



HAL
open science

Modèles macroscopiques de conduction et d'élasticité linéarisée pour des milieux fortement hétérogènes et anisotropes

Hamid Charef

► **To cite this version:**

Hamid Charef. Modèles macroscopiques de conduction et d'élasticité linéarisée pour des milieux fortement hétérogènes et anisotropes. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Toulon, 2012. Français. NNT : 2012TOUL0014 . tel-00838469

HAL Id: tel-00838469

<https://theses.hal.science/tel-00838469>

Submitted on 25 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université du Sud Toulon – Var

École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille ED (184)

Thèse

*pour obtenir le grade de Docteur
de l'Université du Sud Toulon-Var*

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Hamid CHAREF

**Modèles Macroscopiques pour des Milieux
Conducteurs et Élastiques Hétérogènes
Anisotropes**

Soutenue le 17 décembre 2012 devant le jury composé de :

-Mr Bouchitté Guy, Professeur, Université du Sud Toulon-Var
(examineur)

-Mr Casado-Diaz Juan, Professeur, Université de Séville (rapporteur)

-Mr Gaudiello Antonio, Professeur, Université de Cassino (rapporteur)

-Mr Murat François, Directeur de recherches au CNRS, Université Pierre
et Marie-Curie, (examineur)

-Mr Seppecher Pierre, Professeur, Université du Sud Toulon-Var
(examineur)

-Mr Sili Ali, Maître de conférences, Université du Sud Toulon-Var
(directeur de Thèse)

REMERCIEMENTS

C'est sous la direction de monsieur SILI Ali que j'ai préparé cette thèse. Je tiens à le remercier vivement pour son aide, ses conseils et les encouragements constants qu'il n' a cessé de me prodiguer.

Etant donné les conditions difficiles et exceptionnelles dans lesquelles je travaillais, cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'aide tout aussi exceptionnelle de monsieur Sili.

Je tiens également à remercier messieurs Juan Casado-Diaz et Antonio Gaudiello qui ont accepté de rapporter sur la thèse ainsi que messieurs Guy Bouchitté, François Murat et Pierre Seppecher qui ont accepté de faire partie du jury.

Enfin, mes remerciements vont à monsieur Gilbert Jury qui m'a gratifié d'une aide multiforme au cours de ces dernières années.

TABLE DES MATIÈRES

Notations	3
Résumé	5
Introduction	7
0 Quelques rappels	23
1 L'équation de la conduction dans un milieu périodique fortement hétérogène	27
1.1 Introduction	28
1.2 Énoncé des résultats	31
1.3 Estimations à priori	32
1.4 Preuve des résultats	34
2 Loi d'équilibre effective pour un milieu élastique périodique fortement hétérogène	39
2.1 Introduction	40
2.2 Énoncé des résultats	45
2.3 Estimations a priori	50
2.4 Résultats préliminaires	56
2.5 Preuve des théorèmes	71
2.6 Appendice	77
3 Équations dégénérées dans un milieu périodique fibré avec des fibres de section petite par rapport à la taille de la période	83
3.1 Convergence double échelle adaptée à la dimension des fibres. Propositions.	84
3.2 Problème de la conduction	94
3.2.1 Description du problème	94
3.2.2 Énoncé des résultats	96
3.2.3 Estimations a priori	99
3.2.4 Preuve des résultats	105
3.3 Problème de l'élasticité avec des déplacements de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans les fibres	108
3.3.1 Description du problème	108

3.3.2 Énoncé des résultats	111
3.3.3 Estimations a priori	115
3.3.4 Preuve des résultats	129
3.4 Problème de l'élasticité avec des déplacements de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2}{r^4}$ dans les fibres	134
3.4.1 Description du problème	134
3.4.2 Énoncé des résultats	137
3.4.3 Estimations a priori	141
3.4.4 Preuve des résultats	158
Commentaires - Perspectives	169
Références	173

NOTATIONS

- $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$, $\omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, $D = D(0, r) \subset Y$ (chapitres 1, 2). $D = D(0, 1)$ (chapitre 3)
- $I_\varepsilon = \{i \mid i \in \mathbb{Z}^2, \varepsilon i \in \omega\}$
- $D_\varepsilon^i = \varepsilon D + \varepsilon i$ (chapitres 1,2). $D_{r_\varepsilon}^i = r_\varepsilon D + \varepsilon i$ (chapitre 3)
- F_ε^i Fibre, $F_\varepsilon^i = D_\varepsilon^i \times I$ (chapitres 1,2). $F_{r_\varepsilon}^i = D_{r_\varepsilon}^i \times I$ (chapitre 3)
- F_ε ensemble de fibres, $F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i$

- M_ε Matrice, $M_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{F_\varepsilon}$
- \rightarrow Convergence forte
- \rightharpoonup Convergence faible
- $\rightharpoonup\rightharpoonup$ Convergence double-échelle
- $\rightharpoonup\rightharpoonup$ Convergence double-échelle adaptée à l'ordre de grandeur des fibres
- ∇u Gradient de u , ${}^t\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3})$
- ${}^t\nabla' u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$
- ${}^t\nabla_y u = (\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2})$
- $\operatorname{div}(u)$ Divergence, $\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$
- $e(u)$ tenseur des déformations, $e(u) \in (L^2(\Omega))_s^{3 \times 3}$, $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$

$$e(u) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(u) & e_{\alpha 3}(u) \\ e_{\alpha 3}(u) & e_{33}(u) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

- $e^y(u) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u) & e_{\alpha 3}^y(u) \\ e_{\alpha 3}^y(u) & 0 \end{pmatrix}$, $e_{\alpha\beta}^y(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha})$, $e_{\alpha 3}^y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial y_\alpha}$, $\alpha, \beta = 1, 2$
- $\chi_{\mathcal{A}}$ Fonction caractéristique, $\chi_{\mathcal{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{A}$ sinon $\chi_{\mathcal{A}}(x) = 0$, $\mathcal{A} = F_\varepsilon$, $\mathcal{A} = M_\varepsilon, \dots$
- i, j, k, l, \dots Indices latins variant dans $\{1, 2, 3\}$
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ Indices grecs variant dans $\{1, 2\}$
- $A = (A_{ij})$ Matrice de conduction
- $A = (A_{ijkl})$ Tenseur d'élasticité
- $A_{\alpha 3\gamma\delta} = A_{\alpha 333} = 0$ dans le cas orthotrope
- $A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ dans le cas isotrope, où λ et μ sont les coefficients de Lamé
- $Ae(u).e(v) = \sum_{i,j,k,l} A_{ijkl} e_{kl}(u) e_{ij}(v)$
- x^R, y^R, i^R rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan, $x^R = (-x_2, x_1)$, $y^R = (-y_2, y_1)$, $i^R = (-i_2, i_1)$
- Γ_0 Réunion des faces inférieure et supérieure de Ω , $\Gamma_0 = \Gamma_{-\frac{1}{2}} \cup \Gamma_{\frac{1}{2}}$, $\Gamma_{-\frac{1}{2}} = \omega \times \{-\frac{1}{2}\}$, $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \omega \times \{\frac{1}{2}\}$
- Γ_N Frontière latérale de Ω , $\Gamma_N = \Omega \setminus \Gamma_0$
- $\overline{\Omega}, \overline{D}, \overline{I}, \dots$ Fermeture de Ω, D, I, \dots
- $C(\overline{\Omega}), C(\overline{D}), C(\overline{I}), \dots$ Fonctions continues sur $\overline{\Omega}, \overline{D}, \overline{I}, \dots$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ Fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω
- $L^2(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u|^2 < \infty\}$
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \forall i \frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i \in L^2(\Omega), \}$
- $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ et } u := \operatorname{Tr}(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \operatorname{Tr} \text{ est l'opérateur trace } \}$
- $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), u(-\frac{1}{2}) = u(\frac{1}{2}) = 0\}$
- $H_0^2(I) = \{u \in H_0^1(I), \frac{\partial u}{\partial x} \in H_0^1(I)\}$
- $\|\cdot\|_H$ Norme Hilbertienne. H Espace de Hilbert

- $L^2(\Omega; H) = \{u : \Omega \rightarrow H \text{ telle que } x \mapsto \|u(x)\|_H \in L^2(\Omega)\}$
- $L^\infty(\Omega; H) = \{u : \Omega \rightarrow H \text{ mesurable et il existe } C \text{ tel que } \|u(x)\|_H \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}$
- $C_\#(Y)$ Fonctions continues sur \mathbb{R}^2 et périodiques de période Y (Y -périodiques)
- $C_\#^\infty(Y) = C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C_\#(Y)$
- $H_\#^1(Y)$ Fermeture de $C_\#^\infty(Y)$ dans $H^1(Y)$
- $H_\#^1(Y)/\mathbb{R}$ Fonctions de $H_\#^1(Y)$ définies à une constante de y près
- $H_m^1(D) = \{u \in H^1(D) \text{ telle que } \int_D u = 0\}$
- $\mathcal{D}(\Omega; C_\#(Y))$ Fonctions ψ à support compact dans Ω et $\forall x \in \Omega \ y \mapsto \psi(x, y) \in C_\#(Y)$
- $L^\infty(\Omega; C_\#(Y)) = \{\psi \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2) \text{ et p.p. } x \in \Omega \ y \mapsto \psi(x, y) \in C_\#(Y)\}$
- $C(\overline{\Omega}; C_\#(Y)) = \{\psi \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2) \text{ et } \forall x \in \Omega \ y \mapsto \psi(x, y) \in C_\#(Y)\}$
- $\int_{F_\varepsilon} u$ La moyenne de u sur F_ε , $\int_{F_\varepsilon} u = \frac{1}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon} u$
- $\int_D u$ La moyenne de u sur D , $\int_D u = \frac{1}{|D|} \int_D u$

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, on étudie quelques modèles macroscopiques pour des milieux conducteurs ou élastiques fortement hétérogènes et anisotropes. Plus exactement pour l'élasticité, on s'intéresse à l'homogénéisation du système de l'élasticité linéarisée suivant :

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div}(\frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2\chi_{M_\varepsilon})A(x, \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon})e(u^\varepsilon) & = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ A(x, \frac{x'}{\varepsilon})e(u^\varepsilon).n & = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

où Ω est un cube de \mathbb{R}^3 supposé être le domaine de configuration d'un milieu élastique hétérogène et anisotrope, composé d'un ensemble de fibres F_ε disposées parallèlement les unes aux autres avec une période de taille ε . Ces fibres sont supposées rigides (coefficient d'élasticité en $\frac{1}{\varepsilon^2}$) alors que le matériau les entourant (la matrice M_ε) est mou (coefficient d'élasticité en ε^2). Le tenseur d'élasticité caractérisant le milieu est noté $A(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ (les hétérogénéités se répétant périodiquement uniquement suivant les directions horizontales $x' = (x_1, x_2)$), $e(u^\varepsilon)$ désigne le tenseur des déformations, $f(x)$ des forces de volume, Γ_0 la réunion des faces inférieure et supérieure du cube Ω et Γ_N ses faces latérales.

Nous étudions le modèle macroscopique correspondant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans deux cas: le premier est celui où les fibres ont un rayon $r\varepsilon$ (même ordre que la période ε) et le second correspond au cas où les fibres sont de rayon r_ε beaucoup plus petit devant ε ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0$) et avec un autre scaling sur les coefficients d'élasticité dans et en dehors des fibres.

Nous montrons que dans les deux cas, l'équation d'équilibre limite contient des termes non locaux supplémentaires dus à l'anisotropie, ou même à l'orthotropie des fibres.

En particulier, pour une condition d'encastrement portant sur les deux faces inférieure et supérieure du cube Ω , cette équation contient des termes non standard du type $b_\delta^{(\gamma)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3$, où les z_α ($\alpha = 1, 2$) désignent les déplacements transversaux et les $b_\delta^{(\gamma)}(x), b_{\alpha\beta}(x)$ des coefficients qu'on calcule en résolvant des équations cellulaires.

Ces termes ne sont pas dus au processus d'homogénéisation lui-même mais à la réduction de dimension 3d-1d locale qui se produit dans chaque fibre.

Pour l'équation de la conduction dans un milieu correspondant à une géométrie identique à celle du milieu élastique étudié, nous obtenons à l'échelle macroscopique une équation algébrique associant la température macroscopique au terme source de départ. Cette équation est similaire à celle vérifiée par les déplacements verticaux dans le système de l'élasticité.

INTRODUCTION

Dans cette thèse nous étudions principalement l'homogénéisation périodique d'équations elliptiques scalaires ou vectorielles, pour lesquelles les coefficients ne sont pas uniformément bornés par rapport au petit paramètre ε correspondant à la taille de la période.

L'équation modèle que nous étudions dans le cas scalaire est celle de la conduction qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2\chi_{M_\varepsilon})A(x, \frac{x'}{\varepsilon})\nabla u^\varepsilon & = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ A(x, \frac{x'}{\varepsilon})\nabla u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans toute cette thèse, Ω désignera un cube de \mathbb{R}^3 , Γ_0 la réunion de ses faces inférieure et supérieure et $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ ses faces latérales.

Dans (1.1), la matrice $A(x, y)$ est la matrice de diffusion du milieu, on suppose qu'elle vérifie les hypothèses habituelles de coercivité et de périodicité (voir ci-dessous les hypothèses exactes), χ_{F_ε} est la fonction caractéristique de F_ε qui est un ensemble de fibres disposées de façon périodique par rapport aux directions horizontales $x' = (x_1, x_2)$ et parallèles les unes aux autres et d'axe principal dirigé suivant la variable verticale x_3 , n désigne la normale extérieure au bord de Ω , χ_{F_ε} et χ_{M_ε} sont les fonctions caractéristiques respectivement de l'ensemble des fibres F_ε et de leur complémentaire M_ε (la matrice).

On suppose le milieu fortement hétérogène au sens que les fibres ont un coefficient de conductivité de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ alors que le matériau qui les entoure (la matrice) a un coefficient de conductivité de l'ordre ε^2 .

Au final, on obtient donc une matrice de diffusion non uniformément coercive par rapport à ε .

On sait que, voir [6],[8],[13],[26],[27], dans cette situation le problème homogénéisé diffère en général du problème (1.1) puisque des phénomènes divers tels que effets non locaux, effets de mémoire, etc, peuvent apparaître dans le problème limite.

Nous montrons ici que l'équation limite se réduit à une équation algébrique

$$u(x) = m(x)f(x) \quad (1.2)$$

liant la température à l'échelle macroscopique $u(x)$ et le terme source $f(x)$.

Notons quand même que l'équation "algébrique" (1.2) contient une équation aux dérivées partielles puisque le "poids" $m(x)$ est la moyenne sur une cellule Y de $\hat{u}(x, y)$ solution d'une équation aux dérivées partielles.

Pour fixer les idées, nous avons choisi un scaling particulier: $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans les fibres F_ε et ε^2 dans la matrice M_ε mais notre méthode marche tout aussi bien pour des coefficient de diffusion du type $\mu_\varepsilon\chi_{F_\varepsilon}$ et $\delta_\varepsilon\chi_{M_\varepsilon}$ avec:

$$\mu_\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon, \quad \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall \varepsilon, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon = \infty.$$

On peut évidemment considérer le cas "inverse" de fibres peu conductrices et d'une matrice fortement conductrice. Dans ce cas, le problème limite est plus proche du cas classique; en gros, pour un tel scaling, les fibres ont tendance à jouer plus ou moins le rôle de trous selon l'amplitude de la conduction dans les fibres: plus cette amplitude est faible, plus elles se comportent comme des trous, voir [].

Pour le scaling considéré ici dans (1.1), notre résultat peut être vu comme annonceur d'une certaine manière de notre résultat concernant le cas vectoriel (voir ci-dessous) puisque les déplacements verticaux u_3 à l'échelle macroscopique vérifient le même type d'équation algébrique que la température $u(x)$ ci-dessus.

Pour parer à la difficulté principale dans l'analyse asymptotique du problème (1.1) qui est le défaut de compacité dans $H^1(\Omega)$ de la suite de solutions u^ε , notre méthode consiste en l'introduction de suites auxiliaires bornées dans des espaces adéquats.

Nous écrivons ensuite une première formulation du problème homogénéisé associant les "limites" u, v, w de ces suites. Dans un second temps, tirant profit du caractère linéaire des équations, nous donnons la version finale du problème homogénéisé dans lequel ne figure que la grandeur macroscopique principale.

Cette démarche est particulièrement fructueuse dans l'étude de l'effet de l'anisotropie sur le problème limite (voir ci-dessous) et permet d'obtenir des résultats de correcteur.

Les résultats du chapitre 1 concernant le cas scalaire se résument comme suit:

Théorème 1.1

La suite u^ε de solutions du problème (1.1) converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers

$$u(x) = m(x)f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

où

$$m(x) = \int_{Y \setminus D} \hat{u}(x, y) dy$$

et \hat{u} est l'unique solution de

$$\begin{cases} \hat{u} \in L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)), & \hat{u} = 0 \quad \text{dans } D, \\ \int_{Y \setminus D} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{u} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} dy = \int_{Y \setminus D} \bar{u} dy, \\ \forall \bar{u} \in H_{\#}^1(Y), & \bar{u} = 0 \quad \text{dans } D. \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans (1.3), Y est la période $Y := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ et D est le disque $D(0, r)$ ($0 < r < \frac{1}{2}$) tel que

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (\varepsilon D(0, r) + \varepsilon(i_1, i_2)) \times I,$$

$$I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \text{et } I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \varepsilon i \in \omega\} \text{ où } \omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2.$$

Pour obtenir le théorème 1.1, nous établissons d'abord une forme "vectorielle" du problème limite en introduisant les suites:

$$\begin{cases} u_\varepsilon^f(x) = \frac{1}{\pi r^2} u^\varepsilon(x) \chi_{F_\varepsilon}, \\ v_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (u^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx') \chi_{D_\varepsilon^i}(x'), \end{cases} \quad (1.4)$$

où $D_\varepsilon^i = \varepsilon D(0, r) + \varepsilon I$. On montre alors qu'il existe $(u^0, v, Z) \in \mathcal{L}$ où

$$\mathcal{L} := \left\{ u^0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)), u^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times D \right\} \times L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}) \times L^2(\omega; H_0^1(I)).$$

tel que pour une sous suite toujours notée ε , on a:

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} \nabla'_y \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \nabla_y v \chi_D(y), \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^f \rightharpoonup Z \quad \text{dans } L^2(\omega; H_0^1(I)) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\partial Z}{\partial x_3} \chi_D, \quad (1.6)$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \nabla' u^\varepsilon \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \nabla^y u^0 \chi_{Y \setminus D}(y), \quad (1.7)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup 0, \quad (1.8)$$

où le symbole " $\rightharpoonup\rightharpoonup$ " désigne la convergence à double échelle (voir rappels ci-dessous) et le carré ω et l'intervalle I sont tels que $\Omega = \omega \times I$. De plus (u^0, v, Z) est l'unique solution du problème cellulaire :

$$\begin{cases} (u^0, v, Z) \in \mathcal{L}, \\ \int_{\Omega \times D} A \left(\begin{array}{c} \nabla_y v \\ \frac{\partial Z}{\partial x_3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nabla_y \bar{v} \\ \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3} \end{array} \right) + \int_{\Omega \times (Y \setminus D)} A \left(\begin{array}{c} \nabla_y u^0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nabla_y \bar{u} \\ 0 \end{array} \right) = \int_{\Omega \times Y} f \bar{u}, \\ \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{Z}) \in \mathcal{L}. \end{cases} \quad (1.9)$$

On remarque que la formulation (1.9) outre le fait qu'elle conduit au problème homogénéisé final, donne aussi un résultat de correcteur que nous démontrons dans le cas du système de l'élasticité (chapitre 2). On a :

Théorème 1.2 (*correcteur*)

Sous l'hypothèse de régularité suivante sur u^0 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla_y u^0(x, \frac{x'}{\varepsilon})|^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y |\nabla_y u^0(x, y)|^2 dx dy, \quad (1.10)$$

la suite de solutions u_ε de (1.1) vérifie :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} \right|^2 + |\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \left(\begin{array}{c} \nabla u^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ 0 \end{array} \right)|^2 \chi_{M_\varepsilon} dx = 0, \quad (1.11)$$

Remarque 1.1 Le théorème 1.2 suggère que v et Z donnés par (1.9) sont nuls puisque (1.5) et (1.6) entraînent que

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup\rightharpoonup \left(\begin{array}{c} \nabla_y v(x, y) \\ \frac{\partial Z}{\partial x_3}(x) \end{array} \right) \chi_D(y). \quad (1.12)$$

On a bien en effet $v = Z = 0$ en prenant $\bar{u} = 0$ dans le système (1.9) et $(\bar{v}, \bar{Z}) = (v, Z)$ en vertu de la coercivité de la matrice A .

Système de l'élasticité linéarisée

Dans le chapitre 2 de cette thèse, nous étudions le même problème d'homogénéisation dans le même cadre géométrique mais pour un milieu élastique soumis à de petites déformations, avec les mêmes notations que celle du chapitre 1, l'équation d'équilibre d'un tel milieu s'écrit:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ (\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.13)$$

où $e(u^\varepsilon)$ est le tenseur des déformations défini par ses composantes $e_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i})$, $\forall i, j = 1, 2, 3$. $A(x, y)$ est un tenseur symétrique d'ordre 4 vérifiant des hypothèses de coercivité et de périodicité (voir les hypothèses précises ci-dessous), $f \in (L^2(\Omega))^3$ sont des forces de volume, Ω, Γ_0 et Γ_N sont définis dans le chapitre 1. En particulier, la condition aux limites de Dirichlet signifie que le corps Ω est encastré à ses deux bouts

$$\Gamma_0 = \left\{ (x', x_3) : x_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x_3 = \frac{1}{2} \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons la convention de sommation des indices répétés; les indices latins i, j, k, l, \dots varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ alors que les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ varient dans l'ensemble $\{1, 2\}$.

Pour décrire le problème limite associé à (1.13), nous utilisons les notations suivantes: x^R, y^R, i^R sont obtenus à partir de x, y, i par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan horizontal associé, ainsi, on a:

$$x^R = (-x_2, x_1), \quad y^R = (-y_2, y_1), \quad i^R = (-i_2, i_1),$$

si $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), i = (i_1, i_2)$

Nous écrivons $e_{\alpha\beta}^y(\varphi)(x, y)$ pour:

$$e_{\alpha\beta}^y(\varphi)(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial y_\alpha} \right) (x, y),$$

de même $e_{\alpha 3}(\varphi)(x, y)$ et $e_{33}(\varphi)(x, y)$ sont définis par:

$$e_{\alpha 3}(\varphi)(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial y_\alpha} \right) (x, y), \quad e_{33}(\varphi)(x, y) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} (x, y),$$

Le tenseur symétrique $e(\varphi)$ est alors défini par:

$$\begin{pmatrix} e_{11}^y(\varphi) & e_{12}^y(\varphi) & e_{13}(\varphi) \\ e_{12}^y(\varphi) & e_{22}^y(\varphi) & e_{23}(\varphi) \\ e_{13}(\varphi) & e_{23}(\varphi) & e_{33}(\varphi) \end{pmatrix}$$

noté de façon abrégée par: $e(\varphi) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\varphi) & e_{\alpha 3}(\varphi) \\ e_{\alpha 3}(\varphi) & e_{33}(\varphi) \end{pmatrix}$.

Nous utilisons la notation $Ae(\varphi)e(\psi)$ pour le produit scalaire des vecteurs $Ae(\varphi)$ et $e(\psi)$.

On introduit également les espaces fonctionnels suivants (Y et D sont définis dans le chapitre 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}^0 = \{u^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))^3, \quad u^0 = 0 \text{ dans } \Omega \times D, \quad \forall i = 1, 2, 3\}, \\ \mathcal{V} = \{v \mid v = (v_\alpha, v_3), \quad v_3 \in L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}), \\ \quad \exists c \in L^2(\omega; H_0^1(I)), v_\alpha(x, y) = c(x)y_\alpha^R\} \\ \mathcal{W} = L^2(\Omega; \mathcal{W}^0), \quad \text{où } \mathcal{W}^0 = \{(w_1, w_2, 0) \in (H_m^1(D))^3, \int_D (y_2 w_1 - y_1 w_2) = 0\}, \\ \mathcal{Z} = \{z \mid z(x, y) = (z_\alpha(x), Z_3(x, y)) \in L^2(\omega; H_0^2(I))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)) \\ \quad \exists z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \text{ telle que } Z_3(x, y) = -y_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}(x) + z_3(x)\}, \end{array} \right. \quad (1.14)$$

($H_m^1(D)$ est le sous-espace de $H^1(D)$ formé des fonctions de moyenne nulle sur D). Puis

$$\mathcal{S} = \mathcal{U}^0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}. \quad (1.15)$$

Suivant la même démarche que celle utilisée dans le chapitre 1 pour le cas scalaire, on montre d'abord le théorème suivant

Théorème 1.3

Supposons que le tenseur d'élasticité A vérifie les hypothèses suivantes :

- $A_{ijkl} = A_{klij} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$,
- $y \mapsto A_{ijkl}(x, y)$ est Y -périodique p.p. $x \in \Omega$.
- $A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega; C_{\#}(Y))$,
- $\exists m > 0, A_{ijkl}(x, y)e_{kl}e_{ij} \geq me_{ij}e_{ij}$ p.p. $(x, y) \in \Omega \times Y$ et $\forall e = (e_{ij})$ tenseur symétrique d'ordre 2. Supposons aussi $f \in (L^2(\Omega))^3$. Alors la suite de solutions u^ε de (1.13) vérifie: Il existe $(u^0, v, w, z) \in \mathcal{S}$ tel que:

$$u_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup z_\alpha(x) + u_\alpha^0(x, y), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$u_3^\varepsilon \rightharpoonup u_3^0(x, y).$$

De plus on a les convergences suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w) \chi_D(y), \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \chi_D(y), \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{33}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \chi_D(y), \\ \varepsilon e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(u^0)(y), \\ \varepsilon e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha}(y), \\ \varepsilon e_{33}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

En outre, (u^0, v, w, z) est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} (u^0, v, w, z) \in \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy \\ + \int_{\Omega \times (Y \setminus D)} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dx dy \\ = \int_{\Omega} \int_Y (f_\alpha(x) (\bar{u}_\alpha(x, y) + \bar{z}_\alpha(x)) + f_3(x) \bar{u}_3(x, y)) dx dy, \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Remarque 1.2 Comme on l'a signalé dans le cas scalaire, l'intérêt de la formulation (1.17) est de fournir un correcteur pour le tenseur des déformations $e(u^\varepsilon)$, en effet, on a la proposition suivante qui précise au moins formellement (en dehors d'hypothèses assurant la régularité supposée dans cette proposition) un développement asymptotique pour u^ε , plus précisément,

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon = u_\alpha^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + z_\alpha(x) + \varepsilon \psi_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon v_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 w_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \dots \\ u_3^\varepsilon = u_3^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon Z_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 v_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \dots \end{cases} \quad (1.18)$$

la fonction ψ_α étant définie par $\psi(x, y) = -y_\gamma \theta(y) \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\gamma}$ où $\theta \in \mathcal{D}(Y)$ vérifie $\theta = 1$ dans D . Ce développement asymptotique est justifié par :

Proposition 1.4

Si (u^0, v, w, z) est tel que les limites intervenues dans (1.16) appartiennent à $L^2(\Omega; C_\#(Y))$, alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} (|\frac{1}{\varepsilon} e(u^\varepsilon)(x) - h^\varepsilon(x)|^2 \chi_{F^\varepsilon} + |\varepsilon e(u^\varepsilon)(x) - k^\varepsilon(x)|^2 \chi_{M^\varepsilon}) dx \right) = 0, \quad (1.19)$$

où

$$\begin{cases} h^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w(x, \frac{x'}{\varepsilon})) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \right) (x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \right) (x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} (x, \frac{x'}{\varepsilon}) \end{pmatrix}, \\ k^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0(x, \frac{x'}{\varepsilon})) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} (x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} (x, \frac{x'}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Effet de l'anisotropie

Les résultats de convergence (1.16)-(1.17) sont obtenus pour des matériaux élastiques généraux. Dans le cas particulier de matériaux présentant certaines propriétés de symétrie tels que les matériaux orthotropes pour lesquels le tenseur d'élasticité A est tel que

$$A_{\alpha 3 \gamma \delta} = A_{\alpha 333} = 0 \quad \forall \alpha, \gamma, \delta = 1, 2, \quad (1.20)$$

la variable v qui rend compte du couplage flexion-torsion dans les fibres est nulle et le développement asymptotique (1.18) ne contient que les termes en (u^0, w, z) . La démonstration s'obtient en prenant dans (1.17), $\bar{u} = \bar{Z}_3 = \bar{w} = 0$ et $\bar{v} = v$ puis on utilise l'hypothèse (1.20) ainsi que la coercivité de la matrice $(A_{\alpha 3 \gamma 3})_{\alpha, \gamma=1,2}$ héritée de la coercivité du tenseur A .

Comme dans le cas scalaire, exploitant le caractère linéaire du problème (1.17), on obtient la formulation variationnelle suivante dans laquelle la variable microscopique y est éliminée :

Théorème 1.4

Si (u^0, v, w, z) est la solution de (1.17) avec $v = (c(x)y_\alpha^R, v_3)$ et $z = (z_\alpha, Z_3)$ ($Z_3 = -y_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3} + z_3$) alors w, v_3, c et z_3 sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = (\hat{w}^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{w} - b_{\alpha 2}(x)\hat{w}^{(3)}) \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) + \hat{w}(x, y) (a_{11} \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 \\ \quad + a_{12} \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3) + \hat{w}^{(3)} (a_{21} \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 + a_{22} \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3), \\ v_3 = (\hat{v}_3^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{v}_3 - b_{\alpha 2}(x)\hat{v}_3^{(3)}) \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) + \hat{v}_3(x, y) (a_{11} \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 \\ \quad + a_{12} \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3) + \hat{v}_3^{(3)} (a_{21} \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 + a_{22} \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3), \\ c = - \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 1}(x', t) \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{11}(x', t) dt \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 \\ \quad + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{12}(x', t) dt \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3, \\ z_3 = - \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 2}(x', t) \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{21}(x', t) dt \int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3 \\ \quad + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{22}(x', t) dt \int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2} dx_3, \end{array} \right. \quad (1.21)$$

où les fonctions $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)})$ et (\hat{w}, \hat{v}_3) sont les uniques solutions des problèmes élémentaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}^{(\gamma)}, \hat{v}_3^{(\gamma)}) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et p.p. } x \in \Omega \text{ on a :} \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}^{(3)}, \hat{v}_3^{(3)}) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et p.p. } x \in \Omega \text{ on a :} \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ - \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}, \hat{v}_3) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et p.p. } x \in \Omega \text{ on a :} \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ - \int_D A \begin{pmatrix} 0 & y_\alpha^R \\ y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \end{array} \right. \quad (1.24)$$

les coefficients $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) sont donnés en fonction de $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)})$ et (\hat{w}, \hat{v}_3) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{22} \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{12}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{22} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{21}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{11} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{22}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{11} \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ b_{\alpha 1}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)} (\hat{A}_{22} \hat{b}_1^{(\alpha)} - \hat{A}_{12} \hat{b}_2^{(\alpha)}), \quad b_{\alpha 2}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)} (\hat{A}_{11} \hat{b}_2^{(\alpha)} - \hat{A}_{12} \hat{b}_1^{(\alpha)}), \\ \text{avec :} \\ \hat{a}(x) = \hat{A}_{11} \hat{A}_{22} - (\hat{A}_{12})^2, \quad a^{(I)}(x') = \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}} dx_3 \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}} dx_3 - (\int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}} dx_3)^2, \\ \hat{A}_{11}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} (\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\gamma} + y_\gamma^R)) y_\alpha^R dy, \\ \hat{A}_{12}(x) = \hat{A}_{21}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(3)}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} + A_{\alpha 333}) y_\alpha^R dy, \\ \hat{A}_{22}(x) = \int_D (A_{33 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(3)}) + A_{33 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} + A_{3333}) dy, \\ \hat{b}_1^{(\alpha)}(x) = \int_D (A_{\beta 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(\alpha)}) + A_{\beta 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\alpha)}}{\partial y_\gamma} - A_{\beta 333} y_\alpha) y_\beta^R dy, \\ \hat{b}_2^{(\alpha)}(x) = \int_D (A_{33 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(\alpha)}) + A_{33 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\alpha)}}{\partial y_\gamma} - A_{3333} y_\alpha) dy. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Utilisant le théorème 1.4 on obtient la formulation suivante du problème homogénéisé

Théorème 1.5

Soit (u^0, v, w, z) la solution de (1.17) et $u := (z_\alpha(x) + \int_{Y \setminus D} u_\alpha^0 dy, \int_{Y \setminus D} u_3^0 dy)$. Alors la suite des déplacements u^ε solutions de (1.13) converge faiblement vers u et $(u, (z_1, z_2))$ est l'unique solution du problème non local suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, (z_1, z_2)) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2, \\ u_\alpha - z_\alpha = f_i(x) m_\alpha^{(i)}(x), \quad u_3(x) = f_i(x) m_3^{(i)}(x), \quad \forall \alpha = 1, 2, \text{ et } \forall i = 1, 2, 3, \\ (z_1, z_2) \text{ est l'unique solution du problème} \\ (z_1, z_2) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2, \\ \int_\Omega \left(a_\delta^{(\gamma)}(x) \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2}(x) + b_\delta^{(1)}(x) \int_I b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 + b_\delta^{(2)}(x) \int_I b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 \right) \frac{\partial^2 \bar{z}_\delta}{\partial x_3^2}(x) dx = \\ \int_\Omega f_\delta(x) \bar{z}_\delta(x) dx, \quad \forall (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2, \end{array} \right. \quad (1.26)$$

où $a_\delta^{(\gamma)}$ et $b_\delta^{(\gamma)}$ ($\delta, \gamma = 1, 2$) sont donnés en fonction de $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$, (\hat{v}_3, \hat{w}) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\delta^{(\gamma)} = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) + A_{33\alpha 3} g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) - A_{3333} (b_{\gamma 2} + y_\gamma)) dy, \\ b_\delta^{(1)}(x) = a_{11}(x) t_\delta(x) + a_{21}(x) h_\delta(x), \quad b_\delta^{(2)}(x) = a_{12}(x) t_\delta(x) + a_{22}(x) h_\delta(x), \\ \text{avec:} \\ k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) = e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)})(x, y) - b_{\gamma 1} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w})(x, y) - b_{\gamma 2} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)})(x, y), \\ g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) = \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha}(x, y) - b_{\gamma 1}(x) (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y) + y_\alpha^R) - b_{\gamma 2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha}(x, y), \\ t_\delta(x) = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) + A_{33\alpha 3} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R)) dy, \\ h_\delta(x) = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) + A_{33\alpha 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} + A_{3333}) dy. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

et $m_j^{(i)}(x)$ est défini par :

$$m_j^{(i)}(x) = \int_{Y \setminus D} u_j^{(i)}(x, y) dy \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

avec $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) est l'unique solution de :

$$\begin{cases} u^{(i)} \in \mathcal{U}^0 \cap L^\infty(\Omega; H^1(Y))^3, \text{ et p.p. } x \in \Omega \text{ on a :} \\ \int_{Y \setminus D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^{(i)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \int_{Y \setminus D} e_i \bar{u} dy, \\ \forall \bar{u} \in (H^1(Y))^3, \bar{u} = 0 \text{ dans } D. \end{cases} \quad (1.29)$$

où $(e_i)_{i=1,2,3}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Remarque 1.3 Les premières équations dans (1.26) correspondent au gap entre les déplacements globaux $u(x)$ du corps considéré et les déplacements transversaux z_α dans les fibres. Notons que la troisième équation $u_3(x) = f_i(x)m_3^{(i)}(x)$ est du même type puisque les déplacements verticaux dans les fibres sont nuls. C'est l'effet non local déjà observé dans le cas d'un matériau isotrope et qui, bien entendu reste vrai pour des matériaux généraux.

D'autre part, on voit apparaître dans l'équation variationnelle (1.26) des termes non standard du type $\int_\Omega \int_I b_{\gamma\alpha} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) dx_3$, $\alpha = 1, 2$.

Ces termes n'apparaissent que sous l'effet conjugué des conditions aux limites imposées (Dirichlet homogène sur les deux faces inférieure et supérieure du cube Ω) et de l'orthotropie, y compris de l'anisotropie du matériau constituant les fibres.

En effet, pour une condition de Dirichlet homogène ne portant que sur une seule des faces de Ω , i.e., $\Gamma_0 = \{(x', \frac{1}{2}) \mid x' \in \omega\}$ où $\Gamma_0 = \{(x', -\frac{1}{2}) \mid x' \in \omega\}$ ces termes n'interviennent plus, puisque la fonction $c(x) \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ qui est en fait l'angle de torsion dans le plan horizontal, n'est plus soumise à la condition $\int_I \frac{\partial c}{\partial x_3}(x) dx_3 = c(x', \frac{1}{2}) - c(x', -\frac{1}{2}) = 0$, et puisque la fonction $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ qui est la limite faible de la suite $\frac{u_3^\varepsilon}{\varepsilon}$ n'est plus soumise à la condition $\int_I \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) dx_3 = z_3(x', \frac{1}{2}) - z_3(x', -\frac{1}{2}) = 0$.

Par ailleurs, on peut également obtenir une formulation variationnelle portant sur les trois variables (z_1, z_2, z_3) (voir chapitre 2) et si le matériau est orthotrope dont le tenseur vérifie l'hypothèse (1.20) ci-dessus, on montre que les termes non standard (des coefficients du type $\int_I b_\gamma \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2}, \int_I b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}$) intervenant dans l'équation variationnelle sont nuls.

Ces termes non standard ne sont pas dus à l'homogénéisation elle-même mais à l'effet réduction de dimension 3d-1d local dans chaque fibre, comme observé dans les travaux de Murat-Sili [19] concernant la réduction de dimension 3d-1d dans un cylindre de rayon ε .

Cas d'un matériau isotrope

Pour un matériau isotrope dont le tenseur d'élasticité est donné par :

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.30)$$

où λ, μ sont les constantes de Lamé et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, les coefficients intervenant dans l'équation variationnelle (1.26) peuvent être calculés explicitement en fonction des constantes de Lamé; en effet, dans le cas d'un matériau isotrope, pour trouver ces coefficients il suffit de calculer explicitement les solutions $(\hat{v}_3^{(\gamma)}, \hat{w}^{(\gamma)})$ des problèmes élémentaires (1.22) pour $\gamma = 1, 2$; dans ce cas, ces problèmes deviennent en fait des équations algébriques qu'on résout explicitement, ainsi $(\hat{v}_3^{(\gamma)}, \hat{w}^{(\gamma)})$ sont données en fait par :

$$\hat{v}_3^{(\gamma)} = 0, \quad \hat{w}_\gamma^{(\gamma)} = \frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)} (y_\gamma^2 - y_\delta^2), \quad \hat{w}_\delta^{(\gamma)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} y_1 y_2, \quad \gamma \neq \delta. \quad (1.31)$$

On remplace dans (1.25) et (1.27) on obtient $b_{\alpha\beta} = b_\delta^{(\gamma)} = a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = 0$, $a_\gamma^{(\gamma)} = \frac{\pi}{4} r^4 \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$, ainsi on retrouve l'équation d'équilibre pour un milieu isotrope obtenue par M. Bellieud-G. Bouchitté [2] :

$$\begin{cases} u_\alpha - z_\alpha = f_i(x)m_\alpha^{(i)}(x), \quad u_3(x) = f_i(x)m_3^{(i)}(x), \quad \forall \alpha = 1, 2, \text{ et } \forall i = 1, 2, 3, \\ \frac{\pi}{4} r^4 \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \int_\Omega \frac{\partial^2 z_\delta}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \bar{z}_\delta}{\partial x_3^2} = \int_\Omega f_\delta \bar{z}_\delta, \quad \forall (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2. \end{cases} \quad (1.32)$$

Cas où les fibres sont de rayon r_ε beaucoup plus petit devant ε

Dans le troisième chapitre de cette thèse, on étudie les mêmes problèmes d'homogénéisation pour les systèmes de conduction et d'élasticité linéarisée mais en supposant que les fibres sont d'un rayon r_ε beaucoup plus petit que la période ε du milieu. On suppose que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0$. On suppose également que r_ε vérifie l'hypothèse $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0$.

Les fibres sont supposées rigides, avec des coefficients de l'ordre de μ_ε (avec $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$) pour la conduction et de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ puis $\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}$ pour l'élasticité, alors que le matériau extérieur occupant la matrice M_ε a un coefficient de l'ordre de 1.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la convergence double échelle et quelques résultats principaux. Le choix du rayon des fibres nous conduit à utiliser une notion de convergence double échelle adaptée à l'ordre de grandeur des fibres, on désigne cette convergence par le symbole " \rightharpoonup ".

Notre méthode consiste en l'introduction d'une variable rapide dans la direction verticale. On identifie d'abord les fonctions limites dont la variable microscopique est $(y, y_3) \in D \times Y_3$ où $D = D(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ et $Y_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, cette étape nous permet de déduire facilement les fonctions limites double-échelle lorsque la variable microscopique est seulement dans le disque D (pas de y_3). Pour cela on définit dans la première partie de ce chapitre une notion de convergence double-échelle correspondant à une limite dans $L^2(\Omega \times D \times Y_3)$.

L'inégalité (1.33) qui suit joue un rôle essentiel dans l'identification des limites double échelle correspondant au tenseur des déformations à l'intérieur des fibres.

- Soit $T = D \times Y_3$. Il existe une constante C telle que :

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(H^1(T))^3} \leq C \|e^y(\phi)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}}, \quad \forall \phi \in (H^1(T))^3. \quad (1.33)$$

où $e^y(\phi)$ est défini par $e_{ij}^y(\phi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i})$ et $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(y, y_3) = \frac{\int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2)}{\int_T (y_1^2 + y_2^2)} y_2 + \frac{\int_T (y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3)}{\int_T (y_1^2 + y_3^2)} y_3 + \int_T \phi_1, \\ \hat{\phi}_2(y, y_3) = -\frac{\int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2)}{\int_T (y_1^2 + y_2^2)} y_1 + \frac{\int_T (y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3)}{\int_T (y_2^2 + y_3^2)} y_3 + \int_T \phi_2, \\ \hat{\phi}_3(y, y_3) = -\frac{\int_T (y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3)}{\int_T (y_1^2 + y_3^2)} y_1 - \frac{\int_T (y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3)}{\int_T (y_2^2 + y_3^2)} y_2 + \int_T \phi_3. \end{cases} \quad (1.34)$$

Pour la démonstration de cette inégalité voir 3.1. Lemme 3.3.

Signalons que l'on peut également travailler par la méthode de ce chapitre pour étudier l'élasticité (1.13) considérée dans le chapitre 2 (voir commentaire).

Dans la deuxième partie on étudie le problème de la conduction suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu_\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ (\mu_\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.35)$$

où

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} (r_\varepsilon D(0, 1) + \varepsilon(i_1, i_2)) \times I, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon, \quad (1.36)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0. \quad (1.37)$$

à A est une matrice 3×3 vérifiant les mêmes hypothèses de coercivité et de périodicité qu'aux chapitres précédents. On suppose $\mu_\varepsilon > 0$ et $\mu_\varepsilon \rightarrow_\varepsilon \infty$.

Dans tout ce chapitre $D = D(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Considérons :

$$\mathcal{S} = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega; H_m^1(D)). \quad (1.38)$$

Les résultats de la conduction (1.35) se résument comme suit :

Théorème 1.6

Soit u^ε la suite de solutions de (1.35), on suppose (1.37). Il existe

$$(u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \quad z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad (1.39)$$

telles que

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega), \\ \sqrt{\pi} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup (\nabla_y v, \frac{\partial z_3}{\partial x_3}), \\ \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup (\nabla' u + \nabla_y u^0, \frac{\partial u}{\partial x_3}), \end{cases} \quad (1.40)$$

de plus :

1) Si : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \mu \in [0, \infty[$, alors $z_3 = \sqrt{\pi} \mu u$ et (u, u^0, v) est l'unique solution de

$$\begin{cases} (u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla' u + \nabla_y u^0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{u} + \nabla_y \bar{u}^0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ = \int_{\Omega} f \bar{u}, \quad \forall (u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (1.41)$$

2) Si : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \infty$, alors

$$u = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\mu_\varepsilon^2 \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) |\nabla u^\varepsilon|^2 = 0. \quad (1.42)$$

Tirant profit du caractère linéaire de l'équation (1.41), nous donnons la version finale de problème homogénéisé dans lequel ne figure que la variable macroscopique et la fonction u .

Théorème 1.7

Si : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \mu \in [0, \infty[$, alors u_ε converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers l'unique solution u de

$$\begin{cases} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (a^*(x) \frac{\partial u}{\partial x_3}) - \text{div} A^*(x) \nabla u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ A^*(x) \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.43)$$

où les coefficients a^* et $A^* = (A_{ij}^*)_{i,j=1,2,3}$ sont définis par : p.p. $x \in \Omega$

$$a^*(x) = \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_1} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{ij}^*(x) = \int_Y A(x, y) \left(\begin{pmatrix} \nabla_y \hat{u}_j \\ 0 \end{pmatrix} + e_j \right) \cdot e_i, \quad (1.44)$$

et $\hat{v}, \hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ sont les uniques solutions des problèmes élémentaires suivants

$$\begin{cases} \hat{v} \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{v} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \forall \bar{v} \in H_m^1(D), \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_i \in L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}), \\ \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{u}_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_Y A(x, y) e_i \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \forall \bar{u}^0 \in H_{\#}(Y)/\mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.46)$$

avec $e_i, i = 1, 2, 3$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Systemes de l' élasticités linéarisée

Dans la troisième partie, avec les mêmes hypothèses (1.36)-(1.37) sur F_ε et r_ε on considère le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ (\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.47)$$

On suppose que le tenseur A vérifie les mêmes hypothèses de coercivité et de périodicité du théorème 1.3 (chapitre 2) en remplaçant l'hypothèse c par $A_{ijkl} \in C(\bar{\Omega} \times C_{\#}(Y))$.

Soit \mathcal{W} l'espace défini dans (1.14) en remplaçant $D(0, r)$ par $D(0, 1)$, soit aussi

$$U = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3, \quad U^0 = (L^2(\Omega; H_{\#}(Y)/\mathbb{R}))^3, \quad \mathcal{V}_3 = L^2(\Omega; H_m^1(D)). \quad (1.48)$$

considérons également les espaces suivants

$$\mathcal{T} = U \times U^0 \times \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}, \quad \mathcal{Z} = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times U^0. \quad (1.49)$$

Le résultat d'homogénéisation associé au problème (1.46) est fonction du choix de r_ε par rapport à ε^2 . Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant en fonction de la limite de $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

Théorème 1.8

Soit u^ε la suite de solutions du problème (1.47). Il existe

$$(u, u^0, v_3, w) \in \mathcal{T}, \quad \text{et } z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)),$$

tel que :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } (H^1(\Omega))^3, & u^\varepsilon \rightarrow u \text{ en } (L^2(\Omega))^3, \\ e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e(u) + e^y(u^0), & \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w), \\ \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}, & \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e_{33}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial z_3}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (1.50)$$

De plus on a :

1) Si: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}) = \mu \in [0, \infty[$, alors $z_3 = \sqrt{\pi} \mu u_3$, et (u, u^0, v_3, w) est l'unique solution de :

$$\begin{cases} (u, u^0, v_3, w) \in \mathcal{T}, \\ \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \\ \int_\Omega \int_Y A(x, y) (e(u) + e^y(u^0)) (e(\bar{u}) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_\Omega f(x) \bar{u}(x) dx, \\ \forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}_3, \bar{w}) \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (1.51)$$

2) Si: $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}) = \infty$, alors $z_3 = u_3 = v_3 = w = 0$, et $((u_1, u_2), u^0)$ est l'unique solution de :

$$\begin{cases} ((u_1, u_2), u^0) \in \mathcal{Z}, \\ \int_\Omega \int_Y A(x, y) \left(e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0) \right) \left(e((\bar{u}_\alpha, 0)) + e^y(\bar{u}^0) \right) = \int_\Omega f_\alpha(x) \bar{u}_\alpha(x) dx, \\ \forall ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{u}^0) \in \mathcal{Z}. \end{cases} \quad (1.52)$$

Effet de l'anisotropie

Le résultat (1.51) du théorème 1.8 est obtenu pour un matériau général. Pour les matériaux orthotropes pour lesquels le tenseur d'élasticité A vérifie l'hypothèse (1.20), la variable v_3 qui rend compte du couplage flexion-torsion dans les fibres est nulle si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2} = \mu > 0$, et le système (1.51) ne contient que les termes (u, u^0, w) . La démonstration s'obtient en prenant $\bar{u} = \bar{u}^0 = \bar{w} = 0$ et $\bar{v}_3 = v_3$ dans (1.51) puis on utilise l'hypothèse (1.20) ainsi que la coercivité de la matrice $(A_{\alpha 3 \gamma 3})_{\alpha, \gamma=1,2}$.

Théorème 1.9

Soient u, u^0, v_3, w les solutions données dans le théorème 1.8. Alors :

$$u^0 = \sum_{p,q=1}^3 \hat{u}^{(pq)} e_{pq}(u), \quad (v_3, w) = (\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3})(\hat{v}_3, \hat{w}). \quad (1.53)$$

où $\hat{u}^{(pq)}, (\hat{v}_3, \hat{w})$ sont les uniques solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \hat{u}^{(pq)} \in L^\infty(\Omega; (H_\#^1(Y)/\mathbb{R})^3), & \text{et p.p. } x \in \Omega, \\ \int_Y A(x, y) e^y(\hat{u}^{(pq)}) e^y(\bar{u}) = - \int_Y A(x, y) e^{(pq)} e^y(\bar{u}), \\ \forall \bar{u} \in (H_\#^1(Y)/\mathbb{R})^3, \end{cases} \quad (1.54)$$

$$\begin{cases} (\hat{v}_3, \hat{w}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}^0), & \text{et p.p. } x \in \Omega, \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \\ - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \\ \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}^0, \end{cases} \quad (1.55)$$

où $e^{(pq)}$ dans (1.54) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, i.e. $e_{ij}^{(pq)} = \delta_{ip} \delta_{jq}$.

Théorème 1.10

La suite u^ε de solutions de (1.47) converge fortement vers u dans $(L^2(\Omega))^3$, et on a :

1) Si: $\lim_{\varepsilon} (r_\varepsilon/\varepsilon^2) = \mu \in [0, \infty[$, u est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (a^*(x) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) - \operatorname{div} A^*(x) e(u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ A^*(x) e(u) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.56)$$

2) Si: $\lim_{\varepsilon} (r_\varepsilon/\varepsilon^2) = \infty$, $u_3 = 0$, et (u_1, u_2) est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2, \\ \int_\Omega A^*(x) e((u_\alpha, 0)) e((\bar{u}_\alpha, 0)) = \int_\Omega f_\alpha \bar{u}_\alpha, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2. \end{cases} \quad (1.57)$$

où $A^* = (A^*)_{ijkl}$ et a^* sont définis dans Ω par :

$$\begin{cases} A_{ijkl}^*(x) = \int_Y A(x, y) (e^y(\hat{u}^{(kl)}) + e^{(kl)}) \cdot e^{(ij)} dy, \\ a^*(x) = \int_D (A_{33\alpha\beta}(x, 0) e_{\alpha\beta}(\hat{w}) + A_{33\alpha 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + A_{3333}(x, 0)) dy. \end{cases} \quad (1.58)$$

Cas d'un matériau isotrope

On suppose que le tenseur d'élasticité s'écrit sous la forme (1.30) (voir ci-dessus). Dans ce cas on peut résoudre algébriquement le problème (1.55) et les coefficients a^* et A^* seront calculés explicitement en fonction de λ_1 et μ_1 , en effet, on a :

$$a^* = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad A_{ijkl}^*(x) = A_{ijkl}. \quad (1.59)$$

Dans la dernière partie on étudie avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses sur le tenseur A que celles considérées dans la troisième partie, le système suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}\chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}\right)A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon) & = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}\chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}\right)A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon).n & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.60)$$

Le problème limite pour le système (1.60) est similaire à celui du chapitre 2, en particulier, on va voir apparaître une fonction de type $\frac{\partial c}{\partial x_3}y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}$ qui correspond à la limite double échelle du terme anisotrope, ainsi que, l'apparition des dérivées de deuxième ordre pour les déplacements transversaux, et l'apparition des termes non standard sous la forme $\int_I b_{\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}$ dans la formulation macroscopique. Par contre il n'y aura pas d'effet non local comme cela a déjà été observé dans le cas isotrope (voir [22]).

Soit U^0 l'espace défini dans (1.48), \mathcal{V} et \mathcal{W} les espaces définis dans (1.14) en remplaçant $D(0, r)$ par $D(0, 1)$. Soit aussi l'espace :

$$\left\{ \mathcal{U} = \left\{ u \mid u = (u_\alpha, Z_3), \quad u_\alpha \in H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)), \quad Z_3 \in L^2(\omega \times D, H_0^1(I)), \right. \right. \\ \left. \left. \exists z_3 \in L^2(\omega, H_0^1(I)) \text{ telle que } Z_3 = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_3} y_\gamma + z_3 \right\} \right\}. \quad (1.61)$$

Posons

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \times U^0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \quad (1.62)$$

On a alors :

Théorème 1.11

Soit u^ε la suite de solutions de (1.60). Il existe $(u, u^0, v, w) \in \mathcal{S}$ telle que

$$\begin{cases} (u_\alpha^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \rightharpoonup (u_\alpha, 0) & \text{faiblement dans } (H^1(\Omega))^3, \\ (u_\alpha^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \rightarrow (u_\alpha, 0) & \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^3, \\ e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(w), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \right), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (1.63)$$

De plus (u, u^0, v, w) est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (u, u^0, v, w) \in \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}}) & \frac{\partial Z_3}{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_{\alpha}^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_{\alpha}^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}}) & \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ + \int_{\Omega} \int_Y A(x, y)(e((u_{\alpha}, 0)) + e^y(u^0))(e((\bar{u}_{\alpha}, 0)) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f \bar{u}_{\alpha}, \\ \forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (1.64)$$

Effet de l'anisotropie

Le résultat du théorème 1.11 est obtenu pour des matériaux élastiques généraux, en particulier pour des matériaux présentant certains propriétés de symétrie tels que les matériaux orthotropes pour lesquels le tenseur de l'élasticité A vérifie l'hypothèse (1.20) (voir ci-dessus), la variable v qui rend compte du couplage flexion-torsion dans les fibres est nulle et l'équation (1.64) ne contient que les termes en (u^0, w, z) . La démonstration s'obtient en prenant dans (1.64), $\bar{u} = \bar{u}^0 = \bar{Z}_3 = \bar{w} = 0$ et $\bar{v} = v$ puis on utilise l'hypothèse (1.20), ainsi que la coercivité de la matrice $(A_{\alpha 3 \gamma 3})_{\alpha, \gamma=1,2}$.

Exploitant le caractère linéaire du problème (1.64), on obtient une expression pour v, w et z_3 en fonction de u_1, u_2 qui conduit à une formulation variationnelle dans laquelle la variable microscopique y est éliminée.

Téorème 1.12

Soit (u, u^0, v, w) la solution de (1.64), où $v = (c(x)y_{\alpha}^R, v_3)$, $u = (u_{\alpha}, Z_3)$. Alors :

$$u^0 = \sum_{p,q} \hat{u}^{(pq)}(x, y) e_{pq}((u_{\alpha}, 0)), \quad (1.65)$$

et :

$$\begin{cases} w = \sqrt{\pi} \left((\hat{w}^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{w} - b_{\alpha 2}(x)\hat{w}^{(3)}) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x) + \hat{w}(x, y) \left(a_{11} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + a_{12} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) + \hat{w}^{(3)} \left(a_{21} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) + a_{22} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) \right), \\ v_3 = \sqrt{\pi} \left((\hat{v}_3^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{v}_3 - b_{\alpha 2}(x)\hat{v}_3^{(3)}) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x) + \hat{v}_3(x, y) \left(a_{11} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + a_{12} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) + \hat{v}_3^{(3)} \left(a_{21} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) + a_{22} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) \right), \\ c = \sqrt{\pi} \left(- \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 1}(x', t) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{11}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \\ \quad \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{12}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right), \\ z_3 = \sqrt{\pi} \left(- \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 2}(x', t) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{21}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \\ \quad \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{22}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right). \end{cases} \quad (1.66)$$

où $\hat{u}^{(pq)}$ est la solution de l'équation (1.54) et $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)})$ et (\hat{w}, \hat{v}_3) sont les uniques solutions des problèmes (1.22)-(1.24) en remplaçant $D(0, r)$ par $D(0, 1)$ et les coefficients $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ sont donnés de la même façon dans (1.25) en remplaçant $D(0, r)$ par $D(0, 1)$ et " \int_D " par " \int_D ".

Téorème 1.13

La suite $(u_{\alpha}^{\varepsilon}, u_3^{\varepsilon})$ de solutions de problème (1.60) converge fortement vers $(u_{\alpha}, 0)$, où (u_1, u_2) est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2, \\ \int_{\Omega} \left(a_{\delta}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_{\gamma}}{\partial x_3^2} + b_{\delta}^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_{\gamma}}{\partial x_3^2}) + b_{\delta}^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_{\gamma}}{\partial x_3^2}) \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_{\delta}}{\partial x_3^2} \\ + \int_{\Omega} A^* e((u_{\alpha}, 0)) e((\bar{u}_{\alpha}, 0)) = \int_{\Omega} f_{\delta} \bar{u}_{\delta}, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2, \end{cases} \quad (1.67)$$

où $A^{(\star)} = (A^{(\star)})_{ijkl}$ est le tenseur défini en (1.58) et les coefficients $a_\delta^{(\gamma)}, b_\delta^{(\gamma)}, b_{\delta\gamma}$ sont définis en (1.25)-(1.27) en remplaçant $D(0, r)$ par $D(0, 1)$.

Remarque 1.4 Comme avec l'équation (1.26), on voit apparaître dans l'équation (1.67) des termes non standard du type $\int_I b_{\gamma\alpha} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) dx_3$. Ces termes n'apparaissent que sous l'effet conjugué des conditions aux limites imposées et de l'anisotropie du matériau constituant les fibres, voir aussi la remarque 1.3.

Cas d'un matériau isotrope

On suppose que le tenseur de l'élasticité s'écrit sous la forme :

$$A_{ijkl}^{(\varepsilon)} = \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \mu_1 > 0. \quad (1.68)$$

Avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\mu_\varepsilon r_\varepsilon^4}{\mu_1 \varepsilon^2} \right) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell \in [0, \infty[,$$

Posons :

$$A_{ijkl} = \ell \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.69)$$

Dans ce cas le système homogénéisé est le système (1.64) en remplaçant $A(x, 0)$ et $A(x, y)$ par A . D'une façon similaire aux problèmes d'élasticité étudiés précédemment, les coefficients de l'équation (1.67) seront calculés explicitement :

$$a_\delta^{(\delta)} = \frac{\pi}{4} \mu_1 \frac{3\ell + 2}{\ell + 1}, \quad a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = b_\delta^{(\gamma)} = b_{\delta\gamma} = 0, \quad A_{ijkl}^* = A_{ijkl}. \quad (1.70)$$

Remplaçant dans (1.67), on retrouve alors l'équation pour un milieu isotrope obtenue par C. Pideri-P. Seppecher (voir [22]) :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2, \\ \frac{\pi}{4} \mu_1 \frac{3\ell + 2}{\ell + 1} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} + \int_\Omega A e((u_\delta, 0)) e((\bar{u}_\delta, 0)) = \int_\Omega f_\delta \bar{u}_\delta, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2. \end{cases} \quad (1.71)$$

0. QUELQUES RAPPELS

Soit H un espace vectoriel. Rappelons qu'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive [i.e. $\forall (u, v) \in H \times H$ $(u, v)_H = (v, u)_H$, et si $u \neq 0$ $(u, u)_H > 0$]. On rappelle aussi qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)_H| \leq (u, u)_H^{\frac{1}{2}} (v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall (u, v) \in H \times H. \quad (1.1)$$

Définition 1.1 : Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $(u, u)_H^{\frac{1}{2}}$. On note $\|u\|_H$ au lieu de $(u, u)_H^{\frac{1}{2}}$.

On écrit par fois (\cdot, \cdot) au lieu de $(\cdot, \cdot)_H$ et $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_H$.

Exemples : Soit Ω un ouvert dans \mathbb{R}^N où $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv$ est un espace de Hilbert.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.1) se traduit par l'inégalité de Hölder dans $L^2(\Omega)$.

2. Soit H un espace de Hilbert. $L^2(\Omega; H)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega; H)} = \int_{\Omega} (u(x), v(x))_H dx \quad (1.2)$$

3. Soit $H^1(\Omega)$ l'espace défini par (espace de Sobolev) :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (1.3)$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est prise au sens de distributions. Le gradient de u noté ∇u est défini par :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right). \quad (1.4)$$

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.5) suivant est un espace de Hilbert.

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \quad (1.5)$$

4. $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On rappelle que $H^1(I) \subset C(\bar{I})$. Soient :

$$H_0^1(I) = \left\{ u \mid u \in H^1(I), u(-\frac{1}{2}) = u(\frac{1}{2}) = 0 \right\}, \quad (1.6)$$

$$H_0^2(I) = \left\{ u \mid u \in H_0^1(I), \frac{\partial u}{\partial x} \in H_0^1(I) \right\}. \quad (1.7)$$

$H_0^1(I)$ et $H_0^2(I)$ sont des espaces de Hilbert avec comme produit scalaire :

$$(u, v)_{H_0^1(I)} = \int_I \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (u, v)_{H_0^2(I)} = \int_I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.8)$$

5. Soit $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$. Posons $\Gamma_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2 \times \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. On considère (voir aussi notations)

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \mid u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}. \quad (1.9)$$

$H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert associé au produit scalaire suivant :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \quad (1.10)$$

Inégalité de Poincaré-Wirtinger.

• Ω un ouvert connexe de classe C^1 ; Il existe une constante C telle que : $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \quad (1.11)$$

• $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, $D = D(0, r)$ un disque dans Y de centre zéro et du rayon r . Il existe une constante C telle que : $\forall u \in H^1(Y)$

$$\int_Y |u - \frac{1}{|D|} \int_D u|^2 \leq C \int_Y |\nabla u|^2. \quad (1.12)$$

Soit Ω un ouvert connexe de classe C^1 . $H_m^1(\Omega)$ est le sous espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions dont la moyenne est nulle, i.e. $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = 0$. En outre, $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ est l'espace de fonctions de $H^1(\Omega)$ déffigies à une constante près.

$H_m^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H_m^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v, \quad (u, v)_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \quad (1.13)$$

Soient $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$, $u \in H^1(\Omega)^3$. On définit le tenseur $e(u)$ dans $(L^2(\Omega))_s^{3 \times 3}$ par :

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t \nabla u). \quad (1.14)$$

${}^t \nabla$ désigne la matrice transposée de ∇u .

Inégalités de Korn

• Il existe une constante C telle que : $\forall u \in (H^1(\Omega))^3$

$$(\|u\|_{(L^2)^3}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2)^{3 \times 3}}^2)^{\frac{1}{2}} \leq C(\|u\|_{(L^2)^3}^2 + \|e(u)\|_{(L^2)_s^{3 \times 3}}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

• Soit $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ l'espace défini dans l'exemple (1.9). Il existe une constante C telle que :

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq C \int_{\Omega} |e(u)|^2 \quad \forall u \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3. \quad (1.16)$$

Cette inégalité peut prendre une autre forme. Soit $D = D(0, r)$ un disque dans $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ de centre zéro et de rayon r et $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\Gamma_{-\frac{1}{2}} = D \times \{-\frac{1}{2}\}$. Il existe une constante C telle que :

$$\int_{D \times I} |u|^2 \leq C \int_{D \times I} |e(u)|^2 \quad \forall u \in H^1(D \times I), \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_{-\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Définition 1.2 : Soit H un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire $A : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite
i) continue s'il existe une constante C_1 telle que

$$|A(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H, \quad (1.18)$$

ii) coercive s'il existe une constante C_2 telle que

$$|A(u, u)| \geq C_2 \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H. \quad (1.19)$$

Si H est un espace de Hilbert, H' désigne le dual de H .

Théorème 1.1 (Lax-Milgram)

Soit A une forme bilinéaire continue et coercive. Alors $\forall v \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$A(u, \bar{u}) = \langle v, \bar{u} \rangle_{H' \times H} \quad \forall \bar{u} \in H. \quad (1.20)$$

Définition 1.3 : Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite dans un espace de Hilbert H et $u \in H$. On dit que

i) u_ε converge fortement vers u et on note $u_\varepsilon \rightarrow u$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_H = 0. \quad (1.21)$$

ii) u_ε converge faiblement vers u et on note $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon, \bar{u})_H = (u, \bar{u})_H, \quad \forall \bar{u} \in H. \quad (1.22)$$

Théorème 1.2

De toute suite bornée dans un espace de Hilbert, on peut extraire une sous suite convergeant faiblement.

Théorème 1.3

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . L'injection $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte.

Convergence au sens double-échelle

Dans cette section $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ et $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$. On désigne par $C_\#(Y)$ l'espace de fonctions définies de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} continues sur \mathbb{R}^2 et périodiques de période Y . On a donc $C_\#^\infty(Y) = C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C_\#(Y)$. On désigne par $H_\#^1(Y)$ la fermeture de $C_\#^\infty(Y)$ dans l'espace de Hilbert $H^1(Y)$. L'espace $H_\#^1(Y)$ muni de la norme induite par $H^1(Y)$ est un espace de Hilbert.

Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, on désigne par x' la projection de x sur \mathbb{R}^2 , i.e. $x' = (x_1, x_2)$.

Définition 1.4 : Soient u_ε une suite dans $L^2(\Omega)$ et $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. On dit que u_ε converge au sens double-échelle vers u_0 et on note $u_\varepsilon \rightharpoonup\!\rightharpoonup u_0$ si $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_\#^\infty(Y))$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = \int_\Omega \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (1.23)$$

Si l'on a de plus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_\Omega \int_Y |u_0(x, y)|^2 dx dy, \quad (1.24)$$

on dit que u_ε converge à double échelle au sens fort vers u_0 .

Théorème 1.4

Toute suite bornée dans $L^2(\Omega)$ admet une sous suite qui converge au sens double-échelle.

On dit que $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ si la fonction $x \mapsto \sup_{y \in Y} |\psi(x, y)|$ est dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 1.1

Soit $\psi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, alors on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\psi(x, \frac{x'}{\varepsilon})|^2 = \int_{\Omega} \int_Y |\psi(x, y)|^2 dx dy. \quad (1.25)$$

Proposition 1.1

Soit u_{ε} une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ et $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0$. Alors

$$u(x) = \int_Y u_0(x, y) dy, \quad (1.26)$$

et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.27)$$

Théorème 1.5

Soit u_{ε} une suite dans $L^2(\Omega)$ convergeant fortement au sens double-échelle vers $u_0(x, y)$ et v_{ε} une autre suite bornée dans $L^2(\Omega)$ et qui converge vers $v_0(x, y)$, alors $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x) v_{\varepsilon}(x) \psi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (1.28)$$

De plus si $u_0 \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_{\varepsilon}(x) - u_0(x, \frac{x'}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (1.29)$$

Proposition 1.2

- toute suite u_{ε} convergeant fortement vers u dans $L^2(\Omega)$ converge au sens double-échelle vers $u(x)$.
- toute suite admettant un développement asymptotique $u_{\varepsilon}(x) = u_0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \dots$, où $u_i(x, y)$ sont des fonctions régulières et Y -périodiques converge au sens double-échelle vers le premier terme de son développement $u_0(x, y)$.

Proposition 1.3

Soit u_{ε} une suite dans $H^1(\Omega)$.

i) On suppose que u_{ε} est bornée dans $H^1(\Omega)$. Il existe une sous-suite, notée encore u_{ε} convergeant faiblement vers $u \in H^1(\Omega)$ et $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u(x)$; de plus, il existe $u_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ telle que $\nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup \nabla u(x) + (\nabla_y u_1, 0)$ où $\nabla_y u^0 = (\frac{\partial u^0}{\partial y_1}, \frac{\partial u^0}{\partial y_2})$.

ii) On suppose que u_{ε} et $\varepsilon \nabla u_{\varepsilon}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$. Il existe $u_0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ et une sous-suite u_{ε} tels que $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u_0(x, y)$ et $\varepsilon \nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup (\nabla_y u_0, 0)$.

Pour la preuve de ces résultats voir par exemple [1].

CHAPITRE 1

L'ÉQUATION DE LA CONDUCTION EFFECTIVE POUR UN MILIEU PÉRIODIQUE FORTEMENT HÉTÉROGÈNE

(Ricerche di Matematica, 2012)

The effective conductivity equation for a highly heterogeneous periodic medium

Hamid Charef • Ali Sili

Received: 7 February 2011/Revised: 5 May 2011

© Università degli Studi di Napoli "Faberico 2" 2011

Abstract We consider the homogenization of a conductivity equation for a medium made up of a set F_ε (ε being the size of the period of the medium) of highly conductive vertical fibers surrounded by another material (the matrix) assumed to be a poor conductor. The conductivity coefficients in the fibers behave as $\frac{1}{\varepsilon^2}$ while those of the matrix behave as ε^2 . We show that the homogenized problem consists of an equality of the kind $u(x) = m(x)f(x)$ where u denotes the macroscopic temperature, f the source term and $m(x)$ a coefficient given by solving some cell equation.

Keywords Homogenization. Anisotropy. Conductivity. Fibers

Mathematics Subject Classification (2010) 35B27 · 74QXX · 76M50

1. Introduction

We consider the homogenization problem for the stationary heat equation when the medium under consideration is assumed to be highly heterogeneous. We restrict ourselves to the periodic setting. More precisely, denoting by Ω the geometric configuration of that medium and by ε the size of the period of the medium, we assume that Ω is the union of a set F_ε of parallel fibers whose conductivity coefficient behaves as $\frac{1}{\varepsilon^2}$ and of a set M_ε occupied by a second material which surrounds the fibers and whose conductivity coefficient behaves as ε^2 .

Denoting by χ_{F_ε} (respectively χ_{M_ε}) the characteristic function of the set F_ε (respectively M_ε), the conductivity equation writes as

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2\chi_{M_\varepsilon}\right)A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon\right) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)\nabla u^\varepsilon n = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.1)$$

where A denotes the conductivity matrix, n the outer normal to Ω , Γ_0 and Γ_N two parts of the boundary of Ω , f the source term and x' denotes the pair $x' = (x_1, x_2)$.

Our goal is to homogenize Eq.(1.1) by characterizing the limit of u^ε as ε goes to zero. The limit equation obtained by this way, called the homogenized equation, will modelize the conductivity in the heterogeneous medium at the macroscopic level.

The main difficulty in the homogenization process of (1.1) comes from the non-uniform coerciveness of the conductivity matrix with respect to the small parameter ε due to the term $\varepsilon^2\chi_{M_\varepsilon}$. Nowadays it is well known, see[2-4,9,10], that in case of lack of uniform boundedness of the associated operator,

the homogenized equation may considerably differ from the equation of the medium at the microscopic level and various phenomenon may appear such as nonlocal effects or memory effects.

In spite of the fact that there is a heavy literature devoted to the topic see for instance [2-4,9,10], it seems useful to us to give an other example of a situation where the homogenized problem takes a form which one does not expect a priori. The scales of the conductivity coefficients we choose here lead to a quite surprising homogenized equation since although the conductivity in the fibers is more important than the one in the matrix, the diffusion at the macroscopic level is not seen in the fibers at all and only the average of the temperature outside them occurs at the limit. Actually, we prove that the sequence $u^\varepsilon \chi_{M_\varepsilon}$ converges strongly to 0 in $L^2(\Omega)$ and that the homogenized problem may be simply written as $u(x) = m(x)f(x)$ where u is the macroscopic temperature, f the source term and where the coefficient $m(x) = \int_{Y \setminus D} \hat{u}(x, y) dy$, \hat{u} being the unique solution of some cell equation (see below for details). In particular the anisotropy of the fibers which usually occurs in the effective conductivity coefficient, see [9], and [10], does not have any effect on the homogenized problem.

Curiously enough, such kind of homogenized problem appears also in other situations for instance in the case of holes periodically distributed with Dirichlet boundary conditions on the holes, see [11] Lemma 15.5.

In a forthcoming paper (see[5]), we will study the same problem in the framework of the linearized elasticity and we will show the vectorial nature of the problem may change the kind of the homogenized problem. In particular, we prove in [5] that in the framework of the linearized elasticity, nonlocal terms appear in the homogenized problem and the anisotropy of the fibers arises in the effective elastic law.

In the sequel we make more precise the geometric setting of the problem together with the notations we adopt.

We deal with the periodic case, the representative cell, see Fig. 1, is described as follows:

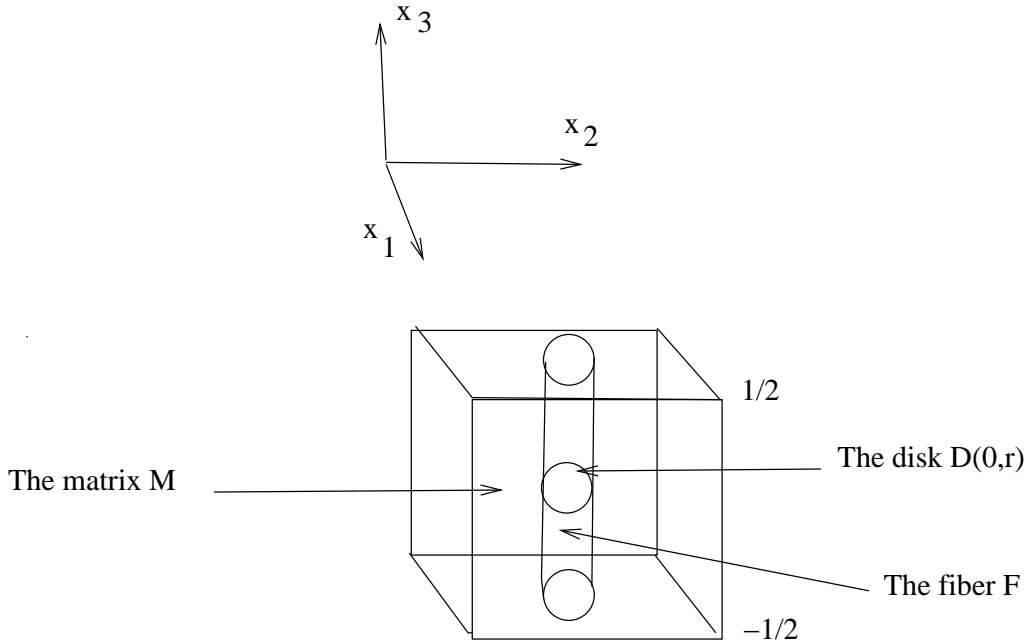


Fig.1. The representative cell P

Let I be the interval $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and let

$$Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2, \quad D = D(0, r), \quad (1.2)$$

be respectively the period end the disk centered at the origin and of radius r with some $0 < r < \frac{1}{2}$. We define the fiber F and the matrix M by $F = D(0, r) \times I$ and $M = (Y \setminus \bar{D}) \times I$; the reference cell is then parallelepiped $P + F \cup M$, see Fig. 1.

The reference configuration of the elastic medium is the cube $\Omega = \omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \omega \times I$, where ω is a square of \mathbb{R}^2 , for instance $\omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$. Assuming that the square ω is a partition of small squares ω_ε^i of size $\varepsilon > 0$, we define I_ε as the set

$$I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \omega_\varepsilon^i \in \omega\}. \quad (1.3)$$

The medium Ω is made up of two different materials: a set F_ε of parallel fibers of radius $r\varepsilon$, $0 < r < \frac{1}{2}$, periodically distributed in Ω with a period of size ε and a second material located in the set $M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon$ surrounding the fibers. More precisely, we define:

The disk D_ε^i , the fiber F_ε^i , the set F_ε of all the fibers contained in Ω , the cell Y_ε^i , the matrix M_ε^i and the set M_ε of all the matrices,

$$D_\varepsilon^i = \varepsilon D(0, r) + \varepsilon(i_1, i_2), \quad F_\varepsilon^i = D_\varepsilon^i \times I, \quad F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i. \quad (1.4)$$

$$Y_\varepsilon^i = \omega_\varepsilon^i \times I, \quad M_\varepsilon^i = Y_\varepsilon^i \setminus \bar{F}_\varepsilon^i, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} M_\varepsilon^i. \quad (1.5)$$

so that we can write:

$$\Omega = \bigcup_{i \in Y_\varepsilon^i} = F_\varepsilon \cup M_\varepsilon. \quad (1.6)$$

We assume Dirichlet boundary conditions on the upper and the lower faces of Ω respectively denoted by $\Omega_{\frac{1}{2}} = \omega \times \{\frac{1}{2}\}$ and $\Omega_{-\frac{1}{2}} = \omega \times \{-\frac{1}{2}\}$. More precisely, we set:

$$\begin{cases} \Omega = \omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \omega \times I, \\ \Gamma_0 = \Omega_{-\frac{1}{2}} \cup \Omega_{\frac{1}{2}}; \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

(0 stands for the homogeneous Dirichlet condition and N for the Neumann condition).

If $K = (K_1, K_2, K_3)$ is a vector in \mathbb{R}^3 , we denote by K' the vector $K' = (K_1, K_2)$ while K_3 denotes the last component of K .

The macroscopic variable will be denoted by $y = (y_1, y_2)$ (notice that there is no fast variable in the vertical direction) and we denote the generic point of \mathbb{R}^3 by $x = (x', x_3)$ where $x' = (x_1, x_2)$. The gradient of a function $t(x, y)$ with respect to x' will be denoted by $\nabla' t(x, y)$ while its gradient with respect to y will be denoted by $\nabla_t(x, y)$.

The characteristic function of a measurable set B will be denoted χ_B and its Lebesgue measure by $|B|$.

Let $A(x, y)$ be a 3×3 matrix satisfying the following assumptions: for almost all $x \in \Omega$ and for all $y \in Y$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^3$,

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad y \longrightarrow A_{ij}(x, y) \text{ is } Y\text{-periodic}, \quad (1.8)$$

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad A_{ij} \in L^\infty(\Omega; C_\#(Y)), \quad (1.9)$$

$$\exists m > 0, \quad A(x, y)\xi\xi \geq m|\xi|^2, \quad (1.10)$$

where $C_\#(Y)$ denotes the space of continuous Y -periodic functions on \mathbb{R}^2 .

Assume also

$$f \in L^2(\Omega). \quad (1.11)$$

The goal of this paper is to perform the asymptotic analysis of problem (1.11) as ε goes to zero in order to obtain the homogenized problem.

Let us define

$$H_D^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ on } \Gamma_0\}. \quad (1.12)$$

One can then write problem (1.1) in a variational form:

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in H_D^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) \nabla u^\varepsilon \nabla \phi(x) dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \\ \forall \phi \in H_D^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.13)$$

The existence and the uniqueness of solution u^ε of (1.13) for each $\varepsilon > 0$ immediately follow from the Lax-Milgram Theorem.

Our approach is similar to the one used previously in [9,10]: we use the two-scale convergence techniques, see [1,6-8] in order to get a preliminary version of the homogenized equation mixing both the microscopic and the macroscopic variables. In a second step, we derive the final version of the homogenized equation involving the macroscopic variable only. Note that the first version of the homogenized equation suggests also a corrector for the solution u^ε of (1.1).

We denote by $\mathcal{D}(K)$ the space of infinitely differentiable functions with compact support in the open set K and by $H_{\#}^1(Y)$ the space of functions in $H_{Loc}^1(\mathcal{R}^2)$ which are Y -periodic. Similarly, $C_{\#}(Y)$, (resp. $C_{\#}^\infty(Y)$) denotes the space of continuous (resp. infinitely differentiable) functions in \mathcal{R}^2 which are Y -periodic.

We denote by $H_0^1(I)$ the subspace of functions in the one dimensional Sobolev space $H^1(I)$ which vanish for $x_3 = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$;

The notation $H^1(D)/\mathcal{R}$ is used for the space of functions in $H^1(D)$ up to a constant with respect to y while $H_m^1(D)$ denotes the subspace of $H^1(D)$ of functions with zero average over D .

The following spaces will be helpful in the first formulation of the homogenized problem:

$$\mathcal{U} = \{u^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))), \quad u^0 = 0 \text{ in } \Omega \times D\}, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{U} = L^2(\Omega; H^1(D)/\mathcal{R}), \quad (1.15)$$

$$\mathcal{Z} = L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (1.16)$$

For the sake of brevity, we set:

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{Z}. \quad (1.17)$$

The paper is organized as follows: we state the main results in Sect. 2; in Sect.3 we prove some a priori estimates which will be used in Sect. 4 in order to prove the two-scale convergences (2.2)-(2.7) together with Theorem 2.1.

2 Statement of the results :

To give the homogenized problem, we first establish the following lemma which gives a first version of the homogenized equation involving both the microscopic and the macroscopic variable. For the convergence of the reader, we use the symbol \rightharpoonup : A sequence t^ε in $L^2(\Omega)$ two-scale converges to $t(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ ($t^\varepsilon \rightharpoonup t$) if and only if:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} t^{\varepsilon}(x) \phi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_Y t(x, y) \phi(x, y) dx dy, \quad \forall \phi \in L^2(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)).$$

Lemma 2.1 Assume (1.7)-(1.77). Let u^{ε} be the sequence of solution of (1.13).

There exists

$$(u^0, v, z) \in \mathcal{S}, \quad (2.1)$$

such that the following two-scale convergences hold true:

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla' u^{\varepsilon} \chi_{F_{\varepsilon}} \rightharpoonup \nabla_y v \chi_D(y), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_3} \chi_{F_{\varepsilon}} \rightharpoonup \frac{\partial z}{\partial x_3} \chi_D(y), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon \nabla' u^{\varepsilon} \chi_{M_{\varepsilon}} \rightharpoonup \nabla_y u^0 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_3} \chi_{M_{\varepsilon}} \rightharpoonup 0, \quad (2.5)$$

Furthermore, (u^0, v, z) is the unique solution of the problem:

$$\begin{cases} (u^0, v, z) \in \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega \times D} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy \\ + \int_{\Omega \times (Y \setminus D)} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y u^0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} dx dy \\ \int_{\Omega} \int_D f(x) \bar{u}(x, y) dx dy, \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Remark 2.1 The uniqueness of the solution of (2.6) implies that the above convergences hold true for the entire sequence u^{ε} .

The final form of the homogenized problem is given in the following Theorem.

Theorem 2.1 The sequence u^{ε} converge weakly in $L^2(\Omega)$ to the unique solution u of the problem:

$$\begin{cases} u(x) = f(x)m(x) \quad \text{in } \Omega, \quad \text{where } m(x) = \int_{Y \setminus D} \hat{u}(x, y) dy, \\ \text{and } \hat{u} \text{ is the unique solution of} \\ \hat{u} \in \mathcal{U} \cap L^{\infty}(\Omega; H^1(Y)), \\ \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \int_{Y \setminus D} A(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y_{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{Y \setminus D} \bar{u}(y) dy, \\ \forall \bar{u} \in \{ u \in H_{\#}^1(Y), \quad u = 0 \quad \text{in } D \}. \end{cases} \quad (2.7)$$

3 Apriori estimates

First, we define the following sequences in terms of the sequence u^{ε} of solution of (1.14).

$$u_f^{\varepsilon} = \frac{1}{\pi r^2} u^{\varepsilon}(x) \chi_{F_{\varepsilon}}(x'), \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} v^{\varepsilon}(x) = \sum_{i \in I_{\varepsilon}} v_i^{\varepsilon}(x) \chi_{D_{\varepsilon}^i}, \quad \text{where} \\ v_i^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} (u^{\varepsilon} - \frac{1}{|D_{\varepsilon}^i|} \int_{D_{\varepsilon}^i} u^{\varepsilon} dx'). \end{cases} \quad (3.2)$$

We shall prove the following apriori estimates, Throughout the paper, C denotes a positive constant the value of which may change from line to another.

Lemma 3.1 The sequence of solutions of (1.14) satisfies the following apriori estimates:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) dx \leq C, \quad (3.3)$$

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.4)$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.6)$$

$$\|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (3.7)$$

Proof Let us put

$$J_\varepsilon = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) dx. \quad (3.8)$$

By virtue of the Poincaré inequality, there exists a constant C such that:

$$\int_{D \times I} |\phi|^2 dy \leq C \int_{D \times I} |\nabla \phi|^2 dy, \quad \forall \phi \in H^1(D \times I), \quad \phi(y, -\frac{1}{2}) = \phi(y, \frac{1}{2}) = 0. \quad (3.9)$$

Due to the Dirichlet boundary condition satisfied by u^ε , we can apply inequality (3.9) with $\phi(y, x_3) = u^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$, so that using the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$ together with definition (1.4), we get for all $0 < \varepsilon \leq 1$:

$$\int_{F_\varepsilon^i} (u^\varepsilon)^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon^i} \left(\varepsilon^2 |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \right|^2 \right) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^i} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx. \quad (3.10)$$

Summing up over $i \in I_\varepsilon$ and dividing by ε^2 the last inequality, we get with the help of definition (1.4):

$$\int_{F_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (u^\varepsilon)^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon} \left(\varepsilon^2 |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \right|^2 \right) dx \leq C \int_{F_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C J_\varepsilon. \quad (3.11)$$

On the other hand, by virtue of the Poincaré-Wirtinger inequality, there exists a constant C such that:

$$\int_Y \left(\phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi dy \right)^2 dy \leq C \int_Y |\nabla'_y \phi|^2 dy, \quad \forall \phi \in H^1(Y). \quad (3.12)$$

Choosing in (3.12) $\phi(y, x_3) = u^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ for $y \in Y$ and using the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$, we get by virtue of the definition of ω_ε^i (see the first equality in (1.5)):

$$\int_{\omega_\varepsilon^i} \left| u^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx' \right|^2 dx' \leq C \int_{\omega_\varepsilon^i} \varepsilon^2 |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 dx'. \quad (3.13)$$

so that intergrating over I , summing up and recalling that $\Omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_\varepsilon^i = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i \times I$, we deduce with the help of (3.13):

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 \leq C \left(\sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^i} \left| u^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx' \right|^2 dx' + \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^i} \frac{1}{|D_\varepsilon^i|^2} \left(\int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx' \right)^2 dx \right) \\ \leq C \left(\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 dx + \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} |u^\varepsilon|^2 dx \right) \leq C J_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.14)$$

Therefore, taking $\phi = u^\varepsilon$ in (1.13), we get thanks to (3.14) and to hypothesis (1.10):

$$mJ_\varepsilon \leq \int_{\Omega} f u^\varepsilon dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{J_\varepsilon}, \quad (3.15)$$

in such a way that the following estimate obviously takes place:

$$J_\varepsilon \leq C. \quad (3.16)$$

Estimate (3.16) is nothing but estimate (3.3). Estimate (3.4) follows from (3.14) and (3.16). Estimate (3.5) is a consequence of (3.11) and (3.16). Estimate (3.6) is a consequence of (3.16) and the Poincaré inequality:

$$\|\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\varepsilon \nabla u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C J_\varepsilon. \quad (3.17)$$

It remains to prove estimate (3.7). To that aim, we use the following Poincaré-Wirtinger inequality: There exists a constant C such that

$$\left\| \phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi dy \right\|_{L^2(D)} \leq C \|\nabla_y \phi\|_{L^2(D)} \quad \forall \phi \in H^1(D). \quad (3.18)$$

Using once again the change of variable $\phi(y, x_3) = u^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ and integrating over I , we get from (3.18):

$$\int_{D_\varepsilon^i \times I} \left(u^\varepsilon(x', x_3) - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon(x', x_3) dx' \right)^2 dx' dx_3 \leq C\varepsilon^2 \int_{D_\varepsilon^i \times I} |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 dx' dx_3. \quad (3.19)$$

Since $\Omega = \omega \times I$ and $F_\varepsilon^i = D_\varepsilon^i \times I$, we deduce from (3.19)

$$\begin{cases} \int_{D_\varepsilon^i \times I} \left(u^\varepsilon(x', x_3) - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon(x', x_3) dx' \right)^2 \chi_{D_\varepsilon^i}(x') dx' dx_3 \\ \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla'_x u^\varepsilon|^2 dx' dx_3. \end{cases} \quad (3.20)$$

Hence using (3.16), we get estimate (3.7) after dividing (3.20) by ε^4 and then summing up with respect to $i \in I_\varepsilon$.

4 Proof of the results

Proof of lemma 2.1

It is well known (see[1]) that from estimates (3.3) and (3.4) one can deduce the existence of $u^0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ such that

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0(x, y) \quad \text{and} \quad \varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y u^0. \quad (4.1)$$

On the other hand, estimate (3.3) implies that the sequence $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \chi_{F_\varepsilon}$ is bounded in $L^2(\Omega)$ so that the sequence $\frac{1}{\varepsilon} u_f^\varepsilon$ where u_f^ε is defined by (3.1) is bounded in $L^2(\omega; H_0^1(I))$. Hence, one may find $z \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ and a subsequence of ε such that

$$\frac{1}{\varepsilon} u_f^\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{in} \quad L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (4.2)$$

From (4.2) we immediately obtain

$$u_f^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{strongly in} \quad L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (4.3)$$

so that passing to the limit in the equality

$$\int_{\Omega} u_f^\varepsilon(x) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) = \int_{\Omega} \frac{1}{\pi r^2} u^\varepsilon(x) \chi_{F_\varepsilon} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx. \quad (4.4)$$

where ϕ is any element of $\mathcal{D}(\Omega)$ and ψ is any element of $\mathcal{D}(D)$ (extended by Y -periodicity to the whole of \mathcal{R}^2), we get with the help of (4.3) and of the two-scale convergence $u^\varepsilon \chi_{F_\varepsilon}(x') = u^\varepsilon \chi_D\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup u^0(x, y) \chi_D(y)$ which is an immediate consequence of the first two-scale convergence in (4.1):

$$0 = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \chi_D(y) \phi(x) \psi(y) dx dy, \quad (4.5)$$

which implies that

$$u^0(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.6)$$

Therefore we have proved that

$$u^0 \in \mathcal{U}. \quad (4.7)$$

Convergence (2.4) follows immediately from (4.1). To get convergence (2.5) it is sufficient to use estimate (3.4) and then to pass to the limit in the following equality

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(x) \chi_{M_\varepsilon} \phi\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} \varepsilon u^\varepsilon \chi_{M_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

for all test function ϕ .

The proof of convergence (2.2) relies on the estimates (3.7) and (3.3) from which we deduce

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla' u^\varepsilon| \chi_{F_\varepsilon}^2 dx \leq C. \quad (4.9)$$

From (3.7) we get the existence of a function $v \in L^2(\Omega \times Y)$ such that $v^\varepsilon \rightharpoonup v \chi_D(y)$ while estimate (3.9) implies existence of a vectorial function $K = (K_1, K_2) \in (L^2(\Omega \times Y))^2$ such that $\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla' u^\varepsilon \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup K \chi_D(y)$. Bearing in mind the definition (3.2) of v^ε and taking a test function in the form $\phi(x) \psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$, ψ being extended by periodicity to the whole of \mathcal{R}^2 we get with the help of an integration by parts in each small disk D_ε^i (note that ψ vanishes on the boundary of D_ε^i as a Y -periodic function which vanishes on the boundary of the generic disk D):

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F_\varepsilon} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(u^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx' \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ = - \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \frac{1}{\varepsilon} \left(u^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u^\varepsilon dx' \right) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) dx \\ = - \int_{\Omega} \left(\varepsilon v^\varepsilon \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + v^\varepsilon \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) dx. \end{cases} \quad (4.10)$$

Passing to the limit, we easily obtain with the help of the previous covergences:

$$\int_{\Omega} \int_D K_\alpha(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy = - \int_{\Omega} \int_D v(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}(y) dx dy. \quad (4.11)$$

Since by definition K_α belongs to $L^2(\Omega \times D)$, the last equality clearly shows that $v \in L^2(\Omega; H^1(D))$ and that $K_\alpha(x, y) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\alpha}(x, y)$. Note that since v arises only through its gradient with respect to y , one can

assume without loss of generality that v is defined up to a constant with respect to y or equivalently its average over D is equal to zero.

We now prove convergence (2.3) in a similar way. Since the sequence $\frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon\chi_{F^\varepsilon}$ is bounded in $L^2(\Omega)$, we can find $\bar{z}(x, y) \in L^2(\Omega \times D)$ such that up to a subsequence, $\frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon\chi_{F^\varepsilon} \rightharpoonup \bar{z}\chi_D(y)$ so that using the same kind of test function as in the proof of convergence (2.2), we get thanks to an integration by parts:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F^\varepsilon} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx &= - \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ &= - \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) dx. \end{aligned} \right. \quad (4.12)$$

so that multiplying by ε , we deduce the equality

$$\varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F^\varepsilon} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} \left(u^\varepsilon \chi_{F^\varepsilon} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \phi \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon \chi_{F^\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) dx. \quad (4.13)$$

Bearing in mind that $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F^\varepsilon}$ is bounded in $L^2(\Omega)$, we get by passing to the limit in (4.13) as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 = \int_{\Omega} \int_D \bar{z}(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}(y) dx dy, \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (4.14)$$

Equality (4.14) holds true for arbitrary $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\psi \in \mathcal{D}(D)$. This means that \bar{z} does not depend upon the variable $y \in D$ and since the sequence $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F^\varepsilon}$ converges weakly in $L^2(\omega; H_0^1(I))$ to $\pi r^2 z$ by virtue of (4.2), we deduce that $\bar{z} = z$.

Convergence (2.3) is then an easy consequence of the two-scale convergence $\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \chi_{F^\varepsilon} \rightharpoonup z(x) \chi_D(y)$ since there is no fast variable in the x_3 -direction.

Before we proceed to finish the proof of lemma 2.1 by giving the homogenized problem, let us remark that the previous two-scale convergences suggest the form of the test functions we have to choose in Eq. (1.13) in order to pass to the limit. Indeed, in view of the two-scale limits obtained above, we are led test function which are sufficiently regular and behave like $\bar{u}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon \bar{z}(x) + \varepsilon^2 \bar{v}(x, \frac{x'}{\varepsilon})$. However, such test functions would lead to terms involving $\nabla_x' \bar{z}(x)$ which doesn't appear in any of the above two-scale limits. Actually, such terms do not arise in the limit problem as we shall prove it. The proof of that result relies on the following lemma.

Lemma 4.1 The two-scale limit $\sigma(x, y) \in (L^2(\Omega \times Y))^2$ of the sequence $\frac{1}{\varepsilon} [A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon]' \chi_{F^\varepsilon}$ (see the notations defined just after (1.7)) satisfies the following property.

$$\int_D \sigma(x, y) dy = 0. \quad (4.15)$$

Proof

Let us remark that one can check easily by the use of the regularity hypothesis (1.9) on the matrix A together with (2.2) and (2.3) that the two-scale limit $\sigma(x, y)$ is actually given by $[A(x, y) \left(\frac{\nabla^y v}{\frac{\partial z}{\partial x_3}} \right)]' \chi_D(y)$

The existence of the two-scale limit $\sigma \in (L^2(\Omega \times Y))^2$ is a consequence of the estimate (3.3) and of the hypothesis (1.9). Taking a test function in the form $\varepsilon^2 \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon})$ where $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and where $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ is such that $\forall \alpha = 1, 2, \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = 1$ in D , we get after passing to the limit

$$\int_{\omega} \int_D \sigma_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy \phi(x) dx = \int_{\omega} \int_D \sigma dy \phi(x) dx dy = 0, \forall \alpha = 1, 2.$$

From which we get easily the desired property, since ϕ is arbitrarily chosen in $\mathcal{D}(\Omega)$.

We are now in position to end the proof of Lemma 2.1.

End of the proof of Lemma 2.1

Let ϕ be a test function in the form $\phi(x) = \bar{u}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon \bar{z}(x) + \varepsilon^2 \bar{v}(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ where $\bar{u}^0(x, y) \in \{u \in \mathcal{D}(\Omega; H_{\#}^1(Y)), u = 0 \text{ in } \Omega \times D\}$, $\bar{z} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\bar{v} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{D}(\bar{D}))$. Extend $\bar{u}^0(x, \cdot)$ and $\bar{u}^0(x, \cdot)$ by Y -periodicity to the whole of \mathcal{R}^2 . Using such test function in Eq. (1.3), we get

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left([A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \frac{1}{\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \chi_{F^\varepsilon}]' (\nabla'_x \bar{z} + \varepsilon \nabla'_x \bar{v} + \nabla'_y \bar{v}) + [A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \frac{1}{\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \chi_{F^\varepsilon}]_3 \right. \\ & \left. (\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3}) [A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \varepsilon \nabla u^\varepsilon \chi_{M^\varepsilon}]' (\varepsilon \nabla'_x \bar{u}^0 + \nabla'_y \bar{u}^0 + \varepsilon^2 \nabla'_x \bar{z} + \varepsilon^3 \nabla'_x \bar{v} + \varepsilon^2 \nabla'_y \bar{v}) \right. \\ & \left. + [A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \varepsilon \nabla u^\varepsilon \chi_{M^\varepsilon}]_3 (\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3} + \varepsilon^3 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3}) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) (\bar{u}^0 + \varepsilon \bar{z}(x) + \varepsilon^2 \bar{v}) dx. \end{aligned} \right. \quad (4.16)$$

Denoting by A^t the transpose of the matrix A , hypothesis (1.9) allows us to consider terms such as $[A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \left(\nabla'_x \bar{z} + \varepsilon \nabla'_x \bar{v} + \nabla'_y \bar{v} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \right)]'$ as admissible test function in two-scale convergence (see [1]) so that using convergence (2.2)-(2.5) and Lemma 4.1, we immediately obtain the limit problem (2.6) first for regular test functions and then for test functions in \mathcal{S} by the use of a density argument. Note that the existence and the uniqueness of the solution of (2.6) may be obtained directly by the use of the Lax-Milgram Theorem in the Hilbert space \mathcal{S} equipped with the norm $\|(u^0, v, z)\|^2 = \|\nabla_y v\|_{(L^2(\Omega \times D))^2}^2 + \|\frac{\partial z}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega \times \mathcal{Y})}^2 + \|\nabla_y u^0\|_{(L^2(\Omega \times (Y \setminus D)))^2}^2$. This completes the proof of Lemma 2.1.

We now give the final form of the homogenized problem by proving Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2.1

Choosing $\bar{u} = 0$ in (2.6), we get

$$\left\{ \begin{aligned} & (v, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Z}, \\ & \int_{\Omega \times D} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla'_y v \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{v} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy = 0, \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Z}. \end{aligned} \right. \quad (4.17)$$

Taking $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$ in (4.17) and taking into account the coerciveness of the matrix A , we deduce easily from (4.17) that $(u, v) = 0$.

On the other hand, it is easy to check that u^0 which is the unique solution of the equation (take $(\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0)$ in (2.6))

$$\left\{ \begin{aligned} & u^0 \in \mathcal{U}, \\ & \int_{\Omega \times (Y \setminus D)} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla'_y u^0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} dx dy \\ & = \int_{\Omega} \int_Y f(x) \bar{u}(x, y) dx dy, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{U}. \end{aligned} \right. \quad (4.18)$$

may be written as $u^0(x, y) = f(x) \hat{u}(x, y)$ where \hat{u} is the unique solution of the elementary problem

$$\left\{ \begin{aligned} & \hat{u} \in \mathcal{U} \cap L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)), \\ & \int_{(Y \setminus D)} A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla'_y \hat{u} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla'_y \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix} dy \int_Y \bar{u} dy, \quad \forall \bar{u} \in \{u \in H_{\#}^1(Y), u = 0 \text{ in } D\}. \end{aligned} \right. \quad (4.19)$$

To prove the existence and the uniqueness of \hat{u} , it suffices to apply the Lax-Milgram Theorem in the space $\{u \in H_{\#}^1(Y), u = 0 \text{ in } D\}$ endowed by the norm $\|u\| = \|\nabla_y u\|_{(L^2(Y \setminus D))^2}$. On the other hand, due to hypothesis (1.9), one can check that \hat{u} actually belongs to $L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y))$. Furthermore, it is

well known that the weak limit u in $L^2(\Omega)$ of u^ε is given by $u(x) = \int_Y u^0(x, y) dy = \int_{Y \setminus D} u^0(x, y) dy$. Using the above expression of u^0 , we deduce

$$u(x) = f(x) \int_{Y \setminus D} \hat{u}(y) dy = f(x)m(x), \quad (4.20)$$

so that the homogenized problem may be formulated as in Theorem 2.1.

References

- [1] Allaire, A.: Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**(6), 1482-1518 (1992)
- [2] Braides, A., Briane, M., Casado-Diaz, J.: Homogenization of non-uniformly bounded periodic diffusion energies in dimension two. *Nonlinearity* **22**(6), 1459-1480(2009)
- [3] Briane, M., Casado-Diaz, J.: Uniforme convergence of sequences of solutions of two-dimensional linear elliptic equations with unbounded coefficients. *J. Diff. Equ.* **845**(8), 2038-2054(2008)
- [4] Camar-Eddine, M., Seppecher, S.: Closure of the set of diffusion functionals with respect to the Mosco-convergence. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **12**(8), 1153-1176(2002)
- [5] Charef, H., Sili, A.: The effective equilibrium law for a highly heterogeneous elastic periodic medium (to appear)
- [6] CIORANESCU, D., DAMLAMIAN, A., GRISO, G.: The periodic unfolding method in homogenization. *SIAM J. Math. Anal.* **40**, 1585-1620 (2008)
- [7] Lukkassen, D., Nguetseng, G., Nnang, H., Wall, P.: Reiterated homogenization of nonlinear monotone operators in a general deterministic setting. *J. Funct. Spaces Appl.* **7**(2), 121-152(2009)
- [8] Nguetseng, G.: A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.* **20**, 608-629 (1989)
- [9] Sili, A.: A diffusion equation through a highly heterogeneous medium, *Appl. Anal.* **89**, 893-904 (2010)
- [10] Sili, A.: Homogenization of a nonlinear monotone problem in an anisotropic medium, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **14**(3), 329-353(2004)
- [11] Tartar, L.: The general theory of homogenization. A personalized introduction. *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, 7. Springer/UMI, Berlin/Bologna(2009)

CHAPITRE 2

LA LOI D'ÉQUILIBRE EFFECTIVE POUR UN MILIEU ÉLASTIQUE
PÉRIODIQUE FORTEMENT HÉTÉROGÈNE

(Proceedings of the Royal society of Edimburgh (2013))

The effective equilibrium law for a highly heterogeneous elastic periodic medium

HAMID CHAREF and ALI SILI

Département de mathématiques, Université du Sud Toulon - Var, B.P 20132, 83957 La Garde cedex, France, email : sili@univ-tln.fr

Abstract

We study the homogenization of the linearized system of elasticity standing for the equilibrium equation of a highly periodic heterogeneous elastic medium submitted to small deformations and made of two different materials: a very rigid material located in a set F_ε (ε being the size of the period of the medium) of vertical fibers surrounded by another soft elastic material localized in the set M_ε . The ratio between the coefficients of the elasticity tensor of the two materials is assumed to be $\frac{1}{\varepsilon^4}$. We deal with the general case without any special assumption on the material such as isotropy.

Key words : Homogenization, anisotropic material, elasticity, fibers

AMS classification : 35B27, 35B40, 74Q05

1. Introduction

This paper is devoted to the study of the homogenization problem of an elastic highly heterogeneous medium submitted to exterior forces. We restrict ourselves to the case of small displacements for which the equilibrium equation is nothing but the linearized system of elasticity. Such problem was intensively studied by many authors in the recent years under various assumptions and in various geometrical contexts, see references [2]-[6] and [13]-[18]. However, in the most papers listed above at least when the geometry of the medium is similar to the one we consider here, assumptions on the symmetry of the elasticity tensor are made. Such is the case for instance in reference [2] where the same problem as our was addressed with exactly the same geometry but the study was restricted to isotropic heterogeneous materials.

The main goal of the present work is to handle with general heterogeneous medium including anisotropic ones. As usual in that framework, supplementary difficulties appear in the homogenization process which leads in general to more complicated effective elasticity coefficients. Due to the choice of our scales which favour the microscopic displacements inside the fibers, it is natural to expect at the limit an effective law giving rise uppermost to the global displacements in the fibers. For this reason the anisotropy of the soft material (the matrix) surrounding the fibers doesn't play any special role except for the effective elasticity coefficients which involve the average of the entirety of the elasticity coefficients including those of the type $A_{\alpha 333}$ or $A_{\alpha 3\gamma\delta}$ ($\alpha, \gamma, \delta \in \{1, 2\}$) which vanish in case of orthotropic materials. In particular, the choice of the boundary conditions doesn't have any impact on the effective elasticity coefficients for the part of the energy outside the fibers. On the contrary, the boundary conditions play a crucial role in the description of the macroscopic displacements in case of anisotropic fibers. We show here that the full anisotropy requires the introduction of a new vectorial variable $v = (-c(x)y_2, c(x)y_1, v_3(x, y))$ (y is the microscopic variable) which, roughly speaking, debriefs about the coupling between the flexion and the torsion in the fibers, $c(x)$ being the angle of the torsion.

Furthermore, we show that the impact of that coupling on the effective law in the case of a body clamped on both of its two opposite (with respect to the vertical direction x_3) faces considerably differs from the case of a single clamped face; the effective equilibrium equation derived in the first case involves nonstandard terms inherited from the zero average of the part of the gradient of the displacements u^ε corresponding to the vertical direction x_3 which requires that c keeps the same vanishing property; in the case of a body with a single clamped face, the latter is not required so that the nonstandard terms do not appear in the homogenized equation.

Let us point out that the coupling variable $v(x, y)$ is not due to the homogenization process itself but rather to the local dimension reduction $3d - 1d$ to which the fibers are subjected. Indeed, when one

consider solely a $3d - 1d$ reduction dimension problem in a single fiber (a cylinder) a coupling variable $v(x) = (-c(x_3)x_2, c(x_3)x_1, v_3(x))$ due to the full anisotropy of the cylinder appears in the limit problem corresponding to the one-dimensional model as shown in [11]. Hence, it is then natural to expect such coupling when homogenizing anisotropic medium where the main material is located in the fibers as here and the present work shows that the coupling variable $v = (-c(x)y_2, c(x)y_1, v_3(x, y))$ appears as a consequence of the effect of the anisotropy on the reduction of the dimension $3d - 1d$ at the microscopic level.

Let us emphasize that the choice of the ratio between the elasticity coefficients of the two materials plays a key role in the form of the homogenized problem; for instance, one can choose a ratio for which the anisotropy of the fibers does not play a decisive role in the effective law as noticed in [19] for the conductivity problem.

The choice of the ratio is also a decisive factor as regards to the nonlocal nature of the limit problem as well as to the increasing of the differential order of the energy at the macroscopic scale as already pointed out in the isotropic case both in [2] and in [14]. For instance, there were nonlocal effects in the problem addressed in [14] due to the assumption that the radius r_ε of the fibers is very small compared to the size ε of the period. Since we have chosen the same scales as those of [2], we shall of course recover here the nonlocal effect together with the increase of the differential order of the energy already obtained there in the heterogeneous isotropic setting.

To give rise to the effect of the anisotropy in the effective elastic law, our argument relies on a special partial Korn inequality used also in [9] in order to obtain error estimates in the $3d - 1d$ reduction dimension in linear elasticity. The proof of that inequality will be reproduced in the appendix for the reader's convenience. We shall use two-scale convergence techniques, see [1], [12] and [7].

Before going on further description and comments on the limit problem, let us make more precise the notations and the geometry of the medium.

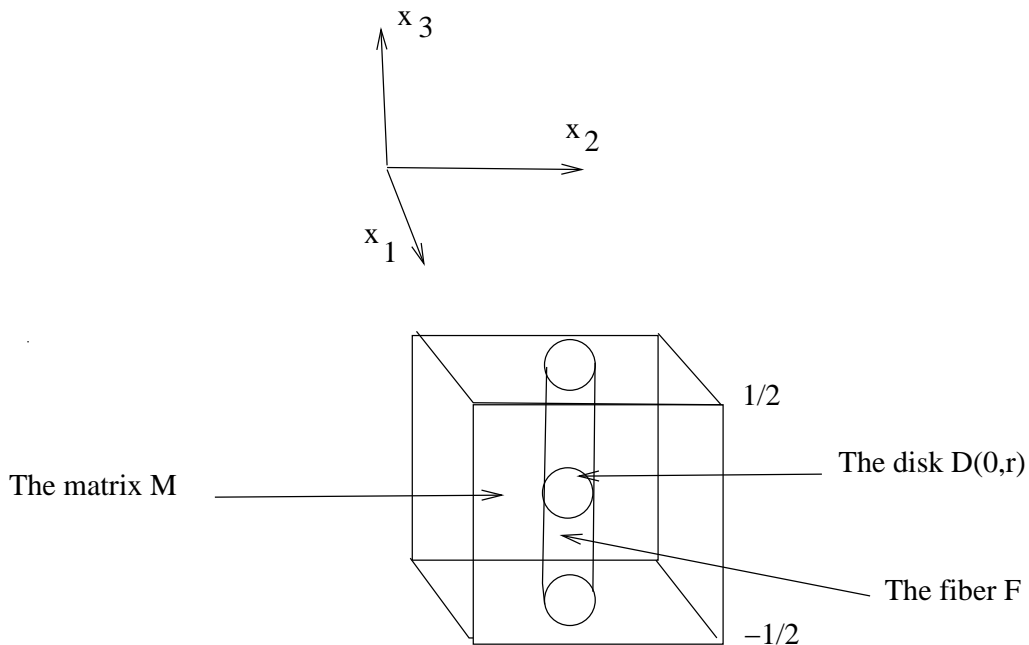


Fig.1. The representative cell P

The representative cell P of the medium can be described as follows:
Let I be the intervall $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and let

$$Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2, \quad D = D(0, r), \quad (1.1)$$

be respectively the period and the disk centered at the origin and of radius r with some $0 < r < \frac{1}{2}$. The fiber F and the matrix M are defined by $F = D(0, r) \times I$ and $M = (Y \setminus \bar{D}) \times I$ so that the reference cell is the parallelepiped $P = F \cup M$, see Fig.1.

We assume that the reference configuration of the elastic medium is the cube $\Omega = \omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \omega \times I$, where ω is a square of \mathbb{R}^2 , for instance $\omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$. We assume that the square ω is a partition of small squares ω_ε^i of size $\varepsilon > 0$ and we define I_ε as the set

$$I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \omega_\varepsilon^i \subset \omega.\} \quad (1.2)$$

The medium Ω contains two different elastic materials: a set F_ε of parallel fibers of radius $r\varepsilon$, $0 < r < \frac{1}{2}$, periodically distributed in Ω with a period of size ε and a second material located in the set $M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon$ surrounding the fibers. More precisely, we define:

The disk D_ε^i , the fiber F_ε^i , the set F_ε of all the fibers contained in Ω , the cell Y_ε^i , the matrix M_ε^i and the set of all the matrices M_ε ,

$$D_\varepsilon^i = \varepsilon D(0, r) + \varepsilon(i_1, i_2), \quad F_\varepsilon^i = D_\varepsilon^i \times I, \quad F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i. \quad (1.3)$$

$$Y_\varepsilon^i = \omega_\varepsilon^i \times I, \quad M_\varepsilon^i = Y_\varepsilon^i \setminus \bar{F}_\varepsilon^i, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} M_\varepsilon^i, \quad (1.4)$$

so that we can write:

$$\Omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_\varepsilon^i = F_\varepsilon \cup M_\varepsilon. \quad (1.5)$$

We assume that only density forces act on the medium and we take Dirichlet boundary conditions on the upper and the lower faces of Ω respectively denoted by $\Omega_{\frac{1}{2}} = \omega \times \{\frac{1}{2}\}$ and $\Omega_{-\frac{1}{2}} = \omega \times \{-\frac{1}{2}\}$. More precisely, we set :

$$\begin{cases} \Omega = \omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \omega \times I, \\ \Gamma_0 = \Omega_{-\frac{1}{2}} \cup \Omega_{\frac{1}{2}}; \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

(0 stands for the homogeneous Dirichlet condition and N for the Neumann condition).

The fast variable will be denoted by $y = (y_1, y_2)$ (notice that there is no fast variable in the vertical direction) and we denote the generic point of \mathbb{R}^3 by $x = (x', x_3)$ where $x' = (x_1, x_2)$. Throughout the paper Latin indices i, j, k, l, \dots run over the set $\{1, 2, 3\}$ and Greek indices α, β, \dots (except ε which takes its values in a decreasing sequence of positive numbers) run over the set $\{1, 2\}$.

The Einstein summation convention with repeated indices will be used unless otherwise stated.

The characteristic function of a set B will be denoted by χ_B and its Lebesgue measure by $|B|$.

Let A be a fourth order tensor with coefficients A_{ijkl} satisfying the following hypotheses : for almost all $(x, y) \in \Omega \times Y$, for all $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ and for all symmetric 2×2 tensor $e = (e_{ij})$,

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad (1.7)$$

$$y \rightarrow A_{ijkl}(x, y) \text{ is } Y - \text{ periodic}, \quad (1.8)$$

$$A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega; C_\#(Y)), \quad (1.9)$$

$$\exists m > 0, \quad A_{ijkl}(x, y)e_{kl}e_{ij} \geq me_{ij}e_{ij}, \quad (1.10)$$

where $C_\#(Y)$ denotes the space of continuous Y -periodic functions on \mathbb{R}^2 .

Given

$$f \in (L^2(\Omega))^3, \quad (1.11)$$

we consider the following equilibrium equation for the heterogeneous elastic medium described above subjected to small deformations:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) A \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) e(u^\varepsilon) \right) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ A \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) e(u^\varepsilon) n = 0 & \text{on } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.12)$$

where $e(u^\varepsilon)$ denotes the strain tensor and n the outer normal to Ω .

Our goal is to homogenize system (1.12) by describing the asymptotic behaviour of the solution u^ε of (1.12) when ε tends to zero. The corresponding limit problem or the so-called homogenized problem will modelize the macroscopic properties of the medium.

Setting,

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{ \phi \in H^1(\Omega) : \phi = 0 \text{ on } \Gamma_0 \}, \quad V = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3, \quad (1.13)$$

problem (1.12) may be written in a variational form:

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in V, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} A \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} A \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) e(u^\varepsilon) e(\phi)(x) dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \\ \forall \phi \in V. \end{cases} \quad (1.14).$$

Under hypotheses (1.7)-(1.11), we get easily for each fixed $\varepsilon > 0$, the existence and the uniqueness of the solution u^ε of (1.14) by the use of the Lax-Milgram Theorem.

The natural sequence associated to the energy by (1.14) is equivalent by virtue of the above hypotheses on A to

$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon)|^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) dx$. This sequence is shown to be uniformly bounded with respect to ε thanks to the specific geometry of the medium together with the boundary conditions more precisely, we have to assume homogeneous Dirichlet condition at least on one of the two faces $\Omega_{-\frac{1}{2}}$ or $\Omega_{\frac{1}{2}}$. The

same calculations allow us to prove that the sequence u_ε is bounded in the $(L^2(\Omega))^3$ -norm, see estimates (3.19) and (3.21) below. However, the latter apriori estimate is not sufficient to characterize all the components of the homogenized tensor. Actually, it turns out to be necessary to use a more intricate argument in order to characterize all the limits we need to describe the effective properties for general heterogeneous materials including anisotropic ones. The main difficulty relies on the limit of the two sequences $\frac{1}{\varepsilon}\chi_{F_\varepsilon}e_{\alpha 3}(u_\varepsilon)$ for $\alpha = 1, 2$. As already seen in the simple case of the reduction dimension problem, see [11], the limit of such sequences do not vanish for anisotropic materials and they give rise to the new variable $v(x, y)$ pointed out above.

The variable v turns out to be zero as soon as the fibers are made up of orthotropic materials which present a symmetry leading to have some coefficients of the elasticity tensor A to be equal to zero; more precisely, for such materials (including isotropic ones) one has

$$A_{\alpha 3 \gamma \delta} = A_{\alpha 333} = 0, \quad \forall \alpha, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (1.16)$$

The homogenized problem involves the displacements $z = (z_1, z_2)$ of the fibers. The component z_3 reduces to zero due to the chosen scaling which allows us to prove via the Korn's inequality that the sequence $\frac{1}{\varepsilon}u_3^\varepsilon\chi_{F_\varepsilon}$ is bounded in $L^2(\Omega)$ so that $u_3^\varepsilon\chi_{F_\varepsilon}$ strongly converges to zero in $L^2(\Omega)$.

Of course, the nonlocal nature of the homogenized problem already pointed out in [2] still holds true in our context; this nonlocality is illustrated by the gap between the displacements z of the fibers and the average u of the local displacements of the soft material surrounding them; for more details see Remark 2.2 below.

Our approach is completely variational and we shall take advantage from the linear character of the problem to give the so-called corrector for the microscopic displacements u^ε ; this corrector arises naturally through the first formulation of the limit problem (Theorem 2.2) which combines the microscopic variable y with the macroscopic one x . Making use of the linearity, the first formulation of the homogenized problem will be transformed into a form involving only the macroscopic variable x . This will be done by introducing some elementary problems (Theorem 2.3) allowing us to eliminate the microscopic variable y so that we are led to the final form of the homogenized problem (Theorem 2.4).

The first formulation given by Theorem 2.1 also provides a corrector result for the displacements u^ε ; this point is discussed in Remark 4.1.

Throughout the paper, we use the notation x^R, y^R, i^R for the point obtained respectively from x, y and i by a rotation of angle $\frac{\pi}{2}$ in the transversal plane; hence $x^R = (-x_2, x_1)$, $y^R = (-y_2, y_1)$, $i^R = (-i_2, i_1)$ if $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2)$ and $i = (i_1, i_2)$.

Similarly, for each $\varepsilon > 0$ and for each $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2$, we set : $x_i^{\varepsilon R} = \frac{x^R}{\varepsilon} - i^R$ so that $x_{i_\alpha}^{\varepsilon R} = \frac{x_\alpha^R}{\varepsilon} - i_\alpha^R$, $\forall \alpha = 1, 2$.

Due to the geometry we consider here, the macroscopic variable y_3 never arises throughout the paper; The following components of the strain tensor $e(\phi)$ are the only ones we shall use throughout the paper:

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^y(\phi)(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial\phi_\beta}{\partial y_\alpha}\right)(x, y) \\ e_{\alpha 3}(\phi)(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial\phi_3}{\partial y_\alpha}\right)(x, y), \\ e_{33}(\phi)(x, y) = \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3}(x, y) \end{cases}$$

In order to bear in mind that the derivatives are taken with respect to the variable y , we keep the subscript y in $e_{\alpha\beta}^y$ even there is no bidimensional displacement at the macroscopic level throughout the paper.

For the sake of brevity, we also use the notation $e(\phi) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\phi) & e_{\alpha 3}(\phi) \\ e_{\alpha 3}(\phi) & e_{33}(\phi) \end{pmatrix}$, while a vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ will be denoted by (u_α, u_3) where the subscript α is understood to be an element of $\{1, 2\}$.

If A denotes a fourth order tensor then the product of the 2×2 tensors $Ae(\phi)$ and $e(\psi)$ defined by $Ae(\phi) e(\psi) := \sum_{i,j} (Ae(\phi))_{ij} (e_{ij}(\psi))$ will be also briefly denoted as:

$$Ae(\phi) e(\psi) = A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\phi) & e_{\alpha 3}(\phi) \\ e_{\alpha 3}(\phi) & e_{33}(\phi) \end{pmatrix} e(\psi) = A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\phi) & e_{\alpha 3}(\phi) \\ e_{\alpha 3}(\phi) & e_{33}(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\psi) & e_{\alpha 3}(\psi) \\ e_{\alpha 3}(\psi) & e_{33}(\psi) \end{pmatrix}.$$

We denote by $\mathcal{D}(K)$ the space of infinitely differentiable functions with compact support in the open set K and by $H_{\#}^1(Y)$ the space of functions in $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ which are Y -periodic. Similarly, $C_{\#}(Y)$, (resp. $C_{\#}^\infty(Y)$) denotes the space of continuous (resp. infinitely differentiable) functions in \mathbb{R}^2 which are Y -periodic.

We denote by $H_0^1(I)$ the subspace of functions in the one dimensional Sobolev space $H^1(I)$ which vanish for $x_3 \in \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$; the space $H_0^2(I)$ denotes the subspace of $H_0^1(I)$ of functions with derivative in $H_0^1(I)$.

The notation $H^1(D)/\mathbb{R}$ is used for the spaces of functions in $H^1(D)$ defined up to a constant with respect to y while $H_m^1(D)$ denotes the subspace of $H^1(D)$ of functions with zero average over D .

The following spaces will be helpful in the first formulation of the homogenized problem:

$$\mathcal{U}^0 = \{u^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))^3, \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad u_i^0 = 0 \text{ in } \Omega \times D\}, \quad (1.21)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{V} = \{v(x, y) = (v_\alpha(x, y), v_3(x, y)), \quad v_3 \in L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}), \\ & \exists c \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad v_\alpha(x, y) = c(x)y_\alpha^R \text{ in } \Omega \times D\}, \end{aligned} \right. \quad (1.22)$$

$$\mathcal{W} = \{w(x, y) = (w_\alpha(x, y), 0) : w_\alpha \in L^2(\Omega; H_m^1(D)), \int_D (y_1 w_2 - y_2 w_1) dy = 0, \text{ a.e. in } \Omega\}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{W}_0 = \{w = (w_1, w_2, 0) : w_\alpha \in H_m^1(D), \int_D (y_1 w_2 - y_2 w_1) dy = 0\}, \quad (1.23')$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{Z} = \{z(x, y) = (z_\alpha(x), Z_3(x, y)) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega \times D; H_0^1(I)) : \\ & \exists z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad Z_3(x, y) = -y_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}(x) + z_3(x) \text{ in } \Omega \times D\}. \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

For the sake of brevity, we set:

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}. \quad (1.25)$$

We shall use the two-scale convergence technique (see [1], [12]) which seems a good tool for homogenization problems in the periodic setting. For the definition and the main compactness result we refer to [1].

The paper is organized as follows: we state the main results in section 2; in section 3 we prove some a priori estimates which will be used in section 4 in order to prove the two-scale convergences (2.2)-(2.7). We prove Theorems 2.1-2.4 in section 5. Finally an appendix is devoted to the proof of the partial Korn inequality (3.23).

2. Statement of the results

The following theorem which involves the microscopic variable y together with the macroscopic one x is the first version of the homogenized problem. The two-scale convergence will be denoted with the symbol \rightharpoonup .

Theorem 2.1

Assume (1.7)-(1.11). Let u^ε be the sequence of solutions of (1.14).

Then

$$\begin{cases} \text{there exists } (u^0, v, w, z) \in \mathcal{S} \text{ such that :} \\ u_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup z_\alpha + u_\alpha^0, (\alpha = 1, 2), u_3^\varepsilon \rightharpoonup u_3^0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Moreover, for all $\alpha, \beta = 1, 2$, the following convergences hold true :

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w) \chi_D(y), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \chi_D(y), \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{33}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \chi_D(y), \quad (2.4)$$

$$\varepsilon e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(u^0) \chi_{(Y \setminus D)}(y), \quad (2.5)$$

$$\varepsilon e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} \chi_{(Y \setminus D)}(y), \quad (2.6)$$

$$\varepsilon e_{33}(u^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup 0. \quad (2.7)$$

Furthermore, (u^0, v, w, z) is the unique solution of the problem :

$$\begin{cases} (u^0, v, w, z) \in \mathcal{S}, \\ \int_{\Omega \times D} A \left(\begin{array}{cc} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \end{array} \right) dx dy \\ + \int_{\Omega \times (Y \setminus D)} A \left(\begin{array}{cc} e_{\alpha\beta}^y(u^0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{array} \right) dx dy \\ = \int_{\Omega} \int_Y (f_\alpha(x)(\bar{u}_\alpha(x, y) + \bar{z}_\alpha(x)) + f_3(x)\bar{u}_3(x, y)) dx dy, \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Remark 2.1

The uniqueness of the solution of (2.8) implies that the entire sequence u^ε satisfies the above convergences.

Note also that the previous Theorem provides a corrector result which loosely speaking means that an asymptotic expansion of u^ε may be obtained in terms of the limits u^0, v, w and Z . We give more details in this direction in Remark 4.1 below.

Defining $u \in (L^2(\Omega))^3$ as the weak limit in $(L^2(\Omega))^3$ (see Lemma 4.1 below) of u^ε , Theorem 2.1 may be written in the following form which is the first step towards the final form of the homogenized problem.

Theorem 2.2

Let $(u^0, v, w, z) \in \mathcal{S}$ be the solution of (2.8) and let $e_i, i = 1, 2, 3$ be the canonical basis of \mathbb{R}^3 . Then the sequence u^ε converges weakly in $(L^2(\Omega))^3$ to $u := (z_\alpha(x) + \int_{Y \setminus D} u_\alpha^0 dy, \int_{Y \setminus D} u_3^0 dy)$ and (u, v, w, z) is the unique solution of the problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} (v, w, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega} f_\alpha(x) \bar{z}_\alpha(x) dx \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}, \\ u_\alpha - z_\alpha = f_i(x) m_\alpha^{(i)}(x) \quad u_3(x) = f_i(x) m_3^{(i)}(x) \quad \text{in } \Omega, \\ \text{where for all } i, j = 1, 2, 3, m_j^{(i)}(x) = \int_{Y \setminus D} u_j^{(i)}(x, y) dy \text{ and } u^{(i)} \text{ is the unique solution of} \\ u^{(i)} \in \mathcal{U}^0 \cap (L^\infty(\Omega; H^1(Y)))^3, \\ \text{a.e. } x \in \Omega, \int_{Y \setminus D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^{(i)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^{(i)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^{(i)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy \\ = \int_{Y \setminus D} e_i \bar{u} dy, \quad \forall \bar{u} \in \{u \in (H_{\#}^1(Y))^3, u = 0 \text{ in } D\}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Remark 2.2

Let us note that the equations $u_\alpha - z_\alpha = f_i(x) m_\alpha^{(i)}(x)$, $u_3(x) = f_i(x) m_3^{(i)}(x)$ clearly show the gap between the displacements z over the fibers and the displacements u over the matrix. The nonlocal nature of that equations is due to the fact that the displacements z and u never coincide since the coefficients $m^{(i)}$ cannot all vanish simultaneously. Indeed, taking $\bar{v} = \bar{w} = \bar{z} = 0$ in (2.8) and using a localisation and a density argument through test functions in the form $\bar{u}(x, y) = \phi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(Y \setminus D)$ we obtain that u^0 fulfills the following equality:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(Y \setminus D)} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy \\ = \int_{(Y \setminus D)} f_\alpha(x) u_\alpha^0(x, y) + f_3(x) u_3^0(x, y) dy, \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Since A is strongly elliptic, equation (2.10) clearly shows that the three components of $\int_{(Y \setminus D)} u^0(x, y) dy$ cannot vanish simultaneously unless $u^0 = 0$ but this eventuality is excluded.

This remark implies that it is not reasonable to expect a formulation of the limit problem which does not contain simultaneously at least z and u .

The variable $v = (c(x)y_\alpha^R, v_3)$ occurs in the homogenized problem only for anisotropic materials since the symmetry hypothesis (1.16) implies that $v = 0$. We state that property in the following corollary.

Corollary 2.1

Assume that the tensor A satisfies assumptions (1.7)-(1.10) and (1.16). Then the variable v is equal to zero so that the homogenized problem (2.9) contains only the variables (u, w, z) .

The following theorem is another step towards the final form of the homogenized problem. It states mainly that the variables (v, w) may be expressed in terms of the horizontal displacements z_α in the

fibers. As a consequence, we shall derive the final form of the homogenized problem which contains only the variables u and z .

Theorem 2.3

Let (u, v, w, z) be the solution of problem (2.9). Then $v = (c(x)y_\alpha^R, v_3)$ and w are given by:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3(x, y) = (\hat{v}_3^{(\alpha)}(x, y) - b_\alpha(x)\hat{v}_3(x, y))\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) + (\hat{v}_3^{(3)}(x, y) - b_3(x)\hat{v}_3(x, y))\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) \\ + a(x)\hat{v}_3(x, y) \int_I (b_\alpha(x', x_3)\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', x_3) + b_3(x', x_3)\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', x_3)) dx_3, \\ c(x', x_3) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} (-b_\alpha(x', t)\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', t) + b_3(x', t)\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', t)) dt + \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a(x', t) dt \int_I (b_\alpha(x', x_3)\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', x_3) + b_3(x', x_3)\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', x_3)) dx_3, \\ w(x, y) = (\hat{w}^{(\alpha)}(x, y) - b_\alpha(x)\hat{w}(x, y))\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) + (\hat{w}^{(3)}(x, y) - b_3(x)\hat{w}_3(x, y))\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) \\ + a(x)\hat{w}(x, y) \int_I (b_\alpha(x', x_3)\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x', x_3) + b_3(x', x_3)\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', x_3)) dx_3, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

where $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$ and (\hat{v}_3, \hat{w}) are the unique solutions of the elementary problems:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{v}_3^{(\gamma)}, \hat{w}^{(\gamma)}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0), \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{v}_3^{(3)}, \hat{w}^{(3)}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0), \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \\ \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{v}_3, \hat{w}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0), \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = - \int_D A \begin{pmatrix} 0 & y_\alpha^R \\ y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \\ \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.14)$$

The coefficients a and b_i are given in terms of the elementary solutions $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$ and (\hat{v}_3, \hat{w}) by :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) = \frac{1}{\hat{a}(x) \int_I \frac{1}{\hat{a}(x', x_3)} dx_3}, \quad b_i = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}}, \text{ where} \\ \hat{a}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\gamma} + y_\gamma^R)) y_\alpha^R dy, \\ \hat{b}_i(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(i)}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(i)}}{\partial y_\gamma} + A_{\alpha 333} \xi_i) y_\alpha^R dy, \\ \text{where } \xi_\alpha = y_\alpha, \xi_3 = -1. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Remark 2.3

It is not difficult to see that there exists $\mu > 0$ such that for almost all $x \in \Omega$, $\hat{a}(x) \geq \mu$. Indeed,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}^y(\hat{w}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\gamma} + y_\gamma^R)) y_\alpha^R dy = \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} dy = \\ \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} dy \\ \geq m \sum_{\alpha, \beta} \int_D (|e_{\gamma \delta}^y(\hat{w})|^2 + |\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R|^2) dy \geq \mu > 0, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

by virtue of the strong ellipticity of the tensor A and of the equation (2.14) in which we choose $(\bar{v}, \bar{w}) = (\hat{v}, \hat{w})$.

Remark that the nonstandard terms $\int_I b_\alpha \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}$ and $\int_I b_3 \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}$ appear only when two conditions are simultaneously satisfied : the full anisotropy of the material in the fibers and the homogeneous Dirichlet boundary conditions on both the two faces of Ω . Indeed, those terms are necessary to guarantee the zero average over I of the derivative $\frac{\partial c}{\partial x_3}$ since the previous Dirichlet conditions imply $\int_I \frac{\partial c}{\partial x_3}(x', x_3) dx_3 = 0$.

On the other hand, if one deals with non completely anisotropic materials, then the coefficients $b_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ vanish. Let us prove the latest for orthotropic materials corresponding to elastic tensors satisfying the symmetry assumption (1.16) : $A_{\alpha 333} = A_{\alpha 3 \gamma \delta} = 0 \forall \alpha, \gamma, \delta = 1, 2$.

We prove that $\hat{b}_3(x)$ given by (2.15) is equal to zero. The proof is the same for $b_1(x)$ and $b_2(x)$.

Under hypothesis (1.16), $\hat{b}_3(x)$ is given by (see, 2.15) :

$$\hat{b}_3(x) = \int_D A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} y_\alpha^R dy.$$

Let us prove that $\hat{v}_3^{(3)} = 0$. Taking $\bar{w} = 0$ in (2.13) and $\bar{v} = \hat{v}_3^{(3)}$, we get :

$$\int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy,$$

or equivalently :

$$\int_D A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}^y(\hat{w}^{(3)}) \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} + A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} = 0,$$

since $A_{\alpha 3 \gamma \delta} = 0$, we infer :

$$A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} = 0.$$

The matrix $(A_{\alpha 3 \gamma 3})_{\alpha, \gamma=1,2}$ is coercive as a consequence of the strong coercivity of the tensor A ; hence, we obtain :

$$\frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} = 0 \quad \forall \gamma = 1, 2, \quad (2.17)$$

which means that $\hat{v}_3^{(3)} = 0$ in $L^\infty(\Omega; H_m^1(D))$.

We get the same conclusion for $\hat{v}_3^{(\gamma)}$ ($\gamma = 1, 2$) by using systems (2.12) with $\bar{w} = 0$ and $\bar{v}_3 = \hat{v}_3^{(\gamma)}$.

We are now in a position to give the final form of the homogenized problem.

Theorem 2.4

Let (u, v, w, z) be the unique solution of problem (2.9). Then v and w are given by Theorem 2.3 and the pair (u, z) is the unique solution of the following problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha - z_\alpha = f_i(x) m_\alpha^{(i)}(x), \quad u_3(x) = f_i(x) m_3^{(i)}(x) \quad \text{in } \Omega, \\ \text{where for all } i, j = 1, 2, 3, \text{ the coefficients } m_j^{(i)}(x) \text{ are given in (2.9) while} \\ (z_1, z_2, z_3) \text{ is the unique solution of the problem} \\ (z_1, z_2, z_3) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)), \\ \int_\Omega \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} + a_\delta^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_\delta \int_I (b_\gamma \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial^2 \bar{z}_\delta}{\partial x_3^2} \\ \int_\Omega \left(a_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} + a_3^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_3 \int_I (b_\gamma \frac{\partial^2 z_\gamma}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \\ = \int_\Omega f_\delta \bar{z}_\delta \quad \forall (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \in (L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

The coefficients b_i are those defined in (2.15) while the coefficients $a_\delta^{(\gamma)}$, $a_3^{(3)}$, a_i are given in terms of the elementary solutions $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$, (\hat{v}_3, \hat{w}) by

$$a_j^{(i)} = \int_D (A_{33\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(i)} + A_{33\alpha 3} g_\alpha^{(i)} + A_{3333} \xi_i \xi_j) dy, \quad \xi_\alpha = -y_\alpha, \xi_3 = 1,$$

$$a_i = \int_D (A_{33\alpha\beta} t_{\alpha\beta}(x, y) + A_{33\alpha 3} h_\alpha(x, y)) \xi_i dy, \quad \xi_\alpha = -y_\alpha, \xi_3 = 1,$$

and $g_\alpha^{(i)}(x, y) = \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}_3^{(i)}}{\partial y_\alpha}(x, y) - b_i (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y)))$, $h_\alpha(x, y) = \frac{1}{2} a (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y))$,

$$k_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y) = e_{\alpha\beta}^y (\hat{w}^{(i)})(x, y) - b_i e_{\alpha\beta}^y (\hat{w})(x, y), \quad t_{\alpha\beta}(x, y) = a e_{\alpha\beta}^y (\hat{w})(x, y).$$

In the following section, we establish some a priori estimates which will be used in the next sections to prove the main theorems.

3. Apriori estimates

First, we define the following sequences in terms of the sequence u^ε of solutions of (1.14).

$$u_f^\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi r^2} u^\varepsilon(x) \chi_{F_\varepsilon}(x'), \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v^\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon} v_i^\varepsilon(x) \chi_{D_\varepsilon^i}(x'), \text{ where} \\ v_i^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} (u_3^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_3^\varepsilon dx') + \frac{1}{\varepsilon} (\frac{x_\alpha}{\varepsilon} - i_\alpha) \frac{d}{dx_3} \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_\alpha^\varepsilon dx', \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_\alpha^\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} c_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \chi_{D_\varepsilon^i}(x'), \quad \text{where} \\ c_i^\varepsilon(x_3) = \frac{\int_{D_\varepsilon^i} \left(\left(\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2 \right) u_1^\varepsilon - \left(\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1 \right) u_2^\varepsilon \right) dx'}{\int_{D_\varepsilon^i} \left(\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2 \right)^2 \right) dx'} \\ w^\varepsilon(x) = (w_1^\varepsilon(x), w_2^\varepsilon(x)), \quad \text{where} \\ w_\alpha^\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon} w_{i\alpha}^\varepsilon(x) \chi_{D_\varepsilon^i}(x'), \quad \alpha = 1, 2, \quad \text{and} \\ w_{i\alpha}^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(u_\alpha^\varepsilon - c_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_\alpha^\varepsilon dx' \right). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

We shall prove the following apriori estimates. Throughout the paper, C denotes a positive constant the value of which may change from line to another.

Lemma 3.1

The sequence of solutions of (1.14) satisfies the following apriori estimates:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} |e(u^\varepsilon)|^2 \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon)|^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) dx \leq C, \quad (3.4)$$

$$\| u^\varepsilon \|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C, \quad (3.5)$$

$$\| \frac{1}{\varepsilon} (u_f^\varepsilon)_3 \|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon \| u^\varepsilon \|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C, \quad (3.7)$$

$$\| v^\varepsilon \|_{H^{-1}(I; L^2(\omega))} \leq C, \quad (3.8)$$

$$\| w_\alpha^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.9)$$

$$\| \sum_{i \in I_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \chi_{D_\varepsilon^i}(x') \|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.10)$$

For each $\alpha = 1, 2$, there exists a bounded sequence g_α^ε in $L^2(\Omega)$ such that the sequence $c_\alpha^\varepsilon + \varepsilon g_\alpha^\varepsilon$ is bounded in $L^2(\omega; H_0^1(I))$.

Proof

Putting

$$J_\varepsilon = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} |e(u^\varepsilon)|^2 \chi_{F_\varepsilon} + \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon)|^2 \chi_{M_\varepsilon} \right) dx, \quad (3.11)$$

By the Korn's inequality, there exists a constant C such that :

$$\int_{D \times I} |\phi|^2 dy \leq C \int_{D \times I} |e(\phi)|^2 dy, \quad \forall \phi \in (H^1(D \times I))^3, \quad \phi(y, -\frac{1}{2}) = \phi(y, \frac{1}{2}) = 0. \quad (3.12)$$

Since u^ε satisfies the boundary condition in (3.12), we can apply inequality (3.12) with $\phi_\alpha(y, x_3) = \varepsilon u_\alpha^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ and $\phi_3(y, x_3) = u_3^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$, so that, using the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$ together with (1.3) we get for all $0 < \varepsilon \leq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{F_\varepsilon^i} \varepsilon^2 \left((u_1^\varepsilon)^2 + (u_2^\varepsilon)^2 \right) + (u_3^\varepsilon)^2 dx \leq C \int_{F_\varepsilon^i} \left(\sum_{\alpha, \beta} (\varepsilon^4 |e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)|^2 + \varepsilon^2 |e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)|^2) \right. \\ \left. + |e_{33}(u^\varepsilon)|^2 \right) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^i} |e(u^\varepsilon)|^2 dx. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Summing up over $i \in I_\varepsilon$ and dividing by ε^2 the last inequality, we get with the help of definition (1.4):

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{F_\varepsilon} ((u_1^\varepsilon)^2 + (u_2^\varepsilon)^2) + \frac{1}{\varepsilon^2} (u_3^\varepsilon)^2 dx &\leq C \int_{F_\varepsilon} (\sum_{\alpha,\beta} (\varepsilon^2 |e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)|^2 + |e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)|^2) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} |e_{33}(u^\varepsilon)|^2) dx \leq C \int_{F_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} |e(u_\varepsilon)|^2 dx \leq C J_\varepsilon. \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

On the other hand, by virtue of the Poincaré-Wirtinger inequality, there exists a constant C such that :

$$\int_Y (\phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi dy)^2 dy \leq C \int_Y |\nabla'_y \phi|^2 dy, \quad \forall \phi \in H^1(Y). \quad (3.15)$$

Choosing in (3.15) $\phi(y, x_3) = u_j^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ for $y \in Y$ and $j = 1, 2, 3$ and using the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$, we get by virtue of the definition of ω_ε^i (see the first equality in (1.4)):

$$\int_{\omega_\varepsilon^i} |u_j^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_j^\varepsilon dx'|^2 dx' \leq C \int_{\omega_\varepsilon^i} \varepsilon^2 |\nabla'_x u_j^\varepsilon|^2 dx', \quad (3.16)$$

so that integrating over I , summing up and recalling that $\Omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} Y_\varepsilon^i = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i \times I$, we deduce with the help of (3.16) :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega |u_j^\varepsilon|^2 dx &\leq C \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^i} |u_j^\varepsilon - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_j^\varepsilon dx'|^2 + \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^i} \frac{1}{|D_\varepsilon^i|^2} (\int_{D_\varepsilon^i} u_j^\varepsilon dx')^2 dx \\ &\leq C \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla'_x u_j^\varepsilon|^2 dx + \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} |u_j^\varepsilon|^2 dx. \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

Since $u^\varepsilon = 0$ on Γ_0 , we can make use of the Korn's inequality for functions in Φ to obtain :

$$\int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C \int_\Omega \varepsilon^2 |e(u^\varepsilon)|^2 dx \leq C J_\varepsilon. \quad (3.18)$$

As a consequence of (3.14), (3.17) and (3.18), we get the estimate :

$$\int_\Omega |u_j^\varepsilon|^2 dx \leq C J_\varepsilon, \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

Turning back to equation (1.14) in which we choose $\phi = u^\varepsilon$, we obtain by the use of the Cauchy-Schwarz inequality in the right hand side and the coerciveness hypothesis (1.10) in the left hand side:

$$m J_\varepsilon \leq \int_\Omega f u^\varepsilon dx \leq \|f\|_{(L^2(\Omega))^3} \|u^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C \sqrt{J_\varepsilon}, \quad (3.20)$$

so that the following estimate obviously takes place:

$$J_\varepsilon \leq C. \quad (3.21)$$

Estimate (3.4) is then proved. Estimate (3.5) follows from (3.21) and (3.20). Estimate (3.6) is a consequence of (3.21) and (3.14). Estimate (3.7) is a consequence of (3.21) and the following two inequalities (the first one is the classical Korn inequality which can be applied since u^ε vanishes on the part Γ_0 of the boundary) :

$$\|\varepsilon u^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C \| \varepsilon e(u^\varepsilon) \|_{L_s^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq C J_\varepsilon. \quad (3.22)$$

To prove estimate (3.8), we use the following Korn's type inequality which will be used also in [10] in order to get an error estimate for the problem of the $3d - 1d$ reduction dimension in linear elasticity. For the convenience of the reader, we shall prove it in the appendix:

There exists a constant C such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \phi_3 - \left(\frac{1}{|D|} \int_D \phi_3 dy - y_\alpha \frac{d}{dx_3} \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha dy \right) \right\|_{H^{-1}(I; L^2(D))}^2 \leq \\ C \left(\sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}(\phi) \|_{L^2(D \times I)}^2 + \sum_{\alpha} \| e_{\alpha 3}(\phi) \|_{L^2(D \times I)}^2 \right), \\ \forall \phi \in \{ (H^1(D \times I))^3, \phi(y, -\frac{1}{2}) = \phi(y, \frac{1}{2}) = 0. \}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

In our context, we use this inequality as follows: by definition of the space $H^{-1}(I; L^2(D))$, one can find a function $h \in L^2(I; L^2(D)) = L^2(D \times I)$ such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x_3} = \phi_3 - \left(\frac{1}{|D|} \int_D \phi_3 dy - y_\alpha \frac{d}{dx_3} \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha dy \right), \\ \left\| \phi_3 - \left(\frac{1}{|D|} \int_D \phi_3 dy - y_\alpha \frac{d}{dx_3} \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha dy \right) \right\|_{H^{-1}(I; L^2(D))} = \| h \|_{L^2(D \times I)}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

An easy computation shows that the function h is necessarily given by

$$h(y, x_3) = \int_0^{x_3} \left(\phi_3(y, s) - \frac{1}{|D|} \int_D \phi_3(y, s) dy \right) ds + y_\alpha \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha(y, x_3) dy + k(y), \quad (3.25)$$

where the function

$$k(y) = \int_I \left(h(y, x_3) - \int_0^{x_3} \left(\phi_3(y, s) - \frac{1}{|D|} \int_D \phi_3(y, s) dy \right) ds - y_\alpha \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha(y, x_3) dy \right) dx_3$$

belongs to $L^2(D)$ and only depends on the variable y . Using (3.25), inequality (3.23) takes the following form :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D \times I} \left(\int_0^{x_3} \left(\phi_3(y, s) - \frac{1}{|D|} \int_D \phi_3(y, s) dy \right) ds \right. \\ \left. + y_\alpha \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha(y, x_3) dy + k(y) \right)^2 dy dx_3 \leq \\ C \left(\sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}(\phi) \|_{L^2(D \times I)}^2 + \sum_{\alpha} \| e_{\alpha 3}(\phi) \|_{L^2(D \times I)}^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Applying (3.26) with $\phi_\alpha(y, x_3) = \varepsilon u_\alpha^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ for $\alpha = 1, 2$, $\phi_3(y, x_3) = u_3^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ and then using the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$, we get the following inequality :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_\varepsilon^i \times I} \left(\int_0^{x_3} \left(u_3^\varepsilon(x', s) - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_3^\varepsilon(x', s) dx' \right) ds \right. \\ \left. + \left(\frac{x_\alpha}{\varepsilon} - i_\alpha \right) \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} \varepsilon u_\alpha^\varepsilon(x', x_3) dx' + k^\varepsilon(x') \right)^2 dx' dx_3 \leq \\ C \left(\sum_{\alpha, \beta} \varepsilon^4 \| e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \|_{L^2(D_\varepsilon^i \times I)}^2 + \sum_{\alpha} \varepsilon^2 \| e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \|_{L^2(D_\varepsilon^i \times I)}^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

where the function k^ε which is given in terms of u^ε depends only on the variable x' .

Since $\Omega = \omega \times I$ and $F_\varepsilon^i = D_\varepsilon^i \times I$, we deduce from (3.27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega \times I} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{x_3} (u_3^\varepsilon(x', s) - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_3^\varepsilon(x', s) dx') ds \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} (\frac{x_\alpha}{\varepsilon} - i_\alpha) \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_\alpha^\varepsilon(x', x_3) dx' + \frac{k^\varepsilon(x')}{\varepsilon^2} \right)^2 \chi_{D_\varepsilon^i}(x') dx' dx_3 \leq \\ C \left(\sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\|_{L^2(F_\varepsilon^i)}^2 + \sum_\alpha \frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)\|_{L^2(F_\varepsilon^i)}^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Since $\sum_{i,j} \|\frac{1}{\varepsilon} e_{i,j}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ as a consequence of (3.4) and since $\chi_{D_\varepsilon^i} \chi_{D_\varepsilon^j} = 0$ if $i \neq j$, taking the sum over $i \in I_\varepsilon$, we see from (3.28) that the sequence :

$$z^\varepsilon = \sum_{i \in I_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{x_3} (u_3^\varepsilon(x', s) - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_3^\varepsilon(x', s) dx') ds + \frac{1}{\varepsilon} (\frac{x_\alpha}{\varepsilon} - i_\alpha) \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_\alpha^\varepsilon(x) dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} k^\varepsilon(x') \right) \chi_{D_\varepsilon^i}(x')$$

satisfies the estimate

$$\int_\Omega (z_\varepsilon(x))^2 dx \leq C. \quad (3.29)$$

As z^ε obviously satisfies $\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial x_3} = v^\varepsilon(x)$, where v^ε is the sequence defined by (3.2), and since

$$\|v^\varepsilon\|_{H^{-1}(I; L^2(\omega))} = \inf \left\{ \|g\|_{L^2(\Omega)}, g \in L^2(\Omega), \frac{\partial g}{\partial x_3} = v^\varepsilon \right\},$$

we get estimate (3.8) as a consequence of (3.29).

We now prove estimate (3.9). The starting point is the following estimate, the proof of which is the same as that of (4.92) below : there exists a constant C such that :

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(L^2(I; H_m^1(D)))}^2 \leq C \sum_{\alpha\beta} \|e_{\alpha\beta}(\phi)\|_{D \times I}^2, \quad \forall \phi \in (L^2(I; H^1(D)))^2 \quad (3.30)$$

where $\hat{\phi}(\cdot, x_3)$ denotes the orthogonal projection with respect to the inner product of $L^2(D)$ of $\phi(\cdot, x_3)$ and where $H_m^1(D)$ denotes the subspace of functions in $H^1(D)$ with zero average.

Without extra difficulty, one can verify that the projection $\hat{\phi}$ is explicitly given by :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(y, x_3) = -y_2 c(x_3) + d_1(x_3), \quad \hat{\phi}_2(y, x_3) = y_1 c(x_3) + d_2(x_3) \\ c(x_3) = \frac{\int_D (y_2 \phi_1(y, x_3) - y_1 \phi_2(y, x_3)) dy}{\int_D (y_1^2 + y_2^2) dy}, \\ d_\alpha(x_3) = \frac{1}{|D|} \int_D \phi_\alpha(y, x_3) dy, \quad \alpha = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Taking $\phi_\alpha(y, x_3) = u_\alpha^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$, $\alpha = 1, 2$, and applying the estimate

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(L^2(I \times D))}^2 \leq C \sum_{\alpha\beta} \|e_{\alpha,\beta}(\phi)\|_{D \times I}^2, \quad \forall \phi \in (L^2(I; H^1(D)))^2, \quad (3.32)$$

which is an immediate consequence of (3.30), we get with the notations introduced in section 1 and in (3.3) and after making the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$:

$$\int_{\omega \times I} \left((u_\alpha^\varepsilon - c_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} - \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} \int_{D_\varepsilon^i} u_\alpha^\varepsilon dx')^2 \chi_{D_\varepsilon^i}(x') \right) dx \leq C \int_{F_\varepsilon^i} \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon^2 |e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)(x)|^2 dx, \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (3.33)$$

Since $\int_{F_\varepsilon} \sum_{\alpha, \beta} |e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)(x)|^2 dx \leq C\varepsilon^2$ by virtue of (3.4), we obtain (3.9) after dividing (3.33) by ε^4 and then summing over $i \in I_\varepsilon$.

It remains to prove estimate (3.10). We use the estimate

$$\int_{D \times I} \left| \frac{\partial}{\partial y_\beta} (\phi_\alpha - \hat{\phi}_\alpha) \right|^2 dy dx_3 \leq C \sum_{\alpha, \beta} \int_{D \times I} |e_{\alpha\beta}(\phi)(y, x_3)|^2 dy dx_3, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3.34)$$

which is a consequence of (3.30) and we apply it again with $\phi_\alpha(y, x_3) = u_\alpha^\varepsilon(\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$, $\alpha = 1, 2$, so that the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$ leads to :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_i^\varepsilon \times I} \varepsilon^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_\beta} (u_\alpha^\varepsilon - c_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} - \frac{1}{|D_i^\varepsilon|} \int_{D_i^\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon dx') \right|^2 dx = \int_{\omega \times I} \varepsilon^6 \left| \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \right|^2 \chi_{D_i^\varepsilon}(x') dx \\ \leq C \sum_{\alpha, \beta} \int_{D_i^\varepsilon \times I} \varepsilon^2 |e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)(x)|^2 dx. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Using estimate (3.4), we get by summing up in (3.35) :

$$\int_{\Omega} \sum_{i \in I_\varepsilon} \varepsilon^2 \left| \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \right|^2 \chi_{D_i^\varepsilon}(x') dx \leq C, \quad (3.36)$$

which easily gives the estimate (3.10) since $\chi_{D_i^\varepsilon} \chi_{D_j^\varepsilon} = 0$ if $i \neq j$.

Let us prove the last statement. Putting $d_{i\alpha}^\varepsilon(x_3) = \frac{1}{|D_i^\varepsilon|} \int_{D_i^\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon dx'$ and using the definition (3.3) of $w_{i\alpha}^\varepsilon$, one can write for all $i \in I_\varepsilon$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e_{13}(u^\varepsilon) = \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_{i1}^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{dc_i^\varepsilon}{dx_3} x_{i1}^{\varepsilon R} + \frac{d d_{i1}^\varepsilon}{dx_3}, \\ 2e_{23}(u^\varepsilon) = \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_{i2}^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{dc_i^\varepsilon}{dx_3} x_{i2}^{\varepsilon R} + \frac{d d_{i2}^\varepsilon}{dx_3}. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

so that we get the following equality in the sense of distributions:

$$2 \frac{\partial}{\partial x_1} e_{23}(u^\varepsilon) - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} e_{13}(u^\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial w_{i2}^\varepsilon}{\partial x_3} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial w_{i1}^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{dc_i^\varepsilon}{dx_3}. \quad (3.38)$$

Let $\phi \in \mathcal{D}(D)$ such that $\int_D \phi(y) dy = 1$. Extend ϕ by Y -periodicity to the whole of \mathbb{R}^2 . Multiplying (3.38) by $\phi(\frac{x'}{\varepsilon})$ and then integrating by parts over D_i^ε , we get with the help of $\int_{D_i^\varepsilon} \phi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx' = \varepsilon^2$,

$$2\varepsilon \frac{dc_i^\varepsilon}{dx_3} + \varepsilon \int_{D_i^\varepsilon} \left(\frac{\partial w_{i1}^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - \frac{\partial w_{i2}^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) dx' = \frac{2}{\varepsilon} \int_{D_i^\varepsilon} \left(e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) dx'. \quad (3.39)$$

Define g_i^ε , h_i^ε , g_α^ε , and h_α^ε by

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i^\varepsilon(x_3) = \frac{1}{2} \int_{D_i^\varepsilon} \left(w_{i1}^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - w_{i2}^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) dx', \quad h_i^\varepsilon(x_3) = \int_{D_i^\varepsilon} \left(e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right) dx', \\ g_\alpha^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i \in I_\varepsilon} g_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \chi_{D_i^\varepsilon}, \quad h_\alpha^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{i \in I_\varepsilon} h_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \chi_{D_i^\varepsilon}. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Taking into account the definition (3.3) of C_α^ε , we get after multiplying equation (3.39) by $\frac{1}{2\varepsilon^2}x_{i\alpha}^{\varepsilon R}\chi_{D_i^\varepsilon}$, and then summing up over i :

$$\frac{\partial c_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3}(x) + \varepsilon \frac{\partial g_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3}(x) = h_\alpha^\varepsilon(x). \quad (3.41)$$

By definition, the functions c_α^ε , g_α^ε are equal to zero for $x_3 = -\frac{1}{2}$ or $x_3 = \frac{1}{2}$. Thus, to prove the statement, we have to prove that the sequences g_α^ε and $h_\alpha^\varepsilon(x)$ are both bounded in $L^2(\Omega)$. We first perform the proof for the boundedness of g_α^ε .

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega |g_\alpha^\varepsilon(x)|^2 dx &= \int_I \int_C \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i \in I_\varepsilon} g_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \chi_{D_i^\varepsilon}(x') \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4} \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} |g_i^\varepsilon(x_3)|^2 dx_3 \int_{D_i^\varepsilon} |x_{i\alpha}^{\varepsilon R}|^2 dx' \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I |g_i^\varepsilon(x_3)|^2 \int_D |y_\alpha^R|^2 dy dx_3 \end{aligned} \right. \quad (3.42)$$

Using definition (3.40), the Cauchy-Schwarz inequality and the change of variable $x' = \varepsilon y + \varepsilon i$, we get :

$$\left\{ \begin{aligned} |g_i^\varepsilon(x_3)|^2 &\leq \left[\left(\int_{D_i^\varepsilon} |w_{i1}^\varepsilon|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_i^\varepsilon} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \right|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{D_i^\varepsilon} |w_{i2}^\varepsilon|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_i^\varepsilon} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right|^2 dx' \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\leq C\varepsilon^2 \left(\int_{D_i^\varepsilon} |w_{i1}^\varepsilon|^2 dx' + \int_{D_i^\varepsilon} |w_{i2}^\varepsilon|^2 dx' \right). \end{aligned} \right. \quad (3.43)$$

By virtue of estimate (3.9), we obtain from (3.43) :

$$\int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} |g_i^\varepsilon(x_3)|^2 dx_3 \leq C \varepsilon^2. \quad (3.44)$$

Hence, the $L^2(\Omega)$ -boundedness of the sequence g_α^ε is a consequence of (3.42) and (3.44). We now prove that the sequence $h_\alpha^\varepsilon(x)$ is bounded in $L^2(\Omega)$.

Indeed,

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega |h_\alpha^\varepsilon(x)|^2 dx &= \int_I \int_C \left| \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{i \in I_\varepsilon} h_i^\varepsilon(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \chi_{D_i^\varepsilon}(x') \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^6} \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} |h_i^\varepsilon(x_3)|^2 dx_3 \int_{D_i^\varepsilon} |x_{i\alpha}^{\varepsilon R}|^2 dx' \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I |h_i^\varepsilon(x_3)|^2 dx_3 \int_D |y_\alpha^R|^2 dy. \end{aligned} \right. \quad (3.45)$$

On the other hand, by virtue of definition (3.40) and of the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left\{ \begin{aligned} |h_i^\varepsilon(x_3)|^2 &\leq C \left(\int_{D_i^\varepsilon} |e_{13}(u^\varepsilon)|^2 dx' \int_{D_i^\varepsilon} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx' + \int_{D_i^\varepsilon} |e_{23}(u^\varepsilon)|^2 dx' \int_{D_i^\varepsilon} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx' \right) \\ &\leq C\varepsilon^2 \left(\int_{D_i^\varepsilon} |e_{13}(u^\varepsilon)|^2 dx' + \int_{D_i^\varepsilon} |e_{23}(u^\varepsilon)|^2 dx' \right), \end{aligned} \right. \quad (3.46)$$

in such a way that we obtain with the help of estimate (3.4)

$$\int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} |h_i^\varepsilon(x_3)|^2 dx_3 \leq C\varepsilon^4 \int_{F^\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (|e_{13}(u^\varepsilon)|^2 + |e_{23}(u^\varepsilon)|^2) dx \leq C\varepsilon^4. \quad (3.47)$$

Therefore, estimates (3.45) and (3.47) immediately give the announced apriori estimate on the sequence h_α^ε for $\alpha = 1, 2$. We have thus proved that the sequence $c_\alpha^\varepsilon + \varepsilon g_\alpha^\varepsilon$ is bounded in $L^2(C; H_0^1(I))$ and this completes the proof of Lemma 3.1.

4. Preliminary results

We start with the following lemma.

Lemma 4.1

There exist a subsequence of ε still denoted ε and

$$\begin{cases} (u^0, u, (z_1, z_2), w) \in \left(L^2(\Omega \times Y)\right)^3 \times \left(L^2(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2(\Omega)\right)^2 \times \left(L^2(\Omega \times Y)\right)^2, \\ (\chi^f, \chi^m) \in \left(L_s^2(\Omega \times Y)\right)^{3 \times 3} \times \left(L_s^2(\Omega \times Y)\right)^{3 \times 3}, \end{cases} \quad (4.1)$$

such that the following convergences hold true

$$u_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup u_\alpha^0(x, y) + z_\alpha(x), \quad u_3^\varepsilon \rightharpoonup u_3^0(x, y), \quad (4.2)$$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ in } (L^2(\Omega))^3, \quad (4.3)$$

$$\forall \alpha = 1, 2, (u_f^\varepsilon)_\alpha \rightharpoonup z_\alpha, \quad (u_f^\varepsilon)_3 \rightarrow 0 \text{ in } (L^2(\Omega))^3, \quad (4.4)$$

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w, \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon} \rightharpoonup \chi^f, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon e(u^\varepsilon) \chi_{M^\varepsilon} \rightharpoonup \chi^m. \quad (4.7)$$

Furthermore, the following properties hold true:

$$\begin{cases} u_\alpha(x) = z_\alpha(x) + \int_Y u_\alpha^0(x, y) dy, \quad u_3(x) = \int_Y u_3^0(x, y) dy, \\ u_i^0(x, y) = 0 \text{ a.e. in } \Omega \times D, \quad \forall i = 1, 2, 3, \\ \chi^m(x, y) = 0 \text{ a.e. in } \Omega \times D, \quad \text{and } \chi^f(x, y) = 0 \text{ a.e. in } \Omega \times (Y \setminus D), \\ u^0 \in L^2(\Omega; (H_\#^1(Y))^3), \quad \text{and } e^y(u^0)(x, y) = \chi^m(x, y) \chi_{(Y \setminus D)} \text{ a.e. in } \Omega \times Y. \end{cases} \quad (4.8)$$

Proof

Let us first notice that if we prove existence of subsequences of ε which satisfy convergences (4.2)-(4.7), then one may assume that there exists a unique subsequence for which all the convergences hold true since the number of extractions is finite.

Existence of $\bar{u}^0 \in (L^2(\Omega \times Y))^3$ and $w \in (L^2(\Omega \times Y))^2$ such that for a subsequence, $u^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}^0$ and (4.5) holds true is a consequence of estimates (3.5) and (3.9). Similarly, the existence of a subsequence and of χ^m and χ^f which satisfy (4.1) and (4.6)-(4.7) is due to the estimate (3.4).

Since u_f^ε is bounded in $(L^2(\Omega))^3$ as a consequence of estimate (3.5), one obtain convergence (4.4) with some $z_\alpha \in (L^2(\Omega))^2$. The fact that $(u_f^\varepsilon)_3 \rightarrow 0$ comes from estimate (3.6) which implies that the third component $(u_f^\varepsilon)_3$ strongly converges to zero in $L^2(\Omega)$. On the other hand, it is well known (see

[1]) that if $u^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}^0$, then (4.3) holds with $u(x) := \int_Y \bar{u}^0(x, y) dy$.

We apply convergence (4.7) to a test function in the form $\chi_D(y)\phi(x, y)$ with an arbitrary $\phi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ to obtain at the limit

$$\begin{cases} 0 = \int_{\Omega} e(u^\varepsilon) \chi_{M^\varepsilon} \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) \phi(x) dx \rightharpoonup \int_{\Omega} \int_Y \chi^m \chi_D(y) \phi(x, y) dx dy \\ \forall \phi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y)), \end{cases} \quad (4.9)$$

from which we easily deduce $\chi^m = 0$ on $\Omega \times D$.

By a similar argument, we infer

$$\begin{cases} 0 = \int_{\Omega} e(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon} \chi_{(Y \setminus D)}(\frac{x'}{\varepsilon}) \phi(x) dx \rightharpoonup \int_{\Omega} \int_Y \chi^f \chi_{(Y \setminus D)}(y) \phi(x, y) dx dy \\ \forall \phi \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y)), \end{cases} \quad (4.10)$$

which easily implies the equality $\chi^f = 0$ in $\Omega \times (Y \setminus D)$.

We now prove that $\bar{u}^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))^3$. Remark first that from estimate (3.7), there exists $\xi \in (L^2(\Omega \times Y))^{3 \times 3}$ such that

$$\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \xi. \quad (4.11)$$

Let us prove that $\xi = \nabla_y \bar{u}^0$ so that taking in mind the fact that \bar{u}^0 belongs to $(L^2(\Omega \times Y))^3$, we get

$$\bar{u}^0 \in L^2(\Omega; (H^1(Y))^3). \quad (4.12)$$

Let $\phi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes C_{\#}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Applying (4.11) for the component u_i^ε ($i = 1, 2, 3$) of u^ε , we get by passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ in the equation

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla u_i^\varepsilon \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx = - \int_{\Omega} \varepsilon u_i^\varepsilon (\psi(\frac{x'}{\varepsilon}) \nabla \phi(x) + \frac{1}{\varepsilon} \phi(x) \operatorname{div}_y \psi(\frac{x'}{\varepsilon})) dx, \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} \int_Y \xi_i(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy = - \int_{\Omega} \int_Y \bar{u}_i^0(x, y) \phi(x) \operatorname{div}_y \psi(y) dx dy. \quad (4.14)$$

Since ϕ is arbitrary, we deduce immediately from (4.14)

$$\int_Y \xi_i(x, y) \phi(x) \psi(y) dy = - \int_Y \bar{u}_i^0(x, y) \phi(x) \operatorname{div}_y \psi(y) dy, \quad (4.15)$$

so that we get (4.12) together with $\nabla_y \bar{u}_i^0 = \xi_i(x, y)$. As a consequence of the latter together with (4.11), we immediately obtain

$$\varepsilon e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e^y(\bar{u}^0). \quad (4.16)$$

On the other hand, estimate (3.4) implies that $\varepsilon e(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon}$ strongly converges to zero in $(L^2(\Omega))^{3 \times 3}$ so that

$$e^y(\bar{u}^0) \chi_D(y) = 0 \quad \text{in } \Omega \times Y. \quad (4.17)$$

Finally, $\varepsilon e(u^\varepsilon) \chi_{M^\varepsilon} \rightharpoonup e^y(u^0) \chi_{(Y \setminus D)}$ so that $\chi^m = e^y(\bar{u}^0) \chi_{(Y \setminus D)}$. Hence the equality

$$e^y(\bar{u}^0) = \chi^m \chi_{(Y \setminus D)} \quad \text{in } \Omega \times Y \quad (4.18)$$

is proved. Furthermore, an integration by parts of the right hand side of (4.15) gives the following identity

$$\int_{\partial Y} \bar{u}^0(x, y) \psi(y) \cdot n(y) dy = 0,$$

n being the outward normal to the faces of Y . Since n has opposite values on opposite faces of Y , we get by varying ψ in $C_{\#}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ that \bar{u}_i^0 has the same traces on opposite faces of Y . This proves that $\bar{u}_i^0(x, \cdot) \in H_{\#}^1(Y)$.

We now prove the equality

$$z_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_D \bar{u}_{\alpha}^0(x, y) dy. \quad (4.19)$$

We take a test function in the form $\chi_D(y)\phi(x)$ in the two-scale convergence (4.2) with an arbitrary $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ so that bearing in mind that $\sum_{i \in I_{\varepsilon}} \chi_{D_{\varepsilon}^i}(x') \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) = \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon})$, we get:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_f^{\varepsilon} \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) \phi(x) dx = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \chi_{D_{\varepsilon}^i}(x') u^{\varepsilon} \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) \phi(x) dx \\ = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\Omega} u^{\varepsilon} \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) \phi(x) dx \rightarrow \frac{1}{\pi r^2} \int_{\Omega} \int_Y \bar{u}^0(x, y) \chi_D(y) \phi(x) dx dy. \end{cases} \quad (4.20)$$

On the other hand, by virtue of the weak convergence (4.4) we infer :

$$\int_{\Omega} (u_f)_{\alpha}^{\varepsilon} \phi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} z_{\alpha}(x) \phi(x) dx, \quad (4.21)$$

so that (4.20) and (4.21) lead to (4.19).

We claim now that for all $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$,

$$\frac{\partial \bar{u}_{\alpha}^0}{\partial y_{\beta}} = 0 \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.22)$$

Indeed, taking into account definition (3.3), we have for all $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\psi \in \mathcal{D}(D)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \chi_{F_{\varepsilon}} \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx = \\ & \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} ((u_{\alpha}^{\varepsilon} - c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} - d_{i\alpha}^{\varepsilon}(x_3)) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R}) \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx = \\ & \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} (\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} w_{i\alpha}^{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R}) \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx = \\ & \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^3 \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) - \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \varepsilon c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} (\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}}) dx = \\ & \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^3 \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx - \int_{\Omega} \varepsilon^2 c_{\alpha}^{\varepsilon}(x) (\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}}) dx. \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

We can pass to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ in the first left hand side of (4.23) with the help of (4.11) (recall that $\xi = \nabla_y \bar{u}^0$) and in the last right hand side of (4.23) thanks to Lemma 3.1 which implies that the sequences $\sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}}$ and c_{α}^{ε} are bounded in $L^2(\Omega)$ for all $\alpha, \beta = 1, 2$, so that we infer

$$\int_{\Omega} \int_D \frac{\partial \bar{u}_{\alpha}^0}{\partial y_{\beta}}(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy = 0, \quad \forall \phi \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D), \quad (4.24)$$

which proves (4.22).

It is then clear from (4.19) and (4.22) that $\bar{u}_\alpha^0(x, y) = z_\alpha(x)$ in $\Omega \times D$. Hence, to obtain convergence (4.2), it suffices to define u^0 in $\Omega \times Y$ by $u_\alpha^0(x, y) = \bar{u}_\alpha^0(x, y) - z_\alpha(x)$. Since z_α does not depend on the variable y , the function u^0 has the same regularity as \bar{u}^0 . This ends the proof of Lemma 4.1.

In the next Proposition, we shall precise the regularity of the limit w of the sequence w^ε and then we characterize the two-scale limit of the sequence $\frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\chi_{F^\varepsilon}$.

Proposition 4.1

The function w arising in (4.5) is such that :

$$w \in L^2(\Omega; (H_m^1(Y))^2) \quad \text{and} \quad \frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\chi_{F^\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w)\chi_D(y), \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2; \quad (4.25)$$

Proof

By virtue of (3.10), there exists a function $G_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega \times Y)$ such that, for a subsequence,

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \chi_{D_i^\varepsilon}(x') \rightharpoonup G_{\alpha\beta}. \quad (4.26)$$

Taking a test function $\phi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$ with ψ extended by Y -periodicity to the whole of \mathbb{R}^2 , we get :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i \in I_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \chi_{D_i^\varepsilon}(x') \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_i^\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_\beta} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\ & - \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_i^\varepsilon} \varepsilon w_{i\alpha}^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi(x) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) dx = \\ & - \int_{\Omega} \varepsilon w_\alpha^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi(x) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) dx \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

Taking the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ in (4.27), we get with the help of (4.5) and (4.26) :

$$\int_{\Omega} \int_D G_{\alpha\beta}(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy = - \int_{\Omega} \int_D w_\alpha(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}(y) \phi(x) dx dy, \quad (4.28)$$

from which we immediately obtain

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\partial w_\alpha}{\partial y_\beta}(x, y) \quad \text{in} \quad \Omega \times D. \quad (4.29)$$

This means that $w(x, \cdot) \in H^1(D)$ for almost all $x \in \Omega$ so that bearing in mind that $w \in L^2(\Omega \times Y)$, we have proved that $w \in L^2(\Omega; (H_m^1(Y))^2)$ by subtracting if necessary the average of w over D .

We now prove the last part of the lemma. The functions ϕ and ψ being as above, we have for all $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_i^\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\varepsilon w_i^\varepsilon) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ & = - \frac{1}{2} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_i^\varepsilon} \varepsilon w_{i\alpha}^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \right) dx \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_i^\varepsilon} \varepsilon w_{i\beta}^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) dx \\ & = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\varepsilon w_\alpha^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \right) + \varepsilon w_\beta^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) \right) dx. \end{aligned} \right. \quad (4.30)$$

The limit of the last integral is equal to

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_D (w_{\alpha}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}}(y) + w_{\beta}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}}(y)) \phi(x) \, dx dy = \int_{\Omega} \int_D e_{\alpha\beta}^y(w)(x, y) \phi(x) \psi(y) \, dx dy. \quad (4.31)$$

Let us notice that one can assume that w is defined up to a two-dimensional rigid displacement without changing anything in the proof, on the other words we can assume that w is locally (i.e. with respect to y) orthogonal to rigid displacements. This completes the proof of Proposition 4.1.

We are now interested by identifying the two-scale limit χ_{33}^f arising in (4.6), that is the two-scale limit of the sequence $\frac{1}{\varepsilon} e_{33}(u^{\varepsilon}) \chi_{F^{\varepsilon}}$. To this end, we first establish two lemmas.

Lemma 4.2

For each $\alpha = 1, 2$, the function z_{α} belongs to $L^2(\omega; H_0^2(I))$ and there exists a function $z_3(x) \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{the function } Z_3 \in L^2(\omega \times Y; H_0^1(I)) \text{ defined by } Z_3(x, y) = -y_{\alpha} \frac{\partial z_{\alpha}}{\partial x_3}(x) + z_3(x) \text{ satisfies:} \\ \chi_{33}^f(x, y) = \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}(x) = -y_{\alpha} \frac{\partial^2 z_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x) + \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) \text{ in } \Omega \times D. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Proof

Estimate (3.6) implies the existence of $Z_3 \in L^2(\Omega \times Y)$ such that for a subsequence of ε , $\pi r^2 \frac{1}{\varepsilon} (u_f^{\varepsilon})_3$ two-scale converges to Z_3 . An integration by parts leads to

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_3} \chi_{F^{\varepsilon}}(x') \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} \frac{u_3^{\varepsilon}}{\varepsilon} \chi_{F^{\varepsilon}}(x') \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ \rightarrow \int_{\Omega} \int_D Z_3(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi(y) \, dx dy, \quad \forall \phi \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D). \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Using (4.6) in the left hand side of (4.33), we get the following equality in the sense of $\mathcal{D}'(\Omega \times D)$

$$\chi_{33}^f(x, y) = \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}(x, y) \quad \text{in } \Omega \times D, \quad (4.34)$$

which shows that

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \in L^2(\Omega \times D). \quad (4.35)$$

On the other hand, using once again the two-scale convergence (4.6), we get with the same test functions

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) \chi_{F^{\varepsilon}} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_3} \chi_{F^{\varepsilon}} + \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_{\alpha}} \chi_{F^{\varepsilon}} \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\ - \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} u_{\alpha}^{\varepsilon} \chi_{F^{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx - \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_i^{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} u_3^{\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{\varepsilon} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} \right) dx' dx_3. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Multiplying (4.36) by ε and using (4.2), (4.4), (4.6), (4.8) and using the two-scale convergence of $\pi r^2 \frac{1}{\varepsilon} (u_f^{\varepsilon})_3 = \frac{1}{\varepsilon} u_3^{\varepsilon} \chi_{F^{\varepsilon}}$ to Z_3 , we get after passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$0 = - \int_{\Omega} \int_D (z_{\alpha}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi(y) + Z_3 \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}}(x, y)) \, dx dy. \quad (4.37)$$

Hence, the following equality holds in the sense of distributions :

$$\forall \alpha = 1, 2, \quad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial Z_3}{\partial y_\alpha}(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.38)$$

Therefore, there exists some distribution $H(x)$ so that Z_3 takes the following form

$$Z_3(x, y) = -y_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}(x) + H(x) \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.39)$$

From (4.39) and the fact that $\int_D y_1 dy = \int_D y_2 dy = 0$, we infer that $H(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_D Z_3(x, y) dy$. Estimate (3.6) also implies that the sequence $\frac{1}{\varepsilon}(u_f^\varepsilon)_3$ is bounded in $L^2(\omega; H_0^1(I))$ so that for a new subsequence of ε , one can assume the existence of $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ such that $\frac{1}{\varepsilon}(u_f^\varepsilon)_3$ converges weakly to z_3 in $L^2(\omega; H_0^1(I))$. Of course, the latter holds true in the space $L^2(\omega; L^2(I)) = L^2(\Omega)$. Taking into account the fact that $\frac{1}{\pi r^2} Z_3(x, y) \chi_D(y)$ is the two-scale limit of $\frac{1}{\varepsilon}(u_f^\varepsilon)_3$, we conclude that $z_3(x) = \int_Y \frac{1}{\pi r^2} Z_3(x, y) \chi_D(y) dy = H(x)$.

Therefore, taking into account (4.35) and the fact that $z_3 \in L^2(\omega, H_0^1(I))$, we infer from (4.39) that $\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}(x) \in L^2(\Omega)$ for all $\alpha = 1, 2$. This means that $z_\alpha \in L^2(\omega; H^2(I))$.

Remark now that equality (4.37) remains valid if one take test functions $\phi(x)\psi(y)$ with $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\phi = 0$ on $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$, and $\psi \in \mathcal{D}(D)$ in such a way that integrating (4.37) using such test functions, one obtain with the help of (4.38)

$$\int_{\Gamma_0} \int_D z_\alpha(x) \phi(x) \psi(y) dx' dy = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D), \quad (4.40)$$

so that

$$\int_{\Gamma_0} z_\alpha(x) \phi(x) dx' = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \phi = 0 \text{ on } \Gamma_N, \quad (4.41)$$

which easily implies

$$z_\alpha(x) = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad (4.42)$$

To prove that the first derivatives of z_α also vanish on Γ_0 , we proceed in a similar way. Integrating by parts the right hand side of (4.33) and using the same test functions as above, we get with the help of (4.34)

$$\int_{\Gamma_0} Z_3(x, y) \phi(x) dx' = 0 \text{ a.e. in } D, \quad \forall \phi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \phi = 0 \text{ on } \Gamma_N, \quad (4.43)$$

which implies $Z_3(\cdot, y) = 0$ on Γ_0 , and a.e. $y \in D$. Since $H(x) = z_3 = 0$ on Γ_0 , we obtain from (4.39) that $\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3} = 0$ on Γ_0 . The proof of the lemma is complete.

We are now in a position to give the two-scale limit of the sequence $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon}$. This is the subject of the next proposition.

Proposition 4.2

There exist a function $c(x) \in L^2(\omega, H_0^1(I))$ and a function $v_3 \in L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R})$ such that for all $\alpha = 1, 2$, the two-scale limit χ^f arising in (4.6) fulfills

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon} \rightharpoonup \chi_{\alpha 3}^f(x, y) \chi_D(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial x_3}(x) y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, y) \right) \chi_D(y). \quad (4.44)$$

Proof

By Lemma 3.1, the sequence $c_\alpha^\varepsilon + \varepsilon g_\alpha^\varepsilon$ is bounded in $L^2(\omega; H_0^1(I))$ while the sequence g_α^ε is bounded in $L^2(\Omega)$. Hence, extracting a subsequence of ε , one may find $c_\alpha(x, y)$ and $k_\alpha(x, y)$ both in $L^2(\Omega \times Y)$ such that

$$c_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup c_\alpha, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial c_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial g_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup k_\alpha. \quad (4.46)$$

Let $\phi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$ be a test function. Extending ψ to the whole of \mathbb{R}^2 by Y -periodicity, we get by an integration by parts and the use of (4.45) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial c_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial g_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = - \int_{\Omega} (c_\alpha^\varepsilon + \varepsilon g_\alpha^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\ \rightarrow - \int_{\Omega} \int_D c_\alpha(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi(y) dx dy. \end{cases} \quad (4.47)$$

As the first integral in (4.47) tends also, by virtue of (4.42), to $\int_{\Omega} \int_D k_\alpha(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy$, we obtain the following equality

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial x_3} = k_\alpha \quad \text{in } \Omega \times D, \quad (4.48)$$

which leads to $c_\alpha \in L^2(\omega \times D; H^1(I))$. Since $c_\alpha^\varepsilon + \varepsilon g_\alpha^\varepsilon$ vanishes on $\Gamma_0 = \Omega_{-\frac{1}{2}} \cup \Omega_{\frac{1}{2}}$, the integration by parts in (4.47) remains true when passing to the limit by choosing test functions successively in the form

$$\psi(y) \in \mathcal{D}(D), \quad \phi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \phi = 0 \quad \text{on } \Gamma_N \cup \Omega_{-\frac{1}{2}}, \quad (4.49)$$

and

$$\psi(y) \in \mathcal{D}(D), \quad \phi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \phi = 0 \quad \text{on } \Gamma_N \cup \Omega_{\frac{1}{2}}. \quad (4.50)$$

The choice (4.49) leads to $c_\alpha(\cdot, y) = 0$ on $\Omega_{\frac{1}{2}}$ while the choice (4.50) gives $c_\alpha(\cdot, y) = 0$ on $\Omega_{-\frac{1}{2}}$. Hence $c_\alpha(\cdot, y) = 0$ on Γ_0 in such a way that

$$c_\alpha \in L^2(\omega \times D; H_0^1(I)). \quad (4.51)$$

We now claim that there exist $c(x), d_1, d_2 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ such that for each $\alpha \in \{1, 2\}$,

$$c_\alpha(x, y) = c(x) y_\alpha^R + d_\alpha(x) \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.52)$$

Indeed, for all test function $\phi(x) \psi(y)$ with $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\psi \in \mathcal{D}(D)$, we get for each $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial u_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{F_{\varepsilon}} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \frac{\partial u_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\
& \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} (u_{\alpha}^{\varepsilon} - c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} - d_{i\alpha}^{\varepsilon}(x_3)) \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \frac{1}{\varepsilon} (c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R}) \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\
& \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \frac{1}{\varepsilon} (c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R}) \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\
& \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^2 \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) - \int_I \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \int_{D_{\varepsilon}^i} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} c_i^{\varepsilon}(x_3) x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}} \right) dx = \\
& \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^2 \frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx - \int_{\Omega} \varepsilon c_{\alpha}^{\varepsilon}(x) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}} \right) dx.
\end{aligned} \right. \quad (4.53)$$

From (4.53), we obtain

$$\left\{ \begin{aligned}
& 2 \int_{\Omega} e_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \chi_{F_{\varepsilon}} \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}^{\varepsilon}}{\partial x_{\alpha}} \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \\
& \int_{\Omega} \sum_{i \in I_{\varepsilon}} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_{i\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x_{\beta}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} + \frac{\partial w_{i\beta}^{\varepsilon}}{\partial x_{\alpha}} \chi_{D_{\varepsilon}^i} \right) \phi(x) \psi\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) dx \\
& - \int_{\Omega} \varepsilon \left(c_{\alpha}^{\varepsilon}(x) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}} \right) + c_{\beta}^{\varepsilon}(x) \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} \right) \right) dx.
\end{aligned} \right. \quad (4.54)$$

Estimate (3.4) implies that the sequence $e_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \chi_{F_{\varepsilon}}$ strongly converges to zero in $L^2(\Omega)$ so that its two-scale limit is also equal to zero. Hence, passing to the two-scale limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ in (4.54) and bearing in mind that ϕ is arbitrary in $\mathcal{D}(\Omega)$, we infer

$$\int_D \left(c_{\alpha}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}} + c_{\beta}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} \right) dy = 0, \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, \quad (4.55)$$

which leads to the conclusion that (c_1, c_2) is a locally two-dimensional rigid displacement: there exist some distributions $c(x)$ and $d_{\alpha}(x)$ which satisfy (4.52). From (4.51) and (4.52), we deduce that $c(x), d_{\alpha} \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ for $\alpha = 1, 2$.

Finally to prove (4.44), we need the following lemma which extends the two-scale convergence to bounded sequences in $H^{-1}(I; L^2(\omega))$.

Lemma 4.3

Let t^{ε} be a bounded sequence in $H^{-1}(I; L^2(\omega))$. Then, one can extract a subsequence still denoted by t^{ε} which two-scale converges in the following sense : There exists t in $H^{-1}(I; L^2(\omega \times Y))$ such that

$$\left\langle t^{\varepsilon}, \phi\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) \right\rangle \rightarrow \langle t(x, y), \phi(x, y) \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)), \quad (4.56)$$

where the brackets denote the duality in $\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y))$.

Proof

By hypothesis, we can find a bounded sequence h^{ε} in $L^2(I; L^2(\omega))$ such that :

$$t^{\varepsilon} = \frac{\partial h^{\varepsilon}}{\partial x_3}, \quad (4.57)$$

the sequence h^ε being bounded in $L^2(\Omega)$.

We can extract a subsequence and find $h \in L^2(\Omega \times Y)$ such that $h^\varepsilon \rightharpoonup h$. Therefore,

$$\begin{cases} \langle t^\varepsilon, \phi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rangle = \langle \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_3}, \phi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rangle = - \int_{\Omega} h^\varepsilon(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) dx \\ \rightarrow - \int_{\Omega} \int_Y h(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x, y) dx dy = \langle \frac{\partial h}{\partial x_3}(x, y), \phi(x, y) \rangle. \end{cases} \quad (4.58)$$

Lemma 4.3 is then proved if one define the function t by $t = \frac{\partial h}{\partial x_3}$ which belongs to $H^{-1}(I; L^2(\omega \times Y))$ and fulfills (4.56). Lemma 4.3 is proved.

We are now in a position to complete the proof of Proposition 4.2 by identifying the two-scale limits $\chi_{\alpha 3}^f$ of the sequences $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon}$ for $\alpha = 1, 2$. We choose a test function $\phi \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$, ψ being extended by periodicity to the whole of \mathbb{R}^2 , and then we use the definitions (3.2),(3.3) and an integration by parts to get:

$$\begin{cases} 2 \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx \\ = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \left(\varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial c_i^\varepsilon}{\partial x_3} x_{i\alpha}^{\varepsilon R} + \varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx \\ = \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \left(\varepsilon \frac{\partial w_{i\alpha}^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial c_i^\varepsilon}{\partial x_3} x_{i\alpha}^{\varepsilon R} + \varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) dx \\ = - \int_I \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} \left(\left(\varepsilon w_{i\alpha}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} c_i^\varepsilon x_{i\alpha}^{\varepsilon R} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi + \varepsilon v_i^\varepsilon \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) \right) dx \\ = - \int_{\Omega} \left(\left(\varepsilon w_\alpha^\varepsilon(x) + c_\alpha^\varepsilon(x) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi + \varepsilon v^\varepsilon \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) \right) dx. \end{cases} \quad (4.59)$$

From estimate (3.8) and Lemma 4.3, we know that there exists $\bar{v} \in H^{-1}(I; L^2(\omega \times Y))$ such that v^ε two-scale converges to \bar{v} in the sense of Lemma 4.3 so that passing to the limit as ε goes to zero and using (4.6), (4.45) and (4.52), we get:

$$2 \int_{\Omega} \int_D \chi_{\alpha 3}^f(x, y) \phi(x) \psi(y) dx dy = \int_{\Omega} \int_D (c(x) y_\alpha^R + d_\alpha(x)) \psi(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) dx dy + \langle \bar{v}, \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \rangle. \quad (4.60)$$

This means that the following identity holds in the sense of $\mathcal{D}'(\Omega \times D)$:

$$2\chi_{\alpha 3}(x, y) = \frac{\partial c}{\partial x_3}(x) y_\alpha^R + \frac{\partial d_\alpha}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha}(x, y) \quad \text{in } \Omega \times D, \quad (4.61)$$

which can be also written using the summation convention in the notation $y_\beta \frac{\partial d_\beta}{\partial x_3}(x)$, as

$$2\chi_{\alpha 3}(x, y) = \frac{\partial c}{\partial x_3}(x) y_\alpha^R + \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (\bar{v}(x, y) + y_\beta \frac{\partial d_\beta}{\partial x_3}(x)) \quad \text{in } \Omega \times D. \quad (4.62)$$

Defining v_3 as $v_3(x, y) = \bar{v}(x, y) + y_\beta \frac{\partial d_\beta}{\partial x_3}(x)$ and taking into account the fact that $\chi_{\alpha 3}(x, y)$, $\frac{\partial c}{\partial x_3}$ and $\frac{\partial d_\beta}{\partial x_3}$ are all in $L^2(\Omega \times D)$, we see from (4.62) that

$$\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, y) \in L^2(\Omega \times D), \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (4.63)$$

Of course, v_3 is defined up to a constant not depending on y so that we infer

$$v_3(x, y) \in L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}),$$

and v_3 satisfies (4.44). The proof of Proposition 4.2 is now complete.

Remark 4.1

At this stage of the proofs, one can conclude that the sequences of the rescaled strain tensors $\varepsilon e(u^\varepsilon)\chi_{M^\varepsilon}(x)$ and $\frac{1}{\varepsilon}e(u^\varepsilon)\chi_{F^\varepsilon}(x)$ behave as

$$\begin{cases} \varepsilon e(u^\varepsilon)\chi_{M^\varepsilon}(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix} \chi_{Y \setminus D}(\frac{x'}{\varepsilon}) + \dots \\ \frac{1}{\varepsilon}e(u^\varepsilon)\chi_{F^\varepsilon}(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \end{pmatrix} \chi_D(\frac{x'}{\varepsilon}) + \dots \end{cases}$$

In terms of the displacements u^ε , it would mean that u^ε behaves at least formally as

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = u_\alpha^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + z_\alpha(x) + \varepsilon\psi_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon v_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 w_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \dots, \\ u_3^\varepsilon(x) = u_3^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon Z_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 v_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \dots \end{cases}$$

The function $\psi_\alpha(x, y) := -y_\gamma \theta(y) \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\gamma}(x)$ where $\theta \in \mathcal{D}(Y)$, $\theta = 1$ in D , is introduced in order to have $e_{\alpha\beta}(z) + e_{\alpha\beta}^y(\psi) = 0$ in $\Omega \times D$.

The above expansions are justified by the following convergence result which is our corrector result.

Proposition 4.3

Assume that the limit (u^0, v, w, z) is such that the limits arising in the right hand sides of (2.2)-(2.6) belong to $L^2(\Omega; C_\#(Y))$. Then, the following strong convergence holds true:

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{1}{\varepsilon}e(u^\varepsilon)(x) - h^\varepsilon(x) \right|^2 \chi_{F^\varepsilon}(x') + \left| \varepsilon e(u^\varepsilon)(x) - k^\varepsilon(x) \right|^2 \chi_{M^\varepsilon}(x') \right) dx \rightarrow 0, \quad (4.64)$$

where h^ε and k^ε are defined by:

$$h^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \end{pmatrix}, \quad k^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Proof

The assumption that the limits are sufficiently regular so that they belong to the space $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ allows us to use the strong two-scale convergence (see [1]) to pass to the two-scale limit in the product of two sequences so that using twice hypothesis (1.10) on the tensor A , the first one with the choice $e = (\frac{1}{\varepsilon}e(u^\varepsilon)(x) - h^\varepsilon(x))\chi_{F^\varepsilon}(x')$ and the second one with the choice $e = (\varepsilon e(u^\varepsilon)(x) - k^\varepsilon(x))\chi_{M^\varepsilon}(x')$ together with the limit problem (2.8) in which we choose $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) = (u^0, v, w, z)$, we get (4.65).

Remark also that when computing these tensors using the above ansatz, additional terms which were not found in section 4 as two-scale limit of any quantity appear. Such is the case for instance for the terms $e_{\alpha\beta}^x(c)$ where $c = (c_1, c_2)$ is defined componentwise by (4.52) or the terms $\frac{\partial z_3}{\partial x_\alpha}$ which arise when computing the derivative $\frac{\partial Z_3}{\partial x_\alpha}$. The following lemma shows that such derivatives have not any contribution in the homogenized problem so that the only functions which will appear at the limit are those already met as a two-scale limit of some quantity.

Lemma 4.4

For each $\alpha, \beta = 1, 2$, the sequences $\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} A_{\alpha\beta kl} e_{kl}(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon}$, $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} A_{\alpha 3 kl} e_{kl}(u^\varepsilon) \chi_{F^\varepsilon}$ are bounded in $L^2(\Omega)$ and their two-scale limits $\sigma_{\alpha\beta}(x, y)$ and $\sigma_{\alpha 3}$ are such that :

$$\int_D y_1 \sigma_{22} dy = \int_D y_2 \sigma_{11} dy = \int_D y_\alpha \sigma_{12} dy = \int_D \sigma_{\alpha 3} dy = 0, \quad \forall \alpha = 1, 2, \quad (4.66)$$

$$\int_D y_\alpha \sigma_{\alpha 3} dy = \int_D (y_1 \sigma_{23} + y_2 \sigma_{13}) dy = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (4.67)$$

Proof

Due to hypothesis (1.9) on the boundedness of the coefficients A_{ijkl} of the tensor A and due to estimate (3.4), we infer that the sequences $\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon$, $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon$ are bounded in $L^2(\Omega)$ for all $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$. For $\alpha = 1, 2$, let $\psi_\alpha(y) \in \mathcal{D}(Y)$ and let $\phi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. Extending ψ_α by Y -periodicity to the whole of \mathbb{R}^2

and taking $\begin{pmatrix} \varepsilon \phi(x) \psi_1(\frac{x'}{\varepsilon}) \\ \varepsilon \phi(x) \psi_2(\frac{x'}{\varepsilon}) \\ 0 \end{pmatrix}$ as a test function in (1.14), we get :

$$\begin{cases} \int_\Omega \sigma_{11}^\varepsilon \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \psi_1 + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \right) + \sigma_{22}^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \psi_2 + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right) + \right. \\ \left. \sigma_{12}^\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \psi_1 + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \psi_2 + \phi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) + \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi_\alpha \right) dx \\ \left. + \int_\Omega \varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} A_{ijkl}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{kl}(u^\varepsilon) e_{ij} \left(\begin{pmatrix} \varepsilon \phi(x) \psi_1(\frac{x'}{\varepsilon}) \\ \varepsilon \phi(x) \psi_2(\frac{x'}{\varepsilon}) \\ 0 \end{pmatrix} \right) dx = \int_\Omega \varepsilon f_\alpha \phi \psi_\alpha dx. \end{cases} \quad (4.68)$$

Multiplying equation (4.68) by ε and then letting $\varepsilon \rightarrow 0$, we get at the limit :

$$\int_\Omega \int_D \left(\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) dy \phi(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Y), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (4.69)$$

so that

$$\int_D \left(\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) dy = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Y). \quad (4.70)$$

If we choose $\psi_1 = 0$ and $\psi_2 = y_1^2$ in D , we have

$$\int_D y_1 \sigma_{12} dy = 0. \quad (4.71)$$

With $\psi_2 = 0$ and $\psi_1 = y_2^2$ in D , we get

$$\int_D y_2 \sigma_{12} dy = 0. \quad (4.72)$$

With $\psi_2 = 0$ and $\psi_1 = y_1 y_2$ in D , we get

$$\int_D (y_2 \sigma_{11} + y_1 \sigma_{12}) dy = 0. \quad (4.73)$$

With $\psi_1 = 0$ and $\psi_2 = y_1 y_2$ in D , we get

$$\int_D (y_1 \sigma_{22} + y_2 \sigma_{12}) dy = 0. \quad (4.74)$$

From (4.71)-(4.74) we deduce successively:

$$\int_D y_1 \sigma_{22} dy = 0, \quad (4.75)$$

and

$$\int_D y_2 \sigma_{11} dy = 0. \quad (4.76)$$

Choosing a test function in (1.14) in the form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \phi(x) \psi(\frac{x'}{\varepsilon}) \end{pmatrix}$ with ϕ and ψ as above, we arrive at the following equation after passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\Omega} \int_D \sigma_{\alpha 3} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} dy \phi(x) dx = 0.$$

Taking $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ such that $\frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} = 1$ in D for each $\alpha = 1, 2$, we obtain the two last equalities of (4.66). Choosing successively $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ such that $\psi = y_{\beta}^2$ in D and then such that $\psi = y_1 y_2$ in D , we obtain the equalities arising in (4.67).

The next lemma will be helpful in the proof of the well-posedness of the homogenized problem.

Lemma 4.5

The space \mathcal{S} is a Hilbert space when equipped with the norm

$$\left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta} (\| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \| \frac{\partial u_3^0}{\partial y_{\alpha}} \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \| \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \| e_{\alpha\beta}^y(w) \|_{L^2(\Omega \times D)}^2) + \| \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.77)$$

Proof

Since $\mathcal{S} = \mathcal{U}^0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}$, we see that it is sufficient in view of the definitions (1.21)-(1.24) of the spaces $\mathcal{U}^0, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ and \mathcal{Z} , to prove that the norm $\left(\sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \| \frac{\partial u_3^0}{\partial y_{\alpha}} \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ is equivalent to the norm induced by $(L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))^3$ on \mathcal{U}^0 , the norm $\left(\sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ is equivalent to the norm $\left(\sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \| \frac{\partial c}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ which is the natural norm of the space \mathcal{V} , the norm $\left(\sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(w) \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ is equivalent to the norm induced on \mathcal{W} by $(L^2(\Omega; H^1(D)))^2$

and the norm $\| \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega \times Y)}$ is equivalent to the norm induced by $(L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega \times D; H_0^1(I))$ on \mathcal{Z} .

We begin with \mathcal{U}^0 and we first remark that $\left(\sum_{\alpha} \left\| \frac{\partial u_3^0}{\partial y_{\alpha}} \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ is actually an equivalent norm to the one induced by $L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ on the subspace $\{u_3^0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)), u_3^0 = 0 \text{ in } \Omega \times D\}$. Indeed, we have just to remark that the classical Poincaré-Wirtinger inequality

$$\| \bar{u}(y) - \frac{1}{|D|} \int_D \bar{u}(y) dy \|_{L^2(Y)} \leq C \| \nabla'_y \bar{u} \|_{(L^2(Y))^2}, \quad \forall \bar{u} \in H^1(Y),$$

(where C is a constant which is independent of \bar{u}) applied to $\bar{u} = u_3^0(x, \cdot)$ for $x \in \Omega$, becomes here

$$\| u_3^0(x, \cdot) \|_{L^2(Y)}^2 \leq C \| \nabla'_y u_3^0(x, \cdot) \|_{(L^2(Y))^2}, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

since $u_3^0(x, y) = 0$ in $\Omega \times D$. Integrating the last inequality with respect to $x \in \Omega$, we get the announced equivalence between the two norms.

To complete the part of the proof related to \mathcal{U}^0 it remains to prove that there exists a positive constant C such that,

$$\sum_{\alpha} \| u_{\alpha}^0 \|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq C \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad \forall u^0 \in \mathcal{U}^0. \quad (4.78)$$

To establish (4.78), we first show an analogous local inequality, namely,

$$\sum_{\alpha} \| u_{\alpha}^0 \|_{L^2(Y)} \leq C \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(Y)} \quad \forall u^0 \in \{u^0 \in (H_{\#}^1(Y))^2, u^0 = 0 \text{ in } D\}. \quad (4.79)$$

We argue by contradiction and we assume that (4.79) is false so that one can find a sequence $(u^n)_n \in \{u^0 \in (H_{\#}^1(Y))^2, u^0 = 0 \text{ in } D\}$ such that

$$\sum_{\alpha} \| u_{\alpha}^n \|_{L^2(Y)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^n) \|_{L^2(Y)} \rightarrow 0. \quad (4.80)$$

The classical bidimensional Korn inequality gives the existence of a constant C such that

$$\sum_{\alpha} \| u_{\alpha}^n \|_{H^1(Y)} \leq C \sum_{\alpha, \beta} (\| u_{\alpha}^n \|_{L^2(Y)} + \| e_{\alpha\beta}^y(u^n) \|_{L^2(Y)}). \quad (4.81)$$

From (4.80) and (4.81), we conclude that the sequence (u_1^n, u_2^n) is bounded in $(H^1(Y))^2$ so that, up to a subsequence still denoted by the subscript n , one can assume that u_{α}^n converges weakly in $H^1(Y)$ and strongly in $L^2(Y)$ to some function u_{α} of $H_{\#}^1(Y)$. From (4.80), we get $e_{\alpha\beta}(u) = 0, \forall \alpha, \beta = 1, 2$. This means that (u_1, u_2) corresponds to a rigid displacement; hence, there exist three constants c and d_{α} such that $u_{\alpha}(y) = cy_{\alpha}^R + d_{\alpha}, \forall y \in Y$, for each $\alpha = 1, 2$. Due to the periodicity of u_{α} , we infer $c = 0$ so that $u_{\alpha}(y) = d_{\alpha} \forall y \in Y$. Since $u_{\alpha}(y) = 0 \forall y \in D$, we get $d_{\alpha} = 0$ in such a way $u_{\alpha} = 0$. We have thus proved that for each $\alpha = 1, 2$, the sequence u_{α}^n strongly converges in $L^2(Y)$ to zero, which contradicts (4.80). Hence, inequality (4.79) holds true. We apply it for $u^0(x, \cdot)$ for almost all $x \in \Omega$; the constant C arising in (4.79) being independent of x , we can integrate that inequality over Ω to obtain

$$\sum_{\alpha} \| u_{\alpha}^0 \|_{L^2(\Omega \times Y)} \leq C \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad \forall u^0 \in \mathcal{U}^0. \quad (4.82)$$

On the other hand, applying once again the Korn inequality we get the existence of a constant C such that for almost all $x \in \Omega$,

$$\| u^0(x, \cdot) \|_{H^1(Y)}^2 \leq C (\| u^0(x, \cdot) \|_{L^2(Y)}^2 + \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0)(x, \cdot) \|_{L^2(Y)}^2). \quad (4.83)$$

Integrating (4.83) over Ω and using (4.82), we arrive at

$$\| u^0 \|_{H^1(Y)}^2 \leq C \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(u^0) \|_{L^2(Y)}^2, \quad \forall u^0 \in \mathcal{U}^0. \quad (4.84)$$

The converse inequality being obvious, we conclude to the equivalence between the norm induced by $(L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)))^3$ on \mathcal{U}^0 with the one introduced here.

We now prove the equivalence of the norms on the space \mathcal{V} . We first remark that the canonical norm of the space \mathcal{V} is given by $(\| \frac{\partial c}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla'_y v_3 \|_{(L^2(\Omega \times D))^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ so that we only have to prove the existence of a positive constant C such that for all $v = (c(x)y_\alpha^R, v_3) \in \mathcal{V}$,

$$\sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \| \frac{\partial c}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \|_{L^2(\Omega \times D)}^2. \quad (4.85)$$

Once again, we argue by contradiction : if (4.85) is false, then one can find a sequence $(c^n y_\alpha^R, v_3^n) \in \mathcal{V}$ such that :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3^n}{\partial y_\alpha} \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \| \frac{\partial c^n}{\partial x_3} \|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \quad \forall n, \\ \sum_{\alpha} \| \frac{\partial v_3^n}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^n}{\partial x_3} y_\alpha^R \|_{L^2(\Omega \times D)}^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.86)$$

Define

$$g_\alpha^n = \frac{\partial v_3^n}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^n}{\partial x_3} y_\alpha^R, \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (4.87)$$

From (4.87), we get :

$$\frac{\partial g_2^n}{\partial y_1} - \frac{\partial g_1^n}{\partial y_2} = 2 \frac{\partial c^n}{\partial x_3}, \quad (4.88)$$

so that multiplying by a function $\phi \in \mathcal{D}(D)$, $\int_D \phi \, dy = 1$, and integrating over $\Omega \times D$, we get :

$$\int_{\Omega} | \frac{\partial c^n}{\partial x_3} |^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} \int_D | g_1^n \frac{\partial \phi}{\partial y_2} - g_2^n \frac{\partial \phi}{\partial y_1} |^2 \, dx dy, \quad (4.89)$$

from which we get easily that $\frac{\partial c^n}{\partial x_3} \rightarrow 0$, since g_α^n converges strongly to zero in $L^2(\Omega \times D)$ for all $\alpha = 1, 2$.

Thus, $\frac{\partial v_3^n}{\partial y_\alpha} = g_\alpha^n - \frac{\partial c^n}{\partial x_3} y_\alpha^R$ strongly converges to zero in $L^2(\Omega \times D)$. This is in contradiction with the equality of (4.86). Hence the equivalence of the norms on \mathcal{V} is proved.

The proof of the equivalence of the norms on \mathcal{W} is similar to the corresponding proof related to \mathcal{U}^0 . We repeat the main argument here for the convenience of the reader. We first establish an inequality for functions not depending on the variable x , i.e., for functions in the space \mathcal{W}_0 defined by (1.23'). Moreover, due to the bidimensional Korn inequality, it is enough to prove :

$$\| w \|_{(L^2(Y))^2}^2 \leq C \sum_{\alpha, \beta} \| e_{\alpha\beta}^y(w) \|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \|_{L^2(Y)}, \quad \forall w \in \mathcal{W}_0. \quad (4.90)$$

We argue by contradiction. Assume that the inequality (4.90) is not true. One can find a sequence w^n in \mathcal{W}_0 such that :

$$\begin{cases} \|w^n\|_{(L^2(Y))^2} = 1, \quad \forall n, \\ \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(w^n)\|_{L^2(Y)} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.91)$$

Therefore, the bidimensional Korn inequality applied to $w^n = (w_1^n, w_2^n)$ implies that w^n is bounded in $(H^1(Y))^2$ so that we can assume, possibly by extracting a subsequence, that w^n converges weakly in $(H^1(Y))^2$ and strongly in $(L^2(Y))^2$ to some function w . From (4.91), we get that $e_{\alpha\beta}(w) = 0$ for all $\alpha, \beta = 1, 2$. This means that w is of the form $w_\alpha(y) = cy_\alpha^R + d_\alpha, \alpha = 1, 2$, where c and d_α are real numbers. This means that w is a rigid displacement. On the other hand, by construction, the space \mathcal{W}_0 is orthogonal (in the sense of the inner product of $L^2(Y)$) to the space of rigid displacement and then w must also belong to the orthogonal space. Therefore, $w = 0$. This contradicts the equality in (4.91). Applying (4.90) for $w(x, \cdot)$ where $x \in \Omega$ and integrating over Ω , we get the existence of a positive constant C such that:

$$\|w\|_{(L^2(\Omega; H^1(D)))^2} \leq C \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(w)\|_{L^2(\Omega \times D)}, \quad \forall w \in \mathcal{W}, \quad (4.92)$$

which proves the equivalence of the norms on \mathcal{W} since the converse inequality is obviously true.

To complete the proof of the lemma, it remains to prove the equivalence of the norms on the space \mathcal{Z} . We first remark that the natural norm on \mathcal{Z} is the one induced by the space $(L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega \times D; H_0^1(I))$ which we denote by $\|z = (z_\alpha, Z_3)\|_0^2 = \sum_\alpha \|\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x_3^2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega \times D)}^2$. Since $Z_3(x, y) = -y_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3}(x) + z_3(x)$ in $\Omega \times D$ and since $\int_D y_1 y_2 dy = \int_D y_1 dy = \int_D y_2 dy = 0$, it is immediate to check that the norm $\|\cdot\|_0$ is equivalent to the norm $\|z = (z_\alpha, z_3)\|_1 = \|\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega \times D)}$. It amounts to say that $\|\cdot\|_0$ is an equivalent norm to the norm $\left(\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x)\right)^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}$. In particular, there exists a positive constant C such that:

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x)\right)^2\right) dx \leq C \int_{\Omega \times D} \left(\frac{\partial Z_3}{\partial x_3}(x, y)\right)^2 dx dy, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \quad (4.93)$$

The proof of the lemma is now complete.

5. Proof of the Theorems

We begin with the proof of Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2.1

According to Remark 4.1 above and taking into account the two-scale limits obtained, we are led to take test function ϕ^ε in (1.14) in the form

$$\begin{cases} \phi_\alpha^\varepsilon(x) = \bar{u}_\alpha^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \bar{z}_\alpha(x) + \varepsilon \bar{\psi}_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon \bar{v}_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \bar{w}_\alpha(x, \frac{x'}{\varepsilon}), \\ \phi_3^\varepsilon(x) = \bar{u}_3^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon \bar{Z}_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \bar{v}_3(x, \frac{x'}{\varepsilon}), \end{cases} \quad (5.1)$$

where, denoting by $\theta(y) \in \mathcal{D}(Y)$ a function such that $\theta = 1$ in D :

$$\begin{aligned}\bar{u}^0 \in \bar{U} &:= \{\bar{u}^0 \in (\mathcal{D}(\Omega; C_{\#}^{\infty}(Y)))^3, \bar{u}^0 = 0 \text{ in } D\}, \\ \bar{z} \in \bar{\mathcal{Z}} &:= \{\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3), \bar{z}_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega), \exists \bar{z}_3 \in \mathcal{D}(\Omega), \bar{Z}_3 = \bar{z}_3 - \theta(y)y_\gamma \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial x_\gamma} \text{ in } \Omega \times Y\}, \\ \bar{\psi}_\alpha(x, y) &= -y_\gamma \theta(y) \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial x_\gamma} \text{ in } \Omega \times Y, \quad \forall \alpha = 1, 2, \\ \bar{v} \in \bar{\mathcal{V}} &:= \{\bar{v} = (\bar{v}_\alpha, \bar{v}_3) | \bar{v}_3 \in \mathcal{D}(\Omega; \bar{\mathcal{D}}), \exists \bar{c} \in \mathcal{D}(\Omega), \bar{v}_\alpha(x, y) = \theta(y)\bar{c}(x)y_\alpha^R\}, \\ \bar{w} \in \bar{\mathcal{W}} &:= \{\bar{w} = (\bar{w}_\alpha, 0) | \bar{w}_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega; \bar{\mathcal{D}})\},\end{aligned}$$

We extend that functions by Y -periodicity to the whole of \mathbb{R}^2 .

It is immediate to check that

$$e_{\alpha\beta}(\bar{z}) + e_{\alpha\beta}^y(\psi) = \frac{\partial \bar{z}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial y_\alpha} = e_{\alpha\beta}^y(\bar{v}) = 0 \text{ in } \Omega \times D.$$

In addition, we get:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= (e_{\alpha\beta}^x(\bar{v}) + e_{\alpha\beta}^x(\bar{\psi}) + \varepsilon e_{\alpha\beta}^x(\bar{w}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})) \chi_{F_\varepsilon}, \\ \frac{2}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= \left(\frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\alpha}{\partial x_3} \right) \chi_{F_\varepsilon}, \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= \left(\frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \right) \chi_{F_\varepsilon}, \\ \varepsilon e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= (\varepsilon (e_{\alpha\beta}^x(\bar{u}^0 + \bar{z}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{\psi}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{v} + \varepsilon \bar{w})) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}^0) + \varepsilon^2 e_{\alpha\beta}^x(\bar{v} + \bar{\psi}) \\ &\quad + \varepsilon^3 e_{\alpha\beta}^x(\bar{w})) \chi_{M_\varepsilon}, \\ 2\varepsilon e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= \left(\frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial y_\alpha} + \varepsilon (\varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_\alpha} + 2e_{\alpha 3}^x(\bar{u}^0 + \varepsilon \bar{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{z}_\alpha + \varepsilon \bar{v}_\alpha + \varepsilon^2 \bar{w}_\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(\varepsilon \bar{v}_3 + \bar{Z}_3) \right) \chi_{M_\varepsilon}, \\ \varepsilon e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= \left(\varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \right) \right) \chi_{M_\varepsilon}. \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

The function ϕ^ε is an admissible test function in (1.14). Hence, passing to the two-scale limit in (1.14) using such test function and bearing in mind hypothesis (1.9) which implies that $\psi_{ij}^\varepsilon(x, y) = A_{ijkl} e_{kl}(\phi^\varepsilon)$ are admissible test functions in the sense of two-scale convergence, we get the limit problem (2.8) valid for all regular $(\bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) \in \bar{U} \times \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{W}} \times \bar{\mathcal{Z}}$ with the help of convergences (2.2)-(2.7) and of Lemma 4.4. By a density argument, we infer that (2.8) still holds true for $(\bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{S}$.

Finally, the use of hypotheses (1.10) and (1.11) and the Lax-Milgram Theorem allows us to conclude that (2.8) is a well posed problem on \mathcal{S} equipped with the norm (4.77).

Next, we prove Corollary 2.1.

Proof of Corollary 2.1

To prove the corollary it is sufficient to use function test in (2.8) with $\bar{u} = \bar{z} = \bar{w} = 0$ and $\bar{v} = v$ so that taking into account hypothesis (1.16), we infer that v satisfies the following equality:

$$\int_{\Omega} \int_D A_{\alpha 3 \gamma 3} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\gamma^R \right) \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) dx dy = 0. \quad (5.3)$$

The coerciveness of the 2×2 matrix $(A_{\alpha 3 \gamma 3})_{\gamma, \delta}$ which is a consequence of assumption (1.10) leads to the identity

$$\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R = 0 \text{ in } \Omega \times D, \quad \forall \alpha = 1, 2, \quad (5.4)$$

from which we get that $v = 0$ (see the proof of Lemma 4.5). The proof of Corollary 2.1 is complete.

Proof of Theorem 2.2

The first variational equation in (2.9) wearing on (v, w, z) is a straightforward consequence of system (2.8) in which we choose $\bar{u} = 0$. The existence and the uniqueness of the solution (v, w, z) of that

equation are a consequence of the strong ellipticity of the tensor A and the Lax-Milgram Lemma applied in the space $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Z}$ which is a Hilbert space when equipped with the norm

$$\left(\sum_{\alpha, \beta} \left\| \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right\|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \left\| e_{\alpha\beta}^y(w) \right\|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \left\| \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega \times D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

by virtue of Lemma 4.5.

Now, we make explicit the link between the loading terms f , the weak limit u of the displacements u^ε and their two-scale limit $u^0(x, y)$. By virtue of (4.8), we have the equalities $u_\alpha(x) = \int_Y u_\alpha^0(x, y) dy + z_\alpha(x)$ and $u_3(x) = \int_Y u_3^0(x, y) dy$. We claim that u^0 may be expressed as $u^0(x, y) = f_1(x)u^{(1)}(x, y) + f_2(x)u^{(2)}(x, y) + f_3(x)u^{(3)}(x, y)$ where for each $i = 1, 2, 3$, the function $u^{(i)}$ is the solution of the last equation in Theorem 2.2. Indeed, choosing $\bar{v} = \bar{w} = \bar{z} = 0$ and $\bar{u}(x, y) = \phi(x)\psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \{\psi \in (H_{\#}^1(Y))^3, \psi = 0 \text{ in } D\}$ in (2.8), we infer that u^0 solves the following equation:

$$\begin{cases} \text{a.e. } x \in \Omega, u^0(x, \cdot) \in \{\psi \in (H_{\#}^1(Y))^3, \psi = 0 \text{ in } D\}, \\ \int_{Y \setminus D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(u^0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\psi) & \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy \\ = f_i(x) \int_{Y \setminus D} \psi_i(y) dy, \quad \forall \psi \in \{\psi \in (H_{\#}^1(Y))^3, \psi = 0 \text{ in } D\}, \end{cases} \quad (5.5)$$

the unique solution of which is easily seen to be $u^0(x, \cdot) = f_1(x)u^{(1)}(x, \cdot) + f_2(x)u^{(2)}(x, \cdot) + f_3(x)u^{(3)}(x, \cdot)$ where $u^{(i)}$ solves the equation given in (2.9). Indeed, the existence and the uniqueness of $u^{(i)}(x, \cdot)$ for almost all $x \in \Omega$ is an immediate consequence of the strong ellipticity of the tensor A and the Lax-Milgram lemma applied in the Hilbert space $\{\psi \in (H_{\#}^1(Y))^3, \psi = 0 \text{ in } D\}$ endowed with the norm

$\sum_{\alpha\beta} \left(\left\| e_{\alpha\beta}^y(\psi) \right\|_{L^2(Y \setminus D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha} \right\|_{L^2(Y \setminus D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. On the other hand, using the regularity hypothesis on

the coefficients of A , we easily obtain that $u^{(i)}$ belongs to $L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)) \cap \mathcal{U}^0$ so that bearing in mind hypothesis (1.11), we deduce that the sum $f_1(x)u^{(1)} + f_2(x)u^{(2)} + f_3(x)u^{(3)}$ belongs to \mathcal{U}^0 . To end the proof of the identity $u^0(x, \cdot) = f_1(x)u^{(1)}(x, \cdot) + f_2(x)u^{(2)}(x, \cdot) + f_3(x)u^{(3)}(x, \cdot)$, it suffices to remark that the latest sum is actually a solution for (5.5) and that $u^0(x, \cdot)$ is unique.

To get the algebraic equations given in Theorem 2.2, it suffices to take the average over Y in the equality $u^0(x, y) = f_1(x)u^{(1)}(x, y) + f_2(x)u^{(2)}(x, y) + f_3(x)u^{(3)}(x, y)$ and to replace it in the equalities $u_\alpha(x) = \int_Y u_\alpha^0(x, y) dy + z_\alpha(x)$ and $u_3(x) = \int_Y u_3^0(x, y) dy$.

The proof of Theorem 2.2 is complete.

Proof of Theorem 2.3

The subject of Theorem 2.3 is to express the pair (v, w) in terms of the displacements z_i through formulas (2.11). It is therefore natural to consider the equations solved by v and w for a given $z = (z_1, z_2, z_3)$. Taking $\bar{z} = 0$ in the first variational equation of (2.9) and bearing in mind that $-\frac{\partial Z_3}{\partial x_3} =$

$y_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} + y_2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial z_3}{\partial x_3}$, we obtain that (v, w) is the unique solution of:

$$\left\{ \begin{array}{l} (v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} + y_2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} dx dy, \\ \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

It is easy to see that (v, w) may be obtained as the sum $(v, w) = (v^{(1)}, w^{(1)}) + (v^{(2)}, w^{(2)}) + (v^{(3)}, w^{(3)})$ where $(v^{(1)}, w^{(1)}) = ((c^{(1)}(x)y_\alpha^R, v_3^{(1)}), w^{(1)})$ is the unique solution of

$$\left\{ \begin{array}{l} (v^{(1)}, w^{(1)}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w^{(1)}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & 0 \end{pmatrix} dx dy, \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

while $(v^{(2)}, w^{(2)}) = ((c^{(2)}(x)y_\alpha^R, v_3^{(2)}), w^{(2)})$ and $(v^{(3)}, w^{(3)}) = ((c^{(3)}(x)y_\alpha^R, v_3^{(3)}), w^{(3)})$ are the unique solutions of the analogous equations obtained from (5.7) by replacing the right hand side respectively

$$\text{by } A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \text{ and } A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

In the sequel we show how to solve or more exactly how to express $(v_3^{(1)}, w^{(1)})$ assuming $c^{(1)}(x)$ as known. Of course, the same process may be successively applied to $(v_3^{(2)}, w^{(2)})$ and to $(v_3^{(3)}, w^{(3)})$ assuming $c^{(2)}(x)$ and $c^{(3)}(x)$ as known. We claim that

$$v_3^{(1)}(x, y) = \hat{v}_3^{(1)}(x, y) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} + \hat{v}_3(x, y) \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}, \quad w^{(1)}(x, y) = \hat{w}^{(1)}(x, y) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} + \hat{w}(x, y) \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}, \quad (5.8)$$

where $(\hat{v}_3^{(1)}(x, y), \hat{w}^{(1)}(x, y))$ and $(\hat{v}_3(x, y), \hat{w}(x, y))$ are respectively the unique solutions of the elementary problems (2.12) (with $\gamma = 1$) and (2.13). Indeed, if we consider $c^{(1)}(x)$ as known in equation (5.7), one can deduce obviously the following equation by choosing $\bar{c} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (v^{(1)}, w^{(1)}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w^{(1)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega \times D} \left(A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} y_\alpha^R \\ \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dx dy, \\ \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

On the other hand, if we multiply equation (2.12) (corresponding to the value $\gamma = 1$) by $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x)\phi(x)$ and equation (2.13) by $\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x)\phi(x)$ with an arbitrary function $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ and then we take the sum

of the both equations, we easily see with the help of a classical density argument that the right hand sides of (5.8) actually make a pair which is a solution of (5.9). Equality (5.8) is therefore proved since the right hand sides of (5.8) are made by functions which belong to $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ while the solution of (5.9) is unique.

Let us now consider the following problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} (d(x), v_3^{(0)}, w^{(0)}) \in L^2(\omega, L_m^2(I)) \times L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}) \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w^{(0)}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial y_\alpha} + d(x)y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial y_\alpha} + d(x)y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \bar{d}(x)y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \bar{d}(x)y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \bar{d}(x)y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \bar{d}(x)y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} dx dy, \\ \forall (\bar{d}, \bar{v}_3, \bar{w}) \in L^2(\omega, L_m^2(I)) \times L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}) \times \mathcal{W}, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

the space $L^2(\omega, L_m^2(I))$ being the subspace of functions u in $L^2(\Omega)$ satisfying $\int_I u(x', x_3) dx_3 = 0$ for almost all $x' \in \omega$.

Using similar arguments to those used in Lemma 4.5, one can prove that the space $L^2(\omega, L_m^2(I)) \times L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R})$ is a Hilbert space equipped with the norm $\sum_\alpha \left\| \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial y_\alpha} + d(x)y_\alpha^R \right\|_{L^2(\Omega)}$ so that the Lax-Milgram Theorem implies existence and uniqueness of the solution $(d(x), v_3^{(0)}, w^{(0)})$.

Equation (5.10) obviously still holds true if we take $\bar{d} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3}$ with any $\bar{c} \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ so that the uniqueness of $(d(x), v_3^{(0)}, w^{(0)})$ and the fact that $(\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}, v_3^{(1)}, w^{(1)}) \in L^2(\omega, L_m^2(I)) \times L^2(\Omega; H^1(D)/\mathbb{R}) \times \mathcal{W}$ imply the equality $(d(x), v_3^{(0)}, w^{(0)}) = (\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}, v_3^{(1)}, w^{(1)})$.

We now proceed to the last step of the proof seeking for $c^{(1)}$ in terms of the elementary solutions and of $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}$. We use the last equality and (5.8) in equation (5.10) with test function in the form $(\bar{d}, 0, 0)$ to get:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} \in L^2(\omega, L_m^2(I)), \\ \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}y_\alpha^R \\ \frac{1}{2}y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x) \bar{d}(x) dx dy = \\ \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(1)}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{v}_3^{(1)}}{\partial y_\alpha} & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}y_\alpha^R \\ \frac{1}{2}y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x) \bar{d}(x) dx dy, \\ \forall \bar{d} \in L^2(\omega, L_m^2(I)), \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Taking into account the definition (2.14) of \hat{a} and \hat{b}_1 together with Remark 2.3, we see that another way to write equation (5.11) is the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} \in L^2(\omega, L_m^2(I)), \\ \int_{\Omega} (\hat{a}(x) \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3} + \hat{b}_1(x) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x)) \bar{d}(x) dx = 0, \\ \forall \bar{d} \in L^2(\omega, L_m^2(I)). \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Using test function $\bar{d} = \psi(x')\phi(x_3)$ with arbitrary $\psi \in L^2(\omega)$ and with arbitrary $\phi \in L^2(I)$ such that $\int_I \phi(x_3)dx_3 = 0$ we infer from (5.12) that for almost all $x' \in \omega$,

$$\int_I \left(\hat{a}(x', x_3) \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3) + \hat{b}_1(x', x_3) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3) \right) \phi(x_3) dx_3 = 0, \quad (5.13)$$

so that almost everywhere in ω , the sum $\hat{a}(x', x_3) \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3) + \hat{b}_1(x', x_3) \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3)$ is orthogonal to the subspace $L_m^2(I)$ of all functions in $L^2(I)$ with zero average so that it reduces to a constant (with respect to x_3) $C_1(x')$. Hence,

$$\hat{a} \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3) + \hat{b}_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3) = C_1(x'). \quad (5.14)$$

The value of C_1 is determined by the condition $\int_I \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3) dx_3 = 0$ which leads to

$$C_1(x') = \frac{1}{\int_I \frac{1}{\hat{a}} dx_3} \int_I \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3) dx_3, \quad (5.15)$$

so that $\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3)$ is given by:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x', x_3) = \frac{1}{\hat{a} \int_I \frac{1}{\hat{a}} dx_3} \int_I \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3) dx_3 - \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2}(x', x_3). \quad (5.16)$$

By the same arguments we obtain the analogous formulas for $\frac{\partial c^{(i)}}{\partial x_3}(x', x_3)$ for $i = 1, 2$, namely

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial x_3}(x', x_3) = \frac{1}{\hat{a} \int_I \frac{1}{\hat{a}} dx_3} \int_I \frac{\hat{b}_2}{\hat{a}} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}(x', x_3) dx_3 - \frac{\hat{b}_2}{\hat{a}} \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2}(x', x_3). \quad (5.17)$$

and

$$\frac{\partial c^{(3)}}{\partial x_3}(x', x_3) = \frac{1}{\hat{a} \int_I \frac{1}{\hat{a}} dx_3} \int_I \frac{\hat{b}_3}{\hat{a}} \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', x_3) dx_3 - \frac{\hat{b}_3}{\hat{a}} \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x', x_3). \quad (5.18)$$

Bearing in mind the equality $(v, w) = (v^{(1)}, w^{(1)}) + (v^{(2)}, w^{(2)}) + (v^{(3)}, w^{(3)})$ which obviously implies $\frac{\partial c}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial c^{(3)}}{\partial x_3}(x)$, we deduce formulas (2.11) from (5.8), (5.16)-(5.18). The proof of Theorem 2.3 is now complete.

Proof of Theorem 2.4

Theorem 2.4 is actually a corollary of Theorem 2.2 and Theorem 2.3 from where it will be easily derived. Indeed, taking $\bar{v} = \bar{w} = 0$ in the first variational equation of (2.9), one obtains:

$$\left\{ \begin{array}{l} z \in \mathcal{Z}, \\ \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy = \int_{\Omega} f_\alpha(x) \bar{z}_\alpha(x) dx, \\ \forall \bar{z} \in \mathcal{Z}. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Therefore, one can use Theorem 2.3 to replace v and w in (5.19) by their expressions in terms of the elementary solutions; equation (2.18) follows then by taking the average with respect to y of the quantities depending on y in (5.19). More precisely, a simple calculation using formulas (2.11) gives us (the summation convention on repeated indices is used):

$$\begin{cases} e_{\alpha 3}(v)(x, y) = g_{\alpha}^{(\beta)}(x, y) \frac{\partial^2 z_{\beta}}{\partial x_3^2}(x) + g_{\alpha}^{(3)}(x, y) \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) + \\ \quad h_{\alpha}(x, y) \int_I (b_{\beta}(x) \frac{\partial^2 z_{\beta}}{\partial x_3^2}(x) + b_3(x) \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x)) dx_3, \\ e_{\alpha \beta}^y(w)(x, y) = k_{\alpha \beta}^{(\gamma)}(x, y) \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2}(x) + k_{\alpha \beta}^{(3)}(x, y) \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) + \\ \quad t_{\alpha \beta}(x, y) \int_I (b_{\gamma}(x) \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2}(x) + b_3(x) \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x)) dx_3, \end{cases} \quad (5.20)$$

where the coefficients $g_{\alpha}^{(i)}$, h_{α} , $k_{\alpha \beta}^{(i)}$ and $t_{\alpha \beta}$ are those given in Theorem 2.4. Hence, replacing $e_{\alpha 3}(v)$ and $e_{\alpha \beta}^y(w)$ in (5.19) by their expressions (5.20), we obtain equation (2.18).

Finally let us note that the existence and the uniqueness of the solution (z_1, z_2) of (2.18) may be obtained independently from the asymptotic process. Indeed, as we have just seen, the left hand side of (2.18) is nothing but another way to write the left hand side of equation (5.19) so that

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(a_{\delta}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2} + a_{\delta}^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_{\delta} \int_I (b_{\gamma} \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial^2 \bar{z}_{\delta}}{\partial x_3^2} + \\ \int_{\Omega} \left(a_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2} + a_3^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_3 \int_I (b_{\gamma} \frac{\partial^2 z_{\gamma}}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} = \\ \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy. \end{cases} \quad (5.21)$$

Using the first variational equation in (2.9) with $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}) = (v, w, 0)$, we get

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy = \\ \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha \beta}^y(w) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_{\alpha}^R \right) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy. \end{cases} \quad (5.22)$$

Combining (5.21) and (5.22), we infer with the help of inequality (4.93) and the strong ellipticity of the tensor A that the left hand side of (2.18) defines a symmetric coercive bilinear form on $(L^2(\omega; H_0^2(I))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)))$ equipped with the usual norm. As that bilinear form is obviously continuous and as $f_{\alpha} \in L^2(\Omega)$, the Lax-Milgram Theorem implies the existence and uniqueness of the solution (z_1, z_2, z_3) . This ends the proof of Theorem 2.4.

6. APPENDIX

Proof of the partial Korn inequality (3.23) (R. Monneau, F. Murat & A. Sili)

Throughout this appendix the generic variable will be denoted by $(y, x_3) \in D \times I$.

Let us first remark that the term $\frac{1}{|D|} \int_D z_3 - y_{\alpha} \frac{d}{dx_3} \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_{\alpha} \right)$ which appears in formula (3.23) is the third component of the projection z^0 in $(L^2(D \times I))^3$ of z on the set $BN(D \times I)$ of Bernoulli-Navier's displacements u , defined as (see for instance [9])

$$BN(D \times I) = \{(u_{\alpha}(y, x_3), u_3(y, x_3)) \in (H_{\Gamma_0}^1(D \times I))^3 : e_{\alpha \beta}(u) = e_{\alpha 3}(u) = 0\}, \quad (6.1)$$

Let $z \in \{z \in (H^1(D \times I))^3, z(y, -\frac{1}{2}) = z(y, \frac{1}{2}) = 0\}$. We denote by z_3^0 and z_α^2 the components of z^0 . Hence, we have:

$$\begin{cases} z_3^0 = \frac{1}{|D|} \int_D z_3 - y_\beta \frac{d}{dx_3} \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_\beta \right), \\ z_\alpha^2 = z_\alpha - \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_\alpha + y_\alpha^R \frac{\int_D y_\beta^R z_\beta}{\int_D \sum_\beta |y_\beta^R|^2} \right), \quad \alpha = 1, 2. \end{cases} \quad (6.2)$$

One has

$$(z - z^0)_3 = z_3 - \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_3 - y_\beta \frac{d}{dx_3} \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_\beta \right) \right).$$

Observe that $(z - z^0)_3$ belongs to $L^2(I; H^1(D))$ while z_α^2 , $\alpha = 1, 2$, belongs to $H_{\Gamma_0}^1(D \times I)$, see definitions (1.2) and (1.13) with obvious modifications just replacing there the variable x^j by the variable y and thus Ω by $D \times I$.

Since by definition of $e_{\alpha 3}(z)$,

$$\frac{\partial z_3}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z), \quad \alpha = 1, 2,$$

defining the function $c(z)$ by (the summation convention has to be applied here)

$$c(z) = \frac{\int_D y_\beta^R z_\beta}{\int_D \sum_\beta |y_\beta^R|^2}$$

(observe that this function belongs to $H_0^1(I)$), one has

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (z - z^0)_3 = \frac{\partial z_3}{\partial y_\alpha} + \frac{d}{dx_3} \left(\frac{1}{|D|} \int_D z_\alpha \right) = \\ -\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) - y_\alpha^R \frac{dc(z)}{dx_3}, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases} \quad (6.3)$$

(observe that in (6.3) each term belongs to $L^2(D \times I)$).

Therefore, for every $\psi \in L^2(I)$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\int_I \psi (z - z^0)_3 \right) = \int_I \psi \left(-\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) \right) - y_\alpha^R \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.4)$$

(observe that in (6.4) each term belongs to $L^2(D)$).

Taking the two-dimensional curl of the two-dimensional vector defined by the right hand side of (6.4), (F_1, F_2) , i.e., $\text{curl} F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$, yields

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\int_I \psi \left(-\frac{\partial z_2^2}{\partial x_3} + 2e_{23}(z) \right) \right) - \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3} + \\ -\frac{\partial}{\partial y_2} \left(\int_I \psi \left(-\frac{\partial z_1^2}{\partial x_3} + 2e_{13}(z) \right) \right) - \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Since $\int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3}$ is a real number, one has

$$\left\| \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3} \right\|_{H^{-1}(D)} = \left| \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3} \right| \|1\|_{H^{-1}(D)}.$$

On the other hand, defining G_α as $G_\alpha = \int_I \psi \left(-\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) \right) dx_3$, one has

$$\begin{cases} \|\operatorname{curl} G\|_{H^{-1}(D)} \leq \left\| \frac{\partial G_2}{\partial y_1} \right\|_{H^{-1}(D)} + \left\| \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \right\|_{H^{-1}(D)} \\ \leq \|G_2\|_{L^2(D)} + \|G_1\|_{L^2(D)} \leq \sqrt{2} \left(\sum_\alpha \|G_\alpha\|_{L^2(D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Therefore

$$\begin{cases} \left| \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3} \right| = \frac{\left\| \int_I \psi \frac{dc}{dx_3}(z) \right\|_{H^{-1}(D)}}{\|1\|_{H^{-1}(D)}} = \frac{\|\operatorname{curl} G\|_{H^{-1}(D)}}{2 \|1\|_{H^{-1}(D)}} \leq \\ \frac{\left(\sum_\alpha \left\| \int_I \psi \left(-\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) \right) \right\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}}{\sqrt{2} \|1\|_{H^{-1}(D)}}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Since $\int_D y_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$, one has $\frac{1}{|D|} \int_D \left(\int_I \psi(z - z^0)_3 \right) = 0$. Therefore using the classical Poincaré-Wirtinger inequality, (6.4) and (6.7), we have

$$\begin{cases} \left\| \int_I \psi(z - z^0)_3 \right\|_{L^2(D)} \leq C \sum_\alpha \left\| \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\int_I \psi(z - z^0)_3 \right) \right\|_{L^2(D)} \\ \leq C \sum_\alpha \left(\left\| \int_I \psi \left(-\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) \right) \right\|_{L^2(D)} + \left| \int_I \psi \frac{dc(z)}{dx_3} \right| \|y_\alpha^R\|_{L^2(D)} \right) \\ \leq C \left(1 + \frac{\sum_\beta \|y_\beta^R\|_{L^2(D)}}{\sqrt{2} \|1\|_{H^{-1}(D)}} \right) \left(\sum_\alpha \left\| \int_I \psi \left(-\frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} + 2e_{\alpha 3}(z) \right) \right\|_{L^2(D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \left(1 + \frac{\sum_\beta \|y_\beta^R\|_{L^2(D)}}{\sqrt{2} \|1\|_{H^{-1}(D)}} \right) \sum_\alpha \left(\left\| \int_I \psi \frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} \right\|_{L^2(D)} + 2 \left\| \int_I \psi e_{\alpha 3}(z) \right\|_{L^2(D)} \right). \end{cases} \quad (6.8)$$

Now for

$$\psi \in H^1(I), \quad z \in \{z \in (H^1(D \times I))^3, z(y, -\frac{1}{2}) = z(y, \frac{1}{2}) = 0\}$$

the function z_α^2 , $\alpha = 1, 2$, satisfies $z_\alpha^2(y, -\frac{1}{2}) = z_\alpha^2(y, \frac{1}{2}) = 0$ and one has

$$\int_I \psi \frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} = - \int_I \frac{d\psi}{dx_3} z_\alpha^2 dx_3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6.9)$$

and therefore we get

$$\left\| \int_I \psi \frac{\partial z_\alpha^2}{\partial x_3} \right\|_{L^2(D)} \leq \left\| \int_I \frac{d\psi}{dx_3} z_\alpha^2 dx_3 \right\|_{L^2(D)}. \quad (6.10)$$

Since for any function $\chi \in L^2(I)$ and $\psi \in L^2(D \times I)$ one has

$$\begin{cases} \left\| \int_I \chi \psi \right\|_{L^2(D)}^2 = \int_D \left| \int_I \chi(x_3) \psi(y, x_3) \right|^2 \\ \leq \int_D \int_I |\chi(x_3)|^2 \int_I |\psi(y, x_3)|^2 = \|\chi\|_{L^2(I)}^2 \|\psi\|_{L^2(D \times I)}^2, \end{cases} \quad (6.11)$$

Recall now that the projection z_α^2 in $(L^2(D))^2$ of (z_1, z_2) on the space of rigid displacements satisfies the inequality

$$\sum_{\alpha} \|z_\alpha^2\|_{L^2(D \times I)} \leq C \sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}(z)\|_{L^2(D \times I)}, \quad (6.12)$$

the proof of which, similar to the one of (4.78), may be found for instance in [9]. Hence, using (6.8), (6.10) and (6.12), we get

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \int_I \psi(z - z^0)_3 \right\|_{L^2(D)} \leq C \\ \left(1 + \frac{\sum_{\beta} \|x_{\beta}^R\|_{L^2(D)}}{\sqrt{2}\|1\|_{H^{-1}(D)}} \right) \left(\left\| \frac{d\psi}{dx_3} \right\|_{L^2(I)} \left(\sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}(z)\|_{L^2(D \times I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\psi\|_{L^2(I)} \left(\sum_{\alpha} \|e_{\alpha 3}(z)\|_{L^2(D \times I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \leq C \|\psi\|_{H_0^1(I)} \left(\sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}(z)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \sum_{\alpha} \|e_{\alpha 3}(z)\|_{L^2(D \times I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

For every $\psi \in H_0^1(I)$ and $\phi \in L^2(D)$, one has $\|\psi\phi\|_{H_0^1(I; L^2(D))}^2 = \|\psi\|_{H_0^1(I)}^2 \|\phi\|_{L^2(D)}^2$. Therefore we have proved that

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{(D \times I)} (z - z^0)_3 \psi \phi \right| = \left| \int_{(D \times I)} \phi \int_I (z - z^0)_3 \psi \right| \leq \|\phi\|_{L^2(D)} \left\| \int_I (z - z^0)_3 \psi \right\|_{L^2(D)} \\ \leq C \left(1 + \frac{\sum_{\beta} \|y_{\beta}^R\|_{L^2(D)}}{\sqrt{2}\|1\|_{H^{-1}(D)}} \right) \|\psi\phi\|_{H_0^1(I; L^2(D))}^2 \\ C \left(\sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha, \beta}(z)\|_{L^2(D \times I)}^2 + 2 \sum_{\alpha} \|e_{\alpha 3}(z)\|_{L^2(D \times I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Since the finite sums of tensorial products $\sum_n \psi_n(x_3) \phi_n(y)$ are dense in $H_0^1(I; L^2(D))$, using such sums with orthogonal terms in (6.14) completes the proof of the partial Korn inequality.

References

- [1] G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, *Siam J. Math. Anal.*, vol.23, No 6, 1992, pp. 1482-1518
- [2] M. BELLIEUD & G. BOUCHITTÉ, Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers, *Asympt. Anal.*, 32, 2 (2002), pp. 153-183
- [3] D. CAILLERIE, Homogénéisation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité et réparties périodiquement, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 292, Série II, (1981), pp.477-480
- [4] J. CASADO-DIAZ & M. LUNA-LAYNEZ, Homogenization of the anisotropic heterogeneous linearized elasticity system in thin reticulated structures, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A*, 134 (2004) No 6, pp. 1041-1083
- [5] J. CASADO-DIAZ & M. LUNA-LAYNEZ, A multiscale method to the homogenization of elastic thin reticulated structures, in *Homogenization 2001*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 18, Gakkotosho, Tokyo, 2003, pp. 155-168
- [6] J. CASADO-DIAZ, M. LUNA-LAYNEZ & J. D. MARTIN, A new approach to the analysis of thin reticulated structures, in *Homogenization 2001*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 18, Gakkotosho, Tokyo, 2003, pp. 257-262

- [7] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN & G. GRISO, The periodic unfolding method in homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 40 (2008), pp. 1585-1620
- [8] G. GEYMONAT, F. KRASUCKI, J.-J. MARIGO, Stress distribution in anisotropic elastic composite beams, in : Ciarlet P.G., Sanchez-Palencia E. (Eds.), *Applications of multiple scalings in mechanics*, Masson, Paris, 1987, pp. 118-133
- [9] H. LEDRET Convergence of displacements and stresses in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero, *Asymptotic Anal.* 10 (1995), no. 4, pp. 367-402
- [10] R. MONNEAU, F. MURAT & A. SILI, Error estimate for the 3d-1d dimension reduction in anisotropic heterogeneous linearized elasticity, to appear
- [11] F. MURAT & A. SILI, Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans des cylindres minces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série I, (1999), pp.179-184
- [12] G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 20 (1989), pp. 608-629
- [13] G. P. Panasenko, Multicomponent homogenization of processes in strongly nonhomogeneous structures, *Math. USSR Sbornik*, vol. 69, No. 1, (1991) pp. 143-153
- [14] C. PIDERI & P. SEPPECHER, A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium, *Continuum Mech. Thermo.*, 9, (1997) pp.241-257
- [15] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture notes in physics, 127, Springer, Berlin, 1980
- [16] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA, Couplage flexion torsion traction dans les poutres anisotropes à section hétérogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 312, Série II, (1991), pp. 337-344
- [17] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA, Statics of curved rods on account of torsion and flexion, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 (1999), pp. 365-390
- [18] A. SILI, Homogenization of the linearized system of elasticity in anisotropic heterogeneous thin cylinders, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25, (2002), pp. 263-288
- [19] A. SILI, A diffusion equation through a highly heterogeneous medium, *Applic. Analysis*, 89, (2010), pp. 893-904

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS DÉGÉNÉRÉES DANS UN MILIEU PÉRIODIQUE FIBRÉ AVEC DES FIBRES
DE SECTION PETITE PAR RAPPORT A LA TAILLE DE LA PÉRIODE

3.1 CONVERGENCE DOUBLE-ÉCHELLE ADAPTÉE À L' ORDRE DE GRANDEUR DES FIBRES.

Ce chapitre est consacré à l' homogénéisation de problèmes de conduction et d'élasticité pour des milieux fibrés lorsque les fibres ont un rayon petit par rapport à la taille de la période. Nous gardons ici exactement le mme contexte géométrique que dans les deux chapitres précédents. Pour traiter le cas de fibres de rayon petit par rapport à la période, nous avons besoin de définir une notion de convergence à double échelle qui tient compte de cet ordre de grandeur.

Nous définissons aussi dans cette partie la notion de convergence double échelle correspondant à une limite dans $L^2(\Omega \times D \times Y_3)$, (prise en compte des oscillations dans la direction verticale) qui nous permettra de caractériser la limite double échelle en l'absence d'oscillations dans la direction verticale, c'est à dire une limite dans $L^2(\Omega \times D)$.

L'inégalité (1.45) du lemme 1.3 joue un rôle essentiel dans l'identification des limites correspondant au tenseur des déformations à l'intérieur des fibres.

- Notations

On commence par préciser les notations. Soient :

$$\Omega = \omega \times I, \quad \omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2, \quad I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (1.1)$$

$$Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2, \quad Y_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (1.2)$$

La variable notée par x est dans Ω , on écrit $x = (x', x_3)$ où $x' = (x_1, x_2) \in \omega$ et $x_3 \in I$. La variable notée par y est dans Y où $y = (y_1, y_2)$, et la variable y_3 est dans Y_3 .

Soit aussi $(\varepsilon, r_\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ où $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ et $r_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tels que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (1.3)$$

On pose :

$$I_\varepsilon = \left\{ i \mid i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \text{ tel que } \varepsilon i \in \omega \right\}. \quad (1.4)$$

On suppose que ω est tel que

$$\omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i, \quad \text{où } \omega_\varepsilon^i = \varepsilon i + \varepsilon \omega, \quad (1.5)$$

Pour $i \in I_\varepsilon$ soit $D_{r_\varepsilon}^i$ le disque de centre εi et de rayon r_ε , plus précisément :

$$D_{r_\varepsilon}^i = D(\varepsilon i, r_\varepsilon) = \varepsilon i + D(0, r_\varepsilon), \quad (1.6)$$

où $D(0, r_\varepsilon)$ est le disque de centre 0 et de rayon r_ε dans ω .

On considère les ensembles F_ε^i et l'ensemble F_ε suivants :

$$F_\varepsilon^i = D_{r_\varepsilon}^i \times I, \quad F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i. \quad (1.7)$$

On pose :

$$I_{r_\varepsilon} = \left\{ i_3 \mid i_3 \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } (r_\varepsilon i_3 + r_\varepsilon I) \cap I \neq \emptyset \right\}, \quad (1.8)$$

Pour tout $i_3 \in I_{r_\varepsilon}$ soit $I_{r_\varepsilon}^{i_3}$ le segment suivant :

$$I_{r_\varepsilon}^{i_3} = r_\varepsilon i_3 + r_\varepsilon I. \quad (1.9)$$

Posons :

$$\bar{I}_\varepsilon = I_\varepsilon \times I_{r_\varepsilon}. \quad (1.10)$$

La notation \bar{i} désigne un élément de \bar{I}_ε , autrement dit, $\bar{i} = (i, i_3)$ où $i = (i_1, i_2) \in I_\varepsilon$ et $i_3 \in I_{r_\varepsilon}$. Pour tout $\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$ on considère l'ensemble $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ centré en $(\varepsilon i, r_\varepsilon i_3)$, de rayon et de hauteur r_ε , i.e.

$$C_\varepsilon^{\bar{i}} = D_{r_\varepsilon}^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3}. \quad (1.11)$$

On constate que :

$$I = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (I_{r_\varepsilon}^{i_3} \cap I), \quad F_\varepsilon^i = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega), \quad F_\varepsilon = \bigcup_{\bar{i} \in \bar{I}} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega). \quad (1.12)$$

On définit D et T comme suit :

$$D = D(0, 1) \subset Y, \quad T = D \times Y_3 \subset Y \times Y_3, \quad (1.13)$$

où $D(0, 1)$ le disque de centre 0 et de rayon 1.

- Définitions et résultats préliminaires

Soit $C(\bar{\Omega} \times \bar{T})$ l'espace des fonctions continues sur $(\bar{\Omega} \times \bar{T})$, et $C(\bar{\Omega} \times \bar{D})$ l'espace de fonctions continues sur $(\bar{\Omega} \times \bar{D})$, où $\bar{\Omega}$, \bar{T} et \bar{D} désignent respectivement les fermetures de Ω , T , et D . Pour un ensemble \mathcal{A} mesurable dans \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 dont la mesure de Lebesgue est $|\mathcal{A}|$ et pour une fonction u intégrable sur \mathcal{A} on désigne par $f_{\mathcal{A}} u$ la moyenne de u sur \mathcal{A} , i.e. $f_{\mathcal{A}} u = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{A}} u$. La notation $\chi_{\mathcal{A}}$ désigne la fonction caractéristique de \mathcal{A} , i.e. $\chi_{\mathcal{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{A}$ sinon $\chi_{\mathcal{A}}(x) = 0$.

Soit $x = (x', x_3) \in \omega \times I$, définissons $y_\varepsilon(x')$, $y_\varepsilon(x_3)$ dans ω et I par :

$$y_\varepsilon(x') = \sum_{i \in I_\varepsilon} (x' - \varepsilon i) \chi_{\omega_\varepsilon^i}, \quad y_\varepsilon(x_3) = \sum_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (x_3 - r_\varepsilon i_3) \chi_{I_{r_\varepsilon}^{i_3}}. \quad (1.14)$$

On définit la fonction $y_\varepsilon(x)$ dans Ω par :

$$y_\varepsilon(x) = (y_\varepsilon(x'), y_\varepsilon(x_3)). \quad (1.15)$$

Définition 1.1 : Soit u^ε une suite dans $L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega \times T)$ et $g \in L^2(\Omega \times D)$. On dit que :

i) La suite u^ε converge au sens double échelle vers f (notation $u^\varepsilon \rightharpoonup f$) si $\forall \varphi \in C(\bar{\Omega} \times \bar{T})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx \right) = \int_{\Omega} \int_T f(x, y, y_3) \varphi(x, y, y_3) dx dy dy_3. \quad (1.16)$$

ii) La suite u^ε converge au sens double échelle vers g (notation $u^\varepsilon \rightharpoonup g$) si $\forall \psi \in C(\bar{\Omega} \times \bar{D})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) dx \right) = \int_{\Omega} \int_D g(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (1.17)$$

La notation " \rightharpoonup " désigne la convergence double échelle adaptée aux rayons des fibres, donc on écrit, $u^\varepsilon \rightharpoonup f$ si (1.16) est satisfaite et on écrit $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ si (1.17) est satisfaite.

Remarque 1.1 S'il existe f telle que (1.16) est satisfaite alors il existe g telle que (1.17) est satisfaite et on a :

$$g(x, y) = \int_{Y_3} f(x, y, y_3) dy_3. \quad (1.18)$$

On prend $\psi = \varphi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$, on applique (1.16) on obtient (1.17) où g est donnée par (1.18).

Proposition 1.1

Soit $u^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$\int_{F_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq C, \quad \forall \varepsilon. \quad (1.19)$$

Alors il existe $f \in L^2(\Omega \times T)$ et une sous-suite notée encore u^ε telle que $u^\varepsilon \rightharpoonup f$.

Pour la démonstration de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1

Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{T})$ alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} \int_T \varphi(x, y, y_3) dx dy dy_3. \quad (1.20)$$

Preuve :

Soit :

$$I_\varepsilon^0 = \{\bar{i} \mid C_\varepsilon^{\bar{i}} \subset F_\varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon = \bigcup_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} (\omega_\varepsilon^{\bar{i}} \times I_{r_\varepsilon}^{\bar{i}}). \quad (1.21)$$

On constate que $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| \leq 2 \frac{r_\varepsilon^3}{\varepsilon^2} \rightarrow_\varepsilon 0$, donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{F_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx - \frac{1}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx \right) = 0. \quad (1.22)$$

On a :

$$\frac{1}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx.$$

Faisant le changement de variable $\frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon} = (y, y_3)$, on obtient :

$$\frac{1}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx = \frac{\varepsilon^2 r_\varepsilon}{\pi} \sum_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} \int_T \varphi((r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3), (y, y_3)) dy dy_3. \quad (1.23)$$

Pour tout $(y, y_3) \in T$ on considère la fonction $\varphi_\varepsilon(y, y_3)$ suivante:

$$\varphi_\varepsilon(y, y_3) = \frac{\varepsilon^2 r_\varepsilon}{\pi} \sum_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} \varphi((r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3), (y, y_3)). \quad (1.24)$$

D'où :

$$\frac{1}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) dx = \int_T \varphi_\varepsilon(y, y_3) dy dy_3. \quad (1.25)$$

Puisque $(y, y_3) \in T$, $(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) \in \omega_\varepsilon^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3}$, alors :

$$\varphi_\varepsilon(y, y_3) \leq \frac{1}{\pi} \sum_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} (r_\varepsilon \varepsilon^2) \sup_{x \in (\omega_\varepsilon^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3})} \varphi(x, y, y_3). \quad (1.26)$$

D'autre part, puisque $|\omega_\varepsilon^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3}| = r_\varepsilon \varepsilon^2$, $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| \rightarrow 0$ et la fonction $x \mapsto \varphi(x, y, y_3)$ est continue sur le compact $\bar{\Omega}$ alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{\bar{i} \in I_\varepsilon^0} (r_\varepsilon \varepsilon^2) \sup_{x \in (\omega_\varepsilon^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3})} \varphi(x, y, y_3) \right) = \int_{\Omega} \varphi(x, y, y_3) dx. \quad (1.27)$$

De (1.26)-(1.27) on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_\varepsilon(y, y_3)) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \varphi(x, y, y_3). \quad (1.28)$$

Puisque (1.28) reste satisfaite en remplaçant φ par $(-\varphi)$ ($\varphi_\varepsilon(y, y_3)$ par $-\varphi_\varepsilon(y, y_3)$) alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_\varepsilon(y, y_3)) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \varphi(x, y, y_3). \quad (1.29)$$

La suite $\varphi_\varepsilon(y, y_3)$ est uniformément bornée sur \bar{T} (car $\varphi \in C(\bar{\Omega} \times \bar{T})$), alors en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut de (1.29) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_T \varphi_\varepsilon(y, y_3) \right) = \int_{\Omega} \int_T \varphi(x, y, y_3) dx dy dy_3. \quad (1.30)$$

De (1.22),(1.25), et (1.30) on trouve aisément (1.20).

Preuve de la proposition 1.1 :

Soit $C_c(\Omega \times T)$ l'espace de fonctions continues à support compact dans $\Omega \times T$ muni de la norme $\|\varphi_0\|_{C_c} = \sup_{\Omega \times T} |\varphi_0(x, y)|$, son dual est $M(\Omega \times T)$ l'espace de mesures de Radon sur $\Omega \times T$. Soit μ_ε une suite de $M(\Omega \times T)$ définie par :

$$\langle \mu_\varepsilon, \varphi_0 \rangle = \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi_0\left(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}\right), \quad \varphi_0 \in C_c(\Omega \times T). \quad (1.31)$$

On applique l'inégalité de Hölder à l'intégrale définie en (1.31) puis on utilise (1.19) et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\langle \mu_\varepsilon, \varphi_0 \rangle| = \left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_0 \right| = \frac{1}{|F_\varepsilon|} \left| \int_{\Omega} (u^\varepsilon \chi_{F_\varepsilon})(\varphi_0 \chi_{F_\varepsilon}) \right| \\ \leq \frac{1}{|F_\varepsilon|} \left(\int_{\Omega} (u^\varepsilon \chi_{F_\varepsilon})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (\varphi_0 \chi_{F_\varepsilon})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{F_\varepsilon} (\varphi_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C \left(\int_{F_\varepsilon} (\varphi_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Ce qui montre l'inégalité suivante :

$$|\langle \mu_\varepsilon, \varphi_0 \rangle| \leq C \|\varphi_0\|_{C_c}.$$

Alors μ_ε est bornée dans $M(\Omega \times T)$ et puisque C_c est séparable il existe une mesure μ telle que :

$$\langle \mu_\varepsilon, \varphi_0 \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mu, \varphi_0 \rangle, \quad \forall \varphi_0 \in C_c(\Omega \times T). \quad (1.33)$$

Passons à la limite dans (1.32) prenant en compte (1.33) et (1.20):

$$|\langle \mu, \varphi_0 \rangle| \leq C \left(\int_{\Omega} \int_T (\varphi_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi_0 \in C_c(\Omega \times T). \quad (1.34)$$

De (1.34) et de la densité de $C_c(\Omega \times T)$ dans $L^2(\Omega \times T)$ on déduit que μ peut se prolonger à $L^2(\Omega \times T)$ en une forme linéaire continue. En vertu du théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe $f \in L^2(\Omega \times T)$ tel que :

$$\langle \mu, \varphi_0 \rangle = \int_{\Omega} \int_T f \varphi_0, \quad \forall \varphi_0 \in C_c(\Omega \times T). \quad (1.35)$$

De (1.31),(1.33),(1.35) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi_0(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) = \int_{\Omega} \int_T f \varphi_0, \quad \forall \varphi_0 \in C_c(\Omega \times T). \quad (1.36)$$

Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{T})$ et $\varphi_n \in C_c(\Omega \times T)$ une suite convergeant fortement pour la norme L^2 vers φ . On a :

$$\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi = \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(\varphi - \varphi_n) + \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_n.$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(\varphi - \varphi_n)$, puis on utilise (1.19), on obtient :

$$\left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi - \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_n \right| \leq C \left(\int_{F_\varepsilon} (\varphi - \varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On passe à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ en utilisant (1.36) et (1.20) et on trouve :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi - \int_{\Omega} \int_T f \varphi_n \right| \leq C \left(\int_{\Omega} \int_T (\varphi - \varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons à nouveau la limite $n \rightarrow \infty$ en choisissant $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $L^2(\Omega \times T)$, on obtient :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi - \int_{\Omega} \int_T f \varphi \right| = 0.$$

Ce qui montre que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \varphi = \int_{\Omega} \int_T f \varphi.$$

D'où le résultat.

Dans la suite on s'intéresse à la convergence double échelle vers une fonction de $L^2(\Omega \times D)$, i.e. la convergence (1.17).

Définition 1.2 : Soit $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ où $g \in L^2(\Omega \times D)$. On dit que u^ε converge fortement vers g au sens de la double-échelle si :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon(x))^2 = \int_{\Omega} \int_D g(x, y)^2. \quad (1.37)$$

Proposition 1.2

Soient u^ε et v^ε deux suites telles que $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ fortement au sens double échelle, $v^\varepsilon \rightharpoonup h$ avec $\int_{F_\varepsilon} (v^\varepsilon)^2 \leq C$ alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = \int_{\Omega} \int_D g h \varphi, \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D}). \quad (1.38)$$

Preuve :

Soit φ_n une suite dans $\mathcal{D}(\Omega \times D)$ converge fortement vers g pour la norme L^2 . On a :

$$\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon \varphi = \int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon - \varphi_n) v^\varepsilon \varphi + \int_{F_\varepsilon} v^\varepsilon \varphi_n \varphi.$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon - \varphi_n) v^\varepsilon \varphi$ et le fait que $\int_{F_\varepsilon} (v^\varepsilon)^2 \leq C$, on obtient :

$$\left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon \varphi - \int_{F_\varepsilon} v^\varepsilon \varphi_n \varphi \right| \leq C \left(\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon - \varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Faisons $\varepsilon \rightarrow 0$ en utilisant $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ fortement (voir (1.37)), $v^\varepsilon \rightharpoonup v$, prenant $\varphi_n, \varphi_n \varphi$ comme des fonctions tests, on obtient :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon \varphi - \int_{\Omega} \int_D v \varphi_n \varphi \right| \leq C \left(\int_{\Omega} \int_D (g - \varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Faisons à nouveau $n \rightarrow \infty$ prenant en compte $\varphi_n \rightarrow g$ pour la norme L^2 on trouve:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon \varphi - \int_{\Omega} \int_D v g \varphi \right| = 0.$$

Ce qui montre (1.38), d'où la proposition.

Proposition 1.3

Soit (u^ε) une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ alors :

$$\int_{\Omega} \int_D g^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2. \quad (1.39)$$

Preuve :

Soit φ_n une suite dans $\mathcal{D}(\Omega \times D)$ qui converge fortement dans L^2 vers g , on a :

$$\int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_n \leq \left(\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{F_\varepsilon} (\varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

On passe à la limite sur ε en utilisant $u^\varepsilon \rightharpoonup g$ et le lemme 1.1. On obtient :

$$\int_{\Omega} \int_D g \varphi_n \leq \left(\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \int_D (\varphi_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

On fait $n \rightarrow \infty$ en utilisant $\varphi_n \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega \times D)$ et on obtient (1.39).

Proposition 1.4

Soit $A \in C(\overline{\Omega}; C_{\#}(Y))$. La suite $A(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ converge fortement au sens " \rightharpoonup " vers $A(x, 0)$.

Preuve :

Soit $x = (x', x_3) \in F_\varepsilon$, il existe $y \in D$ et $i \in I_\varepsilon$ tels que $x' = r_\varepsilon y + \varepsilon i$. En outre, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto A(x, y)$ est Y -périodique donc :

$$A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = A(x, \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} y + i) = A(x, \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} y).$$

La fonction A est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times \overline{D}$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = 0$ alors $\forall \sigma > 0$ il existe σ_0 telle que si $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \sigma_0$ on a :

$$|A(x, \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} y) - A(x, 0)| \leq \sigma, \quad \forall x \in F_\varepsilon.$$

Autrement dit, si $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \sigma_0$ on a :

$$|A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) - A(x, 0)| \leq \sigma, \quad \forall x \in F_\varepsilon.$$

Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$, donc si $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \sigma_0$ on a :

$$|\int_{F_\varepsilon} A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{\varepsilon}) - \int_{F_\varepsilon} A(x, 0) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{\varepsilon})| \leq \sigma \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega \times D)}. \quad (1.40)$$

La fonction $A(x, 0) \varphi(x, y) \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$ alors d'après le lemme 1.1 on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} A(x, 0) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \varphi(x, y). \quad (1.41)$$

Passons à la limite dans la premier membre de (1.40) en utilisant (1.41), on obtient :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |\int_{F_\varepsilon} A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{\varepsilon}) - \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \varphi(x, y)| \leq \sigma \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega \times D)}. \quad (1.42)$$

Puisque (1.42) est satisfaite pour tout $\sigma > 0$ alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_\varepsilon} A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \varphi(x, y).$$

D'où $A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A(x, 0)$. Puisque $A^2 \in C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))$, alors $A^2(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A^2(x, 0)$, ce qui nous permet de conclure à la convergence double échelle au sens fort. La proposition est démontrée.

Le lemme suivant, démontré dans [20], nous sera très utile dans la suite:

Lemme 1.2

On suppose que r_ε vérifie la condition suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0. \quad (1.43)$$

Soit u_ε une suite bornée dans $H^1(\Omega)$. Alors :

i) $\int_{F_\varepsilon} u_\varepsilon^2$ est bornée.

ii) Si $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$, alors $\int_{F_\varepsilon} (u_\varepsilon(x) - u(x))^2 dx \rightarrow 0$.

iii) Si $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_\varepsilon \rightharpoonup v$, alors :

$$u(x) = \int_D v(x, y) dy, \quad p.p. x \in \Omega. \quad (1.44)$$

Pour la démonstration voir [20].

- Inégalité de type Korn

L'inégalité suivante joue un rôle crucial dans le processus d'homogénéisation.

Lemme 1.3

Il existe une constante C telle que :

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(H^1(T))^3} \leq C \|e^y(\phi)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}}, \quad \forall \phi \in (H^1(T))^3. \quad (1.45)$$

où $e^y(\phi)$ est défini par $e_{ij}^y(\phi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i})$ et $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$ est définie par :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(y, y_3) = \frac{\int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2)}{\int_T (y_1^2 + y_2^2)} y_2 + \frac{\int_T (y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3)}{\int_T (y_1^2 + y_3^2)} y_3 + \int_T \phi_1, \\ \hat{\phi}_2(y, y_3) = -\frac{\int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2)}{\int_T (y_1^2 + y_2^2)} y_1 + \frac{\int_T (y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3)}{\int_T (y_2^2 + y_3^2)} y_3 + \int_T \phi_2, \\ \hat{\phi}_3(y, y_3) = -\frac{\int_T (y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3)}{\int_T (y_1^2 + y_3^2)} y_1 - \frac{\int_T (y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3)}{\int_T (y_2^2 + y_3^2)} y_2 + \int_T \phi_3. \end{cases} \quad (1.46)$$

Preuve :

Soit E le sous espace fermé de $(H^1(T))^3$ suivant :

$$\left\{ E = \left\{ \psi \mid \psi \in (H^1(T))^3, \text{ telle que: } \begin{aligned} \psi_1 &= ay_2 + b_1y_3 + d_1, \quad \psi_2 = -ay_1 + b_2y_3 + d_2, \\ \psi_3 &= -b_1y_1 - b_2y_2 + d_3, \quad \text{où : } a, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \right\} \quad (1.47)$$

Il est clair que E est un sous espace fermé de $(H^1(T))^3$, et que pour tout $\psi \in E$, $k, l = 1, 2, 3$ on a $e_{kl}^y(\psi) = 0$, $\forall k, l = 1, 2, 3$, et on a aussi :

$$\psi \in E \text{ si et seulement si } \psi \in (H^1(T))^3 \text{ et } e_{kl}^y(\psi) = 0, \forall k, l = 1, 2, 3. \quad (1.48)$$

Soit $\phi \in (H^1(T))^3$. On cherche la projection de ϕ sur E par rapport à la norme $(\|\phi\|^2 + \|e^y(\phi)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ dans $(H^1(T))^3$. On sait d'après l'inégalité de Korn que cette dernière norme est équivalente à la norme usuelle de $(H^1(T))^3$, i.e. la norme $(\|\phi\|^2 + \|\nabla(\phi)\|^2)^{\frac{1}{2}}$. On désigne par $\hat{\phi}$ sa projection. Alors il existe $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3 \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1 = \bar{a}y_2 + \bar{b}_1y_3 + \bar{d}_1, \\ \hat{\phi}_2 = -\bar{a}y_1 + \bar{b}_2y_3 + \bar{d}_2, \\ \hat{\phi}_3 = -\bar{b}_1y_1 - \bar{b}_2y_2 + \bar{d}_3. \end{cases} \quad (1.49)$$

Donc pour trouver $\hat{\phi}$ on cherche les composantes $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ dans \mathbb{R} .

On a $(\phi - \hat{\phi}) \in E^\perp$ où E^\perp désigne l'orthogonal de E . Alors :

$$\int_T (\phi - \hat{\phi})\psi + \int_T e^y(\phi - \hat{\phi})e^y(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in E, \quad (1.50)$$

$e^y(\psi) = 0$ car $\psi \in E$ donc :

$$\int_T (\phi - \hat{\phi})\psi = 0, \quad \forall \psi \in E. \quad (1.51)$$

On remplace dans (1.51) $\hat{\phi}$ par son expression (1.49) et ψ par son expression (1.47) on trouve :

$$\begin{cases} \int_T (\phi_1 - \bar{a}y_2 - \bar{b}_1y_3 - \bar{d}_1)(ay_2 + b_1y_3 + d_1) dy dy_3 \\ + \int_T (\phi_2 + \bar{a}y_1 - \bar{b}_2y_3 - \bar{d}_2)(-ay_1 + b_2y_3 + d_2) dy dy_3 \\ + \int_T (\phi_3 + \bar{b}_1y_1 + \bar{b}_2y_2 - \bar{d}_3)(-b_1y_1 - b_2y_2 + d_3) dy dy_3 = 0 \\ \forall a, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.52)$$

Puisque $\int_T y_k = \int_T y_k y_l = 0$, $\forall k, l = 1, 2, 3, k \neq l$, alors de (1.52) on obtient :

$$\begin{cases} a \int_T ((y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2) - \bar{a}(y_1^2 + y_2^2)) + b_1 \int_T ((y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3) - \bar{b}_1(y_1^2 + y_3^2)) \\ + b_2 \int_T ((y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3) - \bar{b}_2(y_2^2 + y_3^2)) + d_1 \int_T (\phi_1 - \bar{d}_1) + d_2 \int_T (\phi_2 - \bar{d}_2) \\ + d_3 \int_T (\phi_3 - \bar{d}_3) = 0, \forall a, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} \bar{a} = \frac{\int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2)}{\int_T (y_1^2 + y_2^2)}, \bar{b}_1 = \frac{\int_T (y_3 \phi_1 - y_1 \phi_3)}{\int_T (y_1^2 + y_3^2)}, \bar{b}_2 = \frac{\int_T (y_3 \phi_2 - y_2 \phi_3)}{\int_T (y_2^2 + y_3^2)}, \\ \bar{d}_1 = \int_T \phi_1, \bar{d}_2 = \int_T \phi_2, \bar{d}_3 = \int_T \phi_3. \end{cases} \quad (1.54)$$

Donc l'expression de $\hat{\phi}$ est celle donnée par (1.46).

D'autre part, d'après l'inégalité de Korn il existe une constante C telle que $\forall \phi \in (H^1(T))^3$:

$$\|\phi\|_{(H^1(T))^3} \leq C(\|\phi\|_{(L^2(T))^3} + \|e^y(\phi)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}}). \quad (1.55)$$

On remplace ϕ par $(\phi - \hat{\phi})$ dans (1.55) en utilisant $e^y(\phi - \hat{\phi}) = e^y(\phi)$ car $e^y(\hat{\phi}) = 0$ on obtient :

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(H^1(T))^3} \leq C(\|\phi - \hat{\phi}\|_{(L^2(T))^3} + \|e^y(\phi)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}}). \quad (1.56)$$

Nous montrons maintenant qu'il existe une constante C telle que :

$$\|\phi - \hat{\phi}\|_{(L^2(T))^3} \leq C\|e^y(\phi)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}}. \quad (1.57)$$

On suppose le contraire, il existe donc une suite ϕ_n , telle que :

$$\|\phi_n - \hat{\phi}_n\|_{(L^2(T))^3} = 1, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^y(\phi_n)\|_{(L^2(T))_s^{3 \times 3}} = 0. \quad (1.58)$$

Selon l'inégalité (1.56), la suite $(\phi_n - \hat{\phi}_n)_n$ est bornée dans $(H^1(T))^3$, alors il existe $\psi \in (H^1(T))^3$ vers laquelle $(\phi_n - \hat{\phi}_n)$ converge faiblement dans $(H^1(T))^3$. Puisque l'injection $(H^1(T))^3 \subset (L^2(T))^3$ est compacte la suite $(\phi_n - \hat{\phi}_n)_n$ converge fortement vers ψ dans $(L^2(T))^3$. D'autre part la suite $e^y(\phi_n - \hat{\phi}_n) = e^y(\phi_n)$ converge faiblement vers $e^y(\psi)$. D'après (1.58) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^y(\phi_n)\| = 0$, donc $e^y(\psi) = 0$, d'après (1.48) on a $\psi \in E$. L'espace E^\perp est fermé et la suite $\phi_n - \hat{\phi}_n$ est dans E^\perp , donc sa limite faible ψ est aussi dans E^\perp . Puisque $E \cap E^\perp = \{0\}$ et $\psi \in E \cap E^\perp$ alors $\psi = 0$, donc $(\phi_n - \hat{\phi}_n)$ converge fortement vers 0, ce qui est absurde avec (1.58) car on a $\|(\phi_n - \hat{\phi}_n)\|_{(L^2(T))^3} = 1$. Par conséquent (1.57) est satisfaite. On conclut aisément de (1.57) et de (1.56) que l'inégalité (1.45) de ce lemme est vérifiée.

On finit cette partie par la proposition suivante : Soit $v \in L^2(\Omega; H^1(T))$. Posons :

$$w(x, y) = \int_{Y_3} v(x, y, y_3) dy_3. \quad (1.59)$$

Proposition 1.5

La fonction w est dans $L^2(\Omega; H^1(D))$ et on a

$$\frac{\partial w}{\partial y_\alpha}(x, y) = \int_{Y_3} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}(x, y, y_3) dy_3, \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (1.60)$$

Preuve :

Les fonctions données en (1.59)-(1.60) sont bien définies et elles sont dans $L^2(\Omega \times D)$ (en utilisant le théorème de Fubini). Soit $\theta_n(y_3) \in \mathcal{D}(Y_3)$ convergeant fortement vers 1 dans $L^2(Y_3)$. Soit aussi $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times T} v \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \theta_n = \int_{\Omega \times T} v \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = \int_{\Omega \times D} w \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}. \quad (1.61)$$

D'autre part, puisque $v \in L^2(\Omega; H^1(T))$ on a :

$$\int_{\Omega \times T} v \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \theta_n = - \int_{\Omega \times T} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} \psi \theta_n.$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times T} v \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \theta_n = - \int_{\Omega \times D} \psi \int_{Y_3} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} v(x, y, y_3) dy_3. \quad (1.62)$$

De (1.61) et (1.62) on trouve :

$$\int_{\Omega \times D} w \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = - \int_{\Omega \times D} \psi \int_{Y_3} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}(x, y, y_3) dy_3, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times D). \quad (1.63)$$

Ce qui montre le résultat de cette proposition.

3.2 PROBLÈME DE LA CONDUCTION

On s'intéresse maintenant à l'homogénéisation de l'équation de la conduction linéaire sous l'hypothèse que le rayon r_ε de la section des fibres est plus petit que la période ε ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = 0$) et on suppose que ces fibres ont une grande conductivité (coefficient de l'ordre de $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$) et sont entourées d'un autre matériau (la matrice) ayant une faible conductivité. On suppose que la suite r_ε est telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0$. On montre que si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \mu \in [0, \infty[$, le problème homogénéisé est une équation elliptique de deuxième ordre, et si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \infty$, la suite de solutions converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega)$.

3.2.1 Position du problème

Avec les mêmes notations que dans les chapitres 1 et 2, le problème s'écrit:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((\mu_\varepsilon^2 \chi_{F^\varepsilon} + \chi_{M^\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon) & = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) n & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose dans ce chapitre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0$.

On va montrer que la limite de la suite u^ε est la solution d'une équation elliptique de deuxième ordre si $\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$, tandis que si $\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \infty$, la suite u^ε converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega)$, voir théorème 2,1.

On précise maintenant la géométrie du milieu et les hypothèses.

Soient :

$$\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3, \quad \omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2, \quad I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (1.2)$$

On suppose que :

$$\omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i, \quad \omega_\varepsilon^i = \varepsilon \omega + \varepsilon i, \quad (1.3)$$

où

$$I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varepsilon i \in \omega\}, \quad (1.4)$$

Pour tout ε on considère $r_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0. \quad (1.5)$$

Définissons l'ensemble F_ε des fibres et l'ensemble M_ε par :

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon, \quad (1.6)$$

où

$$F_\varepsilon^i = D_{r_\varepsilon}^i \times I, \quad D_{r_\varepsilon}^i = D(0, r_\varepsilon) + \varepsilon i. \quad (1.7)$$

($D(0, r_\varepsilon)$ est un disque de centre 0 et du rayon r_ε dans ω).

Soit

$$Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2. \quad (1.8)$$

On considère $A(x, y)$ une matrice 3×3 définie dans $\Omega \times Y$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\forall x, \quad y \mapsto A_{ij}(x, y) \text{ est dans } C_{\#}(Y), \quad (1.9)$$

$$A_{ij} \in C(\bar{\Omega} \times C_{\#}(Y)), \quad (1.10)$$

$$\exists m > 0, \quad A(x, y)\xi\xi \geq m|\xi|^2. \quad (1.11)$$

Si $K = (K_1, K_2, K_3)$ est un vecteur dans \mathbb{R}^3 , on note K' le vecteur $K' = (K_1, K_2)$, ainsi on écrit $K = (K', K_3)$.

La variable microscopique sera notée par $y = (y_1, y_2)$ et on note un point générique de \mathbb{R}^3 par $x = (x', x_3)$ où $x' = (x_1, x_2)$. Le gradient d'une fonction $t(x, y)$ par rapport à x' sera noté $\nabla' t(x, y)$ tandis que le gradient par rapport à y sera noté $\nabla_y t(x, y)$.

Posons :

$$\Gamma_0 = \omega \times \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N. \quad (1.12)$$

(0 pour désigner la condition de Dirichlet, N pour la condition de Neumann).

Le terme source f donnée en (1.1) est tel que :

$$f \in L^2(\Omega), \quad (1.13)$$

Le coefficient μ_ε est dans $(0, +\infty)$ et vérifie l'hypothèse :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon) = \infty. \quad (1.14)$$

Soit :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{\phi \mid \phi \in H^1(\Omega) \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\}. \quad (1.15)$$

Le problème (1.1) s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\mu_\varepsilon^2 \chi_{F^\varepsilon} + \chi_{M^\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \nabla \phi e(\phi) = \int_{\Omega} f \phi dx, \\ \forall \phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.16)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (1.16) sont immédiates et s'obtiennent par l'application du théorème de Lax-Milgram dans l'espace $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Soit le disque

$$D = D(0, 1) \subset Y. \quad (1.17)$$

Pour étudier le problème (1.1) on a besoin des espaces suivants :

$$U^0 = \{u^0 \mid u^0 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})\}. \quad (1.18)$$

$$\mathcal{V} = L^2(\Omega; H_m^1(D)). \quad (1.19)$$

On considère également l'espace \mathcal{S} suivant :

$$\mathcal{S} = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times U^0 \times \mathcal{V}. \quad (1.20)$$

3.2.2 Énoncé des résultats

Théorème 2.1

On suppose (1.9)-(1.11),(1.13). Soit u_ε la suite de solutions de (1.1). Il existe

$$(u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \quad \text{et } z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad (2.1)$$

telles que les convergences suivantes sont satisfaites :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega), \quad (2.2)$$

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v, \quad (2.3)$$

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial z_3}{\partial x_3}, \quad (2.4)$$

$$\nabla' u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla' u + \nabla_y u^0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial z_3}{\partial x_3}, \quad (2.6)$$

De plus

1) Si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \mu \in [0, \infty[$, alors

$$z_3 = \sqrt{\pi}\mu u, \quad (2.7)$$

et (u, u^0, v) est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} (u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \\ \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \int_\Omega \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla' u + \nabla_y u^0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \bar{u} + \nabla_y \bar{u}^0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ = \int_\Omega f \bar{u}, \quad \forall (u, u^0, v) \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (2.8)$$

2) Si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \infty$, alors

$$u = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega (\mu_\varepsilon^2 \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) |\nabla u^\varepsilon|^2 = 0. \quad (2.9)$$

Remarque 2.1 L'unicité de la solution du problème (2.8) implique que toute la suite u^ε vérifie les convergences (2.2)-(2.6).

Remarque 2.2 Si $\mu = 0$ alors $v = 0$ et le problème (2.8) ne contient que les variables (u, u^0) . Pour le montrer, d'abord on a $\sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$, on choisit $\bar{u} = \bar{u}^0 = 0$ et $\bar{v} = v$ dans (2.8) on trouve :

$$\int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Puisque la matrice A est coercive on conclut aisément que $v = 0$.

Remarque 2.3 On suppose que la matrice A vérifie l'hypothèse de symétrie suivante ;

$$A_{11} = A_{23} = 0, \quad (2.11)$$

alors si $\mu \neq 0$ la variable v est nulle et le problème (2.8) ne contient que les variables (u, u^0) . Pour montrer cette remarque on choisit $\bar{u} = \bar{u}^0 = 0$ et $\bar{v} = v$ dans (2.8) et on utilise la condition (2.11) qui élimine $\sqrt{\pi}\mu\frac{\partial u}{\partial x_3}$ de l'équation, on retrouve l'équation (2.10), ce qui implique que $v = 0$.

On donne dans le théorème suivant une expression de u^0 et v en fonction de u .

Théorème 2.2

Soient (u, u^0, v) les solutions données dans le théorème 1.1 alors

$$\begin{cases} u^0(x, y) = \hat{u}(x, y) \cdot \nabla u(x), \\ v(x, y) = \sqrt{\pi}\mu \hat{v}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_3}, \end{cases} \quad (2.12)$$

où $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ et \hat{v} sont les uniques solutions des problèmes élémentaires suivants

$$\begin{cases} \hat{u}_i \in L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}), \\ \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{u}_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_Y A(x, y) e_i \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \forall \bar{u}^0 \in H_{\#}(Y)/\mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.13)$$

où $e_i, i = 1, 2, 3$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 , et

$$\begin{cases} \hat{v} \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y \hat{v} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \forall \bar{v} \in H_m^1(D), \end{cases} \quad (2.14)$$

Remarque 2.4 Par un argument de localisation en x , on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.13) en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans $(H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$. On remplace \bar{u}^0 par $\hat{u}^{(i)}(x, \cdot)$ dans (2.13) où x est fixé dans Ω et on exploite les conditions (1.10)-(1.11) sur A , on trouve :

$$m \int_Y |\nabla_y \hat{u}_i(x, y)|^2 dy \leq C \int_Y |\nabla_y \hat{u}_i(x, y)| dy, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

On applique l'inégalité de Hölder dans le deuxième membre et on obtient :

$$m \int_Y |\nabla_y \hat{u}_i(x, y)|^2 \leq C \left(\int_Y |\nabla_y \hat{u}_i(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Ce qui montre que $\hat{u}_i \in L^\infty(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$, $\forall i = 1, 2, 3$. D'autre part, $\nabla u \in (L^2(\Omega))^3$ alors $(\hat{u} \cdot \nabla u) \in L^2(\Omega; H_{\#}(Y)/\mathbb{R}) = U^0$.

De la même façon on peut montrer l'existence et l'unicité de la solution $\hat{v} \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D))$ de (2.14) et $\sqrt{\pi}\mu\hat{v}\frac{\partial u}{\partial x_3} \in L^2(\Omega; H_m^1(D)) = \mathcal{V}$.

On donne maintenant la formulation finale du problème limite pour (1.1).

Théorème 2.3

Soit u^ε la suite de solutions de (1.1), on suppose que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \mu \in [0, \infty[$, alors u_ε converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers l'unique solution u du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (a^*(x) \frac{\partial u}{\partial x_3}) - \operatorname{div} A^*(x) \nabla u(x) &= f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ A^*(x) \nabla u \cdot n &= 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.15)$$

où $A^*(x)$ est une matrice 3×3 dont les coefficients $A_{ij}^*(x)$ sont définis par : p.p. $x \in \Omega$

$$A_{ij}^*(x) = \int_Y A(x, y) \left(\begin{pmatrix} \nabla_y \hat{u}_j \\ 0 \end{pmatrix} + e_j \right) \cdot e_i dy, \quad (2.16)$$

et $a^*(x)$ est défini par : p.p. $x \in \Omega$

$$a^*(x) = \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_1} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Remarque 2.5 Les opérateurs A^* et a^* sont coercifs, et $A_{ij}^*, a^* \in L^\infty(\Omega)$.

En effet, en utilisant (2.13) on trouve : $\forall \xi \in \mathbb{R}^3, \forall i, j = 1, 2, 3$

$$A_{ij}^* \xi_i \xi_j = \int_Y A \left(\begin{pmatrix} \xi_j \nabla_y \hat{u}_j \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_j e_j \right) \left(\begin{pmatrix} \xi_i \nabla_y \hat{u}_i \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_i e_i \right).$$

Faisant la somme pour $i = 1, 2, 3$ puis pour $j = 1, 2, 3$, on trouve :

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A \left(\begin{pmatrix} \sum_k \xi_k \nabla_y \hat{u}_k \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \right) \left(\begin{pmatrix} \sum_k \xi_k \nabla_y \hat{u}_k \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \right).$$

Puisque A est coercive on a :

$$A^* \xi \cdot \xi \geq m \int_Y \left| \begin{pmatrix} \sum_k \xi_k \nabla_y \hat{u}_k \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \right|^2 dy.$$

La périodicité de \hat{u}_k implique $\int_Y \nabla_y \hat{u}_k = 0$, d'où :

$$A^* \xi \cdot \xi \geq m \left(\int_Y \left(\sum_k \xi_k \nabla_y \hat{u}_k \right)^2 + |\xi|^2 \right) \geq m |\xi|^2.$$

Ce qui montre que A^* est aussi coercive.

D'autre part, puisque $A \in L^\infty(\Omega \times Y)$, $\hat{u}_i \in L^\infty(\Omega; H_\#(Y)/\mathbb{R})$, alors de (2.16) on a $A_{ij}^* \in L^\infty(\Omega)$.

De la même manière on peut montrer que a^* est coercive et $a^* \in L^\infty(\Omega)$.

Pour montrer les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3, on commence par des estimations a priori.

3.2.3 Estimations a priori

Soit v^ε la suite définie par :

$$\begin{cases} v^\varepsilon(x) = \sum_{i \in I_\varepsilon} v_i^\varepsilon(x) \chi_{D_{r_\varepsilon}^i}(x'), \text{ où} \\ v_i^\varepsilon(x) = \sqrt{\pi} \frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon} (u^\varepsilon - \frac{1}{|D_{r_\varepsilon}^i|} \int_{D_{r_\varepsilon}^i} u^\varepsilon dx') \end{cases} \quad (3.1)$$

u^ε la suite de solutions de (1.1).

Lemme 2.1

Il existe une constante C telle que :

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} (\mu_\varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{F_\varepsilon} + |\nabla u^\varepsilon|^2 \chi_{M_\varepsilon}) dx \leq C, \quad (3.3)$$

$$\int_{F_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \leq C. \quad (3.4)$$

Preuve :

On remplace dans la formulation variationnelle (1.16) la fonction test ϕ par u^ε et on applique l'inégalité de Hölder à $\int (f u^\varepsilon)$ en tenant compte de la coercivité de A :

$$m \int_{\Omega} (\mu_\varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) |\nabla u^\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega} (\mu_\varepsilon^2 \chi_{M_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = \int_{\Omega} f u^\varepsilon \leq \|f\| \|u^\varepsilon\|. \quad (3.5)$$

Puisque $\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}$ alors

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\varepsilon\|. \quad (3.6)$$

De (3.5)-(3.6) on conclut aisément aux estimations (3.2)-(3.3).

Montrons (3.4). Rappelons d'abord l'inégalité de Poincaré-Wirtinger suivante

$$\int_D |\phi(y) - \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y)|^2 \leq C \int_D |\nabla \phi|^2 \quad \forall \phi \in H^1(D). \quad (3.7)$$

Soit $\phi(y) = u^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, x_3)$ où x_3 est fixé p.p. dans I . On applique (3.7) et on obtient grâce au changement de variables $r_\varepsilon y + \varepsilon i = x'$:

$$\int_{D_{r_\varepsilon}^i} |u^\varepsilon - \frac{1}{|D_{r_\varepsilon}^i|} \int_{D_{r_\varepsilon}^i} u^\varepsilon dx'|^2 dx' \leq C r_\varepsilon^2 \int_{D_{r_\varepsilon}^i} |\nabla' u^\varepsilon|^2 dx'.$$

On multiplie par $\frac{\mu_\varepsilon^2}{r_\varepsilon^2}$ et on intègre sur I on trouve en utilisant v_ε^i donnée par (3.1)

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_I \int_{D_{r_\varepsilon}^i} |v_\varepsilon^i|^2 \leq C \mu_\varepsilon^2 \int_I \int_{D_{r_\varepsilon}^i} |\nabla' u^\varepsilon|^2.$$

Faisant la somme, on obtient

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_{\Omega} |v_\varepsilon|^2 \chi_{F_\varepsilon} \leq C \mu_\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla' u^\varepsilon|^2 \chi_{F_\varepsilon}. \quad (3.8)$$

De (3.3) et (3.8) on conclut aisément à (3.4).

Lemme 2.2

Il existe $(u, u^0, v) \in \mathcal{S}$ et $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ et il existe une sous suite u_ε telle que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } H^1(\Omega), \quad (3.9)$$

$$\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup (\nabla' u + \nabla_y u^0, \frac{\partial u}{\partial x_3}). \quad (3.10)$$

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v, \quad (3.11)$$

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial z_3}{\partial x_3}. \quad (3.12)$$

Preuve :

L'espace $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ et la suite u^ε est bornée dans $H^1(\Omega)$ selon (3.2), de plus $u^\varepsilon \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, il existe donc $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ vérifiant (3.9). La preuve de (3.10) s'obtient directement de la proposition 1.3 dans la partie Rappels.

Montrons (3.11). De (3.3) on a :

$$(\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon})^2 \int_{F_\varepsilon} |\nabla' u^\varepsilon|^2 \leq C.$$

D'après la proposition 1.1-3.1 (chapitre 3) il existe une sous suite ε et $K' \in (L^2(\Omega \times D))^2$ telles que

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon \rightharpoonup K'(x, y). \quad (3.13)$$

En outre, l'estimation (3.4) et la proposition 1.1-3.1 montrent l'existence d'une sous suite v_ε et d'une fonction $\hat{v} \in L^2(\Omega \times D)$ telles que :

$$v_\varepsilon \rightharpoonup \hat{v}(x, y). \quad (3.14)$$

D'après la définition de v_ε^i on a $v_\varepsilon^i \in H^1(D_{r_\varepsilon}^i \times I)$ et on a

$$\nabla' u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon} \nabla' v_\varepsilon^i \quad \text{dans } D_{r_\varepsilon}^i \times I. \quad (3.15)$$

Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$. On a :

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = \mu_\varepsilon \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_{r_\varepsilon}^i} \nabla' u^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}),$$

où $y_\varepsilon(x') = \sum_{i \in I_\varepsilon} (x' - \varepsilon i)$. Utilisant (3.15), on trouve

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_{r_\varepsilon}^i} \nabla' v_\varepsilon^i(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}).$$

Par intégration par parties, on trouve :

$$\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = -\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_I \int_{D_{r_\varepsilon}^i} v_\varepsilon^i \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{r_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right) \right).$$

Utilisant la définition de v^ε on obtient :

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \nabla' u^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = -r_\varepsilon \int_{F_\varepsilon} v^\varepsilon \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \int_{F_\varepsilon} v^\varepsilon \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right). \quad (3.16)$$

Prenant la limite dans (3.16) en utilisant (3.13)-(3.14), on trouve :

$$\int_{\Omega} \int_D K'(x, y) \psi(x, y) = - \int_{\Omega} \int_D \hat{v}(x, y) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right). \quad (3.17)$$

De (3.17) on a $\hat{v} \in L^2(\Omega; H^1(D))$ et $K'(x, y) = \nabla_y \hat{v}(x, y)$. Posons

$$v = \hat{v} - \int_D \hat{v}.$$

Il est clair que $v \in L^2(\Omega; H_m^1(D))$ et $K' = \nabla_y \hat{v} = \nabla_y v$, donc v vérifie (3.11).

Montrons (3.12). D'après (3.3) on a :

$$\int_{F_\varepsilon} \left(\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \right)^2 \leq C. \quad (3.18)$$

Il existe alors $Z_3 \in L^2(\Omega \times D)$ et il existe une sous suite telle que :

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup Z_3(x, y). \quad (3.19)$$

Puisque $\int_{F_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq \int_{F_\varepsilon} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \right|^2$ alors de (3.18) on a :

$$\int_{F_\varepsilon} \left(\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} u^\varepsilon \right)^2 \leq C. \quad (3.20)$$

Il existe alors $z_0 \in L^2(\Omega \times D)$ et il existe une sous suite telle que :

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup z_0(x, y). \quad (3.21)$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$. En intégrant par parties, on obtient : $\forall \alpha = 1, 2$

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_\alpha}(x) \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = -\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{r_\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right).$$

On multiplie par r_ε ensuite on passe à la limite en utilisant (3.11) et (3.21) et on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_D z_0(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}(x, y) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times D).$$

Donc $\frac{\partial z_0}{\partial y_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2$. Par conséquent p.p. $(x, y) \in \Omega \times D$ $z_0(x, y) = z_3(x)$ et on a :

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup z_3(x). \quad (3.22)$$

Soit $\psi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$, puisque $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 alors :

$$\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3} \psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = -\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} u^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \left(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon} \right). \quad (3.23)$$

Passons à la limite dans (3.23) en tenant compte de (3.19) et (3.22), on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_D Z_3(x, y) \psi(x, y) = - \int_{\Omega} \int_D z_3(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_3}(x, y). \quad (3.24)$$

D'où Z_3 ne dépend pas de y , de plus, $z_3 \in L^2(\omega; H^1(I))$ et on a

$$\frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) = Z_3(x). \quad (3.25)$$

En outre, puisque (3.24) est satisfaite $\forall \psi \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$ en particulier $\forall \psi \in C(\overline{\Omega})$, on a :

$$z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (3.26)$$

De (3.19) et (3.25)-(3.26) on conclut à (3.12). Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.

Lemme 2.3

Pour $\alpha = 1, 2$, soit $\sigma_{\alpha}^{\varepsilon} = \sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon} \sum_j (A_{\alpha j}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j})$. La limite " \rightharpoonup " double échelle de $\sigma_{\alpha}^{\varepsilon}$ notée $\sigma_{\alpha}(x, y) \in L^2(\Omega \times D)$ satisfait la propriété suivante :

$$\int_D \sigma_{\alpha}(x, y) dy = 0 \quad p.p. \ x \in \Omega. \quad (3.27)$$

Preuve :

Puisque $A_{ij} \in L^{\infty}(\Omega \times Y)$ alors de (3.3) on conclut que :

$$\int_{F_{\varepsilon}} (\sigma_{\alpha}^{\varepsilon})^2 \leq C.$$

Donc il existe $\sigma_{\alpha} \in L^2(\Omega \times D)$ telle que $\sigma_{\alpha}^{\varepsilon} \rightharpoonup \sigma_{\alpha}$.

Soit $D_2 = D(0, 2)$ le disque de centre 0 et de rayon 2. Posons :

$$M_{\varepsilon}^0 = \left(\bigcup_{i \in I_{\varepsilon}} (r_{\varepsilon} D_2 + \varepsilon i) \times I \right) \setminus F_{\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{D}(D_2)$, on considère :

$$\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \phi(x) \psi\left(\frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}\right). \quad (3.29)$$

On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \psi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon} r_{\varepsilon}} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi.$$

Prenons dans (1.16) la fonction test φ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{\varepsilon} \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \psi + \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha}^{\varepsilon} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \int_{F_{\varepsilon}} A_{3j} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{\alpha j} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \psi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\alpha}} \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{3j} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon}} \int_{\Omega} f \phi \psi. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Puisque $A_{ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon})$, $\phi(x)$, $\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) \in L^\infty(\Omega)$, il existe une constante C telle que :

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon r_\varepsilon} \left| \int_{M_\varepsilon^0} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right| \leq C \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon r_\varepsilon} \int_\Omega \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right| \chi_{M_\varepsilon^0}. \quad (3.31)$$

On applique l'inégalité de Hölder en utilisant le fait que $|M_\varepsilon^0| \equiv \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ et puis (3.2) à $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}$, on obtient :

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right| \chi_{M_\varepsilon^0} \leq \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \chi_{M_\varepsilon^0} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (3.32)$$

De (3.31)-(3.32) on déduit :

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon r_\varepsilon} \left| \int_{M_\varepsilon^0} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon}. \quad (3.33)$$

Le passage à la limite dans (3.33) nous donne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}\mu_\varepsilon r_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon^0} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Prenons la limite dans (3.30) en utilisant $1/\mu_\varepsilon \rightarrow 0$ (car $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$) et $\sigma_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_\alpha$ on trouve :

$$\int_\Omega \int_D \phi(x) \left(\sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) (x, y) dx dy = 0, \forall \phi \forall \psi.$$

D'où :

$$\int_D \left(\sigma_1 \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) (x, y) dx dy = 0, \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2). \quad (3.35)$$

On choisit ψ dans (3.35) telle que $\psi = y_1$ dans D puis $\psi = y_2$ dans D et on trouve :

$$\int_D \sigma_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = \int_D \sigma_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2.$$

Fin de la preuve du Lemme.

Dans la suite, on aura besoin au lemme de densité suivant :

Lemme 2.4

L'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi \mid \psi \in C_\#^\infty(Y) \text{ telle que } \nabla_y \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ au voisinage de } 0 \right\}. \quad (3.36)$$

est dense dans $H_\#^1(Y)/\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit $\overline{\mathcal{H}}$ la fermeture de \mathcal{H} dans $H_\#^1(Y)/\mathbb{R}$. Prenons $\phi \in C_\#^\infty(Y)$ et soit P_ϕ sa projection sur $\overline{\mathcal{H}}$. L'espace $\overline{\mathcal{H}}$ est un sous-espace fermé de $H_\#^1(Y)/\mathbb{R}$ alors $\phi - P_\phi$ est orthogonal à $\overline{\mathcal{H}}$, donc :

$$\int_{(Y \setminus \{0\})} \nabla^y (\phi - P_\phi) \nabla^y \psi = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Y \setminus \{0\}).$$

D'où :

$$-\Delta_y (\phi - P_\phi) = 0, \quad \text{dans } Y/\{0\}. \quad (3.37)$$

La fonction $\Delta_y \phi \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ car $\phi \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ ce qui implique d'après (3.37) que $\Delta_y(P_{\phi}) \in C_{\#}^{\infty}(Y)$. Puisque $P_{\phi} \in H_{\#}^1(Y)$ alors de l'équation (3.37) on conclut que $P_{\phi} \in C_{\#}^{\infty}(Y)$ et on a :

$$-\Delta_y(\phi - P_{\phi}) = 0, \quad \text{dans } Y. \quad (3.38)$$

Multiplions les deux membres de (3.38) par $(\phi - P_{\phi})$ et intégrons par parties, on trouve :

$$\int_Y \nabla_y(\phi - P_{\phi}) \nabla_y(\phi - P_{\phi}) - \int_{\partial Y} \nabla_y(\phi - P_{\phi}) n \cdot (\phi - P_{\phi}) = 0.$$

Puisque $(\phi - P_{\phi})$ et $\nabla_y(\phi - P_{\phi})$ sont Y -périodiques $\int_{\partial Y} \nabla_y(\phi - P_{\phi}) n \cdot (\phi - P_{\phi}) = 0$. On a donc :

$$\int_Y |\nabla_y(\phi - P_{\phi})|^2 = 0.$$

Il existe donc une constante c dans \mathbb{R} telle que :

$$\phi(y) - P_{\phi}(y) = c, \quad \forall y \in Y. \quad (3.39)$$

Ce qui signifie $\phi = P_{\phi}$ dans $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$. Alors $\phi \in \overline{\mathcal{H}}$ car $p_{\phi} \in \overline{\mathcal{H}}$, par conséquent $C_{\#}^{\infty}(Y)/\mathbb{R} \subset \overline{\mathcal{H}}$. Puisque la fermeture de $C_{\#}^{\infty}(Y)/\mathbb{R}$ est égale à $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ alors $\overline{\mathcal{H}} = H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$, d'où le résultat annoncé.

On conclut de ce lemme que l'espace

$$\overline{U}^0 = \{ \bar{u}^0 \mid \bar{u}^0 = \sum_{p \in J} \phi^{(p)}(x) \psi^{(p)}(y), \quad J \text{ est fini, } \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \psi \in \mathcal{H} \}, \quad (3.40)$$

est dense dans $U^0 = L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})$.

Rappelons aussi que les espaces :

$$\overline{U} = \mathcal{D}(I, C^{\infty}(\overline{\omega})), \quad \overline{\mathcal{V}} = \mathcal{D}(\Omega \times D_2), \quad (3.41)$$

sont denses dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ et \mathcal{V} respectivement.

3.2.4 Preuve des résultats

Preuve du théorème 2.1 :

Rappelons d'abord que l'existence des fonctions $(u, u^0, v) \in \mathcal{S}$ et $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ vérifiant les convergences (2.2)-(2.6) du théorème 2.1 a été démontrée dans le Lemme 2.2.

$$1) \quad \underline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_{\varepsilon} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon})} = \mu \in [0, \infty[$$

Montrons d'abord $z_3 = \sqrt{\pi} \mu u$. La suite u^{ε} est bornée dans $H^1(\Omega)$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_{\varepsilon} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon}) = \mu$, d'où la suite $\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon} u^{\varepsilon}$ converge fortement vers $\sqrt{\pi} \mu u$ dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, d'après (3.22) on a $\sqrt{\pi} \mu_{\varepsilon} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon} u^{\varepsilon} \rightharpoonup z_3$, puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_{\varepsilon}) = 0$, alors d'après le lemme 1.2 (voir [20]) on a :

$$\sqrt{\pi} \mu u(x) = \int_D z_3(x) dy = z_3(x). \quad (4.1)$$

Donc (2.7) est satisfaite.

Soient $(\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}) \in \bar{U} \times \bar{U}^0 \times \bar{V}$ et soit ϕ la fonction :

$$\phi(x) = \bar{u}(x) + \varepsilon \bar{u}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon}} \bar{v}(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}). \quad (4.2)$$

Puisque $\nabla \bar{u}^0 = 0$ au voisinage de 0 car $u^0 \in \bar{U}^0$ alors pour ε assez petit $\nabla \bar{u}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = 0$ dans F_ε . D'autre part, $\nabla \bar{v} = 0$ sur $\Omega \setminus (F_\varepsilon \cup M_\varepsilon^0)$ car $\bar{v} \in \mathcal{D}(\Omega \times D_2)$ où M_ε^0 est l'ensemble défini dans (3.28) et $D_2 = D(0, 2)$. Donc on a : $\forall \alpha = 1, 2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} + (\varepsilon \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial y_\alpha}) \chi_{M_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} r_\varepsilon} (r_\varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha}) \chi_{(F_\varepsilon \cup M_\varepsilon^0)}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x_3} \chi_{M_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \chi_{(F_\varepsilon \cup M_\varepsilon^0)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

En prenant dans (1.16) la fonction test ϕ de (4.2), on obtient :

$$\begin{cases} \sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \sigma_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} + \sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} A_{3j} (\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \\ \int_{F_\varepsilon} A_{\alpha j} (\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}) (r_\varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha}) + \int_{F_\varepsilon} A_{3j} (\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}) (r_\varepsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3}) \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon}} \int_{M_\varepsilon^0} A_{ij} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} r_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon^0} A_{\alpha j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} \\ + \int_\Omega A_{\alpha j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial y_\alpha}) \chi_{M_\varepsilon} + \int_\Omega A_{3j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x_3}) \chi_{M_\varepsilon} \\ = \int_\Omega f(\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^0) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon}} \int_\Omega f \bar{v}. \end{cases} \quad (4.4)$$

où $\sigma_\alpha^\varepsilon$ est la suite définie dans le lemme 1.3.

Puisque $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha}(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})$ et $A_{ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \in L^\infty(\Omega)$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que la suite $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ on trouve qu'il existe une constante C telle que :

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} r_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon^0} |A_{\alpha j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha}| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} r_\varepsilon} C \int_\Omega |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}| \chi_{M_\varepsilon^0} \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon}.$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} r_\varepsilon} \int_{M_\varepsilon^0} A_{\alpha j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} \right) = 0. \quad (4.5)$$

D'autre part, d'après le lemme 1.3 on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi\mu_\varepsilon} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \sigma_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} \right) = \sqrt{\pi\mu} \int_\Omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\alpha} \left(\int_D \sigma_\alpha(x, y) dy \right) dx = 0. \quad (4.6)$$

Prenons la limite dans (4.4) en utilisant (2.2)-(2.6) et (2.7), (4.5)-(4.6), le fait que $A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A(x, 0)$ au sens fort (proposition 1.4) et $A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A(x, y)$ au sens fort (voir rappels), $\frac{\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \rightarrow 0$ (car $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$); on obtient :

$$\begin{cases} \int_\Omega \int_D A(x, 0) \left(\frac{\nabla_y v}{\sqrt{\pi\mu} \frac{\partial u}{\partial x_3}} \right) \left(\frac{\nabla_y \bar{v}}{\sqrt{\pi\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3}} \right) + \int_\Omega \int_Y A(x, y) \left(\nabla' u + \nabla_y u^0 \right) \left(\nabla' \bar{u} + \nabla_y \bar{u}^0 \right) \\ = \int_\Omega f \bar{u}, \quad \forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}) \in \bar{U} \times \bar{U}^0 \times \bar{V}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Puisque $\overline{U} \times \overline{U}^0 \times \overline{V}$ est dense dans \mathcal{S} alors (4.7) est satisfaite $\forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}) \in \mathcal{S}$, d'où (u, u^0, v) est une solution de (2.8). Puisque les matrices $A(x, 0)$ et $A(x, y)$ sont coercives, d'après le théorème de Lax-Milgram l'équation (2.8) admet une solution unique qui est (u, u^0, v) .

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu_\varepsilon \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = \infty$$

D'après (3.20) on a :

$$\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \mu_\varepsilon r_\varepsilon} \varepsilon C. \quad (4.8)$$

Donc $\int_{F_\varepsilon} (u^\varepsilon)^2 \rightarrow 0$, et on conclut que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup 0. \quad (4.9)$$

Puisque u^ε est bornée dans $H^1(\Omega)$ et $\varepsilon^2 \log r_\varepsilon \rightarrow 0$ alors d'après le lemme 1.2 la limite u de u^ε vérifie :

$$u(x) = \int_D 0 dy = 0. \quad (4.10)$$

On remplace ϕ par u^ε dans la formulation variationnelle (1.16) puis on passe à la limite en utilisant $u^\varepsilon \rightarrow 0$ on trouve aisément la deuxième limite dans (2.9). Le Théorème 1.1 est démontré.

Preuve du théorème 2.2 :

Fixons u et considérons $\bar{u} = \bar{v} = 0$ dans le système (2.8) on trouve :

$$\begin{cases} u^0 \in U^0, \\ \int_\Omega \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y u^0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_\Omega \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla'_y u \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \forall \bar{u}^0 \in U^0, \end{cases} \quad (4.11)$$

La fonction u^0 est la solution unique de (4.11), la démonstration se fait aisément par l'application du théorème de Lax-Milgram dans U^0 .

Soit $\bar{u}^0 \in U^0$. On choisit dans (2.13) la fonction test $\bar{u}^0(x, \cdot) \in H^1(Y)/\mathbb{R}$ où x est fixée dans Ω puis on multiplie (2.13) par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on intègre sur Ω . Faisant la somme pour $i = 1, 2, 3$, on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y A(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y (\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \hat{u}_i) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_\Omega \int_Y A(x, y) \nabla u \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{u}^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Comparant (4.11) et (4.12) en tenant compte de l'unicité de la solution, on trouve $u^0 = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \hat{u}_i$.

On fixe u et on choisit $\bar{u} = \bar{u}^0 = 0$ dans (2.8) on obtient :

$$\begin{cases} v_3 \in \mathcal{V}, \\ \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y v \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \forall \bar{v} \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (4.13)$$

La fonction v est la solution unique de (4.13), la preuve se fait par l'application du théorème de Lax-Milgram dans \mathcal{V} .

Soit $\bar{v} \in \mathcal{V}$. On choisit dans (2.14) la fonction test $\bar{v}(x, \cdot) \in H_m^1(D)$ où x est fixée dans Ω puis on multiplie (2.14) par $\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u}{\partial x_3}$, ensuite on intègre sur Ω et on obtient :

$$\int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} \nabla_y (\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \hat{v}) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} = - \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_y \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Comparant (4.13) et (4.14) et tenant compte de l'unicité de la solution on trouve $v = \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u}{\partial x_3} \hat{v}$. D'où (2.12) est satisfaite.

Preuve du théorème 2.3 :

On prend $\bar{u}^0 = \bar{v} = 0$ dans (2.8), on remplace u^0 et v par leurs expressions dans (2.12), puis on utilise les notations (2.16)-(2.17), on obtient aisément :

$$\mu^2 \int_{\Omega} a^*(x) \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} + \int_{\Omega} A^*(x) \nabla u \cdot \nabla \bar{u} = \int_{\Omega} f \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \quad (4.15)$$

D'après la remarque 1.4, l'opérateur bilinéaire A^* est continu et coercif sur $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$ et $a^* \in L^\infty(\Omega)$, on applique le théorème de Lax-Milgram et on trouve que (4.15) admet une solution unique u . La formulation variationnelle de (2.15) est (4.15), donc l'équation (2.15) est démontrée.

3.3 PROBLÈME DE L'ÉLASTICITÉ AVEC DES DÉPLACEMENTS DE L'ORDRE DE $\frac{1}{\varepsilon^2}$ DANS LES FIBRES

On étudie ici le système de l'élasticité linéarisée dans le même cadre géométrique que précédemment, et en supposant que le rapport des magnitudes des déplacements est en $\frac{1}{\varepsilon^2}$. La seule nouveauté étant l'hypothèse sur le rayon des fibres $r_\varepsilon \ll \varepsilon$.

Nous montrons en particulier que l'anisotropie des fibres n'a d'effet à l'échelle macroscopique que si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}) = \mu \in]0, \infty[$. Dans ce cas, une variable $v_3(x, y)$ correspondant au couplage flexion-torsion dans les fibres apparaît dans le problème limite, mais contrairement au chapitre 2, ici l'angle torsion c est nul.

En revanche pour un autre choix de scaling, à savoir, $\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}$ dans les fibres et 1 dans la matrice, on montre que la variable d'anisotropie reste comme dans le chapitre 2 sous la forme d'un couple $(c(x)y_\alpha^R, v_3(x, y))$.

3.3.1. Description du problème

Dans cette partie on s'intéresse à l'homogénéisation d'un milieu périodique, élastique, fortement hétérogène, et soumis à des forces extérieures. On se restreint au cas des petits déplacements pour lesquels l'équation d'équilibre est le système de l'élasticité linéarisée. Le domaine de la configuration géométrique est le même que celui considéré dans le deuxième chapitre pour l'élasticité, mais, en supposant que le rayon des fibres, noté r_ε , est petit par rapport à la taille de la période ε . Le domaine du milieu est donc un ouvert $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ qui est composé de deux matériaux : un matériau F_ε composé des fibres déconnectées distribuées périodiquement, et verticalement dans le milieu Ω par une période ε , le rayon d'une fibre est r_ε tel que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0$, on suppose que r_ε vérifie de plus $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0$. Le deuxième matériau est la matrice M_ε qui constitue l'ensemble entourant les fibres dans le milieu Ω .

Nous étudions le système de l'élasticité linéarisée dans le cas général sans aucune condition telle que l'isotropie ou l'orthotropie. Dans cette étude on suppose que les fibres sont rigides telles que le coefficient de l'élasticité est de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon^2}$ tandis que la matrice M_ε son coefficient est de l'ordre 1.

L'anisotropie ne joue pas d'un grand rôle sauf si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}) = \mu \in]0, \infty[$, dans ce cas l'anisotropie nécessite l'introduction d'une nouvelle variable $v_3(x, y)$ correspondante au couplage flexion-torsion dans les fibres. L'angle de la torsion est nulle, et la nature de la variable v_3 est liée aussi de la réduction de dimension 3d-1d et le choix de scaling $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans F_ε , en effet, nous allons voir dans le problème qui sera étudié dans la partie suivante avec un scaling d'ordre $\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}$ que la variable du couplage devient sous la forme $(c(x)y_\alpha^R, v_3(x, y))$, où $c(x)$ désigne l'angle de la torsion .

On reprend donc le contexte géométrique suivant ainsi que les notations :

$$\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3, \quad \omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2, \quad I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (1.1)$$

$$\omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i, \quad \omega_\varepsilon^i = \varepsilon\omega + \varepsilon i, \quad (1.2)$$

où

$$I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varepsilon i \in \omega\}, \quad (1.3)$$

Pour tout ε on considère $r_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0. \quad (1.4)$$

Définissons l'ensemble F_ε des fibres et l'ensemble M_ε de la matrice par :

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon, \quad (1.5)$$

où

$$F_\varepsilon^i = D_{r_\varepsilon}^i \times I, \quad D_{r_\varepsilon}^i = D(0, r_\varepsilon) + \varepsilon i. \quad (1.6)$$

($D(0, r_\varepsilon)$ est un disque de centre 0 et du rayon r_ε dans ω).

Dans la suite on utilisera la convention de sommation des indices répétés; les indices latins i, j, k, l, \dots varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ alors les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ varient dans $\{1, 2\}$.

Soit

$$Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2. \quad (1.7)$$

On considère le tenseur A d'ordre quatre défini dans $\Omega \times Y$ dont les coefficients A_{ijkl} où $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ tels que : $\forall (x, y) \in \Omega \times Y$ et pour tout 2×2 tenseur symétrique $e = (e_{ij})$,

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad (1.8)$$

$$\forall x, \quad y \longrightarrow A_{ijkl}(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique}, \quad (1.9)$$

$$A_{ijkl} \in C(\overline{\Omega} \times C_\#(Y)), \quad (1.10)$$

$$\exists m > 0, \quad A_{ijkl}(x, y)e_{kl}e_{ij} \geq me_{ij}e_{ij}, \quad (1.11)$$

où $C_\#(Y)$ désigne l'espace de fonctions continues et Y -périodiques dans \mathbb{R}^2 .

En général, si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, le tenseur $e(\psi)$ est une matrice 3×3 dont les composantes $e_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i})$ avec $i, j = 1, 2, 3$, autrement dit $e(\psi)$ est défini par :

$$e(\psi) = \frac{1}{2}(\nabla \psi + {}^t \nabla \psi). \quad (1.12)$$

Pour un ensemble mesurable \mathcal{A} , la notation $\chi_{\mathcal{A}}$ désigne la fonction caractéristique de \mathcal{A} et la notation $|\mathcal{A}|$ désigne sa mesure de Lebesgue.

Posons :

$$\Gamma_0 = \omega \times \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N. \quad (1.13)$$

(0 pour désigner la condition de Dirichlet, N pour la condition de Neumann).

Soit :

$$f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad (1.14)$$

on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}\right)A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon)n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.15)$$

où n est la normale extérieure à Γ_N .

Soit U l'espace :

$$U = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3. \quad (1.16)$$

L'espace U muni de la norme $(\sum_{i,j} \|e_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert (voir rappels).

Le problème (1.15) s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in U, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon} \right) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) e(\phi)(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx, \\ \forall \phi \in U. \end{cases} \quad (1.17)$$

On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace U en utilisant les hypothèses (1.8)-(1.11) sur le tenseur A et (1.14) sur f pour montrer que le problème (1.17) admet une solution u^ε .

$D = D(0, 1) \subset Y$ un disque de centre 0 et de rayon 1. On introduit les espaces suivants :

$$U^0 = \{u^0 \mid u^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0), u^0 \in L^2(\Omega; (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3)\}, \quad (1.18)$$

$$\mathcal{V}_3 = L^2(\Omega; H_m^1(D)), \quad (1.19)$$

$$\mathcal{W} = L^2(\Omega; \mathcal{W}^0), \quad (1.20)$$

où :

$$\mathcal{W}^0 = \{w^0 \mid w^0 = (w_1^0, w_2^0, 0) \in (H_m^1(D))^3, \int_D (y_2 w_1^0 - y_1 w_2^0) = 0\}. \quad (1.21)$$

On considère également les espaces suivants :

$$\mathcal{T} = U \times U^0 \times \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}, \quad \mathcal{Z} = (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times U^0. \quad (1.22)$$

Pour $\psi(x, y) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ on désigne par $e(\psi)$ le tenseur donné en (1.12) tandis que $e^y(\psi)$ est le tenseur symétrique 3×3 dont les composantes $e_{ij}^y(\psi)$, $i, j = 1, 2, 3$ sont données par : $\alpha, \beta = 1, 2$,

$$e_{\alpha\beta}^y(\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_\alpha} \right), \quad e_{\alpha 3}^y(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha}, \quad e_{33}^y(\psi) = 0,$$

ainsi on écrit ;

$$e^y(\psi) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\psi) & e_{\alpha 3}^y(\psi) \\ e_{\alpha 3}^y(\psi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_\alpha} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

3.3.2 Énoncé des résultats

La notation " \rightharpoonup " est pour la convergence double échelle adaptée avec le grandeur des fibres (voir 3.1. (1.17)) tandis que la notation " \rightharpoonrightarrow " est pour la convergence double échelle usuelle (voir rappels).

Dans le théorème suivant on donne la première version du problème homogénéisé. Le problème homogénéisé est fonction du choix de r_ε par rapport à ε^2 , plus précisément on a :

Théorème 3.1

Soit u^ε la suite de solutions du problème (1.15). Il existe

$$(u, u^0, v_3, w) \in \mathcal{T}, \quad \text{et } z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad (2.1)$$

tel que les convergences suivantes sont vérifiées :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } (H^1(\Omega))^3, \quad (2.2)$$

$$e(u^\varepsilon) \rightharpoonrightarrow e(u) + e^y(u^0), \quad (2.3)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightsquigarrow e_{\alpha\beta}^y(w), \quad (2.4)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{33}(u^\varepsilon) \rightsquigarrow \frac{\partial z_3}{\partial x_3}. \quad (2.6)$$

Et de plus on a :

1) Si, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = \mu \in [0, \infty[$ alors :

$$z_3 = \sqrt{\pi}\mu u_3, \quad (2.7)$$

et (u, u^0, v_3, w) est l'unique solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u, u^0, v_3, w) \in \mathcal{T}, \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} & \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \\ \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (e(u) + e^y(u^0))(e(\bar{u}) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f(x)\bar{u}(x)dx, \\ \forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}_3, \bar{w}) \in \mathcal{T}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

2) Si, $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = \infty$ alors :

$$v_3 = w = 0, \quad u_3 = z_3 = 0, \quad (2.9)$$

et $((u_1, u_2), u^0)$ est l'unique solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((u_1, u_2), u^0) \in \mathcal{Z}, \\ \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) \left(e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0) \right) \left(e((\bar{u}_\alpha, 0)) + e^y(\bar{u}^0) \right) = \int_{\Omega} f_\alpha(x)\bar{u}_\alpha(x)dx, \\ \forall ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{u}^0) \in \mathcal{Z}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Remarque 3.1 L'unicité de la solution des problèmes (2.8) et (2.10) implique que toute la suite u^ε vérifie les convergences (2.2)-(2.6).

Remarque 3.2 Si $\mu = 0$ alors $v_3 = w = 0$ et le problème (2.8) ne contient que les variables (u, u^0) et est posé sur le domaine $\Omega \times Y$. La preuve est immédiate, d'abord on a $\sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$, on pose $\bar{u} = \bar{u}^0 = 0$ et $\bar{v}_3 = v_3, \bar{w} = w$ dans (2.8) on trouve

$$\int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque A est coercive on conclut que $v_3 = w = 0$.

Ici, l'orthotropie du matériau ne joue pas un rôle particulier sauf dans le cas où r_ε équivaut à ε^2 , la variable v_3 est nulle dans le système (2.8). On précise cette remarque dans la proposition suivante :

Proposition 3.1

On suppose que le tenseur A vérifie l'hypothèse de symétrie suivante ;

$$A_{\alpha 3 \gamma \delta} = A_{\alpha 3 3 3} = 0, \quad \forall \alpha, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (2.11)$$

alors si $\mu \neq 0$ la variable $v_3 = 0$ et le problème (2.8) ne contient que les variables (u, u^0, w) .

Pour montrer cette proposition on choisit $\bar{u} = \bar{u}^0 = \bar{w} = 0$ et $\bar{v}_3 = v_3$ dans (2.8) puis on utilise la condition (2.11) qui élimine la contribution de $\sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et de w et on trouve l'équation

$$\int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque A est coercive on conclut que $v_3 = 0$.

Dans le théorème suivant on donne une expression des variables u^0, v_3 et w en fonction de u .

Théorème 3.2

Soient u, u^0, v_3, w les solutions données par le théorème 2.1. alors :

$$u^0 = \sum_{p,q=1}^3 \hat{u}^{(pq)} e_{pq}(u), \quad \text{si : } \lim_{\varepsilon} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) = \mu. \quad (2.12)$$

$$(v_3, w) = \sqrt{\pi}\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} (\hat{v}_3, \hat{w}), \quad \text{si : } \lim_{\varepsilon} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) = \mu. \quad (2.13)$$

$$u^0 = \sum_{p,q=1}^3 \hat{u}^{(pq)} e_{pq}((u_{\alpha}, 0)), \quad \text{si : } \lim_{\varepsilon} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) = \infty, \quad (2.14)$$

où $\hat{u}^{(pq)}$, et (\hat{v}_3, \hat{w}) sont les uniques solutions aux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \hat{u}^{(pq)} \in L^{\infty}(\Omega; (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3), & \text{et p.p. } x \in \Omega, \\ \int_Y A(x, y) e^y(\hat{u}^{(pq)}) e^y(\bar{u}^0) = - \int_Y A(x, y) e^{(pq)} e^y(\bar{u}^0), \\ \forall \bar{u}^0 \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3, \end{cases} \quad (2.15)$$

où $e^{(pq)}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ($e_{ij}^{(pq)} = \delta_{ip} \delta_{jq}$). Et

$$\begin{cases} (\hat{v}_3, \hat{w}) \in L^{\infty}(\Omega; H_m^1(D)) \times L^{\infty}(\Omega; \mathcal{W}^0), & \text{et p.p. } x \in \Omega, \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} = \\ - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix}, \\ \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}^0, \end{cases} \quad (2.16)$$

Remarque 3.3 L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.15) s'obtient comme dans les chapitres précédents par un argument de localisation en x et par application de Lax-Milgram dans $(H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3$. On remplace \bar{u}^0 par $\hat{u}^{(pq)}(x, \cdot)$ dans (2.15) et on exploite les conditions (1.10)-(1.11) sur A on obtient :

$$m \int_Y |e^y(\hat{u}^{(pq)})(x, y)|^2 dy \leq C \int_Y |e^y(\hat{u}^{(pq)})(x, y)| dy, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Appliquant l'inégalité de Hölder au second membre, on obtient :

$$m \int_Y |e^y(\hat{u}^{(pq)})(x, y)|^2 \leq C \left(\int_Y |e^y(\hat{u}^{(pq)})(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Ce qui implique que $\hat{u}^{(pq)} \in L^\infty(\Omega; (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3)$. En outre, puisque $\hat{u}^{(pq)} \in L^\infty(\Omega; (H_{\#}(Y)/\mathbb{R})^3)$ et $e_{pq}(u) \in L^2(\Omega)$ alors $(\hat{u}^{(pq)} e_{pq}(u)) \in L^2(\Omega; (H_{\#}(Y)/\mathbb{R})^3) = U^0$, ce qui montre que l'expression donnée pour u^0 en (2.12) (Resp. en (2.14)) est dans l'espace U^0 .

De la même façon on peut montrer l'existence et l'unicité de la solution (\hat{v}_3, \hat{w}) de (2.15), et la formulation donnée pour (\hat{v}_3, \hat{w}) dans (2.13) est dans l'espace $\mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}$.

Grâce au théorème précédent on obtient la formulation finale du problème homogénéisé qui ne contient que la variable macroscopique et la fonction u .

Théorème 3.3

La suite u^ε de solutions de (1.13) converge fortement dans $(L^2(\Omega))^3$ vers u , et on a :

1) Si, $\lim_{\varepsilon} (r_\varepsilon/\varepsilon^2) = \mu \in [0, \infty[$, u est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (a^*(x) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) - \operatorname{div} A^*(x) e(u) & = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ A^*(x) e(u) \cdot n & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.17)$$

2) Si, $\lim_{\varepsilon} (r_\varepsilon/\varepsilon^2) = \infty$, $u_3 = 0$ et (u_1, u_2) est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2, \\ \int_{\Omega} A^*(x) e((u_\alpha, 0)) e((\bar{u}_\alpha, 0)) = \int_{\Omega} f_\alpha \bar{u}_\alpha, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2. \end{cases} \quad (2.18)$$

où $A^*(x)$ est un tenseur dont les coefficients $A_{ijkl}^*(x)$ sont définis par : p.p. $x \in \Omega$

$$A_{ijkl}^*(x) = \int_Y A(x, y) (e^y(\hat{u}^{(kl)}) + e^{(kl)}) \cdot e^{(ij)} dy. \quad (2.19)$$

et $a^*(x)$ est une fonction scalaire définie en fonction de (\hat{v}_3, \hat{w}) par : p.p. $x \in \Omega$

$$a^*(x) = \int_D (A_{33\alpha\beta}(x, 0) e_{\alpha\beta}(\hat{w}) + A_{33\alpha 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + A_{3333}(x, 0)) dy. \quad (2.20)$$

Remarque 3.4 Les opérateurs A^* et a^* sont symétriques et coercifs, et $A_{ijkl}^*, a^* \in L^\infty(\Omega)$.

En effet, en utilisant (2.15) on trouve : Pour tout 2×2 tenseur symétrique $\xi = (\xi_{ij})$ on a :

$$A_{ijkl}^* \xi_{kl} \xi_{ij} = \int_Y A(\xi_{kl} e^y(\hat{u}^{(kl)}) + \xi_{kl} e^{(kl)}) (\xi_{ij} e^y(\hat{u}^{(ij)}) + \xi_{ij} e_{ij}).$$

Puisque A est symétrique alors $A_{ijkl}^* \xi_{kl} \xi_{ij} = A_{klij}^* \xi_{ji} \xi_{kl} = A_{jikl}^* \xi_{kl} \xi_{ji}$, d'où A^* est symétrique.

D'autre part, faisons la somme pour $i, j = 1, 2, 3$ puis pour $k, l = 1, 2, 3$ on trouve :

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(\sum_{st} \xi_{st} e^y(\hat{u}^{(st)}) + \xi) \cdot (\sum_{st} \xi_{st} e^y(\hat{u}^{(st)}) + \xi).$$

La coercivité de A implique :

$$A^* \xi \cdot \xi \geq m \int_Y |(\sum_{st} \xi_{st} e^y(\hat{u}^{(st)}) + \xi)|^2 dy.$$

La périodicité de $\hat{u}^{(st)}$ implique $\int_Y e^y(\hat{u}^{(st)}) = 0$, d'où :

$$A^* \xi \cdot \xi \geq m \left(\int_Y \left(\sum_{st} \xi_{st} e^y(\hat{u}^{(st)}) \right)^2 + |\xi|^2 \right) \geq m |\xi|^2. \quad (2.21)$$

Ce qui montre que A^* est coercive.

En outre, puisque $A \in L^\infty(\Omega \times Y)$, $\hat{u}^{(pq)} \in L^\infty(\Omega; (H_{\#}(Y)/\mathbb{R})^3)$, alors de (2.19) on a A_{ijkl}^* .

De la même manière on peut montrer que a^* est coercive et $a^* \in L^\infty(\Omega)$.

Cette remarque nous permet de montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram l'existence et l'unicité de la solution des problèmes (2.17)-(2.18).

Dans la proposition suivante on donne les coefficients A_{ijkl}^* et a^* explicitement dans le cas d'un matériau isotrope.

Proposition 3.2

On suppose que le tenseur de l'élasticité $A = (A_{ijkl})$ est donné par:

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \lambda \geq 0 \quad \mu > 0, \quad (2.22)$$

alors les coefficients A_{ijkl}^* et a^* définis dans le théorème 3.3 deviennent :

$$A_{ijkl}^* = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad a^* = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}. \quad (2.23)$$

3.3.3 Estimations a priori

Soit u^ε la solution de (1.15), on prolonge u^ε dans $\omega \times \mathbb{R}$ par zéro, considérons donc \bar{u}^ε où :

$$\bar{u}^\varepsilon(x) = \begin{cases} u^\varepsilon(x) & \text{si } x \in \omega \times I, \\ 0 & \text{si } x \in \omega \times (\mathbb{R} \setminus I). \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 alors $\bar{u}^\varepsilon \in H^1(\Omega \times \mathbb{R})$ et on a : $\forall i, j = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}} = \begin{cases} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} & \text{si } x \in \omega \times I, \\ 0 & \text{si } x \in \omega \times (\mathbb{R} \setminus I). \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit

$$\bar{I}_\varepsilon = I_\varepsilon \times I_{r_\varepsilon}, \quad \text{où } I_{r_\varepsilon} = \{i_3 \in \mathbb{Z}, (r_\varepsilon i_3 + r_\varepsilon I) \cap I \neq \emptyset\}. \quad (3.3)$$

(voir 3.1. (1.8)-(1.10)).

Pour tout $\bar{i} \in \bar{I}$ considérons

$$C_\varepsilon^{\bar{i}} = D_{r_\varepsilon}^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3}, \quad \text{où } I_{r_\varepsilon}^{i_3} = r_\varepsilon I + r_\varepsilon i_3. \quad (3.4)$$

(voir aussi 3.1. (1.11)). On constate que

$$F_\varepsilon = \bigcup_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega), \quad F_\varepsilon^i = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (D_{r_\varepsilon}^i \times (I_{r_\varepsilon}^{i_3} \cap I)), \quad I = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (I_{r_\varepsilon}^{i_3} \cap I). \quad (3.5)$$

Considérons les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_\varepsilon^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_1^\varepsilon - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_2^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 \right) dx} \\ \bar{b}_{1\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_1^\varepsilon - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_3^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx} \\ \bar{b}_{2\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_2^\varepsilon - \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_3^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx} \\ \bar{d}_{k\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{1}{|C_\varepsilon^{\bar{i}}|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \bar{u}_k^\varepsilon dx, \quad k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

On associe à tout $\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$ la fonction $v_\varepsilon^{\bar{i}}$ définie dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} (u_1^\varepsilon(x) - \bar{a}_\varepsilon^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - \bar{b}_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - \bar{d}_{1\varepsilon}^{\bar{i}}), \\ v_{2\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} (u_2^\varepsilon(x) + \bar{a}_\varepsilon^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) - \bar{b}_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - \bar{d}_{2\varepsilon}^{\bar{i}}), \\ v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} (u_3^\varepsilon(x) + \bar{b}_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) + \bar{b}_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - \bar{d}_{3\varepsilon}^{\bar{i}}). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Il est évident que $v_\varepsilon^{\bar{i}} := (v_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{3\varepsilon}^{\bar{i}})$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ vérifie :

$$v_\varepsilon^{\bar{i}} \in (H^1(C_\varepsilon^{\bar{i}}))^3, \text{ et } e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon), \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Définissons maintenant dans Ω la fonction $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon)$ par :

$$v_1^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}, \quad v_2^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}, \quad v_3^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}. \quad (3.9)$$

Dans la suite on va identifier les limites (2.2)-(2.6). Pour cela on commence par le lemme qui suit portant sur des estimations à priori.

Soit u^ε la suite de solutions du problème (1.15), $e(u^\varepsilon)$ son tenseur défini par (1.12), et v^ε la suite définie dans (3.9).

Lemme 3.1

Il existe une constante C telle que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq C. \quad (3.10)$$

$$\int_{F_\varepsilon} \left| \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e(u^\varepsilon) \right|^2 \leq C. \quad (3.11)$$

$$\int_{F_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \leq C. \quad (3.12)$$

Preuve :

On remplace ϕ par u^ε dans (1.17) puis on utilise la condition (1.11) sur le tenseur A et on applique l'inégalité de Hölder sur $(\int_\Omega f u^\varepsilon)$ on obtient :

$$m \int_\Omega |e(u^\varepsilon)|^2 \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon} \right) A e(u^\varepsilon) e(u^\varepsilon) = \int_\Omega f u^\varepsilon \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u^\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ on a $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C \|e(u)\|_{L^2}$ (Inégalité de Korn) et $\|u\| \leq \|\nabla u\|$ alors :

$$m \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq m C^2 \|e(u^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C^2 \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq C^2 \|f\|_{L^2} \|\nabla u^\varepsilon\|.$$

Ce qui montre que $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}$, $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$, et $\|e(u^\varepsilon)\|_{L^2}$ sont bornées, d'où (3.10) est satisfaite.

On constate que :

$$\frac{m}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2 \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u^\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ est bornée alors $(\frac{m}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2)$ est aussi bornée, par conséquent on a (3.11).

Montrons maintenant (3.12). Pour cela on va utiliser le lemme 1.3 (voir 3.1). Soit :

$$T = D(0, 1) \times Y_3 \quad \text{où } Y_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.13)$$

Fixons $\bar{i} = (i, i_3)$ dans \bar{I}_ε et considérons la fonction $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ définie dans T par :

$$\phi_k(y, y_3) = \bar{u}_k^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

où \bar{u}^ε est donnée en (3.1).

On cherche d'abord l'expression de $\hat{\phi}$ donnée dans le lemme 1.3 par (1.46) en fonction de \bar{u}^ε . Faisons le changement de variable $(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) = (x', x_3)$. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T (y_1^2 + y_2^2) dy dy_3 = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 \right) dx, \\ \int_T (y_\alpha^2 + y_3^2) dy dy_3 = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_\alpha}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_\alpha \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx, \quad \alpha = 1, 2, \\ \int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2) dy dy_3 = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_1^\varepsilon(x) - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_2^\varepsilon(x) \right) dx, \\ \int_T (y_3 \phi_\alpha - y_\alpha \phi_3) dy dy_3 = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_\alpha^\varepsilon(x) - \left(\frac{x_\alpha}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_\alpha \right) \bar{u}_3^\varepsilon(x) \right) dx, \quad \alpha = 1, 2, \\ \int_T \phi_k(y) dy dy_3 = \frac{1}{|C_\varepsilon^{\bar{i}}|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \bar{u}_k^\varepsilon(x) dx, \quad k = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

Avec les notations (3.6), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(y, y_3) = a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 + d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \hat{\phi}_2(y, y_3) = -a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 + d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \hat{\phi}_3(y, y_3) = -b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 + d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}. \end{array} \right.$$

Donc on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 - \hat{\phi}_1 = \bar{u}_1^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) - a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \phi_2 - \hat{\phi}_2 = \bar{u}_2^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) + a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \phi_3 - \hat{\phi}_3 = \bar{u}_3^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

D'après l'inégalité (1.45) du lemme 1.3 on a :

$$\int_T |\phi - \hat{\phi}|^2 dy dy_3 \leq C \int_T |e(\phi)|^2 dy dy_3. \quad (3.16)$$

On a : $\forall k, l = 1, 2, 3$,

$$e_{kl}(\phi)(y, y_3) = r_\varepsilon e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon)(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3).$$

On remplace dans (3.16), $(\phi - \hat{\phi})$ par son expression (3.15) et on fait le changement de variable $(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) = x$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_1^\varepsilon - a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 dx \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2 dx, \\ \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_2^\varepsilon + a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 dx \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2 dx, \\ \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_3^\varepsilon + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 dx \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2 dx. \end{array} \right.$$

On divise ces trois inégalités par $\varepsilon^2 r_\varepsilon^2$ et on utilise l'expression (3.7) de $v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}$, on trouve :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2, \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

Faisant la somme pour $\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$, on trouve : $\forall k = 1, 2, 3$

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2$$

Puisque $e(\bar{u}^\varepsilon) = \overline{e(u^\varepsilon)}$ (voir (3.2)) et $F_\varepsilon = \cup_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega)$ alors :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2$$

D'après (3.11) on a $(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2) \leq C$, donc :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C. \quad (3.17)$$

Prenant en compte la définition de v^ε dans (3.9) et l'estimation (3.17) on conclut aisément à l'estimation (3.12).

Dans le lemme suivant la notation " \rightharpoonup " désigne la convergence définie dans (1.16), paragraphe 3.1.

Lemme 3.2

Il existe une sous-suite notée encore ε et $v^0 \in (L^2(\Omega; H^1(T)))^3$ telles que :

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0(x, y, y_3), \quad (3.18)$$

$$\frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e_{kl}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{kl}^y(v^0)(x, y, y_3). \quad (3.19)$$

Preuve :

Dans ce qui suit on écrit souvent φ au lieu de $\varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon})$ dans les intégrations sur F_ε pour une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times T)$, voir la notation $y_\varepsilon(x)$ en 3.1. (1.15).

Les estimations (3.11), (3.12) et la proposition 1.1 entraînent l'existence d'une sous-suite ε de la suite ε et $v^0 \in (L^2(\Omega \times T))^3$, $\chi^0 \in (L^2(\Omega \times T))_s^{3 \times 3}$ telles que:

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0(x, y, y_3). \quad (3.20)$$

$$\frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} e_{kl}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \chi_{kl}^0(x, y, y_3). \quad (3.21)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T)$. D'après (3.21), on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi \right) = \int_\Omega \int_T \chi_{kl}^0 \varphi. \quad (3.22)$$

Puisque $e(u^\varepsilon) = e(\bar{u}^\varepsilon)$ dans F_ε et $e(\bar{u}^\varepsilon)(x) = 0$ si $x \in C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus F_\varepsilon$ alors :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon)\varphi = \frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon)\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}r_\varepsilon} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon)\varphi.$$

D'après (3.8) on a $e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}})$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$. Alors :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon)\varphi = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}})\varphi. \quad (3.23)$$

$\forall \bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon \quad x \mapsto \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) \in \mathcal{D}(C_\varepsilon^{\bar{i}})$ car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T)$. En intégrant par partie dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}})\varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (\frac{\partial v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_l} + \frac{\partial v_{l\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_k})\varphi \\ = -\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}). \end{cases} \quad (3.24)$$

De (3.23)-(3.24) on déduit :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon)\varphi = -\frac{1}{2} \frac{1}{|F_\varepsilon|} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} (r_\varepsilon \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) + \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k})). \quad (3.25)$$

Puisque le support de φ est compact dans $(\Omega \times T)$ alors si $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega \neq \emptyset$ on a :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}) = 0. \quad (3.26)$$

De (3.25)-(3.26) on conclut en utilisant la définition de v_ε :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon)\varphi = -r_\varepsilon \frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (v_k^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) - \frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (v_k^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}). \quad (3.27)$$

Prenons la limite dans (3.27) prenant en compte $v^\varepsilon \rightharpoonup v^0$ on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon)\varphi) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_T (v_k^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}).$$

Comparant cette limite avec (3.22) on conclut :

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega \int_T (v_k^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}) = \int_\Omega \int_T \chi_{kl}^0 \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T).$$

Ce qui montre que $e_{kl}(v^0) \in L^2(\Omega \times T)$ et on a :

$$e_{kl}^y(v^0) = \chi_{kl}^0, \quad \forall k, l = 1, 2, 3. \quad (3.28)$$

D'après l'inégalité de Korn $v^0 \in (L^2(\Omega; H^1(T)))$. Ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Dans le lemme suivant et à l'aide du lemme précédent on va montrer les convergences double échelle (2.4)-(2.6) annoncées dans le théorème 2.1.

La notation " \rightharpoonup " désigne la convergence (1.17) définie dans 3.1.

Lemme 3.3

Il existe $(v_3, w) \in \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}$ et $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ vérifiant :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w), \quad (3.29)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{33}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial z_3}{\partial x_3}. \quad (3.31)$$

Preuve :

Considérons pour $k = 1, 2, 3$ les fonctions suivantes :

$$\bar{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} v_k^0(x, y, y_3) dy_3, \quad \check{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} \frac{\partial v_k^0}{\partial y_3}(x, y, y_3) dy_3. \quad (3.32)$$

Il est clair que $\bar{w}_k, \check{w}_k \in L^2(\Omega \times D)$, d'autre part, puisque $v_k^0 \in L^2(\Omega; H^1(T))$ d'après la proposition 1.5, la fonction \bar{w}_k est dans $L^2(\Omega; H^1(D))$ et on a :

$$\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial y_\alpha} = \int_{Y_3} \frac{\partial v_k^0}{\partial y_\alpha}(x, y, y_3) dy_3, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.33)$$

Utilisons la remarque 1.1 (voir (1.18), 3.1), le lemme 3.2 (3.19), et (3.33) on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \int_{Y_3} e_{\alpha\beta}^y(v^0)(x, y, y_3) dy_3 = e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}). \quad (3.34)$$

Posons :

$$w_\alpha = \bar{w}_\alpha + \frac{\int_D (y_2 \bar{w}_1 - y_1 \bar{w}_2)}{\int_D (y_1^2 + y_2^2)} y_\alpha^R - \int_D \bar{w}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Il est clair que $(w_1, w_2, 0) \in \mathcal{W}$ et $e_{\alpha\beta}^y(w) = e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})$, et donc la limite (3.29) est vérifiée.

On va maintenant identifier la limite de $\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega \times D)$.

Dans ce qui suit on écrit souvent ψ ou $\phi\psi$ au lieu de $\psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})$ si on intègre sur F_ε pour une fonction test $\psi \in C(\bar{\Omega} \times \bar{D})$, voir la notation $y_\varepsilon(x')$ dans 3.1, (1.14).

D'après la remarque 1.1 (voir (1.18), 3.1) et le lemme 3.2 on a : $\forall \alpha = 1, 2$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \int_{Y_3} e_{\alpha 3}^y(v^0)(x, y, y_3) dy_3,$$

En utilisant les notations (3.32)-(3.33) on trouve : $\forall \alpha = 1, 2$

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2}(\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}), \quad (3.35)$$

On montre dans la suite que :

$$\frac{\partial \check{w}_\alpha}{\partial y_\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.36)$$

Soit $(\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$. On considère la fonction test $\phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon} \right)$, d'après (3.35) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \right) = \int_\Omega \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}. \quad (3.37)$$

Puisque $\phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} = r_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) - r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \psi$, alors :

$$2 \frac{\sqrt{\pi} r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \psi. \quad (3.38)$$

La suite $e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (voir Lemme 3.1) et $|F^\varepsilon| \rightarrow 0$ donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \psi \right) = 0. \quad (3.39)$$

On conclut de (3.37), (3.38), et (3.39) que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) \right) = \int_\Omega \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}. \quad (3.40)$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi). \end{cases}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) \psi \left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon} \right) \in \mathcal{D}(F_\varepsilon^i)$ car $\phi(x) \psi(y) \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$, alors en intégrant par partie on obtient :

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) = \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi.$$

Donc :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi. \quad (3.41)$$

La suite $\frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (voir lemme 3.1) et $|F_\varepsilon| \rightarrow 0$ alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi \right) = 0. \quad (3.42)$$

Passons à la limite dans (3.41) en utilisant (3.40) et (3.42); on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) \right) = \int_\Omega \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}. \quad (3.43)$$

D'après (3.2), $\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta}$ dans Ω et $\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\beta} = 0$ dans $C_\varepsilon^i \setminus \Omega$ (si $C_\varepsilon^i \setminus \Omega \neq \emptyset$), donc on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^i} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(\phi \psi). \quad (3.44)$$

La fonction $v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}$ est dans $H^1(C_\varepsilon^{\bar{i}})$ (voir (3.7)-(3.8)) et on a :

$$\frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}} \right), \quad \text{dans } C_\varepsilon^{\bar{i}},$$

ce qui donne immédiatement :

$$\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}}, \quad \text{dans } C_\varepsilon^{\bar{i}},$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) - \frac{1}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi). \quad (3.45)$$

Puisque $\psi \in \mathcal{D}(D)$, alors $\forall x_3 \in I_{r_\varepsilon}^{i_3}$ la fonction $x' \mapsto \phi(x', x_3)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) \in \mathcal{D}(D_{r_\varepsilon}^i)$, d'où :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) dx = \int_{I_\varepsilon^{i_3}} \left(\int_{D_{r_\varepsilon}^i} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) dx' \right) dx_3 = 0. \quad (3.46)$$

De (3.45)-(3.46) on déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi). \quad (3.47)$$

On intègre par partie le second membre de (3.47) en utilisant :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \psi + \frac{1}{r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} + \frac{1}{r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{r_\varepsilon^2} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta},$$

on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) = -\frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) \right) \\ = -\frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \psi - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \\ - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}, \end{cases} \quad (3.48)$$

Faisons la somme pour $\bar{i} \in \bar{I}$, tenant compte de $\phi(x)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = 0$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega$ (si $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega \neq \emptyset$) car $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la définition de v_3^ε dans (3.9) ainsi que les relations (3.44), (3.47), (3.48), on trouve :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) = -r_\varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \psi - r_\varepsilon \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \\ - r_\varepsilon \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} - \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha \partial x_\beta}. \end{cases}$$

Passons à la limite en utilisant (3.18) puis la remarque 1.1, et la notation (3.32), on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) \right) = - \int_{\Omega} \int_D \bar{w}_3(x, y) \phi(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$$

Puisque $\bar{w}_3 \in L^2(\Omega; H^1(D))$, (voir (3.33)) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\phi\psi) \right) = \int_{\Omega} \int_D \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}.$$

Comparant cette limite avec celle obtenue dans (3.43) on conclut que :

$$\int_{\Omega} \int_D \check{w}_{\alpha}(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_{\beta}} = 0, \quad \forall (\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D),$$

ce qui montre $\frac{\partial \check{w}_{\alpha}}{\partial y_{\beta}} = 0$, d'où (3.36) est vérifiée. Par conséquent \check{w}_{α} ne dépend pas de la variable y , il existe $d_{\alpha}(x) \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\check{w}_{\alpha}(x, y) = d_{\alpha}(x), \quad \text{dans } \Omega \times D, \quad \alpha = 1, 2.$$

Posons :

$$v_3(x, y) = \bar{w}_3(x, y) + y_1 d_1(x) + y_2 d_2(x) - \int_D \bar{w}_3(x, y) dy. \quad (3.49)$$

La fonction v_3 est dans $L^2(\Omega; H_m^1(D))$ et on a :

$$\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} = \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_{\alpha}} + d_{\alpha} = \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_{\alpha}} + \check{w}_{\alpha}.$$

On conclut de (3.35) que :

$$\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} e_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) \rightharpoonup \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}}.$$

Ce qui achève la preuve de (3.30).

Preuve de (3.31).

D'après le lemme 3.2 on a $\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial v_3^0}{\partial y_3}$. Utilisant la remarque 1.1 et la fonction \check{w}_3 donnée dans (3.32) on trouve :

$$\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \check{w}_3. \quad (3.50)$$

D'autre part :

$$u_3^{\varepsilon}(x', x_3) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_3}(x', t) dt, \quad \text{p.p. } (x', x_3) \in \Omega,$$

donc :

$$\int_{F_{\varepsilon}} |u_3^{\varepsilon}|^2 \leq \int_{F_{\varepsilon}} \left| \frac{\partial u_3^{\varepsilon}}{\partial x_3} \right|^2.$$

De l'estimation (3.11) on conclut :

$$\int_{F_{\varepsilon}} \left(\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} u_3^{\varepsilon} \right)^2 \leq C. \quad (3.51)$$

D'après la proposition 1.1, il existe $z_3 \in L^2(\Omega \times D)$ telle que :

$$\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} u_3^{\varepsilon} \rightharpoonup z_3(x, y). \quad (3.52)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$, on a :

$$2 \frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \int_{F_{\varepsilon}} e_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) \varphi(x, \frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{F_{\varepsilon}} u_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \int_{F_{\varepsilon}} u_3^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^2} \int_{F_{\varepsilon}} u_3^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\alpha}}.$$

Multiplions par r_{ε} puis passons à la limite prenant en compte (3.52) on arrive à :

$$\int_{\Omega} \int_D z_3(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\alpha}}(x, y) = 0, \quad \forall \alpha = 1, 2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times D),$$

ce qui montre $\frac{\partial z_3}{\partial y_\alpha} = 0$, alors z_3 ne dépend pas de la variable y et on a :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2}u_3^\varepsilon \rightharpoonup z_3(x), \quad z_3 \in L^2(\Omega). \quad (3.53)$$

Soient $\phi \in \mathcal{D}(\omega; C^1(\bar{I}))$, $\psi \in \mathcal{D}(D)$ telle que $\int_D \psi = 1$. On intègre dans ce qui suit par partie prenant en compte $u_3^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 , on trouve :

$$\frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \phi \psi = - \frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} u_3^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi,$$

On passe à la limite en utilisant (3.50), (3.53) et le fait que $\int_D \psi = 1$ on obtient : $\forall \phi \in \mathcal{D}(\omega; C^1(\bar{I}))$

$$\int_\Omega \left(\int_D \check{u}_3 \psi \right) dy \phi = - \int_\Omega z_3(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) dx \int_D \psi = - \int_\Omega z_3(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x) dx.$$

Ce qui montre que $z_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I))$ et on a

$$\frac{\partial z_3}{\partial x_3} = \int_D \check{u}_3 \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D), \quad \int_D \psi = 1.$$

Cette relation montre aussi que \check{u}_3 ne dépend pas de la variable y et on a :

$$\check{u}_3(x) = \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x). \quad (3.54)$$

Par (3.50) et (3.54) on obtient (3.31).

Lemme 3.4

Il existe $u \in U$ et $u^0 \in U^0$ telles que :

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ en } (H^1(\Omega))^3, \quad (3.55)$$

$$e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e(u) + e^y(u^0). \quad (3.56)$$

Preuve :

La suite u^ε est bornée dans l'espace $(H^1(\Omega))^3$ (inégalité (3.10)), donc il existe une sous-suite converge faiblement dans $(H^1(\Omega))^3$ vers un élément u . Puisque U est un sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^3$ alors $u \in U$, d'où (3.55).

En outre, d'après la proposition 1.2, voir rappels, il existe $u^0 \in (H_\#^1(Y)/\mathbb{R})^3$ telle que : $\forall i = 1, 2, 3$

$$\nabla' u_i \rightharpoonup \nabla' u_i + \nabla^y u_i^0, \quad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_3}, \quad (3.57)$$

De (3.57) on conclut facilement à (3.56).

Lemme 3.5

Pour $\alpha, \beta = 1, 2$, on considère les suites suivantes :

$$\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} A_{\alpha\beta kl} \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) e_{kl}(u^\varepsilon), \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}r_\varepsilon}{\varepsilon^2} A_{\alpha 3 kl} \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) e_{kl}(u^\varepsilon), \quad (3.58)$$

alors il existe une constante C telle que :

$$\int_{F_\varepsilon} (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon)^2 \leq C, \quad \int_{F_\varepsilon} (\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon)^2 \leq C, \quad (3.59)$$

et si $\sigma_{\alpha\beta}(x, y)$ et $\sigma_{\alpha 3}(x, y)$ sont les limites double échelle d'une suite extraite alors :

$$\begin{cases} \int_D \sigma_{\alpha\beta} dy = \int_D y_\gamma \sigma_{\alpha\beta} dy = 0, & \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \\ \int_D \sigma_{\alpha 3} = \int_D y_\alpha \sigma_{\alpha 3} dy = 0, & \forall \alpha = 1, 2, \\ \int_D (y_1 \sigma_{23} + y_2 \sigma_{13}) dy = 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Preuve :

(3.58) est évidente, la preuve est une conséquence de (3.11) et du fait que $A_{ijkl} \in C(\Omega; C_\#(Y))$.

D'après la proposition 1.1 (chapitre 3), il existe $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha 3}$ et des sous-suites vérifiant :

$$\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_{\alpha 3}.$$

Soit D_2 le disque de centre 0 et de rayon 2 ($D_2 = D(0, 2)$). Posons :

$$M_\varepsilon^0 = \left(\bigcup_{i \in I_\varepsilon} (r_\varepsilon D_2 + \varepsilon i) \times I \right) \setminus F_\varepsilon. \quad (3.61)$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(D_2)$, on considère :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi_1\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \\ \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi_2\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}(\phi) &= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi r_\varepsilon}} \varphi \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad e_{33}(\phi) = 0, \\ e_{12}(\phi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi r_\varepsilon}} \varphi \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right), \quad e_{\alpha 3}(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi_\alpha. \end{aligned}$$

Considérons dans (1.17) cette fonction test ϕ , alors (1.17) devient :

$$\begin{cases} \int_{F_\varepsilon} \left(\sigma_{11}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_1 + \varphi \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \right) + \sigma_{22}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_2 + \varphi \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right) \right) \\ + \int_{F_\varepsilon} \left(\sigma_{12}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_2 \right) + \varphi \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) \right) \\ + \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon r_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi_\alpha \right) + \int_{M_\varepsilon^0} e(u^\varepsilon) e(\phi) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_\Omega f_\alpha \varphi \psi_\alpha. \end{cases} \quad (3.62)$$

Puisque $|M_\varepsilon^0| \equiv \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$, $|e(\phi)| \leq C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon}$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder dans le terme $(\int_\Omega |e(u^\varepsilon)| \chi_{M_\varepsilon^0})$, puis (3.10) (lemme 1.1), on obtient :

$$\begin{cases} \left| \int_{M_\varepsilon^0} e(u^\varepsilon) e(\phi) \right| \leq \int_{M_\varepsilon^0} |e(u^\varepsilon) e(\phi)| \leq C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon} \int_\Omega |e(u^\varepsilon)| \chi_{M_\varepsilon^0} \\ \leq C \varepsilon \left(\int_\Omega |e(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \varepsilon. \end{cases}$$

On passe à la limite sur ε et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{M_\varepsilon^0} e(u^\varepsilon) e(\phi) \right) = 0. \quad (3.63)$$

Prenons à nouveau la limite sur ε dans (3.62). On trouve : $\forall \psi \in \mathcal{D}(D_2), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \left(\int_D (\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} (\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1})) dy \right) \varphi = 0.$$

Donc on a :

$$\int_D (\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} (\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1})) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2). \quad (3.64)$$

On choisit dans (3.64) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = y_1^2$ dans D puis $\varphi_2 = 0, \varphi_1 = y_2^2$ on obtient :

$$\int_D y_1 \sigma_{12} dy = 0, \quad \int_D y_2 \sigma_{12} dy = 0. \quad (3.65)$$

On choisit $\varphi_2 = 0, \varphi_1 = y_1 y_2$ en D , puis $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = y_1 y_2$ on trouve en utilisant (3.65) :

$$\int_D y_2 \sigma_{11} dy = 0, \quad \int_D y_1 \sigma_{22} dy = 0. \quad (3.66)$$

On prend dans (3.64) $\psi_1 = y_1^2, \psi_2 = 0$ puis $\psi_1 = 0, \psi_2 = y_2^2$ dans D on obtient :

$$\int_D y_1 \sigma_{11} = \int_D y_2 \sigma_{22} = 0. \quad (3.67)$$

Si l'on choisit $\psi_1 = y_1, \psi_2 = 0$ puis $\psi_2 = y_2, \psi_1 = 0$, puis $\psi_1 = y_2, \psi_2 = y_1$ on obtient :

$$\int_D \sigma_{11} = 0, \quad \int_D \sigma_{22} = 0, \quad \int_D \sigma_{12} = 0. \quad (3.68)$$

On considère dans le système (1.17) la fonction test suivante :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \end{pmatrix},$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(D_2)$. Dans ce cas on a :

$$e_{\alpha\beta}(\phi) = 0, \quad e_{\alpha 3}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right), \quad e_{33}(\phi) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi.$$

Le système (1.17) devient :

$$\begin{cases} \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon (r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{F_\varepsilon} A_{33kl} e_{kl}(u^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi \\ + \int_{M_\varepsilon^0} A e(u^\varepsilon) e(\phi) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} f_3 \varphi \psi. \end{cases}$$

Passons à la limite prenant en compte (3.63) qui reste valable avec cette fonction test. On a :

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \int_D (\sigma_{13} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_{23} \frac{\partial \psi}{\partial y_2}) dy dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ce qui implique :

$$\int_D (\sigma_{13} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_{23} \frac{\partial \psi}{\partial y_2}) dy = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2). \quad (3.69)$$

On prend dans (3.69) $\psi = y_{\alpha}$ en D , puis $\psi = y_{\alpha}^2$, puis $\psi = y_1 y_2$ on obtient :

$$\int_D \sigma_{\alpha 3} = \int_D y_{\alpha} \sigma_{\alpha 3} = \int_D (y_1 \sigma_{23} + y_2 \sigma_{13}) dy = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.70)$$

La démonstration du lemme est achevée.

Lemme 3.6

Les espaces \mathcal{T} et \mathcal{Z} associés aux normes :

$$\|(u, u^0, v_3, w)\|_{\mathcal{T}} = \left(\sum_{i,j} \|e_{ij}(u) + e_{ij}^y(u^0)\|^2 + \sum_{\alpha,\beta} (\|\frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}}\|^2 + \|e_{\alpha\beta}^y(w)\|^2) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.71)$$

et

$$\|(u_1, u_2, u^0)\|_{\mathcal{Z}} = \left(\sum_{\alpha,\beta} (\|e_{\alpha\beta}(u) + e_{\alpha\beta}^y(u^0)\|^2 + \|\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^0}{\partial y_{\alpha}}\|^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

Sont des espaces de Hilbert.

Preuve :

On montre d'abord que U^0 muni de la norme :

$$\|u\|_{U^0} = \left(\sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(u^0)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \sum_{\alpha} \|\frac{\partial u_3^0}{\partial y_{\alpha}}\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.73)$$

est un espace de Hilbert.

On sait que $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\nabla_y u^0\|$ est un espace de Hilbert (voir rappels). Montrons qu'il existe une constante C telle que : $\forall \bar{u} \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3$

$$\sum_i \|\nabla_y \bar{u}_i\|_{(L^2(Y))^2}^2 \leq C \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(\bar{u})\|_{L^2(Y)}^2 + \sum_{\alpha} \|\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_{\alpha}}\|_{L^2(Y)}^2. \quad (3.74)$$

On suppose le contraire, il existe donc une suite $u^{(n)} \in (H_{\#}^1(Y))^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sum_i \|\nabla_y u_i^{(n)}\|_{(L^2(Y))^2}^2 = 1, & \text{et :} \\ \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(u^{(n)})\|_{L^2(Y)}^2 + \sum_{\alpha} \|\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial y_{\alpha}}\|_{L^2(Y)}^2 \rightarrow_n 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Posons :

$$v^{(n)} = u^{(n)} - \int_Y u^{(n)}(y) dy. \quad (3.76)$$

Il est clair que $v^{(n)} \in H_{\#}^1(Y)$ et on a :

$$\nabla_y v^{(n)} = \nabla_y u^{(n)}, \quad e^y(v^{(n)}) = e^y(u^{(n)}). \quad (3.77)$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir rappels (1.11)) on a :

$$\int_Y |v_i^{(n)}|^2 \leq C \int_Y |\nabla_y v_i^{(n)}|^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.78)$$

Prenant en compte (3.75), (3.77)-(3.78) on trouve que la suite $v^{(n)}$ est bornée dans $(H_{\#}^1(Y))^3$, alors il existe v telle que $v^{(n)} \rightharpoonup v$ dans $(H_{\#}^1(Y))^3$. Puisque $e_{\alpha\beta}^y(v^{(n)}) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(v)$ et $\frac{\partial v_3^{(n)}}{\partial y_\alpha} \rightharpoonup \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}$ on conclut de (3.77) et de (3.75) que $e_{\alpha\beta}^y(v) = \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} = 0$. Il existe donc $d_i, c \in \mathbb{R}$ tels que $v_\alpha = cy_\alpha^R + d_\alpha$, $v_3 = d_3$, puisque v est Y -périodique alors $c = 0$ et on a : $v_i = d_i$, de plus, d'après (3.76) on a $\int_Y v^{(n)} = 0$ donc $\int_Y v_i = d_i = 0$, d'où $v = 0$. L'injection $H^1(Y) \subset L^2(Y)$ est compacte alors $v^{(n)}$ converge fortement vers zéro dans $(L^2(Y))^3$. Utilisons l'inégalité de Korn (voir rappels (1.15)), le fait que $\|v^{(n)}\|_{(L^2(Y))^3} \rightarrow 0$ et prenant en compte la deuxième partie de (3.75) et de (3.77) on conclut aisément que $v^{(n)}$ converge fortement vers zéro dans $(H^1(Y))^3$, d'où $\nabla_y v_i^{(n)} = \nabla_y u_i^{(n)}$ converge fortement vers zéro en $(L^2(Y))^2$, ce qui est absurde avec l'hypothèse $\sum_i \|\nabla_y u_i^{(n)}\|_{(L^2(Y))^2} = 1$, donc (3.74) est satisfaite.

Soit $u^0 \in U^0 = (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))^3$. On fixe $x \in \Omega$ et on considère $\bar{u}(y) = u^0(x, y)$, on applique (3.74) en utilisant l'intégrale sur Y puis on intègre sur Ω , on trouve : $\forall u^0 \in U^0$

$$\sum_i \|\nabla_y \bar{u}_i\|_{(L^2(\Omega \times Y))^2}^2 \leq C \sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}^y(\bar{u})\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \sum_\alpha \left\| \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y_\alpha} \right\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2. \quad (3.79)$$

On conclut que U^0 muni de la norme (3.73) est un espace de Hilbert.

Soit $(u, u^0) \in U \times U^0$, puisque u^0 est Y -périodique alors :

$$\int_Y \frac{\partial u_i^0}{\partial y_j} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

d'où :

$$\int_\Omega e_{ij}(u) \int_Y e_{ij}^y(u^0) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (3.80)$$

On conclut aisément que :

$$\|e_{ij}(u) + e_{ij}^y(u^0)\|^2 = \|e_{ij}(u)\|^2 + \|e_{ij}^y(u^0)\|^2. \quad (3.81)$$

On sait déjà que U muni de la norme $(\sum_{i,j} \|e_{ij}(u)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert et il en est de même de U^0 avec la norme (3.73), on conclut de (3.81) que $U \times U^0$ muni de la norme

$$\left(\sum_{i,j} \|e_{ij}(u) + e_{ij}^y(u^0)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.82)$$

est un espace de Hilbert.

L'espace \mathcal{Z} muni de la norme (3.72) est complet, car \mathcal{Z} coïncide avec le sous-espace de $U \times U^0$ de $((H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^2 \times \{0\}) \times U^0$, donc la norme induite sur \mathcal{Z} est celle définie dans (3.72), puisque \mathcal{Z} est un fermé de $U \times U^0$ alors \mathcal{Z} est un espace de Hilbert.

Montrons que \mathcal{T} est un espace de Hilbert. On peut écrire \mathcal{T} sous la forme $\mathcal{T} = (U \times U^0) \times H_m^1(D) \times \mathcal{W}$. On a montré que $U \times U^0$ muni de la norme (3.82) est un espace de Hilbert. $H_m^1(D)$ muni de la norme $(\sum_\alpha \|\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert (voir rappels). On sait déjà (voir chapitre 2) que \mathcal{W} muni de

la norme $(\sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}^y(w)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert, par conséquent \mathcal{T} muni de la norme (3.71) est un espace de Hilbert.

Rappelons que l'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi \mid \psi \in C_{\#}^{\infty}(Y) \text{ telle que } \nabla_y \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ au voisinage de } 0 \right\}. \quad (3.83)$$

est dense dans $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ (voir chapitre 3. Lemme 2.4). Donc l'espace

$$\overline{U}^0 = \left\{ \bar{u}^0 = (\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \bar{u}_3^0), \bar{u}^0 = \sum_{p \in J} \phi^{(p)}(x) \psi^{(p)}(y), J \text{ est fini, } \phi^{(p)} \in \mathcal{D}(\Omega), \psi^{(p)} \in \mathcal{H}^3 \right\}, \quad (3.84)$$

est dense dans U^0 . Rappelons aussi que les espaces :

$$\overline{U} = (\mathcal{D}(I, C^{\infty}(\overline{\omega})))^3, \quad \overline{\mathcal{V}}_3 = \mathcal{D}(\Omega \times D_2), \quad \overline{\mathcal{W}} = (\mathcal{D}(\Omega \times D_2))^2 \times \{0\}, \quad (3.85)$$

sont denses dans U , \mathcal{V}_3 et \mathcal{W} respectivement.

3.3.4 Preuve des résultats

Preuve du théorème 3.1 :

Rappelons d'abord que les convergences (2.2)-(2.6) du théorème 3.1 sont démontrées dans les lemmes 3.3 et 3.4. Cherchons les problèmes homogénéisés cas par cas.

1) $\lim_{\varepsilon} (r_{\varepsilon}/\varepsilon^2) = \mu \in [0, \infty[$

On montre d'abord (2.7). La suite u_3^{ε} est bornée dans $H^1(\Omega)$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right) = \mu$ donc $\sqrt{\pi} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} u_3^{\varepsilon}$ converge fortement vers $\sqrt{\pi} \mu u_3$ dans $L^2(\Omega)$, d'autre part, d'après (2.6) on a $\sqrt{\pi} \frac{r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} u^{\varepsilon} \rightharpoonup z_3$, puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_{\varepsilon}) = 0$ alors selon le lemme 1.2, chapitre 3, on a :

$$\sqrt{\pi} \mu u(x) = \int_D z_3(x) dy = z_3(x). \quad (4.1)$$

Donc (2.7) est satisfaite.

Soit $(\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}_3, \bar{w}) \in \overline{\mathcal{T}} := (\overline{U} \times \overline{U}^0 \times \overline{\mathcal{V}}_3 \times \overline{\mathcal{W}})$. On considère dans (1.17) la fonction test ϕ où :

$$\begin{cases} \phi_{\alpha}(x) = \bar{u}_{\alpha}(x) + \varepsilon \bar{u}_{\alpha}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{w}_{\alpha}(x, \frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}), \\ \phi_3(x) = \bar{u}_3(x) + \varepsilon \bar{u}_3^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{v}_3(x, \frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}), \end{cases} \quad (4.2)$$

Notons $\mu_{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2}$, il est clair que $\mu_{\varepsilon} \rightarrow \sqrt{\pi} \mu$. Soient $\sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon}$ et $\sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon}$ les suites données par (3.58), M_{ε}^0 l'ensemble défini par (3.61). Puisque $\nabla_y \bar{u}^0 = 0$ au voisinage de 0 alors $e^y(\bar{u}^0)(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = 0$ dans F_{ε} .

Le système (1.17) devient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} (\mu_{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\bar{u}) + r_{\varepsilon} e_{\alpha\beta}^x(\bar{w}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})) + \varepsilon \mu_{\varepsilon} \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} e_{\alpha\beta}^x(\bar{u}^0) \\ & + \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} (\mu_{\varepsilon} e_{\alpha 3}(\bar{u}) + r_{\varepsilon} (\frac{\partial \bar{w}_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_{\alpha}}) + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}}) + \varepsilon \mu_{\varepsilon} \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} e_{\alpha 3}^x(\bar{u}^0) \\ & + \int_{F_{\varepsilon}} A_{33ij} (\mu_{\varepsilon} e_{ij}^{\varepsilon}) (\mu_{\varepsilon} e_{33}(\bar{u}) + r_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \varepsilon \mu_{\varepsilon} e_{33}^x(\bar{u}^0)) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{\alpha\beta kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) e_{\alpha\beta}(\bar{w}) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{\alpha 3 kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) (r_{\varepsilon} (\frac{\partial \bar{w}_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_{\alpha}}) + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}}) \\ & + \int_{M_{\varepsilon}} A e(u^{\varepsilon}) (e(\bar{u}) + \varepsilon e(\bar{u}^0) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f(\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^0) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} (\int_{\Omega} f_{\alpha} \bar{w}_{\alpha} + \int_{\Omega} f_3 \bar{v}_3). \end{aligned} \right. \quad (4.3)$$

Prenons la limite, prenant en compte les limites (2.2)-(2.6), $A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A(x, 0)$ au sens fort (proposition 1.4), et $A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A(x, y)$ au sens fort, puis on utilise le lemme 3.5 qui élimine les termes $e_{\alpha\beta}(u)$, $e_{\alpha 3}(u)$ de la limite correspondant aux fibres, on obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \frac{\partial w_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial w_3}{\partial y_{\alpha}} & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_{\alpha}} & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ + \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (e(u) + e^y(u^0))(e(\bar{u}) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f \bar{u}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Puisque $\bar{\mathcal{T}}$ est dense dans \mathcal{T} alors (4.4) est satisfaite $\forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}_3, \bar{w}) \in \mathcal{T}$. On applique le théorème de Lax-Milgram dans \mathcal{T} en utilisant le fait que les opérateurs $A(x, 0)$ et $A(x, y)$ vérifient les conditions (1.10)-(1.11) on trouve que (u, u^0, v_3, w) est l'unique solution du problème (4.4) (i.e. (2.8)).

2) $\lim_{\varepsilon} (r_{\varepsilon}/\varepsilon^2) = \infty$

Montrons d'abord $u_3 = 0$. D'après l'inégalité (3.51) on a :

$$\int_{F_{\varepsilon}} (u_3^{\varepsilon})^2 \leq C \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \right)^2. \quad (4.5)$$

Puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2/r_{\varepsilon}) = 0$ on a :

$$\lim_{\varepsilon} \int_{F_{\varepsilon}} (u_3^{\varepsilon})^2 = 0. \quad (4.6)$$

Ce qui montre :

$$u_3^{\varepsilon} \rightharpoonup 0. \quad (4.7)$$

On applique le lemme 1.2 et on conclut aisément $u_3(x) = \int_D 0 dy = 0$. Donc $u_3 = 0$.

Soient $(\bar{v}_3, \bar{w}) \in \bar{\mathcal{V}}_3 \times \bar{\mathcal{W}}$, $\bar{z}_3 \in \mathcal{D}(\Omega)$. On considère dans (1.17) la fonction test :

$$\begin{cases} \phi_{\alpha}(x) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{w}_{\alpha}(x, \frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}), \\ \phi_3(x) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{v}_3(x, \frac{y_{\varepsilon}(x')}{r_{\varepsilon}}) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \bar{z}_3(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

En utilisant les notations (3.58) et (3.61) le problème (1.17) s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} (r_{\varepsilon} e_{\alpha\beta}^x(\bar{w}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})) + \int_{F_{\varepsilon}} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_{\alpha}} \right) \\ \int_{F_{\varepsilon}} A_{33ij} \left(\frac{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}}{\varepsilon^2} e_{ij}(u^{\varepsilon}) \right) \left(r_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{\alpha\beta kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) \left(r_{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\bar{w}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) \right) \\ \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{\alpha 3 kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) \left(\frac{r_{\varepsilon}}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_{\alpha}} \right) \\ + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}^0} A_{33 kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) \left(r_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}} A_{\alpha 3 kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_{\alpha}} \right) \\ + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{M_{\varepsilon}} A_{33 kl} e_{kl}(u^{\varepsilon}) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} f_{\alpha} \bar{w}_{\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} f_3 \bar{v}_3 + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_{\varepsilon}} \int_{\Omega} f_3 \bar{z}_3. \end{cases} \quad (4.9)$$

Puisque $\lim_{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{r_{\varepsilon}} = 0$, $e_{kl}(u^{\varepsilon})$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors les limites correspondant à l'intégral sur M_{ε}^0 sont nulles. Prenons la limite dans (4.9) en utilisant (2.2)-(2.6), le lemme 3.5, et le fait que $A \rightharpoonup A(x, 0)$ on trouve l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y_{\alpha}} & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_{\alpha}} & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.10)$$

Les espaces $\overline{\mathcal{V}}_3, \overline{\mathcal{W}}$, et $\mathcal{D}(\Omega)$ sont denses dans $\mathcal{V}_3, \mathcal{W}$, et $L^2(\omega; H_0^1(I))$ respectivement, l'opérateur A est coercif, on conclut de (4.10) que $v_3 = w = z_3 = 0$. Donc (2.9) est vérifiée.

Montrons l'équation (2.10). Soient $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, 0)$ où $\bar{u}_\alpha \in \mathcal{D}(I; C^\infty(\overline{\omega}))$, $\bar{u}^0 \in \overline{U}^0$, $\theta \in \mathcal{D}(D_2)$ telle que $\theta = 1$ sur D . Considérons la fonction $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_3)$ définie par :

$$\bar{\psi}_\alpha(x, y) = -y_\gamma \theta(y) \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\gamma}, \quad \bar{\psi}_3(x, y) = -y_\gamma \theta(y) \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial x_3}.$$

On constate que :

$$e_{kl}(\bar{u}) + e_{kl}^y(\bar{\psi}) = 0, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad \text{sur } \Omega \times D.$$

On prend dans (1.17) la fonction test suivante :

$$\phi(x) = \bar{u}(x) + \varepsilon \bar{u}^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + r_\varepsilon \bar{\psi}(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}). \quad (4.11)$$

On peut vérifier aisément que :

$$\begin{cases} e(\bar{u})(x) + e^y(\bar{\psi}(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})) = 0, & \text{dans } F_\varepsilon, \\ e^y(\bar{u}^0)(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = 0, & \text{dans } F_\varepsilon. \end{cases}$$

Le système (1.17) devient alors :

$$\begin{cases} \sqrt{\pi} \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon e_{\alpha\beta}^x(\bar{\psi}) + \sqrt{\pi} \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon e_{\alpha 3}^x(\bar{\psi}) + \sqrt{\pi} \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{F_\varepsilon} A_{33ij} e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{33}^x(\bar{\psi}) \\ + \sqrt{\pi} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} A e(u^\varepsilon) e^x(\bar{u}^0) + \int_{M_\varepsilon^0} A e(u^\varepsilon) (r_\varepsilon e^x(\bar{\psi}) + e^y(\bar{\psi})) \\ + \int_{M_\varepsilon} A e(u^\varepsilon) (e(\bar{u}) + \varepsilon e^x(\bar{u}^0) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f(\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^0 + r_\varepsilon \bar{\psi}). \end{cases} \quad (4.12)$$

Passons à la limite dans (4.12), en utilisant les limites (2.2)-(2.3) et le fait que $u_3 = 0$:

$$\int_{\Omega} \int_Y A(e(u_\alpha, 0) + e^y(u^0))(e(\bar{u}_\alpha, 0) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f_\alpha \bar{u}_\alpha. \quad (4.13)$$

La densité des espaces dans lesquels on a pris les fonctions tests implique que l'équation (4.13) est satisfaite $\forall ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{u}^0) \in \mathcal{Z}$. L'unicité de la solution $((u_1, u_2), u^0)$ au (4.13) s'obtient de la même façon qu'au problème précédent (4.4). Donc on a (2.10).

Preuve du théorème 3.2 :

Fixons u et choisissons $\bar{u} = \bar{v}_3 = \bar{w} = 0$ dans (2.8). On trouve que u^0 est l'unique solution de :

$$\begin{cases} u^0 \in U^0, \\ \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) e^y(u^0) \cdot e^y(\bar{u}^0) dx dy = - \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) e(u) \cdot e^y(\bar{u}^0) dx dy \\ \forall \bar{u}^0 \in U^0. \end{cases} \quad (4.14)$$

L'unicité de la solution u^0 de (4.14) vient de Lax-Milgram appliqué dans U^0 .

D'autre part, soit $\bar{u}^0 \in U^0$, on prend dans (2.15) la fonction test $\bar{u}^0(x, \cdot) \in (H_{\#}^1(Y))^3$ où x est fixé dans Ω , puis on multiplie (2.15) par $e_{pq}(u)$ et on intègre sur Ω . Faisant ensuite la somme pour $p, q = 1, 2, 3$ on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_Y A(x, y) \left(\sum_{p,q} e^y(u^{(pq)} e_{pq}(u)) \right) e^y(\bar{u}^0) = - \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) e(u) e^y(\bar{u}^0). \quad (4.15)$$

Comparant (4.14) et (4.15) et tenant compte de l'unicité de la solution on trouve que $u^0 = \sum_{p,q} e^y(u^{(pq)})e_{pq}(u)$.
Ce qui montre (2.12). ■

La preuve de (2.14) se fait d'une façon similaire en choisissant $u_3 = 0$ et en fixant (u_1, u_2) dans (2.10).

On montre (2.13). Fixons u_3 et on prenons $\bar{u} = \bar{u}^0 = 0$ dans (2.8) alors on a :

$$\begin{cases} (v_3, w) \in \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} dx dy = \\ - \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} dx dy. \\ \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}. \end{cases} \quad (4.16)$$

$\mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}$ est la solution unique de (4.16), grâce au théorème de Lax-Milgram appliqué dans l'espace de Hilbert $\mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}$.

D'autre part, soit $(\bar{v}_3, \bar{w}) \in \mathcal{V}_3 \times \mathcal{W}$, on considère dans (2.16) la fonction test $(\bar{v}_3(x, \cdot), \bar{w}(x, \cdot)) \in H_m^1(D) \times W^0$ où x est fixé dans Ω , puis on multiplie (2.16) par $\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et on intègre sur Ω on obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{v}_3) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{v}_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\bar{v}_3) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\bar{v}_3) & 0 \end{pmatrix} \\ = - \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\bar{v}_3) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} (\bar{v}_3) & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Comparant (4.16) et (4.17) et prenant en compte l'unicité de la solution on trouve que $(v_3, w) = \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} (\hat{v}_3, \hat{w})$, donc (2.13) est satisfaite.

Preuve du théorème 3.3 :

On pose $\bar{u}^0 = \bar{v}_3 = \bar{w} = 0$ dans (2.8), puis on remplace u^0 et (v_3, w) par leurs expressions données par (2.12) et (2.13), on obtient :

$$\begin{cases} + \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e^y(\hat{w}) \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_{\alpha}} \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \mu \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) \left(e(u) + \sum_{p,q} e^y(\hat{u}^{(pq)}) e_{pq}(u) \right) \cdot e(\bar{u}) dy dx = \int_{\Omega} f \bar{u}. \end{cases} \quad (4.18)$$

On utilise les notations (2.19)-(2.20) et on a :

$$\int_{\Omega} a^*(x) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \int_{\Omega} A^*(x) e(u) \cdot e(\bar{u}) = \int_{\Omega} f \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3. \quad (4.19)$$

D'après la remarque 3.4 l'opérateur A^* est coercif et les coefficients $A_{ijkl}^*, a^* \in L^{\infty}(\Omega)$, en utilisant le théorème de Lax-Milgram on conclut que u est l'unique solution de (4.19). L'équation (4.19) est la forme variationnelle de (2.17), d'où u est l'unique solution du problème (2.17).

D'une façon similaire on peut montrer (2.18) en considérant $\bar{u}^0 = 0$ dans (2.10) et en remplaçant u^0 par sa formulation (2.14).

Preuve de proposition 3.1 : (Cas isotrope)

Supposons que A s'écrit sous la forme (2.22). On a :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{ijkl}^* &= \int_Y A(e^y(\hat{u}^{(kl)}) + e^{(kl)}) \cdot e^{(ij)} \\ &= A\left(\int_Y e^y(\hat{u}^{(kl)}) \cdot e^{(ij)} + Ae^{(kl)}\right) \cdot e^{(ij)} \\ &= A_{ijst} \int_Y e_{st}^y(\hat{u}^{(kl)}) + A_{ijkl}. \end{aligned} \right. \quad (4.20)$$

Puisque $\hat{u}^{(kl)}$ est Y -périodique on a :

$$\int_Y e_{st}^y(\hat{u}^{(kl)}) = 0 \quad \forall s, t = 1, 2, 3.. \quad (4.21)$$

D'où $A_{ijkl}^* = A_{ijkl}$.

On cherche maintenant a^* . Le tenseur A est orthotrope car il est isotrope, alors d'après la proposition 3.1 on a $\hat{v}_3 = 0$, par conséquent le système (2.16) ne contient que \hat{w} où \hat{w} est l'unique solution de :

$$\int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\hat{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\bar{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(\bar{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

On considère dans (4.22) la fonction test $(y_1, 0, 0)$ puis on utilise (2.22) on obtient :

$$(\lambda_1 + 2\mu_1) \int_D e_{11}^y(\hat{w}) + \lambda_1 \int_D e_{22}^y(\hat{w}) = -\lambda_1. \quad (4.23)$$

On considère dans (4.22) la fonction test $(0, y_2, 0)$ puis on utilise (2.22) on obtient :

$$\lambda_1 \int_D e_{11}^y(\hat{w}) + (\lambda_1 + 2\mu_1) \int_D e_{22}^y(\hat{w}) = -\lambda_1. \quad (4.24)$$

De (4.22)-(4.24) on conclut :

$$\int_D e_{11}^y(\hat{w}) = \int_D e_{22}^y(\hat{w}) = -\frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)}. \quad (4.25)$$

On utilise dans l'expression (2.20) de a^* le fait que $\hat{v}_3 = 0$ et l'expression de A en (2.22) on obtient :

$$a^* = \mu_1 \int_D e_{11}^y(\hat{w}) + \mu_1 \int_D e_{22}^y(\hat{w}) + (\lambda_1 + 2\mu_1). \quad (4.26)$$

On utilise (4.25) dans (4.26) et on trouve finalement :

$$a^* = \mu_1 \frac{3\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}. \quad (4.27)$$

3.4 PROBLÈME DE L'ÉLASTICITÉ AVEC DES DEPLACEMENTS EN $\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}$ DANS LES FIBRES

Dans cette partie de la thèse on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4}\chi_{F^\varepsilon} + \chi_{M^\varepsilon}\right)A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon)\right) & = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)e(u^\varepsilon)n & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans le cas de matériaux isotropes, ce problème a été étudié par C. Pideri-P. Seppecher (voir [22]). A cause de la coercivité uniforme par rapport à ε , on s'attend encore dans le cas isotrope ([22]) à obtenir un problème limite sans effets non locaux. Nous nous proposons d'étudier l'influence de l'anisotropie dans le modèle limite et nous montrons que comme dans le chapitre 2, des termes non standard dus à la réduction de dimension $3d - 1d$ locale apparaissent sous l'effet conjugué des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur les deux faces de Ω et de l'anisotropie.

On reprend donc les notations et hypothèses suivantes:

Soient :

$$\Omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3, \quad \omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2, \quad I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (1.2)$$

$$\omega = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} \omega_\varepsilon^i, \quad \omega_\varepsilon^i = \varepsilon\omega + \varepsilon i, \quad (1.3)$$

où

$$I_\varepsilon = \{i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varepsilon i \in \omega\}, \quad (1.4)$$

Pour tout ε on considère $r_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0. \quad (1.5)$$

Définissons l'ensemble F_ε des fibres et l'ensemble M_ε de la matrice par :

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} F_\varepsilon^i, \quad M_\varepsilon = \Omega \setminus F_\varepsilon, \quad (1.6)$$

où

$$F_\varepsilon^i = D_{r_\varepsilon}^i \times I, \quad D_{r_\varepsilon}^i = D(0, r_\varepsilon) + \varepsilon i. \quad (1.7)$$

($D(0, r_\varepsilon)$ est un disque de centre 0 et de rayon r_ε dans ω).

Soit

$$Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2. \quad (1.8)$$

On considère le tenseur A d'ordre quatre défini sur $\Omega \times Y$ dont les coefficients A_{ijkl} où $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ tels que : $\forall (x, y) \in \Omega \times Y$, et pour tout 2×2 tenseur symétrique $e = (e_{ij})$,

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad (1.9)$$

$$\forall x, \quad y \longrightarrow A_{ijkl}(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique}, \quad (1.10)$$

$$A_{ijkl} \in C(\overline{\Omega} \times C_\#(Y)), \quad (1.11)$$

$$\exists m > 0, \quad A_{ijkl}(x, y)e_{kl}e_{ij} \geq me_{ij}e_{ij}, \quad (1.12)$$

où $C_{\#}(Y)$ désigne l'espace de fonctions continues et Y -périodiques dans \mathbb{R}^2 .

Si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ est un champ de vecteurs, le tenseur $e(\phi)$ est une matrice 3×3 dont les coefficients sont $e_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i})$ avec $i, j = 1, 2, 3$, autrement dit : $e(\psi)$ est défini par :

$$e(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla \phi + {}^t \nabla \phi). \quad (1.13)$$

Pour un ensemble mesurable \mathcal{A} , la notation $\chi_{\mathcal{A}}$ désigne la fonction caractéristique de \mathcal{A} et la notation $|\mathcal{A}|$ désigne sa mesure de Lebesgue.

Posons :

$$\Gamma_0 = \omega \times \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}, \quad \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \quad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N. \quad (1.14)$$

(0 pour désigner la condition de Dirichlet, N pour la condition de Neumann).

Soit :

$$f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3). \quad (1.15)$$

Le problème (1.1) s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in U, \\ \int_{\Omega} (\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \chi_{F^\varepsilon} + \chi_{M^\varepsilon}) A(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e(u^\varepsilon) e(\phi) = \int_{\Omega} f \phi dx, \\ \forall \phi \in U, \end{cases} \quad (1.16)$$

où $U = (H_{\Gamma_0}(\Omega))^3$ (voir aussi 3.3. (1.16) pour U).

L'existence et l'unicité de la solution de (1.16) est une conséquence du théorème de Lax-Milgram.

Les matériaux orthotropes vérifient l'hypothèse de symétrie suivante :

$$A_{\alpha 3 \gamma \delta} = A_{\alpha 333} = 0, \quad \forall \alpha, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (1.17)$$

Nous introduisons les espaces suivants :

$D = D(0, 1) \subset Y$ le disque de centre 0 et de rayon 1.

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \{u \mid u = (u_\alpha, Z_3), \quad u_\alpha \in H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)), \quad Z_3 \in L^2(\omega \times D, H_0^1(I)), \\ \exists z_3 \in L^2(\omega, H_0^1(I)) \text{ telle que } Z_3 = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_3} y_\gamma + z_3\}. \end{cases} \quad (1.18)$$

$$U^0 = \{u^0 \mid u^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0), \quad u^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))^3\}, \quad (1.19)$$

$$\mathcal{V} = \{v \mid v = (c(x)y_\alpha^R, v_3), \quad c \in L^2(\omega; H_0^1(I)), \quad v_3 \in L^2(\Omega; H_m^1(D))\}, \quad (1.20)$$

où $y^R = (-y_2, y_2)$ si $y = (y_1, y_2) \in D$ (voir chapitre 2).

$$\mathcal{W} = L^2(\Omega; \mathcal{W}^0), \quad (1.21)$$

où

$$\mathcal{W}^0 = \{w^0 \mid w^0 = (w_1^0, w_2^0, 0) \in (H_m^1(D))^3, \quad \int_D (y_2 w_1^0 - y_1 w_2^0) = 0\}. \quad (1.22)$$

Considérons également l'espace \mathcal{S} suivant :

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \times U^0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \quad (1.23)$$

Si $\psi(x, y) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, $e(\psi)$ désigne le tenseur symétrique 3×3 défini par $e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i})$ (voir (1.13)) et $e^y(\psi)$ désigne le tenseur symétrique 3×3 défini par $e_{\alpha\beta}^y(\psi) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_\alpha})$, $e_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_\alpha}$, $e_{33}^y(\psi) = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2$. (voir aussi 3.3. (1.23)).

3.4.2 Énoncé des résultats

Théorème 4.1

Soit u^ε la suite de solutions de (1.1). Alors il existe

$$(u, u^0, v, w) \in \mathcal{S}, \quad (2.1)$$

telle que pour tout $\alpha, \beta = 1, 2$, les convergences suivantes sont vérifiées :

$$u_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup u_\alpha \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (2.2)$$

$$u_3^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (2.3)$$

$$e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0). \quad (2.4)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(w). \quad (2.5)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \right). \quad (2.6)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}. \quad (2.7)$$

De plus, (u, u^0, v, w) est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (u, u^0, v, w) \in \mathcal{S}, \\ \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) & \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}) & \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ + \int_\Omega \int_Y A(x, y) (e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0)) (e((\bar{u}_\alpha, 0)) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_\Omega f \bar{u}_\alpha, \\ \forall (\bar{u}, \bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarque 4.1 L'unicité de la solution de (2.8) implique que toute la suite u^ε vérifié les convergences (2.2)-(2.7).

Pour les matériaux orthotropes, on a:

Proposition 4.1

On suppose que A vérifié les conditions (1.9)-(1.12) et (1.17) alors la variable v est nulle et le problème (2.8) ne contient que les variables u, u^0 , et w .

Dans le théorème suivant on donne une expression de z_3, u^0, v , et w en fonction de u_1 et u_2 .

Théorème 4.2

Soit (u, u^0, v, w) la solution de (2.8) où $v = (c(x)y_\alpha^R, v_3)$, $u = (u_\alpha, Z_3)$, $Z_3 = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} y_\alpha + z_3$. Les variables u^0, w, v_3, c et z_3 sont données en fonction de u_α par :

$$u^0 = \sum_{p,q} \hat{u}^{pq}(x, y) e_{pq}((u_\alpha, 0)), \quad (2.9)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \sqrt{\pi} \left((\hat{w}^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{w} - b_{\alpha 2}(x)\hat{w}^{(3)}) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x) + \hat{w}(x, y) \left(a_{11} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + a_{12} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) + \hat{w}^{(3)} \left(a_{21} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) + a_{22} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) \right), \\ v_3 = \sqrt{\pi} \left((\hat{v}_3^{(\alpha)} - b_{\alpha 1}(x)\hat{v}_3 - b_{\alpha 2}(x)\hat{v}_3^{(3)}) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x) + \hat{v}_3(x, y) \left(a_{11} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + a_{12} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) + \hat{v}_3^{(3)} \left(a_{21} \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) + a_{22} \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right) \right), \\ c = \sqrt{\pi} \left(- \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 1}(x', t) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{11}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \\ \quad \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{12}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right), \\ z_3 = \sqrt{\pi} \left(- \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} b_{\alpha 2}(x', t) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2}(x', t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{21}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 1} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right. \\ \quad \left. + \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} a_{22}(x', t) dt \left(\int_I b_{\alpha 2} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_3^2} \right) \right), \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où \hat{u}^{pq} est l'unique solution du problème élémentaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^{(pq)} \in L^\infty(\Omega; (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3), \quad \text{et } p.p. x \in \Omega, \\ \int_Y A(x, y) e^y(\hat{u}^{(pq)}) e^y(\bar{u}^0) = - \int_Y A(x, y) e^{(pq)} e^y(\bar{u}^0), \\ \forall \bar{u}^0 \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où $e^{(pq)}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, et les fonctions $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$ et (\hat{w}, \hat{v}_3) sont les uniques solutions des problèmes élémentaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}^{(\gamma)}, \hat{v}_3^{(\gamma)}) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et } p.p. x \in \Omega \text{ on a:} \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}^{(3)}, \hat{v}_3^{(3)}) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et } p.p. x \in \Omega \text{ on a:} \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{w}, \hat{v}_3) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D)), \quad \text{et } p.p. x \in \Omega \text{ on a:} \\ \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy = \\ - \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} dy, \quad \forall (\bar{v}_3, \bar{w}) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Les coefficients $a_{\alpha\beta}$ $b_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, sont donnés en fonction de $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)})$ et (\hat{w}, \hat{v}_3) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{22} \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{12}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{22} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{21}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{11} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ a_{22}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)a^{(I)}(x')} (\hat{A}_{11} \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}}(x, t) dt - \hat{A}_{12} \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}}(x, t) dt), \\ b_{\alpha 1}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)} (\hat{A}_{22} \hat{b}_1^{(\alpha)} - \hat{A}_{12} \hat{b}_2^{(\alpha)}), \quad b_{\alpha 2}(x) = \frac{1}{\hat{a}(x)} (\hat{A}_{11} \hat{b}_2^{(\alpha)} - \hat{A}_{12} \hat{b}_1^{(\alpha)}), \\ \text{avec:} \\ \hat{a}(x) = \hat{A}_{11} \hat{A}_{22} - (\hat{A}_{12})^2, \quad a^{(I)}(x') = \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}} dx_3 \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}} dx_3 - (\int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}} dx_3)^2, \\ \hat{A}_{11}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta}(x, 0) e_{\gamma \delta}(\hat{w}) + A_{\alpha 3 \gamma 3}(x, 0) (\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\gamma} + y_\gamma^R)) y_\alpha^R dy, \\ \hat{A}_{12}(x) = \hat{A}_{21}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta}(x, 0) e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(3)}) + A_{\alpha 3 \gamma 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma}) y_\alpha^R dy, \\ \hat{A}_{22}(x) = \int_D (A_{33 \gamma \delta}(x, 0) e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(3)}) + A_{33 \gamma 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} + A_{3333}(x, 0)) dy, \\ \hat{b}_1^{(\alpha)}(x) = \int_D (A_{\beta 3 \gamma \delta}(x, 0) e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(\alpha)}) + A_{\beta 3 \gamma 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3^{(\alpha)}}{\partial y_\gamma} - A_{\beta 333}(x, 0) y_\alpha) y_\beta^R dy, \\ \hat{b}_2^{(\alpha)}(x) = \int_D (A_{33 \gamma \delta}(x, 0) e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(\alpha)}) + A_{33 \gamma 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3^{(\alpha)}}{\partial y_\gamma}) dy. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Remarque 4.2 Pour montrer l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (2.11)-(2.14) voir : remarque 3.3 (chapitre 3, partie 3).

Remarque 4.3 Grâce à la coercivité du tenseur A nous verrons dans la démonstration de ce théorème qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que $p.p. x \in \Omega$, $\hat{a}(x) \geq \mu$, et $a^{(I)}(x') \geq \mu$.

Théorème 4.3

La suite $(u_\alpha^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ de solutions de problème (1.1) converge fortement vers $(u_\alpha, 0)$ dans $(L^2(\Omega))^3$ et (u_1, u_2) est l'unique solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)))^2, \\ \int_\Omega \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + b_\delta^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + b_\delta^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \\ + \int_\Omega A^* e((u_\alpha, 0)) e((\bar{u}_\alpha, 0)) = \int_\Omega f_\delta \bar{u}_\delta, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)))^2, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où $a_\delta^{(\gamma)}$, $b_\delta^{(1)}$ et $b_\delta^{(2)}$ sont donnés en fonction de $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$, (\hat{v}_3, \hat{w}) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\delta^{(\gamma)} = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) + A_{33\alpha 3} g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) - A_{3333}(x, 0) y_\gamma) dy, \\ b_\delta^{(1)}(x) = a_{11}(x) t_\delta(x) + a_{21}(x) h_\delta(x), \quad b_\delta^{(2)}(x) = a_{12}(x) t_\delta(x) + a_{22}(x) h_\delta(x), \end{array} \right. \quad (2.17)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) = e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)})(x, y) - b_{\gamma 1} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w})(x, y) - b_{\gamma 2} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)})(x, y), \\ g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) = \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha}(x, y) - b_{\gamma 1}(x) (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y) + y_\alpha^R) - b_{\gamma 2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha}(x, y), \\ t_\delta(x) = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta}(x, 0) e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) + A_{33\alpha 3}(x, 0) (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R)) dy, \\ h_\delta(x) = - \int_D y_\delta (A_{33\alpha\beta}(x, 0) e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) + A_{33\alpha 3}(x, 0) \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha}) dy. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Et :

$$A_{ijkl}^*(x) = \int_Y A(x, y)(e^y(\hat{u}^{(kl)}) + e^{(kl)}) \cdot e^{(ij)} dy. \quad (2.19)$$

Remarque 4.4 Puisque A vérifie les conditions (1.9)-(1.12) on peut montrer également que $\forall i, j$, $A_{ijkl}^* \in L^\infty(\Omega)$, A^* est symétrique et coercive, pour la preuve voir : remarque 3.4, 3.3.

Remarque 4.5 Dans le cas d'un corps encastré sur une seule face $\Gamma_{-\frac{1}{2}} = \omega \times \{-\frac{1}{2}\}$ (ou $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \omega \times \{\frac{1}{2}\}$) au lieu de $\Gamma_0 = \Gamma_{-\frac{1}{2}} \cup \Gamma_{\frac{1}{2}}$, le problème homogénéisé s'obtient en remplaçant dans (2.8) $L^2(\omega; H_0^1(I))$ par $L^2(\omega; H_{-\frac{1}{2}}^1(I))$ pour les fonctions $c(x)$ et $z_3(x)$; de plus, les termes non standard $\int_I b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_3^2}$ n'interviennent pas dans (2.10).

Cas isotrope

Dans le cas isotrope on peut calculer les coefficients de l'équation (2.16) explicitement; en effet, si on suppose que le tenseur d'élasticité s'écrit sous la forme :

$$A_{ijkl}^{(\varepsilon)} = \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \mu_1 > 0. \quad (2.20)$$

Avec :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\mu_\varepsilon r_\varepsilon^4}{\mu_1 \varepsilon^2} \right) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell \in [0, \infty[. \quad (2.21)$$

Soit A le tenseur dont les coefficients sont donnés par :

$$A_{ijkl} = \ell \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.22)$$

Proposition 4.2

Si le tenseur d'élasticité de l'équation (1.1) s'écrit sous la forme (2.20) alors la suite u^ε de solutions de (1.1) converge fortement dans $(L^2(\Omega))^3$ vers $(u_1, u_2, 0)$, de plus, (u_1, u_2) est l'unique solution de :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2, \\ \frac{\pi}{4} \mu_1 \frac{3\ell + 2}{\ell + 1} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} + \int_\Omega A e((u_\delta, 0)) e((\bar{u}_\delta, 0)) = \int_\Omega f_\delta \bar{u}_\delta, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap L^2(\omega; H_0^2(I))^2. \end{cases} \quad (2.23)$$

3.4.3 Estimations a priori et résultats

Soit u^ε la solution de (1.1), on prolonge \bar{u}^ε dans $\omega \times \mathbb{R}$ par zéro, considérons donc \bar{u}^ε où :

$$\bar{u}^\varepsilon = \begin{cases} u^\varepsilon(x) & \text{si } x \in \omega \times I \\ 0 & \text{si } x \in \omega \times (\mathbb{R} \setminus I) \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 alors $\bar{u}^\varepsilon \in (H^1(\omega \times \mathbb{R}))^3$ et on a : $\forall i, j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\overline{\partial u_i^\varepsilon}}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) & \text{si } x \in \omega \times I \\ 0 & \text{si } x \in \omega \times (\mathbb{R} \setminus I) \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit

$$\bar{I}_\varepsilon = I_\varepsilon \times I_{r_\varepsilon}, \quad \text{où } I_{r_\varepsilon} = \{i_3 \in \mathbb{Z}, (r_\varepsilon i_3 + r_\varepsilon I) \cap I \neq \emptyset\}. \quad (3.3)$$

(voir 3.1. (1.8)-(1.10)).

Pour tout $\bar{i} \in \bar{I}$ considérons

$$C_\varepsilon^{\bar{i}} = D_{r_\varepsilon}^i \times I_{r_\varepsilon}^{i_3}, \quad \text{où } I_{r_\varepsilon}^{i_3} = r_\varepsilon I + r_\varepsilon i_3. \quad (3.4)$$

(voir aussi 3.1. (1.11)). On constate que

$$F_\varepsilon = \bigcup_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega), \quad F_\varepsilon^i = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (D_{r_\varepsilon}^i \times (I_{r_\varepsilon}^{i_3} \cap I)), \quad I = \bigcup_{i_3 \in I_{r_\varepsilon}} (I_{r_\varepsilon}^{i_3} \cap I). \quad (3.5)$$

On définit les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\varepsilon^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_1^\varepsilon - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_2^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 \right) dx} \\ b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_1^\varepsilon - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_3^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx} \\ b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_2^\varepsilon - \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_3^\varepsilon \right) dx}{\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx} \\ d_{k\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{1}{|C_\varepsilon^{\bar{i}}|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \bar{u}_k^\varepsilon dx, \quad k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

On définit dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ la fonction suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon^2} (\bar{u}_1^\varepsilon(x) - a_\varepsilon^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}), \\ v_{2\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon^2} (\bar{u}_2^\varepsilon(x) + a_\varepsilon^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}), \\ v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon^2} (\bar{u}_3^\varepsilon(x) + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

On remarque que $v_\varepsilon^{\bar{i}} := (v_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{3\varepsilon}^{\bar{i}})$ vérifie :

$$v_\varepsilon^{\bar{i}} \in (H^1(C_\varepsilon^{\bar{i}}))^3, \quad \text{et } e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon^2} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon), \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Soit la fonction $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon)$ définie par :

$$v_1^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}, \quad v_2^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}, \quad v_3^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \chi_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega}. \quad (3.9)$$

Soit u^ε la suite de solutions de (1.1), v^ε la suite définie en (3.9).

Lemme 4.1

Il existe une constante C vérifiant :

$$\|u^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C, \quad (3.10)$$

$$\int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e(u^\varepsilon) \right)^2 \leq C, \quad (3.11)$$

$$\int_{F_\varepsilon} (u_\alpha)^2 \leq C, \quad \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{1}{r_\varepsilon} u_3\right)^2 \leq C, \quad (3.12)$$

$$\int_{F_\varepsilon} (v^\varepsilon)^2 \leq C. \quad (3.13)$$

Preuve :

On remplace ϕ par u^ε dans (1.16), puis on utilise la coercivité de A et on applique l'inégalité de Hôlder sur $(\int_\Omega f u^\varepsilon)$ on obtient :

$$m \int_\Omega |e(u^\varepsilon)|^2 \leq \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \chi_{F_\varepsilon} + \chi_{M_\varepsilon}\right) A e(u^\varepsilon) e(u^\varepsilon) = \int_\Omega f u^\varepsilon \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque dans $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3$ on a $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C \|e(u)\|_{L^2}$ (inégalité de Korn) et $\|u\| \leq \|\nabla u\|$ alors :

$$m \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq m C^2 \|e(u^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C^2 \|f\|_{L^2} \|u^\varepsilon\|_{L^2} \leq C^2 \|f\|_{L^2} \|\nabla u^\varepsilon\|.$$

Ce qui montre que $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}$, $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$, et $\|e(u^\varepsilon)\|_{L^2}$ sont bornées, donc (3.10) est vérifiée.

On constate que :

$$\frac{m\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2 \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u^\varepsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $\|u^\varepsilon\|$ est bornée, $(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2)$ est aussi bornée, par conséquent (3.11) est vérifiée.

La suite u^ε est bornée dans $(H^1(\Omega))^3$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 \log r_\varepsilon) = 0$, alors le lemme 1.2 implique :

$$\int_{F_\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon)^2 \leq C. \quad (3.14)$$

D'autre part, puisque $u_3^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 et $u_3^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ alors :

$$\int_{F_\varepsilon} |u_3^\varepsilon|^2 \leq \int_{F_\varepsilon} \left|\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3}\right|^2.$$

On divise les deux membres de cette inégalité par $r_\varepsilon^2 |F_\varepsilon|$ puis on utilise (3.11) on trouve :

$$\int_{F_\varepsilon} \left(\frac{u_3^\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^2 \leq C. \quad (3.15)$$

De (3.14) et (3.15) on obtient (3.12).

Montrons (3.13). Pour cela on va utiliser le lemme 1.3 (voir 3.1). Soit :

$$T = D(0, 1) \times Y_3 \quad \text{où } Y_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.16)$$

Fixons $\bar{i} = (i, i_3)$ en \bar{I}_ε et on considère la fonction $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ définie dans T par :

$$\phi_k(y, y_3) = \bar{u}_k^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

où \bar{u}^ε est donnée en (3.1).

On cherche d'abord l'expression de $\hat{\phi}$ donnée dans le lemme 1.3 par (1.46) en fonction de \bar{u}^ε . Faisons le changement de variable $(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) = (x', x_3)$; on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T (y_1^2 + y_2^2) dy = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right)^2 \right) dx, \\ \int_T (y_\alpha^2 + y_3^2) dy = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_\alpha}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_\alpha \right)^2 + \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right)^2 \right) dx, \quad \alpha = 1, 2, \\ \int_T (y_2 \phi_1 - y_1 \phi_2) dy = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) \bar{u}_1^\varepsilon(x) - \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) \bar{u}_2^\varepsilon(x) \right) dx, \\ \int_T (y_3 \phi_\alpha - y_\alpha \phi_3) dy = \frac{1}{r_\varepsilon^3} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) \bar{u}_\alpha^\varepsilon(x) - \left(\frac{x_\alpha}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_\alpha \right) \bar{u}_3^\varepsilon(x) \right) dx, \quad \alpha = 1, 2, \\ \int_T \phi_k(y) dy = \frac{1}{|C_\varepsilon^{\bar{i}}|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \bar{u}_k^\varepsilon(x) dx, \quad k = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

On utilise les notations (3.6) et on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(y, y_3) = a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 + d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \hat{\phi}_2(y, y_3) = -a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 + d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \hat{\phi}_3(y, y_3) = -b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 + d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}. \end{array} \right.$$

Donc on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 - \hat{\phi}_1 = \bar{u}_1^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) - a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \phi_2 - \hat{\phi}_2 = \bar{u}_2^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) + a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_3 - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, \\ \phi_3 - \hat{\phi}_3 = \bar{u}_3^\varepsilon(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} y_1 + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} y_2 - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

D'après l'inégalité (1.45) du lemme 1.3 on a :

$$\int_T |\phi - \hat{\phi}|^2 dy \leq C \int_T |e^y(\phi)|^2 dy. \quad (3.19)$$

Il est évident que l'on a : $\forall k, l = 1, 2, 3$,

$$e_{kl}^y(\phi)(y, y_3) = r_\varepsilon e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon)(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3).$$

On remplace dans (3.19), $(\phi - \hat{\phi})$ par son expression (3.18) et on fait le changement de variable $(r_\varepsilon y + \varepsilon i, r_\varepsilon y_3 + r_\varepsilon i_3) = x$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_1^\varepsilon - a_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2, \\ \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_2^\varepsilon + a_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_3}{r_\varepsilon} - i_3 \right) - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2, \\ \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |\bar{u}_3^\varepsilon + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_1}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_1 \right) + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{x_2}{r_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} i_2 \right) - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} r_\varepsilon^2 |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2. \end{array} \right.$$

On multiplie ces trois inégalités par $\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^2}$ et on utilise l'expression (3.7) de $v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}$, on obtient :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2, \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

Faisons la somme pour $\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$ on trouve : $\forall k = 1, 2, 3$

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |e(\bar{u}^\varepsilon)|^2.$$

Puisque $e(\bar{u}^\varepsilon) = \overline{e(u^\varepsilon)}$ (voir (3.2)) et $F_\varepsilon = \cup_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} (C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega)$ alors :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2.$$

L'inégalité (3.11) peut se transformer en $(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^4} \int_{F_\varepsilon} |e(u^\varepsilon)|^2) \leq C$. Donc :

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} |v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}|^2 \leq C. \quad (3.20)$$

Prenant en compte la définition de v^ε dans (3.9) et l'estimation (3.20) on conclut à l'estimation (3.13).

Dans le lemme suivant la notation " \rightharpoonup " désigne la convergence double échelle définie dans (1.16), section 3.1.

Lemme 4.2

Il existe une sous-suite notée encore ε et $v^0 \in (L^2(\Omega; H^1(T)))^3$ telles que :

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0(x, y, y_3), \quad (3.21)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{kl}^y(v^0)(y, y_3), \quad (3.22)$$

Preuve :

Les estimations (3.11), (3.13), et la proposition 1.1 (voir 3.1.) entraînent l'existence d'une sous-suite ε et $v^0 \in (L^2(\Omega \times T))^3$, $\chi^0 \in (L^2(\Omega \times T))_s^{3 \times 3}$ telles que:

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0(x, y, y_3). \quad (3.23)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \chi_{kl}^0(x, y, y_3). \quad (3.24)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T)$. Selon (3.24) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi \right) = \int_{\Omega} \int_T \chi_{kl}^0 \varphi. \quad (3.25)$$

Puisque $e(u^\varepsilon) = e(\bar{u}^\varepsilon)$ dans F_ε et $e(\bar{u}^\varepsilon)(x) = 0$ si $x \in C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus F_\varepsilon$ alors :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon) \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon^3} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon) \varphi.$$

D'après (3.8) on a $e_{kl}(\bar{u}^\varepsilon) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}})$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$. Alors :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}}) \varphi. \quad (3.26)$$

$\forall \bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$ $x \mapsto \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) \in \mathcal{D}(C_\varepsilon^{\bar{i}})$ car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T)$. En intégrant par parties dans $C_\varepsilon^{\bar{i}}$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} e_{kl}(v_\varepsilon^{\bar{i}}) \varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon}) = \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial v_{k\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_l} + \frac{\partial v_{l\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_k} \right) \varphi \\ = -\frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right). \end{cases} \quad (3.27)$$

De (3.26)-(3.27) on a :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi = -\frac{1}{2} \frac{1}{|F_\varepsilon|} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \left(r_\varepsilon \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) + \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}) \right). \quad (3.28)$$

Puisque le support de φ est compact dans $(\Omega \times T)$ alors si $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega \neq \emptyset$ on a :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega} (v_{k\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_{l\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}) = 0. \quad (3.29)$$

De (3.28)-(3.29) on conclut en utilisant la définition de v_ε :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi = -r_\varepsilon \frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (v_k^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + v_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) - \frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (v_k^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}). \quad (3.30)$$

Prenons la limite dans (3.30) prenant en compte $v^\varepsilon \rightharpoonup v^0$ on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \varphi \right) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_T (v_k^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}). \quad (3.31)$$

Comparant cette limite avec celle en (3.25) on conclut :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_T (v_k^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} + v_l^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}) = \int_{\Omega} \int_T \chi_{kl}^0 \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times T).$$

Ce qui montre que $e_{kl}(v^0) \in L^2(\Omega \times T)$ et on a :

$$e_{kl}^y(v^0) = \chi_{kl}^0, \quad \forall k, l = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

D'après le principe de Korn $v^0 \in (L^2(\Omega; H^1(T)))$. Ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Dans la suite la notation " \rightharpoonup " désigne la convergence double échelle (1.17) définie dans la section 3.1 . Dans le lemme suivant et à l'aide du lemme précédent on vas déterminer les limites deux échelle (2.5)-(2.6) annoncées dans le théorème 4.1.

Lemme 4.3

Il existe $(v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ vérifiant :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(w)(x, y). \quad (3.33)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \right). \quad (3.34)$$

Preuve :

Considérons pour $k = 1, 2, 3$ les fonctions suivantes :

$$\bar{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} v_k^0(x, y, y_3) dy_3, \quad \check{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} \frac{\partial v_k^0}{\partial y_3}(x, y, y_3) dy_3. \quad (3.35)$$

Il est clair que $\bar{w}_k, \check{w}_k \in L^2(\Omega \times D)$, d'autre part, puisque $v_k^0 \in L^2(\Omega; H^1(T))$ d'après la proposition 1.5 la fonction \bar{w}_k est dans $L^2(\Omega; H^1(D))$ et on a :

$$\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial y_\alpha} = \int_{Y_3} \frac{\partial v_k^0}{\partial y_\alpha}(x, y, y_3) dy_3, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.36)$$

Utilisons la remarque 1.1 (voir (1.18), 3.1), le lemme 4.2 (3.22), et (3.36) on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \int_{Y_3} e_{\alpha\beta}^y(v^0)(x, y, y_3) dy_3 = e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}). \quad (3.37)$$

Posons $w = (w_1, w_2, 0)$ où :

$$w_\alpha = \bar{w}_\alpha + \frac{\int_D (y_2 \bar{w}_1 - y_1 \bar{w}_2)}{\int_D (y_1^2 + y_2^2)} y_\alpha^R - \int_D \bar{w}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.38)$$

Il est clair que $w \in \mathcal{W}$ et $e_{\alpha\beta}^y(w) = e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})$. Par conséquent w vérifie (3.33).

On identifie maintenant la limite de $\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega \times D)$.

Dans ce qui suit on écrit souvent ψ au lieu de $\psi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})$ (ou $\phi\psi$ au lieu $\phi(x)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})$) lorsque on intègre sur F_ε pour une fonction test $\psi \in C(\bar{\Omega} \times \bar{D})$, voir la notation $y_\varepsilon(x')$ en 3.1. (1.14).

D'après la remarque 1.1 (voir (1.18), 3.1) et le lemme 4.2 on a : $\forall \alpha = 1, 2$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \int_{Y_3} e_{\alpha 3}^y(v^0)(x, y, y_3) dy_3.$$

En utilisant les notations (3.35)-(3.36) on trouve : $\forall \alpha = 1, 2$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2}(\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}), \quad (3.39)$$

On montre d'abord que :

$$\frac{\partial \check{w}_\alpha}{\partial y_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2. \quad (3.40)$$

Soit $(\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$. D'après (3.39) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right) = \int_\Omega \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}. \quad (3.41)$$

Puisque $\phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = r_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi \psi) - r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \psi$ alors :

$$2 \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi \psi) - 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \psi. \quad (3.42)$$

De l'estimation (3.11) on conclut aisément que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \psi \right) = 0. \quad (3.43)$$

De (3.41)-(3.43) on conclut que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \right) = \int_{\Omega} \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}. \quad (3.44)$$

On a :

$$2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi).$$

$(\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon})) \in \mathcal{D}(F_\varepsilon^i)$ car $\psi \in \mathcal{D}(D)$. Donc on intègre par parties et on obtient :

$$\begin{cases} \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon^i|} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon^i|} \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon^i} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi \right) = \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi. \end{cases}$$

Alors :

$$2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) + \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi. \quad (3.45)$$

De l'estimation (3.11) on conclut que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi \right) = 0. \quad (3.46)$$

Passons à la limite dans (3.45) en utilisant (3.44) et (3.46); on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \right) = \int_{\Omega} \int_D (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}. \quad (3.47)$$

D'après (3.2), $\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha}$ dans Ω et $\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = 0$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega$ (si $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega \neq \emptyset$), donc on a :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon^{\bar{i}}|} \sum_{i \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi). \quad (3.48)$$

La fonction $\bar{v}_{3\varepsilon}^{\bar{i}}$ est dans $H^1(C_\varepsilon^{\bar{i}})$ (voir (3.7)-(3.8)) et on a :

$$\frac{\partial \bar{v}_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}} \right), \quad \text{dans } C_\varepsilon^{\bar{i}},$$

ce qui donne immédiatement :

$$\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{v}_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}}, \quad \text{dans } C_\varepsilon^{\bar{i}},$$

donc :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{v}_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) - \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi).$$

Puisque $\psi \in \mathcal{D}(D)$ alors $\forall x_3 \in I_\varepsilon^{i_3}$, $x' \mapsto \phi(x', x_3)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) \in \mathcal{D}(D_{r_\varepsilon}^i)$. Alors :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) dx = \int_{I_\varepsilon^{i_3}} \left(\int_{D_{r_\varepsilon}^i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) dx' \right) dx_3 = 0.$$

D'où on a :

$$\int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi).$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi). \quad (3.49)$$

On intègre par parties dans la deuxième partie de l'égalité (3.49) en utilisant :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} \psi + \frac{2}{r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{r_\varepsilon^2} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha^2},$$

on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = -\frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} (\phi\psi) \\ = -\frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} \psi - \frac{2\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} - \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha^2}, \end{cases} \quad (3.50)$$

Faisons la somme pour $\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon$, en utilisant (3.48)-(3.49), prenant en compte que $\phi(x)\psi(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = 0$ dans $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega$ (si $C_\varepsilon^{\bar{i}} \setminus \Omega \neq \emptyset$) car $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis on pose v_3^ε et on trouve :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) = -r_\varepsilon^2 \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} \psi - 2r_\varepsilon \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} - \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha^2}.$$

Passons à la limite en utilisant $v_3^\varepsilon \rightharpoonup \bar{w}_3(x, y) = \int_{Y_3} v_3^0(x, y, y_3) dy_3$, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \right) = - \int_{\Omega} \int_D \bar{w}_3(x, y) \phi(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_\alpha^2}$$

Puisque $\bar{w}_3 \in L^2(\Omega; H^1(D))$ (voir lemme 4.3. (3.35)-(3.36)) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\phi\psi) \right) = \int_{\Omega} \int_D \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta}.$$

Comparant cette limite avec celle en (3.47) on conclut que :

$$\int_{\Omega} \int_D \check{w}_\alpha(x, y) \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \forall (\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D),$$

ce qui montre $\frac{\partial \check{w}_\alpha}{\partial y_\alpha} = 0$. Donc (3.40) est satisfaite.

Montrons maintenant que :

$$e_{12}^y(\check{w}) = 0. \quad (3.51)$$

Soit toujours $(\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(D)$. D'après (3.39) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) = \int_{\Omega} \int_D (\check{w}_1 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_1}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2}. \quad (3.52)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{23}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) = \int_{\Omega} \int_D (\check{w}_2 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_2}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1}. \quad (3.53)$$

Faisons la somme de (3.52) et (3.53); on trouve :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + e_{23}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1}) \right) \\ = \int_\Omega \int_D \left((\check{w}_1 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_1}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + (\bar{v}_2 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_2}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right). \end{cases} \quad (3.54)$$

Puisque $\phi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} = r_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi \psi) - r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \psi$, alors :

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + e_{23}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1}) = \\ 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi)) \\ - 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \psi + e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \psi). \end{cases}$$

Prenons la limite prenant en compte (3.54) et le fait que $e_{\alpha 3} \rightharpoonup 0$; on a :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi)) \right) \\ = \int_\Omega \int_D \left((\check{w}_1 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_1}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + (\check{w}_2 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_2}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right). \end{cases} \quad (3.55)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi)) = \\ \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \left(\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right). \end{cases}$$

On intègre par partie les termes $\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3}$, $\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_3}$ on trouve facilement :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right) = 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{12}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi.$$

Donc :

$$\begin{cases} 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} (e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + e_{23}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi)) = \\ 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{12}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \psi + \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right). \end{cases}$$

Passons à la limite prenant en compte (3.55) et le fait que $e_{12}(u^\varepsilon) \rightharpoonup 0$ on trouve :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right) \right) \\ = \int_\Omega \int_D \left((\check{w}_1 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_1}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + (\check{w}_2 + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_2}) \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right). \end{cases} \quad (3.56)$$

D'après (3.2), $\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha}$ dans Ω et $\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = 0$ dans $C_\varepsilon^i \setminus \Omega$ (si $C_\varepsilon^i \setminus \Omega \neq \emptyset$), donc on a :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon^2} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \psi) + \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi \psi) \right). \quad (3.57)$$

En outre, on sait que (voir la définition de $v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}$ dans (3.7)) :

$$\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{r_\varepsilon} b_{\alpha\varepsilon}^{\bar{i}}, \quad \text{dans } C_{\varepsilon}^{\bar{i}}.$$

Donc :

$$\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} r_\varepsilon^2} \int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi\psi) + \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi\psi) \right) = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi\psi) + \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi\psi) \right). \quad (3.58)$$

On intègre par parties et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi\psi) + \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi\psi) \right) = \\ -2 \int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{\varepsilon^2}{\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \psi + \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\varepsilon^2}{\pi r_\varepsilon^2} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right). \end{array} \right.$$

Faisons la somme, en utilisant (3.57)-(3.58), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi\psi) + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi\psi) \right) \\ = -2 \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \left(r_\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \psi + r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \phi \right). \end{array} \right.$$

On passe à la limite, en utilisant le fait que $v_3^\varepsilon \rightharpoonup \bar{w}_3$ avec $\bar{w}_3 \in L^2(\Omega; H^1(D))$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi\psi) + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi\psi) \right) \right) = \\ -2 \int_{\Omega} \int_D \bar{w}_3 \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \phi = \int_{\Omega} \int_D \left(\frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_2} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) \end{array} \right.$$

Comparant cette limite avec celle de (3.56) on conclut aisément :

$$\int_{\Omega} \int_D \left(\check{w}_1 \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \check{w}_2 \phi \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D).$$

Ce qui montre $e_{12}^y(\check{w})(x, y) = 0$. Donc (3.51) est satisfaite.

Puisque $(\check{w}_1, \check{w}_2) \in (L^2(\Omega \times D))^2$ et puisque $e_{\alpha\beta}^y((\check{w}_1, \check{w}_2)) = 0 \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2$ (selon (3.40) et (3.51)), alors il existe $c_0 \in L^2(\Omega)$, $(d_1, d_2) \in (L^2(\Omega))^2$ telles que :

$$\check{w}_\alpha(x, y) = c_0(x) y_\alpha^R + d_\alpha(x), \quad \text{dans } \Omega \times D, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.59)$$

Posons :

$$v_3(x, y) = \bar{w}_3(x, y) + y_1 d_1(x) + y_2 d_2(x) - \int_D \bar{w}_3(x, y) dy. \quad (3.60)$$

Puisque $\bar{w}_3 \in L^2(\Omega; H^1(D))$ alors $v_3 \in L^2(\Omega; H^1(D))$ et on a, $\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha} + d_\alpha(x)$, de plus on a $\int_D v_3(x, y) dy = 0$, ce qui implique $v_3 \in L^2(\Omega; H_m^1(D))$. De (3.59)-(3.60) on conclut :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} (c_0(x) y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}). \quad (3.61)$$

Le but de ce paragraphe, afin de compléter la preuve de (3.34), est de trouver une fonction $c(x)$ dans $L^2(\Omega; H_0^1(I))$ vérifiant $\frac{\partial c}{\partial x_3}(x) = c_0(x)$. Danc il est naturel que $c(x', x_3) = \int_{-\frac{x_3}{2}}^{x_3} c_0(x', t) dt$. Il suffit maintenant de montrer que $\int_I c_0(x', t) dt = 0$ pour p.p. $x' \in \omega$.

Soit $\varphi(x') \in \mathcal{D}(\omega)$, $\theta \in \mathcal{D}(D)$ telle que $\int_D \theta = 1$. La fonction $\phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \in C(\overline{\Omega} \times \overline{D})$, alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right) = \int_\Omega \int_D (-y_2 c_0 \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2}).$$

Puisque $(-\int_D y_2 \frac{\partial \theta}{\partial y_2}) = \int_D (\theta - \frac{\partial}{\partial y_2}(y_2 \theta)) = \int_D \theta = 1$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right) = \int_\Omega c_0 \phi + \int_\Omega \int_D \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right). \quad (3.62)$$

D'autre part on a $\phi(x') \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon} \right) = r_\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \theta \right)$, donc :

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} = 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) - 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \theta.$$

On passe à la limite, en utilisant (3.62), et le fait que $e_{13}(u^\varepsilon) \rightharpoonup 0$ on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) \right) = \int_\Omega c_0 \phi + \int_\Omega \int_D \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right). \quad (3.63)$$

Puisque $\int_I \left(\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3} \right) = 0$ car $u_1^\varepsilon \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{cases} 2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{13}(u^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon|} \int_{F_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon|} \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) \int_I \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_3} + \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta). \end{cases}$$

De (3.63) on conclut :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) \right) = \int_\Omega c_0 \phi + \int_\Omega \int_D \left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right). \quad (3.64)$$

On a :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon|} \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta). \quad (3.65)$$

Puisque dans $C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega$ on a :

$$\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_1} - \frac{1}{r_\varepsilon} b_{1\varepsilon}^{\bar{i}},$$

et puisque :

$$\frac{1}{r_\varepsilon} b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = \frac{1}{r_\varepsilon} b_{1\varepsilon}^{\bar{i}} \int_{I_{r_\varepsilon}^{\bar{i}} \cap I} \int_{D_{r_\varepsilon}^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = 0$$

alors :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{|F_\varepsilon|} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega} \frac{\partial v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi \theta) \\ = -\frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{C_\varepsilon^{\bar{i}} \cap \Omega} v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \psi + \frac{1}{r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \frac{1}{r_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{1}{r_\varepsilon^2} \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \end{cases}$$

Faisons la somme prenant en compte (3.65) et la définition de v_3^ε ; on obtient :

$$\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi \theta) = - \int_{F_\varepsilon} v_3^\varepsilon \left(r_\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \psi + r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + r_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right)$$

Passons à la limite en utilisant $v_3^\varepsilon \rightharpoonup \bar{w}_3$ on arrive à :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi \theta) \right) = - \int_{\Omega} \int_D \bar{w}_3 \phi \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1 \partial y_2}.$$

On remplace \bar{w}_3 par $(v_3 - y_\gamma d_\gamma + \int_D \bar{w}_3)$ (voir(3.60)) et on intègre par partie on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} (\phi \theta) \right) = \int_{\Omega} \int_D \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \phi \frac{\partial \theta}{\partial y_2}.$$

Comparant cette limite avec celle de (3.64), on conclut que :

$$\int_{\Omega} c_0(x) \phi(x') dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Donc

$$\int_I c_0(x', t) dt = 0 \quad \text{p.p. } x' \in \omega. \quad (3.66)$$

Posons :

$$c(x', x_3) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} c_0(x', t) dt, \quad (x', x_3) \in \omega \times I. \quad (3.67)$$

D'après (3.66)-(3.67), $c(x) \in L^2(\omega; H_0^1(I))$, et on a $\frac{\partial c}{\partial x_3}(x) = c_0(x)$. donc (3.34) est satisfaite.

Dans le lemme suivant on montre les convergences (2.2)-(2.4) et (2.7) du théorème 4.1.

Lemme 4.4

Il existe $u \in \mathcal{U}$ et $u^0 \in U^0$ telles que :

$$u_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup u_\alpha \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (3.68)$$

$$u_3^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (3.69)$$

$$e(u^\varepsilon) \rightharpoonup e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0). \quad (3.70)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial Z_3}{\partial x_3}. \quad (3.71)$$

Preuve :

La suite u^ε est bornée en $(H^1(\Omega))^3$ (voir (3.10)), il existe donc u et une suite extraite u^ε converge faiblement vers u dans $(H^1(\Omega))^3$. $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, alors $u \in (H_{\Gamma_0}^1(\Omega))^3$. D'autre part, la deuxième estimation de (3.12) montre que u_3^ε converge au sens deux échelle " \rightharpoonup " vers zéro, ce qui implique d'après le lemme 1.2 que la limite forte de u_3^ε dans $L^2(\Omega)$ est zéro, i. e. $u_3 = 0$, donc la limite (3.69) est vérifiée.

En outre, il existe (voir rappels) $u^0 \in (L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}))^3$ telle que : $\forall i = 1, 2, 3$

$$\nabla' u_i^\varepsilon \rightharpoonup \nabla' u_i + \nabla_y u^0, \quad \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_3}. \quad (3.72)$$

Donc $(u_\alpha, 0)$ et u^0 vérifient les limites (3.68)-(3.70). Pour compléter la preuve de ces convergences il faut aussi trouver Z_3 telle que $(u_\alpha, Z_3) \in \mathcal{U}$ et Z_3 vérifie (3.71).

D'après (3.22), on a $\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial v_3^0}{\partial y_3}$. On utilise la remarque 1.1 et la notation (3.35) on trouve :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \check{w}_3(x, y). \quad (3.73)$$

D'autre part, $\int_{F_\varepsilon} |\frac{1}{r_\varepsilon} u_3^\varepsilon|^2 \leq C$ (voir (3.12)), alors il existe $Z_3 \in L^2(\Omega \times D)$ et une sous suite vérifiant :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} u_3^\varepsilon \rightharpoonup Z_3(x, y). \quad (3.74)$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\omega \times D; C^1(\bar{I}))$. On intègre par partie prenant en compte $u_3^\varepsilon = 0$ sur Γ_0 on trouve :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \psi = - \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} u_3^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Prenons la limite en utilisant (3.73)-(3.74) on trouve :

$$\int_{\Omega} \int_D \check{w}_3(x, y) \psi(x, y) = - \int_{\Omega} \int_D Z_3(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x_3}(x, y), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\omega \times D; C^1(\bar{I})).$$

Cette relation montre que :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x_3} = \check{w}_3, \quad \text{de plus } Z_3 \in L^2(\omega \times D; H_0^1(I)). \quad (3.75)$$

D'après (3.12), $\int_{F_\varepsilon} |u_\alpha^\varepsilon|^2 \leq C$, donc il existe $\bar{u}_\alpha \in L^2(\Omega \times D)$ et une sous suite telle que :

$$u_1^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_1, \quad u_2^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_2. \quad (3.76)$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \times D)$. On intègre par partie on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \phi(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (\frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta^\varepsilon}{\partial x_\alpha}) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{F_\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} + u_\beta^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}) - \frac{1}{2} \frac{1}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} (u_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y_\beta} + u_\beta^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial y_\alpha}). \end{aligned} \right.$$

On multiplie par r_ε puis on fait la limite en utilisant (3.76) (avec $r_\varepsilon e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \rightharpoonup 0$) on trouve :

$$\int_{\Omega} \int_D (\bar{u}_\alpha(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y_\beta} + \bar{u}_\beta(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y_\alpha}) = 0.$$

Donc $e_{\alpha\beta}^y((\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = 0$, alors il existe $c_1(x), c_2(x), t(x) \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\bar{u}_1(x, y) = c_1(x) - t(x)y_2, \quad \bar{u}_2(x, y) = c_2(x) + t(x)y_1.$$

Appliquons le lemme 1.2 on trouve :

$$u_1(x) = \int_D \bar{u}_1(x, y) dy = c_1(x), \quad u_2(x) = \int_D \bar{u}_2(x, y) dy = c_2(x).$$

Donc :

$$\bar{u}_1(x) = u_1(x) - t(x)y_2, \quad \bar{u}_2(x) = u_2(x) + t(x)y_2.$$

En outre, on a :

$$2\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \varphi = -\sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} \int_{F_\varepsilon} u_3^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} \int_{F_\varepsilon} u_3^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha}.$$

Prenons la limite en utilisant $e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} u_3^\varepsilon \rightharpoonup Z_3$ et (3.76) on trouve :

$$\int_{\Omega} \int_D Z_3(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha}(x, y) = -\sqrt{\pi} \int_{\Omega} \int_D \bar{u}_\alpha(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x, y).$$

Ce qui implique que $\frac{\partial Z_3}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_3}$ (au sens de distributions), autrement dit :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial y_1} = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} \frac{\partial t}{\partial x_3} y_2, \quad \frac{\partial Z_3}{\partial y_1} = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \sqrt{\pi} \frac{\partial t}{\partial x_3} y_1.$$

Le théorème de Schwarz implique que $\frac{\partial t}{\partial x_3} = 0$, alors :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial y_1} = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial Z_3}{\partial y_1} = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}.$$

Ce qui entraîne l'existence d'une fonction $z_3 \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$Z_3(x, y) = -\sqrt{\pi} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} y_\alpha + z_3(x). \quad (3.77)$$

Puisque $Z_3 \in L^2(\omega \times D; H_0^1(I))$ (voir (3.75)) alors $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}$ et z_3 sont dans $L^2(\omega \times D; H_0^1(I))$, et puisque $u_\alpha \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ alors $u_\alpha \in L^2(\omega; H_0^2(I))$. Par conséquent $u := (u_1, u_2, Z_3) \in \mathcal{U}$ et Z_3 vérifie (3.71).

Lemme 4.5

Pour $\alpha, \beta = 1, 2$, on considère les suites suivantes :

$$\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} A_{\alpha\beta kl}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{kl}(u^\varepsilon), \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} A_{\alpha 3 kl}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{kl}(u^\varepsilon), \quad (3.78)$$

alors il existe une constante C telle que :

$$\int_{F_\varepsilon} (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon)^2 \leq C, \quad \int_{F_\varepsilon} (\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon)^2 \leq C, \quad (3.79)$$

et si $\sigma_{\alpha\beta}(x, y)$ et $\sigma_{\alpha 3}(x, y)$ sont les limites double échelle coorespondant à de suites extraite alors :

$$\begin{cases} \int_D \sigma_{\alpha\beta} dy = \int_D y_\gamma \sigma_{\alpha\beta} dy = 0, & \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \\ \int_D \sigma_{\alpha 3} = \int_D y_\alpha \sigma_{\alpha 3} dy = 0, & \forall \alpha = 1, 2, \\ \int_D (y_1 \sigma_{23} + y_2 \sigma_{13}) dy = 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Preuve :

L'estimation (3.11) et l'hypothèse (1.12) sur A donnent immédiatement (3.79). Il existe donc $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha 3} \in L^2(\Omega \times D)$ et des sous-suites telles que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \rightharpoonup \sigma_{\alpha 3}.$$

Soit $D_2 = D(0, 2)$ un disque dans \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon 2. Posons :

$$M_\varepsilon^0 = \left(\bigcup_{i \in I_\varepsilon} (r_\varepsilon D_2 + \varepsilon i) \times I \right) \setminus F_\varepsilon. \quad (3.81)$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(D_2)$, on considère :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi_1\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \\ \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi_2\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

On a :

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}(\phi) &= \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi_\alpha + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \varphi \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad e_{33}(\phi) = 0, \\ e_{12}(\phi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_2 \right) + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \varphi \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right), \quad e_{\alpha 3}(\phi) = \frac{1}{2} \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi_\alpha. \end{aligned}$$

Considérons dans (1.16) la fonction test ϕ , en utilisant les notations (3.81) le problème (1.16) devient :

$$\begin{cases} \int_{F_\varepsilon} \left(\sigma_{11}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_1 + \varphi \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \right) + \sigma_{22}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_2 + \varphi \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \right) \right) \\ + \int_{F_\varepsilon} \left(\sigma_{12}^\varepsilon \left(r_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_2 \right) + \varphi \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) \\ + \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon r_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi_\alpha \right) + \int_{M_\varepsilon^0} e(u^\varepsilon) e(\phi) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} f_\alpha \varphi \psi_\alpha. \end{cases} \quad (3.83)$$

Puisque $\|e(\phi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Cr_\varepsilon$ et $|M_\varepsilon^0| \equiv \frac{r_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$, on applique l'inégalité de Hölder sur $(\int_{\Omega} |e(u^\varepsilon)| \chi_{M_\varepsilon^0})$, puis on utilise (3.10) on obtient :

$$\int_{M_\varepsilon^0} |e(u^\varepsilon) e(\phi)| \leq Cr_\varepsilon \int_{\Omega} |e(u^\varepsilon)| \chi_{M_\varepsilon^0} \leq Cr_\varepsilon \left(\int_{\Omega} |e(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cr_\varepsilon.$$

On passe à la limite et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{M_\varepsilon^0} e(u^\varepsilon) e(\phi) \right) = 0. \quad (3.84)$$

Passons à nouveau à la limite dans (3.83) ; on trouve :

$$\int_{\Omega} \left(\int_D \left(\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) dy \right) \varphi = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc on a :

$$\int_D \left(\sigma_{11} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} \right) \right) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2). \quad (3.85)$$

On choisit dans (3.85); $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = y_1^2$ dans D puis $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = y_2^2$ on obtient :

$$\int_D y_1 \sigma_{12} dy = 0, \quad \int_D y_2 \sigma_{12} dy = 0. \quad (3.86)$$

Si $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = y_1 y_2$ en D , puis si $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = y_1 y_2$ on trouve en utilisant (3.86) :

$$\int_D y_2 \sigma_{11} dy = 0, \quad \int_D y_1 \sigma_{22} dy = 0.$$

On prend dans (3.85); $\psi_1 = y_1^2$, $\psi_2 = 0$ puis $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = y_2^2$ dans D on obtient :

$$\int_D y_1 \sigma_{11} = \int_D y_2 \sigma_{22} = 0.$$

Si l'on choisit; $\psi_1 = y_1$, $\psi_2 = 0$ puis $\psi_2 = y_2$, $\psi_1 = 0$, puis $\psi_1 = y_2$, $\psi_2 = y_1$ on obtient :

$$\int_D \sigma_{11} = 0, \quad \int_D \sigma_{22} = 0, \quad \int_D \sigma_{12} = 0.$$

On choisit dans le système (1.16) la fonction test suivante :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \varphi(x) \psi\left(\frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{D}(D_2)$. Dans ce cas on a :

$$e_{\alpha\beta}(\phi) = 0, \quad e_{\alpha 3}(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} \right), \quad e_{33}(\phi) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi.$$

Le système (1.16) devient :

$$\begin{cases} \int_{F_\varepsilon} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon (r_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha}) + r_\varepsilon \int_{F_\varepsilon} A_{33kl} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \psi \\ + \int_{M_\varepsilon^0} A e(u^\varepsilon) e(\phi) = \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_\Omega f_3 \varphi \psi. \end{cases} \quad (3.88)$$

Passons à la limite prenant en compte (3.84) qui reste valable avec cette fonction test, on obtient :

$$\int_\Omega \varphi(x) \int_D (\sigma_{13} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_{23} \frac{\partial \psi}{\partial y_2}) dy dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ce qui implique :

$$\int_D (\sigma_{13} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \sigma_{23} \frac{\partial \psi}{\partial y_2}) dy = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(D_2). \quad (3.89)$$

On prend dans (3.89), $\psi = y_\alpha$ en D , puis $\psi = y_\alpha^2$, puis $\psi = y_1 y_2$ on obtient :

$$\int_D \sigma_{\alpha 3} = \int_D y_\alpha \sigma_{\alpha 3} = \int_D (y_1 \sigma_{23} + y_2 \sigma_{13}) dy = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

La démonstration du lemme est achevée.

Lemme 4.6

L'espace \mathcal{S} muni de la norme :

$$\begin{cases} \|((u_\alpha, Z_3), u^0, v, w)\|_{\mathcal{S}} = \left(\left\| \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega \times D)}^2 + \sum_{i,j} (\|e_{ij}((u_\alpha, 0)) + e_{ij}^y(u^0)\|_{L^2(\Omega \times Y)})^2 \right. \\ \left. + \sum_\alpha (\| \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \|_{L^2(\Omega \times D)}^2) + \sum_{\alpha,\beta} (\|e_{\alpha\beta}^y(w)\|_{L^2(\Omega \times D)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.90)$$

est un espace de Hilbert.

Preuve :

On peut vérifier aisément que la norme définie par (3.90) vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} \|((u_\alpha, Z_3), u^0, v, w)\|_{\mathcal{S}} &= \left(\left\| \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j} \|e_{ij}((u_\alpha, 0))\|^2 + \sum_{i,j} (\|e_{ij}^y(u^0)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \right. \\ &\left. + \sum_{\alpha} (\| \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \|^2_{L^2(\Omega \times D)}) + \sum_{\alpha, \beta} (\|e_{\alpha\beta}^y(w)\|_{L^2(\Omega \times D)}) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right. \quad (3.91)$$

L'espace \mathcal{V} (Resp. \mathcal{W}) associé de la norme $(\sum_{\alpha} \| \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} \|^2)^{\frac{1}{2}}$ (Resp. $(\sum_{\alpha, \beta} \|e_{\alpha\beta}^y(w)\|^2)^{\frac{1}{2}}$) est un espace de Hilbert, (voir chapitre 2). L'espace U^0 associé de la norme $(\sum_{i,j} \|e_{ij}^y(u^0)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert (voir le lemme 3.6, (3.73)). En fin puisque :

$$\left\| \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \right\| \geq \left\| \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{\gamma} \left\| \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

on peut montrer sans difficulté que l'espace \mathcal{U} muni de la norme $(\| \frac{\partial Z_3}{\partial x_3} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j} \|e_{ij}((u_\alpha, 0))\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert. Puisque \mathcal{S} est composé de produit des espaces de Hilbert alors en utilisant (3.91) on trouve aisément que la norme donnée en (3.90) définit sur \mathcal{S} un espace de Hilbert.

Avant de commencer à démontrer les résultats de problème (1.1) rappelons que les espaces

$$\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cap \{(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_3) = (\bar{c}y_\alpha^R, \bar{v}_3), \quad \text{où } \bar{c} \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \bar{v}_3 \in \mathcal{D}(\Omega \times D_2)\}, \quad (3.92)$$

$$\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cap \{(\bar{w}_\alpha, 0), \quad \bar{w}_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega \times D_2)\}, \quad (3.93)$$

sont denses en \mathcal{V} et \mathcal{W} . $\overline{\mathcal{V}}$ (Resp. $\overline{\mathcal{W}}$) désigne l'espace de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega \times D_2)$ dont la restriction est dans \mathcal{V} (Resp. \mathcal{W}), où D_2 est le disque de centre zéro et de rayon 2. L'espace

$$\overline{\mathcal{U}} = \{(\bar{u}_\alpha, \bar{Z}_3), \quad \bar{Z}_3 = -\sqrt{\pi} \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial x_3} y_\gamma + \bar{z}_3, \quad \text{où } \bar{u}_\gamma, \bar{z}_3 \in \mathcal{D}(I; C^\infty(\bar{\omega}))\}, \quad (3.94)$$

est dense dans \mathcal{U} , la preuve est une conséquence de la densité de $\mathcal{D}(I; C^\infty(\bar{\omega}))$ dans $H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I))$.

Rappelons aussi :

$$\overline{\mathcal{U}}^0 = \{\bar{u}^0 = (\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, \bar{u}_3^0), \quad \bar{u}^0 = \sum_{p \in J} \phi^{(p)}(x) \psi^{(p)}(y), \quad J \text{ est fini, } \phi^{(p)} \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \psi^{(p)} \in \mathcal{H}^3\}, \quad (3.95)$$

est dense dans U^0 , où

$$\mathcal{H} = \{\psi \mid \psi \in C_\#^\infty(Y) \text{ telle que } \nabla_y \psi = 0 \text{ au voisinage de } 0\}. \quad (3.96)$$

(voir le lemme 2.4. chapitre 3). Par conséquent l'espace :

$$\overline{\mathcal{S}} := \overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{U}}^0 \times \overline{\mathcal{V}} \times \overline{\mathcal{W}}, \quad (3.97)$$

est dense dans \mathcal{S} .

3.4.4 Preuve des résultats

Preuve du théorème 4.1 :

Rappelons d'abord que les lemmes 4.3 et 4.4 montrent l'existence d'une fonction $(u, u^0, v, w) \in \mathcal{S}$ vérifiant (2.2)-(2.7).

Soit $((\bar{u}_\alpha, \bar{Z}_3), \bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}) \in \bar{\mathcal{S}}$. Soit aussi $\theta \in \mathcal{D}(D_2)$ telle que $\theta = 1$ dans D . On prolonge \bar{Z}_3 et \bar{v}_α dans $\Omega \times D_2$ comme suivant; $\bar{Z}_3(x, y) = \bar{z}_3(x) - \sqrt{\pi} y_\gamma \theta(y) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3}(x)$, $\bar{v}_\alpha(x, y) = \bar{c}(x) y_\alpha^R \theta(y)$. Considérons $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_\alpha, 0)$ comme une fonction auxiliaire où $\bar{\psi}_\alpha(x, y) = -\sqrt{\pi} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\gamma}(x) y_\gamma \theta(y)$.

Soit $\phi = (\phi_\alpha, \phi_3)$ la fonction test suivante :

$$\begin{cases} \phi_\alpha^\varepsilon(x) = \bar{u}_\alpha(x) + \varepsilon \bar{u}_\alpha^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \bar{v}_\alpha(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{w}_\alpha(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \bar{\psi}_\alpha(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}), \\ \phi_3^\varepsilon(x) = \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \bar{Z}_3(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) + \varepsilon \bar{u}_3^0(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{v}_3(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}). \end{cases} \quad (4.1)$$

D'après la définition de $\bar{\psi}$ ci-dessus et de \bar{Z}_3 dans \mathcal{U} donné par (3.94) et de \bar{v} on a :

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}(\bar{u}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e_{\alpha\beta}^y(\bar{\psi}) = 0 & \text{dans } \Omega \times D, \\ \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial y_\alpha} = 0 & \text{dans } \Omega \times D, \\ e_{\alpha\beta}^y(\bar{v}) = 0 & \text{dans } \Omega \times D. \end{cases} \quad (4.2)$$

Puisque $\bar{u}^0 \in \bar{U}^0$ alors $\frac{\partial \bar{u}^0}{\partial y_\alpha}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = 0$ dans F_ε . Par conséquent :

$$e^y(\bar{u}^0)(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = 0 \quad \text{dans } F_\varepsilon. \quad (4.3)$$

Soit M_ε^0 l'ensemble défini en (3.81), puisque $\theta \in \mathcal{D}(D_2)$ alors on peut vérifier aisément que :

$$e^y(\bar{v} + r_\varepsilon \bar{w} + \bar{\psi})(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial y_\alpha}(x, \frac{y_\varepsilon(x')}{r_\varepsilon}) = 0, \quad \text{sur } M_\varepsilon \setminus (F_\varepsilon \cup M_\varepsilon^0). \quad (4.4)$$

En utilisant (4.2)-(4.3) et (4.4) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= (e_{\alpha\beta}^x(\bar{v}) + e_{\alpha\beta}^x(\bar{\psi}) + r_\varepsilon e_{\alpha\beta}^x(\bar{w}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{w})) \chi_{F_\varepsilon}, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + r_\varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{w}_\alpha}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_\alpha} \right) \chi_{F_\varepsilon}, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} &= \left(r_\varepsilon \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \right) \chi_{F_\varepsilon}, \\ e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= \left(e_{\alpha\beta}(\bar{u}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}^0) + e_{\alpha\beta}^x(\varepsilon \bar{u}^0 + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \bar{v} + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \bar{w} + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \bar{\psi}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e_{\alpha\beta}^y(\bar{v} + r_\varepsilon \bar{w} + \bar{\psi}) \right) \chi_{M_\varepsilon^0} \chi_{M_\varepsilon}, \\ e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial y_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_\alpha^0}{\partial x_3} + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_\alpha} + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{w}_\alpha}{\partial x_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial y_\alpha} \chi_{M_\varepsilon^0} \right) \chi_{M_\varepsilon}, \\ e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} &= \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_3} + \frac{r_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} + \frac{r_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_3} \right) \chi_{M_\varepsilon}. \end{cases} \quad (4.5)$$

On a :

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^x(\bar{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\beta} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\alpha} y_\beta^R \right), & \text{dans } \Omega \times D, \\ e_{\alpha\beta}^x(\bar{\psi}) = -\sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\gamma} \right), & \text{dans } \Omega \times D, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{Z}_3}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_\alpha} - \sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right), & \text{dans } \Omega \times D, \end{cases} \quad (4.6)$$

Calculons les limites double échelle " \rightharpoonup " et " $\rightharpoonup\rightharpoonup$ " en (4.5). Prenant en compte le fait que $\chi_{M_\varepsilon}^0$ converge fortement vers 0, en utilisant les notations (4.6) on obtient les convergences fortes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup (e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\beta} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\alpha} y_\beta^R) - \sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\beta}(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\gamma})), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_\alpha} - \sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\gamma}(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3}), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} = (\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial x_3^2}), \\ e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(\bar{u}) + e_{\alpha\beta}^y(\bar{u}^0), \\ e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_\alpha^0}{\partial y_\alpha}), \\ e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \rightharpoonup 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Les coefficients de l'opérateur A vérifient la convergence forte au sens double échelle suivante :

$$A_{ijkl}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup A_{ijkl}(x, 0), \quad A_{ijkl}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \rightharpoonup\rightharpoonup A_{ijkl}(x, y). \quad (4.8)$$

On considère dans le système variationnel (1.16) la fonction test ϕ^ε définie dans (4.1) et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{F_\varepsilon} A_{\alpha\beta ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{ij}(u^\varepsilon)) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon)) + \int_{F_\varepsilon} A_{\alpha 3 ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{ij}(u^\varepsilon)) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon)) \\ + \int_{F_\varepsilon} A_{33 ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{ij}(u^\varepsilon)) (\frac{\sqrt{\pi}}{r_\varepsilon} e_{33}(\phi^\varepsilon)) + \int_{\Omega} A_{\alpha\beta ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{ij}(u^\varepsilon) e_{\alpha\beta}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} \\ + \int_{\Omega} A_{\alpha 3 ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{ij}(u^\varepsilon) e_{\alpha 3}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} + \int_{\Omega} A_{33 ij}(x, \frac{x'}{\varepsilon}) e_{ij}(u^\varepsilon) e_{33}(\phi^\varepsilon) \chi_{M_\varepsilon} = \int_{\Omega} f \phi^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

où $e(\phi^\varepsilon)$ est donné dans (4.5).

D'après le lemme 4.5 on a :

$$\int_{\Omega} \int_D \left(\sigma_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\beta} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_\alpha} y_\beta^R \right) - \sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\gamma} \right) \right) + \sigma_{\alpha 3} \left(\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_\alpha} - \sqrt{\pi} y_\gamma e_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right) \right) = 0. \quad (4.10)$$

Prenons la limite dans (4.9) en utilisant les limites (2.2)-(2.7), (4.7)-(4.8), et (4.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) & \frac{\partial z_3}{x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ + \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) (e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0)) (e((\bar{u}_\alpha, 0)) + e^y(\bar{u}^0)) = \int_{\Omega} f \bar{u}_\alpha, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Puisque l'espace $\bar{\mathcal{S}}$ est dense dans \mathcal{S} alors (4.11) est vérifié pour toute fonction $((\bar{u}_\alpha, \bar{z}_3), \bar{u}^0, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{S}$.

On applique le théorème de Lax-Milgram en utilisant les hypothèses (1.11)-(1.12) sur A et (1.15) sur f pour prouver que (4.11)(i.e. (2.8)) a une solution unique dans \mathcal{S} . Le théorème 4.1 est démontré.

Preuve de la proposition 4.1 :

Posons dans (2.8), $\bar{u} = \bar{u}^0 = \bar{w} = 0$ et $\bar{v} = v$, puis on utilise l'hypothèse (1.17) sur A on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

L'hypothèse de coercivité de A implique :

$$\|(\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha})\|^2 = 0.$$

D'où on a $c(x) = v_3(x, y) = 0$, c'est-à-dire $v = 0$.

Preuve du théorème 4.2 :

Considérons dans (2.8), $\bar{v} = \bar{w} = \bar{z}_3 = 0$ et on suppose que (u_1, u_2) est donnée; on trouve que u^0 est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u^0 \in U^0, \\ \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) e^y(u^0) e^y(\bar{u}^0) = - \int_{\Omega} \int_Y A(x, y) e((u_\alpha, 0)) e^y(\bar{u}^0), \\ \forall \bar{u}^0 \in U^0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Soit $\bar{u}^0 \in (L^2(\Omega, H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3 = U^0$, pour p.p. $x \in \Omega$ on a, $\bar{u}^0(x, \cdot) \in (H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R})^3$. On considère dans (2.11) la fonction test $\bar{u}^0(x, \cdot)$ où la variable x est fixée dans Ω , on multiplie les deux membres de l'équation (2.11) par $e_{pq}((u_\alpha, 0))$ puis on intègre sur Ω et on fait la somme pour $p, q = 1, 2, 3$ on trouve que $\sum_{p,q} \hat{u}^{(pq)} e_{pq}((u_\alpha, 0))$ est une solution de (4.12). Puisque la solution est unique alors $u^0 = \sum_{p,q} \hat{u}^{(pq)} e_{pq}((u_\alpha, 0))$. La relation (2.9) est démontrée.

Montrons (2.10). Considérons l'équation en v, w et z_3 où (u_1, u_2) sont considérées comme des données. Pour cela on remplace dans (2.8) les fonctions tests (\bar{u}_1, \bar{u}_2) et \bar{u}^0 par zéro, en prenant en compte $\frac{\partial Z}{\partial x_3} = \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}$ on trouve facilement que v, w, z_3 s'écrit sous la forme :

$$(v, w, z_3) = (v^{(1)}, w^{(1)}, z_3^{(1)}) + (v^{(2)}, w^{(2)}, z_3^{(2)}), \quad (4.13)$$

où $v^{(\gamma)} = (c^{(\gamma)} y_\alpha^R, v_3^{(\gamma)})$, $\gamma = 1, 2$, où $(v^{(\gamma)}, w^{(\gamma)}, z_3^{(\gamma)})$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} (v^{(\gamma)}, w^{(\gamma)}, z_3^{(\gamma)}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times L^2(\omega; H_0^1(I)), \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w^{(\gamma)}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx dy \\ = \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \forall (\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}_3) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times L^2(\omega; H_0^1(I)). \end{cases} \quad (4.14)$$

Il est évident que le système (4.14) a une solution unique en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \times L^2(\omega; H_0^1(I))$.

On cherche à partir de (4.14) l'expression de $(v^{(\gamma)}, w^{(\gamma)})$ en fonction de $c^{(\gamma)}, z_3^{(\gamma)}$ et de u_γ . On considère une nouvelle fois $c^{(\gamma)}$ et $z_3^{(\gamma)}$ comme des données et prenons $\bar{c} = \bar{z}_3 = 0$ en (4.14), alors on obtient de (4.14) le système suivant :

$$\begin{cases} (v_3^{(\gamma)}, w^{(\gamma)}) \in L^2(\Omega; H_m^1(D)) \times \mathcal{W}, \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w^{(\gamma)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \\ \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \\ \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in L^2(\Omega; H_m^1(D)) \times \mathcal{W}. \end{cases} \quad (4.15)$$

On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega; H_m^1(D)) \times \mathcal{W}$ muni de la norme $(\|\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}\|^2 + \|e_{\alpha\beta}^y(w)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ on trouve aisément que $(v_3^{(\gamma)}, w^{(\gamma)})$ est l'unique solution de (4.15).

Puisque $(\hat{w}^{(i)}, \hat{v}_3^{(i)}), (\hat{w}, \hat{v}_3) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0) \times L^\infty(\Omega; H_m^1(D))$ et $\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}, \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \in L^2(\Omega)$ alors :

$$\begin{cases} \sqrt{\pi} \hat{w}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{w} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{w}^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \in \mathcal{W}, \\ \sqrt{\pi} \hat{v}_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{v}_3 \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{v}_3^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \in L^2(\Omega; H_m^1(D)), \end{cases} \quad (4.16)$$

Soit $(\bar{v}, \bar{w}) \in L^2(\Omega; H_m^1(D)) \times \mathcal{W}$, donc pour p.p. $x \in \Omega$ on a : $(\bar{v}(x, \cdot), \bar{w}(x, \cdot)) \in H_m^1(D) \times \mathcal{W}_0$. On considère dans les systèmes (2.12)-(2.14) la fonction test $(\bar{v}(x, \cdot), \bar{w}(x, \cdot))$ où x est fixé dans Ω . Puis on multiplie (2.12) par $\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}(x)$, (2.13) par $\frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}(x)$, et (2.14) par $\frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3}(x)$, ensuite on fait la somme des trois systèmes et on intègre sur Ω prenant en compte (4.16) on trouve que

$$\sqrt{\pi} \hat{w}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{w} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{w}^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}, \sqrt{\pi} \hat{v}_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{v}_3 \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{v}_3^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}$$

est aussi une solution à (4.15). La solution est unique, alors de (4.16) on conclut que :

$$w^{(\gamma)} = \sqrt{\pi} \hat{w}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{w} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{w}^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}, v_3^{(\gamma)} = \sqrt{\pi} \hat{v}_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + \hat{v}_3 \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{v}_3^{(3)} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}. \quad (4.17)$$

Posons $\bar{w} = \bar{v}_3 = \bar{z}_3 = 0$ dans (4.14) et on remplace $(w^{(\gamma)}, v_3^{(\gamma)})$ par son expression dans (4.17) on obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \left[\begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}) & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \right] \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \\ = \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3}. \end{cases}$$

On prend en compte la définition de $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}$ et de $\hat{b}_1^{(\gamma)}$ en (2.15) on obtient :

$$\int_{\Omega} (\hat{b}_1^{(\gamma)} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A}_{11} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{A}_{12} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} dx = 0, \quad \forall \bar{c} \in L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (4.18)$$

Puisque $\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \in L^2(\omega; L_m^2(I))$ car $\bar{c} \in L^2(\omega; H_m^1(I))$ alors si l'on prend dans (4.18) une fonction test du type $\bar{d} = \psi(x') \phi(x_3)$ avec $\psi \in L^2(\omega)$ et $\phi \in L_m^2(I)$ telle que $\int_I \phi(x_3) dx_3 = 0$ on obtient :

$$\int_I (\hat{b}_1^{(\gamma)} ((\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A}_{11} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{A}_{12} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3})(x', x_3) \phi(x_3) dx_3 = 0.$$

Alors pour p.p. $x' \in \omega$ il existe une constante dépendant de x' notée $C_1(x')$ vérifiant:

$$\hat{b}_1^{(\gamma)} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A}_{11} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{A}_{12} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} = C_1(x'). \quad (4.19)$$

Soit :

$$\hat{A}_{21}(x) = \int_D (A_{33\alpha\beta}(x, 0) e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) + A_{33\alpha 3}(x, 0) (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha})) dy. \quad (4.20)$$

Dans (4.14) prenons $\bar{w} = \bar{v}_3 = \bar{c} = 0$ et on remplace $(w^{(\gamma)}, v_3^{(\gamma)})$ par l'expression (4.17) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \left[\begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}) \\ \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}) & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \\ = \int_{\Omega} \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3}. \end{array} \right.$$

En utilisant l'expression de \hat{A}_{21} en (4.20), l'expression de \hat{A}_{22} et de $\hat{b}_2^{(\gamma)}$ en (2.15) on obtient :

$$\int_{\Omega} (\hat{b}_2^{(\gamma)} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A}_{21} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{A}_{22} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3}) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} dx = 0, \quad \forall \bar{z}_3 \in L^2(\omega; H_0^1(I)). \quad (4.21)$$

D'une façon similaire au passage de l'équation (4.18) à (4.19), on trouve qu'il existe une constante dépendant de x' notée $C_2(x')$ vérifiant :

$$\hat{b}_2^{(\gamma)} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A}_{21} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} + \hat{A}_{22} \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} = C_2(x'). \quad (4.22)$$

Soit \hat{A} la matrice suivante

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix},$$

où \hat{A}_{11} , \hat{A}_{12} , \hat{A}_{22} sont donnés par (2.15) et \hat{A}_{21} est donné par (4.20). D'après (4.19), (4.22) on a :

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1^{(\gamma)} \\ \hat{b}_2^{(\gamma)} \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + \hat{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (x'). \quad (4.23)$$

On montre que la matrice \hat{A} est symétrique et elle vérifie la condition de la coercivité, c'est-à-dire :

$$m(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \langle \hat{A}(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^2} \leq M(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.24)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ désigne le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^2 et $m > 0$.

D'après la définition de \hat{A}_{12} , de \hat{A}_{21} , d'après (2.13)-(2.14), et d'après l'hypothèse (1.9) sur A on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_{12}(x) = \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \\ = \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{2} y_\alpha^R \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{2} y_\alpha^R & 0 \end{pmatrix} \\ = \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) & \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2} (\frac{\partial \hat{v}}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dy = \hat{A}_{21}(x), \end{array} \right.$$

d'où \hat{A} est symétrique i.e. $\hat{A}_{12} = \hat{A}_{21}$.

Montrons (4.24). Puisque $(\hat{v}, \hat{w}), (\hat{v}^{(3)}, \hat{w}^{(3)}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}_0)$, et puisque $A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega; C_\#(Y))$ alors la deuxième inégalité de (4.24) est évidente. Soit $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les

conditions (1.9) et (1.12) sur le tenseur A et le fait que $\hat{A}_{21} = \hat{A}_{12}$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{A}(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^2} = \hat{A}_{11}|\xi_1|^2 + 2\hat{A}_{12}\xi_1\xi_2 + \hat{A}_{22}|\xi_2|^2 \\ = \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}\xi_1 + \hat{w}^{(3)}\xi_2) & \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{v}}{\partial y_\alpha}\xi_1 + y_\alpha^R\xi_1 + \frac{\partial\hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha}\xi_2) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{v}}{\partial y_\alpha}\xi_1 + y_\alpha^R\xi_1 + \frac{\partial\hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha}\xi_2) & \xi_2 \\ e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}\xi_1 + \hat{w}^{(3)}\xi_2) & \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{v}}{\partial y_\alpha}\xi_1 + y_\alpha^R\xi_1 + \frac{\partial\hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha}\xi_2) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{v}}{\partial y_\alpha}\xi_1 + y_\alpha^R\xi_1 + \frac{\partial\hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha}\xi_2) & \xi_2 \end{pmatrix} dy \\ \geq m \left(\sum_\alpha \int_D |\frac{\partial\hat{v}}{\partial y_\alpha}\xi_1 + y_\alpha^R\xi_1 + \frac{\partial\hat{v}^{(3)}}{\partial y_\alpha}\xi_2|^2 \right) + m|\xi_2|^2 \\ \geq m \left(\inf_{v \in H_m^1(D)} \left\{ \sum_\alpha \int_D |\frac{\partial v}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R\xi_1|^2 \right\} \right) + m|\xi_2|^2 \\ \geq m(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2). \end{array} \right.$$

Danc (1.24) est satisfaite.

Soit $\hat{a}(x)$ le déterminant de la matrice $\hat{A}(x)$, c'est-à-dire : $\hat{a} = \hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - (\hat{A}_{12})^2$, alors d'après l'inégalité (4.24) il existe une constante $\mu > 0$ telle que :

$$\mu \leq \hat{a}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (4.25)$$

et on a :

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{\hat{a}} \begin{pmatrix} \hat{A}_{22} & -\hat{A}_{12} \\ -\hat{A}_{12} & \hat{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

où \hat{A}^{-1} désigne la matrice inverse de \hat{A} . Il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$m(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \langle \hat{A}^{-1}(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^2} \leq M(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.27)$$

On intègre dans (4.27) sur I on trouve :

$$m(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \langle \left(\int_I \hat{A}^{-1} dx_3 \right) \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^2} \leq M(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \text{p.p. } x' \in \omega, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.28)$$

On désigne par $a^{(I)}(x')$ le déterminant de la matrice $\int_I \hat{A}^{-1} dx_3$, i.e.

$$a^{(I)}(x') = \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}} \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}} - \left(\int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}} \right)^2$$

D'après (4.28) il existe $\mu > 0$ tel que :

$$\mu \leq \hat{a}^{(I)}(x') \quad \text{p.p. } x' \in \omega, \quad (4.29)$$

et on a :

$$\left(\int_I \hat{A}^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{a^{(I)}} \begin{pmatrix} \int_I \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{a}} & \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}} \\ \int_I \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{a}} & \int_I \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{a}} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Multiplions (4.23) par \hat{A}^{-1} et on intègre sur I en utilisant $\int_I \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} = \int_I \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} = 0$ car $c^{(\gamma)}, z_3^{(\gamma)} \in H_0^1(I)$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (x') = \left(\int_I \hat{A}^{-1} \right)^{-1} \int_I \left(\hat{A}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b}_1^{(\gamma)} \\ \hat{b}_2^{(\gamma)} \end{pmatrix} \right) \left(\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \right). \quad (4.31)$$

On remplace les expressions de C_1 et de C_2 (4.31) dans (4.23) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \hat{A}^{-1} \left(\int_I \hat{A}^{-1} \right)^{-1} \int_I (\hat{A}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b}_1^{(\gamma)} \\ \hat{b}_2^{(\gamma)} \end{pmatrix}) (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) - \hat{A}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b}_1^{(\gamma)} \\ \hat{b}_2^{(\gamma)} \end{pmatrix} (\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}). \quad (4.32)$$

En utilisant (4.26) et (4.30) et les notations (2.15) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial c^{(\gamma)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z_3^{(\gamma)}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} a_{11} \int_I b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 + a_{12} \int_I b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 - b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \\ a_{21} \int_I b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 + a_{22} \int_I b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} dx_3 - b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

On sait que $c = c^{(1)} + c^{(2)}$, $z_3 = z_3^{(1)} + z_3^{(2)}$ donc :

$$\frac{\partial c}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial x_3}(x), \quad \frac{\partial z_3}{\partial x_3}(x) = \frac{\partial z_3^{(1)}}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial z_3^{(2)}}{\partial x_3}(x). \quad (4.34)$$

On intègre dans (4.34) sur $(-\frac{1}{2}, x_3)$ en utilisant $c(-\frac{1}{2}) = z_3(-\frac{1}{2}) = c^{(\gamma)}(-\frac{1}{2}) = z_3^{(\gamma)}(-\frac{1}{2}) = 0$, $\gamma = 1, 2$, ensuite on utilise la formule (4.33) on trouve l'expression de c et de z_3 dans (2.10).

En outre, de (4.13), (4.17), et de (4.33) on trouve aisément les expressions de w et de v_3 données en (2.10). Fin de preuve du théorème 3.2.

Dans le cas d'un corps encastré sur une seule face, par exemple, sur $\Gamma_{-\frac{1}{2}}$, alors la fonction C_1 donnée par (4.19) devient 0, car on peut remplacer $\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3}$ par $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (4.18), ce qui implique $C_1(x') = 0$; en considérant $\bar{c} = \int_{-\frac{1}{2}}^{x_3} \phi(x', t) dt \in L^2(\omega; H_{-\frac{1}{2}}^1(I))$, de même $C_2(x') = 0$. Puisque $C_\gamma(x') = 0$ alors $\int_I b_{\gamma \delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} = 0$. Ce qui justifie la remarque 4.5.

Preuve du théorème 4.3 :

D'abord puisque la suite $(u_\alpha^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ converge faiblement vers $(u_\alpha, 0)$ dans $(H^1(\Omega))^3$ alors cette convergence est forte dans $(L^2(\Omega))^3$.

Considérons dans (2.8), $\bar{z}_3 = \bar{u}^0 = \bar{c} = \bar{v}_3 = \bar{w} = 0$ on trouve :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap (L^2(\omega; H_0^1(I)))^2, \\ \int_\Omega \int_D A(x, 0) \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\pi} y_\delta \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ + \int_\Omega \int_Y A(x, y) (e((u_\alpha, 0)) + e^y(u^0)) e((\bar{u}_\alpha, 0)) = \int_\Omega f_\delta \bar{u}_\delta, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega))^2 \cap (L^2(\omega; H_0^1(I)))^2. \end{cases} \quad (4.35)$$

D'après (2.10) et d'après la définition de $g_\alpha^{(\gamma)}(x, y)$, $k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y)$ dans (2.18) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R = \sqrt{\pi} (g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + (\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + y_\alpha^R) (a_{11} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + a_{12} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2})) \\ \quad + \frac{\partial \bar{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha} (a_{21} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + a_{22} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}))), \\ e_{\alpha\beta}^y(w) = \sqrt{\pi} (k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}) (a_{11} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + a_{12} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2})) \\ \quad + e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)}) (a_{21} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + a_{22} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}))), \\ \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} = \sqrt{\pi} (- (b_{\gamma 2} + y_\gamma) \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + (a_{21} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + a_{22} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}))). \end{cases} \quad (4.36)$$

On remplace dans (4.35) les expressions (4.36) et l'expression de u^0 en fonction de $e_{pq}((u_\alpha, 0))$ données par (2.10), prenant en compte les notations $a_\delta^{(\gamma)}, b_\delta^{(\gamma)}, A_{ijkl}^*$ introduites en (2.17) et (2.19) on trouve aisément l'équation (2.16).

Enfin, on montre l'unicité de la solution (u_1, u_2) du système (2.16). Comme d'habitude il suffit de montrer que la forme bilinéaire définie dans la première partie de (2.16) est coercive sur l'espace de Hilbert $(H^1(\Omega))^2 \cap (L^2(\omega; H_0^1(I)))^2$.

Soit (u_1, u_2) , (Resp. (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) appartient à $(H^1(\Omega))^2 \cap (L^2(\omega; H_0^1(I)))^2$ et soient v, w, z_3 (Resp. $\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}_3$) sont données en fonction de (u_1, u_2) (Resp. (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) par la formule (2.10). En utilisant (2.13) et le fait que $A_{ijkl} = A_{klij}$ on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + b_\delta^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + b_\delta^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} = \\ & \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -y_\delta \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \\ & \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} - y_\delta \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ & = \int_{\Omega} \int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} - y_\delta \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -y_\gamma \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ & = \int_{\Omega} \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial x_3^2} + b_\delta^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial x_3^2}) + b_\delta^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial x_3^2}) \right) \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

On suppose dans (4.37) que $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (u_1, u_2)$ alors :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + b_\delta^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) + b_\delta^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2}) \right) \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} = \\ & \int_{\Omega \times D} A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R) & \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\delta \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ & \geq m \int_{\Omega} \int_D \left| \frac{\partial z_3}{\partial x_3} - \sqrt{\pi} y_\delta \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} \right|^2 \geq m \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_3^2} \right|^2, \end{aligned} \right. \quad (4.38)$$

A^* est coercive (voir remarque 4.4). Par conséquent la forme définie par (2.16) est coercive. Ce qui implique que (u_1, u_2) est l'unique solution de (2.16).

De plus, on peut montrer que la forme définie par (2.16) est symétrique et continue. A^* est symétrique (voir remarque 4.4) alors on conclut de (4.37) que la forme défini en (2.16) est symétrique. En outre, $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)}), (\hat{v}_3, \hat{w}) \in L^\infty(\Omega; H_m^1(D)) \times L^\infty(\Omega; \mathcal{W}^0)$ et $A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega \times Y)$ (hypothèses (1.10)-(1.11)), $(\hat{a})^{-1}, (\hat{a}^{(I)})^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ (voir remarque 4.3), alors de (2.15), de (2.17), et de (2.18) on trouve que $a_\delta^{(\gamma)}, b_\delta^{(\gamma)}, b_{\delta\gamma} \in L^\infty(\Omega)$, ce qui implique que la forme définie par (2.16) est continue.

Prenant en compte $(f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ alors en appliquant le théorème de Lax-Milgram dans $(H^1(\Omega))^2 \cap (L^2(\omega; H_0^1(I)))^2$ on conclut de nouveau à l'existence d'une solution unique (u_1, u_2) au (2.16). La preuve du théorème 4.3 est achevée.

Preuve de la proposition 4.2 : (Cas isotrope)

Si le tenseur d'élasticité s'écrit sous la forme (2.20) alors il est évident que problème homogénéisé macroscopique est celui donné par (2.8) en remplaçant $A(x, 0)$ et $A(x, y)$ par A défini par (2.22).

On cherche les coefficients $a_\delta^{(\gamma)}$ et $b_{\delta\gamma}$ en fonction de μ_1 et de ℓ . Pour cela il suffit de trouver explicitement les solutions $(v_3^{(\gamma)}, \hat{w}^{(\gamma)})$ ($\gamma = 1, 2$) de l'équation (2.12).

D'abord, il est clair que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{ijkl}^{(\varepsilon)} = A_{ijkl}. \quad (4.39)$$

On pose

$$\lambda_1 = \ell\mu_1. \quad (4.40)$$

On peut écrire donc les coefficients A_{ijkl} donnés par (2.22) comme suit :

$$A_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.41)$$

On considère $\bar{w} = 0$ dans (2.12) et on obtient :

$$\int_D A \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} + \int_D A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} = \int_D A_{\alpha 3 3 3} y_\gamma \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha}.$$

Puisque $A_{\alpha 3 \gamma \delta} = A_{\alpha 3 3 3} = 0$ alors $\hat{v}_3^{(\gamma)}$ est l'unique solution du problème :

$$\int_D A \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y_\alpha} & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \bar{v}_3 \in H_m^1(D).$$

Posant $\bar{v}_3 = \hat{v}_3^{(\gamma)}$ et utilisant la coercivité de A , on conclut :

$$\hat{v}_3^{(\gamma)} = 0. \quad (4.42)$$

On pose $\bar{v}_3 = 0$ dans (2.12) et on utilise (4.42); alors la fonction $\hat{w}^{(\gamma)}$ devient l'unique solution du problème :

$$\int_D A \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \int_D A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}^y(\bar{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

En utilisant (4.41); alors le système (4.43) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \int_D ((\lambda_1 + 2\mu_1)e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) + \lambda_1 e_{22}^y(\hat{w}^{(\gamma)}))e_{11}^y(\bar{w}) + \lambda_1 \int_D e_{12}^y(w)e_{12}^y(\bar{w}) \\ + \int_D (\mu_1 e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) + (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{22}^y(\hat{w}^{(\gamma)}))e_{22}^y(\bar{w}) = \lambda_1 \int_D y_\gamma e_{11}^y(\bar{w}) + \lambda_1 \int_D y_\gamma e_{22}^y(\bar{w}) \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour résoudre cette équation on cherche une fonction $\hat{w}^{(\gamma)}$ vérifiant les équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) + \lambda_1 e_{22}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) = \lambda_1 y_\gamma \\ \lambda_1 e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) + (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{22}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) = \lambda_1 y_\gamma \end{cases} \quad (4.45)$$

Et :

$$e_{12}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) = 0. \quad (4.46)$$

L'équaion (4.45) implique que :

$$\begin{cases} e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} y_\gamma \\ e_{11}^y(\hat{w}^{(\gamma)}) = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} y_\gamma \end{cases} \quad (4.47)$$

Les équations (4.46)-(4.47) montrent que $\hat{w}^{(\gamma)}$ pour $\gamma = 1, 2$ doit être donnée par :

$$\begin{cases} \hat{w}_1^{(1)} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 + \mu_1)} y_1^2 - \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 + \mu_1)} y_2^2, & \hat{w}_2^{(1)} = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} y_1 y_2, \\ \hat{w}_1^{(2)} = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} y_1 y_2, & \hat{w}_2^{(2)} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 + \mu_1)} y_2^2 - \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 + \mu_1)} y_1^2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Par conséquent la solution de (2.12) est $(0, \hat{w}^{(\gamma)})$ où $w^{(\gamma)}$ est donnée par (4.48).

On cherche maintenant $b_{\delta\gamma}, a_{\delta}^{(\gamma)}$ (voir (2.15) et (2.17) pour ces coefficients).
 Utilisant (4.42), (4.46)-(4.47) et le fait que $\int_D y_{\gamma} = 0$ on trouve aisément :

$$\hat{b}_1^{(\alpha)} = 0, \hat{b}_2^{(\alpha)} = 0. \quad (4.49)$$

De (2.15) et (4.49) on obtient :

$$b_{\alpha 1} = 0, b_{\alpha 2} = 0. \quad (4.50)$$

Il est inutile de chercher $b_{\delta}^{(\gamma)}$ car ces termes dans (2.16) seront multipliés par 0 (d'après (4.50)), i.e.

$$b_{\delta}^{(1)} \int_I (b_{\gamma 1} \frac{\partial^2 u_{\gamma}}{\partial x_3^2}) + b_{\delta}^{(2)} \int_I (b_{\gamma 2} \frac{\partial^2 u_{\gamma}}{\partial x_3^2}) = 0. \quad (4.51)$$

De (2.17) et (4.50) on obtient :

$$g_{\alpha}^{(\gamma)}(x, y) = 0, k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) = e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)})(x, y). \quad (4.52)$$

Utilisons (4.52) on trouve :

$$a_{\delta}^{(\gamma)} = - \int_D A_{33\alpha\beta} y_{\delta} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)})(x, y) + A_{3333} \int_D y_{\delta} y_{\gamma}. \quad (4.53)$$

Remplaçant $A_{33\alpha\beta}$ et A_{3333} par leurs définitions dans (4.41) et on utilise (4.47) on trouve :

$$a_{\delta}^{(\gamma)} = - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + \mu_1} \int_D y_{\delta} y_{\gamma} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \int_D y_{\delta} y_{\gamma}. \quad (4.54)$$

Donc on a :

$$a_1^{(1)} = a_2^{(2)} = \frac{\pi}{4} \mu \frac{3\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = 0. \quad (4.55)$$

On remplace λ_1 par $\ell\mu_1$ (voir (4.40)) on trouve :

$$a_1^{(1)} = a_2^{(2)} = \frac{\pi}{4} \mu_1 \frac{3\ell + 2}{\ell + 1}, \quad a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = 0. \quad (4.56)$$

De la même façons à la partie 3.3 on peut montrer que :

$$A_{ijkl}^* = \ell\mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.57)$$

De (4.51) et(4.56)-(4.57) on trouve que (2.16) se transforme en (2.23).

COMMENTAIRES-PERSPECTIVES

Commentaires

- Sur chapitre 2.

On peut également montrer les limites (2.2)-(2.3) du théorème 2.1 de chapitre 2 par la méthode utilisée pour l'élasticité dans le chapitre 3 (système (1.1)-3.4). On considère :

$$v^\varepsilon = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_\varepsilon} v_{\varepsilon}^{\bar{i}}, \quad v_{\varepsilon}^{\bar{i}} = (v_{1\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{2\varepsilon}^{\bar{i}}, v_{3\varepsilon}^{\bar{i}}). \quad (1.1)$$

où $\bar{i} = (i, i_3) \in \bar{I}_\varepsilon = I_\varepsilon \times \{i_3 \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon i_3 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ et

$$\begin{cases} v_{1\varepsilon}^{\bar{i}}(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} (u_1^\varepsilon(x) - a_{\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2) - b_{1\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_3}{\varepsilon} - i_3) - d_{1\varepsilon}^{\bar{i}}) \chi_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}}, \\ v_{2\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{1}{\varepsilon^2} (u_2^\varepsilon(x) + a_{\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1) - b_{2\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_3}{\varepsilon} - i_3) - d_{2\varepsilon}^{\bar{i}}) \chi_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}}, \\ v_{3\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{1}{\varepsilon^2} (u_3^\varepsilon(x) + b_{1\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1) + b_{2\varepsilon}^{\bar{i}}(\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2) - d_{3\varepsilon}^{\bar{i}}) \chi_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}}, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $C_{\varepsilon}^{\bar{i}} = D_{\varepsilon}^i \times (\varepsilon(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \varepsilon i_3)$, et

$$\begin{cases} a_{\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} ((\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2)u_1 - (\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1)u_2) dx}{\int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} ((\frac{x_1}{\varepsilon} - i_1)^2 + (\frac{x_2}{\varepsilon} - i_2)^2) dx}, \\ b_{\gamma\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{\int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} ((\frac{x_3}{\varepsilon} - i_3)u_\gamma - (\frac{x_\gamma}{\varepsilon} - i_\gamma)u_3) dx}{\int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} ((\frac{x_\gamma}{\varepsilon} - i_\gamma)^2 + (\frac{x_3}{\varepsilon} - i_3)^2) dx}, \\ d_{k\varepsilon}^{\bar{i}} = \frac{1}{|C_{\varepsilon}^{\bar{i}}|} \int_{C_{\varepsilon}^{\bar{i}}} u_k^\varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \quad \gamma = 1, 2. \end{cases} \quad (1.3)$$

En utilisant le lemme 1.3-3.1. on trouve

$$\int_{\Omega} |v^\varepsilon|^2 dx \leq C. \quad (1.4)$$

Après on montre qu'il existe $v^0 \in (L^2(\Omega; H^1(D(0, r) \times Y_3)))^3$ où $Y_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ telle que

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0(x, y, y_3) \chi_D, \quad \frac{1}{\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup e_{kl}^y(v^0) \chi_D. \quad (1.5)$$

avec " \rightharpoonup " désigne la convergence double échelle définie par : $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ si

$$\int_{\Omega} f^\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \rightarrow_{\varepsilon} \int_{\Omega} \int_{Y \times Y_3} f \psi, \quad \forall \psi \in C(\Omega; C_{\#}(Y \times Y_3)). \quad (1.6)$$

où $f \in L^2(\Omega \times Y \times Y_3)$. Pour cette convergence voir [1].

Pour montrer (1.5), d'abord (1.4) implique qu'il existe $v^0 \in L^2(\Omega \times Y \times Y_3)$ telle que $v^\varepsilon \rightharpoonup v^0 \chi_D$. On prend $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times D(0, r) \times Y_3)$ et on prolonge ψ dans \mathbb{R}^3 par une période $Y \times Y_3$ puis on montre :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{F_\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} e_{kl}(u^\varepsilon) \right) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \right) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega \times D(0, r) \times Y_3} (v_k^0 \frac{\partial \varphi}{\psi \partial y_l} + v_l^0 \frac{\partial \varphi}{\psi \partial y_k}) dx dy dy_3. \quad (1.7)$$

La preuve se fait parallèlement au lemme 4.2-3.4 en remplaçant r_ε par $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi r^2}}$ et $\varphi(x, \frac{y_\varepsilon(x)}{r_\varepsilon})$ par $\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Après la preuve de (1.5) posons :

$$\bar{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} v_k^0(x, y, y_3) dy_3, \quad \check{w}_k(x, y) = \int_{Y_3} \frac{\partial v_k^0}{\partial y_3}(x, y, y_3) dy_3, \quad (1.8)$$

$$w_\alpha = \bar{w}_\alpha + \frac{\int_{D(0,r)} (y_2 \bar{w}_1 - y_1 \bar{w}_2)}{\int_{D(0,r)} (y_1^2 + y_2^2)} - \frac{1}{|D(0,r)|} \int_{D(0,r)} \bar{w}_\alpha. \quad (1.9)$$

On trouve que $w := (w_\alpha, 0) \in \mathcal{W}$ et $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup e_{\alpha\beta}^y(w) \chi_D$, i.e. la convergence 2.2 du théorème 1.2 (chapitre 2). D'autre part on a :

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \chi_{F_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{2} (\check{w}_\alpha + \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial y_\alpha}) \chi_D. \quad (1.10)$$

L'étape suivante consiste de montrer que $\check{w} = (\check{w}_1, \check{w}_2)$ est un mouvement rigide, i.e. $e_{\alpha\beta}^y(\check{w}) = 0$. On poursuit le même preuve dans le lemme 4.3 (chapitre 3) en considérant des fonction tests de type $\phi(x)\psi(\frac{x'}{\varepsilon})$ où $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(D(0,r))$ et en remplaçant r_ε par $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi r^2}}$. Cet étape nous permet de conclure qu'il existe $v_3 \in L^2(\Omega; H_m^1(D))$ et $c_0 \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2} (c_0(x) y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}). \quad (1.11)$$

En fin nous montrons que $\int_I c_0(x', x_3) dx_3 = 0$, pour ça on refait les étapes (3.61)-(3.67) dans preuve de lemme 4.3 en remplaçant toujours r_ε par $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi r^2}}$ et en considérant $\theta(\frac{x'}{\varepsilon})$ avec $\theta \in \mathcal{D}(D(0,r))$ telle que $\int_{D(0,r)} \theta = 1$. On pose $c(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} c_0(x', t) dt$. Par conséquent $\frac{1}{2} (\frac{\partial c}{\partial x_3} y_\alpha^R + \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha})$ vérifie la convergence (2.3) du théorèmes 1.2 (chapitre 2).

Signalons aussi que le problème limite abordé dans l'introduction (voir (1.22)) dont lequel on trouve les variables (z_1, z_2) se démontre en supposant $\bar{z}_\alpha = 0, \bar{u} = 0$ en (2.8) (chapitre 2) et on considère z_1, z_2 comme des données. Puis on cherche les expressions de v, w et de z_3 en fonction de (z_1, z_2) en poursuivant les même démarches telles que l' on a utilisé avec le problème (2.16) du théorème 4.3 (chapitre 3).

- Sur chapitre 3.

Pour l'élasticité (1.1) étudié en 3.4 on peut également obtenir le modèle suivant

$$\begin{cases} (u_1, u_2, z_3) \in (H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)), \\ \int_{\Omega} \left(a_\delta^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + a_\delta^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_\delta \int_I (b_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_\delta}{\partial x_3^2} \\ \int_{\Omega} \left(a_3^{(\gamma)} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + a_3^{(3)} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} + a_3 \int_I (b_\gamma \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3}) \right) \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial x_3} \\ + \int_{\Omega} A^* e((u_\alpha, 0)) e((\bar{u}_\alpha, 0)) = \int_{\Omega} f_\delta \bar{u}_\delta, \\ \forall (\bar{u}_1, \bar{u}_2, z_3) \in (H^1(\Omega) \cap L^2(\omega; H_0^2(I)))^2 \times L^2(\omega; H_0^1(I)), \end{cases} \quad (1.12)$$

où $\forall i, j = 1, 2, 3$

$$\left\{ \begin{array}{l}
a_j^{(i)} = \int_D (A_{33\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(i)} + A_{33\alpha 3} g_\alpha^{(i)} + A_{3333} \xi_i) \xi_j, \quad \xi_\alpha = -\sqrt{\pi} y_\alpha, \xi_3 = 1, \\
a_i = \int_D (A_{33\alpha\beta} t_{\alpha\beta}(x, y) + A_{33\alpha 3} h_\alpha(x, y)) \xi_i, \quad \xi_\alpha = -\sqrt{\pi} y_\alpha, \xi_3 = 1, \\
k_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(x, y) = \sqrt{\pi} e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(\gamma)})(x, y) - b_\gamma e_{\alpha\beta}^y(\hat{w})(x, y), \\
k_{\alpha\beta}^{(3)}(x, y) = e_{\alpha\beta}^y(\hat{w}^{(3)})(x, y) - b_3 e_{\alpha\beta}^y(\hat{w})(x, y). \\
g_\alpha^{(\gamma)}(x, y) = \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\gamma)}}{\partial y_\alpha}(x, y) - b_\gamma \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y)), \\
g_\alpha^{(3)}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\alpha}(x, y) - b_3 \frac{1}{2} (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y)), \\
t_{\alpha\beta}(x, y) = a e_{\alpha\beta}^y(\hat{w})(x, y), \quad h_\alpha(x, y) = \frac{1}{2} a (y_\alpha^R + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\alpha}(x, y)). \\
\text{et :} \\
a(x) = \frac{1}{\hat{a}(x) \int_I \frac{1}{\hat{a}(x', x_3)} dx_3}, \quad b_i = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}}, \quad \text{où} \\
\hat{a}(x) = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} (\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial y_\gamma} + y_\gamma^R)) y_\alpha^R, \\
\hat{b}_\beta = \sqrt{\pi} \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(\beta)}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(\beta)}}{\partial y_\gamma} - \sqrt{\pi} y_\beta A_{\alpha 333}) y_\alpha^R, \\
\hat{b}_3 = \int_D (A_{\alpha 3 \gamma \delta} e_{\gamma \delta}(\hat{w}^{(3)}) + A_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{\partial \hat{v}_3^{(3)}}{\partial y_\gamma} + A_{\alpha 333}) y_\alpha^R.
\end{array} \right. \quad (1.13)$$

Avec $(\hat{v}_3^{(i)}, \hat{w}^{(i)})$ et (\hat{v}_3, \hat{w}) sont les solutions de (2.12)-(2.13)-(2.14) en 3.4.

La preuve se fait en choisissant $\bar{Z}_3 = \bar{u}^0 = 0$ dans (2.8) (section 3.4.) et on considèrent u_1, u_2, z_3 comme des données. Puis on cherche les expressions de v, w en fonction de (u_1, u_2, z_3) en poursuivant la même démarche que celle utilisée avec le problème (2.18) du théorème 2.4 (chapitre 2).

- Perspectives

Notre étude se limite aux cas de petites déformations modélisées par le système de l'élasticité linéaire. Il serait intéressant de reprendre tous ces problèmes dans un cadre non linéaire, c'est à dire dans le cas de minimization de fonctionelles non convexes.

RÉFÉRENCES

- [1] G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, *Siam J. Math. Anal.*, vol.23, No 6, 1992, pp. 1482-1518
- [2] M. BELLIEUD & G. BOUCHITTÉ, Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers, *Asympt. Anal.*, 32, 2 (2002), pp. 153-183
- [3] A. BENSOUSSIN, J.L. LIONS & G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978
- [4] F. BENTALHA & A. SILI, Diffusion through a composite structure with a high contrasting diffusivity, to appear
- [5] A. BRAIDES & M. BRIANE & J. CASADO-DIAZ, Homogenization of non-uniformly bounded periodic diffusion energies in dimension two. *Nonlinearity* 22(6), 1459-1480(2009)
- [6] M. BRIANE & J. CASADO-DIAZ, Uniforme convergence of sequences of solutions of two-dimensional linear elliptic equations with unbounded coefficients. *J. Diff. Equ.* 845(8), 2038-2054(2008)
- [7] D. CAILLERIE, Homogénéisation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité et réparties périodiquement, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 292, Série II*, (1981), pp.477-480
- [8] M. CAMAR-EDDINE & P. SEPPECHER, Closure of the set of diffusion functionals with respect to the Mosco-convergence. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 12(8), 1153-1176(2002)
- [9] J. CASADO-DIAZ & M. LUNA-LAYNEZ, A multiscale method to the homogenization of elastic thin reticulated structures, in *Homogenization 2001*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 18, Gakkotosho, Tokyo, 2003, pp. 155-168
- [10] J. CASADO-DIAZ & M. LUNA-LAYNEZ, Homogenization of the anisotropic heterogeneous linearized elasticity system in thin reticulated structures, *Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect.A*, 134 (2004) No 6, pp. 1041-1083
- [11] J. CASADO-DIAZ, M. LUNA-LAYNEZ & J. D. MARTIN, A new approach to the analysis of thin reticulated structures, in *Homogenization 2001*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 18, Gakkotosho, Tokyo, 2003, pp. 257-262
- [12] M. CHERDANTSEV & K. D. CHEREDNICHENKO, Two-scale Gamma-Convergence of integral functionals and its application to homogenization of nonlinear high-contrast periodic composites, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 204, (2012), pp. 445-478
- [13] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN & G. GRISO, The periodic unfolding method in homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 40 (2008), pp. 1585-1620
- [14] D. CIORANESCU & J. SAINT JEAN PAULIN, Homogenization in Open Sets with Holes, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 10, No. 1, 1980, pp. 125-140
- [15] G. GEYMONAT, F. KRASUCKI, J.-J. MARIGO, Stress distribution in anisotropic elastic composite beams, in : Ciarlet P.G., Sanchez-Palencia E. (Eds.), *Applications of multiple scalings in mechanics*, Masson, Paris, 1987, pp. 118-133
- [16] H. LEDRET, Convergence of displacements and stresses in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero, *Asymptotic Anal.* 10 (1995), no. 4, pp. 367-402
- [17] D. LUKKASSEN & G. NGUETSENG & H. NNANG & P. WALL, Reiterated homogenization of nonlinear monotone operators in a general deterministic setting. *J. Funct. Spaces Appl.* 7(2), 121-152(2009)
- [18] R. MONNEAU, F. MURAT & A. SILI, Error estimate for the 3d-1d dimension reduction in anisotropic heterogeneous linearized elasticity, to appear
- [19] F. MURAT & A. SILI, Comportement asymptotique des solutions du système de l'élasticité linéarisée anisotrope hétérogène dans des cylindres minces, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I*, (1999), pp.179-184
- [20] G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 20 (1989), pp. 608-629

- [21] G. P. Panasenko, Multicomponent homogenization of processes in strongly nonhomogeneous structures, *Math. USSR Sbornik*, vol. 69, No. 1, (1991) pp. 143-153
- [22] C. PIDERI & P. SEPPECHER, A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium, *Continuum Mech. Thermo.*, 9, (1997) pp.241-257
- [23] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA, Couplage flexion torsion traction dans les poutres anisotropes à section hétérogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 312, Série II, (1991), pp. 337-344
- [24] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA, Statics of curved rods on account of torsion and flexion, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 (1999), pp. 365-390
- [25] E. SANCHEZ-PALENCIA, Nonhomogeneous media and vibration theory, *Lecture notes in physics*, 127, Springer, Berlin, 1980
- [26] A. SILI, A diffusion equation through a highly heterogeneous medium, *Applic. Analysis*, 89, (2010), pp. 893-904
- [27] A. SILI, Homogenization of a nonlinear monotone problem in an anisotropic medium, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14(3), 329-353(2004)
- [28] A. SILI, Homogenization of the linearized system of elasticity in anisotropic heterogeneous thin cylinders, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25, (2002), pp. 263-288
- [29] L. TARTAR, The general theory of homogenization. A personalized introduction. *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, 7. Springer/UMI, Berlin/Bologna(2009)
- [30] V. V. ZHIKOV, S. M. KOZLOV & O. A. OLEINIK, Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer, Berlin, 1994