N° D'ORDRE : 270 Année 1977

THESE

PRÉSENTÉE

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD-LYON

POUR OBTENIR

le titre de DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

Sadok SAGAAMA

Ingénieur Civil des Mines

CONTRIBUTION DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS à L'AIDE A LA DECISION et à L'ANALYSE STRUCTURALE

SOUTENUE LE 11 JUILLET 1977 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM: A. DUSSAUCHOY Président

A. COINDE

J. FAVREL

A. KAUFMANN Examinateurs

H.J. ZIMMERMANN

N° D'ORDRE : 270 Année 1977

THESE

PRÉSENTÉE

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD-LYON

POUR OBTENIR

le titre de DOCTEUR-INGENIEUR

PAR

Sadok SAGAAMA

Ingénieur Civil des Mines

CONTRIBUTION DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS à L'AIDE A LA DECISION et à L'ANALYSE STRUCTURALE

SOUTENUE LE 11 JUILLET 1977 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM: A. DUSSAUCHOY Président

A. COINDE
J. FAVREL
A. KAUFMANN
H.J. ZIMMERMANN

Examinateurs

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

****

Président Honoraire : M. le Pr J. BOIDIN

Président : M. le Pr D. GERMAIN

Premier Vice-Président : M. le Pr E. ELBAZ

Deuxième Vice-Président : M. ROUSSET, Attaché de Recherche

Troisième Vice-Président : M. LOPEZ, Etudiant

Secrétaire Général de l'Université : M. J. RAMBAUD, Administrateur Civil.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE (U.E.R.)

U.E.R. de Médecine GRANGE BLANCHE.....	: Monsieur Bernard SALLE, M.C.A.
U.E.R. de Médecine ALEXIS-CARREL......	: Monsieur le Pr René MORNEX
U.E.R. de Médecine LYON-NORD..........	: Monsieur Jean-Pierre NEIDHART, M.C.A.
U.E.R. de Médecine SUD-OUEST..........	: Monsieur le Pr Jean-NORMAND
U.E.R. de Sciences Pharmaceutiques....	: Monsieur le Pr Charles-Albert BIZOLLON
U.E.R. de Techniques de réadaptation..	: Monsieur Alain MORGON, M.C.A.
U.E.R. de Biologie humaine............	: Monsieur Jean-Pierre REVILLARD, M.C.A.
U.E.R. I.R.E.P.S......................	: Monsieur Albert MILLON, Professeur d'E.P.S.
U.E.R. de Sciences Odontologiques.....	: Monsieur le Dr Roger VINCENT
U.E.R. de Mathématiques...............	: Monsieur le Pr Edmond COMBET
U.E.R. de Physique....................	: Monsieur le Pr Jean DELMAU
U.E.R. de Chimie-Biochimie............	: Monsieur le Pr Jean HUET
U.E.R. de Sciences de la Nature.......	: Monsieur le Pr René GINET
U.E.R. de Sciences Physiologiques.....	: Mademoiselle le Pr Jeanne-Françoise WORBE
U.E.R. de Physique Nucléaire..........	: Monsieur le Pr Mark GUSAKOW
I.U.T. n° 1...........................	: Monsieur le Pr Bernard POUYET
I.U.T. n° 2...........................	: Monsieur J. GALLET, Directeur E.N.S.A.M.
Observatoire de LYON..................	: Monsieur Guy MONNET, Astronome Adjoint
U.E.R. de Mécanique...................	: Mademoiselle le Pr Geneviève COMTE-BELLOT

Je désire exprimer ma grande reconnaissance à Monsieur A. DUSSAUCHOY, Maître de Conférences d'Informatique et de Gestion à l'Université Claude Bernard (LYON 1), Directeur du Gréco-CNRS Rhône-Alpin d'Analyse de Systèmes, qui a dirigé mon travail et qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Je tiens à remercier Monsieur A. COINDE, Directeur du Département Gestion, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, qui a bien voulu m'accueillir dans son Département et qui m'a été d'une aide précieuse tout au long de ce travail.

Je désire remercier Monsieur J. FAVREL, Professeur sans chaire d'Informatique de Gestion à l'INSA de Lyon qui a bien voulu accepter d'être membre du Jury.

Je tiens à assurer ma profonde gratitude à Monsieur A. KAUFMANN, Professeur à l'Université de Louvain (Belgique), qui par ses précieux conseils et ses encouragements, m'a aidé à réaliser cette étude.

Je désire aussi remercier Monsieur H. J. ZIMMERMANN, Professeur-Docteur, Directeur à l'Institut für Wirtschaftswissenschaften d'Aachen (Allemagne Fédérale), qui m'a beaucoup aidé à mener à bien cette tâche.

Mes remerciements iront aussi à Monsieur A. MATHON, qui s'est beaucoup intéressé à ce travail et qui m'a été d'une aide très précieuse, ainsi qu'à Monsieur G. VAYATIS et tous les membres du Département Gestion de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, qui, par leurs conseils, leurs encouragements et leur bonne humeur, m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Et enfin, je remercie Mademoiselle B. ZOLD, Messieurs R. BROSSARD, A. LOUBET et L. DARLES, qui se sont chargés, avec tant de gentillesse, de la réalisation matérielle de ce document.

A papa et maman

A ma fiancée Najette,
auteur moral de cette thèse,
sans l'aide de laquelle ce travail
n'aurait pu aboutir.

TABLE DES MATIERES

****

INTRODUCTION

****

L'emploi de la subjectivité dans l'analyse de la décision n'est pas chose nouvelle.

Dans certaines analyses multicritères, on se voit obligé d'attacher des pondérations subjectives aux différents critères de décision dans le cadre d'une action économique. D'autre part, l'emploi des probabilités subjectives montre un souci de rationaliser une prise de décision à partir d'estimations subjectives.

Mais les sous-ensembles flous, introduits par L.A. ZADEH en 1965, traitent aussi de la subjectivité.

Nous nous proposons, dans cette étude, de montrer l'apport nouveau de la théorie des sous-ensembles flous dans ce domaine. Dans un premier temps, nous la démarquons de celle des probabilités, et des probabilités subjectives en particulier, puis nous étudions certaines applications des sous-ensembles flous à la prise de décision et à l'analyse structurale.

Dans le premier chapitre, nous appelons les notions de treillis, d'algèbre et de σ-algèbre, pour montrer la différence fondamentale entre la théorie des probabilités et celle des sous-ensembles flous, et le bien-fondé de l'utilisation des opérateurs MIN et MAX dans l'ensemble des sous-ensembles flous.

Dans le second chapitre, nous discutons les principes de base des probabilités subjectives, précisons leur limite d'application, et montrons ce que peuvent apporter les sous-ensembles flous au-delà de cette limite ; puis nous traitons un exemple d'aide à la prise de décision subjective.

Nous discutons, ensuite, l'opportunité de l'emploi des opérateurs MIN et MAX, dans le cas d'une décision floue, ce qui nous amène à réfléchir sur la construction de la fonction d'appartenance et son utilisation. La construction se fait à partir d'estimations subjectives.

Pour ce faire, et dans le chapitre III, nous construisons une topologie floue et énonçons les théorèmes (de convergence des suites floues entre autres) qui nous aideront à construire la fonction d'appartenance.

Dans le chapitre IV, nous étudions le problème de la quantification du qualitatif et faisons une synthèse des différentes solutions proposées pour rationaliser le subjectif.

Nous présentons ensuite, une méthode topologique de la construction de la fonction d'appartenance après avoir présenté une méthode expéditive de la quantification du subjectif.

Dans le chapitre V, nous nous intéressons à l'application des sous-ensembles flous à la théorie de l'information et à l'analyse structurale.

Nous présentons une méthode d'analyse structurale basée sur des techniques floues, au lieu de la théorie des graphes, puis nous étudions l'entropie floue et nous la comparons à l'entropie probabiliste au sens de SHANNON.

Dans cette étude, nous n'avons pas utilisé le concept des sous-ensembles P-flous, ni Phi-flous, ni les sous-ensembles flous d'ordre n, mais elle peut être étendue à ces concepts sans difficultés majeures.

NOTATIONS

****

. et ,	désignent la virgule décimale
$\underset{\sim}{A}$	désigne un sous-ensemble flou A
$\underset{\sim}{A} \subset X$	désigne un sous-ensemble A du référentiel X
$\mathbb{R}$	l'ensemble des réels
$\underset{\sim}{\mathcal{F}}$	l'ensemble des sous-ensembles flous réels (référentiel $\mathbb{R}$)
$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \{\mathbb{N} - \{0\}\}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R}_*^+$ ou $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} , x > 0\}$

$C_A =$ complémentaire de l'ensemble vulgaire A

$C_{\underset{\sim}{A}}$ ou $\overline{\underset{\sim}{A}} =$ complémentaire du sous-ensemble flou $\underset{\sim}{A}$

Soit $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle, et $A \subset \mathbb{R}$, $\bar{A}$ désigne la fermeture de l'ensemble A dans $\mathbb{R}$.

$\underset{\sim}{\phi}$ ou $\phi = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ désigne l'ensemble vide

$\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R} = \{(x,1), x \in \mathbb{R}\}$ désigne l'ensemble des réels.

CHAPITRE I

SOMMAIRE

****

I.5 - RAPPELS SUR LES RELATIONS FLOUES

I.5.1 - Relation floue

I.5.2 - Opérations sur les relations floues

I.5.3 - Fermeture transitive d'une relation floue

I.5.4 - Définitions et propriétés des relations floues

I.6 - CONCLUSION DU PREMIER CHAPITRE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous rappellerons d'abord l'axiomatique des treillis, treillis complémentés et algèbres. Nous remarquerons ensuite que les opérateurs MIN et MAX sur des sous-ensembles flous, sont des opérateurs canoniques sur les treillis et enfin, nous essayerons de montrer la différence fondamentale et axiomatique entre les probabilités qui s'appuient au minimum sur un treillis complémenté ou une algèbre, et les sous-ensembles flous qui forment un treillis non complémenté.

I.1 - RAPPEL DE LA THEORIE DES TREILLIS : DEFINITION ENSEMBLISTE [3]

I.1.1 - Relation d'ordre dans un ensemble E

Définition I.1 :

Soit un ensemble E et une relation binaire R définie sur E^2. R est une relation d'ordre sur E si elle vérifie les 3 axiomes suivants :

1°) Réflexivité :

$\forall x \in E$ on a xRx (notée aussi R(x,x))

2°) Antisymétrie :

$\{\text{si } R(x,y) \text{ et } R(y,x))\} \Longleftrightarrow x = y$

3°) Transitivité :

$\forall x, \forall y, \forall z \in E : \{R(x,y) \text{ et } R(y,z)\} \Longrightarrow R(x,z)$

I.1.2 - Relation de couverture associée à une relation d'ordre

Définition I.2 :

Soit (E,R) un ensemble ordonné par la relation R. On dit que $y \in E$ couvre $x \in E$ si :

1°) (xRy)

2°) $x \neq y$

3°) xRz et zRy $\Longrightarrow$ (z = x ou z = y)

Si on note R : $\leqslant$, la définition devient :

1°) $x \leqslant y$
2°) $x \neq y$
3°) $x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow (z = x \text{ ou } z = y)$.

I.1.3 - Sup. demi-treillis

Définition I.3 :

Soit E un ensemble ordonné par une relation d'ordre R, notée $\leqslant$. E est un sup demi-treillis si pour tout x de E et pour tout y de E, x et y admettent une borne supérieure dans E.

Rappelons :

. majorant d'une partie de E (E ordonné) :

$x \in E$ est dit majorant de $\mathcal{P} \subset E$ si $\forall y \in \mathcal{P}$, $y \leqslant x$

. borne supérieure d'une partie $\mathcal{P} \subset E$.

On appelle borne supérieure de $\mathcal{P}$ dans E, le plus petit majorant (s'il existe) de $\mathcal{P}$ dans E.

On appelle aussi élément universel de E (et on le note 1), l'élément (s'il existe) appartenant à E tq: $\forall x \in E$, $x \leqslant 1$.

On appelle élément nul de E (et on le note 0), l'élément (s'il existe) de E tq: $\forall x \in E$, $x \geqslant 0$.

En particulier :

$\sup(x,1) = 1$ $\qquad$ $\sup(x,0) = x$
$\inf(x,1) = x$ $\qquad$ $\inf(x,o) = 0$

Exemple de sup-demi-treillis

Considérons E un enemble quelconque et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E avec la relation d'ordre $\subset$ (inclusion).

Si : $\begin{cases} A \in \mathcal{P}(E) \\ B \in \mathcal{P}(E) \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{P}(E)$ $\quad$ et on a : $\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases}$

de plus $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset E$.

$\Longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est un sup-demi-treillis ayant un élément universel E.

I.1.4 - Inf-demi-treillis

Cette définition est duale de la précédente :

Définition I.4 :

Soit (E,R), R relation d'ordre sur E. E est un inf-demi-treillis si :

$\forall x \in E$, $\forall y \in E$, x et y admettent une borne inférieure dans E.

Exemple :

E ensemble quelconque. $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E avec la relation d'ordre $\subset$:

$$\left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{P}(E) \\ B \in \mathcal{P}(E) \end{array}\right. \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(E) \text{ et on a : } \left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset B \\ A \cap B \subset A \end{array}\right. \Longrightarrow A \cap B \text{ est un}$$

minorant de A et B; mais en fait :

$A \cap B$ est la borne inférieure de A et B.

D'autre part, sachant que $\inf(A,B) = A \cap B$; $\forall A \in E$, on a :

$\inf(A,\phi) = \phi$ et $\phi \in \mathcal{P}(E) \Longrightarrow \phi$ est l'élément nul de $\mathcal{P}(E)$

I.1.5 - Treillis

Définition I.5 :

On appelle treillis un ensemble ordonné qui est à la fois un inf-demi-treillis et un sup-demi-treillis.

Exemple :

a - $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis,

b - un ensemble totalement ordonné est un treillis,

c - dans un treillis possédant un élément universel et un élément nul on a :

$\forall x \in E$, $\sup(x,1) = 1$ $\qquad$ $\inf(x,0) = 0$

$\qquad \inf(x,1) = x$ $\qquad$ $\sup(x,0) = x$

I.2 - APPROCHE ALGEBRIQUES DES TREILLIS

I.2.1 - Axiomes algébriques des sup-demi-treillis

Soit (E,R) un sup-demi-treillis :

Notons : $x + y = \sup(x,y)$. On a les propriétés suivantes :

1°) $x + x = x \iff$ 1°) $\sup(x,x) = x$ (idempotence)

2°) $x + y = y + x \iff$ 2°) $\sup(x,y) = \sup(y,x)$ (commutativité)

3°) $(x+y)+z = x+(y+z) \iff$ 3°) $\sup(\sup(x,y),z) = \sup(x,\sup(y,z))$ (associativité)

en effet :

Si difficulté il y a, c'est au 3ème axiome :

VERIFIONS que :

$$\sup(\sup(x,y),z) = \sup(x,\sup(y,z))$$

Lemme 1 : L'application $\sup : E^2 \to E$ est une isotonie :
$(x, y) \to \sup(x,y)$

i.e si $(a,b) \leqslant (c,d)$ ($\leqslant$ rel d'ordre sur E^2) alors :

$$\sup(a,b) \leqslant \sup(c,d),$$

Démonstration du lemme :

$(a,b) \leqslant (c,d) \iff a \leqslant c$ et $b \leqslant d$ (relation d'ordre sur E^2: $\leqslant$)

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant c \leqslant \sup(c,d) \\ b \leqslant d \leqslant \sup(c,d) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sup(a,b) \leqslant \sup(c,d)$$

de même :

$$b \geqslant d \text{ et } a \geqslant c \Longrightarrow \inf(a,b) \geqslant \inf(c,d)$$

Vérifions l'axiome 3 :

$z \leqslant \sup(y,z) \leqslant \sup(x,\sup(y,z)$

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant x \\ y \leqslant \sup(y,z) \end{array}\right\} \text{ d'après le lemme nous avons } \left\{\begin{array}{l} \sup(x,y) \leqslant \sup(x,\sup(y,z)) \\ z \leqslant \sup(x,\sup(y,z)) \end{array}\right.$$

D'après le lemme 1,

$$\sup(\sup(x,y),z) \leqslant \sup(x,\sup(y,z)) \qquad (1)$$

d'autre part :

$$\left.\begin{array}{l} y \leqslant \sup(x,y) \\ z \leqslant z \end{array}\right\} \Longrightarrow \sup(y,z) \leqslant \sup(\sup(x,y),z)$$

d'autre part :

$$x \leqslant \sup(\sup(x,y),z) \Longrightarrow \text{d'après lemme 1,}$$

$$\sup(x,\sup(y,z)) \leqslant \sup(\sup(x,y),z) \qquad (2)$$

et nous avons :

$$(1) \text{ et } (2) \Longrightarrow 3°)$$

<u>Réciproquement</u> :

Un ensemble E, muni d'une loi de composition interne vérifiant les axiomes 1°), 2°), 3°) est un sup-demi-treillis.

<u>Démonstration</u> :

On introduira d'abord la relation d'ordre dans E, et on montrera que pour cette relation d'ordre, E est un sup-demi-treillis.

La relation binaire $R : E^2 \to E$
$(x,y) \to x+y=y$

est une relation d'ordre.En effet :

1°) $x + x = x$ d'après 1°) i.e réflexivité.

2°) (si on a (xRy et yRx)) $\Longrightarrow$ {si on a $x+y = y$ et $y + x = x$} $\Longrightarrow$ $x = y$ grâce à la commutativité de +

$\Longrightarrow$ antisymétrie.

3°) Transitivté :

$$\forall x,y,z \in E \text{ si } xRy \text{ et } yRz \overset{?}{\Longrightarrow} xRz$$

Nous avons :

$\begin{cases} x + y = y \\ y + z = z \end{cases}$ et, d'après l'associativité $x+z = x+(y+z) = (x+y)+z = y+z = z$

$$\Longrightarrow x + z = z \quad \text{c.q.f.d.}$$

Pour cette relation d'ordre, montrons que (E,R) est un sup-demi-treillis.

1°) $x + y$ majore x et y en effet :

* $xR(x+y)$ puisque : $x + (x+y) = (x+x) + y = x + y$ (d'après l'associativité de "+").

* $yR(x+y) = y + (x+y) = (y+x) + y = (x+y) + y = x + (y+y) = x + y$ (d'après la commutativité et l'associativité de "+")

2°) $x + y$ est le plus petit des majorants de x et de y.

En effet :

$$\text{Supposons : } \exists\, z / xRz \text{ et } yRz \Rightarrow \begin{cases} x+z = z \Longrightarrow x + (y+z) = (x+y) + z = z \\ \text{et} \\ y + z = z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (x+y)Rz \Longrightarrow x+y \leqslant z \qquad \text{c.q.f.d.}$$

I.2.2 - Axiomes algébriques d'inf-demi-treillis

Les axiomes algébriques, sont duaux de ceux de sup-demi-treillis. Par dualité, donc, la loi de borne inférieure, notée ".", vérifie :

1°) $x.x = x$ (idempotence) $\Longleftrightarrow$ 1°) $\inf(x,x) = x$

2°) $x.y = y.x$ (commutativité) $\Longleftrightarrow$ 2°) $\inf(x,y) = \inf(y,x)$

3°) $x.(y.z) = (x.y)z$ (associativité) $\Longleftrightarrow$ 3°) $\inf(\inf(x,y),z) = \inf(x,\inf(y,z))$

la relation d'ordre sera S telle que :

$$S(x,y) \Longleftrightarrow x.y = y$$

et l'on a :

$$\sup(x,y) = x.y$$

et la relation duale est :

$$S*(x,y) \Longleftrightarrow S(y,x)$$

soit : $$S*(x,y) \Longleftrightarrow y.x = x$$

I.2.3 - Axiome algébrique d'un treillis

Dans un treillis E, les lois de borne inférieure et de borne supérieure vérifient évidemment les axiomes respectifs au sup-demi-treillis et inf-demi-treillis.

Toutefois la réciproque n'est pas vraie : car on obtient un sup-demi-treillis pour la relation d'ordre R, un inf-demi-treillis pour la relation d'ordre S*. Pour que E soit un treillis il faut que R et S* coïncident ce qui nécessite la donnée d'axiomes supplémentaires.

4°) $x + x.y = x \Longleftrightarrow \sup(x, \inf(x,y)) = x$ (absorption)

5°) $x.(x+y) = x \Longleftrightarrow \inf(x, \sup(x,y) = x$

et avec ces 2 axiomes, la réciproque sera vraie en choisissant comme relation d'ordre :

$$x \leqslant y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x+y = y \Longleftrightarrow x.y = x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sup(x,y) = x+y \\ \sup(x,y) = x.y \end{cases}$$

I.2.4 - Treillis distributifs et treillis complémentés

Définition I.6 : Treillis distributifs

Un treillis est dit distributif, si chacune des deux lois est distributive par rapport à l'autre.

i.e :

a) $x.(y+z) = x.y + x.z$

b) $x+y.z = (x+y).(x+z)$ b) est dual de a)

Définition I.7 : Complément d'un élément

Soit E un treillis possédant un élément nul 0 et un élément universel 1, on appelle complément d'un élément x, tout élément x' de E, s'il existe :

tel que : $x.x' = 0$

$$x + x' = 1$$

Théorème I.1 :

Dans un treillis E, distributif, le complément d'un élément, s'il existe, est unique.

Dem :

Supposons qu'il existe x' et x", compléments de x dans E.

$x' = x'.1 = x'.(x+x'') = x'.x + x'.x'' = x'.x''$, car $x'.x = 0$

$x'' = x''.1 = x''.(x+x') = x''.x + x''.x' = x''.x' = x'.x''$ (commutativité)

$\Longrightarrow x' = x'' \Longrightarrow$ le complément s'il existe est unique.

Définition I.8 : Treillis complémenté

Soit E, un treillis

E est dit complémenté si E possède un élément universel 1 et un élément nul 0 et si $\forall x \in E$, il existe au moins un complément de x dans E tq : $\begin{cases} x + x' = 1 \\ x.x' = 0 \end{cases}$

I.2.5 - Algèbre de Boole (ou treillis de Boole)

Définition I.9 :

On appelle algèbre de Boole, tout treillis distributif et complémenté et on a en particulier $(x')' = x$ (d'après l' unicité du complémentaire).

Règle de Morgan

$$(x+y)' = x'.y' \text{ et } (x.y)' = x' + y'$$

Démonstration

il suffit d'établir l'égalité :

$$(x+y)' = x'.y'$$

En effet :

$$x + y + x'.y' = (x+y+x').(x+y+y') = 1.1 = 1$$

$$(x+y).x'.y' = x.x'y' + y.x'y' = 0 + 0 = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Exemple :

Soit E un ensemble, alors $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de Boole. En effet :

On a montré que $\mathcal{P}(E)$ est un treillis. D'autre part, $A \cap B = \inf(A,B)$, $A \cup B = \sup(A,B)$ jouent le rôle de . et + respectivement.

On a : $\left.\begin{array}{l} A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(B\cap C) \\ A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(B\cup C) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est distributif

$\mathcal{P}(E)$ est complémenté en effet :

. E est l'élément universel

. ϕ est l'élément neutre.

$$\left.\begin{array}{l} A \cap C_A = \phi \\ A \cup C_A = E \end{array}\right. \quad \text{et ce complémentaire est unique}$$

Du point de vue ensembliste et avec la relation d'ordre $\subset$ et les opérations $\cap$ (intersection) et $\cup$ (union), $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de Boole.

Définition I.10 : Algèbre

X, un ensemble.

On appelle algèbre de Boole sur X, une famille $\mathcal{a}$ de sous-ensembles de X vérifiant :

1°) $\phi \in \mathcal{a}$

2°) $\left.\begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{a} \\ \forall B \in \mathcal{a} \end{array}\right\} A \cup B \in \mathcal{a}$

3°) $\forall A \in \mathcal{a}, C_A \in \mathcal{a}$

I.3 - TRIBU OU σ-ALGEBRE DE BOOLE

I.3.1 - Définition I.11

Soit X un ensemble, $\mathcal{a}$ une algèbre de Boole sur X. $\mathcal{a}$ est une tribu si en plus :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{a} \Rightarrow \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{a}$$

I.3.2 - Probabilités

Définition I.12

Une probabilité est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{a})$ où $\mathcal{a}$ est une algèbre sur Ω, prenant ses valeurs dans $[0,1]$.

En particulier, elle vérifie les axiomes suivants :

1°) $\forall A \in \mathcal{a}, P(A) \geq 0$

2°) $\left.\begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{a} \\ \forall B \in \mathcal{a} \end{array}\right\}$ tq $A \cap B = \phi$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3°) $P(E) = 1$.

Conséquences :

a) $$P(\phi) = 0$$

b) $$P(C_A) = 1 - P(A)$$

Si $\mathcal{A}$ est une tribu ou σ-algèbre, l'axiome 2) devient :

2') si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcup_1^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

I.4 - ALGEBRE DE BOOLE ET SOUS-ENSEMBLES FLOUS

I.4.1 - Préliminaire

Soit E un ensemble, $A \subset E$. On définit l'application :

$$E \to \{0,1\}$$

$$x \xrightarrow{\chi_A} \chi_A(x) / \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple :

Prenons E fini, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$A = \{x_2, x_4, x_5\}$$

Nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l} \chi_A(x_1) = 0 \\ \chi_A(x_2) = 1 \\ \chi_A(x_3) = 0 \\ \chi_A(x_4) = 1 \\ \chi_A(x_5) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_1, x_3\} \not\subset A$$

Nous pouvons expliciter ceci en disant :

Que A est formé des éléments suivants :

- x_1 de poids 0, ou de degré d'appartenance 0, ou n' appartient pas à A.

- x_2 de poids 1, ou de degré d'appartenance 1, ou appartient à A.

- x_3, qui a la même propriété que x_1,

et - x_4, x_5 qui ont la même propriété que x_2, ce qui revient à dire :

$$A = \{(x_1,0),(x_2,1),(x_3,0)(x_4,1)(x_5,1)\};$$

tout se passe comme si : $A = \{(x,\chi_A(x)/x \in E\}$.

de même on a : $C_A = \overline{A} = \{x_1,x_3\}$

On peut noter de même :

$$\overline{A} = \{(x_1,1),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,0)(x_5,0)\}$$

où

$$\overline{A} = \{(x,\chi_{\overline{A}}(x))/x \in E\} \Longleftrightarrow \overline{A} = \{(x,1-\chi_A(x))/x \in E\}$$

On vérifie avec cette notation que : $A \subset B$ si $\chi_A \leqslant \chi_B$

et

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset E \\ B \subset E \end{array}\right. \Rightarrow \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset E \\ B \subset E \end{array}\right. \Rightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

. et + étant des opérations de l'algèbre de Boole des fonctions caractéristiques de sous-ensembles de E.

Nous avons vu, dans ce préliminaire, une autre façon de représenter des sous-ensembles d'un ensemble E, en considérant l' alternative suivante : $x \in A$ ou $x \notin A$, si A est un sous-ensemble de E. C'est-à-dire qu'on a $(x,1)$ ou $(x,0)$.

Nous pouvons nous poser la question suivante : en oubliant le rôle de la fonction caractéristique de A, pourquoi ne pas considérer des alternatives plus souples : dire par exemple que $x \in A$ avec un degré d'appartenance de 0,99 ou 0,8 ou 0,5 ou 0,00001 c'est-à-dire que le poids d'un élément d'un ensemble, pourrait être considéré comme appartenant à $[0,1]$ et plus seulement à $\{0,1\}$.

Les sous-ensembles flous répondent à cette question.

I.4.2 - Sous-ensembles flous

Définition de L. A. ZADEH [33],[15] :

Soit E un ensemble dénombrable ou non, et $x \in E$. Alors un sous-ensemble flou (noté $\underset{\sim}{A}$) de E est un ensemble de couples :

$$\{(x,u\ (x)),\ \forall x \in E\}$$

où u(x) est le degré d'appartenance de x dans A (et sera notée $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$). Ainsi, si $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$ prend ses valeurs dans un ensemble M appelé "ensemble d'appartenance". on peut dire que x prend ses valeurs dans M par la fonction : $E \to M$

$$x \to u_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

De même, on peut définir un sous-ensemble flou en définissant sa fonction d'appartenance.

Définition I.13 [13] :

Un M-sous-ensemble flou $\underset{\sim}{A}$ d'un ensemble de référence E est une application de $E \to M$.

a) Relation d'ordre sur les sous-ensembles flous : l'inclusion

Notation :

Nous noterons (E,M), l'ensemble de référence E et son ensemble d'appartenance M, qui est au moins un treillis distributif.

Définition I.14 :

Soit (E,M) et

$\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ deux sous-ensembles flous de E.

Nous dirons que $\underset{\sim}{A}$ est inclu dans $\underset{\sim}{B}$ ($\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$), si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ u_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq u_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

b) Intersection

Définition I.15 :

Soit (E,M), M = [0,1] et $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ deux sous-ensembles flous de E.

Alors, $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ est le plus grand sous-ensemble flou contenu à la fois dans $\underset{\sim}{A}$ et dans $\underset{\sim}{B}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E : u_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mathrm{MIN}(u_{\underset{\sim}{A}}(x), u_{\underset{\sim}{B}}(x))$$

c) Réunion

Définition I.16 :

Soit (E,M) . $M = [0,1]$

$\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ deux sous-ensembles flous de E. Alors la réunion de $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ ($\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$) est le plus petit sous-ensemble flou contenant à la fois $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ et on a :

$$u_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \mathrm{MAX}(u_{\underset{\sim}{A}}(x), u_{\underset{\sim}{B}}(x))$$

Théorème I.2 :

Soit (E,M), $M = [0,1]$

L'ensemble des sous-ensembles flous de E, ordonnés par $\subset$, muni des opérateurs $\cap$ et $\cup$ est un treillis distributif.

L'élément universel est $\{(x,1)/x \in E\}$ noté $\underset{\sim}{E}$, l'élément nul est $\{(x,0)/x \in E\}$ noté $\underset{\sim}{\phi}$.

Démonstration

Triviale d'après les définitions précédentes.

Nous remarquons toutefois que la structure de M "impose" en quelque sorte la structure de l'ensemble des sous-ensembles flous de E [7], [13].

d) Complémentaire

Définition I.17 :

Soit (E,M),

et $\underset{\sim}{A}$ un sous-ensemble flou de E. Alors le complémentaire de $\underset{\sim}{A}$ est noté $\underset{\sim}{\bar{A}}$ et on a $\underset{\sim}{\bar{A}} = \{x \in E / u_{\underset{\sim}{\bar{A}}}(x) = 1 - u_{\underset{\sim}{A}}(x)\}$. (On remarque le rapprochement avec la fonction caractéristique vue précédemment).

- Remarque importante :

L'ensemble des sous-ensembles flous n'est pas complémenté. En effet :

Si $\underset{\sim}{A}$ est un sous-ensemble flou de E, on a en général :

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{\bar{A}} \neq \underset{\sim}{E}, \text{ et } \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{\bar{A}} \neq \underset{\sim}{\phi}$$

En effet, considérons :

$$E = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1|0{,}8),(x_2|0{,}8),(x_3|0{,}8)\}$$

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = \{(x_1|0{,}2),(x_2|0{,}2),(x_3|0{,}2)\}$$

et on a $\overline{\underset{\sim}{A}} \subset \underset{\sim}{A}$.

De même : $$\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A} \neq \underset{\sim}{E}$$

I.4.3 - Différence fondamentale avec la théorie des probabilités

Au début, on est tenté de dire, qu'étant donné $A \subset E$, si $x \in A$ avec un degré d'appartenance $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$, $x \in A$ avec $(u_{\underset{\sim}{A}}(x) \times 100)$ de chances.

Exemple :

Si $u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0{,}5$ on est tenté de dire que $x \in A$ avec 50 % de chances, donc consciemment, ou inconsciemment on raisonne d'une façon probabiliste.

Or, il faut bien voir que la théorie des sous-ensembles flous n'a rien à voir avec la théorie des probabilités et c'est d'ailleurs dans ce but que le rappel sur les treillis et l'algèbre de Boole a été fait.

En effet, une probabilité est définie sur une famille d'ensembles qui forment au moins un treillis complémenté ou une algèbre de Boole (dans le cas général, c'est une σ-algèbre de Boole) c'est-à-dire où chaque élément est complémenté, et a un complémentaire unique, complémentaire dans le sens de la théorie de l'algèbre de Boole.

Or, la définition, quoique naturelle, de la complémentation au sens des sous-ensembles flous, n'est pas comparable avec celle des ensembles (dits vulgaires), qu'on a étudié jusque maintenant en mathématiques.

De plus, les lois $\cup$ et $\cap$ sur les sous-ensembles flous utilisés en association avec les opérateurs MAX et MIN constituent une généralisation de la réunion et de l'intersection des ensembles classiques. Il faut ajouter que les degrés d'appartenance, sont subjectifs et si l'on veut, on peut les choisir comme ne répondant à aucune loi probabiliste.

La valuation du flou n'est pas une mesure statistique, dans le sens où la mesure statistique concerne des évènements incertains, alors que le flou traite de l'imprécis non mesurable.

Nous verrons plus loin, dans le chapitre II particulièrement, que la quantification subjective du flou ne pourra même pas être comparable aux probabilités subjectives.

I.5 - RAPPELS SUR LES RELATIONS FLOUES

I.5.1 - Relation floue

Définition I.18 :

Soit E un ensemble, et M un treillis distributif.

Une relation floue $\underset{\sim}{R}$ dans E est une application de :

$$E \times E \to M$$
$$(x,y) \to u_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

I.5.2 - Opérations sur les relations floues [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{Q}$ deux relations floues de $E \times E \to M$:

a) Réunion

La réunion de deux relations floues $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{Q}$ est une relation floue notée $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Q}$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{Q}}(x,y) = MAX(u_{\underset{\sim}{R}}(x,y), \ u_{\underset{\sim}{Q}}(x,y)$$

b) Intersection

L'intersection de deux relations floues est une relation floue notée $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Q}$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{Q}}(x,y) = MIN(u_{\underset{\sim}{R}}(x,y), \ u_{\underset{\sim}{Q}}(x,y))$$

c) Produit

Le produit de deux relations floues $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{Q}$ est une relation floue notée $\underset{\sim}{R}.\underset{\sim}{Q}$, telle que $u_{\underset{\sim}{R}.\underset{\sim}{Q}}(x,y) = u_{\underset{\sim}{R}}(x,y).u_{\underset{\sim}{Q}}(x,y)$ dans le cas où $M = [0,1]$.

Nous pouvons imaginer d'autres opérateurs sur les relations floues (voir [15]), mais nous nous contenterons par la suite de ces trois opérateurs.

d) Complément d'une relation floue

Dans ce cas, M doit être un treillis, ayant un élément nul et un élément unité.

Soit $\underset{\sim}{R} : E \times E \to M$

$(x,y) \to u_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$

le complément de la relation floue $\underset{\sim}{R}$ est une relation floue notée $\underset{\sim}{\overline{R}}$ telle que $u_{\underset{\sim}{\overline{R}}}(x,y) = 1 - u_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$.

e) Composition de deux relations floues

Soit $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{Q}$ deux relations dans E. La composition de $\underset{\sim}{R}$ et $\underset{\sim}{Q}$ notée $\underset{\sim}{R}o\underset{\sim}{Q}$ est une relation floue telle que :

$$u_{\underset{\sim}{R}o\underset{\sim}{Q}}(x,y) = \underset{Z}{MAX}[MIN(u_{\underset{\sim}{R}}(x,Z), u_{\underset{\sim}{Q}}(Z,y)], \quad \forall Z \in E$$

Notation :

Nous noterons par la suite : MAX = V ; MIN = Λ.

f) Relation formelle la plus proche d'une relation floue

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation dans E.

La relation formelle la plus proche de $\underset{\sim}{R}$, notée $\underset{\approx}{R}$ est telle que :

$$u_{\underset{\approx}{R}}(x,y) = 0 \text{ si } u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) < 0,5$$

$$u_{\underset{\approx}{R}}(x,y) = 1 \text{ si } u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq 0,5$$

I.5.3 - Fermeture transitive d'une relation floue [15]

a) Transitivité d'une relation floue

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation dans E.
$\underset{\sim}{R}$ est dite transitive MAX - MIN si : $\forall (x,y) \in E^2$:

$$u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geqslant \bigvee_{Z \in E} (u_{\underset{\sim}{R}}(x,Z) \wedge u_{\underset{\sim}{R}}(Z,y)), \quad \forall Z \in E$$

Conséquence :

$$\underset{\sim}{R} \text{ transitive} \Longleftrightarrow \underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R} \text{ avec } \underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{R} o \underset{\sim}{R}.$$

b) Chemin dans un graphe flou

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation dans E, et $C = (x_{i1}, \ldots, x_{ir}) \in E^r$ avec $u_{\underset{\sim}{R}}(x_{iR}, x_{iR+1}) > 0$, $1 \leqslant k < r$.

Alors C est appelé un chemin dans le graphe flou correspondant à la relation $\underset{\sim}{R}$.

c) Poids d'un chemin flou

Notons :

$$l(x_i, \ldots, x_{ir}) = u_{\underset{\sim}{R}}(x_i, x_{i2}) \wedge u_{\underset{\sim}{R}}(x_{i2}, x_{i3}) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{R}}(x_{ir-1}, x_{ir})$$

Soit $C(x_i, x_j)$, l'ensemble des chemins reliant x_i à x_j, et $l^*(x_i, x_j) = \bigvee_{C \in C(x_i, x_j)} l(x_i = x_{i1}, \ldots, x_{ir} = x_j)$

Alors $l^*(x_i, x_j)$ est appelé, poids du chemin (x_i, x_j) s'il existe.

d) Fermeture transitive d'une relation floue

Théorème I.3 [15]

Soit E un ensemble avec card E = n, $n < +\infty$, et $\underset{\sim}{R}$ une relation dans E.

Alors la fermeture transitive de $\underset{\sim}{R}$, notée $\hat{\underset{\sim}{R}}$ est telle que :

$$\hat{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{R}^2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{R}^n$$

Théorème I.4 [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E et $\hat{\underset{\sim}{R}}$ sa fermeture transitive. Alors $u_{\hat{\underset{\sim}{R}}}(x,y) = 1^*(x,y) = \bigvee_{C \in C(x,y)} 1(x_{i1} = x,\ldots,x_{ir} = y)$.

Conséquence :

$\hat{\underset{\sim}{R}}$ est la plus petite relation transitive contenant $\underset{\sim}{R}$ [6].

I.5.4 - Définitions et propriétés des relations floues

I.5.4.1 - Relation floue réflexive

Définition I.19 :

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.
$\underset{\sim}{R}$ est dite réflexive si et seulement si : $\forall x \in E, u_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$.

- Remarque :

Nous pouvons donner une autre définition de la réflexivité qui se ramène, à une homothétie près, à la définition donnée, à savoir :

$\underset{\sim}{R}$ est réflexive $\Longleftrightarrow \forall x \in E$, $u_{\underset{\sim}{R}}(x,x)$ sont égaux et maximaux. i.e : $\forall (x,y) \in E^2$, $x \neq y \Longleftrightarrow u_{\underset{\sim}{R}}(x,x) > u_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$.

I.5.4.2 - Relation floue symétrique

Définition I.20 :

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.
$\underset{\sim}{R}$ est dite symétrique si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = u_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

I.5.4.3 - Relation floue antisymétrique

Définition I.21 :

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.
$\underset{\sim}{R}$ est antisymétrique si et seulement si :

$$(u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \neq u_{\underset{\sim}{R}}(y,x)) \text{ ou} (u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) = u_{\underset{\sim}{R}}(y,x) = 0), \forall (x,y) \in E^2.$$

I.5.4.4 - Relation de ressemblance, dissemblance, similitude, dissimilitude.

a) Relation de ressemblance : [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E

$\underset{\sim}{R}$ est une relation de ressemblance, si et seulement si :

1°) $\underset{\sim}{R}$ est réflexive

2°) $\underset{\sim}{R}$ est symétrique.

- Remarque :

Une relation de ressemblance, selon KAUFMANN [15], est une similarité, selon DEFAYS [6], de laquelle on peut en déduire une hiérarchie indicée (grâce aux algorithmes de JOHNSON [14], par exemple la "Minimum-method"), et la "relation floue" obtenue par la minimum-method est en fait la fermeture transitive de la relation initiale [6].

b) Relation de dissemblance : [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.

$\underset{\sim}{R}$ est une relation de dissemblance si, et seulement si :

1°) $\underset{\sim}{R}$ est antiréflexive.

2°) $\underset{\sim}{R}$ est symétrique.

Conséquence :

Si $\underset{\sim}{R}$ est une relation de ressemblance, la relation complémentaire $\underset{\sim}{\overline{R}}$ est une relation de dissemblance.

c) Relation de similitude : [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.

$\underset{\sim}{R}$ est une relation de similitude si, et seulement si :

1°) $\underset{\sim}{R}$ est réflexive

2°) $\underset{\sim}{R}$ est symétrique

3°) $\underset{\sim}{R}$ est transitive (MAX-MIN)

Théorème I.5

Une relation de similitude au sens de KAUFMANN [15], est une similarité ultramétrique au sens de DEFAYS [6].

Démonstration :

Soit E un ensemble et M un treillis.
Une similarité ultramétrique est une relation

$$S' : E \times E \to M$$
$$(x,y) \to S(x,y)$$

1°) S' est réflexive
2°) S' est symétrique
3°) $S(x,y) \geqslant \inf(S(x,Z),S(Z,y)) \ \forall Z \in E.$

$$S(x,y) \geqslant S(x,Z) \wedge S(Z,y) \quad \forall Z \in E \Longrightarrow$$

$$S(x,y) \geqslant \bigvee_{Z} (S(x,Z) \wedge S(Z,y)) \Longrightarrow S' \text{ est transitive MAX-MIN}$$

S' est appelé inframétrique [16], et donc S' représente une relation de similitude.

Réciproquement :

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation de similitude avec $u_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=S(x,y)$.
En particulier :

$$S(x,y) \geqslant \bigvee_{Z}(S(x,Z) \wedge S(Z,y)) \ \forall Z \in E \Rightarrow S(x,y) \geqslant S(x,Z) \wedge S(Z,y) \ \forall Z \in E,$$

et donc S' est une similarité ultramétrique.

d) Relation de dissimilitude [15]

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation floue dans E.
$\underset{\sim}{R}$ est une relation de dissimilitude si, et seulement si :

1°) $\underset{\sim}{R}$ est antiréflexive
2°) $\underset{\sim}{R}$ est symétrique.
3°) $\underset{\sim}{R}$ est transitive (MIN-MAX)

Conséquence :

Soit $\underset{\sim}{R}$ une relation de similitude, transitive MAX-MIN, alors $\overline{\underset{\sim}{R}}$ est une relation de dissimilitude, transitive MIN-MAX.

e) Distance ultramétrique et relation de dissimilitude

Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$

d est une distance ultramétrique si et seulement si :

1°) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2°) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$

3°) $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) \leq \sup\{d(x,Z), d(Z,y)\}, \forall Z \in E$.

$$d(x,y) \leq d(x,Z) \vee d(Z,y) \; \forall Z \in E \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \bigwedge_{Z \in E} \{d(x,Z) \vee d(Z,y)\}$$

et nous retrouvons la transitivé MIN-MAX.

Par la suite, il suffit d'avoir une relation de ressemblance pour construire une hiérarchie indicée, ou pour dégager les sous-relations maximales de similitude de cette relation.

I.6 - CONCLUSION DE CE PREMIER CHAPITRE

Nous avons remarqué dans ce chapitre, la différence fondamentale entre la théorie des probabilités et les sous-ensembles flous, et que les opérateurs MAX et MIN, sont des opérateurs naturels sur l'ensemble des sous-ensembles flous qui est un treillis. Nous utiliserons, par la suite, les propriétés des relations floues pour essayer de montrer les interactions, de dégager les similitudes et dissimilitudes entre sous-ensembles flous, qui seront des observations qualitatives, et nous verrons plus loin les problèmes de la quantification du qualitatif.

C H A P I T R E II

****

SOMMAIRE

****

II.1 - INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre, le cas d'une prise de décision non objective, après avoir esquissé le cas d'un critère de décision objectif.

Nous ne nous attarderons pas sur les techniques mathématiques de la théorie de la décision : les décisions déterministes ou aléatoires ont été très étudiées, mais nous nous intéresserons à un univers où "les observations sont nombreuses, plus ou moins précises, et souvent qualitatives" [12].

Dès lors, le problème n'est plus seulement d'optimiser une fonction économique, mais aussi d'expliquer et d'analyser les relations mêmes floues qu'entretiennent entre eux les éléments d'un système décisionnel.

Ainsi, nous aurons besoin de quantifier le qualitatif, tout en restant fidèles le plus possible au cas réel posé : nous discuterons alors de certains critères de décision ayant trait à la subjectivité, en essayant de montrer que si dans beaucoup de cas, les techniques de décisions objectives sont les bienvenues, il n'en reste pas moins qu'il nous est difficile d'échapper parfois à la subjectivité. Le problème est alors de la rationaliser, là où nous sommes obligés de prendre des décisions "non programmables qui ne peuvent souvent s'aborder qu'à tâtons au gré de l'intuition" [25].

D'autre part, l'emploi de la subjectivité dans les techniques de prise de décision n'est pas nouvelle.

Dans certaines analyses multicritères, nous nous voyons obligés d'attacher des pondérations subjectives aux différents critères de décision dans le cadre d'une action économique [12].

D'un autre côté, la méthode DELPHI [12], est un exemple éclatant d'outil d'aide à la décision, se basant sur des estimations subjectives, de même que les probabilités dites "subjectives".

La théorie des sous-ensembles flous vise à "valuer" (1) subjectivement l'imprécis non mesurable.

A priori, le point commun entre la théorie des sous-ensembles flous et les probabilités subjectives est le caractère subjectif des valuations [29].

Il y a plusieurs méthodes pour valuer ou quantifier le subjectif. Nous essayerons de voir, dans ce chapitre, ce que peuvent apporter les sous-ensembles flous dans ce domaine.

Nous partirons d'une arborescence de décision, pour montrer clairement le glissement vers la subjectivité dans la prise de décision, et nous discuterons les forces et les faiblesses des méthodes utilisées.

II.2 - ANALYSE DE LA DECISION DANS UN UNIVERS ALEATOIRE

II.2.1 - Le problème posé

Prenons l'exemple de décision suivant :

Supposons qu'un joueur (décideur), dispose de 100 urnes. Une urne pouvant être de deux types :

- Type 1, et nous la notons T1 : elle contient six boules blanches et quatre boules noires.

- Type 2, et nous la notons T2 : elle contient quatre boules blanches et six boules noires.

La décision à prendre consiste à dire si une urne est du type T1 ou T2, le jeu étant sanctionné par un gain (G) ou une perte (P).

Supposons que le décideur n'a que trois alternatives (i.e. trois types d'actions).

- L'action A1 : il ne joue pas

---

(1) Terme emprunté au Pr KAUFMANN

- L'action A2 : il joue mais en décidant tout de suite si l'urne est du type T1 ou T2.

- L'action A3 : il a droit à un tirage, moyennant un péage de 3 francs.

Les décisions qu'il est amené à prendre au cas où il décide de jouer, sont de deux types :

- Décision D1 : il décide que l'urne est du type 1.

- Décision D2 : il décide que l'urne est du type 2

Supposons enfin, que le gain est de 60 F s'il décide D1 quand T1 est l'état de nature. Il perd 30 F s'il décide D1 quand T2 est l'état de nature.

Dans l'autre cas, il perd 10 F s'il décide D2 quand T1 est l'état de nature et gagne 100 F sinon.

Nous avons donc l'arbre séquentiel de décision suivant dans la FIG. II.1

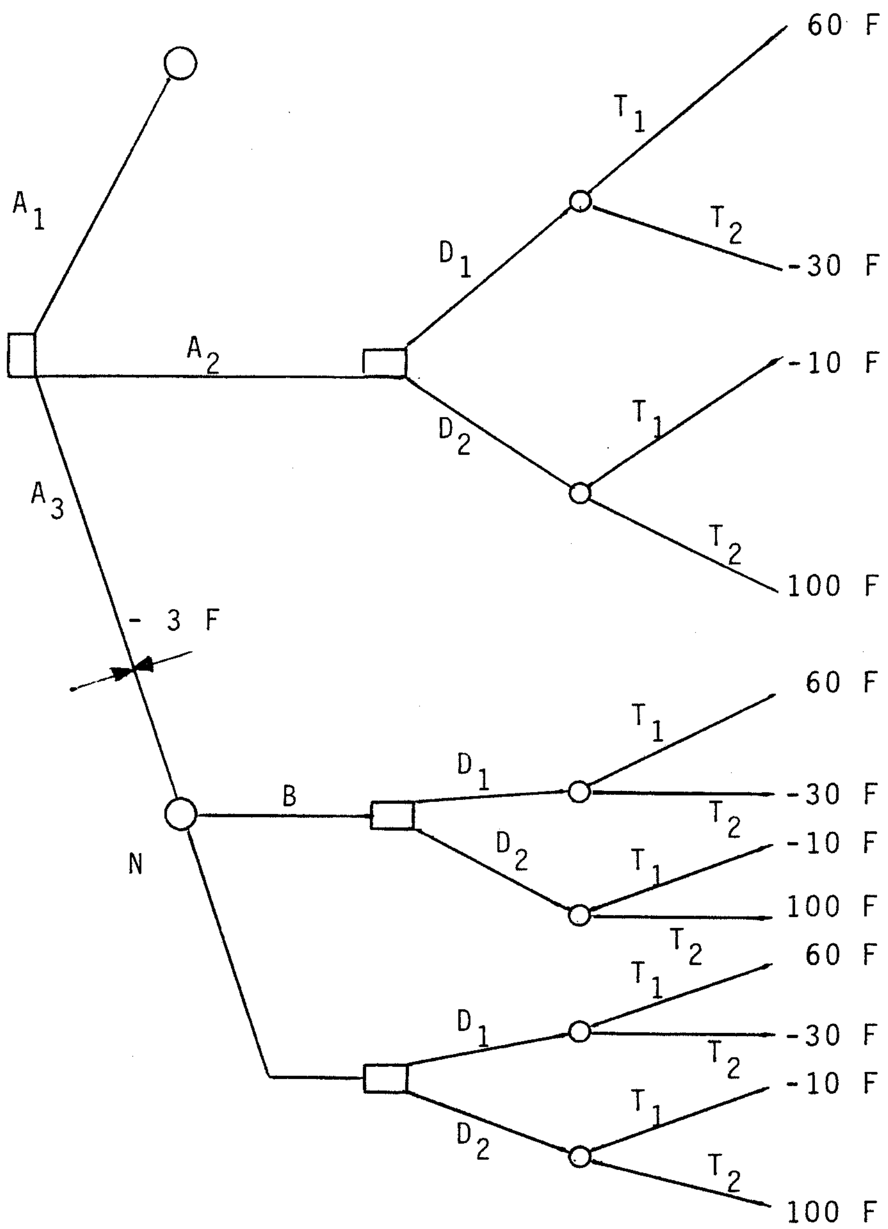


FIG II.1

Enfin, nous lui précisons, qu'il y a 70 urnes du type T1 et 30 urnes du type T2.

II.2.2 - Critère de décision objectif [26]

Supposons que la fonction économique à optimiser est l'espérance mathématique du gain (E.M.G.) et que le décideur est un joueur à critère E.M.G., c'est-à-dire que si on lui offre une somme S supérieure à l'E.M.G., il doit vendre son droit de tenter sa chance. Sinon, il refuse. Il nous faut donc calculer son espérance mathématique du gain à l'embranchement où la chance décide (FIG. II.1).

Dans cette arborescence, tous les évènements sont aléatoires. Dans les figures, le petit "rond" désigne l'évènement où la chance décide, le carré désigne le noeud de prise de décision.

Pour pouvoir calculer l'E.M.G. à chaque embranchement où la chance décide, nous devons garnir les branches de l'arbre de décision, avec les probabilités correspondant aux évènements que représentent ces branches.

Nous avons : Dans l'action A_2 (FIG. II.2)

$P(T_1) = 0.7$

$P(T_2) = 0.3$

$EMG(D_1) = 0.7 \times 60 - 0.3 \times 30 = 33$ F

$EMG(D_2) = - 0.7 \times 10 + 0.3 \times 100 = 23$ F

Soit :

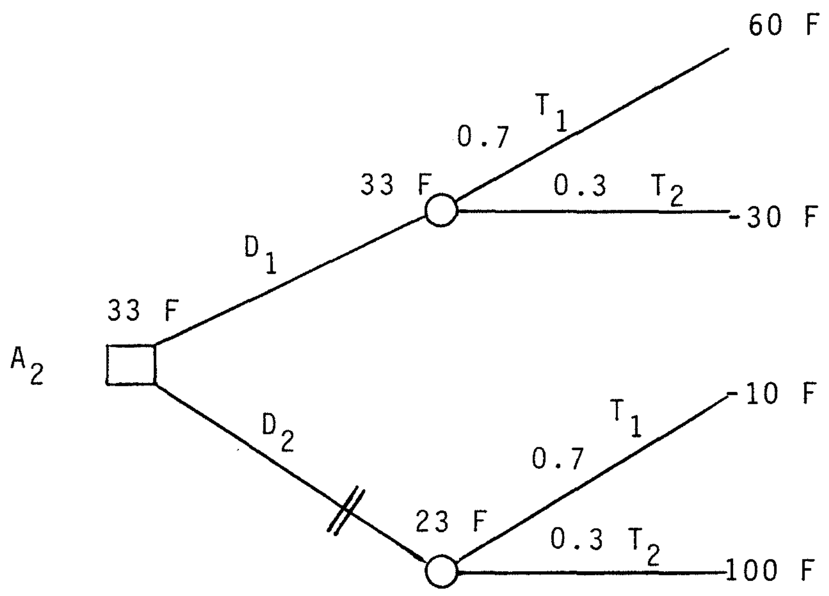


FIG II.2

Etant un joueur à critère E.M.G., et sachant que $EMG(D_1) > EMG(D_2)$ il doit décider D_1. (On barre la branche D_2 dans A_2). En effet, cette décision lui permettra de vendre ses droits plus chers, ou bien de gagner plus (en absolu).

Dans la branche A_3 (FIG. II.3)

Calculons les probabilités des branches où la chance décide. Nous remarquons encore une fois (et c'est très important pour la suite), qu'ayant pris un critère objectif (E.M.G.), cela lui a permis (et il n'a pas le choix) de traiter avec les évènements incertains (aléatoires), donc ayant une probabilité.

Pour cela, nous devons chercher :

$P(T_1/B)$, $P(T_2/B)$, $P(T_1/N)$ et $P(T_2/N)$, ceci connaissant $P(B/T_1)$, $P(B/T_2)$, $P(N/T_1)$, $P(N/T_2)$.

Nous rappelons la formule de BAYES :

$$P(T_1/B) = \frac{P(B/T_1) \times P(T_1)}{P(B/T_1).P(T_1) + P(B/T_2)P(T_2)}$$

le dénominateur étant ici P(B).

Cette formule étant évidemment valable pour l'évènement (T_2,N).

On a :

$$P(T_1) = 0.7$$
$$P(T_2) = 0.3$$
$$P(B/T_1) = 0.6$$
$$P(B/T_2) = 0.4$$
$$P(N/T_1) = 0.4$$
$$P(N/T_2) = 0.6$$
$$P(T_1/B) = \frac{0.6 \times 0.7}{0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3} = 0.77$$
$$P(T_2/B) = 1 - 0.77 = 0.23 \quad (A \cap CA = \phi).$$
$$P(B) = 0.54 = P(B \cap T_1) + P(B \cap T_2)$$
$$= P(B/T_1).P(T_1) + P(B/T_2).P(T_2)$$

$P(N) = 0.46$

$P(T_1/N) = \frac{0.4 \times 0.7}{0.46} = 0.609$

$P(T_2/N) = \frac{0.18}{0.46} = 0.391$

L'arbre de décision de l'action A_3 sera :

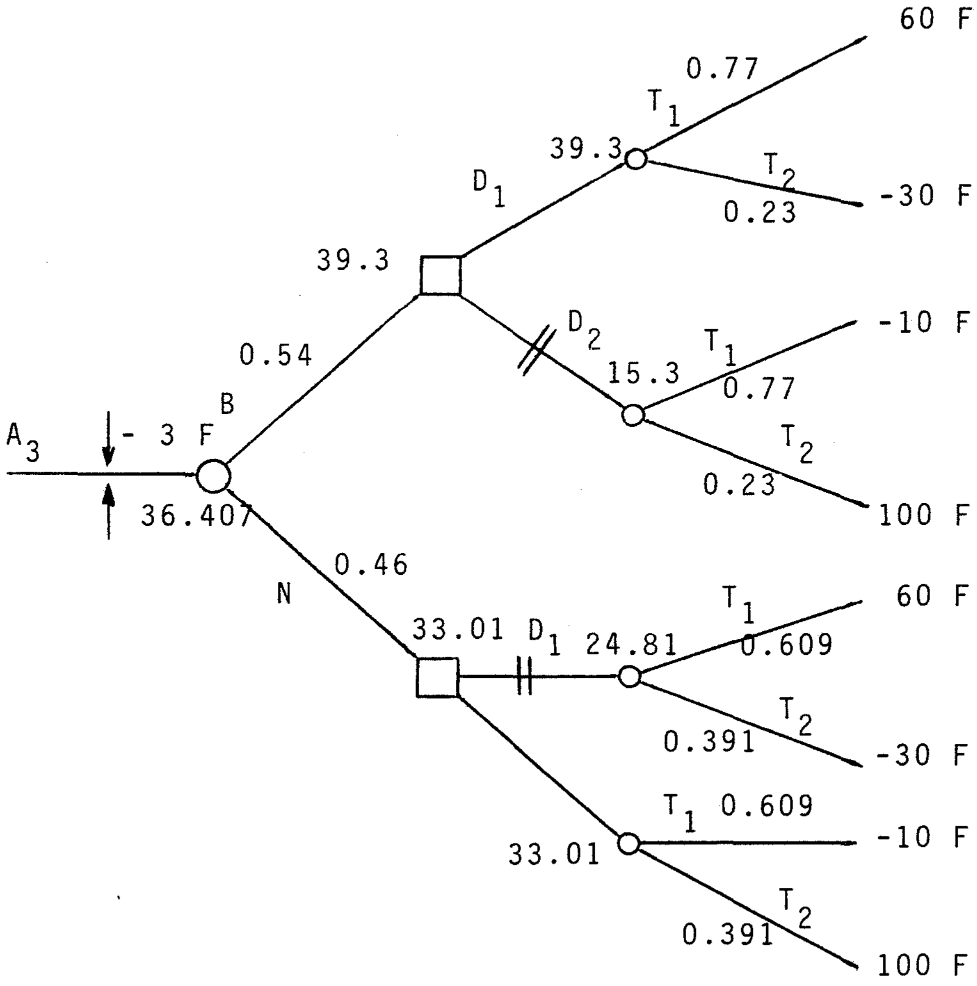


FIG II.3

$EMG(D_1,B) = 60 \times 0.77 - 0.23 \times 30 = 39.3$ F
$EMG(D_2,B) = - 10 \times 0.77 + 0.23 \times 100 = 15.3$ F
} Prendre D_1 si B

$EMG(D_1,N) = 0.609 \times 60 - 30 \times 0.391 = 24.81$ F
$EMG(D_2,N) = -0.609 \times 10 + 100 \times 0.391 = 33.01$ F
} Prendre D_2 si N

Au sommet de l'arbre :

$$EMG = 0.54 \times 39.3 + 0.46 \times 33.01 = 36.407$$

et si on compte le péage (évènement certain), l'EMG total sera de 36.407 - 3 F = 33.407.

Résumons-nous :

La branche $A_1 \rightarrow EMG = 0$

La branche $A_2 \rightarrow EMG = 33$ F

La branche $A_3 \rightarrow EMG = 33.407$ F

Comme joueur à critère EMG, le décideur choisira A_3 au lieu de A_2, et dans A_3 il décidera D_1 si B, ou D_2 si N, c'est-à-dire qu'il sera forcé d'accepter de payer un péage de 3 F (branche A_3), bien que la différence entre EMG (A_2) et EMG (A_3) soit minime. Pourtant s'il ne s'était pas fixé ce critère objectif, et étant donné que les résultats de A_2 et A_3 sont aussi proches, il s'épargnera l'angoisse d'attendre le résultat des tirages de A_3 et jouera A_2.

II.2.3 - Critère de décision subjectif : E.M.C. [26]

L'E.M.C. est l'équivalent monétaire certain [26]. Si le décideur joue A_2, par exemple, et s'il est à critère E.M.G., il ne vendra son droit de jouer que si la somme qui lui est offerte est supérieure ou égale à son E,M.G.. Par contre, s'il est à critère E.M.C., il se peut qu'il soit heureux de se débarasser de ce jeu risqué, en troquant cette loterie contre 10 F, arguant que quand même, il a une chance sur trois de perdre 30 F.

De même, il peut se dire que, vu qu'il a une chance sur trois de gagner 100 F (branche A_2), il ne la vendra qu'à une somme supérieure ou égale à 60 F...

Nous n'allons pas nous étendre sur ces éventualités plus longuement, nous allons plutôt discuter de l'essence de ce jeu à critère E.M.C. qui nous amènera à utiliser les probabilités subjectives.

Etant à critère E.M.C., le joueur se fait une échelle de valeurs qui lui est propre.

Supposons que cette échelle soit ramenée à un billet témoin, que nous noterons "BT" par abréviation et que le décideur sache substituer (par équivalence ou indifférence), au gain matériel une p - BT où p est la probabilité de gagner ce que représente le billet témoin (soit G) et (1-p) de le perdre (soit P la perte). Nous supposons que ses substitutions et ses équivalences sont transitives, c'est-à-dire qu'il choisira un π_1 - BT à un π_2 - BT si $\pi_1 \geqslant \pi_2$, ce qui est raisonnable puisque la probabilité de gagner G est plus grande dans le billet π_1 - BT que dans π_2 - BT.

Le problème le plus intéressant n'est pas de réexaminer son arbre de décision selon le critère E.M.C. car s'il admet les principes de substitution et de transitivté de l'équivalence, rien ne sera changé pour lui dans l'étude faite au début, sauf qu'il remplacera les gains matériels par les π - BT ; il raisonnera selon le critère EMG du BT, et choisira l'action qui le mènera au plus grand EMG-BT.

Nous insistons sur le fait que ceci n'est valable que si le joueur admet surtout les principes de substitution et de transitivité, sinon, nous lui dirons que selon ces critères, il est incohérent.

Compliquons le problème initial :

Au lieu de considérer que le résultat (T_1 ou T_2) n'a qu'une alternative certaine (évènement certain), supposons que ce résultat est lui-même aléatoire.

Si le joueur est à critère EMG, la méthode du 1er cas s'applique sans changement, il y a quelques branches en plus à ajouter.

Par contre, s'il est dans le cas 2, nous lui demanderons son impression sur la distribution des probabilités de T_1 et T_2. Nous reprenons ici largement l'argument de RAIFA [26].

Supposons qu'au début de l'expérience, chaque urne est identifiée par une étiquette qui porte la nature de l'urne (T_1 ou T_2). Ces urnes étant placées dans une salle, et nous permettons au joueur de jeter un coup d'oeil dans la salle, après quoi on ferme très vite la porte de la salle.

La distribution de probabilités qu'il donnera (selon ses impressions), compte-tenu des critères de substitution et de transitivité (de l'équivalence entre autres) qu'il a préalablement admis sera appelée sa probabilité subjective, concernant le résultat du jeu en question. En fait, d'après la construction de cette probabilité subjective, (désignons-là par PS), nous prendrons soin de n'avoir à faire qu'à des évènements appartenant à un treillis complémenté et distributif, c'est-à-dire des évènements aléatoires que nous construirons au fur et à mesure, soient E_1 et E_2 de tels évènements. Regardons de près comment on démontre que $PS(E_1) + PS(\overline{E_1}) = 1$, $\overline{E_1}$ étant l'évènement complémentaire de E_1 ; et que si $E_1 \cap E_2 = \phi$ alors $PS(E_1) + PS(E_2) = PS(E_1 \cup E_2)$.

Enonçons d'abord les principes de substitution et de transitivité qui sont les piliers de cette théorie.

II.2.4 - Principes de substitution et de transitivité. Additivité des probabilités subjectives.

P_1 : [26] : Principe de substitution :

Si une loterie est modifiée par substitution de l'un des prix (gain) à un autre prix, toutes choses égales par ailleurs, et si le premier prix et son substitut sont équivalents pour le joueur, alors la 1ère loterie et celle qui a été modifiée sont équivalentes pour lui.

P_2 : [26] : Principe de transitivité :

Soient A, B, C trois situations possibles.

Si le décideur préfère l'une de ces situations, alors la logique de ses préférences devrait être conforme aux propositions suivantes :

a) Si A et B ainsi que B et C sont équivalents pour lui alors A et C sont équivalents pour lui.

b) S'il préfère A à B et B à C, alors il préfère aussi A à C.

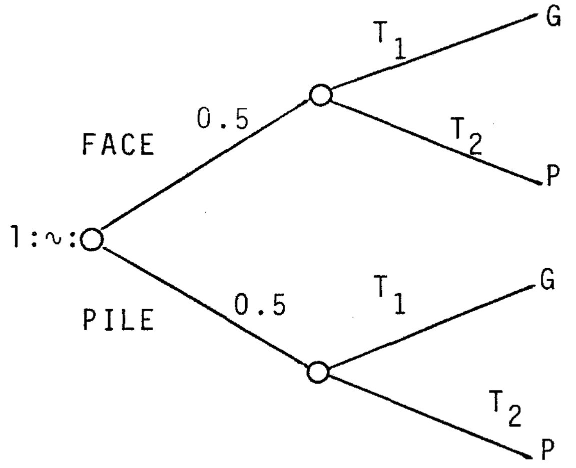
c) S'il préfère A à B et si B et C sont équivalents alors il préfère A à C.

Nous remarquons que le principe d'équivalence est un mot-clé dans ces deux principes.

Considérons maintenant la loterie (1) suivante : [26].

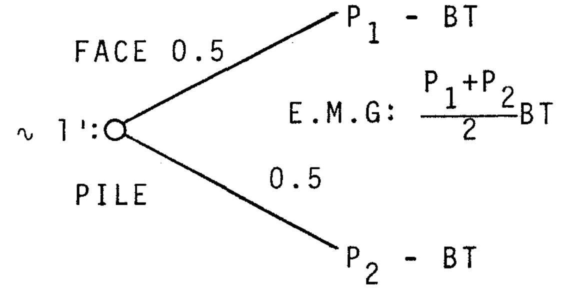
(1) :

Tirage à pile ou face	Type de l'urne T_1	T_2
FACE	G	P
PILE	P	G

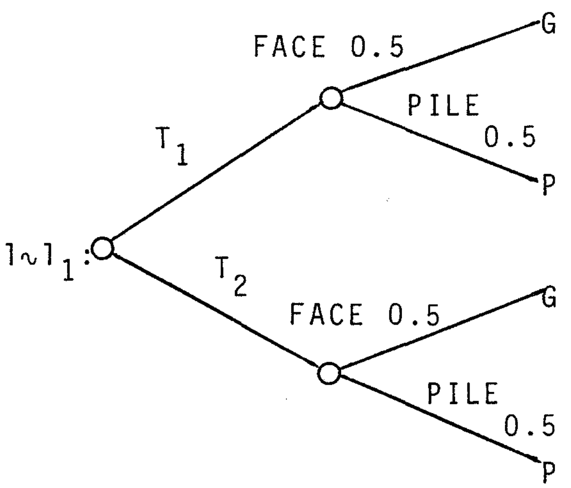


A

Par substitution (équivalence à un p - BT)

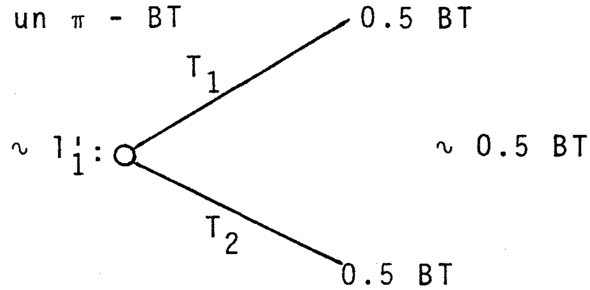


B



A

Par substitution à un π - BT



C

Nous aurons donc :- B $\sim$ A par substitution (équivalence à un p.BT)

-A $\sim$ C par substitution (équivalence à un p.BT).

D'après les principes de transitivité et de substitution on a donc :

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = 0.5 \Longleftrightarrow P_1 + P_2 = 1 \Longleftrightarrow$$

$PS(T_1) + PS(T_2) = 1$ et plus généralement $PS(E_1) + PS(\overline{E_1}) = 1$.

Nous n'entrerons pas dans les détails pour montrer que si $E_1 \cap E_2 = \phi$ alors $PS(E_1) + PS(E_2) = PS(E_1 \cup E_2)$.

Pour cela, voir [26], [9]

Par contre, ce qu'il faut souligner, et c'est très important dans la suite, c'est qu'à l'aide de deux principes, nous avons construit une probabilité qui n'a de subjectif que le nom. Nous avons construit des évènements <u>aléatoires</u>, répondant à une distribution "subjective", donnée par un décideur, nous avons donc (nous verrons la méthode pour sa construction), confectionné une probabilité, en raisonnant toujours sur des <u>évènements aléatoires</u>, et nous ferons tout pour qu'il en soit ainsi.

Cette probabilité, est évidemment additive et pour le besoin de la cause nous allons parler de sa construction.

<u>II.2.5 - Construction de la probabilité subjective</u>

Soit l'espace de référence $\mathbb{R}$ (espace des réels).

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, le "domaine" de construction de la fonction de répartition subjective.

On demande au sujet, quel est, selon lui, le point de $[a,b]$ (soit x_0), qui marque son indifférence, entre le choix de $[a,x_0]$ et $]x_0,b]$. C'est-à-dire que le décideur pariera 0.5 pour $[a,x_0]$et 0.5 pour $]x_0,b]$, et on note $p_{0.5} = x_0$, c'est-à-dire

$PS\{X<x_0\} = 0.5$ où X est la "variable aléatoire subjective" du sujet.

Puis on lui demande son point d'indifférence sur $[a,x_0]$, soit x_1 ce point. On note $PS\{X<x_1\} = \frac{0.5}{2} = 0.25$.

On répète la même chose avec $[a,x_1]$, on trouve x_2, et on note $PS\{X<x_2\} = \frac{0.25}{2} = 0.125$ et ainsi de suite.

Puis on étudie $]x_0,b]$. Soit x_3 le point d'indifférence sur cet ensemble, on note $PS\{X<x_3\} = 0.5 + \frac{0.5}{2} = 0.75$.

$= PS\left[\{X<x_0\} \cup \{x_0<X<x_3\}\right]$ et ainsi de suite...

On procède par dichotomie, et dans la construction, on prend soin du fait que si A et B sont deux intervalles contenus dans $[a,b]$, tels que $A \cap B = \phi$, alors $PS(A) + PS(B) = PS(A \cup B)$, c'est-à-dire qu'on se charge de "rationaliser" les réponses du décideur selon les principes P_1 et P_2, ce qui nous amène à une distribution probabiliste pure et simple, qui n'a de subjectif (dans sa construction) que le nom.

Maintenant, nous allons regarder de près, les principes de substitution et de transitivité de l'équivalence.

II.2.6 - Remarques sur le principe de la transitivité

A propos de l'équivalence subjective, considérons l'exemple suivant :

Etant donné deux biens M et A, de prix assez importants mais qui sont <u>équivalents</u> pour une personne, prenons par exemple :

M : Mercédès 450 SL

A : Appartement

on a au départ : $M \sim A$ ($\sim$: équivalent subjectivement)

$M \sim M + 1\ F$ (1 F = 1 franc)

$M + (1\ F) \sim A$ (raison : 1 F est insignifiant)

$A \sim A + 1\ F$ même raison

$A + 1 \sim M + 2\ F$ même raison

$M + 2\ F \quad \sim A + 2\ F$

.

.

$A + 9999 \quad \sim M + 10\ 000\ F$

$M + 10\ 000\ F \sim A + 10\ 000\ F$

Si on admet la transitivité de l'équivalence [26] on aura :

$$A \sim A + 10\ 000\ F$$

et, cette conclusion est inadmissible pour lui.

La solution trouvée pour le rendre transitif, est qu'il doit fixer une somme telle que : au-dessous de A + d, son équivalence sera transitive. Mais cette somme d, c'est lui qui est amené à la fixer, et il sera bien embarrassé de le faire, car :

1°) Il ne peut la fixer <u>avec précision</u>

2°) S'il fixe d et admet que A, A + 1, ... A + d sont équivalents, son équivalence ne s'arrête pas là, car A + d + 1, A + 2d seront aussi équivalents et donc son équivalence se fera par bloc.

Pour cela, considérons la méthode suivante :

Soit I_1 l'ensemble des biens suivants :

$I_1 = \{M, M+1, \ldots, M+n\}$ et J_1 l'ensemble suivant de biens :

$J_1 = \{A, A+1, \ldots, A+m\}$

soit :

$$I = I_1 \cup J_1$$
$$J = I_1 \cup J_1$$

<u>1er cas particulier</u> :

Considérons l'ensemble I x J, et à chaque élément de l'ensemble produit, en raisonnant d'abord par oui ou par non, on donne la valeur 0 ou 1 selon que les éléments du couple $(x,y) \in I \times J$ sont équivalents ou non. Soit $\underset{\sim}{R}$ cette relation :

En particulier si m = n = 10 000, (M, A + 10 000) ne sont pas équivalents pour lui et on note u(M, A + 10 000) = 0.

Nous dirons que ses équivalences sont transitives si :

$$u(M,A + 10\ 000) \geqslant \left[\underset{Z}{MAX}(MIN(u(M,Z),u(Z,A + 10\ 000)))\right]$$

c'est-à-dire que le poids de l'arc (M,A + 10 000) est plus fort que tout chemin allant de M à A + 10 000 [15], en effet cette relation construite sur I x J est évidemment réflexive. Si elle était transitive, on aurait $\underset{\sim}{R} = \hat{\underset{\sim}{R}}$, i.e la relation initiale est la même que la fermeture transitive or, $u_{\hat{R}}(x,y) = 1^*(x,y)$, [15], et en particulier

$$u(M,A+10\ 000) \geqslant u(M,A+1) \wedge u(A+1,M+1) \wedge u(M+1,M+2) \wedge \ldots u(M+9999,A+10000)$$

C'est-à-dire que le poids de l'arc (M, A + 10 000) doit être plus fort, du moins égal à tout chemin joignant M à A + 10 000.

Autrement dit, le "degré de son équivalence entre M et A + 10 000" est plus fort, ou à la rigueur égal, au "degré d'équivalence d'une chaîne d'équivalence".

Dans notre cas u(M, A + 10 000) = 0, pourtant il existe un chemin de poids 1 à savoir : $\underbrace{M,\ A+1}_{1}$, $\underbrace{M+1,\ A+2}_{1}$, ..., $\underbrace{M+9999,\ A+10\ 000}_{1}$.

car MIN(u(M,A+1),u(M=1,A+2)...., u(M+9999,A+10 000)) = 1 et nous dirons alors que <u>ses équivalences ne sont pas transitives</u>.

Ne nous arrêtons pas là.

En regardant la matrice que nous venons d'obtenir sur I x J (réflexive et symétrique), nous pouvons la décomposer en sous-relations maximales de similitude, par la méthode de PICHAT [15], c'est-à-dire en sous-matrices réflexives, symétriques et transitives.

<u>Remarque</u> :

Dans ce cas particulier, la transitivité qu'on vient de voir, coïncide avec la transitivité classique dans le cas Booléen.

$(R(x,y) \leq R(x,Z) * R(Z,y)$ et les sous-matrices que nous obtiendrons seront en fait des classes d'équivalences.

Exemple :

$$I_1 = \left\{ M_o = M,\ M_1 = M + 100\ F,\ M_2 = M + 200\ F \right\}$$

$$J_1 = \left\{ A_o = A,\ A_1 = A + 100\ F,\ A_2 = A + 200\ F \right\}$$

Notons par 1 les couples dont les éléments sont équivalents et par 0 les autres.

Supposons que l'on ait la matrice suivante :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		M_o	M_1	M_2	A_0	A_1	A_2
x_1	M_o	1	1	0	1	1	0
x_2	M_1	1	1	1	1	1	0
x_3	M_2	0	1	1	0	1	1
x_4	A_0	1	1	0	1	1	0
x_5	A_1	1	1	1	1	1	0
x_6	A_2	0	0	1	0	0	1

x_i étant des variables booléennes.

Employons la méthode de PICHAT qui nous permettra de dégager des sous-matrices couvertes de 1.

$$S = (x_1 + x_3\ x_6)(x_2 + x_6)(x_3 + x_1\ x_4)(x_4 + x_3\ x_6)(x_5 + x_6)(x_6 + x_1x_2x_4x_5)$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_6 + x_3x_6)(x_3x_4 + x_3x_6 + x_1x_4)(x_6 + x_1x_2x_4x_5)$$

$$= (x_1x_2x_4 + x_1x_4x_6 + x_3x_6)(x_6 + x_1x_2x_4x_5)$$

$$= x_1x_4x_6 + x_3x_6 + x_1x_2x_4x_5 \Longrightarrow$$

$$S' = x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_3x_6$$

Les sous-relations maximales de similitude, ou les classes d'équivalences maximales sont :

	M_1	M_2	A_1
M_1	1	1	1
M_2	1	1	1
A_1	1	1	1

(1)

	M_0	M_1	A_0	A_1
M_0	1	1	1	1
M_1	1	1	1	1
A_0	1	1	1	1
A_1	1	1	1	1

(2)

	M_2	A_2
M_2	1	1
A_2	1	1

(3)

A noter qu'elles ne sont pas nécessairement disjointes (c'est déjà prévu) mais cela n'est pas un problème (1).

Les blocs d'équivalence sont :

1 $\begin{cases} \text{pour } M \rightarrow d \leqslant 200 \text{ F}, \ d \neq 0 \\ \text{et} \\ \text{pour } A \rightarrow d = 100 \text{ F} \end{cases}$

2 $\begin{cases} d \leqslant 100 \text{ F pour } M \\ \\ d \leqslant 100 \text{ F pour } A \end{cases}$ (M_2, A_2) prévu.

2ème cas particulier flou

Si on demande à une personne de donner son opinion sur l'équivalence des couples en présence :

il jugera (M_0, M_0) comme certainement équivalents.

(M_0, M_1) comme presque équivalents

(M_0, A_2) comme assez équivalents....

Il a aussi défini, sur les couples en présence, le degré d'équivalence de chaque couple.

---

(1) Il serait intéressant d'étudier les sous-ensembles constituant ce qui est commun entre les sous-relations maximales de similitude ; cela donne des indications précieuses sur la nature globale de la dissemblance (ou de la ressemblance, ce qui revient au même par la pseudo-complémentation).

Soit u cette fonction exprimant le degré d'équivalence des couples. On suppose que son choix est symétrique pour simplifier. On aura par exemple la matrice suivante représentant une relation $\underset{\sim}{R}$.

$\underset{\sim}{R}$:

	M_0	M_1	M_2	A_0	A_1	A_2
M_0	1	0.9	0.7	1	0.9	0.6
M_1	0.9	1	0.9	0.9	1	0.7
M_2	0.7	0.9	1	0.6	0.9	1
A_0	1	0.9	0.6	1	0.9	0.7
A_1	0.9	1	0.9	0.9	1	0.7
A_2	0.6	0.7	1	0.7	0.7	1

0.9 → presque équivalents
0.7 → assez équivalents
0.6 → passablement équivalents

Si notre décideur, décide qu'il considère comme équivalents les couples notés au seuil $\alpha = 0.9$, c'est-à-dire que d'après la matrice, nous construirons une autre matrice de la façon suivante : $u_1(x,y) = 1$ si $u(x,y) \geqslant 0.9$, 0 sinon.

Nous obtenons alors la matrice suivante :

	M_0	M_1	M_2	A_0	A_1	A_2
M_0	1	1	0	1	1	0
M_1	1	1	1	1	1	0
M_2	0	1	1	0	1	1
A_0	1	1	0	1	1	0
A_1	1	1	1	1	1	0
A_2	0	0	1	0	0	1

Matrice déjà vue.Nous nous arrêterons là,et nous lui donnerons ses classes d'équivalences. Il ne doit pas en sortir, sinon, il sera intransitif.

S'il décide qu'au-delà du seuil 0.7, il considère les couples comme équivalents, alors nous referons ce que nous avons fait et nous lui préciserons ses classes d'équivalences connaissant le risque.

3ème cas : cas flou

Dans ce cas, notre décideur note les couples comme avant, mais il n'est pas obligé d'être symétrique.

Nous aurons une matrice u_2 représentant une relation $\underset{\smile}{R}$, qui est uniquement réflexive. Sa fermeture transitive est une relation de préordre (transitive et réflexive).

Pour employer la méthode de PICHAT, nous construirons une matrice u_3, ne comportant que des zéros ou des 1, de la façon suivante :

$$u_3(x,y) = 0 \text{ si } u_2(x,y) \neq u_2(y,x) \text{ ou si } u_2(x,y) = u_2(y,x) = 0$$

$$u_3(x,y) = 1 \text{ sinon.}$$

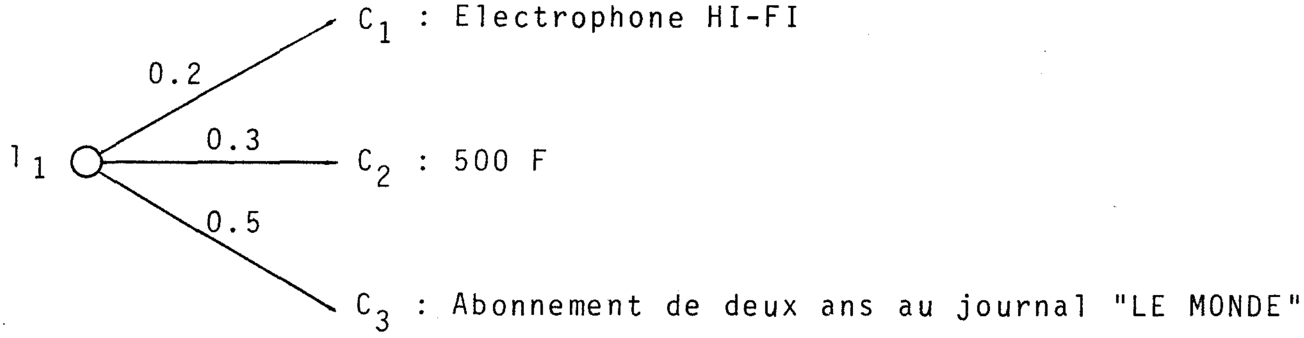
Nous aurons ainsi une matrice réflexive et symétrique.

Nous emploierons la méthode de PICHAT pour définir les classes d'équivalences, c'est-à-dire les sous-matrices ne comportant que des 1.

Nous pensons qu'ainsi la solution du problème de transitivité est trouvée. Si le sujet est transitif, tant mieux, sinon il faut déterminer les classes d'alternatives dans lesquelles le sujet est réflexif, symétrique et transitif (sous-relations ou sous-matrices de similitudes).

II.2.7 - Remarques sur le principe de substitution

Considérons la loterie suivante



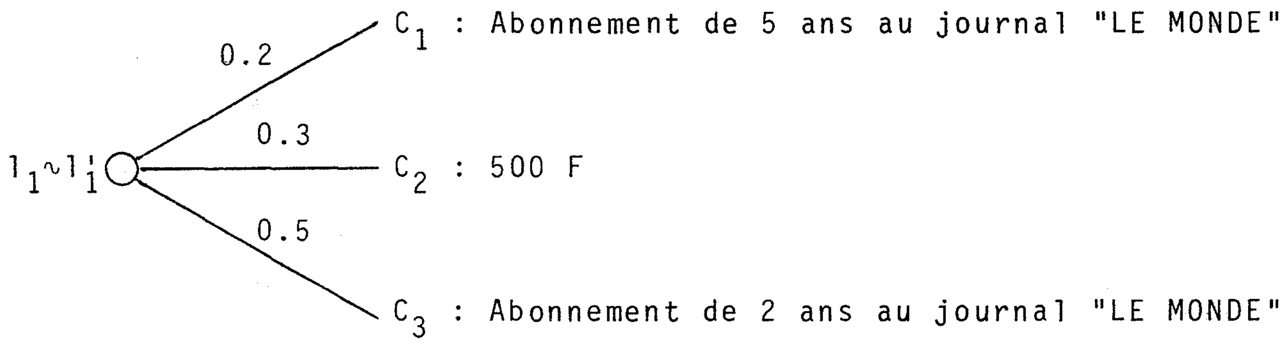
Cherchons une loterie l_1' équivalente par substitution à l_1. Il est bon de rappeler ici le principe de substitution :

Si une loterie est modifiée de l'un des prix à un autre prix toutes choses égales par ailleurs, et si le premier prix et son substitut sont équivalents pour le décideur, alors la première loterie et celle qui a été modifiée sont équivalentes pour lui.

Ce qui veut dire qu'en fait, on se préoccupe de chercher un équivalent au prix considéré, sans se préoccuper du reste des prix, parce qu'ils ne sont pas concernés par le changement.

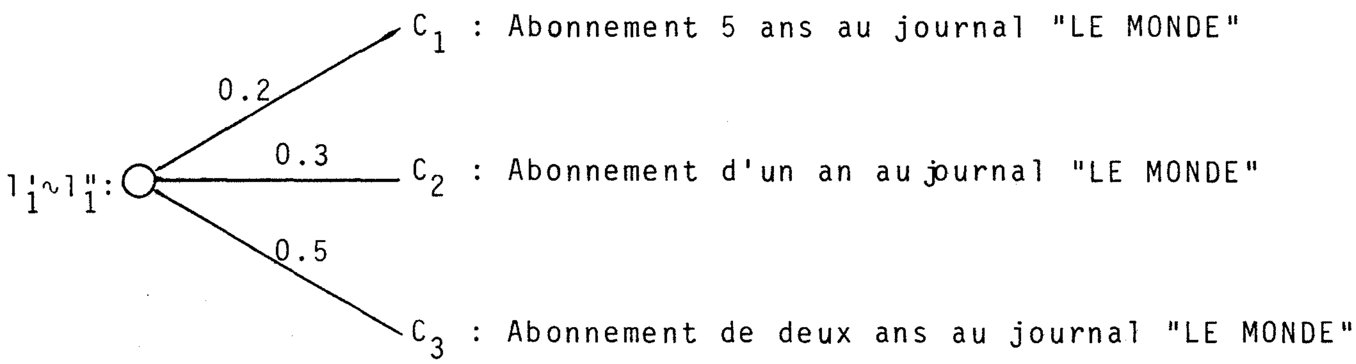
Si un sujet fait le raisonnement suivant :

Un électrophone HI-FI est équivalent (pour lui), à un abonnement de 5 ans (selon un de ses critères) au journal "LE MONDE" (par ex. : parce qu'il a un HI-FI chez lui, et qu'après tout un abonnement de 5 ans au journal "LE MONDE", le distinguera de ses collègues : (avantage psychologique)) ; sans changer les probabilités d'état de la loterie l_1 et sans regarder C_2 et C_3, nous aurons :



Ce même sujet, en regardant C_2 (par abstraction de C_1 et C_3) pensera que C_2 est équivalent pour lui, à un abonnement d'un an au journal "LE MONDE", il pense que cela fera plaisir à sa femme de voir son mari s'abonner au journal "LE MONDE". (2ème critère).

Donc par substitution :



Donc par substitution nous avons :

$l_1 \sim l_1' \sim l_1''$ et par la transtivité de l'équivalence nous aurons $l_1 \sim l_1''$.

Or qu'est-ce que nous avons dans l_1'' ?

l_1'' est équivalente à une urne, contenant deux boules rouges (abonnement 5 ans au journal "LE MONDE"), trois boules blanches (abonnement 1 an au journal "LE MONDE", et cinq boules jaunes (abonnement de 2 ans au journal "LE MONDE") et on aboutit à un évènement certain : avoir un abonnement au journal "LE MONDE".

Mais en regardant l_1 et l_1'', le sujet a droit de dire, qu'après tout, il a une chance sur deux de gagner un abonnement de deux ans au journal "LE MONDE", une chance sur trois de gagner 500 F, ce qui lui permettrait d'acheter une bicyclette promise à son fils s'il réussit son examen (critère différent) et C_1, lui permettrait de gagner un électrophone HI-FI, qui fera tellement plaisir à sa fille ! (critère différent).

et en regardant l_1 et l_1'', finalement, il préfèrera nettement l_1 à l_1'' parce qu'elle est "mieux équilibrée", et il n'aura pas de remords comme dans l_1'' où il n'a pensé qu'à lui (égoïsme). Ce qui est contraire au principe de substitution.

En effet, dans le principe de substitution, on juge un élément des gains toutes choses étant égales par ailleurs, et à chaque cas de substitution, on peut avoir un critère différent d'équivalence, alors qu'il faut regarder les choses dans leur ensemble, comme cela on jugera avec le maximum de critères de préférences (ou d'équivalence).

Les probabilités subjectives s'appuient sur des hypothèses de substitution et de transitivité (de l'équivalence entre autres) : si la substitution et la transitivité sont monocritères tout le long des chemins de substitution et des préférences, alors la probabilité subjective est à utiliser, sinon, nous pensons qu'elle peut mener à des contradictions, sans que ces contradictions ne soient nécessairement imputables au décideur, et dans ce cas comment s'en sortir, si on raisonne d'une façon multicritère ?

Exemple :

Considérons l'ensemble des gains d'une loterie, et l'ensemble des biens qui pourraient leur être équivalents.

Considérons l'opération substitution (multicritère cette fois) de la chaîne HI-FI, et considérons les biens candidats à l'équivalence avec HI-FI, que nous noterons H.

Notons : D = Diamant, AB5 = Abonnement 5 ans au journal "LE MONDE", p = matériel de plongée.

Considérons le message flou des équivalences si H était l'état de nature :

$$\underset{\sim}{H} : \{(H,1),(D,0.9),(AB5\ 0.1)(p,0.5)\}$$

ce qui veut dire :

H est certainement équivalent à H (réflexivité). u(H,D) = 0.9, c'est-à-dire que H est presque équivalent à D car il est presque équivalent d'avoir H ou D, sa fille aura un diamant au lieu d'une chaîne HI-FI.

H est très peu équivalent à AB5, car le joueur pense qu'il a une probabilité de 0.5 de gagner un abonnement en C_3.

H est assez équivalent au matériel de plongée, et avec C_3 il aurait l'impression d'être égoïste.

De même, notons les équivalences si D est l'état de nature, puis si AB5 l'est puis si p l'est. On aurait par exemple :

$$\underset{\sim}{D} : \{(H,0.9),(D,1),(AB5,0.5),(p,0.4)\}$$

$$\underset{\sim}{AB5} : \{(H,0.9),(D,0.9),(AB5,1),(p,0.8)\}$$

$$\underset{\sim}{P} : \{(H,0.8),(D,0.9),(AB5,0.3),(p,1)\}$$

Remarque :

Dans le message $\underset{\sim}{AB5}$, AB5 et H sont presque équivalents car si AB5 est l'état de nature, cela lui permet d'équilibrer la loterie, vu que C_3 est aussi un abonnement au journal "LE MONDE".

1ère méthode :

Ayant ces messages flous, nous allons essayer de déterminer les messages les plus transitivement voisins [15].

Par exemple, s'il s'avère que $\underset{\sim}{H}$ et $\underset{\sim}{AB5}$ sont les plus transitivement voisins alors s'il y a substitution à faire de H, c'est par AB5 vu qu'il n'y a pas de grandes différences entre les deux.

Notons $\underset{\sim}{H}$ par H, $\underset{\sim}{D}$ par D, $\underset{\sim}{AB5}$ par AB5 et $\underset{\sim}{p}$ par p pour simplifier l'écriture et calculons les distances de HAMMING généralisées relatives de ces messages.

$$\delta(\underset{\sim}{H},\underset{\sim}{D}) = \delta(\underset{\sim}{D},\underset{\sim}{H}) = \frac{1}{4}d(\underset{\sim}{H},\underset{\sim}{D})$$

soit :

$$\delta(H,D) = 0.175$$
$$\delta(H,AB5) = 0.325$$
$$\delta(H,P) = 0.225$$
$$\delta(D,AB5) = 0.25$$
$$\delta(D,P) = 0.25$$
$$\delta(AB5,P) = 0.25$$

nous obtenons la matrice de dissemblance suivante représentant une relation floue $\underset{\sim}{R}$.

$\underset{\sim}{R}$ =

	H	D	AB5	P
H	0	0.175	0.325	0.225
D	0.175	0	0.25	0.25
AB5	0.325	0.25	0	0.25
P	0.225	0.25	0.25	0

Cherchons la fermeture transitive min-max de cette relation $\underset{\sim}{R}$: nous avons $\underset{\sim}{R}^2$ =

	H	D	AB5	P
H	0	0.175	0.25	0.225
D	0.175	0	0.25	0.225
AB5	0.25	0.25	0	0.25
P	0.225	0.225	0.25	0

et nous trouvons :

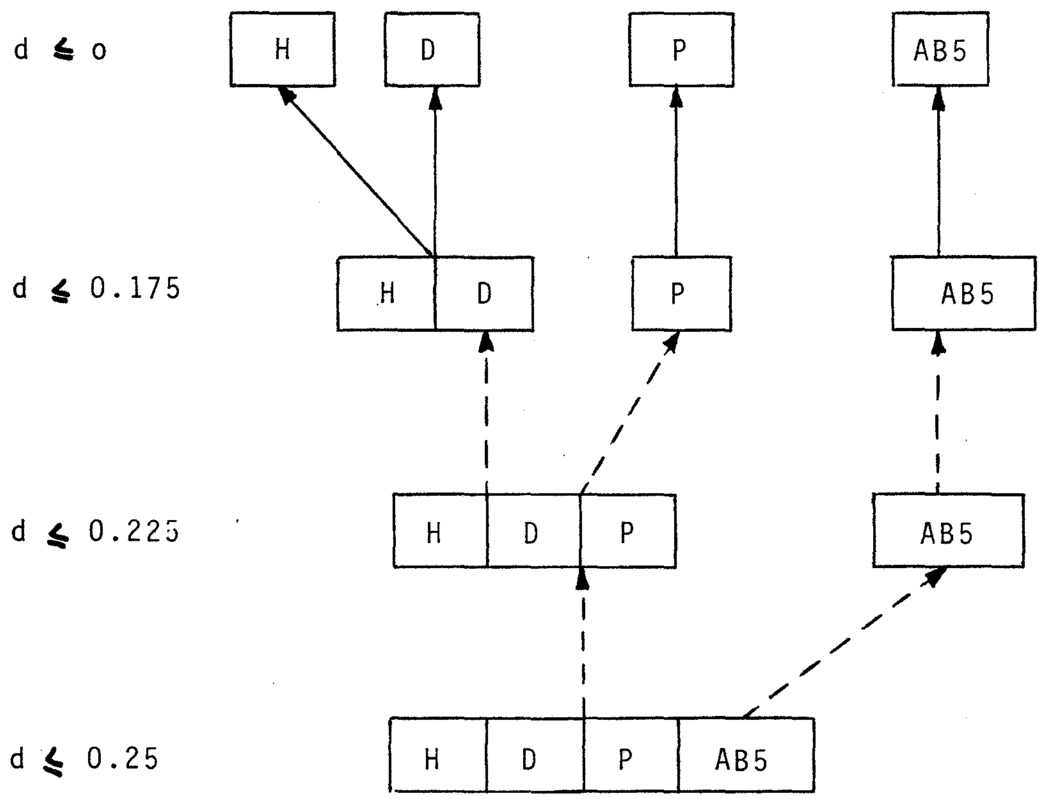
$$\underset{\sim}{R}^3 = \underset{\sim}{R}^2$$

$\check{\underset{\sim}{R}}$ = fermeture transitive min-max de $\underset{\sim}{R}$ est :

$\check{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{R}^2 =$

	H	D	AB5	P
H	0	0.175	0.25	0.225
D	0.175	0	0.25	0.225
AB5	0.25	0.25	0	0.25
P	0.225	0.225	0.25	0

Nous obtenons la hiérarchie suivante des messages :



Ainsi donc, nous voyons que les messages les plus proches sont (à distance non nulle) :

H et D, c'est-à-dire que parmi les candidats à l'équivalence, si H était l'état de nature, il choisirait D et réciproquement. Toutefois, s'il se permet de prendre plus de risques, il pourrait admettre les messages de distances $\leq$ 0.225 et il aurait le choix entre H, D et P.

2ème méthode :

Retournons à nos messages initiaux.

En notant $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{D}$, $\underset{\sim}{P}$ et $\underset{\sim}{AB5}$, nous avons noté en fait l'espace produit {H,D,AB5,P} x {H,D,AB5,P} et nous obtenons la matrice suivante représentant une relation floue $\underset{\sim}{R}_1$.

$\underset{\sim}{R}_1$:

	H	D	AB5	P
H	1	0.9	0.1	0.5
D	0.9	1	0.5	0.4
AB5	0.9	0.9	1	0.8
P	0.8	0.9	0.3	1

Cherchons la fermeture transitive de $\underset{\sim}{R}_1$ (fermeture max-min), soit $\hat{\underset{\sim}{R}}_1$.

$\underset{\sim}{R}_1^2$:

	H	D	AB5	P
H	1	0.9	0.5	0.5
D	0.9	1	0.5	0.5
AB5	0.9	0.9	1	0.8
P	0.9	0.9	0.5	1

et $\underset{\sim}{R}_1 \cup \underset{\sim}{R}_1^2 = \underset{\sim}{R}_1^2 = \hat{\underset{\sim}{R}}_1$

$\hat{\underset{\sim}{R}}_1$ est aussi une relation de préordre flou.

Cherchons les sous-relations maximales de similitude. Considérons la relation $\underset{\sim}{R}_3$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{R}_3}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } u_{\hat{\underset{\sim}{R}}_1}(x,y) = u_{\hat{\underset{\sim}{R}}_1}(y,x) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

nous obtenons :

	H	D	AB5	P
H	1	1	0	0
D	1	1	0	0
AB5	0	0	1	0
P	0	0	0	1

Les seules sous-relations de similitude qui existent sont :

{H,D}, {AB5}, {P}

Si le décideur accepte au degré 0.9 cette équivalence entre H et D, nous pouvons considérer que H $\sim$ D, sinon, aucun bien n'est équivalent à un autre cité dans cet exemple.

II.2.8 - Pré-conclusion

Les exemples cités plus haut ne constituent pas une démonstration de l'invalidité des probabilités subjectives, mais c'est une constatation qui doit être prise en compte, ce qui nous amène à formuler les remarques suivantes :

1°) Le principe de substitution est rarement connecté à un seul critère de jugement d'équivalence (ou de préférence). La substitution d'un bien à un autre doit être faite, en considérant l'ensemble des résultats possibles de la loterie.

2°) Une des méthodes pour sortir du piège de la substitution multicritère est la sélection des gains flous, les plus transitivement voisins.

3°) *Si nous ne tenons plus compte du principe "classique" de substitution, l'additivité des probabilités subjectives devient caduque.*

Nous ne serons plus obligés de dire que :

$$PS(E_1) + PS(E_2) = P(E_1 \cup E_2) \text{ si } E_1 \cap E_2 = \phi$$

et nous serons obligés de traiter avec $PS(E_1)$ *et* $PS(E_2)$*, avec d'autres opérateurs que l'additivité, ce qui enlève à* PS *sa caractéristique de probabilité d'évènements subjectifs aléatoires. Nous nous voyons ainsi obligés de traiter avec des évènements autres qu'aléatoires,*
et tout ce que nous pouvons remarquer c'est que là où la transitivité "classique" ne marche pas, une des transitivités floues marche et que là où la "substitution classique" ne marche pas, la "substitution floue" marche, ce qui devrait nous aider à résoudre certains problèmes de décision dans un domaine imprécis et non aléatoire.

Parallèlement à la construction des probabilités subjectives, nous devons voir s'il y a nécessité de construire la fonction d'appartenance, et de trouver une méthode pour la construire, si nous voulons exprimer l'imprécis non aléatoire.

La fonction densité de probabilité subjective ne peut jouer le rôle de fonction d'appartenance, parce que la première s'appuie sur l'additivité des probabilités subjectives (sa construction dichotomique le prouve).

II.3 - EXEMPLE D'AIDE A LA PRISE DE DECISION DANS UN UNIVERS FLOU

II.3.1 - Introduction

"... pendant très longtemps, on a considéré que par définition même, les décisions non programmables échappaient à toute approche formelle. L'intuition, l'expérience, le flair, le bon sens auxquels on fait appel pour décrire leur résolution sont des mots qui recouvrent une réalité encore mal analysée " [25].

Dans notre cas, plusieurs méthodes d'aide à la décision dans un univers imprécis ou flou ont vu le jour. Outre la méthode présentée, dans ce chapitre II, pour valuer le subjectif multicritère, nous allons présenter brièvement une méthode qui traite de la décision floue [27], [23].

II.3.2 - Exemple d'aide à la prise de décision : la programmation dynamique floue

II.3.2.1 - Règle de décision pour atteindre un objectif flou sous contrainte floue

Considérons un ensemble d'alternatives $X = \{x\}$ et un ensemble de contraintes $C \subset X$.

Pour l'exemple, supposons $X = \mathbb{R}^+$, domaine de variation du chiffre d'affaire d'une entreprise.

Supposons que $C = \mathbb{R}^+$, domaine de variation des charges de cette entreprise.

Le problème qui se pose est par exemple le suivant:

- l'objectif : "le chiffre d'affaire doit être largement supérieur à 6 millions"

- la contrainte : "les charges de production doivent être dans le voisinage de 6 millions"

En fait, nous avons à résoudre le problème suivant: existe-t-il une solution qui soit dans le domaine d'acceptation sachant qu'un ensemble de contraîntes doit être satisfait ?

L'exemple que nous avons donné est volontairement naïf, mais nous sert uniquement pour introduire le concept d'objectif flou "largement supérieur", ainsi que le concept de contraintes floues "voisinage de".

Supposons que nous valuons le concept "largement supérieur à 6 millions pour le sous-ensemble flou $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$, de fonction d'appartenance $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-7)^2} & \text{si } x \geq 6 \\ 0 & \text{si } x < 6 \end{cases}$$

Supposons aussi, que le concept "voisinage de", est valué par le sous-ensemble flou, $\underset{\sim}{C}$, de fonction d'appartenance $u_{\underset{\sim}{C}}$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{C}}(x) = \frac{1}{1+(x-6)^4}$$

Nous remarquons, dans ce cas particulier, que l'ensemble de référence objectif et l'ensemble de référence contrainte est le même, et donc dans la formulation de la décision, $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ et $\underset{\sim}{C}$ joueront le même rôle.

Dire que le chiffre d'affaire doit être "largement supérieur à 6 millions" et que les charges doivent être dans le "voisinage de 6 millions", c'est dire que la décision à prendre doit satisfaire les deux en même temps. Si nous désignons par $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ le sous-ensemble flou de cette décision, nous avons :

$$\underset{\sim}{\mathcal{D}} = \underset{\sim}{\mathcal{O}} \cap \underset{\sim}{C} \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(x) = u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(x) \wedge u_{\underset{\sim}{C}}(x)$$

(voir FIG. II.4).

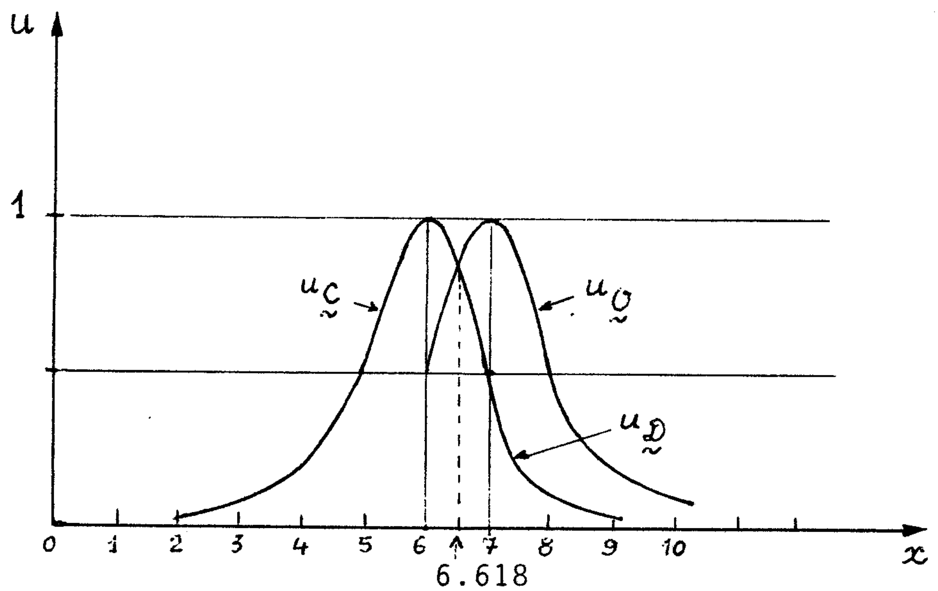


FIG II.4

$$\text{et } u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 6 \\ \dfrac{1}{1+(x-7)^2} \text{ pour } 6 \leqslant x \leqslant 6.618 \\ \dfrac{1}{1+(x-6)^4} \text{ sinon} \end{cases}$$

Le problème général, après avoir formulé la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$, est de choisir la décision optimale dans le domaine d'acceptation. i.e. chercher les points x_0, tels que $u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x_0)$ soit maximale. Il est bien évident que si l'espace de départ est convexe, le maximum est unique. Dans notre cas, le maximum est atteint pour $x_0 = 6.618$ MF, la valeur d'appartenance correspondante est de 0.8727. Si nous jugeons que la valeur d'appartenance 0.5 est dans notre domaine d'acceptation, le maximum serait atteint pour $x_0 = 7$ millions. Ceci étant dans le cas continu.

Dans le cas discret, l'ensemble de référence étant

$$X = \{1,2, \ldots, 9, 10\}.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\underset{\sim}{\mathcal{O}} =$	0	0	0	0	0	0	1	0.7	0.6	0.5

$\underset{\sim}{C} =$	0	0.1	0.2	0.4	0.5	1	0.7	0.6	0.3	0.2

la décision floue est dans ce cas, le sous-ensemble flou $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$ tel que :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\underset{\sim}{\mathfrak{D}} =$	0	0	0	0	0	0	0.7	0.6	0.3	0.2

et le maximum est atteint pour $x_0 = 7$, et $u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(7) = 0.7$.

II.3.2.2 - Généralisation

D'une manière générale, étant donné n objectifs flous $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_1, \dots \underset{\sim}{\mathcal{O}}_n$, d'ensemble de référence X et m contraintes floues de ce même référentiel, soit $\underset{\sim}{C}_1, \dots, \underset{\sim}{C}_m$, la décision floue satisfaisant les objectifs et les contraintes est définie par :

$$\underset{\sim}{\mathcal{D}} = \underset{\sim}{\mathcal{O}}_1 \cap \dots \cap \underset{\sim}{\mathcal{O}}_n \cap \underset{\sim}{C}_1 \cap \dots \cap \underset{\sim}{C}_m$$

ET, dans le cas où l'ensemble de référence n'est pas convexe, il se peut qu'il y ait plusieurs maximums relatifs, et dans ce cas, nous définissons alors, l'ensemble décision optimale, soit :

$$D \text{ tel que } u_D(x) = \begin{cases} u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(x) \text{ si } u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(x) \text{ est maximum} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

sachant que $u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(x) = u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_1}(x) \wedge \dots \wedge u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_n}(x) \wedge u_{\underset{\sim}{C}_1}(x) \wedge \dots \wedge u_{\underset{\sim}{C}_n}(x)$

Remarque II.1

Nous pouvons nous demander, si dans le cas de prise de décision floue, les opérateurs MIN et MAX sont bien choisis pour refléter au mieux la prise de décision. Nous nous proposons d'en discuter par la suite. Mais nous remarquons, que dans ce genre de décision, les objectifs aussi bien que les contraintes ont la même importance, c'est-à-dire, qu'en agissant ainsi, nous ne privilégions pas un objectif par rapport à un autre, ni une contrainte par rapport à une autre.

Par exemple, dans les charges d'une entreprise, les frais de personnel n'ont pas la même incidence sur le coût de production que les frais fixes. Nous pouvons associer aux objectifs aussi bien qu'aux contraintes, un poids reflétant l'importance d'un objectif par rapport à un autre ou d'une contrainte par rapport à une autre.

Nous pouvons imaginer, pour cela, comme dans [37] et [23], une fonction d'appartenance de la décision floue du type :

$$u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i}(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_j(x) u_{\underset{\sim}{C}_j}(x)$$

avec :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) = 1$$

Remarque II.2

Jusqu'ici, nous n'avons traité que le cas où le référentiel des contraintes est le même que celui des objectifs.

Mais supposons, dans le cadre de l'exemple de décision dans l'entreprise traitée ci-dessus, que l'objectif soit mesuré, non plus à l'aide du chiffre d'affaire, mais en unités produites. Soit Y cet ensemble de référence, l'ensemble de référence des contraintes restant toujours le même.

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_1, \ldots, \underset{\sim}{\mathcal{O}}_n$ les objectifs flous à atteindre dans l'ensemble Y, et soit $\underset{\sim}{C}_1, \ldots, \underset{\sim}{C}_m$ les contraintes floues à satisfaire dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

D'autre part, soit $f : \mathbb{R}^+ \to Y$
$s \to p$ (unités produites)

tout sous-ensemble flou de $\mathbb{R}^+$, soit $\underset{\sim}{C}$, induit par f [15], un sous-ensemble flou dans Y, soit $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ tel que :

$$u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(y) = \begin{cases} \underset{x \in f^{-1}(y)}{\text{MAX}}\, u_{\underset{\sim}{C}}(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'autre part, tout sous-ensemble flou de Y, soit $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$, est induit par un sous-ensemble flou de $\mathbb{R}^+$, soit $\underset{\sim}{C}$, tel que :

$$u_{\underset{\sim}{C}}(x) = \begin{cases} u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(y) & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre cas, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i$ est induit par $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'_i \subset \mathbb{R}^+$ tel que $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}'_i}(x) = u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i}(f(x)$ et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}'_i \subset \mathbb{R}^+$, $\forall i = 1, \ldots, n$, la décision floue sera alors $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$ telle que :

$$u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x) = u_{\underset{\sim}{C}}(x) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{C}n}(x) \wedge u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(f(x)) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}m}(f(x)) \quad [15]$$

et $\underset{\sim}{\mathfrak{D}} \subset \mathbb{R}^+$.

II.3.2.3 - Programmation dynamique floue

Nous rappelons ici le principe de l'optimum de BELLMANN [1].

Principe d'optimalité :

Une politique optimale est telle que, quels que soit l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

Nous nous proposons dans ce qui suit, d'étudier un cas d'optimisation dynamique sous contraintes floues, pour atteindre un objectif flou donné, à une étape donnée.

Soit E, l'ensemble référence de l'objectif flou, soit e un élément courant de E i.e. $E = \{e\}$, et e_T, l'élément courant à l'étape T. i.e. $e_T \in E_T$.

Soit C, l'ensemble référence des contraintes floues, et α un élément courant de C, i.e. $C = \{\alpha\}$ et α_T un élément courant des contraintes à l'étape T i.e $\{\alpha_T\} = C_T$.

Enfin soit f une fonction d'état telle que :

$$f : E \times C \to E$$
$$(e_T, \alpha_T) \to e_{T+1} = f(e_T, \alpha_T)$$

i.e. si "l'input" à l'instant T, ou à l'étape T est $\alpha_T \in C_T$, le successeur de e_T est $e_{T+1} = f(e_T, \alpha_T)$ avec : $\alpha_T \in C\ \forall T$

$e_T \in E\ \forall T$

Si f était une variable aléatoire, l'évolution des variables d'état e_T serait un processus stochastique où la probabilité d'avoir l'état $e_T \in E$, sachant que l'"INPUT" est $\alpha_{T-1} \in C$ et l'état à T - 1 est e_{T-1}, est $P(e_T/(e_{T-1},\alpha_{T-1}))$.

Par analogie, si f est une fonction floue où l'image d'un sous-ensemble flou est un sous-ensemble flou, le système "input-output" défini par f sera un système flou conditionné à l'état T+1, sur (e_T,α_T) et aura pour fonction d'appartenance :

$$u(e_{T+1}/(e_T,\alpha_T)) \qquad [15]$$

Supposons qu'à chaque instant T (ou étape T), l'input est sujet à une contrainte floue $\underset{\sim}{C}_T \subset C$, caractérisée par une fonction d'appartenance $\{u_{\underset{\sim}{C}_T}(\alpha_T)\}$. $\alpha_T \in C$.

D'autre part, supposons qu'à l'étape finale E_N à l'instant N, l'objectif est un sous-ensemble flou $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_N \subset E$, caractérisé par une fonction d'appartenance $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_N}(e_N)$.

Le problème est le suivant :

Dans le cas où l'évolution du système est définie par $e_{T+1} = f(e_T,\alpha_T)$, où f est une fonction non aléatoire, et sachant que l'étape de fin est donnée (T=N), et l'objectif final donné, quelle est la décision optimale (ou les décisions optimales), atteignant l'objectif final en satisfaisant les contraintes d'étape ? Le problème est donc de chercher la "fonction économique" à optimiser et de trouver, à partir d'un état initial, le chemin optimal, donc les "inputs" α_T, pour atteindre au mieux l'objectif final. Soient $\underset{\sim}{C}_0$, $\underset{\sim}{C}_1$, ..., $\underset{\sim}{C}_{N-1}$ respectivement, les contraintes floues des étapes aux instants 0,1, ..., N-1.

Soit E_N l'étape finale et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_N$ l'objectif final avec :

$$e_T = f(e_{T-1},\alpha_{T-1}) = f(f(e_{T-2},\alpha_{T-2}),\alpha_{T-1}) = f[f[\ldots f(e_0,\alpha_0),\alpha_1)]$$

$$= g(\alpha_0,\alpha_1, \ldots, \alpha_{T-1}), \text{ pour un état initial } e_0$$

donné.

L'ensemble de référence des contraintes n'étant pas le même que celui de l'objectif $\underset{\sim}{O}_N$, celui-ci est induit par un sous-ensemble flou $\underset{\sim}{O}'_N$ de l'ensemble de référence $\underbrace{C \times \ldots \times C}_{N \text{ fois}}$ avec $u_{\underset{\sim}{O}'_N}(e_N) = u_{\underset{\sim}{O}_N}(e_N)$.

La décision $\underset{\sim}{\mathcal{D}}$ est alors, telle que :

$$u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}) = u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge \ \ldots \ \wedge \ u_{\underset{\sim}{C}_{N-1}}(\alpha_{N-1}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_N}(e_N)$$

Ainsi, il faudra trouver une séquence $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$, maximisant la fonction $u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}$. i.e trouver une fonction-stratégie π_T avec $\alpha_T = \pi_T(e_T)$ pour tout $T = 0, \ldots, N-1$.

Soit $\alpha_0^M, \ldots, \alpha_{N-1}^M$, cette séquence optimale cherchée, nous avons :

$$u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(\alpha_0^M, \ldots, \alpha_{N-1}^M) = \underset{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}}{\mathrm{MAX}}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{C}_{N-2}}(\alpha_{N-2}) \wedge u_{\underset{\sim}{C}_{N-1}}(\alpha_{N-1}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_N}(f(e_{N-1}, \alpha_{N-1})))$$

$$= \underset{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}}{\mathrm{MAX}}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{C}_{N-2}}(\alpha_{N-2}) \wedge \left\{u_{\underset{\sim}{C}_{N-1}}(\alpha_{N-1}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_N}(f(e_{N-1}, \alpha_{N-1}))\right\})$$

Or :

$$u_{\underset{\sim}{O}_{N-1}}(e_{N-1}) = \underset{\alpha_{N-1}}{\mathrm{MAX}}\ (u_{\underset{\sim}{C}_{N-1}}(\alpha_{N-1}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_N}(f(e_{N-1}, \alpha_{N-1}))),$$

$\underset{\sim}{O}_{N-1}$ étant le sous-ensemble flou induit, par $\underset{\sim}{O}_N$ dans $E \times C$ à l'étape $N-1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\mathcal{D}}}(\alpha_0^M, \ldots \alpha_{N-1}^M) = \underset{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-2}}{\mathrm{MAX}}\ (u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{C}_{N-2}} \wedge u_{\underset{\sim}{O}_{N-1}}(e_{N-1})$

$$= \underset{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-3}}{\mathrm{MAX}}\ (u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge \ldots \wedge u_{\underset{\sim}{C}_{N-3}} \wedge u_{\underset{\sim}{O}_{N-2}}(e_{N-2}))$$

sachant qu'à l'étape N-r, l'objectif flou induit a pour fonction d'appartenance :

$$u_{\underset{\sim}{O}_{N-r}}(e_{N-r}) = \underset{\alpha_{N-r}}{\mathrm{MAX}}\ (u_{\underset{\sim}{C}_{N-r}}(\alpha_{N-r}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_{N-r+1}}(e_{N-r+1}))$$

avec $e_{N-r+1} = f(e_{N-r}, \alpha_{N-r})$

soit : $u_{\underset{\sim}{O}_{N-r}}(e_{N-r}) = \underset{\alpha_{N-r}}{MAX} \left(u_{\underset{\sim}{C}_{N-r}}(\alpha_{N-r}) \wedge u_{\underset{\sim}{O}_{N-r+1}}(f(e_{N-r}, \alpha_{N-r}))\right)$ (1)

En appliquant le principe de l'optimum [1], par récurrence à cette "fonction économique", nous pourrons à chaque étape donner "l'input" approprié pour maximiser la décision.

Exemple :

Soit $E = \{e\} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $N = 2$, $C = \{\alpha\} = \{w_1, w_2\}$

et $f : E \times C \rightarrow E$ telle que :

$\alpha_T \backslash e_T$	v_1	v_2	v_3
w_1	v_1	v_2	v_3
w_2	v_2	v_1	v_3

$\underset{\sim}{C}_o =$

w_1	w_2
0.7	1

$\underset{\sim}{C}_1 =$

w_1	w_2
1	0.6

et $\underset{\sim}{O}_2 =$

v_1	v_2	v_3
0.3	1	0.8

Etape 1

Cherchons d'abord l'objectif induit à l'étape N-1 (i.e l'étape 1).

D'après ① nous avons :

$$u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(e_1) = \underset{\alpha_1}{\mathrm{MAX}}(u_{\underset{\sim}{C}_1}(\alpha_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(e_1,\alpha_1))$$

soit :

$$* \; u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_1) = \mathrm{MAX}\left[u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_1,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_1,w_2))\right]$$

$$= \mathrm{MAX}\left[u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_1), u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_2)\right]$$

$$= \mathrm{MAX}\left[1 \wedge 0.3,\ 0.6 \wedge 1\right] = 0.6$$

$$* \; u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_2) = \mathrm{MAX}\left[u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_2,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_2,w_2))\right]$$

$$= \mathrm{MAX}\left[1 \wedge 0.8,\ 0.6 \wedge 0.3\right] = 0.8$$

$$* \; u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_3) = \mathrm{MAX}\left[u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_3,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_1}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(f(v_3,w_2))\right]$$

$$= \mathrm{MAX}\left[1 \wedge 0.3,\ 0.6 \wedge 0.8\right] = 0.6$$

et donc $\underset{\sim}{\sigma}_1 =$

v_1	v_2	v_3
0.6	0.8	0.6

Cherchons la fonction π correspondant à la décision optimale de cette étape : nous avons :

$$\pi_1(v_1) = \begin{cases} v_1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_1) = 0.3 \\ \text{ou} \\ v_2 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_2) = 1, \text{ or } f(v_1,w_2) = 1 \Longrightarrow \pi_1(v_1) = w_2. \end{cases}$$

de même

$$\pi_1(v_2) = \begin{cases} v_3 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_3) = 0.8, \text{ or } f(v_2,w_1) = v_3 \\ \text{ou} \\ v_1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_1) = 0.3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\pi_1(v_2) = w_1$$

et

$$\pi_1(v_3) = \begin{cases} v_1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_1) = 0.3 \\ \text{ou} \\ v_3 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_2}(v_3) = 0.8 \text{ et } f(v_3,w_2) = v_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\pi_1(v_3) = w_2 \Longrightarrow \pi_1$:

v_1	v_2	v_3
w_2	w_1	w_2

Etape 0

Les données de départ de cette étape sont :

$\underset{\sim}{C}_0$ =

w_1	w_2
0.7	1

$\underset{\sim}{\sigma}_1$ =

v_1	v_2	v_3
0.6	0.8	0.6

l'objectif induit de l'étape 1 est $\underset{\sim}{\sigma}_0$ avec :

$$u_{\underset{\sim}{\sigma}_0}(e_0) = \underset{\alpha_0}{\text{MAX}}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(\alpha_0) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(e_0,\alpha_0)))$$

Nous obtenons :

$$u_{\underset{\sim}{\sigma}_0}(v_1) = \text{MAX}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_1,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_1,w_2)))$$

$$= \text{MAX}(0.7 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.8) = 0.8$$

$$u_{\underset{\sim}{\sigma}_0}(v_2) = \text{MAX}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_2,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_2,w_2)))$$

$$= \text{MAX}(0.7 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.6) = 0.6$$

$$u_{\underset{\sim}{\sigma}_0}(v_3) = \text{MAX}(u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_1) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_3,w_1)), u_{\underset{\sim}{C}_0}(w_2) \wedge u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(f(v_3,w_2)))$$

$$= \text{MAX}(0.7 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.6) = 0.6$$

$$\Longrightarrow \underset{\sim}{\sigma}_o = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \boxed{0.8} & \boxed{0.6} & \boxed{0.6} \end{array}$$

D'autre part :

$$- \ \pi_o(v_1) = \begin{cases} v_1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_1) = 0.6 \\ \text{ou} \\ v_2 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_2) = 0.8 \text{ et } f(v_1, w_2) = v_2 \Longrightarrow \end{cases}$$

$$\pi_o(v_1) = w_2$$

$$- \ \pi_o(v_2) \quad \left.\begin{cases} v_3 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_3) = 0.6 \\ \text{ou} \\ v_1 \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\sigma}_1}(v_1) = 0.6 \end{cases}\right\} \pi_o(v_2) = \begin{cases} w_1 \\ \text{ou} \\ w_2 \end{cases}$$

$$- \ \pi_o(v_3) \quad \begin{cases} v_1 \\ \text{ou} \Longrightarrow \pi_o(v_3) = \begin{cases} w_1 \\ \text{ou} \\ w_2 \end{cases} \Longrightarrow \\ v_3 \end{cases}$$

π_o :

v_1	v_2	v_3
w_2	w_1 ou w_2	w_1 ou w_2

<u>Récapitulons</u> :

Données : $\underset{\sim}{\sigma}_2$ =

v_1	v_2	v_3
0.3	1	0.8

$\underset{\sim}{C}_o$ =

w_1	w_2
0.7	1

$\underset{\sim}{C}_1$ =

w_1	w_2
1	0.6

Résultats : π_o

v_1	v_2	v_3
w_2	w_1 ou w_2	w_1 ou w_2

π_1

v_1	v_2	v_3
w_2	w_1	w_2

Donc, si l'état initial (T = 0) est v_1,"l'input" à cette étape est w_2, sachant que $f(v_1,w_2) = v_2$ et $\pi_1(v_2) = w_1$ avec $f(v_2,w_1) = v_3$, nous arrivons à $u_{\underset{\sim}{G}_2}(v_3) = 0.8$ qui est le chemin optimal recherché.

Nous remarquons que jusqu'à maintenant, nous n'avons utilisé que les opérateurs MIN et MAX pour formuler des décisions floues.

Nous essayerons de discuter par la suite le fondement de ce choix.

II.4 - REMARQUES - CONCLUSION

Ne nous posons pas de questions, pour le moment, à propos de la construction de la fonction d'appartenance. Ce que nous discuterons en l'occurrence, c'est l'emploi des opérateurs MIN et MAX dans les prises de décision floues.

Nous avons vu au chapitre I, que ces opérateurs s'imposent, quant à la structure de treillis de l'ensemble des sous-ensembles flous. Alors qu'en algèbre de BOOLE, leur emploi et leur signification sont évidents ($1 \wedge 1 = 1$ ou $1.1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$ ou $1 + 0 = 1$, ...), la signification de leur emploi sur des sous-ensembles flous apparaît moins évidente. Le fait de dire que (A est absolument faux) <u>et</u> (A est absolument vrai) est un non-sens ou une contradiction en algèbre de BOOLE, le résultat de cette assertion ne peut être que "faux". Par contre, si l'on dit que (A est presque vrai) <u>et</u> (A n'est pas presque vrai), nous sommes bien en peine d'expliciter le résultat R de cette affirmation. En effet, si l'assertion (A est presque vrai) est représentée pour le sous-ensemble flou

$\underset{\sim}{A}$ =

Vrai	Faux
0.8	0.3

et $\bar{\underset{\sim}{A}}$

Vrai	Faux
0.2	0.7

comment traduirons-nous ($\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{\bar{A}}$) = R ?

Si nous appliquons l'opérateur "MIN", nous trouverons :

	vrai	faux
R =	0.2	0.3

c'est-à-dire que "R est très peu vrai et très peu faux", proposition qui n'est pas très évidente à interpréter.

Posons-nous le problème autrement :

Soit $\underset{\sim}{A}$ un sous-ensemble flou d'un référentiel $X = \{x\}$ et $(x,0.8) \in \underset{\sim}{A}$,

Soit $\underset{\sim}{B}$ un sous-ensemble flou de ce même référentiel et $(x,0.4) \in \underset{\sim}{B}$.

Comment traduirons-nous, d'une façon "acceptable", la proposition ($\underset{\sim}{A}$ <u>et</u> $\underset{\sim}{B}$), ($\underset{\sim}{A}$ <u>ou</u> $\underset{\sim}{B}$), et particulièrement quelle valeur d'appartenance x aura dans ces deux assertions ?

Il est naturel de mettre comme valeur d'appartenance de x dans $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$, la valeur d'appartenance de la proposition "x est un élément de $\underset{\sim}{A}$ et x est un élément de $\underset{\sim}{B}$", qui subjectivement peut être 0.5, et pourquoi pas 0.49999 ou 0.3999, alors que si nous appliquons l'opérateur "MIN", elle doit être 0.4.

Pour répondre à cela, nous allons énoncer quelques principes restrictifs quant à l'utilisation des opérateurs sur les sous-ensembles flous [2].

Soit $F = \{S,u(S)\}$ un sous-ensemble flou d'assertions, et considérons les assertions composées du types (S_1 et S_2), (S_1 ou S_2), [S_1 et (S_2 ou S_3)]...

Supposons aussi que $\begin{cases} u(S_1 \text{ et } S_2) = f(u(S_1),u(S_2)) \\ u(S_1 \text{ ou } S_2) = g(u(S_1),u(S_2)) \end{cases}$

f et g étant deux fonctions de $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. satisfaisant les axiomes suivants :

1°) f et g sont des fonctions croissantes et continues : i.e notre acceptation (ou degré d'admission) de (S et T), ou (S ou T) ne doit pas décroître si l'admission de S, ou de T croît.

2°) $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont symétriques :
i.e l'acceptation de (S et T) est la même que (T et S).

3°) $f(x,x)$ et $g(x,x)$ sont strictement croissantes.
i.e si $u(S_1) = u(S_2) \geqslant u(S_3) = u(S_4)$, notre degré d'acceptation de (S_1 et S_2) doit être plus grand que (S_3 et S_4).

4°) $f(x,y) \leqslant MIN(x,y)$ et $g(x,y) \geqslant MAX(x,y)$
i.e le degré d'acceptation de (S et T) est plus petit que celui de S seul ou de T seul (car dans (S et T) il y a plus de contraintes).

De même, le degré d'acceptation de (S ou T) est plus grand que S seul ou T seul, le choix étant plus grand.

5°) $f(1,1) = 1$ et $g(0,0) = 0$.

6°) S_1 et (S_2 ou S_3) $\equiv$ (S_1 et S_2) ou (S_1 et S_3), ce qui concerne l'associativité.

Avec ces principes, BELLMANN et GIERTZ [2], ont montré que les seuls opérateurs f et g possibles sont respectivement le MIN et le MAX.

D'autre part, nous pouvons être portés à croire qu'il est pessimiste de dire que la décision pour atteindre un objectif $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ satisfaisant à une contrainte $\underset{\sim}{C}$ est $\underset{\sim}{\mathfrak{D}} = \underset{\sim}{\mathcal{O}} \cap \underset{\sim}{C}$, ou ne reflète pas au mieux l'environnement de la décision à prendre. Si bien qu'on privilègie parfois des objectifs par rapport à d'autres et des contraintes par rapport à d'autres.

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre II, nous étions amenés à exprimer $u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x)$ comme combinaison de $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(x)$ et $u_{\underset{\sim}{C}}(x)$, soit :

$$u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_o(x_i) u_{\underset{\sim}{\mathfrak{D}}}(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x_j) u_{\underset{\sim}{C}}(x_i)$$

$\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$ étant un sous-ensemble flou de E avec card E = n.

En fait, au lieu de $\underset{\sim}{\mathcal{D}} = \underset{\sim}{\mathcal{G}} \cap \underset{\sim}{C}$, nous aurons construit de cette façon, un autre sous-ensemble flou décisionnel qui est la combinaison convexe de $\underset{\sim}{\mathcal{G}}$ et $\underset{\sim}{C}$ [33] et de cette façon nous aurons $\underset{\sim}{\mathcal{G}} \cap \underset{\sim}{C} \subset \underset{\sim}{\mathcal{D}} \subset \underset{\sim}{\mathcal{G}} \cup \underset{\sim}{C}$.

D'autres affirment que c'est le choix des opérateurs qui fait la décision, et que si le décideur est pessimiste, il a tendance à prendre, le produit booléen au lieu de l'intersection i.e $u_{\underset{\sim}{\mathcal{G}} . \underset{\sim}{C}}(x) = u_{\underset{\sim}{\mathcal{G}}}(x) . u_{\underset{\sim}{C}}(x)$ [15] et $u_{\underset{\sim}{\mathcal{G}} + \underset{\sim}{C}}(x) = u_{\underset{\sim}{\mathcal{G}}}(x) + u_{\underset{\sim}{C}}(x) - u_{\underset{\sim}{\mathcal{G}}}(x) . u_{\underset{\sim}{C}}(x)$ au lieu de l'union.

Pour notre part, nous ne nions pas que le choix de ces opérateurs simplifie le formalisme des problèmes d'optimisation (voir programmation dynamique floue), mais nous ne sommes pas convaincus, qu'ils reflètent au mieux la réalité de l'environnement de la décision.

Nous pensons que le fond du problème est la façon de construire la fonction d'appartenance, puisqu'elle sera utilisée de la même façon qu'elle a été construite.

C H A P I T R E III

****

SOMMAIRE

****

III.1 - INTRODUCTION

Nous nous proposons de construire une topologie floue sur l'espace des sous-ensembles flous réels.

Dans ce qui suit, l'espace de référence sera l'ensemble des réels avec la topologie usuelle, et l'ensemble d'appartenance sera le treillis $[0,1]$.

III.2 - TOPOLOGIE FLOUE

Définition de C. L. CHANG [4]

Une topologie floue est une famille T de sous-ensembles flous d'un espace de référence X telle que :

a) $\phi \in T$

b) Si $\underset{\sim}{A} \in T$ et $\underset{\sim}{B} \in T$, alors $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \in T$

c) Si $\underset{\sim}{A}_i \in T$, $i \in I$, alors $\bigcup_i \underset{\sim}{A}_i \in T$

(X,T) serait appelé espace topologique flou et chaque élément de T sera dit T-ouvert.

III.3 - CONSTRUCTION D'UNE TOPOLOGIE FLOUE REELLE

III.3.1 - Point flou

Définition III.1 (C.K WONG [38])

Soit X un ensemble quelconque

Un point flou p est un sous-ensemble flou, de fonction d'appartenance u_p telle que :

$$u_p(x) = \begin{cases} \alpha \text{ pour } x = x_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

Remarque III.1

Par la suite, nous noterons p : $\underset{\sim}{x}_0$.

Définition III.2 (C. K. WONG [38])

Soit $\underset{\sim}{x}_o$ un point flou et $\underset{\sim}{A}$ un sous-ensemble flou.

On dit que $\underset{\sim}{x}_o$ appartient à $\underset{\sim}{A}$ si et seulement si $o < u_{\underset{\sim}{x}_o} < u_{\underset{\sim}{A}}(x) \ \forall \ x \in X$.

Théorème II.1 (C. K. WONG [38])

Soit $\underset{\sim}{A} = \bigcup_{i \in I} \underset{\sim}{A}_i$, I dénombrable et soit $\underset{\sim}{x}_o \in \underset{\sim}{A}$, alors il existe $i \in I$ tel que $\underset{\sim}{x}_o \in \underset{\sim}{A}_i$.

Remarque III.2

Dans la théorie générale des ensembles, ce théorème paraît évident. Mais considérons le cas suivant :

Soit $\underset{\sim}{A}_i = \{x / u_{\underset{\sim}{A}_i}(x) = 1 - \frac{1}{i}\}$ $i \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}$

Soit $\underset{\sim}{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}_i$. Nous avons : $u_{\underset{\sim}{A}}(x) = \underset{i}{MAX} \ u_{\underset{\sim}{A}_i}(x) = 1 \Longrightarrow$

$\underset{\sim}{A} = \{x / u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\}$ et pourtant, pour tout réel x_o, il n'existe aucun $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x_o, 1)$ appartienne à $\underset{\sim}{A}_i$, d'où les définitions III.1 et III.2 du point flou.

Remarque III.3

Les points flous ainsi définis ne sont pas des atomes.

Définition III.3

Par la suite, nous appellerons "point flou", tout sous-ensemble flou de support point :

$$\underset{\sim}{x}_o \text{ est un point flou} \Longleftrightarrow u_{\underset{\sim}{x}_o}(x) = \begin{cases} \alpha \in]0,1] & \text{pour } x = x_o \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sans les restrictions de définitions III.1 et III.2.

Remarque III.4

Avec cette définition, le théorème III.1 ne sera vrai que pour une réunion finie de sous-ensembles flous.

Notation :

Notons : E, l'ensemble des points flous définis par la définition III.3

- S.E.F.R désignera un sous-ensemble flou réel, i.e l'ensemble de référence est l'ensemble des réels : $\mathbb{R}$.

- S.E.F. désignera sous-ensemble flou

- Soit $\underset{\sim}{A}$ un S.E.F.R, nous noterons

$$\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha} = \{x/u_{\underset{\sim}{A}}(x)>\alpha\}. \ \forall\alpha \in]0,1]$$

$\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ désignera l'ensemble des S.E.F.R..

Remarque III.5

Considérons $i : [0,1]^{\mathbb{R}} \to \underset{\sim}{\mathcal{F}}$

$$u \to \underset{\sim}{A} = \{(x,u(x)), \ \forall x\in\mathbb{R}\}.$$

Alors i est une bijection, et nous pourrons confondre un S.E.F.R avec sa fonction d'appartenance.

Définition III.4

On appelle support d'un S.E.F.R et on le note $S_{u_{\underset{\sim}{A}}}$, l'ensemble $\Gamma_{\underset{\sim}{A},o}$.

III.3.2 - Définition III.5 : ouvert flou

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$. $\underset{\sim}{A}$ est dit ouvert si et seulement si : $\forall\alpha \in]0,1]$, $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Théorème III.2 (1)

D'après la définition III.5, $\underset{\sim}{A}$ est un S.E.F.R ouvert si et seulement si sa fonction d'appartenance est semi-continue inférieurement, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Théorème III.3

Toute réunion de S.E.F.R ouverts est un S.E.F.R ouvert.

Démonstration :

Soit $(\underset{\sim}{A}_i)_{i\in I}$ une famille de S.E.F.R, et $\underset{\sim}{A} = \bigcup_{i\in I}\underset{\sim}{A}_i$ nous avons vu que $u_{\underset{\sim}{A}} = \bigvee_{i\in I} u_{\underset{\sim}{A}_i}$.

---

(1) M. KAMPE DE FERIET nous a communiqué que M. D. WEISS a introduit la même topologie [39]

Lemme III.1 [5]

- L'enveloppe supérieure de toute famille, $(u_{\underset{\sim}{A}_i})_{i \in I}$, de fonctions numériques, semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

- L'enveloppe inférieure de toute famille finie de fonctions numériques semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

$u_{\underset{\sim}{A}}$ étant l'enveloppe supérieure des $u_{\underset{\sim}{A}_i}$, $i \in I$, d'après Lemme III.1, $u_{\underset{\sim}{A}}$ est donc une fonction semi-continue inférieurement (notée S.C.I. par la suite) $\Longrightarrow \underset{\sim}{A}$ est un S.E.F.R ouvert (c.q.f.d.).

Théorème III.4

L'intersection finie de S.E.F.R. ouverts est un S.E.F.R ouvert.

Démonstration :

évidente d'après Lemme III.1. En effet :

Soit $\underset{\sim}{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i$, avec $n < +\infty$. $\underset{\sim}{A}_i$ ouvert, pour $i = 1, \ldots, n$. Nous avons $u_{\underset{\sim}{A}} = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} u_{\underset{\sim}{A}_i}$ et donc $u_{\underset{\sim}{A}}$ est l'enveloppe inférieure de S.C.I., c'est donc une S.C.I. $\Longrightarrow \underset{\sim}{A}$ est ouvert.

Définition III.6

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}$. $\underset{\sim}{A}$ est fermé $\Longleftrightarrow$ son complémentaire est ouvert.

Conséquences

Remarque III.6

$$C_{\underset{\sim}{A}} \text{ ouvert} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in]0,1],\ \Gamma_{C_{\underset{\sim}{A},\alpha}} \text{ est ouvert dans } \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$\{x/u_{C_{\underset{\sim}{A}}}(x) > \alpha\} \text{ est ouvert dans } \mathbb{R} \Longleftrightarrow \{x/1-u_{\underset{\sim}{A}}(x)>\alpha\} \text{ ouvert dans } \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \{x/u_{\underset{\sim}{A}}(x)<1-\alpha\} \text{ est ouvert dans } \mathbb{R}\ \forall \alpha \in]0,1].$$

Sachant que l'application $\alpha \to 1 - \alpha$ est une bijection de $]0,1] \to [0,1[$. Nous avons la remarque suivante :

Remarque III.7

$\underset{\sim}{A}$ est fermé $\Longleftrightarrow C_{\underset{\sim}{A}}$ est ouvert $\Longleftrightarrow \forall \beta \in]0,1]$, $\{x/1-u_{\underset{\sim}{A}}(x)>\beta\}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \{x/u_{\underset{\sim}{A}}(x)<1-\beta\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ $\forall \beta \in]0,1] \Longleftrightarrow \forall \alpha \in [0,1[, \{x/u_{\underset{\sim}{A}}(x)<\alpha\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ $(\alpha=1-\beta)$.

Théorème III.5

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$. $\underset{\sim}{A}$ est fermé si et seulement si sa fonction d'appartenance est semi-continue supérieurement.

Démonstration :

Evidente d'après remarque III.7.

Lemme III.2 (dual du Lemme III.1)

- L'enveloppe inférieure de toute famille $(u_{\underset{\sim}{A_i}})_{i \in I}$ de fonctions numériques semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.

- L'enveloppe supérieure de toute famille finie de fonctions numériques semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.

Conséquences :

Théorème III.6

- Toute intersection de S.E.F.R fermés est un S.E.F.R fermé.

- La réunion finie de S.E.F.R. fermés est un S.E.F.R fermé.

Démonstration :

Evidente d'après Lemme III.2.

Appelons T cette famille de S.E.F.R ouverts ainsi définis.

Théorème III.7

$(\mathbb{R}, T)$ est un espace topologique flou vérifiant les axiomes de C. L. CHANG.

En effet :

a) $\phi \in T$ car $\phi = \{(x,o), \forall x \in \mathbb{R}\}$ et $\Gamma_{\phi,\alpha} = \phi$ ouvert dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \in T$ car $\mathbb{R} = \{(x,1), \forall x \in \mathbb{R}\}$ et $\Gamma_{\mathbb{R},\alpha} = \mathbb{R}$ ouvert dans $\mathbb{R}$.

$$\forall \alpha \in]0,1[\text{ et } \Gamma_{\mathbb{R},1} = \phi$$

b) Si $\underset{\sim}{A} \in T$, $\underset{\sim}{B} \in T$, $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ T (théorème III.4)

c) Si $(\underset{\sim}{A}_i)_{i \in I} \in T$, $\bigcup_{i \in I} \underset{\sim}{A}_i \in T$ (théorème III.3).

III.4 - PROPRIETES DE CETTE TOPOLOGIE

Théorème III.8

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

- Le plus petit sous-ensemble flou $(\underset{\sim}{F})$, fermé, contenant $\underset{\sim}{A}$ est défini par : $u_{\underset{\sim}{F}}(x) = \lim\limits_{y \to x} \sup u_{\underset{\sim}{A}}(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Le plus grand sous-ensemble flou ouvert $(\underset{\sim}{\mathcal{O}})$ contenu dans $\underset{\sim}{A}$ est défini par $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(x) = \lim\limits_{y \to x} \inf u_{\underset{\sim}{A}}(y)$.

Démonstration :

Lemme III.3 [18]

La régularisée S.C.I. d'une fonction $f \in \overline{\mathbb{R}}^E$, est la plus grande fonction S.C.I. qui minore f. Si on la note $\overline{f}$, on a :

$$\overline{f}(x) = \lim_{y \to x} \inf (f(y))$$

Sachant que $\lim\limits_{y \to x} \inf(f(y)) = \sup\limits_{V \in \mathcal{F}(x)} \inf\limits_{y \in V}(f(y))$, où $\mathcal{F}(x)$ est une base de filtre de voisinage de x et V un voisinage quelconque de cette famille.

Pour démontrer théorème III.8, il suffit de le démontrer pour $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}$.

D'après lemme III.3, $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}$ est donc la régularisée S.C.I. de $u_{\underset{\sim}{A}}$.

D'autre part $u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}} \leqslant u_{\underset{\sim}{A}}$, par construction $\Longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{O}} \subset \underset{\sim}{A}$

(c.q.f.d.).

Proposition III.1 et définition

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$. Un voisinage de $\underset{\sim}{A}$ est un S.E.F.R qui contient un S.E.F.R ouvert contenant $\underset{\sim}{A}$.

$\underset{\sim}{A}$ est ouvert si, et seulement si $\underset{\sim}{A}$ est un voisinage de tous ses points.

Démonstration :

Montrons d'abord que si $\underset{\sim}{A}$ est ouvert, alors $\underset{\sim}{A}$ est voisinage de tous ses points.

Soit $(x_0, u_A(x_0)) \in \underset{\sim}{A}$. Soit $I \subset \mathbb{R}$, un voisinage ouvert de x_0 et ϕ_I sa fonction caractéristique.

ϕ_I étant la fonction caractéristique d'un ouvert, c'est donc une S.C.I.

D'autre part, $u_{\underset{\sim}{A}}$ est une S.C.I., donc le produit $\phi_I . u_A$ l'est aussi. De plus $\phi_I . u_A \leq u_A \Longrightarrow \phi_I . u_A$ est un voisinage ouvert de $(x_0, u_{\underset{\sim}{A}}(x_0))$ et donc $\underset{\sim}{A}$ est voisinage de tous ses points.

Réciproquement :

Partons de $\underset{\sim}{A}$ voisinage de tous ses points et montrons que $\underset{\sim}{A}$ est un ouvert.

Soit $x_0 \in \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$. $\underset{\sim}{A}$ voisinage de tous ses points $\Longrightarrow$ il existe un ouvert $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$, voisinage de $(x_0, u_A(x_0)) \Longrightarrow u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}$ est une S.C.I. $\Longrightarrow \{x / u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}}(x) > \alpha\}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.

Or $\underset{\sim}{\mathcal{O}} \subset \underset{\sim}{A} \Longrightarrow \Gamma_{\underset{\sim}{\mathcal{O}},\alpha} \subset \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$, $\forall \alpha \in]0,1] \Rightarrow \exists I_0 \subset I_{\underset{\sim}{\mathcal{O}},\alpha}$, I_0 voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha} \Longrightarrow \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est voisinage de tous ses points $\Longrightarrow \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est un ouvert $\forall \alpha \in]0,1] \Longrightarrow \underset{\sim}{A}$ est ouvert.

Proposition III.2

Soit $\underset{\sim}{A}$ un S.E.F.R. Alors l'intérieur de $\underset{\sim}{A}$, noté $\overset{\circ}{\underset{\sim}{A}}$ est le sous-ensemble flou de fonction d'appartenance, la régularisée inférieure de $u_{\underset{\sim}{A}}$. Et la fermeture ou adhérence, notée $\underset{\sim}{A}'$ est la régularisée supérieure de $u_{\underset{\sim}{A}}$.

Démonstration :

Evidente d'après le théorème III.8.

III.5 - SEPARATION DE L'ESPACE ($\mathbb{R}$,T)

Définition III.7 (axiome de HAUSDORF [10]).

Un espace E est séparé si et seulement si quels que soient les points distincts a et b de E, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b sans aucun point commun.

Définition III.8

Deux points flous seront dits distincts si et seulement si leurs supports le sont.

Remarque III.8

Deux points flous sont distincts si le produit de leurs fonctions d'appartenance est la fonction nulle (nous remarquons qu'un point flou n'est jamais vide).

Théorème III.9

Avec la définition III.8, E est séparé.

Démonstration :

Ceci repose sur le fait que $\mathbb{R}$ est séparé. En effet :

Soit $\underset{\sim}{x}_0$ et $\underset{\sim}{y}_0$ deux points flous distincts.

$\underset{\sim}{x}_0 \neq \underset{\sim}{y}_0 \Longrightarrow x_0 \neq y_0 \Longrightarrow$ il existe $v(x_0)$, voisinage ouvert de x_0, et $w(y_0)$ voisinage ouvert de y_0 tels que $v(x_0) \cap w(y_0) = \phi$. Considérons ϕ_v et ϕ_w, fonctions caractéristiques de v et w. ϕ_v et ϕ_w sont des S.C.I.

$$\text{Soit } \underset{\sim}{\mathcal{O}}_1 = \{x / u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_1}(x) = \phi_v(x)\}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{O}}_2 = \{x / u_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_2}(x) = \phi_w(x)\}$$

$\underset{\sim}{\mathcal{O}}_1$ et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_2$ sont des S.E.F.R ouverts et voisinages de $\underset{\sim}{x}_0$ et $\underset{\sim}{y}_0$ et en plus $\phi_v \wedge \phi_w = 0 \Longrightarrow$ E est séparé.

Remarque III.9

La séparation des points flous se fait au niveau des supports.

III.6 - COMPACITE

Définition III.9

Une famille $\mathcal{F}$ de S.E.F.R. est un recouvrement d'un S.E.F.R. $\underset{\sim}{B}$, si et seulement si $\underset{\sim}{B} \subset \cup\{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{F}\}$.

$\mathcal{F}$ est dit un recouvrement ouvert si $\forall \underset{\sim}{A} \in \mathcal{F}$, $\underset{\sim}{A}$ est ouvert.

Définition III.10

Un S.E.F.R. $\underset{\sim}{A}$ est dit borné si $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est borné dans $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \in]0,1]$.

Remarque III.10

ZADEH [33], propose la définition suivante :

$\underset{\sim}{A}$ est dit borné si $\forall \alpha \in]0,1]$, $A_\alpha = \{x / u_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Pour nous, il suffit que $\forall \alpha > 0$, $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ soit borné dans $\mathbb{R}$, en effet :

pour α donné, nous avons $A_\alpha \supset \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ et au lieu de α, il suffit de prendre $\alpha - \varepsilon$, ε assez petit, avec $\tilde{\alpha} - \varepsilon > 0$ et nous aurons $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha-\varepsilon} \supset A_\alpha \supset \Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$.

Si $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha-\varepsilon}$ est borné selon notre définition, A_α l'est aussi selon la définition de ZADEH.

Proposition III.3

Soit $I \subset \mathbb{R}$, I borné, alors tout S.E.F.R de support I est borné.

Démonstration

Triviale car $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha} \subset I$ $\forall \alpha \in]0,1]$.

Théorème III.10

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$

Alors $\underset{\sim}{A}$ est borné $\Longleftrightarrow \exists (\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i)_{i \in I}$ bornés recouvrant $\underset{\sim}{A}$ avec card $I < +\infty$.

Démonstration

D'abord, s'il existe $(\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i)_{i \in I}$ bornés recouvrant $\underset{\sim}{A}$, nous avons $\underset{\sim}{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\mathcal{O}}_i$. Or $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i,\alpha}$. $\forall \alpha \in]0,1] \Longrightarrow S_{\underset{\sim}{A}} \subset S_{\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\mathcal{O}}_i}$

Or $S_{\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\mathcal{O}}_i}$ est borné $\Longrightarrow S_{\underset{\sim}{A}}$ est borné $\Longrightarrow \underset{\sim}{A}$ est borné.

Réciproquement :

Partons de $\underset{\sim}{A}$ borné $\Longrightarrow S_{\underset{\sim}{A}}$ est borné dans $\mathbb{R} \Longrightarrow \overline{S_{\underset{\sim}{A}}}$, fermeture de $S_{\underset{\sim}{A}}$ est un compact. Donc de tout recouvrement d'ouverts on peut en extraire un recouvrement fini.

Soit $(\mathcal{O}_i)$ $i = 1, \ldots, n$, un recouvrement d'ouverts bornés de $S_{\underset{\sim}{A}}$ et considérons :

$$\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i = \{(x, \phi_i(x), x \in \mathbb{R}\} \text{ ou } \phi_i(x)$$

est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_i$.

$\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i$ est un S.E.F.R ouvert, borné puisque son support l'est, pour tout $i = 1, \ldots, n$. D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons $u_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} \phi_i(x) \Longrightarrow \underset{\sim}{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\mathcal{O}}_i$ et $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_i$ ouvert borné c.q.f.d.

Définition III.11

Un S.E.F.R. est dit compact si de tout recouvrement d'ouverts flous, on peut extraire un recouvrement fini.

Proposition III.4

(E,T) (ou $(\mathbb{R},T)$) n'est pas un espace compact.

Démonstration

Il suffit de prendre $I_n =]-n,+n[$, $n \in \mathbb{N}$ et les sous-ensembles flous de support I_n et de fonction d'appartenance la fonction caractéristique de I_n qui est une S.C.I.. Ces sous-ensembles flous forment un recouvrement de E, pourtant on ne peut en extraire un recouvrement fini.

Proposition III.5

Un compact flou est nécessairement à support borné.

Démonstration :

Evidente d'après proposition III.4.

Proposition III.6

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ à support borné.

Si $\underset{\sim}{A}$ est compact, alors nécessairement son support est fermé dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Il suffit de le démontrer pour un support qui est un intervalle.

Soit $]a,b[$ le support d'un S.E.F.R. $\underset{\sim}{A}$ borné (nous aurions pu prendre un semi-ouvert).

Considérons $A_n =]a - \frac{1}{n}, a+\frac{b-a}{n}[$ et $\underset{\sim}{A}_n$ tel que $u_{\underset{\sim}{A}_n} = \phi_{A_n}$. ϕ_{A_n} est une S.C.I. et nous avons $\underset{\sim}{A} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}_n$, pourtant on ne peut pas en extraire un recouvrement fini $\Longrightarrow$ $\underset{\sim}{A}$ est nécessairement à support fermé.

III.7 - CONVERGENCE

Définition III.12

Soit $(\underset{\sim}{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de S.E.F.R. et $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$. Nous dirons que $(\underset{\sim}{A}_n)$ converge vers $\underset{\sim}{A}$ si $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N} / n \geq m \Longrightarrow$ $\underset{\sim}{A}_n \subset \underset{\sim}{\mathcal{O}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ étant un voisinage quelconque de $\underset{\sim}{A}$.

Théorème III.11

Soit $(\underset{\sim}{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points flous.

Nous dirons que $(\underset{\sim}{x}_n)$ converge vers $\underset{\sim}{x}$ si tout voisinage de $\underset{\sim}{x}$ contient tous les $\underset{\sim}{x}_n$ sauf un nombre fini.

Conséquences :

1°) Supposons que $\underset{\sim}{x}_i \neq \underset{\sim}{x}_j$. $\forall i \neq j$ et voyons si la limite est unique.

Supposons qu'il existe $\underset{\sim}{l}_1$ et $\underset{\sim}{l}_2$ limites de $(\underset{\sim}{x}_n)$.

$$\text{Soit } \underset{\sim}{l}_1 = \begin{cases} (l_1, \alpha_1) & \text{pour } l = l_1 \\ (l, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \underset{\sim}{l}_2 = \begin{cases} (l_2, \alpha_2) & \text{pour } l = l_2 \\ (l, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $\underset{\sim}{l}_1 \neq \underset{\sim}{l}_2$, d'après le théorème III.8, il existe $\underset{\sim}{B}_1$, voisinage de $\underset{\sim}{l}_1$ et $\underset{\sim}{B}_2$ voisinage de $\underset{\sim}{l}_2$ avec $\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2 = \phi$.

Or $\underset{\sim}{B}_1$ contient tous les $\underset{\sim}{x}_n$ sauf un nombre fini $\Longrightarrow$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n_1 / n \geqslant n_1, \underset{\sim}{x}_n \in \underset{\sim}{B}_1$.

De même $\underset{\sim}{B}_2$ contient tous les $\underset{\sim}{x}_n$ sauf un nombre fini $\Longrightarrow \forall m, \exists n_2 \in \mathbb{N} \ / n \geqslant n_2, \ \underset{\sim}{x}_n \in \underset{\sim}{B}_2$.

Soit $j = \sup(n_1, n_2) \Longrightarrow \forall m, \exists j \in \mathbb{N} \ / n > j, \ \underset{\sim}{x}_n \in \underset{\sim}{B}_1$ et $\underset{\sim}{x}_n \in \underset{\sim}{B}_2 \Longrightarrow \underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2 \neq \phi \Longrightarrow \underset{\sim}{l}_1$ n'est pas distinct de $\underset{\sim}{l}_2$.

Ceci ne nous permet pas de conclure que $\underset{\sim}{l}_1 = \underset{\sim}{l}_2$, mais nous montre seulement que les supports points sont les mêmes i.e $l_1 = l_2$. C'est ici qu'intervient la différence entre "points flous distincts" et "points flous dominés". Sachant qu'un point flou $\underset{\sim}{x}_o$ est dit dominé par $\underset{\sim}{y}_o$ si $x_o = y_o$ et si $u_{\underset{\sim}{x}_o}(x_o) \leqslant u_{\underset{\sim}{y}_o}(y_o)$

Nous avons alors deux cas à étudier :

1°) $\alpha_1 = \alpha_2 \Longrightarrow$ la limite est unique.

2°) Supposons $\alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow l_1 \subsetneq l_2$.

$\underset{\sim}{x}_n \underset{n \to \infty}{\to} \underset{\sim}{l}_1$ d'après théorème III.11, nous avons :

$\forall \underset{\sim}{v}$, voisinage de $\underset{\sim}{1}_1$, $\underset{\sim}{v}$ contient tous les $\underset{\sim}{x}_n$ sauf un nombre fini (voir FIG. III.1).

En particulier si $\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{1}_1)$ est tel que $\underset{\sim}{B} = \begin{cases} (x, u_{\underset{\sim}{B}}(x)) \text{ avec } u_{\underset{\sim}{B}}(x) = \dfrac{\alpha_1}{1+(1-x_0)} \\ \text{si } x \in]1-r_0, 1+r_0[,\ r_0 \in \mathbb{R}^+ \\ (x,0), \text{ sinon} \end{cases}$

est un voisinage ouvert de $\underset{\sim}{1}_1$.

$$\exists N_0 / n > N_0, \underset{\sim}{x}_n \in B(\underset{\sim}{1}_1) \Longrightarrow$$

$$\forall v(\underset{\sim}{1}), \ \forall n > N_0, \ \beta_n = u_{\underset{\sim}{x}_n}(x_n) \leq \alpha_1 \Longrightarrow \exists N_0 / \ \ \forall n > N_0, \ \sup_n \beta_n \leq \alpha_1$$

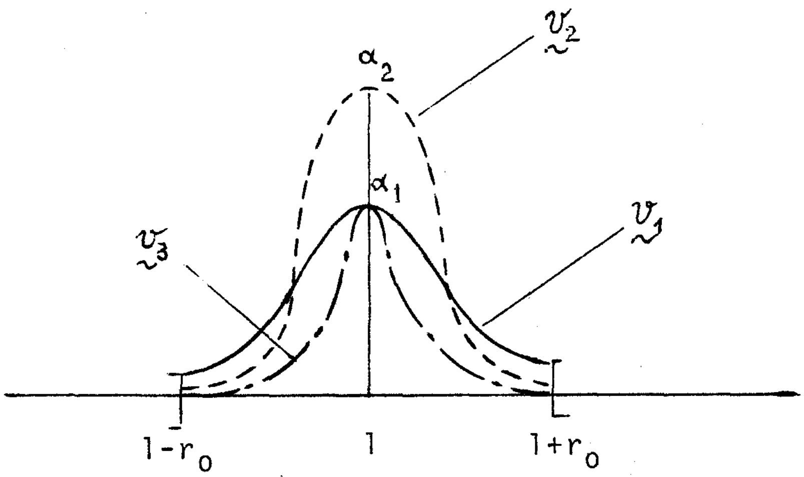


FIG III.1

faisons le même raisonnement pour $\underset{\sim}{1}_2$.

Nous aurons :

$$\exists N_0' / \ \forall n > N_0', \ \sup_n \beta_n \leq \alpha_2 \Longrightarrow \ \sup_n \beta_n \leq \inf(\alpha_1, \alpha_2), \ \forall n / n > N.$$

avec $N = \sup(N_0, N_0')$.

Or, considérons $u_n = \sup\limits_{n>m} B_m$

u_n est une suite monotone (décroissante) et bornée dans $\mathbb{R}$, elle est donc convergente. Soit α sa limite, elle est unique et nous avons :

$$\begin{cases} \alpha \leq \alpha_2 \Longrightarrow \alpha \leq \inf(\alpha_1,\alpha_2) \\ \alpha \leq \alpha_1 \end{cases}$$

D'autre part, si u_n est convergente, nous avons :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)/ {}_n^m > N(\varepsilon), \left| \sup\limits_{p\in[n,\infty[} B_p - \sup\limits_{q\in[m,\infty[} B_q \right| \leq \varepsilon$, si nous prenons $\mathbb{R}$ normé. Et ce sera le même critère de convergence s'il est métrique.

La limite de u_n est alors $\alpha = \inf\limits_n \sup\limits_{q\in[n,\infty[} B_q$ et $(1,\alpha)$ sera la limite unique da la suite (x_n).

<u>Exemple</u> :

1°) Soit $\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (x_0,\frac{1}{n}) \text{ pour } x = x_0 \\ (x,0) \text{ sinon} \end{cases}$

$u_k = \sup\limits_{n\in[k,\infty[} \frac{1}{n} = \frac{1}{k}$ et $\inf \frac{1}{k} = 0 \Longrightarrow \underset{\sim}{x}_n$ converge vers l'ensemble $\underset{\sim}{\phi}$.

2°) $\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (x_0,1-\frac{1}{n}) \text{ pour } x = x_0 \\ (x,0) \text{ sinon} \end{cases}$

$\sup\limits_{n\in[k,\infty[}(1-\frac{1}{k}) = 1$ et $\inf\limits_n 1 = 1 \Longrightarrow \underset{\sim}{x}_n$ converge vers $\begin{cases} (x_0,1) \text{ si } x = x_0 \\ (x,0) \text{ sinon} \end{cases}$

<u>Théorème de convergence des suites (III.12)</u>

Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle ($\mathbb{R}$,|| ||).

Soit $\underset{\sim}{x}_n$ une suite de points flous réels de support $x_n \in \mathbb{R}$ et de valeur d'appartenance : α_n i.e.

$$\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (x_n, \alpha_n) \text{ pour } x = x_n \\ (x, 0) \text{ sinon} \end{cases}$$

Nous dirons que $\underset{\sim}{x}_n$ converge vers :

$$\underset{\sim}{1} = \begin{cases} (1, \alpha) \text{ si } x = 1 \\ (x, 0) \text{ sinon} \end{cases}$$

si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)/n > N(\varepsilon) \Longrightarrow ||x_n - 1|| \leq \varepsilon$ et

$$||u_n - \alpha|| \leq \varepsilon$$

avec $u_n = \sup\limits_{q \in [n, \infty[} \alpha_q$. (i.e converge simple des supports et limite supérieure pour les valeurs d'appartenance.

<u>Conséquence</u>

<u>Proposition III.7</u>

Avec ce théorème de convergence, la limite est unique.

<u>Exemple</u> :

Soit $$\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (1 - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \text{ pour } x = 1 - \frac{1}{n^2} \\ \qquad\qquad\qquad , n \in \mathbb{N}^* \\ (x, 0) \text{ sinon} \end{cases}$$

Nous avons :

$$\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = 1$$

et

$$\sup_{n \in [q, \infty[} \frac{1}{n} = \frac{1}{q}, \ \inf_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{q} = 0 \Longrightarrow \underset{\sim}{x}_n \quad \begin{cases} (1, 0) \text{ si } x = 1 \\ (x, 0) \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\text{i.e } \underset{\sim}{x}_n \to \phi$$

Définition III.12

Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $(\mathbb{R}, \| \ \|)$,

et $\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (x_n, \alpha_n) & \text{si } x = x_n \\ (x,0) & \text{sinon} \end{cases}$ alors $\{\underset{\sim}{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de CAUCHY

si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \underset{m}{n} > N(\varepsilon) \Longrightarrow \begin{cases} \|x_n - x_m\| < \varepsilon \\ \text{et} \\ \|u_n - u_m\| < \varepsilon \end{cases}$$

avec $u_n = \sup\limits_{q \in [n,\infty[} \alpha_q$

Théorème III.13

Soit $(\mathbb{R}, \| \ \|)$. Alors toute suite de CAUCHY est convergente (i.e E est complet), selon théorème III.12.

Théorème III.14

Soit $(\underset{\sim}{A}_n)$ une suite de S.E.F.R.

On dit que $(\underset{\sim}{A}_n)$ converge vers $\underset{\sim}{A}$, s'il y a convergence point par point selon théorème III.12.

Proposition III.8

Soit $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ et $\underset{\sim}{A}$ fermé . Alors $\underset{\sim}{A}$ n'est pas nécessairement complet.

Démonstration :

Considérons le contre-exemple suivant :

Soit $\underset{\sim}{A}$ tel que $u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$

$u_{\underset{\sim}{A}}(x) = x^2$ pour $x \in]0,1[$

$u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ sinon

$\underset{\sim}{A}$ est fermé puisque $u_{\underset{\sim}{A}}$ est une fonction semi-continue supérieurement.

Soit $(\underset{\sim}{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \underset{\sim}{A}$ telle que $\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} \left[(1-\frac{1}{n}),\ (1-\frac{1}{n})^2\right] & \text{si } x = 1-\frac{1}{n} \\ (x,0) & \text{sinon} \end{cases}$

$\underset{\sim}{x}_n$ converge vers $\begin{cases} (1,1) & \text{si } x = 1 \\ (x,0) & \text{sinon} \end{cases}$ et pourtant ce point limite n'appartient pas à $\underset{\sim}{A}$.

III.8 - FONCTIONS FLOUES

Définition III.14

Soit $f : X \to Y$ et $\underset{\sim}{B}$ un sous-ensemble flou de Y, on définit $f(\underset{\sim}{B})$ tel que $u_{f^{-1}(\underset{\sim}{B})}(x) = u_{\underset{\sim}{B}}(f(x))$, $\forall x \in X$. Alors $f^{-1}(\underset{\sim}{B})$ est un sous-ensemble flou de X. D'autre part, $\forall \underset{\sim}{A} \subset X$, $f(\underset{\sim}{A})$ est un sous-ensemble flou de Y tel que :

$$u_{f(\underset{\sim}{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u_A(\underset{\sim}{x}). & \text{Si } f^{-1}(y) \neq \phi \\ (x,0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème III.15 [4]

Soit $f : x \to y$, $\underset{\sim}{B} \subset Y$, et $\underset{\sim}{A} \subset X$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

a) $f^{-1}({}^C\underset{\sim}{B}) = {}^C\{f^{-1}(\underset{\sim}{B})\}$ ou "${}^C_A$" désigne le complémentaire de A

b) $f(C_{\underset{\sim}{A}}) \supset {}^C\{f(\underset{\sim}{A})\}$.

c) Si $\underset{\sim}{B}_1 \subset \underset{\sim}{B}_2$, $\underset{\sim}{B}_1$ et $\underset{\sim}{B}_2$ étant deux sous-ensembles flous de Y alors : $f^{-1}(\underset{\sim}{B}_1) \subset f^{-1}(\underset{\sim}{B}_2)$.

d) Si $\underset{\sim}{A}_1 \subset \underset{\sim}{A}_2$, $\underset{\sim}{A}_1$ et $\underset{\sim}{A}_2$ étant deux sous-ensembles flous de X alors : $f(\underset{\sim}{A}_1) \subset f(\underset{\sim}{A}_2)$.

e) $\underset{\sim}{B} \supset f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))$.

f) $\underset{\sim}{A} \subset f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))$.

g) Soit $g : Y \to Z$ et $\underset{\sim}{C} \subset Z$ alors :

$$(gof)^{-1}(\underset{\sim}{C}) = f^{-1}(g^{-1}(\underset{\sim}{C}))$$

Définition III.15 : Fonctions continues [4]

Soit (X,T) et (Y,U) deux espaces topologiques flous, et $f : X \to Y$.

Alors f est dite floue-continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de U est un ouvert de T.

III.9 - EVENEMENTS FLOUS, PROBABILITES D'EVENEMENTS FLOUS

Considérons d'abord l'espace mesurable ($\mathbb{R}$,B) où B désigne les boréliens de $\mathbb{R}$.

Soit $\underset{\sim}{A}$ un S.E.F.R., et B' l'ensemble des boréliens de $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Définition III.16

Nous dirons que $\underset{\sim}{A}$ est un borélien flou si $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est borélien $\forall \alpha \in]0,1]$.

Définition III.17

$\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ est dit flou-mesurable si $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est B-mesurable $\forall \alpha \in]0,1]$.

Proposition III.9

$\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ est mesurable si et seulement si, $u_{\underset{\sim}{A}}$ est une fonction mesurable de ($\mathbb{R}$,B) dans ([0,1],B')

Définition III.18

Soit ($\mathbb{R}$,B ,m) un espace mesuré et $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ mesurable. On appelle mesure d'un S.E.F.R. $\underset{\sim}{A}$, la quantité

$$u'_{\underset{\sim}{A}} = \int_{\mathbb{R}} u_{\underset{\sim}{A}}(x).dm(x).$$

Définition III.19

Soit ($\mathbb{R}$,B ,P) un espace probabilisé et $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\mathcal{F}}$, un S.E.F.R. mesurable. Alors $\underset{\sim}{A}$ est appelé un évènement flou.

Conséquence III.1 : Probabilité d'un évènement flou [34]

D'après définitions III.17 et III.18, la probabilité d'un évènement flou $\underset{\sim}{A}$ est la quantité :

$$P(\underset{\sim}{A}) = \int_{\mathbb{R}} u_{\underset{\sim}{A}}(x)dP(x)$$

Conséquence III.2

Ayant ainsi défini la probabilité d'évènements flous, nous pouvons alors étudier des processus stochastiques flous, faisant appel à la fois à l'incertitude et l'imprécision [37].

Conséquence III.3

Ayant défini un espace flou mesuré, nous pouvons construire alors des mesures de S.E.F.R. et étudier les intégrales floues, [32], et leurs applications.

C H A P I T R E IV

****

SOMMAIRE

IV.1 - INTRODUCTION

La fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou (S.E.F.), doit exprimer fidèlement, à l'aide d'une échelle quantitative (par exemple l'intervalle [0,1]), un qualitatif.

Nous verrons plus loin les différentes discussions à ce sujet. Et jusqu'à ce jour, à notre connaissance, aucune méthode rationnelle de construction de la fonction d'appartenance d'un individu n'a été fournie.

Nous ne prétendons pas donner la méthode de construction de la fonction d'appartenance. Mais nous suggerons toutefois qu'une méthode topologique serait, à notre avis, une rationalisation non négligeable du quantitatif subjectif qui rejoint les axiomes de rationalisations de BELLMAN & GIERTZ [2], MORITA & IIDA [22] et FUNG & FU [38].

IV.2 - METHODE EXPEDITIVE DE QUANTIFICATION A PRIORI

Partons d'abord du principe que la fonction d'appartenance doit refléter le centre d'intérêt ou de désintérêt d'un individu (le décideur), et prenons l'exemple suivant :

Un chef d'entreprise, vue la conjoncture actuelle (crise incontrôlable), se donne un chiffre d'affaire flou à atteindre dans un certain temps, en tenant compte des contraintes du moment, du futur imprécis, des difficultés d'investissement, de production...

Supposons qu'il nous propose la fonction d'appartenance suivante pour son objectif flou : $u_{\underset{\sim}{O}}(x) = \frac{1}{1+(x-6)^2}, x \in \mathbb{R}^+$,

pensant sans doute que son chiffre d'affaire sera voisin de 6 unités.

En regardant FIG. IV.1, nous remarquons que la fonction d'appartenance est symétrique par rapport à X = 6 et que son centre d'intérêt est l'intervalle [5,7]. i.e $\{x / u_{\underset{\sim}{O}}(x) \geqslant \frac{1}{2}\} = [5,7]$

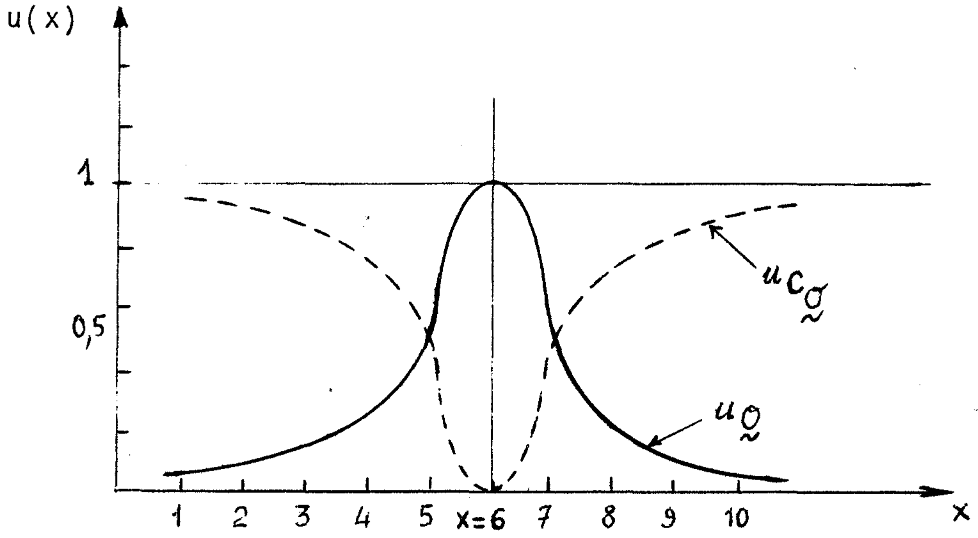


FIG. IV.1

Or, il se peut que l'amplitude de son intérêt soit plus grande, par exemple [3,9], ou plus réduite. Et la durée de sa marge d'intérêt peut affiner la fonction d'appartenance du type qu'il a choisi, en effet, supposons d'abord que sa fonction d'appartenance soit du type $\frac{1}{1+a(x-6)^2}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Supposons aussi que son centre d'intérêt est l'intervalle $[x_0', x_0]$.

Ecrivons que $(x_0, \frac{1}{2})$ doit appartenir à $\underset{\sim}{O}$ ainsi qu'à

$$C_{\underset{\sim}{O}} \Longrightarrow \frac{1}{1+a(x_0-6)^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow a(x-6)^2 = 1 \Longrightarrow x_0 - 6 = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 6 + \frac{1}{\sqrt{a}} \\ x_0' = 6 - \frac{1}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

Si son centre d'intérêt est l'intervalle [4,8], alors $|x_0 - x_0'| = 4 = \frac{2}{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$. et sa fonction d'appartenance serait alors : $\frac{4}{4+(x-6)^2}$.

D'autre part, le décideur doit donner la fonction d'appartenance de l'objectif contraire à celui qu'il s'est fixé, ce qui sera en fait le seul test de cohérence, que nous pouvons faire dans ce cas-là.

Remarques :

Jusqu'à maintenant, les méthodes de valuation du qualitatif ont été à peu près identiques à celles présentées plus haut. (voir [38], [35]).

Nous verrons, d'autre part, que ZADEH a donné une méthode d'évaluation d'actions qualitatives compliquées (exemple "nettement plus grand") à partir d'une action simple ("grand") qu'il a valuée arbitrairement, à peu près comme nous l'avons étudié précédemment.

Encore faut-il déterminer la fonction d'appartenance de l'action primaire ("grand"), d'une façon rationnelle. Alors que d'autres auteurs ([11]) soutiennent qu'il ne doit pas y avoir lieu de rationalisation, mais plutôt de diminution du subjectif; la difficulté réside, en fait, dans la construction d'un homomorphisme d'une préférence qualitative dans une préférence quantitative.

Cette valeur d'appartenance n'est pas une valeur statistique donnée par les décideurs, car elle dépend surtout de leurs points de vue subjectifs, de leur façon de voir les choses. Mais nous craignons de tomber dans un excès de subjectivité, comme nous avons craint de tomber dans un excès d'objectivité en traitant des problèmes à caractère subjectif.

EN rationalisant cette valorisation du subjectif, nous entendons qu'elle préserve quelques propriétés fondamentales des préférences qualitatives des individus.

De plus, en imposant une fonction d'appartenance a priori, comment pourrions-nous l'utiliser ? et avec quels opérateurs ? est-ce que les opérateurs MIN-MAX reflèteraient le point de vue du décideur en pareil cas ?

Nous n'en sommes pas convaincus, d'autant plus que, pour nous, l'utilisation de la fonction d'appartenance se fera de la même manière qu'elle a été construite, comme nous l'avons dit à la fin du chapitre II. Une autre utilisation serait contre nature et tout se passerait comme si nous traitions un processus stochastique classique, ou oubliant l'additivité des probabilités et en utilisant les opérateurs MIN-MAX, par exemple.

IV.3 - LES METHODES DE RATIONALISATIONS PROPOSEES

Nous allons rappeler brièvement quelques méthodes de construction de la fonction d'appartenance apparues à ce jour à notre connaissance.

IV.3.1 - Détermination de la fonction d'appartenance à l'aide d'un certain nombre d'observations [19]

1ère méthode :

Cette méthode a été plutôt employée pour des modèles de classification.

Soit $\underset{\sim}{A}$ un S.E.F. (sous-ensemble flou), d'un ensemble $\Omega = \{x\}$ et f(x) sa fonction d'appartenance.

On sélectionne deux "niveaux", ε_1 et ε_2 de l'intervalle [0,1]. De sorte que :

a) x est dit "appartenant" à $\underset{\sim}{A}$ si $f(x) \geqslant 1 - \varepsilon_1$

b) x est dit "n'appartenant pas" à $\underset{\sim}{A}$, si $f(x) \leqslant \varepsilon_2$.

c) x est dit "intermédiaire ou indéterminé relativement à $\underset{\sim}{A}$" si $\varepsilon_2 < f(x) < 1 - \varepsilon_1$.

En fait, à partir d'une fonction d'appartenance donnée, on essaye d'en déduire une "fonction caractéristique" à trois valeurs : i.e :

Si $f(x) \geqslant 1 - \varepsilon_1$ on pose $f(x) = 1$

Si $f(x) \leqslant \varepsilon_2$ on pose $f(x) = 0$

Si $\varepsilon_2 < f(x) < 1 - \varepsilon_1$ on pose $f(x) = \frac{1}{2}$

et la fonction d'appartenance ne prendra plus ses valeurs dans $[0,1]$, mais dans $\{0,\frac{1}{2},1\}$.

<u>2ème méthode</u> :

Elle consiste à approximer la fonction d'appartenance, à partir d'un certain nombre d'observations.

Partons du même S.E.F., $\underset{\sim}{A}$ et soit x^1, ... x^n éléments de $\Omega = \mathbb{R}^l$. Notons $f^i = f(x^i)$, où f^i est le degré d'appartenance de x^i, les couples (x^i,f^i) sont appelés des "observations" du S.E.F. $\underset{\sim}{A}$. Le problème posé alors est, à partir de ces observations, d'estimer la fonction f, ce qui est un problème d'approximation qui pourra être traité par exemple de la façon suivante :

Soit $\overline{f}$ cette estimation,

Nous devons d'abord savoir de <u>quel type est $\overline{f}$</u>, ou <u>bien savoir sa forme</u>. Notons $\overline{F} = \{\overline{f}(x,\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^l\}$, l'ensemble de ces fonctions estimation paramétrée par λ.

Dans le cas où $\underset{\sim}{A}$ est un ensemble vulgaire, le problème devient alors essentiellement, de trouver un hyperplan L passant par l'origine de $\mathbb{R}^l$, de façon à ce que les points $x^1,\ldots,x^n$ soient du même côté de L.
(Dans le cas où $\underset{\sim}{A}$ est un ensemble vulgaire, nous avons $f^1 = \ldots = f^n = 1$).

i.e :
$$\overline{f}(x,\lambda) = 1 \text{ pour } \langle x,\lambda\rangle \geqslant 0$$
$$\overline{f}(x,\lambda) = 0 \text{ sinon}$$

où $\langle x,\lambda\rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et λ.
Le problème sera de trouver λ tel que $\langle x^i,\lambda\rangle \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.
Nous remarquons la difficulté de mettre en oeuvre cette méthode, puisqu'on part du fait qu'on connaît déjà la forme de la fonction estimation recherchée.

Cette méthode de construction est en effet très comparable à la méthode statistique pour déterminer une loi normale par exemple (donc on connaît le type ou la forme de la fonction) à partir d'un échantillon donné $x^1, \ldots, x^n$.

IV.3.2 - Fonction d'appartenance d'un groupe [11]

Les auteurs remarquent que l'estimation de la fonction d'appartenance présentée dans [35] est trop subjective et relèvent deux remarques :

1°) Comment établir une échelle de mesures pour la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou ?

2°) Même si on arrive à déterminer une telle échelle de mesure, comme dans l'exemple traité au chapitre II, la décision optimale dans de pareils cas est par trop subjective.

La solution proposée consiste à déterminer la fonction d'appartenance d'un groupe d'individus, plutôt que d'un seul, dans le but de diminuer la subjectivité, et ils soutiennent que la méthode de détermination de la fonction d'appartenance, dépend des applications qu'on en fait, plutôt que d'une définition rigoureuse de la façon dont elle sera construite, et,plutôt que d'utiliser les opérateurs MIN-MAX, ils proposent des opérateurs plus malléables comme la moyenne et la somme algébrique définis comme suit :

Etant donné un ensemble X et, $\underset{\sim}{G}$ un S.E.F. de X. Soit 2^X l'ensemble des parties de X : alors on a les opérateurs suivants:

- Opérateur moyenne :

$$u_{\underset{\sim}{G}}\{(x_1,\ldots,x_n) \in 2^X\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_{\underset{\sim}{G}}(x_i)$$

- Opérateur somme algébrique :

$$\text{Soit } u_{\underset{\sim}{G}}(\{x_i\}) = u_{\underset{\sim}{G}}(x_i),\ x_i \in X \text{ et}$$

$$u_{\underset{\sim}{G}}(\{x_i,x_j\}) = u_{\underset{\sim}{G}}(x_i) + u_{\underset{\sim}{G}}(x_j) - u_{\underset{\sim}{G}}(x_i)u_{\underset{\sim}{G}}(x_j), x_i,x_j \in X$$

et, en général :

$$u_{\underset{\sim}{G}}(\{x_i\} \cup S) = u_{\underset{\sim}{G}}(S) + u_{\underset{\sim}{G}}(x_i) - u_{\underset{\sim}{G}}(S).u_{\underset{\sim}{G}}(x_i)$$

avec $S \in 2^X$, $x_i \in X$ et $x_i \notin S$

et d'une façon encore plus générale :

Soit $A \in 2^X$, $B \in 2^X$, avec $A \cap B = \phi$, alors :

$$u_{\underset{\sim}{G}}(A \cup B) = u_{\underset{\sim}{G}}(A) + u_{\underset{\sim}{G}}(B) - u_{\underset{\sim}{G}}(A).u_{\underset{\sim}{G}}(B)$$

Nous remarquons que cette analyse est plus centrée sur l'utilisation de la fonction d'appartenance, pour diminuer le subjectif, plutôt que sur sa construction.

IV-3.3 - Axiomatique d'une prise de décision "rationnelle" floue (FUNG & FU [38])

Dans cette section les auteurs se posent deux questions :

1°) Comment fixer une valeur d'appartenance à un élément, lors d'une décision de groupe ?

2°) Comment la notion de S.E.F. pourrait-elle être appliquée aux problèmes pratiques ?

La première question concerne l'échelle numérique des valeurs d'appartenance de façon qu'elle satisfasse certaines conditions de rationalisation d'un système de mesure, dans le cas d'une décision de groupe. Les auteurs suggèrent une échelle de mesure autre que [0,1], pour les cas d'agrégation des critères flous ou dans le cas d'une décision de groupe.

Elle consiste à considérer plutôt un espace topologique de symboles abstraits, sur lequel existe un ordre linéaire, ce qui est en fait une généralisation de la décision floue où les valeurs d'appartenance ne sont pas nécessairement dans un espace métrique bien défini comme l'intervalle [0,1]. D'autre part, pour employer la notion des S.E.F. dans des problèmes pratiques, ils présentent une axiomatique très proche de BELLMANN & GIERTZ [2], et aboutissent au fait que les seuls opérateurs valables à employer dans le cas d'une prise de décision "rationnelle", satisfaisant à ces axiomes, sont les opérateurs MIN-MAX ou un opérateur mixte.

Nous remarquons que le pôle d'intérêt des auteurs était la décision de groupe, sachant que chaque individu du groupe a sa propre fonction d'appartenance, et la rationalisation en question ne concerne pas la construction de cette fonction d'appartenance.

IV.4 - APPROCHE TOPOLOGIQUE DE LA CONSTRUCTION DE LA FONCTION D'APPARTENANCE.

IV.4.1 - Remarque : Fonction d'appartenance et fonction d'utilité

Nous avions présenté, au début de ce chapitre, une méthode expéditive de la construction de la fonction d'appartenance d'un individu.

Nous essayerons de présenter une méthode rationnelle pour la construire.

D'abord nous pouvons nous poser la question suivante :

Une fonction d'appartenance peut-elle être une fonction d'utilité ?

Considérons l'analyse de RAIFA [26], où, pour l'exemple, la fonction d'utilité est l'indifférence pour la monnaie. Soit π cette fonction, elle doit être d'abord d'une certaine forme (concave), et cette forme dépend du décideur.

D'autre part, si le décideur est opposé au risque, et étant donné trois points du référentiel : A, B, C, si on suppose dans la loterie 1 que son E.M.C. est inférieur à l'E.M.G. (voir chapitre II), on a E.M.C. < $\frac{A+B}{2}$, et on déduit que C est entre A et B avec $\pi(C) = \frac{\pi(A) + \pi(B)}{2}$ (Voir fIG. IV.2).

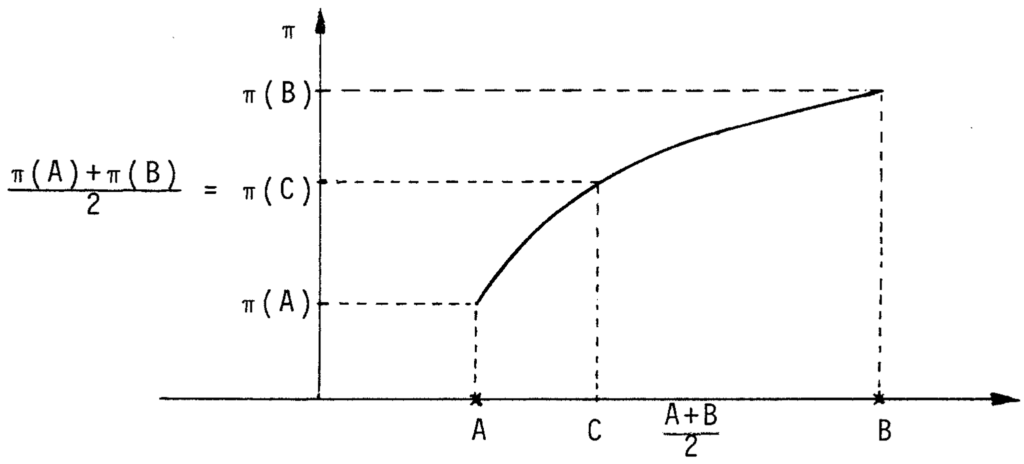
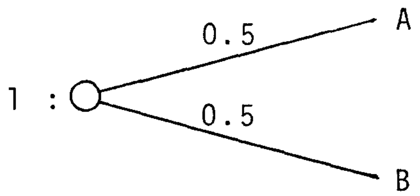


FIG IV.2

la concavité de la courbe dépend de la position du point C et si $C = \frac{A+B}{2}$, $\pi(x)$ serait une droite.

Pour déterminer la position du point C, le décideur le fait en examinant différentes loteries de la forme :



et en déterminant l'équivalent monétaire certain C, qu'il attribue à chaque résultat. Or nous avons vu au chapitre II que les équivalences de ces loteries sont sujettes à caution et ne sont valables que si elles sont monocritères.

IV.4.2 - La méthode

Dans la construction de la fonction d'appartenance, nous utiliserons les opérateurs MIN-MAX, ce qui nous amène, lors de son utilisation, à utiliser les mêmes opérateurs.

L'espace de référence sera l'ensemble des réels ; et l'échelle de mesure ou ensemble d'appartenance, l'intervalle $[0,1]$. Nous supposerons que la fonction d'appartenance du S.E.F.R. $\underset{\sim}{A}$ à déterminer est une S.C.I.. Soit u cette fonction. Nous avons vu au chapitre III, que $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, et que $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in]0,1]$, $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_1}$ et $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_2}$ sont comparables puisque α_1 et α_2 le sont dans $[0,1]$.

Nous avons ainsi un ordre linéaire sur les ouverts $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_i}$, induit en fait par l'ordre linéaire sur $[0,1]$, et d'après FUNG & FU [38], les opérateurs applicables pour "rationaliser" le subjectif sont les opérateurs MIN-MAX.

IV.4.2.1 - Premier cas

Pour déterminer la fonction d'appartenance $u : \mathbb{R} \to [0,1]$, d'un décideur, nous fixerons un ensemble de valeurs $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0,1]$. $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i=1, \ldots n$

$j=1, \ldots n$

Soit $\alpha_1 \in [0,1]$, nous demanderons au décideur de déterminer l'ensemble des réels sur lequel ses valeurs d'appartenances sont <u>strictement</u> supérieures à α_1. Si $\underset{\sim}{A}$ désigne le sous-ensemble flou en question, nous aurons ainsi une première estimation de $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_1}$.

Nous lui demanderons de définir ensuite l'ensemble $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_2}$ de la même façon.

Si nous avons pris l'inégalité stricte, c'est par souci d'aider le décideur à séparer les valeurs d'appartenance aux points critiques, c'est-à-dire, là où les valeurs d'appartenance sont assez proches ; et de distinguer les ensembles, de seuils de préférence différents.

Supposons que nous ayions ainsi déterminé les observations $u_1, \ldots, u_n$ définies comme précédemment : i.e :

$$u_i(x) = \begin{cases} \alpha_i \text{ pour } x \in \Gamma_{\underset{\sim}{A}_i,\alpha_i} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad (1)$$

Supposons d'abord que nous ayions fait un nombre d'observations infini, ou testé le décideur sur des seuils en nombre infini. Nous aurions ainsi défini une suite $(\underset{\sim}{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles flous observations définis par (1), et en fait, nous aurons pour tout nombre réel, x, déterminé une suite

$$\underset{\sim}{x}_n = \begin{cases} (x,\alpha_n) \text{ pour } y = x \\ \\ (y,0) \text{ sinon} \end{cases}$$

$\underset{\sim}{x}_n$ étant une suite de points flous à support stationnaire pour chaque x.

D'après le critère de convergence des suites (théorème III.12), cette suite est convergente pour tout x. Soit

$$\underset{\sim}{x} = \begin{cases} (x,\alpha(x)) \text{ pour } y = x \\ \\ (y,o) \text{ sinon} \end{cases}$$

la limite. Nous avons :

$$\alpha(x) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Inf}}(\underset{p\in[n,\infty[}{\sup}\alpha_p(x)) = \lim_{n\to\infty} u'_n(x) \text{ où } u'_n(x) = \underset{q\in[n,\infty[}{\sup}\alpha_q(x).$$

$\alpha(x)$ est en fait la limite supérieure de $\alpha_p(x)$.

Si $u'_n(x)$ converge uniformément vers $\alpha(x)$, $u'_n(x)$ étant une suite de CAUCHY, nous aurons :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \exists \mathbb{N}(\varepsilon)/\forall \begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix} > N, |u'_n(x) - u'_m(x)| \leq \varepsilon$$

et ainsi, il suffit de faire N observations pour approximer la fonction d'appartenance du décideur, sous l'hypothèse de la convergence uniforme.

Les N observations en questions correspondant à N seuils, doivent être pris au hasard dans $[0,1]$.

IV.4.2.2 - Deuxième cas

Hypothèse : la fonction d'appartenance recherchée est symétrique.

Nous supposerons maintenant que la fonction d'appartenance à déterminer est symétrique par rapport à la droite $X = x_0$, où x_0 est le point de plus haute valeur d'appartenance (α_0) précisée par le décideur et donc $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_0} = \phi$.

Nous demanderons ensuite au décideur, la plus haute valeur d'appartenance α_1, telle que $\alpha_1 < \alpha_0$ si nous "enlevons" de $\underset{\sim}{A}$ les points de valeur d'appartenance α_0.

Soit x_1 le point de $\mathbb{R}$ correspondant à cette valeur d'appartenance α_1. Nous aurons alors $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_1} =]x_1,x'_1[$ où x'_1 est le symétrique de x_1 par rapport à x_0.

Puis nous continuons à déterminer la plus haute valeur d'appartenance, soit α_2, et le point correspondant x_2 tel que $(x_2,\alpha_2) \in \underset{\sim}{A}$, en considérant $\underset{\sim}{A}$ comme un S.E.F.R de

$\mathbb{R}\backslash[x_1,x_1']$, et nous aurons $\Gamma_{\underset{\sim}{A},\alpha_2} =]x_2,x_2'[$, x_2' étant le symétrique de x_2 par rapport à x_o, et ainsi de suite jusqu'à ce que les α_i deviennent très proches de 0.

Puis nous appliquons le critère de convergence des suites comme dans le premier cas, pour approximer la fonction d'appartenance.

IV.5 - METHODES D'EVALUATION D'EXPRESSIONS COMPLEXES IMPRECISES A PARTIR D'UNE EXPRESSION ELEMENTAIRE : [36], [35], [38].

Nous avons à présent quelques méthodes pour approcher, imposer ou déterminer la fonction d'appartenance d'un S.E.F. Supposons que l'espace de référence est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, et qu'on veuille déterminer la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou de $\mathbb{N}$ correspondant au concept flou "âgé".

La question qui se pose maintenant est de voir comment valuer le concept "plus âgé" ou "très âgé" ou "très, très âgé". C'est-à-dire comment déterminer au mieux, la fonction d'appartenance d'un phénomène complexe à partir d'un phénomène élémentaire comme "âgé" "grand",...

A ce sujet, trois opérateurs ont été introduits par ZADEH [35], [36] :

IV.5.1 - Opérateur de concentration : CØN (A)

Pour ce faire, si $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ sont deux S.E.F. d'un ensemble de référence X, et $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}$ tel que $u_C = u_A . u_B$. L'opérateur de concentration est tel que $CØN(\underset{\sim}{A}) = \tilde{A}^2$ (i.e $\tilde{A}.\underset{\sim}{A}$). Cet opérateur a pour but de réduire l'amplitude des degrés d'appartenance faibles par rapport à ceux qui sont relativement plus grands.

IV.5.2 - Opérateur de dilatation : DIL (A)

Il est tel que $DIL(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{A}^{0.5}$ i.e $u_{\underset{\sim}{A}}^{0.5} = (u_{\underset{\sim}{A}}(x))^{1/2}$ et a un effet opposé à celui de l'opérateur concentration.

IV.5.3 - Opérateur INT ($\underset{\sim}{A}$)

Il permet de contraster les valeurs d'appartenance supérieures à 0.5 (en les augmentant), celles inférieures à 0.5 (en les diminuant). Il permet en fait de diminuer le flou :

$$\text{Soit} \qquad \mathrm{INT}(\underset{\sim}{A}) = \begin{cases} 2\ A^2 \text{ pour } 0 \leqslant u_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant 0.5 \\ \text{Non } \left[2(\text{non } A)^2\right] \text{ pour } 0.5 \leqslant u_{\underset{\sim}{A}} \leqslant 1 \end{cases}$$

IV.5.4 - Exemples

Soit un ensemble de référence X = {1,2,3,4,5}.

Nous nous proposons de déterminer les S.E.F. "très grand", "très,très grand", "pas très grand".

Sachant que $\underset{\sim}{A}$ = "grand" =

1	2	3	4	5
0.2	0.4	0.6	0.8	1

Soit $\underset{\sim}{C}$ = "très grand" = "très (grand)", il est donc obtenu par concentration de $\underset{\sim}{A}$ et nous avons $u_{\underset{\sim}{C}} = (u_{\underset{\sim}{A}})^2 \Longrightarrow$

$\underset{\sim}{C}$ =

1	2	3	4	5
0.04	0.16	0.36	0.64	1

i.e $\underset{\sim}{C} \simeq$

1	2	3	4	5
0	0.16	0.36	0.64	1

(≃ : peut être assimilé à :).

Soit $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$ = "très très grand" = "très (très(grand))" $\Longrightarrow$

$\underset{\sim}{\mathfrak{D}} = \mathrm{C\varnothing N}(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{A}^4 \Longrightarrow \underset{\sim}{\mathfrak{D}}$:

1	2	3	4	5
0.0016	0.025	0.129	0.409	1

et $\underset{\sim}{\mathfrak{D}} \simeq$

1	2	3	4	5
0	0	0.1	0.4	1

Si $\underset{\sim}{E}$ désigne "pas très très grand", c'est en fait la négation de $\underset{\sim}{\mathfrak{D}}$ et nous aurons :

$\underset{\sim}{E}$ =

1	2	3	4	5
1	1	0.9	0.6	0

qui "ressemble" au S.E.F. "petit". Alors que $\underset{\sim}{E}$ peut exprimer "très grand "non " pas très très grand" et nous voyons qu'encore une fois, la quantification du flou n'est pas bien déterminée jusqu'à ce jour, à notre connaissance.

C H A P I T R E V

****

SOMMAIRE

****

V.1 - NOTION D'ENTROPIE [27], [21], [28], [31], [30]

Définition V.1 :

Soit une variable aléatoire $X : \Omega \to U = \{\alpha, \ldots, \alpha_n\}$. L'entropie de X (à une constante multiplicative près) est une mesure de son indétermination a priori, on la note :

$$H[X] = - \sum_{i=1}^{n} p_i \text{ Log } p_i \text{ avec } p_i = P(X=\alpha_i).$$

Définition V.2 : Entropie conjointe [30]

Soient : $X : \Omega \to U = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

$Y : \Omega' \to V = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$

l'entropie conjointe de X et Y est la quantité :

$$H(X,Y) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \text{ Log } p_{ij}$$

avec $p_{ij} = P(X=\alpha_i, Y=\beta_j)$.

Définition V.3 [30]:

L'entropie conditionnelle est la quantité

$$H_Y(X) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \text{ Log } \left(\frac{p_{ij}}{p_{.j}}\right)$$

avec $p_{.j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$

C'est l'incertitude moyenne relative à X quand celle de Y est connue. De même : l'incertitude moyenne relative à Y quand celle de X est connue est :

$$H_X(Y) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \text{ Log } \left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)$$

avec $p_{i.} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$

et on a :

$$H(X,Y) = H(X) + H_X(Y) = H(Y) + H_Y(X) \quad \text{et} \quad H(X) - H_Y(X) \geqslant 0$$

V.2 - ENTROPIE

V.2.1 - Interprétation de l'entropie

Dans la définition de l'entropie d'une variable aléatoire, nous ne discuterons pas de l'utilité du logarithme (cf [28], [30], [21]).

Toutefois, ROSIE [28], définit l'information reçue comme étant :

$$\text{Log} \left[\frac{\text{Probabilité a posteriori}}{\text{Probabilité a priori}} \right]$$

i.e : le gain d'information résultant de la transmission d'un message décroît lorsque la probabilité d'état a priori croît et croît en même temps que la probabilité a posteriori.

Dans le cas des sources d'information discrètes, l'entropie est interprétée comme un contenu moyen d'information d'un message. i.e : si une source discrète d'information peut engendrer k messages différents, ayant chacun une probabilité p_i, i = 1, ..., k que nous supposons indépendants, et s'il n'y a pas de phénomène de parasite (bruit), le contenu d'information du message i produit par la source est $\text{Log}\,(\frac{1}{p_i}) = -\text{Log}\,p_i$ (la probabilité a posteriori est égale à l'unité).

Si nous considérons plusieurs messages émis par la source, la quantité d'information moyenne par message sera $-\sum_{i=1}^{n} p_i \,\text{Log}\, p_i$, qui est l'entropie de la source émettrice.

Quand nous comparons l'entropie thermodynamique et l'entropie d'une source d'information nous assimilons cette dernière à l'antientropie thermodynamique statistique [21], qui désigne une mesure du désordre d'information. Aussi plus l'entropie augmente, plus l'information diminue, l'information étant évidemment liée au désordre du système (voir FIG V.1 et V.2).

Premier texte : 10 %

JE CONNAISSA S NEWYORK   Y TAIS VENU REGULIEREMENT EP IS PLUSIEURS ANNEES -
SANS Y A OIR AIT DE SEJOUR SUIVI JE M EN TA S FORME UNE IDEE ASSEZ COMP ETE -
NEWYORK M AMUSAIT E M ETAIT SYMPA QUE   AVAI   U S Y ACHEVER OU PRESQUE LA PE-
RIODE D DESORDRE T DE RASSER LE TEMP   ES PO EAUX PLANTES DE TRAVERS DANS -
LES T OTTOIRS D FONCE LE TEMPS OU UNE AVENUE N ETAIT QUE LE DES OUS P ATICABLE -
A X P ETONS T UX VOITURES D UN VIADUC PROVISOIRE UN DESS S P RSECUT PAR LE -
TONN RRE CONTINU DES TRAINS O ANT SUR UN TABLI R DE P ANCHES MAL   ULON E SE-
AR LES ES ARB LL S DE LEURS MAC INE O   E RUE VE LES ESCALIERS D FER -
ACC OCHES AUX F ÇADES ET LES ORDURE CONTRE LES SOU IRAUX DES SOUS SOLS N ETAIT-
QU UNE DES GALERIES RAYONNEES ET NUMEROTEE D N E REPO D POP LATI N MA S -
OU TEL BAS FOND D Q ARTIER PRES DE L AU GARDAIT LA TRANQUI L TE LA BONHOMIE -
LA PITTO ESQUE HUMIDE D UNE VILL HOLLANDAISE MAI E UE D UNE SAISON A L AUTRE -
UNE AVENU SE DEGAGEA T DE SES S PERSTRUCTURES AILLEURS LE C L SE NETTOYAIT -
DE FILS ELECTRIQUES LES GRANDS

Deuxième texte : 20 %

UN CLIMAT V   T ALERTE ARR VAIT AU CONTAC ME E DE A I LE PENETRAIT PEU   -
PEU DAN SES F SSURES LES PLUS ETROITES A IS AIT DIRECTEM NT SUR LE S HO M   -
LE VE T DE MER SIGN   AIT LE S DERNIERE OR U   EN LES JASS NT EVANT LU -
SECHAI DES TROTTOIR   EUX JOINTS D S C AUSS E MOINS BO SUEES LE S LEIL S -
ATTACHA   AUX L S HAU ES FAÇADES NE L   QUITTA   PLUS VOUS DONNAI   ENVIE DE -
MONTER LE BESOIN A CENSEURS DEV AIT UNE TIMUL TION NATU RELL TA DIS QU LE -
ME RO COURAIT T UJ URS PLUS LOIN D S LA PRESQU IL   ATTRA   R LES R S   UVES-
AV I EP UVE   TT T ANSFORMATI N DE NEW OR   EU COMM UNE AVENTURE D A -
PR P E IE LES PHA ES M E ETAI N T AGR BLES JE L   SENTAIS ENIR E LES H TAIS-
EN P NSEE COMME UN ENFANTS AM SE A POUSSER L   L I O DU C M   T M NT P U Q E-
LE TRAIN AI LE L S VITE J EN GARDAIS AUSSI L IDEE QUE JE PO V IS TOUJOURS -
COMPTER SUR N WY K COMME ONIQUE T REMEDE UX COMP   ATION INTERIEURES N -
REMED TRESDI FEREN DE A SEILL P R ES INGREDIENT MAIS D UN   F ICACITE ANA-
LOGU .

Troisième texte : 30 %

QU EN ATTEN I J EXAC EME T CE TE FOIS N   C RTE   U L ME FIT OUBLIER LA EPA-
RATIO NI E E QU IL ME L RENDIT MOINS S SIBLE M IS P UTOT UN   AI L RDI SEM-
NT DE A VUE   NER   DES CHOSES UNE D   EUR FAIT PAR E D L UN E S QU O -
SE REP ESENTE   E CHANGE D C AC FRE V   LUISAN   E D BARRA SE DE LA MIE   -
CE   JE NE DEMANDAIS PAS M E PO R   UX JOURS EWYORK P VA T M   IDER   -
EMETTRE LE   ECESSITES DE   V E DA S UNE PER PEC I E N   RE LE QU CE PAS A -
LEN REA IT QUELQUE CHO   A S Z DE ONCER A T QUE E VAIS   SA   DE ETR U -
R   RI   E E E RET RD R U P   AR J   TT CHE   MEME GENRE D I T E   -
M S MEDIT TIONS IOLOG QUES D P RI PAR XE PLE GE RE   NTERE   U. J EN S -
IS   NCORE A E DEF NIR J LE PRESSENS   U   NE N   EXP I Q E J N ME -
HAR   AI   LE R IRE APPA AITRE PAR UNE DE ERMINATI   DE CAUSES ET DES IN-
LUEN S   Y A L   O R OI DEUX DOCUMENTS A   F IS UGGE TIF   T ANS TILI TE -
DI ECTE UE   A CR CH   MO MUR POUR   J ER DE TE   E   EMPS.

FIG V.1

Quatrième texte : 35 %

AINSI E I U TR ELS O D NS UR C BINE DE CA T S E LA PR UCTION MO IALE -
DES VUES D LEURS TE I RS A DIFFE EN E EPOQ ES DES HOT G AP S NE UI E -
DE F OTBALL ORN PAR L PER NN UTES CHO ES I NE C S L E T IDEMME -
T PAS ETAB IR N IX DE V NT MAIS QU ES AINDEN P UT ETRE A OBS-
DET RS A SE COMP SE UN S NT MENT.J ST L U F IR DON NOUS D IONS -
ENT UN PEU PRES AU E DA S L RAS E M R QUI ND IT A WYORK ES L VEIL-
LE JE ETA S RRAN E O R A OI MON M N L J AVAI I HBUE LES C S -
ES ES U O N ES EB U LL I ME E LE A I AU R STE N O T O I -
PRECE AIT D SSEZ EU LA E RE L AP C E D S OTE T E A QUEME T DON AIEN
MOINS DE S CI PROFES IONN U J RD H I AN M I I E MAN IT -
LEGE ETE MA S LA L I E P OHIB IO N E T S N V GUEUR LES A O T -
DE PO I D N AV I N PAS RIS DAN TA D G ERR ES BI UD S DIFFI I ES -
P R G E L MMIGR TI ETAIT M T ICT..

Cinquième texte : 40 %

JE PUX D NC O ER DA CO O EGE P NT U ER E T ENT DEUX AN -
TS E NE ME S U EIR DE E E D S E AC E E SA AI D ANC E J LAI -
V R UEL E QUE T P DI DE A FO M TION AM I E S I Q E -
S MOIS R ESSE TI N VA T BO I ETA S TR S ATT T F C ETAI R -
E. N PE RE D UN FF D T J A L X ER E E P EPA S A E OUVER -
U A TION A UB MA S CO UE ETA EPU UN QUART HEURE PE T ATRE -
QU ND E M PE CU U L DE IT UN I U .N INA C U ENT E L -
C E M E O E R QU IL AR ISSA F N HEMEU NO A J -
VAIS BE OI DE LE E ARD R M E UR P MI BE I E E T PA ON -
LUS AN RCE A C ION QUE JE M S O SE L DR O L E T LE -
A E C D DOUCH VIG T A LMPRE ON E E D F DRE SI O D -
T E J E J I NS L LUM ER TA E U JOU E AL E EMA Q A LE-
N IG E E S L NO O ES U A AN E NAVIRE.

Sixième texte : 45 %

JE M A R SS E NE SA URQ I E CURI SE EX O TA I NS D BITU E ON -
EGAR E D S R TE NE N S D T U ES V S P LE N L E TE -
O E E L L IN E OR I U O R I E B E O R -
T NE A S A SS R E TO UR EW V V US E U D R C M U E -
RO S AN A L NE RA P U RE PL P M E R R N E I C IL T-
EN O T MPS R IE ES NC E A E D E N E O S R ST ET L C LME-
TT N ION C E T Q L TON D C I EN EST D P N DA A EI E S -
N R E N E N D N AS ME A S R A O V I ME R -
ET A PE IT E IS ERN M NT G EW RK M IQ U A N QUE-
LUS QUE A S A D QU JE F OL X U S A S E N R -
C T IS E A R S QU U E VE N R I OU Q OI D EN RE DE U P-
R U J E UI Q E M A AI N E TA A C AI -
L U E T U A S E R E FF S LU AI U EN.

Septième texte : 50 %

EN F I E E EN AI A U T T C AR E . NE I .S PA E -
SON EM TS J C I E M J P O N A I -
S A E B Q T E S N S S S A -
A N M E SU L R U E E P -
T E AC E E. U V N T M T U C N -
L S M E R AL S E T L E E A -
I I F R E I A L D E N E E S U D E E -
P D E S S A D C T S R S I N -
I T S J .C VE PO T E T J -
N U E E H S P A L . -
EM L E D S O I S E L I C N A A I -
S D O N R N O U E -
C T P S U C A L T E SE O T T E S L .

FIG V.2

Si nous assimilons l'information à l'entropie de SHANNON (ou antientropie de BOLTZMAN) [21], la quantité d'information varie en sens inverse de l'entropie. Un exemple pratique de MOLES le montre (FIG. V.I et V.2) outre la démonstration mathématique évidente [[21], p. 31-32].

V.2.2 - Taux de transmission dans un canal et quantité d'information

V.2.2.1 - Taux de transmission dans un canal

SHANNON [30], définit le taux de transmission moyen d'information dans un canal par $R = H(X) - H_Y(X)$, X et Y étant deux variables aléatoires d'état, où l'entropie conditionnelle $H_Y(X)$ est définie comme "l'ambiguïté" moyenne du signal reçu, due au bruit.

Exemple : (voir F.G V.3)

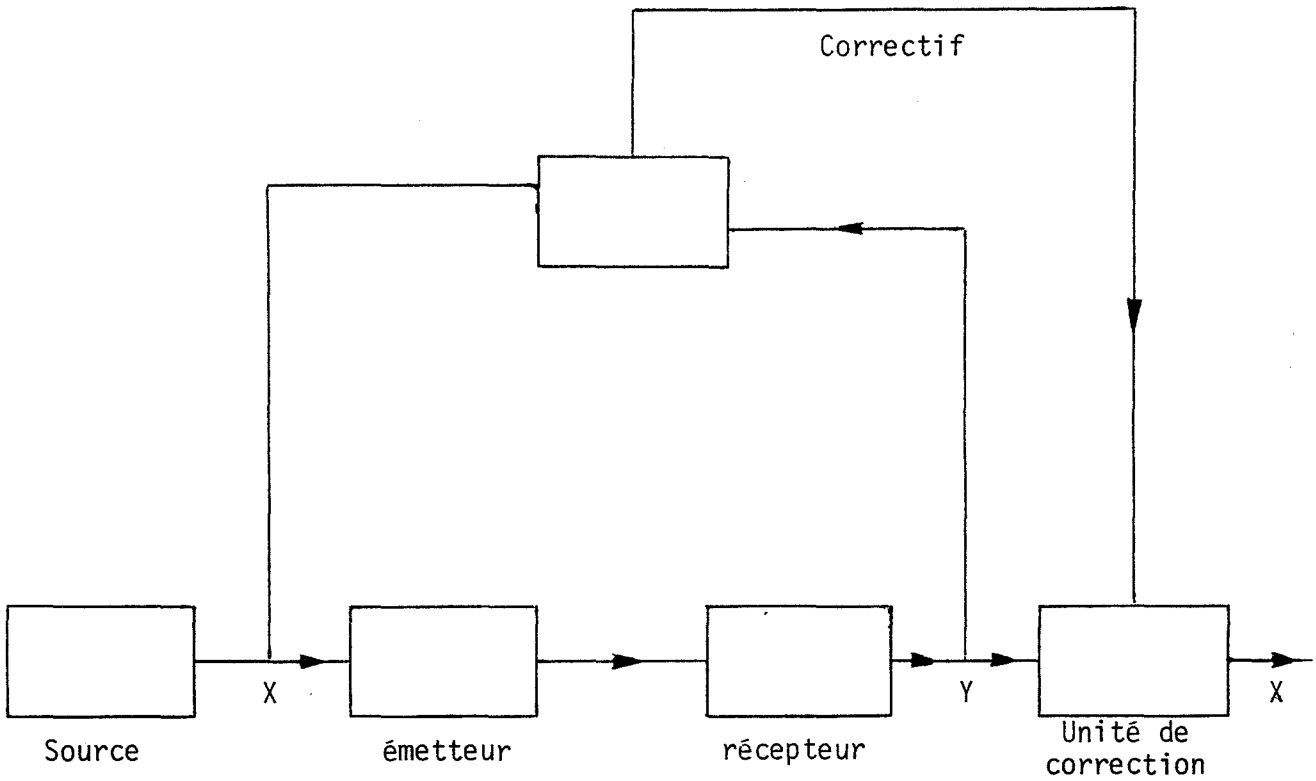


FIG V.3

Supposons que la capacité de transmission ne soit pas dépassée, la source envoie un message X, le récepteur dégage un message Y.

$H_Y(X)$ serait le total d'information additionnelle au message reçu Y pour le corriger et redonner le message initial (Cf théorème 10 de SHANNON). i.e tout se passe comme si nous avions mis un observateur qui contrôle les messages d'entrée et de sortie et qui joue le rôle de régulateur pour redonner l'information initialement envoyée.

V.2.2.2 - Quantité d'information

Au niveau du comportement d'un système, pour mesurer l'interdépendance des variables d'un système et sachant que $H_Y(X)$ est l'incertitude relative à X quand Y est connu, RICHETIN [27], appelle I(X:Y) ce que SHANNON appelle R ou taux de transmission, et définit I(X:Y) comme étant la quantité d'information contenue dans Y au sujet de X, avec $I(X:Y) = H(X) - H_Y(X)$.

En fait, si nous ajoutons à cette quantité le correctif de SHANNON ($H_Y(X)$), nous retrouverons, selon SHANNON, le message initialement envoyé ou l'incertitude moyenne sur le message transmis (H(X)).

Mais entre les deux interprétations, il existe une ambiguïté, car si nous retrouvons l'entropie de X (soit H(X)), nous ne retrouvons pas nécessairement le message transmis lui-même.

Toutefois, notre approche du transfert d'information n'est pas exactement la même que celle de SHANNON. En ce sens que nous ne nous soucierons pas, a priori, de la capacité des canaux de transmission pour que l'information puisse passer, mais de la dépendance des variables d'un système (qui au maximum peut être totale et au minimum nulle), et de l'intensité des couplages entre ces variables. Dans l'immédiat, nous nous proposons (selon l'approche et la définition de RICHETIN [27] de la quantité d'information entre deux variables d'un même système), de faire une analyse structurale d'un système statique en choisissant une technique de partition appropriée, en nous basant sur l'intensité de couplage entre les variables du système, puis nous proposerons une autre interprétation de l'entropie, et de la capacité de transmission d'un canal.

V.3 - PROPRIETES DE LA QUANTITE D'INFORMATION ENTRE LES VARIABLES D'UN SYSTEME

V.3.1 - Mesure de couplage

Dans ce qui suit, nous ne dissocierons pas les variables d'état d'entrée ou de sortie d'un système S.

Soit X et Y deux variables de S et I(X,Y) la mesure de la quantité d'information [27], entre X et Y. I(X : Y) possède les propriétés suivantes :

a) $I(X:Y) \geq 0$ et $I(X:Y) = 0$ s'il n'y a pas d'échange d'information entre X et Y.

b) $I(X:Y) = I(Y:X)$

c) $\left\{\begin{array}{l} I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H_Y(X) \\ I(X:Y) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} I(X:Y) \leq H(X) \\ I(X:Y) \leq H(Y) \end{array}\right. \Longrightarrow I(X:Y) \leq MIN(H(X), H(Y))$$

Il serait plus intéressant pour la suite d'introduire un coefficient de couplage découlant des propriétés de I, qui varie dans un intervalle de longueur fixe.

C'est pour cela que nous utiliserons par la suite, la mesure m de couplage introduite par RICHETIN [27] :

$$m(X:Y) = \frac{I(X:Y)}{\sqrt{H(X).H(Y)}}$$

Nous supposerons que $H(X) \neq 0$ et $H(Y) \neq 0$, i.e les états de X et Y ne sont pas certains.

V.3.2 - Propriétés de la mesure de couplage

Proposition V.1

* $m(X,X) = 1 \quad \forall X \in S$
* $0 \leq m(X:Y) \leq 1 \; , \; \forall X, \; \forall Y \in S$

Démonstration :

Nous avons vu que : $I(X:Y) \leqslant MIN(H(X),H(Y))$ donc nous avons :

$$0 \leqslant \frac{I(X:Y)}{\sqrt{H(X).H(Y)}} \leqslant 1$$

Montrons que $m(X:X) = 1$.

Pour cela, il suffit de montrer que $I(X:X) = H(X)$ $\Longleftrightarrow H(X) = H(X,X) \Longleftrightarrow H_X(X) = 0$

Soit $U = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ l'ensemble des valeurs des variables du système S.

Nous avons $H_X(X) = - \sum_i \sum_j p_{ij} \operatorname{Log} \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$

avec :

$$p_{ij} = P(X=\alpha_i, X=\alpha_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\frac{p_{ij}}{p_{.j}} = \frac{p(X=\alpha_i, X=\alpha_j)}{P(X=\alpha_j)} = \begin{cases} 0, \text{si } i \neq j \\ \dfrac{p(X=\alpha_i)}{P(X=\alpha_i)} \text{ si } i=j \end{cases} \Longrightarrow$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \Longrightarrow p_{ij} \operatorname{Log} \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = 0 \Longrightarrow H_X(X) = 0$$

$$H_X(X) = 0 \Longrightarrow I(X:X) = H(X) \Longrightarrow m(X,X) = 1$$

Proposition V.2

La mesure de couplage représente une relation de ressemblance de S à valeur dans $[0,1]$.

En effet, nous avons vu que $m(X,X) = 1$ et sachant que $I(X:Y) = I(Y:X) \Longrightarrow$ m représente une relation de ressemblance.

Remarque V.I :

Nous nous proposons maintenant de chercher la signification d'une partition du système S avec une technique de partition floue :

Soit un système S défini par n variables d'état X_j, j = 1, ..., n. Supposons qu'on puisse calculer la quantité $m_{ij} = m(X_i:X_j)$, $\forall i$, j=1, ..., n.

Nous obtenons ainsi une matrice de couplage notée M représentant la relation de ressemblance m vue précédemment, sur S.

Si elle était transitive MAX-MIN, elle serait alors une relation de similitude que nous pourrons facilement hiérarchiser.

Il nous faut donc approfondir la signification de la transitivité floue MAX-MIN d'une telle matrice.

V.4 - TRANSITIVITE MAX-MIN

V.4.1 - Théorème de transitivité V.I

Etant donné un système S et X, Y, Z, trois variables d'état quelconques de ce système, dont l'information est incertaine i.e ($H(X)\neq o$, $H(Y)\neq o$, $H(Z)\neq o$). Alors la matrice M définie ci-dessus, est transitive MAX-MIN, si et seulement si :

$$I(X:Y) = MIN(a.I(X:Z), b.I(Z:Y)) \quad \forall X,Y,Z \text{ de } S$$

avec : $a = \sqrt{\frac{H(Y)}{H(Z)}}$ et $b = \sqrt{\frac{H(X)}{H(Z)}}$

ce qui revient à dire :

$$\sqrt{H(Z)}.I(X:Y) = MIN (\sqrt{H(X)}.I(X:Z), \sqrt{H(X)}.I(Z:Y))$$

Démonstration :

Nous avons une transitivité MAX-MIN, si et seulement si :

$$\forall X, \forall Y \in S : m(X:Y) \geqslant \bigvee_{Z \in S} (m(X:Z) \wedge m(Z:Y)) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{I(X:Y)}{\sqrt{H(X).H(Y)}} \geqslant \bigvee_{Z} \left(\frac{I(X:Z)}{\sqrt{H(X).H(Z)}} \wedge \frac{I(Z:Y)}{\sqrt{H(Z).H(Y)}}\right) \Longleftrightarrow$$

$$(1)\, I(X:Y) \geqslant \bigvee_{Z} \left(\sqrt{\frac{H(Y)}{H(Z)}}\, I(X:Z) \wedge \sqrt{\frac{H(X)}{H(Z)}}\, I(Z:Y)\right)$$

De même, considérons X et Z :

Nous devons avoir une transitivité MAX-MIN si

$$m(X:Z) \geqslant \bigvee_{W} (m(X:W) \wedge m(W:Z)) \quad \forall\, W \in S$$

et en particulier pour $W = Y \Longrightarrow$

$$m(X:Z) \geqslant \bigvee_{Y \in S} (m(X:Y) \wedge m(Y:Z)) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{I(X:Z)}{\sqrt{H(X).H(Z)}} \geqslant \bigvee_{Y} \left(\frac{I(X:Y)}{\sqrt{H(X).H(Y)}} \wedge \frac{I(Y:Z)}{\sqrt{H(Y).H(Z)}}\right) \Longleftrightarrow$$

$$(2) \qquad I(X:Z) \geqslant \bigvee_{Y} \left(\sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}}\, I(X:Y) \wedge \sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}\, I(Y:Z)\right) \quad \forall Y$$

Aussi, en considérant Y et Z, nous avons transitivité MAX-MIN si :

$$\forall X, m(Y:Z) \geqslant \bigvee_{X} (m(Y:X) \wedge m(X:Z))$$

ce qui revient à dire :

$$(3) \qquad I(Y:Z) \geqslant \bigvee_{X}\left(\sqrt{\frac{H(Z)}{H(X)}}\, I(Y:X) \wedge \sqrt{\frac{H(Y)}{H(X)}}\, I(X:Z)\right) \quad \forall X$$

nous avons alors transitivité si :

$$\left\{\begin{array}{ll} I(X:Y) \geqslant \bigvee_{Z}\left(\sqrt{\frac{H(Y)}{H(Z)}}\, I(X:Z) \wedge \sqrt{\frac{H(X)}{H(Z)}}\, I(Z:Y)\right) & \forall Z \in S \\ \text{ou} & \\ I(X:Z) \geqslant \bigvee_{Y}\left(\sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}}\, I(X:Y) \wedge \sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}\, I(Y:Z)\right) & \forall Y \in S \\ \text{ou} & \\ I(Y:Z) \geqslant \bigvee_{X}\left(\sqrt{\frac{H(Z)}{H(X)}}\, I(Y:X) \wedge \sqrt{\frac{H(Y)}{H(X)}}\, I(X:Z)\right) & \forall X \in S \end{array}\right.$$

Grâce à la symétrie de la matrice M

ceci est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ll} (4): \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \geqslant \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) \wedge \sqrt{H(X)}\; I(Z:Y) & \forall Z \in S \\ \quad \text{ou} & \\ (5): \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) \geqslant \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \wedge \sqrt{H(X)}\; I(Y:Z) & \forall Y \in S \\ \quad \text{ou} & \\ (6): \sqrt{H(X)}\; I(Y:Z) \geqslant \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \wedge \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) & \forall X \in S \end{array}\right.$$

Sachant que m est une relation de ressemblance, la seule solution pour qu'il y ait transitivité est que :

$$\left\{\begin{array}{l} (7):\ \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \geqslant \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) = \sqrt{H(X)}\; I(Z:Y) \\ \qquad \text{ou} \\ (8):\ \sqrt{H(X)}\; I(Z:Y) \geqslant \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) = \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \\ \qquad \text{ou} \\ (9):\ \sqrt{H(Y)}\; I(X:Z) \geqslant \sqrt{H(X)}\; I(Z:Y) = \sqrt{H(Z)}\; I(X:Y) \end{array}\right.$$

Pour tout X, Y, Z de S.

$\Longleftrightarrow$ $\forall X, Y, Z \in S$ nous avons :

$$\begin{cases} (10)\ \sqrt{H(X)}\ I(Z:Y) = \text{MIN}\ (\sqrt{H(Y)}\ I(X:Z), \sqrt{H(Z)}\ I(X:Y)) \\ \quad\quad \text{ou} \\ (11)\ \sqrt{H(Z)}\ I(X:Y) = \text{MIN}\ (\sqrt{H(Y)}\ I(X:Z), \sqrt{H(X)}\ I(Z:Y)) \\ \quad\quad \text{ou} \\ (12)\ \sqrt{H(Y)}\ I(X:Z) = \text{MIN}\ (\sqrt{H(X)}\ I(Z:Y), \sqrt{H(Z)}\ I(X:Y) \end{cases}$$ c.q.f.d.

V.4.2 - Conséquences du théorème V.1 : Interprétation des résultats.

Il suffit d'interpréter une des équations (10), (11), ou (12).

V.4.2.1 - Interprétation par la quantité d'information

Nous admettons ici que $I(X:Y)$ est la capacité de transmission de l'information du canal $X \longleftrightarrow Y$, au sens de SHANNON.

D'autre part, étant donné une variable X d'un système, nous interpréterons $H(X)$ comme étant le flux d'information émis par la source X.

Soit X, Y, Z trois variables d'état du système.

D'après le théorème V.1, il y a transitivité MAX-MIN, si le flux d'information entre deux variables, est limité à la racine carrée du flux de la troisième (voir FIG V.4).

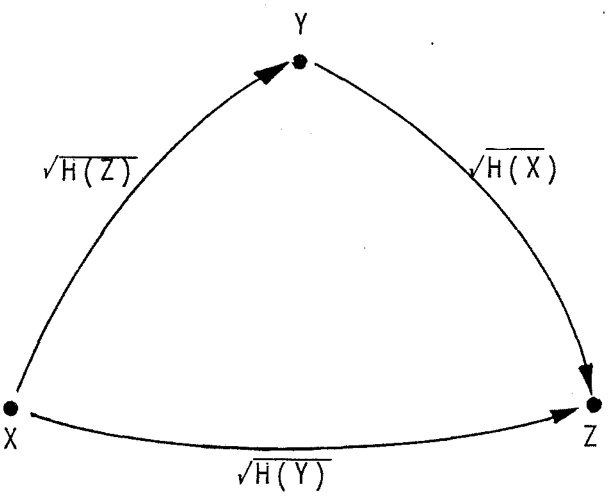


FIG. V.4

En considérant l'équation (12) et FIG. V.4, la quantité d'information qui peut transiter par le canal $X \longleftrightarrow Z$ sera égale à $\sqrt{H(Y)}\ I(X:Z)$.

De plus, dans le triplet (X, Y, Z), deux couples de variables au moins, échangent la même quantité d'information, ce qui est le cas dans l'équation (12) de la quantité d'information échangée entre X et Z d'une part et entre Z et Y d'autre part.

V.4.2.2 - Interprétation par la capacité de transmission dans un canal.

Reprenons l'équation (12)

Nous avons :

$$(12) \Longleftrightarrow I(X:Z) = \mathrm{MIN}\left(\sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}\ I(Z:Y),\ \sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}}\ I(X:Y)\right)$$

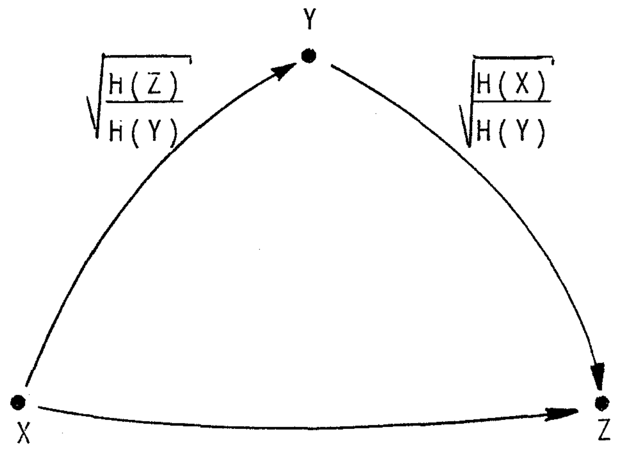


FIG V.5

Dans ce cas, nous considérons la capacité de transmission des canaux plutôt que la quantité d'information entre les variables.

En effet, il y a transitivité si la capacité de transmission du canal $X \longleftrightarrow Z$ est égale au moins à un certain "pourcentage" de la capacité de transmission des canaux $X \longleftrightarrow Y$ et $Y \longleftrightarrow Z$. Ces "pourcentages" devront être respectivement égaux à :

$$\sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}} \text{ et } \sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}$$

V.4.2.3 - Interprétation par l'étude comparative des entropies

Considérons l'équation (12) par exemple :

$$(12) : \quad I(X:Z) = MIN \left(\sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}\, I(Z:Y),\ \sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}}\, I(X:Y) \right)$$

1er cas :

$$H(Z) \geqslant H(Y) \Longrightarrow \sqrt{\frac{H(Z)}{H(Y)}} \geqslant 1$$

$$H(X) \geqslant H(Y) \Longrightarrow \sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}} \geqslant 1$$

$$(12) \quad \Longrightarrow \quad I(X:Z) \geqslant MIN(I(Z:Y),\ I(X:Y))$$

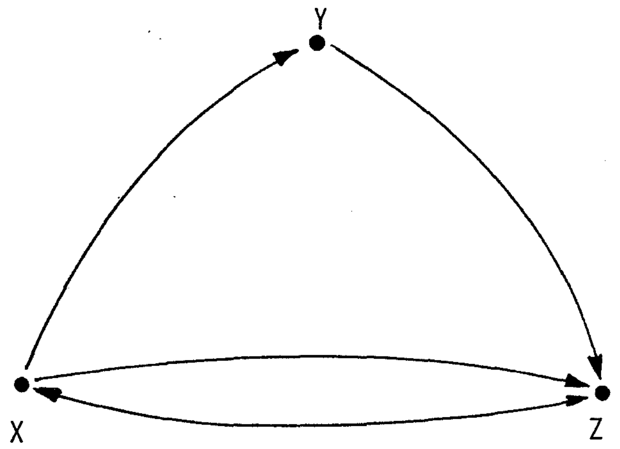


FIG V.6

C'est-à-dire que dans ce cas il y a transitivité si le flux d'information des sources émettrices (X et Z) est supérieur à toute autre source interférant entre X et Z.

2ème cas :

$$H(Z) \geqslant H(Y) \geqslant H(X) \Longrightarrow \frac{H(Z)}{H(Y)} \geqslant 1$$

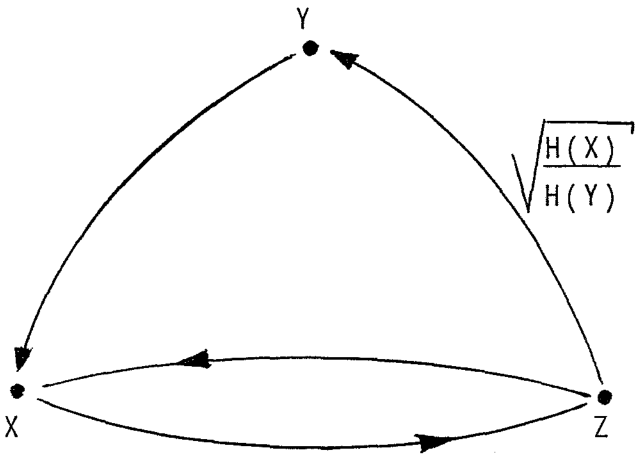


FIG V.7

$$(12) \Longrightarrow \quad I(X:Z) \geqslant MIN\left(\sqrt{\frac{H(X)}{H(Y)}}\, I(Z:Y),\ I(X:Y)\right)$$

Dans ce cas, pour que le flux d'information, en partant de X passe dans le circuit, il faut que le "canal" $Z \longleftrightarrow Y$ ait une certaine capacité de flux.

Les cas $\{H(X) \geqslant H(Y) \geqslant H(Z)\}$ et $\begin{cases} H(Y) \geqslant H(Z) \\ H(Y) \geqslant H(X) \end{cases}$

sont comparables aux deux cas précédents.

V.5 - ANALYSE STRUCTURALE A L'AIDE D'UNE TECHNIQUE FLOUE

V.5.1 - 1ère Méthode : recherche de la matrice de dissimilitude

Ainsi le sens d'une transitivité d'un circuit d'information ayant été trouvé, il nous est relativement aisé maintenant, à partir de la matrice de ressemblance M, de construire une partition du système, ou des classes de similitudes ou de relations maximales de similitudes pour trouver les classes de variables du système couplées d'une façon homogène, faiblement ou fortement.

Nous partirons d'une matrice de couplage d'un système à 5 variables d'état (RICHETIN [27] p. 79).

$(m_{ij}) = M$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	0	0.34	0.08	0
X_2	0	1	0.06	0.02	0.16
X_3	0.34	0.06	1	0.21	0.02
X_4	0.08	0.02	0.21	1	0.05
X_5	0	0.16	0.02	0.05	1

$(\underset{\sim}{R})$

Soit M' la matrice de dissemblance correspondante.

Nous avons :

M' =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	0.66	0.92	1
X_2	1	0	0.94	0.98	0.84
X_3	0.66	0.94	0	0.79	0.98
X_4	0.92	0.98	0.79	0	0.95
X_5	1	0.84	0.98	0.95	0

$\underset{\sim}{R}'$

Cherchons la fermeture transitive de la relation $\underset{\sim}{R}'$ correspondant à la matrice de dissemblance M'.

Vu que la transitivité étudiée de la relation de ressemblance est une transitivité MAX-MIN, la transitivité de la matrice de dissemblance correspondante est une transitivité MIN-MAX.

Nous avons donc :

$\underset{\sim}{R}'^{2}$ =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.94	0.66	0.92	0.95
X_2		0	0.94	0.84	0.84
X_3			0	0.79	0.94
X_4				0	0.95
X_5					0

$\underset{\sim}{R}'^{2} \subset \underset{\sim}{R}'$

$\underset{\sim}{R}'^{3}$ =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.92	0.66	0.79	0.84
X_2		0	0.94	0.84	0.84
X_3			0	0.79	0.94
X_4				0	0.94
X_5					0

et $\underset{\sim}{R}'^{3} \subset \underset{\sim}{R}'^{2} \subset \underset{\sim}{R}'$

$\underset{\sim}{R}'^{4}$ =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.92	0.66	0.79	0.84
X_2		0	0.94	0.84	0.84
X_3			0	0.79	0.84
X_4				0	0.92
X_5					0

et $\underset{\sim}{R}'^{4} \subset \underset{\sim}{R}'^{3} \subset \underset{\sim}{R}'^{2} \subset \underset{\sim}{R}'$

$\underset{\sim}{R}'^5$ =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.94	0.66	0.79	0.84
X_2		0	0.84	0.84	0.84
X_3			0	0.79	0.84
X_4				0	0.84
X_5					0

et

$\underset{\sim}{R}'^5 \subset \underset{\sim}{R}'^4 \subset \underset{\sim}{R}'^3 \subset \underset{\sim}{R}'^2 \subset \underset{\sim}{R}'$

la fermeture transitive MIN-MAX de $\underset{\sim}{R}'$ est $\check{\underset{\sim}{R}}' = \underset{\sim}{R}'^5 \cap \underset{\sim}{R}'^4 \cap \underset{\sim}{R}'^3 \cap \underset{\sim}{R}'^2 \cap \underset{\sim}{R}'$ et donc $\check{\underset{\sim}{R}}' = \underset{\sim}{R}'^5$. D'où l'hiérarchisation suivante ($\check{\underset{\sim}{R}}'$étant la matrice des distances).

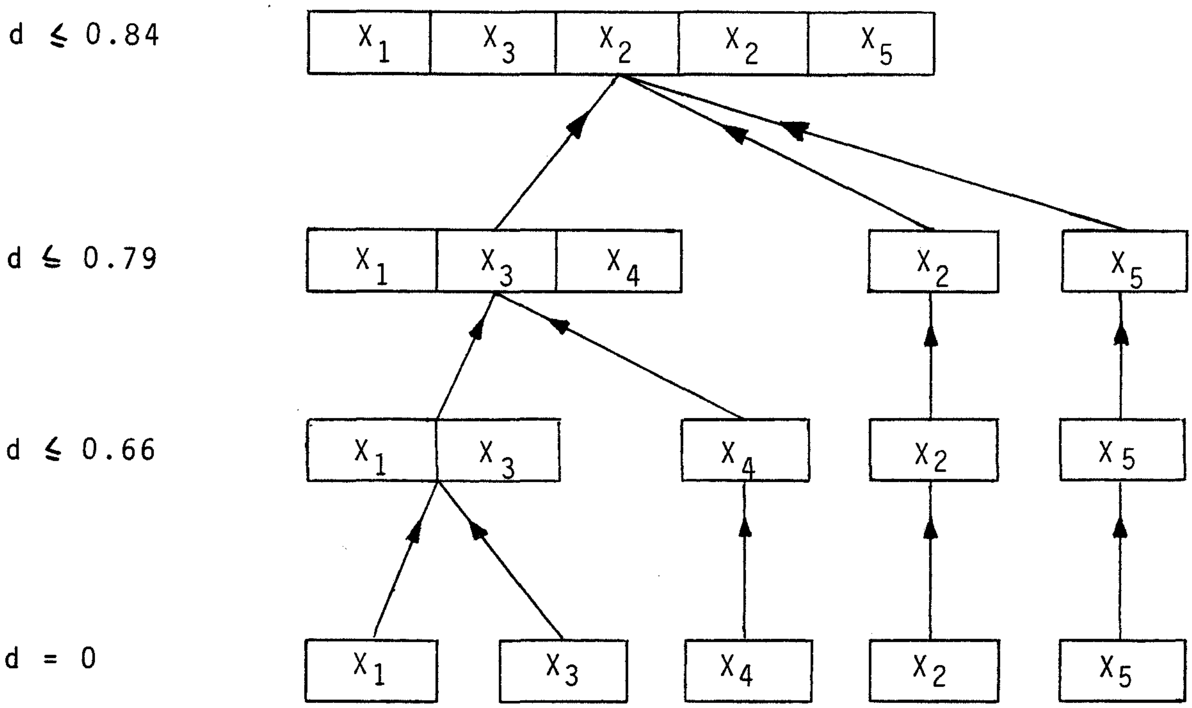


FIG V.8

Nous voyons que pour la plus petite distance non nulle, la décomposition en sous-systèmes "faiblement" couplés est : $\{X_1,X_3\}$, $\{X_2\}$, $\{X_4\}$, $\{X_5\}$, et la distance correspondante étant égale à 0.66.

Il faut attendre d = 0,79 pour réduire les partitions et obtenir la partition $\{X_1, X_3, X_4\}$, $\{X_2\}$, $\{X_5\}$.

V.5.2 - Conclusion à propos de la 1ère méthode

Nous concluons alors, que la distance 0.66 étant trop importante, le système n'est pas décomposable en sous-systèmes faiblement couplés.

La conclusion de RICHETIN [27] à propos de ce même système est conforme à la nôtre, sauf que la méthode employée est différente.

En effet à partir de la matrice de couplage, il construit le graphe correspondant où il fait figurer les liaisons les "plus importantes" entre les variables, et il déduit une "partition" du système. Soit $S_1, \ldots, S_m$ les sous-systèmes correspondant à cette partition, ensuite il calcule $\frac{I(S_i:S_j)}{I(X_1,..X_n)}$ et selon la valeur de cette quantité, il déduit si la partition est satisfaisante ou non.

Nous remarquons la difficulté de mise en oeuvre de cette méthode qui contraste avec la simplicité de la nôtre. La méthode de structuration que nous avons présentée est indépendante du nombre des variables en question. En effet, dans le cas où le nombre des variables du système est important, le calcul de la relation de dissimilitude à partir de la matrice de couplage est immédiat en faisant appel à l'outil informatique et en particulier le langage "A.P.L.".

V.5.3 - 2ème méthode : méthode des α-coupures [15]

Nous aurions pu employer aussi cette méthode, pour trouver une partition du système S, à partir d'un seuil d'admission (soit α). En effet, en regardant la matrice $\underset{\sim}{R}$, nous dirons que X et Y sont fortement couplés si $u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geqslant \alpha$, et nous emploierons ensuite l'algorithme de PICHAT, pour dégager les classes d'équivalence de la matrice M_1 correspondant à la relation $\underset{\sim}{R}_1$ définie par :

$$u_{\underset{\sim}{R}_1}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } u_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geqslant \alpha \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Considérons encore une fois la matrice M, relative à la relation :

$\underset{\sim}{R}$:

(M) =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	0	0.34	0.08	0
X_2	0	1	0.06	0.02	0.16
X_3	0.34	0.06	1	0.21	0.02
X_4	0.08	0.02	0.21	1	0.05
X_5	0	0.16	0.02	0.05	1

Si nous supposons que notre seuil est 0.8, nous voyons qu'aucune partition du système n'est possible en dehors de la partition triviale à savoir qu'une classe est formée d'une seule variable.

Il faudra attendre le seuil 0.34 pour avoir une partition, évidemment ce seuil est inacceptable et nous pouvons conclure qu'il n'y a pas d'autres partitions satisfaisantes en dehors de celle citée plus haut.

Mais supposons que notre seuil d'admission soit

$\alpha = 0.34$

Nous aurons :

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
	X_1	1	0	1	0	0
	X_2	0	1	0	0	0
$M_1' =$	X_3	1	0	1	0	0
	X_4	0	0	0	1	0
	X_5	0	0	0	0	1

Dans ce cas, nous n'avons même pas besoin d'appliquer l'algorithme de PICHAT pour trouver les classes d'équivalences puisqu'il suffit d'intervertir les colonnes (X_2 et X_3) et les lignes (X_2 et X_3). Nous aurons :

		X_1	X_3	X_2	X_4	X_5
	X_1	1	1	0	0	0
	X_3	1	1	0	0	0
$M_1' =$	X_2	0	0	1	0	0
	X_4	0	0	0	1	0
	X_5	0	0	0	0	1

et donc, la partition au seuil $\alpha = 0.34$ sera :

$$\{X_1, X_3\},\ \{X_2\},\ \{X_4\},\ \{X_5\}$$

qui est d'ailleurs conforme à FIG. V.8 à la distance 0.66

V.6 - CAS D'UN SYSTEME FLOU

V.6.1 - Préliminaire

Dans ce qui a précédé, nous avons essayé de dégager les sous-systèmes faiblement couplés d'un système formel statique. Mais la contrainte appréciable est le nombre de valeurs des variables aléatoires et ainsi, le nombre élevé des observations qu'il faut faire d'où une difficulté de déterminer les probabilités d'état.

D'autre part, vu le nombre limité des observations et donc des valeurs possibles des variables du système, certains couplages ne pourront être decelés, ce qui est important, car le but de l'analyse est de mesurer le "degré de dépendance" entre ces variables et donc d'expliciter les relations causales entre ces variables qui peuvent être imprécises ou floues.

V.6.2 - Systèmes flous [24]

La structure d'un système est définie comme un ensemble de couplage entre les variables d'état de ce système. A défaut d'une description précise (mesurable) des relations entre les éléments du systèmes, nous sommes voués à les qualifier, c'est-à-dire que ces relations pourront être plutôt qualitatives que quantitatives.

La structure floue du système peut être définie par des relations floues, et au lieu de présenter l'existence de relation entre deux variables par 1 et l'absence par 0 (réponse par oui ou par non) ce qui revient à avoir une matrice remplie de 0 ou 1, la mesure ou valuation des couplages des différentes variables varieront dans l'intervalle $[0,1]$ pour décrire au mieux l'intensité des couplages.

Sachant que dans un système, il peut exister deux types de relations :

- relation qualitative (type relation binaire)
- relation quantitative (type relation fonctionnelle)

Dans ce qui suit et dans un premier temps, nous essayerons de définir quantitativement le flou, ce qui revient à mesurer un écart existant entre une information floue et une information formelle, choisie selon certains critères, mais dépendante d'une information floue. Cette évaluation du flou est de nature non objective.

V.6.3 - Entropie d'un système flou [17], [8]

V.6.3.1 - Entropie non probabiliste : cas discret

Définition V.1

Soit E un ensemble et $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ deux sous-ensembles flous de E. On appelle mesure du degré du flou β de $\underset{\sim}{A}$, ou indice du flou de $\underset{\sim}{A}$ et on la note $\beta(\underset{\sim}{A})$, si β vérifie les propriétés suivantes :

- P_1 : $\beta(\underset{\sim}{A}) \geq 0$. Et $\underset{\sim}{\beta}(\underset{\sim}{A}) = 0$ si et seulement si $(u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ ou $u_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1, \forall x \in E)$.

  i.e dans le cas d'une information formelle certaine.

- P_2 : $\underset{\sim}{\beta}(\underset{\sim}{A})$ est maximale, si et seulement si $(u_{\underset{\sim}{A}}(x) = \frac{1}{2}\ \forall x \in E)$.

  i.e. l'indice du flou est maximal lorsque le flou est absolu.

- P_3 :
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in E, \left[u_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \frac{1}{2} \text{ et } u_{\underset{\sim}{B}}(x) \geq u_{\underset{\sim}{A}}(x)\right] \\ \quad \text{ou} \\ \forall x \in E, \left[u_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \frac{1}{2} \text{ et } u_{\underset{\sim}{B}}(x) \leq u_{\underset{\sim}{A}}(x)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(\underset{\sim}{A}) \geq \beta(\underset{\sim}{B})$$

  i.e. plus nous approchons le flou absolu (complet), plus la mesure du flou augmente. Ainsi, si nous accentuons les écarts autour de $\mu = \frac{1}{2}$, l'indice β ne doit pas augmenter.

Désignons par : $\mathcal{H}(\underset{\sim}{A}) = - \sum_{i=1}^{N} u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \text{Log } u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$, $E = \{x_1,\ldots,x_N\}$. On a $\mathcal{H}(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + \mathcal{H}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \mathcal{H}(\underset{\sim}{A}) + \mathcal{H}(\underset{\sim}{B})$

Désignons aussi par $D(\underset{\sim}{A}) = \mathcal{H}(\underset{\sim}{A}) + \mathcal{H}(\bar{\underset{\sim}{A}})$, nous avons $D(\bar{\underset{\sim}{A}}) = D(\underset{\sim}{A})$.

D'autre part : $D(\underset{\sim}{A}) = - \sum_{i=1}^{N} u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\ Log(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \sum_{i=1}^{N}(1-u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))Log\ (1-u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[-u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\ Log(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)) - (1-u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))\ Log(1-u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))\right]$$

$$= - \sum_{i=1}^{N} (S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))$$

où $S(x) = - xLog(x) - (1-x)\ Log(1-x)$ désigne la fonction de SHANNON (voir FIG. V.8 bis)

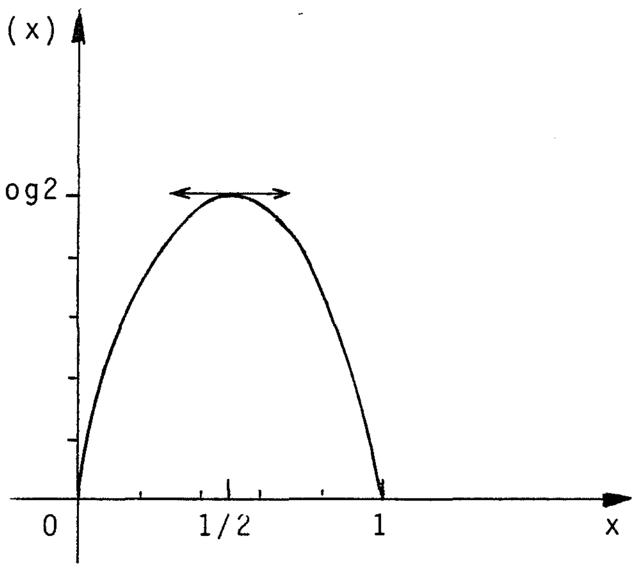


FIG. V.8 bis

V.6.3.2 - Propriété de $D(\underset{\sim}{A})$

Nous avons :

$D(\underset{\sim}{A}) \geqslant 0$

$D(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + D(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = D(\underset{\sim}{A}) + D(\underset{\sim}{B})$

Si nous définissons $D(\underset{\sim}{A}) = \dfrac{1}{NLog2} \sum_{i=1}^{N} S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ alors nous aurons $0 \leqslant D(\underset{\sim}{A}) \leqslant 1$.

Par la suite, nous désignerons $D(\underset{\sim}{A})$ normalisée par $h(\underset{\sim}{A})$ pour éviter la confusion avec $D(\underset{\sim}{A})$ non normalisée.

Nous avons donc $h(\underset{\sim}{A}) = \frac{1}{N\text{Log}2} \sum_{i=1}^{N} S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))$

Théorème V.2

$h(\underset{\sim}{A})$ est une mesure du degré du flou, de l'ensemble $\underset{\sim}{A}$.

Démonstration

1°) $h(\underset{\sim}{A}) \geqslant 0$, car la fonction de SHANNON l'est. D'autre part

$$h(\underset{\sim}{A}) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{N\text{Log}2} \sum_{i=1}^{N} S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 0 \text{ et } (S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)) \geqslant 0 \quad \forall i$$

$\Longleftrightarrow u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 0$ ou $u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 1 \quad \forall i$ (voir FIG. V.8 bis).

Donc la propriété P_1 de définition V.1 est vérifiée.

2°) Montrons que $h(\underset{\sim}{A})$ est maximale si et seulement si $u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \frac{1}{2}$ $\forall x_i \in E$.

Sachant que $S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \geqslant 0 \;\forall i$, $h(\underset{\sim}{A})$ est maximal $\Longleftrightarrow$ $S(u_{\underset{\sim}{A}}(x_i))$ est maximal $\forall i \Longleftrightarrow \tilde{u}_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \frac{1}{2}$ (voir FIG. V.8 bis).

Donc P_2 est vérifiée.

3°) Montrons que :

$$\left.\begin{array}{ll} & \forall x_i \in E, \left[u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } u_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \geqslant u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\right] \\ \text{ou} & \\ & \forall x_i \in E, \left[u_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } u_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \leqslant u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow h(\underset{\sim}{A}) \geqslant h(\underset{\sim}{B})$$

Ceci est immédiat sachant que $S(x)$ est croissante dans $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante dans $[\frac{1}{2}, 1]$. (FIG. V.8 bis) $\Longrightarrow$

$D(\underset{\sim}{A})$ ou sa normalisée $h(\underset{\sim}{A})$ est une mesure du flou. Elle sera appelée entropie non probabiliste ou entropie floue [8].

V.6.3.3 - Classes d'iso-entropies

On note $i(h(\underset{\sim}{A}),h(\underset{\sim}{B}) = |h(\underset{\sim}{A})-h(\underset{\sim}{B})|$ [17]

$i(h(\underset{\sim}{A}),h(\underset{\sim}{B}))$ est une distance, ce qui nous permettra de partititionner un système flou, c'est-à-dire un système où les variables d'état (ou sources) dégageront un flux flou , en classes d'iso-entropies ou iso-floues.

Exemple 1 :

Soit un système S $(X_1, \ldots, X_N)$ où les X_i sont les variables d'état du système. Prenons par exemples N = 5, et soit les relations causales floues suivantes entre les variables (sous-ensembles flous de E, correspondant aux variables d'états, ou sources X_i).

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\underset{\sim}{X}_1$:	1	0.3	0.4	0	0.5
$\underset{\sim}{X}_2$:	0	1	0.8	0.5	0.5
$\underset{\sim}{X}_3$:	0	0.1	1	0.9	0.6
$\underset{\sim}{X}_4$:	1	0	0.5	1	0.7
$\underset{\sim}{X}_5$:	0.5	0.5	0.5	0.5	1

$$h(\underset{\sim}{X}_1) = \frac{1}{5\ \mathrm{Log}2}\ (S(1)+S(0.3)+S(0.4)+S(0)+S(0.5)) = 0.5704$$

$$h(\underset{\sim}{X}_2) = \frac{1}{5\ \mathrm{Log}2}\ (S(0)+S(1)+S(0.8)+2S(0.5)) = 0.5443$$

$$h(\underset{\sim}{X}_3) = \frac{1}{5\ \mathrm{Log}2}\ (S(0)+S(0.1)+S(1)+S(0.9)+S(0.6)) = 0.3818$$

$$h(\underset{\sim}{X}_4) = \frac{1}{5\ \mathrm{Log}2}\ (S(1)+S(0)+S(0.5)+S(1)+S(0.7)) = 0.3762$$

$$h(\underset{\sim}{X}_5) = \frac{1}{5\ \mathrm{Log}2}\ (4.S(0.5)) = 0.7999$$

La matrice des distances $I(X_i:X_j)$ est la suivante :

$I =$

$\underset{\sim}{R}$:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.0261	0.1886	0.1942	0.2295
X_2		0	0.1625	0.1668	0.2556
X_3			0	0.0056	0.4161
X_4				0	0.4237
X_5					0

$\underset{\sim}{R}$ est symétrique, antiréflexive. Cherchons sa fermeture transitive MIN-MAX.

On a $\underset{\sim}{R}^2 =$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.0261	0.1625	0.1668	0.2295
X_2		0	0.1625	0.1625	0.2295
X_3			0	0.0056	0.2295
X_4				0	0.2295
X_5					0

et $\underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R}$

$\underset{\sim}{R}^3 =$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.0261	0.1625	0.1625	0.2295
X_2		0	0.1625	0.1625	0.2295
X_3			0	0.0056	0.2295
X_4				0	0.2295
X_5					0

$\underset{\sim}{R}^3 \subset \underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R}$

$\underset{\sim}{R}^4 =$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0.0261	0.1625	0.1625	0.2295
X_2		0	0.1625	0.1625	0.2295
X_3			0	0.0056	0.2295
X_4				0	0.2295
X_5					0

Et $\underset{\sim}{R}^4 = \underset{\sim}{R}^3$

$\underset{\sim}{R}^3 \subset \underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R}$

Si $\overset{\vee}{\underset{\sim}{R}}$ désigne la fermeture transitive de $\underset{\sim}{R}$, nous avons :

$$\overset{\vee}{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^3 \cap \underset{\sim}{R}^2 \cap \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^3$$

et la hiérarchisation suivante :

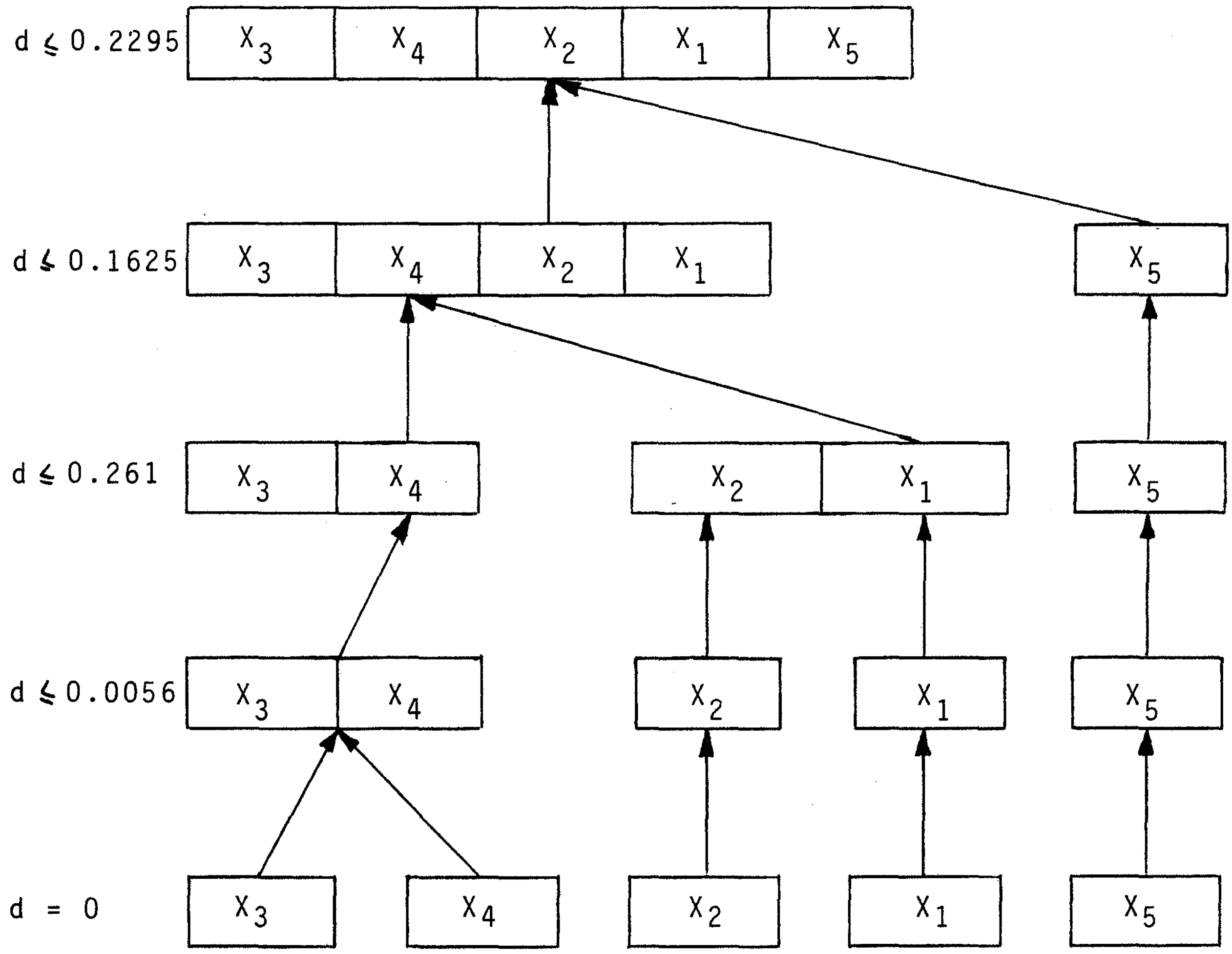


FIG V.9

Remarque :

Nous aurions pu employer la méthode des α-coupures pour obtenir une partition, en nous fixant un seuil ou degré d'admission. A partir de la relation $\underset{\sim}{R}$, on construit une relation $\underset{\sim}{Q}_1 = \overline{\underset{\sim}{R}}$ et on obtient alors la matrice suivante représentant la relation $\underset{\sim}{Q}_1$ que nous noterons M_2 :

$\underset{\sim}{Q}_1$:

M_2 =

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	0.9739	0.8114	0.8057	0.7075
X_2		1	0.8375	0.8332	0.7444
X_3			1	0.9944	0.5839
X_4				1	0.5763
X_5					1

M_2 étant symétrique

Si nous admettons 0.5763 comme seuil, il est bien évident que la relation $\underset{\sim}{Q}'_1$ telle que $u_{\underset{\sim}{Q}'_1}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } u_{\underset{\sim}{Q}'_1}(x,y) \geq 0.5763 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

représentera une relation d'équivalence et il n'y aura qu'une seule classe $\{X_1, \ldots, X_5\}$.

Mais si nous supposons que notre seuil est 0.9 nous aurons alors la matrice suivante :

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1	1	0	0	0
X_2	1	1	0	0	0
X_3	0	0	1	1	0
X_4	0	0	1	1	0
X_5	0	0	0	0	1

FIG V.9 bis

et la partition sera : $\{X_1,X_2\}$, $\{X_3,X_4\}$, $\{X_5\}$.

Interprétons les résultats de FIG. V.9. Nous voyons que les messages flous $\underset{\sim}{X}_3$ et $\underset{\sim}{X}_4$ sont les plus proches à distance non nulle. Leurs distances étant de : 0.0056.

Si nous regardons $\underset{\sim}{X}_3$ et $\underset{\sim}{X}_4$ de près :

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\underset{\sim}{X}_3$:	0	0.1	1	0.9	0.6

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\underset{\sim}{X}_4$:	1	0	0.5	1	0.7

nous remarquons que si X_4 est en relation certaine avec X_1, il n'en est pas de même pour X_3 et X_1. D'autre part, alors qu'il y a une indifférence complète entre l'existance de causalité entre X_4 et X_3 (0.5), elle est très forte entre X_3 et X_4. A priori, nous ne pouvons pas dire que les messages $\underset{\sim}{X}_3$ et $\underset{\sim}{X}_4$ se ressemblent du point de vue relation formelle avec le reste des variables du système et que les éléments d'une classe d'iso-entropie, constituent un sous-système faiblement ou fortement couplé.

V.6.3.4 - Partition en sous-systèmes les plus formels

Essayons de voir si les éléments d'une même classe constituent les éléments les plus formels.

Pour cela, rappelons l'indice du flou $\nu(\underset{\sim}{A}) = 2d(\underset{\sim}{A},\underset{\approx}{A})$ [15].

où n = card E

avec $u_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ si et seulement si } u_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

et où d constitue la distance de HAMMING généralisée entre les ensembles $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\approx}{A}$. $\underset{\approx}{A}$ étant l'ensemble formel le plus proche de $\underset{\sim}{A}$, il est facile de montrer que ν est un indice du flou.

Nous avons :

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\underset{\approx}{X}_1$:	1	0	0	0	0
$\underset{\approx}{X}_2$:	0	1	1	0	0
$\underset{\approx}{X}_3$:	0	0	1	1	1
$\underset{\approx}{X}_4$:	1	0	0	1	1
$\underset{\approx}{X}_5$:	0	0	0	0	1

$$\nu(\underset{\sim}{X}_1) = \frac{2}{5}\, d(\underset{\sim}{X}_1, \underset{\approx}{X}_1) = \frac{2}{5}\,(0.3 + 0.4+0.5) = 0.48$$

$$\nu(\underset{\sim}{X}_2) = \frac{2}{5}\,(0.2 + 0.5 + 0.5) = 0.48$$

$$\nu(\underset{\sim}{X}_3) = \frac{2}{5}\,(0.9 + 0.1 + 0.4) = 0.56$$

$$\nu(\underset{\sim}{X}_4) = \frac{2}{5}\,(0.5 + 0.3) = 0.32$$

$$\nu(\underset{\sim}{X}_5) = \frac{2}{5}(0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5) = 0.8$$

Si nous désignons par $I(X_i : X_j) = |\nu(\underset{\sim}{X}_i)-\nu(\underset{\sim}{X}_j)|$, nous avons la matrice suivante de couplage qui représente la relation $\underset{\sim}{R}$.

$\underset{\sim}{R}$:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0.08	0.16	0.32
X_2		0	0.08	0.16	0.32
X_3			0	0.24	0.24
X_4				0	0.48
X_5					0

$\underset{\sim}{R}$ est antiréfexive et symétrique, cherchons sa fermeture transitive MIN-MAX :

On a $\underset{\sim}{R}^2$:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0.08	0.16	0.24
X_2		0	0.08	0.16	0.24
X_3			0	0.16	0.24
X_4				0	0.24
X_5					0

et on a $\underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R}$

$\underset{\sim}{R}^3 =$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0.08	0.16	0.24
X_2		0	0.08	0.16	0.24
X_3			0	0.16	0.24
X_4				0	0.24
X_5					0

On a donc $\underset{\sim}{R}^3 = \underset{\sim}{R}^2 \subset \underset{\sim}{R}$.

La fermeture transitive $\overset{\vee}{\underset{\sim}{R}} = \underset{\sim}{R}^2 \cap \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^2$, d'où la hiérarchisation suivante :

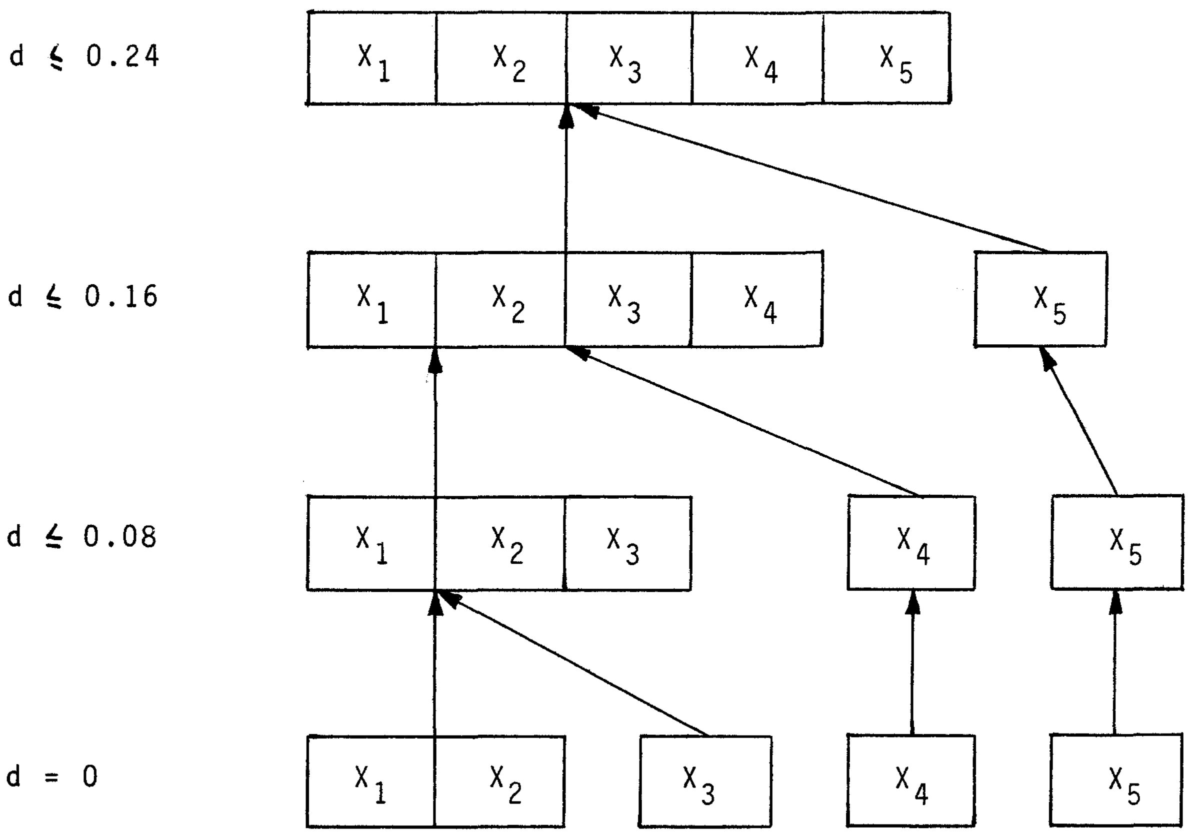


FIG V.10

Il suffit de voir simultanément FIG. V.9 et FIG. V.10 pour se rendre compte que les deux indices de flou h et ν n'ont pas la même interprétation.

D'après sa conception, l'indice ν est en fait un indice d'évaluation du fait qu'une information soit plus ou moins formelle et la structure obtenue FIG. V.10 donne les messages formels les plus transitivement voisins. Mais ce qui est frappant c'est que $\underset{\sim}{X}_1$ et $\underset{\sim}{X}_2$ sont à distance nulle malgré la disparité des messages eux-mêmes et malgré celle de leurs messages formels respectifs. C'est pourquoi, même à distance nulle, deux messages ne sont pas nécessairement identiques quant à leur caractère formel.

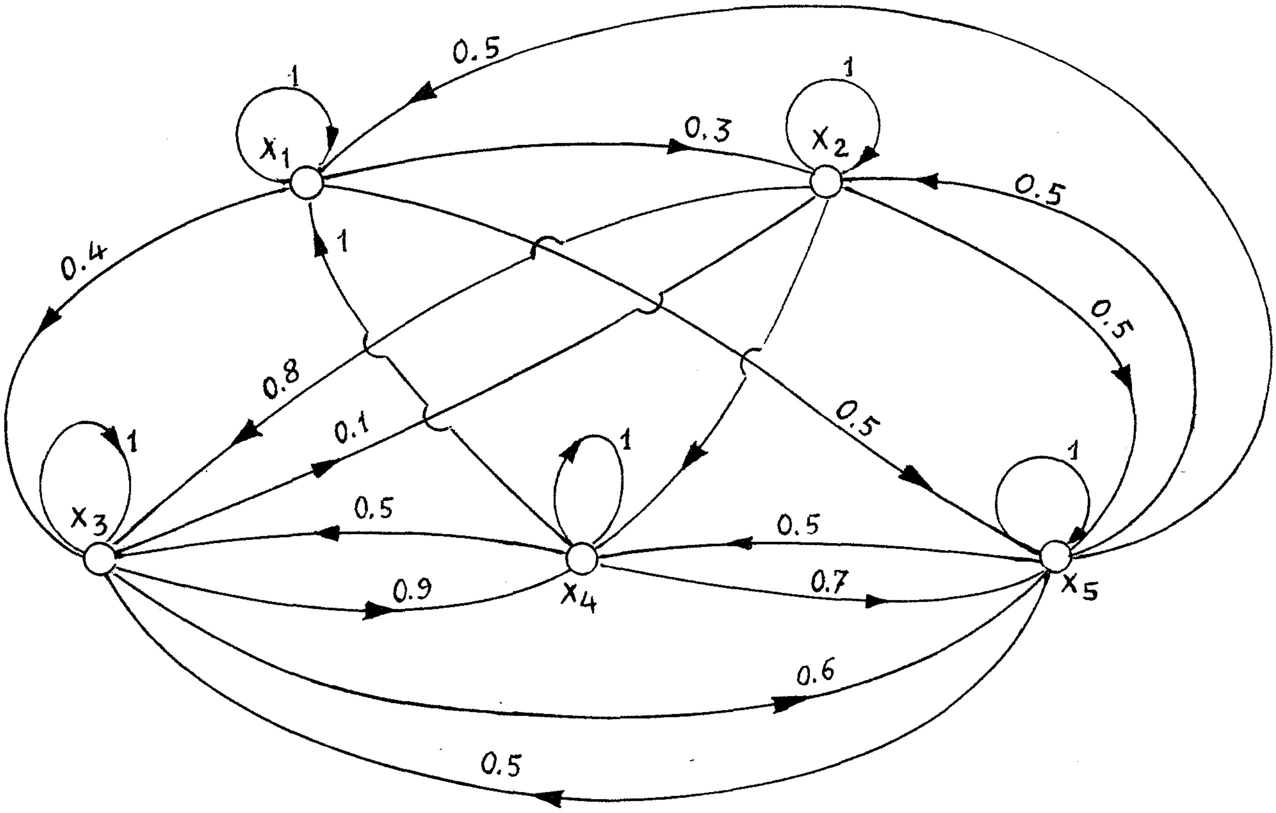
Rappelons que pour l'indice de flou ν, $d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 0 \Longleftrightarrow |\nu(\underset{\sim}{A})-\nu(\underset{\sim}{B})| = 0 \Longleftrightarrow d(\underset{\sim}{A},\underset{\approx}{A}) = d(\underset{\sim}{B},\underset{\approx}{B})$ où $\underset{\approx}{A}$ est l'ensemble formel le plus proche de $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\approx}{B}$ est l'ensemble formel le plus proche de $\underset{\sim}{B}$. Le critère de proximité a été choisi arbitrairement (à savoir

$$u_{\underset{\approx}{A}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si et seulement si } u_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

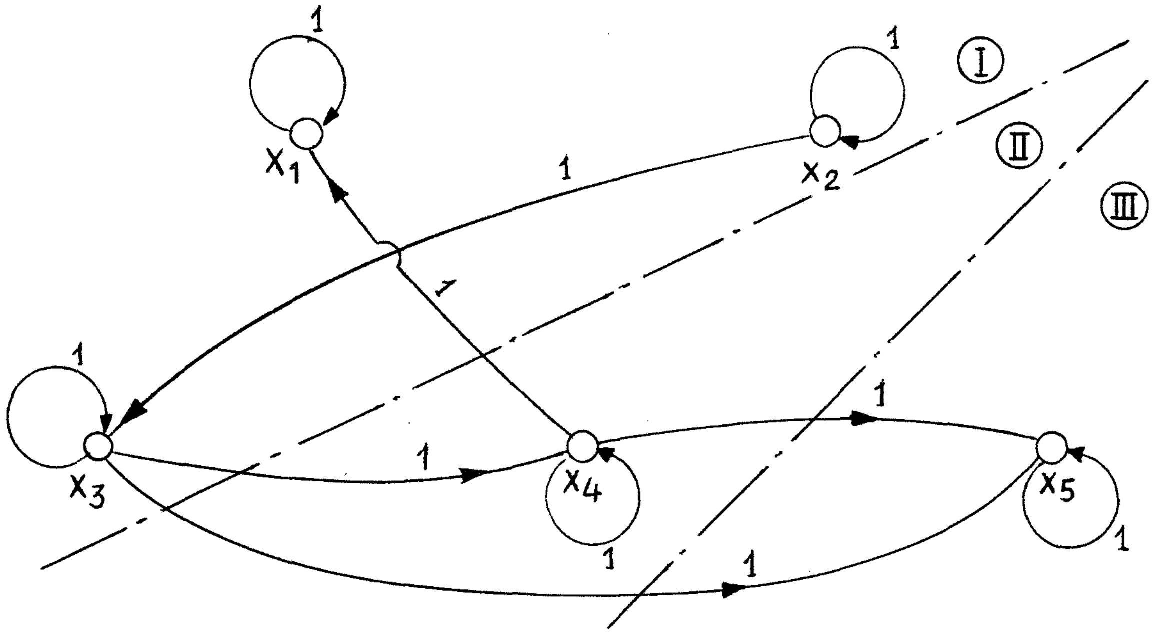
l'indice ν nous permet ainsi de partitionner le système en sous-systèmes formels les plus transitivement voisins. Ainsi, il est normal par exemple que $\underset{\sim}{X}_5$ ne puisse être associé raisonnablement à aucun sous-ensemble formel vu son imprécision presque totale quant à ses relations avec les autres variables du système. Rappelons que :

$$\underset{\sim}{X}_5 = \begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

Si nous explicitons, par un graphe, les relations causales des variables du système, nous aurons :



Représentant les données des messages flous $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{X}_3$, $\underset{\sim}{X}_4$, $\underset{\sim}{X}_5$ et



la représentation des messages les plus formels.

Les coupes (I) , (II) , (III) représentent les classes des messages formels les plus transitivement voisins à la distance 0.08 (FIG. V.10). Si nous revenons maintenant à l'indice du flou h (FIG. V.9), le fait que $i(h(\underset{\sim}{A}), h(\underset{\sim}{B})) = 0 \Leftrightarrow h(\underset{\sim}{A}) = h(\underset{\sim}{B})$ i.e. les messages $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ ont la même entropie non probabiliste. La partition trouvée sera l'expression des classes iso-entropiques [17]. Si nous exprimons l'entropie non probabiliste comme une quantité d'information contenu dans un message, ces classes seraient formées d'éléments ayant des entropies les plus transitivement voisines. Si l'entropie est faible, cela veut dire que l'information est plus informelle, sans pour autant que ces classes soient interprétées dans le même sens que dans l'indice ν.

Cette entropie est-elle une mesure du désordre des relations causales d'une variable d'un système avec les autres variables d'état ? En tout cas, l'interprétation de la matrice des distances d'entropies non-probabilistes ne peut être la même que celle de la FIG. V.1 , et ne peut être l'interprétation de SHANNON, à savoir une capacité de transfert dans un canal.

Les classes d'iso-entropies (relatifs à h) nous permettent de dégager les différentes classes d'entropies les plus transitivement voisines, et après nous aurons à résoudre le problème de réduction d'entropie dans ces classes pour déduire les informations formelles les plus voisines. Si dans le cas de ν , nous avons arbitrairement et grossièrement fixé les informations formelles les plus proches des messages flous, le cas de l'indice du flou h nous permet de trouver, plus finement, les informations formelles les plus proches des messages en diminuant l'entropie de ces messages au niveau de leurs classes.

CONCLUSION

****

Nous avons vu dans cette étude que la "valuation" du flou n'est pas une mesure statistique dans le sens où celle-ci concerne des évènements incertains, alors que le flou traite de l'imprécis non mesurable.

Ceci étant, le but commun des sous-ensembles flous et des probabilités subjectives est de valuer le subjectif. Celles-ci se basent sur les deux principes fondamentaux de la transitivité et de la substitution par équivalence subjective qui prouvent leur propriété d'additivité.

Nous avons vu aussi que la transitivité classique par équivalence ou préférence subjective n'est pas sans risque et on peut aboutir à des incohérences flagrantes, sans avoir l'outil nécessaire pour déceler ces incohérences ; alors que la transitivité floue MAX-MIN nous permet, au contraire, de cerner les limites de la transitivité subjective et de fixer les classes où elle garde sa cohérence.

D'autre part, tant que la substitution par équivalence subjective est monocritère, nous pouvons employer les probabilités subjectives et en particulier leur propriété d'additivité. Mais cette propriété devient caduque dès que l'on passe à la substitution multicritère, et dans ce cas, nous nous voyons obligés d'utiliser d'autres opérateurs que l'additivité sur les estimations subjectives ; ce qui enlève aux probabilités subjectives leur caractéristique de probabilités d'évènements subjectifs aléatoires. Et nous sommes ainsi obligés de traiter avec des "évènements" autres qu'aléatoires, ce qui nous amène à utiliser les sous-ensembles flous pour étudier le subjectif multicritère dans les prises de décisions.

Ayant montré la nécessité d'utiliser les sous-ensembles flous dans ce domaine, nous avons réfléchi sur la construction de la fonction d'appartenance qui n'est ni une probabilité, ni une fonction d'utilité car celle-ci s'appuie aussi sur les deux principes de substitution et de transitivité de l'équivalence subjective. Nous avons proposé une méthode topologique pour la construction de la fonction d'appartenance.

Cette construction s'appuie en particulier sur le théorème III.12 de convergence des suites floues. Ce qui ouvre des perspectives de continuation aussi bien en topologie floue que dans le domaine de la construction de la fonction d'appartenance qui nous intéresse particulièrement.

En effet, par analogie avec les statistiques, on pourrait chercher le nombre d'observations minimum qu'il faut faire pour approcher au maximum la fonction d'appartenance. Aussi, on pourrait étudier l'impact d'un écart d'estimation de la fonction d'appartenance ainsi construite, sur la décision finale dans le cas d'une prise de décision dans un environnement flou.

Le problème de la construction de la fonction d'appartenance étant résolu, il est naturel d'utiliser cette dernière, dans les applications, de la même façon qu'elle a été construite, c'est-à-dire avec les mêmes opérateurs. Le contraire serait contre nature.

En effet, ce serait un non-sens d'utiliser, dans un processus stochastique, les probabilités en oubliant leur propriété d'additivité et en utilisant par exemple les opérateurs MIN et MAX ; de même, nous croyons que le choix des opérateurs sur les fonctions d'appartenance est conditionné par les opérateurs avec lesquelles elles ont été construites, pour ne pas déformer les estimations subjectives et pour que les résultats aient un sens.

D'autre part, les opérateurs MIN-MAX sur les sous-ensembles flous, sont des opérateurs canoniques sur l'ensemble des sous-ensembles flous qui est un treillis non complémenté. Ils peuvent paraître très restrictifs dans des applications. C'est pour cela que certains auteurs ont fait appel à d'autres opérateurs plus malléables pour essayer de rationaliser le subjectif en éliminant l'excès de subjectivité.

Mais nous avons vu, qu'en réalité, les opérateurs répondant à certains axiomes de rationalisation et respectant au mieux la subjectivité sont les opérateurs MIN et MAX.

Une autre application des sous-ensembles flous est l'analyse structurale de systèmes, et l'étude que nous avons faite peut être étendue aux systèmes dynamiques.

Nous avons remarqué que les techniques floues utilisées, en passant de la matrice de ressemblance à celle de dissimilitude, sont plus rapides que celles de la théorie des graphes, avec moins de calcul.

Une utilisation intensive de ces techniques rend nécessaire l'utilisation de l'outil informatique. En particulier, le langage APL est très bien adapté puisque le MIN et le MAX sont des opérateurs standards, la recherche de la matrice de similitude ou de dissimilitude à partir d'une matrice de ressemblance ou de dissemblance devenant alors presqu'immédiate. Une étude approfondie en ce domaine paraît très intéressante.

D'autre part, grâce au théorème V.1 dans l'étude de l'analyse structurale à partir de l'entropie probabiliste des variables d'état d'un système statique, le sens de la transitivité MAX-MIN de la matrice de couplage entre les variables est trouvé.
Il recouvre le fait que les canaux de transmission entre les variables doivent avoir une certaine capacité de transmission (Rappelons que l'interprétation de SHANNON de la quantité d'information échangée entre les variables est une capacité de transfert de l'information dans un canal).

Le passage à la matrice de dissimilitude nous donne les classes de variables les plus faiblement couplées, en adoptant l'interprétation de RICHETIN de la quantité d'information échangée entre les variables d'état d'un système statique.

Nous avons vu aussi que l'entropie non probabiliste, ou floue, a une signification différente de l'entropie probabiliste. Alors qu'avec cette dernière nous aboutissons à des sous-systèmes faiblement couplés, dans le cas flou, nous aboutissons à des classes de variables iso-floues, ou des classes de messsages les plus formels et les plus transitivement voisins.

Les indices de flous, sont plus une "mesure" d'imprécision d'une variable d'état, qu'une mesure de désordre.

Ayant les classes d'iso-entropies floues, nous aurons à résoudre le problème de la réduction d'entropie dans chaque classe pour trouver l'information formelle la plus proche d'une classe ou d'un sous-système. Cela aussi mérite une réflexion plus approfondie et constitue un axe de recherche intéressant.

BIBLIOGRAPHIE

****

[1] R.E. BELLMANN et S.E. DREYFUS
Programmation dynamique et ses applications
DUNOD

[2] R.E. BELLMANN et Magnus GIERTZ
On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets
Inf. Sciences, 5, pp 149-156 (1973)

[3] BIRKOFF-GARRET
Lattice theory.
Providence, American Mathematical Society (1966)

[4] C. L. CHANG
Fuzzy topological spaces
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24,
pp 182-190 (1968)

[5] CHOQUET
Cours d'analyse. Tome 2. Topologie
MASSON

[6] DEFAYS
Ultramétriques et relations floues
BULL Soc. Roy. Sc. Lg., 1-2, pp 104-118 (1975)

[7] DE LUCA & TERMINI
Algebric properties of fuzzy sets
Journal of Mathematical Analysis and Applications
40, pp 373-386 (1972)

[8] DE LUCA & TERMINI
A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory
Information and Control 20, pp 301-312 (1972)

[9] DE FINETTI
Probability induction and statistics
John WILEY & Sons NEW-YORK

[10] DIEUDONNE
Eléments d'analyse. Tome 2
GAUTHIER-VILLARS

[11] FUNG & FU
The K^{th} optimal policy algorithm for decision making in a fuzzy environment
Proc. third IFAC Symposium. The HUGUE. NETHERLANDS

[12] J.L. GUIGOU
Analyse des données et choix multicritères
DUNOD

[13] GOGEN
L-Fuzzy sets
Journal of Mathematical Analysis and applications 18, pp 145-174 (1967)

[14] S.C. JOHNSON
Hierarchical clusturing shemes, psychometrika
32, pp 241-254 (1967)

[15] A. KAUFMANN
Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, T. 1
MASSON

[16] A. KAUFMANN
Introduction à la théorie des sous-ensembles flous,T. 3
MASSON

[17] A. KAUFMANN
Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, T. 4
MASSON

[18] P.J. LAURENT
Approximation et optimisation. HERMANN

[19] KALABA, ZADEH, BELLMAN
Abstraction and pattern classification
Journal of Mathematical Analysis and Applications 13,
pp 1-7 (1966)

[20] METAYER
Cybernétique et organisation
Editions d'Organisation (PARIS)

[21] MOLES
Théorie de l'information et perception esthétique
FLAMMARION

[22] Y. MORTIA and H. IIDA
Measurment, information and human subjectivity described
by and order relationship
Summury of papers of General Fuzzy Problems
Report 1, November 75. TOKYO. JAPON

[23] C.N. NOGOITA & D.A. RALESCU
Application of fuzzy sets to system analysis
BIRKHOUSER

[24] MARKU I. NURMINEN
Studies in systemering on fuzziness in the analysis of
information systems
Thesis, University of TURKU, Institute for Applied Mathematics, TURKU, FINLAND

[25] J. POPPER
La Dynamique des systèmes. Principes et applications
Editions d'organisation EYROLLES

[26] Howard RAIFA
Analyse de la décision. Introduction aux choix en avenir incertain
DUNOD

[27] RICHETIN
Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée. 1975
Thèse d'Etat ; Université Paul SABATIER

[28] A. M. ROSIE
Théorie de l'information et de la communication
DUNOD

[29] S. SAGAAMA
Subjective probabilities, fuzzy sets and decision making.
Third Europeean meeting on cybernetics and system research
April 1976, Vienna.

[30] C. E. SHANNON et Warren WEAVER
The Mathematical theory of communication
University of ILLINOIS Press.
URBANA, CHICAGO, LONDON

[31] Silviu GUIASU , Radu THEODERESCU
La théorie mathématique de l'information
DUNOD

[32] SUGENO
Theory of fuzzy integrals and its applications
Thesis doctor of engineering
TOKYO Institute of Technology. JAPAN, 1974

[33] L. A. ZADEH
Fuzzy sets
Information and control, 8, pp 338-359

[34] L. A. ZADEH
Probability measure of fuzzy events
Journal of Mathematical Analysis and its applications, 23, pp 421-427 (1968)

[35] L. A. ZADEH
Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process
I.E.E.E. Transaction on systems, MAN and Cybernetics
Vol. SM-C-3, n° 1, January 1973

[36] L. A. ZADEH
A Fuzzy-set-theoritic interpretation of hedges
Electron. Res. Lab. Univ. CALIFORNIA - BERKLEY
Memo-M-355 (1972)

[37] L. A. ZADEH & BELLMANN
Decision making in a fuzzy environment
Management Sciences, vol 17, N° 4. Déc. 1970

[38] L. A. ZADEH, KING-SUN-FU, Kōkichi TANAKA, Masamichi SHIMURA
Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes
Academic press, Inc.
NEW YORK, SAN FRANCISCO, LONDON (1975)

[39] M. D. WEISS
Fixed points, separation and induced topology for fuzzy sets
Journ. Math. anal. and applications n° 50, 1975, pp. 142-150