_0/\pi} e^{-\omega_0 x^2}; \\ L^* &= p^{-1} \circ L^T \circ p = L, \end{aligned}$$

où $(pf)(x) = p(x) \times f(x)$.

Dans le modèle du spin-boson (chapitre 2 section 2), on a :

$$\mathfrak{H}_s = \mathbb{C}^2, H_s = S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminons $\mathfrak{L}_z(u)$,

$$\mathfrak{L}_z(u) = -i[H_s, u] - i[Q, \Psi u] + L^* u,$$

où u est une matrice de densité de la forme

$$u(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \bar{b}(x) & 1 - a(x) \end{pmatrix},$$

avec :

$$0 \leq a(x) \leq 1, \left(a(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + |b(x)|^2 \leq \frac{1}{4}.$$

On trouve après tout calcul

$$(\mathfrak{L}_z u)(x) = \begin{pmatrix} -\omega_0 x a' + \frac{1}{2} a'' - i x \frac{\bar{b}-b}{2}; -\omega_0 x b' + \frac{1}{2} b'' - \frac{i}{2}(x(1-2a) + 2b) \\ -\omega_0 x \bar{b}' + \frac{1}{2} \bar{b}'' + \frac{i}{2}(x(1-2a) + 2\bar{b}); \omega_0 x a' - \frac{1}{2} a'' + i x \frac{\bar{b}-b}{2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, il vient : $\mathbf{tr}[(\mathfrak{L}_z u)(x)] = 0$.

Notons u_{stat} la matrice de densité qui correspond à $a = 1/2$ et $b = 0$ c'est-à-dire $u_{stat}(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}$, alors, on a aisément :

$$\mathfrak{L}_z u_{stat} = 0.$$

L'équation $\mathfrak{L}_z u = 0$ conduit au système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -\omega_0 x a' + \frac{1}{2} a'' &= i x \frac{\bar{b}-b}{2}; \\ -\omega_0 x b' + \frac{1}{2} b'' &= \frac{i}{2}(x(1-2a) + 2b). \end{cases}$$

Lemme 4.6

Le système (\mathcal{S}) n'admet, parmi les matrices de densité, que la solution

$$u = u_{stat}.$$

Démonstration

Considérons le modèle de l'oscillateur à une dimension à la fréquence ω_0 , (voir [CDL] vol I, avec ici les simplicités mathématiques habituelles : la masse m est égale à 1 et $\hbar = 1$).

Soit l'opérateur nombre \mathcal{N}_{os} ,

$$\mathcal{N}_{os} = \omega_0 a^* a = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \mathbf{I} - \frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{I},$$

où a^* et a sont les opérateurs de création et d'annihilation :

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\omega_0} x - \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \frac{d}{dx} \right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\omega_0} x + \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \frac{d}{dx} \right).$$

L'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_2$ est muni du produit :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \forall u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2, \quad fu \equiv \begin{pmatrix} fa & fb \\ fc & fd \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on convient de noter $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{os} \otimes \mathbf{I}$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \forall x \mapsto u(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2, \quad \mathcal{N}(fu) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{os}(fa) & \mathcal{N}_{os}(fb) \\ \mathcal{N}_{os}(fc) & \mathcal{N}_{os}(fd) \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a :

$$p^{-1/2} \mathcal{N}(p^{1/2} u) = -L^* u. \quad (4.31)$$

\mathcal{N} est un opérateur positif. De plus les propriétés spectrales de \mathcal{N}_{os} impliquent que :

$$\mathcal{N}(fu) = 0 \iff fu = p^{1/2} C \text{ où } C \text{ est une matrice constante de } \mathcal{M}_2.$$

On munit l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}_2$ du produit scalaire :

$$\langle fu, gv \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} dx \overline{f(x)} g(x) \mathbf{tr}[u^*(x)v(x)],$$

pourvu que les fonctions $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ soient dans l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et la matrice $x \mapsto u^*(x)v(x)$ soit telle que l'application

$$x \mapsto \overline{f(x)} g(x) \mathbf{tr}[u^*(x)v(x)],$$

soit intégrable sur \mathbb{R} .

Soit $x \mapsto u(x) \in \mathcal{M}_2$ auto-adjoint et bornée. Tenant compte de

$$\mathbf{tr}[\mathbf{H}_s, u] = 0, \mathbf{tr}[\mathbf{Q}, \psi u] = 0,$$

alors on a

$$\mathbf{tr}[u\mathcal{L}_z u] = -\mathbf{tr}[uL^* u].$$

La relation (4.31) donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx p \mathbf{tr}[u\mathcal{L}_z u] &= - \int_{\mathbb{R}} dx \mathbf{tr}[(p^{1/2} u)\mathcal{N}(p^{1/2} u)] \\ &= - \langle p^{1/2} u, \mathcal{N}(p^{1/2} u) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Soit $u = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & 1-a \end{pmatrix}$ une matrice de densité qui vérifie $\mathcal{L}_z u = 0$.

Alors, il vient :

$$\langle p^{1/2} u, \mathcal{N}(p^{1/2} u) \rangle = 0.$$

Donc : $\langle \mathcal{N}(p^{1/2} u) \rangle = 0$, par suite $p^{1/2} u = p^{1/2} C$ où C est une matrice constante de \mathcal{M}_2 , soit $u = C$.

La seconde équation de (\mathcal{S}) donne immédiatement $a = 1/2$ et $b = 0$. \square

Notons que on ne peut pas traiter d'autres cas pour $N = 1$, car on doit conserver l'hypothèse de symétrie de h ($|h(-\omega)| = |h(\omega)|$).

Perspectives

A l'issue de ces quelques travaux d'apprentissage, on peut envisager d'élaborer une théorie de la relaxation exponentielle pour l'équation maîtresse

$$\partial_t \rho_t = \mathbf{L} \rho_t, \quad \rho_0 = \rho \in \mathcal{L}_{1,+}^1, \quad (4.32)$$

dirigée par un opérateur de Lindblad \mathbf{L} non-borné. Physiquement, on peut d'abord penser à étudier l'équation maîtresse de l'optique quantique du modèle de Jaynes-Cummings décrit dans [FR1], puis au modèle laser¹ multimode. Le modèle quantique d'absorption et d'émission de Gisin et Percival ([FR1]) présente plus de difficultés car il y a dans l'expression de \mathbf{L} des termes résonnants $(a^* a)^2$.

On aura alors une famille de modèles à laquelle la méthode, suivie à propos des oscillateurs harmoniques, doit s'étendre si elle conduit effectivement à une équation aux dérivées partielles du premier ordre ou du second ordre (qui se ramène au premier). En particulier elle doit être résoluble par la méthode des caractéristiques pour déterminer des estimations. Le retour à l'équilibre est acquis par le théorème de Fagnola-Rebolledo (théorème 1.9), sous des hypothèses difficiles à appliquer.

Une seconde perspective est d'étudier la limite de Van Hove, pour un couple «Système-Réservoir», modélisé globalement par des oscillateurs harmoniques (comme dans le chapitre 2). La relation, obtenue entre le noyau de Volterra et la fonction self-énergie, doit devenir un outil des méthodes analytiques pour effectuer le passage à la «limite faible». Autrement dit on justifierait directement l'expression du générateur de Davies sans approximation.

Enfin, une dernière voie est l'étude du couplage fort lorsque le réservoir est à l'équilibre thermique à la température $1/\beta$ et le champ de Segal $\phi(\hbar)$ conduit à l'état défini par sa fonction génératrice :

$$\mathfrak{s}_\rho(\hbar) = e^{-\frac{1}{4}\|(1+2\rho)\hbar\|^2}. \quad (4.33)$$

1. Dicke laser ou maser

Pour garder un sens physique, on suppose que ρ n'est pas une fonction de la température d'équilibre. On travaille avec la représentation régulière d'Araki-Woods. On peut montrer que sous les hypothèses de symétrie de la fonction $(1 + 2\rho)h$ et de rationalité de cette fonction, qu'il existe une évolution markovienne de la dynamique de l'opérateur de densité réduit dès que le processus de Markov possède une mesure invariante.

Il nous semble que l'approche de la théorie des probabilités quantiques peut être une autre investigation intéressante pour obtenir un caractère markovien. L'idée «naïve» est que l'on puisse contrôler les coefficients d'une équation différentielle stochastique quantique de type lindbladienne [MEY] et [PA](chapitre 3, section 26).

Annexe A

Annexe du chapitre 1

A.1 Preuve du théorème 1.1

On rappelle le lemme

Lemme A.1 (Lemme de Gronwall)

Soit φ une fonction mesurable localement intégrable sur \mathbb{R} telle qu'il existe une fonction α \mathbb{R} -intégrable et un réel $\beta > 0$ tels que :

$$\forall t, 0 \leq t \leq T : 0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t ds \varphi(s).$$

Alors

$$\forall t, 0 \leq t \leq T : 0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t ds \alpha(s) e^{\beta(t-s)}.$$

En particulier, si $\alpha(t) = \alpha \geq 0$ est une constante alors :

$$\forall t, 0 \leq t \leq T : 0 \leq \varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t}.$$

L'hypothèse (H1) et l'équation (1.1) permettent d'obtenir :

$$\|x_\lambda(t)\| \leq \|f_0\| + C \int_0^t ds \|x_\lambda(s)\|.$$

Le lemme de Gronwall, appliqué aux fonctions $\varphi(t) = \|x_\lambda(t)\|$, $\alpha(t) = \|f_0\|$ et $\beta = C$, donne :

$$\forall \lambda > 0, \forall t, 0 \leq t \leq \tau_0 : \|x_\lambda(t)\| \leq \|f_0\| e^{\beta t} \leq \|f_0\| e^{\beta \tau_0} \equiv M.$$

Soit $x \in X$ défini par $x(t) = e^{K_0 t} f_0$, alors :

$$x(t) = f_0 + (\tilde{K}_0 x)(t) \quad , \quad (\tilde{K}_0 x)(t) = \int_0^t ds K_0 x(s),$$

il vient :

$$\begin{aligned} x_\lambda(\tau) - x(\tau) &= (\tilde{\mathbf{K}}_\lambda - \tilde{\mathbf{K}}_0)(x_\lambda)(t) + \int_0^t ds \mathbf{K}_0(x_\lambda - x)(s), \\ \text{Sup}_{0 \leq \tau \leq t} \|(x_\lambda - x)(\tau)\| &\leq M \times \|\tilde{\mathbf{K}}_\lambda - \tilde{\mathbf{K}}_0\| + \int_0^t ds \|\mathbf{K}_0\| \text{Sup}_{0 \leq \tau \leq s} \|(x_\lambda - x)(\tau)\|. \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall \lambda > 0, \quad \text{Sup}_{0 \leq \tau \leq \tau_0} \|(x_\lambda - x)(\tau)\| \leq M \times \|\tilde{\mathbf{K}}_\lambda - \tilde{\mathbf{K}}_0\| e^{\|\mathbf{K}_0\| \tau_0}.$$

D'où le résultat. □

A.2 Preuve de la proposition 1.1

Le semi-groupe $(\mathbf{T}_V^t)_{t \geq 0}$ admet comme générateur

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L} + a^\sharp(\alpha) - \mathbf{J} \Delta^{1/2} a^\sharp(\alpha) \mathbf{J} \Delta^{1/2}.$$

Le semi-groupe \mathbf{T}_V^t s'écrit

$$\mathbf{T}_V^t(\mathbf{A}\Omega) = \mathbf{S}_V^t(\tau_0^t(\mathbf{A}))\Omega, \quad \mathbf{S}_V^t(\mathbf{A})\Omega \equiv \mathbf{U}_t \mathbf{A} \mathbf{U}_t^* \Omega,$$

avec :

$$\mathbf{U}_t = e^{it(\mathbf{L}+\mathbf{V})} e^{-it\mathbf{L}}.$$

Comme $\partial_t \mathbf{U}_t = i\mathbf{U}_t \mathbf{V}(t)$ et $\partial_t \mathbf{U}_t^* = -i\mathbf{V}(t)\mathbf{U}_t^*$, où

$$\mathbf{V}(t) = e^{it\mathbf{L}} a^\sharp(f) e^{-it\mathbf{L}} = a^\sharp(e^{it} f).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t &= \sum_n i^n \int_{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t} dt_1 \dots dt_n \mathbf{V}(t_n) \dots \mathbf{V}(t_1), \\ \mathbf{U}_t^* &= \sum_m (-1)^m i^m \int_{0 \leq s_m \leq \dots \leq s_1 \leq t} ds_1 \dots ds_m \mathbf{V}(s_1) \dots \mathbf{V}(s_m). \end{aligned}$$

Nous avons, pour $\mathbf{A} = a^\sharp(\varphi_1) \dots a^\sharp(\varphi_k)$, $\|\varphi_j\| = 1$, l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{V}(t_n) \dots \mathbf{V}(t_1) \mathbf{A} \mathbf{V}(s_m) \dots \mathbf{V}(s_1) \Omega\| \leq \sqrt{(n+m+k+1)!} \|f\|^{n+m}.$$

Soit $J = n + m$, il vient :

$$\iint_{\substack{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t \\ 0 \leq s_m \leq \dots \leq s_1 \leq t}} dt_1 \dots dt_n ds_1 \dots ds_m \|V(t_n) \dots V(t_1) AV(s_1) \dots V(s_m)\| \leq \frac{(\|f\|t)^J \sqrt{(J+k)!}}{n!m!}.$$

Ainsi $U_t A U_t^* \Omega = \sum_{n,m} \sigma(n, m)$ où

$$\sigma(n, m) = (-1)^m i^{n+m} \iint_{\substack{0 \leq t_n \leq \dots \leq t_1 \leq t \\ 0 \leq s_m \leq \dots \leq s_1 \leq t}} dt_1 \dots dt_n ds_1 \dots ds_m V(t_n) \dots V(t_1) AV(s_1) \dots V(s_m).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{J \geq 0} \sum_{\substack{n,m \\ n+m=J}} \|\sigma(n, m)\| &\leq \sum_{J \geq 0} \frac{(\|f\|t)^J \sqrt{(J+k+1)!}}{J!} \sum_{\substack{n,m \\ n+m=J}} \frac{J!}{n!m!} \\ &\leq \sum_{J \geq 0} (2\|f\|t)^J \frac{\sqrt{(J+k+1)!}}{J!} < \infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte de la formule de Stirling et du fait que la série entière $z^J / \sqrt{J!}$ a un rayon de convergence infini.

Ainsi $t \mapsto U_t A U_t^* \Omega$ est analytique. Il en résulte que :

$$\partial_t S_V^t(A) = i S_V^t([V(t), A]) \Omega.$$

Puisque l'expression de $T_V^t(A\Omega)$ donne :

$$\partial_t T_V^t(A\Omega) = i S_V^t([V(t), \tau_0^t(A)]) \Omega + S_V^t(\partial_t \tau_0^t(A)) \Omega.$$

Alors, on a :

$$\partial_t T_V^t(A\Omega)|_{t=0} = i[V, A] \Omega + i[L, A] \Omega.$$

On conclut comme dans le cas borné.

On obtient le résultat par linéarité pour $A = \phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a^*(\varphi))$ puis par intégration pour $A = e^{i\phi(\varphi)}$ et en définitive pour tout $A \in \mathfrak{M}$. \square

A.3 Calculs

• Diverses interprétations du résultat universel NPRZ

Pour tout $A \in \mathcal{M}_s$, on peut définir, en représentation d'interaction par rapport à δ_0 :

$$A_1(t) = (P \alpha_0^{-t} \alpha^t P)(A \otimes 1) = \alpha_0^{-t} X_1(t)$$

et nous obtenons de l'équation maîtresse (1.5), l'équation exacte :

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(0) + \int_0^t du (\mathbf{P}\alpha_0^{-u}\mathbf{P})(\delta_1^{0,0})(\mathbf{P}\alpha_0^u\mathbf{P})A_1(u) \\ &+ \int_0^t du (\mathbf{P}\alpha_0^{-u}\mathbf{P}) \int_0^u ds K_1(u-s)(\mathbf{P}\alpha_0^s\mathbf{P})A_1(s), \end{aligned}$$

et par inversion dans l'intégrale double, il vient :

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A(0) + \int_0^t du (\mathbf{P}\alpha_0^{-u}\mathbf{P})(\delta_1^{0,0})(\mathbf{P}\alpha_0^u\mathbf{P})A_1(u) \\ &+ \int_0^t ds (\mathbf{P}\alpha_0^{-s}\mathbf{P}) \left[\int_0^{t-s} dr \alpha_0^{-r} K_1(r) \right] (\mathbf{P}\alpha_0^s\mathbf{P})A_1(s). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation maîtresse exacte, sous la forme dérivée, pour $A_1(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_1(t)) &= (\mathbf{P}\alpha_0^{-t}\mathbf{P})(\delta_1^{0,0})(\mathbf{P}\alpha_0^t\mathbf{P})A_1(t) \\ &+ \int_0^t ds (\mathbf{P}\alpha_0^{-t}\mathbf{P})K_1(t-s)(\mathbf{P}\alpha_0^s\mathbf{P})A_1(s). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Toutes ces équations sont du type «équation intégro-différentielle», les approximations peuvent se faire à partir de l'égalité suivante

$$(3) \quad \beta^t = \alpha_0^t + \int_0^t dt_1 \alpha_0^{t-t_1} (\delta_1^{0,0} + \delta_1^{1,1}) \beta^{t_1},$$

qui établit une décomposition en série de β .

Lemme A.2

$$\beta^t = \alpha_0^t + \sum_{n \geq 1} \alpha_0^t B_n(t),$$

avec

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} dt_1 dt_2 \dots dt_n B(t_1)B(t_2) \dots B(t_n); \\ B(u) &= \alpha_0^{-u} (\delta_1^{0,0} + \delta_1^{1,1}) \alpha_0^u. \end{aligned}$$

Ainsi

$$K_1(t) = \delta_1^{0,1} \alpha_0^t \delta_1^{1,0} + \sum_{n \geq 1} \delta_1^{0,1} \alpha_0^t B_n(t) \delta_1^{1,0}.$$

Cependant on ne conserve souvent dans les applications numériques que le terme du second ordre en δ_1 .

A.3.1 Couplage faible

- Quelques propriétés des P_α

La définition

$$P_\alpha(A) = \sum_{\substack{i,f \\ E_i - E_f = \alpha}} P_i A P_f,$$

donne :

$$\forall (k, l) \quad P_k P_\alpha(A) P_l = \delta(E_k - E_l - \alpha) P_k A P_l.$$

En particulier, il vient :

$$P_\alpha P_\beta = \delta(\alpha - \beta) P_\alpha \quad , \quad P_\alpha^2 = P_\alpha \quad , \quad \sum_\alpha P_\alpha = \mathbb{1}.$$

- Preuve de la proposition 1.4

Il est clair que la condition est suffisante.

Pour la nécessité. Soit $\alpha \in \Lambda$ tel que $\operatorname{Re}(c(\alpha)) \neq 0$. On fixe k et l deux entiers tels que $E_l - E_k = \alpha$. En choisissant $N = 1$, $A_1 = P_k$ et $B_1 = P_l$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_l \Phi(P_k^* P_k) P_l &= \sum_\mu 2\operatorname{Re}(c(\mu)) \left(P_k P_\mu(Q) P_l \right)^* \left(P_k P_\mu(Q) P_l \right) \\ &= \sum_\mu 2\operatorname{Re}(c(\mu)) \delta(E_l - E_k - \mu) \left(P_k Q P_l \right)^* \left(P_k Q P_l \right) \\ &= 2\operatorname{Re}(c(\alpha)) \left(P_k Q P_l \right)^* \left(P_k Q P_l \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Mais $\left(P_k Q P_l \right)^* \left(P_k Q P_l \right) > 0$ d'où :

$$\operatorname{Re}(c(\alpha)) \geq 0.$$

□

- Preuve de la proposition 1.7.

Nous obtenons :

$$Q_\alpha^* Q_\alpha = \sum_{\substack{k,l \\ E_k - E_l = \alpha}} P_k Q P_l Q P_k,$$

de sorte que cet opérateur commute avec tout opérateur diagonal c'est-à-dire de la forme $\sum a_i P_i$; ce qui établit (i).

Et, il vient

$$\begin{aligned} 2K_s^\dagger(A) \rho_0 &= \sum_\alpha h(\alpha) \left(2Q_\alpha^* A Q_\alpha \rho_0 - A Q_\alpha^* Q_\alpha \rho_0 - Q_\alpha^* Q_\alpha A \rho_0 \right), \\ 2L_s(A \rho_0) &= \sum_\alpha h(\alpha) \left(2Q_\alpha^* A \rho_0 Q_\alpha - A Q_\alpha^* Q_\alpha \rho_0 - Q_\alpha^* Q_\alpha A \rho_0 \right). \end{aligned}$$

Mais la relation KMS donne :

$$h(E_m - E_n)e^{-\beta E_m} = h(E_n - E_m)e^{-\beta E_n}.$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} h(\alpha)Q_\alpha^*A\rho_0Q_\alpha &= \sum_{\substack{k,l,m,n \\ E_k - E_l = E_n - E_m = \alpha}} h(\alpha)e^{-\beta E_m}P_kQP_lAP_mQP_n \\ &= \sum_{\substack{k,l,m,n \\ E_k - E_l = E_n - E_m = \alpha}} h(-\alpha)e^{-\beta E_n}P_kQP_lAP_mQP_n \\ &= \sum_{\substack{k,l,m,n \\ E_k - E_l = E_n - E_m = \alpha}} h(-\alpha)P_kQP_lAP_mQP_n \left(P_n e^{-\beta E_n} \right) \\ &= \sum_{\substack{k,l,m,n \\ E_k - E_l = E_n - E_m = \alpha}} h(-\alpha)P_kQP_lAP_mQP_n \rho_0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda} h(\alpha)Q_\alpha^*A\rho_0Q_\alpha &= \sum_{\alpha} \sum_{\substack{k,l,m,n \\ E_k - E_l = E_n - E_m = -\alpha}} h(-\alpha)P_kQP_lAP_mQP_n \rho_0 \\ &\stackrel{(-\alpha = \alpha')}{=} \sum_{\alpha' \in \Lambda} h(\alpha')Q_{\alpha'}^*AQ_{\alpha'}\rho_0. \end{aligned}$$

Ce qui montre **(ii)**.

Alors, en tenant compte de $K_s^\sharp(M^*) = (K_s^\sharp(M))^*$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle K_s^\sharp(A), B \rangle_0 &= \mathbf{tr}(K_s^\sharp(A)B^*\rho_0) \\ &= \mathbf{tr}(AL_s(B^*\rho_0)) \\ &= \mathbf{tr}(AK_s^\sharp(B^*)\rho_0) = \mathbf{tr}(A(K_s^\sharp(B))^*\rho_0) \\ &= \langle A, K_s^\sharp(B) \rangle_0. \end{aligned}$$

Ce qui suffit à établir le principe du bilan détaillé (page 21). □

A.3.2 Propriétés algébriques de K^\sharp

On identifiera systématiquement $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})$ et $\mathfrak{H} \otimes \overline{\mathfrak{H}}$.

$(|n^i\rangle)_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq g(n)}$ est une base orthonormée de \mathfrak{H} , formée des vecteurs propres de H , $\sigma(H) = \{E_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ ainsi $(|n^i\rangle \langle m^j|)_{n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq g(n), 1 \leq j \leq g(m)}$ est une base orthonormée de \mathcal{H} et

$$(|n^i\rangle \langle m^j|; |k^r\rangle \langle l^s|)_{\mathcal{H}_S} = \mathbf{tr} \left((|n^i\rangle \langle m^j|)^* (|k^r\rangle \langle l^s|) \right) = \delta_{nk} \delta_{ml} \delta_{ir} \delta_{js}.$$

On pose $P_n = \sum_{i=1}^{g(n)} |n^i\rangle\langle n^i|$ et soit $P_{n,m}$ l'opérateur défini sur \mathcal{H} par

$$\forall X \in \mathcal{H} \quad , \quad P_{n,m}(X) = P_n X P_m.$$

On a :

$$\begin{aligned} (1) \quad P_{k,l} P_{n,m} &= \delta_{kn} \delta_{lm} P_{n,m}; \\ (2) \quad P_{n,m}^2 &= P_{n,m} = P_{n,m}^*; \\ (3) \quad \sum_{n,m} P_{n,m} &= \mathbf{I}; \\ (4) \quad L &= \sum_{n,m} (E_n - E_m) P_{n,m} = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} \lambda P_\lambda(L); \\ P_\lambda(L) &= \sum_{\substack{n,m \\ E_n - E_m = \lambda}} P_{n,m}. \end{aligned}$$

On en déduit les propriétés de la famille spectrale $(P_\lambda(L))$

$$\begin{aligned} (5) \quad \forall \lambda \in \sigma(L) \quad P_{n,m} P_\lambda(L) &= P_\lambda(L) P_{n,m} = P_{n,m} \delta_{(E_n - E_m - \lambda)}; \\ (6) \quad \forall \lambda, \mu \in \sigma(L) \quad \lambda \neq \mu &\implies P_\lambda(L) P_\mu(L) = 0; \\ (7) \quad \forall \lambda \in \sigma(L) \quad P_\lambda^2(L) &= P_\lambda(L) = P_\lambda^*(L); \\ (8) \quad \sum_{\lambda \in \sigma(L)} P_\lambda(L) &= \mathbf{I}; \\ (9) \quad A \in \{L\}' &\iff \forall \lambda \in \sigma(L) \quad , \quad A P_\lambda(L) = P_\lambda(L) A. \end{aligned}$$

Proposition A.1

Soit P_L l'opérateur défini sur l'ensemble des opérateurs de \mathcal{H} sur lui même par :

$$\forall K \in \mathcal{H} \quad , \quad P_L(K) = \sum_{\lambda \in \sigma(L)} P_\lambda(L) K P_\lambda(L).$$

Alors :

- 1) P_L est un projecteur orthogonal de \mathcal{H} ;
- 2) $P_L(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\{L\}'$ dans \mathcal{H} ;
- 3) $\forall A \in \mathcal{H}$, $A^\natural = P_L(A)$ avec

$$A^\natural = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{itL} A e^{-itL}.$$

Annexe B

Annexe du chapitre 2

B.1 Oscillateur harmonique

B.1.1 Justifications du calcul de l'opérateur de Van Hove

On traite le cas à d oscillateurs.

Soit D le sous espace vectoriel de \mathfrak{H}_s défini par :

$$D = \left\{ \rho = \sum_{n_1, \dots, n_d} \rho_{n_1, \dots, n_d} |n_1, \dots, n_d\rangle \middle/ \sum_{n_1, \dots, n_d} n_1^2 \cdots n_d^2 |\rho_{n_1, \dots, n_d}|^2 < \infty \right\}.$$

Il est clair que l'on a

$$\forall l \in \{1, \dots, d\} \quad , \quad D \subset D(a_l^* a_l) \subset D(a_l),$$

et D est contenu dans tous les domaines $D(a_k a_l^*)$ et $D(a_k^* a_l)$. De plus D est dense dans \mathfrak{H}_s (en effet, pour $\rho \in \mathfrak{H}_s$, l'élément $\rho^{(k)}$, où

$$\rho^{(k)} = \sum_{n_1, \dots, n_d} (1 - e^{-\frac{k}{(n_1+1) \cdots (n_d+1)})} \rho_{n_1, \dots, n_d} |n_1, \dots, n_d\rangle,$$

vérifie $\rho^{(k)} \in D$ et $\lim(\rho - \rho^{(k)}) = 0$ par convergence dominée).

L'opérateur de Van Hove est défini au sens faible des formes sesquilinéaires :

$$\forall (u, v) \in D^2 \quad , \quad (u, \mathbf{K}(A)v) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} dt (u, \mathbf{K}_{\kappa, N}^t(A)v),$$

pour tout $A \in \mathcal{M}_s$ (systématiquement A est confondu à $A \otimes \mathbb{1}$) et

$$\mathbf{K}_{\kappa, N}^t(A) = P \alpha_s^{-t} \delta_1 \alpha_0^t \delta_1 P(A).$$

En posant :

$$\phi_k^-(t) = \alpha_r^t(\phi^-) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega} \lambda_k(\omega) e^{-it\omega} a_{\omega},$$

et en tenant compte que les seules fonctions à deux points non nulles sont les $\langle \phi_l^{\pm} \phi_k^{\mp}(t) \rangle_r$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} (u, \mathbf{K}_{\kappa, N}^t(A)v) &= \sum_{k,l} \left(e^{it\omega_k} \langle \phi_k^+ \phi_l^-(t) \rangle_r \right) \left((a_k^* u, A a_l^* v) - (a_l a_k^* u, A v) \right) \\ &+ \sum_{k,l} \left(e^{-it\omega_k} \langle \phi_k^- \phi_l^+(t) \rangle_r \right) \left((a_k u, A a_l^* v) - (a_l^* a_k u, A v) \right) \\ &- \sum_{k,l} \left(e^{-it\omega_k} \langle \phi_l^+(t) \phi_k^-(t) \rangle_r \right) \left((u, A a_l a_k^* v) - (a_l^* u, A a_k^* v) \right) \\ &- \sum_{k,l} \left(e^{it\omega_k} \langle \phi_l^-(t) \phi_k^+(t) \rangle_r \right) \left((u, A a_l^* a_k v) - (a_l u, A a_k v) \right) \end{aligned}$$

on obtient le résultat énoncé par application du théorème de la convergence dominée.

B.1.2 Construction du semi-groupe e^{tK}

Preuve du lemme 2.1

Soit $h = \sum_n h_n |n\rangle$ un élément de \mathfrak{H}_s , on a aisément

$$\|P_t h\|^2 = e^{-2t\Gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nt(\Gamma_1 + \Gamma_0)} |h_n|^2 \leq e^{-2t\Gamma_0} \|h\|^2,$$

ce qui donne $\|P_t\| = e^{-t\Gamma_0}$ d'où (i).

Le second point (ii) est clair d'après les définitions des opérateurs L_j .

Le dernier point (iii) résulte des calculs suivants, pour tout $(u, v) \in \mathbf{D}^2$:

$$\begin{aligned} (u, Gv) &= \sum_n (-(n+1)\Gamma_0 - n\Gamma_1 + inS) \overline{u_n} v_n; \\ (Gu, v) &= \sum_n (-(n+1)\Gamma_0 - n\Gamma_1 - inS) \overline{u_n} v_n; \\ (L_0 u, L_0 v) &= 2\Gamma_0 (u, a a^* v) = 2\Gamma_0 \sum_n (n+1) \overline{u_n} v_n; \\ (L_1 u, L_1 v) &= 2\Gamma_1 (u, a^* a v) = 2\Gamma_1 \sum_n n \overline{u_n} v_n. \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme 2.2

(i) implique (ii). Soit $(u, v) \in D^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(P_{t-s}u, X_s P_{t-s}v) &= -(GP_{t-s}u, X_s P_{t-s}v) - (GP_{t-s}u, X_s GP_{t-s}v) \\ &\quad + (P_{t-s}u, \mathbf{K}(X_s)P_{t-s}v) \\ &= \sum_{j=0}^1 (L_j P_{t-s}u, X_s P_{t-s}v). \end{aligned}$$

Cette dernière résulte de la définition de \mathbf{K} au sens des formes sesquilineaires. On obtient alors (ii) en intégrant par rapport à s sur $[0, t]$.

(ii) implique (i). En dérivant chaque membre de (2.7), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u, X_t v) &= (GP_t u, X P_t v) + (P_t u, X GP_t v) + \sum_{j=0}^1 (L_j u, X_t L_j v) \\ &\quad + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds (L_j P_{t-s} G u, X_s L_j P_{t-s} v) \\ &\quad + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds (L_j P_{t-s} u, X_s L_j P_{t-s} G v). \end{aligned}$$

Mais, par définition de \mathbf{K} , il vient ,

$$(u, \mathbf{K}(X_t) v) = (u, X_t G v) + (G u, X_t v) + \sum_{j=0}^1 (L_j u, X_t L_j v),$$

on applique (2.7) aux deux premiers termes de cette dernière égalité, d'où :

$$\frac{d}{dt}(u, X_t v) = (u, \mathbf{K}(X_t) v).$$

(i) s'obtient par intégration sur $[0, t]$. □

Preuve du lemme 2.3

Pour (1) et (3), on raisonne par récurrence sur l'entier n . Soit $u \in D$. On a :

$$0 \leq (u, T_t^{(0)}(X)u) = (P_t u, X P_t u) \leq \|X\| \|P_t u\|^2 \leq \|X\| \|u\|^2.$$

Supposons que $0 \leq T_t^{(n)}(X) \leq \|X\| \cdot \mathbb{1}$, alors on a immédiatement :

$$0 \leq (u, T_t^{(n+1)}(X)u) \leq \|X\| \left(\|P_t u\|^2 + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds \|L_j P_{t-s} u\|^2 \right).$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|P_t u\|^2 + \sum_{j=0}^1 \int_0^t ds \|L_j P_{t-s} u\|^2 = \\ & e^{-2t\Gamma_0} \sum_n e^{-2nt(\Gamma_0+\Gamma_1)} |u_n|^2 \\ & + 2\Gamma_0 \sum_n \int_0^t ds e^{-2(t-s)(\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1))} (n+1) |u_n|^2 \\ & + 2\Gamma_1 \sum_n \int_0^t ds e^{-2(t-s)(\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1))} n |u_n|^2 \\ & = \\ & e^{-2t\Gamma_0} \sum_n e^{-2nt(\Gamma_0+\Gamma_1)} |u_n|^2 \\ & + \sum_n \frac{(n+1)\Gamma_0}{\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1)} \left(1 - e^{-2t(\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1))} \right) |u_n|^2 \\ & + \sum_n \frac{n\Gamma_1}{\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1)} \left(1 - e^{-2t(\Gamma_0+n(\Gamma_0+\Gamma_1))} \right) |u_n|^2 \\ & = \|u\|^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$0 \leq (u, T_t^{(n+1)}(X)u) \leq \|X\| \|u\|^2.$$

□

Preuve de la proposition 2.1

Preuve de (a). Elle résulte de l'inégalité établie facilement par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad T_t^{(n)} \leq X_t.$$

Preuve de (b).

On remarque que, pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et tout $u \in D$, on a :

$$(u, Gu) + (Gu, u) + \lambda^2 \sum_j \|L_j u\|^2 \leq (u, Gu) + (Gu, u) + \sum_j \|L_j u\|^2 = 0.$$

On peut alors construire la suite $({}^{(\lambda)}T_t^{(n)}(X))_n$ de la méthode itérative de Picard (2.8), associée au triplet $(G, \lambda L_0, \lambda L_1)$.

D'où :

$${}^{(\lambda)}T_t(X) = \sup_n {}^{(\lambda)}T_t^{(n)}(X).$$

On montre aisément par récurrence sur l'entier n ,

$${}^{(\lambda)}T_t^{(n)}(X) \leq T_t^{(n)}(X),$$

pour tout $\lambda \in]0, 1]$, d'où :

$$\sup_{\lambda \in]0, 1]} {}^{(\lambda)}T_t(X) \leq T_t(X).$$

Si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ alors, pour tout entier n , on obtient (par récurrence)

$${}^{(\lambda_1)}T_t^{(n)}(X) \leq {}^{(\lambda_2)}T_t^{(n)}(X).$$

Par suite,

$$X_t \equiv \sup_{\lambda \in]0, 1]} {}^{(\lambda)}T_t(X)$$

vérifie l'équation (2.7) donc d'après (a), il vient $T_t(X) \leq X_t$ et en définitive l'égalité désirée.

Reste l'unicité pour l'équation (2.10).

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe dynamique quantique satisfaisant cette équation.

Un raisonnement par récurrence sur n donne :

$$\forall \lambda \in]0, 1], \quad {}^{(\lambda)}T_t^{(n)}(X) \leq S_t(X),$$

donc ${}^{(\lambda)}T_t(X) \leq S_t(X)$.

Posons

$$\Delta_t = S_t(X) - {}^{(\lambda)}T_t(X),$$

pour tout $u \in D$ et $0 \leq s \leq t$. En tenant compte de

$$\int_0^s dr \|L_j P_{s-r} u\|^2 \leq \|u\|^2,$$

on a :

$$\begin{aligned} (u, \Delta_s u) &= \lambda^2 \sum_{j=0}^1 \int_0^s dr (L_j P_{s-r} u, \Delta_r L_j P_{s-r} u) \\ &\leq \lambda^2 \sup_{0 \leq s \leq t} \|\Delta_s\| \int_0^s dr \|L_j P_{s-r} u\|^2 \\ &\leq \lambda^2 \sup_{0 \leq s \leq t} \|\Delta_s\| \|u\|^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|\Delta_s\| \leq \lambda^2 \sup_{0 \leq s \leq t} \|\Delta_s\|.$$

Donc $\Delta_t = 0$, pour tout t . □

B.1.3 Preuve du théorème 2.1

Preuve du lemme 2.4

On considère la dualité entre les espaces de Banach \mathcal{L}^1 et $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) \times \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\rho, A) &\longmapsto \mathbf{tr}(\rho A), \end{aligned}$$

de sorte que $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)_* = \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$.

Nous avons :

$$\mathcal{D}^\perp = \{A : A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) / \forall \rho \in \mathcal{D}, \mathbf{tr}(\rho A) = 0\} = \{0\}.$$

En effet, soit $A \in \mathcal{D}^\perp$, on définit ρ par

$$\rho_{k,l} = \delta_{k,j} \delta_{i,l},$$

alors $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ et $0 = \mathbf{tr}(\rho A) = A_{i,j}$.

Ainsi $(\mathcal{D}^\perp)^\perp = \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$.

Comme $\overline{\mathcal{D}} \subset (\mathcal{D}^\perp)^\perp$, il reste à établir l'inclusion inverse.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\rho_0 \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$ et $\rho_0 \notin \overline{\mathcal{D}}$ alors le théorème de Hahn-Banach donne l'existence de $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$ et celle d'un réel α qui vérifient :

$$\forall \rho \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{tr}(\rho A) < \alpha < \mathbf{tr}(\rho_0 A).$$

Comme \mathcal{D} est un sous espace vectoriel, il en résulte que :

$$\forall \rho \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{tr}(\rho A) = 0.$$

Donc $A \in \mathcal{D}^\perp$.

Mais $\rho_0 \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s) = (\mathcal{D}^\perp)^\perp$, on aboutit à $\mathbf{tr}(\rho_0 A) = 0$ ce qui est contradictoire.

Donc $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$. □

Preuve du lemme 2.5

Preuve de (i). On considère les opérateurs bornés sur \mathfrak{H}_s ,

$$\begin{aligned} M_g(h) &= \sum_k g_k h_k |k\rangle, \\ S(h) &= \sum_k h_k |k+1\rangle, \end{aligned}$$

où $g = (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Nous obtenons, pour $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_s)$,

$$\langle k | M_g H_s^{n/2} \rho H_s^{n/2} S^D | k \rangle = g_k \rho_{k, k+D} k^{n/2} (k+D)^{n/2}.$$

On peut choisir g_k tel que :

$$g_k \rho_{k, k+D} = |\rho_{k, k+D}| \times \left(\frac{k}{k+D} \right)^{n/2}.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \sum_k k^n |f_k^{(D)}| &= \mathbf{tr}(M_g H_s^{n/2} \rho H_s^{n/2} S^D) \\ &\leq \|M_g\| \|S\|^D \mathbf{tr}(H_s^{n/2} \rho H_s^{n/2}) \\ &= 1 \times 1 \times \mathbf{tr}(\rho H_s^n), \end{aligned}$$

d'où (i).

Preuve de (ii). On a :

$$\mathbf{tr}(|\rho|) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s) \\ \|A\|=1}} |\mathbf{tr}(\rho A)|.$$

De plus, $\mathbf{tr}(\rho A) = \sum \rho_{k,l} A_{l,k}$ et $|A_{l,k}| = |\langle l | A | k \rangle| \leq 1$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(|\rho|) &\leq \sum_{k,l} |\rho_{k,l}| \\ &= \sum_k |\rho_{k,k}| + \sum_{D>0} \sum_k |\rho_{k, k+D}| + \sum_{D>0} \sum_k |\rho_{k+D, k}| \\ &= \sum_k |f_k^{(0)}| + 2 \sum_{D>0} \sum_k |f_k^{(D)}| \\ &\leq 2 \sum_{D \in \mathbb{N}} \|f^{(D)}\|_{1,0}. \end{aligned}$$

□

Preuve de (2.22)

On remarque que si $\|f^{(D)}\|_{1,0} < \infty$ alors la série entière

$$g^{(D)}(z) = \sum_k g_k^{(D)} z^k,$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

En effet :

$$e^{F_k^{(D)}} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{D!}} k^{D/2} \implies |g_k^{(D)}| \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{D!}} k^{D/2} |f_k^{(D)}|,$$

et

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D!}} k^{D/2} |f_k^{(D)}| \right)^{1/k} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{D!}} k^{D/2} \|f^{(D)}\|_{1,0} \right)^{1/k}$$

cette dernière suite tend vers 1. La formule de Cauchy du rayon de convergence montre que :

$$\frac{1}{R} \equiv \limsup_{k \rightarrow \infty} |g_k^{(D)}|^{1/k} \leq 1 \quad \text{vérifie : } R \geq 1.$$

On pose

$$g_t^{(D)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (g_t)_k^{(D)} z^k \quad \text{où} \quad \partial_t g_t^{(D)} = \mathcal{L}^{(D)} g_t^{(D)}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t (g_t)_k^{(D)} &= \Gamma_0(2(k+D))(g_t)_{k-1}^{(D)} - (2+2k+D)(g_t)_k^{(D)} \\ &\quad + \Gamma_1(2(k+1))(g_t)_{k+1}^{(D)} - (2k+D)(g_t)_k^{(D)} \\ &\quad - iSD(g_t)_k^{(D)}, \end{aligned}$$

que l'on multiplie par z^k , puis on somme de $k=1$ à $k=\infty$.

On utilise les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k(g_t)_{k-1}^{(D)} z^k &= z^2 (g_t^{(D)})'(z) + z g_t^{(D)}(z); \\ \sum_{k=1}^{\infty} (g_t)_{k-1}^{(D)} z^k &= z g_t^{(D)}(z); \\ \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(g_t)_{k+1}^{(D)} z^k &= (g_t^{(D)})'(z) - (g_t)_1^{(D)}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} (2k+D)(g_t)_{k+1}^{(D)} z^k &= 2z (g_t^{(D)})'(z) + D((g_t)^{(D)}(z) - (g_t)_0^{(D)}); \\ \sum_{k=1}^{\infty} (g_t)_k^{(D)} z^k &= g_t^{(D)}(z) - (g_t)_0^{(D)}. \end{aligned}$$

Mais, pour $k = 0$, on a :

$$\partial_t(g_t)_0^{(D)} = -\Gamma_0(2+D)(g_t)_0^{(D)} + \Gamma_1(2(g_t)_1^{(D)} - D(g_t)_0^{(D)}) - iSD(g_t)_0^{(D)},$$

ce qui donne, après toutes les simplifications, l'équation (2.22). \square

Preuve de (2.23)

Soit le système caractéristique,

$$\begin{cases} g_t^{(D)}(w) &= \alpha \times g_0^{(D)}(z); \\ w &\equiv w(t, z), w(0, z) = z; \\ \alpha &\equiv \alpha(t, z), \alpha(0, z) = 1. \end{cases}$$

avec l'équation caractéristique

$$\partial_t w = -2\Gamma_0(1-w)(\theta-w), \quad (\text{B.1})$$

dont la solution est exprimée sous la forme

$$\frac{\theta-w}{1-w} = \varepsilon \times \frac{\theta-z}{1-z}, \quad (\text{B.2})$$

ou encore

$$z = \lambda \times \frac{w_1 - w}{w_0 - w}.$$

Notons que

$$w_1 > w_0 > \theta \quad , \quad \lambda < 1,$$

et que $\lambda > 0$ dès que $t > t_0 \equiv \frac{1}{2\Gamma_0} \frac{\log(\theta)}{\theta-1}$.

L'équation de transport :

$$\partial_t \alpha = -2\Gamma_0 \left((D+1)(1-w) + D\xi \right) \alpha, \quad (\text{B.3})$$

s'écrit sous la forme

$$\partial_t \log(\alpha) = -2\Gamma_0 D\xi - (D+1)\partial_t \log(\theta-w),$$

ce qui donne

$$\alpha = e^{-Dt(\Gamma_1 - \Gamma_0 + iS)} \left(\frac{\theta-z}{\theta-w} \right)^{D+1}.$$

D'où le résultat (2.23). \square

Faisons quelques remarques sur la transformation (B.2), dite de Möbius.

Ainsi $z \equiv h(w)$ (h est une transformation homographique),

$$z = \lambda + \frac{\lambda(w_0 - w_1)}{w - w_0}.$$

A l'aide des identités,

$$\frac{1}{\rho e^{i\varphi} - w_0} = \frac{w_0}{\rho^2 - w_0^2} + \frac{\rho}{\rho^2 - w_0^2} \cdot \frac{\rho - w_0 e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi} - w_0} \quad (\rho \neq w_0),$$

$$\frac{1}{e^{i\varphi} - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \cot(\varphi/2) \quad (\varphi \neq 0[2\pi]),$$

on en déduit, pour $\rho \neq w_0$,

$$|z - \omega(\rho)| = R(\rho), \quad \omega(\rho) = \lambda + \frac{\lambda(w_1 - w_0)w_0}{w_0^2 - \rho^2}, \quad R(\rho) = \frac{\lambda(w_1 - w_0)\rho}{w_0^2 - \rho^2},$$

et pour $\rho = w_0$,

$$z = \lambda \cdot \frac{w_0 + w_1}{2w_0} - i \frac{\lambda(w_0 - w_1)}{2w_0} \cot(\varphi/2).$$

Il en résulte (voir figure B.1) que l'image du disque unité est le disque de centre $\omega(1)$ de rayon $R(1)$, contenu dans le disque unité et tangent en $z = 1$; l'image du cercle centré à l'origine de rayon w_0 , privé de w_0 est la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = \lambda \cdot \frac{w_0 + w_1}{2w_0}$.

Pour étudier le comportement asymptotique, on utilisera les résultats suivants.

Lemme B.1

Pour tout entier D et tout entier k , on a :

$$|F_k^{(D)} - \frac{D}{2} \log(k+1)| \leq \frac{1}{2} \log(D!) \equiv c_D \quad (\text{B.4})$$

Démonstration

Soit

$$u(k) = \frac{D}{2} \log(k+1) - F_k^{(D)} = \frac{1}{2} \log(x(k)), \quad x(k) \equiv D! \prod_{j=2}^D \frac{k+1}{k+j}.$$

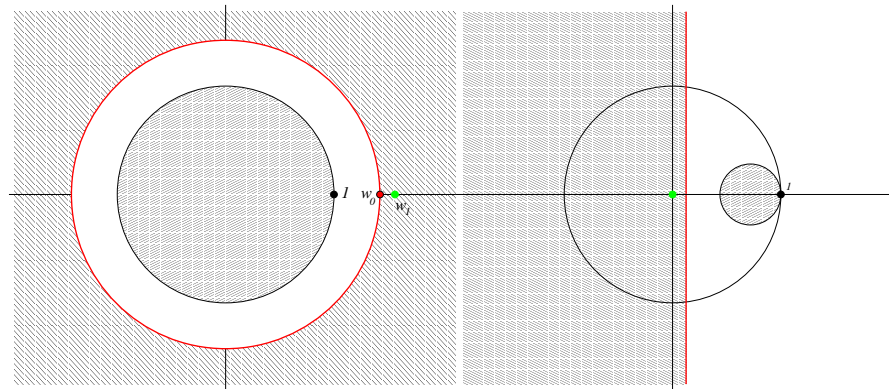
La suite $(x(k))_k$ croît puisque

$$\frac{x(k+1)}{x(k)} = \prod_{j=2}^D \frac{k^2 + (j+2)k + 2j}{k^2 + (j+2)k + 1 + j} \geq 1,$$

et $x(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} D!$, donc :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |F_k^{(D)} - \frac{D}{2} \log(k+1)| = \frac{1}{2} \log(D!).$$

□

FIGURE B.1 – Transformation $w \leftrightarrow z$

Lemme B.2

Pour $g \in \ell^1(\mathbb{N})$, on définit l'opérateur sur $\ell^1(\mathbb{N})$ par

$$(gf)(w) = g(w)f(w).$$

Alors, pour tout entier D , l'opérateur $e^{-F^{(D)}} g e^{F^{(D)}}$ est borné et

$$\|e^{-F^{(D)}} g e^{F^{(D)}}\|_{1,0} \leq \|g\|_{1,0}.$$

Démonstration

On a

$$(g e^{F^{(D)}} f)(w) = \sum_{k,l} g_l f_k e^{F_k^{(D)}} w^{k+l},$$

d'où

$$(e^{-F^{(D)}} g e^{F^{(D)}} f)(w) = \sum_{k,l} g_l f_k e^{F_k^{(D)} - F_{k+l}^{(D)}} w^{k+l},$$

la croissance de $(e^{F_k^{(D)}})_k$ donne $e^{F_k^{(D)} - F_{k+l}^{(D)}} \leq 1$.

Par suite,

$$\begin{aligned} \|e^{-F^{(D)}} g e^{F^{(D)}} f\|_{1,0} &\leq \sum_{k,l} |g_l| |f_k| e^{F_k^{(D)} - F_{k+l}^{(D)}} \\ &\leq \|g\|_{1,0} \|f\|_{1,0} \end{aligned}$$

□

Lemme B.3

Pour tout entier D et tout $R > 1$, il existe une constante $C_{D,R}$ telle que, pour toute fonction g ,

$$g(w) = \sum_{k \geq j} g_k w^k,$$

analytique dans le disque $\{|w| < R\}$ et tout r , $1 < r < R$, on a :

$$\|e^{F^{(D)}} g\|_{1,0} \leq \frac{C_{D,R}}{(r-1)^{1+D/2}} \sup_{|w|=r} |g(w)| e^{F_j^{(D)}} r^{-j}.$$

Démonstration

Par les estimations de Cauchy, on a

$$g_k = \oint_{|w|=r} \frac{g(w) dw}{w^{k+1} 2\pi i}, \quad |g_k| \leq r^{-k} \sup_{|w|=r} |g(w)|,$$

d'où :

$$\|e^{F^{(D)}} g\|_{1,0} = \sum_{k \geq j} e^{F_k^{(D)}} |g_k| \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| \sum_{k \geq j} e^{F_k^{(D)}} r^{-k}.$$

Mais de la majoration (B.4), on tire :

$$F_k^{(D)} \leq c_D + \frac{D}{2} \log(k+1).$$

Par suite, il vient :

$$\|e^{F^{(D)}} g\|_{1,0} \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| e^{c_D} \sum_{k \geq j} (k+1)^{D/2} r^{-k}.$$

On pose $\mu = D/2$ et

$$S_j = \sum_{k \geq j} k^\mu r^{-k},$$

de sorte que l'on ait :

$$\|e^{F^{(D)}} g\|_{1,0} \leq \sup_{|w|=r} |g(w)| e^{c_D} r S_{j+1}.$$

Soit β (précisé plus loin) tel que $0 < \beta < \log(r)$, on a :

$$S_j = \sum_{k \geq j} \left(k^\mu e^{-\beta k} \right) \left(e^\beta r^{-1} \right)^k \leq \sup_{t \geq 0} t^\mu e^{-\beta t} \cdot \frac{e^{\beta j} r^{-j}}{1 - e^\beta r^{-1}}.$$

De plus,

$$\sup_{t \geq 0} t^\mu e^{-\beta t} = \mu^\mu \beta^{-\mu} e^{-\mu}.$$

L'étude de la fonction $\varphi : t \mapsto \mu + t - \mu r e^{-t}$, qui est concave et dont la tangente en 0 coupe l'axe réel en $\alpha_0 = r - 1/(r + \mu^{-1})$, montre qu'il existe un unique réel α^* tel que :

$$\alpha_0 < \alpha^* < \log(r), \quad \mu + \alpha^* = \mu r e^{-\alpha^*}. \quad (\text{B.5})$$

On choisit $\beta = \alpha^*/j \leq \alpha^*$, alors, on obtient :

$$1 - e^\beta r^{-1} \geq 1 - e^{\alpha^*} r^{-1} = \frac{\alpha^*}{\mu + \alpha^*} \geq \frac{r-1}{(r + \mu^{-1})(\mu + \alpha^*)},$$

et

$$\begin{aligned} S_j &\leq \mu^\mu \beta^{-\mu} e^{-\mu} \frac{e^{\alpha^*} r^{-j} (\mu + \alpha^*) (r + \mu^{-1})}{r-1} \\ &= \mu^\mu e^{-\mu} j^\mu (\alpha^*)^{-\mu} \frac{r^{-j}}{r-1} (r + \mu^{-1}) \mu r. \end{aligned}$$

Tenant compte de (B.5), on aboutit à

$$S_j \leq \mu^{\mu+1} e^{-\mu} (R + \mu^{-1})^{\mu+1} j^\mu r^{-(j-1)} (r-1)^{-\mu-1},$$

puis, grâce à (B.4),

$$(j+1)^\mu \leq e^{c_D} e^{F_j^{(D)}},$$

on en déduit :

$$\|e^{F^{(D)}} g\|_{1,0} \leq e^{2c_D} \mu^{\mu+1} e^{-\mu} (R + \mu^{-1})^{\mu+1} R(r-1)^{-\mu-1} \sup_{|w|=r} |g(w)| e^{F_j^{(D)}} r^{-j}.$$

□

Lemme B.4

Pour tout $\mu \geq 1$, il existe une constante C_μ telle que, pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout entier k , on a :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(1+k)^{\mu-1}}{(1+j)^\mu} (1-\delta)^{k-j} \delta^j \leq C_\mu \delta^{-\mu+1}.$$

Démonstration

Cas $\mu = 1$. La formule du binôme donne :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{1}{j+1} (1-\delta)^{k-j} \delta^j \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (1-\delta)^{k-j} \delta^j = 1.$$

Cas $\mu > 1$. Soit $0 < \kappa < 1$ (précisé plus loin), on décompose la somme en trois termes :

$$A_j \equiv \binom{k}{j} \frac{(k+1)^{\mu-1}}{j+1} (1-\delta)^{k-j} \delta^j, \quad \sum_{j=0}^k A_j = A_0 + \sum_{1 \leq j \leq \kappa \delta k} A_j + \sum_{\kappa \delta k < j \leq k} A_j.$$

• Pour le premier terme,

$$A_0 = (1+k)^{\mu-1} (1-\delta)^k \leq \sup_{t \geq 0} (1+t)^{\mu-1} (1-\delta)^t.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto (\mu-1) \log(1+t) + t \log(1-\delta)$ admet un maximum pour

$$t = t_0 = \frac{\mu-1 + \log(1-\delta)}{-\log(1-\delta)}.$$

Si $\mu-1 + \log(1-\delta) \leq 0$ alors :

$$\forall t \geq 0, \varphi(t) \leq \varphi(0) = 0,$$

d'où :

$$A_0 \leq 1 \leq \delta^{-\mu+1}.$$

Si $\mu - 1 + \log(1 - \delta) > 0$ alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq \varphi(t_0) = (\mu - 1) \log\left(\frac{\mu - 1}{-\log(1 - \delta)}\right) - \underbrace{(\mu - 1 + \log(1 - \delta))}_{\leq 0} \\ e^{\varphi(t)} &\leq (\mu - 1)^{\mu - 1} \cdot \frac{1}{(-\log(1 - \delta))^{\mu - 1}}.\end{aligned}$$

Mais $-\log(1 - \delta) \geq \delta$ d'où :

$$A_0 \leq (\mu - 1)^{\mu - 1} \cdot \delta^{-\mu + 1}.$$

En posant $C_{\mu,0} = \max(1, (\mu - 1)^{\mu - 1})$, il vient :

$$A_0 \leq C_{\mu,0} \delta^{-\mu + 1}.$$

• Pour le second terme,

$$S_1 = \sum_{1 \leq k \leq \kappa \delta k} A_j,$$

on utilise l'identité

$$\binom{k}{j} = \oint_{|\xi|=r} \frac{(1 + \xi)^k}{\xi^{j+1}} \frac{d\xi}{2\pi i}, \quad r > 0.$$

De $(1 + j)^{-\mu} \leq 1$, il vient :

$$S_1 \leq (1 + k)^{\mu - 1} (1 - \delta)^k \oint_{|\xi|=r} (1 + \xi)^k \sum_{1 \leq j \leq \kappa \delta k} \left(\frac{\delta}{\xi(1 - \delta)}\right)^j \frac{d\xi}{2\pi i}.$$

Soit $r = \kappa \delta / (1 - \kappa \delta)$ alors $\delta / (r(1 - \delta)) > 1$ ce qui donne

$$S_1 \leq \kappa \delta k (1 + k)^{\mu - 1} ((1 - \delta)(1 + r))^k \left(\frac{\delta}{r(1 - \delta)}\right)^{\kappa \delta k}.$$

Mais

$$(1 - \delta)(1 + r) = \left(\kappa \cdot \frac{\delta}{r(1 - \delta)}\right)^{-1} = \frac{1 - \delta}{1 - \kappa \delta} \leq 1 - (1 - \kappa) \delta,$$

conduit à

$$S_1 \leq \kappa \delta (1 + k)^\mu e^{-k\alpha},$$

avec

$$-\alpha = (1 - \kappa \delta) \log(1 - (1 - \kappa) \delta) - \kappa \delta \log(\kappa) \leq -(1 - \kappa \delta)(1 - \kappa) \delta - \kappa \delta \log(\kappa).$$

L'inégalité $(1 - \kappa \delta)(1 - \kappa) \geq (1 - \kappa)^2$ implique

$$-\alpha \leq -((1 - \kappa)^2 + \kappa \log(\kappa)) \delta \equiv -a(\kappa) \delta.$$

La continuité de la fonction a sur $[0, 1]$ et $\lim_{\kappa \downarrow 0} a(\kappa) = 1$ et $\lim_{\kappa \uparrow 1} a(\kappa) = 0$ montrent qu'il existe κ tel que

$$0 < \kappa < 1 \text{ et } a(\kappa) = 1/2.$$

Par suite, on a :

$$S_1 \leq \kappa \delta \sup_{t \geq 0} (1+t)^\mu e^{-t\delta/2}.$$

La fonction $t \mapsto \mu \log(1+t) - \delta t/2$ atteint son maximum sur \mathbb{R}^+ pour $t = 2\mu/\delta - 1$ qui vaut $\mu \log(2\mu/\delta) - \mu + \delta/2$.

Soit

$$C_{\mu,1} = \kappa (2\mu)^\mu e^{-\mu+1/2},$$

alors

$$S_1 \leq C_{\mu,1} \delta^{-\mu+1}.$$

• Pour le troisième terme ,

$$S_2 = \sum_{\kappa\delta k < j \leq k} A_j \leq \sum_{\kappa\delta k < j \leq k} \binom{k}{j} \frac{(1+k)^{\mu-1}}{(1+\kappa\delta k)^\mu} (1-\delta)^{k-j} \delta^j.$$

On considère la fonction $\psi : t \mapsto (\mu-1)\log(1+t) - \mu\log(1+\kappa\delta t)$, on a :

$$\psi'(t) = \frac{\mu-1-\mu\kappa\delta-\kappa\delta t}{(1+t)(1+\kappa\delta t)}, \quad \psi'(0) = \mu-1-\mu\kappa\delta.$$

Si $\psi'(0) \leq 0$ alors $\psi(t) \leq \psi(0) = 0$, pour tout $t \geq 0$ et donc :

$$\sup_{t \geq 0} \frac{(1+t)^{\mu-1}}{(1+\kappa\delta t)^\mu} \leq 1 \quad \text{d'où} \quad S_2 \leq 1 \leq \delta^{-\mu+1}.$$

Si $\psi'(0) > 0$ alors

$$\psi(t) \leq \psi\left(\frac{\mu-1-\mu\kappa\delta}{\kappa\delta}\right) = \left(\frac{\mu-1}{\mu\kappa}\right)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\kappa\delta} \delta^{-\mu+1}.$$

Mais $1-\kappa\delta \geq 1-\kappa$, en posant

$$C_{\mu,2} = \max\left(1, \left(\frac{\mu-1}{\mu\kappa}\right)^{\mu-1} \cdot \frac{1}{\mu(1-\kappa)}\right),$$

on obtient :

$$S_2 \leq C_{\mu,2} \delta^{-\mu+1}.$$

En définitive, la constante $C_\mu = C_{\mu,0} + C_{\mu,1} + C_{\mu,2}$ convient. \square

Comportement asymptotique de la partie diagonale principale

On rappelle que $\rho \geq 0$ est la condition initiale de l'équation maîtresse $\partial_t \rho_t = \mathbf{L} \rho_t$ tandis que f et g désignent celles de f_t et g_t . Pour étudier le comportement asymptotique de la solution $f_t = e^{-F} g_t$, on écrit $z(t, w)$ sous la forme

$$z(t, w) = 1 - \delta + s(w) \quad , \quad \delta = \varepsilon \cdot \frac{\theta - 1}{\theta - \varepsilon} = s(1) \leq \varepsilon;$$

$$s(w) = \sum_{l \geq 1} s_l w^l.$$

Puisque $F_k^{(0)} = 0$, on a $f_t^{(0)} = g_t^{(0)}$, ainsi (2.23) permet d'obtenir

$$f_t^{(0)}(w) = \frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{w_0 - w} \cdot (f^{(0)}(1 - \delta) + r_t(w)) \equiv \tilde{f}_t(w) + \tilde{r}_t(w),$$

où

$$r_t(w) = f^{(0)}(1 - \delta + s(w)) - f^{(0)}(1 - \delta),$$

$$\tilde{f}_t(w) = \frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{w_0 - w} \cdot f^{(0)}(1 - \delta),$$

$$\tilde{r}_t(w) = \frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1}{w_0 - w} \cdot r_t(w).$$

Puisque $w_0 = \theta + \mathcal{O}(\varepsilon)$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{f}_t(w) = \frac{\theta - 1}{\theta - w} f^{(0)}(1) = \sum_k \frac{\theta - 1}{\theta^{k+1}} \times \sum_n f_n^{(0)}$$

$$\equiv f_{equ}(w) \times \mathbf{tr}(\rho).$$

De façon plus précise, en tenant compte de $0 \leq \delta \leq \varepsilon$, il vient :

$$|f^{(0)}(1) - f^{(0)}(1 - \delta)| \leq \sum_k \rho_{k,k} (1 - (1 - \delta)^k)$$

$$\leq \sum_k k \rho_{k,k} \delta \leq \varepsilon \mathbf{tr}(\rho H_s).$$

Comme $\theta < w_0$, on a facilement

$$\frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{w_0 - w} - \frac{\theta - 1}{\theta - w} = \sum_k (\theta - 1) \left(\frac{1}{w_0^{k+1}} \frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{\theta^{k+1}} \right) w^k$$

$$= \sum_k (w_0 - 1) \left(\frac{1}{w_0^{k+1}} - \frac{1}{\theta^{k+1}} \right) w^k + \sum_k (w_0 - \theta) \left(\frac{1}{\theta^{k+1}} \right) w^k$$

d'où :

$$\left\| \frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{w_0 - \cdot} - \frac{\theta - 1}{\theta - \cdot} \right\|_{1,0} \leq \left((\theta - 1) \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 \right) + \frac{w_0 - \theta}{\theta - 1} \right) \sum_k \frac{1}{\theta^{k+1}} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

De plus,

$$\left\| \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \frac{1}{w_0-\cdot} \right\|_{1,0} = \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \sum_k \frac{1}{w_0^{k+1}} = 1,$$

car $w_0 - 1 = (\theta - 1)/(1 - \varepsilon)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_t - f_{equ} \mathbf{tr}(\rho)\|_{1,0} &\leq |f^{(0)}(1) - f^{(0)}(1 - \delta)| \times \left\| \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \frac{1}{w_0-\cdot} \right\|_{1,0} \\ &\quad + |f^{(0)}(1)| \times \left\| \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \frac{1}{w_0-\cdot} - \frac{\theta-1}{\theta-\cdot} \right\|_{1,0}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\tilde{f}_t - \mathbf{tr}(\rho) \times f_{equ}\|_{1,0} \leq \varepsilon \times \left(\mathbf{tr}(\rho) + \frac{\mathbf{tr}(\rho H_s)}{1-\varepsilon} \right). \quad (\text{B.6})$$

Comme $\tilde{r}_t(w) = \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \frac{1}{w_0-w} r_t(w)$, il vient

$$\|\tilde{r}_t\|_{1,0} \leq \left\| \frac{\theta-1}{1-\varepsilon} \frac{1}{w_0-\cdot} \right\|_{1,0} \times \|r_t\|_{1,0} = \|r_t\|_{1,0}.$$

Puisque s est analytique dans le disque $|w| < w_0$ et s'annule en 0 et $s_t \geq 0$, alors on tire de

$$r_t(w) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(0)} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (1-\delta)^{k-j} \sum_{l_1, \dots, l_j \geq 1} s_{l_1} \cdots s_{l_j} w^{l_1 + \dots + l_j},$$

l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|r_t\|_{1,0} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^{(0)}| \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (1-\delta)^{k-j} \sum_{l_1, \dots, l_j \geq 1} s_{l_1} \cdots s_{l_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^{(0)}| \underbrace{\left((1-\delta + s(1))^k - (1-\delta)^k \right)}_{(1-(1-\delta)^k) \leq k\delta \leq k\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|r_t\|_{1,0} \leq \varepsilon \times \mathbf{tr}(\rho H_s). \quad (\text{B.7})$$

En définitive, l'inégalité triangulaire,

$$\|f_t - \mathbf{tr}(\rho) \times f_{equ}\|_{1,0} \leq \|\tilde{f}_t - \mathbf{tr}(\rho) \times f_{equ}\|_{1,0} + \|r_t\|_{1,0},$$

et les estimations (B.6) et (B.7) donnent :

$$\|f_t - \mathbf{tr}(\rho) \times f_{equ}\|_{1,0} \leq \varepsilon \times \left(2\mathbf{tr}(\rho H_s) + \frac{\mathbf{tr}(\rho)}{1-\varepsilon} \right) \quad (\text{B.8})$$

Comportement asymptotique des autres parties diagonales

Pour $D \geq 1$, on réécrit la solution (2.23) comme

$$f_t^{(D)} = e^{-F^{(D)}} g_t^{(D)} = \varepsilon^{D/2} e^{iSDt} e^{-F^{(D)}} G^{D+1} U^t g^{(D)},$$

où G est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$G(w) \equiv \frac{\theta - 1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{w_0 - w}, \quad (\|G\|_{1,0} = 1),$$

et U^t est l'opérateur de composition avec $z(t, w)$,

$$(U^t f)(w) \equiv f(1 - \delta + s(w)).$$

Par le lemme B.2, il vient :

$$\|f_t^{(D)}\|_{1,0} \leq \varepsilon^{D/2} \|e^{-F^{(D)}} G^{D+1} e^{F^{(D)}}\|_{1,0} \|h_t^{(D)}\|_{1,0},$$

où

$$h_t^{(D)} = e^{-F^{(D)}} U^t e^{F^{(D)}} f^{(D)}.$$

On a

$$h_t^{(D)}(w) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(D)} e^{F_k^{(D)}} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (1 - \delta)^{k-j} \sum_{l_1, \dots, l_j \geq 1} e^{-F_{l_1 + \dots + l_j}^{(D)}} s_{l_1} \dots s_{l_j} w^{l_1 + \dots + l_j},$$

tous les $s_{l_j} \geq 0$, on en déduit que :

$$\|h_t^{(D)}\|_{1,0} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^{(D)}| \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (1 - \delta)^{k-j} \sum_{l_1, \dots, l_j \geq 1} e^{F_k^{(D)} - F_{l_1 + \dots + l_j}^{(D)}} s_{l_1} \dots s_{l_j}.$$

Comme $l_1 + \dots + l_j \geq j$ et en utilisant la majoration (B.4), on obtient :

$$\sum_{l_1, \dots, l_j \geq 1} e^{F_k^{(D)} - F_{l_1 + \dots + l_j}^{(D)}} s_{l_1} \dots s_{l_j} \leq e^{2c_D} \frac{(k+1)^{D/2}}{(j+1)^{D/2}} \left(\sum_l s_l \right)^j,$$

mais $\sum_l s_l = s(1) = \delta$ et par le lemme B.4, on aboutit à

$$\begin{aligned} \|h_t^{(D)}\|_{1,0} &\leq e^{2c_D} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^{(D)}| (1+k) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(1+k)^{D/2-1}}{(1+j)^{D/2}} (1-\delta)^{k-j} \delta^j \\ &\leq C_D'' \|f^{(D)}\|_{1,1} \delta^{-D/2+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|f_t^{(D)}\|_{1,0} \leq C_D'' \|f^{(D)}\|_{1,1} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{D/2} \delta.$$

Mais

$$1 \leq \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\theta - \varepsilon}{\theta - 1} \leq \frac{\theta}{\theta - 1},$$

soit $C(D) \equiv C_D'' (\theta/(\theta - 1))^{D/2}$. Mais $\|f^{(D)}\|_{1,1} \leq \mathbf{tr}(\rho H_s) + \mathbf{tr}(\rho)$, finalement on trouve :

$$\|f_t^{(D)}\|_{1,0} \leq C(D) \mathbf{tr}((\rho + 1)H_s) \times \varepsilon.$$

Fin de la preuve du théorème

- On suppose d'abord que $\rho \in \mathcal{L}_+^1(\mathfrak{H}_s) \cap \mathcal{D}$.
Comme $\mathbf{L}\rho_{equ} = 0$ alors $e^{t\mathbf{L}}\rho_{equ} = \rho_{equ}$ d'où :

$$\Delta_t \equiv \rho_t - \rho_{equ} = e^{t\mathbf{L}}(\rho - \rho_{equ}).$$

D'après de ce qui précède, il vient l'existence d'une constante $M(d(\rho))$ telle que :

$$\begin{aligned} \|\Delta_t\|_{1,0} &= \sum_{k=0}^{\infty} |(\rho_t - \rho_{equ})_k^{(0)}| + 2 \sum_{D=1}^{d(\rho)} \sum_{k=0}^{\infty} |(\rho_t)_k^{(D)}| \\ &\leq M(d(\rho)) \times \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_s)$, on a :

$$|\mathbf{tr}(\Delta_t A)| \leq M(d(\rho)) \times \|A\| \times \varepsilon.$$

- Dans le cas général, soit $\rho \in \mathcal{L}_+^1(\mathfrak{H}_s)$. Soit $\eta > 0$, il existe $\rho(\eta) \in \mathcal{D}$ tel que $\|\rho - \rho(\eta)\|_{1,0} \leq \eta$.
En utilisant la propriété de contraction de $e^{t\mathbf{L}}$, il vient :

$$|\mathbf{tr}(\Delta_t A)| \leq |\mathbf{tr}(e^{t\mathbf{L}}(\rho(\eta) - \rho_{equ}))| + \|\rho - \rho(\eta)\|_{1,0} \|A\|.$$

D'où :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{tr}(\Delta_t A)| \leq \eta \|A\|, \quad \forall \eta > 0.$$

□

B.2 Système Spin-Boson

• Propriétés des fonctions à deux points

On rappelle que $\omega(k) = |k|$ et les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} k &\longmapsto \frac{|\rho(k)|}{|k|} = \mathcal{O}(|k|^{-\alpha}), \quad \alpha < 1 \quad \text{au voisinage de } 0; \\ t &\longmapsto h(t) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$k \longmapsto \frac{|\rho(k)|}{|k|} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

La transformation de Hilbert donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dt e^{-it\alpha} h(t) &= \frac{\widehat{h}(\alpha)}{2} - is(\alpha), \\ \text{où } \widehat{h}(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} dt e^{-it\alpha} h(t) \\ \text{et } s(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{VP} \left(\int_{\mathbb{R}} du \frac{\widehat{h}(\alpha)}{u - \alpha} \right). \end{aligned}$$

Par convergence dominée, on peut calculer $\widehat{h}(\alpha)$ grâce à

$$\widehat{h}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{+\infty} dt e^{-it(\alpha - i\varepsilon)} h(t) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^0 dt e^{-it(\alpha + i\varepsilon)} h(t).$$

Puis le Théorème de Fubini permet d'obtenir

$$\widehat{h}(\alpha) = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} dk |\rho - k|^2 \frac{\varepsilon}{(\alpha - |k|)^2 + \varepsilon^2}.$$

Au sens des distributions, on sait que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{(\alpha - |k|)^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(\alpha - |k|).$$

On suppose enfin que

$$s \longmapsto s^2 \int_{S^2} d\sigma(\hat{k}) |\rho(|s|\hat{k})|^2$$

est continue sur \mathbb{R} , alors il vient :

$$\widehat{h}(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \forall \alpha \leq 0, \\ 2\pi\alpha^2 \int_{S^2} d\sigma(\hat{k}) |\rho(\alpha\hat{k})|^2 & , \alpha > 0. \end{cases}$$

• Quelques représentations matricielles

L'opérateur de Van Hove a pour expression selon le chapitre 1,

$$\mathbf{K}(A) = [Q, A]Q_1^* - Q_1[Q, A]$$

où

$$Q_1 \equiv \int_0^{+\infty} dt e^{-itH_s} Q e^{itH_s} h(t) \quad Q \equiv S_x, H_s \equiv S_z.$$

Le calcul matriciel élémentaire fournit

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt e^{it} h(t) (S_x - iS_y) + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt e^{-it} h(t) (S_x + iS_y) \\ &= \left(\frac{\hat{h}(1)}{4} - i \frac{(s(1) + s(-1))}{2} \right) S_x + \left(\frac{(s(1) - s(-1))}{2} + i \frac{\hat{h}(1)}{4} \right) S_y. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations entre $[S_a, S_b]$ et le fait que $\{S_a, S_b\} = 0$ pour $a \neq b$ et non nuls, alors il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(S_0) &= 0 = \mathbf{K}(S_x), \\ \mathbf{K}(S_y) &= -\frac{\hat{h}(1)}{4} S_y + \frac{(s(1) - s(-1))}{2} S_x \\ \mathbf{K}(S_z) &= -\frac{\hat{h}(1)}{8} S_0 - \frac{\hat{h}(1)}{4} S_z. \end{aligned}$$

Le générateur de Davies \mathbf{K}^\sharp s'obtient avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\sharp(A) &= i[H, A] + \frac{1}{2} \left([V_1, A]V_1^* + V_1[A, V_1^*], \right. \\ H &= s(1)P_1(S_x)P_1^*(S_x) + s(-1)P_1^*(S_x)P_1(S_x), \\ &= \frac{s(1)}{8}(S_0 + 2S_z) + \frac{s(-1)}{8}(S_0 - S_z), \\ P_1(S_x) &= \frac{1}{2}(S_x + iS_y). \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^\sharp(A) &= i \frac{s(1) - s(-1)}{4} [S_z, A] \\ &+ s(1)P_1(S_x)P_1^*(S_x) + s(-1)P_1^*(S_x)P_1(S_x) \\ &= \frac{\hat{h}(1)}{8} \left([S_x + iS_y, A](S_x - iS_y) + (S_x + iS_y)[A, S_x - iS_y], \right. \end{aligned}$$

puis les mêmes relations ci-dessus permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^\sharp(S_0) &= 0, \\ \mathbf{K}^\sharp(S_x) &= -\frac{\widehat{h}(1)}{8}S_x - \frac{s(1) - s(-1)}{4}S_y, \\ \mathbf{K}^\sharp(S_y) &= \frac{s(1) - s(-1)}{4}S_x - \frac{\widehat{h}(1)}{8}S_y, \\ \mathbf{K}^\sharp(S_z) &= -\frac{\widehat{h}(1)}{8}S_0 - \frac{\widehat{h}(1)}{4}S_z.\end{aligned}$$

B.3 Représentation de Araki-Woods

B.3.1 CCR-algèbre et le théorème d'Araki-Segal

Soit \mathfrak{H} un espace de Hilbert et $\Gamma_s(\mathfrak{H})$ l'espace de Fock bosonique correspondant. On désigne par $W(f) = e^{i\Phi(f)}$ l'opérateur de Weyl où $f \in \mathfrak{H}$. On a, pour tout $(f, g) \in \mathfrak{H}^2$, les relations :

$$\begin{aligned}W(f)^* &= W(-f); \\ W(f)W(g) &= e^{-i\text{Im}(f,g)/2}W(f+g).\end{aligned}$$

A tout opérateur auto-adjoint $\omega \neq 0$ sur \mathfrak{H} , on lui associe un groupe unitaire fortement continu $U^t = \Gamma(e^{it\omega})$ sur $\Gamma_s(\mathfrak{H})$ tel que :

$$\forall f \in \mathfrak{H}, \forall t \in \mathbb{R} : U^t W(f) U^{t*} = W(e^{it\omega} f).$$

On a :

$$\{W(f), f \in \mathfrak{H}\}'' = \mathcal{B}(\Gamma_s(\mathfrak{H})),$$

et muni du groupe

$$\tau^t(A) = U^t A U^{t*},$$

on obtient un W^* -système dynamique (voir [P3]). D'une part τ^t n'est pas fortement continu sur $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ (car $d\Gamma(\omega)$ est non borné) et d'autre part cette algèbre de von Neumann est trop grosse pour décrire un gaz idéal de Bose. Soit $\mathcal{D} \subset \mathfrak{H}$ un sous espace tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{it\omega\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}.$$

On désigne par $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ la sous $*$ -algèbre de $\Gamma_s(\mathfrak{H})$ formée des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{W(f), f \in \mathcal{D}\}$ et dont $\tau^t(W(f))$ définit un groupe d'automorphismes sur $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$, mais ce n'est pas une C^* -algèbre (voir [BR2],[P3]).

On désigne par $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ la CCR algèbre (voir [BR2]) sur \mathfrak{D} comme la fermeture en norme de \mathcal{A} .

Un état ω sur $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ est entièrement déterminé par sa fonction génératrice

$$\mathfrak{D} \ni f \longmapsto s_\omega(f) \equiv \omega(W(f)).$$

Une représentation (\mathcal{H}, π) de la $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ est dite régulière si l'application,

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \pi(W(tf)),$$

est fortement continue pour tout $f \in \mathfrak{D}$.

Alors par le théorème de Stone, il existe un opérateur auto-adjoint $\Phi_\pi(f)$ sur \mathcal{H} tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \pi(W(tf)) = e^{it\Phi_\pi(f)}.$$

On dit que $\Phi_\pi(f)$ est l'opérateur du champ de Segal dans la représentation π , ce qui permet de définir les opérateurs de création a_π^* et d'annihilation a_π par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_\pi^*(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_\pi(f) - i\Phi_\pi(if)); \\ a_\pi(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_\pi(f) + i\Phi_\pi(if)). \end{aligned}$$

Un état ω sur $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ est régulier si $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ admet une représentation régulière et cyclique.

En particulier, c'est le cas lorsque la fonction génératrice s_ω vérifie la propriété de continuité : la fonction $t \longmapsto s_\omega(tf)$ est continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions génératrices d'états réguliers sur $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ ont été caractérisées par Araki-Segal.

Théorème B.1 (Araki-Segal)

Une application $\mathfrak{s} : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la fonction génératrice d'un état régulier sur $\text{CCR}(\mathfrak{D})$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

- (i) $\mathfrak{s}(0) = 1$.
- (ii) La fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathfrak{s}(tf)$ est continue pour tout $f \in \mathfrak{D}$.
- (iii) Pour tout $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathfrak{D}$ et tout $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{k,l=1}^n \mathfrak{s}(f_k - f_l) e^{-i\text{Im}(f_k, f_l)/2} \bar{z}_k z_l \geq 0.$$

B.3.2 Isomorphisme entre $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})$ et $\mathfrak{H} \otimes \bar{\mathfrak{H}}$

Soit \mathfrak{H} un espace de Hilbert complexe séparable et $(|n\rangle)_n$ une b.o.n. de \mathfrak{H} . Soit γ une conjugaison sur \mathfrak{H} (γ est anti-linéaire et $\gamma^2 = id$), on désigne par $\bar{\mathfrak{H}} = \gamma(\mathfrak{H})$ l'espace de Hilbert conjugué de \mathfrak{H} . En tant qu'ensemble on a $\mathfrak{H} = \bar{\bar{\mathfrak{H}}}$.

Selon les notations de Landau, si

$$|u\rangle = \sum \langle n|u\rangle |n\rangle,$$

alors on note

$$|\bar{u}\rangle = \sum \langle u|n\rangle |n\rangle.$$

Les opérations sur $\bar{\mathfrak{H}}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{v} &= \overline{u+v}, \\ \lambda \cdot \bar{u} &= \overline{\bar{\lambda} \cdot u}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathfrak{H}} &= \sum \langle u|n\rangle \langle n|v\rangle = \langle u|v\rangle; \\ (\bar{u}, \bar{v})_{\bar{\mathfrak{H}}} &= \sum \langle v|n\rangle \langle u|n\rangle = \langle v|u\rangle \\ &= (v, u)_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

L'isomorphisme naturel τ de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})$ sur $\mathfrak{H} \otimes \bar{\mathfrak{H}}$ est défini par

$$\tau(|u\rangle\langle v|) = u \otimes \bar{v}.$$

De plus, τ réalise une identification entre $(\mathcal{L}^2(\mathfrak{H}), (\cdot, \cdot)_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})})$ et $(\mathfrak{H} \otimes \bar{\mathfrak{H}}, (\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H} \otimes \bar{\mathfrak{H}}})$.

$$\begin{aligned} (|u\rangle\langle v|, |u'\rangle\langle v'|)_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{H})} &= \text{tr}[(|u\rangle\langle v|)^* (|u'\rangle\langle v'|)] = \langle u|u'\rangle \langle v|v'\rangle, \\ (u \otimes \bar{v}, u' \otimes \bar{v}')_{\mathfrak{H} \otimes \bar{\mathfrak{H}}} &= (u, u')_{\mathfrak{H}} (\bar{v}, \bar{v}')_{\bar{\mathfrak{H}}} = \langle u|u'\rangle \langle v|v'\rangle. \end{aligned}$$

Pour tout opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ et tout opérateur $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{B}\bar{v} &\equiv \overline{Bv} \Rightarrow \bar{B} \in \mathcal{L}(\bar{\mathfrak{H}}); \\ \tau(A|u\rangle\langle v|B^*) &= Au \otimes \bar{B}\bar{v}; \\ \tau^* &= \tau^{-1}. \end{aligned}$$

B.3.3 Construction de Chaiken & Araki-Woods

Si B est un opérateur auto-adjoint tel que $B \geq I$ sur \mathfrak{H} de domaine dense \mathcal{D} .

On pose

$$A = \frac{1}{2}(B^2 - I),$$

et on suppose que A commute avec la conjugaison γ .

Selon la construction donnée par Chaiken ([AW], [CH], [LP]), soit \mathfrak{H}' la fermeture de l'image de $A^{1/2}$ dans \mathfrak{H} et soit $\mathcal{H} = \Gamma_s(\mathfrak{H})$ l'espace de Fock symétrique construit sur \mathfrak{H} de vide Ω et $\mathcal{H}' = \Gamma_s(\mathfrak{H}')$.

Pour tout $f \in \mathcal{D}$ alors $(I+A)^{1/2}f$ et $A^{1/2}\bar{f}$ sont bien définis, on peut définir l'opérateur \widetilde{W}_{AW} sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ par

$$\widetilde{W}_{AW}(f) = W((I+A)^{1/2}f) \otimes W(A^{1/2}\bar{f}).$$

De plus

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad (\Omega \otimes \Omega, \widetilde{W}_{AW}(f)\Omega \otimes \Omega) = e^{-\frac{1}{4}\|Bf\|^2}.$$

On considère dans $\mathcal{B}(\Gamma_s(\mathfrak{H}))$, la sous \mathbf{C}^* -algèbre \mathcal{A} formée des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{W(f) : f \in \mathcal{D}\}$, on note par $\text{CCR}(\mathcal{D})$ la fermeture de \mathcal{A} .

Soit ω l'état défini sur $\text{CCR}(\mathcal{D})$ par sa fonction génératrice

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad \mathfrak{s}(f) = \omega(W(f)) = e^{-\frac{1}{4}\|Bf\|^2}$$

Selon la représentation d'Araki-Woods, il existe une représentation régulière et cyclique $(\mathcal{H}_{AW}, \pi_{AW}, \Omega_{AW})$ de l'algèbre \mathcal{A} des observables de Weyl engendrée par $\{W(f), f \in \mathcal{D}\}$ telle que :

$$\pi_{AW}(W(f)) : X \longmapsto W((I+A)^{1/2}f)XW(A^{1/2}f), \quad X \in \mathcal{H}_{AW}; \quad (\text{B.9})$$

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad (\Omega_{AW}, W_{AW}(f)\Omega_{AW}) = e^{-\frac{1}{4}\|Bf\|^2}; \quad (\text{B.10})$$

où on a posé

$$\pi_{AW}(W(f)) \equiv W_{AW}(f) \equiv e^{i\Phi_{AW}(f)},$$

et

$$\Phi_{AW}(f)X = \phi((I+A)^{1/2}f)X + X\phi(A^{1/2}f).$$

La dynamique est définie en termes de la seconde quantification $d\Gamma(\omega)$ de l'hamiltonien ω d'une particule sur \mathfrak{H} qui satisfait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it\omega}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}.$$

Ainsi :

$$e^{itH}W(f)e^{-itH} = W(e^{it\omega}f).$$

De plus le liouvillien L satisfait les conditions habituelles

$$\begin{aligned} \pi_{AW}(e^{itH}Me^{-itH}) &= e^{itL}\pi_{AW}(M)e^{-itL}, \\ L\Omega_{AW} &= 0. \end{aligned}$$

On considère l'algèbre des observables

$$\mathcal{M} = \pi_{\text{AW}}(\mathcal{A})''.$$

On désigne par Δ et J l'opérateur modulaire et la conjugaison modulaire associées à $(\mathcal{M}, \Omega_{\text{AW}})$ et par π^\sharp la représentation anti-linéaire de \mathcal{M} sur le commutant \mathcal{M}' définie par

$$\pi^\sharp(A) = J\pi(A)J.$$

Nous avons d'abord.

Proposition B.1

Pour tout $(f, g) \in \mathfrak{D}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} W_{\text{AW}}(f)W_{\text{AW}}(g) &= e^{-i\text{Im}(f,g)/2}W_{\text{AW}}(f+g); \\ (\Omega_{\text{AW}}, W_{\text{AW}}(f)\Omega_{\text{AW}}) &= e^{-\frac{1}{4}\|Bf\|^2}; \\ [\phi_{\text{AW}}(f), \phi_{\text{AW}}(g)] &= i\text{Im}(f, g)\mathbb{I}; \\ W_{\text{AW}}(f)\phi_{\text{AW}}(g)W_{\text{AW}}(f)^* &= \phi_{\text{AW}}(g) - \text{Im}(f, g) \cdot \mathbb{1}. \end{aligned}$$

La fonction à deux points satisfait

$$(\Omega_{\text{AW}}, \phi_{\text{AW}}(f)\phi_{\text{AW}}(g)\Omega_{\text{AW}}) = \frac{1}{2}\{((1+A)f, g) + (Ag, f)\}. \quad (\text{B.11})$$

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned} W_{\text{AW}}(g)(X) &= W((I+A)^{1/2}g)XW(A^{1/2}g) \\ W_{\text{AW}}(f)W_{\text{AW}}(g)(X) &= W((I+A)^{1/2}f)W((I+A)^{1/2}g)X \\ &\quad W(A^{1/2}g)W(A^{1/2}f) \\ &= e^{-i\text{Im}((I+A)^{1/2}f, (I+A)^{1/2}g)/2} \\ &\quad W((I+A)^{1/2}(f+g))X \\ &\quad e^{-i\text{Im}(A^{1/2}f, A^{1/2}g)/2}W(A^{1/2}(f+g)) \\ &= e^{-i\text{Im}((I+A)f, g) + (g, Af)/2}W((I+A)^{1/2}(f+g)) \\ &\quad XW(A^{1/2}(f+g)). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \text{Im}((I+A)f, g) + (g, Af) &= \frac{1}{2i}((I+A)f, g) - (g, (I+A)f) + (g, Af) - (Af, g) \\ &= \frac{1}{2i}((f, g) - (g, f)) \\ &= \text{Im}((f, g)) \end{aligned}$$

d'où :

$$W_{\text{AW}}(f)W_{\text{AW}}(g)(X) = e^{-i\text{Im}((f,g))/2}W_{\text{AW}}((f+g))(X).$$

□

B.3.4 Relations CCR-AW. Fonctions à deux points

Introduisons quelques notations

$$\begin{aligned} a_{\text{A}}(f)X &= a(\sqrt{\text{I}+\text{A}}f)X + Xa(\sqrt{\text{A}}f); \\ a_{\text{A}}^*(f)X &= a^*(\sqrt{\text{I}+\text{A}}f)X + Xa^*(\sqrt{\text{A}}f); \\ a_{\text{A}}^{\sharp}(f) &= \text{J}a_{\text{A}}(f)\text{J} \quad (\text{linéaire}); \\ a_{\text{A}}^{*\sharp}(f) &= \text{J}a_{\text{A}}^*(f)\text{J} \quad (\text{anti-linéaire}). \end{aligned}$$

De sorte que l'on ait classiquement

$$\Phi_{\text{A}}(f) = 2^{-1/2}(a_{\text{A}}(f) + a_{\text{A}}^*(f)) \quad , \quad \Phi_{\text{A}}^{\sharp}(f) = 2^{-1/2}(a_{\text{A}}^{\sharp}(f) + a_{\text{A}}^{*\sharp}(f)).$$

Utilisant les relations CCR de a et a^* , on obtient aisément les relations dites CCR-AW pour a_{A} et a_{A}^* :

$$\begin{aligned} [a_{\text{A}}(f), a_{\text{A}}(g)] &= 0 = [a_{\text{A}}^*(f), a_{\text{A}}^*(g)]; \\ [a_{\text{A}}(f), a_{\text{A}}^*(g)] &= (f, g) \mathbb{1}; \\ [\Phi_{\text{A}}(f), \Phi_{\text{A}}(g)] &= i\text{Im}(f, g) \mathbb{1}; \\ e^{itL} a_{\text{A}}^*(f) e^{-itL} &= a_{\text{A}}^*(e^{it\omega} f); \end{aligned}$$

et les relations CCR-AW duales

$$\begin{aligned} [a_{\text{A}}^{\sharp}(f), a_{\text{A}}^{\sharp}(g)] &= 0 = [a_{\text{A}}^{*\sharp}(f), a_{\text{A}}^{*\sharp}(g)]; \\ [a_{\text{A}}^{\sharp}(f), a_{\text{A}}^{*\sharp}(g)] &= \overline{(f, g)} \mathbb{1}; \\ [\Phi_{\text{A}}^{\sharp}(f), \Phi_{\text{A}}^{\sharp}(g)] &= -i\text{Im}(f, g) \mathbb{1}; \\ e^{itL} a_{\text{A}}^{*\sharp}(f) e^{-itL} &= a_{\text{A}}^*(e^{it\omega} f). \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du fait que les opérateurs J et iL commutent. Les deux représentations donnent des champs de Weyl indépendants grâce aux relations

$$[a_{\text{A}}(f), a_{\text{A}}^{\sharp}(g)] = 0 = [a_{\text{A}}(f), a_{\text{A}}^{*\sharp}(g)] \quad , \quad [\Phi_{\text{A}}(f), \Phi_{\text{A}}^{\sharp}(g)] = 0.$$

Les calculs des huit fonctions à deux points non nulles,

$$\langle a_A^i(f) a_A^j(g) \rangle = (\Omega_A, a_A^i(f) a_A^j(g) \Omega_A) = \mathbf{Tr}((\Omega_A)^* a_A^i(f) a_A^j(g) \Omega_A),$$

sont donnés pour tout $(i, j) \in \{\cdot, *, \sharp, * \sharp\}^2$ dans la proposition suivante. Ils utilisent les propriétés de la théorie modulaire (la conjugaison modulaire J est anti-unitaire, $\Delta^z \Omega = \Omega$, $J \Omega = \Omega$) ce qui permet d'obtenir.

Proposition B.2

Pour tous les éléments f et g de \mathfrak{D} et pour tout $(i, j) \in \{\cdot, *, \sharp, * \sharp\}^2$, alors

$$a_A^i(f) a_A^j(g) \Omega_{AW}$$

sont des éléments de \mathcal{H}_r .

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \langle a_A(f) a_A^*(g) \rangle &= ((I+A)f, g) & ; & \quad \langle a_A^*(f) a_A(g) \rangle = (Ag, f); \\ \langle a_A^\sharp(f) a_A^{*\sharp}(g) \rangle &= ((I+A)g, f) & ; & \quad \langle a_A^{*\sharp}(f) a_A^\sharp(g) \rangle = (Af, g); \\ \langle a_A(f) a_A^\sharp(g) \rangle &= (\sqrt{A}f, \sqrt{I+Ag}) & ; & \quad \langle a_A^*(f) a_A^{*\sharp}(g) \rangle = (\sqrt{I+Ag}, \sqrt{A}f); \\ \langle a_A^\sharp(f) a_A(g) \rangle &= (\sqrt{A}g, \sqrt{I+Af}) & ; & \quad \langle a_A^{*\sharp}(f) a_A^*(g) \rangle = (\sqrt{I+Af}, \sqrt{A}g). \end{aligned}$$

Tous les autres calculs sont nuls.

Démonstration

Puisque $\Omega_{AW} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$, grâce à $a(h)|\Omega\rangle = 0$ nous avons, par exemple

$$a_A(g) \Omega_{AW} = |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g)$$

puis tenant compte de $[a(h), a^*(k)] = (h, k) \cdot I$, il vient en particulier

$$a(h) a^*(k) \Omega = (h, k) \Omega.$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_A^*(f) a_A(g) \Omega_{AW} &= a^*(\sqrt{I+Af}) |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g) \\ &+ |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g) a^*(\sqrt{A}f) \\ &= a^*(\sqrt{I+Af}) |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g) \\ &+ |\Omega\rangle (|a(\sqrt{A}f) a^*(\sqrt{A}g) \Omega\rangle)^* \\ &= a^*(\sqrt{I+Af}) |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g) \\ &+ |\Omega\rangle ((\sqrt{A}f, \sqrt{A}g) |\Omega\rangle)^* \\ &= a^*(\sqrt{I+Af}) |\Omega\rangle\langle\Omega| a(\sqrt{A}g) \\ &+ (\sqrt{A}g, \sqrt{A}f) |\Omega\rangle\langle\Omega|. \end{aligned}$$

Ce qui donne le premier point et la seconde égalité

$$\langle a_A^*(f)a_A(g) \rangle = (\sqrt{A}g, \sqrt{A}f) = (Ag, f).$$

Les autres égalités se traitent de la même façon. \square

B.3.5 Démonstration du théorème 2.3

En tenant compte de

$$e^{itL_r}\Phi_A(\alpha)e^{-itL_r} = \Phi_A(e^{it\omega}\alpha) \quad , \quad \{J_r, L_r\} = 0, [J_r, iL_r] = 0$$

et identifiant $\pi_s(A)$ à $\pi_s(A) \otimes I$, il vient :

$$\begin{aligned} K_2(\pi_s(A)) &= \int_0^\infty dt \pi_s(\tau_s^{-t}(Q))\pi_s(A)\pi_s(Q') \langle \Phi_A(\alpha)\Phi_A(e^{it\omega}\alpha') \rangle \\ &+ \int_0^\infty dt \pi_s(Q)\pi_s(A)\pi_s(\tau_s^{-t}(Q')) \langle \Phi_A(e^{it\omega}\alpha)\Phi_A(\alpha') \rangle \\ &- \int_0^\infty dt \pi_s(\tau_s^{-t}(Q))\pi_s(Q)\pi_s(A) \langle \Phi_A(\alpha)\Phi_A(e^{it\omega}\alpha) \rangle \\ &- \int_0^\infty dt \pi_s(A)\pi_s(Q')\pi_s(\tau_s^{-t}(Q')) \langle \Phi_A(e^{it\omega}\alpha')\Phi_A(\alpha') \rangle. \end{aligned}$$

Mais, pour tout $M \in \mathcal{M}_s$ et pour tout $\mu \in \sigma(L_s)$, on a :

$$\begin{aligned} M_{-\mu} &= M_\mu^*; \\ \tau_s^t(M) &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} e^{it\mu} M_\mu. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} K_2(\pi_s(A)) &= \sum_\mu \left(\int_0^\infty dt h(t)e^{-it\mu} \right) \pi_s(Q_\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q') \\ &+ \sum_\mu \left(\int_0^\infty dt h(-t)e^{it\mu} \right) \pi_s(Q) \pi_s(A) \pi_s(Q'_{-\mu}) \\ &- \sum_\mu \left(\int_0^\infty dt c(t)e^{-it\mu} \right) \pi_s(Q_\mu) \pi_s(Q) \pi_s(A) \\ &- \pi_s(A) \sum_\mu \left(\int_0^\infty dt c'(t)e^{it\mu} \right) \pi_s(Q') \pi_s(Q'_{-\mu}), \end{aligned}$$

et pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_s^2$, on a :

$$\begin{aligned} e^{itL_s}\pi_s(M)\pi_s(N)e^{-itL_s} &= \pi_s(\tau_s^t(M))\pi_s(\tau_s^t(N)); \\ e^{-itL_s}\pi_s(A) &= \pi_s(\tau_s^{-t}(A))e^{-itL_s}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e^{itL_s} \mathbf{K}_2 e^{-itL_s} \pi_s(A) = e^{itL_s} \mathbf{K}_2 \pi_s(\tau_s^{-t}(A)) \pi_s(A) e^{-itL_s},$$

il en résulte, en estimant le premier terme de \mathbf{K}_2^\sharp , que :

$$\begin{aligned} e^{itL_s} \pi_s(Q_\mu) \pi_s(\tau_s^{-t}(A)) \pi_s(Q') e^{-itL_s} &= \pi_s(\tau_s^t(Q_\mu)) \pi_s(A) \pi_s(\tau_s^t(Q')) \\ &= \sum_{\nu} e^{it(\mu+\nu)} \pi_s(Q_\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q'_\nu), \end{aligned}$$

soit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{itL_s} \pi_s(Q_\mu) \pi_s(\tau_s^{-t}(A)) \pi_s(Q') e^{-itL_s} = \pi_s(Q_\mu) \pi_s(A) \pi_s(Q'_{-\mu}).$$

Les trois autres termes de \mathbf{K}_2^\sharp se traitent de la même façon, ce qui permet d'obtenir la décomposition désirée. \square

B.4 Ergodicité : preuve du théorème 2.4

Nous avons le résultat immédiat suivant.

Lemme B.5

Pour tout $\mu \in \sigma(L_s)$, on a :

$$\begin{aligned} Q_\mu^* Q_\mu &= \sum_{\substack{i,f \\ E_f - E_i = \mu}} P_f Q P_i Q P_f; \\ Q_\mu Q_\mu^* &= \sum_{\substack{i,f \\ E_f - E_i = \mu}} P_i Q P_f Q P_i. \end{aligned}$$

Il en résulte que \mathbf{H} commute avec toute matrice de densité exprimée comme une fonction de H_s .

La relation KMS donne

$$\forall \mu \in \sigma(L_s) \quad , \quad e^{-\beta\mu/2} Q_\mu^* \rho_e Q_\mu = \rho_e Q_\mu^* Q_\mu.$$

Donc

$$\mathbf{L}(\rho_e) = 0,$$

où $\mathbf{L} = \mathbf{K}^{\sharp*}$.

Ainsi l'existence d'un état normal et Λ -invariant est obtenue. Ce qui prouve la proposition 2.9.

Le début de la démonstration consiste à une série de résultats préliminaires.

Les égalités remarquables suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \sigma(L_s) \quad , \quad Q_\mu &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-it\mu} \tau_s^t(Q); \\ \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \tau_s^t(Q) &= \sum_{\mu \in \sigma(L_s)} e^{it\mu} P_\mu(Q); \end{aligned}$$

permettent d'obtenir.

Proposition B.3

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \in \mathcal{S}'$;
- (ii) $\forall t \in \mathbb{R} : [A, \tau_s^t(Q)] = [A, Q]$.

Donnons quelques résultats utilisés dans la suite.

Corollaire B.1

La famille $(T_n)_{n \geq 1}$ d'opérateurs auto-adjoints définie par,

$$T_1 = i[H_s, Q] \quad , \quad T_{n+1} = i[H_s, T_n],$$

vérifie, pour tout $A \in \mathcal{S}'$:

- (iii) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad : [A, \tau_s^t(T_n)] = 0$;
- (iv) $\forall n \geq 1 : [A, T_n] = 0$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n .

En dérivant (ii), on obtient $[A, \tau_s^t(T_1)] = 0$. Puis $t = 0$ donne donc $[A, T_1] = 0$.

La relation,

$$[A, \tau_s^t(T_{n+1})] = \frac{d}{dt} \left([A, \tau_s^t(T_n)] \right),$$

achève la preuve. □

Corollaire B.2

La restriction de τ_s à \mathcal{S}' est un \mathbf{C}^* -automorphisme de \mathcal{S}' .

En particulier, on en déduit que les assertions suivantes :

- (v) $\forall A \in \mathcal{S}' \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad : [A, \tau_s^t(T_n)] = 0$;
- (vi) $\forall A \in \mathcal{S}' \quad \forall n \geq 1 : [A, T_n] = 0$;

sont équivalentes.

Démonstration

Seule la stabilité est à établir.

Soit $A \in \mathcal{S}'$, en utilisant **(ii)**, on a, pour tout $(u, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} [\tau_s^u(A), \tau_s^t(Q)] &= \tau_s^u([A, \tau_s^{t-u}(Q)]) \\ &= \tau_s^u([A, Q]) \\ &= \tau_s^u([A, \tau_s^{-u}(Q)]) \\ &= [\tau_s^u(A), Q], \end{aligned}$$

donc $\tau_s^u(A) \in \mathcal{S}'$.

Le second point résulte alors de l'identité :

$$\forall A \in \mathcal{S}' \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad : [A, \tau_s^t(T_n)] = \tau_s^t([\tau_s^{-t}(A), T_n]).$$

□

Lemme B.6

Sous l'hypothèse **(H)** $\forall n \exists \lambda_n \in \mathbb{R} / P_n Q P_n = \lambda_n P_n$, on a :

$$\{H_s\}' \cap \{Q\}' = \{H_s\}' \cap \{T_1\}'.$$

Démonstration

Il est clair que si A commute avec H_s et Q alors A commute avec toute fonction de H_s et de Q , en particulier avec T_1 .

Inversement soit A commutant avec H_s et T_1 . L'identité de Jacobi,

$$[A, [H_s, Q]] + [H_s, [Q, A]] + [Q, [A, H_s]] = 0,$$

donne $[H_s, [Q, A]] = 0$. Mais toute observable M qui commute avec H_s est de la forme

$$M = \sum_n P_n M P_n,$$

puisque $P_n [M, H_s] P_n = (E_m - E_n) P_n M P_n$ alors :

$$A = \sum_n P_n A P_n \quad , \quad [A, Q] = \sum_n P_n [A, Q] P_n.$$

L'hypothèse **(H)** montre que $P_n [A, Q] P_n = [A, P_n Q P_n] = \lambda_n [A, P_n] = 0$, d'où $[A, Q] = 0$. □

Lemme B.7

Les hypothèses **(H2)** et **(H3)** impliquent :

$$\{H_s\}' \cap \{Q^N\}' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$$

En particulier

$$\{H_s\}' \cap \{Q\}' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$$

Démonstration

On a $g(n) = 1$, $P_n = |n\rangle\langle n|$, pour tout n .

Soit A qui commute avec H_s et Q^N :

$$A = \langle 0|A|0\rangle |0\rangle\langle 0| + \sum_{n \geq 1} \langle n|A|n\rangle |n\rangle\langle n|.$$

L'hypothèse **(H2)** donne, pour tout $n \neq m$, $\langle n|A|n\rangle = \langle m|A|m\rangle$ car :

$$0 = \langle n|[A, Q^N]|m\rangle = (\langle n|A|n\rangle - \langle m|A|m\rangle) \langle n|Q^N|m\rangle.$$

D'où : $A = \langle 0|A|0\rangle \cdot \mathbb{1}$.

L'inclusion,

$$\{H_s\}' \cap \{Q\}' \subset \{H_s\}' \cap \{Q^N\},$$

établit le second point. □

Remarquons que **(H3)** implique que **(H)** est satisfaite.

La fin de la démonstration du théorème 2.4 comporte les 6 étapes suivantes.

Étape 1. Soit $A \in \mathcal{S}'$ alors $\bar{A} \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, où :

$$\bar{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t dr \tau_s^r(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle |n\rangle\langle n|.$$

Comme $\tau_s^r(A) \in \mathcal{S}'$, le corollaire B.1 montre que $[\bar{A}, T_1] = 0$ de plus $[\bar{A}, H_s] = 0$, les lemmes précédents donnent le résultat annoncé.

Étape 2. $\forall A \in \mathcal{S}' \forall n \in \mathbb{N} \langle n|A|n\rangle = \langle 0|A|0\rangle$.

En effet, pour tout n , $\langle n|A|n\rangle = \langle n|\bar{A}|n\rangle = \langle 0|\bar{A}|0\rangle = \langle 0|A|0\rangle$.

Étape 3. $\forall A \in \mathcal{S}' \forall \rho_s = f(H_s)$, matrice de densité, on a

$$\omega_{\rho_s}(A) = \langle 0|A|0\rangle,$$

où

$$\omega_{\rho_s}(M) = \mathbf{tr}(\rho_s M) = \sum f(E_n) \langle n|M|n\rangle.$$

En effet :

$$\omega_{\rho_s}(A) = \sum f(E_n) \langle n|A|n\rangle = \left(\sum f(E_n) \right) \langle 0|A|0\rangle = 1 \times \langle 0|A|0\rangle.$$

Étape 4. Soient A et B deux éléments de \mathcal{S}' , pour tout $\gamma > 0$ et pour tout entier n , il vient :

$$\sum_k e^{-\gamma(E_k - E_n)} \langle n|A|k \rangle \langle k|B|n \rangle = \langle n|BA|n \rangle. \quad (\text{B.12})$$

Soit ω_γ l'état défini par

$$\omega_\gamma(M) = Z_\gamma^{-1} \text{tr}(e^{-\gamma H_s} M) \quad , \quad Z_\gamma = \text{tr}(e^{-\gamma H_s}),$$

c'est un (τ_s, γ) -KMS état, alors on sait (voir par exemple[BR2]) qu'il existe une fonction $F_{A,B}$ à valeurs complexes, analytique dans

$$\mathfrak{D}_\gamma = \{z : z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(z) < \gamma\},$$

bornée et continue dans $\overline{\mathfrak{D}_\gamma}$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad F_{A,B}(t) &= \omega_\gamma(A\tau_s^t(B)); \\ F_{A,B}(t + i\gamma) &= \omega_\gamma(\tau_s^t(B)A). \end{aligned}$$

En particulier, la condition aux bords s'écrit :

$$F_{A,B}(i\gamma) = \omega_\gamma(A\tau_s^{i\gamma}(B)) = \omega_\gamma(BA).$$

De l'étape 3), il en résulte que cette égalité donne pour tout entier n :

$$\langle n|A\tau_s^{i\gamma}(B)|n \rangle = \langle n|BA|n \rangle,$$

soit

$$\sum_k e^{-\gamma(E_k - E_n)} \langle n|A|k \rangle \langle k|B|n \rangle = \langle n|BA|n \rangle.$$

Étape 5. $\forall A \in \mathcal{S}'$, $\forall k \geq 1 \implies \langle 0|A|k \rangle = 0$.

L'égalité (B.12) donne en choisissant $n = 0$:

$$\langle 0|A|0 \rangle \langle 0|B|0 \rangle + \sum_{k \geq 1} e^{-\gamma(E_k - E_0)} \langle 0|A|k \rangle \langle k|B|0 \rangle = \langle 0|BA|0 \rangle.$$

De $E_k - E_0 \geq E_1 - E_0 > 0$, pour tout $k \geq 1$, il vient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \geq 1} e^{-\gamma(E_k - E_0)} \langle 0|A|k \rangle \langle k|B|0 \rangle \right|^2 &\leq e^{-2\gamma(E_1 - E_0)} \left(\sum_{k \geq 1} |\langle 0|A|k \rangle|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{k \geq 1} |\langle k|B|0 \rangle|^2 \right) \\ &\leq e^{-2\gamma(E_1 - E_0)} \langle 0|AA^*|0 \rangle \langle 0|BB^*|0 \rangle. \end{aligned}$$

En faisant tendre γ vers $+\infty$, on obtient :

$$\langle 0|A|0 \rangle \langle 0|B|0 \rangle = \langle 0|BA|0 \rangle .$$

Donc de **l'étape 2)**, il en résulte :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \langle n|A|n \rangle \langle n|B|n \rangle = \langle n|BA|n \rangle .$$

En choisissant $B = A^*$, $|\langle 0|A|0 \rangle|^2 = \langle 0|A^*A|0 \rangle$, il vient :

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\gamma E_k} |\langle 0|A|k \rangle|^2 = 0 .$$

D'où : $\langle 0|A|k \rangle = 0$, pour tout entier $k \geq 1$.

Étape 6. $\forall A \in \mathcal{S}' , \forall (k, n), k \neq n \implies \langle n|A|k \rangle = 0$.

Soit $B = A^*$, $|\langle n|A|n \rangle|^2 = \langle n|A^*A|n \rangle$.

La relation (B.12) donne

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\gamma(E_k - E_n)} |\langle n|A|k \rangle|^2 = |\langle n|A|n \rangle|^2$$

soit $\sum_{k \geq 1, k \neq n} e^{-\gamma(E_k - E_n)} |\langle n|A|k \rangle|^2 = 0$.

D'où :

$$\forall (k, n), \quad k \neq n \implies \langle n|A|k \rangle = 0 .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n,k} \langle n|A|k \rangle |n \rangle \langle k| \\ &= \sum_n \langle n|A|n \rangle |n \rangle \langle n| \\ &= \langle 0|A|0 \rangle \sum_n |n \rangle \langle n| = \langle 0|A|0 \rangle \cdot \mathbb{1} . \end{aligned}$$

□

Annexe C

Annexe du chapitre 3

C.1 Preuve du théorème 3.3

Elle comporte plusieurs étapes.
On effectue le calcul de K_ν avec l'expression ci-dessus de U .
avec l'hypothèse,

$$\bar{f}g = \bar{h}k,$$

qui est réalisée pour les deux cas particuliers considérés de sorte que l'on ait :

$$d(t) = \overline{c(t)}.$$

Les fonctions à deux points non nulles intervenant dans le calcul de $\alpha_\mu^t(U)$ sont obtenues grâce à la proposition B.2 :

$$\begin{aligned} a(t) &= \langle \Omega_r | a_A(f) a_A^\sharp(e^{it\omega} h) + a_A^*(g) a_A^{\sharp*}(e^{it\omega} k) | \Omega_r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{\varrho(1+\varrho)} (\bar{f}h e^{it\omega} + \bar{k}g e^{-it\omega}); \\ b(t) &= \langle \Omega_r | a_A^\sharp(h) a_A(e^{it\omega} f) + a_A^{\sharp*}(k) a_A^*(e^{it\omega} g) | \Omega_r \rangle \\ &= a(-t); \\ c(t) &= \langle \Omega_r | a_A(f) a_A^*(e^{it\omega} g) + a_A^*(g) a_A(e^{it\omega} f) | \Omega_r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \bar{f}g ((1+\varrho) e^{it\omega} + \varrho e^{-it\omega}); \\ d(t) &= \langle \Omega_r | a_A^\sharp(h) a_A^{\sharp*}(e^{it\omega} k) + a_A^{\sharp*}(k) a_A^\sharp(e^{it\omega} h) | \Omega_r \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \bar{k}h ((1+\varrho) e^{-it\omega} + \varrho e^{it\omega}). \end{aligned}$$

L'hypothèse

$$\bar{f}g = \bar{h}k,$$

fournit alors une première décomposition de K_ν^μ , soit :

$$\begin{aligned} K_\nu^\mu &= \sum_{\nu} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} a(t) e^{-it(\mu-\nu)} \right) \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(Q) \mathbf{1}_\nu^s \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s \\ &+ \sum_{\nu} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} a(-t) e^{-it(\mu-\nu)} \right) \mathbf{1}_\mu^s \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\nu^s \pi_s(Q) \mathbf{1}_\mu^s \\ &- \sum_{\nu} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} c(t) e^{-it(\mu-\nu)} \right) \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(Q) \mathbf{1}_\nu^s \pi_s(Q) \mathbf{1}_\mu^s \\ &- \sum_{\nu} \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} d(t) e^{-it(\mu-\nu)} \right) \mathbf{1}_\mu^s \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\nu^s \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s. \end{aligned}$$

Une seconde façon d'exprimer cet opérateur est d'utiliser les propriétés spectrales de L_s , d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\mu^s e^{-itL_s} \pi_s(Q) e^{itL_s} \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s &= \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(e^{-itH_s} Q e^{itH_s}) \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s \\ &= \sum_{\nu} e^{-it\nu} \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s; \\ Q_\nu &= \sum_{\substack{n,m \\ E_n - E_m = \nu}} P_n Q P_m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q') \mathbf{1}_\mu^s &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{itL_s} \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q') e^{-itL_s} \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \pi_s(e^{itH_s} Q_\nu e^{-itH_s}) \right. \\ &\quad \left. \pi_s^\#(e^{itH_s} Q' e^{-itH_s}) \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q') \right\} \mathbf{1}_\mu^s. \end{aligned}$$

On a utilisé les égalités suivantes :

$$e^{itH_s} A_\nu e^{-itH_s} = e^{it\nu} A_\nu, \quad \pi^\#(\lambda B) = \bar{\lambda} \pi^\#(B)$$

et de même, mais en utilisant que la linéarité de π :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\mu^s \pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q) \mathbf{1}_\mu^s &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{itL_s} \pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q) e^{-itL_s} \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q_{-\nu}) \right\} \mathbf{1}_\mu^s. \end{aligned}$$

D'où le calcul de K_ν^μ est :

$$\begin{aligned} K_\nu^\mu &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \sum_\nu \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} a(t) e^{-it\nu} \right) \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q'_\nu) \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &\quad \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \sum_\nu \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} a(-t) e^{it\nu} \right) \pi_s^\#(Q'_\nu) \pi_s(Q_\nu) \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &\quad - \mathbf{1}_\mu^s \left(\sum_\nu \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} c(t) e^{-it\nu} \right) \pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q_{-\nu}) \right) \mathbf{1}_\mu^s \\ &\quad - \mathbf{1}_\mu^s \left(\sum_\nu \left(\int_0^{+\infty} dt e^{-t0} d(t) e^{it\nu} \right) \pi_s^\#(Q'_\nu) \pi_s^\#(Q'_{-\nu}) \right) \mathbf{1}_\mu^s. \end{aligned}$$

Utilisant la relation

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathbf{VP}(x^{-1}) \mp i\pi\delta(x),$$

et par la transformation de Hilbert, il vient :

$$\int_0^{+\infty} dt c(t) e^{-it\nu} = \frac{1}{2} \hat{c}(\nu) - i s_c(\nu)$$

et

$$\int_0^{+\infty} dt d(t) e^{it\nu} = \frac{1}{2} \hat{c}(\nu) + i s_c(\nu),$$

où

$$\begin{aligned} \hat{c}(\nu) &= \frac{\pi\nu^2}{2} \frac{e^{\beta\nu/2}}{|\sinh(\beta\nu/2)|} \|f(|\nu|\cdot)\|_{S^2}^2 \\ \|f(|\nu|\cdot)\|_{S^2}^2 &= \int_{S^2} d\sigma(\hat{\mathbf{k}}) |f(|\nu|\hat{\mathbf{k}})|^2. \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\hat{a}(\nu) = \begin{cases} \hat{c}(\nu) & , \quad \text{cas 2;} \\ e^{-\nu\beta/2} \hat{c}(\nu) & , \quad \text{cas 1.} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_\nu^\mu &= \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \sum_\nu \hat{a}(\nu) \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\#(Q'_\nu) \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &\quad - \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \frac{1}{2} \sum_\nu \hat{c}(\nu) \left(\pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q_{-\nu}) + \pi_s^\#(Q'_\nu) \pi_s^\#(Q'_{-\nu}) \right) \right\} \mathbf{1}_\mu^s \\ &\quad + i \mathbf{1}_\mu^s \left\{ \sum_\nu s_c(\nu) \left(\pi_s^\#(Q'_\nu) \pi_s^\#(Q'_{-\nu}) - \pi_s(Q_\nu) \pi_s(Q_{-\nu}) \right) \right\} \mathbf{1}_\mu^s. \end{aligned}$$

Comme ρ commute avec H_s alors :

$$Q'_\nu Q'_{-\nu} = Q_\nu Q_{-\nu}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} Q_\nu Q_{-\nu} &= \sum_{\substack{k,l;k',l' \\ E_k - E_l = \nu = E_{k'} - E_{l'}}} P_k Q P_l P_{l'} Q P_{k'} \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ E_k - E_l = \nu}} P_k Q P_l Q P_k. \end{aligned}$$

Ainsi ces résultats permettent d'obtenir les opérateurs K_ν^j , $j = 1, 2$, pour les deux cas considérés :

$$\begin{aligned} K_\nu^1 &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) e^{-\beta\nu/2} \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\sharp(Q_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \left(\pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) + \pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) \right) \\ &\quad + i \sum_{\nu} s_c(\nu) \left(\pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) - \pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) \right); \\ K_\nu^2 &= \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \pi_s(Q_\nu) \pi_s^\sharp(\rho^{1/2} Q_\nu \rho^{-1/2}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \hat{c}(\nu) \left(\pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) + \pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) \right) \\ &\quad + i \sum_{\nu} s_c(\nu) \left(\pi_s^\sharp(Q_\nu Q_\nu^*) - \pi_s(Q_\nu Q_\nu^*) \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Annexe D

Annexe du chapitre 4

D.1 Algèbre de von Neumann Φ

- Preuve de la proposition 4.1

Soit $V_t = U^*(t)U_0(t)$ et $W_t = U^*(t)U_r(t)$, ainsi

$$\rho(t) = V_t^* \rho(0) V_t \quad , \quad z(t) = W_t^* z(0) W_t$$

nous obtenons à l'aide des conditions habituelles (4.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} V_t = i V_t \phi_t Q_t \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} W_t = i W_t (H_s(t) + Q \phi_t)$$

On utilise le lemme suivant.

Lemme D.1

Soit $(P_t)_t$ un propagateur unitaire tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = i P_t F_t(\phi_t),$$

avec

$$\forall (s, t) \quad , \quad [F_t(\phi_t), \phi_s] = 0.$$

Alors, nous avons

$$\forall (s, t) \quad , \quad [P_t, \phi_s] = 0.$$

Démonstration du lemme

On a

$$P_t = I + \sum_{n \geq 1} P_t^{(n)},$$

avec

$$P_t^{(n)} = i^n \int_{t > t_n > \dots > t_1 > 0} dt_n \dots t_1 F_{t_n}(\phi_{t_n}) \dots F_{t_1}(\phi_{t_1}).$$

L'hypothèse $[F_u(\phi_u), \phi_s] = 0$ implique $[P_t^{(n)}, \phi_s] = 0$, pour tout (s, t) d'où $[P_t, \phi_s] = 0$. \square

Ainsi, il vient :

$$\forall (s, t), [V_t, \phi_s] = 0, [W_t, \phi_s] = 0;$$

puisque $z(0) = \rho(0) = \rho \otimes \mathbb{1}_r$ commute avec ϕ_s , il en résulte

$$[\rho(t), \phi_s] = 0, [z(t), \phi_s] = 0.$$

\square

• Théorème de Minlos-Bochner

(On précise la forme que l'on utilise dont les références peuvent être les livres [HI2] et [GV].)

Théorème D.1 (Minlos-Bochner)

Soit E un espace dénombrablement hilbertien nucléaire de dual E' tel qu'il existe un espace hilbertien H vérifiant :

$$E \subset H \subset E',$$

où les injections sont continues et d'images denses.

La famille des normes hilbertiennes associées à E est notée $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la dualité entre E et E' est notée $\varphi(f)$ pour $f \in E$ et $\varphi \in E'$.

Soit une application caractéristique $C : E \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait les conditions suivantes :

- $f \mapsto C(f)$ est continue en norme $\|\cdot\|_n$, pour tout n ;
- C est définie positive : pour tout f, \dots, f_n de E et z_1, \dots, z_n de \mathbb{C} , on a

$$\sum_{k,l} \bar{z}_k z_l C(f_k - f_l) \geq 0;$$

- $C(0) = 1$.

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur (E', \mathcal{B}) telle que :

$$\forall f \in E, C(f) = \int_{E'} d\mu(\varphi) e^{i\varphi(f)}.$$

Rappelons une description de la tribu \mathcal{B} .

Etant donné un borélien B de \mathbb{R}^n , pour f_1, \dots, f_n des éléments de E , on note $C(f_1, \dots, f_n; B)$ l'ensemble cylindrique :

$$C(f_1, \dots, f_n; B) \equiv \{\varphi \in E' / (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)) \in B\}.$$

La collection des ensembles cylindriques basés sur un sous espace vectoriel de dimension finie F de E (les $f_j \in F$) forme une tribu notée \mathcal{U}_F .

\mathcal{U} , leur union

$$\mathcal{U} \equiv \bigcup_{\substack{F \subseteq E \\ \dim(F) < \infty}} \mathcal{U}_F,$$

est une algèbre de parties de E' et \mathcal{B} est la plus petite tribu contenant \mathcal{U} .

• **Décomposition spectrale simultanée**

(On propose dans ce paragraphe une autre méthode, plus théorique, pour obtenir un processus gaussien stationnaire associé à la famille $(e^{i\Phi_t})_{t \in \mathbb{R}}$.)

Le résultat de Dixmier (prop.4 page 116 [DIX1] ou [DL] Spectre des opérateurs, volume 5), portant sur l'existence d'une mesure spectrale basique bornée d'une \mathbf{C}^* -algèbre commutative, s'applique à toute \mathbf{C}^* -algèbre contenue dans $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ puisque \mathfrak{H} est séparable.

On rappelle dans ce qui suit une telle construction.

On désigne par \mathcal{A} la \mathbf{C}^* -algèbre commutative engendrée par la famille d'opérateurs bornés et normaux $(e^{i\Phi_t})_{t \in \mathbb{R}}$.

De plus \mathcal{A} contient l'identité I (car $e^{i\Phi_t}(e^{i\Phi_t})^* = I$).

Alors son spectre Z (ensemble des caractères χ non identiquement nuls, $\chi(I) = 1$), c'est un compact pour la topologie faible $*$ et $C^0(Z)$ est une \mathbf{C}^* -algèbre commutative.

On sait alors que l'application,

$$Z \ni \chi \longmapsto (\chi(e^{i\Phi_t}))_{t \in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}},$$

est un homéomorphisme de Z sur son image, appelée le spectre simultané de la famille Φ .

La transformation de Gelfand

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \mathcal{A} & \longmapsto C^0(Z) \\ A & \longmapsto \mathcal{G}A \end{cases}, \quad (\mathcal{G}A)(\lambda) = \lambda(A), \forall \lambda \in Z,$$

est un isomorphisme de la \mathbf{C}^* -algèbre commutative \mathcal{A} sur la \mathbf{C}^* -algèbre commutative $C^0(Z)$.

On note $T = \mathcal{G}^{-1}$.

Pour x et y dans \mathfrak{H} , l'application $f \in C^0(Z) \longmapsto (x, T_f y) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, il existe une et une seule famille de mesures bornées $\nu_{x,y}$ telle que :

$$(x, T_f y) = \int f(\lambda) d\nu_{x,y}(\lambda) \equiv \nu_{x,y}(f).$$

Une mesure positive ν sur Z est basique pour \mathcal{A} si elle vérifie : toute partie de Z est localement ν -négligeable si et seulement si elle est $\nu_{x,x}$ -négligeable pour tout x de \mathfrak{H} .

Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ et \mathfrak{H} séparable alors il existe une mesure bornée et basique pour \mathcal{A} , notée désormais ν . Elle domine $\nu_{x,x}$ et par polarisation, on en déduit qu'il existe $(x, y) \mapsto a(\lambda; x, y)$ la forme sesquilinéaire hermitienne définie sur \mathfrak{H} telle que :

$$\forall f \in C^0(Z) \quad , \quad (x, T_f y) = \int_Z f(\lambda) a(\lambda; x, y) \nu(d\lambda).$$

On sait alors que T se prolonge en un morphisme isométrique de \mathbf{C}^* -algèbres commutatives de $\mathbb{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(Z; \nu)$ dans $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ qui est continu lorsque $\mathbb{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(Z; \nu)$ est muni de la topologie faible * et $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ est muni de la topologie faible des opérateurs et satisfaisant :

$$\forall f \in \mathbb{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(Z; \nu), \forall (x, y) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^2 \quad , \quad (x, T_f y) = \int_Z f(\lambda) a(\lambda; x, y) \nu(d\lambda).$$

De plus, puisque $I \in \mathcal{A}$ alors $\{Ax, A \in \mathcal{A}, x \in \mathfrak{H}\}$ est dense dans \mathfrak{H} , l'image de T , notée \mathfrak{a} , est l'algèbre de von Neumann commutative engendrée par \mathcal{A} .

Ainsi T réalise un isomorphisme isométrique de $\mathbb{L}_{\mathbf{C}}^{\infty}(Z; \nu)$ sur \mathfrak{a} .

Pour $A \in \mathfrak{B}(Z)$, (tribu borélienne de Z), on note $E(A) = T_{\chi_A} \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, χ_A étant la fonction indicatrice de l'ensemble A , on a :

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathfrak{B}(Z)^2, A \subset B &\iff E(A)E(B) = E(A), \\ A \cap B = \emptyset &\iff E(A)E(B) = 0, \\ \forall (x, y) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})^2 \forall (A, B) \in \mathfrak{B}(Z)^2, (x, E(A)y) &= \int_A a(\lambda; x, y) \nu(d\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(d\lambda)E(d\lambda') &= \delta(\lambda - \lambda')E(d\lambda), \\ \forall A \in \mathfrak{B}(Z), E(A) &= \int_A E(d\lambda). \end{aligned}$$

Proposition D.1

Il existe un processus unique (φ_t) tel que :

$$\varphi_t \in C^0(Z), \quad T_{e^{i\varphi_t}} = e^{i\Phi_t};$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_t(\lambda) &\in \mathbb{R} \quad (\text{car } \Phi_t^* = \Phi_t), \\ \Phi_t &= \int \varphi_t(\lambda) E(d\lambda), \\ e^{i\Phi_t} &= \int e^{i\varphi_t(\lambda)} E(d\lambda). \end{aligned} \tag{D.1}$$

On dira que (D.1) est la décomposition spectrale de ϕ_t .

La preuve utilise essentiellement les propriétés de T et de \mathcal{G} .
On obtient.

Théorème D.2

La mesure $\mu(d\lambda)$, définie par

$$\mu(d\lambda) \equiv \omega_r(E(d\lambda)) = a(\lambda; \Omega, \Omega) \nu(d\lambda),$$

est une mesure de probabilité sur Z.

Le processus $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien centré, stationnaire de covariance $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \Gamma$

Démonstration

μ est en effet une mesure positive sur Z et puisque $T_1 = I$, on a :

$$\mu(Z) = \int_Z a(\lambda; \Omega, \Omega) \nu(d\lambda) = \langle \Omega | \Omega \rangle = 1.$$

Soient u_1, u_2, \dots, u_n et t_1, t_2, \dots, t_n des nombres réels, les propriétés de morphisme de T donnent

$$\begin{aligned} T \sum_{k=1}^n u_k \phi_{t_k} &= \sum_{k=1}^n u_k \phi_{t_k} \\ &= \phi \left(\sum_{k=1}^n u_k e^{it_k \omega} h \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[\exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k \phi_{t_k} \right\} \right] &= \langle \Omega | e^{i\phi(\sum_{k=1}^n u_k e^{it_k \omega} h)} | \Omega \rangle \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left\| \sum_{k=1}^n u_k e^{it_k \omega} h \right\|^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^n u_k u_l \Gamma(t_k - t_l) \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui établit que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n u_k \phi_{t_k}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée et de covariance $\frac{1}{2} \Gamma$.

De plus, cette dernière égalité assure que $(\phi_{t_1}, \dots, \phi_{t_n})$ et $(\phi_{t_1+s}, \dots, \phi_{t_n+s})$ ont la même loi d'où la stationnarité du processus.

En particulier, on a :

$$\mathbb{E}_\mu[\phi_t] = 0, \mathbb{E}_\mu[\phi_t \phi_s] = \gamma(t-s).$$

□

D.2 Preuve du théorème 4.4

Ainsi

$$X_t = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{n_l} a_{k,l} \int_{-\infty}^t (t-u)^k e^{-z_l(t-u)} dB_u$$

puis prenant la partie réelle de $\sqrt{2}X_t$, on obtient une première décomposition matricielle de φ_t :

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{n_l} u_{k,l} \times M_t(k, l) \\ &= A \times M_t \end{aligned} \tag{D.2}$$

où les processus matriciels $u_{k,l}$ et $M_t(k, l)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \sigma_l(t) &\equiv \begin{pmatrix} \cos(\mu_l t) & \sin(\mu_l t) \\ \sin(\mu_l t) & -\cos(\mu_l t) \end{pmatrix} \\ W_t &\equiv \begin{pmatrix} B_t^1 \\ B_t^2 \end{pmatrix} \\ M_t(k, l) &\equiv \int_{-\infty}^t (t-u)^k e^{-\lambda_l(t-u)} \sigma_l(t-u) dW_t \quad , \quad 0 \leq k \leq n_l \\ u_{k,l} &\equiv (\operatorname{Re}(a_{k,l}), \operatorname{Im}(a_{k,l})). \end{aligned}$$

Et, pour chaque l , $1 \leq l \leq r$:

$$\begin{aligned} A(l) &= (\operatorname{Re}(a_{0,l}), \operatorname{Im}(a_{0,l}), \dots, \operatorname{Re}(a_{n_l,l}), \operatorname{Im}(a_{n_l,l})) \in \mathfrak{M}_{1,2n_l+2}, \\ A &= (A(1), \dots, A(r)) \in \mathfrak{M}_{1,2N}, \quad \text{car} \quad \sum_{l=1}^r (2n_l + 2) = 2N \\ M_t(l) &= \begin{pmatrix} M_t(0, l) \\ \vdots \\ M_t(n_l, l) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n_l+2,1}, \\ M_t &= \begin{pmatrix} M_t(1) \\ \vdots \\ M_t(r) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2N,1}. \end{aligned}$$

On ne peut pas vérifier directement que (M_t) satisfait à une équation différentielle stochastique à cause de la dérivation des termes σ_l .

Considérons donc les processus qui interviennent lors de la dérivation de M

$$\begin{aligned} \rho_l(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(\mu_l t) & \cos(\mu_l t) \\ \cos(\mu_l t) & \sin(\mu_l t) \end{pmatrix}, \\ N_t(k, l) &= \int_{-\infty}^t (t-u)^k e^{-\lambda_l(t-u)} \rho_l(t-u) dW_t \quad , \quad 0 \leq k \leq n_l, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N_t(l) &= \begin{pmatrix} N_t(0, l) \\ \vdots \\ N_t(n_l, l) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n_l+2,1} \\ N_t &= \begin{pmatrix} N_t(1) \\ \vdots \\ N_t(r) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2N,1}. \end{aligned}$$

On pose

$$Y_t(l) = \begin{pmatrix} M_t(0, l) \\ N_t(0, l) \\ \vdots \\ M_t(n_l, l) \\ N_t(n_l, l) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4n_l+4,1}, \quad Y_t = \begin{pmatrix} Y_t(1) \\ \vdots \\ Y_t(r) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4N,1}.$$

Ainsi, l'élément $B(l)$ de $\mathfrak{M}_{1,4n_l+4}$,

$$B(l) = \left(\operatorname{Re}(a_{0,l}), \operatorname{Im}(a_{0,l}), 0, 0, \operatorname{Re}(a_{1,l}), \operatorname{Im}(a_{1,l}), \dots, \operatorname{Re}(a_{n_l,l}), \operatorname{Im}(a_{n_l,l}), 0, 0 \right),$$

vérifie, pour tout l ,

$$B(l) \times Y_t(l) = A(l) \times M_t(l).$$

Par suite, l'élément

$$B = (B(1), \dots, B(r)) \in \mathfrak{M}_{1,4N}$$

permet d'obtenir une seconde décompositon matricielle de φ_t :

$$\varphi_t = B \times Y_t. \tag{D.3}$$

On montre dans la suite que $(Y_t)_t$ satisfait une équation différentielle stochastique en utilisant la propriété suivante :

si $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est une fonction $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ déterministe alors

$$d\left(\int_{-\infty}^t f(t, s) dW_s\right) = \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial x}(t, s) dW_s\right) dt + f(t, t) dW_t.$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{cases} dM_t(k, l) = -\lambda_l M_t(k, l) dt + k M_t(k-1, l) dt \\ \quad + \mu_l N_t(k, l) dt + 0^k \sigma_l(0) dW_t, \\ dN_t(k, l) = -\lambda_l N_t(k, l) dt + k N_t(k-1, l) dt \\ \quad - \mu_l M_t(k, l) dt + 0^k \rho_l(0) dW_t. \end{cases}$$

Considérons les matrices définies par blocs ;

$$\Delta_l = \begin{pmatrix} -\lambda_l I_2 & \mu_l I_2 \\ -\mu_l I_2 & -\lambda_l I_2 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et aussi

$$\tilde{\Delta}_l = \begin{pmatrix} \Delta_l & 0 & & & \\ I_4 & \Delta_l & & & \\ & 2I_4 & \Delta_l & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & n_l I_4 & \Delta_l \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4n_l+4}$$

et

$$\tilde{J}_l = \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4n_l+4,2},$$

et les matrices constituées par blocs

$$\Delta = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_1 & 0 & & & \\ 0 & \tilde{\Delta}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & (0) \\ (0) & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & \tilde{\Delta}_r \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4N}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_2 \\ \vdots \\ \tilde{J}_r \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4N,2}.$$

Alors, selon la théorie classique (voir par exemple [ARN]) des équations différentielles stochastiques, on obtient :

$$dY_t = \Delta Y_t dt + \Gamma dW_t.$$

En outre, on peut conclure grâce à la proposition suivante.

Proposition D.2

Le processus $(Y_t)_t$,

$$\varphi \in \mathcal{S}' \longmapsto Y_t(\varphi) \in \mathbb{R}^{4N},$$

vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$dY_t = \Delta Y_t dt + \Gamma dW_t. \tag{D.4}$$

$(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus de Markov de générateur \mathbf{L} donné explicitement par :

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{4N} (\Delta x)_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{4N} (\Gamma \Gamma^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; \quad (\text{D.5})$$

et le groupe $T^t = e^{t\mathbf{L}}$ vérifie en particulier :

$$\mathbb{E}[f(Y_t)|Y_s] = T^{t-s} f(Y_s).$$

Par suite, si μ_t désigne la loi de Y_t , alors la propriété markovienne implique

$$\forall (s, t), s \leq t : \mu_s T^{t-s} = \mu_t.$$

Soit \mathbf{L}^T l'adjoint de \mathbf{L} par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{4N} , alors on a :

$$\mathbf{L}^T = - \sum_{k=1}^{4N} \frac{\partial}{\partial x_k} ((\Delta x)_k \cdot) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{4N} (\Gamma \Gamma^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si le processus de Markov $(Y_t)_t$ admet une mesure de probabilité invariante $\mu_0(dx)$ sur \mathbb{R}^{4N} absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{4N} alors la densité p est solution de l'équation Fokker-Planck stationnaire :

$$\mathbf{L}^T p = 0.$$

Ainsi :

$$\forall t, \mu_0 T^t = \mu_0; \\ \left((1; T^t f)_{\mu_0} = (1; f)_{\mu_0} \right).$$

Si \mathbf{L}^* désigne l'adjoint de \mathbf{L} par rapport à la mesure $\mu_0(dx)$ alors, on a :

$$\mathbf{L}^* = p^{-1} \mathbf{L}^T p \quad (\text{D.6}) \\ \left((\mathbf{L}^* f)(x) = p^{-1}(x) \mathbf{L}^T (p \times f)(x) \right).$$

Ce qui achève la preuve. \square

Commentaire sur l'existence d'une mesure invariante.

Si les conditions **(I.1)** et **(I.2)** suivantes sont satisfaites alors Y admet une mesure inavriante μ_0 ,

$$\mu_0(dx) = p(x) dx, \quad \mathbf{L}^T p = 0.$$

(I.1) Il existe une fonction $x \mapsto f(x)$ de classe C^2 telle que

$$\lim_{R \nearrow +\infty} \left(\sup_{\|x\| > R} (\mathbf{L}f)(x) \right) = -\infty.$$

On dit que la solution Y n'explose pas.

(I.2) Il existe une fonction $(x, t) \mapsto g(x, t)$, de classe C^2 en x et de classe C^1 en t et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, t), \quad \partial_t g(x, t) + (\mathbf{L}g)(x, t) \leq \alpha g(x, t).$$

Et

$$\lim_{R \nearrow +\infty} \left(\inf_{\substack{\|x\| > R \\ t > 0}} g(x, t) \right) = 0.$$

D.3 Équation de ρ_t

• **Démonstration du lemme 4.4**

Soit $t > 0$. On a, par la transformation de Fourier :

$$\frac{x}{x^2 + t^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{2\pi} F_t(p) e^{ipx},$$

où la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$ se calcule par la méthode des résidus et on trouve :

$$F_t(p) = \pi e^{-|p|t}.$$

Posons :

$$N_\varepsilon(p) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} F_{\frac{1}{\varepsilon}}(p).$$

Alors, il vient :

$$\phi_t^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} dp N_\varepsilon(p) e^{ip\phi_t}; \tag{D.7}$$

et

$$\varphi_t^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} dp N_\varepsilon(p) e^{ip\varphi_t}.$$

Comme π est continue alors c'est un $*$ -homomorphisme d'algèbres de von Neumann de Φ dans $\mathcal{B}(\mathbb{L}^2(\mathcal{S}'))$, donc π est σ -faiblement continue (théorème 2-4-23 de [BR1]). L'intégrale (D.7) peut être considérée comme une limite σ -faible d'une somme de Riemann, ce qui permet d'obtenir finalement :

$$\pi(\phi_t^\varepsilon) = \varphi_t^\varepsilon.$$

□

Remarque D.1

Sous la forme intégrale, le problème de Cauchy (4.24) s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad \rho_t^\varepsilon = \rho_0 + \int_0^t ds \phi_s^\varepsilon \mathcal{L}_s(\rho_s^\varepsilon).$$

Puisque $\|Q_t\| \leq \|Q\|$ alors $\|\mathcal{L}_t\| \leq 2\|Q\| \equiv C$.

De plus $Q_t^* = Q_t$ implique $\mathcal{L}_t^*(\rho) = \mathcal{L}_t(\rho^*)$ ce qui montre que $(\rho_t^\varepsilon)^*$ est solution du problème de Cauchy (4.24).

L'égalité $\rho_0 = \rho_0^*$ et l'unicité de la solution donnent $(\rho_t^\varepsilon)^* = \rho_t^\varepsilon$, pour tout $t \geq 0$. En fait, on peut montrer directement que ρ_t^ε est une matrice de densité dans $\mathfrak{H}_s \otimes \mathfrak{H}_r$ en remarquant que :

$$\rho_t^\varepsilon = U_0^*(t) U^\varepsilon(t) (\rho \otimes \mathbb{1}_r) (U^\varepsilon)^*(t) U_0(t);$$

où $(U^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est la famille de propagateurs qui correspond à l'hamiltonien $H^\varepsilon(t)$:

$$H^\varepsilon(t) = H_s(t) + H_r + Q \otimes \phi^\varepsilon(h), \quad \phi^\varepsilon(h) \equiv \phi(h)(1 + \varepsilon^2 \phi^2(h))^{-1}.$$

- **Démonstration du lemme 4.5**

Le premier point provient de la théorie des probabilités, car le processus $(\varphi_t)_t$ admet des moments à tout ordre; en particulier l'inégalité de Chebycheff suffit ici.

On a l'égalité, valable pour tout $t \geq 0$;

$$\rho_\pi^\varepsilon(t) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(t) = \int_0^t ds (\varphi_s^\varepsilon - \varphi_s^{\varepsilon'}) \mathcal{L}_s(\rho_\pi^\varepsilon(s)) + \int_0^t ds \varphi_s^{\varepsilon'} \mathcal{L}_s(\rho_\pi^\varepsilon(s) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(s)).$$

Mais, nous avons :

$$\|\mathcal{L}_s(\rho_\pi^\varepsilon(s))\|_1 \leq \|\mathcal{L}_s\| \|\rho_\pi^\varepsilon(s)\|_1 \leq 2\|Q\|, \quad |\varphi_s^{\varepsilon'}| \leq |\varphi_s|.$$

On rappelle que $\varphi \in \mathcal{S}' \mapsto \varphi_s \in \mathbb{R}$.

Donc, on obtient, pour tout $0 \leq t < \tau$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\chi_{\Omega_{R,\tau}} \|\rho_\pi^\varepsilon(t) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(t)\|_1] &\leq 2\|Q\| \times \|\varphi^\varepsilon - \varphi^{\varepsilon'}\|_{\mathbb{L}^1([0,t] \otimes \mathcal{S}', ds \otimes d\mu)} \\ &\quad + R \int_0^t ds \mathbb{E}[\chi_{\Omega_{R,\tau}} \|\rho_\pi^\varepsilon(s) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(s)\|_1]. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall donne :

$$\mathbb{E}[\chi_{\Omega_{R,\tau}} \|\rho_\pi^\varepsilon(t) - \rho_\pi^{\varepsilon'}(t)\|_1] \leq 2\|Q\| \|\varphi^\varepsilon - \varphi^{\varepsilon'}\|_{\mathbb{L}^1([0,\tau] \otimes \mathcal{S}', ds \otimes d\mu)} \times e^{R\tau}.$$

De

$$|\varphi_s^\varepsilon - \varphi_s^{\varepsilon'}| \leq 2|\varphi_s|, \quad |\varphi_s| \in \mathbb{L}^1([0, \tau] \otimes \mathcal{S}', ds \otimes d\mu),$$

et $|\varphi_s^\varepsilon - \varphi_s^{\varepsilon'}|$ tend vers zéro avec ε et ε' μ -presque sûrement car $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_s^\varepsilon = \varphi_s$,
alors le théorème de la convergence dominée donne :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \|\varphi^\varepsilon - \varphi^{\varepsilon'}\|_{\mathbb{L}^1([0, \tau] \otimes \mathcal{S}', ds \otimes d\mu)} = 0.$$

Il en résulte que la quantité $\Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon')$,

$$\Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon') \equiv \|\varphi^\varepsilon - \varphi^{\varepsilon'}\|_{\mathbb{L}^1([0, \tau] \otimes \mathcal{S}', ds \otimes d\mu)},$$

vérifie

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \Delta_\tau(\varepsilon, \varepsilon') = 0.$$

□

Bibliographie

ARTICLES

- [AW] ARAKI H. et WOODS E.J., *Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free Bose gas.*, Jour. Math. Phys., **4**, n°5, p.637, 1963.
- [BFS1] BACH V., FRÖHLICH J. et SIGAL I.M., *Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles*, Adv. Math., **137**, p.299, 1998.
- [BFS2] BACH V., FRÖHLICH J. et SIGAL I.M., *Convergent renormalisation group analysis for non-selfadjoint operators on Fock space*, Adv. Math., **137**, p.205, 1998.
- [CH] CHAIKEN J.A., *Number operators for representation of the canonical commutation relations*. Comm. Math. Phys., **8**, p.164-184, 1968.
- [CHE] CHEBOTAREV A.M., *Sufficient conditions for conservativity of dynamical semigroups*. Theor. Math. Phys., **80**, p.2, 1989.
- [CF] CHEBOTAREV A.M. et FAGNOLA F., *Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups*. J. Funct. Anal., **153**, p.382-404, 1998.
- [D1] DAVIES E.B., *Markovian master equations*. Comm. Math. Phys., **39**, p.91-110, 1974.
- [D2] DAVIES E.B., *Markovian master equations. III* Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, Vol. XI, n°3, p. 265-273, 1975
- [D3] DAVIES E.B., *Quantum dynamical semigroups and the neutron diffusion equation* Rep. Math. Phys., **11**, p. 169-188, 1977
- [DJ1] DEREZINSKI J. et JAKŠIĆ V., *Spectral theory of Pauli-Fierz operators*, Jour. Funct. Anal., **180**, p.241-327, 2001.
- [DJ2] DEREZINSKI J. et JAKŠIĆ V., *Return to equilibrium for Pauli-Fierz systems*, à paraître dans Ann. H.P.
- [DJ3] DEREZINSKI J. et JAKŠIĆ V., *Some remarks on Fermi golden rule for open quantum systems*, Ecole d'été de Grenoble, Open quantum systems, 16 juin-4 juillet 2003.

- [DJP] DEREZINSKI J., JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *Perturbation theory of W^* -dynamics, liouvillean and KMS-states*, Rev. Math. Phys., **15**, p. 447, 2003.
- [DO] DOOB J.L., *The elementary gaussian processes*, Ann. of Math. Statist., **15**, p.229-282, 1944.
- [F] FAGNOLA F., *Chebotarev's sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups*. Quantum Probability and Related Topics **VIII**, p.123-142, 1993.
- [FR1] FAGNOLA F. et REBOLLEDO R., *Quantum markov semigroups and their stationary states*, Ecole d'été de Grenoble, Open quantum systems, 16 juin-4 juillet 2003.
- [FR2] FAGNOLA F. et REBOLLEDO R., *A view on stochastic differential equations derived quantum optics*, Aportaciones Matematicas, Soc. Mat. Mexicana, **14**, p. 193-214, 1998.
- [F1] FRIGERIO A., *Stationary states of quantum dynamical semigroups*, Comm. Math. Phys., **63**, p. 269-276, 1978.
- [F2] FRIGERIO A., *Quantum dynamical semigroups and approach to equilibrium*, Lett. Math. Phys. **2**, p. 79-87, 1977.
- [FGKV] FRIGERIO A., GORINI V., KOSSAKOWSKI A. et VERRI M., *Quantum detailed balance and KMS condition*, Comm. Math. Phys., **57**, p. 97-110, 1977.
- [HI1] HIDA T., *Canonical representations of Gaussian processes and their applications*, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A, **33**, p. 105-155, 1960.
- [HO] HOWLAND J.S., *The Livsic matrix in perturbation theory*, Jour. Math. Anal. and Appl., **50**, p. 415-437, 1975.
- [JP1] JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *From resonances to master equations*, Ann. Inst. H.P., Phys. Théor., **67**, n°4, p. 425-445, 1997.
- [JP2] JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *On a model for quantum friction II. Fermi's golden rule and dynamics at positive temperature*, Comm. Math. Phys., **176**, p. 619, 1996.
- [JP3] JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *On a model for quantum friction III. Ergodics properties of the spin-boson system*, Comm. Math. Phys., **178**, p. 627-651, 1996.
- [JP4] JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *Spectral theory of thermal of relaxation*, Jour. Math. Phys., **38**, p. 1757, 1997.

- [JP5] JAKŠIĆ V. et PILLET C.-A., *Non-equilibrium steady states of finite quantum systems coupled to thermal reservoirs*, Comm. Math. Phys., **226**, p. 131, 2002.
- [LP] LEWIS A.J. et PULÈ J.V., *The equilibrium states of the free boson gas*, Comm. Math. Phys., **36**, 1974.
- [LS] LEBOWITZ J.-L. et SPOHN H., *Irreversible thermodynamics for quantum systems weakly coupled to thermal reservoirs*, Advances in Chemical Physics, **38**, p. 109-142, 1978.
- [LV] LEVY P., *A special problem of brownian motion and a general theory of gaussian random function*, Proc. 3rd Berkeley Sympos., Math. Statist. Probab., **2**, p. 133-176, 1956.
- [LI] LINDBLAD G., *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Comm. Math. Phys., **48**, p. 119-130, 1976.
- [P1] PILLET C.-A., *Some results on the quantum dynamics of a particle in a markovian potential*, Comm. Math. Phys., **102**, p. 237-254, 1985.
- [P2] PILLET C.-A., *Asymptotics completeness for a quantum particle in a markovian short range potential*, Comm. Math. Phys., **105**, p. 259-280, 1986.
- [P3] PILLET C.-A., *Quantum dynamical systems and their KMS-states*, Ecole d'été de Grenoble, Open quantum systems, 16 juin-4 juillet 2003.
- [RE1] REBOLLEDO R., *Complete positivity and open quantum systems.*, Ecole d'été de Grenoble, Open quantum systems, 16 juin-4 juillet 2003.
- [RE2] REBOLLEDO R., *Sur les semigroupes dynamiques quantiques*, Hommage à A. Badrikian, Univ Clermont-Ferrand.
- [RU] RUELLE D., *Topics in quantum statistical mechanics and operators algebras*, Lectures given at Rutgers, Math. Dept., 2000.
- [S1] SPOHN H., *An algebraic condition for the approach to equilibrium of an open N-level system*, Lett. Math. Phys., **2**, p. 33, 1977.
- [VH1] VAN HOVE L., *The approach to equilibrium in quantum statistics*, Physica, **23**, p. 441, 1957.
- [VH2] VAN HOVE L., *Master equation and approach to equilibrium for quantum systems*, in *Fundamental problems in statistical mechanics*, compiled by E.G.D Cohen, North-Holland, Amsterdam, 1962.

LIVRES

- [AG] AGARWAL G.S., *Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relations to other approaches.*, Springer Tracts in Modern Physics, **70**, 1974.
- [AR] ARAKI H., *Mathematical theory of quantum fields.*, International Series of Monographs on Physics **101**, Oxford Univ. Press., 1999.
- [ARN] ARNOLD L., *Stochastic differential equations.*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience Publication, 1974.
- [BR1] BRATTELI G. et ROBINSON D.W., *Operators algebras and quantum statistical mechanics 1*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second Edition, 1987.
- [BR2] BRATTELI G. et ROBINSON D.W., *Operators algebras and quantum statistical mechanics 2*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second Edition, 1997.
- [CDG] COHEN-TANNOUJDI C., DUPONT-ROC J. et GRYNBERG G., *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Editions du CNRS, Second Edition, 1996.
- [CDL] COHEN-TANNOUJDI C., DIU B. et LALOE F., *Mécanique quantique*, Hermann, Nouveau tirage , **Vol. I** et **Vol.II**, 1998.
- [CO] CONNES A., *Géométrie non commutative*, InterEditions, 1990.
- [DL] DAUTRAY R. et LIONS J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique*, Masson , **Vol. 1** à **Vol. 9**, 1988.
- [D3] DAVIES E.B., *Quantum theory of open systems*, Acad. Press., 1976.
- [DM] DELLACHERIE C. et MEYER P.-A., *Probabilités et potentiels*, Chap XII to XVI, Hermann, 1987.
- [DIR] DIRAC P.A.M., *Les principes de la mécanique quantique*, réimpression autorisée par Les Presses Universitaires de France aux Éditions Jacques Gabay, 1990.
- [DIX1] DIXMIER J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [DIX2] DIXMIER J., *Les \mathbf{C}^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [DK] DYM H. et McKEAN H.P., *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*, Acad.Press., New York and London, 1976.
- [GV] GELFAND I.M.et VILENKIN N.Y., *Generalized functions theory. Applications of harmonic analysis*,**Vol. 4**, Acad.Press., New York and London, 1964.

- [GW] GOLDBERGER M.L. et WATSON K.M., *Collision theory*, John Wiley, New York , 1964.
- [GS] GUSTAFSON S.J. et SIGAL I.M., *Mathematical concepts of quantum mechanics*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [HE] HELSON H., *Lectures on invariant subspaces*, Acad. Press., New York and London, 1964.
- [HI2] HIDA T., *Brownian motion*, Appl. of Mathematics, **Vol. 11**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [HH] HIDA T. et HITSUDA M., *Gaussian processes*, Trans. of Mathematical Monographs, **Vol. 120**, A.M.S., 1993.
- [KN] KNIGHT F.B., *Foundations of the prediction process*, Oxford Studies in Probability , **Vol. 1**, Oxford Univ. Press, 1992.
- [LL1] LANDAU L. et LIFCHITZ E., *Physique théorique. Mécanique quantique*, **Tome 3**, traduction française, Editions Mir, Moscou, 1975.
- [LL2] LANDAU L. et LIFCHITZ E., *Physique théorique. Physique statistique*, 4ème édition, traduction française, Editions Mir-Ellipses, 1994.
- [MES] MESSIAH A., *Mécanique quantique*, Dunod, **Vol. 2**, New Edition 1995.
- [MEY] MEYER P.-A., *Quantum probability for probabilists*, Lect. Notes in Math., **1538**, Spinger-Verlag Berlin Heidelberg New York, Second Edition , 1995.
- [NEU] Von NEUMANN J., *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique*, réimpression autorisée par Les Presses Universitaires de France aux Éditions Jacques Gabay, 1988.
- [O] ØKSENDAL B., *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Fourth Edition, 1995.
- [OM] OMNES R., *Comprendre la mécanique quantique*, EDP Sciences, 2000.
- [PA] PARTHASARATHY K.R., *An Introduction to quantum stochastic calculus*, Monographs in Math., Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston Berlin, 1992.
- [T] TAKESAKI M., *Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications*, Lect. Notes in Math., **128**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1970.

Index

- Algèbre
 - CCR -, 164
 - CCR -, 73
- Born
 - approximation de Pauli- -, 69
- Cône
 - naturel positif , 7
- Canonique
 - représentation - d'une filtration, 117
- Caractéristique
 - application -, 182
 - fonctions -s, 110
 - système -, 149
- Covariance
 - fonction de-, 109
- Cyclique
 - vecteur -, 5
- Détaillé
 - principe du bilan -, 21
- Davies
 - générateur de - pour un oscillateur harmonique, 48
 - générateur de -, 28, 99
 - générateur de - pour le modèle Spin-Boson, 65
 - opérateur de -, 1
 - spectre du générateur de -, 94
 - théorème de - sur le couplage faible, 4
- Equation
 - NPRZ, 24
- Equilibre
 - retour à l'-, 36
 - retour à l' - pour un oscillateur, 51
 - température d'-, 55
- Ergodique
 - propriété -, 84
- Etat, 4
 - KMS, 8
 - fidèle, 5
 - normal, 5
- Feshbach
 - formule de -, 88
- Fokker-Planck
 - équation de-, 189
- Fonction
 - s à deux points, 76
 - la - à deux points, 167
 - calcul des -s à deux points, 168
- Frigerio
 - résultat de -, 38
- Gaussien
 - mesure -ne, 112
 - processus -, 113
- Habituelles
 - les conditions-, 106
- Harmonique
 - système à d oscillateurs -s, 56
 - système à un oscillateur -, 42
- Langevin
 - équation de -, 128

- Lindblad
opérateur de - non borné, 18
décomposition de -, 18
représentation intégrale des opérateurs de -, 48
- Liouvillien, 1
 Ω -, 6
 \mathcal{E} -, 12
- standard, 11
- Maîtresse
équation - des physiciens, 36
équation - généralisée, 24
- Markov
multiplement de -, 118
multiplement de - au sens faible, 118
processus N-ien, 119
propriété de -, 117
propriété retournée de -, 121
- Modulaire
conjugaison -, 6
opérateur -, 6
- Pauli-Fierz
hamiltonien de-, 85
- Planck
loi de -, 69
- Positive
application -, 15
application complètement -, 16
- Propre
fonction d'énergie -, 86
- Résolvante
expression de la - projetée, 91
- Résonance
fonction de-, 86
- Représentation
- canonique cyclique, 5
- Séparant
vecteur -, 5
- Semi-groupe
- dynamique quantique, 18
- w^* -continu, 50
- Spectrale
représentation - d'un processus gaussien, 116
- Spin-Boson
liouvillien standard du modèle-, 76
système -, 62
- Standard
forme -, 10
liouvillien -, 11
- Système
 W^* -dynamique, 5
- dynamique quantique, 5
- Tomita-Takesaki
résultat de -, 6
- Van Hove
opérateur de -, 27
opérateur de - pour le modèle Spin-Boson, 65
opérateur de - pour un oscillateur harmonique, 47

RÉSUMÉ

Quelques systèmes quantiques ouverts sont étudiés par la récente théorie des systèmes dynamiques. Un système est couplé à un réservoir, une équation de Volterra dirige son évolution. La limite faible conduit aux résultats markoviens de Davies introduisant les opérateurs de Davies et de Van Hove, calculés formellement. Le semi-groupe de générateur de Davies agit sur les observables du système. On précise des conditions à la complète positivité satisfaites par les modèles connus. Une méthode explicite résout l'équation maîtresse pour un système, formé d'oscillateurs harmoniques, et donne le retour rapide vers l'équilibre. La formule de Feshbach relie la résolvante projetée du liouvillien au générateur de Davies. Des hypothèses spécifiques d'un champ bosonique génèrent des processus gaussiens stationnaires représentés à l'aide d'un mouvement brownien complexe. L'existence d'une mesure invariante prouve l'évolution markovienne de la matrice de densité du système.

ABSTRACT

Some open quantum systems are studied with the recent dynamical systems theory. Volterra equation drives the dynamics of a system interacting with a reservoir. Davies had proven markovian results in the weak limit. Davies generator and Van Hove operator are strictly defined and computed for classical models. A completely positive semigroup acting on the observables of the system is given by its generator-Davies generator. We give conditions to obtain the complete positivity which are satisfied by the standard models. A direct method solves the master equation for a system of harmonic oscillators. We establish relaxation to a steady state which turns out to be an equilibrium state. Feshbach formula links up the resolvent of the liouvillean and Davies generator of the system. Under specific assumptions on the bosonic field, we build a stationary Gaussian process. The dynamics of the density matrices of the system can turned out Markovian if an invariant measure exists.

OPEN QUANTUM DYNAMICAL SYSTEMS

MOTS-CLES

Algèbres de von Neumann. Liouvilliens. Processus gaussiens stationnaires. Systèmes quantiques ouverts. Mécanique statistique. Retour à l'équilibre et états stationnaires. Décomposition spectrale.

KEY WORDS

Von Neumann algebras. Liouvilleans. Stationary Gaussian Processes. Open quantum systems. Equilibrium states. Spectral decomposition. Statistical mechanics.