Vers un calcul des constructions pédagogique

Vincent Demange

dirigé par Loïc Colson et Sorin Stratulat

Laboratoire d'informatique théorique et appliquée (LITA)

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

7 décembre 2012

Déroulement du travail doctoral

1. Traduction preuves Spike en Coq :

   S. Stratulat et V. Demange. Automated certification of implicit induction proofs. CPP 2011, LNCS 7086, pp. 37-53. Springer-Verlag, 2011.

2. Étude de la pédagogie formelle dans le Calcul des Constructions.

Pédagogie formelle : concepts de base

Objectif général

Étendre l'étude des systèmes formels et fonctionnels pédagogiques

[Colson et Michel (2007, 2008, 2009)]

Définitions

- système formel : modèle mathématique du raisonnement mathématique
- système fonctionnel : modèle mathématique du calcul
- contrainte pédagogique : exemplification des hypothèses

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système formel : logique minimale sur l'implication

Morphologie $\alpha \mid A \Rightarrow B$ ▷ formation des mots/formules

Syntaxe ▷ formation des phrases/preuves

$$\frac{F \in \Delta}{\Delta \vdash F}\,(\mathsf{Ax})$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}\,(\Rightarrow_e)$$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système formel : logique minimale sur l'implication

Morphologie $\alpha \mid A \Rightarrow B$ ▷ formation des mots/formules

Syntaxe ▷ formation des phrases/preuves

$$\frac{F \in \Delta}{\Delta \vdash F}\,(\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\boxed{\Delta \vdash B}}\,(\Rightarrow_e)$$

jugement

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système formel : logique minimale sur l'implication

Morphologie $\alpha \mid A \Rightarrow B$ ▷ formation des mots/formules

Syntaxe ▷ formation des phrases/preuves

$$\frac{F \in \Delta}{\Delta \vdash F}\,(\mathsf{Ax})$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\underbrace{\boxed{\Delta}}_{\text{hypothèses}} \vdash \underbrace{\boxed{A \Rightarrow B}}_{\text{conclusion}}}\,(\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\underbrace{\boxed{\Delta \vdash B}}_{\text{jugement}}}\,(\Rightarrow_e)$$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système formel : logique minimale sur l'implication

Morphologie $\alpha \mid A \Rightarrow B$ ▷ formation des mots/formules

Syntaxe ▷ formation des phrases/preuves

règle d'inférence

$$\boxed{\dfrac{F \in \Delta}{\Delta \vdash F}\,(\mathsf{Ax})}$$

$$\dfrac{\Delta, A \vdash B}{\underbrace{\boxed{\Delta}}_{\text{hypothèses}} \vdash \underbrace{\boxed{A \Rightarrow B}}_{\text{conclusion}}}\,(\Rightarrow_i) \qquad \dfrac{\Delta \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\underbrace{\boxed{\Delta \vdash B}}_{\text{jugement}}}\,(\Rightarrow_e)$$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système formel : logique minimale sur l'implication

Morphologie $\alpha \mid A \Rightarrow B$ ▷ formation des mots/formules

Syntaxe ▷ formation des phrases/preuves

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C}\,(Ax) \quad \dfrac{}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash A}\,(Ax)}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash B \Rightarrow C}\,(\Rightarrow_e) \quad \dfrac{}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash B}\,(Ax)}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash C}\,(\Rightarrow_e)}{A \Rightarrow B \Rightarrow C, B \vdash A \Rightarrow C}\,(\Rightarrow_i)}{A \Rightarrow B \Rightarrow C \vdash B \Rightarrow A \Rightarrow C}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C}\,(\Rightarrow_i)$$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système fonctionnel : λ-calcul pur

Termes $x \mid \lambda x.u \mid u\ v$ ▷ programmes

Réduction $(\lambda x.u)\ v \rightsquigarrow u[x \leftarrow v\,]$ ▷ calcul

Exemples

$$\begin{aligned}(\underline{\lambda x}.\lambda y.(y\ x)\ y)\ \underline{a}\ (\lambda z.z) &\rightsquigarrow (\underline{\lambda y}.(y\ a)\ y)\ \underline{(\lambda z.z)}\\ &\rightsquigarrow ((\underline{\lambda z}.z)\ \underline{a})\ (\lambda z.z)\\ &\rightsquigarrow a\ (\lambda z.z)\end{aligned}$$

▷ forme normale

$$\begin{aligned}(\underline{\lambda x}.x\ x)\ \underline{(\lambda x.x\ x)} &\rightsquigarrow (\underline{\lambda x}.x\ x)\ \underline{(\lambda x.x\ x)}\\ &\rightsquigarrow \dots\end{aligned}$$

▷ non normalisable

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système fonctionnel : λ-calcul simplement typé

Termes	$x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$	▷ programmes
Morphologie	$\alpha \mid A \to B$	▷ mots/types
Syntaxe		▷ phrases/typage

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\mathrm{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\mathrm{app})$$

Résultat

stabilité par réduction : $\Gamma \vdash t : A$ et $t \rightsquigarrow t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : A$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système fonctionnel : λ-calcul simplement typé

Termes	$x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$	▷ programmes
Morphologie	$\alpha \mid A \to B$	▷ mots/types
Syntaxe		▷ phrases/typage

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\mathrm{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\boxed{\Gamma \vdash u\ v : B}}\ (\mathrm{app})$$

jugement

Résultat

stabilité par réduction : $\Gamma \vdash t : A$ et $t \leadsto t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : A$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système fonctionnel : λ-calcul simplement typé

Termes	$x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$	▷ programmes
Morphologie	$\alpha \mid A \to B$	▷ mots/types
Syntaxe		▷ phrases/typage

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\underbrace{\boxed{\Gamma}}_{\text{environnement}} \vdash \underbrace{\boxed{\lambda x^A.u}}_{\text{terme}} : \underbrace{\boxed{A \to B}}_{\text{type}}}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\underbrace{\boxed{\Gamma \vdash u\ v : B}}_{\text{jugement}}}\ (\text{app})$$

Résultat

stabilité par réduction : $\Gamma \vdash t : A$ et $t \rightsquigarrow t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : A$

Pédagogie formelle : concepts de base

Exemple de système fonctionnel : λ-calcul simplement typé

Termes	$x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$	▷ programmes
Morphologie	$\alpha \mid A \to B$	▷ mots/types
Syntaxe		▷ phrases/typage

règle de typage

$$\boxed{\dfrac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}}\,(\text{var})$$

$$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\boxed{\Gamma} \vdash \boxed{\lambda x^A.u} : \boxed{A \to B}}\,(\text{abs}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\boxed{\Gamma \vdash u\ v : B}}\,(\text{app})$$

environnement terme type jugement

Résultat

stabilité par réduction : $\Gamma \vdash t : A$ et $t \rightsquigarrow t' \Rightarrow \Gamma \vdash t' : A$

Pédagogie formelle : concepts de base

Correspondance de Curry-Howard [Howard (1980)]

logique	informatique
formule	type de donnée
preuve d'une formule	programme typé
simplification	calcul
correction preuve	vérification typage

- fondement du Calcul des Constructions
- base de nombreux assistants à la preuve (ex. Coq)

Pédagogie formelle : concepts de base

Contrainte pédagogique

Critère de Poincaré

> «*Une définition par postulat est admissible **seulement s**'il en existe un exemple.*» *Henri Poincaré (1913)*

Postulats valides

Soit x un entier vérifiant $x^2 - 1 = 0$. ▷ $x := 1$ convient

Postulats invalides

Soit y un entier vérifiant $y^2 + 1 = 0$. ▷ pas d'exemple

Qualificatif «pédagogique» car pratique courante en enseignement

Plan de l'investigation

1. Résumé des travaux précédents
2. Premières approches
3. Une définition formelle et des exemples
4. Vers un calcul des constructions pédagogique

Résumé des travaux précédents

Contrainte pédagogique formelle

Critère de Poincaré (informel)

> *«Une définition par postulat est admissible* ***seulement s'il*** *en existe un exemple.»* *Henri Poincaré (1913)*

Critère de Poincaré (formel)

Prenons $\top$ un type et o un terme tels que $\vdash o : \top$

- $\Gamma := \{f : (\alpha \to \alpha) \to \alpha, g : \top \to \beta\}$ $\triangleright$ définit α et β
- $\sigma := [\alpha \mapsto \top, \beta \mapsto \top]$ exemplification car :

$$\begin{array}{ll} \vdash \lambda h^{\top \to \top}.o & : (\top \to \top) \to \top \\ \vdash \lambda x^{\top}.x & : \top \to \top \end{array}$$

$\vdash \sigma \cdot \Gamma$ abréviation de σ exemplifie Γ

Résumé des travaux précédents

λ-calcul simplement typé pédagogique [Colson et Michel (2007)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\text{app})$$

Résumé des travaux précédents

λ-calcul simplement typé pédagogique [Colson et Michel (2007)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v$

Aucune règle sans prémisse

$$\frac{x : F \in \Gamma \qquad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\text{app})$$

Résumé des travaux précédents

λ-calcul simplement typé pédagogique [Colson et Michel (2007)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \top$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid o$

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash o : \top}\ (\text{ax}) \qquad \frac{x : F \in \Gamma \quad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\text{app})$$

Résumé des travaux précédents

λ-calcul simplement typé pédagogique [Colson et Michel (2007)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \top$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid o$

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash o : \top}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{x : F \in \Gamma \quad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\mathrm{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\mathrm{app})$$

Résultats

- toute formule exemplifiée par $\top$
- système initial et pédagogique équivalents

Résumé des travaux précédents

Système F [Girard (1972), Reynolds (1974)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \forall\alpha.A$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid \Lambda\alpha.u$

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\text{app})$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : B \quad \alpha \notin \mathcal{V}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.B}\ (\text{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.B}{\Gamma \vdash u\ V : B[\alpha \leftarrow V]}\ (\text{App})$$

Résumé des travaux précédents

Système F faiblement pédagogique [Colson et Michel (2008)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \forall\alpha.A \mid \top$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid \Lambda\alpha.u \mid o$

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash o : \top}\text{(ax)} \qquad \frac{x : F \in \Gamma \quad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\text{(var)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\text{(abs)} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\text{(app)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : B \quad \alpha \notin \mathcal{V}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.B}\text{(Abs)} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.B}{\Gamma \vdash u\ V : B[\alpha \leftarrow V]}\text{(App)}$$

Résumé des travaux précédents

Système F faiblement pédagogique [Colson et Michel (2008)]

Morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \forall\alpha.A \mid \top$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid \Lambda\alpha.u \mid o$

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash o : \top}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{x : F \in \Gamma \quad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\mathrm{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\mathrm{app})$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : B \quad \alpha \notin \mathcal{V}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.B}\ (\mathrm{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.B}{\Gamma \vdash u\ V : B[\alpha \leftarrow V]}\ (\mathrm{App})$$

Pas stable par réduction

$\vdash (\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha.x)\ \bot : \bot \to \bot$ et $\nvdash \lambda x^\bot.x : \bot \to \bot$ $\qquad \triangleright\ \bot := \forall\alpha.\alpha$

Résumé des travaux précédents

Système F pédagogique [Colson et Michel (2009)]

Pré-morphologie $\alpha \mid A \to B \mid \forall\alpha.A \mid \top$

Syntaxe $x \mid \lambda x^A.u \mid u\ v \mid \Lambda\alpha.u \mid o$

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash o : \top}\ (\text{ax}) \qquad \frac{x : F \in \Gamma \quad \vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash x : F}\ (\text{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.u : A \to B}\ (\text{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \to B \quad \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash u\ v : B}\ (\text{app})$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : B \quad \alpha \notin \mathcal{V}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.u : \forall\alpha.B}\ (\text{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall\alpha.B \quad \vdash \sigma \cdot V}{\Gamma \vdash u\ V : B[\alpha \leftarrow V]}\ (\text{App})$$

Résumé des travaux précédents

Système F pédagogique [Colson et Michel (2009)]

Résultats

- tout sous-type est exemplifiable :
  - critère de Poincaré toujours vérifié

    $\triangleright \Gamma \vdash u : A \Rightarrow \; \vdash \sigma \cdot \Gamma$
  - utilité des fonctions

    $\triangleright \vdash f : A \to B$ avec A clos $\Rightarrow A$ est habité
- plongement calcul usuel dans version pédagogique

  $\triangleright$ traduction termes et types

Résumé des travaux précédents

Système F pédagogique [Colson et Michel (2009)]

Résultats

logique	informatique
formule	type de donnée
preuve d'une formule	programme typé
simplification	calcul
correction preuve	vérification typage
exemplifiabilité	utilité

Premières approches

Le Calcul des Constructions [Coquand et Huet (1985)]

Objectif : Calcul des Constructions pédagogique

Le Calcul des Constructions contient :

- contient :
  - λ-calcul simplement typé
  - systèmes F et F^ω [Girard (1972)]
- autorise une uniformisation des résultats
- interdépendance morphologie-syntaxe

▷ réduction du nombre de contraintes

Premières approches

Le Calcul des Constructions [Coquand et Huet (1985)]

$$\frac{}{\Diamond\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A : \kappa \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ (\text{c-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^{\mathsf{c}} x : A}\ (\text{c-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} u : B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\text{c-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} v : A}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{c-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \forall x^A.B : \kappa}\ (\text{c-prod}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A \quad A \simeq A' \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A' : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A'}\ (\text{c-conv})$$

κ dénote Prop ou Type

Premières approches

Le Calcul des Constructions [Coquand et Huet (1985)]

$$\frac{}{\lozenge\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A : \kappa \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \mathsf{Prop} : \mathsf{Type}}\ (\text{c-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^{\mathsf{c}} x : A}\ (\text{c-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} u : B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\text{c-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} v : A}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{c-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \forall x^A.B : \kappa}\ (\text{c-prod}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A \quad A \simeq A' \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A' : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A'}\ (\text{c-conv})$$

κ dénote Prop ou Type

Premières approches

Transposition naïve

Critère de Poincaré formel

Environnement $\Gamma \equiv x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ exemplifiable s'il existe $t_1, \ldots, t_n$

$$\begin{gathered} \vdash^{c} t_1 : A_1 \\ \vdash^{c} t_2 : A_2[x_1 \leftarrow t_1\,] \\ \vdots \\ \vdash^{c} t_n : A_n[x_1, \ldots, x_{n-1} \leftarrow t_1, \ldots, t_{n-1}\,] \end{gathered}$$

Abréviation : $\vdash^{c} \sigma \cdot \Gamma$ avec $\sigma := [x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n]$

Idée (naturelle)

Substituer exemplifiabilité d'un environnement à sa bonne formation

$\triangleright$ remplacer $\Gamma\,\mathrm{wf}^{c}$ par $\vdash^{c} \sigma \cdot \Gamma$ dans les règles

Premières approches

Transposition naïve

$$\frac{\overset{\mathsf{n}}{\vDash} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \overset{\mathsf{n}}{\vDash} o : \top : \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ \text{(c-ax)} \qquad \frac{\overset{\mathsf{n}}{\vDash} \sigma \cdot (\Gamma, x : A, \Gamma')}{\Gamma, x : A, \Gamma' \overset{\mathsf{n}}{\vDash} x : A}\ \text{(c-var)}$$

Mais

- «exemplifiable» n'implique pas «bien formé» :
  - $x_1 : \mathrm{Type}$

    $\triangleright\, \sigma := [x_1 \mapsto \mathrm{Prop}]$
  - $x_1 : \mathrm{Prop}, x_2 : (\lambda H^{\top \to x_1}.\top)\ (\lambda y^{\top}.y)$

    $\triangleright\, \sigma := [x_1 \mapsto \top; x_2 \mapsto o]$
- instabilité par réduction

  $\triangleright$ comme système F faiblement pédagogique

Changement de stratégie

- conserver les jugements $\Gamma\,\mathrm{wf}^{\mathsf{c}}$
- éviter les types vides au plus tôt

Idée (radicale)

Contraindre la règle de formation des types

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{r}} \quad B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{r}} \forall x^A . B : \kappa}\ (\text{c-prod})$$

Changement de stratégie

- conserver les jugements $\Gamma\,\mathrm{wf}^{\mathsf{c}}$
- éviter les types vides au plus tôt

Idée (radicale)

Contraindre la règle de formation des types

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{r}} u : B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{r}} \forall x^{A}.B : \kappa}\ (\text{c-prod})$$

Premières approches

Un Calcul des Constructions Poincaréen – CCr

Théorèmes

- respecte critère de Poincaré
- stable par réduction : prouvé en Coq, adaptation [Barras (1996)]
- système T [Gödel (1958)] interprétable dans CC_{r}

Mais

- transitivité de l'implication non démontrable

  $\triangleright (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
- symétrie de l'égalité (de Leibniz) non démontrable

  $\triangleright x = y \to y = z \to x = z$

Premières approches

Un Calcul des Constructions Poincaréen – CCr

Constat CCr semble trop contraint

Objectif augmenter le pouvoir expressif

Idée les environnements exemplifiables devraient être utilisables

$\triangleright$ similaire système F pédagogique

Réciproque du critère de Poincaré

$CC_\star$, sous-système CC, vérifie *réciproque du critère de Poincaré* si :

$\vdash^\star \sigma \cdot \Gamma \qquad \Rightarrow \Gamma\,\mathrm{wf}^\star$

Premières approches

Un Calcul des Constructions Poincaréen – CCr

Constat CCr semble trop contraint

Objectif augmenter le pouvoir expressif

Idée les environnements exemplifiables devraient être utilisables

▷ similaire système F pédagogique

Attention

Tout ce qui est exemplifiable n'est pas nécessairement bien formé

Réciproque du critère de Poincaré

$CC_\star$, sous-système CC, vérifie *réciproque du critère de Poincaré* si :
$\models^{\star} \sigma \cdot \Gamma$ et $\Gamma\ \mathsf{wf}^{\mathsf{c}} \Rightarrow \Gamma\ \mathsf{wf}^{\star}$

$CC_\star$ sous-système pédagogique de CC

- $CC_\star$ sous-système de CC $\quad \triangleright\, \Gamma \vDash^{\star} u : A \Rightarrow \Gamma \vDash^{c} u : A$
- $CC_\star$ est stable par réduction $\quad \triangleright\, \Gamma \vDash^{\star} u : A$ et $u \rightsquigarrow u' \Rightarrow \Gamma \vDash^{\star} u' : A$
- $CC_\star$ vérifie critère de Poincaré et sa réciproque

  $\triangleright\, \Gamma\, \mathrm{wf}^{\star} \Rightarrow\, \vDash^{\star} \sigma \cdot \Gamma$

  $\triangleright\, \vDash^{\star} \sigma \cdot \Gamma$ et $\Gamma\, \mathrm{wf}^{c} \Rightarrow \Gamma\, \mathrm{wf}^{\star}$

Une définition formelle et des exemples

λ-calcul du second ordre – λ^2

$$\frac{}{\Diamond\ \mathrm{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A : \kappa \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathrm{wf}^{\mathsf{c}}}\ (\text{c-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathrm{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ (\text{c-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\ \mathrm{wf}^{\mathsf{c}}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^{\mathsf{c}} x : A}\ (\text{c-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} u : B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\text{c-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} v : A}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{c-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{\mathsf{c}} B : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} \forall x^A.B : \kappa}\ (\text{c-prod}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A \quad A \simeq A' \quad \Gamma \vdash^{\mathsf{c}} A' : \kappa}{\Gamma \vdash^{\mathsf{c}} u : A'}\ (\text{c-conv})$$

κ dénote Prop ou Type

Une définition formelle et des exemples

λ-calcul du second ordre – λ^2

$$\frac{}{\Diamond \ \mathsf{wf}^{c}}\ (\text{c-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \overset{c}{\vDash} A : \kappa \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathsf{wf}^{c}}\ (\text{c-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{wf}^{c}}{\Gamma \overset{c}{\vDash} \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ (\text{c-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\ \mathsf{wf}^{c}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \overset{c}{\vDash} x : A}\ (\text{c-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \overset{c}{\vDash} u : B : \ \mathrm{Prop}}{\Gamma \overset{c}{\vDash} \lambda x^{A}.u : \forall x^{A}.B}\ (\text{c-abs}) \qquad \frac{\Gamma \overset{c}{\vDash} u : \forall x^{A}.B \quad \Gamma \overset{c}{\vDash} v : A}{\Gamma \overset{c}{\vDash} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{c-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \overset{c}{\vDash} B : \ \mathrm{Prop}}{\Gamma \overset{c}{\vDash} \forall x^{A}.B : \ \mathrm{Prop}}\ (\text{c-prod})$$

Une définition formelle et des exemples

λ-calcul du second ordre – λ^2

$$\frac{}{\Diamond \,\mathrm{wf}^2}\ (\mathrm{env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2 A : \kappa \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\, \mathrm{wf}^2}\ (\mathrm{env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\, \mathrm{wf}^2}{\Gamma \vdash^2 \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\, \mathrm{wf}^2}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^2 x : A}\ (\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^2 u : B : \mathrm{Prop}}{\Gamma \vdash^2 \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\mathrm{abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2 u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vdash^2 v : A}{\Gamma \vdash^2 u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\mathrm{app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^2 B : \mathrm{Prop}}{\Gamma \vdash^2 \forall x^A.B : \mathrm{Prop}}\ (\mathrm{prod})$$

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications totales explicites – λ^2_e

But

Obtenir une version pédagogique de λ^2

Idée

Conserver un exemple par jugement : $\Gamma \vdash_\sigma u : A$ et $\Gamma\, \mathrm{wf}_\sigma$

- Γ : hypothèses
- σ : exemples associés à Γ

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications totales explicites – λ^2_e

$$\frac{}{\lozenge\ \mathrm{wf}^{2e}_{\lozenge}}\ (\text{e-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} A : \kappa \quad \vdash^{2e}_{\lozenge} a : \sigma(A) \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\ \mathrm{wf}^{2e}_{\sigma::(x \mapsto a)}}\ (\text{e-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\ \mathrm{wf}^{2e}_{\sigma}}{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} o : \top : \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\ (\text{e-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\ \mathrm{wf}^{2e}_{\sigma}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^{2e}_{\sigma} x : A}\ (\text{e-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{2e}_{\sigma::(x \mapsto a)} u : B : \mathrm{Prop}}{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} \lambda x^{A}.u : \forall x^{A}.B}\ (\text{e-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} u : \forall x^{A}.B \quad \Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} v : A}{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{e-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{2e}_{\sigma::(x \mapsto a)} B : \mathrm{Prop} \quad \vdash^{2e}_{\lozenge} t : \sigma(\forall x^{A}.B)}{\Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} \forall x^{A}.B : \mathrm{Prop}}\ (\text{e-prod})$$

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications totales explicites – λ_e^2

Théorèmes

- λ_e^2 *pseudo* sous-système pédagogique de CC
- exemplifications sont toujours des sous-dérivations
- exemplifications échangeables :

$$\triangleright \Gamma \vdash^{2e}_{\sigma} w : C \text{ et } \Gamma \,\mathrm{wf}^{2e}_{\rho} \Rightarrow \Gamma \vdash^{2e}_{\rho} w : C$$

Mais

λ_e^2 n'est pas un sous-système de CC à cause :

- exemplifications explicites
- constantes o et $\top$

Idée

Rendre les exemplifications totales implicites

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications totales implicites – λ^2_t

$$\frac{}{\Diamond \operatorname{wf}^{2_t}}\ (\text{t-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vDash^{2_t} A : \kappa \quad x \notin \operatorname{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \operatorname{wf}^{2_t}}\ (\text{t-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma \operatorname{wf}^{2_t}}{\Gamma \vDash^{2_t} \color{red}{o : \top :} \color{black}{\ \text{Prop} : \text{Type}}}\ (\text{t-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma' \operatorname{wf}^{2_t}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vDash^{2_t} x : A}\ (\text{t-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vDash^{2_t} u : B : \text{Prop}}{\Gamma \vDash^{2_t} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\text{t-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vDash^{2_t} u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vDash^{2_t} v : A}{\Gamma \vDash^{2_t} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{t-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vDash^{2_t} B : \text{Prop} \quad \color{red}{\sigma \operatorname{mot}_\Gamma \forall x^A.B}}{\Gamma \vDash^{2_t} \forall x^A.B : \text{Prop}}\ (\text{t-prod})$$

avec $\sigma \operatorname{mot}_\Gamma C$ abréviation :

(a) σ exemplifie/motive Γ i.e. $\vDash^{2_t} \sigma \cdot \Gamma$

(b) et il existe un terme t tel que $\vDash^{2_t} t : \sigma(C)$.

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications totales implicites – λ_t^2

Théorème

λ_t^2 équivalent à λ_e^2

$\Rightarrow \lambda_t^2$ *pseudo* sous-système pédagogique de CC

Mais

λ_t^2 n'est pas un sous-système de CC à cause :

- constantes o et $\top$

Idée

Rendre les exemplifications partielles

$\Rightarrow$ comportement de $\mathrm{CC_r}$

$\triangleright\, o := \lambda A^{\mathsf{Prop}}.\lambda x^A.x$

$\triangleright\, \top := \forall A^{\mathsf{Prop}}.A \rightarrow A$

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications partielles implicites – λ_p^2

$$\frac{}{\Diamond \, \mathsf{wf}^{2\mathrm{p}}}\ (\textbf{p-env}_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} A : \kappa \quad x \notin \mathsf{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A \, \mathsf{wf}^{2\mathrm{p}}}\ (\textbf{p-env}_2)$$

$$\frac{\Gamma \, \mathsf{wf}^{2\mathrm{p}}}{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} \mathsf{Prop} : \mathsf{Type}}\ (\textbf{p-ax}) \qquad \frac{\Gamma, x : A, \Gamma' \, \mathsf{wf}^{2\mathrm{p}}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \vdash^{2\mathrm{p}} x : A}\ (\textbf{p-var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{2\mathrm{p}} u : B : \mathsf{Prop}}{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\ (\textbf{p-abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} u : \forall x^A.B \quad \Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} v : A}{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} u \; v : B[x \leftarrow v]}\ (\textbf{p-app})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^{2\mathrm{p}} B : \mathsf{Prop} \quad \sigma \; \widetilde{\mathsf{mot}}_\Gamma \; \forall x^A.B}{\Gamma \vdash^{2\mathrm{p}} \forall x^A.B : \mathsf{Prop}}\ (\textbf{p-prod})$$

$\sigma \; \widetilde{\mathsf{mot}}_\Gamma \; C$ abréviation :

(a) σ motive partiellement Γ

(b) et il existe un terme t tel que $\sigma(\Gamma) \vdash^{2\mathrm{p}} t : \sigma(C)$.

Une définition formelle et des exemples

Avec exemplifications partielles implicites – λ_p^2

Théorèmes

- λ_p^2 équivalent à λ_t^2 : motivations complétables [Michel (2008)]
- λ_p^2 **est un sous-système pédagogique de CC**

  $\triangleright$ définition exemplifiée

Théorèmes généraux

- λ_e^2, λ_t^2 et λ_p^2 sont équivalents
- plongement mutuel avec système F pédagogique

$\Rightarrow$ λ^2 peut être plongé dans n'importe quel système

Mais

Indécidabilité de la vérification du typage

$\triangleright$ annoter type avec exemple

Vers un calcul des constructions pédagogique

L'ordre supérieur

But

Obtenir une version pédagogique de λ^ω

Nouveaux objets

- prédicats ou fonctions propositionnelles

  $\triangleright\, \lambda A^{\mathsf{Prop}}.\lambda B^{\mathsf{Prop}\rightarrow\mathsf{Prop}}.B\ A$
- dans les environnements

  $\triangleright\, f : \mathsf{Prop} \rightarrow (\mathsf{Prop} \rightarrow \mathsf{Prop}) \rightarrow \mathsf{Prop}$

$\Rightarrow$ notion d'exemplification d'un prédicat

Idée

Prédicat exemplifiable $\Leftrightarrow$ fonction propositionnelle utile

Prédicat exemplifiable (formellement)

$P : \mathcal{O}_1 \to \ldots \to \mathcal{O}_n \to \mathrm{Prop}$ exemplifiable si

- applicable complètement

  $\triangleright$ il existe des $U_i : \mathcal{O}_i$
- se réduit en un type habitable

  $\triangleright$ $P\ U_1\ \ldots\ U_n \overset{*}{\rightsquigarrow} R$ et $\vdash \sigma \cdot R$

Abréviation : $\sigma\ \mathrm{mot}^{\mathcal{O}_1 \to \ldots \to \mathcal{O}_n \to \mathrm{Prop}}(P)$

Prédicat exemplifiable

$P := \lambda A^{\mathrm{Prop}}.A \to A$ $\triangleright$ $P\ \top$

Prédicat non exemplifiable

$S := \lambda A^{\mathrm{Prop}}.\forall B^{\mathrm{Prop}}.A \leftrightarrow B$ $\triangleright$ non applicable

Vers un calcul des constructions pédagogique

λ-calcul d'ordre supérieur – λ_e^ω

Interaction des prédicats exemplifiables

- $Id := \lambda A^{\mathsf{Prop}}.A$ et $Q := \lambda R^{\mathsf{Prop}\to\mathsf{Prop}}.\forall F^{\mathsf{Prop}}.R\ F$

  $\triangleright$ or $Q\ Id \overset{*}{\rightsquigarrow} \bot$

Contrainte nécessaire

$$\frac{\Gamma \vdash_\sigma u : A \to B : \mathsf{Type} \quad \Gamma \vdash_\sigma v : A \quad \color{red}{\sigma\ \mathsf{mot}^B(u\ v)}}{\Gamma \vdash_\sigma u\ v : B}\ (\omega e\text{-}\mathsf{app}_\Box)$$

Vers un calcul des constructions pédagogique

λ-calcul d'ordre supérieur – λ_e^ω

Interaction des prédicats exemplifiables

- $Id := \lambda A^{\mathrm{Prop}}.A$ et $Q := \lambda R^{\mathrm{Prop}\to\mathrm{Prop}}.\forall F^{\mathrm{Prop}}.R\ F$

  $\triangleright$ or $Q\ Id \overset{*}{\rightsquigarrow} \bot$
- $S := \lambda A^{\mathrm{Prop}\to\mathrm{Prop}}.\lambda H^{\forall B^{\mathrm{Prop}}.A\ B}.H$

  $\triangleright$ or $S\ Id \overset{*}{\rightsquigarrow} \lambda H^{\bot}.H$

Contrainte nécessaire

$$\frac{\Gamma \vdash_\sigma u : \forall x^A.B : \mathrm{Prop} \qquad \Gamma \vdash_\sigma v : A \qquad \color{red}{\sigma\ \mathrm{mot}^{\mathrm{Prop}}(B[x \leftarrow v])}}{\Gamma \vdash_\sigma u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\omega e\text{-app}_\star)$$

Vers un calcul des constructions pédagogique

λ-calcul d'ordre supérieur – λ_e^ω

Théorèmes

- λ_e^ω vérifie critère de Poincaré
- λ_e^ω vérifie réciproque critère de Poincaré
- stabilité par réduction repose sur une conjecture

  $\triangleright$ lemme de substitution invalide

Vers un calcul des constructions pédagogique

Résumé des contraintes nécessaires

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \forall x^A . B : s_2} \text{(prod)}$$

(s_1, s_2)	λ^2	λ^ω
(Prop, Prop)	✓	✓
(Type, Prop)	✗	✗
(Prop, Type)		
(Type, Type)		✓

- ✓ instance de la règle ne produit pas de type vide
- ✗ instance de la règle peut produire un type vide

Vers un calcul des constructions pédagogique

Résumé des contraintes nécessaires

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \forall x^A . B : s_2} \text{ (prod)}$$

(s_1, s_2)	λ^2	λ^ω	λC
(Prop, Prop)	✓	✓	✗
(Type, Prop)	✗	✗	✗
(Prop, Type)			✓
(Type, Type)		✓	✓

- ✓ instance de la règle ne produit pas de type vide
- ✗ instance de la règle peut produire un type vide

Vers un calcul des constructions pédagogique

Résumé des contraintes nécessaires

$$\frac{\Gamma \vdash v : A : s_1 \quad \Gamma \vdash u : \forall x^A . B : s_2}{\Gamma \vdash u\ v : B[x \leftarrow v]}\ \text{(app)}$$

(s_1, s_2)	λ^2	λ^ω
(Prop, Prop)	✓	✓
(Type, Prop)	✓	✗
(Prop, Type)		
(Type, Type)		✗

- ✓ instance de la règle ne produit pas de type vide
- ✗ instance de la règle peut produire un type vide

$$\frac{\Gamma \vdash v : A : s_1 \quad \Gamma \vdash u : \forall x^A . B : s_2}{\Gamma \vdash u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\text{app})$$

(s_1, s_2)	λ^2	λ^ω	λC
(Prop, Prop)	✓	✓	✗
(Type, Prop)	✓	✗	✗
(Prop, Type)			✗
(Type, Type)		✗	✗

- ✓ instance de la règle ne produit pas de type vide
- ✗ instance de la règle peut produire un type vide

Vers un calcul des constructions pédagogique

$$\frac{}{\Diamond\,\mathrm{wf}^{c_e}_{\sigma}}\,(\mathrm{env}_1)$$

$$\frac{\Gamma \models^{c_e}_{\sigma} A : \kappa \quad \models^{c_e}_{\Diamond} a : A' \quad \sigma(A) \overset{*}{\rightsquigarrow} A' \quad x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)}{\Gamma, x : A\,\mathrm{wf}^{c_e}_{\sigma::(x \mapsto a)}}\,(\mathrm{env}_2)$$

$$\frac{\Gamma\,\mathrm{wf}^{c_e}_{\sigma}}{\Gamma \models^{c_e}_{\sigma} o : \top : \mathrm{Prop} : \mathrm{Type}}\,(\mathrm{ax})$$

$$\frac{\Gamma, x : A, \Gamma'\,\mathrm{wf}^{c_e}_{\sigma}}{\Gamma, x : A, \Gamma' \models^{c_e}_{\sigma} x : A}\,(\mathrm{var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \models^{c_e}_{\sigma::(x \mapsto a)} u : B : \kappa}{\Gamma \models^{c_e}_{\sigma} \lambda x^A.u : \forall x^A.B}\,(\mathrm{abs})$$

Vers un calcul des constructions pédagogique

$$\frac{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u : \forall x^A.B : \mathrm{Prop} \quad \Gamma \models_{\sigma}^{c_e} v : A \quad \sigma\ \mathrm{mot}^{\mathrm{Prop}}(B[x \leftarrow v])}{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\mathrm{app}_\star)$$

$$\frac{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u : \forall x^A.B : \mathrm{Type} \quad \Gamma \models_{\sigma}^{c_e} v : A \quad \sigma\ \mathrm{mot}^{B[x \leftarrow v]}(u\ v)}{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u\ v : B[x \leftarrow v]}\ (\mathrm{app}_\Box)$$

$$\frac{\Gamma, x : A \models_{\sigma::(x \mapsto a)}^{c_e} B : \mathrm{Prop} \quad \sigma\ \mathrm{mot}^{\mathrm{Prop}}(\forall x^A.B)}{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} \forall x^A.B : \mathrm{Prop}}\ (\mathrm{prod}_\star)$$

$$\frac{\Gamma, x : A \models_{\sigma::(x \mapsto a)}^{c_e} B : \mathrm{Type}}{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} \forall x^A.B : \mathrm{Type}}\ (\mathrm{prod}_\Box)$$

$$\frac{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u : A \quad A \simeq A' \quad \Gamma \models_{\sigma}^{c_e} A' : \kappa}{\Gamma \models_{\sigma}^{c_e} u : A'}\ (\mathrm{conv})$$

Conclusion et perspectives

Contributions

- définition formelle de sous-système pédagogique
- exemplification de cette définition
- introduction d'exemplifications explicites
- conjectures motivées : ordre supérieur pédagogique et Calcul des Constructions pédagogique

Perspectives

- démontrer les conjectures
- étudier l'implémentation machine
- étendre à des systèmes plus forts