



HAL
open science

Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et de thermoformage

Erwan Verron

► **To cite this version:**

Erwan Verron. Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et de thermoformage. Matériaux. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 1997. Français. NNT: . tel-00833721

HAL Id: tel-00833721

<https://theses.hal.science/tel-00833721>

Submitted on 13 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONTRIBUTION EXPÉRIMENTALE ET NUMÉRIQUE AUX
PROCÉDÉS DE MOULAGE PAR SOUFFLAGE ET DE
THERMOFORMAGE**

Thèse de DOCTORAT

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
DE NANTES

présentée et soutenue publiquement par :

Erwan VERRON

le 2 décembre 1997
à l'École Centrale de Nantes

devant le jury ci-dessous :

- DÉBORDES O.	Professeur, IMT Marseille	Président
- BRUNET M.	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
- POITOU A.	Professeur, ENS Cachan	Rapporteur
- BELLET M.	Maître de Recherche, CEMEF Sophia-Antipolis	Examineur
- DERDOURI A.	Ingénieur de Recherche, IMI CNRC Boucherville (Québec)	Examineur
- LEFEBVRE D.	Ingénieur, ESI	Examineur
- PESEUX B.	Professeur, École Centrale de Nantes	Examineur
- WIELGOSZ C.	Professeur, Faculté des Sciences et Techniques Nantes	Examineur

Nom du Directeur de Thèse : PESEUX B., Professeur
Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Division Mécanique des Structures

Table des Matières

Notations	13
Introduction	17
Chapitre I Généralités sur la mise en forme des matériaux plastiques par soufflage	19
I.1 Principaux procédés de mise en forme	19
I.1.1 Moulage par extrusion-soufflage	19
I.1.2 Moulage par injection-étirement-soufflage	20
I.1.3 Thermoformage	21
I.2 Matériaux utilisés dans ces procédés de mise en forme	21
I.3 État de l'art pour la simulation des procédés de moulage par soufflage et de thermoformage	23
I.3.1 Étude des membranes en grandes déformations	23
I.3.2 Simulation des procédés de mise en forme	24
I.3.2.1 Premiers travaux : études semi-analytiques	24
I.3.2.2 Développements plus récents : méthode des éléments finis	25
Chapitre II Rappels généraux	27
II.1 Rappels de mécanique des milieux continus	27
II.1.1 Mouvement	27
II.1.2 Tenseur gradient de la transformation	28
II.1.2.1 Définition	28
II.1.2.2 Transformation de grandeurs élémentaires	29
II.1.3 Tenseurs des déformations	29
II.1.3.1 Tenseurs des dilatations	29
II.1.3.2 Tenseurs des déformations classiques	30
II.1.3.3 Hypothèse des petites perturbations	30
II.1.3.4 Décomposition polaire. Directions principales	31
II.1.3.5 Notion de déformation généralisée	32
II.1.3.6 Retour à la description relative	33
II.1.4 Tenseurs des contraintes	33
II.1.4.1 Définition du tenseur eulérien	33
II.1.4.2 Les autres tenseurs des contraintes	34
II.1.4.3 Relations entre les différents tenseurs	34
II.1.5 Équations du mouvement	35

II.2	Modèles de comportement pour les matériaux de type caoutchouc	36
II.2.1	Introduction	36
II.2.1.1	Incompressibilité	36
II.2.1.2	Principe d'indifférence matérielle	37
II.2.2	Lois de comportement hyperélastiques	38
II.2.2.1	Définition	38
II.2.2.2	Forme de la fonction énergie de déformation	39
II.2.2.3	Choix de la fonction énergie de déformation	46
II.2.3	Lois de comportement viscoélastiques non-linéaires	50
II.2.3.1	Introduction	50
II.2.3.2	Viscoélasticité linéaire	51
II.2.3.3	Modèles de comportement en grandes déformations	53
II.2.3.4	Modèles de comportement retenus	57
II.3	Conclusion	60
Chapitre III Expérience de soufflage d'une membrane initialement plane		61
III.1	Historique des essais d'extension biaxiale	61
III.1.1	Les différents types d'essai	61
III.1.2	Soufflage d'une membrane initialement plane	63
III.2	Réalisation de l'essai	64
III.2.1	Dispositif expérimental	64
III.2.1.1	Description générale	64
III.2.1.2	Détails du dispositif	65
III.2.2	Matériau étudié. Conditions expérimentales	67
III.2.2.1	Matériau étudié	67
III.2.2.2	Conditions expérimentales	68
III.2.3	Mesures et incertitudes	68
III.2.4	Mise en évidence du caractère viscoélastique	74
III.3	Identification des coefficients des modèles de comportement	75
III.3.1	La méthode classique	75
III.3.2	Une méthode d'identification originale	75
III.3.2.1	Soufflage quasi-statique d'une membrane plane	76
III.3.2.2	Programme d'identification	81
III.3.2.3	Résultats de l'identification	84
III.3.3	Discussion des résultats	86
III.4	Conclusion	88
Chapitre IV Simulation dynamique numérique des procédés		89
IV.1	Formulation variationnelle	89
IV.2	Discretisation spatiale : éléments finis	90
IV.2.1	P.T.V. discrétisé	90
IV.2.2	Élément fini triangulaire de type membrane	91
IV.2.2.1	Passage des grandeurs du repère local au repère global	93
IV.2.2.2	Déformation d'un élément dans son plan	93
IV.2.2.3	Vecteur des forces intérieures	95
IV.2.2.4	Vecteur des forces extérieures	97
IV.2.2.5	Matrice masse de l'élément	98

IV.3	Discrétisation temporelle	98
IV.3.1	Schéma d'intégration	98
IV.3.2	Diagonalisation de la matrice masse	99
IV.4	Implantation des lois de comportement	100
IV.4.1	Modèles de comportement hyperélastiques	103
IV.4.1.1	Modèle de Mooney	103
IV.4.1.2	Modèle d'Ogden	103
IV.4.2	Modèles de comportement viscoélastiques	104
IV.4.2.1	Modèle de Christensen	104
IV.4.2.2	Modèle CBT généralisé	105
IV.5	Chargement de la paraison par un débit d'air	106
IV.6	Validation pour le soufflage libre	107
IV.6.1	Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney soumise à un échelon de pression	107
IV.6.2	Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney soumise à un débit de fluide constant	110
IV.6.3	Soufflage d'une membrane sphérique de type Christensen soumise à un échelon de pression	112
IV.7	Gestion du contact	113
IV.7.1	Détection des noeuds en contact	114
IV.7.2	Projection des noeuds en contact	115
IV.8	Raffinement du maillage	115
IV.8.1	Critère de raffinement	116
IV.8.2	Méthode de raffinement	116
IV.8.3	Difficultés dues au raffinement du maillage	117
IV.9	Validation générale : thermoformage d'un récipient cylindrique	118
IV.10	Conclusion	121
Chapitre V	Applications industrielles	123
V.1	Extrusion-soufflage d'une bouteille avec manche	123
V.1.1	Détermination de la géométrie finale	123
V.1.2	Étude de l'influence de la loi de comportement	126
V.1.2.1	Géométrie finale	126
V.1.2.2	Évolution de la pression interne	127
V.2	Thermoformage d'une boîte avec insert	128
	Conclusion générale	133
Annexe A	Soufflage d'une membrane circulaire plane : équations et validation	135
A. 1	Équations pour le soufflage de la membrane	135
A. 1.1	Cas hyperélastique	135
A. 1.1.1	Modèle de Mooney	135
A. 1.1.2	Modèle d'Ogden	136
A. 1.2	Cas viscoélastique	136
A. 1.2.1	Modèle de Christensen	136
A. 1.2.2	Modèle CBT	137

A. 1.3	Formule de récurrence pour le modèle CBT	138
A. 2	Validation du programme de calcul du soufflage d'une membrane plane	138
Annexe B	Algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt	141
Annexe C	Soufflage dynamique de membranes sphériques	143
C. 1	Introduction	143
C. 2	Formulation du problème	143
C. 2.1	Équations du mouvement	143
C. 2.2	Loi de comportement	146
C. 2.2.1	Cas hyperélastique : modèle de Mooney	146
C. 2.2.2	Cas viscoélastique : modèle de Christensen	146
C. 3	Résultats et discussion	147
C. 3.1	Soufflage d'une membrane hyperélastique par un échelon de pression constant	148
C. 3.1.1	Étude statique	148
C. 3.1.2	Soufflage dynamique	149
C. 3.2	Soufflage d'une membrane hyperélastique soumise à un débit de fluide constant	159
C. 3.3	Soufflage d'une membrane viscoélastique non-linéaire soumise à un échelon de pression constant	160
	Références bibliographiques	162

Table des Figures

I.1	Différentes étapes du procédé d'extrusion-soufflage	20
I.2	Différentes étapes du procédé d'injection-étirement-soufflage	20
I.3	Différentes étapes du procédé de thermoformage	21
I.4	Différentes courbes contrainte-déformation pour un polymère thermoplastique en fonction de sa température : A. rupture fragile, B. rupture ductile, C. étirage à froid, D. comportement caoutchoutique (d'après [WAR 83])	22
II.1	Description du mouvement. Configurations	28
II.2	Principe des Travaux Virtuels : notations	35
II.3	Comparaison modèles - expériences de Treloar	49
II.4	Expériences de (a) relaxation et (b) retard	51
II.5	Expérience de recouvrance	51
II.6	Chargement incrémental : Principe de Superposition de Boltzmann	52
III.1	Les différents essais d'extension biaxiale : (a) extension plane biaxiale, (b) extension et soufflage simultanés d'un cylindre, (c) soufflage d'une membrane plane	62
III.2	Montage expérimental pour le soufflage d'une membrane initialement plane . .	64
III.3	Module de soufflage	65
III.4	Gonflement d'une membrane chauffée : vue de dessus	69
III.5	Gonflement d'une membrane chauffée : vue de profil	70
III.6	Résultats expérimentaux : moyennes et écart types	72
III.7	Résultats expérimentaux pour le débit 27 l/s	73
III.8	Résultats expérimentaux pour le débit 19 l/s	73
III.9	Résultats expérimentaux pour le débit 11 l/s	73
III.10	Courbes moyennes de la pression interne en fonction de la hauteur de la bulle : (o) 27 l/s, (□) 19 l/s, (Δ) 11 l/s	74
III.11	Notations pour le problème de soufflage d'une membrane axisymétrique	76
III.12	Pression interne en fonction de l'élongation principale au pôle, λ_0 , dans le cas du soufflage d'une membrane circulaire plane de matériau néo-hookéen	82
III.13	Principe du programme d'identification	83
III.14	Résultats de l'identification dans le cas hyperélastique : (+) points expérimentaux, (—) modèle de Mooney, (···) modèle d'Ogden à 2 termes, (--) modèle d'Ogden à 3 termes	84
III.15	Résultats de l'identification dans le cas viscoélastique	86
III.16	Comparaison de nos résultats avec ceux de Goldsmith obtenus lors d'expériences de traction uniaxiale sur l'ABS : (—) Goldsmith, (···) notre modèle d'Ogden à trois termes	87

IV.1	Définition des repères utilisés pour la description du mouvement et de la déformation d'un élément fini	92
IV.2	Déformation d'un élément fini membrane dans son plan	93
IV.3	Algorithme général	101
IV.4	Chargement de la paraison par un débit d'air. Notations	106
IV.5	Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)	109
IV.6	Période réduite en fonction de la pression imposée pour trois valeurs de α : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (\odot) éléments finis (sphère complète)	110
IV.7	Soufflage, par un débit constant, d'une membrane sphérique de type Mooney avec $\alpha = 0$: (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)	111
IV.8	Soufflage, par un débit constant, d'une membrane sphérique de type Mooney avec $\alpha = 0,25$: (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)	111
IV.9	Soufflage d'une membrane sphérique de type Christensen : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (\cdots) éléments finis (sphère complète)	113
IV.10	Géométrie du problème de contact	114
IV.11	Soufflage d'une membrane circulaire dans un coin discrétisé en 6 facettes	115
IV.12	Problème posé par un maillage grossier dans le coin d'un moule	115
IV.13	Groupe d'éléments testés pour le raffinement de maillage	116
IV.14	Méthodes de division des triangles : (a) cas d'un élément sur la frontière, (b) cas de deux éléments internes partageant leurs plus grand côté, (c) cas des éléments internes qui ne partagent pas leur plus grand côté	117
IV.15	Algorithme de subdivision du maillage (d'après [NAM 93])	118
IV.16	Description du moule pour le thermoformage d'un récipient cylindrique	119
IV.17	Quatre phases du thermoformage	120
IV.18	Épaisseur réduite le long de la paroi : (I) points expérimentaux, (o) résultat numérique EF	120
IV.19	Comparaison expériences-calculs : (I) points expérimentaux, (o) résultats numériques EF	121
V.1	Paraison initiale extrudée pour le soufflage de la bouteille	124
V.2	Moule de la bouteille	124
V.3	Distribution de l'épaisseur réduite h/h_0	125
V.4	Comparaison de l'épaisseur finale de la bouteille : (■) résultats expérimentaux [KHA 95], (Δ) résultats numériques de Khayat et Derdouri [KHA 95], (\odot) nos résultats numériques	126
V.5	Épaisseur finale de la bouteille pour trois lois de comportement : (—) modèle de Mooney PET, (- - -) modèle d'Ogden ABS, (\cdots) modèle CBT généralisé ABS127	
V.6	Soufflage de la bouteille sous un débit d'air constant : (—) évolution de la pression interne, (- - -) évolution du volume de la demi-bouteille	128
V.7	Évolution de la pression interne en fonction du volume contenu dans la paraison : (\cdots) 62,5 g d'air/s, (- - -) 125 g d'air/s, (—) 250 g d'air/s	129
V.8	Description du moule pour le thermoformage d'une boîte parallélépipédique avec un insert	129
V.9	Quatre phases du thermoformage de la boîte	130

V.10	Répartition de l'épaisseur réduite	130
V.11	Répartition de l'épaisseur réduite sur les demi-plans de symétrie	131
A.1	Profil déformé de la membrane : $\alpha = 0$	139
A.2	Extensions principales : $\alpha = 0$	140
A.3	Profil déformé de la membrane : $\alpha = 0, 1$	140
A.4	Extensions principales : $\alpha = 0, 1$	141
C.1	Soufflage d'une membrane sphérique. Notations	144
C.2	Soufflage statique : pas de pression normalisé en fonction de l'extension principale circonférentielle pour différentes valeurs de α	148
C.3	Ω en fonction de Δp pour trois valeurs de α : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0, 1$, (c) $\alpha = 0, 25$ 151	
C.4	Courbes de phase (λ, v) pour trois intervalles de valeurs de α et Δp et pour les conditions initiales générales $(\lambda_{init}, v_{init})$	152
C.5	Δp en fonction de λ pour les soufflages (\cdots) statique et ($-$) dynamique (la valeur de α correspondante est indiquée sur chaque courbe)	154
C.6	$\alpha = 0$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ	155
C.7	$\alpha = 0, 1$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ	156
C.8	$\alpha = 0, 18$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ	157
C.9	$\alpha = 0, 25$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ	158
C.10	Influence de l'échelon de pression sur la période du mouvement pour différentes valeurs de α	159
C.11	Soufflage d'une membrane sphérique hyperélastique sous un débit de gaz constant : (\cdots) $q = 4$; ($- - -$) $q = 1$; ($-$) statique	161
C.12	Soufflage d'une membrane sphérique de Christensen pour différentes valeurs de α : (\cdots) $\alpha = 0, 1$; ($- - -$) $\alpha = 1$; ($-$) $\alpha = 10$	162

Liste des Tableaux

I.1	Différents polymères thermoplastiques et leurs utilisations industrielles	22
II.1	Tableau récapitulatif des différents modèles hyperélastiques	46
II.2	Tableau récapitulatif des différents modèles viscoélastiques non linéaires intégraux	57
III.1	Erreurs maximales de mesure pour les trois débits	74
III.2	Erreur au sens des moindres carrés pour les trois modèles hyperélastiques . . .	85
IV.1	Différents cas pour le soufflage d'une sphère hyperélastique par un échelon de pression	108

Chapitre II

D :	un solide
\cdot_0 :	indice pour les grandeurs au temps initial t_0 (état non déformé)
\cdot_τ :	indice pour les grandeurs au temps courant τ
\cdot_t :	indice pour les grandeurs au temps présent t
V, S :	volume et surface du solide
\mathcal{F} :	transformation
\mathcal{C} :	configuration
\vec{x} :	position
$\overline{\overline{F}}$:	gradient de la transformation
J :	Jacobien de la transformation
$\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{B}}$:	tenseurs des dilatations de Cauchy-Green droit et gauche
$I_i \quad i = 1, 3$:	invariants des tenseurs des dilatations
$\overline{\overline{E}}, \overline{\overline{A}}$:	tenseurs des déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi
$\overline{\overline{e}}$:	tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites perturbations
$\overline{\overline{R}}$:	tenseur de rotation de la transformation
$\overline{\overline{U}}, \overline{\overline{V}}$:	tenseurs des déformations pures droit et gauche
$[N], [n]$:	matrices des vecteurs propres des déformations $\overline{\overline{C}}$ et $\overline{\overline{B}}$
$\lambda_i \quad i = 1, 3$:	extensions principales
$[\Lambda]$:	matrice diagonale des extensions principales
\cdot_α :	indice pour les tenseurs relatifs à une mesure généralisée de la déformation
$\overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{\Pi}}, \overline{\overline{S}}$:	tenseur des contraintes de Cauchy, premier tenseur de Piola-Kirchhoff, second tenseur de Piola-Kirchhoff
ρ :	masse volumique

S_T :	partie de la frontière où les efforts sont imposés
S_u :	partie de la frontière où les déplacements sont imposés
\vec{f} :	forces de volume
S :	fonctionnelle de réponse
p :	pression hydrostatique
W :	fonction énergie de déformation
C_1, C_2 :	constantes matérielles du modèle de Mooney
μ_n, α_n :	constantes matérielles du modèle d'Ogden
$J(t), G(t)$:	fonctions de retard et de relaxation
$g_0, g_1(\tau)$:	paramètres matériels du modèle de Christensen
$g_{0n}, \alpha_n, g_1(\tau)$:	paramètres matériels du modèle CBT généralisé

Chapitre III

n_{exp} :	nombre d'expériences
q :	grandeur mesurée (hauteur ou pression)
\bar{q} :	moyenne de la grandeur q
$s[q]$:	écart type expérimental
R_0, h_0 :	rayon et épaisseur initiaux de la membrane plane
R :	rayon courant de la membrane non déformée
(r, z) :	coordonnées d'un point sur la membrane déformée
h :	épaisseur courante de la membrane déformée
λ_1 :	extension principale méridienne
λ_2 :	extension principale circonférentielle
λ_3 :	extension principale normale
θ :	angle de repérage pour la membrane axisymétrique
T_1, T_2 :	contraintes principales intégrées de membrane
ρ_1, ρ_2 :	rayons de courbure relatifs aux directions principales
\cdot^* :	exposant pour les variables réduites
A, B, C :	fonctions intervenant dans le cas du soufflage d'une membrane hyperélastique
P_0 :	pression imposée
λ_0 :	extension principale au pôle imposée

z_0 :	cote du pôle imposée
g_0, g_1, τ_R :	constantes du modèle de Christensen
F_1, F_2, F_3, F_4 :	fonctions intervenant dans le cas du soufflage d'une membrane viscoélastique
$t_n, \Delta t$:	temps discret, pas de temps
$h_e(t_i)$:	hauteur mesurée au temps t_i
$P_e(t_i)$:	pression mesurée au temps t_i
$P_c(t_i)$:	pression calculée au temps t_i
E :	erreur au sens des moindres carrés

Chapitre IV

\cdot^e :	exposant pour les grandeurs relatives à un élément fini
$[N(\xi, \eta)]$:	matrice d'interpolation
$\{X\}$:	vecteur des positions nodales
$\{U\}$:	vecteur des déplacements nodaux
$\{A\}$:	vecteur nodal des quantités d'accélération
$\{F_{int}\}$:	vecteur nodal des forces intérieures
$\{F_{ext}\}$:	vecteur nodal des forces extérieures
\mathcal{R}_g :	repère global
\mathcal{R}_l :	repère local lié à l'élément déformé
\cdot_g :	indice pour les grandeurs exprimées dans le repère global
\cdot_l :	indice pour les grandeurs exprimées dans le repère local
$[R_{lg}]$:	matrice de rotation entre la base locale et la base globale
ABC :	élément fini non déformé
abc :	élément fini déformé
δW^e :	contribution d'un élément fini au travail total
$\{\widehat{E}_l^L\}, \{\widehat{E}_l^{NL}\}$:	écriture vectorielle du tenseur local des déformations de Green-Lagrange, composantes linéaire et non-linéaire respectivement
$\{\widehat{S}_l\}$:	écriture vectorielle du second tenseur de Piola-Kirchhoff
$[B^L], [B^{NL}]$:	matrices reliant les vecteurs précédents aux vecteurs des déplacements nodaux
$[B]$:	somme des deux matrices précédentes
P :	pression à l'intérieur de la paraison

$[M^e], [\overline{M^e}]$:	matrice masse élémentaire et matrice masse élémentaire diagonale
$[M], [\overline{M}]$:	matrice masse assemblée et matrice masse diagonale assemblée
Δt :	pas de temps
Δt_C :	pas de temps critique
\cdot_n :	indices pour les grandeurs relatives au temps discret t_n
$P_0, P(t), \Delta P(t)$:	pression initiale des deux côtés de la paraison, pression à l'intérieur de la paraison au temps t , différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la paraison au temps t
$V_0, V(t)$:	volume intérieur de la paraison, initialement et à t
$n_0, n(t)$:	nombre de moles de gaz à l'intérieur de la paraison, initialement et à t
DEF :	facette triangulaire du moule
N :	position du noeud au temps t_n
N' :	position du noeud au temps t_{n-1}

Introduction

Les matières plastiques occupent actuellement une place grandissante dans de nombreux secteurs de l'industrie tels que l'automobile, l'isolation en électronique et bien sûr l'emballage. Dans tous ces domaines, la mise en forme de ces matériaux est un problème d'actualité qui fait l'objet de nombreuses recherches. La mise en forme des matières plastiques est maintenant devenue un secteur d'activité à part entière.

On distingue deux grands types de procédés de mise en forme : l'un permettant la réalisation de pièces tridimensionnelles et l'autre permettant la fabrication de corps creux. Le premier type concerne le procédé d'injection et ne sera pas étudié ici. Le second type regroupe les procédés de mise en forme utilisant la technique de soufflage, à l'intérieur d'un moule, de membranes polymériques chauffées. Parmi eux, le thermoformage permet la fabrication de corps creux ouverts, les moulages par injection-étirement-soufflage et par extrusion-soufflage permettent, pour leur part, la mise en forme de corps creux fermés. C'est à ces procédés que sont consacrés les présents travaux.

Dans ce cadre général, l'objectif de la simulation numérique est de fournir des outils d'aide à la conception des moules et de permettre une meilleure maîtrise des géométries finales tout en optimisant la quantité de matière utilisée. Les programmes actuels de simulation des procédés de soufflage utilisent, le plus souvent, la méthode des éléments finis et des lois de comportement hyperélastiques. Cependant, afin de simuler les phénomènes physiques avec plus de précision, une modélisation fidèle du comportement viscoélastique des matériaux est indispensable.

Dans cette optique, nos travaux de recherche ont pour but :

- de mettre en évidence expérimentalement le caractère viscoélastique des matériaux à leur température de mise en forme et d'identifier les constantes matérielles des lois de comportement permettant de les modéliser ;
- de développer un code de calcul intégrant ces lois et permettant la simulation des différents procédés.

Le premier chapitre est consacré à une présentation succincte des procédés de mise en forme de moulage par extrusion-soufflage, injection-étirement-soufflage et thermoformage ainsi que des matériaux utilisés, puis à une étude bibliographique relative à la simulation numérique de ces procédés.

Dans le second chapitre, après quelques rappels de mécanique des milieux continus en grandes déformations, nous passons en revue les différentes lois de comportement hyperélastiques et viscoélastiques non-linéaires permettant la modélisation des polymères dans leur état caoutchoutique. Une rapide estimation de leur faculté à reproduire le comportement du matériau comparée aux difficultés de leur mise en œuvre numérique nous permet de retenir quatre modèles que nous utiliserons pour la simulation des procédés : les modèles hyperélastiques de Mooney et d'Ogden, et les modèles viscoélastiques non-linéaires de Christensen et CBT généralisé.

Le troisième chapitre décrit la partie expérimentale de notre travail. Un dispositif d'essais permettant le soufflage de membranes initialement planes chauffées est développé. Il est utilisé pour la caractérisation de l'ABS à sa température de mise en forme. Un système d'acquisition de données permet l'obtention des courbes d'évolution de la hauteur de la bulle et de la pression interne en fonction du temps. Le caractère viscoélastique du matériau est mis en évidence et l'importance du rôle joué par la pression à l'intérieur de la membrane est soulignée. Parallèlement, la résolution du problème de soufflage libre d'une membrane circulaire plane permet de mettre en place une méthode de recalage des constantes matérielles des lois de comportement que nous avons retenues pour notre étude.

Dans le quatrième chapitre, notre code de calcul pour la simulation des procédés est présenté. Compte tenu du caractère dynamique des procédés et des problèmes d'instabilité fréquemment rencontrés lors du soufflage de membranes, nous avons adopté une formulation dynamique du problème et une résolution numérique basée sur un schéma d'intégration temporelle explicite. Les éléments finis utilisés sont des éléments membranes triangulaires linéaires en grandes transformations. Les spécificités de ce code de calcul sont présentées de façon détaillée, elles concernent :

- l'intégration des lois de comportement ;
- le calcul de l'évolution de la pression à l'intérieur de la paraison ;
- la mise en œuvre d'une technique de raffinement de maillage.

La validation est faite à partir de résultats semi-analytiques concernant le soufflage dynamique de membranes sphériques et de résultats expérimentaux fournis par la bibliographie.

Deux applications industrielles, une pour le moulage par soufflage et une pour le thermoformage, sont présentées dans le cinquième et dernier chapitre. Les résultats obtenus sont satisfaisants et permettent de mettre l'accent sur l'importance de la loi de comportement pour la détermination de la pression interne et sur son peu d'influence sur la répartition finale de l'épaisseur.

Chapitre I

Généralités sur la mise en forme des matériaux plastiques par soufflage

Dans ce premier chapitre, nous ferons quelques rappels d'ordre général concernant les procédés de mise en forme des plastiques par des techniques de soufflage. Nous présenterons tout d'abord de manière succincte les différents procédés industriels entrant dans ce cadre. Puis, nous décrirons le type de matériaux utilisés dans ces procédés en mettant l'accent sur leur comportement mécanique à la température de mise en forme ; pour chaque matériau, nous donnerons le type de produits fabriqués. Enfin, nous ferons une revue bibliographique des différents travaux concernant la simulation numérique de ces procédés en mettant en évidence l'importance de toutes les études préliminaires consacrées au soufflage des membranes.

I.1 Principaux procédés de mise en forme

Les trois grandes familles de procédés de mise en forme par des méthodes de soufflage sont l'extrusion-soufflage, l'injection-étirement-soufflage et le thermoformage. Dans ce paragraphe, nous ne décrirons que les grands principes de chacun des procédés sachant qu'il existe évidemment de nombreuses solutions technologiques pour la mise en œuvre de chacun d'entre eux. Pour des détails techniques sur ces procédés, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence de Throne [THR 87] et de Rosato et Rosato [ROS 89].

Le principe général de ces trois procédés est le même : il consiste tout d'abord à fabriquer une structure mince de polymère (soit une paraison extrudée, soit une préforme injectée antérieurement, soit une feuille mince), à la chauffer à la température de mise en forme, puis à venir la plaquer sur un moule à l'aide d'une pression d'air. Au moment du contact avec le moule, la pièce se refroidit, se rigidifie. Ensuite, le produit final peut être démoulé.

I.1.1 Moulage par extrusion-soufflage

Les étapes du procédé sont présentées sur la figure I.1.

- (1) Les granulés de plastique préalablement chauffés à la température de fusion sont mélangés par le mouvement d'une vis sans fin qui les conduit à la tête de l'extrudeuse. L'écoulement du plastique entre les deux cylindres la composant forme une paraison.
- (2) Le moule composé de deux parties se referme sur la paraison.
- (3) La paraison est alors soufflée à l'intérieur du moule puis extraite de celui-ci (le plan de joint dû à la fermeture du moule sera visible au fond du produit final).

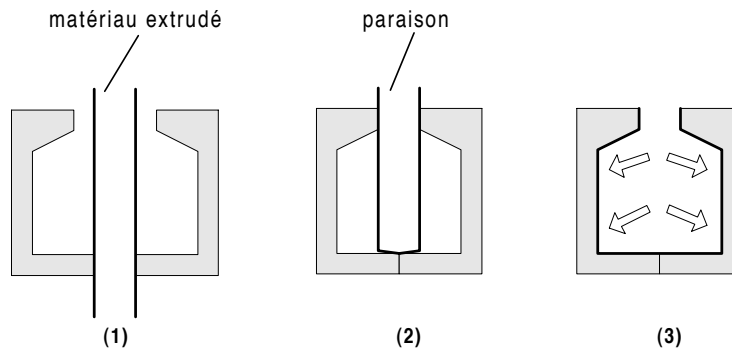


Figure I.1 : Différentes étapes du procédé d'extrusion-soufflage

Avantage : cadences élevées.

Inconvénients : la partie pincée doit être ébarbée (reprise), les épaisseurs sont difficiles à contrôler.

I.1.2 Moulage par injection-étirement-soufflage

Les étapes du procédé sont présentés sur la figure I.2.

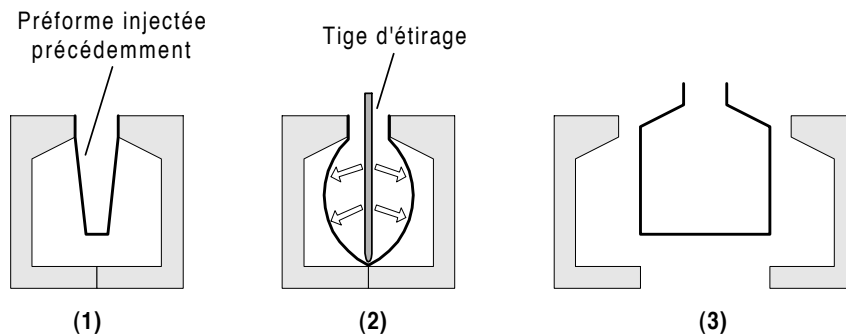


Figure I.2 : Différentes étapes du procédé d'injection-étirement-soufflage

- (1) Une préforme préalablement obtenue par injection (forme d'un tube à essais avec une tête filetée) est placée dans un moule. Cette préforme est rechauffée à la température de mise en forme.
- (2) Une tige d'étirage vient plaquer le fond de la préforme au fond du moule, simultanément l'air est introduit pour le soufflage.
- (3) Le produit final est démoulé (il y aura un point, dû à l'action de la tige, au fond de celui-ci).

Avantages : suppression des opérations de finition, épaisseurs contrôlées, ouverture parfaitement calibrée (possibilité de goulot).

Inconvénients : moules onéreux (un pour l'injection, un pour le soufflage), limitation aux récipients avec un axe de symétrie (pas de manche par exemple), cadence plus lente que l'extrusion-soufflage.

I.1.3 Thermoformage

Les étapes du procédé sont présentés sur la figure I.3.

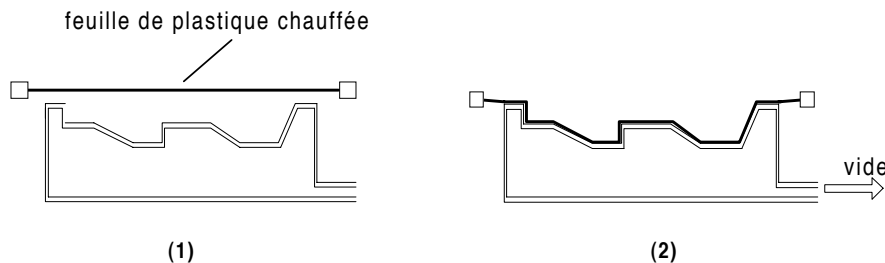


Figure I.3 : Différentes étapes du procédé de thermoformage

- (1) Une feuille de plastique est chauffée puis placée au-dessus d'un moule creux.
- (2) Une pression d'air (généralement, on fait le vide dans le moule) est appliquée et la feuille vient se plaquer sur le moule

Avantages : moule simple et peu cher, petites séries envisageables, refroidissement rapide.

Inconvénients : tolérances géométriques limitées, épaisseurs non uniformes.

I.2 Matériaux utilisés dans ces procédés de mise en forme

Les matériaux concernés par les procédés de mise en forme exposés dans le paragraphe précédent sont essentiellement les polymères thermoplastiques, dont le plus connu est le polyéthylène.

On dit souvent de ces polymères qu'ils sont linéaires, c'est-à-dire qu'il n'y a quasiment pas de liaisons covalentes entre les longues chaînes polymériques, mais seulement des liaisons secondaires. C'est pourquoi les thermoplastiques se ramollissent lors de leur chauffage : les liaisons secondaires liant les chaînes les unes aux autres se brisent et le matériau s'écoule, ce qui permet sa mise en forme. Le tableau I.1 présente les thermoplastiques les plus utilisés ainsi que les produits qu'ils permettent de fabriquer.

Le comportement de ces matériaux dépend essentiellement de leur température. En fait, on peut distinguer quatre types de comportement suivant la température. Ceux-ci sont décrits sur la figure I.4 où sont présentées les différentes courbes contrainte-déformation rencontrées. Les quatre comportements mis en évidence sont les suivants :

- A. pour des températures très en dessous de la température de transition vitreuse, T_g , (courbe A de la figure I.4), la contrainte augmente linéairement vers le point de rupture avec l'augmentation de la déformation, et la rupture fragile apparaît pour de faibles déformations (de l'ordre de 10 %) ;
- B. pour des températures un peu plus élevées, mais toujours inférieures à la température de transition vitreuse (courbe B), la courbe ressemble à la courbe contrainte-déformation d'un métal ductile : une contrainte maximale de plastification est atteinte avant la rupture ;
- C. pour des températures encore plus élevées (toujours sous T_g), les thermoplastiques deviennent plastiques (courbe C). Comme précédemment la plastification apparaît pour des déformations de l'ordre de 10% mais il n'y a pas rupture : la contrainte chute jusqu'à un

<i>Nom du polymère</i>	<i>Produits fabriqués</i>
Polyéthylène haute ou basse densité (PE, HD ou LD)	Tubes, films minces, bouteilles, emballages, ...
Polychlorure de vinyle (PVC)	Châssis de fenêtres, disques, ...
Polypropylène (PP)	Mêmes applications que le PE, mais plus léger et plus résistant
Polytétrafluoréthylène (Téflon) (PTFE)	Revêtement de matériel de cuisine, papiers, joints, ...
Polystyrène (PS)	Objets moulés bon marché, emballages, ...
Polyméthylméthacrylate (PMMA)	Feuilles transparentes, vitres, pare-brises feuilletés, ...
Polyester (PET)	Films photographiques, cassettes, bouteilles, ...
Acrylonitrile butadiène styrène (ABS)	Tuyaux, boîtiers d'appareils électriques, ...

Tableau I.1: Différents polymères thermoplastiques et leurs utilisations industrielles

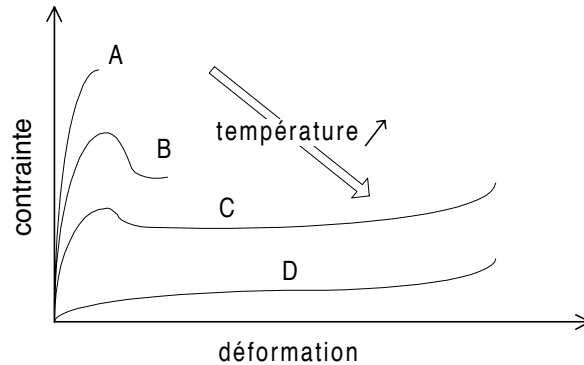


Figure I.4 : Différentes courbes contrainte-déformation pour un polymère thermoplastique en fonction de sa température : A. rupture fragile, B. rupture ductile, C. étirage à froid, D. comportement caoutchoutique (d'après [WAR 83])

plateau pour lequel les déformations peuvent atteindre 300%. Après une dernière phase de durcissement, la rupture intervient ;

- D. pour des température au dessus de T_g , le comportement devient caoutchoutique (courbe D) : la contrainte croît constamment avec la déformation, en passant par un pallier où elle reste quasiment constante. Le comportement est élastique ou viscoélastique (avec une faible viscosité) et les déformations atteintes avant la rupture sont de l'ordre de 300 à 1000%.

Lors de la mise en forme, les matériaux sont chauffés loin au dessus de leur température de transition vitreuse et ont donc un comportement de type caoutchouc (voir le cas D précédent). De plus, sous ce type de sollicitations, ils sont supposés incompressibles. Dans ce contexte, nous étudierons et adopterons des lois de comportement classiquement utilisées pour modéliser le comportement du caoutchouc.

I.3 État de l'art pour la simulation des procédés de moulage par soufflage et de thermoformage

Au contraire de la mise en forme des métaux, la simulation des procédés liés aux plastiques est un domaine de recherche assez récent. Dans ce cadre, les auteurs s'entendent sur l'utilisation d'hypothèses simplificatrices, la plus répandue consistant à considérer la paraison comme une membrane (état de contrainte plan) soumise à de grandes déformations.

Dans ce paragraphe, nous ferons une revue bibliographique des différents travaux sur le sujet. La première partie de cette revue sera consacrée aux problèmes de soufflage de membrane qui ne font pas explicitement référence aux procédés de mise en forme, mais que l'on peut qualifier malgré tout de précurseurs. La seconde partie traitera des travaux (souvent plus récents) qui se réfèrent explicitement au moulage par soufflage ou au thermoformage.

I.3.1 Étude des membranes en grandes déformations

Tous les travaux qui suivent correspondent à des problèmes quasi-statiques.

Les premiers travaux que l'on recense datent de 1950-1960 et sont l'œuvre d'Adkins et Rivlin [ADK 52], et Green et Adkins [GRE 60]. Ces travaux posent les bases théoriques des problèmes des membranes hyperélastiques soumises à des chargements en pression.

Plus tard, Foster [FOS 67a], [FOS 67b] ainsi que Hart-Smith et Crisp [HS 67] et Klingbeil et Shield [KLI 64] s'intéressent plus particulièrement aux problèmes à symétrie de révolution. Ils font varier les modèles de comportement hyperélastiques et résolvent les systèmes différentiels, avec conditions aux limites aux deux extrémités de l'intervalle de définition, par des méthodes du type méthode du tir.

Dans le même temps, Oden et Sato [ODE 67] sont les premiers à utiliser la méthode des éléments finis pour les problèmes de membranes élastiques en grandes déformations. Les auteurs discrétisent la membrane en éléments triangulaires linéaires. Ces éléments sont les plus utilisés dans ce type de problème car toutes les grandeurs sont constantes par élément, ce qui permet d'utiliser sans difficulté l'hypothèse d'incompressibilité pour le calcul de l'épaisseur.

A partir des années 1970, Feng *et al.* s'intéressent à de très nombreux problèmes de membranes : cas à symétrie de révolution [YAN 70], cas plus général sans hypothèse de symétrie pour des matériaux de type néo-hookéen [YAN 73] ou de type Mooney-Rivlin [FEN 74a]. Ils abordent les problèmes liés à la prise en compte du contact sans frottement [FEN 73], [FEN 74b]. Pour les problèmes à symétrie de révolution, les auteurs adoptent une méthode de résolution de Runge-Kutta couplée à une méthode de tir ; pour les géométries quelconques, ils utilisent la méthode de Ritz sur un maillage de la membrane. Plus tard, Feng seul reprendra ses travaux sur les membranes en incorporant des lois de comportement viscoélastiques non-linéaires [FEN 85] et s'intéressera au recalage de ces lois [FEN 92].

Les problèmes de membranes viscoélastiques axisymétriques ont été étudiés dans le détail par Wineman. Il résout les problèmes de soufflage d'une membrane initialement plane [WIN 76], de membranes à symétrie de révolution [WIN 78], mais aussi le problème plus complexe d'étirement et de soufflage simultanés d'une membrane cylindrique [WIN 79]. Ses travaux portent essentiellement sur l'intégration numérique du modèle viscoélastique K-BKZ. La résolution numérique se fait, là aussi, par une méthode du tir.

Plus récemment, Warby et Whiteman [WAR 88] utilisent un modèle de comportement viscoélastique dérivé du modèle hyperélastique de Mooney-Rivlin pour étudier, par la méthode des éléments finis, les membranes à symétrie de révolution entrant en contact avec un moule.

Comme nous le verrons par la suite et comme l'a rappelé Beatty [BEA 87], les problèmes de soufflage de membranes laissent apparaître des phénomènes d'instabilité dus à la relation entre la pression interne de la membrane et le volume de celle-ci. Alexander les a mis en évidence expérimentalement et numériquement pour le soufflage d'une sphère hyperélastique [ALE 71b] et sur le problème d'étirement et de soufflage simultanés de membranes cylindriques [ALE 71a]. Le cas de la membrane sphérique a été traité par Shang [SHA 91] et celui du cylindre étiré par Benedict *et al.* [BEN 79]. Khayat *et al.* [KHA 92] ont étudié dans le détail les problèmes d'instabilité d'un cylindre simplement soufflé et notamment l'apparition d'hernies sur celui-ci pour certaines valeurs de la pression. Plus récemment et sur la base de ce dernier article, Shi et Moita [SHI 96] proposent une solution numérique pour la détection des points de bifurcation et le dépassement de ceux-ci. Tous ces travaux ne concernent que la détection des instabilités et les méthodes pour éviter de les rencontrer et non les comportements liés aux bifurcations (pertes de symétrie, ...).

Les travaux concernant le comportement dynamique des membranes sont beaucoup plus rares. Dans le cadre de ce travail, nous ne citerons que les revues bibliographiques de Jenkins et Leonard [JEN 91] et Jenkins [JEN 96]. Ces revues très générales donnent une bonne idée de l'état de l'art dans ce domaine. De plus, nous citerons les travaux d'Akkas [AKK 78] sur les instabilités en dynamique, ces travaux ayant été le point de départ de nos travaux dans ce domaine.

I.3.2 Simulation des procédés de mise en forme

I.3.2.1 Premiers travaux : études semi-analytiques

Les premiers travaux relevés dans la bibliographie ne concernent que des solutions relatives à des cas simples à symétrie de révolution utilisant l'hypothèse de membrane.

En 1970, Williams [WIL 70] fut le premier à s'intéresser à la simulation du thermoformage. Il utilise un modèle néo-hookéen pour le comportement du PMMA et étudie le thermoformage dans un moule simple de géométrie cônica (contact collant). Il fournit des résultats concernant l'épaisseur et la pression de gonflement qu'il compare à des données expérimentales. Ces premiers résultats sont encourageants. En 1980, Petrie et Ito [PET 80] utilisent une approche similaire pour le soufflage de cylindres de forme générale et démontrent la faisabilité de calculs complexes de ce type (toujours dans le cadre axisymétrique). De plus, ils s'intéressent de très près aux conditions de contact et montrent que l'hypothèse de contact collant est suffisante dans la majorité des cas. Ces deux articles se révèlent être les précurseurs dans la simulation des procédés : la plupart des auteurs citent ces références dans leurs articles.

Un peu plus tard, Ryan et Dutta s'intéressent de près au procédé d'extrusion-soufflage dans une série d'articles [RYA 82a], [RYA 82b], [DUT 84]. Ils se consacrent tout d'abord au soufflage libre [RYA 82a] aussi bien expérimentalement qu'analytiquement. Ils montrent que la membrane adopte, lors du soufflage, plutôt une forme d'ellipsoïde que de cylindre et que les matériaux peuvent être modélisés par des lois de comportement viscoélastiques fluides. En utilisant ces premières observations, ils étudient la formation de la paraison par écoulement lors de la phase d'extrusion et souffle la membrane obtenue dans un moule parallélépipédique [RYA 82b]. Plus tard, ils s'intéressent à la dynamique du procédé pour le soufflage du PEHD et notamment à l'évolution du contact et à l'influence de la pression de soufflage [DUT 84]. La comparaison de ces résultats à l'expérience est assez satisfaisante, même si l'hypothèse d'épaisseur constante à la fin du soufflage libre sera beaucoup critiquée (voir discussion à la fin de [RYA 82b]).

Pour clore ce paragraphe sur le traitement semi-analytique du problème, nous citerons l'article de Cakmak *et al.* [CAK 85] qui s'intéressent au procédé d'injection-étirement-soufflage

et plus précisément à la phase d'étirement et de soufflage simultanés. A partir d'observations expérimentales, les auteurs développent un modèle analytique simple pour estimer les contraintes dans la membrane lors du soufflage. Ils ne choisissent pas de loi de comportement et n'obtiennent donc pas les épaisseurs finales.

I.3.2.2 Développements plus récents : méthode des éléments finis

Après cette première phase, pendant laquelle les auteurs ont observé les phénomènes et développé des modèles axisymétriques simples, sont apparus les premiers articles concernant la simulation des procédés par la méthode des éléments finis. Ceux-ci datent du milieu des années 1980. Dans ce paragraphe, nous ferons une revue bibliographique des travaux les plus significatifs en insistant sur les hypothèses faites par les auteurs. En premier lieu, citons le travail de Zamani *et al.* qui, en 1989, ont fait une bonne revue des différentes publications concernant le thermoformage jusqu'à cette date [ZAM 89].

Les travaux les plus connus sont ceux de deLorenzi et Nied de la General Electric Company. Ils simulent aussi bien les problèmes de soufflage que de thermoformage, à la fois pour les problèmes bidimensionnels [DEL 87] que tridimensionnels [DEL 90], [DEL 91]. A partir d'observations expérimentales, ils adoptent l'hypothèse de membrane (valable sauf près des fixations), approchent le comportement des matériaux par des modèles hyperélastiques (notamment par des modèles d'Ogden à un terme), prennent en compte l'évolution de la température et considèrent le contact comme collant. Ils résolvent les problèmes quasi-statiques et les éléments finis sont des triangles ou des quadrilatères à interpolation linéaire. Leurs résultats sont validés sur des cas expérimentaux et les auteurs observent que la forme de la loi de comportement n'influence pas la géométrie finale du produit (notamment la répartition de l'épaisseur) mais seulement la pression interne et les contraintes dans la membrane.

Dans le même temps, Charrier *et al.* de l'Université McGill de Montréal ont développé un code de calcul pour le soufflage de membranes. Ils s'intéressent tout d'abord aux problèmes hyperélastiques axisymétriques [CHA 87], et tridimensionnels [CHA 89], puis ils mettent en évidence l'influence de la viscoélasticité des matériaux en incorporant le modèle de Christensen à leur programme [SHR 93]. La formulation est quasi-statique et les éléments finis sont des triangles linéaires. Les auteurs explorent le problème des conditions de contact (contact avec ou sans glissement) et comparent leurs résultats à des données analytiques [SHR 93] mais aussi expérimentales [CHA 89] obtenues sur du caoutchouc.

Au début des années 1990, après avoir adopté l'hypothèse classique de membrane [SON 91], Song *et al.* étudient le moulage par l'application d'un poinçon [SON 92] en utilisant des éléments finis permettant la prise en compte de la flexion. Ces résultats leur permettent de localiser les zones d'initiation de la rupture [SON 92].

Nous citerons aussi le CEMEF (Sophia Antipolis), où des travaux ont été menés sur l'étirement-soufflage [SCH 92], [SCH 96], sur l'extrusion-soufflage [RV 95] et le thermoformage de multicouches [VAN 95]. Ces travaux utilisent des lois de comportement viscoélastiques liquides ou viscoplastiques. Le code de calcul intègre des éléments mixtes déplacement-pression [SCH 96] et un module de remaillage [RV 95].

Toujours actuellement, quelques auteurs utilisent une formulation dynamique du problème pour éviter les difficultés de convergence rencontrées lors de la résolution des problèmes quasi-statiques, difficultés dues aux très fortes non-linéarités. Rachik *et al.* [RAC 93], [RAC 94] ont adapté leurs connaissances des procédés d'emboutissage des métaux au cas de la mise en forme des plastiques. Dans ces travaux, les matériaux sont modélisés par des lois de comportement hyperélastiques et viscoélastiques différentielles et les auteurs utilisent un algorithme de résolution

explicite avec l'ajout d'une matrice d'amortissement pour reproduire les résultats quasi-statiques. Dans le même esprit, Bourgin *et al.* [BOU 95], [D'O 95] utilisent ce type de résolution (sans amortissement) pour le procédé de thermoformage. L'accent est mis sur l'évolution de la pression à l'intérieur du moule lors du gonflement de la membrane.

A l'Institut des Matériaux Industriels (Conseil National de Recherche du Canada, Boucherville), Khayat et Derdouri se sont intéressés aux problèmes de soufflage dans le cadre quasi-statique. Les équations différentielles du problème de membrane [GRE 60] sont considérées sans discrétisation initiale du domaine en éléments finis. La discrétisation se fait sur le domaine de calcul où les équations sont définies et non sur la structure déformée. La résolution utilise une méthode couplant les éléments finis aux différences finies. L'attention des auteurs s'est portée sur les cas du contact multiple et de l'influence des paramètres du modèle de Mooney dans les problèmes à symétrie de révolution [KHA 94a]. De plus, ces travaux sont comparés à des résultats expérimentaux obtenus dans leur laboratoire [KHA 94b] et étendus au problème de l'étirement-soufflage [KHA 95].

Pour conclure cette revue, nous donnerons les orientations récentes dans ce domaines. On peut citer le remaillage des membranes au cours du calcul [RV 95], mais aussi et surtout les méthodes inverses qui permettraient de dimensionner la préforme (et notamment son épaisseur) pour obtenir, par exemple une épaisseur constante du produit final. Citons par exemple les travaux de Ben Chaabane et Batoz [BC 94], [BC 95], ou encore de Lee et Soh [LEE 96].

Chapitre II

Rappels généraux

Dans ce chapitre, quelques éléments nécessaires à notre étude sont rappelés. Dans une première partie, les grandeurs de la mécanique des milieux continus utilisées pour l'étude des problèmes en grandes déformations sont décrites. On trouvera dans [SID 82] et [DUB 86] une présentation plus générale et plus complète du sujet.

Ensuite, nous présentons quelques modèles de comportement (hyperélastiques et viscoélastiques) utilisés pour la description des matériaux dont le comportement est de type caoutchouc, notamment les polymères fondus lors de leur mise en forme.

II.1 Rappels de mécanique des milieux continus

On considère un solide D , initialement de volume V_0 et de frontière S_0 . Au cours de la transformation \mathcal{F} , le solide admet pour volume \tilde{V} et pour frontière \tilde{S} au temps courant τ . A l'instant présent t , D admet pour volume V et pour frontière S .

II.1.1 Mouvement

Soit un point matériel (ou particule P) de D . Ce point occupe la position \vec{X} lorsque le solide D est dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 au temps t_0 , la position \vec{x} dans la configuration \mathcal{C}_τ au temps courant τ et la position \vec{x} dans la configuration actuelle \mathcal{C}_t au temps actuel t . La figure II.1 présente ces différentes notations.

Remarque : dans ce qui suit, nous décrirons toujours l'état du solide D au temps courant τ , et ce dans différentes configurations.

Souvent, en mécanique du solide, la configuration initiale non déformée est adoptée comme configuration de référence. Comme on le verra par la suite, on peut adopter d'autres configurations de référence (déformées ou abstraites) [TRU 66].

La description des grandeurs au temps courant τ par rapport à la configuration de référence non déformée initiale est dite description *lagrangienne*. La description des grandeurs au temps courant τ par rapport à la configuration courante est dite description *eulérienne*.

La position instantanée de P au temps τ est fournie par une fonction de la position de référence \vec{X} et du temps écoulé τ :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, \tau) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, \tau) \quad (\text{II.1})$$

où \vec{u} est le vecteur déplacement de la particule P .

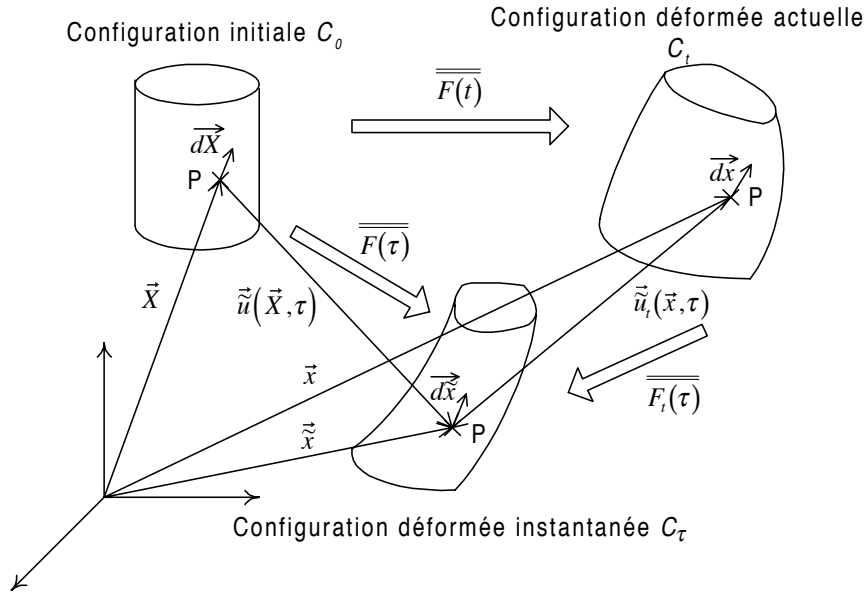


Figure II.1 : Description du mouvement. Configurations

De même, en considérant \mathcal{C}_t comme configuration de référence, on peut décrire la position de P au temps τ par une fonction de la position actuelle \vec{x} et du temps τ :

$$\vec{x} = \vec{x}_t(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \vec{u}_t(\vec{x}, \tau) \quad (\text{II.2})$$

Ce type de description pour laquelle la configuration de référence est la configuration à l'instant t , \mathcal{C}_t , est dite « relative » [TRU 66] ou « lagrangienne réactualisée » [SID 82].

II.1.2 Tenseur gradient de la transformation

II.1.2.1 Définition

Pour définir le mouvement local de la particule P , on utilise le tenseur gradient de la transformation au point matériel P :

$$\vec{d}\vec{x} = \overline{\overline{F}}(\vec{X}, \tau) \vec{d}\vec{X} \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{F}}(\vec{X}, \tau) = \overline{\overline{\nabla}}_{\vec{X}} \vec{x}(\vec{X}, \tau) = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\nabla}}_{\vec{X}} \vec{u}(\vec{X}, \tau) \quad (\text{II.3})$$

Si l'on utilise la description relative (II.2), on définit le tenseur gradient suivant :

$$\vec{d}\vec{x} = \overline{\overline{F}}_t(\vec{x}, \tau) \vec{d}\vec{x} \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{F}}_t(\vec{x}, \tau) = \overline{\overline{\nabla}}_{\vec{x}} \vec{x}_t(\vec{x}, \tau) = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\nabla}}_{\vec{x}} \vec{u}_t(\vec{x}, \tau) \quad (\text{II.4})$$

De même que $\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t_0) = \overline{\overline{I}}$, $\overline{\overline{F}}_t(\vec{x}, t) = \overline{\overline{I}}$.

Dans toute la suite, on considérera acquis que les grandeurs définies sont des grandeurs locales au voisinage du point matériel P à l'instant τ et on ne notera plus la dépendance de ces grandeurs par rapport à l'espace et au temps. Cependant, lorsqu'une ambiguïté est possible pour la valeur de la variable temps, celle-ci sera précisée (cf (II.5)). De plus, la distinction entre la description classique où la configuration de référence est \mathcal{C}_0 et celle, relative, où la configuration de référence est \mathcal{C}_t ne sera plus faite que par l'indice \cdot_t :

Exemple : $\overline{\overline{F}}(\vec{X}, \tau) \rightarrow \overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{F}}_t(\vec{x}, \tau) \rightarrow \overline{\overline{F}}_t$

Remarque : on peut lier les deux écritures (II.3) et (II.4) par la relation suivante :

$$\overline{\overline{F}}_t(\tau) = \overline{\overline{F}}(\tau) \overline{\overline{F}}^{-1}(t) \quad (\text{II.5})$$

II.1.2.2 Transformation de grandeurs élémentaires

A partir des définitions précédentes, on montre aisément [DUB 86] :

- qu'un élément de volume initial dV_0 se transforme en \widetilde{dV} par :

$$\widetilde{dV} = J dV_0 \quad (\text{II.6a})$$

$$J = \det(\overline{\overline{F}}) \quad (\text{II.6b})$$

- qu'un élément de surface initial orienté $dS_0 \vec{N}_0$ se transforme en $\widetilde{dS} \vec{n}$ par :

$$\widetilde{dS} \vec{n} = J \overline{\overline{F}}^{-t} dS_0 \vec{N}_0 \quad (\text{II.7})$$

II.1.3 Tenseurs des déformations

Dans ce paragraphe, nous définissons les différents tenseurs des dilatations et des déformations classiques et mettons en évidence l'existence de directions principales. Ceci nous permettra d'introduire la notion de mesure de déformation généralisée que nous utiliserons par la suite dans certaines lois de comportement.

Nous ne développerons ici que les expressions relatives à la description classique (II.1). Les différentes grandeurs associées à la description relative (II.2) peuvent évidemment être définies de manière similaire.

II.1.3.1 Tenseurs des dilatations

Soient $d\vec{X}$ et $d\vec{Y}$ deux vecteurs élémentaires dans l'espace de la configuration initiale \mathcal{C}_0 . Après déformation, ces vecteurs deviennent $d\vec{x}$ et $d\vec{y}$ dans l'espace de la configuration courante \mathcal{C}_τ . Le produit scalaire de ces vecteurs s'écrit alors :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{y} = d\vec{X} \overline{\overline{C}} d\vec{Y} \quad (\text{II.8})$$

avec

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t \overline{\overline{F}} \quad (\text{II.9})$$

Le tenseur $\overline{\overline{C}}$ est *le tenseur de Cauchy-Green droit*. Ce tenseur est lagrangien : il est défini sur la configuration de référence \mathcal{C}_0 .

En inversant la relation (II.8), on obtient *le tenseur de Cauchy-Green gauche*, tenseur eulérien défini sur la configuration déformée \mathcal{C}_τ :

$$d\vec{X} \cdot d\vec{Y} = d\vec{x} \overline{\overline{B}}^{-1} d\vec{y} \quad (\text{II.10})$$

avec :

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \overline{\overline{F}}^t \quad (\text{II.11})$$

Pour l'étude du comportement isotrope des matériaux, il nous faut introduire les trois invariants du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{C}}$:

$$I_1 = \text{tr}(\overline{\overline{C}}) \quad (\text{II.12a})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\text{tr}(\overline{\overline{C}}) \right)^2 - \text{tr}(\overline{\overline{C}}^2) \right] \quad (\text{II.12b})$$

$$I_3 = \det(\overline{\overline{C}}) \quad (\text{II.12c})$$

Il faut noter que les invariants du tenseur eulérien $\overline{\overline{B}}$ sont les mêmes que ceux de $\overline{\overline{C}}$.

II.1.3.2 Tenseurs des déformations classiques

Pour mesurer la déformation au point P , on estime la variation du produit scalaire de deux vecteurs issus de P , $d\overline{X}$ et $d\overline{Y}$, entre les configurations initiale \mathcal{C}_0 et déformée \mathcal{C}_τ . Dans la description lagrangienne, on exprime cette variation par rapport aux vecteurs initiaux :

$$d\overline{\vec{x}} \cdot d\overline{\vec{y}} - d\overline{X} \cdot d\overline{Y} = 2d\overline{X} \overline{\overline{E}} d\overline{Y} \quad (\text{II.13a})$$

$$\overline{\overline{E}} = \frac{\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}}{2} \quad (\text{II.13b})$$

$\overline{\overline{E}}$ est le tenseur de Green-Lagrange.

De même, en écriture eulérienne, cette variation est exprimée en fonction des vecteurs dans la configuration déformée courante :

$$d\overline{\vec{x}} \cdot d\overline{\vec{y}} - d\overline{X} \cdot d\overline{Y} = 2d\overline{\vec{x}} \overline{\overline{A}} d\overline{\vec{y}} \quad (\text{II.14a})$$

$$\overline{\overline{A}} = \frac{\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{B}}^{-1}}{2} \quad (\text{II.14b})$$

$\overline{\overline{A}}$ est le tenseur d'Euler-Almansi.

II.1.3.3 Hypothèse des petites perturbations

En utilisant le gradient du déplacement (II.3), le tenseur des dilatations de Green-Lagrange peut être écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{C}} = \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}} \right)^t \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}} \right) \quad (\text{II.15})$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations, c'est à dire petits déplacements et petites déformations, les infiniment petits du second ordre peuvent être négligés :

$$\overline{\overline{C}} \simeq \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}}^t \quad (\text{II.16})$$

Par des calculs similaires et en notant :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{\overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\vec{u}}^t}{2} \quad (\text{II.17})$$

on montre aisément :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{\varepsilon}} \quad (\text{II.18a})$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\varepsilon}} \quad (\text{II.18b})$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations les tenseurs lagrangiens et eulériens sont confondus, les configurations initiale et actuelle sont elles aussi confondues.

II.1.3.4 Décomposition polaire. Directions principales

En utilisant le théorème de décomposition polaire de Cauchy, le tenseur $\overline{\overline{F}}$ s'écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{V}} \overline{\overline{R}} \quad (\text{II.19})$$

où $\overline{\overline{R}}$ est un tenseur de rotation ($\overline{\overline{R}}^{-1} = \overline{\overline{R}}^t$ et $\det \overline{\overline{R}} = 1$) et $\overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{V}}$ sont respectivement les tenseurs définis positifs des déformations pures droit et gauche. Cette équation sépare le gradient de la transformation en rotation pure et déformation pure dans l'ordre désiré (rotation puis déformation ou inversement). Ces décompositions sont uniques.

Les tenseurs des dilatations permettent d'éliminer la composante rotationnelle de la déformation : ils ne font appel qu'aux déformations pures. En effet, en utilisant respectivement (II.9) et (II.19), et (II.11) et (II.19) :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{U}}^2 \quad (\text{II.20a})$$

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{V}}^2 \quad (\text{II.20b})$$

De par les définitions de $\overline{\overline{C}}$ et $\overline{\overline{B}}$ (équations (II.9) et (II.11)), ces tenseurs sont symétriques et définis positifs ; leurs matrices représentatives peuvent être diagonalisées sous la forme :

$$[C] = [N] [\Lambda^2] [N]^{-1} \quad (\text{II.21a})$$

$$[B] = [n] [\Lambda^2] [n]^{-1} \quad (\text{II.21b})$$

où $[N]$ et $[n]$ sont les matrices contenant respectivement les vecteurs propres de $[C]$ et $[B]$ qui définissent les directions principales de dilatation respectivement dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 et courante \mathcal{C}_τ , et où $[\Lambda]$ est la matrice diagonale des extensions principales λ_i , $i = 1, 2, 3$ (valeurs propres de $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{V}}$) :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant imposés positifs.

On établit alors simplement les relations suivantes :

$$[F] = [n] [\Lambda] [N]^{-1} \quad (\text{II.23a})$$

$$[n] = [R] [N] \quad (\text{II.23b})$$

$$[U] = [N] [\Lambda] [N]^{-1} \quad (\text{II.23c})$$

$$[V] = [n] [\Lambda] [n]^{-1} \quad (\text{II.23d})$$

$$[B] = [R] [C] [R]^t \quad (\text{II.23e})$$

De même, d'après les définitions des tenseurs des déformations $\overline{\overline{E}}$ et $\overline{\overline{A}}$, ceux-ci admettent les mêmes directions propres que $\overline{\overline{C}}$ et $\overline{\overline{B}}$ et ont pour valeurs propres respectives $\frac{\lambda_i^2 - 1}{2}$ et $\frac{1 - \lambda_i^{-2}}{2}$, $i = 1, 2, 3$. Il faut noter que dans le cas d'une rotation pure ($\lambda_i = 1$), les déformations sont nulles.

Avec les extensions principales, les invariants de $\overline{\overline{C}}$ et $\overline{\overline{B}}$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (\text{II.24a})$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (\text{II.24b})$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (\text{II.24c})$$

II.1.3.5 Notion de déformation généralisée

Les mesures des déformations présentées précédemment ne sont pas les seules possibles. En effet, plus généralement, une mesure de déformation doit vérifier les conditions suivantes [CHA 76a] :

- la mesure de déformation associée à une transformation de solide rigide doit être nulle ;
- elle doit s'annuler lorsque le tenseur gradient de la transformation est l'identité ;
- le tenseur des déformations doit être un tenseur du second ordre isotrope fonction de $\overline{\overline{C}}$ ou $\overline{\overline{B}}$;
- les valeurs propres de ce tenseur doivent être positives si les extensions principales correspondantes sont supérieures à 1 ;
- dans l'hypothèse des petites perturbations, ce tenseur doit se réduire au tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ défini précédemment (II.17).

Le choix des tenseurs $\overline{\overline{E}}$ et $\overline{\overline{A}}$ est arbitraire. On peut définir des tenseurs de déformation généralisée lagrangien et eulérien, par l'intermédiaire de leur matrice représentative, sous la forme :

$$[E_{gen}] = [N] [\Phi_{Lag}([\Lambda])] [N]^{-1} \quad (\text{II.25a})$$

$$[A_{gen}] = [n] [\Phi_{Eul}([\Lambda])] [n]^{-1} \quad (\text{II.25b})$$

où les fonctions de déformation généralisée $[\Phi_{Lag}([\Lambda])]$ et $[\Phi_{Eul}([\Lambda])]$, respectivement lagrangienne et eulérienne, sont des fonctions matricielles de $[\Lambda]$. Comme mentionné plus haut, elles doivent vérifier :

$$[\Phi_{Lag}([I])] = [\Phi_{Eul}([I])] = [0] \quad (\text{II.26})$$

avec $[I]$ la matrice identité et $[0]$ la matrice nulle.

Une forme particulière de ces fonctions est [HIL 78] :

$$[\Phi_{Lag}([\Lambda])] = [\Phi_{Eul}([\Lambda])] = \frac{[\Lambda]^\alpha - [I]}{\alpha} \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{II.27a})$$

$$[\Phi_{Lag}([\Lambda])] = [\Phi_{Eul}([\Lambda])] = \ln [\Lambda] \quad \alpha = 0 \quad (\text{II.27b})$$

Cette fonction est appelée mesure de la déformation d'ordre α où $\alpha \in \mathbf{R}$. Ces déformations généralisées ont été utilisées pour la première fois par Seth [SET 64].

Remarque : les tenseurs classiques présentés précédemment en II.1.3.2 sont en fait des cas particuliers des tenseurs de déformation généralisée avec $\alpha = 2$ pour $\overline{\overline{E}}$ et $\alpha = -2$ pour $\overline{\overline{A}}$.

Remarque : dans toute la suite, on exclura le cas où $\alpha = 0$, cas de la mesure de déformation de Hencky, parfois utilisée pour les métaux.

En écriture tensorielle, on note, de façon « symbolique » [CHA 76a] :

$$\overline{\overline{E}}_\alpha = \frac{\overline{\overline{C}}^{\frac{\alpha}{2}} - \overline{\overline{I}}}{\alpha} \quad (\text{II.28a})$$

$$\overline{\overline{A}}_\alpha = \frac{\overline{\overline{I}} - \left(\overline{\overline{B}}^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}}{\alpha} \quad (\text{II.28b})$$

De même que pour les tenseurs classiques, on définit les invariants des tenseurs des dilatations $\overline{\overline{C}}^{\frac{\alpha}{2}}$ et $\overline{\overline{B}}^{\frac{\alpha}{2}}$ précédents [BLA 74]. En fonction des élongations principales, ceux-ci s'écrivent :

$$I_{1\alpha} = \lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha \quad (\text{II.29a})$$

$$I_{2\alpha} = \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha + \lambda_2^\alpha \lambda_3^\alpha + \lambda_3^\alpha \lambda_1^\alpha \quad (\text{II.29b})$$

$$I_{3\alpha} = \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha \lambda_3^\alpha \quad (\text{II.29c})$$

II.1.3.6 Retour à la description relative

Par analogie, on définit les tenseurs $\overline{\overline{C}}_t$, $\overline{\overline{B}}_t$, $\overline{\overline{E}}_t$, $\overline{\overline{A}}_t$, $\overline{\overline{R}}_t$, $\overline{\overline{U}}_t$, $\overline{\overline{V}}_t$ pour la description relative entre \mathcal{C}_t et \mathcal{C}_τ .

$\overline{\overline{C}}_t$ et $\overline{\overline{B}}_t$ peuvent être reliés à $\overline{\overline{C}}$ par :

$$\overline{\overline{C}}_t(\tau) = \overline{\overline{F}}^{-t}(t) \overline{\overline{C}}(\tau) \overline{\overline{F}}^{-1}(t) \quad (\text{II.30a})$$

$$\overline{\overline{B}}_t(\tau) = \overline{\overline{F}}(\tau) \overline{\overline{C}}^{-1}(t) \overline{\overline{F}}^t(\tau) \quad (\text{II.30b})$$

De même, les tenseurs des dilatations et des déformations généralisées $\overline{\overline{C}}_t^{\frac{\alpha}{2}}$, $\overline{\overline{B}}_t^{\frac{\alpha}{2}}$, $\overline{\overline{E}}_{\alpha t}$, $\overline{\overline{A}}_{\alpha t}$ peuvent être définis.

Exemple : ces tenseurs relatifs généralisés sont eux aussi obtenus à partir de leur écriture dans la base propre. Par exemple :

$$\left[\overline{\overline{C}}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau) \right] = [N_t(\tau)] \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^\alpha(\tau)}{\lambda_1^\alpha(t)} & & \\ & \frac{\lambda_2^\alpha(\tau)}{\lambda_2^\alpha(t)} & \\ & & \frac{\lambda_3^\alpha(\tau)}{\lambda_3^\alpha(t)} \end{bmatrix} [N_t(\tau)]^{-1} \quad (\text{II.31})$$

où $\lambda_i(\tau)$, $i = 1, 3$ sont les extensions principales pour la transformation entre \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_τ , $\lambda_i(t)$, $i = 1, 3$, les extensions principales pour la transformation entre \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_t et où $[N_t(\tau)]$ contient les vecteurs propres de $\overline{\overline{C}}_t(\tau)$

II.1.4 Tenseurs des contraintes

Après la définition des grandeurs cinématiques et des déformations, nous présentons les grandeurs relatives aux efforts internes et aux contraintes.

II.1.4.1 Définition du tenseur eulérien

Soit la force \vec{df} s'exerçant sur la surface élémentaire orientée $dS \vec{n}$ au voisinage du point matériel P dans la configuration déformée \mathcal{C}_τ (dans ce paragraphe, on ne notera plus $\tilde{\cdot}$ les grandeurs relatives au temps τ). Les efforts internes de cohésion à travers l'élément de surface dS sont caractérisés par le vecteur contrainte \vec{t} :

$$\vec{t} = \frac{\vec{df}}{dS} \quad (\text{II.32})$$

On montre que ce vecteur dépend linéairement de \vec{n} , ce qui permet de définir *la tenseur des contraintes de Cauchy* $\vec{\sigma}$ par :

$$\vec{t} = \vec{\sigma} \vec{n} \quad (\text{II.33a})$$

$$\vec{df} = \vec{\sigma} \vec{n} dS \quad (\text{II.33b})$$

On montre, en utilisant l'équation de moment, qu'en l'absence de densité de moment ce tenseur est symétrique. De plus, étant défini sur la configuration déformée \mathcal{C}_τ , il est eulérien. Il est parfois appelé « tenseur des contraintes vraies ».

II.1.4.2 Les autres tenseurs des contraintes

Tenseur mixte

De façon analogue, on peut caractériser les efforts de cohésion par rapport à la géométrie non déformée (configuration \mathcal{C}_0) en utilisant une surface élémentaire orientée non déformée $dS_0 \vec{N}_0$:

$$\vec{df} = \vec{\Pi} \vec{N}_0 dS_0 \quad (\text{II.34})$$

Le tenseur $\vec{\Pi}$ ainsi défini n'est ni eulérien, ni lagrangien ; de plus, il n'est pas symétrique (ce qui rend son utilisation délicate). $\vec{\Pi}$ est *le tenseur de Boussinesq* ou *premier tenseur de Piola-Kirchhoff*.

Tenseur lagrangien

Pour obtenir un tenseur totalement lagrangien, il faut, comme précédemment, définir les contraintes en fonction de la géométrie non déformée, mais aussi considérer \vec{df} comme le vecteur transformé d'un pseudo-effort \vec{df}_0 relatif à la configuration non déformée :

$$\vec{df}_0 = \vec{F}^{-1} \vec{df} \quad (\text{II.35})$$

On écrit alors :

$$\vec{df}_0 = \vec{S} \vec{N}_0 dS_0 \quad (\text{II.36})$$

Le tenseur \vec{S} est alors lagrangien et symétrique. C'est *le tenseur de Piola-Lagrange* ou *second tenseur de Piola-Kirchhoff*.

Remarque : *il faut noter que le tenseur \vec{S} n'a pas de signification physique. En effet, contrairement à $\vec{\sigma}$ et $\vec{\Pi}$, il ne décrit pas les efforts réels.*

II.1.4.3 Relations entre les différents tenseurs

En utilisant (II.7), (II.33b), (II.34), (II.35) et (II.36), on établit facilement les relations permettant de passer d'un tenseur à l'autre :

$$\vec{\Pi} = J \vec{\sigma} \vec{F}^{-t} \quad (\text{II.37a})$$

$$\vec{S} = \vec{F}^{-1} \vec{\Pi} \quad (\text{II.37b})$$

$$\vec{S} = J \vec{F}^{-1} \vec{\sigma} \vec{F}^{-t} \quad (\text{II.37c})$$

Remarque : *dans l'hypothèse des petites perturbations, ces trois tenseurs se réduisent au même tenseur (comme les déformations).*

II.1.5 Équations du mouvement

On considère à nouveau le solide D qui admet pour volume V_0 et pour surface S_0 dans la configuration initiale non déformée \mathcal{C}_0 . Ce solide subit la transformation $\mathcal{F}(\tau)$ et admet pour volume V et pour surface S dans la configuration actuelle déformée \mathcal{C}_τ . Notons S_{0u} (respectivement S_{0T}) et S_u (respectivement S_T) les parties de la frontière où les déplacements (respectivement les tensions) sont imposés, respectivement dans les configurations initiale et actuelle. Notons \vec{f}_0 et \vec{f} les forces de volume dans ces deux configurations. Ces notations sont résumées sur la figure II.2.

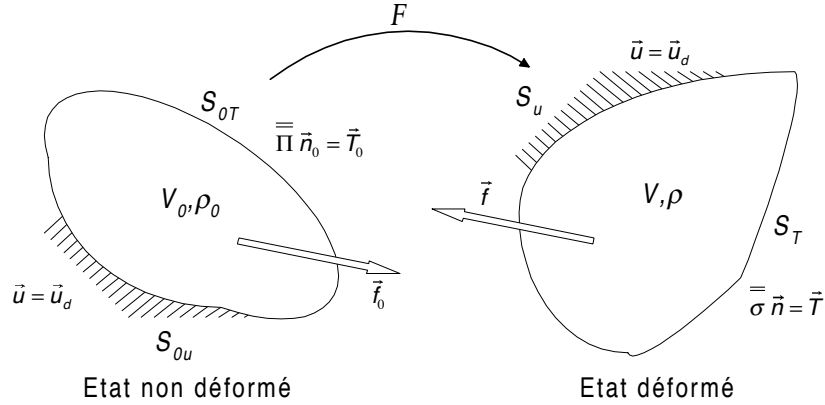


Figure II.2 : Principe des Travaux Virtuels : notations

Les équations locales du mouvement s'écrivent dans ces deux configurations sous les formes suivantes [DUB 86] :

- dans la configuration déformée (écriture eulérienne) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{div}}_{\vec{x}} \vec{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}}(\vec{x}, \tau) \text{ dans } V \\ \vec{\sigma} \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } S_T \\ \vec{u} = \vec{u}_d \text{ sur } S_u \\ \vec{\sigma}^t = \vec{\sigma} \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

- dans la configuration initiale (écriture lagrangienne) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{div}}_{\vec{X}} \vec{\Pi} + \rho_0 \vec{f}_0 = \rho_0 \ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau) \text{ dans } V_0 \\ \vec{\Pi} \vec{n}_0 = \vec{T}_0 \text{ sur } S_{0T} \\ \vec{u} = \vec{u}_d \text{ sur } S_{0u} \\ \vec{F} \vec{\Pi}^t = \vec{\Pi} \vec{F}^t \end{array} \right. \quad (\text{II.39})$$

En considérant un déplacement virtuel compatible $\delta \vec{u}$, en pondérant les équations précédentes avec cette fonction déplacement et en les intégrant sur le domaine, on écrit le Principe des Travaux Virtuels (PTV) : « le travail virtuel des quantités d'accélération est égal à la somme du travail virtuel des forces extérieures et du travail virtuel des forces intérieures (opposé au travail des déformations) » :

- intégration sur le volume déformé V (écriture eulérienne) :

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \vec{u} \cdot \rho \ddot{\vec{u}}(\vec{x}, \tau) dV &= - \iiint_V \overline{\text{grad}}_{\vec{x}} \delta \vec{u} : \overline{\sigma} dV + \iint_{S_T} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} dS \\ &+ \iiint_V \delta \vec{u} \cdot \rho \vec{f} dV \quad \forall \delta \vec{u} \text{ compatible} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

- intégration sur le volume initial (écriture lagrangienne), après prise en compte des symétries :

$$\begin{aligned} \iiint_{V_0} \delta \vec{u} \cdot \rho_0 \ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau) dV_0 &= - \iiint_{V_0} \delta \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{S}} dV_0 + \iint_{S_{0T}} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_0 dS_0 \\ &+ \iiint_{V_0} \delta \vec{u} \cdot \rho_0 \vec{f}_0 dV_0 \quad \forall \delta \vec{u} \text{ compatible} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

II.2 Modèles de comportement pour les matériaux de type caoutchouc

II.2.1 Introduction

La loi de comportement permet de relier les contraintes à l'instant t aux déformations subies jusqu'à cet instant. Le tenseur des contraintes est une fonctionnelle de l'histoire de la transformation. Cette fonctionnelle doit vérifier les trois principes d'indifférence matérielle (ou objectivité), de localisation spatiale et de causalité.

Dans ce travail, on fera l'hypothèse supplémentaire des matériaux matériellement simples [TRU 66], c'est à dire des matériaux dont la cinématique est entièrement décrite par le tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}$. La loi de comportement d'un tel matériau est :

$$\overline{\overline{\sigma}}(t) = \mathcal{S}_{\tau \leq t} \left\{ \overline{\overline{F}}(\tau) \right\} \quad (\text{II.42})$$

\mathcal{S} étant la fonctionnelle de réponse.

II.2.1.1 Incompressibilité

Les matériaux étudiés sont supposés incompressibles : les déformations se font sans variation de volume. Ceci n'est en fait qu'une approximation, mais l'amplitude des déformations que doivent subir ces matériaux pour voir leur volume varier n'est jamais rencontrée dans les procédés de mise en forme des plastiques. En se limitant à de tels cas, les relations (II.6a) et (II.6b) deviennent :

$$\widetilde{dV} = dV_0 \quad (\text{II.43a})$$

$$J = \det(\overline{\overline{F}}) = 1 \quad (\text{II.43b})$$

de plus, le troisième invariant (II.24c) des tenseurs des dilatations est lui aussi égal à l'unité :

$$I_3 = \det(\overline{\overline{C}}) = \det(\overline{\overline{B}}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad (\text{II.44})$$

et en utilisant cette identité, le deuxième invariant (II.24b) se réduit à :

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \quad (\text{II.45})$$

La connaissance de l'état de déformation ne permet plus à elle seule de calculer l'état de contrainte. Celui-ci est déterminé à une pression hydrostatique p près [BEA 87] :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \mathcal{S}_{\tau \leq t} \left\{ \bar{F}(\tau) \right\} \quad (\text{II.46})$$

II.2.1.2 Principe d'indifférence matérielle

Toute loi de comportement doit vérifier le principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité : la réponse du matériau doit être invariante dans tout changement de référentiel et plus particulièrement pour toute rotation du référentiel (on exclut le cas trivial de la translation).

Soit $\bar{Q}(t)$ le tenseur de la rotation entre les référentiels \mathcal{C} et \mathcal{C}^* , tout vecteur \vec{r} et tout tenseur du second ordre \bar{T} de \mathcal{C} seront dits intrinsèques [TRU 66] (ou indifférents par changement d'observateur) si leurs transformés respectifs \vec{r}^* et \bar{T}^* dans \mathcal{C}^* vérifient :

$$\vec{r}^* = \bar{Q}(t) \vec{r} \quad (\text{II.47a})$$

$$\bar{T}^* = \bar{Q}(t) \bar{T} \bar{Q}^t(t) \quad (\text{II.47b})$$

et invariants si :

$$\vec{r}^* = \vec{r} \quad (\text{II.48a})$$

$$\bar{T}^* = \bar{T} \quad (\text{II.48b})$$

On montre que $\bar{F}(t)$ se transforme en $\bar{F}^*(t) = \bar{Q}(t) \bar{F}(t)$ et $\bar{F}_t(\tau)$ devient $\bar{F}_t^*(\tau) = \bar{Q}(\tau) \bar{F}_t(\tau) \bar{Q}^t(t)$ et on obtient facilement [NAR 86] que :

- $\bar{V}, \bar{B}, \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}, \bar{U}_t, \bar{C}_t, \bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}$ sont intrinsèques
- $\bar{U}, \bar{C}, \bar{C}^{\frac{\alpha}{2}}$ sont invariants
- $\bar{V}_t, \bar{B}_t, \bar{B}_t^{\frac{\alpha}{2}}$ ne sont ni intrinsèques, ni invariants.

De même, pour les tenseurs des contraintes :

- $\bar{\sigma}$ est intrinsèque
- \bar{S} est invariant
- $\bar{\Pi}^* = \bar{Q}(t) \bar{\Pi}$, tout comme $\bar{F}, \bar{\Pi}$ n'est ni intrinsèque, ni invariant (de par son caractère mixte).

Pour assurer que (II.46) est bien objective, on peut l'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \mathcal{S}_1 \left\{ \bar{B}(t), \bar{C}_t(\tau) \right\} \quad (\text{II.49a})$$

$$\bar{S}(t) = -p\bar{C}^{-1}(t) + \mathcal{S}_2 \left\{ \bar{C}(\tau) \right\} \quad (\text{II.49b})$$

L'étape suivante consiste à tenir compte de l'hypothèse d'isotropie pour les matériaux que l'on étudie. Cela se traduit par l'utilisation des théorèmes de représentation [SID 82] qui permettent d'exprimer les lois de comportement en fonction des invariants des tenseurs.

II.2.2 Lois de comportement hyperélastiques

II.2.2.1 Définition

On restreint notre étude aux lois de comportement élastiques : l'état de contrainte au temps t dépend seulement de l'état de déformation au temps t et non pas de toute l'histoire de la déformation ($\tau \leq t$). La correspondance entre l'état de contrainte et l'état de déformation est bijective. Les équations précédentes (II.49a), (II.49b) se réduisent alors aux expressions suivantes :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \mathcal{S}_1 \left\{ \bar{B}(t) \right\} \quad (\text{II.50a})$$

$$\bar{S}(t) = -p\bar{C}^{-1}(t) + \mathcal{S}_2 \left\{ \bar{C}(t) \right\} \quad (\text{II.50b})$$

ceci, dans le cas incompressible.

La fonction énergie de déformation

Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une fonction scalaire énergie de déformation W dépendant de l'état de déformation [BEA 87] :

$$W = W(\bar{F}) \quad (\text{II.51})$$

La prise en compte du principe d'objectivité permet d'écrire que W doit être exprimée en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit \bar{C} . La prise en compte de l'isotropie impose à W d'être une fonction isotrope du tenseur de Cauchy-Green gauche \bar{B} [SID 82] :

$$W = W(\bar{C}) = W(\bar{B}) \quad (\text{II.52})$$

W étant une fonction scalaire isotrope du tenseur \bar{B} , elle est fonction des invariants de \bar{B} (qui sont aussi ceux de \bar{C}). En prenant en compte la relation d'incompressibilité (II.44), W n'est fonction que des deux premiers invariants des tenseurs des dilatations. De plus, en utilisant (II.24a), (II.24b), (II.24c), W peut être aussi exprimée en fonction des extensions principales :

$$W = W(I_1, I_2) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (\text{II.53})$$

Relations contrainte-déformation

Les relations tensorielles contrainte-déformation sont alors les suivantes :

- eulérienne :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + 2\bar{B} \frac{\partial W}{\partial \bar{B}} \quad (\text{II.54})$$

- lagrangienne :

$$\bar{S} = -p\bar{C}^{-1} + 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{C}} \quad (\text{II.55})$$

- mixte :

$$\bar{\Pi} = -p\bar{F}^{-t} + \frac{\partial W}{\partial \bar{F}} \quad (\text{II.56})$$

Dans les directions principales, on établit les relations suivantes, qui seront utiles par la suite :

$$\sigma_i = -p + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.57})$$

si W est exprimée en fonction des élongations principales [RIV 48a] et :

$$\sigma_i = -p + 2 \left[\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.58})$$

si W est exprimée en fonction des invariants.

Remarque : de par l'incompressibilité, les contraintes sont définies à une constante additive près p , les seules grandeurs connues sont en fait les différences de contraintes :

$$\sigma_i - \sigma_j = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \quad i, j = 1, 3 \quad i \neq j \quad (\text{II.59a})$$

$$\sigma_i - \sigma_j = 2 \left[(\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad i, j = 1, 3 \quad i \neq j \quad (\text{II.59b})$$

II.2.2.2 Forme de la fonction énergie de déformation

La mise en place des relations contrainte-déformation ayant été relativement simple, la détermination de la forme à adopter pour la fonction énergie de déformation est beaucoup plus complexe. En effet, dans le cadre des grandes déformations, la détermination de cette fonction a commencé dans les années 1940 pour se terminer autour de 1975.

Dans ce paragraphe, nous retracerons chronologiquement les différentes formes de W proposée dans la littérature. Des études bibliographiques sur ce sujet ont été effectuées par le passé : par Alexander jusqu'en 1968 [ALE 68], par Treloar pour quelques modèles [TRE 76] et par Jazsar de façon très complète [JAZ 93].

Pour chacun des modèles décrits, nous précisons leur origine :

- *statistique* : la forme de W est élaborée à partir de constatations statistiques sur l'arrangement des chaînes polymériques et les mécanismes microscopiques de déformation ;
- *empirique* : il s'agit souvent de transformation de formes statistiques afin qu'elles s'adaptent à des résultats expérimentaux ou des matériaux particuliers ;
- *phénoménologique* : ce type de représentation vise à modéliser le comportement global macroscopique du matériau à partir de considérations mathématiques et de résultats expérimentaux.

Dans un premier temps, on donnera une description succincte des différents modèles, ce qui nous permettra, par la suite, de choisir ceux qui conviendront le mieux à notre application.

Remarque : nous n'aborderons ici que le cas des matériaux incompressibles, la prise en compte de la compressibilité conduisant à des formulations différentes.

Modèle de Mooney (1940, phénoménologique)

Mooney [MOO 40] a supposé que lors de la déformation d'un cube en caoutchouc, le comportement reste linéaire en cisaillement simple. Cette hypothèse l'a amené à proposer la forme suivante pour W :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (\text{II.60})$$

où C_1 et C_2 sont les deux constantes matérielles.

Dans ce modèle, les dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants (utilisées dans (II.58)) sont donc constantes :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_2 \quad (\text{II.61})$$

Grâce à sa bonne représentation du comportement global et sa simplicité mathématique, ce modèle est jusqu'à présent le plus utilisé dans les problèmes de comportement hyperélastique.

Remarque : dans la même publication, Mooney propose une forme généralisée de son modèle, forme qui abandonne l'hypothèse de linéarité du cisaillement :

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n} (\lambda_1^{2n} + \lambda_2^{2n} + \lambda_3^{2n} - 3) + B_{2n} (\lambda_1^{-2n} + \lambda_2^{-2n} + \lambda_3^{-2n} - 3)] \quad (\text{II.62})$$

A notre connaissance ce modèle n'a été utilisée que sous sa forme tronquée à un terme qui correspond au modèle classique (II.60) avec $A_2 = C_1$ et $B_2 = C_2$.

Modèle néo-hookéen (1943, statistique)

Treloar [TRE 43] a appliqué la théorie statistique gaussienne au réseau des longues chaînes moléculaires des polymères (caoutchouc) pour montrer que W peut s'exprimer comme suit :

$$W = \frac{1}{2}G (I_1 - 3) \quad (\text{II.63})$$

avec G la constante matérielle donnée par :

$$G = NkT \quad (\text{II.64})$$

où N est le nombre de chaînes par élément de volume, k la constante de Boltzmann et T la température absolue.

Dans ce cas :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{G}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0 \quad (\text{II.65})$$

Cette relation laisse apparaître tout de suite la pauvreté du modèle : il ne permettra qu'une première approximation des déformations mais l'absence de I_2 dans l'expression de W ne peut pas être satisfaisante pour la description des grandes déformations sous tous les types de sollicitations.

Remarque : on peut noter que ce modèle est un cas particulier du modèle de Mooney. De nombreux auteurs [BOY 77] ont essayé de montrer que le coefficient C_2 du modèle de Mooney permettait de prendre en compte la partie non-gaussienne de la distribution des chaînes.

Formulation générale de Rivlin (1948, phénoménologique)

En 1948, Rivlin [RIV 48b] traite de façon mathématique le problème des grandes déformations du caoutchouc et propose pour W une expression sous forme de série de polynômes :

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (\text{II.66})$$

En réécrivant W sous la forme :

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^i (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3)^j \quad (\text{II.67})$$

on note que Rivlin impose nécessairement l'utilisation de puissances paires des élongations principales λ_i pour assurer à W d'être positive. Ceci provient du traitement purement mathématique qui rend possible l'existence de valeurs négatives pour ces élongations.

Ce modèle n'est évidemment pas utilisable tel quel mais sa troncature à un ordre donné a permis l'élaboration de nombreux modèles. On peut déjà noter que les modèles précédents en sont des cas particuliers.

Modèle à trois termes (1951, statistique)

En 1951, Isihara *et al.* [ISI 51] ont utilisé une théorie statistique non-gaussienne pour améliorer le modèle néo-hookéen et proposer la forme de W suivante :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_1 - 3)^2 + C_3 (I_2 - 3) \quad (\text{II.68})$$

Les trois constantes C_1 , C_2 et C_3 ont été identifiées pour les expériences de Treloar [TRE 44b] sur les données équibiaxiales : la corrélation avec l'expérience est satisfaisante alors que l'utilisation de ces mêmes constantes ne permet pas de représenter de façon convaincante le comportement en traction uniaxiale.

Modèle de Rivlin et Saunders (1951, phénoménologique)

Rivlin et Saunders [RIV 51] ont mené à bien de nombreuses expériences (extension simple, cisaillement pur, compression, torsion) sur des caoutchoucs vulcanisés. Ils ont montré que la dérivée partielle $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est une grandeur à peu près constante (indépendante de I_1 et I_2) et que $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ est uniquement fonction de I_2 (indépendante de I_1). La forme de la fonction énergie de déformation qu'ils proposent est :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (\text{II.69})$$

où C_1 est une constante matérielle et $f(I_2 - 3)$ une fonction de la variable I_2 à déterminer expérimentalement. Elle doit s'annuler pour $I_2 - 3 = 0$.

Modèle de Gent et Thomas (1958, empirique)

En 1955, Thomas propose une nouvelle forme de W basée sur l'utilisation de la théorie statistique non-gaussienne. Cette forme assez complexe et satisfaisante pour la modélisation de la microstructure n'a pas fourni de meilleurs résultats dans la modélisation du comportement global que le modèle néo-hookéen (II.63).

En 1958, Gent et Thomas [GEN 58] ont approché de façon empirique la fonction proposée par Thomas pour fournir la forme de W suivante :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \quad (\text{II.70})$$

Dans ce cas, on a les identités suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{C_2}{I_2} \quad (\text{II.71})$$

Il faut noter que cette expression de W vérifie la proposition de Rivlin et Saunders (II.69).

Modèle de Biderman (1958, phénoménologique)

Biderman [ALE 68] a proposé une forme tronquée à l'ordre 3 du développement de Rivlin (II.66) pour laquelle il ne conserve que les termes à l'ordre 1 pour $(I_2 - 3)$ et il néglige les termes croisés. La forme de W est similaire à celle d'Isihara (II.68) avec un terme en $(I_1 - 3)^3$ de plus :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 + C_{01} (I_2 - 3) \quad (\text{II.72})$$

La corrélation avec les résultats expérimentaux de Treloar [TRE 44b] est bonne pour la traction uniaxiale, la compression et le cisaillement, mais faible pour l'extension équi-biaxiale. Ce modèle ne s'avère pas capable de modéliser tous les types de déformation.

Modèle de Carmichael et Holdaway (1961, phénoménologique)

Carmichael et Holdaway [CAR 61] sont les premiers à proposer W sous la forme d'une fonction des extensions principales λ_i , $i = 1, 3$ et non des invariants :

$$W = \sum_{i=1}^3 [\phi(\lambda_i^2) - \phi(1)] \quad (\text{II.73})$$

où la fonction ϕ vérifie :

$$\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{1}{4u} \left[A e^{\beta(\sqrt{u} - \sqrt{u^{-1}})} - 2B(u + u^{-1} - 2) \right] \quad (\text{II.74})$$

A , B , β sont les constantes matérielles.

Ce modèle a donné de bons résultats sur les expériences de Treloar et sur les résultats de soufflage de membranes planes [KLI 64].

Modèle de Hart-Smith (1966, empirique)

En 1966-1967, Hart-Smith [HS 66], [HS 67] choisit d'utiliser la forme de W fournie par Gent et Thomas (II.70) pour retrouver les résultats expérimentaux de Treloar. En premier lieu, il décide de conserver la forme de $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ mais de ne plus utiliser une fonction constante pour $\frac{\partial W}{\partial I_1}$. Pour retrouver les résultats relatifs aux grandes valeurs de I_1 ($I_1 > 12$), il choisit une forme exponentielle :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = G e^{k_1(I_1-3)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = G \frac{k_2}{I_2} \quad (\text{II.75})$$

La fonction énergie de déformation est alors :

$$W = G \left\{ \int e^{k_1(I_1-3)^2} dI_1 + k_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \right\} \quad (\text{II.76})$$

Ce modèle admet donc trois constantes matérielles : G , k_1 , k_2 .

Une étude très complète de ce modèle ainsi que des moyens d'identification des paramètres a été fournie par Jazsar [JAZ 93].

Hypothèse de Valanis et Landel (1967, phénoménologique)

Les auteurs [VAL 67] imposent par hypothèse que la fonction W soit écrite comme la somme de trois fonctions séparées des élongations principales λ_1 , λ_2 et λ_3 qui, par symétrie, sont égales :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (\text{II.77})$$

Sous cette condition, la relation contrainte-déformation (II.57) devient :

$$\sigma_i = -p + \lambda_i w'(\lambda_i) \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.78})$$

où w' représente la dérivée $\frac{dw}{d\lambda}$ et où la fonction w est à déterminer expérimentalement.

L'avantage d'une telle formulation en terme d'élongations et non d'invariants est évidente : lors d'expériences, il est beaucoup plus simple de faire varier une élongation en conservant les autres constantes que de faire varier I_1 en conservant I_2 constant par exemple. Ceci simplifie bien évidemment l'identification des paramètres matériels.

De plus, dans leur article, Valanis et Landel propose la définition suivante de la fonction w :

$$w'(\lambda) = 2\mu \ln(\lambda) \quad (\text{II.79})$$

Cette forme de w n'a jamais été réutilisée par la suite.

Remarque : *il faut noter que les modèles de Mooney (II.60) et néo-hookéen (II.63) vérifient l'hypothèse de Valanis et Landel alors que le développement de Rivlin (II.66) ne la vérifie pas si l'on conserve au moins un terme croisé ($i \neq 0$ et $j \neq 0$).*

Modèle d'Alexander (1968, empirique)

En 1968, Alexander [ALE 68] modifie le modèle d'Hart-Smith pour décrire le comportement du néoprène utilisé dans la fabrication des ballons météorologiques de haute altitude. A partir de résultats expérimentaux, il propose la forme de W suivante :

$$W = \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \int e^{k(I_1-3)^2} dI_1 + C_2 \ln \left(\frac{(I_2-3) + \gamma}{\gamma} \right) + C_3 (I_2-3) \right\} \quad (\text{II.80})$$

où μ , k , C_1 , C_2 , C_3 , γ sont les six constantes du modèle.

Modèle d'Ogden (1972, phénoménologique)

En 1972, Ogden [OGD 72] remet en cause la restriction de puissances paires des élongations principales imposée par Rivlin (II.67). D'un point de vue physique, les élongations λ_i sont obligatoirement des grandeurs positives, Ogden propose alors W sous forme d'une série :

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{II.81})$$

où les doublets de réels $(\mu_n, \alpha_n)_{n=1, N}$ sont les constantes matérielles et doivent vérifier :

$$\mu_n \alpha_n > 0 \quad \forall n \quad (\text{II.82})$$

si $N = 1$ ou $N = 2$. Pour $N \geq 3$, cette condition peut ne pas être vérifiée par certaines paires de valeurs [OGD 72].

Remarque : *d'autres conditions sur les coefficients ont été proposées notamment par Twizell et Ogden [TWI 83] :*

$$|\alpha_n| > 1 \quad \forall n \quad (\text{II.83})$$

pour assurer l'unicité de la solution au problème d'un tube soumis simultanément au cisaillement et à la torsion ; et par Chadwick et al. [CHA 77a] :

$$\alpha_n \leq 1 \text{ ou } \alpha_n \geq 2 \quad \forall n \quad (\text{II.84})$$

pour assurer l'unicité de la solution au problème de la déformation d'un tube en rotation autour de son axe.

L'utilisation d'une série de trois termes permet d'obtenir de très bon résultats pour représenter le comportement global des matériaux. De plus, la simplicité de la formulation mathématique et l'utilisation directe des élongations (l'hypothèse de Valanis et Landel (II.77) est bien sûr vérifiée) en font un modèle très utilisé dans les problèmes numériques de grandes déformations hyperélastiques.

Remarque : *il faut noter que même s'il n'y fait jamais allusion, Ogden utilise une mesure généralisée de la déformation (présentée en II.1.3.5) et qu'en utilisant le premier invariant des tenseurs des dilatations généralisées (II.29a), on peut écrire W sous la forme :*

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (I_{1\alpha_n} - 3) \quad (\text{II.85})$$

Il apparaît alors clairement que les modèles néo-hookéen et de Mooney sont des cas particuliers du modèle d'Ogden avec respectivement :

$$N = 1, \quad \mu_1 = G \quad \alpha_1 = 2 \quad (\text{II.86})$$

$$N = 2, \quad \mu_1 = 2C_1 \quad \alpha_1 = 2, \quad \mu_2 = -2C_2 \quad \alpha_2 = -2 \quad (\text{II.87})$$

Modèle de Blatz, Sharda et Tschoegl (1974, phénoménologique)

A la même époque qu'Ogden, Blatz *et al.* [BLA 74] ont indépendamment proposé un modèle faisant explicitement référence à la théorie des déformations généralisées sous la forme :

$$W = \frac{2G}{\alpha} I_{E_\alpha} + B I_{E_\alpha}^\beta \quad (\text{II.88})$$

où G , B , α et β sont les constantes matérielles et où I_{E_α} représente le premier invariant du tenseur des déformations généralisées $\overline{\overline{E_\alpha}}$.

En utilisant nos notations, la fonction W se met sous la forme :

$$W = \frac{2G}{\alpha^2} (I_{1\alpha} - 3) + \frac{B}{\alpha^\beta} (I_{1\alpha} - 3)^\beta \quad (\text{II.89})$$

Cette forme de W n'a, à notre connaissance, jamais été utilisée dans la pratique. L'utilisation de mesures de déformation généralisée pour les problèmes hyperélastiques s'est toujours faite au travers du modèle d'Ogden, de par son efficacité et sa simplicité mathématique.

<i>Nom du modèle</i>	<i>Année</i>	<i>Origine</i>	<i>Forme de W</i>
Modèle de Mooney [MOO 40], [BOY 77]	1940	phénoménologique	$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3)$
Modèle néo-hookéen [TRE 43]	1943	statistique	$W = \frac{1}{2}G (I_1 - 3)$
Formulation générale de Rivlin [RIV 48b]	1948	phénoménologique	$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$
Modèle à trois termes [ISI 51]	1951	statistique	$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_1 - 3)^2 + C_3 (I_2 - 3)$
Modèle de Rivlin et Saunders [RIV 51]	1951	phénoménologique	$W = C_1 (I_1 - 3) + f (I_2 - 3)$
Modèle de Gent et Thomas [GEN 58]	1958	empirique	$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right)$
Modèle de Biderman [ALE 68]	1958	phénoménologique	$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 + C_{01} (I_2 - 3)$
Modèle de Carmichael et Holdaway [CAR 61], [KLI 64]	1961	phénoménologique	$W = \sum_{i=1}^3 [\phi(\lambda_i^2) - \phi(1)]$ avec $\frac{d\phi(u)}{du} = \frac{1}{4u} \left[A e^{\beta(\sqrt{u} - \sqrt{u^{-1}})} - 2B(u + u^{-1} - 2) \right]$
Modèle de Hart-Smith [HS 66], [HS 67], [JAZ 93]	1966	empirique	$W = G \left\{ \int e^{k_1(I_1-3)^2} dI_1 + k_2 \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \right\}$

Hypothèse de Valanis et Landel [VAL 67]	1967	phénoménologique	$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3)$
Modèle d'Alexander [ALE 68]	1968	empirique	$W = \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \int e^{k(I_1-3)^2} dI_1 + C_2 \ln \left(\frac{(I_2-3) + \gamma}{\gamma} \right) + C_3 (I_2-3) \right\}$
Modèle d'Ogden [OGD 72], [CHA 77a], [TWI 83]	1972	phénoménologique	$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3)$
Modèle de Blatz, Sharda et Tschoegl [BLA 74]	1974	phénoménologique	$W = \frac{2G}{\alpha} I_{E\alpha} + B I_{E\alpha}^\beta$

Tableau II.1: Tableau récapitulatif des différents modèles hyperélastiques

Conclusion

Le tableau II.1 résume les différentes formes de la fonction énergie de déformation.

Nous avons vu, dans ce paragraphe, la diversité des formes proposées pour la fonction énergie de déformation. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons les critères qui guideront notre choix et nous détaillerons les modèles retenus.

II.2.2.3 Choix de la fonction énergie de déformation

Comme nous l'avons montré, l'élaboration des modèles et donc de la forme de la fonction énergie de déformation s'est faite petit à petit en améliorant les formulations existantes pour mieux représenter tel ou tel matériau, sous tel ou tel type de sollicitation.

Dans l'absolu, un modèle de comportement doit pouvoir approcher tous les types de déformation, dans la pratique ceci s'avère le plus souvent difficile. Alors, les critères devant guider notre choix sont les suivants : simplicité du modèle, notamment dans l'optique de sa mise en œuvre numérique, et capacité de ce modèle à représenter le plus justement possible les types de déformation qui nous intéressent (dans notre cas les déformations biaxiales pour les membranes, apparaissant dans les procédés).

Notre choix s'est porté sur les modèles de Mooney (qui englobe le modèle néo-hookéen) et d'Ogden. Le modèle de Mooney est « universel » (c'est le modèle hyperélastique le plus utilisé), ce qui permet d'avoir à notre disposition de nombreux résultats aussi bien expérimentaux que numériques. De plus, sa formulation mathématique très simple permet d'appréhender les phénomènes physiques (nous le verrons plus loin pour les instabilités des membranes soufflées). De par le nombre de ses coefficients et la souplesse de sa formulation, le modèle d'Ogden permet, quant à lui, de modéliser avec justesse les différents comportements notamment l'extension biaxiale [OGD 72]. Sa forme mathématique est facilement exploitable pour la résolution numérique des problèmes.

Dans ce paragraphe, nous détaillons la forme des relations contrainte-déformation pour ces deux modèles et nous identifions leur domaine de validité à partir de résultats expérimentaux fournis par la littérature.

Relations contrainte-déformation

A partir des relations (II.54), (II.55), (II.56) et des formes des fonctions W (II.60) et (II.81), on obtient les relations contrainte-déformation dans les directions principales pour les deux modèles :

- Mooney :

$$\sigma_i = -p + 2 \left[C_1 \lambda_i^2 - C_2 \frac{1}{\lambda_i^2} \right] \quad (\text{II.90a})$$

$$S_i = -p \frac{1}{\lambda_i^2} + 2 \left[C_1 - C_2 \frac{1}{\lambda_i^4} \right] \quad (\text{II.90b})$$

$$\Pi_i = -p \frac{1}{\lambda_i} + 2 \left[C_1 \lambda_i - C_2 \frac{1}{\lambda_i^3} \right] \quad (\text{II.90c})$$

- Ogden :

$$\sigma_i = -p + \mu_n \lambda_i^{\alpha_n} \quad (\text{II.91a})$$

$$S_i = -p \frac{1}{\lambda_i^2} + \mu_n \lambda_i^{\alpha_n - 2} \quad (\text{II.91b})$$

$$\Pi_i = -p \frac{1}{\lambda_i} + \mu_n \lambda_i^{\alpha_n - 1} \quad (\text{II.91c})$$

avec sommation sur l'indice n .

Domaine de validité des modèles

Pour comparer les modèles et déterminer leur domaine de validité, nous utilisons les données de Treloar [TRE 44b] qui a mené à bien des expériences de traction uniaxiale, de cisaillement pur et de traction équibiaxiale (par l'intermédiaire du soufflage d'une membrane plane) sur des échantillons de caoutchouc 8% S vulcanisé. Comme mentionné précédemment, ces expériences ont été largement utilisées pour la validation des modèles [HS 66], [OGD 72]. Les constantes matérielles sont respectivement :

- modèle néo-hookéen (fournies dans [TRE 44b]) :

$$G = 4,0 \text{ kg/cm}^2$$

- modèle de Mooney (constantes matérielles que nous avons identifiées sur la courbe de traction uniaxiale pour $1 \leq \lambda \leq 4$) :

$$C_1 = 1,27 \text{ kg/cm}^2 \text{ et } C_2 = 0,74 \text{ kg/cm}^2$$

- modèle d'Ogden (fournies dans [OGD 72]) :

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 6,3 \text{ kg/cm}^2 & \mu_2 = 0,012 \text{ kg/cm}^2 & \mu_3 = -0,1 \text{ kg/cm}^2 \\ \alpha_1 = 1,3 & \alpha_2 = 5,0 & \alpha_3 = -2,0 \end{array}$$

On peut considérer que pour les courbes expérimentales utilisées dans ce paragraphe, les constantes précédentes sont les plus à même de modéliser le comportement du matériau.

Dans ses expériences, Treloar mesure les élongations principales et les forces appliquées rapportées à la surface initiale (composantes du tenseur $\overline{\Pi}$). Les relations contrainte-déformation correspondant à chaque modèle et pour chaque type de sollicitation sont fournies par :

- traction uniaxiale : l'échantillon est étiré suivant l'axe 1 d'une élongation $\lambda_1 = \lambda$ et les matrices des élongations et des contraintes du premier tenseur de Piola-Kirchhoff sont respectivement :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda^{-\frac{1}{2}} & \\ & & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Pi] = \begin{bmatrix} \Pi & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.92})$$

d'où, en éliminant la pression hydrostatique dans (II.90c) et (II.91c) :

$$\begin{aligned} \text{néo-hookéen} : & \quad \Pi = G(\lambda - \lambda^{-2}) \\ \text{Mooney} : & \quad \Pi = 2C_1(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_2(1 - \lambda^{-3}) \\ \text{Ogden} : & \quad \Pi = \mu_n \left[\lambda^{\alpha_n - 1} - \lambda^{-(1 + \frac{1}{2}\alpha_n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

- cisaillement pur : une des extensions (λ_2 par exemple) est fixée à 1 et l'échantillon est étiré suivant l'axe 1 de λ ; les matrices sont les suivantes :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Pi] = \begin{bmatrix} \Pi & & \\ & \text{indéterminé} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.94})$$

d'où, en éliminant la pression hydrostatique dans (II.90c) et (II.91c) :

$$\begin{aligned} \text{néo-hookéen} : & \quad \Pi = G(\lambda - \lambda^{-3}) \\ \text{Mooney} : & \quad \Pi = 2C_1(\lambda - \lambda^{-3}) + 2C_2(\lambda - \lambda^{-3}) \\ \text{Ogden} : & \quad \Pi = \mu_n \left[\lambda^{\alpha_n - 1} - \lambda^{-(1 + \alpha_n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

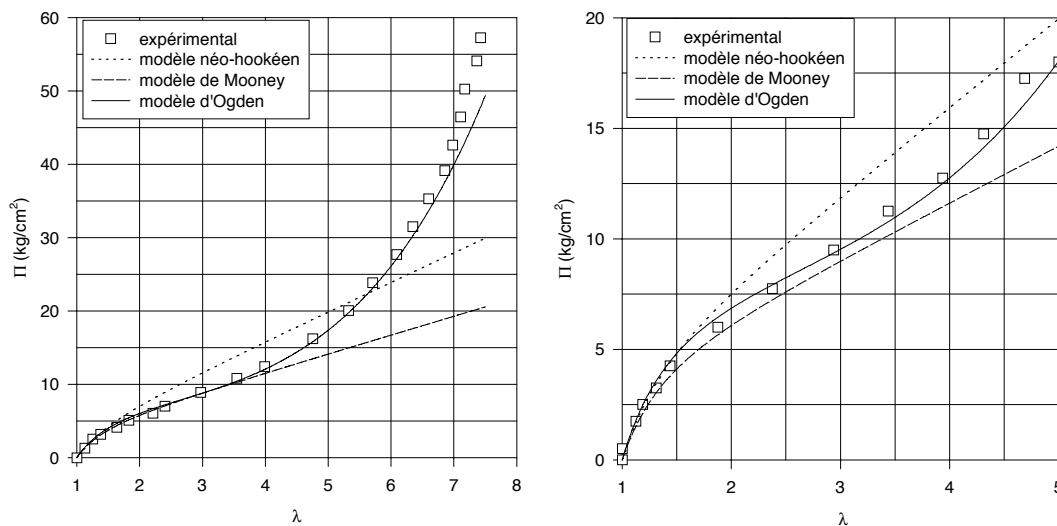
- tension équi-biaxiale : cet état de déformation est obtenu par exemple au pôle d'une membrane initialement plane soufflée et se caractérise par le fait que deux des élongations principales sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^{-2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Pi] = \begin{bmatrix} \Pi & & \\ & \Pi & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

d'où, en éliminant la pression hydrostatique dans (II.90c) et (II.91c) :

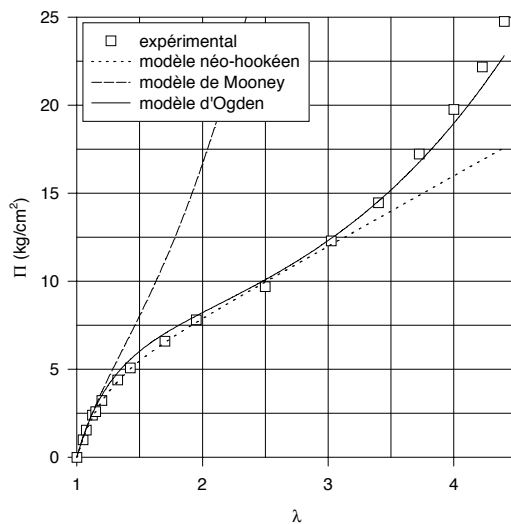
$$\begin{aligned} \text{néo-hookéen} : & \quad \Pi = G(\lambda - \lambda^{-5}) \\ \text{Mooney} : & \quad \Pi = 2C_1(\lambda - \lambda^{-5}) + 2C_2(\lambda^3 - \lambda^{-3}) \\ \text{Ogden} : & \quad \Pi = \mu_n \left[\lambda^{\alpha_n - 1} - \lambda^{-(1 + 2\alpha_n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

Les courbes des figures II.II.3(a), II.II.3(b) et II.II.3(c) présentent les points expérimentaux et les courbes obtenues à partir des relations contrainte-déformation (II.93), (II.95), (II.97) et des valeurs des coefficients matériels données précédemment.



(a) Traction uniaxiale

(b) Cisaillement pur



(c) Extension biaxiale

Figure II.3 : Comparaison modèles - expériences de Treloar

Le modèle de Mooney est fiable pour des élongations relativement grandes aussi bien en traction ($\lambda \leq 4$) qu'en cisaillement ($\lambda \leq 3$) mais l'utilisation des mêmes constantes pour l'extension équibi-axiale n'est pas satisfaisante : les grandeurs matérielles ayant été identifiées sur les données de traction uniaxiale ne sont plus utilisables pour $\lambda \geq 1,4$ en extension biaxiale.

Le modèle néo-hookéen est quant à lui meilleur sur ces données biaxiales ($\lambda \leq 3$) mais au prix de résultats beaucoup moins satisfaisants pour les autres types de déformation ($\lambda \leq 2$ en traction et en cisaillement).

Le modèle d'Ogden permet, de par le nombre de ses coefficients et la souplesse de sa formulation, de s'adapter aux trois types de déformation avec des résultats satisfaisants même pour des très grandes déformations (λ de l'ordre de 7 en traction et de l'ordre de 4–5 en cisaillement et tension biaxiale).

Cet exemple permet de mettre en évidence les possibilités des modèles retenus. Le modèle de Mooney ne permet pas de modéliser tous les types de sollicitations, mais sa simplicité mathématique, sa signification physique et son caractère « universel » déjà mentionné justifient qu'on le retienne. Le modèle d'Ogden est, lui aussi, simple mathématiquement ; de plus la souplesse de sa formulation permet de bien appréhender tous les types de sollicitations (il faut pour cela utiliser le nombre de termes nécessaires dans la série). On peut cependant lui reprocher son manque de sens physique.

II.2.3 Lois de comportement viscoélastiques non-linéaires

II.2.3.1 Introduction

Dans le paragraphe précédent, nous avons explicité les modèles hyperélastiques utilisés pour la description du comportement des matériaux du type caoutchouc dont les élastomères, et les polymères fondus au delà de leur température de transition vitreuse, T_g . Tous ces modèles étaient construits à partir de l'hypothèse de correspondance bijective entre l'état de contrainte et l'état de déformation : à un état de déformation donné, il correspond un unique état de contrainte, et réciproquement.

Dans la réalité, pour les matériaux que nous étudions, des phénomènes visqueux apparaissent [WAR 83]. L'état de contrainte ne dépend plus seulement de l'état actuel de la structure mais aussi de l'histoire de la transformation qu'a subie le matériau pour atteindre l'état actuel. Il y a donc dissipation d'énergie (lors des ruptures des longues chaînes polymériques par exemple). On peut dire que le matériau possède une forme de « mémoire ».

Pour mettre en évidence ces phénomènes retardés, on se réfère à des expériences de relaxation et de retard (figure II.4). Dans le cas de la relaxation (figure II.4(a)), un échelon de déformation est imposé et on observe que la contrainte dans l'échantillon se relaxe : après avoir atteint une valeur instantanée, elle diminue pour rejoindre progressivement une valeur élastique. Dans le cas du retard, un échantillon de matériau est soumis à une traction uniaxiale pour laquelle la contrainte est maintenue constante durant l'essai (figure II.4(b)). La réponse en déformation à ce chargement se décompose en une déformation élastique instantanée et une déformation retardée.

Pour définir la notion de viscoélasticité, nous devons prendre en compte un nouvel essai, dit de recouvrance. On impose au matériau un créneau de contrainte et on observe la déformation (figure II.5). Par définition, un solide a un comportement viscoélastique lorsque la déformation permanente est nulle dans un essai de recouvrance [LEM 85]. Cette définition des solides viscoélastiques est restreinte aux matériaux non-vieillissants, c'est-à-dire aux matériaux dont les propriétés mécaniques n'évoluent pas au cours du temps.

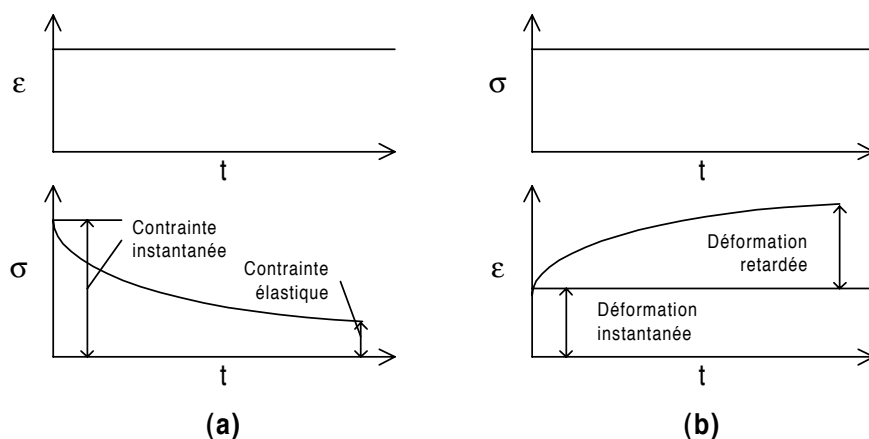


Figure II.4 : Expériences de (a) relaxation et (b) retard

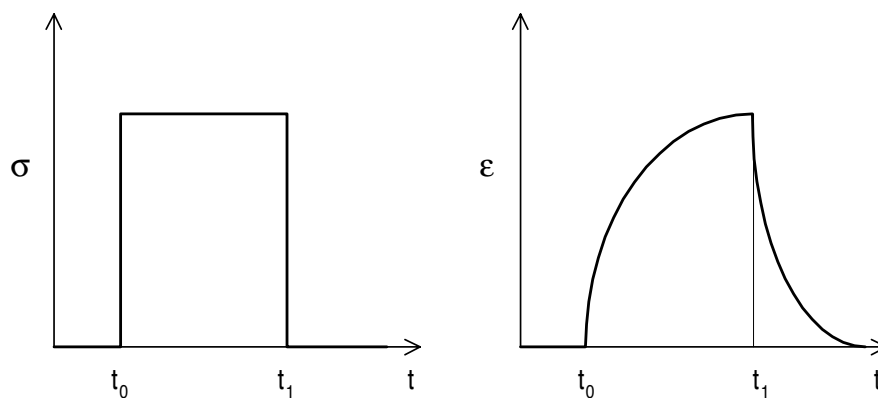


Figure II.5 : Expérience de recouvrance

Dans toute la suite, nous ne considérerons que les matériaux ayant un comportement du type caoutchouc. Ils seront supposés isotropes, homogènes, non-vieillissants et solides. Les déformations sont supposées se faire dans des conditions isothermes. De plus, on postule l'existence d'une configuration naturelle non déformée et non contrainte.

La modélisation de tels comportements, notamment en grandes déformations, a fait l'objet de très nombreux travaux et est sujette à des approches très différentes. Les lois de comportement proposées dans la littérature sont de ce fait multiples et variées. Le traitement que nous ferons de la viscoélasticité sera succinct. Nous établirons tout d'abord la relation contrainte-déformation dans l'hypothèse des petites perturbations. Puis nous ferons un rappel bibliographique pour la modélisation du comportement en grandes déformations viscoélastiques des polymères en restreignant notre étude aux modèles intégraux. Enfin, nous traiterons dans le détail les cas des deux modèles que nous avons choisis.

II.2.3.2 Viscoélasticité linéaire

Le point de départ de l'élaboration d'une relation contrainte-déformation générale dans le cas des petites perturbations est le Principe de Superposition de Boltzmann [BOL 76]. Boltzmann propose que (1) le retard d'un échantillon est une fonction de toute l'histoire du chargement,

(2) chaque incrément de chargement fournit une contribution indépendante à la déformation finale et cette déformation finale est obtenue par simple addition de chaque contribution.

On considère un échantillon soumis au chargement incrémental uniaxial en contrainte (figure II.6) : au temps $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ viennent respectivement s'ajouter les incréments de contrainte $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_N$. La déformation finale au temps t est fournie par :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i J(t - \tau_i) \quad (\text{II.98})$$

où $J(\tau)$ est la fonction de retard du matériau.

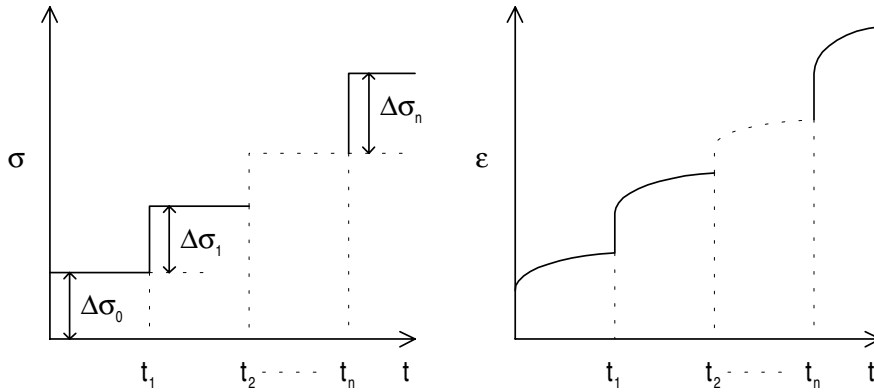


Figure II.6 : Chargement incrémental : Principe de Superposition de Boltzmann

Après la prise en compte de l'existence d'un état naturel non déformé et non contraint, dans lequel serait le matériau au moment du début du chargement ($t = 0$), l'équation (II.98) peut être généralisée sous la forme de l'intégrale :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (\text{II.99})$$

ou encore :

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma_0 + \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.100})$$

où σ_0 est la contrainte au temps $t = 0$. De façon similaire, on définit la fonction relaxation du matériau $G(\tau)$ par :

$$\sigma(t) = G(t) \varepsilon_0 + \int_0^t G(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.101})$$

En généralisant cette écriture aux trois dimensions et en utilisant les hypothèses d'isotropie et de symétrie du matériau, l'équation (II.101) ne fait plus intervenir que deux fonctions matérielles $\lambda(\tau)$ et $\mu(\tau)$ [HAD 88] :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{d\text{tr}[\bar{\bar{\varepsilon}}(\tau)]}{d\tau} d\tau \bar{\bar{I}} + \int_0^t 2\mu(t - \tau) \frac{d\bar{\bar{\varepsilon}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.102})$$

(comme en élasticité linéaire, il n'y a que deux fonctions matérielles).

En écrivant cette équation sous la forme :

$$\text{tr} [\bar{\sigma}(t)] = \int_0^t (3\lambda(t-\tau) + 2\mu(t-\tau)) \frac{d \text{tr} [\bar{\epsilon}(\tau)]}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.103a})$$

$$\bar{s}(t) = \int_0^t 2\mu(t-\tau) \frac{d\bar{\epsilon}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.103b})$$

où les tenseurs déviateurs \bar{s} et $\bar{\epsilon}$ sont définis par :

$$\bar{s}(t) = \bar{\sigma}(t) - \frac{1}{3} \text{tr} [\bar{\sigma}(t)] \bar{I} \quad (\text{II.104a})$$

$$\bar{\epsilon}(t) = \bar{\epsilon}(t) - \frac{1}{3} \text{tr} [\bar{\epsilon}(t)] \bar{I} \quad (\text{II.104b})$$

Ces équations (II.103a), (II.103b) laissent apparaître les composantes en dilatation (premier terme) et déviatoire (second terme) du comportement du matériau. Elles permettent de montrer, par des considérations thermodynamiques, que les fonctions de retard $J(t-\tau)$ et de relaxation $G(t-\tau)$ sont respectivement positive croissante et positive et décroissante [HAD 88].

De plus, en ajoutant l'hypothèse d'incompressibilité à (II.102), on obtient la relation contrainte-déformation générale d'un matériau viscoélastique incompressible en petites déformations :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{d\bar{\epsilon}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.105})$$

où $\mu(\tau)$ est la fonction de relaxation du matériau.

II.2.3.3 Modèles de comportement en grandes déformations

Dans ce paragraphe, nous ferons quelques rappels bibliographiques non exhaustifs pour montrer la diversité et la difficulté d'harmonisation pour la description du comportement viscoélastique non-linéaire. Ces rappels sont fondés sur les travaux de Christensen [CHR 82], Ward [WAR 83] et Haddad [HAD 88].

Le point de départ de tous les travaux considérés est l'équation générale de Green-Rivlin [GRE 57] qui relie la contrainte de Cauchy à l'histoire de la déformation par :

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{F}^t(t) \bar{\mathcal{S}}_{\tau=0}^{\infty} \left\{ \bar{E}(t-\tau) \right\} \bar{F}(t) \quad (\text{II.106})$$

Dans leur publication, les auteurs proposent d'approcher la contrainte par un développement polynômial de fonctionnelles linéaires de l'histoire de la déformation (développement de Fréchet-Volterra), en supposant que de petits changements dans l'histoire des déformations n'entraînent que des petits changements de contrainte. En se limitant à une seule direction, la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{dE(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{dE(\tau_2)}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \frac{dE(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{dE(\tau_2)}{d\tau_2} \frac{dE(\tau_3)}{d\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.107})$$

où $E(\tau)$ est la mesure de déformation de Green-Lagrange et $G_1(\tau)$, $G_2(\tau_1, \tau_2)$, $G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, ... sont les fonctions de relaxation. Ce ne sont pas des fonctions intrinsèques du matériau car elles dépendent de l'ordre de la troncature effectuée. Le plus souvent, cette formulation

est utilisée dans le cas de sollicitations uniaxiales car les fonctions matérielles deviennent très compliquées à déterminer en trois dimensions : Lockett [WAR 83] a montré qu'il faut 17 types de tests différents pour évaluer les fonctions du modèle tronqué à l'ordre 3. Certains progrès ont été faits dans la détermination des fonctions matérielles ([WAR 83] Chap. 9), mais de telles expressions restent très compliquées à utiliser.

Pour sortir du cadre du développement de Green-Rivlin, Coleman et Noll [COL 61] proposent d'utiliser la théorie de la viscoélasticité linéaire finie (FLV). Cette théorie n'impose pas aux déformations d'être petites, mais seulement d'avoir peu changé dans le passé récent. Ainsi, la valeur courante de la contrainte peut être déterminée par des intégrales linéaires de l'histoire de la déformation lorsque celle-ci est mesurée par rapport à la configuration actuelle. On écrit la relation contrainte-déformation sous la forme générale suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}^\infty \left\{ \bar{C}(t) \right\} + \bar{F}(t) \int_{-\infty}^t \bar{g} \left(\bar{C}(t), t - \tau \right) \frac{d\bar{E}_t(\tau)}{d\tau} d\tau \bar{F}^t(t) \quad (\text{II.108})$$

où $\bar{\sigma}^\infty \left\{ \bar{C}(t) \right\}$ est la contrainte élastique « à long terme » qui ne dépend que de la déformation actuelle mesurée par rapport à la configuration de référence, $\bar{g} \left(\bar{C}(t), t - \tau \right)$ est le tenseur du quatrième ordre des fonctions de relaxation et $\bar{E}_t(\tau)$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange relativement à la configuration actuelle. En 1965, Lianis [LIA 65] propose la forme simplifiée suivante pour les matériaux incompressibles :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \bar{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{B}^2 + \int_{-\infty}^t \bar{g} \left(\bar{B}(t), t - \tau \right) \frac{d\bar{C}_t(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.109})$$

dans laquelle W est une fonction énergie de déformation similaire au cas hyperélastique. Il faut noter que cette équation est bien conforme à la forme générale (II.49a) assurant l'objectivité de la loi de comportement. Sous cette forme, l'équation est encore difficile à utiliser pour l'identification de paramètres matériels. Lianis *et al.* [CHR 82] ont proposé certaines simplifications et ont utilisé ces lois simplifiées pour modéliser le comportement de certains élastomères.

Schapery [SCH 69] propose une approche différente basée sur des considérations thermodynamiques. En tenant compte de l'équivalence entre les effets de la température et les effets temporels, il propose la relation suivante (écrite en uniaxial) qui utilise la déformation infinitésimale ε :

$$\sigma(t) = h_e G_r \varepsilon(t) + h_1 \int_{-\infty}^t \Delta G(\xi - \xi') \frac{d}{d\tau} [h_2 \varepsilon(t)] d\tau \quad (\text{II.110})$$

où $\Delta G(t) = G(t) - G_r$ (G_r est la composante élastique) et le temps réduit ξ est défini par :

$$\xi = \xi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\varepsilon[\varepsilon(t')]} \quad \text{et} \quad \xi' = \xi(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt'}{a_\varepsilon[\varepsilon(t')]} \quad (\text{II.111})$$

h_e , h_1 , h_2 et a_ε sont des fonctions matérielles non-linéaires en ε et $G(t)$ est la fonction de relaxation en petites déformations.

Une autre théorie très utilisée est celle développée par Bernstein, Kearsley et Zapas [BER 63] et Kaye [KAY 62] et connue sous le nom de modèle K-BKZ. Ce modèle a été construit aussi bien pour des comportements de type solides que fluides. Cependant, seule la forme fluide de ce modèle est utilisée aussi bien pour des polymères à l'état liquide (dans les procédés d'injection par exemple) que pour des solides (élastomères) [TAN 88]. La forme la plus générale de la

relation contrainte-déformation pour des matériaux incompressibles est :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + 2 \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial U}{\partial II_1} \bar{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U}{\partial II_2} \bar{C}_t(\tau) \right) d\tau \quad (\text{II.112})$$

où

$$II_1 = \text{tr} \left[\bar{C}_t(\tau)^{-1} \right] \quad \text{et} \quad II_2 = \text{tr} \left[\bar{C}_t(\tau) \right] \quad (\text{II.113})$$

U est le potentiel, fonction du temps, de II_1 et II_2 .

En 1976, Chang, Bloch et Tschoegl [CHA 76a] ont choisi d'utiliser les mesures de déformation généralisée (présentées en II.1.3.5) pour proposer un modèle, appelé CBT, basé sur l'hypothèse de séparation entre les effets du temps et de la déformation dans la fonction de relaxation :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \left[\bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} + \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \right] d\tau \quad (\text{II.114})$$

où α et $G(\tau)$ sont les paramètres matériels à déterminer.

En 1980, Christensen [CHR 80] repart de la forme initiale du développement (II.107) pour fournir un modèle simple inspiré du modèle hyperélastique néo-hookéen. Ce modèle est le plus simple pour les solides viscoélastiques en grandes déformations :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \bar{F}(t) \left[g_0\bar{I} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \bar{F}^t(t) \quad (\text{II.115})$$

Après avoir comparé les modèles de la viscoélasticité linéaire finie de Lianis (II.109) et CBT (II.114) sur le comportement du caoutchouc naturel, Sullivan *et al.* ont repris le modèle CBT dans une série d'articles [SUL 87], [SUL 89] et ont utilisé deux mesures de déformation différentes pour éviter de faire l'hypothèse de séparation des effets du temps et des déformations dans la fonction de relaxation :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{2}{3\alpha} E_e^0 \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) - \frac{2}{3\beta} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\beta}{2}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.116})$$

ce modèle est appelé modèle généralisé solide-liquide (GSL).

Dans le même temps, Morman [MOR 88] propose une version modifiée de la théorie de la viscoélasticité linéaire finie de Coleman et Noll. Sa théorie, appelée MFLV, généralise à la fois les modèles K-BKZ et CBT précédents. La relation contrainte-déformation proposée a la forme suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{2}{3\alpha} G_e \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) + \frac{2}{3\alpha} \int_0^t G(t-\tau) \left[\bar{B}^{\frac{\alpha}{4}}(t) \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{B}^{\frac{\alpha}{4}}(t) \right] d\tau \quad (\text{II.117})$$

G_e , $G(t-\tau)$ et α étant les constantes matérielles à identifier.

Pour conclure, nous citerons l'article récent de O'Dowd et Knauss [O'D 95] qui se proposent de fournir, à partir de considérations statistiques similaires à celles utilisées en hyperélasticité, un modèle très général de comportement des polymères. L'étude est fondée sur les travaux de Christensen [CHR 82] et prend en compte la compressibilité. Elle est cependant trop générale pour obtenir des modèles et des paramètres matériels simplement identifiables et utilisables.

Le tableau II.2 résume ces différents modèles de comportement viscoélastiques non-linéaires.

<i>Nom du modèle</i>	<i>Année</i>	<i>Relation contrainte - déformation</i>
Équation générale de Green-Rivlin [GRE 57]	1957	$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \frac{dE(\tau_1)}{d\tau_1} \frac{dE(\tau_2)}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{II.118})$
Théorie de la viscoélasticité linéaire finie (FLV) [COL 61]	1961	$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}^\infty \{ \bar{C}(t) \} + \bar{F}(t) \int_{-\infty}^t \bar{g}(\bar{C}(t), t-\tau) \frac{d\bar{E}_t(\tau)}{d\tau} d\tau \bar{F}^t(t)$
FLV simplifiée [LIA 65]	1965	$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= -p\bar{I} + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \bar{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{B}^2 \\ &+ \int_{-\infty}^t \bar{g}(\bar{B}(t), t-\tau) \frac{d\bar{C}_t(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned}$
Modèle de Schapery [SCH 69]	1969	$\sigma(t) = h_e G_r \varepsilon(t) + h_1 \int_{-\infty}^t \Delta G(\xi - \xi') \frac{d}{d\tau} [h_2 \varepsilon(t)] d\tau$
Modèle K-BKZ [BER 63], [KAY 62], [TAN 88]	1963	$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + 2 \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial U}{\partial I_1} \bar{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U}{\partial I_2} \bar{C}_t(\tau) \right) d\tau$
Modèle CBT [CHA 76b], [CHA 76a], [CHA 77b], [BLO 78]	1976	$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \left[\bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} + \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \right] d\tau$
Modèle de Christensen [CHR 80], [CHR 82]	1980	$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \bar{F}(t) \left[g_0 \bar{I} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \bar{F}^t(t)$

Modèle [SUL 87], [SUL 89]	GSL 1987	$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{2}{3\alpha} E_e \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) - \frac{2}{3\beta} \int_{-\infty}^t g(t-\tau) \frac{d\bar{C}_t^{-\frac{\beta}{2}}(\tau)}{d\tau} d\tau$
Modèle [MOR 88]	MFLV 1988	$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \frac{2}{3\alpha} G_e \bar{B}^{\frac{\alpha}{2}}(t) + \frac{2}{3\alpha} \int_0^t G(t-\tau) \left[\frac{\bar{B}^{\frac{\alpha}{4}}(t)}{\bar{B}^{\frac{\alpha}{4}}(\tau)} \frac{d\bar{C}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{B}^{\frac{\alpha}{4}}(t) \right] d\tau$

Tableau II.2: Tableau récapitulatif des différents modèles viscoélastiques non linéaires intégraux

II.2.3.4 Modèles de comportement retenus

Comme pour les lois de comportement hyperélastiques, la diversité des modèles proposés dans la littérature nous oblige à faire un choix. Dans la même optique, nous avons choisi de retenir deux modèles. L'un simple, le modèle de Christensen (II.115) permettra de comprendre les phénomènes mis en jeu ; le second, le modèle CBT (II.114), plus complexe mais aussi plus souple permettra de bien représenter le comportement des matériaux.

Modèle de Christensen (1980)

En 1980, Christensen [CHR 80] propose la théorie viscoélastique non-linéaire la plus simple pour représenter le comportement des élastomères. Cette théorie est présentée comme *la contrepartie viscoélastique du modèle statistique néo-hookéen* (présenté au paragraphe II.2.2.2). Cependant, l'approche proposée reste phénoménologique (les phénomènes microscopiques ne sont pas étudiés). Les restrictions sur le type de matériaux concernés sont les suivantes : ils doivent être homogènes, isotropes, incompressibles et étudiés dans des conditions isothermes largement au-dessus de la température de transition vitreuse.

L'hypothèse de départ permettant la construction du modèle suppose que pour des chargements « suffisamment lents », pour lesquels les effets de mémoire sont effacés, ces matériaux se comportent comme des matériaux néo-hookéens, c'est à dire que la relation contrainte déformation est donnée par les équations (II.54) et (II.63).

La forme générale du modèle est fournie par la relation de Green-Rivlin (II.106). Christensen propose d'utiliser le développement en intégrales multiples (II.107) en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1. Pipkin [PIP 64] établit la forme simplifiée du terme du premier ordre pour un matériau isotrope incompressible :

$$\mathcal{S}_1 = \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.119})$$

et Christensen celle à l'ordre 0 :

$$\mathcal{S}_0 = g_0 \bar{I} \quad (\text{II.120})$$

Donc la relation contrainte déformation se met sous la forme déjà présentée (II.115) que nous rappelons :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + \bar{F}(t) \left[g_0\bar{I} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \bar{F}^t(t)$$

Pour assurer l'objectivité de cette loi, l'expression précédente est réécrite sous les formes :

$$\bar{\sigma}(t) = -p\bar{I} + g_0\bar{B}(t) + \frac{1}{2}\bar{B}(t) \left[\int_{-\infty}^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{C}_t(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \bar{B}^t(t) \quad (\text{II.121a})$$

$$\bar{S}(t) = -p\bar{C}^{-1}(t) + g_0\bar{I} + \frac{1}{2} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{C}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.121b})$$

pour être respectivement comparées aux forme générales (II.49a) et (II.49b).

Christensen montre que l'hypothèse de réduction au modèle de Treloar impose $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_1(\tau) = 0$ et que les formes (II.121a) et (II.121b) se réduisent bien à (II.105) avec $2\mu(t) = 2g_0 + g_1(t)$ dans l'hypothèse des petites perturbations. De plus, il précise que son modèle est limité par les performances du modèle néo-hookéen, c'est à dire qu'il est valable pour des extensions de l'ordre de 150%, ce que l'on peut qualifier de « petites déformations » (pas infinitésimales) pour des élastomères.

En conclusion, nous dirons que ce modèle simple permet de faire le lien entre les théories hyperélastiques bien connues et le cas viscoélastique non-linéaire moins bien connu. Les résultats fournis par ce modèle seront donc plutôt qualitatifs. Cependant, pour certaines applications où les déformations sont modérées, le modèle de Christensen fournit de très bons résultats : on mentionnera le travail de Feng [FEN 92] sur des membranes en caoutchouc pour lesquelles il a identifié les paramètres du modèle et obtenu de bons résultats dans la modélisation du comportement.

Modèle CBT (1976)

À la fin des années 70, Chang, Bloch et Tschoegl [CHA 76a], [CHA 76b], [CHA 77b] et [BLO 78] proposent d'utiliser la notion de mesure de déformation généralisée pour modéliser le comportement viscoélastique non-linéaire.

En partant des résultats encourageants obtenus par Ogden pour le cas hyperélastique (paragraphe II.2.2.2), ils se proposent de concentrer la non-linéarité du comportement dans l'exposant de la mesure de la déformation. Ils supposent au préalable que les effets du temps et ceux de la déformation sont découplés : pour un essai de relaxation le rapport de la contrainte au temps t sur la contrainte mesurée à un temps de référence t_R ne dépend pas du niveau de déformation pour des déformations « modérément grandes » [CHA 76b], ce type de comportement ayant été observé sur différents matériaux. L'équation liant la contrainte à l'histoire des déformations s'écrit sous la forme d'une intégrale linéaire, ce qui donne dans les directions principales :

$$\sigma_i(t) = -p + \frac{2}{\alpha} \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\lambda_i^\alpha(\tau)}{d\tau} d\tau \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.122})$$

où $G(\tau)$ et α sont les paramètres matériels. Les auteurs baptisent ce modèle « Modèle Solide Simple » (ils présentent aussi un modèle similaire pour les fluides qui ne dépend pas de la configuration de référence).

Ils ont construit ce modèle de telle sorte que pour un matériau élastique ($G(\tau) = g_0$ constante) la relation contrainte déformation (II.122) se réduise à :

$$\sigma_i = -p + \frac{2G_e}{\alpha} (\lambda_i^\alpha - 1) \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.123})$$

relation identique (à la valeur de la pression hydrostatique près) à celle proposée par Ogden pour une série réduite à un terme (II.91a).

L'expression tensorielle associée est construite [CHA 76a] pour assurer l'objectivité de la loi (II.49a) et la symétrie du tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$. Nous rappelons cette expression (II.114) :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{I}} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t G(t-\tau) \left[\bar{\bar{B}}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \frac{d\bar{\bar{C}}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} + \frac{d\bar{\bar{C}}_t^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{\bar{B}}^{\frac{\alpha}{2}}(t) \right] d\tau$$

De la même façon, nous avons construit la loi lagrangienne équivalente qui vérifie (II.49b) :

$$\bar{\bar{S}}(t) = -p\bar{\bar{C}}^{-1}(t) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t G(t-\tau) \left[\bar{\bar{C}}^{-1}(t) \frac{d\bar{\bar{C}}^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} + \frac{d\bar{\bar{C}}^{\frac{\alpha}{2}}(\tau)}{d\tau} \bar{\bar{C}}^{-1}(t) \right] d\tau \quad (\text{II.124})$$

Dans toutes les formes précédentes de la loi de comportement, la fonction $G(\tau)$ est composée d'une constante élastique g_0 et d'une fonction de relaxation $g_1(\tau)$ qui vérifie :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_1(\tau) = 0 \quad (\text{II.125})$$

Dans la même publication, Chang *et al.* [CHA 76a] suggèrent l'utilisation d'une forme encore plus générale de leur modèle de comportement appelée modèle « Modèle Solide Généralisé » (de même « Modèle Liquide Généralisé ») faisant appel à la forme la plus générale des mesures de déformation (II.25a) et (II.25b).

Les auteurs ont étudié dans le détail et utilisé leurs modèles « Liquide Simple » [CHA 77b] et « Solide Simple » [BLO 78] pour identifier des résultats expérimentaux obtenus sur le caoutchouc styrène-butadiène (SBR) soumis à de la traction uniaxiale. Les résultats obtenus sont très satisfaisants jusqu'à des élongations de l'ordre de 150%. Ceci justifie les hypothèses de départ sur la linéarité de la formulation utilisée pour des déformations « modérément grandes ».

Pour notre part, nous proposons d'étendre la formulation du modèle CBT en utilisant une série de termes du type (II.122) comme pour le modèle hyperélastique d'Ogden :

$$\sigma_i(t) = -p + \sum_{n=1}^N \int_0^t \frac{2}{\alpha_n} G_n(t-\tau) \frac{d\lambda_i^{\alpha_n}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.126})$$

En mettant les fonctions $\frac{2}{\alpha_n} G_n(\tau)$ sous la forme $g_{0n} [1 + g_1(\tau)]$, la formule précédente devient :

$$\sigma_i(t) = -p + \sum_{n=1}^N g_{0n} \lambda_i^{\alpha_n}(t) + \sum_{n=1}^N g_{0n} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\lambda_i^{\alpha_n}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{II.127})$$

forme que l'on peut qualifier (de façon similaire à Christensen) de *contrepartie viscoélastique du modèle d'Ogden*. Tout comme pour le cas hyperélastique, l'utilisation d'une série, par exemple de trois termes, permettra de modéliser de plus grandes déformations que le modèle initial.

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord rappelé les différentes grandeurs et notations de la mécanique des milieux continus, puis les lois de comportement hyperélastiques et viscoélastiques non-linéaires intégrales utilisées pour modéliser les polymères thermoplastiques dans le domaine caoutchoutique.

Quatre modèles de comportement ont été retenus : deux hyperélastiques et deux viscoélastiques. Pour chaque type de comportement (élastique et viscoélastique), un modèle simple classique (Mooney et Christensen) et un modèle plus complexe (Ogden et CBT généralisé) utilisant des mesures généralisées de la déformation ont été définis. Les modèles simples permettront de comprendre qualitativement les phénomènes et les modèles complexes de modéliser au mieux le comportement du matériau.

Chapitre III

Expérience de soufflage d'une membrane initialement plane

I.1	Principaux procédés de mise en forme	19
I.2	Matériaux utilisés dans ces procédés de mise en forme	21
I.3	État de l'art pour la simulation des procédés de moulage par soufflage et de thermoformage	23

Les modèles décrits dans le chapitre précédent nécessitent la mise en œuvre de méthodes expérimentales afin de déterminer les constantes matérielles. Comme nous l'avons vu précédemment, un modèle de comportement s'avère rarement efficace pour tous les types de déformation : il permet souvent de ne simuler que des états de déformation du même type que ceux utilisés pour la détermination des constantes matérielles. C'est pourquoi ces méthodes expérimentales doivent approcher au mieux les conditions d'utilisation du matériau pour fournir des constantes matérielles utilisables lors de la simulation numérique des procédés.

Pour les polymères à l'état fondu, des expériences de traction uniaxiale [MEI 81], [GOL 87] et de cisaillement oscillatoire ([VEN 93] par exemple) sont fréquemment utilisées pour l'identification des données viscoélastiques des matériaux. Cependant, les procédés de soufflage (injection - étirement - soufflage, extrusion - soufflage) et de thermoformage mettent en jeu des déformations de type biaxial [THR 87].

Un des objectifs de notre travail de thèse était de développer un montage expérimental mettant en jeu des états de déformation biaxiaux et une méthode d'identification simple, qui permettraient, par la suite, une caractérisation systématique des polymères thermoplastiques à l'état fondu afin de la simuler les procédés de mise en forme.

Dans cette partie, nous ferons tout d'abord une revue bibliographique des différents essais entrant dans ce cadre. Puis, nous présenterons notre montage ainsi que les résultats obtenus. Enfin, après avoir rappelé la méthode d'identification généralement adoptée, nous développerons une méthode originale que nous appliquerons aux modèles de comportement retenus précédemment.

III.1 Historique des essais d'extension biaxiale

III.1.1 Les différents types d'essai

Pour obtenir un état de déformation biaxial, trois types d'essais principaux peuvent être mis en place (figure III.1) :

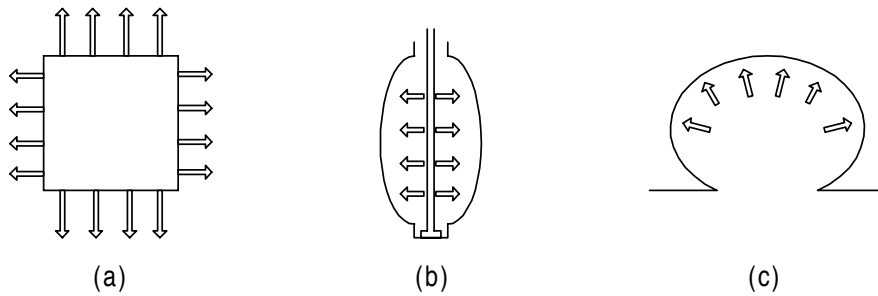


Figure III.1 : Les différents essais d'extension biaxiale : (a) extension plane biaxiale, (b) extension et soufflage simultanés d'un cylindre, (c) soufflage d'une membrane plane

- l'extension plane biaxiale : pour ce type d'expérience, la membrane est étirée suivant deux directions, les forces s'exerçant dans ces directions étant totalement indépendantes (figure III.1(a)). Parmi les dispositifs utilisés, on peut citer le rhéomètre développé par Meissner *et al.* [MEI 87] qui permet d'obtenir un état de contrainte biaxial quelconque. Ce type de méthode est cependant rare, car très complexe à mettre en œuvre. En effet, le positionnement et le serrage de la membrane nécessite du matériel coûteux, et il est assez difficile d'imposer deux forces indépendantes (problème de synchronisation). De plus, les études de ce genre n'ont pas encore été menées pour les températures rencontrées lors des procédés car celles-ci accentuent les difficultés précédentes.
- l'extension et le soufflage simultanés d'un cylindre : un cylindre mince de matériau est étiré dans la direction de sa hauteur et dans le même temps, de l'air est injecté à l'intérieur (le principe est similaire à celui du procédé industriel d'étirement-soufflage). La figure III.1(b) présente ce type d'expérience. Comme avec le montage précédent, cette technique permet d'imposer des déformations biaxiales indépendantes. Dans le cadre de ses travaux sur les ballons météorologiques, Alexander [ALE 71a] a mené à bien ce type d'expériences sur le latex pour mettre en évidence certains phénomènes d'instabilité. Plus récemment, Benjeddou *et al.* [BEN 93] ont utilisé un tel montage pour déterminer les paramètres du modèle d'Ogden sur bon nombre de caoutchoucs. Wineman [WIN 79] a traité de façon très complète l'aspect théorique de ce problème.
- le soufflage de membrane initialement plane : il consiste à souffler une membrane de matériau initialement plane, le plus souvent circulaire, à l'aide d'un fluide (figure III.1(c)). A l'inverse des deux montages précédents, les déformations dans les deux directions ne sont pas indépendantes. Malgré ce désagrément, ce montage reste le plus utilisé car il est moins difficile à mettre en œuvre que les deux précédents. C'est le montage expérimental que nous avons choisi. La bibliographie relative à ce type d'essais est détaillée dans le paragraphe suivant.

Remarque : des montages plus singuliers peuvent être envisagés, on citera notamment les travaux de Rodriguez *et al.* [RV 96] qui ont effectué des essais directement sur une machine industrielle d'extrusion-soufflage.

III.1.2 Soufflage d'une membrane initialement plane

Les premiers montages expérimentaux de soufflage d'une membrane plane ont été utilisés pour l'étude des caoutchoucs. Treloar [TRE 44a] fut le premier à utiliser cette méthode pour étudier le comportement de ces matériaux et le phénomène d'éclatement. De plus, ses expériences lui ont permis de valider l'utilisation du modèle statistique pour représenter le comportement du caoutchouc. Comme nous l'avons déjà mentionné, Hart-Smith [HS 66] et Ogden [OGD 72] ont utilisé ces données expérimentales pour valider leurs modèles respectifs. En 1951, Rivlin et Saunders [RIV 51] utilisent le même type d'essai pour identifier les paramètres de la loi de Mooney-Rivlin pour un caoutchouc, en montrant que l'état de déformation équibiaxial obtenu au pôle est équivalent à une compression suivant l'axe normal à la membrane.

Plus tard, cette technique a été étendue à l'étude des polymères en général. Au début des années 70, Denson *et al.* [DEN 71], [JOY 72], [JOY 73] ont développé des montages expérimentaux plus complexes permettant le soufflage de polymères « liquides » (mais soutenant leur propre poids), à la température ambiante, pour déterminer la viscosité de ces matériaux. Les mesures devinrent plus difficiles à effectuer compte tenu du comportement visqueux des matériaux : les auteurs ont alors utilisé une caméra pour enregistrer l'évolution des déformations au cours du temps. Un travail similaire a été mené par Maerker et Schowalter [MAE 74] à des vitesses de déformation plus élevées dans le but de déterminer les paramètres de lois de comportement liquides.

Dans le même temps, on a commencé à s'intéresser au comportement des polymères thermoplastiques chauffés très au dessus de leur température de transition vitreuse. En 1974, après avoir testé de nombreux plastiques à des températures élevées, Schmidt et Carley [SCH 75a], [SCH 75b] montrent, avec ce type d'expérience, que dans les conditions de mise en forme, ces matériaux peuvent être modélisés par des lois de comportement hyperélastiques (ils utilisent essentiellement le modèle de Rivlin à l'ordre 2). Quelques années après, De Vries *et al.* [DEV 77a], [DEV 77b] utilisent les expériences de soufflage de membranes circulaires pour mettre en évidence l'importance de la température et de l'orientation des polymères pour leur mise en forme. En 1980, Denson et Hylton [DEN 80] soufflent des membranes rectangulaires d'ABS (Acrylonitrile Butadiène Styène) près de la température de mise en forme (138°C) en utilisant de l'huile pour le gonflage. Celle-ci étant incompressible, ils peuvent mener à bien des expériences de retard, où la pression est imposée, ce qu'on ne pouvait pas faire avec le soufflage par de l'air.

Depuis les années 80, les travaux sur les caoutchoucs reprennent pour étudier des phénomènes plus complexes. Certains auteurs ajoutent des moules transparents au montage expérimental classique de soufflage libre : Kong et White [KON 85] pour analyser les phénomènes mis en jeu lors du contact avec les parois du moule, Charrier *et al.* [CHA 87], [CHA 89] pour valider leur code de calcul de soufflage de membrane. Feng [FEN 92] utilise ce montage sur une longue période de temps (de l'ordre de la demi-heure) pour mettre en évidence le caractère viscoélastique du caoutchouc (pour cela, il utilise un capteur photo-sensible pour conserver constante la hauteur de la bulle [BLA 85] et ainsi mettre en place une expérience de relaxation).

Dans le même temps, cette technique expérimentale est beaucoup utilisée dans le domaine biomécanique pour caractériser le comportement de membranes biologiques [BYL 86], [KRI 93] et [HSU 94]. En effet, ces membranes ne peuvent être transformées et doivent être testées à l'état naturel, et donc sous ce type de sollicitation.

A la manière de Schmidt et Carley, on se propose, dans ce travail, d'utiliser cette technique expérimentale pour la caractérisation de polymères thermoplastiques fondus à leur température de mise en forme, en insistant sur leur caractère viscoélastique et plus précisément sur l'influence de la vitesse de soufflage.

III.2 Réalisation de l'essai

Un montage expérimental de soufflage de membranes circulaires a été conçu et une campagne d'essais a été menée à bien à l'Institut des Matériaux Industriels (Conseil National de Recherche du Canada) à Boucherville (Québec) près de Montréal.

III.2.1 Dispositif expérimental

III.2.1.1 Description générale

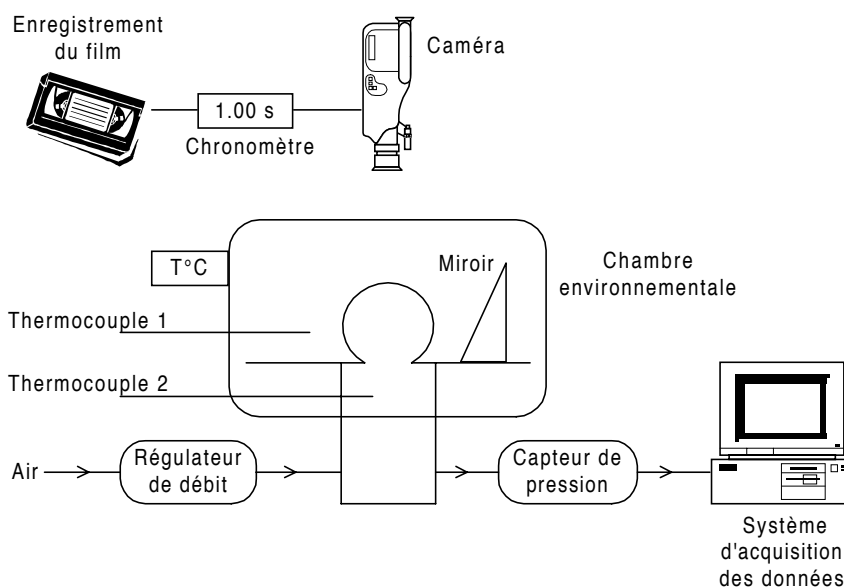


Figure III.2 : Montage expérimental pour le soufflage d'une membrane initialement plane

Le dispositif expérimental, montré sur la figure III.2, est constitué :

- d'un dispositif de soufflage dans lequel est placée une feuille mince circulaire de polymère thermoplastique, sur laquelle figurent des cercles concentriques et des lignes radiales tracés à l'encre ;
- d'une chambre environnementale dans laquelle est placé le dispositif précédent. La feuille polymérique est alors chauffée au voisinage de sa température de mise en forme. La membrane ainsi ramollie est gonflée par de l'air pour former une bulle ;
- d'un système d'acquisition de données qui enregistre l'évolution de la pression à l'intérieur de la bulle de l'état initial non déformé jusqu'au moment de l'éclatement. Dans le même temps, une caméra placée au dessus du montage enregistre l'évolution des déformations des lignes tracées sur la feuille et de la hauteur de la bulle par l'intermédiaire d'un miroir latéral.

Les détails du dispositif sont inspirés des montages expérimentaux développés par Joye *et al.* [JOY 72] et Schmidt [SCH 72] et sont exposés dans le paragraphe suivant.

III.2.1.2 Détails du dispositif

Le module de soufflage

Le module de soufflage est l'organe central du dispositif : il permet la mise en place et le serrage de la membrane lors de sa mise en température. La figure III.3 présente ce module. Il est constitué de trois parties en aluminium : un cylindre creux et deux plaques carrées percées. Le cylindre et la plaque inférieure sont vissés et l'étanchéité est assurée par un joint de silicone.

La plaque supérieure est amovible et permet le positionnement et le serrage de la feuille de polymère entre deux joints de silicone. Le silicone est utilisé pour son bon comportement à haute température (jusqu'à 200°C), il évite le collage de la feuille de polymère fondu sur le métal. Le cylindre est quant à lui pourvu de deux orifices : l'un permettant l'arrivée de l'air, l'autre permettant la mesure de la pression. Ces deux orifices se trouveront placés à l'extérieur de la chambre environnementale.

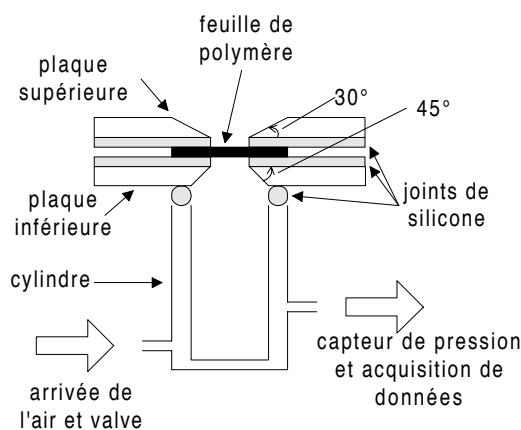


Figure III.3 : Module de soufflage

Le rayon du trou percé dans les deux plaques carrées (donc le rayon de la membrane qui sera soufflée) est 3,175 cm (1.25 in). Il faut noter que les contours de ces trous ont été usinés en biseau, afin d'éviter tout contact entre les plaques et la membrane : avec la plaque inférieure lors du chauffage (lorsque la membrane fléchit sous son poids) et avec la plaque supérieure lors du gonflement. Pour les angles d'usinage, nous avons adopté les valeurs fournies par Schmidt [SCH 72] : 30° pour la plaque supérieure et 45° pour la plaque inférieure.

L'alimentation d'air

L'arrivée d'air est assurée par l'alimentation du laboratoire (pression fournie de l'ordre de 560 000 Pa), ce qui est suffisant compte tenu des pressions nécessaires au soufflage de tels matériaux dans les conditions de mise en forme (de l'ordre de 30 000 Pa pour des membrane de rayon 2,2 cm et d'épaisseur 2,5 mm d'après [SCH 75b]). Une valve et un débitmètre assure l'interface entre l'alimentation et le module de soufflage. Ce système permet le réglage du débit et commande le déclenchement du soufflage.

Les expériences se font donc à débit massique d'air constant. Il est possible de faire varier ce débit d'une expérience à l'autre.

La chambre environnementale et le contrôle de la température

Le point crucial de l'expérience est le contrôle de la température [DEL 91]. En effet, lors du soufflage, il est très difficile de connaître l'évolution de la température dans le matériau car celui-ci est soufflé par de l'air a priori plus froid. On peut cependant se fixer comme première priorité d'estimer précisément la température de la membrane au début de l'expérience.

Pour cela, on règle le contrôleur de la chambre environnementale sur la température désirée ; celle-ci est mesurée par un thermocouple (thermocouple 1 sur la figure III.2) et réglée par le contrôleur de l'étuve. Cependant, la seule connaissance de la température de l'air au dessus de la membrane ne permet pas de connaître exactement la température au coeur du matériau : celle-ci dépend du temps d'homogénéisation de la température choisi. C'est pourquoi un autre thermocouple a été ajouté à l'intérieur du module de soufflage pour mesurer la température sous la membrane (thermocouple 2 sur la figure III.2). L'expérience est déclenchée lorsque la température sous la membrane atteint une valeur fixée par l'expérimentateur. Lors d'essais préliminaires, on mesure, par des tests successifs à l'aide d'un capteur à infra-rouges, l'évolution de la température à la surface supérieure de la membrane pendant la période d'homogénéisation de la température. On détermine ainsi la valeur de la température que doit fournir le thermocouple 2 pour que l'expérimentateur déclenche le soufflage.

Remarque : *la température fournie par ce second thermocouple n'a pas de signification proprement dite, on utilise cet artifice car le capteur à infra-rouges ne peut pas être laissé dans la chambre tout au long du chauffage.*

Mesures et acquisition des données

Deux types de grandeurs sont échantillonnés dans le temps pendant les expériences : les déformations (déformations des lignes et hauteur de la bulle) et la pression à l'intérieur de la bulle.

L'évolution des déformations est obtenue par l'intermédiaire du film du soufflage. Le système vidéo est constitué d'une caméra, d'un chronomètre à incrustation, d'un magnétoscope et d'un écran de contrôle. La caméra est fixée au dessus de la chambre environnementale. Un miroir en aluminium (résistant à la chaleur) est placé à côté de la membrane faisant ainsi un angle de 60° avec la plaque supérieure. Il permet d'enregistrer l'évolution de la hauteur de la bulle par l'intermédiaire de son image. Cette hauteur et ces déformations sont ensuite mesurées sur l'écran et corrigée par un coefficient qui dépend de la distance focale entre la caméra et la bulle. Ce type de mesure, bien que peu précis en apparence, fournit des résultats satisfaisants, car reproductibles (du moins pour la hauteur) comme nous le verrons par la suite.

Remarque : *pour mesurer la hauteur, nous avons envisagé et testé d'autres dispositifs tels le laser ou le capteur photosensible. Les résultats ne furent pas satisfaisant, et ce à cause des hautes températures qui nous obligeaient à placer ces appareils à l'extérieur de la chambre rendant ainsi les mesures très difficiles.*

La mesure de la pression à l'intérieur de la bulle est effectuée par un capteur de pression TH-LCV. La sortie de ce capteur est amplifiée (sortie fournie de 0 à 5 volts) pour diminuer l'influence de la présence de bruit. La précision donnée par le fabricant est 0,25 % et l'intervalle de mesure du capteur est à peu près 0 – 0,1MPa (0-15 psi). Le logiciel d'acquisition Labtech-Notebook [Lab] permet l'enregistrement des mesures temps-pression.

La caméra utilisée fournissant 30 images par seconde, nous avons réglé la fréquence d'acquisition de la mesure de la pression à 30 Hz. Ceci permet donc d'avoir à chaque mesure du temps,

une valeur de la pression et une géométrie déformée de la bulle. Il est important de noter que l'incertitude sur la mesure du temps est alors de $\pm \frac{1}{60}$ s, c'est-à-dire l'amplitude de l'intervalle de mesure.

Remarque : malgré cette mise en parallèle des mesures, la mise en concordance de la pression et de la déformation restait difficile : la détermination de l'image de départ (temps $t = 0$ du soufflage) était impossible. Nous avons donc synchronisé les mesures à partir de l'image finale, c'est-à-dire au moment de l'éclatement. En effet, le moment de l'éclatement apparaît très distinctement sur le film mais aussi sur les données relevées par le logiciel d'acquisition au travers de la chute brutale de la pression interne.

III.2.2 Matériau étudié. Conditions expérimentales

III.2.2.1 Matériau étudié

Comme nous l'avons dit précédemment, le but de ce travail expérimental est de construire un montage qui permette de mettre en évidence le caractère viscoélastique des polymères fondus. Dès lors, le choix du matériau n'était pas capital : nous avons testé plusieurs matériaux sur notre montage dans le but choisir celui permettant de faire le plus d'expériences possible et ainsi d'apprécier la reproductibilité de ce type d'essais. De ces tests, il résulte que :

- le PMMA (polyméthyl-métacrylate) et le PC (polycarbonate) n'ont pas pu être gonflés de façon satisfaisante : la membrane se gonflait très peu, prenant juste une forme hémisphérique, avant l'éclatement au pôle. Des observations similaires ont été faites par Schmidt et Carley [SCH 75a] ;
- le PP (polypropylène) et le HDPE (polyéthylène haute densité) ont été gonflés à des niveaux satisfaisants, mais le temps très court de leur gonflement (de l'ordre de 0,5 s) nous a fait préférer le HIPS (polystyrène à haut impact) et l'ABS (acrylonitrile butadiène styrène) qui présentaient des temps de gonflement plus importants (de l'ordre de 2 s).

Remarque : il faut noter que le HIPS fait partie des matériaux étudiés dans le détail par Schmidt et Carley [SCH 75a] ;

- pour nos expériences, notre choix final s'est porté sur l'ABS car sa température de mise en forme est d'environ de 146°C ([THR 87] chapitre 2) (contre 180°C pour le HIPS), ce qui réduit considérablement la durée du chauffage préalable à l'expérience.

La résine ABS représente un des meilleurs mélanges qui soit entre une résine (acrylonitrile-styrène) et un élastomère (butadiène-acrylonitrile). La première fabrication de cette résine date des années 1950. Chacun des composants apporte des qualités particulières au produit : l'acrylonitrile donne la résistance chimique et la bonne tenue en température, le butadiène contribue à la résistance à l'impact et le styrène permet un bon fini de surface et confère une grande rigidité. La température de transition vitreuse, T_g , est entre 80°C et 120°C ([THR 87] chapitre 2) .

Le bon compromis entre le coût et le type d'utilisation des résines ABS constitue un élément favorable dans de nombreux domaines : industrie automobile, appareils électro-ménagers, etc. On peut citer quelques exemples d'articles fabriqués en résines ABS : boîtiers d'appareils électriques ou électroniques, téléphones, habillage intérieur d'automobile, tuyaux de plomberie domestique.

III.2.2.2 Conditions expérimentales

Des feuilles carrées d'ABS (de côté 10 cm environ) d'épaisseur 1,57 mm sont découpées et marquées par de l'encre vaporisée au travers d'un gabarit (voir les photos des échantillons sur la figure III.4) avant d'être placées dans le module de soufflage. Ce gabarit permet de tracer des cercles concentriques et des lignes radiales sur la membrane pour faciliter son positionnement, mais surtout pour avoir accès aux déformations [JOY 72]. En fait, ces tracés sur les membranes, initialement prévus pour les mesures des extensions principales, n'ont pas été utilisés puisque nous nous sommes contentés de mesurer la hauteur de la bulle (nous en donnerons la raison par la suite lors de l'identification des constantes matérielles).

La membrane est chauffée à 143°C, température vérifiée au moyen du capteur à infra-rouges pointé sur la surface. Pour cela, la température au dessus de la membrane (lue sur le thermocouple 1) est fixée à 146°C, température atteinte très rapidement (au bout de 10 min environ) ; la température au dessous (thermocouple 2) est, elle, fixée à 125°C (température déterminée par des tests successifs), celle-ci est atteinte au bout d'un temps plus long (de l'ordre de 50 min).

Nous avons mené les expériences pour trois débits d'air différents : 27 l/s, 19 l/s, 11 l/s.

En résumé, les conditions expérimentales sont les suivantes :

- *matériau : ABS (Acrylonitrile Butadiène Styène) ;*
- *feuilles circulaires de rayon 3,175 cm et épaisseur 1,57 mm ;*
- *température de mise en forme 143°C ;*
- *débits d'air pour le soufflage : 27 l/s, 19 l/s et 11 l/s.*

III.2.3 Mesures et incertitudes

Une série d'expériences a donc été menée sur les membranes d'ABS dans les conditions spécifiées précédemment :

- 27 l/s : 23 expériences ;
- 19 l/s : 9 expériences ;
- 11 l/s : 10 expériences.

Les photos d'écran des figures III.4 et III.5 présentent le gonflement de la membrane vu, respectivement, de dessus et de profil. On note sur ces figures le grossissement très important des lignes tracées préalablement sur la membrane, ce qui illustre bien les difficultés de mesure des extensions principales au pôle. De plus, on distingue bien l'image de la membrane sur le miroir qui permet la mesure de la hauteur.

Après élimination des expériences inexploitable (dues le plus souvent à un éclatement prématuré de la membrane), nous avons conservé :

- 27 l/s : 18 expériences ;
- 19 l/s : 7 expériences ;
- 11 l/s : 10 expériences.

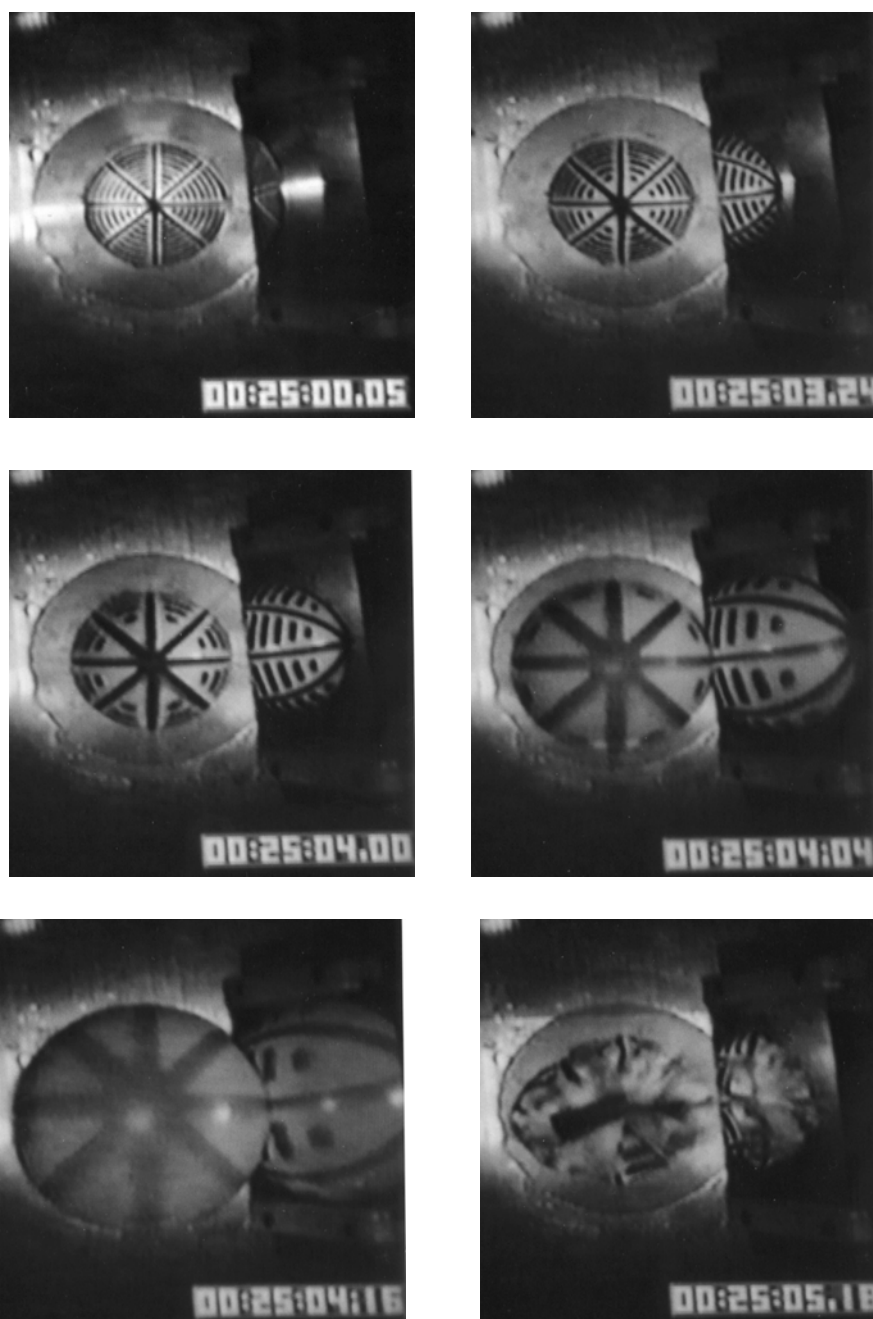


Figure III.4 : Gonflement d'une membrane chauffée : vue de dessus

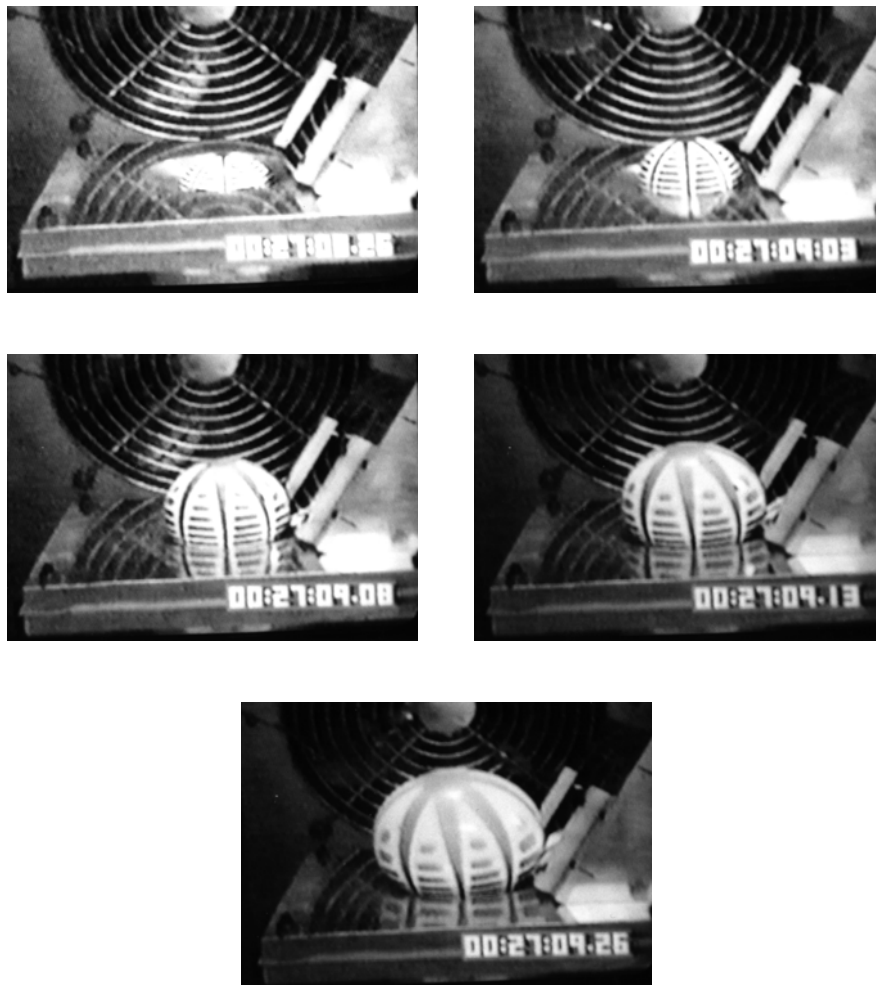


Figure III.5 : Gonflement d'une membrane chauffée : vue de profil

Il faut noter que beaucoup plus d'expériences ont été menées pour le débit le plus élevé ; en effet, c'est pour ce débit que tous les réglages préliminaires ont été effectués.

Pour chaque débit d'air, nous avons enregistré les valeurs de la pression et de la hauteur de la bulle au cours du temps. Pour chaque débit et pour chaque temps de mesure, nous avons donc collecté plusieurs points expérimentaux (autant que d'expériences à ce débit). Les figures III.7, III.8 et III.9 présentent toutes les courbes expérimentales obtenues (a) de la hauteur de la bulle en fonction du temps et (b) de la pression interne en fonction du temps, pour les débits 27 l/s, 19 l/s et 11 l/s respectivement.

Remarque : *la méthode de mesure de la hauteur (mesure directe sur un écran) étant a priori très peu précise, ces mesures ont été effectuées par deux opérateurs différents d'une expérience à l'autre.*

Les séries de courbes relatives aux trois débits présentent la même allure générale. On observe, pour la hauteur, une pente faible au début du soufflage, puis une augmentation significative de cette pente en fin d'essai. Pour la pression, il y a tout d'abord une montée en pression quasiment linéaire puis une chute brutale de celle-ci et enfin une stabilisation avant l'éclatement. En fait, l'accélération de la déformation (dans notre cas l'augmentation brutale de la hauteur de la bulle) intervient au même moment que la chute de pression. Ce phénomène physique est assez classique dans le soufflage de membrane, on peut citer par exemple le cas du gonflement d'un ballon de baudruche : au départ, il faut souffler assez fort pour initier la déformation (montée en pression et gonflement faible) puis brusquement la pression chute et le volume croît très rapidement). Ainsi, ces expériences mettent en évidence l'existence d'une pression critique : la pression maximale rencontrée lors du soufflage. La membrane ne peut pas supporter de plus grandes pressions (nous reverrons ce phénomène lors de l'étude des instabilités apparaissant lors du soufflage, voir annexe C). Le fait d'imposer le débit et non la pression permet d'observer expérimentalement la courbe totale de la pression. Ceci est dû au fait que le volume interne de la membrane et la pression à l'intérieur de celle-ci ne sont pas indépendants : ils sont liés par les relations de compressibilité du gaz contenu à l'intérieur de la membrane (équation des gaz parfaits dans le cas le plus simple). Nous prendrons en compte ces observations par la suite lors de nos travaux numériques sur le soufflage de membrane.

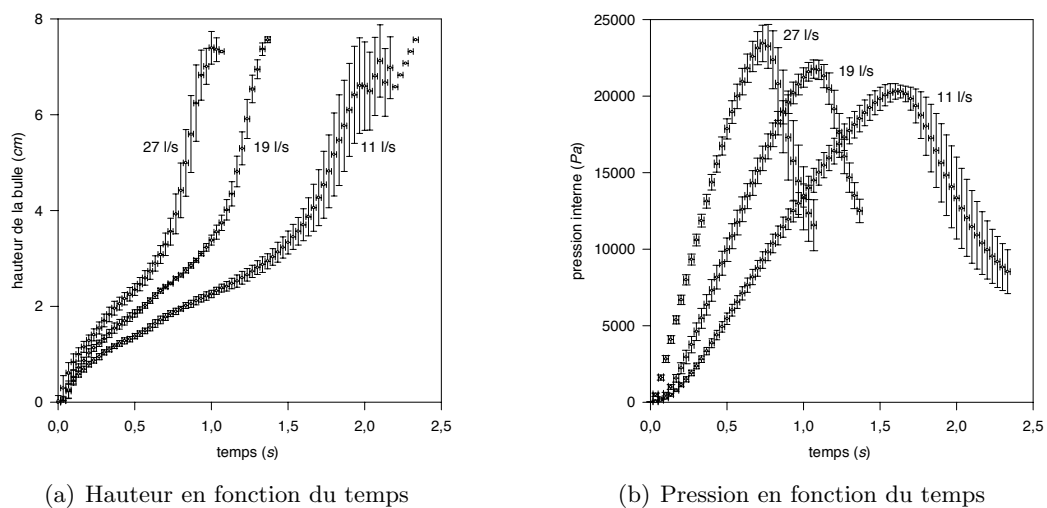
Pour analyser la reproductibilité des expériences, nous avons calculé la moyenne arithmétique des mesures (à chaque temps de mesure) ainsi que l'écart-type expérimental qui caractérise la dispersion des variables observées autour de leur moyenne [Org 95]. Pour un débit d'air donné, notons n_{exp} le nombre d'expériences, t un temps de mesure et q la grandeur mesurée (dans ce cas, soit la pression, soit la hauteur), la moyenne, $\bar{q}(t)$ est donnée par :

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{n_{exp}} \sum_{i=1}^{n_{exp}} q_i(t) \quad (\text{III.1})$$

et l'écart type expérimental, $s[q(t)]$, par :

$$s^2[q(t)] = \frac{1}{n_{exp} - 1} \sum_{i=1}^{n_{exp}} [q_i(t) - \bar{q}(t)]^2 \quad (\text{III.2})$$

Les figures III.III.6(a) et III.III.6(b) présentent ces données sous forme d'intervalles $\bar{q}(t) \pm s[q(t)]$ respectivement pour la hauteur de la bulle et la pression interne. Sur ces courbes, nous avons ajouté les intervalles d'incertitude pour la mesure du temps qui sont constants : $\pm \frac{1}{60}$ s quel que soit le temps de mesure.



(a) Hauteur en fonction du temps

(b) Pression en fonction du temps

Figure III.6 : Résultats expérimentaux : moyennes et écart types

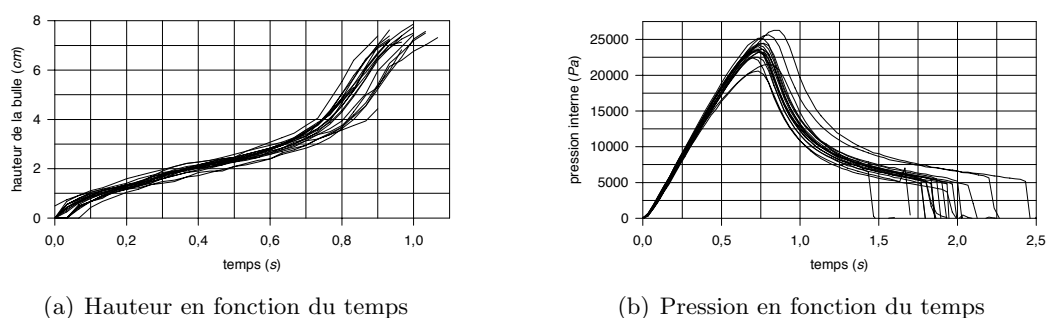


Figure III.7 : Résultats expérimentaux pour le débit 27 l/s

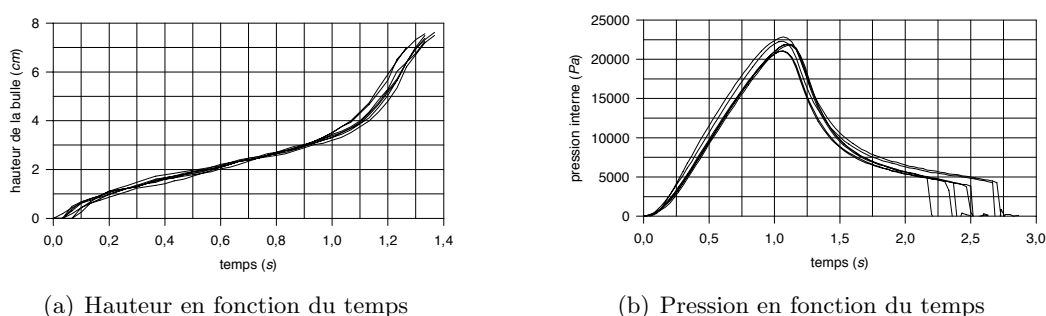


Figure III.8 : Résultats expérimentaux pour le débit 19 l/s

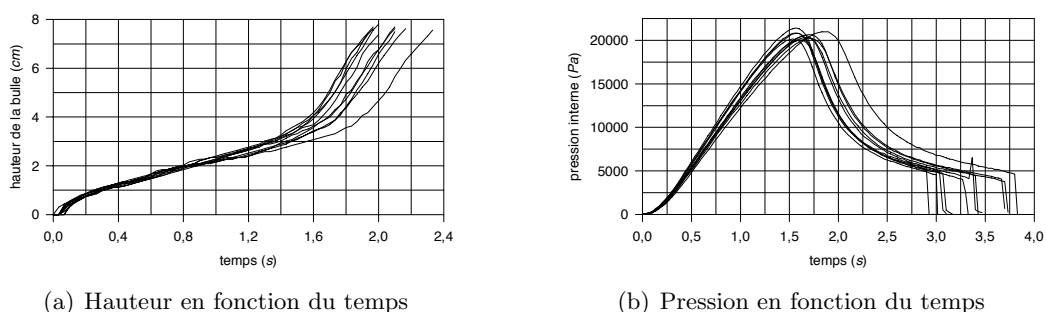


Figure III.9 : Résultats expérimentaux pour le débit 11 l/s

Pour chacun des points de mesure (chaque temps t), nous avons défini l'erreur relative de la grandeur $q(t)$ (q représentant soit la hauteur, soit la pression) comme le rapport du double de l'écart type expérimental sur la moyenne de la mesure, soit $2s[q(t)]/\bar{q}(t)$. Cette erreur fournit donc une information sur la précision des mesures. Le tableau III.1 donne la valeur maximale de cette erreur pour les deux grandeurs mesurées, la pression interne et la hauteur de la bulle, et pour chacun des débits. Ces erreurs maximales sont bien évidemment obtenues dans la seconde partie du soufflage, c'est-à-dire après la chute de pression (figure III.6). Lors de la montée en pression, l'erreur de mesure, aussi bien pour la hauteur que pour la pression, n'est que de l'ordre de 12 % quel que soit le débit. Il convient de noter que les valeurs d'erreurs obtenues pour le débit 19 l/s sont beaucoup plus faibles que pour les deux autres débits : le nombre d'expériences effectuées pour ce débit n'est pas suffisant pour obtenir une bonne estimation de la reproductibilité.

Mesure \ Débit	27 l/s	19 l/s	11 l/s
Hauteur	28,8 %	13,8 %	34,6 %
Pression	33,4 %	14,4 %	41,8 %

Tableau III.1: Erreurs maximales de mesure pour les trois débits

Malgré cela, on peut conclure à une assez bonne reproductibilité des mesures puisque la dispersion des résultats obtenus lors des montées en pression est faible : les conditions expérimentales (débit imposé et température de la membrane) sont donc bien reproduites. La dispersion obtenue dans les secondes parties des expériences (chute de pression) tient plus à l'emballement des phénomènes physiques qu'à des erreurs de mesures. De plus, les craintes que nous avons sur la méthode de mesure de la hauteur (mesures effectuées sur l'écran par un opérateur) n'étaient pas fondées. En effet, les dispersions obtenues sont du même ordre de grandeur que celles relatives à la pression mesurée, quant à elle, par un capteur. Il n'en aurait pas été de même si l'on avait mesuré des extensions principales au voisinage du pôle. En effet, les quelques tests que nous avons effectués sur ce type de mesures, en réunissant les résultats obtenus pour les mêmes expériences par deux opérateurs différents, ont laissé apparaître de très grandes dispersions (de l'ordre de 30 % pour la montée en pression et de 60 % pour la chute). Ces dispersions importantes discréditent ce type de mesures.

III.2.4 Mise en évidence du caractère viscoélastique

Les graphes de l'évolution de la hauteur de la bulle (figure III.III.6(a)) et de la pression interne (figure III.III.6(b)) peuvent être rassemblés sur des courbes hauteur-pression après élimination de la variable temps. La figure III.10 présente les courbes moyennes hauteur-pression relatives aux trois débits d'air.

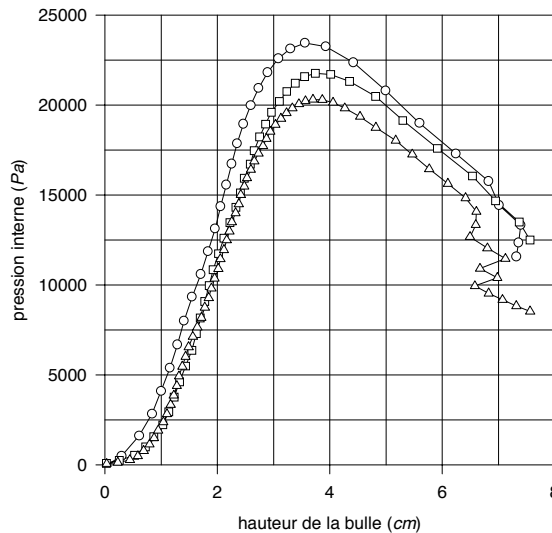


Figure III.10 : Courbes moyennes de la pression interne en fonction de la hauteur de la bulle : (○) 27 l/s, (□) 19 l/s, (△) 11 l/s

Sur ces courbes, il apparaît que pour un même niveau de déformation (une même hauteur de la bulle), la pression correspondante dépend du débit de l'air, donc de la vitesse de déformation. On peut conclure de cette observation que la déformation ne dépend pas seulement du charge-

ment actuel, mais aussi de l'histoire de celui-ci. Le caractère viscoélastique de l'ABS à sa température de mise en forme est ainsi mis en évidence.

III.3 Identification des coefficients des modèles de comportement

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que nos mesures ne concernent que la hauteur de la bulle et la pression interne. Compte tenu des difficultés de mesures, nous ne nous sommes pas préoccupés des extensions principales. Dans cette partie nous montrerons que ces mesures sont suffisantes pour caractériser les matériaux.

Nous donnerons tout d'abord la méthode d'identification classique basée sur la mesure des extensions principales au pôle, puis nous développerons une méthode d'identification originale basée sur la résolution des équations exactes du problème de soufflage d'une membrane plane.

III.3.1 La méthode classique

Dans la plupart des études [TRE 44b], [JOY 72], [MAE 74], [DEV 77a], les auteurs supposent que l'état de contrainte est équibiaxial au voisinage du pôle (en fait ceci n'est vérifié exactement qu'au pôle), c'est-à-dire que la membrane est de forme sphérique au voisinage du pôle. Ils mesurent alors l'extension principale au voisinage du pôle et la hauteur d'un petit tronçon incluant le pôle ainsi que la pression interne [JOY 72]. La hauteur et l'extension principale au pôle permettent de calculer l'épaisseur de la membrane, le rayon de courbure, et, grâce à la pression, la contrainte au pôle. On obtient ainsi la courbe contrainte-extension principale au pôle.

Pour une loi de comportement donnée, cette relation contrainte-déformation est connue de manière explicite et l'identification peut alors se faire de façon relativement simple. Comme nous l'avons déjà mentionné, le principal inconvénient de cette méthode réside dans les difficultés expérimentales rencontrées et les incertitudes induites lors de la mesure des extensions principales et de la hauteur d'une petite partie de la bulle.

Schmidt et Carley [SCH 75a] utilisent, quant à eux, quelques mesures de la hauteur de la bulle et les mesures de pression pour identifier les coefficients du modèle de Mooney-Rivlin. Cependant, leur travail d'identification, n'est pas systématique : ils n'utilisent que très peu de points expérimentaux pour ces coefficients et préfèrent vérifier leurs valeurs a posteriori en calculant numériquement la déformée globale de la membrane, et en la comparant aux mesures de déformations effectuées sur l'ensemble de la membrane.

III.3.2 Une méthode d'identification originale

Dans ce paragraphe, nous justifierons notre choix de ne mesurer que l'évolution de la hauteur de la bulle et non les extensions principales en présentant la méthode d'identification que nous avons développée. Dans un premier temps, nous présenterons la résolution exacte du problème de soufflage d'une membrane initialement plane. Nous montrerons que la seule connaissance de la hauteur de la bulle permet de déterminer la déformée. Puis, dans un second temps, nous exposerons dans le détail le programme d'identification mis en œuvre, ainsi que les résultats obtenus.

III.3.2.1 Soufflage quasi-statique d'une membrane plane

La mise en équations de ce problème a été étudiée par de très nombreux auteurs. La théorie générale des membranes a été présentée par Green et Adkins [GRE 60]. De nombreux auteurs [KLI 64], [YAN 70], [WIN 78] ont proposé des méthodes numériques différentes pour résoudre ce problème classique, aussi bien pour des modèles de comportement hyperélastiques que viscoélastiques. Notre étude est directement inspirée de la méthode utilisée par Feng [FEN 92] pour le problème d'une membrane élastomère viscoélastique.

Mise en équations

Soit une membrane polymérique (hyperélastique ou viscoélastique). Dans l'état initial non déformé, la membrane est circulaire, de rayon R_0 et d'épaisseur uniforme h_0 . Le repère utilisé dans cet état non déformé est $(R, \Phi, Z = 0)$, coordonnées polaires dans le plan ($Z = 0$). La membrane est fixée sur son contour ($R = R_0$) et se gonfle de façon quasi-statique sous l'effet d'une pression intérieure.

Dans l'état déformé, on utilise les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) . L'épaisseur de la membrane est alors notée h . La prise en compte de l'hypothèse de symétrie de révolution nous permet de connaître les trois directions principales : directions méridienne, circonférentielle et normale à la membrane. De plus, l'angle ϕ de l'état déformé ne dépend plus du rayon et est égal à Φ , et les coordonnées finales d'un point, (r, z) , ainsi que l'épaisseur de la membrane, h , ne dépendent que du rayon initial dans l'état non déformé R .

Remarque : toutes les grandeurs dépendent bien évidemment du temps, mais nous ne précisons cette dépendance que lors de la résolution du problème viscoélastique.

La géométrie du problème est présentée sur la figure III.11.

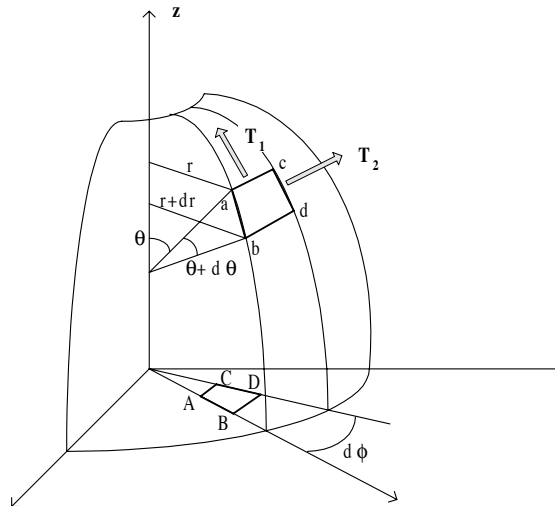


Figure III.11 : Notations pour le problème de soufflage d'une membrane axisymétrique

Soient quatre points A, B, C, D de la membrane non déformée et a, b, c, d leurs positions

respectives sur la membrane déformée définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} A(R, \Phi, Z = 0) & \rightarrow a(r, \Phi, z) \\ B(R + dR, \Phi, Z = 0) & \rightarrow b(r + dr, \Phi, z + dz) \\ C(R, \Phi + d\Phi, Z = 0) & \rightarrow c(r, \Phi + d\Phi, z) \\ D(R + dR, \Phi + d\Phi, Z = 0) & \rightarrow d(r + dr, \Phi + d\Phi, z + dz) \end{array} \right.$$

A partir de ces points, on peut définir les extensions dans les directions principales définies précédemment :

- extension méridienne :

$$\lambda_1 = \frac{\widehat{ab}}{\widehat{AB}} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{dR} \quad (\text{III.3a})$$

- extension circonférentielle :

$$\lambda_2 = \frac{\widehat{ac}}{\widehat{AC}} = \frac{r d\Phi}{R d\Phi} = \frac{r}{R} \quad (\text{III.3b})$$

- extension normale :

$$\lambda_3 = \frac{h}{h_0} \quad (\text{III.3c})$$

Ces trois extensions sont des fonctions de la seule variable R et sont liées entre elles par l'hypothèse d'incompressibilité (II.44) :

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \quad (\text{III.4})$$

De plus, on définit l'angle θ , angle entre l'axe vertical et la normale à la membrane déformée (figure III.11).

Le problème du soufflage de la membrane plane s'écrit en fonction des variables géométriques naturelles $r(R)$ et $z(R)$. Cependant, pour simplifier les équations, on choisit comme variables λ_1 , λ_2 , θ et z , fonctions de R [FEN 92]. Il y a alors deux variables surabondantes.

Remarque : on peut évidemment relier les variables naturelles r et z aux variables choisies :

$$r(R) = \lambda_2 R \quad (\text{III.5a})$$

$$z(R) = \int_R^1 \lambda_1 \sin \theta dR \quad (\text{III.5b})$$

Après avoir défini ces différentes grandeurs géométriques, on écrit les équations d'équilibre de l'élément déformé ($abcd$). Compte tenu de l'hypothèse de membrane, l'état de contrainte est plan (pas de contrainte suivant l'épaisseur) et on néglige tous les moments fléchissants. Notons T_1 et T_2 les contraintes de membrane intégrées suivant l'épaisseur et appartenant au plan tangent, respectivement méridienne et circonférentielle, les équations d'équilibre sont alors les suivantes [GRE 60] :

- direction normale :

$$\frac{T_1}{\rho_1} + \frac{T_2}{\rho_2} = P \quad (\text{III.6a})$$

- direction tangentielle méridienne

$$T_1' + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) = 0 \quad (\text{III.6b})$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure relatifs aux directions principales, respectivement méridienne et circonférentielle, P désigne la pression interne supposée uniforme et la notation $(\cdot)'$ représente la dérivation par rapport à R .

Les contraintes intégrées T_i , $i = 1, 2$ sont reliées aux contraintes σ_i par :

$$T_i = \sigma_i h = \sigma_i \lambda_3 h_0 = \frac{\sigma_i h_0}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{III.7})$$

Aux deux équations d'équilibre précédentes (III.6a) et (III.6b), nous devons ajouter deux relations géométriques permettant de lier les variables surabondantes :

$$\cos \theta = \frac{R\lambda_2' + \lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{III.8a})$$

$$z'(R) = -\lambda_1 \sin \theta \quad (\text{III.8b})$$

Le système d'équations à résoudre peut se mettre sous la forme de cinq équations différentielles du premier ordre en R :

$$\begin{cases} T_1' = \frac{1}{r}(T_2 - T_1) \\ \lambda_2' = \frac{1}{R}(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2) \\ \theta' = \frac{\lambda_1}{T_1} \left(P - \frac{T_2 \sin \theta}{R\lambda_2} \right) \\ z' = -\lambda_1 \sin \theta \\ P' = 0 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

la dernière équation permettant de prendre en compte l'uniformité de la pression à l'intérieur de la bulle.

A ce système, nous ajouterons les conditions aux limites et une loi de comportement, permettant de lier les contraintes intégrées T_i , $i = 1, 2$ aux extensions λ_j , $j = 1, 2$.

Dans toute la suite, on utilisera les variables réduites T_i/h_0 , PR_0/h_0 , R/R_0 , r/R_0 , z/R_0 , notées T_i^* , P^* , R^* , r^* , z^* . La dérivation $\frac{d}{dR}$ devient donc $\frac{1}{R_0} \frac{d}{dR^*}$. Cette adimensionalisation des variables laisse inchangé le système d'équations précédent (III.9). Donc, par raison de commodité, nous conserverons les premières notations sans astérisque qui à partir de maintenant correspondront aux variables réduites. Toutes les fonctions intervenant dans le système (III.9) dépendent alors du temps et de la seule variable réduite d'espace R , telle que $0 \leq R \leq 1$.

Conditions aux limites

- Au pôle, l'état de déformation est équi-biaxial et le problème est symétrique par rapport à l'axe (Oz) donc :

$$\theta(R = 0) = 0 \quad (\text{III.10a})$$

et en utilisant l'équation précédente et (III.8a), on a aussi :

$$\lambda_1(R = 0) = \lambda_2(R = 0) \quad (\text{III.10b})$$

- Sur le contour, la membrane est bloquée :

$$\lambda_2(R = 1) = 1 \quad (\text{III.11a})$$

$$z(R = 1) = 0 \quad (\text{III.11b})$$

Cas hyperélastique

La prise en compte d'une loi de comportement hyperélastique permet de relier les tensions T_i , $i = 1, 2$ aux extensions principales. La variable temps n'intervient pas, toutes les fonctions ne dépendent alors que du rayon réduit R . Le système (III.9) s'écrit sous la forme du système de cinq équations différentielles non-linéaires du premier ordre en R suivant :

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \frac{1}{A} \frac{1}{R} [(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2)B + C] \\ \lambda'_2 = \frac{1}{R} (\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2) \\ \theta' = \frac{\lambda_1}{T_1} \left(P - \frac{T_2 \sin \theta}{R \lambda_2} \right) \\ z' = -\lambda_1 \sin \theta \\ P' = 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où T_1 , T_2 , A , B et C sont des fonctions des inconnues $\lambda_1(R)$, $\lambda_2(R)$ et $\theta(R)$ avec $0 \leq R \leq 1$.

Les expressions des fonctions T_1 , T_2 , A , B et C pour les modèles de Mooney et d'Ogden sont fournies en annexe A. 1.1 .

A ce système d'équations, on ajoute les conditions aux limites (III.10a), (III.10b), (III.11a) et (III.11b). Il manque donc encore une condition aux limites pour que le problème soit bien posé. Pour cette dernière condition, plusieurs choix sont possibles :

- soit la pression à l'intérieur de la membrane est imposée, la condition sera alors du type :

$$P(R = 0) = P_0 \quad \text{ou} \quad P(R = 1) = P_0 \quad (\text{III.13})$$

ces deux conditions étant équivalentes puisque la pression est uniforme.

- soit la géométrie déformée est imposée, la condition limite sera alors :

$$\lambda_1(R = 0) = \lambda_2(R = 0) = \lambda_0 \quad \text{ou} \quad z(R = 0) = z_0 \quad (\text{III.14})$$

Avec l'ajout de cette cinquième condition limite, le système est bien posé et peut être résolu pour fournir les fonctions inconnues sur tout l'intervalle $0 \leq R \leq 1$.

La donnée de la hauteur, par la seconde condition aux limites de (III.14), permet alors de résoudre le système (III.12) et d'obtenir la déformée de la membrane ainsi que la pression à l'intérieur de celle-ci. Notre choix de n'enregistrer que la hauteur comme grandeur déformée est ainsi justifié.

Cas viscoélastique : modèle de Christensen

Le problème viscoélastique est plus complexe. En effet, à l'inverse du cas précédent, on ne peut plus éliminer la variable temps, puisque les contraintes et les déformations dépendent de toute l'histoire du matériau.

Dans ce cas là, le temps est discrétisé. Les intégrales intervenant dans le calcul des contraintes sont approchées par une relation de récurrence développée par Feng [FEN 86] permettant de calculer les contraintes au temps discret t_n à partir de la contribution visqueuse des contraintes au temps t_{n-1} et des déformations aux temps t_{n-1} et t_n . En reprenant le modèle de comportement de Christensen (II.115) et en imposant la forme de la fonction de relaxation $g_1(\tau)$ comme suit :

$$g_1(\tau) = g_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_R}} \quad (\text{III.15})$$

où g_1 est une constante et τ_R est un temps de relaxation, Feng utilise le théorème de la valeur moyenne sur l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ pour approcher l'intégrale visqueuse de 0 à t_n à partir de cette même intégrale de 0 à t_{n-1} et des déformations aux temps t_{n-1} et t_n . Il propose la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t_n) \simeq -p\bar{I} + \bar{F}(t_n) \left\{ g_0\bar{I} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} \int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1} - \tau) \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} d\tau \right. \\ \left. + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} [\bar{E}(t_n) - \bar{E}(t_{n-1})] \right\} \bar{F}^t(t_n) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

dans laquelle Δt désigne le pas de temps $t_n - t_{n-1}$ et où l'intégrale de 0 à t_{n-1} est la partie visqueuse de la contrainte au temps précédent t_{n-1} . De la même façon, nous avons utilisé la méthode de Feng pour établir la relation de récurrence permettant le calcul des contraintes dans le cas du modèle CBT. Cette relation figure en annexe A. 1.3.

En utilisant la formule de récurrence précédente, on réécrit le système (III.9) sous une forme similaire à la forme hyperélastique (III.12) :

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\frac{1}{F_1} \left[\frac{1}{R}(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2)F_2 + F_3 + F_4 \right] \\ \lambda'_2 = \frac{1}{R}(\lambda_1 \cos \theta - \lambda_2) \\ \theta' = \frac{\lambda_1}{T_1} \left(P - \frac{T_2 \sin \theta}{R\lambda_2} \right) \\ z' = -\lambda_1 \sin \theta \\ P' = 0 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

au temps t_n .

Les fonctions T_1, T_2, F_1, F_2, F_3 et F_4 dépendent des fonctions inconnues $\lambda_1(R, t_n), \lambda_2(R, t_n)$ et $\theta(R, t_n)$ avec $0 \leq R \leq 1$ et des grandeurs au temps discret précédent t_{n-1} . L'expression de ces fonctions pour les modèles de Christensen et CBT sont détaillées dans l'annexe A. 1.2.

A chaque temps discret t_n , il faut donc résoudre le système (III.17) avec les conditions aux limites (III.10a), (III.10b), (III.11a) et (III.11b) qui sont valables pour tous les temps discrets. A ces quatre conditions il faut ajouter, comme dans le cas hyperélastique, une cinquième condition portant soit sur l'histoire de la pression que l'on impose, soit sur l'histoire de la déformation que l'on impose :

$$P(R = 0, t_n) = P_n \quad \text{ou} \quad P(R = 1, t_n) = P_n \quad (\text{III.18})$$

ou bien

$$\lambda_1(R = 0, t_n) = \lambda_2(R = 0, t_n) = \lambda_n \quad \text{ou} \quad z(R = 0, t_n) = z_n \quad (\text{III.19})$$

et ce pour tous les temps t_n .

Ainsi, à chaque pas de temps, le problème viscoélastique est réduit à un problème élastique pour lequel les coefficients des équations différentielles dépendent des grandeurs au temps discret précédent. Le système est résolu à chaque temps discret et on obtient l'évolution des fonctions spatiales $(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \theta(R))$ et $z(R)$ pour $0 \leq R \leq 1$ et de la pression au cours du temps.

Comme dans le cas hyperélastique, la connaissance de l'histoire de la hauteur de la bulle au cours du gonflement est suffisante pour résoudre le problème. Ceci justifie à nouveau notre choix dans les mesures expérimentales.

Résolution numérique

Pour les deux cas exposés précédemment, nous avons montré que le problème numérique se résume à la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre non-linéaires en R avec des conditions aux limites aux deux extrémités de l'intervalle de définition $[0, 1]$. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la méthode développée par Pereyra [PER 78] et implantée dans la bibliothèque mathématique IMSL [IMS 87] (sous-programme BVFPD). Cette méthode est basée sur une approximation des dérivées par différences finies sur un maillage de l'intervalle de définition. Le maillage est adaptatif et la convergence est assurée par une méthode de corrections différées. Cet algorithme est très performant et permet une convergence rapide dans notre cas.

Cependant, le caractère fortement non-linéaire du système différentiel impose quelques précautions :

- L'initialisation des variables doit être proche de la solution cherchée. Dans le cas contraire, le système diverge très rapidement.

Dans le cas hyperélastique, on applique un chargement progressif qui permet de s'approcher de la solution désirée par petits incréments. Le point de départ d'un nouveau calcul est l'état de déformation calculé à l'incrément précédent.

Dans le cas viscoélastique, il faut discrétiser le temps en pas suffisamment petits pour éviter les variations trop importantes de la déformation entre deux temps discrets. Ainsi les résultats au temps t_{n-1} sont utilisés comme point de départ des calculs au temps t_n .

- Le second problème est dû à la physique du phénomène : dans certains cas particuliers, une instabilité de la membrane apparaît. En effet, il arrive que la membrane ne puisse pas supporter certaines valeurs de la pression (par exemple dans le cas d'un matériau néo-hookéen pour de trop grandes valeurs de la pression). Dans ce cas là, le système diverge.

Pour illustrer ce propos, nous pouvons construire la courbe de la pression interne en fonction de l'élongation principale au pôle pour un matériau néo-hookéen (figure III.12). Cette courbe admet un maximum, il existe donc une pression maximale que la membrane peut supporter. Pour des pressions internes plus grandes que cette pression critique, le calcul ne peut aboutir. Il y aura donc divergence de l'algorithme si au cours du calcul la pression imposée atteint une valeur supérieure à la pression critique. Ce désagrément peut être évité par la méthode préconisée précédemment, c'est-à-dire en effectuant le chargement par des pas de pression suffisamment petits.

Remarque : une étude plus complète des phénomènes d'instabilités dans les membranes a été effectuée sur le cas de la sphère et est proposée dans l'annexe C.

Une rapide validation de la résolution du problème de soufflage d'une membrane plane que nous venons d'exposer est présentée dans l'annexe A. 2.

III.3.2.2 Programme d'identification

Dans le paragraphe précédent, nous avons résolu de façon numérique le problème de soufflage d'une membrane circulaire initialement plane. Pour pouvoir identifier les paramètres des lois de comportement, nous devons maintenant coupler l'algorithme de résolution précédent avec un algorithme d'optimisation permettant la détermination des constantes matérielles.

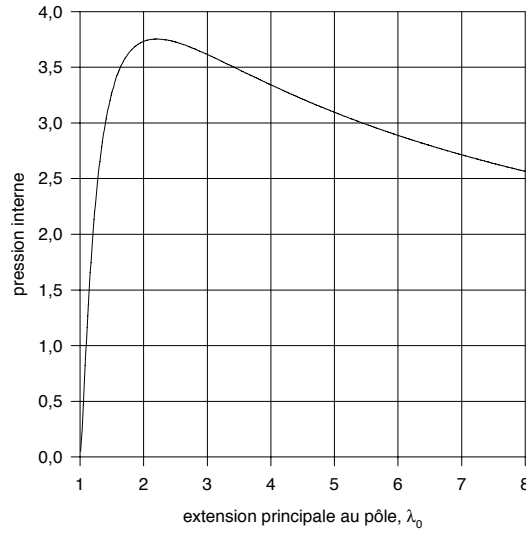


Figure III.12 : Pression interne en fonction de l'élongation principale au pôle, λ_0 , dans le cas du soufflage d'une membrane circulaire plane de matériau néo-hookéen

Comme nous l'avons vu, les systèmes différentiels (III.12) et (III.17), respectivement dans les cas hyperélastique et viscoélastique, décrivant le gonflement de la membrane peuvent être résolus en ajoutant aux conditions limites indépendantes du temps (III.10a), (III.10b), (III.11a), (III.11b) des conditions de chargement soit sur la pression ((III.13) ou (III.18)), soit sur la déformation ((III.14) ou (III.19)). Comme nous l'avons précédemment laissé entendre et compte tenu de l'existence de valeurs critiques de la pression, au-dessus desquelles le comportement quasi-statique de la membrane ne peut être calculé, nous avons choisi d'imposer une condition limite sur la déformation. En effet, on voit sur la figure III.12 qu'à toute déformation de la membrane correspond une valeur de la pression à l'intérieur de celle-ci : en imposant la déformation, on pourra toujours calculer la pression qui lui correspond.

Dans un premier temps, pour simplifier le problème, nous restreignons l'étude à une seule valeur du débit d'air (les trois débits seront traités simultanément dans le cas viscoélastique). Notons n_{exp} le nombre de points expérimentaux égal au nombre de temps discrets de mesure, $h_e(t_i)_{i=1, n_{exp}}$ les valeurs de la hauteur de la bulle mesurées et $P_e(t_i)_{i=1, n_{exp}}$ les valeurs de la pression mesurées. Pour un modèle choisi et des constantes matérielles fixées, les valeurs de la pression correspondant à l'histoire de la hauteur obtenue expérimentalement, $P_c(t_i)_{i=1, n_{exp}}$, sont calculées par la méthode exposée dans le paragraphe précédent.

La courbe théorique $P_c(t_i)$ correspondant aux constantes matérielles est ainsi construite point par point.

L'écart entre cette courbe et la courbe expérimentale $P_e(t_i)$ est estimé par l'intermédiaire de l'erreur globale absolue des moindres carrés :

$$E = \sum_{i=1}^{n_{exp}} [P_e(t_i) - P_c(t_i)]^2 \quad (\text{III.20})$$

Le problème consiste alors à minimiser cette erreur en déterminant les constantes matérielles optimales. Le principe de l'identification est résumé sur la figure III.13.

Pour résoudre le problème de minimisation, nous utilisons l'algorithme de Levenberg-Marquardt [LEV 44], [MAR 63]. Cet algorithme est présenté de façon succincte dans l'annexe B. Il a déjà

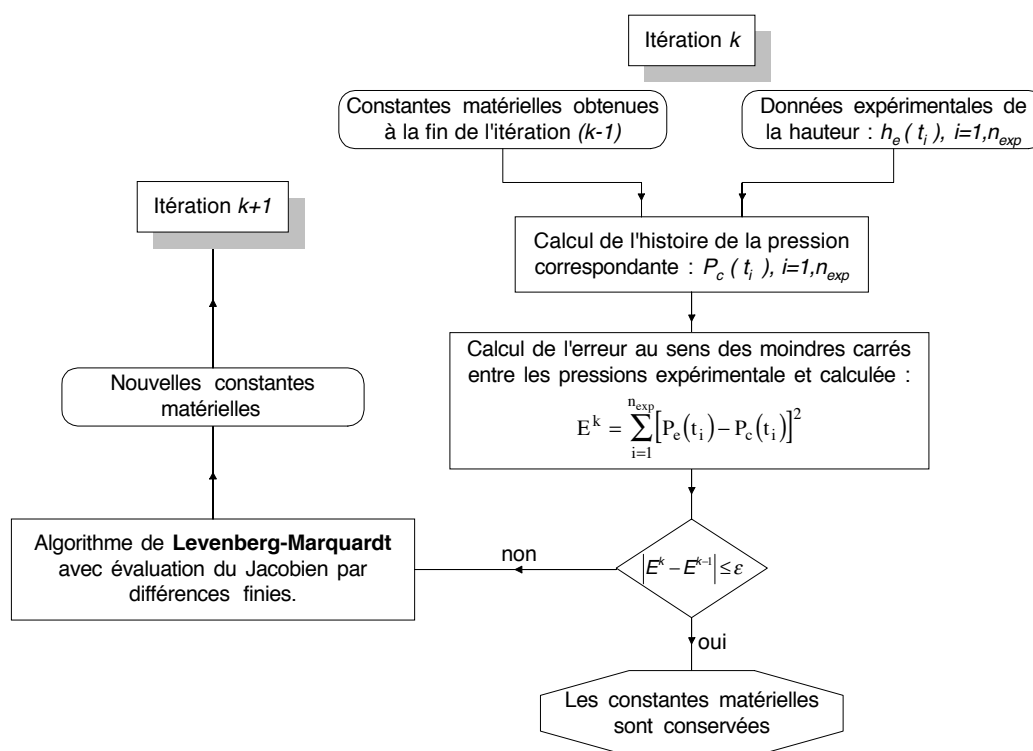


Figure III.13 : Principe du programme d'identification

été utilisé pour la détermination des paramètres du modèle d'Ogden : par Twizell et Ogden [TWI 83] dans sa version originale et par Benjeddou *et al.* [BEN 93] dans une version modifiée par Fletcher respectivement pour les résultats expérimentaux de Treloar [TRE 44b] et pour l'extension et le gonflement simultanés de cylindres en caoutchouc.

Remarque : dans ces deux cas, les auteurs connaissaient la forme analytique des fonctions pression(déformation), le Jacobien de l'erreur par rapport à la variation des constantes matérielles était donc connu de manière explicite. Dans notre cas, la courbe $P_c(h_e)$ est discontinue car construite point par point : on ne connaît pas la fonction explicite. Le Jacobien doit donc être évalué par une méthode des différences finies.

Pour résoudre le problème, nous avons utilisé le sous-programme UNLSF de la bibliothèque mathématique IMSL [IMS 87] qui couple l'algorithme de Levenberg-Marquardt à une méthode des différences finies pour l'estimation du Jacobien.

Cas hyperélastique

Comme nous l'avons précisé dans l'étude des lois de comportement nécessaires à la représentation du comportement des polymères chauffés, Schmidt et Carley [SCH 75a] , [SCH 75b] ont montré que l'on pouvait utiliser des lois de comportement hyperélastiques pour des déformations suffisamment rapides.

Pour l'identification des constantes des modèles hyperélastiques retenus (Mooney-Rivlin et Ogden), seuls les résultats expérimentaux relatifs au plus grand débit d'air (27 l/s) ont donc été retenus. Dans ce cas là, on élimine la variable temps pour obtenir la pression en fonction de la hauteur seulement. On obtient ainsi un nuage de points expérimentaux (h_{e_i}, P_{e_i}) . Pour chaque

doublet, la hauteur est imposée comme condition limite et la courbe calculée $P_c(h_{e_i})$, $i = 1, n_{\text{exp}}$ est comparée au nuage de points $P_{e_i}(h_{e_i})$ jusqu'à l'obtention des constantes matérielles optimales.

Cas viscoélastique

Les courbes expérimentales ont mis en évidence le caractère viscoélastique du comportement du matériau. Pour l'identification, nous avons pris en compte et traité simultanément les résultats expérimentaux relatifs aux trois débits d'air. Pour cela, les nuages de points (t_i, h_{e_i}) obtenus pour chacun des débits sont approchés par une fonction de la forme $h(t) = At^\gamma$ où A et γ sont des constantes déterminées de manière optimale, au sens des moindres carrés. Ces fonctions permettent de calculer les courbes discrètes (t_i, P_{c_i}) pour les trois débits, en imposant comme condition aux limites sur la hauteur $z(R = 0, t_i) = h(t_i)$ pour tous les temps t_i , et de calculer l'erreur totale en sommant les trois écarts relatifs aux trois courbes expérimentales.

Le fait de traiter les trois débits de manière globale et d'utiliser des fonctions temporelles approchant les trois nuages de points pour les valeurs de la hauteur imposées comme condition aux limites permet de ne privilégier aucun des trois débits. Ainsi, on évite les erreurs dues aux différences entre les nombres de points expérimentaux mesurés pour chacun des débits.

III.3.2.3 Résultats de l'identification

Ces résultats ont été présentés dans [VER 97a] et [VER 97b].

Modèles hyperélastiques

Dans un premier temps, nous avons donc identifié les coefficients des différentes lois de comportement hyperélastiques sur les données expérimentales relatives au premier débit d'air (27 l/s). En effet, on ne s'intéresse qu'à la vitesse de déformation la plus élevée, puisque c'est dans ces conditions que les matériaux peuvent être modélisés par une loi hyperélastique. Les résultats de l'identification sont comparés aux résultats expérimentaux sur la figure III.14.

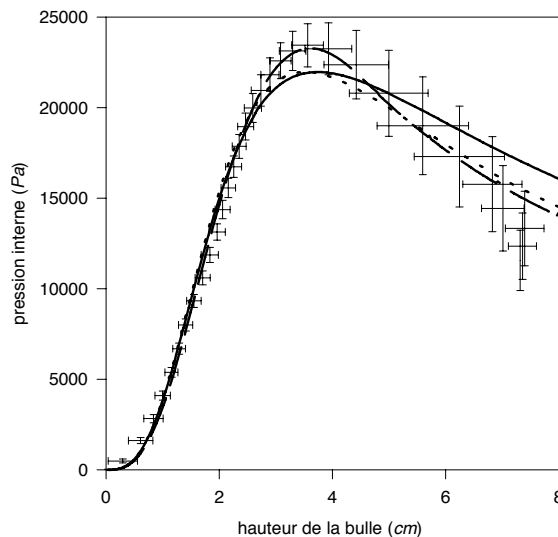


Figure III.14 : Résultats de l'identification dans le cas hyperélastique : (+) points expérimentaux, (—) modèle de Mooney, (···) modèle d'Ogden à 2 termes, (-) modèle d'Ogden à 3 termes

- Modèle de Mooney

Pour ce modèle, les constantes identifiées sont :

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,118 \text{ MPa} \\ C_2 &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc le modèle néo-hookéen, modèle le plus apte à modéliser la chute de pression lors du gonflement de la bulle. Cependant, les résultats ne sont pas des plus satisfaisants comme le montre la courbe correspondante sur la figure III.14.

- Modèle d'Ogden

Pour améliorer les résultats, nous avons donc considéré les modèles de type Ogden. Pour une série de deux termes, les coefficients sont :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,252 \text{ MPa} & \alpha_1 &= 1,58 \\ \mu_2 &= -0,203 \text{ MPa} & \alpha_2 &= -1,13 \end{aligned}$$

Ces résultats fournissent une légère amélioration dans la modélisation du comportement mais laissent à penser que l'ajout d'un terme supplémentaire permettrait une meilleure approche.

Pour une série de trois termes, les coefficients obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 4,1 \text{ MPa} & \alpha_1 &= 0,071 \\ \mu_2 &= 0,022 \text{ MPa} & \alpha_2 &= 2,256 \\ \mu_3 &= -0,058 \text{ MPa} & \alpha_3 &= -1,2 \end{aligned}$$

La courbe correspondante de la figure III.14 montre que ces valeurs des paramètres matériels permettent de beaucoup mieux modéliser le comportement et notamment la chute de pression.

Le tableau III.2 illustre les performances de ces trois modèles au travers des erreurs au sens des moindres carrés entre les modèles et les points expérimentaux.

Modèle	Erreur (MPa^2)
Mooney	$2,15 \cdot 10^{-5}$
Ogden 2 termes	$1,62 \cdot 10^{-5}$
Ogden 3 termes	$9,48 \cdot 10^{-6}$

Tableau III.2: Erreur au sens des moindres carrés pour les trois modèles hyperélastiques

Remarque : tout d'abord, on note que pour les paramètres obtenus dans les deux modèles d'Ogden, on vérifie toujours l'inégalité imposée par Ogden (II.83), à savoir :

$$\mu_i \alpha_i > 0 \quad \forall i$$

Par contre, les coefficients α_i ne vérifient pas toutes les conditions imposées par Twizell et Ogden [TWI 83] et par Chadwick et al. [CHA 77a], conditions énoncées précédemment dans le paragraphe II.2.2.2. Ces conditions avaient été élaborées dans des cas très particuliers et Benjeddou et al. [BEN 93] ont montré qu'elles n'étaient pas indispensables (dans le cas de l'extension et du soufflage simultanés d'un cylindre).

Les résultats que nous avons obtenus mettent en évidence la nécessité de retenir trois termes pour le modèle d'Ogden pour représenter le comportement biaxial (comme Ogden l'avait montré pour le caoutchouc [OGD 72]).

Cas viscoélastique

Pour le cas viscoélastique, nous prenons en compte maintenant les trois séries de données expérimentales, relatives aux trois débits de l'air.

Comme nous l'avons vu pour le problème hyperélastique précédent, le modèle néo-hookéen est insuffisant pour représenter de façon satisfaisante le comportement du matériau, on peut donc penser que le modèle viscoélastique de Christensen (« contrepartie viscoélastique du modèle néo-hookéen ») ne permettra pas de recalibrer les essais de façon satisfaisante. Quelques tests d'identification avec ce modèle ont permis de vérifier ces premières suppositions : nous n'avons pas pu obtenir de résultats acceptables. Il en fut de même pour le modèle CBT avec une série limitée à deux termes.

Par contre, pour une série de trois termes, les résultats s'améliorent et permettent une bonne approximation du comportement. Les coefficients obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} g_{01} &= 0,051 \text{ MPa} & \alpha_1 &= 1,63 \\ g_{02} &= 0,125 \text{ MPa} & \alpha_2 &= 0,30 \\ g_{03} &= -3,66 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} & \alpha_3 &= -1,53 \\ g_1 &= 5,13 & \tau_R &= 6,13 \text{ s} \end{aligned}$$

La figure III.III.15(a) présente les fonctions $h(t)$ utilisées pour l'optimisation. La figure III.III.15(b) montre les résultats obtenus en terme de pression : les données expérimentales sont bien reproduites par le modèle CBT à trois termes pour les trois débits d'air. Dans ce cas là, l'erreur au sens des moindres carrés est $6,23 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^2$.

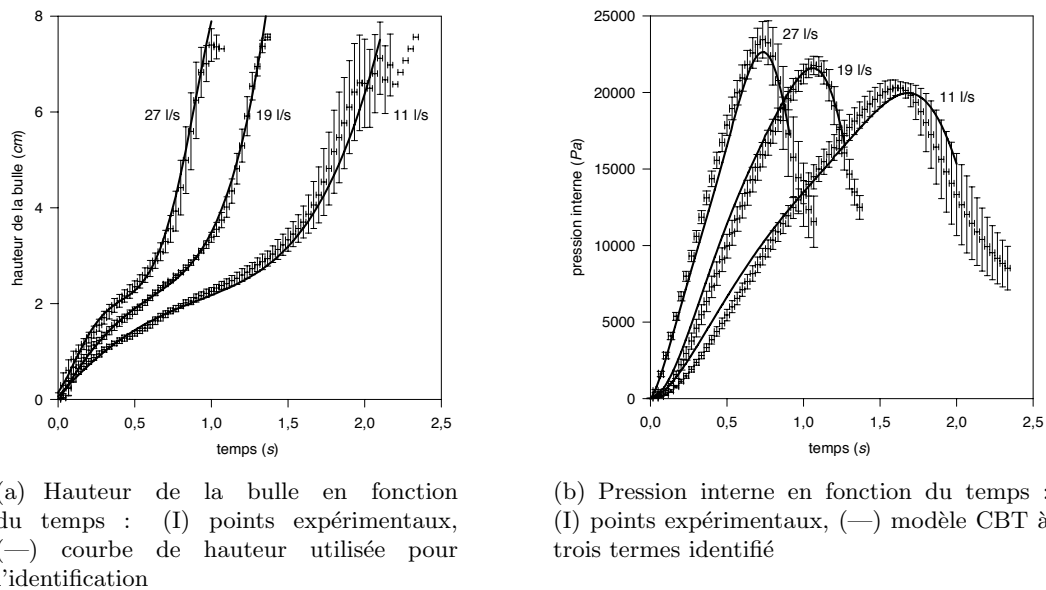


Figure III.15 : Résultats de l'identification dans le cas viscoélastique

III.3.3 Discussion des résultats

Pour estimer et justifier la validité des constantes matérielles obtenues par notre méthode d'identification, nous devons les comparer à celles fournies dans la littérature.

Malheureusement, très peu d'expériences ont été menées sur l'ABS. Seuls les résultats de Goldsmith [GOL 87] peuvent être utilisés pour valider les résultats que nous avons obtenus

dans le cas de l'identification des modèles hyperélastiques. Goldsmith a mené une campagne d'essais sur différents polymères, dont l'ABS, à différentes températures loin au-dessus de la température de transition vitreuse. Ses essais de traction uniaxiale lui ont permis de montrer que le comportement de ce type de matériau pouvait être modélisé par un modèle d'Ogden réduit à un seul terme. Les résultats qu'il a obtenus sont rappelés sur la figure III.16.

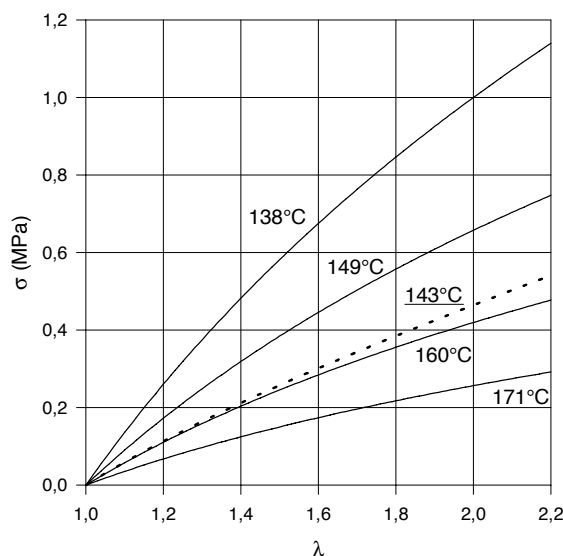


Figure III.16 : Comparaison de nos résultats avec ceux de Goldsmith obtenus lors d'expériences de traction uniaxiale sur l'ABS : (—) Goldsmith, (···) notre modèle d'Ogden à trois termes

Les courbes relatives aux résultats de Goldsmith ne sont pas des courbes expérimentales, mais celles obtenues après identification. En fait, elles reproduisent parfaitement ses résultats expérimentaux. La courbe relative à nos résultats a été construite en reprenant les paramètres du modèle d'Ogden que nous avons identifiés et en construisant la courbe contrainte - déformation correspondant à un essai de traction uniaxiale.

Ces courbes montrent que l'ordre de grandeur de nos résultats est correct. Nous devons cependant nous contenter de cette première observation. En effet, le comportement de l'ABS dépend de sa composition chimique, de l'histoire thermique, ..., données qui varient d'un fabricant à l'autre. Ces données n'étant évidemment pas disponibles aussi bien pour notre matériau que pour celui de Goldsmith, nous devons nous contenter d'ordres de grandeur.

En tenant compte des résultats que nous avons obtenus lors du recalage par des modèles hyperélastiques, nous pouvons critiquer les conclusions avancées par Goldsmith, reprises par deLorenzi et Nied [DEL 91], qui affirme qu'un seul terme dans la série du modèle d'Ogden est suffisant pour bien modéliser le comportement des polymères fondus. En effet, nous avons montré que la prise en compte de trois termes dans la série était indispensable pour une bonne modélisation du comportement biaxial de l'ABS, dans le cas où l'on se contente de modèles hyperélastiques. Ceci provient du fait que Goldsmith a seulement effectué des expériences de traction uniaxiale : il n'a pas rencontré d'état de déformation plus complexe mettant en évidence la nécessité d'un modèle plus riche. Ogden avait observé la même chose sur le caoutchouc [OGD 72] : pour la traction uniaxiale ou le cisaillement pur, deux termes dans la série suffisaient mais pour la traction équi-biaxiale, il fallait en ajouter un troisième.

Le point le plus important de nos observations expérimentales reste la mise en évidence du

caractère viscoélastique de l'ABS dans les conditions de mise en forme, ce qui permet d'affirmer que la vitesse de déformation est une grandeur prépondérante dans la modélisation de son comportement.

Seuls Denson et Hylton [DEN 80] ont étudié le comportement viscoélastique de l'ABS (à 138°C). Les auteurs ont mis en place des expériences de relaxation et de retard sur des membranes rectangulaires. Cependant, leurs essais ont été faits sur de trop grandes périodes de temps (de l'ordre de 500 s) pour que nous puissions les utiliser comme élément de comparaison (la durée de nos expériences est plutôt de l'ordre de 2-3 s). Il nous est donc difficile de justifier les résultats obtenus pour le modèle viscoélastique CBT, nous pouvons seulement dire que la qualité des résultats relatifs au modèle hyperélastique d'Ogden, permet d'espérer une qualité similaire dans le cas viscoélastique.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un montage expérimental permettant la caractérisation des polymères thermoplastiques chauffés à leur température de mise en forme a été présenté. Pour obtenir des états de déformation proches de ceux rencontrés dans les procédés de moulage par soufflage ou de thermoformage, nous avons opté pour la technique du soufflage d'une membrane initialement plane.

Des expériences ont été menées pour trois débits d'air différents. Nous avons mesuré l'évolution de la pression et de la hauteur de la bulle, tout au long du soufflage. Malgré les difficultés de mesure, les expériences se sont avérées reproductibles. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance de la pression à l'intérieur de la bulle et plus précisément l'étroite relation entre cette pression et la déformation du matériau. La pression n'est donc pas une grandeur extérieure au problème, mais bien une variable que l'on n'impose pas et qui, pour des conditions données, dépend du matériau étudié.

Ces résultats expérimentaux ont permis de mettre en lumière le caractère viscoélastique de l'ABS à sa température de mise en forme. Ils sont utilisés pour l'identification de lois de comportement. Deux types de lois ont été considérés : modèles hyperélastiques en première approximation et modèles viscoélastiques non-linéaires. La méthode de recalage adoptée est fondée sur la résolution des équations exactes régissant le soufflage d'une membrane plane circulaire. Ce programme de résolution est couplé avec un algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt pour la détermination des coefficients optimaux des lois de comportement. Les lois de comportement finalement obtenues reproduisent les expériences de façon satisfaisante.

Chapitre IV

Simulation dynamique numérique des procédés

II.1	Rappels de mécanique des milieux continus	27
II.2	Modèles de comportement pour les matériaux de type caoutchouc	36
II.3	Conclusion	60

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la simulation numérique est un formidable outil pour l'élaboration de nouveaux produits ou encore pour l'amélioration de procédés déjà existants. Dans la revue bibliographique de ce premier chapitre (paragraphe I.3), nous avons mis en évidence la diversité des travaux et des approches concernant la simulation des problèmes de soufflage de membrane et de mise en forme des plastiques. A la lumière de ces travaux, nous avons développé un code de calcul permettant la simulation des procédés de soufflage, basé sur la théorie des membranes (en effet, nous avons fait l'hypothèse classique consistant à considérer les paraisons polymériques comme des membranes soumises à un chargement en pression). Comme la plupart des auteurs, nous avons adopté la méthode des éléments finis et l'hypothèse de contact collant (nous reviendrons dans le détail sur ces différents points par la suite).

Classiquement, les codes de calcul par éléments finis pour ce type de simulation ne s'intéressent qu'aux problèmes quasi-statiques [ZAM 89]. Cependant, les très fortes non-linéarités rencontrées, aussi bien matérielles que géométriques, mais aussi et surtout l'apparition de phénomènes d'instabilité lors du gonflement [KHA 92] engendrent des problèmes de convergence et nécessitent le contrôle précis des incréments de chargement [SHI 96]. Pour remédier à ces difficultés, nous avons considéré le problème dynamique (prise en compte des termes d'inertie) et non pas la réduction quasi-statique de ce problème mécanique. Pour cela, nous avons adopté un schéma dynamique explicite, habituellement utilisé pour la simulation du procédé d'emboutissage, mais récemment étendu au cas de la mise en forme des plastiques par Rachik *et al.* [RAC 93], [RAC 94] et Bourgin *et al.* [BOU 95].

Remarque : nous reviendrons par la suite sur la notion d'instabilité des membranes lors de la validation du code de calcul.

IV.1 Formulation variationnelle

Dans les problèmes de soufflage, la paraison initiale est supposée entièrement connue et définie. Pour cette raison, nous nous sommes tournés vers une formulation lagrangienne totale du problème : la configuration de référence reste la configuration initiale tout au long du calcul.

En l'absence de forces de volume, le Principe des Travaux Virtuels, établi précédemment (II.41), s'écrit :

$$\iiint_{V_0} \delta \vec{u} \cdot \rho_0 \ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau) dV_0 = - \iiint_{V_0} \delta \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{S}} dV_0 + \iint_{S_{0T}} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_0 dS_0 \quad \forall \delta \vec{u} \text{ compatible} \quad (\text{IV.1})$$

où V_0 et S_{0T} sont respectivement le volume et la surface frontière sur laquelle le chargement est imposé dans l'état initial non déformé, ρ_0 est la masse volumique, $\ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau)$ le vecteur accélération exprimé en fonction de la position initiale, $\overline{\overline{E}}$ le tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\overline{\overline{S}}$ le second tenseur des contraintes de Piola-Khirschhoff, \vec{T}_0 la densité surfacique de force relativement à la configuration initiale et $\delta \vec{u}$ un déplacement virtuel compatible.

Dans l'équation précédente, le terme de gauche représente le travail virtuel des quantités d'accélération, le premier terme de droite est le travail virtuel des forces internes (contribution de la déformation du matériau) et le dernier terme est le travail virtuel du chargement extérieur surfacique (ici les forces de pression).

IV.2 Discrétisation spatiale : éléments finis

Comme nous l'avons expliqué plus haut dans la présentation des travaux de simulation de la mise en forme des plastiques, la méthode des éléments finis est la plus utilisée pour la résolution de ce type de problème. Comme la plupart des auteurs, nous adopterons cette méthode. Pour ce qui est des généralités concernant les éléments finis, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [DHA 84], [ZIE 94].

IV.2.1 P.T.V. discrétisé

La structure globale est discrétisée en éléments finis ; le Principe des Travaux Virtuels est écrit pour chacun des éléments puis sommé sur toute la structure pour approcher l'équation globale à résoudre (IV.1). Notons n_e le nombre d'éléments finis, δW le travail virtuel total et $V_{0_i}^e$, $S_{0T_i}^e$ le volume et la surface où la force est imposée de l'élément non déformé, l'équation (IV.1) devient :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\iiint_{V_{0_i}^e} \delta \vec{u} \cdot \rho_0 \ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau) dV_0 + \iiint_{V_{0_i}^e} \delta \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{S}} dV_0 - \iint_{S_{0T_i}^e} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_0 dS_0 + \text{travail des efforts de liaison entre les éléments} \right) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \text{ compatible} \quad (\text{IV.2})$$

La somme des travaux virtuels élémentaires des efforts de liaison étant nulle, il nous faut dès lors calculer les trois autres travaux élémentaires explicités dans l'équation précédente pour résoudre celle-ci. Dans toute la suite, on notera δW_i^e la somme de ces trois travaux relatifs à l'élément i , soit :

$$\delta W_i^e = \iiint_{V_{0_i}^e} \delta \vec{u} \cdot \rho_0 \ddot{\vec{u}}(\vec{X}, \tau) dV_0 + \iiint_{V_{0_i}^e} \delta \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{S}} dV_0 - \iint_{S_{0T_i}^e} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_0 dS_0 \quad (\text{IV.3})$$

La position (respectivement le déplacement) d'un point de la paraison est interpolée à partir de la position (respectivement du déplacement) des noeuds de l'élément auquel ce point appartient. Dans ce travail, nous considérerons des éléments isoparamétriques, c'est-à-dire des

éléments pour lesquels l'interpolation de la position et l'interpolation du déplacement sont identiques. Notons $[N]$ la matrice d'interpolation, $\{x\}$ (respectivement $\{u\}$) le vecteur position (respectivement déplacement) d'un point et $\{X\}$ (respectivement $\{U\}$) le vecteur des positions (respectivement des déplacements) des noeuds de l'élément auquel ce point appartient. La position et le déplacement obéissent alors aux équations suivantes :

$$\{x\} = [N]\{X\} \quad (\text{IV.4a})$$

$$\{u\} = [N]\{U\} \quad (\text{IV.4b})$$

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta U\} \quad (\text{IV.4c})$$

le vecteur $\{\delta U\}$ étant le vecteur des déplacements nodaux virtuels compatibles.

La contribution de l'élément i peut se mettre sous la forme :

$$\delta W_i^e = \{\delta U_i\}^t \left(\iiint_{V_{0_i}^e} [N]^t \rho_0 [N] \{\ddot{U}\} dV_0 + \iiint_{V_{0_i}^e} [B]^t \{S^e\} dV_0 - \iint_{S_{0T_i}^e} [N]^t \{T_0^e\} dS_0 \right) \quad (\text{IV.5})$$

où $\{\delta U_i\}$ est le vecteur des déplacements nodaux virtuels de l'élément, la matrice $[B]$ dépend de l'interpolation (du type d'élément fini adopté), $\{S^e\}$ est le vecteur nodal des contraintes de Piola-Khirschhoff de seconde espèce (la construction de ce vecteur sera détaillée par la suite) et où $\{T_0^e\}$ est le vecteur du chargement surfacique.

La contribution élémentaire peut aussi se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\delta W_i^e = \{\delta U_i\}^t (\{\mathcal{A}^e\} + \{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\})_i \quad (\text{IV.6})$$

où $\{\mathcal{A}^e\}$, $\{F_{int}^e\}$ et $\{F_{ext}^e\}$ sont respectivement les efforts dus aux quantités d'accélération, aux forces intérieures et aux forces extérieures, travaillant tous les trois dans le déplacement virtuel.

Après sommation des contributions de tous les éléments en utilisant l'équation (IV.2), en notant que celle-ci est vérifiée pour tout vecteur des déplacements nodaux virtuels compatibles $\{\delta U\}$, l'équation algébrique à résoudre est la suivante :

$$\{\mathcal{A}\} + \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} = \{0\} \quad (\text{IV.7})$$

avec :

- $\{\mathcal{A}\}$: vecteur nodal des quantités d'accélération ;
- $\{F_{int}\}$: vecteur nodal des forces intérieures ;
- $\{F_{ext}\}$: vecteur nodal des forces extérieures.

IV.2.2 Élément fini triangulaire de type membrane

Le domaine est discrétisé en éléments finis triangulaires à trois noeuds et à trois degrés de liberté par noeud. Ces degrés de liberté (notés d.d.l. par la suite) sont les déplacements des trois noeuds du triangle dans l'espace. L'interpolation est :

$$\{u\} = [N(\xi, \eta)]\{U\} \quad (\text{IV.8})$$

où $\{U\}$ est le vecteur des neuf variables nodales. L'interpolation étant linéaire, la matrice $[N(\xi, \eta)]$ est définie par [ZIE 94] :

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

avec $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $0 \leq 1 - \xi - \eta \leq 1$. L'élément est isoparamétrique, donc l'interpolation est identique pour la position $\{x\}$.

Compte tenu de la linéarité de l'interpolation, les états de déformation et de contrainte sont constants dans l'élément. De plus, l'hypothèse d'un comportement de type membrane impose un état de contrainte plan dans le plan de l'élément déformé : la contrainte suivant la direction de l'épaisseur ainsi que les deux contraintes de cisaillement sont nulles.

Pour utiliser cette hypothèse, il est préférable de se placer dans le repère local lié à l'élément déformé. Pour cela, on considère deux repères distincts définis sur la figure IV.1 :

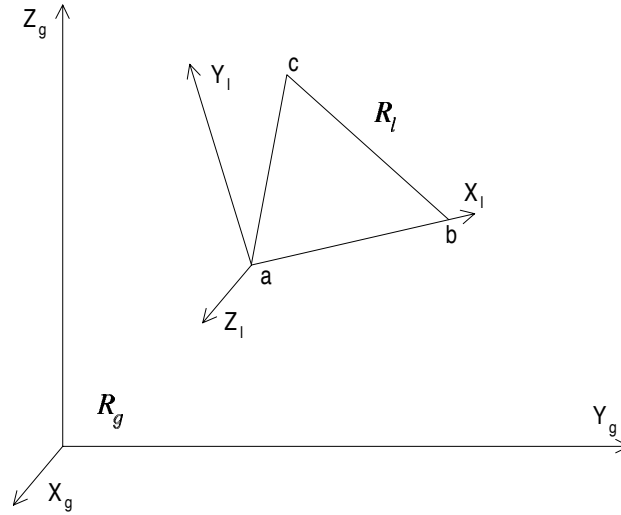


Figure IV.1 : Définition des repères utilisés pour la description du mouvement et de la déformation d'un élément fini

- \mathcal{R}_g est le repère global ;
- \mathcal{R}_l est le repère local lié à l'élément déformé.

Notons A, B, C les trois noeuds du triangle non déformé et a, b, c les trois noeuds du triangle déformé. L'origine du repère \mathcal{R}_l est a et le premier axe de ce repère est (ab) (le troisième axe étant confondu avec la direction normale à l'élément). De plus, on définit la rotation R_{lg} qui permet de passer de la base locale déformée à la base globale.

Dans toute la suite, les coordonnées globales seront indicées \cdot_g , et les coordonnées locales déformées \cdot_l . La relation de passage entre ces deux bases est alors la somme de la rotation et d'une translation :

$$\{x_g\} = [R_{lg}]\{x_l\} + \{x_g(a)\} \quad (\text{IV.10})$$

où $\{x_g\}$ et $\{x_l\}$ sont les vecteurs de position d'un point respectivement dans les repères global et local déformé et où $\{x_g(a)\}$ est le vecteur des coordonnées globales du point a .

Pour étudier la déformation d'un élément fini dans son plan, on décompose sa transformation en un mouvement de solide rigide qui amène l'élément dans son plan déformé et la déformation membranaire dans ce plan. On est donc amené à translater l'élément non-déformé dans le repère déformé, puis à étudier sa déformation dans celui-ci (figure IV.2).

Il suffira alors de calculer le travail virtuel des efforts intérieurs induit par la déformation dans le plan, dans la mesure où la translation est un mouvement rigidifiant pour lequel les efforts intérieurs ne travaillent pas. En revanche, pour le calcul du travail des quantités d'accélération et du travail des efforts extérieurs, il faut faire intervenir les deux parties de la transformation.

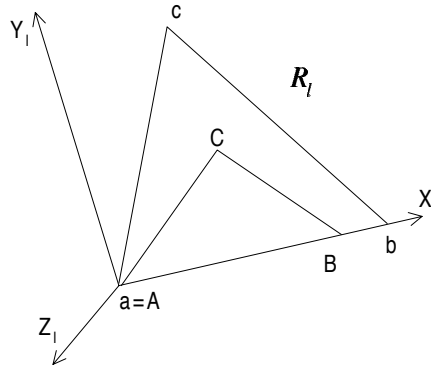


Figure IV.2 : Déformation d'un élément fini membrane dans son plan

IV.2.2.1 Passage des grandeurs du repère local au repère global

Par la suite, nous effectuerons le calcul des trois termes intervenant dans la contribution d'un élément au travail total (IV.3) dans le repère local déformé. Avant cela, il nous faut établir les relations de passage à utiliser pour revenir au repère global et pouvoir assembler les contributions de tous les éléments. Les relations de passage pour les tenseurs de Cauchy et de Green-Lagrange et second tenseur des contraintes de Piola-Khirschhoff sont les suivantes :

$$\overline{\overline{C}}_g = R_{lg} \overline{\overline{C}}_l R_{lg}^{-1} \quad (\text{IV.11a})$$

$$\overline{\overline{E}}_g = R_{lg} \overline{\overline{E}}_l R_{lg}^{-1} \quad (\text{IV.11b})$$

$$\overline{\overline{S}}_g = R_{lg} \overline{\overline{S}}_l R_{lg}^{-1} \quad (\text{IV.11c})$$

A partir de ces relations de passage, on montre aisément :

$$\overline{\overline{\delta E}}_g : \overline{\overline{S}}_g = \overline{\overline{\delta E}}_l : \overline{\overline{S}}_l \quad (\text{IV.12})$$

IV.2.2.2 Déformation d'un élément dans son plan

Compte tenu de la linéarité de l'interpolation, tout le travail mené dans le plan de l'élément sera fait de manière analytique, évitant ainsi toute intégration numérique.

Nous considérons un élément fini membrane triangulaire dans son plan et étudions sa déformation dans celui-ci (figure IV.2). On rappelle que (ABC) est le triangle non déformé et (abc) le triangle déformé. Notons (X_k, Y_k) les coordonnées dans le repère local déformé du point k , où k représente A , B ou C . De même, notons $(u_k, v_k)_{k=A,B,C}$ les déplacements de ces trois points.

Par définition du repère local déformé, on a :

$$X_A = Y_A = 0 \quad (\text{IV.13a})$$

$$Y_B = 0 \quad (\text{IV.13b})$$

et :

$$u_A = v_A = 0 \quad (\text{IV.14a})$$

$$v_B = 0 \quad (\text{IV.14b})$$

L'interpolation de la géométrie est donc :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} X_A = 0 \\ Y_A = 0 \\ X_B \\ Y_B = 0 \\ X_C \\ Y_C \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

où $[N(\xi, \eta)]$ est la matrice d'interpolation bidimensionnelle, obtenue par réduction au cas plan de la matrice définie par (IV.9) et est donnée par :

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

De façon similaire, l'interpolation des déplacements est fournie par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ u_B \\ v_B = 0 \\ u_C \\ v_C \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Dans le repère local, la matrice représentative du tenseur gradient des déplacement $\overline{\overline{h}}_l$ est notée $[h_l]$ et est :

$$[h_l] = \begin{bmatrix} \frac{u_B - u_A}{X_B} & -\frac{X_C}{X_B Y_C} (u_B - u_A) + \frac{1}{Y_C} (u_C - u_A) \\ \frac{1}{X_B} (v_B - v_A) & -\frac{X_C}{X_B Y_C} (v_B - v_A) + \frac{1}{Y_C} (v_C - v_A) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

On rappelle que le tenseur des déformations de Green-Lagrange local s'écrit :

$$\overline{\overline{E}}_l = \frac{\overline{\overline{h}}_l + \overline{\overline{h}}_l^t}{2} + \frac{\overline{\overline{h}}_l \overline{\overline{h}}_l^t}{2}$$

où le premier terme du membre de droite est la partie linéaire de $\overline{\overline{E}}_l$ (notée $\overline{\overline{E}}_l^L$ par la suite) et le second terme, la partie non-linéaire (notée $\overline{\overline{E}}_l^{NL}$ par la suite).

On considère maintenant les vecteurs associés à ces deux termes. Ces vecteurs sont notés $\{\overline{\overline{E}}_l^L\}$ et $\{\overline{\overline{E}}_l^{NL}\}$ et ont trois composantes qui sont E_{l11}^L , E_{l22}^L et $2E_{l12}^L$, et E_{l11}^{NL} , E_{l22}^{NL} et $2E_{l12}^{NL}$,

respectivement. Pour calculer le terme du travail virtuel des efforts intérieurs, il nous faut relier ces deux vecteurs au vecteur des déplacements virtuels nodaux $\{\delta U_l\}$ qui est :

$$\{\delta U_l\} = \begin{Bmatrix} \delta u_A \\ \delta v_A \\ \delta u_B \\ \delta v_B \\ \delta u_C \\ \delta v_C \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

A cet effet, on introduit deux matrices $[B^L]$ et $[B^{NL}]$ définies comme suit :

$$\{\widehat{\delta E_l^L}\} = [B^L]\{\delta U_l\} \quad (\text{IV.20a})$$

$$\{\widehat{\delta E_l^{NL}}\} = [B^{NL}]\{\delta U_l\} \quad (\text{IV.20b})$$

Ces matrices sont de dimension 3×6 . Leurs expressions respectives sont :

$$[B^L]^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{X_B} & 0 & \frac{1}{Y_C} \left(\frac{X_C}{X_B} - 1 \right) \\ 0 & \frac{1}{Y_C} \left(\frac{X_C}{X_B} - 1 \right) & -\frac{1}{X_B} \\ \frac{1}{X_B} & 0 & -\frac{1}{Y_C} \frac{X_C}{X_B} \\ 0 & -\frac{1}{Y_C} \frac{X_C}{X_B} & \frac{1}{X_B} \\ 0 & 0 & \frac{1}{Y_C} \\ 0 & \frac{1}{Y_C} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21a})$$

et :

$$[B^{NL}]^t = \begin{bmatrix} -\frac{u_B}{X_B^2} & \frac{1}{Y_C^2} \left(\frac{X_C}{X_B} - 1 \right) \left(u_C - \frac{X_C u_B}{X_B} \right) & \frac{1}{X_B Y_C} \left(\frac{X_C}{X_B} u_B - \frac{u_B + u_C}{2} \right) \\ 0 & \frac{1}{Y_C^2} \left(\frac{X_C}{X_B} - 1 \right) v_C & -\frac{v_C}{2 X_B Y_C} \\ \frac{u_B}{X_B^2} & \frac{X_C}{X_B Y_C^2} \left(u_C - \frac{X_C u_B}{X_B} \right) & \frac{1}{X_B Y_C} \left(-\frac{X_C}{X_B} u_B + \frac{u_C}{2} \right) \\ 0 & -\frac{X_C}{X_B Y_C^2} v_C & \frac{v_C}{2 X_B Y_C} \\ 0 & \frac{1}{Y_C^2} \left(u_C - \frac{X_C u_B}{X_B} \right) & \frac{v_C}{Y_C^2} \\ 0 & \frac{v_C}{Y_C^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21b})$$

A partir de ces travaux préliminaires sur le passage entre les grandeurs globales et les grandeurs locales et l'étude de l'élément fini triangulaire dans son plan, on peut maintenant calculer les trois travaux élémentaires (IV.5) intervenant dans le Principe des Travaux Virtuels discrétisé (IV.2) dans le repère local, et se préoccuper de l'assemblage dans le repère global.

IV.2.2.3 Vecteur des forces intérieures

Dans ce paragraphe, on se propose de calculer le travail virtuel des forces intérieures relatif à un élément dont on rappelle la forme : $\iint_{V_0^e} \delta \overline{\overline{E_l}} : \overline{\overline{S_l}} dV_0$. Notons δW_{int}^e cette grandeur, et

considérons à nouveau le vecteur $\widehat{\{E_l\}}$ défini par :

$$\widehat{\{E_l\}}^t = \langle E_{l_{11}}, E_{l_{22}}, E_{l_{12}} \rangle \quad (\text{IV.22})$$

De façon similaire, on construit le vecteur $\widehat{\{S_l\}}$ défini par :

$$\widehat{\{S_l\}}^t = \langle S_{l_{11}}, S_{l_{22}}, S_{l_{12}} \rangle \quad (\text{IV.23})$$

A partir de ces définitions, le travail virtuel des forces intérieures peut être écrit sous la forme suivante :

$$\delta W_{int}^e = \iiint_{V_{0i}^e} \widehat{\{\delta E_l\}}^t \widehat{\{S_l\}} dV_0 \quad (\text{IV.24})$$

En utilisant les matrices $[B^L]$ et $[B^{NL}]$ et compte tenu de l'interpolation linéaire retenue, on intègre le produit scalaire précédent sur le volume non déformé de l'élément :

$$\delta W_{int}^e = H_0 S_0 \{\delta U\}^t [[B^L] + [B^{NL}]]^t \widehat{\{S_l\}} \quad (\text{IV.25})$$

où H_0 et S_0 sont respectivement l'épaisseur et la surface de l'élément non déformé (dans l'état initial) qui sont entièrement connues au temps $t = 0$. Le vecteur $\widehat{\{S_l\}}$ est, quant à lui, fourni par la donnée de la loi de comportement.

A partir de ce travail virtuel, le vecteur local des forces intérieures est donné par :

$$\{F_{int}^e\}_l = H_0 S_0 [B]^t \widehat{\{S_l\}} \quad (\text{IV.26})$$

où la matrice $[B]$ est la somme des deux matrices linéaire $[B^L]$ et non-linéaire $[B^{NL}]$.

Le vecteur $\{F_{int}^e\}_l$ ainsi défini est un vecteur à six composantes, dans la base locale. Ces six composantes sont les contributions nodales des forces intérieures associées à chacun des six degrés de liberté plans de l'élément :

$$\{F_{int}^e\}_l^t = \langle F_{X_A}, F_{Y_A}, F_{X_B}, F_{Y_B}, F_{X_C}, F_{Y_C} \rangle \quad (\text{IV.27})$$

Pour exprimer ce vecteur dans le repère global, il faut tout d'abord le compléter par les termes nuls relatifs à la troisième direction (suivant la normale à l'élément) et multiplier ce nouveau vecteur de 9 composantes par la matrice de passage du repère local déformé au repère global. Cette matrice, notée $[R_{lg}]_{9 \times 9}$, utilise la définition préalable de la matrice $[R_{lg}]$, matrice 3×3 , et se met sous la forme :

$$[R_{lg}]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [R_{lg}] & 0 & 0 \\ 0 & [R_{lg}] & 0 \\ 0 & 0 & [R_{lg}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

Le vecteur nodal des forces intérieures dans le repère global s'écrit alors :

$$\{F_{int}^e\}_g = [R_{lg}]_{9 \times 9} \begin{Bmatrix} F_{X_A} \\ F_{Y_A} \\ 0 \\ F_{X_B} \\ F_{Y_B} \\ 0 \\ F_{X_C} \\ F_{Y_C} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

IV.2.2.4 Vecteur des forces extérieures

Après avoir obtenu le travail virtuel des forces intérieures, il nous faut maintenant calculer le travail virtuel des forces extérieures dû au chargement. Ce travail élémentaire est noté δW_{ext}^e et est :

$$\delta W_{ext}^e = \iint_{S_{0T}^e} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_0 dS_0 \quad (\text{IV.30})$$

La seule sollicitation est la force de pression, force suiveuse, qui s'exerce suivant la normale à l'élément et qui dépend de la géométrie déformée. Pour calculer son travail, on utilise donc la formulation eulérienne :

$$\delta W_{ext}^e = \iint_{S_T^e} \delta \vec{u} \cdot \vec{t} dS \quad (\text{IV.31})$$

pour laquelle l'intégration se fait sur la surface déformée S_T^e et où la force de pression dans le repère local est :

$$\vec{t} = P \vec{n} \quad (\text{IV.32})$$

avec P la pression qui dans ce type de problème est uniforme à l'intérieur de la paraison et \vec{n} la normale à l'élément déformé, ($\langle 0, 0, 1 \rangle$ dans le repère local). Après prise en compte de l'interpolation, le travail virtuel devient :

$$\delta W_{ext}^e = P \{ \delta U_l \}^t \iint_{S_T^e} [N(\xi, \eta)]^t dS \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Dans le vecteur des déplacements virtuels $\{ \delta U_l \}$, nous avons ajouté les déplacements virtuels suivant l'axe normal à l'élément, δw_A , δw_B et δw_C , car la force de pression travaille dans cette direction. La matrice d'interpolation est donc la matrice $[N(\xi, \eta)]$ de dimension 9×3 (IV.9). Après intégration sur la surface déformée, le travail virtuel des forces extérieures est :

$$\delta W_{ext}^e = PS \{ \delta U_l \}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

S étant la surface de l'élément déformé.

A partir de cette relation, on définit le vecteur des forces extérieures, projeté dans le repère

global, sous la forme suivante :

$$\{F_{ext}^e\}_g = PS[R_{lg}]_{9 \times 9} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.35})$$

IV.2.2.5 Matrice masse de l'élément

Le troisième et dernier terme à calculer est la matrice masse, $[M^e]$. Le travail virtuel élémentaire des quantités d'accélération, noté $\delta W_{inertie}^e$, est :

$$\delta W_{inertie}^e = \iiint_{V_0^e} \delta \vec{u}_g \cdot \rho_0 \ddot{\vec{u}}_g(\vec{X}, \tau) dV_0 \quad (\text{IV.36})$$

Après prise en compte de l'interpolation, cette expression se met sous la forme suivante :

$$\delta W_{inertie}^e = \{\delta U_g\} \rho_0 \iiint_{V_0^e} [N]^t [N] dV_0 \{\ddot{U}_g\} \quad (\text{IV.37})$$

soit encore :

$$\delta W_{inertie}^e = \{\delta U_g\}^t [M^e] \{\ddot{U}_g\} \quad (\text{IV.38})$$

Après intégration des fonctions d'interpolation sur le volume non déformé, la matrice masse est donnée par :

$$[M^e] = \frac{1}{12} \rho_0 S_0 H_0 \begin{bmatrix} 2I & I & I \\ \cdot & 2I & I \\ \text{sym} & \cdot & 2I \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

équation dans laquelle I est la matrice identité 3×3 .

Cette matrice $[M^e]$ est constante lors de la déformation et ne doit donc être calculée qu'une seule fois (à $t = 0$).

IV.3 Discrétisation temporelle

IV.3.1 Schéma d'intégration

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous nous sommes orientés vers un schéma dynamique explicite [DOK 89] et ce, pour éviter les désagréments dus aux fortes non-linéarités et aux instabilités des membranes tendues.

Une fois assemblés les vecteurs et les matrices élémentaires calculés dans le paragraphe précédent, le problème global discrétisé à résoudre devient :

$$[M] \{\ddot{U}(t_n)\} = \{F_{ext}(t_n)\} - \{F_{int}(t_n)\} \quad (\text{IV.40})$$

Le temps est alors discrétisé et on utilise le schéma des différences centrées pour lequel la vitesse, \dot{u}_n , et l'accélération, \ddot{u}_n , au temps t_n sont exprimées en fonction des déplacements aux temps t_{n-1} , t_n et t_{n+1} , et du pas de temps Δt :

$$\dot{u}(t_n) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n-1})}{2\Delta t} \quad (\text{IV.41a})$$

et

$$\ddot{u}(t_n) = \frac{u(t_{n+1}) - 2u(t_n) + u(t_{n-1}))}{\Delta t^2} \quad (\text{IV.41b})$$

En utilisant ce schéma d'intégration temporelle, le problème (IV.40) se met sous la forme suivante :

$$\frac{[M]}{\Delta t^2} \{U(t_{n+1})\} = \{F_{ext}(t_n)\} - \{F_{int}(t_n)\} + \frac{[M]}{\Delta t^2} (2\{U(t_n)\} - \{U(t_{n-1})\}) \quad (\text{IV.42})$$

Ainsi, la connaissance de la solution aux temps t_n et t_{n-1} permet de calculer le vecteur déplacement au temps discret t_{n+1} . L'itération n permet donc de connaître les déplacements au temps suivant t_{n+1} .

Pour résoudre cette équation, il reste à ajouter les conditions initiales. Classiquement, dans les problèmes de mise en forme, les déplacements initiaux et vitesses initiales sont nuls pour tous les noeuds :

$$\{U(t_0)\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{\dot{U}(t_0)\} = \{0\} \quad (\text{IV.43})$$

Conditions que l'on peut réécrire en terme de déplacement :

$$\{U(t_0)\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \{\dot{U}(t_{-1})\} = \{0\} \quad (\text{IV.44})$$

Ce type de schéma est conditionnellement stable. La condition de stabilité peut être obtenue par l'estimation de la plus grande valeur propre du système modal équivalent [DOK 89], valeur propre notée ω_{\max} . Pour un calcul sans amortissement, on doit avoir :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (\text{IV.45})$$

Compte tenu des non-linéarités matérielles, cette plus grande valeur propre ω_{\max} est difficilement calculable, on sait cependant qu'il existe une valeur critique du pas de temps Δt_C et que le pas de temps de calcul doit toujours vérifier :

$$\Delta t \leq \Delta t_C \quad (\text{IV.46})$$

pour assurer la convergence.

IV.3.2 Diagonalisation de la matrice masse

Pour éviter le calcul de l'inverse de la matrice masse et pour n'avoir à effectuer que des calculs vectoriels, on élimine le couplage entre les d.d.l. en concentrant la masse des éléments aux noeuds. Le nombre d'opérations est ainsi considérablement réduit.

Pour ce faire, on utilise la méthode dite « Special Lumping Technique » [ZIE 94], méthode particulièrement efficace pour les problèmes de mécanique des solides et qui fournit les taux de convergence optimaux. On calcule la masse totale élémentaire en sommant tous les termes de la matrice masse d'un élément, $[M^e]$ (IV.39), et l'on redistribue cette somme proportionnellement

aux termes de la diagonale. Les termes diagonaux de cette nouvelle matrice, \overline{M}_{ii}^e , sont donc donnés par :

$$\overline{M}_{ii}^e = \frac{M_{ii}^e}{3} \sum_{k=1,3} M_{kl}^e \quad (\text{IV.47})$$

où M_{kl}^e sont les termes de la matrice élémentaire complète (IV.39).

Dans notre cas, la matrice masse élémentaire diagonale est :

$$[\overline{M}^e] = \frac{\rho_0 S_0 H_0}{3} [I]_{9 \times 9} \quad (\text{IV.48})$$

Grâce à cette simplification et après avoir assemblé les vecteurs des forces intérieures et extérieures, le problème (IV.42), (IV.44) est découpé : chaque degré de liberté peut être traité indépendamment des autres.

Considérons le degré de liberté i et notons U_i son déplacement. L'équation scalaire à résoudre au temps t_n pour obtenir le déplacement $U_i(t_{n+1})$ au temps t_{n+1} est la suivante :

$$U_i(t_{n+1}) = \frac{\Delta t^2}{\overline{M}_{ii}} [F_{ext_i}(t_n) - F_{int_i}(t_n)] + 2U_i(t_n) - U_i(t_{n-1}) \quad (\text{IV.49})$$

où \overline{M}_{ii} est le coefficient de la matrice masse diagonale assemblée, $[\overline{M}]$, correspondant au d.d.l i et où F_{ext_i} et F_{int_i} sont les $i^{\text{ièmes}}$ composantes du vecteur des forces extérieures assemblé et du vecteur des forces intérieures assemblé, respectivement.

L'algorithme général de résolution est présenté sur la figure IV.3.

IV.4 Implantation des lois de comportement

La formulation du problème présentée précédemment laisse entières les difficultés relatives aux lois de comportement. On sait pourtant que la prise en compte de celles-ci pose un réel problème pour la simulation des procédés de mise en forme. La forte non-linéarité de ces lois nécessite une attention particulière lors de leur implantation dans le code de calcul.

Comme nous l'avons vu, la loi de comportement du matériau intervient dans le calcul des forces intérieures (IV.26) au travers du vecteur $\{\overline{S}_l\}$, écriture vectorielle du second tenseur de Piola-Kirchhoff dans le repère lié à l'élément déformé. Ce vecteur est le vecteur des contraintes dans le plan de l'élément.

Compte tenu de la méthode de résolution adoptée, les déplacements $\{U_n\}$ au temps t_n et donc le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche local au même temps, $\overline{C}_l(t_n)$, sont connus avant que n'apparaissent la nécessité de calculer les contraintes au temps t_n (figure IV.3). Ceci rend beaucoup plus simple la prise en compte des lois de comportement. En effet, dans ce contexte, nous ne devons nous préoccuper que des méthodes numériques à employer pour relier le tenseur \overline{S}_l au tenseur \overline{C}_l . Dans ce paragraphe, nous étudierons ces méthodes pour les quatre modèles de comportement que nous avons retenus.

Dans notre cas, l'hypothèse des contraintes planes dans le plan de l'élément implique que la direction normale à l'élément est l'une des trois directions principales. Ainsi, la matrice des contraintes lagrangiennes locales $[S_l]$ à la forme suivante :

$$[S_l] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50a})$$

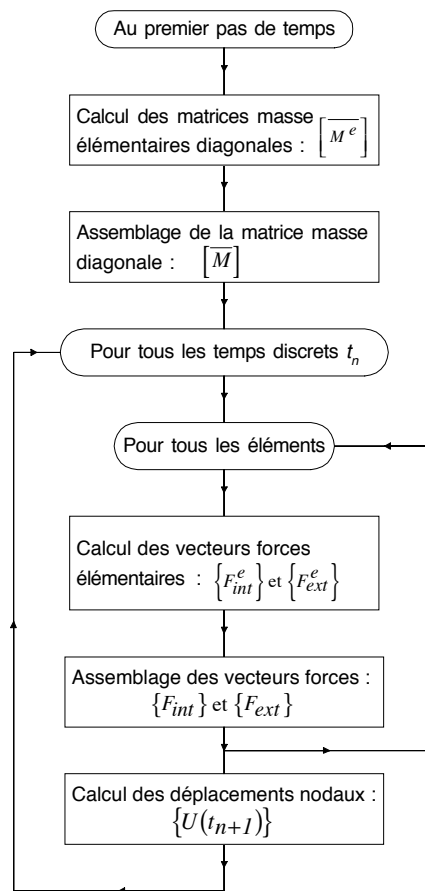


Figure IV.3 : Algorithme général

(avec $S_{12} = S_{21}$) et celle des dilatations lagrangiennes locales $[C_l]$:

$$[C_l] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50b})$$

(avec $C_{12} = C_{21}$) et pour laquelle le terme d'extension suivant l'épaisseur, C_{33} , est obtenu en utilisant le caractère incompressible du matériau. Ce terme est en fait λ_3^2 , où λ_3 est l'extension principale suivant l'épaisseur et est définie par :

$$\lambda_3 = \frac{H}{H_0} \quad (\text{IV.51})$$

avec H et H_0 les épaisseurs dans l'état déformé et non déformé, respectivement.

Ainsi, en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité (II.44), λ_3 vérifie :

$$\lambda_3^2 = C_{33} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (\text{IV.52})$$

Comme nous l'avons vu dans l'étude détaillée de ces lois de comportement (paragraphe II.2), certaines d'entre-elles nécessitent la connaissance des directions principales de déformation. Pour déterminer ces directions, il suffit de diagonaliser le tenseur $\overline{\overline{C}}_l$. Les extensions principales dans le plan de l'élément, λ_1 et λ_2 , sont données par :

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2} \left[C_{11} + C_{22} + \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}^2} \right] \quad (\text{IV.53a})$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{2} \left[C_{11} + C_{22} - \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}^2} \right] \quad (\text{IV.53b})$$

(par hypothèse, nous avons imposé $\lambda_1 \geq \lambda_2$). Les deux directions principales correspondantes sont définies par les angles, β_1 et β_2 respectivement, angles entre les dites directions et le premier axe local (droite (AB) du repère local dans l'état déformé, figure IV.2). Ces deux angles sont définis par leurs tangentes :

$$\tan \beta_1 = \frac{C_{12}}{\lambda_1^2 - C_{22}} \quad (\text{IV.54a})$$

$$\tan \beta_2 = \frac{C_{12}}{\lambda_2^2 - C_{22}} \quad (\text{IV.54b})$$

De plus, tous les matériaux considérés étant incompressibles, les contraintes sont définies à une pression hydrostatique près. Compte tenu de la forme des tenseurs locaux dans le repère de l'élément, cette pression est simplement calculable en utilisant l'hypothèse des contraintes planes $S_{33} = 0$ dans laquelle n'intervient que la déformation principale normale C_{33} qui dépend de C_{11} , C_{22} et C_{12} (IV.52).

A partir de ces considérations générales, nous étudierons tout d'abord les modèles hyperélastiques de Mooney puis d'Ogden, ensuite nous nous intéresserons au cas plus complexe des modèles de comportement viscoélastiques de Christensen et CBT généralisé qui font intervenir la variable temps.

IV.4.1 Modèles de comportement hyperélastiques

IV.4.1.1 Modèle de Mooney

Dans ce cas, la forme lagrangienne de la loi de comportement (II.55) se met, dans le plan de l'élément, sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{S}}_l = -p\overline{\overline{C}}_l^{-1} + 2 \left[(c_1 + c_2 I_1) \overline{\overline{I}} - c_2 \overline{\overline{C}}_l \right] \quad (\text{IV.55})$$

dans laquelle I_1 est le premier invariant du tenseur $\overline{\overline{C}}_l$ et c_1 et c_2 sont les deux constantes matérielles (notées dans ce cas en lettres minuscules pour éviter toute confusion avec le tenseur de Cauchy-Green gauche). On calcule alors la pression hydrostatique comme exposé précédemment, soit dans ce cas :

$$p = 2 (c_1 + c_2 I_1 - c_2 \lambda_3^2) \lambda_3^2 \quad (\text{IV.56})$$

où λ_3 est donné par (IV.52). En remplaçant cette valeur de la pression dans l'équation de comportement (IV.55), les composantes du tenseur des contraintes $\overline{\overline{S}}_l$ sont :

$$S_{11} = 2 \left\{ c_1 + c_2 \left[C_{11} + C_{22} + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)^{-1} \right] - c_2 C_{11} \right\} - p \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (\text{IV.57a})$$

$$S_{22} = 2 \left\{ c_1 + c_2 \left[C_{11} + C_{22} + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)^{-1} \right] - c_2 C_{22} \right\} - p \frac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (\text{IV.57b})$$

$$S_{12} = -2c_2 C_{12} - p \frac{C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (\text{IV.57c})$$

IV.4.1.2 Modèle d'Ogden

Pour ce modèle, la fonction énergie de déformation W est exprimée en fonction de mesures de déformation généralisée (paragraphe II.1). La définition de ces mesures (paragraphe II.1.3.5) nécessite la connaissance des directions principales. A partir de la détermination des extensions principales (IV.53a), (IV.53b) et des angles décrivant ces directions (IV.54a), (IV.54b), on calcule le matrice de changement de base, $[P]$, entre la base locale définie initialement et la base locale formée des directions principales.

Dans le repère principal, les contraintes principales locales S_1 et S_2 sont fournies par l'équation (II.91b) que l'on rappelle :

$$S_i = -p \frac{1}{\lambda_i^2} + \mu_n \lambda_i^{\alpha_n - 2} \quad i = 1, 2$$

où la pression hydrostatique p est évaluée par la prise en compte du caractère plan des contraintes et de l'incompressibilité du matériau :

$$p = \mu_n \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{\alpha_n}} \quad (\text{IV.58})$$

Ce calcul fournit les contraintes principales qui sont ensuite projetées dans la base locale initiale à l'aide de la matrice de changement de base $[P]$.

IV.4.2 Modèles de comportement viscoélastiques

Pour les modèles viscoélastiques, on doit prendre en compte l'histoire de la déformation qu'a subie le matériau pour calculer les contraintes au temps présent. Comme nous l'avons déjà mentionné, Feng [FEN 86] propose une relation de récurrence qui permet, pour les modèles de comportement viscoélastiques intégraux, de calculer la contrainte au temps discret présent t_n seulement en fonction des grandeurs (contraintes et déformations) aux temps t_n et t_{n-1} .

Cependant, entre ces deux temps discrets, les variables cinématiques ont changé (notamment les directions du repère local lié à l'élément fini). Comme nous ne connaissons pas le chemin de la transformation au cours du pas de temps Δt entre t_{n-1} et t_n , nous devons faire une approximation de ce chemin. Dans ce travail, nous avons supposé que les directions principales sont constantes lors du pas de temps Δt et sont égales aux directions principales au temps présent final t_n [RAC 94]. Cette approximation est due à Braudel et a été utilisée par Rachik [RAC 93] pour des lois de comportement viscoélastiques différentielles.

IV.4.2.1 Modèle de Christensen

Pour le modèle de Christensen, on rappelle la forme de la relation lagrangienne contrainte-déformation (II.121b) :

$$\bar{\bar{S}}(t) = -p\bar{\bar{C}}^{-1} + g_0\bar{\bar{I}} + \frac{1}{2} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{d\bar{\bar{C}}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{IV.59})$$

Le tenseur des contraintes au temps discret t_n est alors calculé en fonction des contraintes au temps t_{n-1} et des déformations aux temps t_n et t_{n-1} , à l'aide de la relation de récurrence (III.16) appliquée au cas lagrangien :

$$\bar{\bar{S}}(t_n) = -p\bar{\bar{C}}^{-1}(t_n) + g_0\bar{\bar{I}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} \int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1}-\tau) \frac{d\bar{\bar{C}}(\tau)}{d\tau} d\tau + e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} [\bar{\bar{C}}(t_n) - \bar{\bar{C}}(t_{n-1})] \quad (\text{IV.60})$$

où la fonction de relaxation $g_1(\tau)$ est donnée sous forme exponentielle $g_1 e^{-\tau/\tau_R}$. Dans cette formule, l'intégrale de 0 à t_{n-1} et le tenseur $\bar{\bar{C}}(t_{n-1})$ ne dépendent que du temps discret précédent t_{n-1} .

Comme nous l'avons dit, nous devons considérer cette relation de récurrence pour les directions principales, puisque seules celles-ci sont supposées constantes au cours du pas de temps :

$$S_i(t_n) = -p \frac{1}{\lambda_i^2(t_n)} + g_0 + \frac{1}{2} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} \int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1}-\tau) \frac{d\lambda_i^2(\tau)}{d\tau} d\tau + g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} [\lambda_i^2(t_n) - \lambda_i^2(t_{n-1})] \quad i = 1, 3 \quad (\text{IV.61})$$

Cette formulation nécessite la conservation des termes principaux relatifs au temps discret précédent t_{n-1} . Pour chaque élément fini du maillage, on doit donc conserver, d'un pas de temps à l'autre, six valeurs : les trois composantes du tenseur principal des dilatations, λ_i^2 pour $i = 1, 3$, et les trois composantes intégrales (donc relatives au caractère visqueux du matériau) du tenseur principal des contraintes, $\int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1}-\tau) \frac{d\lambda_i^2(\tau)}{d\tau} d\tau$ pour $i = 1, 3$.

La méthode de calcul au temps discret t_n est alors la suivante :

1. à partir des déplacements, $\{U_n\}$, obtenus au temps précédent, on calcule le tenseur local $\bar{\bar{C}}_l(t_n)$ à l'aide du tenseur local $\bar{\bar{h}}_l(t_n)$ (IV.18) :

$$\bar{\bar{C}}_l(t_n) = \left(\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{h}}_l(t_n) \right)^t \left(\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{h}}_l(t_n) \right) \quad (\text{IV.62})$$

2. on détermine les extensions principales λ_1 et λ_2 ainsi que la matrice de passage $[P]$ en diagonalisant $\overline{\overline{C}}_l(t_n)$;
3. en utilisant l'équation (IV.61) et compte tenu des grandeurs relatives à t_{n-1} conservées et des hypothèses d'incompressibilité et de contraintes planes, on calcule la pression hydrostatique p , puis les contraintes principales S_1 et S_2 ;
4. on calcule alors le tenseur local des contraintes dans le repère local déformé, $\overline{\overline{S}}_l$, à l'aide de la matrice de changement de base $[P]$ précédemment calculée en 1.

Le second tenseur des contraintes de Piola-Khirschhoff $\overline{\overline{S}}_l$, ainsi calculé, est ensuite écrit sous forme vectorielle (IV.23) et permet de calculer le vecteur des forces intérieures (IV.26).

IV.4.2.2 Modèle CBT généralisé

Ce modèle, que nous avons présenté dans le chapitre relatif aux modèles de comportement viscoélastiques non-linéaires (paragraphe II.2.3.4), est le plus complexe à traiter. En effet, il présente les difficultés inhérentes aux modèles qui utilisent des mesures de déformation généralisée (comme le modèle d'Ogden) et celles posées par les modèles viscoélastiques qui imposent l'utilisation d'une relation de récurrence.

Dans un premier temps, on rappellera la forme de la loi de comportement lagrangienne, exprimée dans le repère principal, correspondant à ce modèle (II.124) et (II.127) :

$$S_i(t) = -p \frac{1}{\lambda_i^2(t)} + \sum_{k=1}^N g_{0k} \lambda_i^{\alpha_k - 2}(t) + \frac{1}{\lambda_i^2(t)} \sum_{k=1}^N g_{0k} \int_0^t g_1(t - \tau) \frac{d\lambda_i^{\alpha_k}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad i = 1, 3 \quad (\text{IV.63})$$

où N est le nombre de termes adoptés dans la série.

De façon similaire au travail de Feng [FEN 86], on établit très simplement la relation de récurrence présentée dans l'annexe A (équation (A.26)) qui permet de calculer les contraintes principales du second tenseur de Piola-Khirschhoff au temps t_n , $S_i(t_n)$, en considérant une fonction de relaxation de la forme $g_1(\tau) = g_1 e^{-\tau/\tau_R}$:

$$S_i(t_n) = -p \frac{1}{\lambda_i^2(t_n)} + \sum_{k=1}^N g_{0k} \lambda_i^{\alpha_k - 2}(t_n) + \frac{1}{\lambda_i^2(t_n)} \left[e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} \sum_{k=1}^N g_{0k} \int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1} - \tau) \frac{d\lambda_i^{\alpha_k}(\tau)}{d\tau} d\tau + g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} \left(\sum_{k=1}^N g_{0k} \lambda_i^{\alpha_k}(t_n) - \sum_{k=1}^N g_{0k} \lambda_i^{\alpha_k}(t_{n-1}) \right) \right] \quad i = 1, 3 \quad (\text{IV.64})$$

Pour le calcul de ces contraintes principales, la procédure est complètement similaire à celle utilisée pour le modèle de Christensen exposée dans le paragraphe précédent. La seule différence notable provient des termes à retenir. En effet, pour éviter un trop grand stockage de données, on conserve directement les sommes de termes :

- pour les déformations : $\sum_{k=1}^N g_{0k} \lambda_i^{\alpha_k}(t_{n-1})$ pour $i = 1, 3$;
- et pour les contributions visqueuses des contraintes : $\sum_{k=1}^N g_{0k} \int_0^{t_{n-1}} g_1(t_{n-1} - \tau) \frac{d\lambda_i^{\alpha_k}(\tau)}{d\tau} d\tau$ pour $i = 1, 3$.

IV.5 Chargement de la paraison par un débit d'air

Comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre précédent concernant les expériences de soufflage d'une membrane initialement plane, la pression à l'intérieur de la paraison n'est pas une grandeur que l'on peut imposer facilement. En effet, celle-ci est étroitement liée au volume intérieur de la paraison au travers de la thermodynamique du gaz utilisé pour le soufflage. En pratique, il est beaucoup plus aisé d'imposer un débit (massique par exemple) qu'une montée en pression. C'est par exemple le cas lorsqu'on ouvre un robinet.

Pour prendre en compte ce phénomène dans notre code de calcul, nous avons supposé que le gaz injecté à l'intérieur de la paraison obéit à la loi des gaz parfaits. Ainsi, en imposant l'histoire du débit et en calculant le volume du système mécanique, on peut connaître la force de pression qui s'exerce sur la membrane.

Toutes les notations introduites dans la suite sont résumées sur la figure IV.4 dans le cas du moulage par étirement-soufflage ou extrusion-soufflage (figure IV.IV.4(a)), et dans le cas du thermoformage (figure IV.IV.4(b)). Notons tout d'abord P_0 la pression initiale d'équilibre des

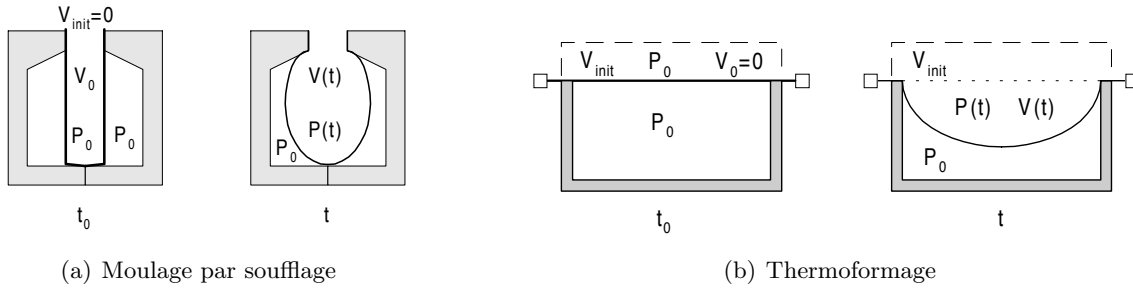


Figure IV.4 : Chargement de la paraison par un débit d'air. Notations

deux côtés de la membrane et V_0 le volume initial contenu dans la membrane au temps initial t_0 . On introduit aussi un volume arbitraire initial, V_{init} , qui permet de prendre en compte le cas du thermoformage pour lequel, si la membrane est plane, $V_0 = 0$. De plus, on note n_0 le nombre initial de moles contenu dans le volume $V_{init} + V_0$. Initialement, le gaz à l'intérieur de la membrane vérifie la relation :

$$P_0(V_{init} + V_0) = n_0RT_{gaz} \quad (IV.65)$$

où R est la constante universelle des gaz parfaits et T_{gaz} est la température du gaz, supposée constante tout au long de la mise en forme.

Dans l'état déformé, au temps t , on a introduit $n(t)$ moles de gaz depuis le début du chargement. La pression interne est alors notée $P(t)$ et le volume contenu dans la membrane, $V(t)$. Ils vérifient :

$$P(t)[V_{init} + V(t)] = [n_0 + n(t)]RT_{gaz} \quad (IV.66)$$

La différence de pression s'exerçant sur la membrane est notée $\Delta P(t)$ et est définie par :

$$\Delta P(t) = P(t) - P_0 = \frac{P_0(V_{init} + V_0) + K(t)}{V_{init} + V(t)} - P_0 \quad (IV.67)$$

où $K(t) = n(t)RT_{gaz}$.

L'intégration de la relation précédente dans le code de calcul se fait très simplement :

- initialement

- on fixe P_0 ainsi que V_{init} et on calcule V_0 ;
- on se donne un chargement en débit $K(t)$ pour la durée du calcul.
- au temps discret t_n
 - connaissant les déplacements $\{U(t_n)\}$ des noeuds, on calcule leurs positions et le volume contenu à l'intérieur de la paraison, $V(t_n)$;
 - en utilisant la relation précédente (IV.67), on calcule la pression qui s'exerce sur les éléments, $\Delta P(t_n)$;
 - cette pression permet le calcul des efforts extérieurs à la paraison et donc la résolution du problème en t_n et le calcul de $\{U(t_{n+1})\}$.

IV.6 Validation pour le soufflage libre

A ce stade, nous avons développé un code de calcul de soufflage libre (sans moule) de membranes hyperélastiques et viscoélastiques non-linéaires soumises à un chargement en pression ou en débit. Ces membranes sont maillées à l'aide d'éléments finis triangulaires à trois noeuds et trois d.d.l. par noeud.

Pour valider cette première partie du travail, nous nous intéressons au problème du soufflage dynamique d'une sphère. Ce cas, assez simple pour ce qui est de la mise en équations, se révèle très intéressant. En effet, comme nous l'avons rapidement mentionné précédemment, des instabilités apparaissent. Le cas de la membrane sphérique met en évidence ce phénomène et fournit des équations simples permettant de comparer nos résultats obtenus par la méthode des éléments finis à des résultats semi-analytiques (équation à un degré de liberté résolue par la méthode de Runge-Kutta) [MAR 97].

Dans ce paragraphe, nous ne ferons qu'introduire les équations obtenues analytiquement et seuls les résultats intéressants pour la validation seront rappelés ; le soufflage d'une membrane sphérique est étudié de façon complète dans l'annexe C. Dans cette annexe, la mise en équations est rappelée et de très nombreux résultats sont fournis pour mettre en évidence et expliquer la présence d'instabilités lors du soufflage.

Nous fournirons successivement des résultats pour les cas hyperélastique (modèle de Mooney) et viscoélastique (modèle de Christensen). En effet, pour mieux comprendre les phénomènes, nous n'étudierons que les modèles les plus simples. Les modèles d'Ogden et CBT généralisé, plus complexes, ont, quant à eux, été validés en les réduisant à des cas particuliers des deux autres modèles.

IV.6.1 Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney soumise à un échelon de pression

Ce cas est développé dans le détail dans le paragraphe C. 3.1 de l'annexe C.

On considère une membrane sphérique de rayon initial R_0 et de masse volumique ρ_0 . L'épaisseur est supposée négligeable devant le rayon (hypothèse de membrane) et est notée h_0 . Cette membrane est hyperélastique de type Mooney, avec pour constantes matérielles c_1 et c_2 . On définit la constante matérielle réduite α telle que :

$$\alpha = \frac{c_2}{c_1} \tag{IV.68}$$

Cette membrane est soufflée par un échelon de pression constant au cours du temps, noté ΔP .

Remarque : ce cas est assez peu physique, puisqu'il correspond à la situation où la membrane est reliée à un réservoir de dimension infinie permettant une alimentation constante en pression.

En définissant les variables réduites suivantes pour la pression et le temps :

$$\Delta p = \Delta P \frac{R_0}{4c_1 h_0} \quad (\text{IV.69a})$$

$$\tau = t \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{c_1}{\rho_0}} \quad (\text{IV.69b})$$

l'équation différentielle régissant le mouvement se met sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\ddot{\lambda} = \Delta p \lambda^2 + \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) (1 + \alpha \lambda^2) \quad (\text{IV.70})$$

où λ est l'extension circonférentielle définie comme le rapport du rayon déformé sur le rayon initial. A cette équation on ajoute les conditions initiales correspondant au cas de la membrane initialement au repos :

$$\lambda(0) = 1 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda}(0) = 0 \quad (\text{IV.71})$$

Cette équation est alors résolue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 ou 6 (sous-programme IVPRK de la bibliothèque mathématique IMSL [IMS 87]).

Une étude plus complète des solutions de cette équation (points d'équilibre, stabilité, allure des plans de phase) est fournie en annexe C. 3.1. De cette étude se dégagent trois comportements différents, dépendant des valeurs du paramètre matériel α et de l'échelon de pression Δp :

- ou bien la membrane oscille autour de points d'équilibre ;
- ou bien elle atteint un point d'équilibre instable (point selle) auquel cas elle reste en ce point et le rayon reste constant ;
- ou bien son mouvement devient instable et le rayon croît exponentiellement vers l'infini.

Pour valider notre code de calcul nous avons sélectionné quelques cas intéressants, pour trois valeurs du paramètre matériel α et quelques valeurs de l'échelon de pression Δp . Ces cas sont résumés dans le tableau IV.1.

Valeur de α	Valeur de Δp
$\alpha = 0$	$\Delta p = 0,5$; $\Delta p = 0,6$
$\alpha = 0,1$	$\Delta p = 0,687$; $\Delta p = 0,7$; $\Delta p = 0,8$
$\alpha = 0,25$	$\Delta p = 0,7$; $\Delta p = 1,2$

Tableau IV.1: Différents cas pour le soufflage d'une sphère hyperélastique par un échelon de pression

Ces différents cas sont simulés avec notre code de calcul. Le travail se fait sur une sphère entière ; nous n'avons pas imposé de conditions de symétrie, ce qui nous permet aussi de contrôler le bon comportement du programme en vérifiant que la symétrie sphérique est bien conservée tout au long du calcul. La sphère est discrétisée en 2000 éléments finis. Les résultats obtenus sont détaillés sur la figure IV.5.

- La figure IV.5(a) relative au paramètre matériel $\alpha = 0$ montre que le code de calcul reproduit avec autant de précision les comportements oscillatoires ($\Delta p = 0,5$) que ceux qualifiés d'instables ($\Delta p = 0,6$).

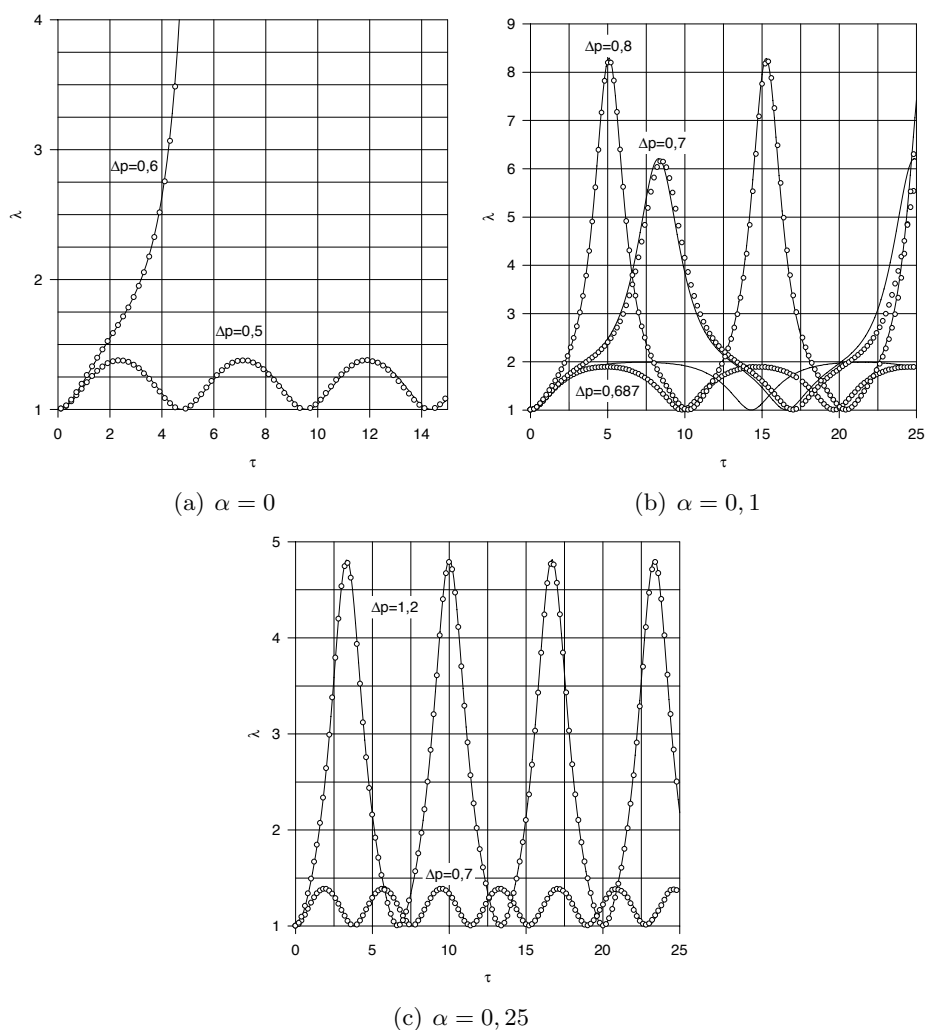


Figure IV.5 : Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)

- De même, pour $\alpha = 0, 25$, les résultats éléments finis reproduisent très bien les mouvements oscillatoires de la membrane, et ce pour des niveaux de pression très différents (figure IV.IV.5(c)).
- Dans le cas où $\alpha = 0, 1$, il faut noter que le point d'équilibre instable (point selle) appartient à la trajectoire pour une valeur de Δp de l'ordre de 0,687. On voit sur la figure IV.IV.5(b) que le comportement est bien reproduit loin de cette valeur critique de la pression ($\Delta p = 0, 8$). Pour des valeurs proches de cette valeur critique ($\Delta p = 0, 687$ ou $\Delta p = 0, 7$ sur la figure), le calcul éléments finis reproduit qualitativement le phénomène d'instabilité. Cependant, la période du mouvement tendant asymptotiquement vers l'infini au voisinage de cette valeur de l'échelon de pression, la réponse en temps obtenue par les éléments finis diffère sensiblement du résultat semi-analytique.

De plus, pour ces trois valeurs bien choisies du paramètre α , nous avons construit les courbes liant la période du mouvement à la valeur de l'échelon de pression imposé. Pour quelques valeurs de la pression, nous avons effectué des simulations numériques. Les résultats obtenus sont

présentés sur la figure IV.6. Ces résultats montrent que quelles que soient les situations, le calcul éléments finis est en bonne adéquation avec les résultats obtenus par l'intégration de l'équation différentielle par la méthode de Runge-Kutta. Même au voisinage des points selles (asymptotes verticales sur le graphique), la simulation numérique approche au moins qualitativement le phénomène physique d'instabilité. Sur les asymptotes, l'estimation des valeurs de la période est satisfaisante.

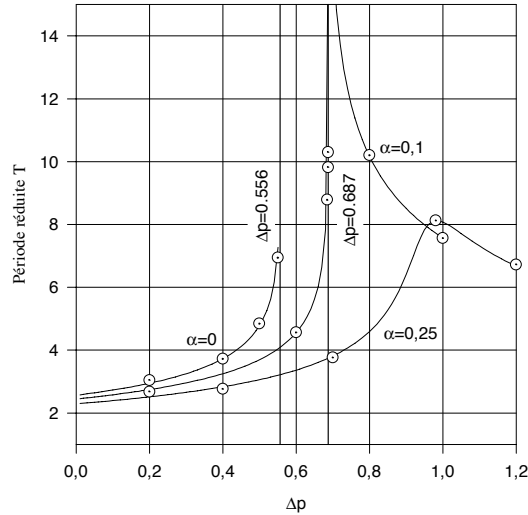


Figure IV.6 : Période réduite en fonction de la pression imposée pour trois valeurs de α : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (⊙) éléments finis (sphère complète)

IV.6.2 Soufflage d'une membrane sphérique de type Mooney soumise à un débit de fluide constant

Ce cas est développé dans le paragraphe C. 3.2 de l'annexe C.

La sphère considérée est la même que dans le paragraphe précédent et le débit est imposé constant au cours du temps. L'équation qui régit le mouvement de la membrane fait maintenant intervenir explicitement la variable temps, τ :

$$\ddot{\lambda} = p_0 \left[\frac{1}{\lambda} (1 + q\tau) - \lambda^2 \right] + \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{IV.72})$$

où q est le débit de gaz et p_0 la pression initiale à l'équilibre.

Pour tester le code, nous avons fixé ces deux valeurs :

$$q = 1 \quad \text{et} \quad p_0 = 1 \quad (\text{IV.73})$$

et considéré deux valeurs du paramètre α : 0 et 0,25.

Pour ces deux problèmes, nous avons calculé l'évolution de la pression à l'intérieur de la sphère et l'évolution de son volume : par la méthode de Runge-Kutta sur l'équation différentielle précédente (IV.72) et par la méthode des éléments finis sur une sphère complète.

Les résultats obtenus pour $\alpha = 0$ sont présentés sur la figure IV.7 et ceux relatifs à $\alpha = 0,25$, sur la figure IV.8. On voit sur ces différentes figures que le modèle éléments finis reproduit les

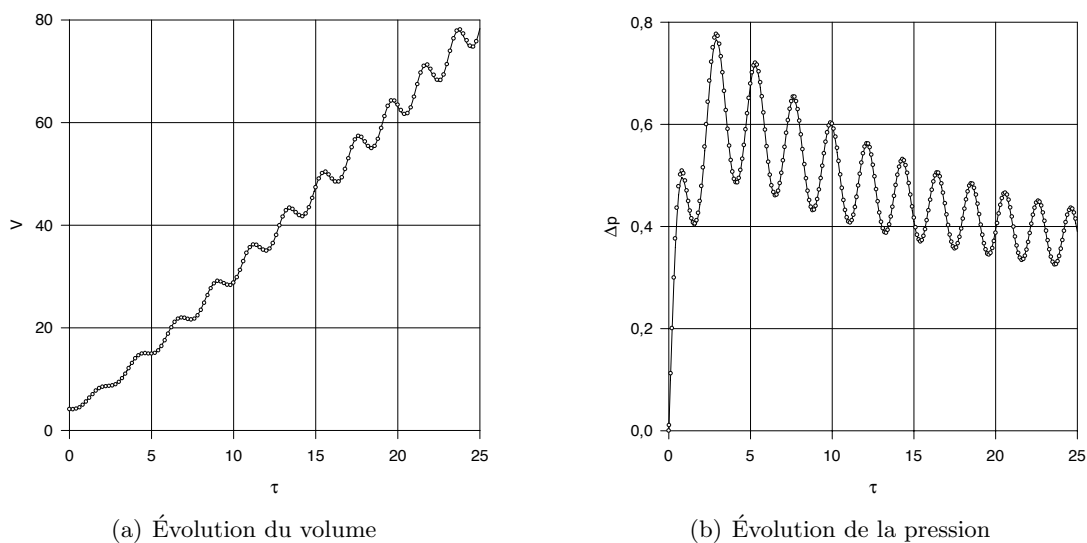


Figure IV.7 : Soufflage, par un débit constant, d'une membrane sphérique de type Mooney avec $\alpha = 0$: (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)

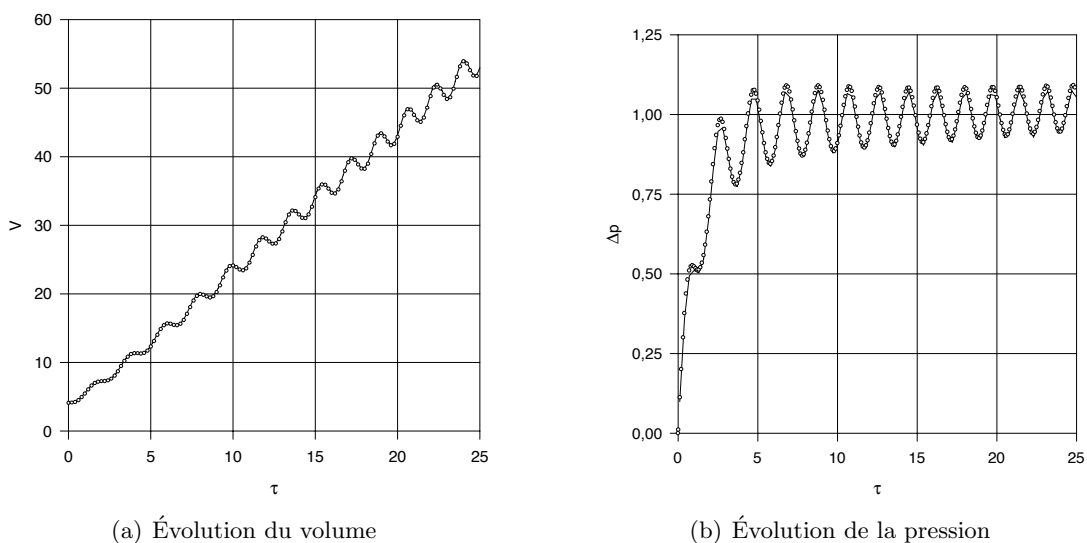


Figure IV.8 : Soufflage, par un débit constant, d'une membrane sphérique de type Mooney avec $\alpha = 0,25$: (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (o) éléments finis (sphère complète)

résultats semi-analytiques : les courbes de pression (figures IV.IV.7(b) et IV.IV.8(b)) oscillent autour de la solution quasi-statique et les courbes de volume (figures IV.IV.7(a) et IV.IV.8(a)) oscillent autour de courbes monotones croissantes.

Le calcul du chargement de pression à chaque temps discret par un schéma explicite n'affecte en rien la qualité des résultats numériques.

IV.6.3 Soufflage d'une membrane sphérique de type Christensen soumise à un échelon de pression

Ce cas est développé dans le paragraphe C. 3.3 de l'annexe C.

Les notations sont les mêmes que dans les paragraphes précédents. Les paramètres matériels sont g_0 la composante élastique et $g_1(\tau)$ la fonction de relaxation de la forme $g_1 e^{-\tau/\tau_R}$, où τ_R est le temps de relaxation. Comme précédemment, on définit la fonction de relaxation réduite :

$$\alpha(\tau) = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_R}} = \alpha e^{-\frac{\tau}{\tau_R}} \quad (\text{IV.74})$$

et les grandeurs réduites pour les variables pression et temps :

$$\Delta p = \Delta P \frac{R_0}{2g_0 h_0} \quad (\text{IV.75a})$$

$$\tau = t \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sqrt{\frac{g_0}{\rho_0}} \quad (\text{IV.75b})$$

L'équation qui régit le mouvement de la membrane est alors l'équation différentielle du second ordre en λ (extension circonférentielle, accroissement du rayon) suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}(\tau) = \Delta p \lambda^2(\tau) + \left[\frac{1}{\lambda^5(\tau)} - \lambda(\tau) \right] & - \frac{\lambda(\tau)}{2} \int_0^\tau \alpha(\tau - u) \frac{d\lambda^2(u)}{du} du \\ & + \frac{1}{2\lambda^5(\tau)} \int_0^\tau \alpha(\tau - u) \frac{d\lambda^{-4}(u)}{du} du \quad (\text{IV.76}) \end{aligned}$$

Les intégrales sont approchées par la méthode de Feng que nous avons déjà explicitée et utilisée dans tout ce travail et l'équation est résolue par la méthode de Runge-Kutta.

Compte tenu du nombre de paramètres entrant en jeu (τ_R , α et Δp) et de la complexité de l'équation à résoudre, il est très difficile de mener à bien une étude paramétrique du problème (paragraphe C. 3.3) contrairement au cas hyperélastique. Cependant, nous avons pu mettre en évidence deux types de comportement : l'un oscillatoire amorti, l'autre instable. C'est pourquoi, dans le cadre de cette validation, nous n'avons effectué que deux calculs : l'un pour lequel la réponse est oscillatoire et l'autre pour lequel elle est instable. Les valeurs des paramètres matériels sont les mêmes dans les deux cas :

$$\alpha = 0,2 \quad \text{et} \quad \tau_R = 1$$

et les valeurs des échelons de pression sont : $\Delta p = 0,5$ (oscillatoire amorti) et $\Delta p = 1$ (instable).

La figure IV.9 présente les résultats du calcul par la méthode de Runge-Kutta et du calcul éléments finis. Les résultats éléments finis sont dans les deux cas en bonne adéquation avec les résultats obtenus sur le cas monodimensionnel. On note cependant que dans le cas oscillatoire amorti (figure IV.9(a)), le calcul éléments finis sous-estime quelque peu l'amplitude mais aussi la période du mouvement. Toutefois, les résultats restent acceptables compte tenu des hypothèses et des approximations qui ont été faites pour la mise en place de ce type loi de comportement dans le code de calcul (paragraphe IV.4.2.1). Dans le cas instable, la divergence entre les deux calculs ne commence à être significative qu'à partir de valeurs de λ de l'ordre de 10 (figure IV.9(b)), c'est-à-dire lorsque le rayon de la sphère a été multiplié par 10. Ces résultats sont donc tout à fait satisfaisants.

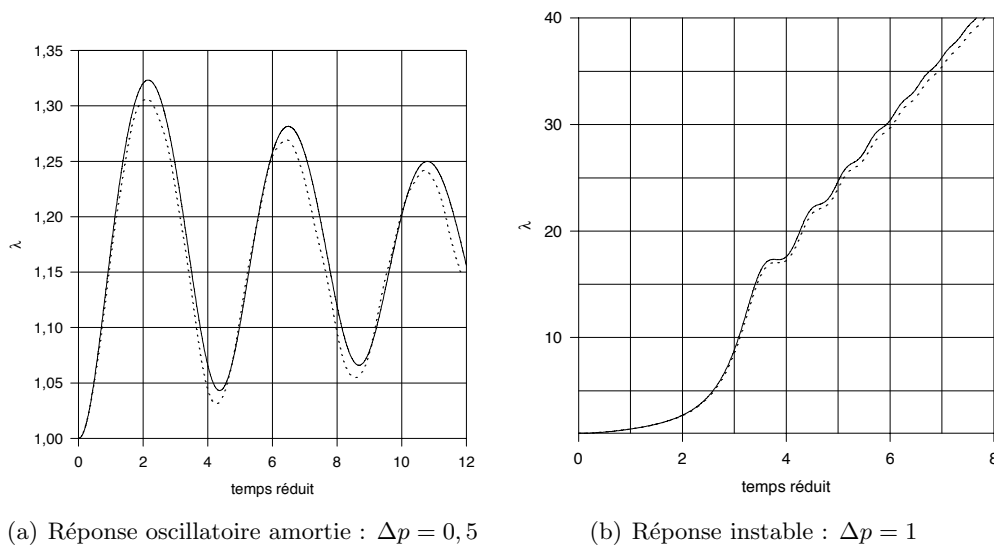


Figure IV.9 : Soufflage d'une membrane sphérique de type Christensen : (—) Runge-Kutta (problème monodimensionnel), (\cdots) éléments finis (sphère complète)

Lors des tests précédents, nous avons comparé les résultats obtenus par le code de calcul à des résultats semi-analytiques sur le problème simple du soufflage d'une membrane sphérique. Cette comparaison montre que le calcul éléments finis simule avec succès les divers phénomènes rencontrés aussi bien dans les cas hyperélastiques que viscoélastiques.

L'implantation de lois de comportement hyperélastiques et viscoélastiques non-linéaires, ainsi que le chargement de la membrane par un débit ont ainsi été vérifiés. Le code de calcul de soufflage libre de membrane est donc validé.

Dans la suite, nous nous attacherons à transformer ce code de calcul de soufflage libre afin de simuler les procédés de mise en forme, notamment en développant un module de contact ainsi qu'un module de raffinement de maillage.

IV.7 Gestion du contact

Pour pouvoir simuler les procédés de mise en forme, il faut à présent développer un module de contact qui permettra de prendre en compte la présence du moule.

Comme nous l'avons montré dans la partie bibliographique, la plupart des travaux dans ce domaine adopte l'hypothèse de contact collant. En effet, lorsque la paraison à haute température entre en contact avec le moule, qui lui est froid, le matériau se refroidit de manière brutale, ses caractéristiques matérielles changent très rapidement et la membrane se raidit. On peut alors considérer que la pression de soufflage n'est pas suffisante pour déformer cette partie de la membrane. Nous nous sommes placés dans le cadre de cette hypothèse.

Le moule est modélisé par des facettes triangulaires planes. A chaque pas de temps, on teste chaque noeud de la paraison qui n'est pas encore entré en contact avec le moule, avec chaque facette du moule pour déterminer si ce noeud a dépassé le moule. Si c'est le cas, le noeud est projeté sur l'élément du moule considéré et ses degrés de liberté sont bloqués pour la suite du calcul.

Dans ce paragraphe, nous présenterons donc la méthode de détection des noeuds entrés en contact et la technique de projection utilisée.

IV.7.1 Détection des noeuds en contact

On considère un noeud i de la paraison qui occupe la position N au temps discret t_n . Notons N' sa position au temps discret précédent t_{n-1} . Soit une facette triangulaire du moule (DEF), on se propose de vérifier si la trajectoire du noeud i entre t_{n-1} et t_n a traversé le triangle. La figure IV.10 présente la géométrie du problème dans le cas où le noeud est effectivement entré en contact avec le moule lors du pas de temps. Le but de la détection est de déterminer si le point

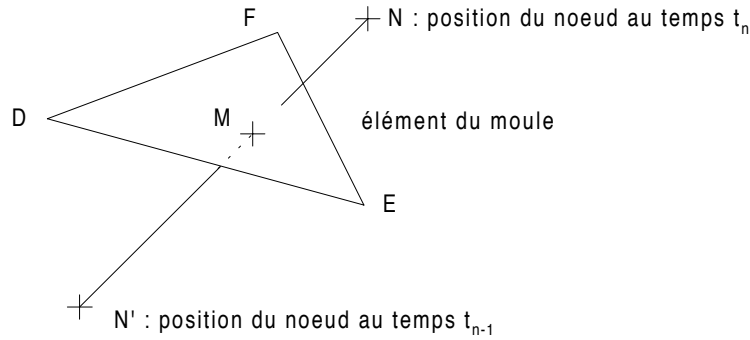


Figure IV.10 : Géométrie du problème de contact

d'intersection entre la trajectoire et le triangle est à la fois sur le segment $[NN']$ et à l'intérieur du triangle (DEF).

On note M le point d'intersection entre la droite (NN') et le plan (P) contenant les trois points D , E et F . Le point M appartient à la droite $(N'N)$ s'il vérifie la condition suivante :

$$\exists \beta \setminus \overrightarrow{N'M} = \beta \overrightarrow{N'N} \quad (\text{IV.77})$$

De la même façon, le point M appartient au plan (P) si le vecteur \overrightarrow{DM} se décompose de manière unique dans la base $(D, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$:

$$\exists (\gamma, \delta) \setminus \overrightarrow{DM} = \gamma \overrightarrow{DE} + \delta \overrightarrow{DF} \quad (\text{IV.78})$$

En utilisant ces deux équations, on obtient le système de trois équations à trois inconnues qui se met sous la forme vectorielle suivante :

$$\beta \overrightarrow{NN'} + \gamma \overrightarrow{DE} + \delta \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DN'} \quad (\text{IV.79})$$

les trois inconnues étant les coefficients β , γ et δ . Une fois déterminées ces trois valeurs, il suffit de vérifier si le point d'intersection M est dans le segment $[N'N]$ et à l'intérieur du triangle (DEF), ce qui revient à vérifier que :

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (\text{IV.80a})$$

et

$$0 \leq \gamma \leq 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad 0 \leq 1 - \gamma - \delta \leq 1 \quad (\text{IV.80b})$$

Ce test simple permet donc de savoir si un noeud est entré en contact avec un élément du moule et, si c'est le cas, avec lequel.

IV.7.2 Projection des noeuds en contact

Dans le cas où un noeud a dépassé le moule, il faut maintenant le reprojeter sur l'élément concerné. Pour ce faire, on fait l'hypothèse que lors du pas de temps Δt le mouvement du noeud entre les points géométriques N' et N s'est fait de façon linéaire.

Évidemment, avec cette approximation, le point projeté est le point M , point d'intersection entre la droite et le plan, défini précédemment. Le calcul de ses coordonnées se fait à partir du coefficient β , qui positionne le point M sur le segment $[NN']$, et les d.d.l. de ce noeud sont fixés pour la poursuite du calcul.

Remarque : cette méthode de détection et de reprojektion permet d'utiliser très peu d'éléments pour le maillage du moule, ce qui réduit d'autant le nombre d'opérations. En effet, pour une plaque, deux éléments suffisent quelles que soient les dimensions de celle-ci. La figure IV.11 montre le maillage d'une membrane initialement plane soufflée dans un coin. On voit sur celle-

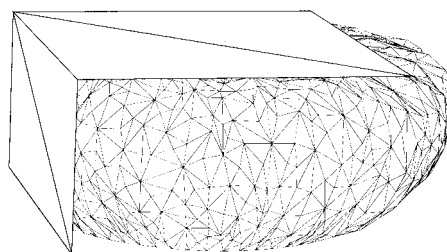


Figure IV.11 : Soufflage d'une membrane circulaire dans un coin discrétisé en 6 facettes
ci que le coin n'a été modélisé que par 6 facettes triangulaires.

IV.8 Raffinement du maillage

Le problème majeur posé par l'utilisation d'éléments triangulaires à interpolation linéaire réside dans le fait qu'ils restent plans. En effet, compte tenu des très grandes déformations que ces éléments subissent, ceci ne permet pas de simuler parfaitement les évolutions de la géométrie de la paraison, par exemple dans les coins d'un moule (figure IV.12). Pour remédier

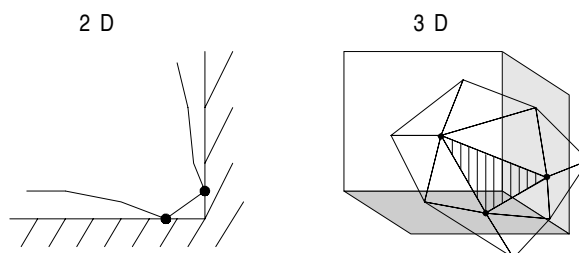


Figure IV.12 : Problème posé par un maillage grossier dans le coin d'un moule

à cette difficulté, certains auteurs présentent le raffinement de maillage comme une perspective de recherche intéressante [DEL 91], [RAC 94] sans toutefois le mettre en œuvre.

A partir de ces constatations, nous avons développé un module de raffinement du maillage. Dans la suite, nous donnerons les critères que nous avons choisis pour décider si un élément doit

être divisé ou non, puis nous exposerons la méthode de raffinement adoptée.

IV.8.1 Critère de raffinement

Le soufflage de membrane pour la simulation des procédés de mise en forme présente de très fortes non-linéarités géométriques dues aux grands déplacements et grandes déformations. C'est pourquoi, par simplicité, nous nous sommes orientés vers un critère géométrique pour décider ou non de réduire la taille des éléments.

Lorsqu'on décide de remailler la paraison (tous les k pas de temps par exemple), chaque élément de la membrane est testé. Pour ce faire, on considère les éléments ayant un côté commun avec cet élément et on calcule la normale moyenne à ce groupe d'éléments. La figure IV.13 montre un élément testé et le groupe d'éléments qui l'entoure. On calcule ensuite l'angle entre la normale de chaque élément et la moyenne des normales de tous les éléments considérés (l'élément central et les éléments qui l'entourent) ; si l'un de ces angles est supérieur à une valeur limite fixée par l'utilisateur alors l'élément correspondant est divisé, sinon il reste tel quel pour les pas de calcul suivants jusqu'au prochain test de remaillage.

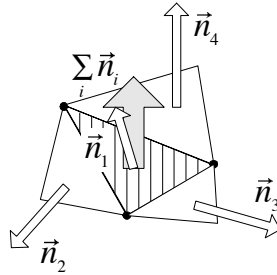


Figure IV.13 : Groupe d'éléments testés pour le raffinement de maillage

Pour éviter de trop multiplier le nombre d'éléments, l'utilisateur peut fixer une surface élémentaire limite à partir de laquelle un élément n'est plus divisé, même s'il est détecté par le critère précédent.

IV.8.2 Méthode de raffinement

De nombreux algorithmes de raffinement de maillage existent dans la littérature. Certains permettent de générer entièrement de nouveaux maillages, d'autres de subdiviser un maillage déjà existant ou de regrouper des mailles. Shephard propose une revue de ce type de travaux dans [SHE 88].

Le but de notre travail n'étant pas de développer une nouvelle méthode de remaillage, mais plutôt d'évaluer l'efficacité de ce type de procédure pour la simulation de la mise en forme, nous avons décidé d'utiliser un algorithme simple de division du maillage.

Nambiar *et al.* [NAM 93] ont développé un algorithme qu'ils qualifient eux mêmes de « simple » pour le raffinement de maillages constitués d'éléments triangulaires à trois noeuds. Leur technique, que nous allons succinctement exposer, est basée sur une méthode de découpage par bisection suivant le plus grand côté. La méthode de division des triangles est présentée sur la figure IV.14.

Après avoir rempli la liste des triangles qui doivent être subdivisés, la méthode de division adoptée diffère suivant trois cas de figure :

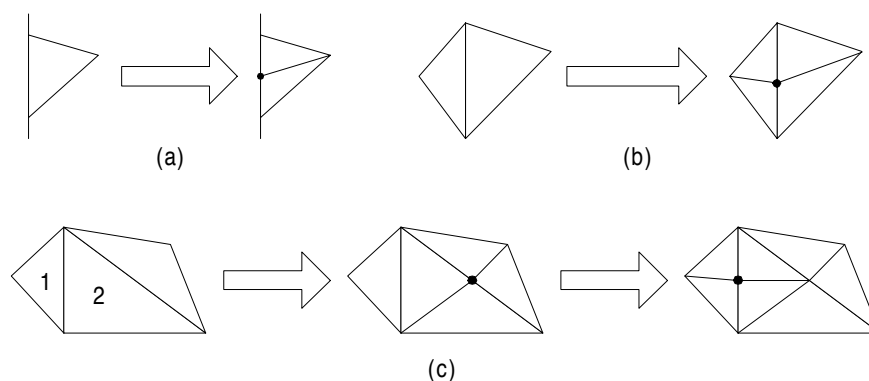


Figure IV.14 : Méthodes de division des triangles : (a) cas d'un élément sur la frontière, (b) cas de deux éléments internes partageant leurs plus grand côté, (c) cas des éléments internes qui ne partagent pas leur plus grand côté

- (a) soit le triangle à diviser a son plus grand côté sur une frontière du maillage (figure IV.14(a)). Dans ce cas là, un nouveau noeud est créé au milieu de ce plus grand côté et celui-ci donne naissance à deux nouveaux éléments en remplacement du triangle initial.
- (b) soit le plus grand côté du triangle à diviser est aussi le plus grand côté du triangle en vis-à-vis (figure IV.14(b)). Un nouveau noeud est alors créé au milieu du grand côté commun et ce noeud donne naissance à quatre nouveaux éléments en remplacement des triangles initiaux.
- (c) soit le plus grand côté du triangle à diviser n'est pas le plus grand côté du triangle en vis-à-vis (figure IV.14(c)). Ce cas se produit lorsqu'un triangle appartient à la liste des triangles à diviser (triangle 1 sur la figure) et que son vis-à-vis n'appartient pas à cette liste et ne partage pas le plus grand côté (triangle 2 sur la figure). Dans ce cas, le second triangle (triangle 2) est ajouté à la liste et on recommence la procédure pour ce triangle (en déterminant son plus grand côté).

Pour mettre en place une telle méthode, il convient de classer les triangles dans l'ordre de leur plus grand côté croissant et de les diviser en partant de la fin de la liste (on commencera toujours par diviser le triangle de la liste qui a le plus grand des plus grands côtés). L'algorithme de division est présenté sur la figure IV.15.

IV.8.3 Difficultés dues au raffinement du maillage

Le fait de remailler la structure lors du calcul fait apparaître quelques difficultés numériques que nous allons énumérer sans détailler les solutions apportées, qui ne sont que d'ordre algorithmique.

- Il faut toujours vérifier qu'un noeud nouvellement créé ne se trouve pas, au moment de sa création, à l'extérieur du moule (dans le cas de moules non convexes). Cependant, on ne peut pas appliquer la méthode classique de détection du contact puisque ce noeud n'a pas de passé, donc pas de trajectoire. Pour remédier à ce problème, nous avons mis en place une série de tests préalables à effectuer sur les côtés qui doivent être divisés, avec projection des noeuds créés sur le moule.

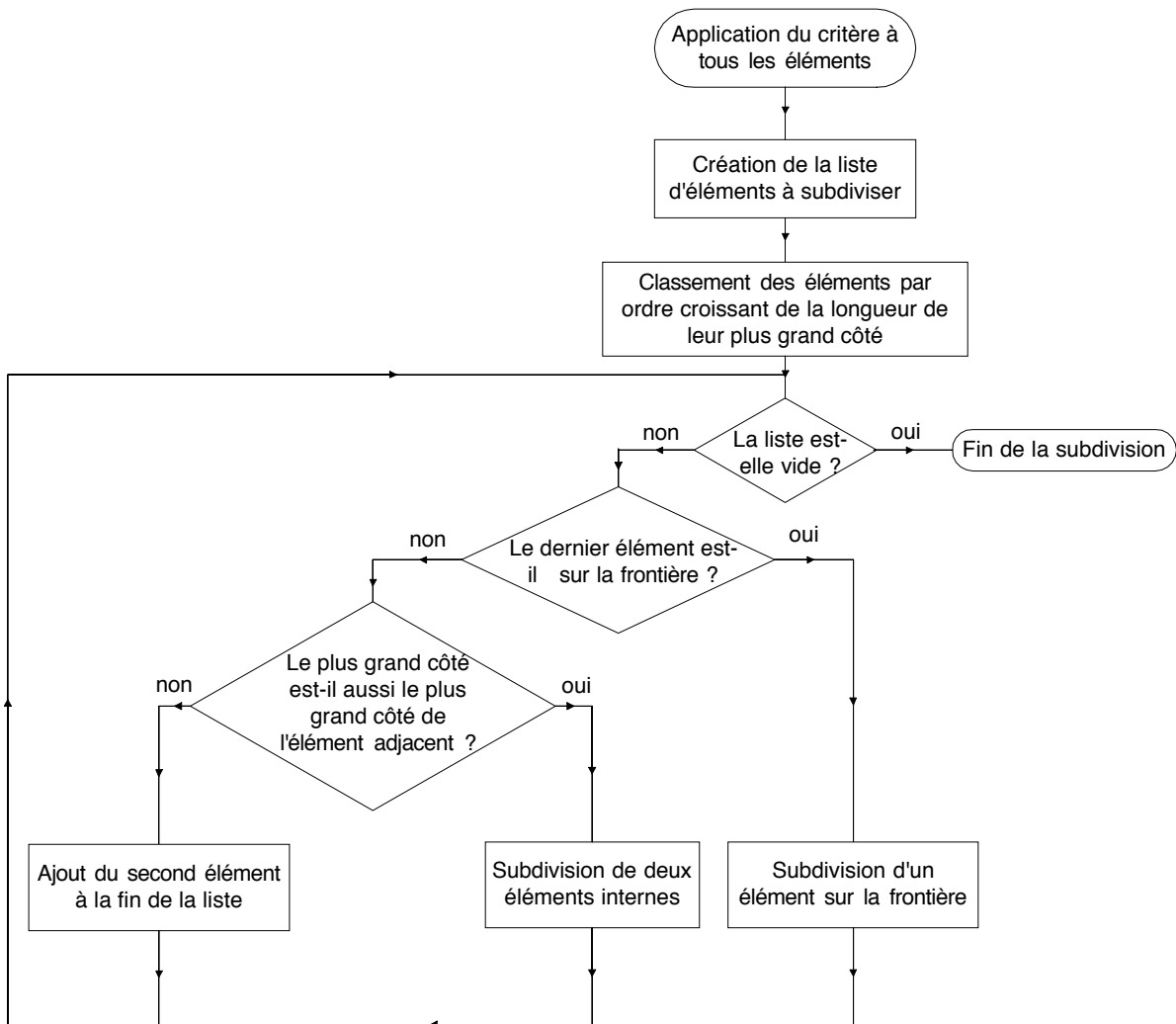


Figure IV.15 : Algorithme de subdivision du maillage (d'après [NAM 93])

- La taille des éléments diminuant au cours du calcul, la valeur du pas de temps critique pour l'algorithme des différences centrées diminue elle aussi. On doit donc diminuer le pas de temps au cours du calcul ce qui oblige à calculer (par une interpolation) la position des noeuds au nouveau temps t_{n-1} défini par le nouveau pas de temps.

IV.9 Validation générale : thermoformage d'un récipient cylindrique

Pour valider l'ensemble du code de calcul, nous avons confronté nos résultats numériques à des données expérimentales fournies dans la littérature. Pour cela, on s'intéresse au cas du thermoformage d'un récipient cylindrique en HIPS (PolyStyrène à Haut Impact). Ce problème a été étudié expérimentalement et numériquement par deLorenzi et Nied [DEL 91] et numériquement par Rachik *et al.* [RAC 94].

Pour des raisons de symétrie, nous n'avons étudié que le quart de la structure. La membrane initiale est plane, circulaire de rayon 129,54 mm et d'épaisseur initiale 0,254 mm. La géométrie

du moule est présentée sur la figure IV.IV.16(a). Celui-ci est maillé avec 63 facettes triangulaires et ce maillage est présenté sur la figure IV.IV.16(b).

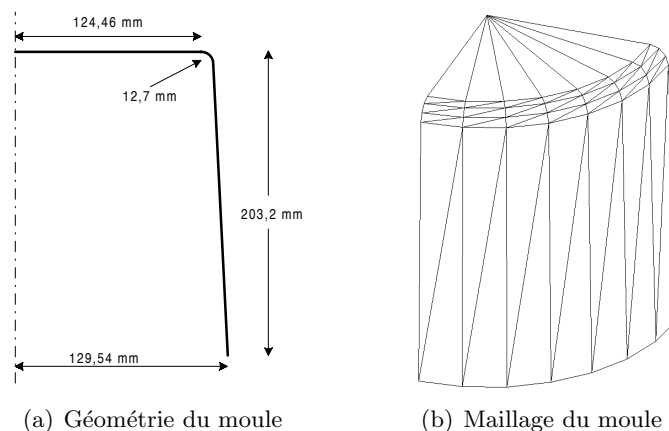


Figure IV.16 : Description du moule pour le thermoformage d'un récipient cylindrique

Pour modéliser le comportement du matériau, nous avons utilisé les données expérimentales fournies par Schmidt et Carley [SCH 75a] qui proposent une forme modifiée du modèle de Mooney, avec la fonction énergie de déformation suivante :

$$W = A_{10} (I_1 - 3) + A_{02} (I_2 - 3)^2 \quad (\text{IV.81})$$

où les deux constantes matérielles sont :

$$A_{10} = 0,143 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad A_{02} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}$$

Cette loi de comportement et ces constantes matérielles sont celles utilisées par les autres auteurs dans leurs études.

Le maillage initial de la membrane est constitué de 27 éléments finis et nous avons utilisé le module de raffinement de maillage présenté précédemment. Le maillage final comprend, lui, 996 éléments finis. La figure IV.17 montre l'évolution du maillage au cours du calcul. On remarquera la qualité du maillage final (figure IV.IV.17(d)), qualité que seul un maillage localement raffiné lors du calcul permet d'obtenir. En effet, il n'était pas possible de prévoir, à priori, les zones de la paraison initiale (figure IV.IV.17(a)) pour lesquelles le maillage devait être raffiné.

Nied et deLorenzi ont mesuré expérimentalement la répartition de l'épaisseur le long de la paroi de la pièce finale, ainsi que les extensions principales radiale et circonférentielle au fond du récipient. Nous avons donc comparé les résultats numériques que nous avons obtenus avec ces valeurs expérimentales :

- la figure IV.18 présente la répartition de l'épaisseur réduite h/h_0 en fonction de l'abscisse curviligne allant du centre au bord du récipient ;
- les figures IV.IV.19(a) et IV.IV.19(b) montrent les extensions principales, respectivement radiale et circonférentielle, au fond du récipient en fonction de la distance à l'axe de symétrie.

Sur ces différentes figures, chaque point (o) représente le résultat obtenu dans un élément fini. Toutes les grandeurs étant constantes par élément, elles sont représentées, sur les graphes,

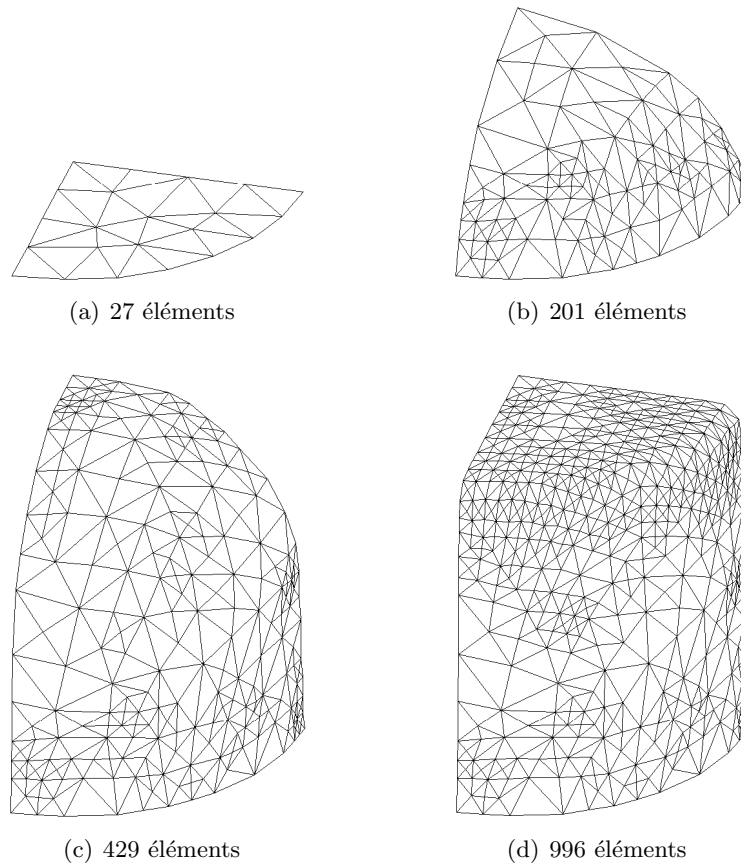


Figure IV.17 : Quatre phases du thermoformage

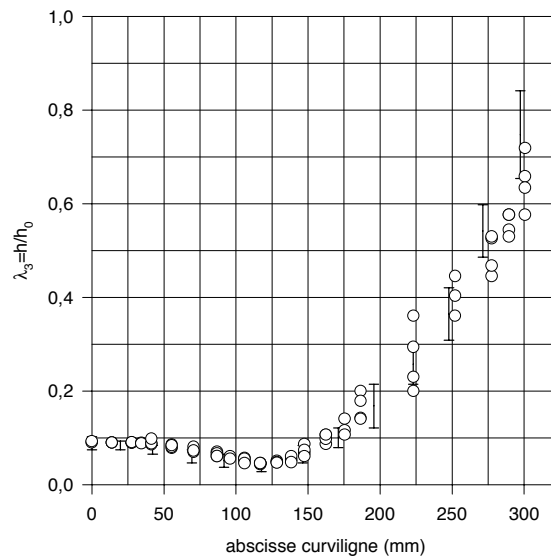
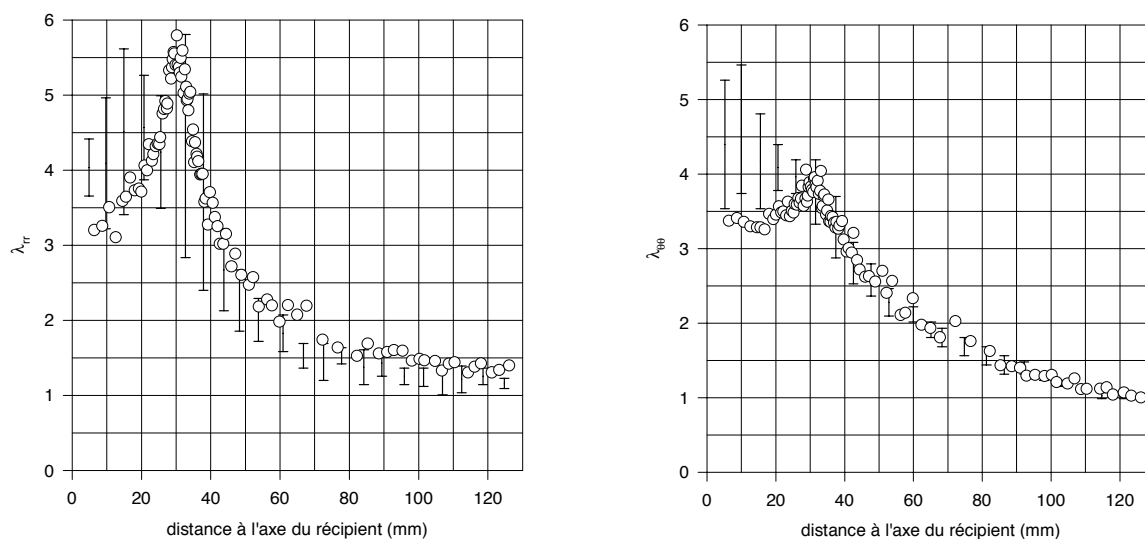


Figure IV.18 : Épaisseur réduite le long de la paroi : (I) points expérimentaux, (o) résultat numérique EF

au centre de gravité du triangle concerné. C'est pourquoi, plusieurs points sont obtenus pour



(a) Extension principale radiale au fond du récipient

(b) Extension principale circonférentielle au fond du récipient

Figure IV.19 : Comparaison expériences-calculs : (I) points expérimentaux, (o) résultats numériques EF

une même abscisse.

La répartition de l'épaisseur obtenue numériquement est en bonne adéquation avec les résultats expérimentaux (figure IV.18), et ce surtout pour le fond du récipient. Pour des abscisses curvilignes supérieures à 250 mm, les résultats numériques s'éloignent des mesures expérimentales (15 %). Cet écart croissant peut être imputé à l'aspect grossier du maillage final sur le bord du récipient.

En ce qui concerne les extensions principales au fond du récipient (figure IV.19), les résultats s'avèrent un peu moins satisfaisants : l'extension principale radiale est quelque peu sous-estimée sur la plus grande partie du fond (17 %) et surestimée au voisinage de l'axe de symétrie (25 %) (figure IV.19(a)), et l'extension principale circonférentielle est sous-estimée au voisinage de l'axe (25 %) (figure IV.19(b)). Malgré ces écarts au voisinage de l'axe de symétrie, sur un plan qualitatif les résultats numériques sont conformes aux résultats expérimentaux.

Au vu de cet exemple industriel, notre code de calcul utilisé avec son module de raffinement de maillage est validé.

Remarque : les résultats numériques obtenus par deLorenzi et Nied [DEL 91] (résolution du problème quasi-statique) et Rachik et al. [RAC 94] (résolution explicite du problème dynamique avec ajout d'une matrice d'amortissement) sont identiques aux nôtres mais n'ont pas été présentés sur les figures pour des raisons de clarté.

IV.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et validé un code de calcul éléments finis pour la simulation numérique des procédés industriels de moulage par soufflage et de thermoformage.

Dans ce code, les parois sont modélisées par des éléments triangulaires membranes isoparamétriques à trois noeuds en grandes transformations. Les lois de comportement implantées sont de type hyperélastique ou viscoélastique non-linéaire.

Compte tenu des phénomènes physiques intervenant dans ces procédés, mais aussi des difficultés rencontrées lors de la résolution quasi-statique de ce type de problème, notamment dues à l'existence d'instabilités dans le comportement des membranes tendues, nous avons adopté une formulation dynamique résolue par le schéma explicite des différences centrées. Le contact de la paraison avec le moule est considéré collant, hypothèse admise par la plupart des auteurs.

L'originalité de notre travail porte sur les deux points suivants :

- tout d'abord, pour se rapprocher des phénomènes physiques intervenant dans les processus industriels (ou expérimentaux), le chargement peut se faire à débit de gaz imposé et non plus uniquement à pression imposée, la pression à l'intérieur de la paraison étant étroitement liée à sa déformation ;
- de plus, compte tenu des grandes variations de la géométrie de la paraison au cours du soufflage, nous avons été amenés à développer un module simple de raffinement de maillage permettant la subdivision des triangles au cours du calcul sur des critères géométriques.

Le code a pu être validé à la fois sur un cas simple dont une solution semi-analytique a été mise en place, mais aussi grâce à des résultats expérimentaux. Les bons résultats de ces tests de validation permettent d'envisager son utilisation dans le cadre de la simulation des procédés, en particulier pour la prédiction de la géométrie finale et de l'évolution de la pression interne lors des procédés.

Chapitre V

Applications industrielles

III.1	Historique des essais d'extension biaxiale	61
III.2	Réalisation de l'essai	64
III.3	Identification des coefficients des modèles de comportement	75
III.4	Conclusion	88

Ce dernier chapitre constitue une application de type industriel du code de calcul que nous avons développé. Les lois de comportement que nous avons recalées sont incluses dans le code. Nous présentons deux exemples :

- l'extrusion-soufflage d'une bouteille avec manche ;
- le thermoformage d'une boîte de forme complexe.

Dans le premier exemple, nous mettrons l'accent sur l'utilisation des différentes lois de comportement identifiées au chapitre III et sur le calcul de la pression dans la bouteille au cours du soufflage. Dans le second exemple, nous nous intéresserons plus précisément au problème de contact et de raffinement de maillage.

V.1 Extrusion-soufflage d'une bouteille avec manche

Le premier exemple traité concerne l'extrusion-soufflage d'une bouteille de lessive. Ce problème de bouteille avec manche a été étudié expérimentalement et numériquement à l'IMI par Khayat et Derdouri [KHA 95] pour le polyester (PET).

Lors du procédé de moulage par soufflage, une paraison a été extrudée, avant d'être prise entre les deux moitiés du moule. Le fond de la bouteille, ainsi que les côtés et le pourtour du manche sont donc pincés. La géométrie de la demi-paraison ainsi obtenue est présentée sur la figure V.1 (deux vues) et celle d'une moitié du moule sur la figure V.2. Dans la pratique, après le soufflage, toutes les parties écrasées se trouvant à l'extérieur du moule seront ébarbées.

La hauteur de cette bouteille est 230 mm et le rayon du corps, 40 mm. L'épaisseur initiale est uniforme : 2,25 mm. Pour le calcul, la bouteille est maillée avec 802 éléments finis et le moule avec 1215 facettes triangulaires.

V.1.1 Détermination de la géométrie finale

Dans un premier temps, nous comparons les résultats de notre code à ceux obtenus par Khayat et Derdouri [KHA 95]. Comme nous l'avons rappelé dans le premier chapitre, leur

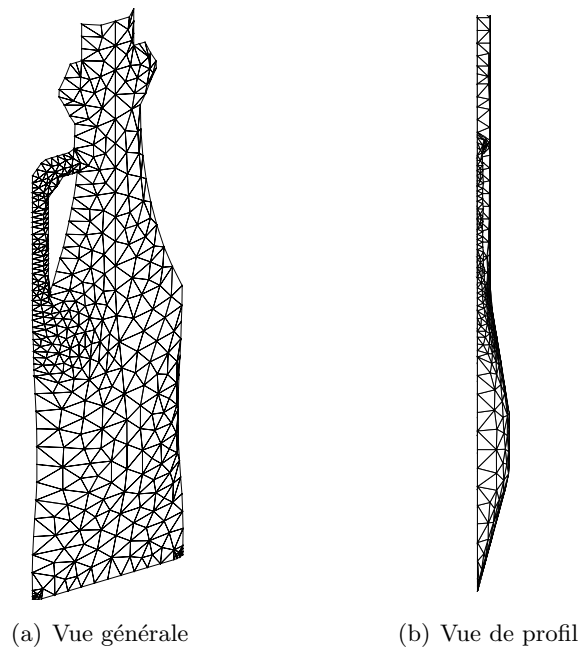


Figure V.1 : Paraison initiale extrudée pour le soufflage de la bouteille

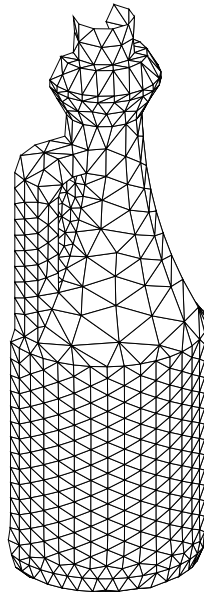


Figure V.2 : Moule de la bouteille

code de calcul résout le problème quasi-statique par la méthode des éléments finis. Les auteurs supposent le contact collant et modélisent les matériaux grâce au modèle de Mooney.

Nous utiliserons la même loi de comportement, c'est à dire un modèle de Mooney pour lequel le coefficient réduit $\alpha = C_1/C_2$ est fixé à 0,5 (cas du PET). Nous imposons comme chargement une rampe de pression à l'intérieur de la paraison.

La figure V.3 présente la répartition de l'épaisseur finale réduite, h/h_0 , de la bouteille suivant la vue de face (figure V.V.3(a)) et la vue de côté (figure V.V.3(b)). A-B-C et a-b-c représentent

les lignes utilisées pour les mesures expérimentales de l'épaisseur finale.

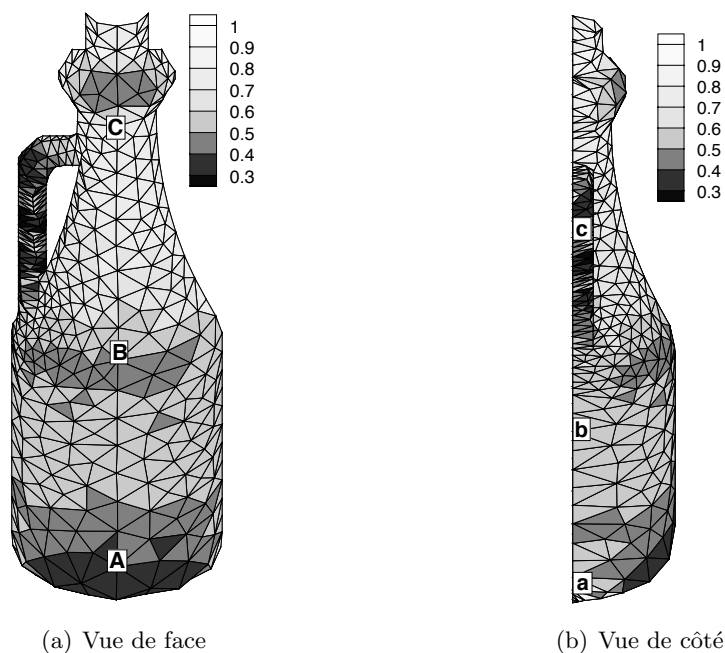


Figure V.3 : Distribution de l'épaisseur réduite h/h_0

Sur ces figures, on observe que l'amincissement atteint plus de 60 % dans le corps de la bouteille, 20 % dans la partie haute du goulot et 50 % dans sa partie basse. Dans la hanse, l'amincissement est de l'ordre de 50 à 60 %. La déformation maximale est atteinte dans la zone A et est de l'ordre de 250 %.

La comparaison de nos résultats numériques avec les résultats numériques de Khayat et Derdouri et les résultats expérimentaux sont présentés sur les figures V.V.4(a) et V.V.4(b) pour la génératrice courante du corps de la bouteille (ligne A-B-C sur la figure V.V.3(a)) et la ligne passant le long de sa hanse (ligne a-b-c sur la figure V.V.3(b)), respectivement. Ces courbes présentent l'épaisseur finale du produit en fonction de l'abscisse curviligne allant du fond de la bouteille au haut du goulot. Les résultats obtenus sont satisfaisants aussi bien qualitativement que quantitativement et sont similaires à ceux présentés dans [KHA 95] :

- sur le corps de la bouteille (figure V.V.4(a)), les écarts avec l'expérience sont d'à peu près 10 % au niveau du fond (point A), 18 % au niveau du milieu du corps de la bouteille (point B) et 23 % au niveau du goulot (point C) ;
- sur la ligne passant le long de la hanse (figure V.V.4(b)), ces écarts sont très faibles au fond de la bouteille (point a), de 50 % pour le corps de la bouteille (point b) et très variables au niveau de la hanse (point c).

Il faut noter que les oscillations relevées au niveau du manche (figure V.V.4(b)) sont dues aux difficultés de contact rencontrées dans les coins du moule : pour de telles géométries, les trois noeuds d'un élément peuvent avoir rencontrés le moule alors que l'élément reste éloigné de celui-ci (voir l'explication de ce problème dans le paragraphe du chapitre IV consacré au raffinement de maillage). Malgré tout, la finesse de notre maillage initial nous permet d'obtenir des valeurs, au niveau du manche, plus proches de l'expérience que celles des auteurs précités.

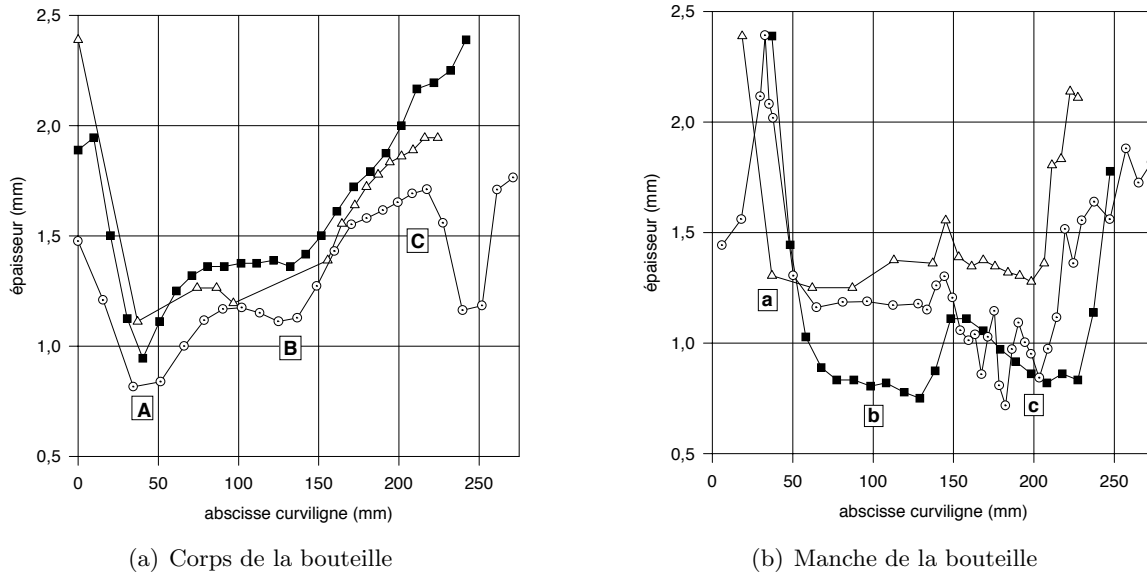


Figure V.4 : Comparaison de l'épaisseur finale de la bouteille : (■) résultats expérimentaux [KHA 95], (Δ) résultats numériques de Khayat et Derdouri [KHA 95], (\odot) nos résultats numériques

Les différences avec les expériences sont imputables à l'hypothèse d'épaisseur uniforme après la phase d'extrusion. En effet, dans la réalité, l'épaisseur de la paraison n'est pas uniforme initialement.

V.1.2 Étude de l'influence de la loi de comportement

V.1.2.1 Géométrie finale

Pour étudier l'influence de la loi de comportement sur la répartition finale de l'épaisseur, nous considérons la loi de comportement utilisée dans le paragraphe précédent pour le PET et les lois de comportement de l'ABS que nous avons identifiées :

- modèle de Mooney (hyperélastique) du PET :

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \text{ MPa} \\ C_2 &= 0,5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- modèle d'Ogden (hyperélastique) de l'ABS :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 4,1 \text{ MPa} & \alpha_1 &= 0,071 \\ \mu_2 &= 0,022 \text{ MPa} & \alpha_2 &= 2,256 \\ \mu_3 &= -0,058 \text{ MPa} & \alpha_3 &= -1,2 \end{aligned}$$

- modèle CBT généralisé (viscoélastique non-linéaire) de l'ABS :

$$\begin{aligned} g_{01} &= 0,051 \text{ MPa} & \alpha_1 &= 1,63 \\ g_{02} &= 0,125 \text{ MPa} & \alpha_2 &= 0,30 \\ g_{03} &= -3,66 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} & \alpha_3 &= -1,53 \\ g_1 &= 5,13 & \tau_R &= 6,13 \text{ s} \end{aligned}$$

Dans ces trois cas, le chargement adopté pour le calcul consiste en une rampe de pression.

La figure V.5 présente la répartition de l'épaisseur finale pour les trois lois de comportement, pour la ligne de noeuds du corps de la bouteille (figure V.V.5(a)) et pour la ligne de noeuds du manche (figure V.V.5(b)). Ces deux lignes de noeuds sont les mêmes que celles utilisées précédemment pour la comparaison avec les résultats expérimentaux.

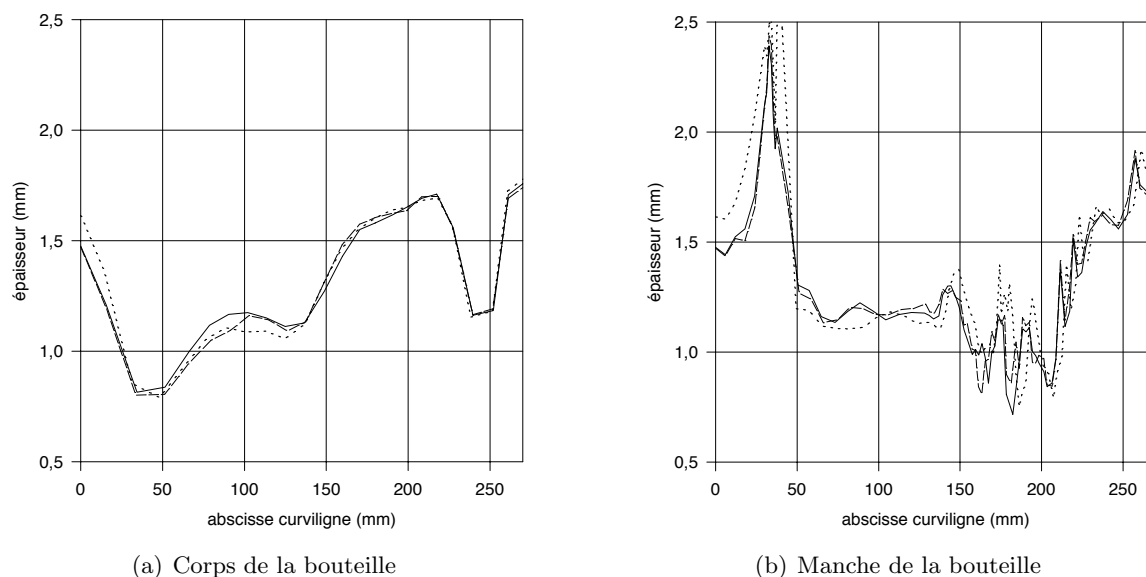


Figure V.5 : Épaisseur finale de la bouteille pour trois lois de comportement : (—) modèle de Mooney PET, (- - -) modèle d'Ogden ABS, (· · ·) modèle CBT généralisé ABS

Les résultats obtenus montrent que la loi de comportement et même le type de matériau mis en forme ont très peu d'influence sur la géométrie finale : les écarts maximaux sur les épaisseurs pour les différents modèles sont inférieurs à 10 %. La même constatation a été faite par deLorenzi et Nied [DEL 91].

V.1.2.2 Évolution de la pression interne

Pour cette seconde étude, nous n'avons considéré que les deux lois de comportement permettant la modélisation de l'ABS, c'est-à-dire les modèles d'Ogden et CBT généralisé avec les constantes matérielles que nous venons de rappeler.

Le chargement consiste maintenant à imposer un débit d'air constant. Pour chacun des deux modèles de comportement, trois calculs ont été effectués. Pour les trois cas, le temps de soufflage est fixé à 3 s et les trois débits d'air imposés sont : 62,5 g/s ($16 \cdot 10^3$ mol/s), 125 g/s ($32 \cdot 10^3$ mol/s) et 250 g/s ($64 \cdot 10^3$ mol/s) pour de l'air à la température ambiante de 23°C.

Dans tous les cas, le soufflage comprend deux étapes distinctes identifiées sur la figure V.6 :

- *le soufflage du corps de la bouteille* : pendant un temps très court, le volume augmente très rapidement et la pression reste faible. A la fin de cette étape, tout le corps de la bouteille est entré en contact avec le moule, il n'y a plus que le manche à mettre en forme.
- *le soufflage du manche* : il faut alors continuer à injecter de l'air en grande quantité pour permettre au manche d'adhérer au moule. Le volume augmente alors très lentement alors que la pression croît rapidement de manière linéaire.

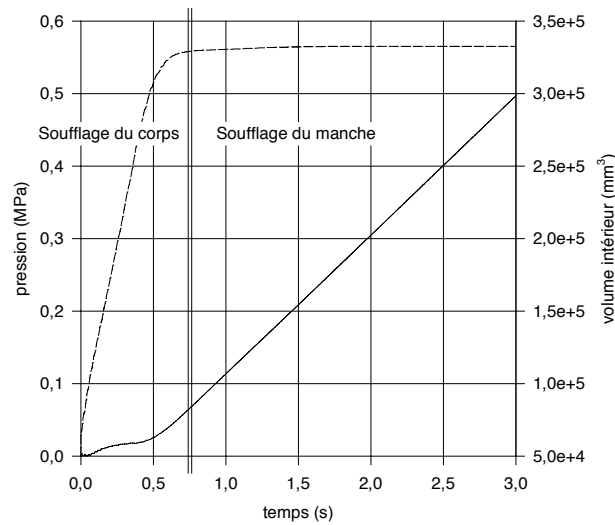


Figure V.6 : Soufflage de la bouteille sous un débit d'air constant : (—) évolution de la pression interne, (- - -) évolution du volume de la demi-bouteille

Pour les six cas étudiés, nous ne nous intéressons plus qu'à la première étape du soufflage, relative à la mise en forme du corps de la bouteille. La figure V.7 présente les courbes de l'évolution de la pression à l'intérieur de la paraison en fonction du volume contenu dans celle-ci. Le paramètre temps a été éliminé. Sur cette figure, on note que les pressions atteintes lors du soufflage sont différentes selon le modèle utilisé : pour un volume de $2,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$, la pression est de 0,018 MPa dans le cas hyperélastique et de 0,03 MPa dans le cas viscoélastique.

Dans le cas hyperélastique (figure V.V.7(a)), les courbes relatives aux trois débits sont identiques (aux oscillations près), ce qui était à prévoir puisque l'état de déformation ne dépend pas de la vitesse de chargement et donc pas du débit d'air imposé.

Dans le cas viscoélastique (figure V.V.7(b)), l'évolution de la pression à l'intérieur de la paraison dépend du débit d'air : plus ce débit est grand, plus la pression atteinte est élevée. En effet, plus l'air est injecté lentement, plus le phénomène de retard dû au caractère viscoélastique du matériau est important et moins la pression nécessaire au gonflement est élevée.

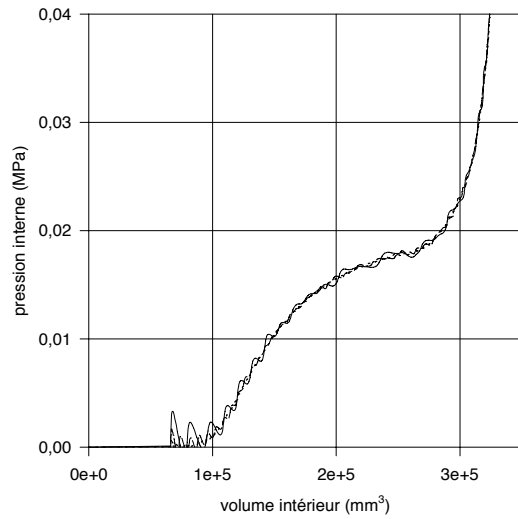
Cet exemple met en évidence l'importance de la loi de comportement, et notamment du caractère viscoélastique du matériau, pour bien calculer l'évolution de la pression à l'intérieur du moule lors du soufflage et ainsi mieux connaître le procédé.

V.2 Thermoformage d'une boîte avec insert

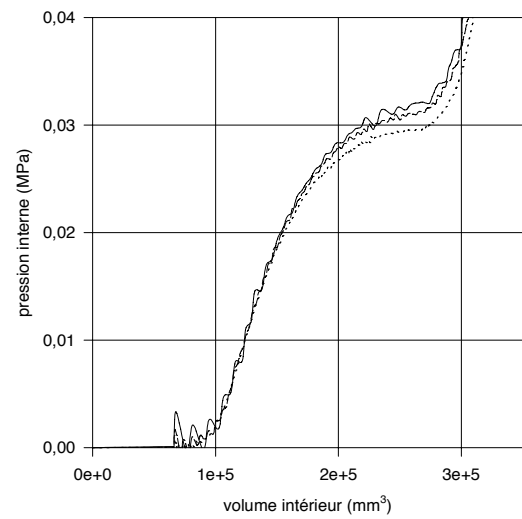
Le second exemple est consacré au thermoformage d'une boîte avec un insert au fond [MAR 97]. Les dimensions du moule sont présentées sur la figure V.V.8(a). Ce moule est maillé à l'aide de 26 facettes triangulaires (figure V.V.8(b)). La paraison initiale est une feuille rectangulaire d'épaisseur uniforme 2 mm, dont les bords sont fixés. Pour ce calcul, nous utilisons le module de raffinement de maillage et le chargement imposé consiste en une rampe de pression.

La figure V.9 présente l'évolution du maillage au cours du thermoformage ; le maillage initial comprend 128 éléments (figure V.V.9(a)) et le maillage final est constitué de 3752 éléments (figure V.V.9(d)).

La répartition de l'épaisseur réduite, h/h_0 , sur l'ensemble de la boîte est présentée sur la

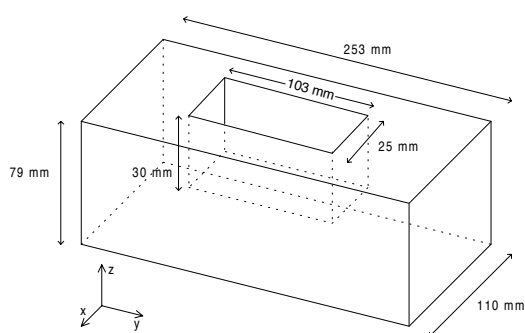


(a) Modèle d'Ogden (hyperélastique)

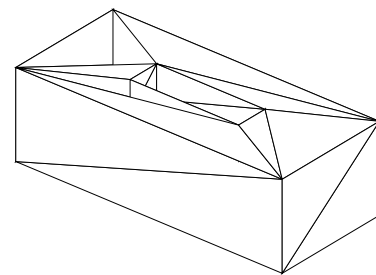


(b) Modèle CBT généralisé (viscoélastique non-linéaire)

Figure V.7 : Évolution de la pression interne en fonction du volume contenu dans la paraison :
 (···) 62,5 g d'air/s, (- - -) 125 g d'air/s, (—) 250 g d'air/s



(a) Géométrie du moule



(b) Maillage du moule

Figure V.8 : Description du moule pour le thermoformage d'une boîte parallélépipédique avec un insert

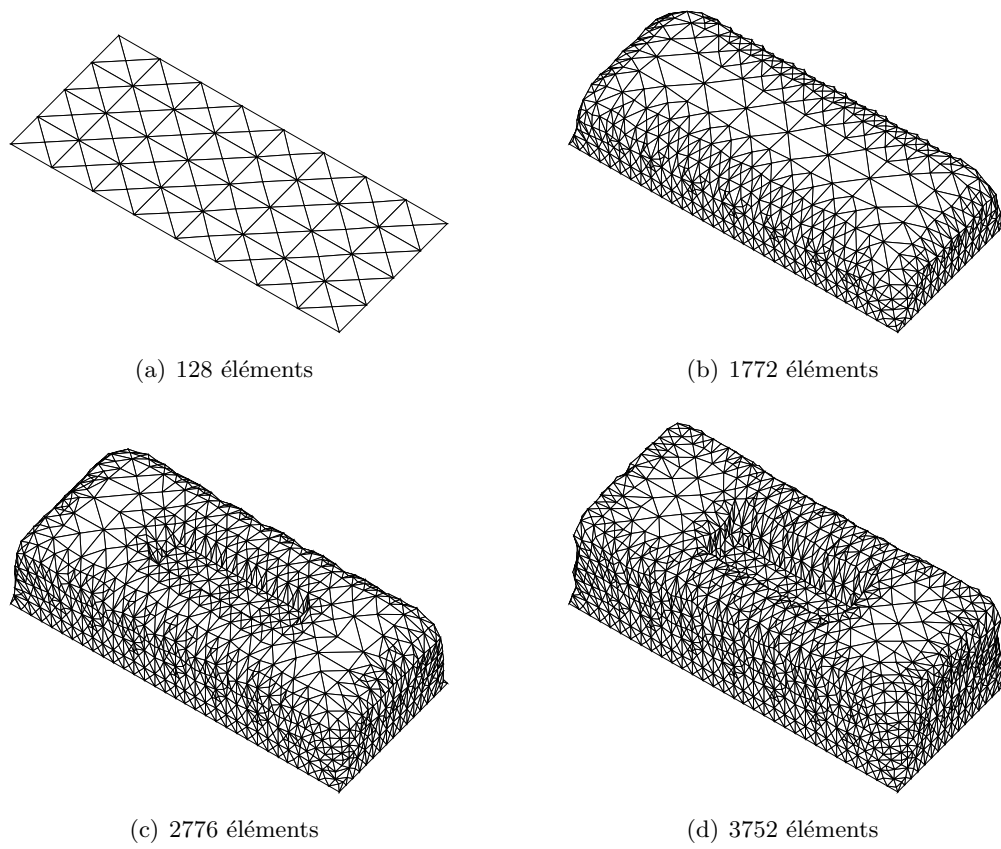


Figure V.9 : Quatre phases du thermoformage de la boîte

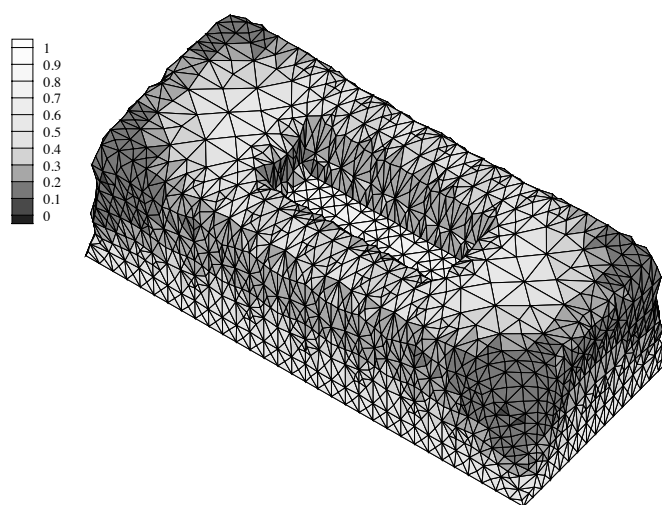


Figure V.10 : Répartition de l'épaisseur réduite

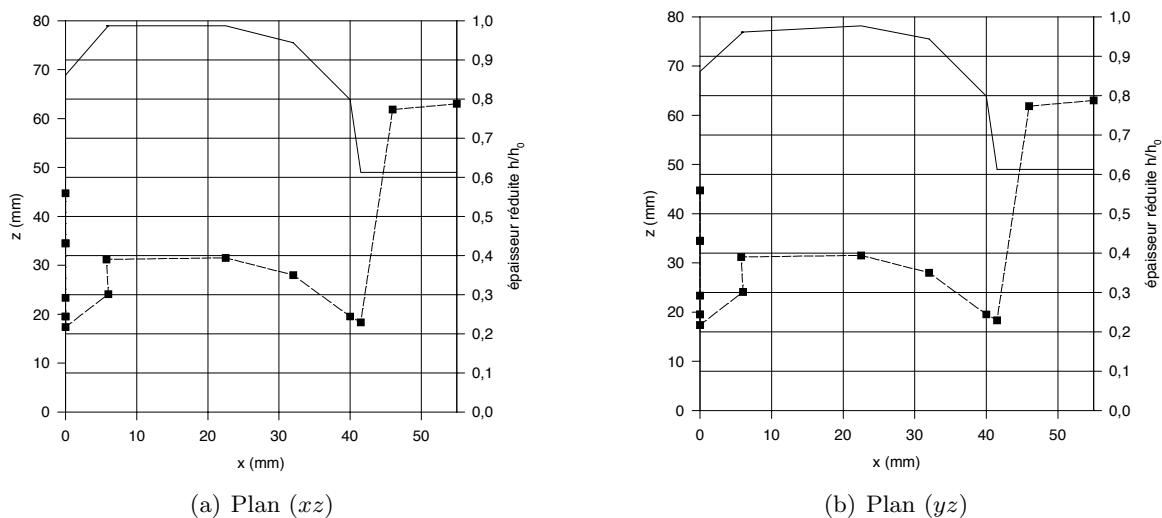


Figure V.11 : Répartition de l'épaisseur réduite sur les demi-plans de symétrie

figure V.10. De plus, la figure V.11 fournit la répartition de l'épaisseur sur les demi-plans de symétrie (xz) (figure V.V.11(a)) et (yz) (figure V.V.11(b)), plans identifiés par le repère de la figure V.V.8(a).

Cet exemple incluant un moule non-convexe démontre la fiabilité du module de contact du code de calcul. De plus, l'utilisation du module de raffinement de maillage permet d'obtenir une géométrie finale satisfaisante sans avoir à se soucier du maillage initial.

Conclusion générale

Ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude des procédés de mise en forme des polymères par soufflage et thermoformage. Notre effort s'est plus particulièrement porté sur la caractérisation et la modélisation du comportement des matériaux utilisés, puis sur le développement d'un outil de simulation adapté aux spécificités des problèmes considérés.

Après avoir rappelé les hypothèses classiquement utilisées par les codes de calcul déjà existants (chapitre I), nous avons recensé les lois de comportement, aussi bien hyperélastiques que viscoélastiques non-linéaires intégrales, permettant la modélisation des polymères thermoplastiques à leur température de mise en forme (chapitre II). L'analyse de leur performance relativement à leur simplicité de mise en œuvre numérique nous a permis de retenir deux lois de comportement hyperélastiques (modèles de Mooney et d'Ogden) et deux lois viscoélastiques (modèles de Christensen et CBT généralisé).

Du point de vue expérimental, nous avons réalisé un montage de soufflage de membrane plane chauffée (chapitre III) permettant l'obtention d'états de déformations biaxiaux proches de ceux rencontrés dans les procédés. Une campagne d'essais menée sur l'ABS (Acrylonitrile butadiène styrène) a mis en évidence son caractère viscoélastique ainsi que l'importance de l'évolution de la pression à l'intérieur de la paraison lors du soufflage. Enfin, grâce aux mesures obtenues et à une méthode originale de recalage basée sur la résolution du problème de soufflage d'une membrane circulaire plane, les constantes matérielles des modèles retenus ont été identifiées.

D'autre part, un code de calcul par éléments finis permettant l'implantation des lois de comportement recalées, a été développé (chapitre IV). Fondé sur une formulation dynamique explicite du problème de soufflage de la paraison, il présente les particularités de permettre un chargement soit en pression, soit en débit d'air et de résoudre localement les problèmes de grande variation de géométrie à l'aide d'un module de raffinement automatique du maillage. La comparaison des résultats numériques à des données semi-analytiques et expérimentales (provenant de la bibliographie) a permis de valider notre programme et d'envisager son utilisation pour la simulation des procédés industriels de mise en forme des corps creux plastiques (chapitre V).

De ces travaux relatifs à la modélisation des procédés de soufflage et de thermoformage, on peut dégager un certain nombre de résultats originaux.

L'étude expérimentale a montré que la seule utilisation de modèles hyperélastiques est insuffisante pour décrire le comportement des polymères thermoplastiques lors de leur mise en forme, et que la prise en compte de leur caractère viscoélastique est indispensable. Dans cette optique, le modèle CBT (1976), que nous avons généralisé sur les bases du modèle d'Ogden, semble bien adapté à la modélisation de tels comportements. De plus, ces expériences ont permis de mieux comprendre le couplage entre la pression à l'intérieur de la membrane et sa déformation. Il est clairement apparu que ces deux grandeurs sont étroitement liées et que le paramètre pilote dans ce type de problème n'est pas la pression interne mais bien le débit du gaz de soufflage.

La mise en œuvre numérique a, quant à elle, montré que l'utilisation d'éléments finis linéaires devait être couplée à celle d'un module de remaillage afin de parer aux inconvénients de ces éléments. Enfin et surtout, les tests numériques effectués ont permis de vérifier que la détermination de la pression à l'intérieur de la paraison nécessite une bonne modélisation du comportement du matériau. En revanche, la répartition d'épaisseur dans le produit final ne dépend pas de la loi de comportement utilisée.

Dans l'avenir, on peut envisager plusieurs axes de développement pour chacun des deux aspects de ce travail.

En effet, étant appelé à devenir le dispositif expérimental systématiquement utilisé à l'IMI pour la caractérisation des matériaux, il semble indispensable d'automatiser la mesure de la hauteur de la bulle. Quelques essais préliminaires utilisant une mesure optique de cette hauteur permettent d'être optimiste quant à son utilisation future. De plus, il est désormais clair qu'une plus grande plage de débits d'air, sans doute mieux régulés, permettrait de couvrir un champ plus vaste de procédés industriels. Un tel dispositif permettrait ainsi d'établir une liste plus complète de modèles dont on pourrait identifier les paramètres.

D'autre part, de manière à améliorer la simulation des procédés, quelques aspects restent à approfondir. Le premier concerne le critère de remaillage. En effet, il est probable qu'un critère intégrant un nombre plus important d'éléments permettrait d'obtenir un remaillage plus sélectif. Le second concerne, quant à lui, le gaz de soufflage. Une équation d'état plus réaliste pourrait sans nul doute fournir une meilleure estimation de la pression interne. Enfin, à plus long terme et de manière à mieux estimer certaines grandeurs essentielles telles que les contraintes résiduelles, une analyse thermomécanique du procédé constituerait un axe de développement très prometteur.

Annexe A

Soufflage d'une membrane circulaire plane : équations et validation

Dans cette annexe, nous donnons les fonctions intervenant dans la mise en équations du problème de soufflage d'une membrane plane circulaire. De plus nous présentons une rapide validation de nos résultats.

A. 1 Équations pour le soufflage de la membrane

A. 1.1 Cas hyperélastique

A. 1.1.1 Modèle de Mooney

Dans ce paragraphe, on suppose que le modèle de Mooney est défini par les deux constantes matérielles C et α telles que :

$$W = C [(I_1 - 3) + \alpha (I_2 - 3)] \quad (\text{A.1})$$

Les fonctions réduites définies dans le paragraphe III.3.2.1 sont alors :

$$T_1 = 2C \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right) (1 + \alpha \lambda_2^2) \quad (\text{A.2})$$

$$T_2 = 2C \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right) (1 + \alpha \lambda_1^2) \quad (\text{A.3})$$

et :

$$A = 2C \left[\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2^3} \right) + \alpha \left(\lambda_2 + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2} \right) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$B = 2C \left[\left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{3}{\lambda_1^3 \lambda_2^4} \right) + \alpha \left(\lambda_1 + \frac{3}{\lambda_1 \lambda_2^4} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$C = 2C \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

A. 1.1.2 Modèle d'Ogden

On considère un modèle d'Ogden général, pour lequel on ne fixe pas le nombre de termes de la série. Dans les expressions suivantes, on adopte le principe de la sommation sur l'indice répété n .

Les fonctions réduites définies dans le paragraphe III.3.2.1 sont alors :

$$T_1 = \mu_n \left(\frac{\lambda_1^{\alpha_n-1}}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_n+1} \lambda_2^{\alpha_n+1}} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$T_2 = \mu_n \left(\frac{\lambda_2^{\alpha_n-1}}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_n+1} \lambda_2^{\alpha_n+1}} \right) \quad (\text{A.8})$$

et :

$$A = \mu_n \left[(\alpha_n - 1) \frac{\lambda_1^{\alpha_n-2}}{\lambda_2} + (\alpha_n + 1) \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_n+2} \lambda_2^{\alpha_n+1}} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$B = \mu_n \left[-\frac{\lambda_2^{\alpha_n-2}}{\lambda_1} + (\alpha_n + 1) \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_n+1} \lambda_2^{\alpha_n+2}} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$C = \mu_n \left(\frac{\lambda_1^{\alpha_n-1}}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2^{\alpha_n-1}}{\lambda_1} \right) \quad (\text{A.11})$$

A. 1.2 Cas viscoélastique

Dans ce paragraphe, nous rappelons les fonctions T_1 , T_2 , F_1 , F_2 , F_3 et F_4 intervenant dans le système (III.17) pour les deux modèles de comportement que nous avons adoptés.

Pour simplifier l'écriture de ces fonctions, on notera :

$$g_1 * f = \int_0^t g_1(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{A.12})$$

Toutes les fonctions seront écrites pour la résolution du système au temps t_n , on ne précisera donc pas la dépendance des différentes variables par rapport à t_n . Par contre, pour toutes les variables relatives au temps précédent t_{n-1} , cette dépendance sera précisée.

A. 1.2.1 Modèle de Christensen

On rappelle que la fonction de relaxation est de la forme :

$$g_1(\tau) = g_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_R}} \quad (\text{A.13})$$

Le modèle dépend donc de trois constantes matérielles g_0 , g_1 et τ_R .

Les tensions sont définies par :

$$T_1 = g_0 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right) + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} g_1 * \lambda_1^2 - \frac{1}{2\lambda_1^3 \lambda_2^3} g_1 * \frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (\text{A.14})$$

$$T_2 = g_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \right) + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} g_1 * \lambda_2^2 - \frac{1}{2\lambda_1^3 \lambda_2^3} g_1 * \frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (\text{A.15})$$

et les quatre fonctions par :

$$F_1 = \frac{1}{\lambda_2} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \lambda_1^2 \right) + \frac{3}{\lambda_1^4 \lambda_2^3} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^6 \lambda_2^5} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$F_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \lambda_1^2 \right) + \frac{3}{\lambda_1^3 \lambda_2^4} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} \left(\frac{1}{\lambda_1^5 \lambda_2^6} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$F_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} g_1 * \lambda_1 \lambda_1' \Big|_{t_{n-1}} - g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} \lambda_1(t_{n-1}) \lambda_1'(t_{n-1}) \right) + \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \left[e^{-\frac{\Delta t}{\tau_R}} \left(g_1 * \frac{\lambda_1'}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \Big|_{t_{n-1}} + g_1 * \frac{\lambda_2'}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \Big|_{t_{n-1}} \right) \right] - g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_R}} \left(\frac{\lambda_1'(t_{n-1})}{\lambda_1^3(t_{n-1}) \lambda_2^2(t_{n-1})} + \frac{\lambda_2'(t_{n-1})}{\lambda_1^2(t_{n-1}) \lambda_2^3(t_{n-1})} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$F_4 = \left(\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} + \frac{1}{R} \right) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \lambda_1^2 \right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(g_0 + \frac{1}{2} g_1 * \lambda_2^2 \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

Comme mentionné dans le paragraphe III.3.2.1, les intégrales de 0 à t_n sont approchées par la relation de récurrence (III.16) proposée par Feng [FEN 86].

A. 1.2.2 Modèle CBT

De la même façon, les tensions pour le modèle CBT sont :

$$T_1 = g_{0k} \left[\left(\frac{\lambda_1^{\alpha_k - 1}}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 1} \lambda_2^{\alpha_k + 1}} \right) + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left(g_1 * \lambda_1^{\alpha_k} - g_1 * \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k} \lambda_2^{\alpha_k}} \right) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$T_2 = g_{0k} \left[\left(\frac{\lambda_2^{\alpha_k - 1}}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 1} \lambda_2^{\alpha_k + 1}} \right) + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left(g_1 * \lambda_1^{\alpha_k} - g_1 * \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k} \lambda_2^{\alpha_k}} \right) \right] \quad (\text{A.21})$$

et les quatre fonctions sont :

$$F_1 = g_{0k} \left\{ \left[(\alpha_k - 1) \frac{\lambda_1^{\alpha_k - 2}}{\lambda_2} + (\alpha_k + 1) \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 2} \lambda_2^{\alpha_k + 1}} \right] + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} \left[-g_1 * \lambda_1^{\alpha_k} + g_1 * \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k} \lambda_2^{\alpha_k}} \right] \right. \\ \left. + \alpha_k g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau R}} \left[\frac{\lambda_1^{\alpha_k - 2}}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 2} \lambda_2^{\alpha_k + 1}} \right] \right\} \quad (\text{A.22})$$

$$F_2 = g_{0k} \left\{ \left[-\frac{\lambda_1^{\alpha_k - 1}}{\lambda_2^2} + (\alpha_k + 1) \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 1} \lambda_2^{\alpha_k + 2}} \right] + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} \left[-g_1 * \lambda_1^{\alpha_k} + g_1 * \frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k} \lambda_2^{\alpha_k}} \right] \right. \\ \left. + \alpha_k g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau R}} \left[\frac{1}{\lambda_1^{\alpha_k + 1} \lambda_2^{\alpha_k + 2}} \right] \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$F_3 = g_{0k} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[e^{-\frac{\Delta t}{\tau R}} \left(g_1 * \lambda_1' \lambda_1^{\alpha_k - 1} \Big|_{t_{n-1}} + g_1 * \frac{\lambda_1'}{\lambda_1^{\alpha_k + 1} \lambda_2^{\alpha_k}} \Big|_{t_{n-1}} + g_1 * \frac{\lambda_2'}{\lambda_1^{\alpha_k} \lambda_2^{\alpha_k + 1}} \Big|_{t_{n-1}} \right) \right. \\ \left. - g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau R}} \left(\lambda_1'(t_{n-1}) \lambda_1^{\alpha_k - 1}(t_{n-1}) + \frac{\lambda_1'(t_{n-1})}{\lambda_1^{\alpha_k + 1}(t_{n-1}) \lambda_2^{\alpha_k}(t_{n-1})} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda_2'(t_{n-1})}{\lambda_1^{\alpha_k}(t_{n-1}) \lambda_2^{\alpha_k + 1}(t_{n-1})} \right) \right] \quad (\text{A.24})$$

$$F_4 = \frac{\lambda_1 \cos \theta}{\lambda_2 R} g_{0k} \left[\left(\frac{\lambda_1^{\alpha_k - 1}}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2^{\alpha_k - 1}}{\lambda_1} \right) + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (g_1 * \lambda_1^{\alpha_k} - g_1 * \lambda_2^{\alpha_k}) \right] \quad (\text{A.25})$$

A. 1.3 Formule de récurrence pour le modèle CBT

Les intégrales entre les temps 0 et t_n sont calculées à l'aide d'une formule de récurrence similaire à celle utilisée pour le modèle de Christensen. Les formules de récurrence sont du type :

$$\int_0^{t_n} g_1 e^{-\frac{t_n - \tau}{\tau R}} \frac{\partial \lambda_1^{\alpha_k}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \simeq e^{-\frac{\Delta t}{\tau R}} \int_0^{t_{n-1}} g_1 e^{-\frac{t_{n-1} - \tau}{\tau R}} \frac{\partial \lambda_1^{\alpha_k}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ + g_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau R}} [\lambda_1^{\alpha_k}(t_n) - \lambda_1^{\alpha_k}(t_{n-1})] \quad (\text{A.26})$$

A. 2 Validation du programme de calcul du soufflage d'une membrane plane

Afin de justifier les changements de variables et l'algorithme de résolution utilisé, nous avons testé le cas de la membrane hyperélastique dont les résultats ont été fournis par Yang et Feng [YAN 70].

On considère une membrane plane circulaire soumise à une pression uniforme. Dans ce travail, nous imposerons, comme Yang, l'extension principale au pôle, λ_0 , comme condition

aux limites et nous calculerons le profil déformé de la membrane ainsi que la valeur des deux extensions principales méridienne, λ_1 , et circonférentielle, λ_2 . Il faut noter que Yang et Feng ont résolu les équations différentielles qu'ils ont obtenues, par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, couplée à une méthode du tir pour assurer l'équilibre. Nous comparerons nos résultats à ceux des auteurs pour deux matériaux de type Mooney, définis par la valeur du paramètre réduit α : $\alpha = 0$ et $\alpha = 0,1$.

Les courbes des figures A.1 et A.2 présentent (a) les résultats de Yang et Feng et (b) nos résultats, pour le matériau néo-hookéen ($\alpha = 0$) respectivement pour le profil des membranes déformées et pour les extensions principales.

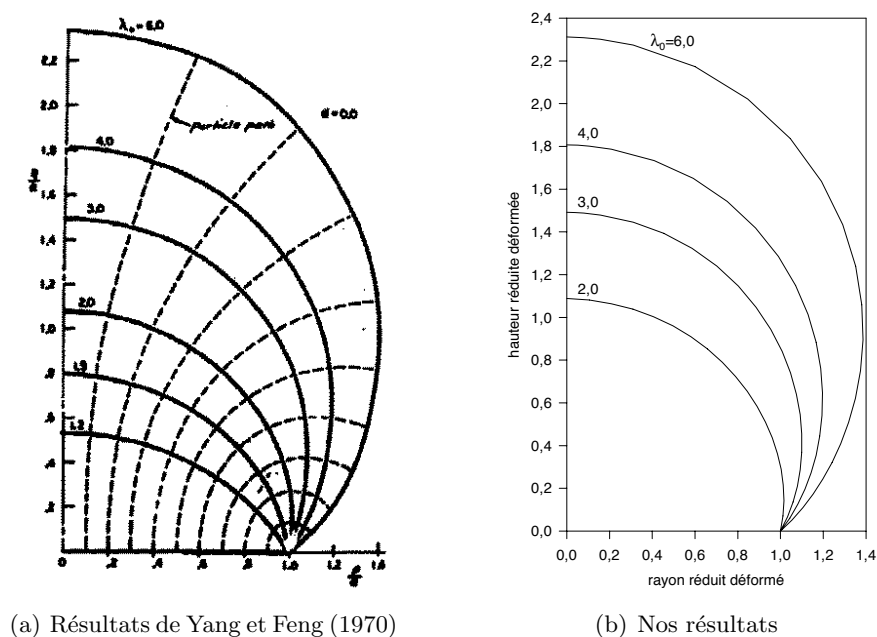
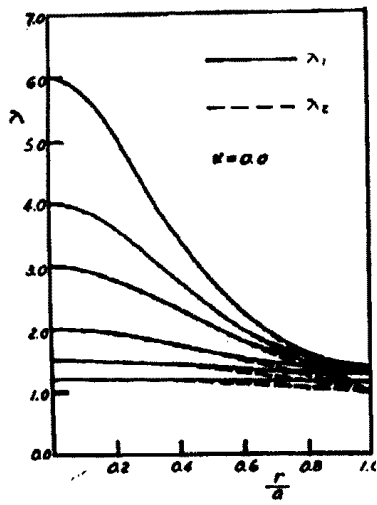


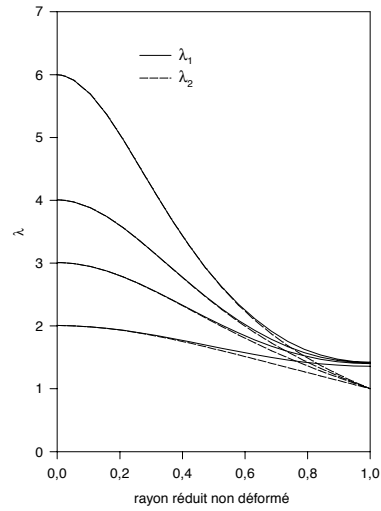
Figure A.1 : Profil déformé de la membrane : $\alpha = 0$

De la même façon, les figures A.3 et A.4 présentent les mêmes données mais dans le cas où $\alpha = 0,1$.

On voit bien sur ces quatre figures que nos résultats sont rigoureusement identiques à ceux de Yang et Feng, ce qui valide notre mise en équations et la méthode de résolution adoptée.

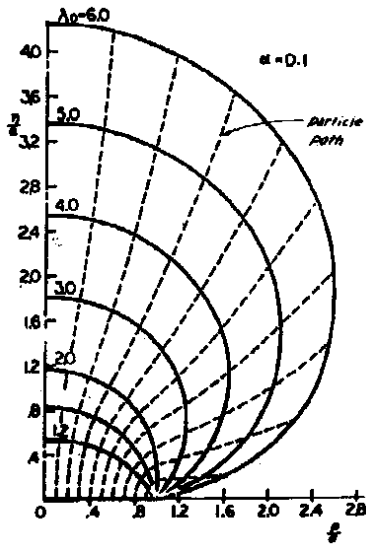


(a) Résultats de Yang et Feng (1970)

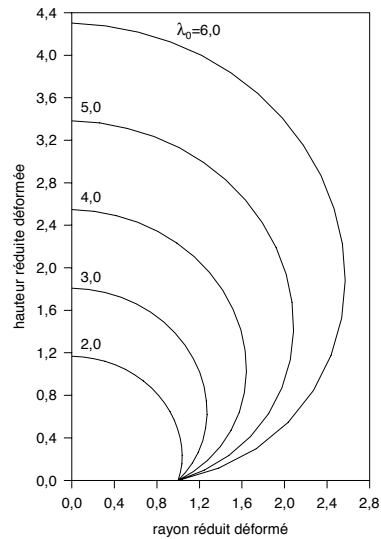


(b) Nos résultats

Figure A.2 : Extensions principales : $\alpha = 0$

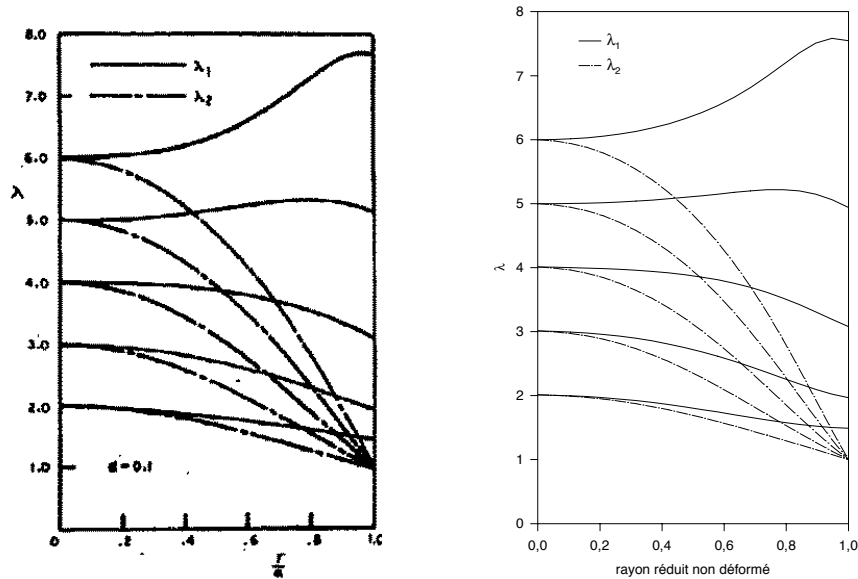


(a) Résultats de Yang et Feng (1970)



(b) Nos résultats

Figure A.3 : Profil déformé de la membrane : $\alpha = 0, 1$



(a) Résultats de Yang et Feng (1970)

(b) Nos résultats

Figure A.4 : Extensions principales : $\alpha = 0, 1$

Annexe B

Algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt

Dans cette annexe, nous décrivons l'algorithme d'optimisation que nous avons utilisé pour l'identification des paramètres matériels. Cet algorithme a été développé par Levenberg en 1944 [LEV 44] puis amélioré par Marquardt en 1963 [MAR 63]. Il est le plus utilisé dans les problèmes d'identification de paramètres matériels pour les expériences de soufflage biaxial [TWI 83], [BEN 93], [KYR 97].

Soit $\vec{x} = \langle x_i \rangle_{i=1,m}$ le vecteur des m paramètres matériels à optimiser.

Soit n_e ($n_e \geq m$) paires de points expérimentaux hauteur-pression (h_i^e, P_i^e) pour $i = 1, n_e$. Soit P_i^c valeur de pression calculée par une fonction donnée f des paramètres \vec{x} et de h_i^e (dans notre cas, il s'agit du résultat du soufflage de la membrane plane) :

$$P_i^c = f(\vec{x}, h_i^e) \quad (\text{B.1})$$

On note E_i l'erreur absolue sur P_i^e :

$$E_i = P_i^e - P_i^c \quad (\text{B.2})$$

L'erreur au sens des moindres carrés S est donc :

$$S = \sum_{i=1}^{n_e} E_i^2 \quad (\text{B.3})$$

Le problème consiste à déterminer le vecteur optimal \vec{x}^* qui minimise S .

L'algorithme calcule une suite de vecteurs $\vec{x}^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots$) à partir d'un vecteur initial $\vec{x}^{(0)}$, suite qui converge vers \vec{x}^* . Le vecteur $\vec{x}^{(r+1)}$ est calculé à partir du vecteur précédent $\vec{x}^{(r)}$ par l'équation suivante :

$$\vec{x}^{(r+1)} = \vec{x}^{(r)} - \left[[J^{(r)}]^t [J^{(r)}] + \gamma^{(r)} [I] \right]^{-1} [J^{(r)}] \vec{E}^{(r)} \quad (\text{B.4})$$

où $\gamma^{(r)}$ est un paramètre scalaire et $\vec{E}^{(r)}$ le vecteur des erreurs $\langle E_1, E_2, \dots \rangle$ à l'itération (r). La matrice $[I]$ est la matrice identité d'ordre m et $[J]$ est la matrice jacobienne d'ordre $n_e \times m$ dont l'élément J_{kl} à l'itération (r) est :

$$J_{kl}^{(r)} = \left. \frac{\partial E_k}{\partial x_l} \right|_{\vec{x} = \vec{x}^{(r)}} \quad k = 1, n_e ; l = 1, m \quad (\text{B.5})$$

Remarque : lorsque la fonction f est connue explicitement, la matrice jacobienne $[J]$ l'est elle aussi ; dans le cas contraire, $[J]$ est évaluée par une méthode des différences finies.

Marquardt a montré qu'il existe toujours un scalaire $\gamma^{(r)}$ suffisamment grand tel que :

$$S^{(r+1)} < S^{(r)} \quad (\text{B.6})$$

ainsi, il est clair que l'algorithme est convergent même pour une valeur « mal choisie » de $\gamma^{(0)}$.

La phase itérative est alors la suivante :

1. on choisit arbitrairement le scalaire $\gamma^{(0)}$ et un paramètre $u > 1$; soit par exemple $\gamma^{(0)} = 0,01$ et $u = 10$
2. soient $T(\gamma^{(r)})$ et $T(\gamma^{(r)}/u)$ les valeurs de $S^{(r)}$ lorsque $\gamma^{(r)}$ et $\gamma^{(r)}/u$ sont utilisés dans l'équation (B.4) à l'itération ($r - 1$), on calcule $T(\gamma^{(r)})$, $T(\gamma^{(r)}/u)$ et $S^{(r+1)}$
3. et :
 - (a) si $T(\gamma^{(r)}/u) \leq S^{(r+1)}$ alors $\gamma^{(r+1)} = \gamma^{(r)}/u$
 - (b) si $T(\gamma^{(r)}/u) > S^{(r+1)}$ et $T(\gamma^{(r)}) \leq S^{(r+1)}$ alors $\gamma^{(r+1)} = \gamma^{(r)}$
 - (c) si $T(\gamma^{(r)}/u) > S^{(r+1)}$ et $T(\gamma^{(r)}) \leq S^{(r+1)}$ alors on multiplie $\gamma^{(r)}$ par des puissances entières successives n de u jusqu'à ce que $T(\gamma^{(r)}u^n) \leq S^{(r+1)}$ et alors $\gamma^{(r+1)} = \gamma^{(r)}u^n$
4. test sur la convergence :
 - (a) soit $\left\| x_i^{(r+1)} - x_i^{(r)} \right\| < \epsilon \quad \forall i$
 - (b) soit $\left\| S^{(r+1)} - S^{(r)} \right\| < \epsilon'$

s'il n'y a pas convergence, r est incrémenté de 1 et on retourne à 2.

Remarque : dans le cas où $\gamma^{(r)} = 0$, on retrouve l'algorithme de Gauss-Newton.

Soufflage dynamique de membranes sphériques

C. 1 Introduction

Au début des années 60, la théorie générale pour la déformation des membranes a été établie par Green et Adkins [GRE 60]. L'existence d'instabilités lors du soufflage quasi-statique de membranes hyperélastiques est bien connue. De telles instabilités ont été observées expérimentalement par Hart-Smith [HS 66] et Alexander [ALE 71b]. Les équations générales régissant le gonflement quasi-statique de ballons ont été récemment étudiées dans le détail par Beatty [BEA 87] et l'instabilité de ces équations a été analysée par Shang [SHA 91] en utilisant la théorie des bifurcations.

Plus récemment, l'intérêt des auteurs s'est porté sur l'aspect dynamique du soufflage, prenant en compte les termes d'inertie. Les travaux de ce type sont résumés dans [JEN 91] et [JEN 96]. L'analyse théorique d'Akkas [AKK 78] met en évidence l'existence de phénomènes instables lors du soufflage dynamique. Il faut noter que dans cette étude, l'auteur suppose que l'épaisseur de la membrane reste constante tout au long du soufflage.

Dans cette annexe, nous développerons tout d'abord les équations générales du mouvement d'une membrane sphérique hyperélastique ou viscoélastique. Puis nous étudierons dans le détail le cas d'une membrane sphérique hyperélastique de type Mooney soumise à un échelon de pression constant (les résultats statiques classiques [BEA 87] seront explicités). Par la suite, nous traiterons, de façon beaucoup plus succincte, les problèmes, plus complexes, du soufflage d'une membrane sphérique hyperélastique de type Mooney soumise à un débit de fluide constant, et du soufflage d'une membrane sphérique viscoélastique de type Christensen par un échelon de pression constant. Dans ces deux cas, seuls des résultats qualitatifs seront fournis, résultats utilisés dans le chapitre IV pour la validation du code de calcul.

C. 2 Formulation du problème

Dans ce premier paragraphe, les équations du mouvement d'une membrane sphérique soumise à une pression interne sont étudiées dans le détail. Le comportement des matériaux sera modélisé par les modèles de Mooney (hyperélastique) et de Christensen (viscoélastique non-linéaire).

C. 2.1 Équations du mouvement

Soit une membrane sphérique d'un matériau élastique, isotrope, incompressible. Le mouvement de la membrane est décrit par les coordonnées sphériques (R, Θ, Φ) dans l'état non-déformé

et (r, θ, ϕ) dans l'état déformé. On note R_0, H_0 et r_0, h_0 le rayon moyen et l'épaisseur de cette membrane dans les états non-déformé et déformé, respectivement (figure C.1).

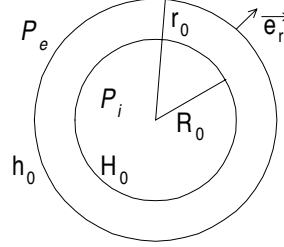


Figure C.1 : Soufflage d'une membrane sphérique. Notations

Dans la configuration lagrangienne, l'équation générale du mouvement s'écrit :

$$\iiint_{V_0} \overrightarrow{Div} \overline{\overline{\Pi}} dV_0 + \iiint_{V_0} \rho_0 \overrightarrow{f_0} dV_0 = \iiint_{V_0} \rho_0 \overrightarrow{\ddot{u}} dV_0 \quad (\text{C.1})$$

Dans cette équation, $\overline{\overline{\Pi}}$ est le premier tenseur des contraintes de Piola-Khirschhoff, $\overrightarrow{f_0}$ est le vecteur des forces de volume, ρ_0 est la masse volumique (constante), \overrightarrow{u} est le vecteur déplacement et V_0 est le volume de la membrane non-déformée.

De par la symétrie sphérique, toutes les variables ne dépendent que du rayon non-déformé courant, R , et du temps, et les deux contraintes circonférentielles sont égales. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{Div} \overline{\overline{\Pi}} = \left(\frac{\partial \Pi_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R} \Pi_{RR} - \frac{2}{R} \Pi_{\Theta\Theta} \right) \overrightarrow{e_R} \quad (\text{C.2})$$

où $\overrightarrow{e_R}$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale.

On suppose que les forces de volume, $\overrightarrow{f_0}$, sont nulles. Lors du soufflage, la forme sphérique de la membrane est préservée, alors la déformation est équibiaxiale dans les directions circonférentielles et le mouvement est uniaxial dans la direction radiale. L'équation (C.1) devient :

$$\int_{R_0 - \frac{H_0}{2}}^{R_0 + \frac{H_0}{2}} \left(\frac{\partial \Pi_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R} \Pi_{RR} - \frac{2}{R} \Pi_{\Theta\Theta} \right) dR = \int_{R_0 - \frac{H_0}{2}}^{R_0 + \frac{H_0}{2}} \rho_0 \ddot{u} dR \quad (\text{C.3})$$

Dans la direction radiale, la force lagrangienne, $\Pi_{RR} dS_0$, agissant sur un élément de surface de la membrane non-déformée, dS_0 , est égale à la force de pression, $-P dS$, agissant sur l'élément de surface de la membrane déformée correspondant, dS :

$$\Pi_{RR} \left(R_0 + \frac{H_0}{2}, t \right) dS_0 = -P_e dS \quad (\text{C.4a})$$

$$\Pi_{RR} \left(R_0 - \frac{H_0}{2}, t \right) dS_0 = -P_i dS \quad (\text{C.4b})$$

où P_e et P_i sont respectivement les pressions à l'extérieur et à l'intérieur de la membrane.

Notons λ_t l'extension principale suivant l'épaisseur, soit h_0/H_0 , et $\lambda = r_0/R_0$ l'extension principale dans la direction circonférentielle. L'hypothèse d'incompressibilité, $dV = dV_0$, s'écrit aussi : $dS_0 = \lambda_t dS$ et $\lambda_t \lambda^2 = 1$.

Soit ΔP la différence de pression $P_i - P_e$, alors, en utilisant (C.4a) et (C.4b), le premier terme de l'équation (C.3) devient :

$$\int_{R_0 - \frac{H_0}{2}}^{R_0 + \frac{H_0}{2}} \frac{\partial \Pi_{RR}}{\partial R} dR = \frac{\Delta P}{\lambda_t} \quad (\text{C.5})$$

Comme l'épaisseur de la membrane est supposée négligeable devant son rayon moyen ($H_0 \ll R_0$), la seconde partie de la première intégrale de (C.3) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{R_0 - \frac{H_0}{2}}^{R_0 + \frac{H_0}{2}} \left(\frac{2}{R} \Pi_{RR} - \frac{2}{R} \Pi_{\Theta\Theta} \right) dR &= \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \left(\frac{2}{R_0 + H} \Pi_{RR} - \frac{2}{R_0 + H} \Pi_{\Theta\Theta} \right) dH \\ &= \frac{2}{R_0} \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} (\Pi_{RR} - \Pi_{\Theta\Theta}) dH + O\left(\frac{H_0}{R_0}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

On définit maintenant Π_{RR}^* et $\Pi_{\Theta\Theta}^*$, les contraintes du premier tenseur de Piola-Kirchhoff (dans les directions radiale et circonférentielle, respectivement) intégrées suivant l'épaisseur non-déformée :

$$\Pi_{RR}^* = \frac{1}{H_0} \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \Pi_{RR} dH \quad (\text{C.7a})$$

$$\Pi_{\Theta\Theta}^* = \frac{1}{H_0} \int_{-\frac{H_0}{2}}^{\frac{H_0}{2}} \Pi_{\Theta\Theta} dH \quad (\text{C.7b})$$

On rappelle que le vecteur déplacement d'un point de la membrane est $\vec{u} = (r - R) \vec{e}_R$. Comme l'épaisseur est faible, ce vecteur est entièrement déterminé par la position relative du point matériel du rayon moyen entre les états non-déformé et déformé :

$$\vec{u} = \left[r_0 - R_0 + O\left(\frac{H_0}{R_0}, \frac{h_0}{r_0}\right) \right] \vec{e}_R \simeq R_0 (\lambda - 1) \vec{e}_R \quad (\text{C.8})$$

Alors, la partie dynamique de (C.3) (le membre de droite) se réduit à :

$$\int_{R_0 - \frac{H_0}{2}}^{R_0 + \frac{H_0}{2}} \rho_0 \ddot{u} dR = \rho_0 H_0 R_0 \ddot{\lambda} \quad (\text{C.9})$$

De par l'hypothèse de membrane, les contraintes ne varient pas dans l'épaisseur de sorte que :

$$\Pi_{RR}^* - \Pi_{\Theta\Theta}^* \simeq (\Pi_{RR} - \Pi_{\Theta\Theta}) |_{R=R_0} \quad (\text{C.10})$$

En utilisant les équations (C.5) à (C.7b), (C.9) et (C.10), (C.3) se réduit à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\rho_0 H_0 R_0 \ddot{\lambda} = \Delta P \lambda^2 + \frac{2H_0}{R_0} (\Pi_{RR} - \Pi_{\Theta\Theta}) \quad (\text{C.11})$$

La différence des contraintes, $\Pi_{RR} - \Pi_{\Theta\Theta}$, sera déterminée par la loi de comportement liant les contraintes (ici, lagrangiennes) et les déformations (ici, les extensions principales).

C. 2.2 Loi de comportement

C. 2.2.1 Cas hyperélastique : modèle de Mooney

On considère tout d'abord un matériau hyperélastique de type Mooney [MOO 40]. La fonction énergie de déformation est donnée par :

$$W = C [(I_1 - 3) + \alpha (I_2 - 3)] \quad (\text{C.12})$$

où C et α sont les constantes matérielles et I_1 et I_2 les deux premiers invariants du tenseur des dilatations de Cauchy.

Compte tenu des travaux effectués sur les modèles de comportement dans ce rapport, nous nous contentons ici de fournir l'expression de la différence des contraintes :

$$\Pi_{RR} - \Pi_{\Theta\Theta} = -2C \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{C.13})$$

L'équation différentielle (C.11) devient alors :

$$\rho_0 H_0 R_0 \ddot{\lambda} = \Delta P \lambda^2 + \frac{4CH_0}{R_0} \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{C.14})$$

Pour simplifier la discussion concernant l'influence des différents paramètres de (C.14), on définit les variables réduites de temps et de pression suivantes :

$$\tau = t \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{C}{\rho_0}} \quad (\text{C.15a})$$

$$\Delta p = \Delta P \frac{R_0}{4CH_0} \quad (\text{C.15b})$$

L'équation (C.14) s'écrit alors sous forme adimensionnelle :

$$\ddot{\lambda} = \Delta p \lambda^2 + \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{C.16})$$

dans laquelle λ est une fonction du temps réduit τ .

C. 2.2.2 Cas viscoélastique : modèle de Christensen

Dans un second temps, on considère un matériau viscoélastique non-linéaire dont le comportement est régi par le modèle de Christensen [CHR 80]. La relation contrainte - déformation liant les contraintes principales du premier tenseur de Piola-Khirschhoff aux extension principales est :

$$\Pi_i(t) = -p + \lambda_i(t) \left[g_0 + \frac{1}{2} \int_0^t g_1(t-u) \frac{d\lambda_i(u)^2}{du} du \right] \quad i = 1, 3 \quad (\text{C.17})$$

où g_0 et $g_1(u)$ sont les paramètres matériels, respectivement coefficient élastique et fonction de relaxation.

La différence des contraintes intervenant dans (C.11) est alors :

$$\begin{aligned} \Pi_{RR}(t) - \Pi_{\theta\theta}(t) = & g_0 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + \frac{\lambda(t)}{2} \int_0^t g_1(t-u) \frac{d\lambda_i(u)^2}{du} du \\ & - \frac{1}{2\lambda(t)^5} \int_0^t g_1(t-u) \frac{d\lambda_i(u)^{-4}}{du} du \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

En définissant les variables réduites suivante pour le temps et l'échelon de pression :

$$\tau = t \frac{\sqrt{2}}{R_0} \sqrt{\frac{g_0}{\rho_0}} \quad (\text{C.19a})$$

$$\Delta p = \Delta P \frac{R_0}{2g_0 h_0} \quad (\text{C.19b})$$

ainsi que la fonction de relaxation réduite $\alpha(u)$:

$$\alpha(u) = \frac{g_1(u)}{g_0} \quad (\text{C.20})$$

l'équation différentielle réduite du mouvement de la membrane s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}(\tau) = \Delta p \lambda^2(\tau) + \left[\frac{1}{\lambda^5(\tau)} - \lambda(\tau) \right] & - \frac{\lambda(\tau)}{2} \int_0^\tau \alpha(\tau - u) \frac{d\lambda(u)^2}{du} du \\ & + \frac{1}{2\lambda^5(\tau)} \int_0^\tau \alpha(\tau - u) \frac{d\lambda(u)^{-4}}{du} du \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Dans l'équation précédente, la fonction de relaxation $\alpha(u)$ est explicitée sous la forme $\alpha e^{-u/\tau_R}$ et les intégrales sont approchées par la méthode de Feng (méthode que l'on explicitera pas ici, mais qui est fournie dans le chapitre III). Cette formule de récurrence permet, après discrétisation du temps, d'obtenir l'équation différentielle au temps τ_n en fonction des seules grandeurs relatives à ce temps, au temps précédent τ_{n-1} et du pas de temps $\Delta\tau$:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}(\tau_n) = \Delta p \lambda^2(\tau_n) + \left(\frac{1}{\lambda^5(\tau_n)} - \lambda(\tau_n) \right) & - \frac{\lambda(\tau_n)}{2} \left[e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_R}} I_{1_{n-1}} + \alpha e^{-\frac{\Delta\tau}{2\tau_R}} (\lambda(\tau_n)^2 - \lambda(\tau_{n-1})^2) \right] \\ + \frac{1}{2\lambda^5(\tau_n)} \left[e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_R}} I_{2_{n-1}} + \alpha e^{-\frac{\Delta\tau}{2\tau_R}} \left(\frac{1}{\lambda(\tau_n)^4} - \frac{1}{\lambda(\tau_{n-1})^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

où $I_{1_{n-1}}$ et $I_{2_{n-1}}$ sont des intégrales visqueuses calculées au temps précédent τ_{n-1} et définies par :

$$I_{1_{n-1}} = \int_0^{\tau_{n-1}} \alpha(\tau_{n-1} - u) \frac{d\lambda(u)^2}{du} du \quad (\text{C.23a})$$

$$I_{2_{n-1}} = \int_0^{\tau_{n-1}} \alpha(\tau_{n-1} - u) \frac{d\lambda(u)^{-4}}{du} du \quad (\text{C.23b})$$

Remarque : *il faut noter que dans cette étude le paramètre α ne joue pas le même rôle que pour le modèle de Mooney. En effet, ici le réel α représente le rapport entre la composante visqueuse et la composante élastique et non plus le rapport entre deux grandeurs élastiques.*

C. 3 Résultats et discussion

Dans cette partie, nous analyserons successivement trois problèmes de soufflage. Tout d'abord, nous étudierons le soufflage d'une membrane hyperélastique par un échelon de pression constant. Puis on s'intéressera au soufflage de la même membrane par un débit de fluide

constant. Et enfin nous traiterons le cas d'une membrane sphérique viscoélastique non-linéaire soumise à un échelon de pression constant.

Le premier cas étudié sera examiné dans le détail, ce qui permettra de retrouver les résultats statiques [BEA 87] et de mettre en évidence l'influence des différents paramètres sur le comportement de la membrane. Les deux autres cas seront traités beaucoup plus succinctement : compte tenu du nombre de paramètres et de la complexité des équations, nous ne fournirons que quelques résultats pour la compréhension des phénomènes.

C. 3.1 Soufflage d'une membrane hyperélastique par un échelon de pression constant

Le soufflage dynamique est donc étudié en résolvant l'équation (C.16) pour un échelon de pression constant. Dans un premier temps, nous étudierons l'équation statique associée. Les résultats obtenus seront utilisés par la suite lors de l'analyse dynamique.

C. 3.1.1 Étude statique

Dans l'équation (C.16), le terme d'accélération est fixé à zéro et la pression devient une fonction explicite du paramètre matériel α et de l'extension principale circonférentielle λ :

$$\Delta p = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) (1 + \alpha \lambda^2) \quad (\text{C.24})$$

Les courbes Δp en fonction de λ sont présentées sur la figure C.2 pour trois valeurs différentes de α : 0 ; 0,1 et 0,25. Ces trois courbes sont représentatives des trois comportements possibles [BEA 87].

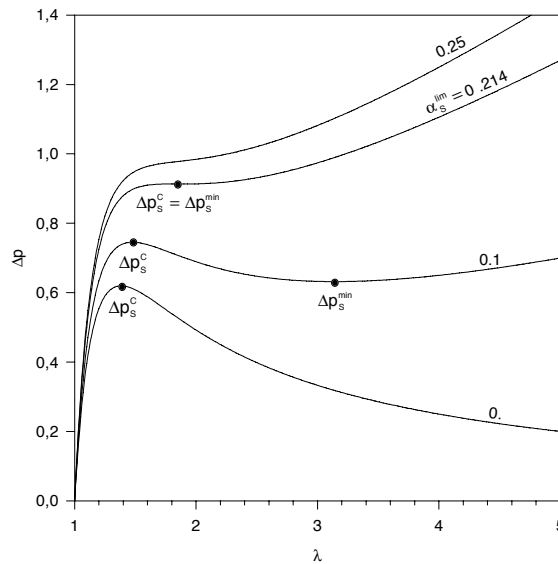


Figure C.2 : Soufflage statique : pas de pression normalisé en fonction de l'extension principale circonférentielle pour différentes valeurs de α

La courbe $\alpha = 0$ représente le comportement d'une membrane néo-hookéenne. La pression maximale que la membrane peut supporter pour le soufflage statique est appelée pression statique critique et est notée Δp_S^C . Pour $0 < \Delta p < \Delta p_S^C$, l'équation (C.24) a deux racines distinctes,

l'une dans la partie stable de la courbe (pour $\lambda < \lambda_S^C$, où λ_S^C correspond à Δp_S^C) et l'autre dans la partie instable ($\lambda > \lambda_S^C$). Pour $\Delta p > \Delta p_S^C$, il n'y a pas de solution réelle à (C.24) : la membrane ne peut pas supporter de telles pressions. Pour $\Delta p = \Delta p_S^C$, la racine est double et pour $\Delta p = 0$, il y a deux racines réelles distinctes en 0 et $+\infty$.

La courbe $\alpha = 0,1$ représente le cas pour lequel la courbe de soufflage a deux parties stables et une partie instable. Dans ce cas, $0 < \alpha < \alpha_S^{\text{lim}}$, avec $\alpha_S^{\text{lim}} \simeq 0,214$. La courbe Δp en fonction de λ a deux extrema locaux : un maximum pour $\Delta p = \Delta p_S^C$ (ce n'est pas une valeur critique, car la membrane peut supporter des pressions plus grandes) en $\lambda = \lambda_S^C$ et un minimum pour $\Delta p = \Delta p_S^{\text{min}}$ en $\lambda = \lambda_S^{\text{min}}$. Sur la figure C.2, on voit que pour $0 < \Delta p < \Delta p_S^{\text{min}}$, l'équation (C.24) a une seule racine réelle, sur la première branche stable de la courbe. Pour $\Delta p_S^{\text{min}} < \Delta p < \Delta p_S^C$, cette équation a trois racines réelles : une sur la première branche stable, la deuxième sur la branche instable et la dernière sur la seconde branche stable de la courbe. Pour des pressions plus grandes ($\Delta p > \Delta p_S^C$), l'équation (C.24) a une racine réelle unique, située sur la seconde branche stable de la courbe. Il faut noter que pour les cas particuliers, $\Delta p = \Delta p_S^{\text{min}}$ et $\Delta p = \Delta p_S^C$, il y a deux racines réelles.

Sur la figure C.2, la courbe $\alpha = 0,25$ représente tous les cas pour lesquels $\alpha > \alpha_S^{\text{lim}}$. Toutes les courbes de ce type sont monotones croissantes, la fonction (C.24) est une bijection : à toutes les pressions de soufflage correspond une unique racine.

C. 3.1.2 Soufflage dynamique

L'équation (C.16) est réécrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = v \\ \dot{v} = \Delta p \lambda^2 + \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda\right) (1 + \alpha \lambda^2) \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \lambda(\tau = 0) = \lambda_{\text{init}} \\ v(\tau = 0) = v_{\text{init}} \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

où λ_{init} et v_{init} seront fournis lorsque des exemples spécifiques seront traités.

Avec ces conditions initiales, le problème (C.25) est bien posé et a une solution unique. Il est résolu par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 ou 6 (sous-programme IVPRK de la librairie mathématique IMSL [IMS 87]).

Comme Δp est constant, v peut être écrit comme une fonction explicite de λ en multipliant la seconde équation de (C.16) par $v d\tau$ et en l'intégrant de $\tau = 0$ à un temps arbitraire τ . Ceci fournit l'équation de conservation de l'énergie pour le soufflage d'une membrane sphérique [DYM 74] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_{\text{init}}^2 &= \Delta p \left(\frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda_{\text{init}}^3}{3} \right) - \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4\lambda^4} + \alpha \left(\frac{\lambda^4}{4} + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \right] \\ &+ \left[\frac{\lambda_{\text{init}}^2}{2} + \frac{1}{4\lambda_{\text{init}}^4} + \alpha \left(\frac{\lambda_{\text{init}}^4}{4} + \frac{1}{2\lambda_{\text{init}}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Dans l'équation précédente, le membre de gauche est la variation d'énergie cinétique, le premier terme du membre de droite est le travail fourni par la pression de soufflage et les derniers termes représentent l'énergie élastique de déformation. Cette équation nous permet alors d'obtenir directement les courbes du plan de phase, v en fonction de λ . Nous allons maintenant examiner la stabilité linéaire de ces courbes.

Analyse de la stabilité linéaire

On suppose que α et Δp sont fixés, les états d'équilibre sont les points qui satisfont $\dot{\lambda} = 0$ et $\dot{v} = 0$ dans le système (C.25). Ces points sont les couples (λ_e, v_e) des courbes de phase où λ_e satisfait l'équation (C.24) et $v_e = 0$. Le nombre de tels points dépend des valeurs de α et Δp et a été étudié dans le détail dans le paragraphe C. 3.1.1.

Pour examiner la stabilité de chaque état d'équilibre, nous devons étudier l'équation linéarisée autour de cet état. Cette équation peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = [J]_{\lambda=\lambda_e, v=0} \begin{Bmatrix} \lambda \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne du système (C.25) au point d'équilibre $(\lambda_e, 0)$ dans le diagramme de phase et est donnée par :

$$[J]_{\lambda=\lambda_e, v=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

avec :

$$\Omega = 2\Delta p \lambda_e - \left(\frac{5}{\lambda_e^6} + 1 \right) - \alpha \left(\frac{3}{\lambda_e^4} + 3\lambda_e^2 \right) \quad (\text{C.30})$$

L'équation caractéristique de l'équation matricielle (C.28) est :

$$\det([J] - \omega[I]) = 0 \quad (\text{C.31})$$

qui, en utilisant (C.29), se réduit à :

$$\omega^2 - \Omega = 0 \quad (\text{C.32})$$

Soient ω_1 et ω_2 les deux racines de l'équation précédente (C.32), les formes approchées de λ et v au voisinage de $(\lambda_e, 0)$ peuvent être écrites :

$$\lambda(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \quad \text{et} \quad v(t) = C_3 e^{\omega_1 t} + C_4 e^{\omega_2 t} \quad (\text{C.33})$$

dans laquelle C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes déterminées à l'aide des conditions initiales. Les deux racines, ω_1 et ω_2 , dépendent du signe de Ω :

- si $\Omega > 0$, les deux racines sont réelles et de signes opposés, $\omega_1 = -\sqrt{\Omega}$ et $\omega_2 = \sqrt{\Omega}$;
- si $\Omega < 0$, les deux racines sont imaginaires pures, $\omega_1 = -i\sqrt{-\Omega}$ et $\omega_2 = i\sqrt{-\Omega}$;
- si $\Omega = 0$, zéro est racine double, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

La figure C.3 montre la fonction Ω (et, plus important, le signe de Ω) en fonction de l'échelon de pression Δp pour les trois valeurs de α considérées dans le cas statique. De par l'équation (C.33), il est évident que si $\Omega > 0$, le point d'équilibre $(\lambda = \lambda_e, v = 0)$ est instable et est un point selle ; si $\Omega < 0$, $\lambda(t)$ et $v(t)$ sont périodiques au voisinage de $(\lambda = \lambda_e, v = 0)$, qui est alors un vortex.

La figure C.3 montre que le nombre et la stabilité des branches dépend de α et Δp . En notant :

$$\left. \frac{d\Delta p}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_e} = -\frac{\Omega}{\lambda_e^2} \quad (\text{C.34})$$

on voit clairement que si $\Omega < 0$, la (les) branche(s) ascendante(s) des courbes statiques de la figure C.2 est (sont) stable(s). Si $\Omega > 0$, la branche descendante des courbes statiques

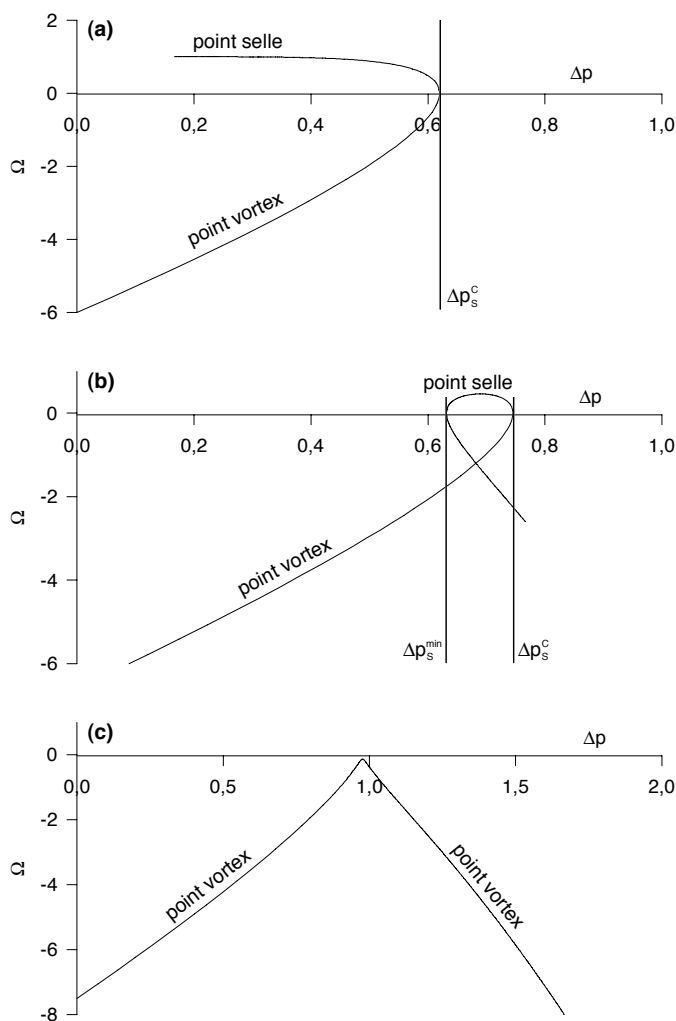


Figure C.3 : Ω en fonction de Δp pour trois valeurs de α : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0, 1$, (c) $\alpha = 0, 25$

est instable, ce qui confirme les précédentes études de stabilité [ALE 71b]. La figure montre aussi l'intervalle d'existence des branches stables et instables avec les points limites de pression correspondant aux extrema des courbes statiques.

L'analyse de stabilité linéaire est limitée aux voisinages des points d'équilibre. Avant d'analyser le comportement dynamique non-linéaire, on se doit d'analyser les courbes de phase pour les trois valeurs du paramètre α . Ces diagrammes sont tracés sur la figure C.4.

Pour $\alpha = 0$, si $0 < \Delta p < \Delta p_s^c$, il y a deux points d'équilibre : un vortex $(\lambda_v, 0)$ et un point selle $(\lambda_s, 0)$ avec $\lambda_v < \lambda_s$ (Fig. C.3(a)). Les trajectoires correspondantes (λ, v) sont présentées sur la figure C.4(a). Il y a des courbes fermées autour du vortex et ces courbes deviennent des branches ouvertes au voisinage du point selle. Selon les conditions initiales, $(\lambda_{init}, v_{init})$, la solution peut osciller autour du vortex ou peut croître exponentiellement à partir du point selle. La figure C.4(b) montre les trajectoires correspondant à $\Delta p > \Delta p_s^c$. Quelles que soient les conditions initiales, la solution ne converge pas autour d'un point fixe.

Les courbes de phase relatives au cas où il y a trois points fixes sont présentées sur la figure C.4(c) pour $\alpha = 0, 1$ et $\Delta p_s^{\min} < \Delta p < \Delta p_s^c$. Dans ce cas, il y a deux points vortex $(\lambda_{v1}, 0)$ et $(\lambda_{v2}, 0)$ et un point selle $(\lambda_s, 0)$ avec $\lambda_{v1} < \lambda_s < \lambda_{v2}$ (figure C.3(b)). Suivant les

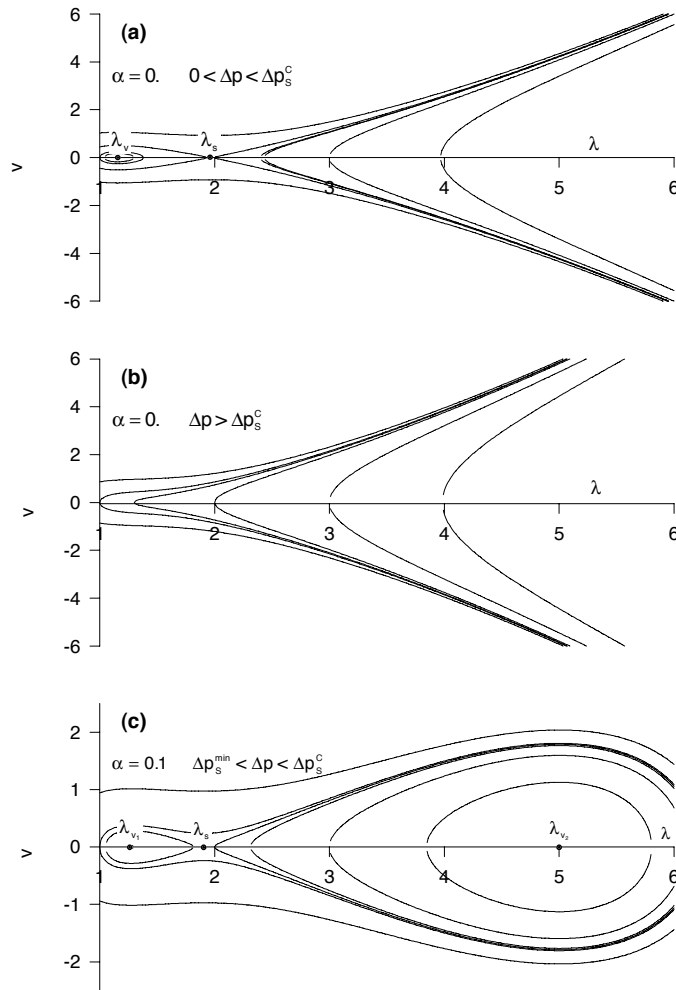


Figure C.4 : Courbes de phase (λ, v) pour trois intervalles de valeurs de α et Δp et pour les conditions initiales générales $(\lambda_{init}, v_{init})$

conditions initiales, les trajectoires peuvent être : soit deux courbes fermées, chacune autour d'un des vortex, soit une seule courbe fermée englobant les trois points fixes. Dans le premier cas, la solution oscille autour de l'un ou l'autre des vortex. Dans le second, la solution est aussi périodique mais oscille autour des deux vortex sur une période de temps : la trajectoire tourne autour d'un vortex puis entre dans le voisinage du point selle et continue autour de l'autre vortex. Pour $\Delta p \in [0, \Delta p_s^{\min}[\cup]\Delta p_s^C, +\infty[$, il n'y a qu'un point fixe (vortex). Les trajectoires (non tracées sur les figures) sont alors fermées et centrées en ce point quelles que soient les conditions initiales.

Il faut noter que pour $\alpha = 0, 25$ et pour toute valeur de Δp , il n'y a qu'un point fixe (vortex).

Comportement non-linéaire

Dans le paragraphe précédent, nous avons examiné les courbes de phase pour des conditions initiales quelconques. Le nombre de points fixes a été déterminé et leur stabilité étudiée en fonction des paramètres de contrôle α et Δp . On considère maintenant le cas physique d'une

membrane initialement en équilibre, c'est-à-dire avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_{init} = 1 \\ v_{init} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

Avec les conditions initiales (C.35), l'équation de conservation de l'énergie se réduit à :

$$\frac{1}{2}v^2 = \Delta p \left(\frac{\lambda^3 - 1}{3} \right) - \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4\lambda^4} + \alpha \left(\frac{\lambda^4}{4} + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \right] + \frac{3}{4}(1 + \alpha) \quad (\text{C.36})$$

Nous étudions tout d'abord les conditions pour lesquelles la réponse est périodique, ce qui correspond à une courbe de phase fermée. En notant que le point initial, $(1, 0)$, est un point d'intersection entre l'axe $v = 0$ et la trajectoire, alors la trajectoire doit couper l'axe $v = 0$ au moins une autre fois pour être une courbe fermée. Si v est mis à zéro dans l'équation (C.36), la relation entre Δp et λ devient :

$$\Delta p = \begin{cases} \left(\frac{3}{\lambda^3 - 1} \right) \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4\lambda^4} + \alpha \left(\frac{\lambda^4}{4} + \frac{1}{2\lambda^2} \right) - \frac{3}{4}(1 + \alpha) \right] & (\lambda \neq 1) \\ 0 & (\lambda = 1) \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

Les courbes $(\lambda, \Delta p)$ correspondant à (C.37) sont présentées sur la figure C.5 avec les courbes statiques relatives à l'équation (C.24), et ce pour différentes valeurs de α . Sur cette figure, les courbes en trait plein correspondent aux lieux des solutions où la vitesse est nulle ($v = 0$) et l'accélération non-nulle ($\dot{v} \neq 0$), alors que les courbes (statiques) en pointillés correspondent aux lieux où, à la fois, $v = 0$ et $\dot{v} = 0$. Il est clair d'après cette figure que l'allure générale des courbes $(\Delta p, \lambda)$ est la même dans les cas statique et dynamique. Il apparaît une valeur du paramètre matériel, $\alpha_D^{\text{lim}} \simeq 0,145$ (similaire à α_S^{lim}), au delà de laquelle Δp augmente de façon monotone avec λ . La courbe $\alpha = 0$ a un maximum correspondant à une valeur critique de la pression, Δp_D^C . Pour $0 < \alpha < \alpha_D^{\text{lim}}$, il y a trois branches, un maximum local, Δp_D^C , et un minimum local, Δp_D^{min} , comme dans le cas statique. Il faut noter que les valeurs critiques des paramètres dépendent fortement des conditions initiales.

Il est maintenant intéressant d'examiner l'interdépendance entre le comportement dynamique et les courbes statiques, puisque ces courbes représentent les points d'équilibre autour desquels la solution dynamique peut osciller. Pour cela, on doit séparer quatre intervalles pour les valeurs de α : $\alpha = 0$, $0 < \alpha < \alpha_D^{\text{lim}}$, $\alpha_D^{\text{lim}} < \alpha < \alpha_S^{\text{lim}}$ et $\alpha > \alpha_S^{\text{lim}}$. On rappelle que dans le cas statique, il n'y avait que trois intervalles : $\alpha = 0$, $0 < \alpha < \alpha_S^{\text{lim}}$ et $\alpha > \alpha_S^{\text{lim}}$.

Nous nous sommes particulièrement intéressé aux conditions pour lesquelles un mouvement oscillatoire apparaît ; nous devons donc déterminer la position du premier point d'intersection λ_i ($\lambda_i > 1$), entre une courbe dynamique et la ligne horizontale représentant la valeur de la pression. Il faut noter que cette même ligne horizontale coupe la courbe statique (correspondant au même α) en λ_e (il peut y avoir plus d'un point d'équilibre). La solution oscillera alors entre $\lambda = 1$ et λ_i autour de λ_e . Les figures C.6 à C.9 fournissent le comportement dynamique pour quatre valeurs de α : $\alpha = 0$; $0,1$; $0,18$ et $0,25$, respectivement. Chaque figure montre (a) les courbes dynamique et statique de pression avec les points d'intersection λ_i et λ_e pour différents intervalles de valeurs de la pression, (b) les courbes de phase correspondantes et (c) λ en fonction du temps.

1. Quatre intervalles intéressants de valeur de Δp sont montrés sur la figure C.6.

- Pour $0 < \Delta p < \Delta p_D^C$, il y a deux points d'intersection λ_{i_1} et λ_{i_2} ($\lambda_{i_1} < \lambda_{i_2}$) entre la courbe dynamique et la ligne horizontale, et deux points d'intersection (équilibre) λ_{e_1}

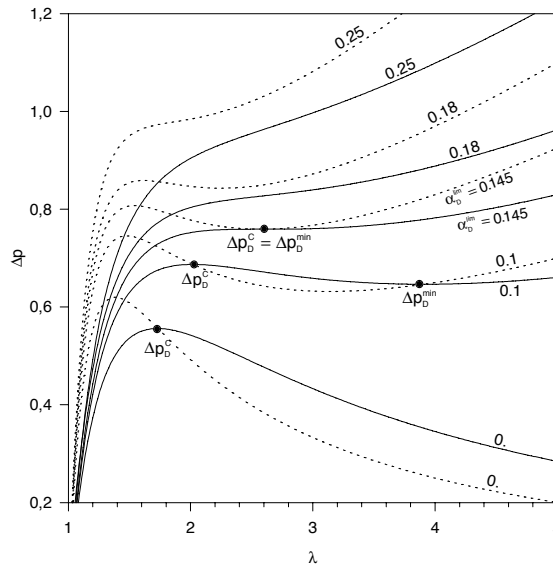


Figure C.5 : Δp en fonction de λ pour les soufflages (\cdots) statique et ($—$) dynamique (la valeur de α correspondante est indiquée sur chaque courbe)

et λ_{e_2} ($\lambda_{e_1} < \lambda_{e_2}$) pour la courbe statique. Seule la courbe fermée passant par $\lambda = 1$ et λ_{i_1} est tracée sur la figure C.6(b). Dans ce cas, la membrane oscille entre l'état non-contraint (initial) et λ_{i_1} autour de l'équilibre stable (vortex) λ_{i_1} (figure C.6(c)).

- Pour le cas particulier $\Delta p = \Delta p_D^C$, il n'y a qu'un point d'intersection λ_i et toujours deux points d'intersection λ_{e_1} et λ_{e_2} . Il s'agit du cas limite où les deux racines de (C.37) sont égales à λ_i . Il faut aussi noter que λ_i est égal à λ_{e_2} , ce dernier étant un point selle. Dans ce cas, la membrane n'oscille pas et ne grossit plus : elle tend asymptotiquement vers le point d'équilibre statique instable, ce qui correspond à une oscillation de période infinie (figure C.6(b) et (c)).
- Pour $\Delta p_D^C < \Delta p < \Delta p_S^C$, la courbe de phase est réduite à une courbe ouverte (figure C.6(b)). La membrane se gonfle indéfiniment (figure C.6(c)), mais, à cause du point selle, la courbe présente un minimum local au voisinage de celui-ci (figure C.6(b)).
- Pour $\Delta p \geq \Delta p_S^C$, il n'y a aucun point d'intersection et les courbes de phase augmente monotoniquement avec λ .

2. On considère maintenant le cas où $\alpha = 0, 1$. Les comportements dynamiques correspondants aux intervalles de valeurs intéressants de Δp sont présentés sur la figure C.7. Toutes les trajectoires sont des courbes fermées mais des comportements différents de gonflement apparaissent suivant le nombre de points d'équilibre pour la valeur donnée de Δp . On voit, sur la figure C.7(a), que les extrema de la courbe de pression dynamique appartiennent aussi à la courbe statique.

- Pour $0 < \Delta p < \Delta p_D^C$, il peut y avoir un, deux ou trois points d'intersection λ_i entre la courbe dynamique et la ligne horizontale, de même pour les points d'équilibre (λ_e). Dans tous les cas, la membrane oscille entre l'état non-contraint et le premier point d'intersection (plus petit des λ_i) autour du premier vortex (plus petit λ_e) (figure C.7(b) et (c)).

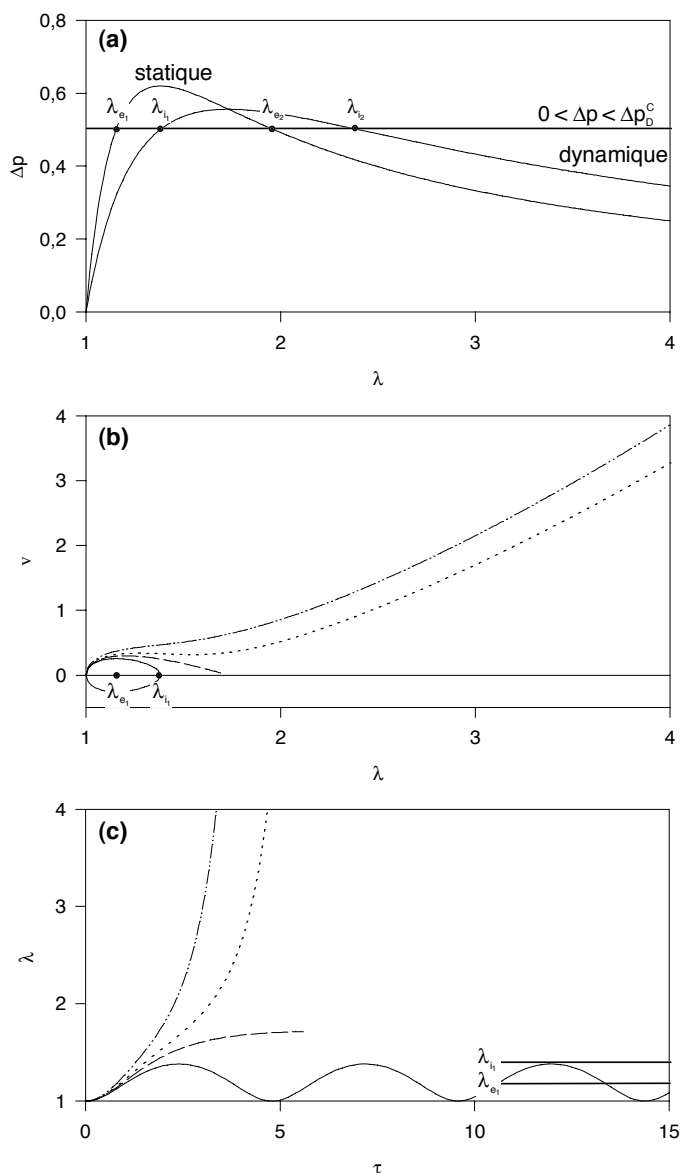


Figure C.6 : $\alpha = 0$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ

- Pour le cas particulier $\Delta p = \Delta p_D^C$, la courbe dynamique intersecte la courbe statique sur sa branche instable (figure C.7(a)), comme pour $\alpha = 0$. La membrane tend asymptotiquement vers le point selle (figure C.7(b) et (c)).
- Pour $\Delta p_D^C < \Delta p < \Delta p_S^C$, c'est-à-dire dans le cas où la pression de soufflage se situe entre les deux maxima, il n'y a qu'un point d'intersection loin de l'origine (intersection avec la troisième branche) et trois points d'équilibre (sur la courbe statique). La courbe de phase correspondante est fermée et englobe les trois points d'équilibre (figure C.7(b)). La membrane oscille autour de ces trois points en passant d'un vortex à l'autre sous l'influence du point selle : la trajectoire présente une incurvation au voisinage du point selle. Dans ce cas là, les oscillations perdent leur régularité (linéarité)

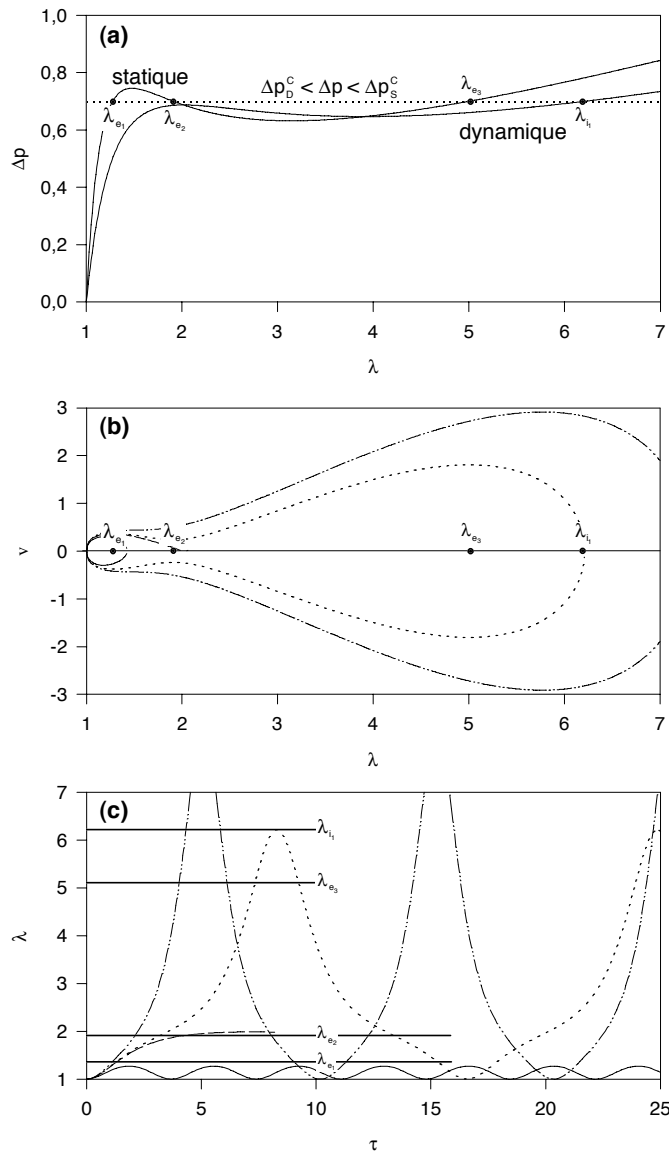


Figure C.7 : $\alpha = 0,1$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ

et deviennent dissymétriques. Cette perte de la linéarité n'est pas autant due à la grande amplitude du mouvement qu'à la présence du point selle (figure C.7(c)).

- Quand $\Delta p > \Delta p_S^C$, il n'y a qu'un point d'intersection avec la courbe dynamique, comme précédemment, mais aussi un seul point d'intersection (point d'équilibre : vortex) avec la courbe statique. La membrane oscille autour de ce vortex et la courbe de phase ne présente aucune incurvation (figure C.7(b)). Dans ce cas, la non-linéarité des oscillations est due seulement à la grande amplitude du mouvement (figure C.7(c)).

3. On considère maintenant le cas où $\alpha_D^{\lim} < \alpha < \alpha_S^{\lim}$, par exemple avec $\alpha = 0,18$. La figure C.8 montre le comportement pour seulement trois intervalles de valeur de Δp . La courbe dynamique est toujours monotone croissante (figure C.8(a)). La courbe de phase

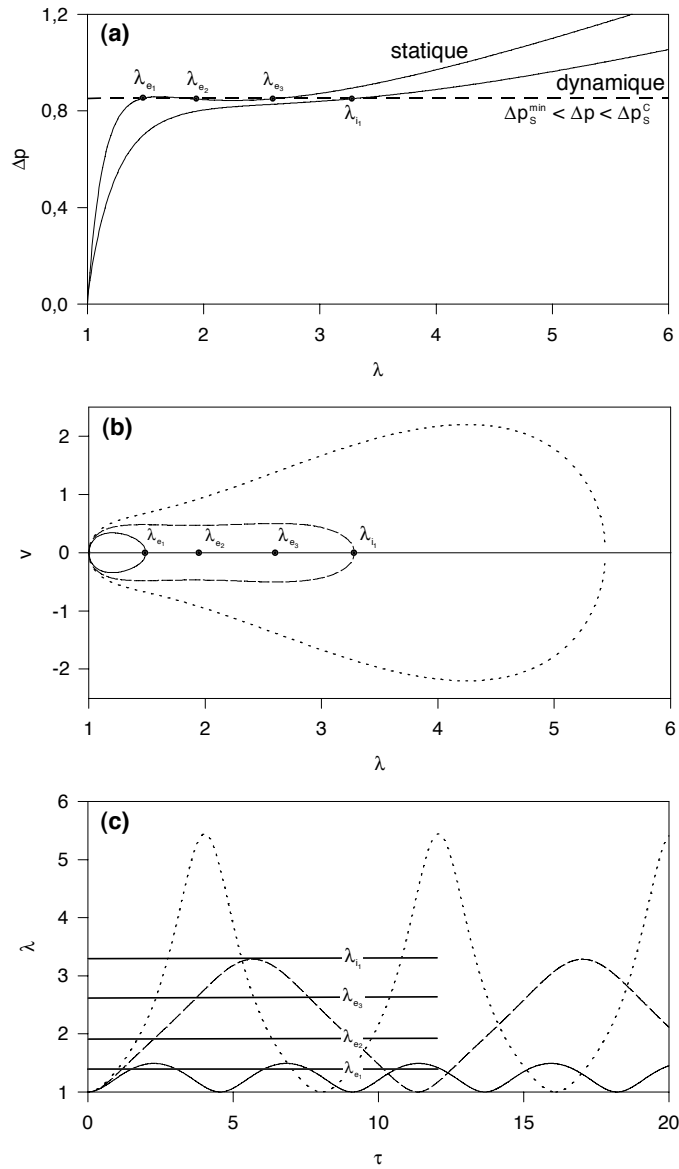


Figure C.8 : $\alpha = 0,18$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ

est toujours fermée, mais sa forme dépend de la valeur de Δp par rapport à la valeur critique statique.

- Pour $\Delta p < \Delta p_S^{\min}$, il n'y a qu'un point d'équilibre sur la première branche de la courbe statique et la membrane oscille autour de ce point.
- Pour $\Delta p_S^{\min} < \Delta p < \Delta p_S^C$, il y a trois points d'équilibre et la membrane oscille autour des deux vortex comme le montre les figures C.8(b) et (c). Il faut noter que, l'amplitude du mouvement étant faible, l'influence de l'incurvation de la courbe de phase est dans ce cas insignifiante.
- Pour $\Delta p > \Delta p_S^C$, le cas est similaire au cas correspondant pour $\alpha = 0,1$.

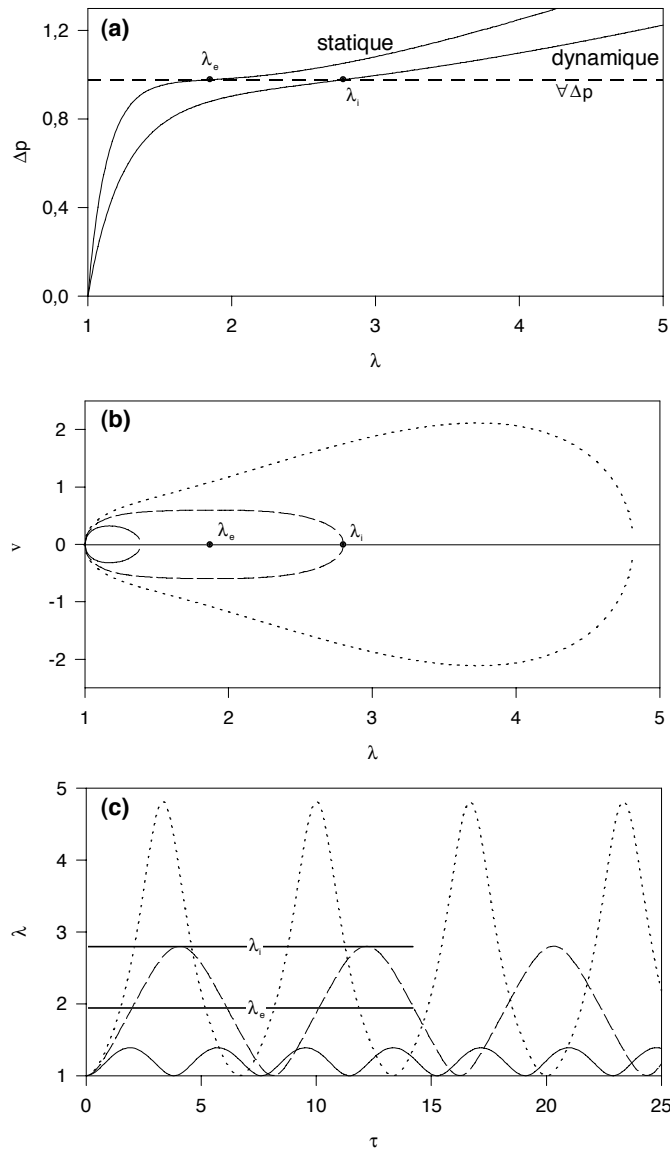


Figure C.9 : $\alpha = 0,25$: (a) Δp fonction de λ pour les soufflages statique et dynamique, (b) courbes de phase correspondant à $\lambda_{init} = 1$ et $v_{init} = 0$, (c) comportement temporel de l'extension circonférentielle λ

- Pour $\alpha = 0,25$, la condition (C.37) est toujours satisfaite pour une seule racine et il n'y a qu'un point d'équilibre statique. La membrane oscille dans tous les cas. Alors, la période du mouvement est toujours finie. La figure C.9 résume ce comportement pour trois valeurs de l'échelon de pression.

Après avoir examiné dans le détail les conditions sur le paramètre matériel α et l'échelon de pression Δp pour lesquelles la membrane oscille, nous devons maintenant étudier l'influence de ces deux paramètres sur la période du mouvement. Nous avons précédemment montré que, dans la plupart des cas, la membrane oscille et que l'amplitude du mouvement dépend de la valeur de la pression (pour α donné). Les figures C.6 à C.9(c) montrent que la période des oscillations dépend, elle aussi, très fortement de l'échelon de pression. La figure C.10 montre

les courbes liant la période réduite T à l'échelon de pression Δp pour les quatre valeurs de α considérées précédemment. Le seul cas où le mouvement de la membrane devient instable est

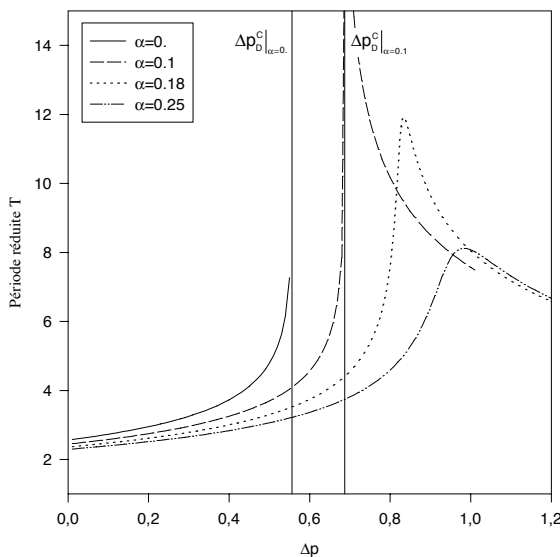


Figure C.10 : Influence de l'échelon de pression sur la période du mouvement pour différentes valeurs de α

$\alpha = 0$ (matériau néo-hookéen) et $\Delta p > \Delta p_D^C$. Pour $\alpha = 0$ et $\Delta p = \Delta p_D^C$, et $\alpha = 0,1$ (représentant le cas $0 < \alpha < \alpha_S^{\text{lim}}$) et $\Delta p = \Delta p_D^C$, la membrane tend vers un équilibre instable et la période tend vers l'infini. Après ce point, pour $\alpha = 0,1$ et $\Delta p > \Delta p_D^C$, la membrane oscille à nouveau et la période du mouvement décroît de façon monotone. Dans toutes les autres situations, la membrane oscille. Cependant, compte tenu de la complexité du système différentiel, on ne peut conclure que la période du mouvement augmente lorsque l'échelon de pression augmente (figure C.6 à C.9(c)) : pour $\alpha = 0,25$ (en fait $\alpha > \alpha_D^{\text{lim}}$), le mouvement est toujours stable mais la courbe de la période en fonction de l'échelon de pression n'est pas monotone croissante. Cette courbe admet un maximum qui correspond au point angulaire de la courbe Ω en fonction de Δp sur la figure C.3(c). Pour $\alpha = 0,18$, les résultats sont les mêmes car α est, là aussi, supérieur à α_D^{lim} . Ces constatations diffèrent de celles d'Akkas [AKK 78] qui affirme que, pour $\alpha > \alpha_D^{\text{lim}}$, lorsque Δp augmente, la période des oscillations augmente. Cette différence semble provenir de son hypothèse d'épaisseur constante tout au long du soufflage.

C. 3.2 Soufflage d'une membrane hyperélastique soumise à un débit de fluide constant

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié le comportement d'une membrane sphérique soumise à un échelon de pression. Ce cas est en fait très peu physique : il suppose que la membrane est reliée à un réservoir de dimension infinie. Comme nous l'avons montré dans la partie expérimentale de ce rapport (chapitre III), l'évolution de la pression est étroitement liée à l'évolution de la déformation et, peut difficilement être imposée constante dans la réalité. C'est la raison pour laquelle nous traitons maintenant le problème de la membrane sphérique hyperélastique soumise cette fois à l'introduction d'un débit constant de fluide.

Pour cela, nous reprenons l'équation différentielle du mouvement (C.16) dans laquelle la pression du fluide à l'intérieur de la sphère n'est plus imposée constante mais est reliée au

volume de celle-ci par la loi des gaz parfaits. En effet, en supposant que le fluide injecté vérifie cette loi, on peut relier la pression au volume par la relation :

$$pV = nRT \quad (\text{C.38})$$

où n est le nombre de moles de fluide à l'intérieur de la bulle, R la constante universelle des gaz parfaits et T la température.

En notant que initialement on avait :

$$p_0V_0 = n_0RT \quad (\text{C.39})$$

où n_0 est le nombre de moles contenues initialement dans la membrane, et que $p = p_0 + \Delta p$, l'échelon de pression est relié à l'extension principale λ et au nombre de moles n par :

$$\Delta p = p_0 \left(\frac{1}{\lambda^3} \frac{n}{n_0} - 1 \right) \quad (\text{C.40})$$

En supposant que l'alimentation en gaz se fasse de façon linéaire, c'est-à-dire que $n = n_0(1 + q\tau)$, l'équation différentielle (C.16) devient :

$$\ddot{\lambda} = p_0 \left[\frac{1}{\lambda} (1 + q\tau) - \lambda^2 \right] + \left(\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) (1 + \alpha\lambda^2) \quad (\text{C.41})$$

Le paramètre τ intervient maintenant explicitement dans le second membre de cette équation différentielle ce qui rend difficile une analyse détaillée comme dans le cas précédent. Nous nous sommes donc contentés d'une étude rapide pour les valeurs du paramètre α mises en évidence dans le paragraphe précédent. Pour cela, la pression initiale p_0 a été fixée à 1 et deux valeurs du débit, $q = 1$ et $q = 4$, ont été considérées. Les valeurs significatives de α utilisées sont 0 ; 0,1 et 0,25.

Les courbes de la figure C.11 illustrent les résultats des différents calculs après élimination du paramètre temps. Ces courbes présentent la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la sphère en fonction de l'accroissement du rayon. Elles sont comparées aux courbes statiques fournies par (C.24).

On voit sur ces courbes que l'ajout de l'équation des gaz parfaits permet l'élimination des instabilités en jouant un rôle de contrôle du système dynamique. Toutes les courbes dynamiques oscillent autour des solutions statiques correspondantes et l'amplitude des oscillations est d'autant plus grand que le débit de gaz est grand.

C. 3.3 Soufflage d'une membrane viscoélastique non-linéaire soumise à un échelon de pression constant

L'équation différentielle (C.22) est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 ou 6. Compte tenu du nombre de paramètres et de la nature des équations, nous n'avons effectué là aussi qu'une étude succincte qualitative permettant de mettre en évidence les phénomènes rencontrés.

Le temps de relaxation τ_R est fixé à 1, celui-ci ne représentant qu'un facteur d'échelle pour la variable temps. Deux comportements différents se dégagent de l'étude des résultats, et ce pour toute valeur de α : un mouvement oscillatoire amorti et un mouvement instable (accroissement du rayon vers l'infini). La nature du mouvement ne dépend que de la valeur de l'échelon de pression, Δp .

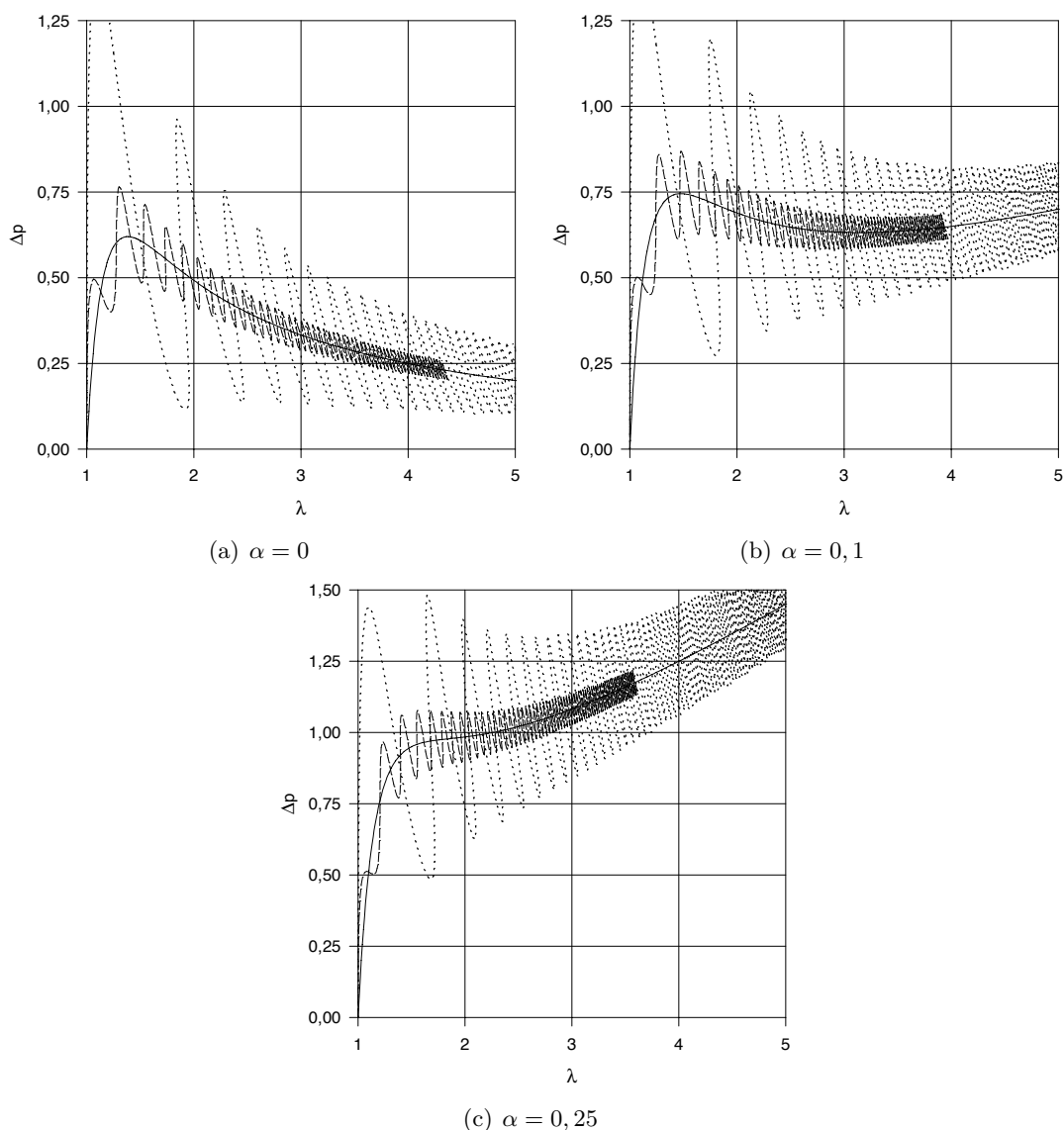
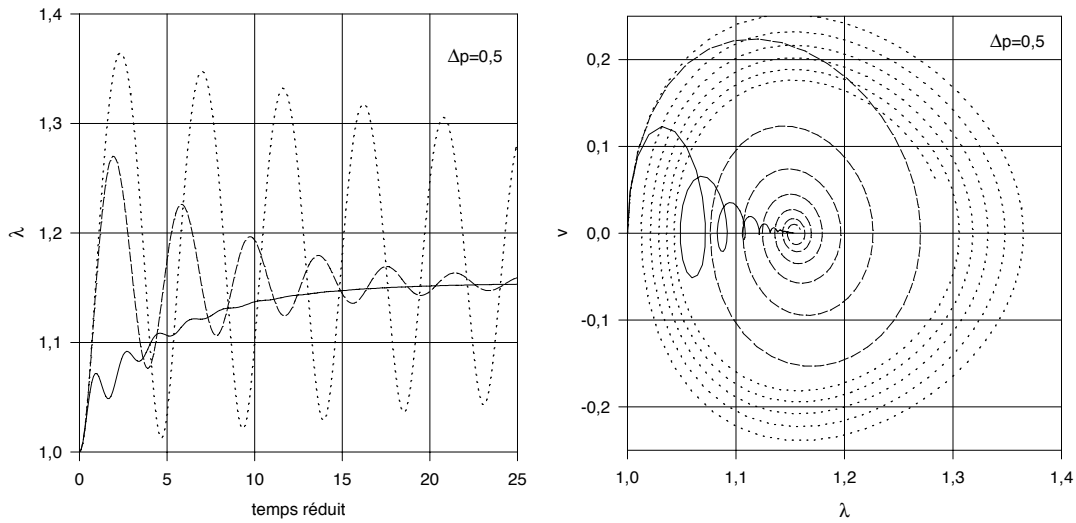


Figure C.11 : Soufflage d'une membrane sphérique hyperélastique sous un débit de gaz constant :
 (\cdots) $q = 4$; $(- - -)$ $q = 1$; $(—)$ statique

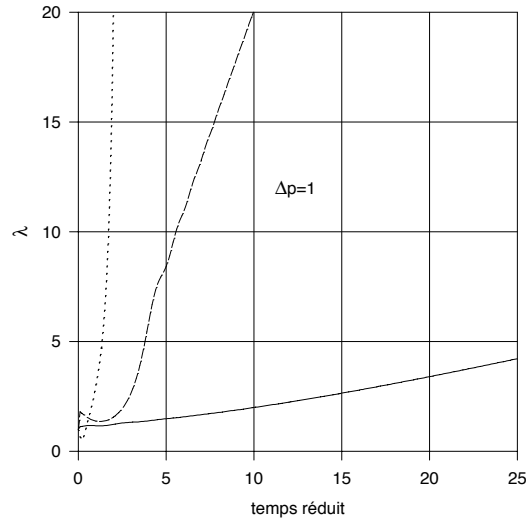
On sait déjà que pour $\alpha = 0$ (cas hyperélastique néo-hookéen) la valeur de la pression pour laquelle le mouvement devient instable est de l'ordre de 0,62. Dans le cas présent viscoélastique, on montre que quelle que soit la valeur de α , rapport entre la composante visqueuse et la composante élastique, les instabilités apparaissent pour cette même valeur de la pression.

Pour illustrer les deux comportements que nous avons mis en évidence, nous avons résolu l'équation différentielle (C.22) pour trois valeurs de α , 0,1 ; 1 ; 10 et pour deux valeurs de l'échelon de pression 0,5 et 1, ces deux valeurs permettant d'obtenir les deux types de comportement : oscillatoire amorti pour $\Delta p = 0,5$ et instable pour $\Delta p = 1$. Les courbes de la figure C.12 présentent ces résultats.

Pour le comportement oscillatoire, on voit que la membrane oscille autour de la solution quasi-statique correspondant au problème de retard (figure C.C.12(a)) et qu'elle converge vers cette solution d'autant plus vite que la composante visqueuse est grande (diagramme des phases



(a) Extension du rayon en fonction du temps : comportement oscillatoire amorti
 (b) Diagramme des phases : comportement oscillatoire amorti



(c) Extension du rayon en fonction du temps : comportement instable

Figure C.12 : Soufflage d'une membrane sphérique de Christensen pour différentes valeurs de α : (\cdots) $\alpha = 0,1$; ($-\ -$) $\alpha = 1$; ($-$) $\alpha = 10$

sur la figure C.C.12(b)).

Dans le cas instable, la composante visqueuse freine l'accroissement du rayon : plus α est grand, plus le rayon tend lentement vers l'infini (figure C.C.12(c)).

Comme l'on s'y attendait, l'ajout de viscosité à la loi de comportement néo-hookéenne permet de freiner les phénomènes déjà mis en évidence lors de la résolution du problème hyperélastique.

Références bibliographiques

- [ADK 52] ADKINS J. E. ET RIVLIN R. S., "Large elastic deformation of isotropic materials. IX. The deformation of thin shells", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. A244, pp. 505-532,

- 1952.
- [AKK 78] AKKAS N., “On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 13, pp. 177–183, 1978.
- [ALE 68] ALEXANDER H., “A constitutive relation for rubber-like materials”, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 6, pp. 549–563, 1968.
- [ALE 71a] ALEXANDER H., “The tensile instability of an inflated cylindrical membrane as affected by an axial load”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, pp. 87–95, 1971.
- [ALE 71b] ALEXANDER H., “The tensile instability of initially spherical balloons”, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 9, pp. 151–162, 1971.
- [BC 94] BEN CHAABANE S., *Contribution à la modélisation de corps creux plastiques*. Thèse de doctorat, UTC, Compiègne, 1994.
- [BC 95] BEN CHAABANE S. ET BATOZ J. L., “Détermination numérique de l'épaisseur initiale de corps creux plastiques obtenus par soufflage”, dans *Actes du 12ème Congrès Français de Mécanique*, Vol. 4, pp. 273–276, 1995.
- [BEA 87] BEATTY M. F., “Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, No. 12, pp. 1699–1734, 1987.
- [BEN 79] BENEDICT R., WINEMAN A., ET YANG W. H., “The determination of limiting pressure in simultaneous elongation and inflation of nonlinear elastic tubes”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 15, pp. 241–249, 1979.
- [BEN 93] BENJEDDOU A., JANKOVICH E., ET HADHRI T., “Determination of the parameters of Ogden's law using biaxial data and Levenberg-Marquardt-Fletcher algorithm”, *J. of Elastomers and Plastics*, Vol. 25, pp. 224–248, 1993.
- [BER 63] BERNSTEIN B., KEARSLEY E. A., ET ZAPAS L. J., “A study of stress relaxation with finite strain”, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 7, pp. 391–410, 1963.
- [BLA 74] BLATZ P. J., SHARDA S. C., ET TSCHOEGL N. W., “Strain energy function for rubberlike materials based on a generalized measure of strain”, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 18, No. 1, pp. 145–161, 1974.
- [BLA 85] BLAEDEL K. L., RADEWAN C. H., ET FENG W. W., “Controlling biaxial strain in an inflated elastomeric membrane”, *Experimental Techniques*, Vol. 5, pp. 29–32, 1985.
- [BLO 78] BLOCH R., CHANG W. V., ET TSCHOEGL N. W., “The behavior of rubberlike materials in moderately large deformations”, *J. Rheol.*, Vol. 22, No. 1, pp. 1–32, 1978.
- [BOL 76] BOLTZMANN L. *Pogg. Ann. Phys. Chem.*, Vol. 7, p. 624, 1876.
- [BOU 95] BOURGIN P., CORMEAU I., ET SAINT-MARTIN T., “A first step towards the modelling of the thermoforming of plastic sheets”, *J. Mat. Processing Tech.*, Vol. 54, pp. 1–11, 1995.

- [BOY 77] BOYER R. F. ET MILLER R. L., "Polymer chain cross section and the Mooney-Rivlin constants. II.", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 50, pp. 798–818, 1977.
- [BYL 86] BYLSKI D. I., KRIEWALL T. J., AKKAS N., ET MELVIN J. W., "Mechanical behavior of fetal dura mater under large deformation biaxial tension", *J. Biomech.*, Vol. 19, pp. 19–26, 1986.
- [CAK 85] CAKMAK M., WHITE J. L., ET SPRUIELL J. E., "An investigation of the kinematics of stretch blow molding poly(ethylene terephthalate) bottles", *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 30, pp. 3679–3695, 1985.
- [CAR 61] CARMICHAEL A. J. ET HOLDAWAY H. W., "Phenomenological elastomechanical behavior of rubber over wide ranges of strain", *J. Appl. Phys.*, Vol. 32, No. 2, pp. 159–166, 1961.
- [CHA 76a] CHANG W. V., BLOCH R., ET TSCHOEGL N. W., "On the theory of the viscoelastic behavior of soft polymers in moderately large deformations", *Rheol. Acta*, Vol. 15, pp. 367–378, 1976.
- [CHA 76b] CHANG W. V., BLOCH R., ET TSCHOEGL N. W., "Time-dependent response of soft polymers in moderately large deformations", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 73, No. 4, pp. 981–983, 1976.
- [CHA 77a] CHADWICK P., CREASY C. M. F., ET HART V. G., "The deformation of rubber cylinders and tubes by rotation", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, Vol. 20, pp. 62–96, 1977.
- [CHA 77b] CHANG W. V., BLOCH R., ET TSCHOEGL N. W., "Study of the viscoelastic behavior of uncrosslinked (gum) rubbers in moderately large deformations", *J. Polym. Sci.*, Vol. 15, pp. 923–944, 1977.
- [CHA 87] CHARRIER J. M., SHRIVASTAVA S., ET WU R., "Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming - Axisymmetric problems", *J. Strain Analysis*, Vol. 22, No. 2, pp. 115–125, 1987.
- [CHA 89] CHARRIER J. M., SHRIVASTAVA S., ET WU R., "Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming - Non-axisymmetric problems", *J. Strain Analysis*, Vol. 24, No. 2, pp. 55–73, 1989.
- [CHR 80] CHRISTENSEN R. M., "A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 47, pp. 762–768, 1980.
- [CHR 82] CHRISTENSEN R. M., *Theory of viscoelasticity. An introduction*. New-York: Academic Press, second ed., 1982.
- [COL 61] COLEMAN B. D. ET NOLL W., "Foundations of linear viscoelasticity", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 33, No. 2, pp. 239–249, 1961.
- [DEL 87] DELORENZI H. G. ET NIED H. F., "Blow molding and thermoforming of plastics: finite element modeling", *Comput. Struct.*, Vol. 26, No. 1/2, pp. 197–206, 1987.
- [DEL 90] DELORENZI H. G., NIED H. F., ET TAYLOR A., "Three-dimensional finite element thermoforming", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 30, No. 20, pp. 1314–1322, 1990.

- [DEL 91] DELORENZI H. G. ET NIED H. F., “Finite element simulation of thermoforming and blow molding”, dans *Progress in Polymer Processing*(ISAYEV A. I., ed.), pp. 117–171, Hanser Verlag, 1991.
- [DEN 71] DENSON C. D. ET GALLO R. J., “Measurements on the biaxial extension viscosity of bulk polymers: the inflation of a thin polymer sheet”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 11, No. 2, pp. 174–176, 1971.
- [DEN 80] DENSON C. D. ET HYLTON D. C., “A rheometer for measuring the viscoelastic response of polymer melts in arbitrary planar and biaxial extensional flow fields”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 20, No. 8, pp. 535–539, 1980.
- [DEV 77a] DEVRIES A. J. ET BONNEBAT C., “Uni- and biaxial stretching of chlorinated PVC sheets. A fundamental study of thermoformability”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 16, No. 2, pp. 93–100, 1977.
- [DEV 77b] DEVRIES A. J., BONNEBAT C., ET BEAUTEMPS J., “Uni- and biaxial orientation of polymer films and sheets”, *J. Polym. Sci.: Polymer Symposium*, Vol. 58, pp. 109–156, 1977.
- [DHA 84] DHATT G. ET TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, 2 ième ed., 1984.
- [D’O 95] D’ORIA F., BOURGIN P., ET COINCENOT L., “Progress in numerical modeling of the thermoforming process”, *Adv. Polym. Tech.*, Vol. 14, No. 4, pp. 291–301, 1995.
- [DOK 89] DOKAINISH M. A. ET SUBBARAJ K., “A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics. I. Explicit methods”, *Comput. Struct.*, Vol. 32, No. 6, pp. 1371–1386, 1989.
- [DUB 86] DUBIGEON S., *Mécanique des milieux continus Cours de l’ENSM*. Tec. et Doc. Lavoisier, 1986.
- [DUT 84] DUTTA A. ET RYAN M. E., “Confined parison inflation behavior of a high-density polyethylene”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 24, No. 16, pp. 1232–1239, 1984.
- [DYM 74] DYM C. L., *Stability theory and its applications to structural mechanics*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1974.
- [FEN 73] FENG W. W. ET YANG W. H., “On the contact problem of an inflated spherical nonlinear membrane”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 40, pp. 209–214, 1973.
- [FEN 74a] FENG W. W. ET HUANG P., “On the inflation of a plane nonlinear membrane”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 41, pp. 767–771, 1974.
- [FEN 74b] FENG W. W., TIELKING J. T., ET HUANG P., “The inflation and contact constraint of a rectangular Mooney membrane”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 41, pp. 979–984, 1974.
- [FEN 85] FENG W. W., “On finite deformation of viscoelastic rotating disks”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 20, No. 1, pp. 21–26, 1985.

- [FEN 86] FENG W. W., “A recurrence formula for viscoelastic constitutive equations”, dans *Proceedings of the International Conference on Computational Mechanics*, Vol. IV, (Tokyo), pp. 77–81, 25-29 mai 1986.
- [FEN 92] FENG W. W., “Viscoelastic behavior of elastomeric membranes”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 59, pp. S29–S34, 1992.
- [FOS 67a] FOSTER H. O., “Inflation of a plane circular membrane”, *Trans. ASME, Series B*, Vol. 89, pp. 403–407, 1967.
- [FOS 67b] FOSTER H. O., “Very large deformations of axially symmetric membranes made of neo-hookean materials”, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 5, pp. 95–117, 1967.
- [GEN 58] GENT A. N. ET THOMAS A. G., “Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber”, *J. of Polym. Sci.*, Vol. 28, pp. 625–637, 1958.
- [GOL 87] GOLDSMITH J., “High temperature / high speed tensile testing of amorphous and crystalline polymers”, Master’s thesis, University of Louisville, 1987.
- [GRE 57] GREEN A. E. ET RIVLIN R. S., “The mechanics of non-linear materials with memory ; Part I”, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, Vol. 1, pp. 1–21, 1957.
- [GRE 60] GREEN A. E. ET ADKINS J. E., *Large elastic deformations*. Oxford: The Clarendon Press, 1960.
- [HAD 88] HADDAD Y. M., “On the theory of the viscoelastic solid”, *Res Mechanica*, Vol. 25, pp. 225–259, 1988.
- [HIL 78] HILL R., “Aspects of invariance in solid mechanics”, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 1–75, 1978.
- [HS 66] HART-SMITH L. J., “Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials”, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 17, pp. 608–626, 1966.
- [HS 67] HART-SMITH L. J. ET CRISP J. D. C., “Large elastic deformations of thin rubber membranes”, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 5, pp. 1–24, 1967.
- [HSU 94] HSU F. P. K., SCHWAB C., RIGAMONTI D., ET HUMPHREY J. D., “Identification of response functions from axisymmetric membrane inflation tests: implications for biomechanics”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 31, No. 24, pp. 3375–3386, 1994.
- [IMS 87] IMSL Inc., *IMSL Math Library. FORTRAN Subroutines for Mathematical Applications. User’s manual version 1.0*, 1987.
- [ISI 51] ISIHARA A., HASHITSUME N., ET TATIBANA M., “Statistical theory of rubber-like elasticity -IV (two dimensional stretching)”, *J. Chem. Phys.*, Vol. 19, pp. 1508–1512, 1951.
- [JAZ 93] JAZZAR M. F., *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*. Thèse de doctorat spécialité mécanique, Institut de Mécanique de Marseille, 1993.
- [JEN 91] JENKINS C. H. ET LEONARD J. W., “Nonlinear dynamic response of membranes: state of the art”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, No. 7, pp. 319–328, 1991.

- [JEN 96] JENKINS C. H., “Nonlinear dynamic response of membranes: state of the art - Update”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 49, No. 10, pp. S41–S48, 1996.
- [JOY 72] JOYE D. D., POEHLEIN G. W., ET DENSON C. D., “A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extensional flow”, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 16, No. 3, pp. 421–445, 1972.
- [JOY 73] JOYE D. D., POEHLEIN G. W., ET DENSON C. D., “A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extensional flow. II”, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 17, No. 2, pp. 287–302, 1973.
- [KAY 62] KAYE A., “Non-newtonian flow in incompressible fluids”, CoA Note 134, College of Aeronautics, Cranfield, 1962.
- [KHA 92] KHAYAT R. E., DERDOURI A., ET GARCIA-RÉJON A., “Inflation of an elastic cylindrical membrane: non-linear deformation and instability”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, No. 1, pp. 69–87, 1992.
- [KHA 94a] KHAYAT R. E. ET DERDOURI A., “Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. part I. axisymmetric case”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 3773–3791, 1994.
- [KHA 94b] KHAYAT R. E. ET DERDOURI A., “Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. part II. non-axisymmetric case”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 37, pp. 3793–3808, 1994.
- [KHA 95] KHAYAT R. E. ET DERDOURI A., “Stretch and inflation of hyperelastic membranes as applied to blow molding”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 35, No. 23, pp. 1852–1863, 1995.
- [KLI 64] KLINGBEIL W. W. ET SHIELD R. T., “Some numerical investigations on empirical strain energy functions in the large axi-symmetric extensions of rubber membranes”, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 15, pp. 608–629, 1964.
- [KON 85] KONG D. ET WHITE J. L., “Inflation characteristics of unvulcanized gum and compounded rubber sheets”, *Rubber Chem. Tech.*, Vol. 59, pp. 315–327, 1985.
- [KRI 93] KRIEWALL T. J., AKKAS N., BYLSKI D. I., MELVIN J. W., ET WORK B. A., “Mechanical behavior of fetal dura mater under large axisymmetric inflation”, *J. Biomech. Engng*, Vol. 105, pp. 71–76, 1993.
- [KYR 97] KYRIACOU S. K., SHAH A. D., ET HUMPHREY J. D., “Inverse finite element characterization of nonlinear hyperelastic membranes”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 64, pp. 257–262, 1997.
- [Lab] Labtech, *Labtech Notebook. Reference manual*.
- [LEE 96] LEE D. K. ET SOH S. K., “Prediction of optimal preform thickness distribution in blow molding”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 36, No. 11, pp. 1513–1520, 1996.
- [LEM 85] LEMAITRE J. ET CHABOCHE J. L., *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [LEV 44] LEVENBERG K., “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares”, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 2, pp. 164–168, 1944.

- [LIA 65] LIANIS G., “Application of irreversible thermodynamics in finite viscoelastic deformations”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 32, pp. 623–629, 1965.
- [MAE 74] MAERKER J. M. ET SCHOWALTER W. R., “Biaxial extension of an elastic liquid”, *Rheol. Acta*, Vol. 13, No. 3, pp. 1135–1146, 1974.
- [MAR 63] MARQUARDT D. W., “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 11, No. 2, pp. 431–441, 1963.
- [MAR 97] MARCKMANN G., VERRON E., ET PESEUX B., “Modélisation dynamique du thermoformage”, dans *Actes du troisième colloque national en Calcul des Structures*, (Giens (Var)), pp. 521–526, 21-23 mai 1997.
- [MEI 81] MEISSNER J., RAIBLE T., ET STEPHENSON S. E., “Rotary clamp in uniaxial and biaxial extensional rheometry of polymer melts”, *J. Rheol.*, Vol. 25, No. 1, pp. 1–28, 1981.
- [MEI 87] MEISSNER J., “Polymer melt elongation - Methods, results, and recent developments”, *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 27, No. 8, pp. 537–546, 1987.
- [MOO 40] MOONEY M., “A theory of large elastic deformation”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 11, pp. 582–592, 1940.
- [MOR 88] MORMAN JR. K. N., “An adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like viscoelasticity by use of a generalized strain measure”, *Rheol. Acta*, Vol. 27, pp. 3–14, 1988.
- [NAM 93] NAMBIAR R. V., VALERA R. S., LAWRENCE K. L., MORGAN R. B., ET AMIL D., “An algorithm for adaptative refinement of triangular element meshes”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 499–509, 1993.
- [NAR 86] NARAIN A., “On K-BKZ and other viscoelastic models as continuum generalizations of the classical spring-dashpot models”, *Rheol. Acta*, Vol. 25, pp. 1–14, 1986.
- [O’D 95] O’DOWD N. P. ET KNAUSS W. G., “Time dependent large principal deformation of polymers”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 43, No. 5, pp. 771–792, 1995.
- [ODE 67] ODEN J. T. ET SATO T., “Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 3, pp. 471–488, 1967.
- [OGD 72] OGDEN R. W., “Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids”, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A326, pp. 565–584, 1972.
- [Org 95] Organisation internationale de normalisation, Genève, *Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure*, 1995.
- [PER 78] PEREYRA V., *Lecture notes in computer sciences*, Vol. 76, Ch. PASV3: An adaptive finite-difference FORTRAN program for first order boundary value problems, pp. 67–88. Berlin: Springer Verlag, 1978.
- [PET 80] PETRIE C. J. S. ET ITO K., “Prediction of wall thickness of blow moulded containers”, *Plastics Rubber Proc.*, No. June, pp. 68–72, 1980.

- [PIP 64] PIPKIN A. C., "Small finite deformations of viscoelastic solids", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 36, pp. 1034–1041, 1964.
- [RAC 93] RACHIK M., *Simulation de la mise en forme des structures minces (soufflage des plastiques et emboutissage des tôles)*. Thèse de doctorat, UTC, Compiègne, 1993.
- [RAC 94] RACHIK M., ROELANDT J. M., ET BATOZ J. L., "Simulation numérique du soufflage et du thermoformage des plastiques", *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 3, No. 2, pp. 187–210, 1994.
- [RIV 48a] RIVLIN R. S., "Large elastic deformation of isotropic materials - IV. Further developments of the general theory", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. A241, pp. 379–397, 1948.
- [RIV 48b] RIVLIN R. S., "Some topics in finite elasticity I. Fundamental concepts", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. A240, pp. 459–490, 1948.
- [RIV 51] RIVLIN R. S. ET SAUNDERS D. W., "Large elastic deformations of isotropic materials - VII. Experiments on the deformation of rubber", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. A243, pp. 251–288, 1951.
- [ROS 89] ROSATO D. V. ET ROSATO D. V., *Blow molding handbook*. Munich: Hanser, 1989.
- [RV 95] RODRIGUEZ-VILLA A., AGASSANT J. F., ET BELLET M., "Finite element simulation of the extrusion blow-molding process", dans *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes-Numiform'95*, (Ithaca (USA)), pp. 1053–1058, juin 1995.
- [RV 96] RODRIGUEZ-VILLA A., BELLET M., AGASSANT J. F., JACQUEMET R., ET LEBOUVIER D., "Rheological characterization of molten polyethylene with respect to the blow molding process", dans *12th Int. Congress on Rheology*, (Québec (Canada)), août 1996.
- [RYA 82a] RYAN M. E. ET DUTTA A., "The dynamics of parison free inflation in extrusion blow molding", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 22, No. 19, pp. 569–577, 1982.
- [RYA 82b] RYAN M. E. ET DUTTA A., "Mathematical modeling of the blow-molding process", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 22, No. 17, pp. 1075–1083, 1982.
- [SCH 69] SCHAPERY R. A., "On the characterization of nonlinear viscoelastic materials", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 9, No. 4, pp. 295–310, 1969.
- [SCH 72] SCHMIDT L. R., *Biaxial stretching of heat-softened plastic sheets*. Phd thesis, University of Colorado, 1972.
- [SCH 75a] SCHMIDT L. R. ET CARLEY J. F., "Biaxial stretching of heat-softened plastic sheets: experiments and results", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 15, No. 1, pp. 51–62, 1975.
- [SCH 75b] SCHMIDT L. R. ET CARLEY J. F., "Biaxial stretching of heat-softened plastic sheets using an inflation technique", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 13, pp. 563–578, 1975.
- [SCH 92] SCHMIDT F. M., AGASSANT J. F., BELLET M., ET DENIS G., "Numerical simulation of polyester stretch-blow molding process", dans *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes-Numiform'92*, (Balkema), pp. 383–388, septembre 1992.

- [SCH 96] SCHMIDT F. M., AGASSANT J. F., BELLET M., ET DESOUTTER L., “Viscoelastic simulation of PET stretch/blow molding process”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 64, pp. 19–42, 1996.
- [SET 64] SETH B. R., “Generalized strain measure with applications to physical problems”, dans *Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*(REINER M. ET ABIR D., eds.), (New-York), pp. 162–172, McMillan, 1964.
- [SHA 91] SHANG X. C., “Tensile instability of nonlinear spherical membrane with large deformation”, *Appl. Math. and Mech.*, Vol. 12, No. 10, pp. 993–1000, 1991.
- [SHE 88] SHEPHARD M. S., “Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 41, pp. 169–184, 1988.
- [SHI 96] SHI J. ET MOITA G. F., “The post-critical analysis of axisymmetric hyper-elastic membranes by the finite element method”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 135, pp. 265–281, 1996.
- [SHR 93] SHRIVASTAVA S. ET TANG J., “Large deformation finite element analysis of nonlinear viscoelastic membranes with reference to thermoforming”, *J. Strain Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 31–51, 1993.
- [SID 82] SIDOROFF F., “Cours sur les grandes déformations”, rapport GRECO, Ecole d’été Sophia-Antipolis, 1982.
- [SON 91] SONG W. N., MIRZA F. A., ET VLACHOPOULOS J., “Finite element analysis of inflation of an axisymmetric sheet of finite thickness”, *J. Rheol.*, Vol. 35, No. 1, pp. 93–111, 1991.
- [SON 92] SONG W. N., MIRZA F. A., ET VLACHOPOULOS J., “Finite element simulation of plug-assist forming”, *Intern. Polymer Processing*, Vol. VII, No. 3, pp. 248–256, 1992.
- [SUL 87] SULLIVAN J. L., “A nonlinear viscoelastic model for representing nonfactorizable time-dependent behavior of cured rubber”, *J. Rheol.*, Vol. 31, No. 3, pp. 271–295, 1987.
- [SUL 89] SULLIVAN J. L. ET MAZICH K. A., “Nonseparable behavior in rubber viscoelasticity”, *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 62, pp. 68–81, 1989.
- [TAN 88] TANNER R. I., “From A to (BK)Z in constitutive relations”, *J. Rheol.*, Vol. 32, No. 7, pp. 673–702, 1988.
- [THR 87] THRONE J. L., *Thermoforming*. Munich, Vienna, New-York: Hanser Publishers, 1987.
- [TRE 43] TRELOAR L. R. G., “The elasticity of a network of long chain molecules (I and II)”, *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 39, pp. 36–64 ; 241–246, 1943.
- [TRE 44a] TRELOAR L. R. G., “Strains in inflated rubber sheet, and the mechanism of bursting”, *Trans. Inst. Rubber Ind.*, Vol. 19, pp. 201–212, 1944.
- [TRE 44b] TRELOAR L. R. G., “Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation”, *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 40, pp. 59–77, 1944.

- [TRE 76] TRELOAR L. R. G., “The mechanics of rubber elasticity”, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A351, pp. 301–330, 1976.
- [TRU 66] TRUESDELL C., *The elements of continuum mechanics*. New-York: Springer Verlag, 1966.
- [TWI 83] TWIZELL E. H. ET OGDEN R. W., “Non-linear optimization of the material constants in Ogden’s stress-deformation function for incompressible isotropic elastic materials”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, Vol. 24, pp. 424–434, 1983.
- [VAL 67] VALANIS K. C. ET LANDEL R. F., “The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 38, No. 7, pp. 2997–3002, 1967.
- [VAN 95] VANTAL M. H., MONASSE B., ET BELLET M., “Numerical simulation of the thermoforming of multi-layer polymer sheets”, dans *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes-Numiform’95*, (Ithaca (USA)), pp. 1089–1095, juin 1995.
- [VEN 93] VENERUS D. C., TARIQ S. A., ET BERNSTEIN B., “On the use of stress growth data to determine strain-dependent material functions for factorable K-BKZ equations”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 299–315, 1993.
- [VER 97a] VERRON E., DERDOURI A., PESEUX B., ET CONNOLLY R., “Caractérisation de polymères chauffés par la technique de soufflage de membrane”, dans *Actes du 13e Congrès Français de Mécanique vol. 2*, (Poitiers), pp. 19–22, 1er-5 septembre 1997.
- [VER 97b] VERRON E., PESEUX B., DERDOURI A., ET CONNOLLY R., “Bubble inflation of heat-softened polymeric membranes above the glass transition temperature”, dans *Proceedings of the 16th Canadian Congress of Applied Mechanics vol. 1*, (Québec (Canada)), pp. 81–82, 1er-5 juin 1997.
- [WAR 83] WARD I. M., *Mechanical properties of solid polymers*. John Wiley and Sons Ltd, second ed., 1983.
- [WAR 88] WARBY M. K. ET WHITEMAN J. R., “Finite element model of viscoelastic membrane deformation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 68, pp. 33–54, 1988.
- [WIL 70] WILLIAMS J. G., “A method of calculations for thermoforming plastics sheets”, *J. strain Analysis*, Vol. 5, No. 1, pp. 49–57, 1970.
- [WIN 76] WINEMAN A., “Large axisymmetric inflation of a nonlinear viscoelastic membrane by lateral pressure”, *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 20, No. 2, pp. 203–225, 1976.
- [WIN 78] WINEMAN A., “On axisymmetric deformations of nonlinear viscoelastic membranes”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 249–260, 1978.
- [WIN 79] WINEMAN A., “On the simultaneous elongation and inflation of a tubular membrane of BKZ fluid”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 6, pp. 111–125, 1979.
- [YAN 70] YANG W. H. ET FENG W. W., “On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 37, pp. 1002–1011, 1970.

- [YAN 73] YANG W. H. ET LU C. H., “General deformations of neo-hookean membranes”, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 40, pp. 7–12, 1973.
- [ZAM 89] ZAMANI N. G., WATT D. F., ET ESTEGHAMATIAN M., “Status of the finite element method in the thermoforming process”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2681–2693, 1989.
- [ZIE 94] ZIENKIEWIECZ O. C. ET TAYLOR R. L., *The finite element method. Volume I: Basic formulation and linear problems*. MacGraw-Hill Company, fourth ed., 1994.