



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude des effets de forme des cavités en rupture ductile des métaux

Komlanvi Madou

► **To cite this version:**

Komlanvi Madou. Contribution à l'étude des effets de forme des cavités en rupture ductile des métaux. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : 2012PA066245 . tel-00833021

**HAL Id: tel-00833021**

**<https://theses.hal.science/tel-00833021>**

Submitted on 11 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

**Komlanvi MADOU**

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de thèse :

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES EFFETS DE FORME DES CAVITÉS  
EN RUPTURE DUCTILE DES MÉTAUX**

Soutenance effectuée le 14/09/2012

devant le jury composé de Messieurs :

Amine BENZERGA	Rapporteur
Mihail GARAJEU	Rapporteur
Mihai GOLOGANU	Examineur
Djimédo KONDO	Examineur
Pedro PONTE-CASTANEDA	Examineur
Pierre SUQUET	Examineur
Jean-Baptiste LEBLOND	Directeur de thèse



Ce travail est réalisé à l'Institut Jean Le Rond d'Alembert sous la direction de Jean-Baptiste LEBLOND. Je tiens d'abord à remercier sincèrement Jean-Baptiste LEBLOND pour le soutien qu'il m'a apporté durant ces trois années. Sa rigueur scientifique, sa patience et ses qualités humaines m'ont permis de mener à bien ce travail. Qu'il sache que j'ai conscience de la chance exceptionnelle que j'ai eue de travailler avec lui et qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Djimédo KONDO pour les discussions scientifiques fructueuses que j'ai eues avec lui, ainsi que ses conseils qui m'ont beaucoup aidé dans ce travail.

Je remercie vivement Messieurs Amine BENZERGA et Mihail GARAJEU qui ont endossé la tâche difficile de rapporteur. Un grand merci aussi à Messieurs Pierre SUQUET, Pedro PONTE-CASTANEDA, Mihai GOLOGANU pour avoir pris part à l'évaluation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les amis et collègues qui m'ont soutenu dans les moments difficiles et avec qui j'ai aussi partagé de bons moments.

Mes remerciements vont aussi à Nicolas et Sylvie qui m'ont hébergé durant ma première année en France.

J'adresse mes sincères remerciements à mes parents qui m'ont soutenu par leur prière et à ma femme Dédé pour ses encouragements et la patience dont elle a fait preuve ces dernières années.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Synthèse bibliographique</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Les mécanismes de la rupture ductile . . . . .	6
1.2.1 La nucléation . . . . .	7
1.2.2 La croissance . . . . .	7
1.2.3 La coalescence . . . . .	8
1.3 Le critère de plasticité de Gurson pour des cavités sphériques et ses extensions	9
1.3.1 Critère de Gurson . . . . .	9
1.3.2 Extensions du critère de Gurson . . . . .	10
1.4 Effets de forme des cavités : critères de plasticité pour des cavités sphéroïdales	11
1.5 Conclusion . . . . .	15
<b>2 Analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale creuse</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Description de la cellule ellipsoïdale . . . . .	19
2.3 Champ de vitesse test . . . . .	21
2.4 Analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal confocal	22
2.4.1 Généralités . . . . .	22
2.4.2 Estimation par l'extérieur de la dissipation plastique macroscopique	23
2.5 Étude asymptotique des termes de $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)}$ . . . . .	25
2.5.1 Limites des composantes diagonales de $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ . . . . .	25
2.5.2 Limites des composantes diagonales de $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow 0$ . . . . .	26
2.6 Approximation de la dissipation plastique macroscopique et critère macroscopique approché . . . . .	33
2.6.1 Simplification du terme croisé $\frac{4A}{3} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta$ . . . . .	33
2.6.2 Simplification de la dépendance spatiale de $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ . . . . .	34
2.6.3 Critère macroscopique approché . . . . .	38

2.7	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Détermination des paramètres du critère de plasticité macroscopique</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Définition de la seconde porosité $g$ . . . . .	47
3.3	Analyse-limite numérique basée sur la méthode des éléments finis . . . . .	49
3.4	Expression de la constante $\kappa$ . . . . .	52
3.4.1	Généralités . . . . .	52
3.4.2	Cas d'un sphéroïde allongé . . . . .	54
3.4.3	Cas d'un sphéroïde aplati . . . . .	55
3.4.4	Cas général . . . . .	57
3.4.5	Etude de la fonction $F(w)$ dans le cas d'un cylindre elliptique ( $a = +\infty, b, c$ ) . . . . .	61
3.4.6	Formule approchée de $\kappa$ . . . . .	61
3.5	Expression des coefficients $H_x, H_y, H_z$ . . . . .	62
3.5.1	Cas d'un sphéroïde allongé . . . . .	62
3.5.2	Cas d'un sphéroïde aplati . . . . .	64
3.5.3	Cas général . . . . .	64
3.6	Expression de la forme quadratique $\mathcal{Q}(\Sigma)$ . . . . .	69
3.6.1	Principe de détermination de $\mathcal{Q}(\Sigma)$ . . . . .	69
3.6.2	Bornes des composites non linéaires . . . . .	71
3.6.3	Choix d'une borne convenable . . . . .	72
3.7	Résumé . . . . .	73
3.7.1	Les paramètres géométriques . . . . .	73
3.7.2	Expression du critère de plasticité . . . . .	74
3.7.3	Expression de la forme linéaire $\mathcal{L}(\Sigma)$ . . . . .	74
3.7.4	Expression de la forme quadratique $\mathcal{Q}(\Sigma)$ . . . . .	74
3.8	Cas particuliers . . . . .	75
3.9	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Validation numérique du critère approché proposé</b>	<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	80
4.2	Cellule sphéroïdale allongée . . . . .	80
4.3	Cellule sphéroïdale aplatie . . . . .	81
4.4	Fissure circulaire . . . . .	82
4.5	Fissure elliptique . . . . .	83
4.6	Cellule cylindrique . . . . .	85
4.6.1	Cylindre à base circulaire . . . . .	85
4.6.2	Cylindre à base elliptique . . . . .	86
4.7	Cellules ellipsoïdales . . . . .	88
4.7.1	Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 . . . . .	88
4.7.2	Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 . . . . .	89
4.8	Conclusion . . . . .	90

<b>5</b>	<b>Lois d'évolution de la déformation et de la rotation d'un vide ellipsoïdal dans un milieu parfaitement plastique</b>	<b>91</b>
5.1	Introduction . . . . .	92
5.2	Taux de déformation de la cavité . . . . .	92
5.2.1	Généralités . . . . .	92
5.2.2	Changement de variables sur $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}^v$ . . . . .	93
5.2.3	Définition des coefficients $h_{ij}$ . . . . .	94
5.2.4	Détermination des coefficients $h_{ij}$ . . . . .	99
5.3	Taux de rotation de la cavité . . . . .	116
5.3.1	Généralités . . . . .	116
5.3.2	Détermination des coefficients $k_{ij}$ . . . . .	116
5.4	Évolution des axes et des directions principales d'une cavité ellipsoïdale . .	119
5.5	Conclusion . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Algorithme de projection locale pour le critère de Hill et implémentation dans le code SYSTUS<sup>®</sup></b>	<b>123</b>
6.1	Introduction . . . . .	124
6.2	Modèle de plasticité de Tsai-Hill pour les solides anisotropes . . . . .	124
6.3	Solution des problèmes de plasticité par la méthode des éléments finis . . .	125
6.4	Algorithme implicite de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge de Tsai-Hill . . . . .	126
6.5	Calcul de la matrice tangente élastoplastique . . . . .	129
6.6	Validation de l'implémentation numérique du critère de Tsai-Hill . . . . .	130
6.6.1	Essais de traction . . . . .	130
6.6.2	Sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique . . . . .	133
6.7	Équivalence entre les équations de l'analyse-limite avec une plasticité anisotrope et celles du problème d'éléments finis . . . . .	135
6.8	Conclusion . . . . .	136
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Champs de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008]</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des limites des quantités <math>\langle d_{xz}^{j0} \rangle_{\varepsilon_\lambda}</math> et <math>\langle d_{yz}^{j0} \rangle_{\varepsilon_\lambda}</math> lorsque <math>\bar{\lambda} \rightarrow 0</math> dans le cas général (<math>a &gt; b &gt; c</math>)</b>	<b>141</b>
<b>C</b>	<b>Calcul des intégrales <math>I_1, I_2, I_3, I_4, J_1, J_2, J_3</math> et <math>J_4</math></b>	<b>143</b>
<b>D</b>	<b>Preuve du lemme de Gurson</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>Analyse-limite numérique par la méthode des éléments finis</b>	<b>149</b>
<b>F</b>	<b>La borne non linéaire de Willis pour les matériaux plastiques poreux</b>	<b>153</b>

G Composantes du tenseur $\mathbb{T}$	155
Bibliographie	157

# Introduction générale

Les matériaux utilisés dans la construction des structures (les automobiles, les avions, etc...) présentent des défauts (microfissures, microcavités) qui ne sont malheureusement pas visibles à l'œil nu. Cependant ces microdéfauts engendrent des conséquences néfastes à l'échelle macroscopique. Ces conséquences sont aggravées par la méconnaissance des propriétés mécaniques de ces matériaux. Cette ignorance entraîne le mauvais dimensionnement des structures et une mauvaise estimation de la résistance à la rupture de celles-ci.

Depuis un demi siècle beaucoup d'études sur le comportement des matériaux ont été réalisées en adoptant une approche "*micromécanique*". Cette approche consiste à considérer un point matériel de l'échelle macroscopique comme une structure à part entière à l'échelle microscopique qu'il faut étudier, pour ensuite transporter les champs locaux obtenus à l'échelle macroscopique par des relations de moyenne.

En ce qui concerne les matériaux ductiles, les observations expérimentales ont montré que leur ruine se fait en trois étapes qui sont la nucléation, la croissance et la coalescence des microcavités.

Le présent mémoire sera consacré à la phase de croissance des microcavités. Le modèle le plus célèbre décrivant la croissance des microcavités contenues dans un matériau ductile poreux est dû à [Gurson, 1977]. Il est basé sur l'analyse-limite approximative d'une sphère creuse ou d'un cylindre creux. En dépit du succès qu'a rencontré ce modèle, il présente certains défauts. Notamment, les cavités dans les matériaux ne sont pas forcément sphériques ou cylindriques et les études numériques de [Hom et McMeeking, 1989] et [Lee et Mear, 1992] ont montré une influence non négligeable de leur forme sur leur croissance. Ce dernier point a motivé des généralisations du critère de Gurson à des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties, par [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] et [Gologanu *et al.*, 1997], suivis par d'autres auteurs. Certains comme [Monchiet *et al.*, 2008], [Keralavarma et Benzerga, 2008] ont également étudié le cas de matrices plastiquement anisotropes, obéissant au critère de Hill.

Dans le présent travail, nous envisageons d'étendre l'approche de [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] et [Gologanu *et al.*, 1997] au cas des cavités ellipsoïdales générales. Le mémoire se compose de six chapitres :

- Le chapitre 1 est consacré à la description des étapes du mécanisme de rupture des matériaux ductiles poreux. Une brève revue bibliographique sera présentée sur chaque étape. L’accent sera mis sur la phase de croissance, qui est décrite avec une approche d’homogénéisation par [Gurson, 1977] pour les cavités sphériques. Ensuite, nous allons exposer les améliorations apportées à ce modèle par Tvergaard et Needleman ainsi que ses extensions à des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties effectuées par [Gologanu *et al.*, 1997] et [Monchiet, 2006]. [Gologanu *et al.*, 1997] ont utilisé des champs de vitesse de [Lee et Mear, 1992] pour décrire l’expansion des cavités sphéroïdales alors que [Monchiet, 2006] ont utilisé les champs d’ [Eshelby, 1957].
- Le chapitre 2 s’intéresse à la croissance de cavités ellipsoïdales arbitraires contenues dans des matériaux ductiles poreux. Plus précisément, nous allons étendre le modèle de [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997] développé pour des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties, à des cavités ellipsoïdales arbitraires afin d’obtenir un critère de plasticité de type Gurson. Cette extension semble souhaitable du fait que la présence de cavités ellipsoïdales générales dans les matériaux poreux est irréfutable. A cette fin, les champs de vitesse récemment découverts par [Leblond et Gologanu, 2008] seront utilisés dans une analyse-limite d’une cellule ellipsoïdale arbitraire contenant un vide ellipsoïdal confocal et soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord extérieur. Cette analyse fournira une estimation de la dissipation plastique macroscopique. Ensuite, une étude asymptotique sera faite des différents termes de l’intégrand intervenant dans le calcul de cette dissipation, qui débouchera sur une expression approchée explicite de celle-ci nous permettant de déduire une surface de plasticité macroscopique approchée. Certains coefficients figurant dans la surface de charge ne seront pas entièrement déterminés à ce stade.
- Le chapitre 3 a pour but de déterminer complètement les coefficients du critère macroscopique approché proposé dans le chapitre précédent. Ceci est réalisé grâce à des améliorations de l’analyse-limite de la cellule ellipsoïdale. Les améliorations sont de deux types. Pour les chargements hydrostatiques, l’analyse-limite est raffinée en effectuant des calculs micromécaniques par éléments finis dans un certain nombre de cas significatifs, afin de remplacer le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] caractérisant l’expansion de la cavité par le champ numérique supposé exact. Pour des chargements déviatoriques, l’analyse-limite est abandonnée, et nous faisons directement usage de certains résultats rigoureux pour les composites non linéaires établis par [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991] et [Michel et Suquet, 1992] en utilisant les travaux de [Willis, 1977] et le concept de “milieu linéaire de comparaison”. Cette approche “hybride” conduit à notre avis aux meilleures expressions possibles des paramètres du critère. Le critère proposé se réduit aux critères approximatifs classiques proposés par [Leblond *et al.*, 1994], [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] et [Gologanu *et al.*, 1997] dans les cas spécifiques de

cavités sphériques, sphéroïdales allongées ou aplaties.

- Dans le chapitre 4, nous comparons les prédictions du critère de plasticité approché proposé dans les chapitres 2 et 3, d’une part avec des résultats numériques obtenus avec la méthode des éléments finis, d’autre part dans le cas des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties ainsi que des fissures avec le modèle GLD et les calculs numériques de [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] et [Gologanu *et al.*, 1997]. Les calculs numériques de ces auteurs sont basés sur une méthode “spectrale” qui consiste à minimiser la dissipation plastique macroscopique sur un grand espace de champs de vitesse cinématiquement admissibles donnés sous forme analytique.
- Le chapitre 5 est consacré à l’étude de l’évolution des cavités. Plus précisément, nous proposons des lois qui donnent les taux de déformation et de rotation d’une cavité ellipsoïdale contenue dans une cellule rigide parfaitement plastique. Ces lois sont construites de façon empirique et sont des extensions des lois applicables aux matériaux élastiques établies par [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998], au cas des matériaux parfaitement plastiques. Les simulations numériques par la méthode des éléments finis jouent un rôle déterminant dans cette construction.
- Le chapitre 6 est consacré à l’implémentation du critère de Hill dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS<sup>®</sup>. On propose un nouvel algorithme de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge. Outre son application immédiate possible à des problèmes de structures utilisant des matériaux plastiquement anisotropes, cet algorithme présente un double intérêt en prolongement de cette thèse :
  - D’une part, on peut maintenant réaliser des calculs de plasticité sur des cellules dont le matériau constitutif est parfaitement plastique et obéit au critère de Hill, en vue d’étendre le modèle des chapitres précédents aux matériaux plastiquement anisotropes.
  - D’autre part, on pourra s’inspirer de cet algorithme lors de l’implémentation numérique du critère proposé dans les chapitres précédents pour traiter la partie quadratique qui a une expression formellement semblable à la forme quadratique de Hill.



# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Les mécanismes de la rupture ductile</b> . . . . .	<b>6</b>
1.2.1	La nucléation . . . . .	7
1.2.2	La croissance . . . . .	7
1.2.3	La coalescence . . . . .	8
<b>1.3</b>	<b>Le critère de plasticité de Gurson pour des cavités sphériques et ses extensions</b> . . . . .	<b>9</b>
1.3.1	Critère de Gurson . . . . .	9
1.3.2	Extensions du critère de Gurson . . . . .	10
<b>1.4</b>	<b>Effets de forme des cavités : critères de plasticité pour des cavités sphéroïdales</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>15</b>

---

## 1.1 Introduction

Les matériaux fragiles sont des matériaux qui se déforment peu avant la rupture tandis que les matériaux ductiles peuvent subir d'importantes déformations plastiques avant de se rompre. Deux approches sont utilisées pour décrire le comportement des matériaux ductiles : l'approche globale et l'approche locale.

L'approche globale permet dans certains cas d'évaluer la résistance à la propagation de la fissure d'un matériau, mais pose de nombreuses difficultés sur lesquelles nous ne nous étendons pas. Dans ce travail nous adoptons l'approche locale qui permet de décrire finement les mécanismes de la rupture ductile. Cette approche est fondée sur l'homogénéisation des milieux plastiques poreux.

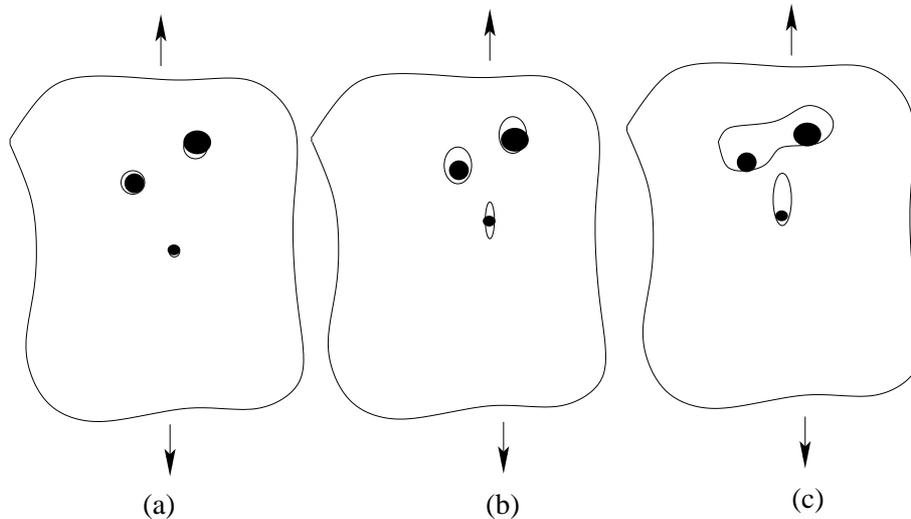
Nous allons d'abord décrire les mécanismes physiques qui conduisent à la rupture des matériaux ductiles et citer quelques unes des études qui ont été faites sur chacune de ces mécanismes, bien que dans la suite, nous nous intéressons seulement à la phase dite de croissance.

Nous présenterons ensuite les critères de plasticité existants en partant du modèle de [Gurson, 1977] partiellement basé sur les travaux de [Rice et Tracey, 1969]. Ensuite, nous présenterons brièvement le critère de [Tvergaard, 1981] basé sur une approche phénoménologique qui permet d'améliorer le critère de Gurson pour des chargements déviatoriques et le critère GTN de [Tvergaard et Needleman, 1984] qui permet de mieux décrire le comportement du matériau pendant la coalescence. Enfin, nous présenterons quelques uns des critères qui incorporent les effets de forme des cavités, comme le modèle GLD de [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997] et celui de [Monchiet, 2006], pour une matrice plastiquement isotrope.

On notera que le modèle de Gurson présente d'autres insuffisances qui ont fait l'objet de beaucoup d'études qu'on n'exposera pas en détail ici. On peut citer, par exemple, la non-prédiction de l'augmentation progressive de la valeur moyenne de la porosité au cours de chargements cycliques à amplitude de déformation constante.

## 1.2 Les mécanismes de la rupture ductile

De nombreuses observations expérimentales ont montré que le mécanisme de la rupture ductile se compose de trois phases qui sont la nucléation, la croissance et la coalescence de microcavités (figure 1.1).



**Figure 1.1:** Les trois étapes de la rupture ductile : (a) nucléation, (b) croissance, (c) coalescence des cavités

### 1.2.1 La nucléation

La première phase est celle de la nucléation des cavités. Ces dernières apparaissent par décohésion de la matrice autour des inclusions ou rupture interne de ces inclusions. On distingue généralement une germination brutale autour de grosses inclusions et une autre continue autour de petites inclusions.

Certaines études numériques du phénomène ont été réalisées. On peut se référer par exemple à [Babout *et al.*, 2004] ; [Thomson et Hancock, 1984] qui supposent une parfaite adhérence entre la matrice et les inclusions et examinent numériquement les contraintes locales ainsi que la distribution de la déformation plastique. D'autres auteurs tels que [Fleck *et al.*, 1989] ; [Siruguet et Leblond, 2004] supposent qu'il n'y a plus cohésion entre la matrice et l'inclusion et étudient le contact éventuel entre les deux comme une fonction de l'état de contrainte.

### 1.2.2 La croissance

La phase de croissance est la seconde dans le processus de rupture. Elle se caractérise par le grossissement des cavités dû à la déformation plastique de la matrice qui les entoure.

Les premières études sur la croissance des cavités portent sur la déformation d'une cavité isolée dans une matrice plastique infinie. On peut à cet effet citer les travaux de [McClintock, 1968] consacrés à la croissance d'une cavité cylindrique contenue dans un milieu infini obéissant au critère de von Mises, et ceux de [Rice et Tracey, 1969] qui portent sur une cavité sphérique. Cependant ces auteurs ne définissent pas de critère faisant intervenir la porosité, puisque cette dernière est nulle dans leurs travaux.

Pour obtenir des modèles couplant l'endommagement et la plasticité, d'autres auteurs

ont considéré des matrices plastiques de volume fini, donc avec une porosité non nulle. Plusieurs techniques telles que l'analyse limite, l'homogénéisation non-linéaire et la thermodynamique sont alors utilisées pour construire de nouveaux modèles plus pertinents.

La technique d'analyse limite a été utilisée pour décrire le comportement de matériaux ductiles poreux contenant des cavités sphériques ou cylindriques pour la première fois par [Gurson, 1977]. A la suite de ses travaux, d'autres auteurs ont proposé des variantes de son modèle ou des extensions à des cavités sphéroïdales de forme allongée ou aplatie ([Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997], [Monchiet, 2006]).

Les critères issus de l'approche par homogénéisation non-linéaire (voir par exemple [Ponte-Castaneda, 1991]) sont réputés pertinents pour les états de contraintes déviatoriques, mais moins pour des chargements hydrostatiques.

Le modèle le plus connu basé sur la démarche thermodynamique est celui de [Rousselier, 1987], qui présente de grandes analogies avec celui de Gurson. Dans ce modèle, les considérations thermodynamiques, insuffisantes pour le définir totalement, ont été complétées par une référence à l'approche micromécanique de [Rice et Tracey, 1969].

### 1.2.3 La coalescence

Au cours de cette phase les cavités se rejoignent pour former une macrofissure. Le critère de [Gurson, 1977] ne reproduit pas cette phase. Pour corriger ce défaut, [Tvergaard et Needleman, 1984], proposent de “doper” artificiellement la porosité en introduisant des paramètres supplémentaires dans le critère de Gurson.

Des études numériques ont contribué à expliquer le phénomène de coalescence. On peut citer par exemple [Koplik et Needleman, 1988] qui ont effectué des calculs par éléments finis sur un cylindre contenant une cavité sphérique et soumis à un chargement axisymétrique comportant une contrainte axiale majeure. Ils ont observé que la coalescence se manifestait par une concentration du taux de déformation microscopique dans des ligaments horizontaux séparant des cavités voisines. Ce type de coalescence est appelé coalescence “en couches”.

Pour rendre compte de la coalescence en couches, [Thomason, 1985] a considéré un prisme à base carrée contenant une cavité prismatique et un cylindre contenant une cavité cylindrique. Il a supposé que la coalescence est atteinte quand la zone ligamentaire entre les cavités atteint sa charge limite tandis que les couches horizontales situées de part et d'autre de la cavité demeurent rigides. Il a ainsi obtenu une bonne estimation de la contrainte axiale provoquant la coalescence. [Perrin, 1992] pour sa part, a considéré un cylindre contenant une cavité sphérique. Il a appliqué à cette structure la théorie de la localisation de la déformation de [Rudnicki et Rice, 1975] dans un matériau plastique compressible, et obtenu de bonnes estimations de la porosité critique et de la déformation critique cumulée à la coalescence.

[Gologanu et Leblond, 1993] et [Gologanu *et al.*, 1994] ont observé, grâce à des calculs de cellules élémentaires, une coalescence dans la direction verticale avec apparition de “colonnes” ruinées. Ce résultat a été obtenu en soumettant la structure de Koplik et

Needleman à un chargement axisymétrique avec une contrainte majeure latérale et non plus axiale. Le seul modèle capable de rendre compte de la coalescence en colonnes est à notre connaissance celui de [Gologanu, 1997], dans lequel l’auteur a considéré une structure modèle consistant en un tore cylindrique sain contenant un cylindre fortement poreux.

## 1.3 Le critère de plasticité de Gurson pour des cavités sphériques et ses extensions

### 1.3.1 Critère de Gurson

Ce modèle est obtenu en combinant homogénéisation et analyse limite.

Rappelons donc les éléments essentiels de ces théories en s’inspirant de [Leblond, 2003]. Nous considérons une cellule de volume  $\Omega$ , contenant une cavité de volume  $\omega$  et de porosité  $f = \omega/\Omega$ . Cette cellule est soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\cdot\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur position et  $\mathbf{D}$  le tenseur symétrique de taux de déformation macroscopique.

Le matériau constitutif de la matrice est rigide parfaitement plastique, obéit à un critère de plasticité donné et à la loi d’écoulement associée. Nous définissons la dissipation plastique locale  $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))$  associé au tenseur de taux de déformation local  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  par la formule :

$$\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = \max\{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C\} \quad (1.2)$$

où  $C$  désigne le convexe d’élasticité du matériau.

On définit ensuite la dissipation plastique macroscopique par la formule :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \min\{(1 - f)\langle\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))\rangle_{\Omega-\omega}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \text{ cinématiquement admissible avec } \mathbf{D}\} \quad (1.3)$$

où  $\langle\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))\rangle_{\Omega-\omega}$  est la moyenne de  $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))$  dans la région  $\Omega - \omega$ . Les contraintes provoquant l’écoulement macroscopique sont alors données par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (1.4)$$

[Gurson, 1977] a considéré une cellule sphérique creuse, de rayons intérieur et extérieur  $a$  et  $b$  ( $f = (a/b)^3$ ). La matrice est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises. On note  $\sigma_0$  la limite d’élasticité en traction simple. Dans ce cas la dissipation plastique locale est infinie pour un champ de vitesse compressible et donnée par

$$\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = \begin{cases} \sigma_0 d_{eq} & (\text{dans la matrice}) \\ 0 & (\text{dans la cavité}) \end{cases} \quad (1.5)$$

où

$$d_{eq} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{d}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x})\right)^{1/2}$$

pour un champ incompressible. Dans la minimisation de l'équation (1.3), on peut se restreindre aux champs incompressibles, les champs compressibles donnant un résultat infini dépourvu d'intérêt.

Le champ de vitesse test utilisé dans la matrice est celui de [Rice et Tracey, 1969] et est défini par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{b^3 D_m}{r^2} + \mathbf{D}' \cdot \mathbf{x}, \quad (1.6)$$

où  $D_m = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}'$  est le déviateur de  $\mathbf{D}$ . Ce champ est entièrement déterminé par la donnée de  $\mathbf{D}$ , donc le sous-espace des champs-tests cinématiquement admissibles avec  $\mathbf{D}$  est réduit à ce seul champ. Il en résulte que le calcul de la dissipation macroscopique ne nécessite pas de minimisation mais seulement celui de la dissipation associée au champ considéré.

Après dérivation de  $\Pi(\mathbf{D})$  par rapport à  $\mathbf{D}$  et élimination des composantes de  $\mathbf{D}$  dans l'équation paramétrique (1.4), on obtient une estimation par l'extérieur de la surface de charge sous la forme :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.7)$$

Dans cette expression,  $\Sigma_{eq} = \left( \frac{2}{3} \boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}' \right)^{1/2}$  où  $\boldsymbol{\Sigma}'$  est le déviateur de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}$ . Pour le détail des calculs, le lecteur peut se référer à [Leblond, 2003].

Il a été démontré par [Perrin, 1992] que le critère approché (1.7) constitue une borne supérieure du critère de plasticité macroscopique pour un assemblage de sphères creuses d'Hashin (pour un matériau poreux macroscopiquement isotrope le caractère de borne est une conjecture).

Le critère (1.7) permet de retrouver la solution exacte d'une sphère creuse soumise à une traction hydrostatique :

$$\Sigma_m = -\frac{2\sigma_0}{3} \ln f \quad (1.8)$$

Cependant, la solution fournie par (1.7) pour un chargement purement déviatorique est une borne de type Voigt, qui est de moins bonne qualité que celle prédite par des critères elliptiques de [Ponte-Castaneda, 1991], [Michel et Suquet, 1992], basés sur une approche d'homogénéisation non-linéaire à base variationnelle.

### 1.3.2 Extensions du critère de Gurson

Pour faire bénéficier le critère de Gurson des résultats plus précis de [Ponte-Castaneda, 1991], [Michel et Suquet, 1992] pour des états de contraintes déviatoriques, [Leblond *et al.*, 1994] ont proposé le critère modifié suivant :

$$\left( 1 + \frac{2f}{3} \right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.9)$$

Ce critère respecte à la fois la solution exacte de la sphère creuse sous chargement hydrostatique et l'estimation de [Ponte-Castaneda, 1991] et [Michel et Suquet, 1992] pour des chargements purement déviatoriques.

Pour améliorer les prédictions du critère de Gurson et notamment pour rendre compte des effets d'interaction entre cavités, [Tvergaard, 1981] a modifié le critère de Gurson par l'introduction de facteurs empiriques  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ . Le nouveau critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2 \sigma_0}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (1.10)$$

Après ajustement du critère (1.10) sur des simulations numériques micromécaniques, Tvergaard obtient les valeurs  $q_1 = 1.5$ ,  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$ . D'autres études ont été menées pour déterminer les valeurs de ces paramètres. [Koplik et Needleman, 1988] ont obtenu  $q_1 = 1.25$ ,  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$  à partir de simulations numériques sur des milieux poreux périodiques, alors que [Perrin et Leblond, 1990] ont trouvé  $q_1 = 4/e \simeq 1.47$ ,  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$  sur la base d'une approche auto-cohérente.

Pour reproduire au mieux la phase de coalescence des cavités, [Tvergaard et Needleman, 1984] proposent de remplacer dans le critère (1.10), la vraie porosité  $f$  par une porosité fictive  $f^*$  définie par :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $f_c$  et  $\delta$  sont des coefficients empiriques, représentant respectivement la porosité critique de début de la coalescence et un facteur accélérateur de la croissance des cavités. Le nouveau modèle obtenu est dit de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN).

## 1.4 Effets de forme des cavités : critères de plasticité pour des cavités sphéroïdales

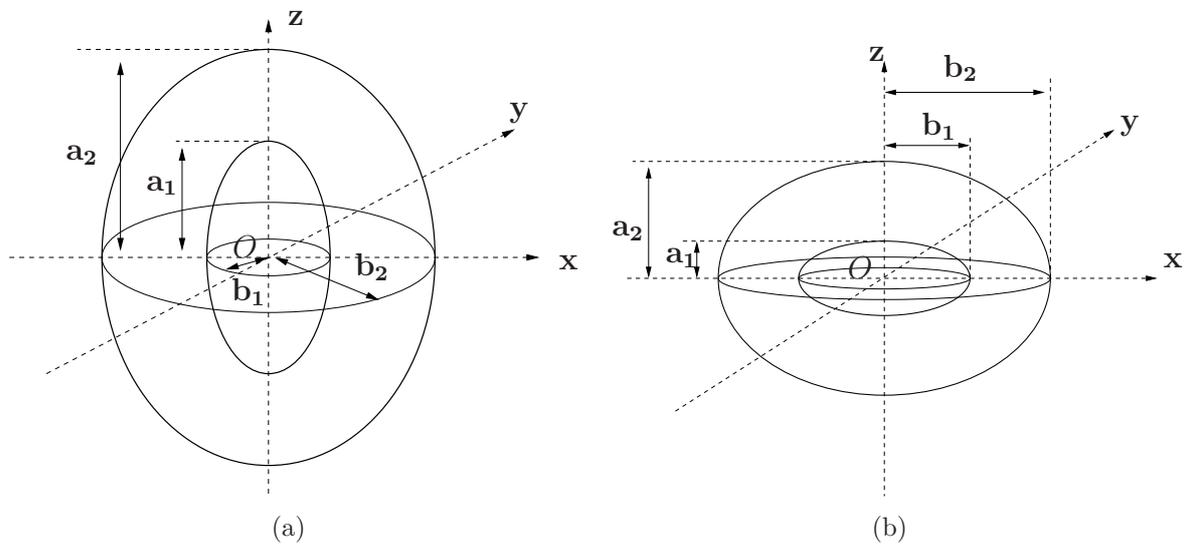
La prise en compte des effets de forme des cavités dans les modèles homogénéisés, a fait l'objet de beaucoup d'études. On peut citer par exemple [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997], [Ponte-Castaneda et Zaidman, 1994], [Garajeu, 1995], [Monchiet, 2006]. Mais nous présentons ici en détail seulement le critère GLD de Gologanu et celui de [Monchiet, 2006] qui sont basés sur l'approche par analyse-limite utilisée par la suite.

D'autres auteurs comme [Monchiet *et al.*, 2008], [Keralavarma et Benzerga, 2008] ont étendu le modèle GLD au cas de matrices plastiquement anisotropes, obéissant au critère de Hill.

## Critères de [Gologanu et Leblond, 1993] et [Gologanu *et al.*, 1994]

Les critères proposés par [Gologanu et Leblond, 1993] et [Gologanu *et al.*, 1994] sont des extensions à des cavités sphéroïdales (ellipsoïdales axisymétriques), de forme allongée ou aplatie, du critère de [Gurson, 1977].

La géométrie considérée est un sphéroïde de demi-axes  $a_2$  (suivant  $Oz$ ) et  $b_2$  (suivant  $Ox$  et  $Oy$ ), d'excentricité  $e_2$ , contenant une cavité sphéroïdale confocale de demi-axes  $a_1$  (suivant  $Oz$ ) et  $b_1$  (suivant  $Ox$  et  $Oy$ ) et d'excentricité  $e_1$  (figure (1.1)a,b). La porosité est donnée par  $f = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2}$ .



**Figure 1.2:** Cellule sphéroïdale allongée (a) ou aplatie (b) contenant une cavité sphéroïdale confocale.

La matrice est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises avec limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction simple.

L'ingrédient essentiel menant aux critères est le champ de vitesse-test choisi. Les auteurs ont utilisé deux champs de vitesse. Le premier correspond à un taux de déformation déviatorique uniforme et le second est un champ de vitesse de la famille définie par [Lee et Mear, 1992] qui permet de décrire l'expansion de la cavité sphéroïdale, plongée dans un milieu infini. Ce second champ dépend d'un certain nombre de coefficients  $B_{km}$ ,  $C_{km}$  qui peuvent être ajustés afin de vérifier les conditions de taux de déformation homogène au bord de la cellule. Les auteurs ont pris tous ces coefficients nuls sauf  $B_{00}$  et  $B_{22}$ .

Dans les premiers modèles décrits dans cette section, ces coefficients ont été choisis de manière à respecter des conditions de taux de déformation homogène sur tous les sphéroïdes confocaux avec la cavité et l'ellipsoïde extérieur.

Les critères proposés ont été obtenus essentiellement dans le cas d'un chargement axisymétrique et se présentent sous la forme suivante :

$$\frac{C}{\sigma_0^2}(\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx} + \eta\Sigma_h)^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\kappa\frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (1.12)$$

où

$$\begin{cases} \Sigma_h \equiv 2\alpha_2\Sigma_{xx} + (1 - 2\alpha_2)\Sigma_{zz}, \\ \alpha_2 = \alpha(e_2) \\ c \equiv \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|} \end{cases} \quad (1.13)$$

Cependant les expressions des coefficients  $C$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  et  $g$  diffèrent suivant la forme de la cavité.

- Dans le cas d’une cavité sphéroïdale allongée [Gologanu et Leblond, 1993], ces coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} \kappa_{1st\ approx}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln f} \\ \kappa_{2nd\ approx}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{\ln(e_1/e_2)}{\ln f} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \frac{(e_1^2 - e_2^2)}{\ln f} \\ \alpha(e) = \frac{1}{2e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} \tanh^{-1} e \\ C = 1 \\ \eta = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

- Dans le cas d’une cavité sphéroïdale aplatie [Gologanu *et al.*, 1994], ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \kappa^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{g(1-f)(g+2f+gf)}{3(g+1)^2(g+f)^2 \ln \frac{g+1}{g+f}}, \\ \eta = \frac{\kappa(1-f)(g+1)(g+f)sh}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + 2(g+1)(g+f)[\kappa(\alpha_2 - \alpha_1)sh - ch]}, \\ C = \frac{(g+1)(g+f)\kappa sh}{[1-f-2\eta(\alpha_2 - \alpha_1)]\eta}, \quad sh \equiv \sinh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1)), \quad ch \equiv \cosh(2\kappa(\alpha_2 - \alpha_1)), \\ g = \frac{4e_2^3}{3\chi\sqrt{1-e_2^2}}, \quad \chi = \sqrt{\pi^2 + 32/3}, \quad \alpha_1 \equiv \alpha(e_1), \quad \alpha(e) = -\frac{1-e^2}{2e^2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^3} \sin^{-1} e \end{cases} \quad (1.15)$$

Remarquons que dans le cas particulier d’une cavité sphérique ( $e_1 \rightarrow 0$ ,  $e_2 \rightarrow 0$ ), il vient  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$ ,  $g = \eta = 0$ ,  $\kappa = 3/2$  et  $C = 1$ . Le critère défini par (1.12) se réduit donc au critère de [Gurson, 1977].

Dans le cas d’un “sandwich” (géométrie constituée par deux couches de matière perpendiculaires à l’axe  $Oz$ , séparées par un vide),  $g$  tend vers l’infini (car  $e_2 \rightarrow 1$ ) et le critère coïncide avec la solution exacte pour une telle géométrie.

Dans le cas d’une fissure en “pièce de monnaie”, le critère présente une certaine similitude avec celui de [Gurson, 1977] pour de faibles valeurs de la porosité équivalente  $g$ , qui remplace la porosité  $f$  nulle dans ce cas.

### Critères de [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997]

Les critères précédents reproduisent assez bien les résultats numériques de simulations micromécaniques (supposés exacts) dans tous les cas, sauf dans celui d'une fissure en "pièce de monnaie" où l'écart entre les surfaces de charge théorique et numérique est un peu élevé (voir [Gologanu *et al.*, 1994]). Pour remédier à ce problème, les auteurs ont amélioré leur critère en ajoutant aux champs de vitesse précédents des champs supplémentaires. La forme du nouveau critère pour un chargement axisymétrique est la même que précédemment (équation (1.12)). Cependant, hormis le coefficient  $\alpha_1$ , les expressions des autres coefficients ont été améliorées. Les coefficients  $\eta$  et  $C$  sont donnés par les formules (1.15)<sub>2,3</sub>, mais la valeur du coefficient  $\alpha_2$  a été modifiée dans ces formules.

Dans le cas d'une cavité sphéroïdale allongée,

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1 + e_2^2}{3 + e_2^4} \\ \kappa^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\ln f} \left( (\sqrt{3} - 2) \ln \frac{e_1}{e_2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{3 + e_1^2 + 2\sqrt{3 + e_1^4}}{3 + e_2^2 + 2\sqrt{3 + e_2^4}} + \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + e_1^4}}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + e_2^4}} \right) \\ g = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

et dans celui d'une cavité sphéroïdale aplatie,

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{(1 - e_2^2)(1 - 2e_2^2)}{3 - 6e_2^2 + 4e_2^4} \\ \kappa^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{3}(g_f - g_1) + \frac{2}{5}(g_f^{5/2} - g_1^{5/2})\left(\frac{4}{3} - g_f^{5/2} - g_1^{5/2}\right)}{\ln(g_f/g_1)}, \quad g_f \equiv \frac{g}{g + f}, \quad g_1 \equiv \frac{g}{g + 1}, \\ g = \frac{e_2^3}{\sqrt{1 - e_2^2}} \end{cases} \quad (1.17)$$

Le critère obtenu donne un bon accord avec les résultats numériques dans le cas d'une fissure en "pièce de monnaie".

Pour étendre ce critère au cas d'un chargement arbitraire (non axisymétrique), les auteurs ont considéré des champs de vitesse supplémentaires. Le critère final se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} C \frac{\|\Sigma' + \eta \Sigma_h \mathbf{X}\|^2}{\sigma_0^2} + (1 - C) \frac{\|\bar{\Sigma}'\|^2 + 3\Sigma_{xz}^2 + 3\Sigma_{yz}^2}{\sigma_0^2} \\ + 2(g + 1)(g + f) \cosh\left(\frac{\kappa \Sigma_h}{\sigma_0}\right) - (g + 1)^2 - (g + f)^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dans cette expression,  $\|\cdot\|$  représente la norme de von Mises :  $\|\mathbf{T}\| \equiv \sqrt{(3/2)\mathbf{T} : \mathbf{T}}$ ;  $\bar{\Sigma}$  représente la projection de  $\Sigma$  dans le plan  $Oxy$ ;  $\Sigma'$  et  $\bar{\Sigma}'$  représentent respectivement les déviateurs de  $\Sigma$  et  $\bar{\Sigma}$ ;  $\Sigma_h$  et  $\mathbf{X}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \Sigma_h &= \alpha_2(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) + (1 - \alpha_2)\Sigma_{zz}, \\ \mathbf{X} &= \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est la base orthonormée associée aux coordonnées  $x, y$  et  $z$ . Les coefficients  $C, \kappa, \eta$  et  $g$  sont donnés par les formules (1.15)<sub>2,3</sub>-(1.16)<sub>1,2,3</sub> dans le cas d'une cavité allongée et par (1.15)<sub>2,3</sub>-(1.17)<sub>1,2,3</sub> dans celui d'une cavité aplatie.

## Critère de [Monchiet, 2006] dans le cas d'une matrice isotrope

Ces auteurs ont aussi utilisé l'approche par analyse-limite et les mêmes cellules que dans le modèle GLD. Cependant, le champ de vitesse test utilisé est celui d'Eshelby. Cette classe de champs de vitesse est plus large que celle des champs de [Lee et Mear, 1992], mais ne permet pas de satisfaire exactement des conditions de taux de déformation homogène sur le bord de la cellule. Les auteurs ont donc opté pour des conditions de contrainte homogène au bord. Le critère obtenu se présente sous la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_A}{\sigma_0}\right)^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(\frac{\Sigma_B}{\Sigma_0}\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (1.20)$$

où  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \Sigma_B^2 &= \kappa_1 \Sigma_p^2 + \kappa_2 \Sigma_q^2 + \kappa_3 \Sigma_p \Sigma_q + \kappa_4 \Sigma_s^2 + \kappa_5 \Sigma_t^2, \\ \Sigma_A^2 &= \tilde{\Sigma}_{eq}^2 - (1+g)(f+g) \Sigma_B^2, \\ \tilde{\Sigma}_{eq}^2 &= (1+\mu_1) \Sigma_q^2 + \mu_2 \Sigma_h^2 + \mu_3 \Sigma_q \Sigma_h + 3(1+\mu_4) \Sigma_s^2 + 3(1+\mu_5) \Sigma_t^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Les quantités  $\Sigma_p, \Sigma_q, \Sigma_t$  et  $\Sigma_s$  sont données par :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} (1 - \alpha_2) + \Sigma_{zz} \alpha_2; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} - \Sigma_{zz}; \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4}(\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx})^2 + \Sigma_{xy}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{yz}^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pour les expressions de tous les coefficients figurant dans ce critère, le lecteur peut se référer à [Monchiet, 2006]. Le critère (1.20) se démarque des autres critères de la littérature par la présence de la racine carrée d'une forme quadratique des composantes de  $\Sigma$  dans le terme en "cosh". Il reproduit assez bien les résultats numériques micromécaniques, surtout dans le cas d'une fissure en "pièce de monnaie".

## 1.5 Conclusion

Cette étude bibliographique a été consacrée tout d'abord à l'exposé des trois mécanismes principaux de la rupture des matériaux ductiles. Nous avons mis l'accent sur la phase de croissance seule considérée dans le présent mémoire. On a rappelé certains critères existants obtenus par la technique de l'analyse-limite. Ces critères ont été développés pour des cavités de forme particulière telle que les formes sphérique, cylindrique et sphéroïdale allongée ou aplatie.

Etant donné qu'il existe d'autres types de cavités, et sachant que certaines études ont montré l'influence de leur forme sur le comportement macroscopique du matériau, nous proposons, dans le chapitre suivant, d'étendre l'analyse-limite de [Gologanu, 1997] à des cavités ellipsoïdales générales.

## Chapitre 2

# Analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale creuse

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Description de la cellule ellipsoïdale</b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Champ de vitesse test</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal confocal</b>	<b>22</b>
2.4.1	Généralités	22
2.4.2	Estimation par l'extérieur de la dissipation plastique macroscopique	23
<b>2.5</b>	<b>Étude asymptotique des termes de <math>\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)}</math></b>	<b>25</b>
2.5.1	Limites des composantes diagonales de $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow +\infty$	25
2.5.2	Limites des composantes diagonales de $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow 0$	26
<b>2.6</b>	<b>Approximation de la dissipation plastique macroscopique et critère macroscopique approché</b>	<b>33</b>
2.6.1	Simplification du terme croisé $\frac{4A}{3} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta$	33
2.6.2	Simplification de la dépendance spatiale de $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$	34
2.6.3	Critère macroscopique approché	38
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>

---

## 2.1 Introduction

La phase de croissance dans le processus de ruine des matériaux ductiles poreux a fait l'objet de plusieurs études. Le modèle le plus célèbre est celui de [Gurson, 1977]. C'est un modèle homogénéisé basé l'analyse limite d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord. Gurson a utilisé les champs de vitesse proposé par [Rice et Tracey, 1969] pour décrire l'expansion de la cavité.

Néanmoins ce critère ne rend pas compte des changements de forme des cavités. Par ailleurs, les études numériques de [Hom et McMeeking, 1989] et [Lee et Mear, 1992] montrent une influence non négligeable de la forme des cavités sur leur croissance.

Afin d'incorporer les effets de forme des cavités, [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] ont étendu le modèle de Gurson aux cavités sphéroïdales allongés ou aplatis. Ce modèle découle de l'analyse-limite d'une cellule sphéroïdale contenant un vide sphéroïdal confocal, soumis à des conditions de taux de déformation homogène. Le champ de vitesse test utilisé satisfaisait des conditions de taux de déformation homogène sur chaque sphéroïde confocal avec le vide et l'ellipsoïde extérieur. Ce critère fut ensuite amélioré par [Gologanu *et al.*, 1997] en considérant des champs de vitesse tests plus sophistiqués et en utilisant les bornes pour les composites non linéaires développées par [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991] et [Michel et Suquet, 1992].

Néanmoins, les études expérimentales affirment l'existence d'autres types de cavités telles que les cavités ellipsoïdales générales qu'on va étudier dans ce chapitre. Ces cavités ellipsoïdales générales se retrouvent le plus souvent dans des tôles laminés et surviennent à l'issue du processus de laminage. En effet, les tôles contiennent initialement des cavités presque sphériques. Au cours d'une opération de laminage, ces cavités se déforment différemment dans les trois directions du tôle qui sont : le sens long, le sens travers long et sens travers court. Plus précisément, on a de grandes déformations dans le sens long, de moyennes déformations dans le sens travers long et de petites dans le sens travers court. Par conséquent, à l'issue de l'opération, ces cavités deviendront des ellipsoïdes ayant trois axes différents.

A notre connaissance, le problème sur les cavités ellipsoïdales générales, a été abordé pour la première fois sous un angle différent par [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998] et [Danas et Ponte-Castaneda, 2009a], [Danas et Ponte-Castaneda, 2009b]. Ces auteurs ont utilisé une approche variationnelle d'homogénéisation non linéaire.

Le but de ce chapitre est d'étendre l'analyse de Gologanu à une *cavité ellipsoïdale générale* contenue dans une matrice rigide parfaitement plastique qui obéit au critère de von Mises. L'avantage de cette approche est qu'elle permet d'obtenir un critère ayant une expression simple faisant un couplage entre la plasticité et l'endommagement (semblable à celle de Gurson) et qui peut être implanté facilement dans un code de calcul par éléments finis. Ce chapitre reprend sous une forme détaillée les résultats de la publication [Madou et Leblond, 2012a] parue dans la revue *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.

## 2.2 Description de la cellule ellipsoïdale

Nous allons considérer un ellipsoïde arbitraire de demi-axes  $A, B, C$  ( $A > B > C$ ), de volume  $\frac{4\pi}{3}\Omega$ , contenant un vide ellipsoïdal confocal de demi-axes  $a, b, c$  ( $a > b > c$ ), de volume  $\frac{4\pi}{3}\omega$  avec

$$\Omega = ABC \quad ; \quad \omega = abc. \quad (2.1)$$

Les demi-axes sont reliés par la relation de confocalité  $A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2$ .

La fraction volumique du vide est :

$$f = \frac{\omega}{\Omega}. \quad (2.2)$$

Cette géométrie représente une approximation raisonnable d'une cellule élémentaire dans un milieu poreux. Pour ce type de géométrie, il est judicieux d'introduire les coordonnées ellipsoïdales.

Le système de coordonnées ellipsoïdales (défini par [Morse et Feshbach, 1953]) est défini par un triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$ . Ces coordonnées ellipsoïdales sont associées à tout triplet  $a, b, c$  avec ( $a > b > c > 0$ ) et satisfont aux inégalités :

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2 \quad (2.3)$$

Elles sont reliées au système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}} \\ z = \pm \sqrt{\frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

On note qu'à chaque triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$  correspond en fait 8 triplets  $(x, y, z)$ . Les équations (2.4)<sub>4,5,6</sub> combinées avec les inégalités (2.3) montrent que les surfaces iso- $\lambda$  qu'on va noter  $\mathcal{E}_\lambda$  sont des ellipsoïdes confocaux de demi-axes  $\sqrt{a^2 + \lambda}$ ,  $\sqrt{b^2 + \lambda}$ ,  $\sqrt{c^2 + \lambda}$  alors que les surfaces iso- $\mu$  et iso- $\nu$  sont des hyperboloïdes à une et deux nappes respectivement.

Définissons une fonction  $v$  par :

$$v(\rho) = \sqrt{|a^2 + \rho||b^2 + \rho||c^2 + \rho|}. \quad (2.5)$$

Notons que (pour  $\lambda > -c^2$ ),  $v(\lambda)$  désigne à un facteur  $\frac{4\pi}{3}$  près le volume enclos dans la surface ellipsoïdale  $\mathcal{E}_\lambda$ . L'élément infinitésimal du volume est donné par :

$$d\Omega = \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)}{8v(\lambda)v(\mu)v(\nu)} d\lambda d\mu d\nu \quad (2.6)$$

Les expressions des dérivées partielles  $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ , que nous serons amenés à utiliser plus loin, sont obtenues par différentiation de l'équation (2.4)<sub>4</sub> respectivement par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{2x}{T(a^2 + \lambda)} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{2y}{T(b^2 + \lambda)} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{2z}{T(c^2 + \lambda)} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

avec

$$T = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \quad (2.8)$$

Les valeurs de  $\lambda$  sont 0 et  $\Lambda$  respectivement sur les ellipsoïdes intérieur et extérieur. En se référant à la notation introduite plus haut, ces ellipsoïdes sont respectivement identifiés à  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_\Lambda$ . De même  $v(0) = \omega$  et  $v(\Lambda) = \Omega$ . Les demi-axes  $A, B, C$  de  $\mathcal{E}_\Lambda$  sont liés à ceux  $a, b, c$  de  $\mathcal{E}_0$  par les relations :

$$A = \sqrt{a^2 + \Lambda} \quad ; \quad B = \sqrt{b^2 + \Lambda} \quad ; \quad C = \sqrt{c^2 + \Lambda} \quad (2.9)$$

Il découle de cette dernière équation, de la définition (2.2) de la porosité et des expressions (2.1) de  $\omega$  et  $\Omega$ , que le paramètre  $\Lambda$  est une fonction des demi-axes du vide et de la porosité à travers l'équation polynomiale du troisième degré :

$$(a^2 + \Lambda)(b^2 + \Lambda)(c^2 + \Lambda) - \frac{a^2 b^2 c^2}{f^2} = 0 \quad (2.10)$$

L'ellipsoïde complètement aplati confocal avec  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_\Lambda$  jouera un rôle important dans la suite. Les demi-axes de cet ellipsoïde sont donnés par :

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 - c^2} \quad ; \quad \bar{b} = \sqrt{b^2 - c^2} \quad ; \quad \bar{c} = 0. \quad (2.11)$$

La famille des ellipsoïdes confocaux  $\mathcal{E}_\lambda$  peut être caractérisée par le seul paramètre adimensionnel :

$$k = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (2.12)$$

ou le paramètre équivalent

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad (2.13)$$

Les paramètres  $k$  et  $k'$  sont dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Les valeurs particulières ( $k = 0, k' = 1$ ) et ( $k = 1, k' = 0$ ) correspondent respectivement aux vides sphéroïdaux, allongés ( $a > b = c$ ) et aplatis ( $a = b > c$ ). Pour le vide sphérique ( $a = b = c$ ),  $k$  et  $k'$  sont indéterminés. La cellule est constituée d'un matériau rigide parfaitement plastique obéissant au critère

de von Mises. On notera  $\sigma_0$  le seuil d'écoulement en traction simple.

Pour effectuer une analyse-limite de cette cellule ellipsoïdale (estimation par l'extérieur de la surface de charge) nous avons besoin d'un champ de vitesse test. Ce champ doit être à divergence nulle et satisfaire les conditions de taux de déformation homogène sur le bord extérieur.

## 2.3 Champ de vitesse incompressible satisfaisant à des conditions de taux de déformation homogène sur une famille d'ellipsoïdes confocaux

Un champ de vitesse satisfaisant l'incompressibilité de la matrice et des conditions de taux de déformation homogène sur une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux a été récemment découvert par [Leblond et Gologanu, 2008]. Les auteurs ont établi l'existence, l'unicité et l'expression explicite de ce champ quel que soit le taux de déformation imposé sur l'ellipsoïde extérieur (voir l'annexe A).

Ce champ de vitesse se présente sous la forme suivante en coordonnées ellipsoïdales :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\lambda)\mathbf{r} \iff \begin{cases} v_x(r) = D_{xx}(\lambda)x + D_{xy}(\lambda)y + D_{xz}(\lambda)z \\ v_y(r) = D_{yx}(\lambda)x + D_{yy}(\lambda)y + D_{yz}(\lambda)z \\ v_z(r) = D_{zx}(\lambda)x + D_{zy}(\lambda)y + D_{zz}(\lambda)z \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  désigne le vecteur position et  $\mathbf{D}(\lambda)$  un tenseur symétrique du second ordre défini par :

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathcal{A}\mathbf{D}^0(\lambda) + \mathbf{\Delta} \quad (2.15)$$

où  $\mathcal{A}$  est une constante arbitraire,  $\mathbf{\Delta}$  un tenseur symétrique déviatorique du second ordre arbitraire et  $\mathbf{D}^0(\lambda)$  le tenseur symétrique du second ordre dépendant de  $\lambda$  défini par :

$$\begin{cases} D_{xx}^0(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(a^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{yy}^0(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(b^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{zz}^0(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(c^2+\rho)v(\rho)} \\ D_{xy}^0(\lambda) = D_{yz}^0(\lambda) = D_{zx}^0(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Les intégrales définissant les composantes diagonales du tenseur  $\mathbf{D}^0$  sont de type elliptique, mais la trace de ce tenseur a une expression simple :

$$\text{tr}\mathbf{D}^0(\lambda) = \frac{1}{v(\lambda)} \quad (2.17)$$

Le champ de vitesse

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\lambda).\mathbf{r} \quad (2.18)$$

décrit approximativement l'expansion du vide sous un chargement hydrostatique. En effet, dans certains cas particuliers, le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0$  coïncide avec certains champs de vitesse classiques :

- Dans le cas sphérique ( $a = b = c$ ), ce champ est simplement le champ radial incompressible inversement proportionnel au carré de la distance à l'origine. C'est le champ proposé par [Rice et Tracey, 1969] pour décrire l'expansion du vide.
- Dans le cas d'un cylindre à base circulaire ( $a = +\infty, b = c$ ), c'est le champ plan radial inversement proportionnel à la distance à l'axe de révolution.
- Dans les cas des sphéroïdes, allongés ( $a > b = c$ ) ou aplatis ( $a = b > c$ ), il coïncide avec les champs test utilisés par [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994] pour décrire l'expansion du vide.

## 2.4 Analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal confocal

### 2.4.1 Généralités

La cellule ellipsoïdale présentée dans la section 2.2 sera soumise à des conditions de taux de déformation homogène ([Mandel, 1964], [Hill, 1967]) sur le bord extérieur qu'on va noter  $\partial\mathcal{E}_\Lambda$  :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}\cdot\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{E}_\Lambda \quad (2.19)$$

Ces conditions de taux de déformation homogène sur le bord sont acceptables, au moins avant l'apparition des phénomènes de localisation qui sont hors de portée de ce travail.

Il existe un unique champ de vitesse de la forme (2.14) compatible avec le tenseur de taux de déformation  $\mathbf{D}$  imposé sur le bord extérieur. En effet, en prenant la trace dans les deux membres de l'équation (2.15), on obtient :

$$\mathcal{A} \operatorname{tr}\mathbf{D}^0(\Lambda) = \frac{\mathcal{A}}{v(\Lambda)} = \operatorname{tr}\mathbf{D} \Rightarrow \mathcal{A} = \Omega \operatorname{tr}\mathbf{D} \quad (2.20)$$

d'où l'on déduit :

$$\Delta = \mathbf{D} - \Omega(\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{D}^0(\Lambda) \quad (2.21)$$

L'unicité du couple  $(\mathcal{A}, \Delta)$  confirme bien l'unicité du champ. Ce champ de vitesse ainsi défini peut être utilisé dans l'analyse-limite de notre cellule. Pour cela, nous avons besoin des composantes du taux de déformation microscopique  $\mathbf{d}(\mathbf{r})$  pour le calcul de la dissipation plastique macroscopique. En partant des équations (2.14) et (2.15) on obtient :

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}\mathbf{d}^0(\mathbf{r}) + \Delta \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{d}^0(\mathbf{r})$  désigne le tenseur de taux de déformation microscopique associé au champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ . Ses composantes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{xx}^0(\mathbf{r}) = D_{xx}^0(\lambda) - \frac{x^2}{v(\lambda)T(a^2 + \lambda)^2} \\ d_{yy}^0(\mathbf{r}) = D_{yy}^0(\lambda) - \frac{y^2}{v(\lambda)T(b^2 + \lambda)^2} \\ d_{zz}^0(\mathbf{r}) = D_{zz}^0(\lambda) - \frac{z^2}{v(\lambda)T(c^2 + \lambda)^2} \\ d_{xy}^0(\mathbf{r}) = -\frac{xy}{v(\lambda)(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)T} \\ d_{yz}^0(\mathbf{r}) = -\frac{yz}{v(\lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)T} \\ d_{xz}^0(\mathbf{r}) = -\frac{xz}{v(\lambda)(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)T} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

## 2.4.2 Estimation par l'extérieur de la dissipation plastique macroscopique

La dissipation plastique macroscopique  $\Pi^+(\mathbf{D})$  est la moyenne sur le domaine ellipsoïdal de la dissipation plastique locale  $\sigma_0 d_{eq}(\mathbf{r})$  où  $d_{eq}(\mathbf{r})$  est la déformation équivalente :

$$\begin{aligned} \Pi^+(\mathbf{D}) &= \frac{\sigma_0}{\frac{4\pi}{3}\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \sum_{i=1}^8 d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) d\Omega \\ &= \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \left( \frac{1}{\frac{4\pi}{3}} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \left( \sum_{i=1}^8 d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) \right) \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)}{8v(\lambda)v(\mu)v(\nu)} d\mu d\nu \right) d\lambda \end{aligned} \quad (2.24)$$

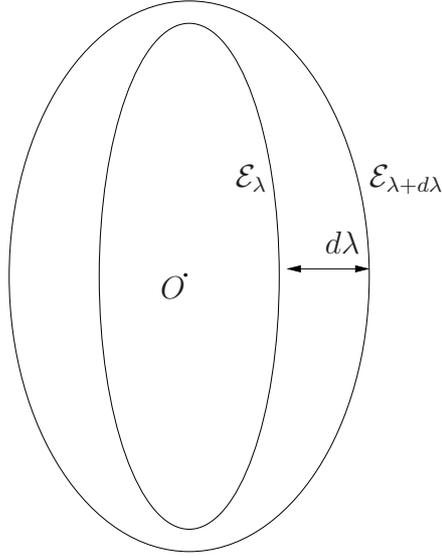
où les  $d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu)$ ,  $i = 1, \dots, 8$  désignent les valeurs de  $d_{eq}(\mathbf{r})$  pour les 8 triplets  $(x, y, z)$  correspondant au triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$ , avec :

$$d_{eq}^2(\mathbf{r}) = \frac{2}{3} \mathbf{d}(\mathbf{r}) : \mathbf{d}(\mathbf{r}) = \frac{2}{3} \mathcal{A}^2 d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) + \frac{4}{3} \mathcal{A} \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) : \mathbf{\Delta} + \Delta_{eq}^2 \quad (2.25)$$

où  $\Delta_{eq}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta}$ .

Dans le but de se ramener à une expression semblable à celle de [Gurson, 1977], définissons convenablement la moyenne pondérée de  $d_{eq}(\mathbf{r})$  sur toute surface ellipsoïdale  $\mathcal{E}_\lambda$  de constante  $\lambda$ . Cette moyenne sera notée  $\langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ .

Pour cela considérons les surfaces  $\mathcal{E}_\lambda$  et  $\mathcal{E}_{\lambda+d\lambda}$  où  $d\lambda$  désigne une variation infinitésimale de  $\lambda$ . Par définition,  $\langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \frac{4\pi}{3} dv(\lambda)$  est l'intégrale de  $d_{eq}$  dans le volume compris entre



**Figure 2.1:** Domaine enclos entre les surfaces  $\mathcal{E}_\lambda$  et  $\mathcal{E}_{\lambda+d\lambda}$

$\mathcal{E}_\lambda$  et  $\mathcal{E}_{\lambda+d\lambda}$ . Par conséquent :

$$\langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}v(\lambda)\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \left( \sum_{i=1}^8 d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) \right) \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)}{8v(\mu)v(\nu)} d\mu d\nu \quad (2.26)$$

Avec cette notation, la dissipation s'écrit :

$$\Pi^+(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} dv(\lambda) \quad (2.27)$$

En utilisant l'inégalité classique  $\langle f \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^2 \leq \langle f^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  (valable quelle que soit la fonction de pondération utilisée pour définir la moyenne), il en résulte que :

$$\Pi^+(\mathbf{D}) \leq \Pi^{++}(\mathbf{D}) \equiv \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \sqrt{\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} dv(\lambda) \quad (2.28)$$

On introduit alors une première approximation :

*A1* : La quantité  $\Pi^{++}(\mathbf{D})$  représente une approximation acceptable de la dissipation plastique  $\Pi^+(\mathbf{D})$ .

Cette hypothèse a déjà été introduite par ([Leblond, 2003], Chapitre 8) pour obtenir le critère de Gurson dans le cas des vides sphériques, et par ([Gologanu et Leblond,

1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997]) pour obtenir le critère GLD dans le cas des vides sphéroïdaux. Il est probable, que la même approximation donnera de bons résultats dans le cas des ellipsoïdes généraux.

Les contraintes provoquant l'écoulement macroscopique sont alors données par :

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi^{++}}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (2.29)$$

Cette équation définit la surface de plasticité macroscopique sous une forme paramétrique. Cette surface est de dimension 5 dans l'espace des contraintes qui est de dimension 6. L'intégration intervenant dans la détermination de  $\Pi^{++}(\mathbf{D})$  est une tâche difficile qui va nécessiter un certain nombre d'approximations qui seront introduites par la suite.

## 2.5 Étude asymptotique des termes de $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)}$

Dans le but de trouver une approximation de  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)}$  qui nous permettra d'expliquer  $\Pi^{++}(\mathbf{D})$ , nous allons étudier le comportement de cette quantité dans les cas-limites de très petites et très grandes surfaces  $\mathcal{E}_\lambda$ . Cela revient à étudier les limites de  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)}$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  et  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

En prenant la moyenne dans chaque membre de l'équation (2.25), on obtient :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{2}{3} \mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \frac{4}{3} \mathcal{A} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta + \Delta_{eq}^2 \quad (2.30)$$

Étant donné que les composantes hors-diagonale de  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  sont nulles pour des raisons de symétrie, nous allons juste étudier les limites de  $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  et des composantes diagonales de  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ .

### 2.5.1 Limites des composantes diagonales de $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow +\infty$

– **Limites des composantes diagonales de  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$**

Lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ , l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_\lambda$  devient une sphère de rayon  $r \sim \lambda^{1/2}$  et de volume  $\frac{4\pi}{3}v(\lambda)$  avec  $v(\lambda) \sim \lambda^{3/2}$ . Donc les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  jouent le même rôle. Par conséquent :

$$D_{xx}^0(\lambda) \sim D_{yy}^0(\lambda) \sim D_{zz}^0(\lambda) \quad (2.31)$$

Si l'on considère la composante  $D_{xx}^0(\lambda)$  par exemple, on a lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} D_{xx}^0(\lambda) &\underset{v(\lambda) \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\rho}{2\rho^{5/2}} \\ &\underset{v(\lambda) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3\lambda^{3/2}} \underset{v(\lambda) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v(\lambda)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

De plus,  $T \underset{v(\lambda) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2} \underset{v(\lambda) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda}$  d'où :

$$\frac{x^2}{a^2 T v(\lambda)} \sim_{v(\lambda) \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\lambda v(\lambda)} \quad (2.33)$$

A partir des équations (2.32) et (2.33), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} &\sim_{v(\lambda) \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{1}{3v(\lambda)} - \frac{x^2}{\lambda} v(\lambda) \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ &\sim_{v(\lambda) \rightarrow +\infty} \frac{1}{v(\lambda)} \left( \frac{1}{3} - \frac{\langle x^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}{\lambda} \right) = o\left(\frac{1}{v(\lambda)}\right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

car les valeurs moyennes  $\langle x^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ ,  $\langle y^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ ,  $\langle z^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  sont égales et valent  $\frac{\lambda}{3}$ .  
En résumé les limites à l'infini des composantes diagonales s'écrivent :

$$\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = o\left(\frac{1}{v(\lambda)}\right) \quad (2.35)$$

– **Limite de  $\langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$**

Lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ , le tenseur  $\mathbf{D}^0(\lambda)$  est identique à  $\frac{1}{3v(\lambda)}\mathbf{1}$  (en utilisant l'équation (2.16)) et le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  devient identique au champ incompressible radial  $\frac{1}{3v(\lambda)}\mathbf{r}$  (en utilisant l'équation (2.18)). Il vient que le taux de déformation équivalente devient uniforme et égal à  $\frac{1}{3v(\lambda)}$  sur la surface  $\mathcal{E}_\lambda$ . Par conséquent :

$$\langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim_{v(\lambda) \rightarrow +\infty} \frac{4}{9v^2(\lambda)} \quad (2.36)$$

## 2.5.2 Limites des composantes diagonales de $\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et de $\langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $v(\lambda) \rightarrow 0$

Lorsque  $v(\lambda) \rightarrow 0$ , la surface  $\mathcal{E}_\lambda$  est proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati de demi-axes  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0$ . L'étude asymptotique des quantités  $\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  et  $\langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  dans ces conditions est une tâche difficile et doit être menée séparément dans le cas général où  $a > b > c$  et dans les cas particuliers où  $a > b = c$ ,  $a = b > c$  et  $a = b = c$ , correspondant respectivement au vide sphéroïdal allongé, sphéroïdal aplati et sphérique.

### 2.5.2.1 Cas général ( $a > b > c$ )

L'étude asymptotique dans le cas où la cavité est proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati sera facilitée par l'utilisation des coordonnées ellipsoïdales  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$  associées aux demi-axes  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0)$  de cet ellipsoïde. Ces nouvelles coordonnées sont reliées aux anciennes  $(\lambda, \mu, \nu)$ , associées aux demi-axes  $(a, b, c)$ , par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} &= \lambda + c^2 \\ \bar{\mu} &= \mu + c^2 \\ \bar{\nu} &= \nu + c^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

et sont liées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  à travers les mêmes relations que précédemment avec  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  au lieu de  $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ . Puisque c'est lorsque  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$  que la surface  $\mathcal{E}_\lambda$  est proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati, on va s'intéresser aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} L_x &= \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}, & L_y &= \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ L_z &= \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}, & L^2 &= \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pour cela, nous avons besoin des expressions asymptotiques de  $x, y, z, T$  et  $v(\lambda)$  lorsque  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ . Par passage à la limite, les équations (2.4)<sub>1,2,3</sub> deviennent :

$$\begin{cases} x \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \pm \left( \frac{(\bar{a}^2 + \bar{\mu})(\bar{a}^2 + \bar{\nu})}{|\bar{a}^2 - \bar{b}^2|} \right)^{1/2} \\ y \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \pm \left( \frac{(\bar{b}^2 + \bar{\mu})(\bar{b}^2 + \bar{\nu})}{|\bar{b}^2 - \bar{a}^2|} \right)^{1/2} \\ z \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \pm \left( \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\nu}}{\bar{a}^2\bar{b}^2} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (2.39)$$

De même les expressions de  $v(\lambda)$  donnée par (2.5) et de  $T$  donnée par (2.8) deviennent :

$$\begin{cases} T \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{x^2}{\bar{a}^4} + \frac{y^2}{\bar{b}^4} + \frac{z^2}{\bar{\lambda}^2} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{z^2}{\bar{\lambda}^2} \\ v(\lambda) \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \bar{a}\bar{b}\sqrt{\bar{\lambda}} \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous avons aussi besoin d'étudier le comportement des quantités  $\frac{x^2}{(\bar{a}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})}$  et  $\frac{y^2}{(\bar{b}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})}$  qui interviennent dans les expressions de  $d_{xx}^0(\mathbf{r})$  et  $d_{yy}^0(\mathbf{r})$ . En utilisant les équivalences (2.39) et (2.40) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(\bar{a}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{\bar{b}(\bar{a}^2 + \bar{\mu})(\bar{a}^2 + \bar{\nu})\sqrt{\bar{\lambda}}}{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{a}^3} \\ \frac{y^2}{(\bar{b}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(\bar{b}^2 + \bar{\mu})(\bar{b}^2 + \bar{\nu})\sqrt{\bar{\lambda}}}{(\bar{b}^2 - \bar{a}^2)\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{b}^3} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\bar{a}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})} = 0 \\ \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{y^2}{(\bar{b}^2 + \bar{\lambda})^2 T v(\bar{\lambda})} = 0 \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Il en résulte en utilisant les équations (2.23) que :

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} d_{xx}^0(\mathbf{r}) = \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{xx}^0(\lambda), \quad \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} d_{yy}^0(\mathbf{r}) = \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{yy}^0(\lambda) \quad (2.42)$$

D'autre part, les limites lorsque  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$  des quantités  $D_{xx}^0(\lambda)$  et  $D_{yy}^0(\lambda)$  définies dans les équations (2.16), s'écrivent en utilisant  $\bar{\lambda}, \bar{\mu},$  et  $\bar{\nu}$  :

$$\begin{cases} \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{xx}^0(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}}{2\sqrt{(\bar{\rho} + \bar{a}^2)^3(\bar{\rho} + \bar{b}^2)}\bar{\rho}} \\ \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{yy}^0(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\bar{\rho}}{2\sqrt{(\bar{\rho} + \bar{b}^2)^3(\bar{\rho} + \bar{a}^2)}\bar{\rho}} \end{cases} \quad (2.43)$$

Ces deux intégrales sont données par les formules (3.133.18) et (3.133.12) de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980] et on obtient :

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{xx}^0(\mathbf{r}) = \frac{K' - E'}{k'^2 \bar{a}^3}, \quad \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} D_{yy}^0(\mathbf{r}) = \frac{E'/k^2 - K'}{k'^2 \bar{a}^3} \quad (2.44)$$

où  $E'$  et  $K'$  désignent les intégrales elliptiques complètes :

$$E' \equiv E(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} d\phi; \quad K' \equiv K(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (2.45)$$

Il résulte des équations (2.42) et (2.44) que :

$$L_x = \frac{K' - E'}{k'^2 \bar{a}^3}, \quad L_y = \frac{E'/k^2 - K'}{k'^2 \bar{a}^3} \quad (2.46)$$

Pour calculer  $L_z$ , nous allons utiliser l'incompressibilité du champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ . Cette incompressibilité se traduit par la relation  $d_{zz}^0(\mathbf{r}) = -d_{xx}^0(\mathbf{r}) - d_{yy}^0(\mathbf{r})$  qui donne en passant à la limite :

$$L_z = -L_x - L_y = -\frac{E'}{k^2 \bar{a}^3} \quad (2.47)$$

Pour calculer  $L^2$ , nous devons évaluer  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xx}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ ,  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yy}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ ,  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{zz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ ,  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xy}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ ,  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$  et  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ .

Les équations (2.42) stipulent que les limites  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} d_{xx}^0(\mathbf{r})$ ,  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} d_{yy}^0(\mathbf{r})$  et donc aussi  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} d_{zz}^0(\mathbf{r})$  sont indépendantes de  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\nu}$ , par conséquent

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xx}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = L_x^2, \quad \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yy}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = L_y^2, \quad \lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{zz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = L_z^2 \quad (2.48)$$

Nous allons maintenant déterminer les limites de  $d_{xy}^0{}^2(\mathbf{r})$ ,  $d_{xz}^0{}^2(\mathbf{r})$  et  $d_{yz}^0{}^2(\mathbf{r})$ . A partir des équations (2.16)<sub>4,5,6</sub> et (2.39), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{xy}^0(\mathbf{r}) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(\bar{a}^2 + \bar{\mu})(\bar{a}^2 + \bar{\nu})(\bar{b}^2 + \bar{\mu})(\bar{b}^2 + \bar{\nu})\bar{a}^2\bar{b}^2}{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)\bar{\mu}^2\bar{\nu}^2} \frac{1}{\lambda} \\ d_{xz}^0(\mathbf{r}) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\bar{a}^2 + \bar{\mu})(\bar{a}^2 + \bar{\nu})}{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)\bar{a}^4\bar{\mu}\bar{\nu}} \\ d_{yz}^0(\mathbf{r}) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\bar{b}^2 + \bar{\mu})(\bar{b}^2 + \bar{\nu})}{(\bar{b}^2 - \bar{a}^2)\bar{b}^4\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{array} \right. \quad (2.49)$$

L'équation (2.49)<sub>1</sub> implique que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle d_{xy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)} = 0 \quad (2.50)$$

En prenant les valeurs moyennes des deux dernières du système (2.49), on obtient après des transformations indiquées dans l'annexe B :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle d_{yz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)} = -\frac{3(I_1 I_2 - I_3 I_4)}{2\pi \bar{a}^6 \bar{b}^2 (\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle d_{xz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)} = \frac{3(J_1 J_2 - J_3 J_4)}{2\pi \bar{a}^2 \bar{b}^6 (\bar{b}^2 - \bar{a}^2)} \quad (2.51)$$

où  $I_1, I_2, I_3, I_4, J_1, J_2, J_3, J_4$  sont données dans l'annexe B. Ces intégrales sont calculées dans l'annexe C en faisant plusieurs changements de variables et en utilisant des formules de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980]. Les résultats sont injectés dans les équations (2.51) et il vient grâce à la formule 8.122 de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980] que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle d_{yz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)} = \frac{1}{k^4 \bar{a}^6}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle d_{xz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}(\lambda)} = \frac{1}{k^2 \bar{a}^6} \quad (2.52)$$

Finalement, en combinant les équations (2.48), (2.50) et (2.52), on obtient à l'issue d'un calcul simple que :

$$L^2 = \frac{4}{3\bar{a}^6} \left\{ \frac{1}{k'^4} \left[ \left( 1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} \right) E'^2 + K'^2 - \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) E'K' \right] + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} \right\} \quad (2.53)$$

On peut donc conclure que *dans le cas général où  $a > b > c$ , toutes les limites  $L_x, L_y, L_z$  et  $L^2$  sont finies.*

### 2.5.2.2 Cas d'un sphéroïde allongé ( $a > b = c$ )

Le cas d'un sphéroïde allongé est particulier pour des raisons tant physiques que mathématiques. Du point de vue mathématique, pour calculer les limites recherchées, nous avons besoin des coordonnées ellipsoïdales qui présentent dans ce cas des singularités dues à la présence du facteur  $b^2 - a^2$  au dénominateur des expressions (2.4)<sub>2,3</sub> de  $y$  et  $z$ . Du point de vue physique, ces limites sont liées aux propriétés géométriques de l'ellipsoïde confocal complètement aplati qui devient dans le cas ( $a > b = c$ ) un segment de droite qui est évidemment un objet géométrique différent.

Il est important de préciser que bien que les coordonnées  $\mu$  et  $\nu$  ne puissent plus être utilisées, la coordonnée  $\lambda$  ou bien  $\bar{\lambda}$  ainsi que les limites  $L_x, L_y, L_z, L^2$  ont encore un sens. Lorsque  $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ , l'expression (2.5) de  $v(\lambda)$  devient :

$$v(\lambda) \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} \bar{a}\bar{\lambda} \quad (2.54)$$

Aussi, l'équation (2.4)<sub>4</sub> de l'ellipsoïde de constante  $\lambda$  devient  $\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2+z^2}{\bar{\lambda}} = 1$ , ce qui implique  $x = O(\bar{a})$  et  $y^2 + z^2 = O(\bar{\lambda})$ . Par conséquent

$$T \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} \frac{y^2 + z^2}{\bar{\lambda}^2} = O\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right), \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\bar{a}^4 T v(\lambda)} = O(1) \quad (2.55)$$

L'expression (2.16)<sub>1</sub> de la composante  $D_{xx}^0(\lambda)$  devient dans ce cas

$$D_{xx}^0(\lambda) = \int_{\bar{\lambda}}^{\infty} \frac{d\bar{\rho}}{2\bar{\rho}\sqrt{(\bar{a}^2 + \bar{\rho})^3}},$$

ce qui donne après passage à la limite et en utilisant l'équation (2.54) :

$$D_{xx}^0(\lambda) \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln \bar{\lambda}}{2\bar{a}^3} \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(v(\lambda))}{2\bar{a}^3} \quad (2.56)$$

Aussi, les composantes  $D_{yy}^0(\lambda)$  et  $D_{zz}^0(\lambda)$  sont égales à cause de la symétrie de révolution autour de l'axe  $Ox$ . En utilisant les relations (2.17) et (2.56), on obtient

$$D_{yy}^0(\lambda) = D_{zz}^0(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v(\lambda)} - D_{xx}^0(\lambda) \right] \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2v(\lambda)} \quad (2.57)$$

En combinant les expressions (2.55) et (2.56), la composante  $d_{xx}^0(\mathbf{r})$  donnée par (2.23)<sub>1</sub> devient :

$$d_{xx}^0(\mathbf{r}) \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(v(\lambda))}{2\bar{a}^3}, \quad (2.58)$$

Cette expression asymptotique est constante sur la surface  $\mathcal{E}_\lambda$ , ce qui implique :

$$\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(v(\lambda))}{2\bar{a}^3} \quad (2.59)$$

Les expressions asymptotiques des autres composantes du tenseur  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  se déduisent de façon triviale à partir de la relation d'incompressibilité et de la symétrie de révolution du domaine autour de l'axe  $Ox$ . On obtient ainsi :

$$\langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = -\frac{1}{2} \langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \underset{\bar{\lambda} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(v(\lambda))}{4\bar{a}^3}, \quad (2.60)$$

Il reste à déterminer  $\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ ,  $\langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ ,  $\langle d_{xy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ ,  $\langle d_{xz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{yz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  pour avoir l'expression de  $\langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ . Il découle de l'équation (2.58) que :

$$\langle d_{xx}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{(\ln(v(\lambda)))^2}{4\bar{a}^6} \quad (2.61)$$

Ensuite en combinant les équations (2.23)<sub>2,3,5</sub>, (2.54), (2.55) et (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned} d_{yy}^0{}^2(\mathbf{r}) + d_{zz}^0{}^2(\mathbf{r}) + 2d_{yz}^0{}^2(\mathbf{r}) &= \left( D_{yy}^0(\lambda) - \frac{y^2}{\bar{\lambda}^2 T v(\lambda)} \right)^2 + \left( D_{zz}^0(\lambda) - \frac{z^2}{\bar{\lambda}^2 T v(\lambda)} \right)^2 + 2 \left( \frac{yz}{\bar{\lambda}^2 T v(\lambda)} \right)^2 \\ &\sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{1}{v^2(\lambda)} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{y^2}{y^2 + z^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{yz}{y^2 + z^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2v^2(\lambda)} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\langle d_{yy}^0{}^2(\mathbf{r}) + d_{zz}^0{}^2(\mathbf{r}) + 2d_{yz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{1}{2v^2(\lambda)} \quad (2.62)$$

Finalement, à partir des équations (2.16)<sub>4,6</sub>, (2.54) et (2.55), on obtient :

$$d_{xy}^0{}^2(\mathbf{r}) + d_{xz}^0{}^2(\mathbf{r}) = \left( \frac{xy}{\bar{a}^2 \bar{\lambda} T v(\lambda)} \right)^2 + \left( \frac{xz}{\bar{a}^2 \bar{\lambda} T v(\lambda)} \right)^2 \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{x^2}{\bar{a}^6 (y^2 + z^2)} = O\left(\frac{1}{v(\lambda)}\right).$$

Puisque  $x^2$  et  $y^2 + z^2$  sont respectivement d'ordre  $O(\bar{a})$  et  $O(v(\lambda))$ , il s'ensuit que :

$$\langle d_{xy}^0{}^2(\mathbf{r}) + d_{xz}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = O\left(\frac{1}{v(\lambda)}\right) \quad (2.63)$$

La combinaison des équations (2.61), (2.62) et (2.63) donne :

$$\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{1}{3v^2(\lambda)} \quad (2.64)$$

Ce résultat coïncide avec celui obtenu dans [Gologanu et Leblond, 1993] avec le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  en question, à condition de tenir compte des différences de notations.

En conclusion, les équations (2.59), (2.61) et (2.64) montrent que *dans le cas d'un sphéroïde allongé où  $a > b = c$ , les limites  $L_x, L_y, L_z, L^2$  définies par les équations (2.38) sont toutes infinies.*

### 2.5.2.3 Cas d'un sphéroïde aplati ( $a = b > c$ )

Du point de vue mathématique, le cas d'un sphéroïde aplati semble tout aussi spécial que celui d'un sphéroïde allongé. Les coordonnées ellipsoïdales ne sont en effet plus valables à cause de la présence du terme  $a^2 - b^2$  au dénominateur des expressions (2.4)<sub>1,2</sub> de  $x$  et  $y$ . Du point de vue physique en revanche, on s'attend à ce que rien de particulier ne se produise dans ce cas. En effet, le passage continu de l'ellipsoïde complètement aplati qui est un disque elliptique dans le cas général, à un disque circulaire dans le cas d'un sphéroïde aplati, ne peut engendrer de divergence de la dissipation plastique. En d'autres termes, si l'on fixe  $\bar{a}$  et l'on fait varier  $\bar{b}$  des valeurs inférieures à  $\bar{a}$  à des valeurs supérieures à celui-ci, rien de particulier ne survient quand  $\bar{b} = \bar{a}$ . Ceci signifie que l'on peut s'attendre à ce que les limites de  $L_x, L_y, L_z$  et  $L^2$  données par les formules (2.44), (2.47) et (2.53) tendent vers des valeurs finies lorsque  $k' \rightarrow 0$  malgré la présence des termes  $1/k'^2$  et  $1/k'^4$

dans ces formules. Le calcul de ces limites lorsque  $k' \rightarrow 0$ , en utilisant les expressions asymptotiques (8.113.1) et (8.114.1) des intégrales elliptiques  $E'$  et  $K'$ , confirme cette prédiction : on trouve

$$L_x = L_y = \frac{\pi}{4\bar{a}^3}, \quad L_z = -\frac{\pi}{2\bar{a}^3}, \quad L^2 = \frac{3\pi^2 + 32}{12\bar{a}^6} \quad (2.65)$$

Ces résultats coïncident avec ceux trouvés par [Gologanu *et al.*, 1994] pour le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  en question, avec les changements de notations nécessaires.

On peut ainsi conclure que *dans le cas d'un sphéroïde aplati  $a = b > c$ , les limites  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  et  $L^2$  sont finies comme dans le cas général.*

#### 2.5.2.4 Cas sphérique ( $a = b = c$ )

Le cas sphérique est aussi spécial pour des raisons à la fois mathématiques et physiques : le système de coordonnées ellipsoïdales n'est plus valable et l'ellipsoïde complètement aplati devient un simple point.

On obtient facilement les résultats à partir d'un raisonnement analogue pour une grande surface ellipsoïdale  $\mathcal{E}_\lambda$  présenté dans la section 2.5.1. La seule différence est que les formules obtenues sont exactes au lieu d'être juste asymptotiques. On obtient ainsi :

$$\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 0, \quad \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{4}{9v^2(\lambda)} \quad (2.66)$$

pour toute valeur de  $r$  ou  $v(\lambda) = r^3$ .

Ainsi, *dans le cas sphérique, les limites  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  sont nulles alors que  $L^2$  est infinie.*

#### 2.5.2.5 Commentaires

Faisons certains commentaires qualitatifs sur la valeur moyenne  $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  lorsque  $\mathcal{E}_\lambda$  se rapproche de l'ellipsoïde complètement aplati.

Avec l'approximation  $\mathcal{A}_1$ , la quantité  $\sqrt{\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}$  représente la valeur moyenne sur la surface ellipsoïdale  $\mathcal{E}_\lambda$  de la dissipation plastique associée au champ de vitesse test  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ , caractérisant l'expansion du vide confocal contenu dans  $\mathcal{E}_\lambda$ . Ainsi son comportement asymptotique pour  $\mathcal{E}_\lambda$  proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati est relié à la valeur de la dissipation nécessaire pour ouvrir un vide coïncidant avec l'ellipsoïde intérieur.

Ce vide est une fissure elliptique dans le cas général, une aiguille dans le cas d'un sphéroïde allongé, une fissure circulaire dans le cas d'un sphéroïde aplati, et un simple point dans le cas d'une sphère. Ainsi les équations (2.53) et (2.65)<sub>3</sub> stipulent que l'ouverture d'une fissure elliptique ou circulaire nécessite une dissipation plastique locale finie, alors que les équations (2.64) et (2.66)<sub>2</sub> impliquent que l'ouverture d'un vide en forme d'aiguille ou de point nécessite une dissipation locale infinie. En d'autres termes, ces équations signifient qu' *il est beaucoup plus facile d'ouvrir une fissure elliptique ou circulaire qu'une fissure en forme d'aiguille ou de point*, ce qui est bien naturel.

## 2.6 Approximation de la dissipation plastique macroscopique et critère macroscopique approché

Dans cette partie, on va introduire des approximations qui nous permettront d'expliquer la dissipation plastique.

### 2.6.1 Simplification du terme croisé $\frac{4A}{3}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta$

Nous allons d'abord simplifier le terme croisé  $\frac{4A}{3}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta$  qui apparaît dans l'expression (2.30) de  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ . Étant donné que les composantes non diagonales de  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  sont nulles, on a :

$$\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \Delta = \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \Delta^{dg} \quad (2.67)$$

où pour tout tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^{dg} \in \mathbb{R}^3$  désigne le vecteur constitué de ses composantes diagonales :

$$\mathbf{T}^{dg} = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Désignons par  $(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^3$  le plan composé des vecteurs dont la somme des composantes est nulle. Le couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  défini par :

$$\mathbf{U} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)}} \begin{pmatrix} L_z - L_y \\ L_x - L_z \\ L_y - L_x \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

constitue une base orthonormée de  $(\mathcal{P})$ . Le vecteur  $\Delta^{dg}$  et le scalaire  $\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \Delta^{dg}$  s'écrivent en utilisant cette base sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta^{dg} &= \mathcal{B}\mathbf{U} + \mathcal{C}\mathbf{V}, \quad \mathcal{B} \equiv \Delta^{dg} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathcal{C} \equiv \Delta^{dg} \cdot \mathbf{V} \\ \langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \Delta^{dg} &= \mathcal{B}\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} + \mathcal{C}\langle d^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (2.70)$$

Par suite, en combinant les équations (2.70) et (2.30), on obtient :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{2}{3}\mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \frac{4}{3}\mathcal{A}\mathcal{B}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} + \frac{4}{3}\mathcal{A}\mathcal{C}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{V} + \Delta_{eq}^2 \quad (2.71)$$

Nous avons deux termes croisés dans l'équation (2.71), mais la base  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  est construite pour pouvoir introduire l'approximation suivante :

$\mathcal{A}_2$  : Le terme  $\frac{4}{3}\mathcal{A}\mathcal{C}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{V}$  peut être négligé dans l'expression (2.71).

Rappelons d'abord une propriété indispensable pour la suite.

*Propriété :*

Dans une forme quadratique arbitraire de deux variables  $A_{11}X_1^2 + A_{22}X_2^2 + 2A_{12}X_1X_2$  avec des coefficients  $A_{11}$  et  $A_{22}$  strictement positifs, le terme croisé  $2A_{12}X_1X_2$  est négligeable pour toutes les valeurs de  $X_1$  et  $X_2$  si et seulement si  $A_{12}^2 \ll A_{11}A_{22}$ .

### Justification de l'approximation $\mathcal{A}_2$

Appliquée aux termes proportionnels à  $\mathcal{A}^2$ ,  $\mathcal{C}^2$  et  $\mathcal{AC}$  de la forme quadratique (2.71) définissant  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ , la propriété ci-dessus implique que le terme  $\frac{4}{3}\mathcal{AC}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{V}$  est négligeable si et seulement si

$$[\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{V}]^2 \ll \langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \quad (2.72)$$

- Pour une grande surface  $\mathcal{E}_\lambda$ , le membre de gauche de la condition (2.72) est un  $o(1/v^2(\lambda))$  en utilisant l'équation (2.36), tandis que celui de droite est un  $O(1/v^2(\lambda))$  en utilisant l'équation (2.35); donc la condition (2.72) est satisfaite.
- Pour une surface  $\mathcal{E}_\lambda$ , proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati, le vecteur  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg}$  tend à la limite vers un vecteur colinéaire à  $\mathbf{U}$ , compte tenu de la définition (2.69) de ce vecteur; puisque les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont orthogonaux, le membre de gauche de la condition (2.72) tend vers zéro. En revanche, le membre de droite tend vers une limite non nulle finie ou infinie, selon le cas considéré (voir les équations (2.38<sub>4</sub>), (2.53), (2.64), (2.65)<sub>3</sub>, (2.66)<sub>2</sub>). Donc la condition (2.72) est encore remplie.
- La condition (2.72) étant ainsi remplie lorsque la surface  $\mathcal{E}_\lambda$  est soit éloignée soit proche de l'ellipsoïde confocal complètement aplati, elle doit être approximativement satisfaite pour toutes les positions de cette surface.
- De plus, dans les cas des sphéroïdes allongés ou aplatis, le membre de gauche de la condition (2.72) est exactement nul. En effet, la direction du vecteur  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \in \mathbb{R}^3$  est indépendante de  $v(\lambda)$  dans ces deux cas pour des raisons de symétrie ( $\langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} = \langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} = -\frac{1}{2}\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg}$  dans le cas d'un sphéroïde allongé,  $\langle d_{xx}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} = \langle d_{yy}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} = -\frac{1}{2}\langle d_{zz}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg}$  dans le cas d'un sphéroïde aplati), et il s'ensuit que ce vecteur est perpendiculaire à  $\mathbf{V}$  non seulement dans la limite  $v(\lambda) \rightarrow 0$ , mais aussi pour toutes les valeurs de  $v(\lambda)$ .

Avec cette approximation, l'équation (2.71) devient :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \simeq \frac{2}{3}\mathcal{A}^2\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \frac{4}{3}\mathcal{AB}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} + \Delta_{eq}^2 \quad (2.73)$$

### 2.6.2 Simplification de la dépendance spatiale de $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$

Nous allons maintenant suivre à partir de maintenant la démarche adoptée par [Gologanu *et al.*, 1994] dans le cas des cavités aplaties; la transition au cas général ne va

introduire aucune nouveauté majeure. En notant  $L$  la racine carrée de la limite définie par l'équation (2.38), on introduit la nouvelle variable

$$w \equiv \frac{1}{3v(\lambda)/2 + \chi/L} \quad (2.74)$$

où  $\chi$  est une constante de l'ordre de l'unité. L'avantage d'introduire un tel changement de variable, avec une telle constante ajustable, apparaîtra plus loin. Notons que lorsque  $v(\lambda)$  varie entre 0 et  $+\infty$ ,  $w$  varie entre  $L/\chi$  et 0.

Nous allons maintenant écrire les quantités  $\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$  et  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U}$  sous la forme suivante, qui définit les fonctions  $F(w)$  et  $G(w)$  :

$$\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} \equiv F^2(w)w^2, \quad \frac{4}{3}\mathcal{A}\mathcal{B}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} \equiv 2F(w)G(w)w^2 \quad (2.75)$$

Aussi, puisque la base  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  est orthonormée, l'équation (2.70)<sub>1</sub> implique que :

$$\Delta_{eq}^2 = \frac{2}{3}\Delta^{dg} \cdot \Delta^{dg} + \frac{4}{3}(\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2) = \frac{2}{3}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2) + \frac{4}{3}(\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2) \quad (2.76)$$

Avec ces notations, l'équation (2.73) devient :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} \simeq \mathcal{A}^2 F^2(w)w^2 + \frac{2\mathcal{B}^2}{3} + 2\mathcal{A}\mathcal{B}F(w)G(w)w^2 + \frac{2\mathcal{C}^2}{3} + \frac{4}{3}(\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2) \quad (2.77)$$

Ceci peut encore s'écrire sous la forme :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} \simeq [\mathcal{A}F(w) + \mathcal{B}G(w)]^2 w^2 + \frac{2}{3}\mathcal{B}^2 H^2(w) + \frac{2\mathcal{C}^2}{3} + \frac{4}{3}(\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2) \quad (2.78)$$

où

$$H^2(w) \equiv 1 - \frac{3}{2}G^2(w)w^2 \quad (2.79)$$

La quantité  $H^2(w)$  est bien positive puisque la forme quadratique des variables  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$  définie par l'équation (2.78) est définie positive. Nous introduisons l'approximation finale suivante :

$\mathcal{A}_3$  : Les fonctions  $F(w), G(w), H(w)$  de l'équation (2.78) peuvent être remplacées par les valeurs moyennes  $\overline{F}, \overline{G}, \overline{H}$ .

### Justification de l'approximation $\mathcal{A}_3$

- Considérons d'abord la fonction  $F(w)$ , définie par l'expression (2.75)<sub>1</sub> de  $\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$ .
  - Lorsque  $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ ,  $w \sim 2/(3v(\lambda)) \rightarrow 0$  grâce à l'équation (2.74). Ainsi l'équation (2.75)<sub>1</sub> devient  $\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim 4F^2(0)/(9v^2(\lambda))$ . En comparant cette dernière avec l'équation (2.36), on a :

$$F(0) = 1 \quad (2.80)$$

• L'étude de la limite de  $F(w)$  pour  $v(\lambda) \rightarrow 0$  exige de distinguer entre les différents types de géométrie.

► Pour un ellipsoïde général ou un sphéroïde aplati, au voisinage de l'ellipsoïde confocal complètement aplati ( $v(\lambda) \rightarrow 0$ ),  $w$  tend vers la limite  $L/\chi$  de sorte que  $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  tend vers la limite  $F^2(L/\chi)L^2/\chi^2$ , qui doit être identifiée à  $L^2$  d'après l'équation (2.38)<sub>4</sub>; il vient par conséquent :

$$F(L/\chi) = \chi \quad (2.81)$$

Les équations (2.80) et (2.81) montrent que quand  $w$  varie dans l'intervalle  $(0, L/\chi)$ ,  $F(w)$  varie de 1 à  $\chi$ . Puisque  $\chi$  est de l'ordre de l'unité, cette variation est modeste, ce qui justifie le fait que l'on puisse remplacer  $F(w)$  par une constante.

► Dans le cas d'un sphéroïde allongé,  $L = +\infty$  donc  $w = 2/(3v(\lambda))$  pour toute valeur de  $v(\lambda)$ . Ainsi, au voisinage de l'ellipsoïde confocal complètement aplati ( $v(\lambda) \rightarrow 0$ ),  $w$  tend vers  $+\infty$  et  $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim 4F^2(+\infty)/(9v^2(\lambda))$ . En comparant avec l'équation (2.64) on voit que :

$$F(+\infty) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.82)$$

Ainsi la fonction  $F(w)$  varie encore modestement sur l'intervalle de définition  $(0, +\infty)$  de  $w$ , de 1 à  $\sqrt{3}/2 \simeq 0.87$ , donc elle peut encore être remplacée par une constante.

► Dans le cas sphérique, on a encore  $w = 2/(3v(\lambda))$  puisque  $L = +\infty$ . Ainsi les équations (2.66)<sub>2</sub> et (2.75) impliquent que  $F(w)$  est rigoureusement constante et égale à 1 pour toute valeur de  $w$ .

– Considérons maintenant la fonction  $G(w)$ , définie par l'expression (2.75)<sub>2</sub> de  $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U}$ .

• Pour une grande surface  $\mathcal{E}_\lambda$  ( $v(\lambda) \rightarrow +\infty$ ), notons qu'à partir de l'équation (2.80), on trouve  $\frac{4}{3} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} \sim 2G(w)w^2$ . On montre en comparant cette expression avec l'équation (2.35) que :

$$G(w)w^2 = o\left(\frac{1}{v(\lambda)}\right), \quad w \rightarrow 0 \quad (2.83)$$

Par conséquent, dans cette limite,  $[\frac{4}{3} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U}]^2 \sim [2G(w)w^2]^2 = o(w^2)$  est beaucoup plus petit que  $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim 4/(9v^2(\lambda)) \sim w^2$ . En appliquant la propriété précédente aux coefficients de  $\mathcal{A}^2$ ,  $\mathcal{B}^2$  et  $\mathcal{AB}$  dans la forme quadratique (2.77) définissant  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ , il en résulte que l'on peut négliger le terme en  $\mathcal{AB}$  au voisinage de l'infini ( $w \rightarrow 0$ ). La propriété  $[G(w)w^2]^2 \ll w^2$  reste vraie si l'on remplace la fonction  $G(w)$  par une constante  $\bar{G}$ , puisqu'on a encore  $(\bar{G}w^2)^2 \ll w^2$  dans la

limite  $w \rightarrow 0$ . Ainsi, au voisinage de l'infini, remplacer  $G(w)$  par  $\overline{G}$  revient juste à remplacer un terme négligeable par une approximation aussi négligeable, ce qui est inoffensif quelle que soit la valeur  $\overline{G}$  choisie.

- Pour une surface au voisinage de l'ellipsoïde complètement aplati ( $v(\lambda) \rightarrow 0$ ), il est nécessaire de distinguer les différents types de géométrie.

► Dans les cas général et sphéroïdal aplati, lorsque ( $v(\lambda) \rightarrow 0$ ), le terme  $\frac{4}{3}\mathcal{AB}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U}$  tend vers  $2F(L/\chi)G(L/\chi)L^2/\chi^2 = 2G(L/\chi)L^2/\chi$  d'après les équations (2.75)<sub>2</sub> et (2.81). Maintenant, en utilisant les définitions (2.38)<sub>1,2,3</sub> et (2.69) de  $\mathbf{U}$ , on voit que la valeur de la limite est  $\frac{4}{3}\sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$ , et il s'ensuit que :

$$G(L/\chi) = \frac{2\chi}{3L^2} \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \quad (2.84)$$

Ainsi, on peut remplacer la fonction  $G(w)$  par une constante est raisonnable au voisinage de l'ellipsoïde confocal complètement aplati à condition que la valeur choisie pour cette constante soit proche de celle donnée par l'équation (2.84).

► Dans le cas d'un sphéroïde allongé, les équations (2.75)<sub>2</sub>, (2.59) et (2.61) conduisent à  $\frac{4}{3}\mathcal{AB}\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{dg} \cdot \mathbf{U} \sim \sqrt{3}G(w)w^2 = o(\ln v(\lambda)) = o(\ln w)$ , de sorte que  $G(w) = o(\ln w/w^2)$  et par conséquent :

$$G(+\infty) = 0 \quad (2.85)$$

Ainsi au voisinage de l'ellipsoïde complètement aplati, le remplacement de la fonction  $G(w)$  par  $\overline{G}$  est encore raisonnable à condition de prendre  $\overline{G}$  égal à 0 ou très petit.<sup>1</sup>

► Dans le cas sphérique, la fonction  $G(w)$  est uniformément nulle par l'équation (2.66) de sorte que  $\overline{G} = 0$  est encore une bonne valeur.

– Considérons finalement la fonction  $H(w)$ , définie par l'équation (2.79).

- Au voisinage de l'infini ( $w \rightarrow 0$ ), il résulte de l'équation (2.83) que

$$G^2(w)w^2 = [G(w)w^2]^2 w^{-2} = o(1) \rightarrow 0 \quad (2.86)$$

d'où :

$$H(0) = 1 \quad (2.87)$$

- D'autre part, sur l'ellipsoïde complètement aplati, l'équation (2.84) implique que :

$$H(L/\chi) = \left[ 1 - \frac{3}{2}G^2(L/\chi) \left( \frac{L}{\chi} \right)^2 \right]^{1/2} = \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (2.88)$$

---

1. [Gologanu et Leblond, 1993] ont fait le premier choix, et [Gologanu *et al.*, 1994] le second.

En utilisant les équations (2.46), (2.47) et (2.53), on peut vérifier que lorsque  $k$  varie de 0 (cas d'un sphéroïde allongé) à 1 (cas d'un sphéroïde aplati), la valeur de  $H(L/\chi)$  donnée par l'équation (2.88) varie de 1 à  $\sqrt{32/(3\pi^2 + 32)} \simeq 0.72$ . Ainsi  $H(L/\chi)$  est toujours assez proche de l'unité. Il en résulte que la variation de la fonction  $H(w)$  dans l'intervalle de définition de  $w$  est modeste. Ainsi il est encore raisonnable de la remplacer par une constante.

Ceci conclut la justification de l'approximation  $\mathcal{A}_3$ .

Avec cette approximation, l'équation (2.78) devient :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} \simeq [\mathcal{A}\overline{F} + \mathcal{B}\overline{G}]^2 w^2 + \frac{2}{3} \mathcal{B}^2 \overline{H}^2 + \frac{2\mathcal{C}^2}{3} + \frac{4}{3} (\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2) \quad (2.89)$$

### 2.6.3 Critère macroscopique approché

Dans cette section, l'expression de la dissipation plastique macroscopique sera utilisée pour aboutir à une équation approchée de la surface de plasticité macroscopique.

Puisque  $dv(\lambda) = \frac{2}{3} dw/w^2$  par l'équation (2.74), l'expression (2.28) de  $\Pi^{++}(\mathbf{D})$  peut être réécrite sous la forme :

$$\Pi^{++}(\mathbf{D}) \simeq \frac{2\sigma_0}{3\Omega} \int_{w_{min}}^{w_{max}} \sqrt{\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}} \frac{dw}{w^2} \quad (2.90)$$

où

$$w_{min} \equiv w(v(\lambda = \Lambda)) = \frac{1}{3\Omega/2 + \chi/L}, \quad w_{max} \equiv w(v(\lambda = 0)) = \frac{1}{3\omega/2 + \chi/L} \quad (2.91)$$

et  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$  est donné par l'équation (2.89).

La détermination du critère de plasticité approché est basée sur le résultat suivant, démontré dans l'annexe D.

*Lemme de Gurson :*

*Soit  $I(\alpha, \beta)$  l'intégrale définie par*

$$I(\alpha, \beta) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \frac{dx}{x^2}$$

*où  $x_1$  et  $x_2$  sont des paramètres positifs, alors  $\frac{\partial I}{\partial \alpha}$  et  $\frac{\partial I}{\partial \beta}$  sont reliés par la relation ci-dessous indépendante de  $\alpha$  et  $\beta$  :*

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{2}{x_1 x_2} \cosh \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = 0 \quad (2.92)$$

Appliquons le *lemme de Gurson* en prenant  $\alpha \equiv (\frac{2}{3}\mathcal{B}^2\overline{H}^2 + \frac{2\mathcal{C}^2}{3} + \frac{4}{3}(\Delta_{xy}^2 + \Delta_{yz}^2 + \Delta_{zx}^2))^{1/2}$ ,  $\beta \equiv \overline{\mathcal{A}}\overline{F} + \mathcal{B}\overline{G}$ ,  $I(\alpha, \beta) \equiv (3\Omega/2\sigma_0)\Pi^{++}(\mathbf{D}) \equiv (3\Omega/2\sigma_0)\Pi^{++}(\alpha, \beta)$ ,  $x_1 \equiv w_{min}$  et  $x_2 \equiv w_{max}$ . En réécrivant l'équation (2.92), on obtient une relation dépendante des dérivées  $\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\beta}$  et  $\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}$  qu'on va expliciter maintenant. D'une part les dérivées partielles de  $\Pi^{++}(\mathbf{D})$  par rapport à  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\Delta_{xy}$ ,  $\Delta_{yz}$  et  $\Delta_{zx}$  sont liées à celles par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{A}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\beta}\overline{F}, \quad \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{B}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\beta}\overline{G} + \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\frac{2\mathcal{B}\overline{H}^2}{3\alpha}, \quad \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{C}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\frac{2\mathcal{C}}{3\alpha} \\ \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{xy}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\frac{4\Delta_{xy}}{3\alpha}, \quad \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{yz}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\frac{4\Delta_{yz}}{3\alpha}, \quad \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{zx}} = \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\frac{4\Delta_{zx}}{3\alpha} \end{array} \right. \quad (2.93)$$

En combinant les équations du système (2.93), on obtient :

$$\left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\right)^2 = \frac{3}{2H^2} \left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{B}} - \frac{\overline{G}}{\overline{F}}\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{A}}\right)^2 + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\Delta_{zx}}\right)^2 \right] \quad (2.94)$$

D'autre part, en utilisant les équations (2.15) et (2.29), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{A}} = \Sigma_{xx}D_{xx}^0(\Lambda) + \Sigma_{yy}D_{yy}^0(\Lambda) + \Sigma_{zz}D_{zz}^0(\Lambda) \\ \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{B}} = \Sigma_{xx}U_x + \Sigma_{yy}U_y + \Sigma_{zz}U_z \\ \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\mathcal{C}} = \Sigma_{xx}V_x + \Sigma_{yy}V_y + \Sigma_{zz}V_z \end{array} \right. \quad (2.95)$$

En substituant les équations (2.95) dans (2.94) et (2.93)<sub>2</sub>, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\alpha}\right)^2 = \frac{3}{2H^2} \left\{ \Sigma_{xx} \left( U_x - \frac{\overline{G}}{\overline{F}}D_{xx}^0(\Lambda) \right) + \Sigma_{yy} \left( U_y - \frac{\overline{G}}{\overline{F}}D_{yy}^0(\Lambda) \right) \right. \\ \quad \left. + \Sigma_{zz} \left( U_z - \frac{\overline{G}}{\overline{F}}D_{zz}^0(\Lambda) \right) \right\}^2 + \frac{3}{2}(\Sigma_{xx}V_x + \Sigma_{yy}V_y + \Sigma_{zz}V_z)^2 \\ \quad + 3(\Sigma_{xy}^2 + \Sigma_{yz}^2 + \Sigma_{zx}^2) \\ \frac{\partial\Pi^{++}}{\partial\beta} = \frac{1}{\overline{F}}(\Sigma_{xx}D_{xx}^0(\Lambda) + \Sigma_{yy}D_{yy}^0(\Lambda) + \Sigma_{zz}D_{zz}^0(\Lambda)) \end{array} \right. \quad (2.96)$$

Finalement le critère macroscopique approché de type Gurson pour la cellule représentative s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathcal{Q}(\Sigma)}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\frac{\mathcal{L}(\Sigma)}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0} \quad (2.97)$$

Dans cette expression :

- le paramètre  $g$ , qui joue le rôle d'une sorte de seconde porosité, est donné par :

$$g \equiv \frac{2\chi}{3\Omega L} \quad (2.98)$$

Il est à noter que le paramètre  $\chi$  de la formule (2.97) sera choisi dans le chapitre 3 de telle sorte qu'on ait une interprétation géométrique simple de  $g$ .

- $\mathcal{L}(\Sigma)$  est une forme linéaire des composantes diagonales de  $\Sigma$  donnée par

$$\mathcal{L}(\Sigma) \equiv \kappa \Sigma_h, \quad \kappa \equiv \frac{3}{2\bar{F}}, \quad \Sigma_h \equiv H_x \Sigma_{xx} + H_y \Sigma_{yy} + H_z \Sigma_{zz} \quad (2.99)$$

avec

$$\begin{cases} H_x & \equiv \Omega D_{xx}^0(\Lambda) \\ H_y & \equiv \Omega D_{yy}^0(\Lambda) \\ H_z & \equiv \Omega D_{zz}^0(\Lambda) \end{cases} \quad (2.100)$$

Il est à noter que d'après l'équation (2.17),

$$H_x + H_y + H_z = 1 \quad (2.101)$$

- $\mathcal{Q}(\Sigma)$  est une forme quadratique des composantes de  $\Sigma$  définie par :

$$\mathcal{Q}(\Sigma) \equiv \left( \frac{\partial \Pi^{++}}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (2.102)$$

On peut remarquer que le critère macroscopique de l'ellipsoïde général a la même forme que celle du modèle GLD pour des cavités sphéroïdales aplaties ([Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997]). Notons cependant que l'expression (2.97) n'est pas encore totalement explicitée puisque les valeurs de  $\chi$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  ne sont pas encore précisées.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous étendons les travaux antérieurs de [Gurson, 1977], [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997]. Ce chapitre représente une première étape dans le développement d'un modèle de type Gurson pour les matériaux plastiques poreux contenant des cavités ellipsoïdales arbitraires. Il a été consacré à l'analyse-limite d'une cellule élémentaire représentative constituée d'un volume ellipsoïdal contenant un vide ellipsoïdal confocal. Le matériau constitutif est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises. Cette cellule est soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord extérieur ([Hill, 1967], [Mandel, 1964]).

Nous avons d'abord rappelé l'expression du champ de vitesse incompressible récemment découvert par [Leblond et Gologanu, 2008], satisfaisant les conditions de taux de déformation homogène sur une famille quelconque d'ellipsoïdes confocaux. Ensuite nous avons expliqué le principe de l'analyse-limite de la cellule considérée en utilisant ce champ de vitesse comme champ test. L'étape suivante a consisté en une étude asymptotique approfondie, au voisinage de l'infini et au voisinage de l'origine, de l'intégrande apparaissant dans l'expression intégrale de la dissipation plastique macroscopique. Cette dernière est une moyenne pondérée de la dissipation plastique locale sur un ellipsoïde arbitraire de la famille considérée. On a constaté que cette valeur moyenne reste finie à proximité du plus petit ellipsoïde, complètement aplati, de la famille quand il s'agit d'un disque elliptique ou

circulaire (cas général et sphéroïdal aplati), mais diverge vers l'infini quand il s'agit d'une aiguille ou d'un point (cas sphéroïdal allongé et sphérique). Ceci est lié au fait qu'il est évidemment plus facile d'ouvrir une fissure elliptique ou circulaire, qu'un vide en forme de point ou d'aiguille.

Ces résultats ont finalement été utilisés pour définir quelques approximations raisonnables permettant de simplifier la forme de l'intégrande dans l'expression de la dissipation plastique macroscopique. Ceci nous a permis d'obtenir une expression analytique de la dissipation semblable à celle de Gurson, et ainsi une expression approchée de la surface de charge macroscopique. Cette surface de charge a fondamentalement la forme de celle du modèle GLD pour les cavités sphéroïdales aplaties ([Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997]).



## Chapitre 3

# Détermination des paramètres du critère de plasticité macroscopique

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Définition de la seconde porosité <math>g</math></b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Analyse-limite numérique basée sur la méthode des éléments finis</b>	<b>49</b>
<b>3.4</b>	<b>Expression de la constante <math>\kappa</math></b>	<b>52</b>
3.4.1	Généralités	52
3.4.2	Cas d'un sphéroïde allongé	54
3.4.3	Cas d'un sphéroïde aplati	55
3.4.4	Cas général	57
3.4.5	Etude de la fonction $F(w)$ dans le cas d'un cylindre elliptique ( $a = +\infty, b, c$ )	61
3.4.6	Formule approchée de $\kappa$	61
<b>3.5</b>	<b>Expression des coefficients <math>H_x, H_y, H_z</math></b>	<b>62</b>
3.5.1	Cas d'un sphéroïde allongé	62
3.5.2	Cas d'un sphéroïde aplati	64
3.5.3	Cas général	64
<b>3.6</b>	<b>Expression de la forme quadratique <math>Q(\Sigma)</math></b>	<b>69</b>
3.6.1	Principe de détermination de $Q(\Sigma)$	69
3.6.2	Bornes des composites non linéaires	71
3.6.3	Choix d'une borne convenable	72
<b>3.7</b>	<b>Résumé</b>	<b>73</b>
3.7.1	Les paramètres géométriques	73
3.7.2	Expression du critère de plasticité	74
3.7.3	Expression de la forme linéaire $\mathcal{L}(\Sigma)$	74

3.7.4	Expression de la forme quadratique $\mathcal{Q}(\Sigma)$ . . . . .	74
<b>3.8</b>	<b>Cas particuliers . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>3.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>76</b>

---

### 3.1 Introduction

Grâce à l'analyse-limite d'une cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale, nous avons obtenu dans le chapitre 2 un critère homogénéisé de type Gurson pour les matériaux plastiques poreux contenant des cavités ellipsoïdales générales. Cependant les paramètres figurant dans la fonction de charge ne sont pas encore totalement explicités. Notre objectif ici est de compléter la définition de la surface de charge en fournissant les expressions de tous les coefficients impliqués.

Le chapitre 2 était basé sur l'usage du champ de vitesse test incompressible récemment découvert par [Leblond et Gologanu, 2008], satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux. Il semblerait naturel de continuer à utiliser ce champ de vitesse pour obtenir des expressions explicites des coefficients de la surface de charge. Cependant, bien que le champ de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008] soit irremplaçable dans la définition des approximations conduisant à un critère de type Gurson, et dans celle des relations liant les coefficients de ce critère au champ de vitesse-test, son utilisation au delà de ce point introduirait des inexactitudes significatives dans le cas spécifique d'un vide sphéroïdal très aplati. Cette inexactitude a déjà été mise en évidence pour des cavités sphéroïdales aplaties dans les travaux de [Gologanu, 1997] et [Gologanu *et al.*, 1997] en comparant les prédictions du champ de [Gologanu *et al.*, 1994] (identique au champ de [Leblond et Gologanu, 2008] dans le cas sphéroïdal aplati) à des résultats de simulations numériques micromécaniques. Certains commentaires sur ce point s'imposent.

Considérons le cas d'un chargement hydrostatique positif. La réponse à ce type de chargement est décrite dans le chapitre 2 par le champ de vitesse test de Leblond et Gologanu [Leblond et Gologanu, 2008]. Les résultats numériques exacts fournis sur la figure *I.2.b* de [Gologanu *et al.*, 1997] montre clairement que pour une fissure en pièce de monnaie (vide ellipsoïdal complètement aplati) soumis à un tel chargement, ce champ de vitesse surestime notablement la dissipation plastique locale au voisinage du vide. De plus, la figure *I.3.b* de [Gologanu *et al.*, 1997] illustre une autre caractéristique inadéquate du champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ , schématisée sur la figure 3.1 ci-dessous. Il est évident à partir de l'équation (2.16) du chapitre 2 que pour un vide sphéroïdal aplati d'axe  $Oz$ , toutes les composantes diagonales  $D_{xx}^0(\Lambda) = D_{yy}^0(\Lambda)$ ,  $D_{zz}^0(\Lambda)$  du tenseur de taux de déformation macroscopique définies par le champ  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] sont positives ; ceci est schématisé sur la figure 3.1 par des flèches pleines. Mais les résultats des calculs numériques de [Gologanu *et al.*, 1997] reproduits sur leur figure *I.3.b* montrent que si un vide sphéroïdal est inclus dans une cellule modérément aplatie, les composantes  $xx$  et  $yy$  du tenseur de taux de déformation résultant d'un chargement hydrostatique positif sont en fait négatives ; ceci est schématisé sur la figure 3.1 par les flèches pointillées.

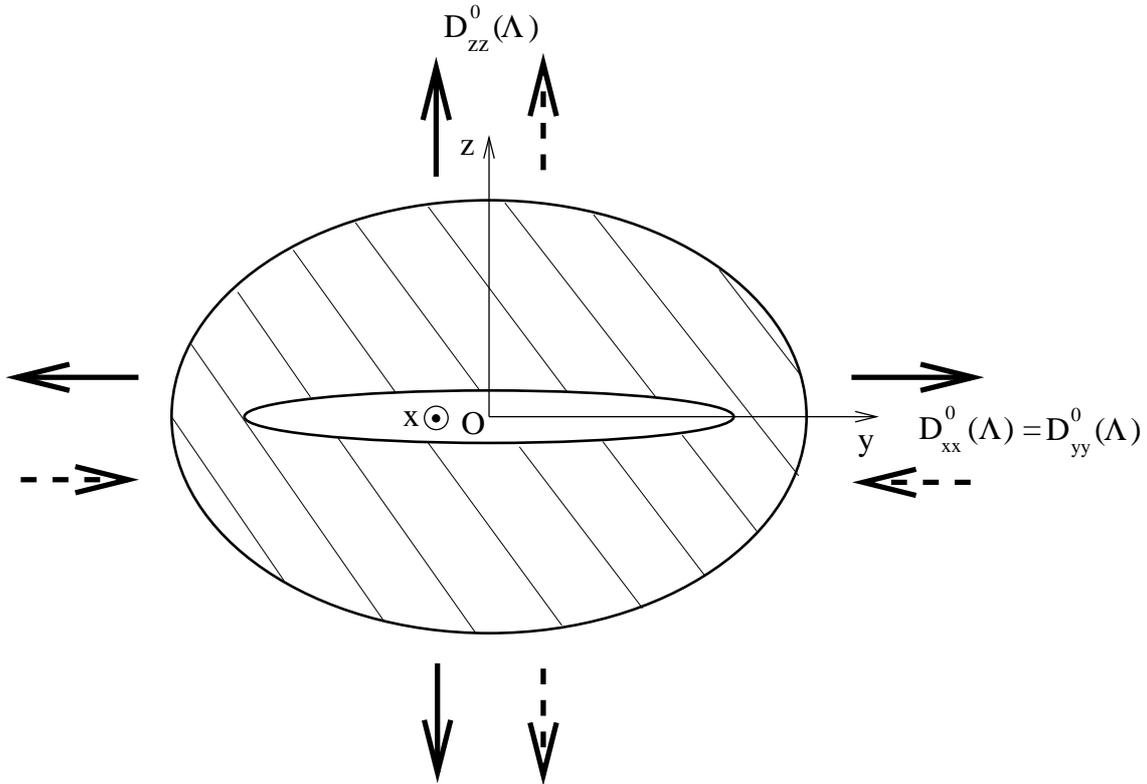
Ces deux caractéristiques indésirables du champ de [Leblond et Gologanu, 2008] sont certainement connectées puisqu'une inadéquation géométrique significative d'un certain champ de vitesse test doit produire une erreur significative dans l'estimation de la dissipation plastique associée.

En ce qui concerne les chargements déviatoriques, il a été remarqué par [Gologanu, 1997] que pour une fissure en pièce de monnaie d'axe  $Oz$  soumise à un effort en cisaillement pur  $\Sigma_{zx}$  ou  $\Sigma_{zy}$ , le critère de plasticité de [Gologanu *et al.*, 1994], basé sur le même champ de vitesse test que celui du chapitre 2, prédit une absence d'influence de la fissure, soit  $|\Sigma_{zx}|$  ou  $|\Sigma_{zy}| = \sigma_0/\sqrt{3}$ . Ceci est dû à la description simplifiée de la réponse à un tel chargement sous la forme d'un champ de vitesse correspondant à une déformation de cisaillement homogène. Un tel résultat pour  $\Sigma_{zx}$  ou  $\Sigma_{zy}$  est en contradiction avec l'intuition et la borne supérieure rigoureuse établie dans ce cas par [Willis, 1977], [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991] et [Michel et Suquet, 1992].

Afin d'obtenir de bonnes valeurs pour les coefficients du critère, applicables dans tous les cas, il est donc nécessaire d'améliorer l'analyse-limite du chapitre 2, basée sur le champ de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008]. Les améliorations apportées ici, dans le cas de l'ellipsoïde général, étendent celles apportées par [Gologanu, 1997] et [Gologanu *et al.*, 1997] aux premiers modèles de [Gologanu et Leblond, 1993] et [Gologanu *et al.*, 1994], dans les cas sphéroïdaux allongé ou aplati. Ces améliorations sont de deux types.

Pour des chargements hydrostatiques, l'analyse-limite du chapitre 2 sera raffinée en remplaçant le champ de vitesse test  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] par le champ, supposé exact, déterminé numériquement par la méthode des éléments finis. Le point essentiel ici est que les approximations faites dans le chapitre 2 ne sont pas directement liées à la forme analytique du champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] mais uniquement à certaines de ses propriétés mathématiques qualitatives, telles que l'existence de certaines limites et leur valeur finie ou infinie. Ainsi, il est possible de remplacer ce champ par un autre ayant les mêmes caractéristiques de base. Les simulations seront effectuées dans plusieurs cas représentatifs, et des formules analytiques heuristiques mais précises reproduisant les résultats numériques seront cherchées, de sorte à couvrir tous les cas possibles.

Pour des chargements déviatoriques, bien qu'on puisse envisager de raffiner l'analyse-limite du chapitre 2 de la même façon, nous allons adopter une approche plus expéditive consistant à utiliser directement les résultats de [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991] et [Michel et Suquet, 1992] qui découlent des premiers travaux de [Willis, 1977] et du concept de "milieu linéaire de comparaison". Un certain nombre de coefficients de la fonction de charge proposée seront simplement fixés de manière à égaler la borne de Willis, sans aucune référence à un champ de vitesse test spécifique. Ce chapitre reprend sous une forme détaillée les résultats de la publication [Madou et Leblond, 2012b] parue dans la revue *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.



**Figure 3.1:** Vide sphéroïdal complètement aplati soumis à une tension hydrostatique - Flèches pleines : composantes du tenseur de taux de déformation macroscopique du champ de vitesse test de [Leblond et Gologanu, 2008] ; Flèches pointillées : composantes du vrai tenseur solution

### 3.2 Définition de la seconde porosité $g$

Afin d'obtenir la définition la plus naturelle possible de  $g$ , nous allons d'abord choisir la valeur de la constante  $\chi$  figurant dans l'expression de la seconde porosité  $g$  (équation (2.98)). Cela peut être fait simplement, sans faire appel à des simulations numériques. Puisque la constante  $\chi$  apparaît dans l'expression de  $g$  à travers le rapport  $L/\chi$ , il serait logique de connecter sa valeur à celle de  $L$ . Cependant,  $\chi$  doit être de l'ordre de l'unité comme il est expliqué dans la section 2.6.2 du chapitre 2, alors que  $L$  tend vers l'infini dans certains cas, comme mentionné dans les sections 2.5.2.2 et 2.5.2.4. Pour résoudre ce problème, considérons l'estimation  $L^{LG}$  de  $L$  qui découle du champ de vitesse test de [Leblond et Gologanu, 2008], donnée par l'équation (2.53) du chapitre 2. En mettant en facteur  $1/k^4$  et en remarquant à partir de l'équation (2.12) que  $\bar{a}^6 k^4 = \bar{a}^2 \bar{b}^4$ , on peut réécrire cette estimation sous la forme suivante :

$$L^{LG} = \frac{2}{\sqrt{3\bar{a}\bar{b}^2}} \left\{ \frac{1}{k'^4} [(1 - k^2 + k^4) E'^2 + k^4 K'^2 - k^2 (1 + k^2) E' K'] + k^2 + 1 \right\}^{1/2} \quad (3.1)$$

L'étude de la quantité  $\bar{a}\bar{b}^2 L^{LG} = \frac{2}{\sqrt{3}} \{...\}^{1/2}$  montre qu'elle varie modestement en fonction du paramètre  $k$ , de  $\sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1.63$  pour  $k = 0$  (cas d'un sphéroïde allongé) à  $\sqrt{\frac{3\pi^2+32}{12}} \simeq 2.27$  (cas d'un sphéroïde aplati). Donc un multiple de  $\bar{a}\bar{b}^2 L$  peut être un choix convenable pour  $\chi$ .

Plus précisément, nous allons adopter la valeur :

$$\chi = \frac{3}{2} \bar{a}\bar{b}^2 L, \quad (3.2)$$

où  $L$  désigne la vraie valeur de la limite considérée, déterminée numériquement. Avec l'estimation  $L^{LG}$  de  $L$  donnée par l'équation (3.1), la quantité  $\chi$  ainsi définie varie entre  $\sqrt{6} \simeq 2.45$  pour  $k = 0$  et  $\sqrt{\frac{3(3\pi^2+32)}{4}} \simeq 3.40$  pour  $k = 1$ ; et les calculs numériques exposés ci-dessous révèlent que pour  $k = 1$ , la vraie valeur de  $L$  est plus faible<sup>1</sup> et très proche de l'unité. Donc l'équation (3.2) respecte la condition demandée selon laquelle  $\chi$  ne doit jamais être trop petit ni trop grand devant l'unité.

Avec le choix de  $\chi$  défini par l'équation (3.2), le coefficient  $g$  défini par l'équation (2.98) du chapitre 2 devient :

$$g \equiv \frac{\bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \quad (3.3)$$

Les quantités  $\bar{a}\bar{b}^2$  et  $\Omega$  représentent respectivement, à un facteur  $\frac{4\pi}{3}$  près, les volumes de l'ellipsoïde de demi-axes  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  et de la cellule considérée. Donc l'équation (3.3) signifie que  $g$  est une porosité fictive définie par le vide sphéroïdal allongé obtenu par la rotation de l'ellipsoïde complètement aplati ( $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0$ ) autour de son grand axe. Cette définition se présente comme une extension naturelle aux vides ayant une forme ellipsoïdale générale du paramètre de densité de fissures défini par [Budiansky et O'Connell, 1976], applicable à des fissures en pièce de monnaie.

De plus, avec ce choix (3.2), la variable  $w$  définie par l'équation (2.74) du chapitre 2 devient :

$$w \equiv \frac{2}{3(v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2)} \quad (3.4)$$

Notons que les équations (3.3) et (3.4) sont indépendantes de la valeur numérique de la limite  $L$ .

---

1. Ceci est dû au fait que  $L$  est liée à la dissipation plastique, et que le champ  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] surestime cette dissipation pour un vide sphéroïdal soumis à un chargement hydrostatique; voir l'Introduction de ce chapitre.

### 3.3 Analyse-limite numérique basée sur la méthode des éléments finis

Des méthodes spéciales d'éléments finis négligeant l'élasticité ont été développées pour de l'analyse-limite : voir par exemple [Pastor, 1978] ; [de Buhan et Maghous, 1995] ; [Pastor *et al.*, 2009]. Cependant, nous allons utiliser la méthode des éléments finis standard incluant l'élasticité, disponible dans un code industriel.

L'approche la plus naturelle serait de simuler le chargement progressif de la structure jusqu'à sa charge-limite en utilisant la méthode pas à pas. Au lieu de cela, nous imposons un seul grand pas de chargement, *sans actualisation de la géométrie* puisque l'analyse-limite ne tient pas compte des changements géométriques. L'utilisation d'un seul pas de chargement nous permet d'accélérer les calculs (à condition bien sûr que la convergence des itérations élastoplastiques soit réalisée pour des incréments de charge importants), sans introduire aucune erreur de principe ; en effet, il est indiqué dans l'annexe E qu'en employant un algorithme implicite pour la projection du prédicteur élastique de contrainte élastique sur la surface de charge, les équations du problème par éléments finis discrétisé en temps sont exactement équivalentes à celles de l'analyse-limite.

De plus, le coefficient de Poisson utilisé est très proche de  $1/2$ . Le choix d'une telle valeur plutôt qu'une plus réaliste, proche de 0.25 ou 0.3, est possible puisque les charges limites sont indépendantes des coefficients élastiques. Ce choix facilite la convergence des itérations élastoplastiques pour les raisons suivantes :

- Le matériau étant alors (presque) élastiquement incompressible, la première itération élastoplastique, supposant le comportement purement élastique, produit un champ de déplacement satisfaisant déjà à la condition d'incompressibilité demandée ;
- Comme expliqué dans l'annexe E, à condition que la cellule soit entièrement plastifiée quand sa charge limite est atteinte (qui est le cas dans presque tous les calculs présentés ici), on peut alors faire un pas de chargement modérément grand, qui assure seulement que la charge limite soit atteinte, mais pas nécessairement que la déformation élastique soit négligeable par rapport à la déformation plastique.

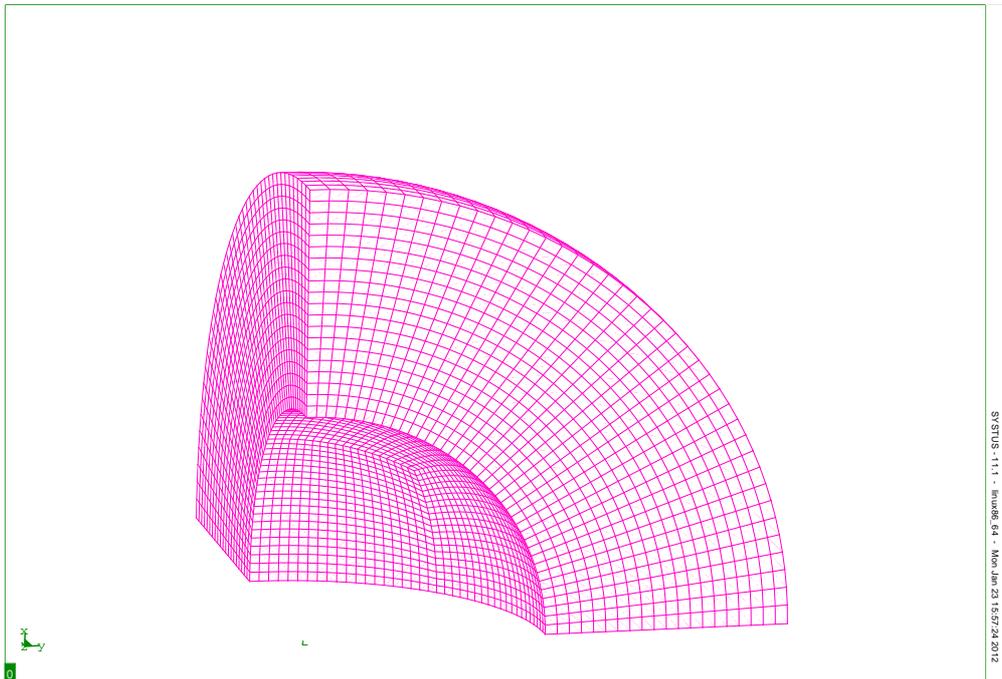
Les structures considérées sont des cellules ellipsoïdales contenant un vide ellipsoïdal confocal et soumises à des conditions de taux de déformation homogène aux bords. On s'intéresse à des tenseurs de taux de déformation macroscopique ayant les mêmes directions principales que la cellule ellipsoïdale ; ceci implique l'existence de symétries par rapport à trois plans orthogonaux qui nous permettent de mailler seulement  $1/8$  de la structure. Nous utilisons le code d'éléments finis SYSTUS<sup>®</sup> développé par ESI GROUP (Engineering System International), qui permet à l'utilisateur d'écrire des programmes de niveau supérieur de gestion et d'exploitation des résultats. Trois tels programmes ont été développés :

- Le premier prépare le maillage. A partir d'une sphère creuse maillée avec les moyens standards (figure 3.2), il déplace les nœuds de manière à déformer la géométrie en un ellipsoïde contenant un vide ellipsoïdal confocal (figure 3.3). Les nœuds sont placés sur des ellipsoïdes confocaux successifs pour des raisons expliquées dans la

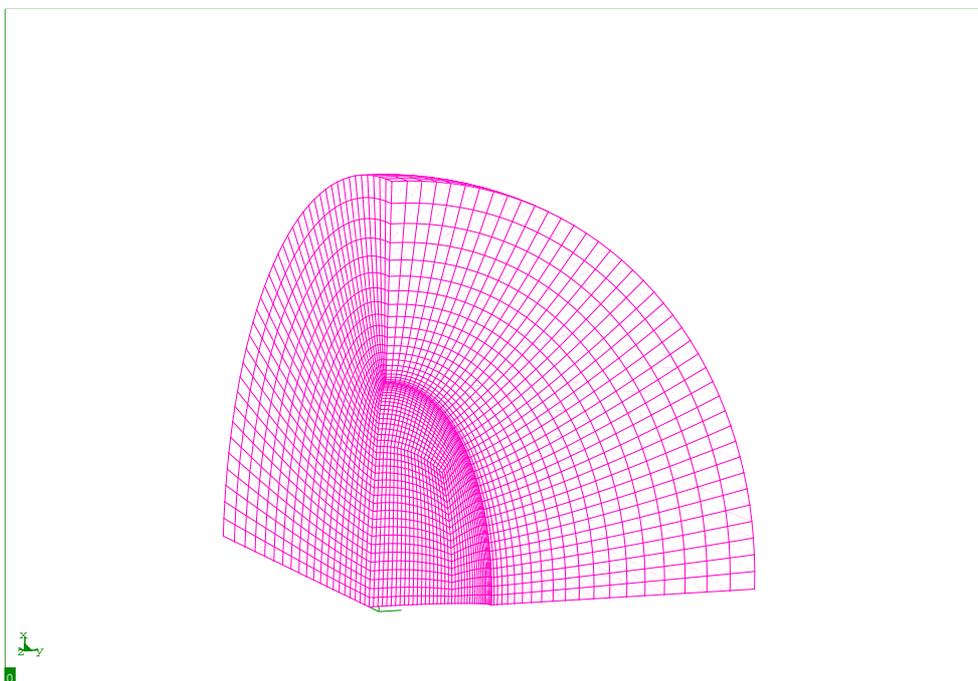
sous section 3.4.1 ci-dessous.

- Le deuxième programme exécute les calculs. En utilisant une méthode de Newton, il ajuste les composantes principales du tenseur des déformations macroscopique imposées afin d'obtenir la valeur désirée des rapports des composantes du tenseur des contraintes macroscopique.
- Enfin, le troisième programme exploite les résultats obtenus; il calcule notamment les composantes du tenseur des contraintes macroscopique grâce à l'intégration sur le volume des composantes du tenseur des contraintes local.

Le maillage initial (figure 3.2) comporte 26481 nœuds et 24000 mailles linéaires tridimensionnelles à 8 nœuds; il y a 20 mailles dans la direction radiale. Les caractéristiques du matériau sont les suivants : module de Young  $E = 210000$  MPa; coefficient de Poisson,  $\nu = 0.499$ ; limite d'élasticité en traction simple,  $\sigma_0 = 300$  MPa. Les valeurs des composantes du taux de déformation macroscopique imposées varient entre 0.1 à 1. Une bonne convergence des itérations élastoplastiques est obtenue avec généralement quelques centaines d'itérations BFGS.



**Figure 3.2:** Maillage sphérique initial - le rayon intérieur est égal à 50 et le rayon extérieur à 100



**Figure 3.3:** Un exemple de maillage ellipsoïdal final constitué de couches d'ellipsoïdes confocaux - Les demi-axes de l'ellipsoïde intérieur sont dans les proportions 10 : 5 : 1 et la porosité vaut 0.01

## 3.4 Expression de la constante $\kappa$

### 3.4.1 Généralités

La constante  $\kappa$  figurant dans le terme en cosinus hyperbolique de la fonction de charge proposée dans le chapitre 2, est reliée à une “valeur moyenne” (qui nécessite encore une définition précise)  $\bar{F}$  de la fonction  $F(w)$  dont l’estimation  $F^{LG}(w)$  (équation (2.75)<sub>1</sub>) découle du champ de vitesse test  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008]. Avec la définition (3.4), l’expression de cette estimation devient :

$$F^{LG}(w) \equiv \frac{3}{2}(v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2) \sqrt{\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} = \frac{3}{2} \frac{v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \frac{\sqrt{\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}}{\text{tr } \mathbf{D}^0(\Lambda)} \quad (3.5)$$

où l’équation (2.17) du chapitre 2 a été utilisée; l’avantage de l’expression finale est que le champ de vitesse  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  apparaît seulement dans le rapport  $\sqrt{\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}/\text{tr } \mathbf{D}^0(\Lambda)$  indépendant du “facteur de normalisation” utilisé dans sa définition.

Les calculs par éléments finis vont fournir, à une constante multiplicative près, la vraie valeur du champ de vitesse pour un chargement hydrostatique. Ainsi, on pourra obtenir la vraie valeur du rapport qu’on vient de mentionner sous la forme  $\sqrt{\langle \epsilon_{eq}^1{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}/\text{tr } \mathbf{E}^1(\Lambda)$  où  $\epsilon_{eq}^1$  et  $\mathbf{E}^1$  désignent respectivement la déformation équivalente locale finale et le tenseur final de taux de déformation macroscopique. Cependant, au lieu de définir la vraie fonction  $F(w)$  sous la forme :

$$F(w) = \frac{3}{2} \frac{v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \frac{\sqrt{\langle \epsilon_{eq}^1{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}}{\text{tr } \mathbf{E}^1(\Lambda)}, \quad (3.6)$$

comme il semblerait logique, nous allons la définir sous la forme :

$$F(w) = \frac{3}{2} \frac{v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \frac{\langle \epsilon_{eq}^1(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}{\text{tr } \mathbf{E}^1(\Lambda)}, \quad (3.7)$$

en remplaçant donc  $\sqrt{\langle \epsilon_{eq}^1{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}$  par  $\langle \epsilon_{eq}^1(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ . Il peut sembler que ce remplacement introduit une approximation supplémentaire qui dégrade la précision de l’analyse-limite, mais en fait, elle améliore plutôt les choses. En effet dans le chapitre 2, la définition de départ (2.24) de l’estimation de la dissipation plastique macroscopique contient la moyenne de la déformation équivalente, et non de son carré, et l’expression (2.28) contenant son carré n’est que le résultat de l’approximation  $\mathcal{A}_1$  nécessaire pour obtenir une estimation de type Gurson de la fonction de charge. Ainsi, le fait de remplacer  $\sqrt{\langle \epsilon_{eq}^1{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}$  par  $\langle \epsilon_{eq}^1(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  veut dire revenir<sup>2</sup> à l’expression originale de la dissipation plastique macroscopique, ce qui réduit ainsi l’erreur introduite par l’approximation  $\mathcal{A}_1$ .

2. Dans une certaine mesure seulement, puisque seuls les chargements hydrostatiques sont envisagés ici.

En pratique, le placement des nœuds sur des ellipsoïdes confocaux successifs facilitera le calcul de la valeur moyenne  $\langle \epsilon_{eq}^1(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ , sans qu'il faille utiliser la définition complexe de cette valeur moyenne faisant intervenir les coordonnées ellipsoïdales (équation (2.26)). En effet, puisque le poids local qui figure dans cette définition est simplement l'élément infinitésimal de volume compris entre deux ellipsoïdes voisins, il suffira de calculer numériquement l'intégrale de  $\epsilon_{eq}^1(\mathbf{r})$  sur les éléments se trouvant entre deux ellipsoïdes confocaux voisins, et d'ensuite diviser cette intégrale par le volume total de ces éléments.

L'argument  $w$  de la fonction  $F(w)$  est de dimension  $(longueur)^{-3}$ ; la recherche d'une expression approchée de cette fonction sera plus aisée si on la considère comme une fonction d'une variable adimensionnelle. Ainsi on introduit une nouvelle variable  $\tilde{w}$  et donc une nouvelle fonction  $\tilde{F}(\tilde{w})$  par :

$$F(w) \equiv \tilde{F}(\tilde{w}), \quad \tilde{w} \equiv \frac{3}{2} \bar{a}^3 w = \frac{\bar{a}^3}{v(\lambda) + \bar{a}\bar{b}^2} = \frac{\bar{a}^3}{v(\lambda) + k^2 \bar{a}^3} \quad (3.8)$$

Les valeurs maximale et minimale de  $\tilde{w}$  sont 0, correspondant à  $v(\lambda) = +\infty$ , et  $1/k^2$  ( $= +\infty$  dans le cas sphéroïdal allongé), correspondant à  $v(\lambda) = 0$ .

Aussi, la fonction  $F(w)$  sera tracée en fonction de l'excentricité

$$\epsilon_{xz}(\lambda) \equiv \epsilon_{xz} \equiv \frac{\bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \lambda}} \quad (3.9)$$

de l'ellipsoïde de surface  $\mathcal{E}_\lambda$  dans le plan  $Oxz$ , ou d'une certaine puissance de ce paramètre, au lieu de  $w$  ou  $\tilde{w}$ . La variable  $\epsilon_{xz}$  est commode graphiquement puisque ses valeurs extrémales, 0 et 1, sont finies et indépendantes de  $k$ . Cette excentricité est liée à  $\tilde{w}$  par la relation

$$\tilde{w} = \left\{ \frac{1}{\epsilon_{xz}} \sqrt{\left( \frac{1}{\epsilon_{xz}^2} - 1 \right) \left( k^2 + \frac{1}{\epsilon_{xz}^2} - 1 \right) + k^2} \right\}^{-1} \quad (3.10)$$

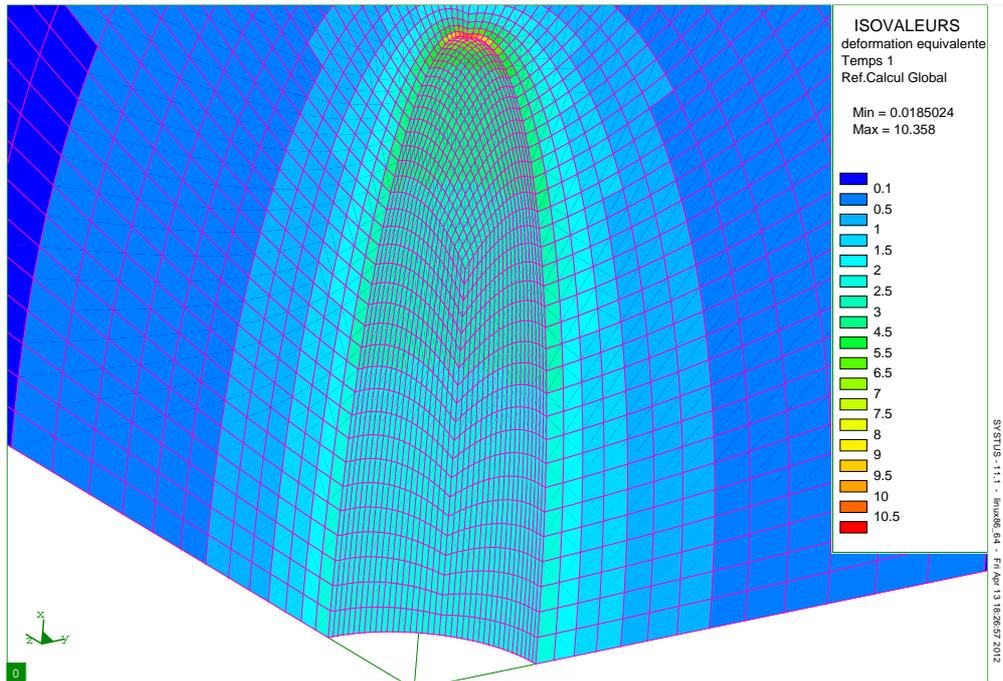
En plus de son argument  $w$  ou  $\tilde{w}$ , la fonction  $F(w)$  dépend théoriquement de trois paramètres géométriques : par exemple  $k$ , qui caractérise la famille d'ellipsoïdes confocaux  $\mathcal{E}_\lambda$ , et les excentricités

$$e_{xz} \equiv \epsilon_{xz}(\lambda = 0) = \frac{\bar{a}}{a}; \quad E_{xz} \equiv \epsilon_{xz}(\lambda = \Lambda) = \frac{\bar{a}}{A} \quad (3.11)$$

des ellipsoïdes intérieur et extérieur  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_\Lambda$  dans le plan  $Oxz$ , qui spécifient ces ellipsoïdes dans la famille considérée; ou bien  $k, e_{xz}$  et la porosité  $f$ . Cependant dans les problèmes réels de rupture ductile, la porosité est toujours faible, c'est-à-dire que les ellipsoïdes intérieur et extérieur sont très éloignés l'un de l'autre. Ainsi, on peut considérer le cas limite où l'ellipsoïde intérieur est très petit et l'ellipsoïde extérieur très grand, ce qui correspond à une grande valeur de  $e_{xz}$  et une petite de  $E_{xz}$ ; la fonction  $F(w)$  dépend alors du seul paramètre  $k$ .

### 3.4.2 Cas d'un sphéroïde allongé

On considère un sphéroïde allongé ( $k = 0$ ), muni d'un vide de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité 0.005, ce qui correspond aux excentricités intérieure et extérieure  $e_{xz} \simeq 0.98$  et  $E_{xz} \simeq 0.45$  (le sphéroïde extérieur est presque sphérique, malgré son excentricité modérée). Cette cellule est soumise à un chargement hydrostatique. On peut observer sur la figure 3.4 la répartition de la déformation équivalente au voisinage de la cavité de la cellule considérée. La figure 3.5 montre la fonction  $F(w) \equiv F^{prol}(w)$



**Figure 3.4:** Déformation équivalente dans la cellule sphéroïdale allongée contenant un vide de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité 0.005 - Représentation sur le maillage non déformé

obtenue numériquement,<sup>3</sup> en fonction de l'excentricité  $\epsilon_{xz}$  liée dans ce cas à  $\tilde{w}$  par la relation

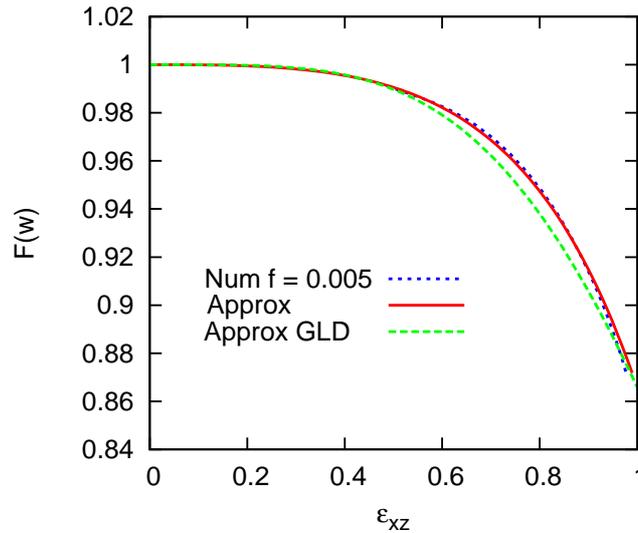
$$\tilde{w} = \frac{\epsilon_{xz}^3}{1 - \epsilon_{xz}^2} \quad (3.12)$$

et la compare à l'approximation suivante :

$$F^{prol}(w) \equiv \tilde{F}^{prol}(\tilde{w}) \equiv 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} + 11/5}, \quad (3.13)$$

3. Ces résultats numériques ne sont pas comparés à ceux de [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997], obtenus avec une autre méthode, à cause de définitions légèrement différentes de la fonction  $F(w)$ , qui rendraient la comparaison inappropriée.

ainsi qu'à celle proposée par [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997]. La formule (3.13) fournit une représentation légèrement meilleure des résultats numériques et est adoptée par la suite. Notons que cette expression tend vers les limites 1 et  $\sqrt{3}/2$  lorsque la surface  $\mathcal{E}_\lambda$  devient une grande sphère ( $\tilde{w} \rightarrow 0$ ) et un petit cylindre ( $\tilde{w} \rightarrow +\infty$ ) respectivement, comme il convient dans de tels cas (voir les équations (2.36), (2.64) du chapitre 2 et (3.5) de ce chapitre, en notant que la fonction approchée  $F^{prol}(w)$  devient exacte dans ces cas).



**Figure 3.5:** La fonction  $F(w)$  dans le cas d'un sphéroïde allongé - Résultats numériques (Num) et approximations proposées ici (Approx) et dans le travail de [Gologanu *et al.*, 1997] (Approx GLD)

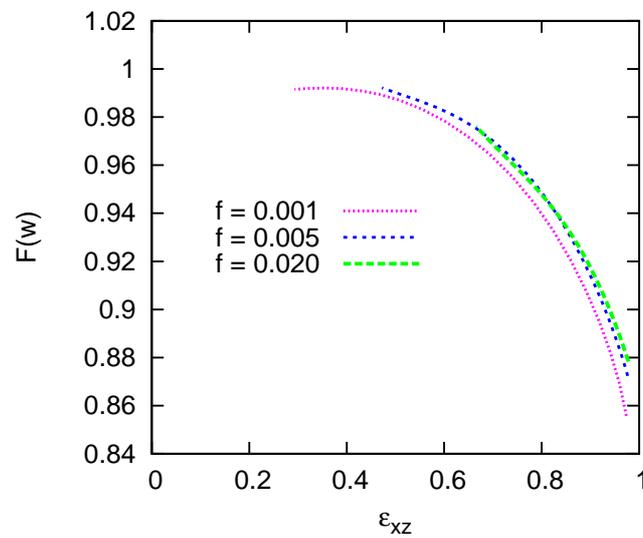
La figure 3.6 montre les résultats numériques pour le même vide mais avec trois (petites) porosités différentes. L'effet de la porosité peut être considéré comme mineur, ce qui confirme que  $F^{prol}(w)$  peut être approximativement considérée comme une fonction du seul argument  $w$  ou  $\tilde{w}$ .

### 3.4.3 Cas d'un sphéroïde aplati

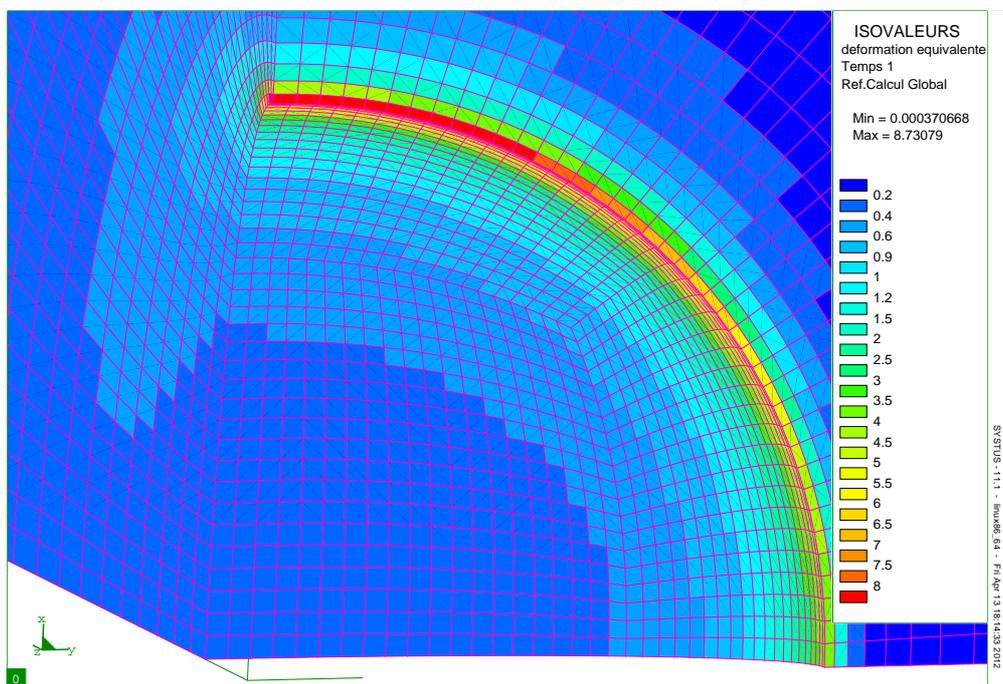
On considère une cellule sphéroïdale aplatie, munie d'un vide de demi-axes dans les proportions  $5 : 5 : \frac{1}{5}$  (excentricité  $e_{xz} \simeq 0.999$ ), et de porosité 0.005. On remarque sur la figure 3.7 une concentration de la déformation équivalente le long du bord de la cavité.

La figure 3.8 montre la fonction  $F(w) \equiv F^{obl}(w)$  obtenue numériquement.<sup>4</sup> Sur cette figure et la suivante, les courbes sont tracées en fonction de  $\epsilon_{xz}^4$  au lieu de  $\epsilon_{xz}$  pour avoir une meilleure représentation pour les grandes valeurs de l'excentricité  $\epsilon_{xz}$  qui est liée dans

4. Ces résultats numériques ne sont pas comparés à ceux de [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997] pour les mêmes raisons que précédemment.



**Figure 3.6:** La fonction  $F(w)$  dans le cas d'un sphéroïde allongé - Résultats numériques - Influence de la porosité



**Figure 3.7:** Déformation équivalente dans la cellule sphéroïdale aplatie contenant un vide de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 1/5 et de porosité 0.005 - Représentation sur le maillage non déformé

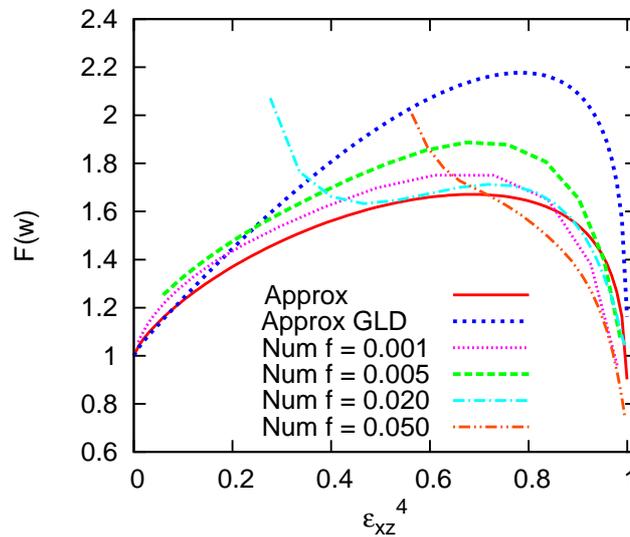
ce cas à  $\tilde{w}$  par la relation

$$\tilde{w} = \frac{\epsilon_{xz}^3}{\epsilon_{xz}^3 + \sqrt{1 - \epsilon_{xz}^2}}. \quad (3.14)$$

L'influence de la porosité est plus importante que dans le cas sphéroïdal allongé, mais peut être encore négligée en première approximation. Cette figure compare aussi ces résultats numériques à la formule approchée (qu'on va adopter ci-après)

$$F^{obl}(w) \equiv \tilde{F}^{obl}(\tilde{w}) \equiv 1 + \frac{13}{10}\tilde{w} - \frac{3}{2}\tilde{w}^5, \quad (3.15)$$

et à la formule antérieure moins précise de [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997].



**Figure 3.8:** La fonction  $F(w)$  dans le cas d'un sphéroïde aplati - Résultats numériques (Num) et approximations proposées ici (Approx) et dans le travail de [Gologanu *et al.*, 1997] (Approx GLD)

Il est facile de montrer que la constante  $\chi$  de l'équation (3.2) coïncide avec la valeur de  $F(w)$  pour  $\epsilon_{xz} = 1$ . On voit sur la figure 3.8 que cette valeur est proche de l'unité, comme nous l'avons anticipé dans la section 3.2.

### 3.4.4 Cas général

Dans les cas particuliers des sphéroïdes allongé et aplati, les vides avaient des demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et 5 : 5 :  $\frac{1}{5}$ , et par conséquent le même rapport  $\omega/a^3$ .

Dans le cas général, nous allons considérer des vides ayant la même valeur de  $\omega/a^3$  mais d'autres valeurs de  $k$ . La figure 3.9 montre les résultats numériques ainsi obtenus

pour une porosité de 0.005.

On peut observer que pour les valeurs de  $\epsilon_{xz}$  proches de 1, la fonction  $F(w)$  varie rapidement et de manière complexe pour certaines valeurs de  $k$ ; pour certains couples  $(k, \epsilon_{xz})$ , la valeur de  $F(w)$  se situe même en dehors de l'intervalle défini par les valeurs de  $F^{prol}(w)$  et  $F^{obl}(w)$  pour la même valeur de  $\epsilon_{xz}$ . Certains commentaires explicatifs sont nécessaires ici.

Considérons la valeur de  $F(w)$  dans les deux processus limites ( $\tilde{w} \rightarrow 1/k^2$ , puis  $k \rightarrow 0$ ) et ( $k \rightarrow 0$ , puis  $\tilde{w} \rightarrow +\infty$ ). Dans le premier cas, on considère la dissipation plastique sous un chargement hydrostatique au voisinage de l'ellipsoïde complètement aplati de demi-axes  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0$  ( $\tilde{w} \rightarrow 1/k^2$ ), ensuite on fait tendre la plus grande dimension  $\bar{a}$  de cet ellipsoïde vers l'infini ( $k \rightarrow 0$ ); c'est-à-dire, qu'on envisage la dissipation près d'une bande plane vide. Dans le second, on fait tendre l'ellipsoïde complètement aplati vers une aiguille ( $k \rightarrow 0$ ), ensuite on considère la dissipation plastique au voisinage de l'aiguille ( $\tilde{w} \rightarrow +\infty$ ); c'est-à-dire qu'on envisage la dissipation près d'un vide cylindrique circulaire. Il est clair que les deux situations sont complètement distinctes; par conséquent on doit s'attendre à ce que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\tilde{w} \rightarrow 1/k^2} \tilde{F}(k; \tilde{w}) \neq \lim_{\tilde{w} \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{F}(k; \tilde{w}) \quad (3.16)$$

où des indications explicites de la dépendance en  $k$  ont été temporairement introduites. La non-coïncidence de ces deux limites est confirmée en considérant l'estimation  $F^{LG}(w)$  de la fonction  $F(w)$  résultant du champ de vitesse test  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008].

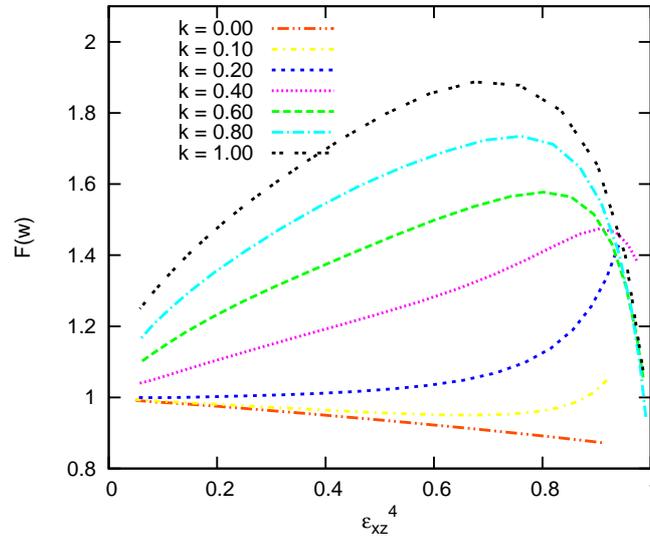
En effet, dans le premier cas, en partant du résultat  $\lim_{\tilde{w} \rightarrow 1/k^2} \tilde{F}(k; \tilde{w}) = \frac{3}{2} \bar{a}^3 k^2 L^{LG}$ , on déduit que  $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\tilde{w} \rightarrow 1/k^2} \tilde{F}(k; \tilde{w}) = \sqrt{6}$  où l'équation (3.1) a été utilisée. Dans le second cas, lorsque

$$k \rightarrow 0, w \rightarrow \frac{2}{3v(\lambda)} \text{ et } \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\langle d_{eq}^0 \rangle_{\mathbf{r}}^2} \varepsilon_\lambda \sim_{\tilde{w} \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}v(\lambda)}; \text{ par suite } \lim_{\tilde{w} \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{F}(k; \tilde{w}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les valeurs du paramètre  $\tilde{w}$  proches de  $1/k^2$  sont équivalentes à celles de l'excentricité  $\epsilon_{xz}$  proches de 1 (équation (3.10)). Par conséquent, l'équation (3.16) signifie que les limites  $k \rightarrow 0$  et  $\epsilon_{xz} \rightarrow 1$  ne commutent pas pour la fonction  $F(w)$ . Ceci implique l'existence d'une couche-limite sur le graphe de cette fonction pour les valeurs de  $\epsilon_{xz}$  proches de 1, pour lesquelles elle varie très rapidement. Cette couche-limite devient infiniment mince dans la limite  $k \rightarrow 0$ . C'est ce qui explique la complexité du comportement de la fonction  $F(w)$  notée ci-dessus.

Du fait de l'existence de cette couche-limite, il est impossible de rechercher une expression analytique approchée de  $F(w)$  sous la forme d'une simple interpolation entre celles de  $F^{prol}(w)$  et  $F^{obl}(w)$ . Cependant la figure 3.10 montre que la formule plus compliquée

$$F(w) \equiv \tilde{F}(\tilde{w}) \equiv (1 - k) \tilde{F}^{prol}(\tilde{w}) + k \tilde{F}^{obl}(k^2 \tilde{w}) + k^2 (1 - k)^2 \frac{3\tilde{w}}{8 - 5k^2 \tilde{w}}, \quad (3.17)$$

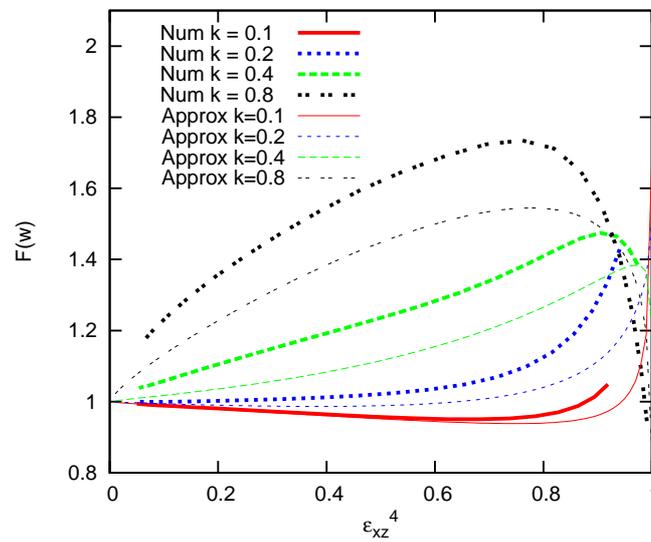


**Figure 3.9:** La fonction  $F(w)$  dans le cas général - Résultats numériques pour une porosité de 0.005 et différentes valeurs de  $k$ .

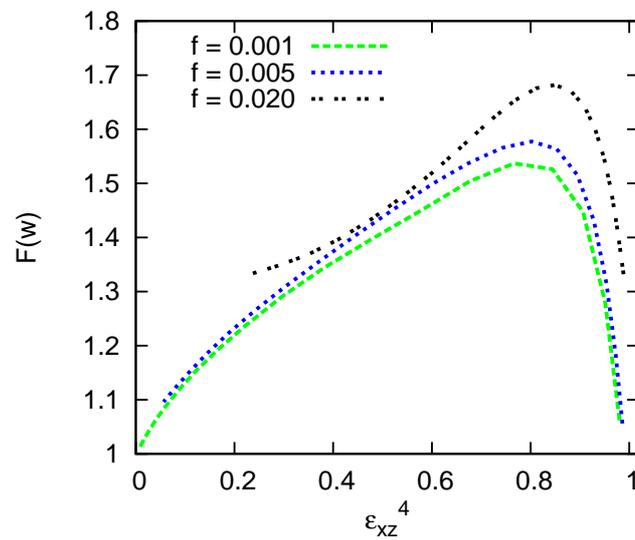
avec  $\tilde{F}^{prol}$  et  $\tilde{F}^{obl}$  donnés par les équations (3.13) et (3.15), fournit une représentation approximative acceptable des résultats numériques pour diverses valeurs de  $k$ . L'expression proposée est composée de deux parties. La première est une sorte d'interpolation entre  $F^{prol}(w)$  et  $F^{obl}(w)$ ; le facteur  $k^2$  dans  $\tilde{F}^{obl}(k^2\tilde{w})$  assure que l'argument de  $\tilde{F}^{obl}$  soit toujours compris entre 0 et 1, comme il se doit. La seconde partie est une fonction homographique de  $\tilde{w}$ , dont le rôle est de représenter approximativement la couche-limite. Cette fonction est nulle pour  $\tilde{w} = 0$  (de manière à respecter la condition  $\tilde{F}(0) = 1$ ) et pour  $k = 0$  ou 1 (puisque'il est nécessaire qu'elle se réduise à  $\tilde{F}^{prol}(\tilde{w})$  et  $\tilde{F}^{obl}(\tilde{w})$  dans ces cas), mais elle est importante quand  $\tilde{w}$  est proche de  $1/k^2$  et  $k$  différent de 0 et 1. On peut observer que l'équation (3.17) respecte la condition (3.16), les valeurs des membres de gauche et de droite étant  $\sqrt{3}/2 + 1$  et  $\sqrt{3}/2$  respectivement.<sup>5</sup>

La figure 3.11 illustre, pour  $k = 0.6$ , la dépendance des résultats numériques par rapport à la porosité; en comparant les figures 3.10 et 3.11, on voit que l'erreur intrinsèque faite lors de l'adoption de la formule approximative (3.17) de  $F(w)$  est comparable à celle faite en négligeant l'influence de la porosité sur cette fonction.

5. La première valeur diffère un peu de  $\sqrt{6}$ , qui correspond à l'estimation  $F^{LG}(w)$  de la fonction  $F(w)$ , voir ci-dessus; la coïncidence n'est pas nécessaire puisque le champ de vitesse test  $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$  de [Leblond et Gologanu, 2008] ne représente pas la solution exacte pour une fissure plane soumise à un chargement hydrostatique.



**Figure 3.10:** La fonction  $F(w)$  dans le cas général - Résultats numériques pour une porosité de 0.005 et l'approximation proposée(Approx)



**Figure 3.11:** La fonction  $F(w)$  pour  $k = 0.6$  - Résultats numériques - Influence de la porosité

### 3.4.5 Etude de la fonction $F(w)$ dans le cas d'un cylindre elliptique ( $a = +\infty, b, c$ )

Le cas d'un cylindre elliptique n'a pas été considéré numériquement, mais il est intéressant d'examiner les prédictions de la formule (3.17) dans ce cas. Il est obtenu si l'on fait tendre  $a$  vers l'infini. Par conséquent  $k \rightarrow 0$  et  $k^2\tilde{w} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(\tilde{b}^2+\tilde{\lambda})\tilde{\lambda}/\tilde{b}^2+1}} \equiv l(\tilde{w})$  (fini). Ainsi, (3.17) donne :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \tilde{F}(\tilde{w}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3l(\tilde{w})}{8 - 5l(\tilde{w})} \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) stipule que la dissipation plastique dans un cylindre elliptique est égale à celle dans un cylindre circulaire, plus un terme de correction. Donc notre fonction  $\tilde{F}(\tilde{w})$  traduit bien la différence entre les dissipations d'énergie des deux types de cylindre.

### 3.4.6 Formule approchée de $\kappa$

La constante  $\kappa$  étant liée à  $\bar{F}$ , nous allons chercher une définition précise de cette valeur moyenne en suivant l'approche de [Gologanu, 1997]. La valeur moyenne  $\bar{F}$  doit être choisie de façon à minimiser l'erreur commise en remplaçant  $F(w)$  par  $\bar{F}$  dans l'expression (2.89) de  $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}\lambda}$ . Comme une telle exigence ne peut être satisfaite simultanément pour toutes les valeurs de  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$ , nous imposons que l'erreur soit nulle uniquement pour  $\mathcal{A} \neq 0, \mathcal{B} = \mathcal{C} = \Delta_{xy} = \Delta_{yz} = \Delta_{zx} = 0$ . Il vient la condition suivante :

$$\int_{w_{min}}^{w_{max}} F(w) \frac{dw}{w} = \int_{w_{min}}^{w_{max}} \bar{F} \frac{dw}{w} \quad (3.19)$$

ou encore en utilisant  $\tilde{w}$  au lieu de  $w$ ,

$$\bar{F} = \frac{1}{\ln(\tilde{w}_{max}/\tilde{w}_{min})} \int_{\tilde{w}_{min}}^{\tilde{w}_{max}} \tilde{F}(\tilde{w}) \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w}} \quad (3.20)$$

En utilisant les équations (3.3) et (3.4), on peut exprimer  $\tilde{w}_{min}$  et  $\tilde{w}_{max}$  sous la forme

$$\tilde{w}_{min} = \frac{g_1}{k^2}, \quad \tilde{w}_{max} = \frac{g_f}{k^2} \quad (3.21)$$

où

$$g_1 = \frac{g}{1+g}, \quad g_f = \frac{g}{f+g}, \quad (3.22)$$

et les formules (3.13), (3.15), (3.17) permettent de calculer l'intégrale (3.20); on obtient finalement

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 1 + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[ -(1-k) \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \ln \frac{11k^2+5g_f}{11k^2+5g_1} \right. \\ & \left. + \frac{3}{5}(1-k^2) \ln \frac{8-5g_1}{8-5g_f} + \frac{13}{10}k(g_f - g_1) - \frac{3}{10}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cette valeur de  $\bar{F}$  présente une singularité dans le cas d'un sphéroïde allongé. En effet dans ce cas  $k = 0$ ,  $g = 0$  (équation (3.3)) et  $g_1 = g_f = 0$  (équation (3.23)), donc la fraction  $(11k^2 + 5g_f)/(11k^2 + 5g_1)$  est de la forme  $0/0$ . Pour lever cette indétermination, on exprime  $g_1$  et  $g_f$  en fonction de l'excentricité  $e_{xz}$  de l'ellipsoïde intérieur dans le plan  $xz$ , de  $f$  et de  $k$  que l'on suppose non nul, puis que l'on fait tendre vers zéro. On obtient ainsi

$$g_1 = \frac{e_{xz}^3}{k^2(1 - e_{xz}^2)}, \quad g_f = \frac{f e_{xz}^3}{k^2(1 - e_{xz}^2)} \quad (3.24)$$

Par suite, on obtient

$$\bar{F} = 1 + \frac{1 - \sqrt{3}/2}{\ln f} \ln \frac{11(1 - e_{xz}^2) + 5e_{xz}^3}{11(1 - e_{xz}^2) + 5f e_{xz}^3}. \quad (3.25)$$

Puisque  $\bar{F}$  est connu, la constante  $\kappa$  l'est également par l'équation (2.99)<sub>2</sub> du chapitre 2. Au final, on obtient :

$$\kappa = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{\ln(g_f^3/g_1^3)} \left[ -(1 - k) \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \ln \frac{11k^2 + 5g_f}{11k^2 + 5g_1} + \frac{3}{5}(1 - k^2) \ln \frac{8 - 5g_1}{8 - 5g_f} + \frac{13}{10}k(g_f - g_1) - \frac{3}{10}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \right\}^{-1} \quad (3.26)$$

### 3.5 Expression des coefficients $H_x$ , $H_y$ , $H_z$

Les coefficients  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  du critère de plasticité approché proposé dans le chapitre 2 sont donnés par l'équation (2.100) où  $\Omega = 1/\text{tr} \mathbf{D}^0(\mathbf{\Lambda})$ . De façon équivalente, on a

$$H_x = \frac{E_{xx}^1}{\text{tr} \mathbf{E}^1}, \quad H_y = \frac{E_{yy}^1}{\text{tr} \mathbf{E}^1}, \quad H_z = \frac{E_{zz}^1}{\text{tr} \mathbf{E}^1}, \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{E}^1$  désigne le tenseur de déformation macroscopique final déterminé numériquement pour un chargement hydrostatique. Ce tenseur est lié à la déformation homogène imposée sur le bord extérieur.

Tout comme la fonction  $F(w)$ , les coefficients  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  dépendent des trois paramètres géométriques  $k$ ,  $e_{xz}$  et  $E_{xz}$  ou bien  $k$ ,  $e_{xz}$  et  $f$ . Étant donné que l'ellipsoïde intérieur  $\mathcal{E}_0$  est très éloigné de l'ellipsoïde extérieur  $\mathcal{E}_\Lambda$ , nous allons considérer le cas limite où le vide est très petit et négliger l'influence de  $e_{xz}$ . Donc nous allons supposer que les coefficients  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  dépendent uniquement des paramètres  $k$  et  $E_{xz}$  caractérisant la forme de l'ellipsoïde extérieur.

Puisque la somme de  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  est égale à 1 (équation (2.101) du chapitre 2), on va d'abord déterminer  $H_x$  et  $H_y$  et ensuite en déduire  $H_z$ .

#### 3.5.1 Cas d'un sphéroïde allongé

Dans le cas d'un sphéroïde allongé ( $k = 0$ ), les axes  $Oy$  et  $Oz$  sont équivalents donc les coefficients  $H_y \equiv H_y^{prol}$  et  $H_z \equiv H_z^{prol}$  sont égaux. La figure 3.12 montre les résultats

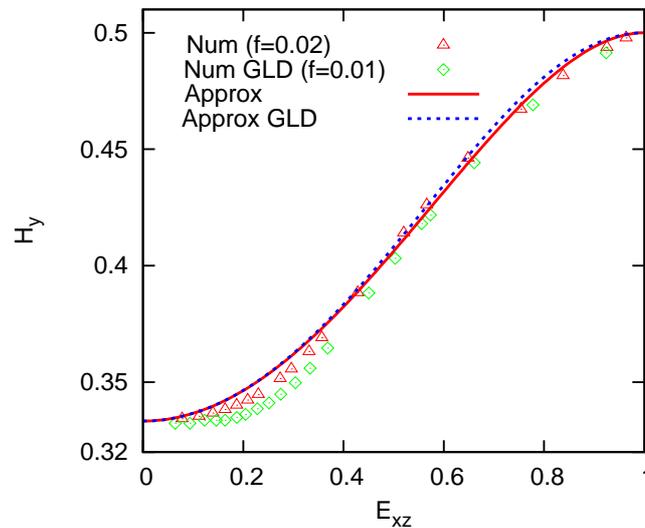
numériques obtenus pour  $H_y^{prol}$  pour une porosité de 0.02, et ceux de [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] pour une porosité de 0.01 obtenus avec une méthode différente. Ces résultats numériques coïncident pratiquement, ce qui confirme que l'influence de la porosité est négligeable. La même remarque a été faite par [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997] à l'issue d'une étude détaillée de l'influence de la porosité sur ce coefficient. Donc  $H_y^{prol}$  peut être considéré comme dépendant du seul paramètre  $E_{xz}$ . La figure compare aussi ces résultats à la formule analytique approchée (qu'on va adopter ci-après) :

$$H_y^{prol} \equiv \frac{1}{3} \left( 1 + E_{xz}^2 - \frac{E_{xz}^4}{2} \right) \quad (3.28)$$

et à celle proposée par [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] définie par

$$H_y^{GLDprol} \equiv \frac{1 + E_{xz}^2}{3 + E_{xz}^4} \quad (3.29)$$

On observe que l'expression (3.28) tend vers les bonnes limites  $1/3$  et  $1/2$  lorsque la cellule devient une sphère ( $E_{xz} \rightarrow 0$ ) et un cylindre à base circulaire ( $E_{xz} \rightarrow 1$ ). La valeur de  $1/3$  pour une sphère creuse est due à l'équivalence des axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  et la valeur de  $1/2$  pour un cylindre provient de la solution exacte pour une telle géométrie, dans le cas d'un chargement hydrostatique.



**Figure 3.12:** Le coefficient  $H_y$  dans le cas d'un sphéroïde allongé - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Num, Approx) et celui de [Gologanu *et al.*, 1997] (Num GLD, Approx GLD).

A partir de l'équation (2.101), on trouve :

$$H_x^{prol} = 1 - 2H_y^{prol} \quad (3.30)$$

### 3.5.2 Cas d'un sphéroïde aplati

Dans le cas d'un sphéroïde aplati ( $k = 1$ ), les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont équivalents donc les coefficients  $H_x \equiv H_x^{obl}$  et  $H_y \equiv H_y^{obl}$  sont égaux. La figure (3.13) montre les résultats numériques obtenus pour  $H_y^{obl}$  pour une porosité de 0.02 et ceux de [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] pour une porosité de 0.01, et les compare avec la formule approchée (qu'on va adopter ci-après) :

$$H_y^{obl} \equiv \frac{1}{3} \frac{2 - 7E_{xz}^2 + 5E_{xz}^4}{2 - 7E_{xz}^2 + 10E_{xz}^4} \quad (3.31)$$

et avec celle proposée par [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] définie par

$$H_y^{GLDobl} \equiv \frac{(1 - E_{xz}^2)(1 - 2E_{xz}^2)}{3 - 6E_{xz}^2 + 4E_{xz}^4} \quad (3.32)$$

Une fois encore, on remarque qu'il y a juste une légère différence entre nos résultats et ceux de [Gologanu *et al.*, 1997]. L'influence de la porosité sur ce coefficient a été étudiée par [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] qui ont conclu qu'elle est encore faible. D'autre part, notre approximation reproduit mieux les résultats numériques, même si l'ancienne capte déjà le changement de signe de  $H_y$ .<sup>6</sup> Notons que l'expression (3.31) tend vers les bonnes limites  $1/3$  et  $0$  quand la cellule devient respectivement une sphère ( $E_{xz} \rightarrow 0$ ) et un "sandwich" constitué par deux couches planes perpendiculaires à la direction  $z$  séparées par un vide ( $E_{xz} \rightarrow 1$ ). La valeur  $0$  dans le cas "sandwich" est due au fait que le mode de déformation de cette structure pour un chargement hydrostatique est une extension simple dans la direction  $z$  perpendiculaire aux couches. La complexité de la formule (3.31) vient du fait qu'il est impossible de reproduire le plateau qu'on peut observer sur la courbe dans la région des faibles valeurs de  $E_{xz}$  avec une fonction polynomiale de bas degré.

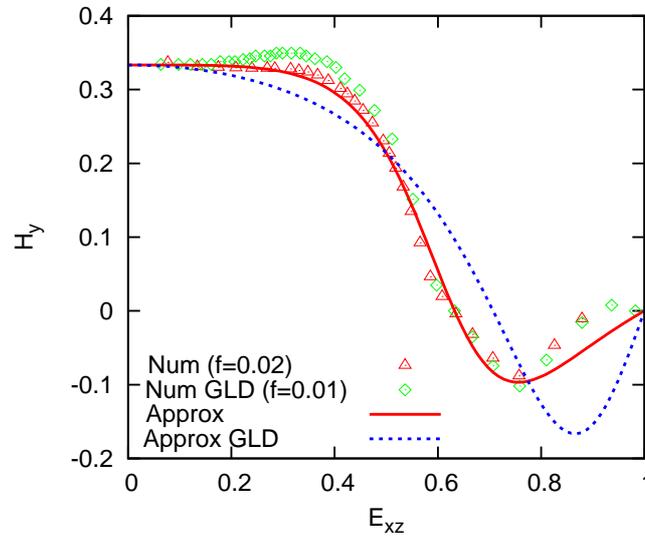
### 3.5.3 Cas général

Dans le cas d'un ellipsoïde général,  $k$  est différent de  $0$  et  $1$ , et les coefficients  $H_x$ ,  $H_y$  et  $H_z$  sont tous différents. La figure 3.14 montre les résultats numériques obtenus pour  $H_x$  et  $H_y$  pour plusieurs valeurs de  $k$  et une porosité de 0.02. Le comportement du coefficient  $H_x$  comme fonction de  $k$  et  $E_{xz}$  est relativement simple alors que celui des deux autres ne l'est pas. Par exemple, pour  $k = 0.6$ , quand  $E_{xz}$  croît,  $H_y$  croît d'abord, ensuite décroît, puis croît encore ; certaines courbes se croisent ; et pour certains couples  $(k, \epsilon_{xz})$ , la valeur de  $H_y$  se situe même en dehors de l'intervalle défini par les valeurs de  $H_y^{prol}$  et  $H_y^{obl}$  pour la même valeur de  $\epsilon_{xz}$ . Ce comportement compliqué mérite là encore un commentaire.

Supposons  $k \neq 0$ , ce qui exclut le cas d'un sphéroïde allongé, et faisons tendre  $E_{xz}$  vers  $1$ . Quelle que soit la valeur de  $k$ , la cellule devient un "sandwich" qui, soumis à un

---

6. Les commentaires sur ce changement de signe ont été donnés dans l'introduction, et l'importance de sa bonne reproduction dans le modèle constitutif a été soulignée



**Figure 3.13:** Le coefficient  $H_y$  dans le cas d'un sphéroïde allongé - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Num, Approx) et celui de [Gologanu *et al.*, 1997] (Num GLD, Approx GLD).

chargement hydrostatique, subit une extension pure dans la direction  $z$  perpendiculaire aux couches ; il s'ensuit que :

$$H_x(k; E_{xz} = 1) = H_y(k; E_{xz} = 1) = 0 \quad (k \neq 0), \quad (3.33)$$

où des indications temporaires de dépendance en  $k$  et  $E_{xz}$  ont été introduites. D'autre part, si  $k = 0$ , la cellule est un sphéroïde allongé qui, lorsque  $E_{xz}$  tend vers 1, devient un cylindre à base circulaire ; donc :

$$H_x(k = 0; E_{xz} = 1) \equiv H_x^{prol}(E_{xz} = 1) = 0, \quad H_y(k = 0; E_{xz} = 1) \equiv H_y^{prol}(E_{xz} = 1) = \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

Il vient à partir des équations (3.33) et (3.34) que :

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{E_{xz} \rightarrow 1} H_x(k; E_{xz}) = \lim_{E_{xz} \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow 0} H_x(k; E_{xz}) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{E_{xz} \rightarrow 1} H_y(k; E_{xz}) = 0 \neq \lim_{E_{xz} \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow 0} H_y(k; E_{xz}) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.35)$$

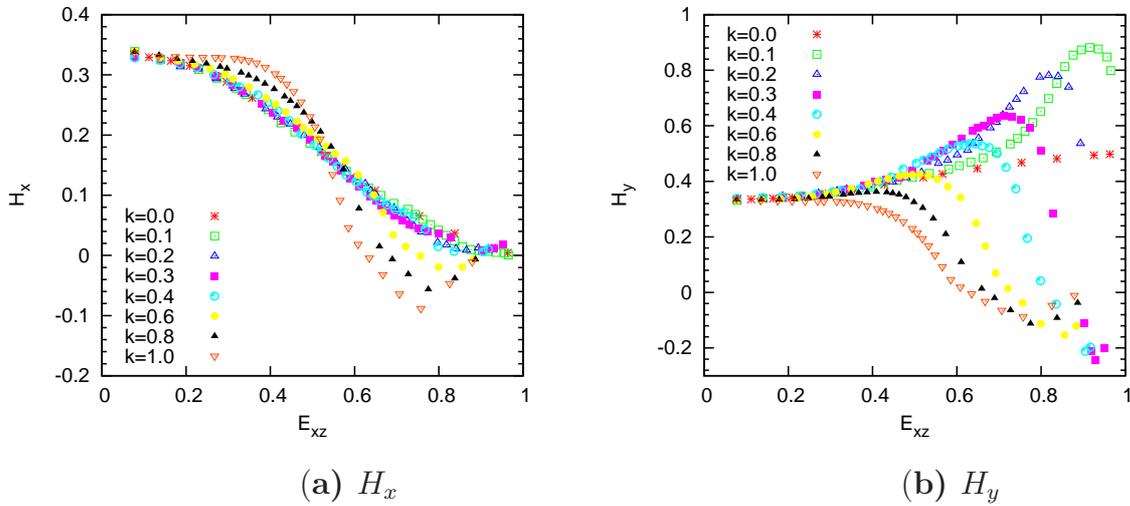
Tout comme pour la fonction  $F(w)$ , la non commutation des limites  $k \rightarrow 0$  et  $E_{xz} \rightarrow 1$  pour le coefficient  $H_y$  implique l'existence d'une couche-limite sur le graphe le représentant en fonction de  $E_{xz}$ , pour les valeurs de  $E_{xz}$  proches de 1. Cette couche, dans laquelle  $H_y$  varie rapidement, devient infiniment mince lorsque  $k \rightarrow 0$ . Sur la figure 3.14b, la présence de cette couche-limite devient visible si les courbes correspondantes aux valeurs non nulles de  $k$  sont mentalement complétées par le point  $(E_{xz} = 1, H_y = 0)$ , en accord

avec l'équation (3.34)<sub>2</sub>; ce point ne peut être obtenu numériquement parce que les cellules considérées ont des volumes finis.

La figure 3.15a montre que le coefficient  $H_x$  peut être représenté de façon adéquate pour différentes valeurs de  $k$  par la formule d'interpolation suivante :

$$H_x \equiv (1 - k^2)H_x^{prol} + k^2 H_x^{obl}, \quad (3.36)$$

où les coefficients  $H_x^{prol}$  et  $H_x^{obl}$  sont donnés par les équations (3.28) et (3.31). Les coefficients  $k^2$  et  $1 - k^2$  permettent de mieux reproduire les résultats numériques que les coefficients simples  $k$  et  $1 - k$ .



**Figure 3.14:** Les coefficients  $H_x$  et  $H_y$  dans le cas général - Résultats numériques pour une porosité de 0.02 et plusieurs valeurs de  $k$ .

Pour reproduire le comportement complexe de  $H_y$ , on ne peut plus se contenter d'une simple interpolation, il faut ajouter un terme qui va approximativement reproduire la couche-limite. On propose l'expression suivante :

$$H_y \equiv (1 - k)H_y^{prol} + kH_y^{obl} + \frac{1}{2}(1 - k)r(E_{xz}, k) \quad (3.37)$$

où  $H_y^{prol}$ ,  $H_y^{obl}$  sont donnés par les équations (3.28)-(3.31) et  $r(E_{xz}, k)$  est une fonction homographique de  $E_{xz}$  qui prend en compte la couche-limite et est définie par :

$$r(E_{xz}, k) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{E_{xz}^{3/2}(1 - \alpha - E_{xz})}{(1 - \alpha - E_{xz})^2 + \beta^2}; \quad (3.38)$$

$\alpha$  et  $\beta$  (largeur de la fonction homographique) sont des fonctions de  $k$  qu'on peut ajuster à partir du comportement de  $H_y$ . Le terme  $r(E_{xz}, k)$  est nul pour  $E_{xz} = 0$  du fait du facteur  $E_{xz}^{3/2}$ , de sorte qu'on ait  $H_y = 1/3$  dans le cas sphérique ( $E_{xz} = 0$ ). Nous verrons

qu'il l'est également, du fait de la dépendance en  $k$  choisie pour les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , pour  $k$  égal à 0 ou 1 (de sorte que  $H_y$  se réduise à  $H_y^{prol}$  et  $H_y^{obl}$  dans ces cas). Mais il est important lorsque  $E_{xz}$  est proche de 1 et  $k$  différent de 0.

Il faut évidemment que la fonction  $r(E_{xz}, k)$  reste finie pour toutes les valeurs de  $E_{xz}$  et  $k$ . Ceci implique que son maximum qui vaut  $\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$  doit rester fini pour tout  $k$ . Par ailleurs, la largeur de la fonction homographique  $r(E_{xz}, k)$  (liée à l'épaisseur de la couche-limite) doit tendre vers 0 avec  $k$ , donc  $\beta$  doit tendre vers 0 avec  $k$ . Avec le maximum de  $r(E_{xz}, k)$  fini, ceci implique que,  $\alpha$  doit aussi tendre vers 0 avec la même puissance de  $k$ . Il reste maintenant à trouver cette puissance. Pour cela, nous allons étudier le cas typique d'un cylindre à base elliptique.

La fonction  $r(E_{xz}, k)$  présente une singularité dans le cas d'un cylindre à base elliptique : pour un tel vide  $k$  tend vers 0, mais l'excentricité  $E_{xz}$  tend vers 1, de telle sorte que la fraction  $r(E_{xz}, k)$  est de la forme 0/0. Pour lever cette indétermination, on utilise l'excentricité  $E_{yz}$  de l'ellipsoïde extérieur dans le plan  $yz$  qui est reliée à celle dans le plan  $xz$  par la relation :

$$E_{xz} = 1 - \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{E_{yz}^2} - 1 \right) + o(k^2) \quad (3.39)$$

et on pose  $\alpha = \zeta_1 k^n$  et  $\beta = \zeta_2 k^n$ .

• Si l'on suppose d'abord  $n > 2$ , la fonction homographique  $r(E_{xz}, k)$  peut se mettre sous la forme

$$r(E_{xz}, k) \simeq \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 k^{n-2}}{\zeta_1} \frac{-\zeta_1 k^{n-2} + (1/E_{yz}^2 - 1)/2}{\zeta_2 k^{n-2} + (-\zeta_1 k^{n-2} + (1/E_{yz}^2 - 1)/2)^2} \quad (3.40)$$

L'expression (3.40) tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow 0$ , ce qui implique que le coefficient  $H_y$  est le même dans le cas de cylindres à base circulaire et elliptique. Ceci n'est pas satisfaisant.

• En supposant  $n < 2$ , on peut réécrire  $r(E_{xz}, k)$  sous la forme :

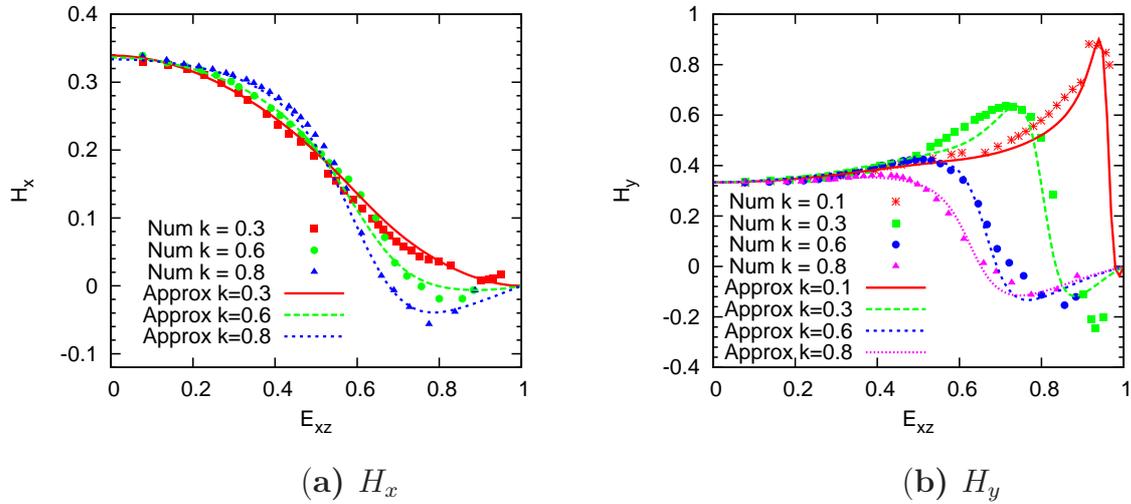
$$r(E_{xz}, k) \simeq \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{\zeta_1} \frac{-\zeta_1 + k^{2-n}(1/E_{yz}^2 - 1)/2}{\zeta_2^2 + (-\zeta_1 + k^{2-n}(1/E_{yz}^2 - 1)/2)^2}. \quad (3.41)$$

L'expression (3.41) tend vers  $-1$  lorsque  $k \rightarrow 0$ , ce qui implique que  $H_y$  tend vers 0 dans le cas d'un cylindre elliptique. Ceci n'est de nouveau pas satisfaisant car la valeur 0 correspond au cas sandwich.

On peut conclure que, pour les valeurs de  $k$  proches de 0, les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  doivent être proportionnels à  $k^2$ . Pour reproduire approximativement les résultats numériques, on propose alors les expressions suivantes pour les valeurs arbitraires de  $k$  :

$$\alpha \equiv \frac{4k^2}{1 + 9k^2}, \quad \beta \equiv \frac{3k^2}{1 + 30k^2} \quad (3.42)$$

La figure 3.15b montre que les formules (3.41) et (3.42) donnent des représentations acceptables de  $H_y$ .



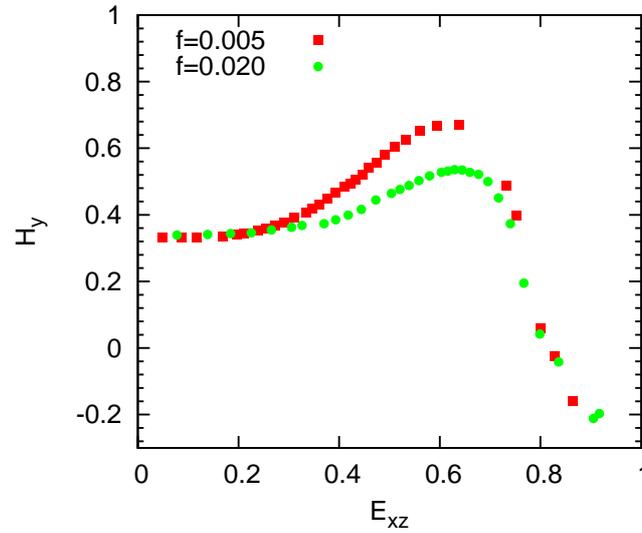
**Figure 3.15:** Les coefficients  $H_x$  et  $H_y$  dans le cas général - Résultats numériques (Num) et approximation proposée (Approx).

La formule (3.41) présente une singularité dans le cas d'un cylindre elliptique, comme expliqué ci-dessous. Pour lever cette indétermination, on utilise les formules (3.39), (3.34) et (3.42) et on trouve

$$H_y = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{25}{2} \frac{E_{yz}^2 (9E_{yz}^2 - 1)}{(9E_{yz}^2 - 1)^2 + 36E_{yz}^4} \right] \quad (\text{cylindre elliptique}) \quad (3.43)$$

La figure 3.16 illustre l'influence de la porosité sur le coefficient  $H_y$  pour la valeur typique  $k = 0.4$ . La comparaison des figures 3.14b et 3.16 montre que l'erreur commise en utilisant la formule approchée (3.41) pour ce coefficient est comparable à celle commise en négligeant sa dépendance par rapport à la porosité.

Enfin la formule approchée du coefficient  $H_z$  est déduite de celles de  $H_x$  et  $H_y$  (3.36) et (3.37), en utilisant l'équation (2.101) du chapitre 2.



**Figure 3.16:** Le coefficient  $H_y$  pour  $k = 0.4$  - Résultats numériques - Influence de la porosité

## 3.6 Expression de la forme quadratique $Q(\Sigma)$

### 3.6.1 Principe de détermination de $Q(\Sigma)$

Afin d'améliorer l'analyse-limite du chapitre 2 pour les chargements déviatoriques, il serait certainement possible de remplacer le champ de taux de déformation uniforme utilisé ici par le champ élastique d' [Eshelby, 1957], comme l'ont fait [Monchiet *et al.*, 2007], [Monchiet *et al.*, 2011] dans le cas simple des vides sphérique et sphéroïdal. Cependant nous allons adopter plutôt une autre approche plus directe, qui consiste à laisser tomber l'analyse-limite et à utiliser certaines bornes rigoureuses applicables aux composites non linéaires, qu'on va adapter aux matériaux plastiques poreux. Les coefficients de la forme quadratique  $Q(\Sigma)$  qui figurent dans la surface de charge proposée (équation (2.97)) seront simplement déterminés de manière à égaler cette borne. On ne fera référence à aucun champ de vitesse.

Il est à noter que l'ajustement de la forme quadratique n'est pas la seule façon de retrouver une borne ou une autre. Il a été montré par [Monchiet *et al.*, 2007], [Monchiet *et al.*, 2011] que le même résultat peut être obtenu en remplaçant la forme linéaire  $\mathcal{L}(\Sigma)$  qui se trouve dans le terme en "cosh" de la fonction de charge proposée par la racine carrée d'une forme quadratique (voir équation (28) de [Monchiet *et al.*, 2007] et équation (42) de [Monchiet *et al.*, 2011]). Notre choix est motivé par une implémentation numérique facile de notre modèle dans un code de calcul par éléments finis.

Le problème du choix d'une borne convenable sera envisagé dans la section 3.6.3. On supposera ici cette borne choisie.

Puisque les différentes bornes sont obtenues à partir de l'estimation de l'énergie élastique d'un milieu linéaire de comparaison, nécessairement quadratique vis-à-vis des composantes du tenseur des contraintes, le critère de plasticité macroscopique approché associé s'écrit :

$$\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma}) \equiv \frac{\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} - (1-f)^2 = 0 \quad (3.44)$$

où  $\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})$  désigne une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des contraintes macroscopiques. La fonction de charge  $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma})$  ainsi définie est supposée représenter une estimation par défaut de la vraie fonction de charge  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ , qui fournit une estimation par l'extérieur de la surface de charge ( $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma}) < \Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ ), de sorte que si  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$  est négatif, il en est de même de  $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma})$ .

On sait que les bornes disponibles dans la littérature donnent des prédictions précises pour des chargements essentiellement déviatoriques, mais pas pour ceux essentiellement hydrostatiques. Pour ce dernier type de chargement  $\Sigma_{xx} \simeq \Sigma_{yy} \simeq \Sigma_{zz}$  de sorte qu'en utilisant les équations (2.99)<sub>3</sub> et (2.101) du chapitre 2, on obtient  $\Sigma_h \simeq \Sigma_m$ . Ainsi les chargements pour lesquels les bornes sont imprécises ont une valeur élevée de  $|\Sigma_h|$  comme de  $|\Sigma_m|$ . Donc il est tout à fait logique d'utiliser le critère approché (3.44) comme référence pour de faibles valeurs de  $|\Sigma_h|$  seulement. Plus précisément, nous allons imposer la coïncidence des fonctions de charge  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$  et  $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma})$  au second ordre en  $\Sigma_h/\sigma_0$ .

En utilisant les équations (2.97) et (2.99) du chapitre 2, et le développement limité au second ordre de  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \left(1 + \frac{\kappa^2 \Sigma_h^2}{2\sigma_0^2}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 + O\left[\left(\frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right)^4\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} [\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) + (1+g)(f+g)\kappa^2 \Sigma_h^2] - (1-f)^2 + O\left[\left(\frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right)^4\right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

En identifiant les membres de droite (sans les termes en  $O[(\Sigma_h/\sigma_0)^4]$ ) des expressions (3.44) et (3.45), on obtient l'équation :

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma}) - (1+g)(f+g)\kappa^2 \Sigma_h^2, \quad (3.46)$$

qui relie les coefficients de la forme quadratique  $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})$  à ceux de  $\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})$ , en plus des coefficients  $g, \kappa, H_x, H_y, H_z$  déjà définis.

Pour faciliter l'étude de la fonction de charge ainsi définie, on peut la réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \left[ \cosh\left(\frac{\kappa \Sigma_h}{\sigma_0}\right) - \frac{\kappa^2 \Sigma_h^2}{2\sigma_0^2} \right] - (1+g)^2 - (f+g)^2 \\ &= \frac{\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} - (1-f)^2 + 2(1+g)(f+g) \left[ \cosh\left(\frac{\kappa \Sigma_h}{\sigma_0}\right) - 1 - \frac{\kappa^2 \Sigma_h^2}{2\sigma_0^2} \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ainsi les propriétés suivantes sont vérifiées :

– *Convexité*

En effet, la fonction de charge  $\Phi : \Sigma \mapsto \Phi(\Sigma)$  est convexe car elle est la somme des fonctions  $\Sigma \mapsto \Phi^B(\Sigma)$  et  $\Sigma \mapsto 2(1+g)(f+g) \left[ \cosh\left(\frac{\kappa\Sigma_h}{\sigma_0}\right) - 1 - \frac{\kappa^2\Sigma_f^2}{2\sigma_0^2} \right]$  qui sont toutes deux convexes. La convexité de la première fonction est assurée par la définie positivité de la forme quadratique  $Q^B(\Sigma)$  et celle de la seconde vient du fait qu'elle est la composée de la fonction linéaire  $\Sigma \mapsto \kappa\Sigma_h/\sigma_0$  et de la fonction convexe  $x \mapsto \cosh x - 1 - x^2/2$ . Par conséquent, le domaine d'élasticité  $\Phi(\Sigma) < 0$  est convexe, quelle que soit la borne de référence choisie.

– *Respect de la borne  $\Phi^B(\Sigma) < 0$*

Le terme  $2(1+g)(f+g)[\dots]$  étant positif, si  $\Phi(\Sigma) < 0$ , alors  $\Phi^B(\Sigma) < 0$ . Donc la fonction de charge  $\Phi(\Sigma)$  respecte la borne choisie pour tous les états de contraintes possibles. Ceci marque une différence avec l'ancien modèle GLD pour les vides sphéroïdaux, dans lequel la même borne de référence a été utilisée mais d'une manière différente n'assurant pas automatiquement le respect de cette borne pour tous les états de contraintes [Gologanu, 1997].

– *Définition toujours acceptable de la forme quadratique  $Q(\Sigma)$*

Il est clair à partir de l'équation (3.46), que si les coefficients de la forme quadratique  $Q^B(\Sigma)$  sont bien définis pour toutes les valeurs des paramètres géométriques, il en est de même de ceux de la forme quadratique  $Q(\Sigma)$ . Cette propriété aussi marque une différence avec la fonction de charge du modèle GLD, dont [Monchiet *et al.*, 2008] ont remarqué que les coefficients deviennent infinis pour de grandes valeurs (d'intérêt pratique mineur il est vrai) de la porosité.

### 3.6.2 Bornes des composites non linéaires

– *Borne de Voigt*

Parmi les bornes des composites non linéaires, la borne de *Voigt* (voir par exemple [Ponte-Castaneda et Suquet, 1998]) est la plus simple du fait qu'elle ne tient pas compte de la morphologie des hétérogénéités.

Il existe d'autres bornes plus précises qui rajoutent l'hypothèse supplémentaire sur la géométrie des hétérogénéités. Les modèles donnant ces bornes reposent sur la substitution du comportement local non linéaire du composite par une loi linéaire, dont le tenseur des modules effectifs des phases est estimé grâce à une formulation variationnelle. Donc ces bornes diffèrent selon la formulation variationnelle. On a dans l'ordre chronologique :

– *Borne de Willis*

La première approche variationnelle a été proposée par [Hashin et Shtrikman, 1962], et permet de trouver des bornes pour les composites linéaires élastiques avec hétérogénéités statistiquement isotropes. La borne d'Hashin-Shtrikman a été généralisée par [Willis, 1977] à des composites élastiques avec des hétérogénéités ellipsoïdales qui sont décrites par des fonctions de distribution à deux points "statistiques c'est à dire faisant intervenir la forme et l'orientation des hétérogénéités". La borne de

Willis résulte de l'extension de celle de [Willis, 1977] au cas non linéaire, et est due à [Willis, 1991], [Ponte-Castaneda, 1991] et [Michel et Suquet, 1992]<sup>7</sup>. Cette borne non linéaire de Willis est appliquée au cas où des hétérogénéités sont des vides ellipsoïdaux ayant la même forme et la même orientation. Elle suppose de plus que la fonction de distribution de leurs centres possède une “symétrie ellipsoïdale” similaire à celle des vides eux-mêmes.

– *Borne de Ponte-Castaneda-Willis*

Cette borne a été établie par [Ponte-Castaneda et Willis, 1995] dans le cas linéaire et étendue au cas non linéaire par [Ponte-Castaneda et Suquet, 1998]. Elle se présente comme une extension de la borne de Willis au cas où la fonction de distribution des centres des vides a une symétrie ellipsoïdale quelconque indépendante de celle des vides eux-mêmes.

### 3.6.3 Choix d'une borne convenable

Chacune de ces bornes peut être adoptée pour définir la forme quadratique de référence  $\mathcal{Q}^B(\Sigma)$  (équation (3.46)). Cependant, la borne de Voigt prédit à tort que les fissures circulaires orthogonales à la direction  $z$  n'ont aucun effet sur la surface de charge sous un chargement de cisaillement pur  $\Sigma_{zx}$  ou  $\Sigma_{zy}$ . À l'autre extrême, la borne de Ponte-Castaneda-Willis est peut-être inutilement raffinée pour le cas présent. En effet, l'amélioration qu'elle apporte par rapport à la borne simple de Willis réside dans l'incorporation de l'influence de la distribution spatiale des vides ; mais cette fonction de distribution a encore plus rarement été caractérisée expérimentalement que le rapport d'aspect des vides, et son effet est d'après [Danas et Ponte-Castaneda, 2009a] mineur pour les faibles porosités d'intérêt pratique. Nous proposons donc d'adopter la borne de Willis qui semble représenter un bon compromis entre simplicité et réalisme. L'expression de la forme quadratique  $\mathcal{Q}^W(\Sigma)$  correspondant à cette borne est fournie dans les annexes F et G.

Il faut reconnaître que certaines hypothèses sous-jacentes à la borne non linéaire de Willis sont quelque peu incompatibles avec celles introduites ci-dessus :

- L'hypothèse de l'identité des symétries ellipsoïdales des vides eux-mêmes et de la fonction de distribution de leurs centres est incompatible avec la nôtre de cofocalité des ellipsoïdes intérieur et extérieur. Cette lacune pourrait être comblée par l'adoption de la borne de Ponte-Castaneda-Willis comme référence au lieu de celle de Willis au prix d'une complexité supplémentaire (notamment l'introduction de deux tenseurs d'Eshelby au lieu d'un seul).
- Fondamentalement, la borne non-linéaire de Willis ne repose pas sur une analyse intrinsèquement approximative d'une “cellule représentative” soumise à des conditions de taux de déformation homogène, mais sur une homogénéisation rigoureuse d'un milieu infini (la différence apparaît par exemple lorsqu'on compare la borne d'Hashin-

---

7. Cette borne a été adoptée comme référence dans le modèle pour les matériaux plastiques poreux proposé par [Ponte-Castaneda et Zaidman, 1994] ; mais cela a été fait pour tous les états de chargements possibles, ce qui donne des résultats très imprécis dans le cas des chargements hydrostatiques.

Shtrikman d'un milieu élastique poreux macroscopiquement isotrope chargé en cisaillement à la solution exacte d'une sphère creuse élastique soumise au même chargement à travers des conditions de déformation homogène sur le bord ; voir [Garajeu, 1995]).

Ces carences sont considérées comme de peu d'importance, car elles se rapportent à l'influence des régions situées loin des vides qui, encore une fois, devrait être mineure pour les faibles porosités.

## 3.7 Résumé

La définition du critère approché de plasticité proposé étant complète, nous allons résumer toutes les équations correspondantes pour plus de commodité. Le matériau est rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises avec seuil d'écoulement  $\sigma_0$  en traction simple, ainsi qu'à la loi d'écoulement associée. Les demi-axes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  du vide ellipsoïdal sont parallèles aux directions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $f$  désigne la porosité.

### 3.7.1 Les paramètres géométriques

- Demi-axes de l'ellipsoïde extérieur de la cellule représentative :

$$A = \sqrt{a^2 + \Lambda}, \quad B = \sqrt{b^2 + \Lambda}, \quad C = \sqrt{c^2 + \Lambda},$$

où  $\Lambda$  est l'unique solution positive de l'équation

$$(a^2 + \Lambda)(b^2 + \Lambda)(c^2 + \Lambda) - \frac{a^2 b^2 c^2}{f^2} = 0$$

- Demi-axes et paramètre de forme de l'ellipsoïde complètement aplati :

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \bar{b} = \sqrt{b^2 - c^2}, \quad (\bar{c} = 0), \quad k = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}.$$

Dans le cas d'un vide cylindrique elliptique,  $k = 0$  puisque  $\bar{a} = +\infty$ .

- Seconde porosité et quantités liées :

$$g = \frac{\bar{a}\bar{b}^2}{ABC}, \quad g_1 = \frac{g}{1+g}, \quad g_f = \frac{g}{f+g}.$$

Dans le cas d'un vide cylindrique elliptique,  $g = \bar{b}^2/BC$  puisque  $\bar{a} \sim A$ .

- Excentricités des ellipsoïdes intérieur et extérieur :

$$e_{xz} = \frac{\bar{a}}{a}, \quad E_{xz} = \frac{\bar{a}}{A}, \quad E_{yz} = \frac{\bar{b}}{B}.$$

### 3.7.2 Expression du critère de plasticité

$$\Phi(\Sigma) = \frac{\mathcal{Q}(\Sigma)}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\frac{\mathcal{L}(\Sigma)}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0$$

### 3.7.3 Expression de la forme linéaire $\mathcal{L}(\Sigma)$

– Lien avec d'autres quantités :

$$\mathcal{L}(\Sigma) \equiv \kappa \Sigma_h, \quad \kappa \equiv \frac{3}{2\bar{F}}, \quad \Sigma_h \equiv H_x \Sigma_{xx} + H_y \Sigma_{yy} + H_z \Sigma_{zz}$$

– Expression de  $\bar{F}$

$$\begin{aligned} \bar{F} = & 1 + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[ -(1-k) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ln \frac{11k^2+5g_f}{11k^2+5g_1} \right. \\ & \left. + \frac{3}{5}(1-k^2) \ln \frac{8-5g_1}{8-5g_f} + \frac{13}{10}k(g_f - g_1) - \frac{3}{10}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \end{aligned}$$

Cas particulier d'un vide sphéroïdal allongé :

$$\bar{F} = 1 + \frac{1 - \sqrt{3}/2}{\ln f} \ln \frac{11(1 - e_{xz}^2) + 5e_{xz}^3}{11(1 - e_{xz}^2) + 5fe_{xz}^3}$$

– Expressions de  $H_x, H_y, H_z$  :

$$\begin{cases} H_x = (1-k^2)H_x^{prol} + k^2H_x^{obl}, & H_x^{prol} = 1 - 2H_y^{prol}, & H_x^{obl} = H_y^{obl}, \\ H_y = (1-k)H_y^{prol} + kH_y^{obl} + \frac{1}{2}(1-k)\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}\frac{E_{xz}^{3/2}(1-\alpha-E_{xz})}{(1-\alpha-E_{xz})^2+\beta^2}, \\ \alpha = \frac{4k^2}{1+9k^2}, & \beta = \frac{3k^2}{1+30k^2}, \\ H_z = 1 - H_x - H_y, \end{cases}$$

où

$$H_y^{prol} = \frac{1}{3} \left( 1 + E_{xz}^2 - \frac{E_{xz}^4}{2} \right), \quad H_y^{obl} = \frac{1}{3} \frac{2 - 7E_{xz}^2 + 5E_{xz}^4}{2 - 7E_{xz}^2 + 10E_{xz}^4}$$

Notons que pour un vide sphéroïdal allongé,  $H_y$  se réduit à  $H_y^{prol}$  puisque  $k$  et  $(\alpha^2 + \beta^2)/\alpha$  sont nuls.

– Cas particulier d'un vide cylindrique elliptique :

$$H_y = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{25}{2} \frac{E_{yz}^2(9E_{yz}^2 - 1)}{(9E_{yz}^2 - 1)^2 + 36E_{yz}^4} \right]$$

### 3.7.4 Expression de la forme quadratique $\mathcal{Q}(\Sigma)$

– Lien avec la forme quadratique de Willis  $\mathcal{Q}^W(\Sigma)$  :

$$\mathcal{Q}(\Sigma) = \mathcal{Q}^W(\Sigma) - (1+g)(f+g)\kappa^2\Sigma_h^2$$

– Expression de la forme quadratique  $\mathcal{Q}^W$  : voir les annexes F et G.

### 3.8 Cas particuliers

Pour un certain nombre de géométries particulières, des résultats exacts ou des modèles approchés mais précis sont disponibles, et peuvent servir de référence pour une comparaison avec les prédictions du critère proposé. On obtient les résultats suivants en utilisant les équations résumées ci-dessus :

- Cas d'un vide sphérique

Le critère se réduit à :

$$\left(1 + \frac{2f}{3}\right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0$$

où  $\Sigma_{eq}^2$  et  $\Sigma_m$  désignent la contrainte macroscopique de von Mises et la contrainte moyenne, respectivement. C'est exactement la version améliorée de [Leblond *et al.*, 1994] du critère de [Gurson, 1977] pour un vide sphérique, respectant la "borne non linéaire de Hashin-Strikman" (qui n'est rien d'autre que la borne non linéaire de Willis pour les milieux macroscopiquement isotropes).

- Cas d'un vide cylindrique à base circulaire

Le critère est réduit à :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 3f \frac{(\Sigma_{yy} - \Sigma_{zz})^2/4 + \Sigma_{xy}^2 + \Sigma_{yz}^2 + \Sigma_{zx}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_{yy} + \Sigma_{zz}}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (3.48)$$

Pour des états de contraintes axisymétriques ( $\Sigma_{xx} \neq \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ ), cette expression se réduit exactement au critère de [Gurson, 1977] pour des vides cylindriques, qui est exact dans ce cas. Pour des états de contraintes généraux, cette expression respecte la "borne non-linéaire cylindrique de Hashin-Strikman" (qui n'est rien d'autre que la borne non linéaire de Willis pour les milieux isotropes transverses).

- Cas d'un sandwich

Le critère est réduit à :

$$\Sigma_{zx} = \Sigma_{zy} = \Sigma_{zz} = 0; \quad \Sigma_{eq}^2 = \Sigma_{xx}^2 + \Sigma_{yy}^2 - \Sigma_{xx}\Sigma_{yy} + 3\Sigma_{xy}^2 = (1 - f)^2 \sigma_0^2,$$

qui est un résultat exact pour une telle géométrie.

- Cas des vides sphéroïdaux allongés ou aplatis

Pour ces vides, le critère est semblable au critère GLD ([Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu *et al.*, 1997] et [Gologanu, 1997]) globalement, mais pas en détail puisque les coefficients ne sont déterminés de la même manière.

Il existe de plus deux géométries pour lesquelles la charge limite est connue pour des directions de chargement particulières seulement, à cause de l'uniformité du champ de contraintes microscopiques dans ces cas :

- Cas d'un vide cylindrique à base elliptique  
La charge limite pour un vide cylindrique elliptique soumis à une traction ou compression coaxiale (tous les  $\Sigma_{ij} = 0$  sauf  $\Sigma_{xx}$ ), est donnée par :

$$|\Sigma_{xx}| = (1 - f)\sigma_0$$

Le critère proposé vérifie ce résultat exact.

- Cas d'une fissure circulaire ou elliptique  
Pour une fissure circulaire ou elliptique soumise à un état de contrainte plane ( $\Sigma_{zx} = \Sigma_{zy} = \Sigma_{zz} = 0$ ), la situation est plus complexe. Puisque le chargement considéré satisfait les conditions aux limites sur la fissure, le critère est alors exactement celui d'une plaque homogène dans un état de contrainte plane, qui est :

$$\Sigma_{eq}^2 = \Sigma_{xx}^2 + \Sigma_{yy}^2 - \Sigma_{xx}\Sigma_{yy} + 3\Sigma_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (3.49)$$

Le critère de Willis (3.46) (avec  $\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{Q}^W(\boldsymbol{\Sigma})$ ) reproduit bien ce résultat. Cependant le critère proposé ne le reproduit pas. En effet, la fonction de charge (3.45)<sub>2</sub> proposée ne peut donner le même résultat que celle de Willis constituée des deux premiers termes, que si le troisième terme  $2(1 + g)(f + g)[\dots]$  est nul, ce qui correspond à  $\Sigma_h = 0$ . Mais ceci n'est pas vrai ici puisque  $\Sigma_h = H_x\Sigma_{xx} + H_y\Sigma_{yy}$  est constitué de quantités toutes non nulles.

Le critère proposé reproduit cependant le résultat exact (3.49) quand la seconde porosité  $g$  devient soit très faible (parce que l'influence de la fissure disparaît et le critère se réduit à celui de von Mises) soit très élevée (parce que la configuration géométrique tend vers un sandwich pour lequel le critère est exact). Il s'ensuit que le résultat (3.49) ne doit être que légèrement violé pour des valeurs quelconques de  $g$ .

Il convient de noter que le critère GLD est quelque peu supérieur pour une fissure circulaire, étant donné que la façon de déterminer ses paramètres garantit la reproduction exacte du résultat (3.49) pour toutes les valeurs de  $g$  ([Gologanu *et al.*, 1997]; [Gologanu, 1997]). La légère infériorité du nouveau modèle de ce point de vue est le prix à payer pour le fait que ses paramètres ont des expressions bien définies pour toutes les valeurs possibles des paramètres géométriques, contrairement à ceux du modèle GLD.

### 3.9 Conclusion

Ce chapitre est une seconde étape dans le développement d'un critère de type Guron pour les matériaux ductiles poreux contenant des cavités ellipsoïdales arbitraires. L'objectif était de fournir des expressions explicites de tous les coefficients du critère macroscopique approché développé dans le chapitre 2. Il a fallu laisser tomber le champ de vitesse-test de [Leblond et Gologanu, 2008], dont l'utilisation aurait conduit à des imprécisions dans le cas d'une cavité sphéroïdale très aplatie.

Parmi les coefficients du critère, ceux figurant dans le terme en cosinus hyperbolique ont été déterminés en utilisant l'analyse-limite numérique pour évaluer, dans un certain nombre de cas significatifs, la réponse de la cellule ellipsoïdale soumise à un chargement hydrostatique. Des formules analytiques reproduisant les résultats numériques obtenus ont été proposées, afin de couvrir tous les cas envisageables.

Les coefficients de la forme quadratique des composantes du tenseur des contraintes ont été déterminés en exigeant la coïncidence du critère proposé avec celui correspondant à la borne non linéaire de [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991] et [Michel et Suquet, 1992], qui est l'extension non-linéaire de la borne de [Willis, 1977] pour des solides élastiques.

Le critère macroscopique approché étant maintenant totalement déterminé, il se pose maintenant la question de sa validation qui fera l'objet du chapitre 4.



# Chapitre 4

## Validation numérique du critère approché proposé

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>80</b>
<b>4.2</b>	<b>Cellule sphéroïdale allongée</b>	<b>80</b>
<b>4.3</b>	<b>Cellule sphéroïdale aplatie</b>	<b>81</b>
<b>4.4</b>	<b>Fissure circulaire</b>	<b>82</b>
<b>4.5</b>	<b>Fissure elliptique</b>	<b>83</b>
<b>4.6</b>	<b>Cellule cylindrique</b>	<b>85</b>
4.6.1	Cylindre à base circulaire	85
4.6.2	Cylindre à base elliptique	86
<b>4.7</b>	<b>Cellules ellipsoïdales</b>	<b>88</b>
4.7.1	Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1	88
4.7.2	Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1	89
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

## 4.1 Introduction

Les méthodes et les programmes décrits dans la section 3.3 du chapitre 3 vont être utilisés ici pour déterminer la surface de charge numérique, supposée exacte, dans un certain nombre de cas représentatifs, afin de vérifier l'exactitude du critère approché proposé. Cela sera fait sur huit cellules de formes différentes : cellules sphéroïdale allongée ou aplatie, fissure circulaire ou elliptique, cylindrique circulaire ou elliptique et ellipsoïdales générales. Ces cellules seront soumises à des conditions de déformation homogène sur le bord extérieur.

La surface de charge des cellules étant une surface de dimension 5 dans l'espace de dimension 6 du tenseur des contraintes macroscopiques, sa détermination numérique complète est impossible. Le problème sera donc réduit en supposant que les axes principaux du tenseur des contraintes macroscopique coïncident avec ceux des ellipsoïdes intérieur et extérieur, ce qui implique que les composantes hors-diagonales  $\Sigma_{xy}$ ,  $\Sigma_{yz}$ ,  $\Sigma_{zx}$  seront nulles.

Même ainsi la surface de charge devient maintenant une surface de dimension 2 dans l'espace de dimension 3 des composantes diagonales  $(\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz})$ , dont la détermination complète serait une lourde tâche. Nous étudierons donc seulement la trace de cette surface de charge dans 3 plans :  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$ ,  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}\}$  et  $\{\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}\}$ .

Sur les figures ci-dessous, les quantités représentées sur les axes horizontal et vertical sont la contrainte moyenne macroscopique et la contrainte déviatorique macroscopique, normalisées par la limite d'élasticité. Les calculs ont été effectués pour la valeur  $f = 0.01$  de la porosité, ou  $g = 0.14$  de la seconde porosité, dans le cas des fissures.

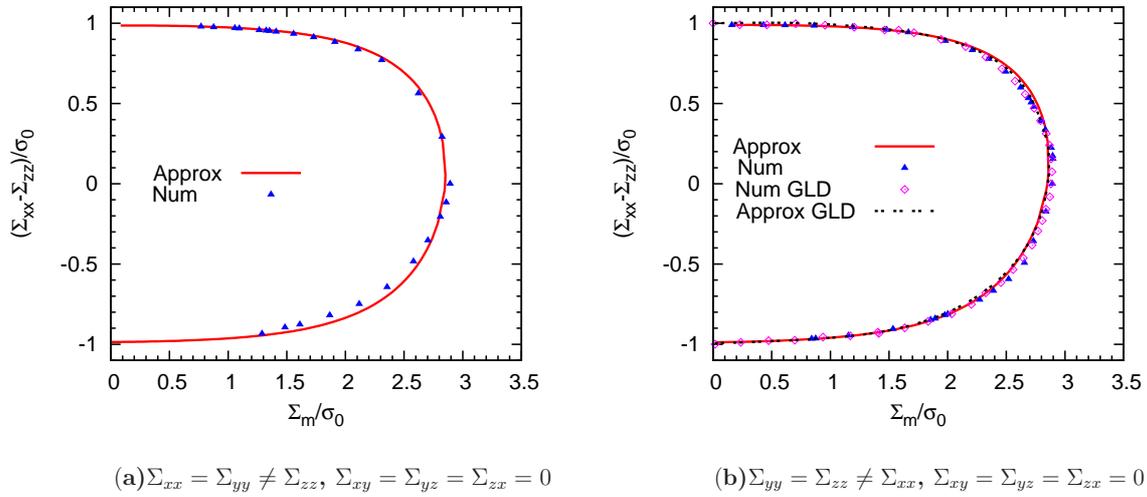
Dans cette étude de validation, nous avons effectué environ 500 calculs. Chaque calcul nécessite en moyenne deux heures de temps CPU.

## 4.2 Cellule sphéroïdale allongée

Nous considérons une cellule sphéroïdale contenant un vide sphéroïdal confocal de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité 0.01. Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe  $x$ , les plans  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$  et  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}\}$  sont équivalents donc nous allons tracer la surface de charge seulement dans les plans  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$  et  $\{\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}\}$ .

La figure 4.1a montre qu'il y a un bon accord entre les résultats numériques et l'approximation proposée pour un chargement non axisymétrique.

Sur la figure 4.1b correspondant au cas d'un chargement axisymétrique, on observe d'une part la coïncidence de nos résultats numériques avec ceux de [Gologanu *et al.*, 1997], et d'autre part la quasi-coïncidence des courbes théoriques : les deux critères sont très peu différents dans ce cas.



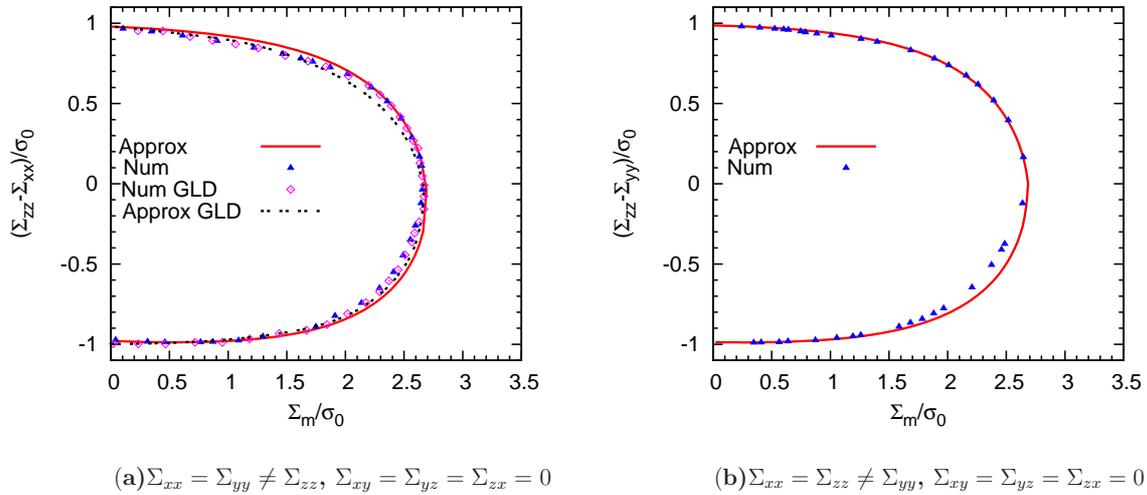
**Figure 4.1:** Traces dans deux plans de la surface de charge pour une cellule sphéroïdale contenant un vide de demi axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Approx, Num) et celui de [Gologanu *et al.*, 1997] (Num GLD, Approx GLD)

### 4.3 Cellule sphéroïdale aplatie

Les calculs ont été effectués sur une cellule sphéroïdale contenant un vide sphéroïdal confocal de demi axes dans les proportions 5 : 5 : 1 et de porosité 0.01. Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ , nous avons tracé la surface de charge seulement dans les plans  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$  et  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}\}$ .

La figure 4.3a compare les nouveaux résultats à ceux de [Gologanu *et al.*, 1997]. Il y a un bon accord entre le critère proposé et les résultats numériques. Toutefois, on remarque que le critère proposé surestime légèrement en certains points, la contrainte-limite provoquant l'écoulement. Aussi, on remarque que la surface de charge GLD est légèrement intérieure à la nôtre.

Quant au chargement non axisymétrique, la figure 4.3b montre que le nouveau critère viole légèrement les résultats numériques au voisinage du point hydrostatique, mais l'accord entre les deux courbes est néanmoins globalement très bon.



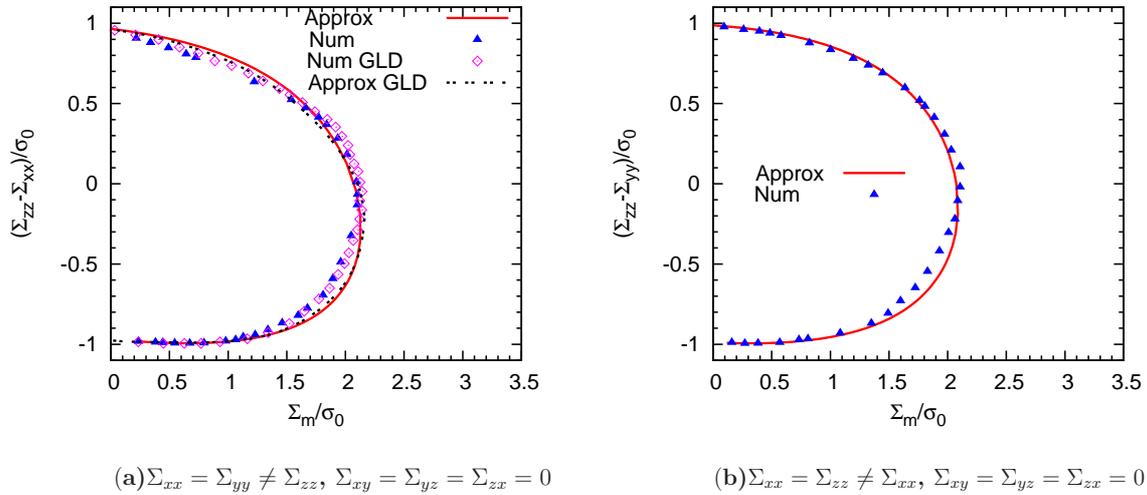
**Figure 4.2:** Traces dans deux plans de la surface de charge pour une cellule sphéroïdale contenant un vide de demi axes dans les proportions 5 : 5 : 1 et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Approx, Num) et celui de [Gologanu *et al.*, 1997] (Num GLD, Approx GLD)

## 4.4 Fissure circulaire

La fissure circulaire étant un cas particulier de sphéroïde aplati, nous avons tracé les surfaces de charge dans les mêmes plans que précédemment. Les figures 4.3a et 4.3b présentent, dans le cas d'une fissure circulaire de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 0.2 (le rapport (grand axe)/(petit axe) atteignant donc 25, ce qui peut être considéré comme proche de  $+\infty$ ) et de seconde porosité  $g = 0.14$ , la comparaison entre les critères analytiques et les calculs numériques.

Dans le cas du chargement axisymétrique, on observe sur la figure 4.3a que le nouveau critère coïncide pratiquement avec le critère GLD. Il en est de même pour les calculs numériques. Cependant les deux critères surestiment un peu la contrainte-limite provoquant l'écoulement pour des valeurs négatives de la contrainte déviatorique.

On remarque sur la figure 4.3b, qu'il y a également un bon accord entre le nouveau critère et les calculs numériques dans le cas d'un chargement non axisymétrique. Donc, bien que le nouveau critère n'arrive pas à prédire la solution exacte (3.49) pour un chargement de contrainte plane, il reproduit bien les résultats numériques pour la valeur typique  $g = 0.14$ .



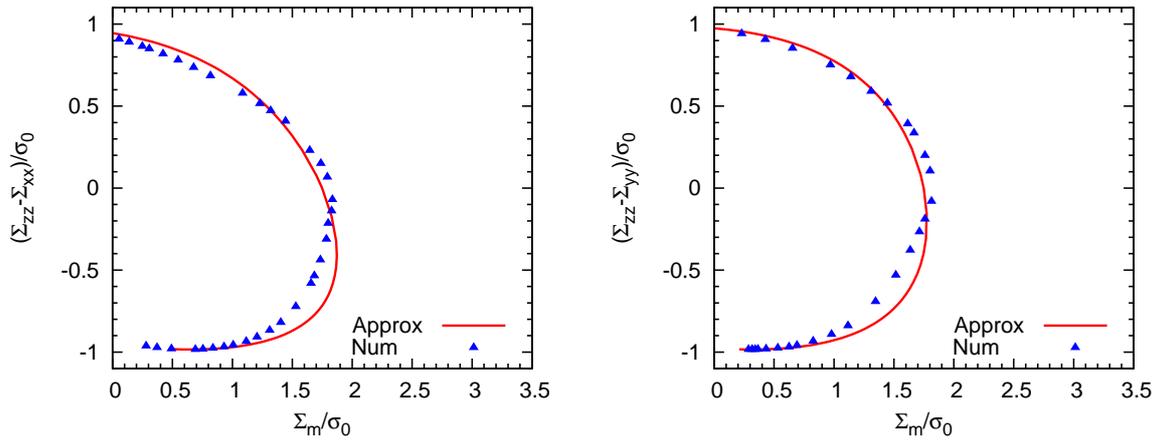
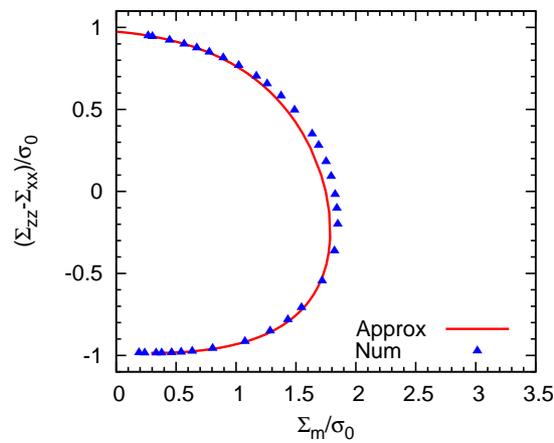
**Figure 4.3:** Traces dans deux plans de la surface de charge d'une fissure circulaire de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 0.2 et de seconde porosité  $g = 0.14$  - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Approx, Num) et celui de [Golganu *et al.*, 1997] (Num GLD, Approx GLD)

## 4.5 Fissure elliptique

Nous considérons une fissure elliptique de demi-axes 5 : 2 : 0.2 et de seconde porosité  $g = 0.14$ . On étudie cette fois l'intersection de la surface de charge avec les trois plans définis plus haut.

Sur les figures 4.4a, 4.4b, on remarque qu'aussi bien dans le modèle proposé que dans les calculs numériques, la contrainte-limite au point hydrostatique ( $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$ ) est inférieure à celle sur les figures 4.3a et 4.3b malgré le fait que les deux fissures aient la même seconde porosité  $g = 0.14$ ; ce qui signifie que le critère proposé arrive à correctement rendre compte de l'effet de la forme de la fissure. Comme pour la fissure circulaire, le critère proposé surestime un peu la contrainte-limite pour les valeurs négatives de la contrainte déviatorique.

En revanche, on observe un excellent accord entre le critère proposé et les résultats numériques sur la figure 4.4c.

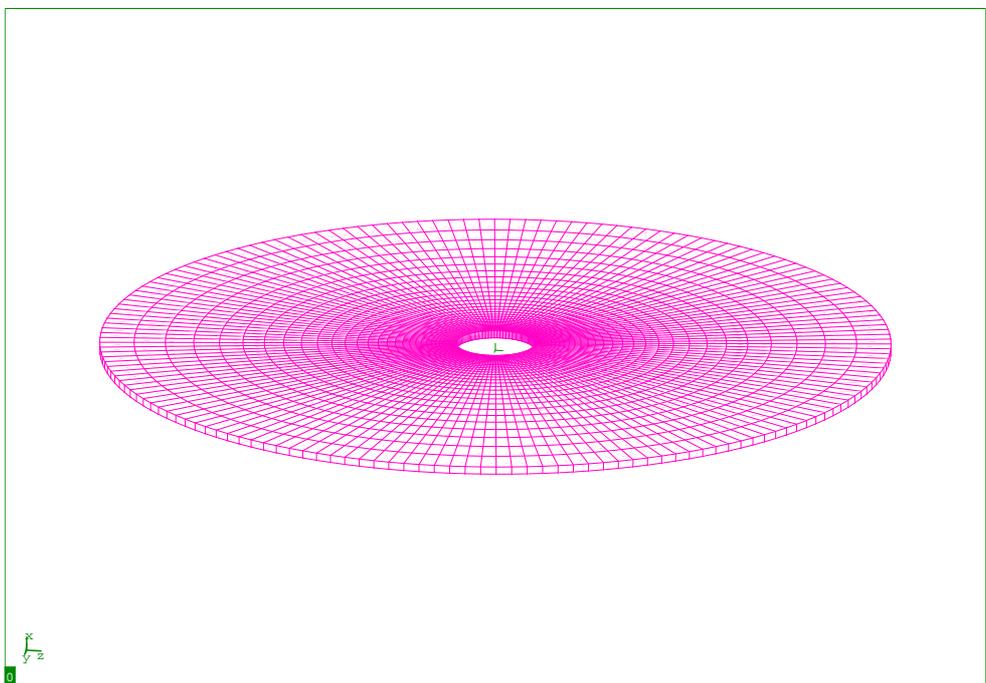
(a)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ (b)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ (c)  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ 

**Figure 4.4:** Traces dans trois plans de la surface de charge d'une fissure elliptique de demi axes dans les proportions 5 : 2 : 0.2 et de seconde porosité  $g = 0.14$  - Résultats numériques et approximation proposée (Approx, Num)

## 4.6 Cellule cylindrique

Comme pour le maillage sphérique, on part d'un cylindre creux maillé de façon standard, que l'on déforme ensuite en plaçant les nœuds sur des cylindres elliptiques confocaux successifs grâce à un programme spécifique. Le maillage initial contient 9920 nœuds et 4800 mailles linéaires tridimensionnelles à 8 nœuds. Il y a 30 mailles dans la direction radiale et les caractéristiques du matériau sont les mêmes que dans les cas précédents.

En théorie c'est un cylindre de hauteur infinie, même si on le limite pour des raisons numériques. Donc les conditions aux limites ne sont plus de Hill-Mandel sur les faces inférieure et supérieure mais de déformation plane généralisée ( $u_x = D_{xxx}, \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ ).



**Figure 4.5:** Un exemple de maillage cylindrique final constitué de couches cylindriques circulaires - Le rayon et la hauteur du cylindre intérieur sont respectivement 5 et 1, la porosité est de 0.01

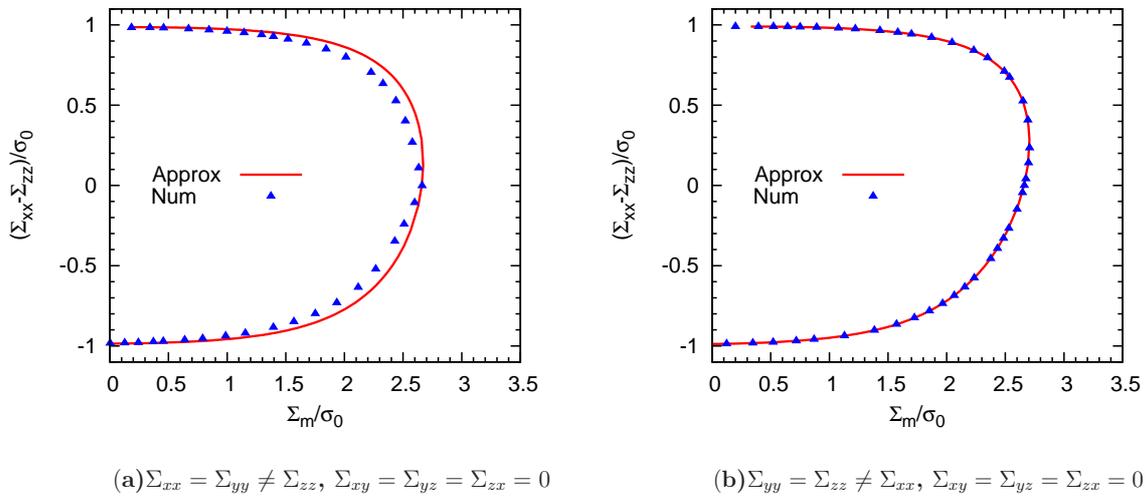
### 4.6.1 Cylindre à base circulaire

Nous avons effectué des calculs sur une cellule cylindrique à base circulaire contenant un vide cylindrique à base circulaire de rayon 5, de hauteur 1 et de porosité 0.01. Compte tenu de l'isotropie transverse dans le plan  $yz$ , les surfaces de charge sont tracées seulement dans les plans  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$  et  $\{\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}\}$ .

Dans le cas du chargement axisymétrique, la figure 4.6b montre que le critère proposé reproduit exactement les résultats numériques ; ce qui est tout à fait normal puisque dans

la section 3.8 du chapitre 3, on a vu que le critère proposé se réduit dans ce cas au critère de [Gurson, 1977] qui reproduit la solution exacte pour un vide cylindrique.

Pour le chargement non axisymétrique, la figure 4.6a montre l'apparition d'un léger coin au niveau du point hydrostatique ( $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$ ) sur la surface numérique, contrairement à ce qui se passe pour le critère approché proposé. La présence de ce coin sur la surface de charge d'un cylindre a été mise en évidence précédemment par [Pastor et Ponte-Castaneda, 2002]. Le critère proposé ne peut reproduire ce coin à cause de la régularité de la fonction de charge. On rencontre ici une de ses limites.



**Figure 4.6:** Traces dans deux plans de la surface de charge d'un cylindre circulaire contenant une cavité de rayon 5, de hauteur 1, et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée (Approx, Num)

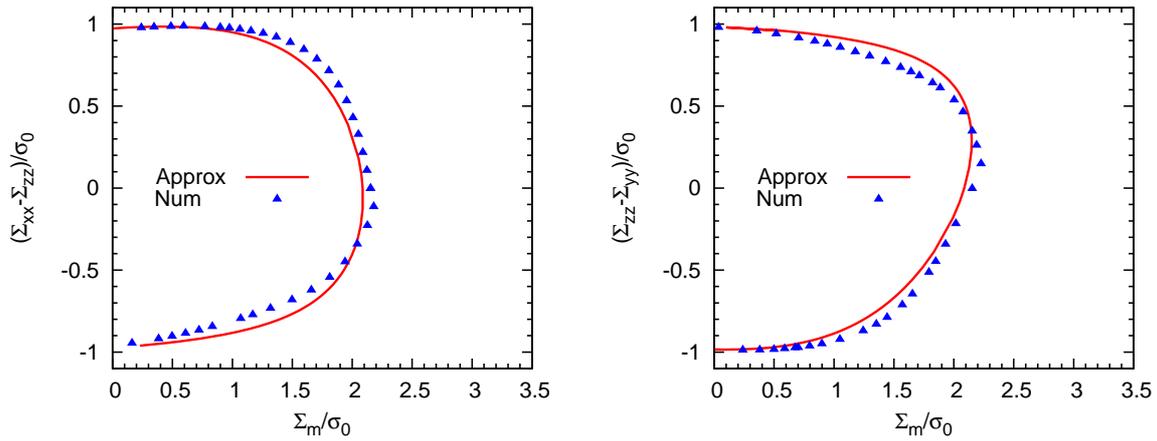
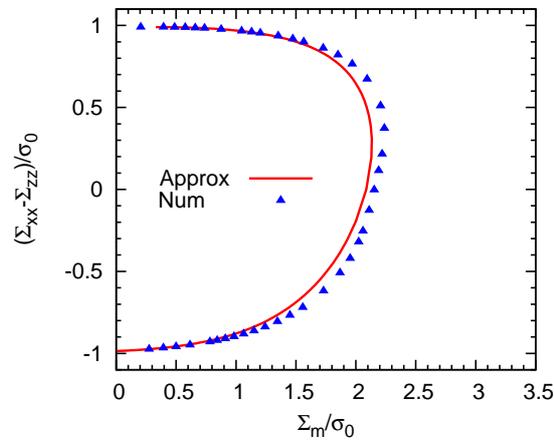
## 4.6.2 Cylindre à base elliptique

Nous avons considéré un cylindre à base elliptique contenant un vide cylindrique à base elliptique de demi-axes 5 et 1, de hauteur 1, et de porosité  $f = 0.01$ .

On remarque encore la présence de légers coins sur les surfaces de charge numériques des figures 4.7a et 4.7b, toutefois ces coins ne se trouvent pas exactement au niveau du point hydrostatique.

Sur la figure 4.7c, il n'y a quasiment pas de coin, mais le critère proposé sous-estime légèrement la contrainte-limite provoquant l'écoulement au voisinage du point hydrostatique.

Dans les trois cas, le critère proposé reproduit assez bien les résultats numériques.

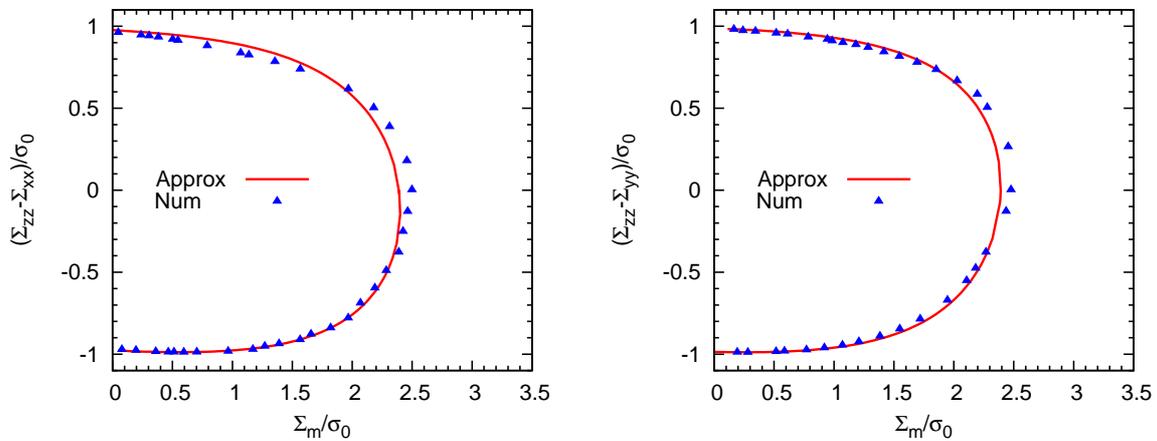
(a)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ (b)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ (c)  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}, \Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$ 

**Figure 4.7:** Traces dans trois plans de la surface de charge d'une cellule cylindrique elliptique contenant un vide cylindrique elliptique de demi-axes 5 et 1, de hauteur 1 et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée (Approx, Num)

## 4.7 Cellules ellipsoïdales

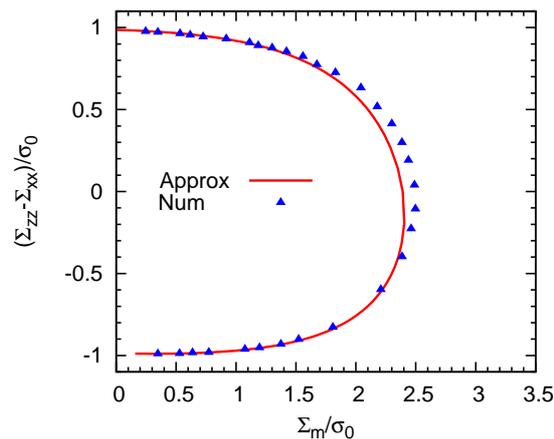
### 4.7.1 Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1

Les figures 4.8a, 4.8b, 4.8c comparent les surfaces de charge numérique et analytique d'une cellule ellipsoïdale générale contenant un vide ellipsoïdal confocal de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0.01$ . Sur les trois figures, malgré le fait que l'accord entre les résultats numériques et analytiques soit quasi-parfait, on remarque que le critère analytique viole légèrement le critère numérique au niveau du point hydrostatique.



(a)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$

(b)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$

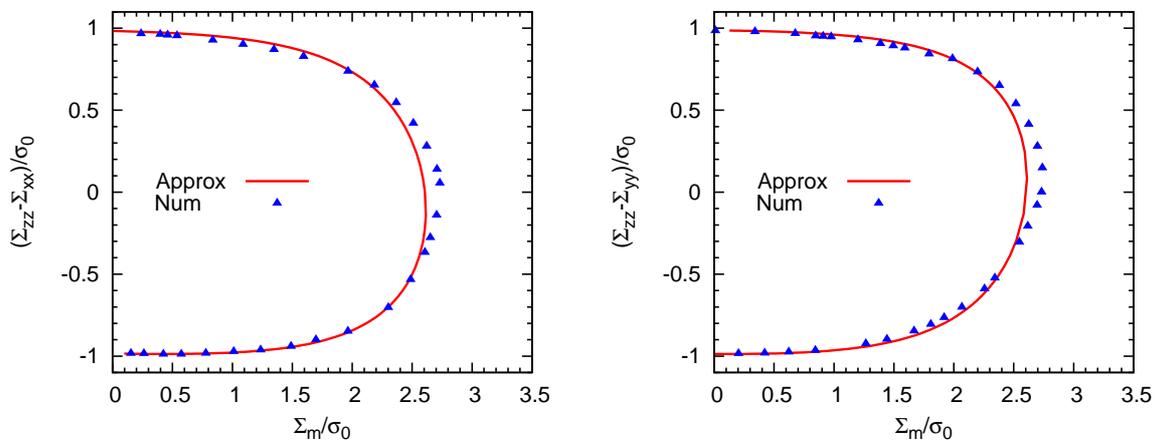


(c)  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$

**Figure 4.8:** Traces dans trois plans de la surface de charge d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée (Approx, Num)

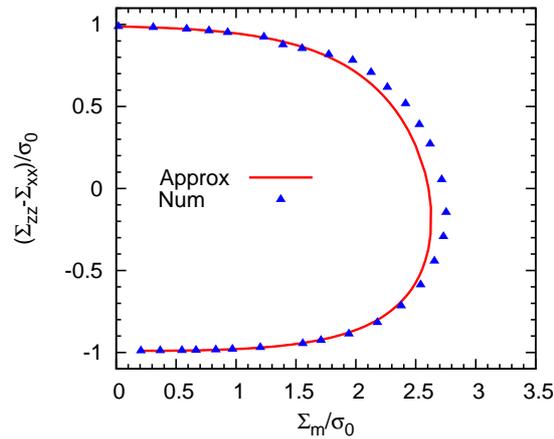
### 4.7.2 Vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1

Les figures 4.9a, 4.9b, 4.9c comparent les surfaces de charge numérique et analytique d'une cellule ellipsoïdale générale contenant un vide ellipsoïdal confocal de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 et de porosité  $f = 0.01$ . Les remarques faites dans le cas précédent sont aussi valables dans ce cas, toutefois on remarque en plus l'apparition de légers coins sur deux des surfaces de charge numériques. L'explication plausible est que le vide de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 est proche d'un vide cylindrique pour lequel on sait que ce coin existe ([Pastor et Ponte-Castaneda, 2002]).



(a)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$

(b)  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$



(c)  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{xy} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{zx} = 0$

**Figure 4.9:** Traces dans trois plans de la surface de charge d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 et de porosité 0.01 - Résultats numériques et approximation proposée (Approx, Num)

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé des simulations par la méthode des éléments finis sur diverses cellules, afin de déterminer numériquement les traces de la surface de charge dans les trois plans  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$ ,  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}\}$  et  $\{\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}\}$ .

Dans le cas des cellules sphéroïdales allongée et aplatie et de la fissure circulaire, le critère proposé a été comparé d'une part à des résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis, d'autre part aux résultats numériques obtenus par la méthode spectrale de [Gologanu et Leblond, 1993], [Gologanu *et al.*, 1994], [Gologanu, 1997]. Dans ces cas, on a remarqué qu'il n'y a pas de différence notable entre le critère proposé et le critère GLD qui reproduisent tous les deux très bien les résultats numériques. Dans les cas des cellules cylindriques à base circulaire et elliptique, le critère proposé reproduit encore bien les résultats numériques. Néanmoins, on observe l'apparition de légers coins sur les surfaces numériques que n'arrive pas à reproduire le critère approché proposé. Par nature, celui-ci prédit une surface de charge complètement régulière.

Ensuite, nous avons comparé le critère proposé aux résultats numériques dans le cas général en considérant deux cellules ellipsoïdales générales différentes. Dans les deux cas, il y a un excellent accord entre le critère et les résultats numériques, toutefois on observe l'apparition de légers coins sur les surfaces numériques dans le cas de la cellule ellipsoïdale de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1.

## Chapitre 5

# Lois d'évolution de la déformation et de la rotation d'un vide ellipsoïdal dans un milieu parfaitement plastique

---

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>92</b>
<b>5.2</b>	<b>Taux de déformation de la cavité</b>	<b>92</b>
5.2.1	Généralités	92
5.2.2	Changement de variables sur $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}^v$	93
5.2.3	Définition des coefficients $h_{ij}$	94
5.2.4	Détermination des coefficients $h_{ij}$	99
<b>5.3</b>	<b>Taux de rotation de la cavité</b>	<b>116</b>
5.3.1	Généralités	116
5.3.2	Détermination des coefficients $k_{ij}$	116
<b>5.4</b>	<b>Évolution des axes et des directions principales d'une cavité ellipsoïdale</b>	<b>119</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

---

## 5.1 Introduction

Les demi-axes de la cavité et leurs vecteurs directeurs sont des paramètres internes du modèle proposé dans les chapitres 2 et 3, il faut donc connaître leurs équations d'évolution.

Le taux de croissance de la cavité se déduit de l'incompressibilité de la matrice, il faut donc seulement une équation d'évolution pour le déviateur du taux de déformation de la cavité et pour son orientation (rotation).

L'analyse-limite analytique avec un faible nombre de champs de vitesse-tests ne serait pas une approche appropriée ici, du fait que les tenseurs de taux de déformation  $\mathbf{D}^v$  et de rotation  $\mathbf{\Omega}^v$  du vide n'ont pas de caractérisation variationnelle contrairement à la surface de charge qui est obtenue à l'issue d'une procédure de minimisation de la dissipation plastique sur un certain nombre de champs de vitesse-tests.

[Ponte-Castaneda et Zaidman, 1994] et [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998] ont proposé de bonnes équations générales pour  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$  dans le cas élastique par une approche de type Hashin-Shtrikman. Le cas plastique fait cependant apparaître des différences notables, on peut se référer à ce sujet aux travaux de [Budiansky *et al.*, 1982]. Ils ont trouvé qu'un vide sphérique contenu dans une matrice rigide parfaitement plastique et soumise à une traction simple superposée à une forte contrainte hydrostatique, tend à s'aplatir et non à s'allonger comme on pourrait s'y attendre.

Nous allons prendre les lois élastiques comme base, en introduisant des coefficients heuristiques de correction pour passer au cas plastique. Ces coefficients seront déterminés numériquement.

Les taux de déformation  $\mathbf{D}^v$  et de rotation  $\mathbf{\Omega}^v$  correspondent à la déformation et à la rotation de la "matière" ; on peut en effet imaginer qu'à la place du vide, on a un matériau très souple, dont le mouvement définit  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$ .

## 5.2 Taux de déformation de la cavité

### 5.2.1 Généralités

A partir d'une théorie d'homogénéisation linéaire, [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998] ont proposé une formule donnant la déformation (ou le taux de déformation) d'un vide ellipsoïdal contenu dans un milieu élastique (ou visqueux) linéaire. Cette formule s'écrit

$$\mathbf{D}^v = \mathbb{L}_d^e : \mathbf{D} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{D}^v$  est le taux de déformation du vide,  $\mathbf{D}$  le taux de déformation global et  $\mathbb{L}_d^e$  un tenseur de "localisation de la déformation" du quatrième ordre défini par

$$\mathbb{L}_d^e = [\mathbb{I} - (1 - f)\mathbb{S}]^{-1} \quad (5.2)$$

où  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité,  $f$  la porosité et  $\mathbb{S}$  le tenseur d'Eshelby du vide.

Notre objectif est d'adapter cette équation d'évolution élastique au cas plastique. Notre démarche sera purement heuristique. Elle consistera à corriger la formule élastique (5.1) en y introduisant des coefficients empiriques qui seront ajustés sur des résultats numériques. Le taux de déformation du vide sera calculé numériquement en utilisant la définition par la moyenne qui prend en compte le mouvement de tous les points situés dans l'ellipsoïde intérieur  $\mathcal{E}_0$ . Les composantes  $D_{ij}^v$  de  $\mathbf{D}^v$  seront donc calculées, après intégration par parties, à partir de la formule

$$D_{ij}^v = \frac{3}{4\pi\omega} \int_{\partial\mathcal{E}_0} \frac{1}{2}(v_i n_j + v_j n_i) dS \quad (5.3)$$

où les  $n_i$  désignent les composantes du vecteur unitaire normal à la surface  $\mathcal{E}_0$ , les  $v_i$  celles du vecteur vitesse et  $\partial\mathcal{E}_0$  le bord de la cavité.

### 5.2.2 Changement de variables sur $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}^v$

Pour pouvoir modifier terme à terme l'équation d'évolution élastique (5.1), on va se placer dans la base des axes principaux de l'ellipsoïde et faire un changement de variables sur  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^v$ . On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{D}_1 = D_m \\ \overline{D}_2 = D_{xx} - D_m \\ \overline{D}_3 = D_{yy} - D_{zz} \\ \overline{D}_4 = D_{xy} \\ \overline{D}_5 = D_{xz} \\ \overline{D}_6 = D_{yz} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{D}_1^v = D_m^v \\ \overline{D}_2^v = D_{xx}^v - D_m^v \\ \overline{D}_3^v = D_{yy}^v - D_{zz}^v \\ \overline{D}_4^v = D_{xy}^v \\ \overline{D}_5^v = D_{xz}^v \\ \overline{D}_6^v = D_{yz}^v \end{array} \right. \quad (5.4)$$

L'équation (5.1) s'écrit dans la nouvelle base sous la forme :

$$\overline{\mathbf{D}}^v = \overline{\mathbf{L}}_d^e \cdot \overline{\mathbf{D}} \quad (5.5)$$

où  $\overline{\mathbf{L}}_d^e$  est une matrice  $6 \times 6$  dont les composantes sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{L}_{d11}^e = \frac{1}{f}; \\ \overline{L}_{d22}^e = L_{dxxxx}^e - \frac{1}{2}(L_{dxyxy}^e + L_{dxxzz}^e) \\ \overline{L}_{d23}^e = \frac{1}{2}(L_{dxyxy}^e - L_{dxxzz}^e) \\ \overline{L}_{d31}^e = L_{dyyyy}^e - L_{dzzzz}^e + L_{dyyx}^e + L_{dyyz}^e - L_{dzzxx}^e - L_{dzzyy}^e \\ \overline{L}_{d32}^e = \frac{1}{2}(2L_{dyyx}^e - L_{dyyy}^e - L_{dyyz}^e - 2L_{dzzxx}^e + L_{dzzyy}^e + L_{dzzzz}^e) \\ \overline{L}_{d33}^e = \frac{1}{2}(L_{dyyyy}^e - L_{dyyz}^e - L_{dzzyy}^e + L_{dzzzz}^e) \\ \overline{L}_{d44}^e = 4L_{dxyxy}^e; \quad \overline{L}_{d55}^e = 4L_{dxxzz}^e; \quad \overline{L}_{d66}^e = 4L_{dyyz}^e \end{array} \right. \quad (5.6)$$

les autres termes de la matrice étant nuls. L'équation (exacte)  $\overline{D}_1^v = \overline{D}_1/f$  traduit l'incompressibilité de la matrice.

On se propose d'écrire dans le cas parfaitement plastique,

$$\overline{\mathbf{D}}^v = \overline{\mathbf{L}}_d \cdot \overline{\mathbf{D}} \quad (5.7)$$

où les composantes  $\overline{L}_{dij}$  du tenseur  $\overline{\mathbf{L}}_d$  sont données par

$$\overline{L}_{dij} = h_{ij} \overline{L}_{dij}^e \quad (\text{pas de sommation } i \text{ ni sur } j) \quad (5.8)$$

les coefficients  $h_{ij}$  étant des facteurs empiriques à déterminer, pouvant dépendre du chargement qui sera symbolisé par la lettre  $\mathcal{C}$ .

### 5.2.2.1 Conditions nécessaires sur la matrice $\overline{\mathbf{L}}_d$

La matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d$  doit respecter certaines propriétés :

- Elle doit respecter l'orthotropie, c'est-à-dire être de la forme :

$$\overline{\mathbf{L}}_d = \begin{bmatrix} \overline{L}_{d11} & \overline{L}_{d12} & \overline{L}_{d13} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{L}_{d21} & \overline{L}_{d22} & \overline{L}_{d23} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{L}_{d31} & \overline{L}_{d32} & \overline{L}_{d33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{L}_{d44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{L}_{d55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{L}_{d66} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

- La relation exacte  $D_m^v = \frac{D_m}{f}$  traduisant l'incompressibilité de la matrice doit être respectée. Donc il faut que

$$\overline{L}_{d11} = \frac{1}{f}, \quad \overline{L}_{d12} = \overline{L}_{d13} = 0 \quad (5.10)$$

Ces valeurs étant les mêmes en élasticité et en plasticité, il suffit de prendre

$$h_{1j} = 1, \quad 1 \leq j \leq 3. \quad (5.11)$$

En fait il suffit de définir  $h_{11}$ ;  $h_{12}$  et  $h_{13}$  n'interviennent jamais puisque  $\overline{L}_{d12}$ ,  $\overline{L}_{d13}$  sont nuls.

- La loi (5.7) utilise un repère particulier dans lequel l'axe  $x$  est privilégié. Donc dans le cas d'un sphéroïde aplati où les directions  $x$  et  $y$  sont équivalentes, les facteurs correctifs  $h_{ij}$  doivent être choisis de sorte que la loi soit invariante par rapport au choix de l'axe  $x$  dans le plan  $Oxy$ .

**Remarque :** La matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d$  n'est pas symétrique.

### 5.2.3 Définition des coefficients $h_{ij}$

Dans la suite, les exposants (*sph*), (*sand*), (*cyl*), (*prol*) et (*obl*) seront utilisées pour les expressions se rapportant respectivement aux cas sphérique, sandwich, cylindrique, sphéroïdal allongé et sphéroïdal aplati. Compte tenu de l'orthotropie, on ne donnera que les coefficients  $h_{ij}$  pour  $1 \leq i, j \leq 3$ , et  $h_{44}$ ,  $h_{55}$ ,  $h_{66}$ . Les autres coefficients n'interviennent jamais.

### 5.2.3.1 Cas sphérique

Dans le cas d'une géométrie sphérique, la matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d^{sph}$  est donnée, compte tenu de l'expression de  $\overline{\mathbf{L}}_d^{e\,sph}$  que l'on déduit de celle du tenseur d'Eshelby, par

$$\overline{\mathbf{L}}_d^{sph} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f}h_{11}^{sph} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3+2f}h_{22}^{sph} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3+2f}h_{33}^{sph} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3+2f}h_{44}^{sph} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3+2f}h_{55}^{sph} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3+2f}h_{66}^{sph} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

On peut avoir a priori l'impression qu'il suffit de préciser les  $h_{ii}^{sph}$  puisque dans l'expression de  $\overline{\mathbf{L}}_d^{sph}$  les  $h_{ij}^{sph}$ ,  $i \neq j$ , sont multipliés par les  $\overline{L}_{dij}^{e\,sph}$ ,  $i \neq j$ , qui sont nuls. Cependant dans la formule (5.8) applicable au cas général, les  $h_{ij}$  seront déterminés par interpolation à partir des valeurs de ces coefficients dans divers cas particuliers et notamment dans le cas sphérique. Donc  $h_{ij}^{sph}$  viendra multiplier  $\overline{L}_{dij}^e$  et dans le cas général les  $\overline{L}_{dij}^e$ ,  $i \neq j$ , ne sont pas nuls; d'où la nécessité de préciser les  $h_{ij}^{sph}$  même pour  $i \neq j$  (ceci seulement pour  $i \leq 3$ ,  $j \leq 3$  bien entendu).

On va prendre  $h_{ii}^{sph} = 1$  pour  $1 \leq i \leq 3$  conformément à l'équation (5.10). Les termes de la première colonne de  $\overline{\mathbf{L}}_d^{sph}$  étant tous nuls, on va aussi prendre  $h_{i1}^{sph} = 1$  pour  $1 \leq i \leq 3$ .

La symétrie sphérique impose que les coefficients  $h_{22}^{sph}$ ,  $h_{33}^{sph}$ ,  $h_{44}^{sph}$ ,  $h_{55}^{sph}$ ,  $h_{66}^{sph}$  doivent être pris égaux; on note  $h^{sph}$  leur valeur commune, qui sera déterminée numériquement. Finalement, dans le cas sphérique la loi (5.7) s'écrit :

$$\begin{cases} D_m^v &= \frac{D_m}{f} \\ \mathbf{D}^{v'} &= \frac{5}{3+2f}h^{sph}\mathbf{D}' \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{D}^{v'}$  et  $\mathbf{D}'$  désignent les déviateurs respectifs de  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{D}$ .

Pour les coefficients  $h_{23}^{sph}$  et  $h_{32}^{sph}$ , il paraîtrait naturel de les prendre égaux à 1 puisque  $L_{d23}^{e\,sph}$  et  $L_{d32}^{e\,sph}$  sont nuls. En fait on va les prendre égaux à  $h^{sph}$  (ce qui ne change rien à l'équation (5.13) applicable au cas sphérique) pour des raisons expliquées plus loin. En résumé la matrice<sup>1</sup>  $\mathbf{h}^{sph}$  de composantes  $h_{ij}^{sph}$  s'écrit :

$$\mathbf{h}^{sph} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h^{sph} & h^{sph} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h^{sph} & h^{sph} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^{sph} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^{sph} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h^{sph} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

1. L'utilisation de ce terme ne doit pas faire oublier que l'expression (5.8) ne représente pas une multiplication matricielle mais une multiplication terme à terme.

### 5.2.3.2 Cas d'une cavité cylindrique ( $a = +\infty, b, b$ )

La matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d^{cyl}$  s'écrit, compte tenu de la forme de  $\overline{\mathbf{L}}_d^{e,cyl}$  déduite de celle du tenseur d'Eshelby :

$$\overline{\mathbf{L}}_d^{cyl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f}h_{11}^{cyl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(1 - \frac{1}{f}\right)h_{21}^{cyl} & h_{22}^{cyl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+f}h_{33}^{cyl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+f}h_{44}^{cyl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+f}h_{55}^{cyl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+f}h_{66}^{cyl} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

La deuxième ligne de la matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d^{e,cyl}$  s'obtient en exprimant  $D_{xx}^v - D_m^v$  en fonction de  $D_{xx} - D_m$  et  $D_m$  : en tenant compte du fait que dans le cas cylindrique  $D_{xx}^v = D_{xx}$ , et de la relation  $D_m^v = D_m/f$ , on a  $D_{xx}^v - D_m^v = D_{xx} - \frac{D_m}{f} = \left(1 - \frac{1}{f}\right)D_m + D_{xx} - D_m$  d'où  $\overline{L}_{d21}^{e,cyl} = 1 - \frac{1}{f}$  et  $\overline{L}_{d22}^{e,cyl} = 1$ .

Là encore nous prenons  $h_{1j}^{cyl} = 1, 1 \leq j \leq 3$  pour respecter la condition (5.10).

Pour respecter la relation  $D_{xx}^v = D_{xx}$  résultant de la géométrie cylindrique on doit prendre  $h_{2j}^{cyl} = 1$  pour  $1 \leq j \leq 3$ . On peut aussi choisir  $h_{31}^{cyl} = h_{32}^{cyl} = 1$ .

Les coefficients à déterminer sont donc  $h_{33}^{cyl}$ , qui est égal à  $h_{66}^{cyl}$  car un cisaillement  $yz$  correspond à une traction dans la direction  $y$  superposée à une compression dans la direction  $z$ , et  $h_{44}^{cyl} = h_{55}^{cyl}$ .

En résumé la matrice  $\mathbf{h}^{cyl}$  de composantes  $h_{ij}^{cyl}$  s'écrit :

$$\mathbf{h}^{cyl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h_{33}^{cyl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44}^{cyl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{44}^{cyl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{33}^{cyl} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

### 5.2.3.3 Cas sandwich

Dans ce cas, la cinématique du mouvement ne dépend pas de la loi de comportement du matériau. Donc la formule élastique s'applique sans modification au cas plastique. On

prend tous les  $h_{ij}^{sand}$  égaux à 1. La matrice  $\mathbf{h}^{sand}$  s'écrit donc :

$$\mathbf{h}^{sand} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

### 5.2.3.4 Cas d'un sphéroïde allongé

Nous allons utiliser le fait qu'un sphéroïde allongé est intermédiaire entre une sphère et un cylindre. Ainsi, on veut obtenir les coefficients  $h_{ij}^{prol}$  par interpolation entre  $h_{ij}^{sph}$  et  $h_{ij}^{cyl}$ . L'excentricité  $e_{xz}$  du sphéroïde en caractérise la forme, entre les extrêmes  $e_{xz} = 0$  (sphère) et  $e_{xz} = 1$  (cylindre). Donc il est judicieux d'utiliser cette excentricité pour l'interpolation. On choisit de faire cette interpolation à porosité fixée ; plus précisément on pose

$$h_{ij}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = (1 - e_{xz}^m) h_{ij}^{sph}(f, \mathcal{C}) + e_{xz}^m h_{ij}^{cyl}(f, \mathcal{C}) \quad (5.18)$$

où  $m$  est un paramètre à déterminer et où l'on rappelle que  $\mathcal{C}$  désigne le chargement. La matrice  $\mathbf{h}^{prol}$  de composantes  $h_{ij}^{prol}$  est de la forme suivante, compte tenu de celles de  $\mathbf{h}^{sph}$  et  $\mathbf{h}^{cyl}$  :

$$\mathbf{h}^{prol} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22}^{prol} & h_{22}^{prol} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22}^{prol} & h_{33}^{prol} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44}^{prol} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{44}^{prol} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{33}^{prol} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

### 5.2.3.5 Cas d'un sphéroïde aplati

Un sphéroïde aplati est intermédiaire entre une sphère et un sandwich. Ainsi par analogie au cas précédent, on veut obtenir les coefficients  $h_{ij}^{obl}$  par interpolation entre  $h_{ij}^{sph}$  et  $h_{ij}^{sand}$ . On pose comme précédemment

$$h_{ij}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = (1 - e_{xz}^n) h_{ij}^{sph}(f, \mathcal{C}) + e_{xz}^n h_{ij}^{sand}(f, \mathcal{C}) \quad (5.20)$$

où  $n$  est un paramètre à déterminer. La matrice  $\mathbf{h}^{obl}$  de composantes  $h_{ij}^{obl}$  est de la forme suivante, compte tenu de celles de  $\mathbf{h}^{sph}$  et  $\mathbf{h}^{sand}$  :

$$\mathbf{h}^{obl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22}^{obl} & h_{22}^{obl} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22}^{obl} & h_{22}^{obl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{22}^{obl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{22}^{obl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{22}^{obl} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

La matrice  $\overline{\mathbf{L}}_d^{obl}$  étant ainsi totalement définie, montrons que la loi (5.7) respecte l'invariance requise par rapport au choix de l'axe  $x$  dans le plan  $Oxy$ .

En effet,

$$\overline{L}_{dij}^{obl} = h_{ij}^{obl} \overline{L}_{dij}^{obl} = (1 - e_{xz}^n) h_{ij}^{sph} \overline{L}_{dij}^{obl} + e_{xz}^n \overline{L}_{dij}^{obl} \quad (\text{pas de somme sur } i \text{ ni sur } j)$$

Par suite,

$$\overline{\mathbf{L}}_d^{obl} \cdot \overline{\mathbf{D}} = (1 - e_{xz}^n) \overline{\mathbf{L}}'_d \cdot \overline{\mathbf{D}} + e_{xz}^n \overline{\mathbf{L}}_d^{obl} \cdot \overline{\mathbf{D}}, \quad \text{où } \overline{L}'_{dij} = h_{ij}^{sph} \overline{L}_{dij}^{obl}.$$

Il suffit donc de vérifier que les applications  $\overline{\mathbf{D}} \mapsto \overline{\mathbf{L}}'_d \cdot \overline{\mathbf{D}}$  et  $\overline{\mathbf{D}} \mapsto \overline{\mathbf{L}}_d^{obl} \cdot \overline{\mathbf{D}}$  respectent la symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ .

– Application  $\overline{\mathbf{D}} \mapsto \overline{\mathbf{L}}_d^{obl} \cdot \overline{\mathbf{D}}$

C'est l'application qui associe  $\overline{\mathbf{D}}^v$  à  $\overline{\mathbf{D}}$  en élasticité pour une cavité sphéroïdale aplatie; elle respecte donc la symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ .

– Application  $\overline{\mathbf{D}} \mapsto \overline{\mathbf{L}}'_d \cdot \overline{\mathbf{D}}$

• D'une part, cette application respecte la condition  $D_m^v = \frac{D_m}{f}$  car  $\overline{L}_{d11}^{obl} = \frac{1}{f}$ ,  $\overline{L}_{d1j}^{obl} = 0$  pour  $j \geq 2$  et  $h_{i1}^{sph} = 1$ .

• D'autre part, on a  $h_{i1}^{sph} = 1$  pour  $1 \leq i \leq 3$  et on a pris  $h_{ij}^{sph} = h^{sph}$  pour  $2 \leq i, j \leq 3$  et  $(i, j) = (4, 4), (5, 5)$  et  $(6, 6)$ . Donc tout se passe comme si on appliquait  $\overline{\mathbf{L}}_d^{obl}$  non pas à  $(D_m, \mathbf{D}')$  mais à  $(D_m, h^{sph} \mathbf{D}')$  où  $\mathbf{D}'$  désigne le déviateur de  $\mathbf{D}$ . Ceci signifie que l'application en question est la composée des applications  $(D_m, \mathbf{D}') \mapsto \overline{\mathbf{L}}_d^{obl} \cdot (D_m, \mathbf{D}')$  et  $(D_m, \mathbf{D}') \mapsto (D_m, h^{sph} \mathbf{D}')$  qui respectent toutes deux la symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ .

Ceci achève la démonstration.

### 5.2.3.6 Cas d'un ellipsoïde général

On va interpoler les coefficients  $h_{ij}$  entre un sphéroïde allongé ( $k = 0$ ) et un sphéroïde aplati ( $k = 1$ ), à porosité et excentricité  $e_{xz}$  fixées. On pose ainsi

$$h_{ij}(f, e_{xz}, k, \mathcal{C}) = (1 - k^p) h_{ij}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) + k^p h_{ij}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) \quad (5.22)$$

où  $p$  est un paramètre à déterminer. La matrice  $\mathbf{h}$  de composantes  $h_{ij}$  est de la forme :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22} & h_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_{22} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

## 5.2.4 Détermination des coefficients $h_{ij}$

Comme pour le critère, nous ferons des calculs par éléments finis pour déterminer numériquement les coefficients  $h_{ij}$ . Ensuite nous chercherons des approximations pour reproduire les résultats.

### 5.2.4.1 Cas sphérique

Une étude numérique complète est possible dans ce cas du fait du nombre réduit de paramètres. La cellule sphérique creuse étant isotrope, on peut se placer dans les axes principaux du tenseur des contraintes macroscopiques  $\Sigma$ . Puisque  $\Sigma$  comprend trois paramètres indépendants (les contraintes principales), le point courant sur la surface de charge n'est caractérisé que par deux paramètres. De plus, les tenseurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^v$  sont diagonaux dans la même base que  $\Sigma$  donc n'ont eux aussi que trois composantes indépendantes, donc leurs déviateurs  $\mathbf{D}'$  et  $\mathbf{D}^{v'}$  n'en ont que deux. Il s'agit donc d'étudier, en tout point de la surface de charge, caractérisé par deux paramètres, une application non-linéaire  $\mathbf{D}' \mapsto \mathbf{D}^{v'}$  mettant en correspondance deux vecteurs à deux composantes. Pour paramétrer la surface de charge, on peut utiliser par exemple la triaxialité  $T$  et l'angle de Lode  $\Phi$ , définis par [Kachanov, 1971] :

$$T = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}, \quad \cos(3\Phi) = \frac{27}{2} \det(\bar{\mathbf{S}}) \quad (5.24)$$

où

$$\Sigma = \Sigma_m \mathbf{I} + \Sigma_{eq} \bar{\mathbf{S}} \quad ; \quad \Sigma_m = \frac{1}{3}(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} + \Sigma_{zz}) \quad ; \quad \bar{\mathbf{S}} = \frac{\Sigma'}{\Sigma_{eq}} \quad (5.25)$$

Pour parcourir toute la surface de charge, il faut faire varier  $\Phi$  dans l'intervalle  $[0; \pi/3]$  et  $T$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  ; mais seul l'intervalle  $[0; 3]$  est réellement d'intérêt pratique.

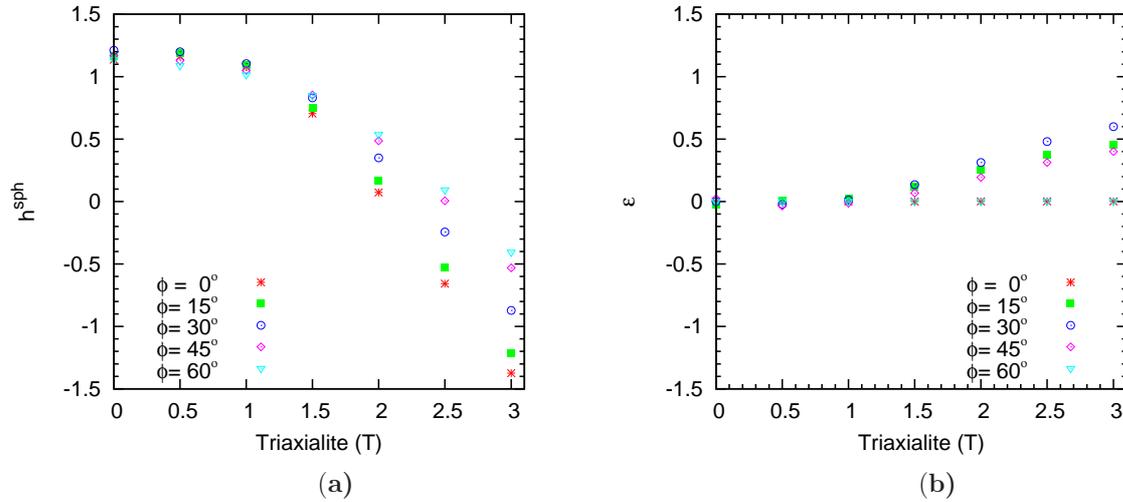
Dans le code de calcul par éléments finis, on ne peut imposer directement ces deux invariants. Pour y parvenir, nous allons exprimer les rapports  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$  et  $\frac{\Sigma_{zz}}{\Sigma_{xx}}$  en fonction d'eux. En partant de la représentation du tenseur  $\bar{\mathbf{S}}$  en fonction de l'angle de Lode  $\Phi$  défini par la relation (voir [Danas *et al.*, 2008]) :

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\cos(\Phi + \frac{\pi}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\Phi - \frac{\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

et en utilisant les relations (5.24), (5.25) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}} = \frac{s_2 + T}{s_1 + T} \\ \frac{\Sigma_{zz}}{\Sigma_{xx}} = \frac{-s_1 - s_2 + T}{s_1 + T} \end{cases} \quad (5.26)$$

Ainsi, pour des valeurs données de  $T$  et  $\Phi$ , on peut calculer les rapports  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$  et  $\frac{\Sigma_{zz}}{\Sigma_{xx}}$  à imposer dans le calcul numérique (en ajustant convenablement les déformations macroscopiques imposées).



**Figure 5.1:** Résultats numériques de  $h^{sph}$  (a) et  $\mathcal{E}$  (voir définition ci-dessous) (b) pour  $0^\circ \leq \Phi \leq 60^\circ$  pour une cellule sphérique contenant une cavité sphérique de porosité 0.01

Les calculs numériques (figures 5.1a et 5.1b) révèlent que  $\mathbf{D}^{v'}$  n'est pas colinéaire à  $\mathbf{D}'$ . Il faut donc étudier séparément les deux composantes de  $\mathbf{D}^{v'}$  en fonction des deux composantes de  $\mathbf{D}'$ .

On définit ainsi les grandeurs suivantes à examiner dans le dépouillement :

- $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{D}'}{\|\mathbf{D}'\|}$  : vecteur unitaire colinéaire à  $\mathbf{D}'$ .
- $\mathbf{U}_\perp = \mathbf{N} \wedge \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$  : vecteur unitaire perpendiculaire à  $\mathbf{D}'$  dans le plan des déviateurs.
- $\mathbf{U}^v = \frac{3+2f}{5} \frac{\mathbf{D}^{v'}}{\|\mathbf{D}^{v'}\|}$  : vecteur colinéaire à  $\mathbf{D}^{v'}$ , égal à  $\mathbf{U}$  dans le cas élastique.
- $h^{sph} = \mathbf{U}^v \cdot \mathbf{U}$  : projection de  $\mathbf{U}^v$  sur  $\mathbf{U}$ , égale à 1 en élasticité (composante de  $\mathbf{U}^v$  parallèle à  $\mathbf{U}$ ).
- $\mathcal{E} = \mathbf{U}^v \cdot \mathbf{U}_\perp$  : projection de  $\mathbf{U}^v$  sur  $\mathbf{U}_\perp$ , vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{U}$ . Cette composante de  $\mathbf{D}^{v'}$  sera négligée dans la modélisation (“erreur”).

On observe sur la figure 5.1b que pour les angles de Lode  $\Phi = 0^\circ$  et  $60^\circ$ ,  $\mathcal{E} = 0$ , c'est à dire que  $\mathbf{D}^{v'}$  et  $\mathbf{D}'$  sont colinéaires quelle que soit  $T$ . Ceci est dû au fait que les angles de Lode  $0^\circ$  et  $60^\circ$  correspondent au cas de chargements axisymétriques pour lesquels  $\mathbf{D}^{v'}$  et  $\mathbf{D}'$  sont colinéaires.

Pour  $\Phi = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ$ , la colinéarité de  $\mathbf{D}^{v'}$  et  $\mathbf{D}'$  est approximativement assurée si  $0 \leq T \leq 1$  et se dégrade lorsque  $T$  augmente jusqu'à 3. L'erreur  $\mathcal{E}$  est maximale pour  $\Phi = 30^\circ$ .

Il faut maintenant chercher une approximation de  $h^{sph}$  en fonction de  $f$  et  $T$ . Cette expression doit tendre vers 1 lorsque  $f$  tend vers 1, parce que la cavité occupe alors tout le volume, et donc  $\mathbf{D}^v$  doit tendre vers  $\mathbf{D}$ . Une autre condition est à respecter. Quand on change  $\Sigma$  en  $-\Sigma$ , la symétrie du critère en traction/compression implique que  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^v$  doivent devenir  $-\mathbf{D}$  et  $-\mathbf{D}^v$ , donc  $\overline{\mathbf{L}}_d$  doit rester invariant, donc  $h^{sph}$  ne doit pas changer. Or quand  $\Sigma$  change de signe,  $T$  et  $\cos(3\Phi)$  changent de signe; donc  $h^{sph}$  doit rester invariant dans la transformation  $(T, \cos(3\Phi)) \mapsto (-T, -\cos(3\Phi))$ .

La formule proposée :

$$h^{sph}(f, C) = \frac{1}{7}(9 - 10\sqrt{f} + 8f) - \frac{1}{5}(1 - \sqrt{f})^8 \frac{11T^4}{11 + |T|^3} \left( 1 + \frac{1}{3}\text{sgn}(T) \cos(3\Phi) \right) \quad (5.27)$$

où  $\text{sgn}(T)$  est le signe de la triaxialité, respecte ces deux conditions.

Remarquons que  $h^{sph}$  est lié au facteur empirique  $h^{Gol}$ , introduit dans [Gologanu, 1997], par la relation :

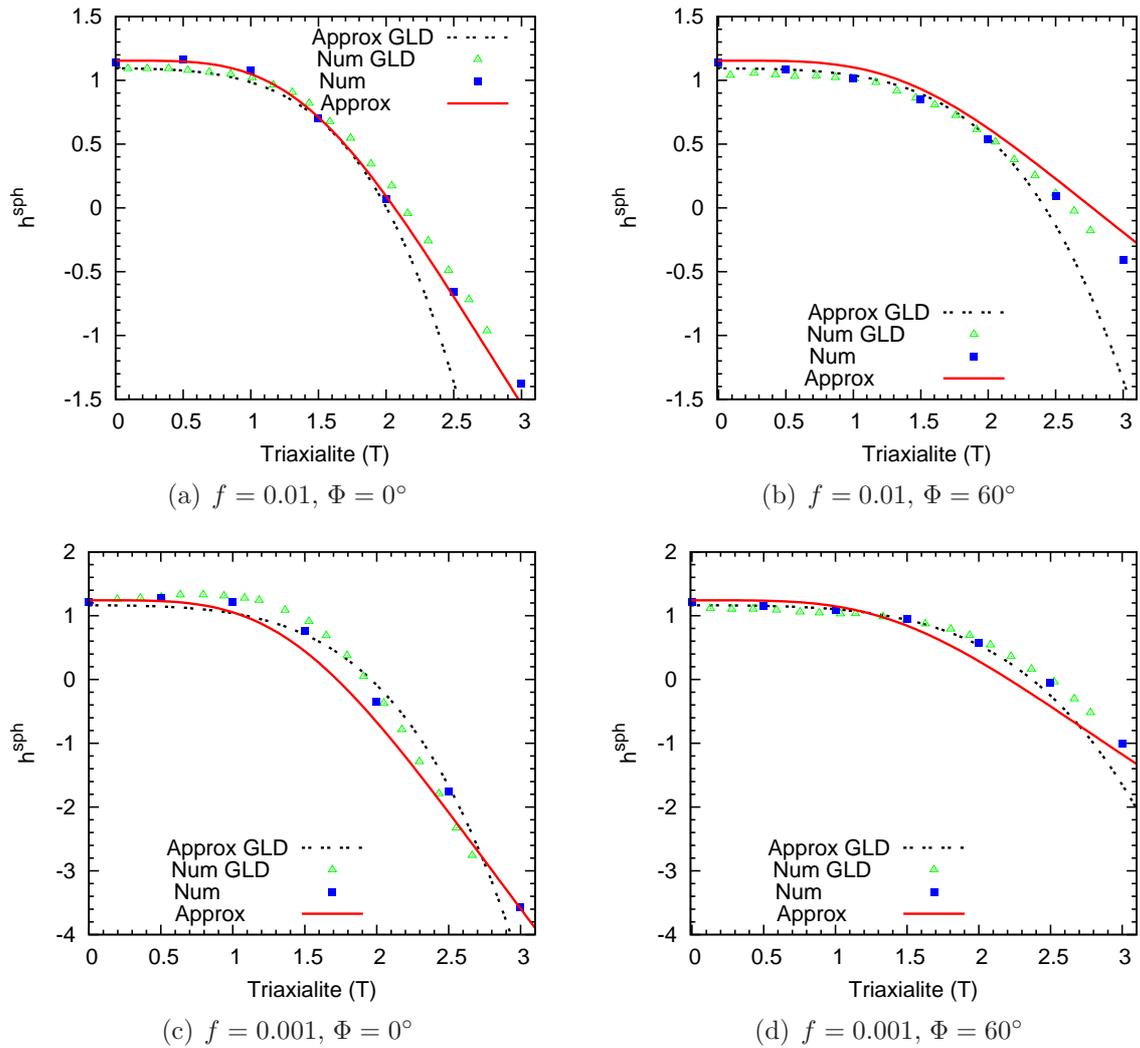
$$h^{Gol} = \frac{5}{3 + 2f} h^{sph} \quad (5.28)$$

Cet auteur a étudié numériquement uniquement le cas de chargements axisymétriques sur une sphère creuse, et en a déduit la représentation approximative suivante de la fonction  $h^{Gol}$  :

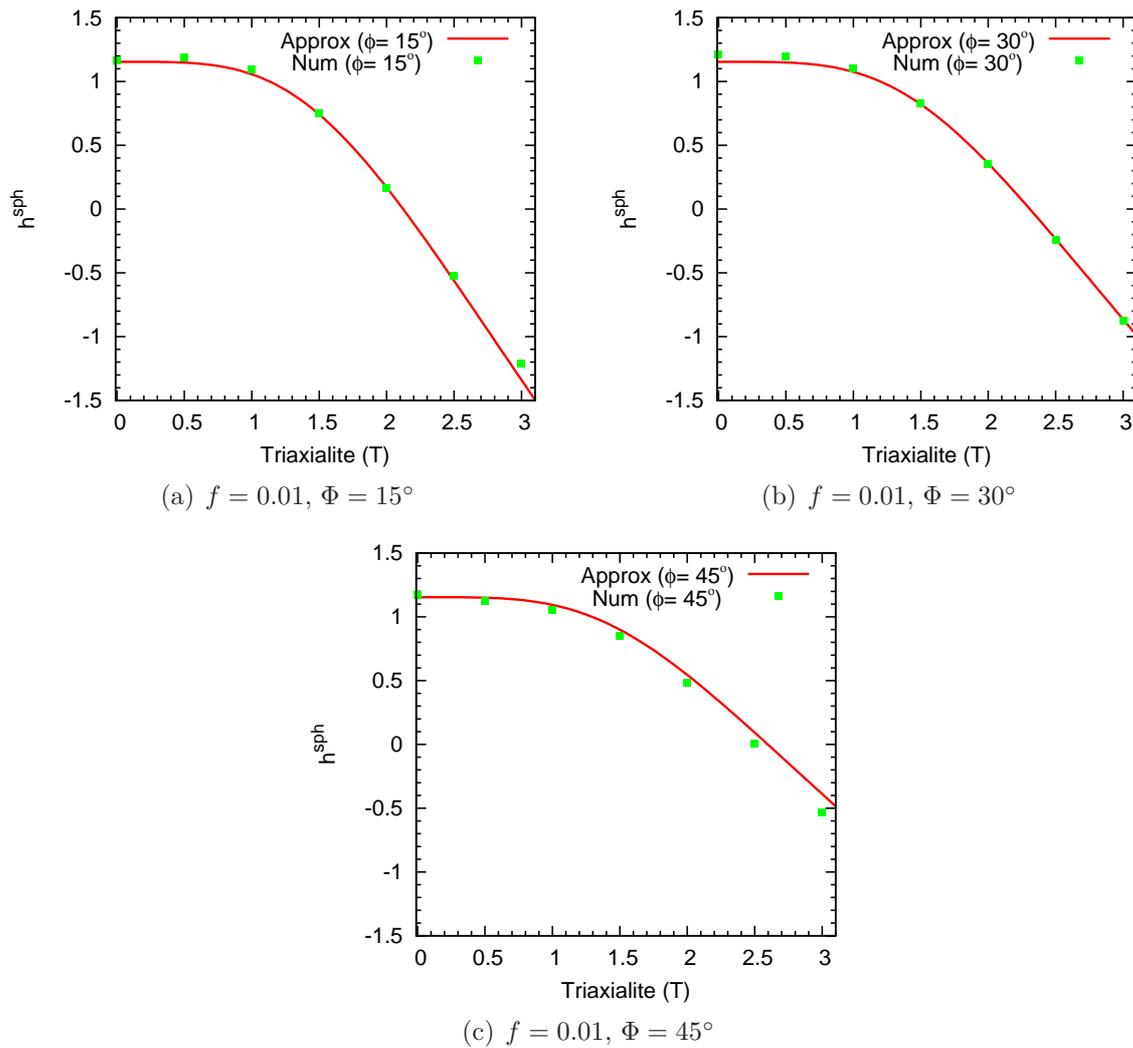
$$h^{Gol} = \begin{cases} 1 + (1 - \sqrt{f})^2 \left( 1 - \frac{T^2 + T^4}{9} \right) & , \quad \Phi = 0^\circ \\ 1 + (1 - \sqrt{f})^2 \left( 1 - \frac{T^2 + T^4}{18} \right) & , \quad \Phi = 60^\circ \end{cases} \quad \text{pour } T > 0 \quad (5.29)$$

Nos résultats numériques coïncident pratiquement avec ceux de [Gologanu, 1997] pour  $\Phi = 0^\circ$  et  $60^\circ$  et notre approximation reproduit assez bien les résultats numériques pour toutes les valeurs de l'angle de Lode et les porosités 0.01 et 0.001 (figures 5.2 et 5.3).

On observe sur les figures 5.2 et 5.3 que  $h^{sph}$  devient négatif pour les fortes valeurs de la triaxialité, quel que soit l'angle de Lode. Ceci signifie que la cavité, soumise à une traction simple superposée à une forte contrainte hydrostatique, tend à s'aplatir et non à s'allonger comme on pourrait s'y attendre; ceci confirme les observations de [Budiansky *et al.*, 1982] et invalide l'utilisation de la simple formule élastique (5.1) sans correction, dans de telles conditions.



**Figure 5.2:** Coefficient  $h^{sph}$  pour des cellules sphériques contenant des cavités sphériques de porosité 0.01 et 0.001 dans les cas  $\Phi = 0^\circ$  et  $60^\circ$  - Résultats numériques et approximation proposée, dans ce travail (Num, Approx) et celui de [Gologanu, 1997] (Num GLD, Approx GLD)



**Figure 5.3:** Coefficient  $h^{sph}$  pour une cellule sphérique contenant une cavité sphérique de porosité 0.01 dans les cas  $\Phi = 15^\circ, 30^\circ$  et  $45^\circ$  - Résultats numériques et approximation proposée (Num, Approx)

### 5.2.4.2 Cavité cylindrique

#### Coefficient $h_{33}^{cyl}$

Afin de pouvoir déterminer numériquement le coefficient  $h_{33}^{cyl}$  défini par

$$h_{33}^{cyl}(f, \mathcal{C}) = \frac{1 + f \frac{D_{yy}^v - D_{zz}^v}{D_{yy} - D_{zz}}}{2}, \quad (5.30)$$

nous avons effectué des calculs par éléments finis sur des cellules cylindriques circulaires contenant des cavités circulaires de rayon 5, de hauteur 1 et de porosité 0.1; 0.01 et 0.001. Ces cellules sont soumises à des conditions de taux de déformation homogène sur leur bord latéral et à des conditions de déformation plane généralisée sur leurs bords inférieur et supérieur.

Étant donné que les cellules ne sont plus isotropes, on est confronté à deux problèmes.

- Le premier est de savoir les types de chargement qu'il faut étudier. On se limite aux chargements dont les axes principaux coïncident avec ceux de la cavité. Ceci implique que seules les composantes  $\Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{yy}$  et  $\Sigma_{zz}$  sont non nulles. La surface de charge devient donc de dimension 2 dans un espace de dimension 3. On explore  $h_{33}^{cyl}$  sur des intersections de cette surface avec des plans.

Pour le tracé des surfaces de charge, on a considéré trois plans :  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}\}$ ,  $\{\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}\}$  et  $\{\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}\}$ . Ici le troisième n'a pas d'intérêt (il ne permet pas d'obtenir  $h_{33}^{cyl}$  car  $D_{yy} = D_{zz}$  et  $D_{yy}^v = D_{zz}^v$ ) et les premier et deuxième sont équivalents. On se contente du premier. On lui rajoute le plan  $\{\Sigma_{xx} = (\Sigma_{yy} + \Sigma_{zz})/2\}$ .

On remarque que ces deux plans contiennent le "point hydrostatique"  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$ . On leur rajoute, pour une seule porosité, quelques points dans le plan  $\{\Sigma_{xx} = 0\}$  (contrainte plane) qui ne contient plus le point hydrostatique.

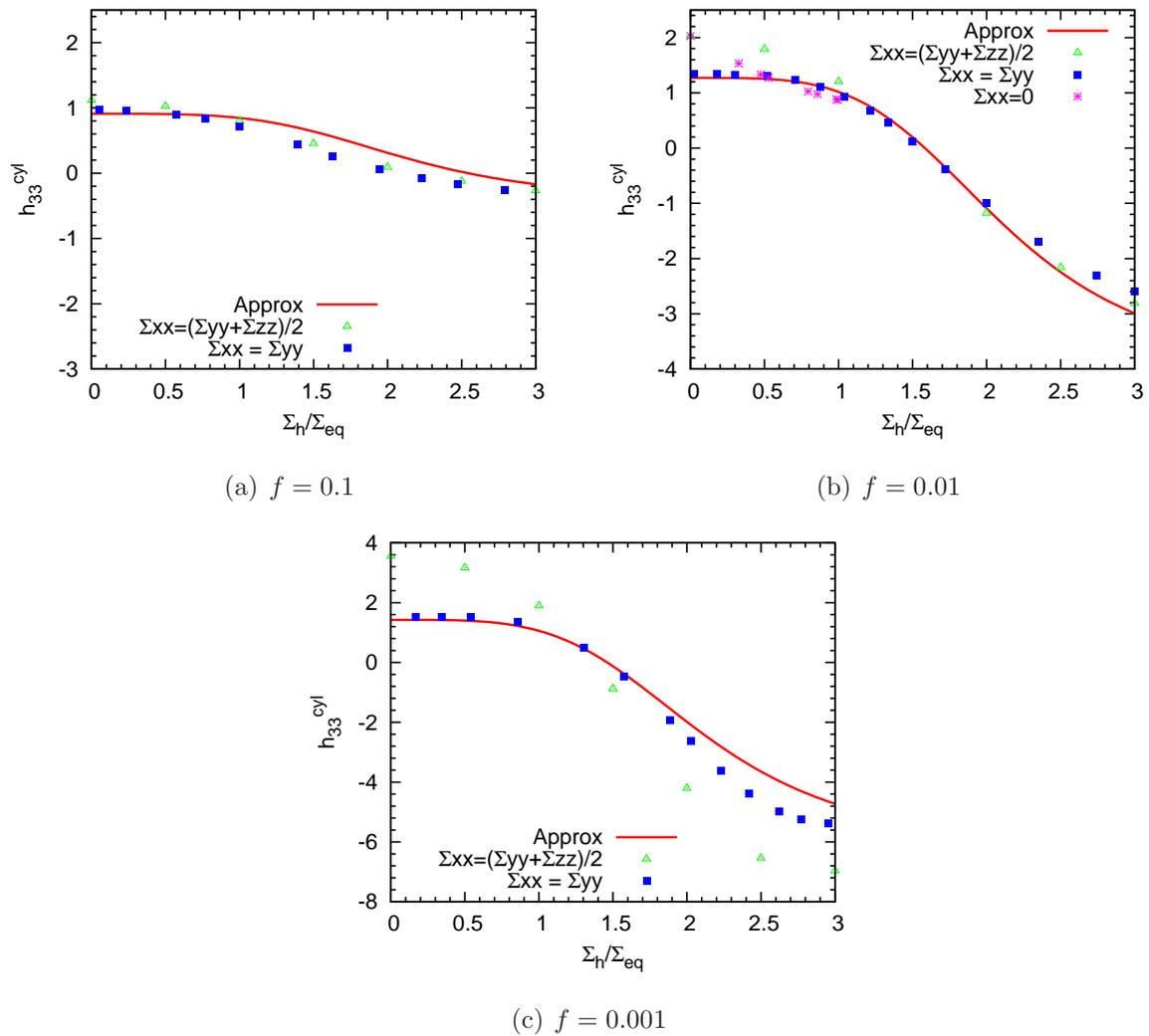
- Le second problème est de choisir les paramètres pertinents pour décrire  $h_{33}^{cyl}$ . On remarque que pour  $f = 0.01$ , les points numériques représentant  $h_{33}^{cyl}$  sur la figure 5.4b, correspondant aux différents types de chargements, se rapprochent si l'on fait la représentation en fonction de

$$T_h = \frac{\Sigma_h}{\Sigma_{eq}}, \quad \Sigma_h = \frac{\Sigma_{yy} + \Sigma_{zz}}{2} \quad (5.31)$$

plutôt qu'en fonction de la triaxialité usuelle  $T = \Sigma_m/\Sigma_{eq}$ . Il en résulte que  $T_h$  est le paramètre pertinent dont dépend  $h_{33}^{cyl}$ . L'approximation de ce paramètre proposée est :

$$h_{33}^{cyl} = \frac{1}{2}(3 - 5\sqrt{f} + 4f) - (1 - \sqrt{f})^5 \frac{9T_h^4}{20 + T_h^4} \quad (5.32)$$

Cette expression satisfait aux deux conditions nécessaires que  $h_{33}^{cyl}$  tende vers 1 en même temps que  $f$  et reste invariant quand  $\Sigma$  change de signe. De plus, elle reproduit assez bien les résultats numériques (figures 5.4a,b,c).



**Figure 5.4:** Valeurs numériques et approximation proposée (Approx) de  $h_{33}^{cyl}$  pour des cellules cylindriques circulaires contenant des cavités de rayon 5, de hauteur 1, de porosité 0.1, 0.01 et 0.001, pour plusieurs types de chargement

Coefficient  $h_{44}^{cyl}$

Pour déterminer le coefficient  $h_{44}^{cyl}$  défini par :

$$h_{44}^{cyl} = \frac{1 + f}{2} \frac{D_{xy}^v}{D_{xy}}, \tag{5.33}$$

on doit cisailer le cylindre dans le plan  $xy$ . Pour cela, la cellule cylindrique sera soumise à des chargements de la forme

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & 0 \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

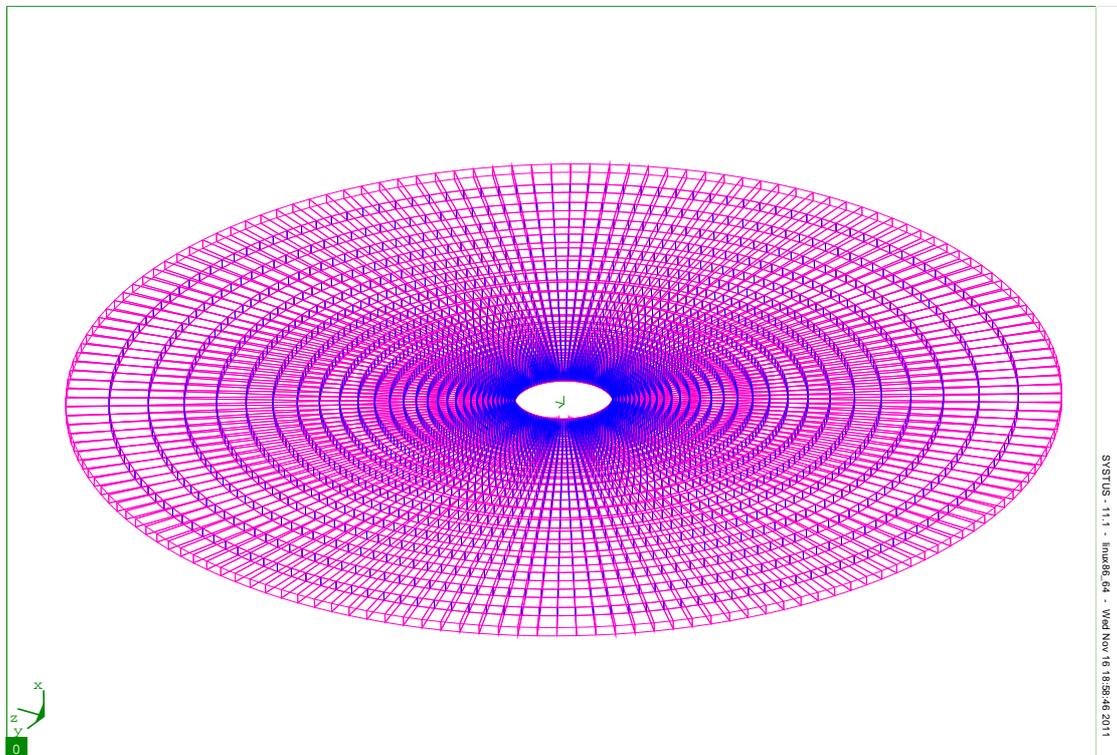


Figure 5.5: Maillage de la cellule cylindrique creuse - Mailles spéciales 1D en traits bleus

En théorie la cellule est un cylindre de hauteur infinie, même si on le limite pour des raisons numériques. Donc les bords inférieur et supérieur ne font pas partie de son bord, ce qui entraîne que les conditions aux limites de taux de déformation homogène ne s'y appliquent pas.

Mais les champs de contraintes et de taux de déformation étant clairement indépendants de  $x$ , il y a périodicité dans la direction  $x$ , tout nombre réel étant période. Les bords inférieur et supérieur (arbitraires) sont donc liés par des conditions de périodicité.

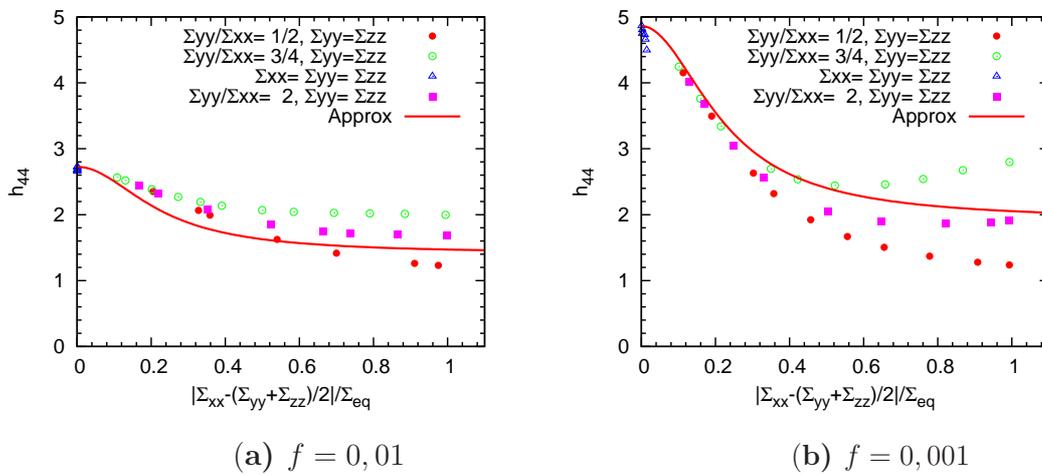
Ainsi le champ de vitesse s'écrit sur les bases inférieure et supérieure du cylindre sous la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \quad (5.35)$$

où  $\mathbf{\Omega}$  désigne le taux de rotation macroscopique et  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  un champ de vitesse périodique, tandis que sur la paroi latérale, il est de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{x} \quad (5.36)$$

qui respecte les conditions de taux de déformation homogène au bord.



**Figure 5.6:** Coefficient  $h_{44}^{cyl}$  pour une cellule cylindrique contenant une cavité cylindrique de rayon 5 et de hauteur 1 - Points : résultats numériques ; ligne continue : approximation proposée

Le taux de rotation macroscopique est ajusté de façon à maintenir le cylindre vertical c'est-à-dire à éliminer la rotation dans les plans  $xy$  et  $xz$ . Ceci se traduit par les relations

$$\Omega_{xz} = D_{xz}(= 0), \quad \Omega_{xy} = D_{xy} \quad (5.37)$$

Pour éliminer la vitesse inconnue  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ , on écrit la différence des vitesses de deux points en correspondance périodique :

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (5.38)$$

De façon numérique, on impose cette différence de vitesses en utilisant des mailles spéciales 1D (figure 5.5) ayant une très grande rigidité. Cette procédure est appliquée à tous les couples de points en correspondance périodique. Nous imposons alors les rapports  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}} = \frac{\Sigma_{zz}}{\Sigma_{xx}}$  et  $\frac{\Sigma_{xy}}{\Sigma_{xx}}$  à la cellule, en ajustant les rapports des composantes  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_{xy}$  du taux de déformation par la méthode de Newton. Du fait de la présence de la composante

$D_{xy}$  qui particularise l'axe  $Oy$ , l'égalité  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz}$  n'est pas réalisée exactement pour  $D_{yy} = D_{zz}$ .

On peut observer sur la figure 5.7 que les conditions aux limites imposées permettent bien de maintenir le cylindre vertical malgré la rotation de la cavité.

Pour obtenir les composantes de  $\mathbf{\Omega}^v$  et  $\mathbf{D}^v$ , on doit calculer les intégrales  $\int_{\partial\mathcal{E}_0} v_i n_j dS$ . La difficulté est que les bords inférieur et supérieur de la cavité ne sont pas maillés. Mais on peut obtenir  $\int_{\partial\mathcal{E}_0} v_i n_x dS$  (les intégrales avec  $n_y$  et  $n_z$  étant nulles) à partir du raisonnement suivant :

- Pour  $i = x$ , ce n'est pas la peine de faire le calcul car  $D_{xx}^v$  se calcule directement grâce à la relation  $D_{xx}^v = D_{xx}$  (composante imposée).
- Il reste les cas  $i = y$  et  $z$ . Si on ajuste  $\mathbf{\Omega}$  de manière que l'axe du cylindre reste vertical, alors en utilisant les équations (5.37) et (5.38), on obtient :

$$\Delta v_y = (\Omega_{yx} + D_{yx})H = 0, \quad \Delta v_z = (\Omega_{zx} + D_{zx})H = 0$$

où  $H$  est la hauteur du cylindre. Il en résulte que  $v_y$  et  $v_z$  prennent des valeurs identiques sur les faces inférieure et supérieure. Donc  $v_i n_x$  ( $i = y$  ou  $z$ ) prend des valeurs opposées sur ces faces et les intégrales de cette quantité se compensent, donc ce n'est pas non plus la peine de les calculer.

En réalité, le coefficient  $h_{44}^{cyl}$  dépend de la contrainte déviatorique

$$X = \frac{\Sigma_{xx} - (\Sigma_{yy} + \Sigma_{zz})/2}{\Sigma_{eq}} \tag{5.39}$$

et du rapport  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$ , mais on va négliger l'influence de ce rapport.

Sur la figure 5.6, on a représenté  $h_{44}^{cyl}$  en fonction de  $X$  pour différentes valeurs de  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$ . L'approximation proposée est une moyenne des courbes numériques correspondant aux différentes valeurs de ce rapport et est donnée par

$$h_{44}^{cyl}(f, X) = 1 + 11(1 - \sqrt{f})^{11} - \frac{17}{2}(1 - \sqrt{f})^{11} \frac{20X^2}{1 + 20X^2} \tag{5.40}$$

Cette fonction tend vers 1 lorsque  $f$  tend vers 1, comme il convient.

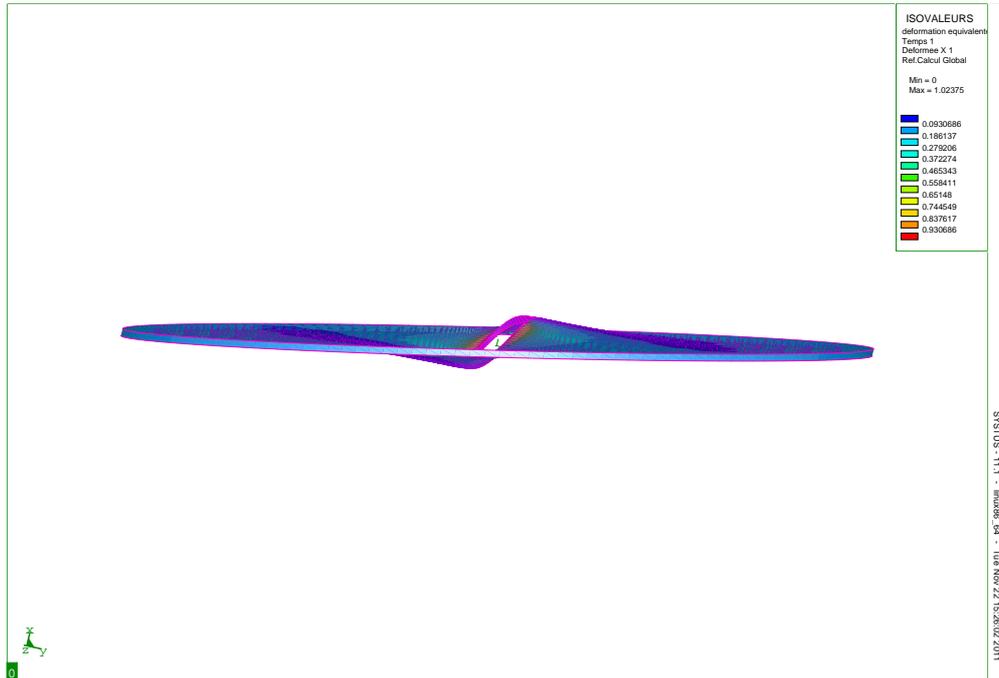


Figure 5.7: Maillage déformé d'une cellule cylindrique soumise à un cisaillement

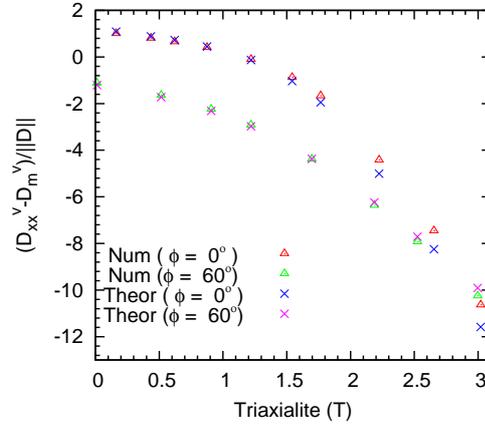
### 5.2.4.3 Cas d'un sphéroïde allongé

L'interpolation (5.18) proposée dans la section 5.2.3.4 a été ajustée sur les résultats numériques résultant de chargements axisymétriques et non axisymétriques réalisés sur un sphéroïde allongé contenant une cavité de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité  $f = 0.01$ . On détermine ainsi l'exposant  $m$  figurant dans l'expression de  $h_{ij}^{obl}$ . On obtient

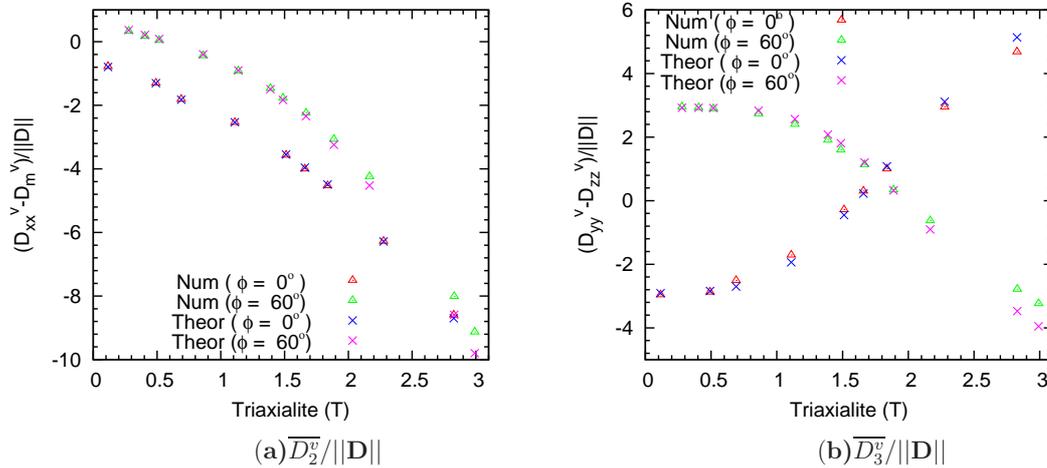
$$h_{ij}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = (1 - e_{xz}^{30})h_{ij}^{sph}(f, \mathcal{C}) + e_{xz}^{30}h_{ij}^{cyl}(f, \mathcal{C}), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \text{ et } (i, j) = (4, 4), (5, 5), (6, 6) \quad (5.41)$$

Les figures 5.8 et 5.9 montrent qu'il y a un parfait accord entre le modèle et les résultats numériques pour la cellule sphéroïdale allongée considérée, soumise à des chargements axisymétriques. Cependant, pour les chargements non-axisymétriques, les coefficients  $h_{ii}^{prol}$ ,  $i = 4; 5; 6$  n'ont pas été validés numériquement. Il faudrait en effet pour le faire effectuer des calculs sur cellules ellipsoïdales complètes (sans symétries), ce qui engendrerait des maillages très lourds.

Pour obtenir les points du modèle, on utilise la formule (5.7), mais les composantes de  $\mathbf{D}$  sont tirées du calcul numérique. Le seul élément du modèle qui intervient est la relation qui donne  $\mathbf{D}^v$  en fonction de  $\mathbf{D}$ . On pourrait déduire les composantes de  $\mathbf{D}$  de celles de  $\Sigma$ , mais il faudrait utiliser le critère approché proposé dans les chapitres 2 et 3 et la loi d'écoulement associée qui ne sont pas appropriés ici puisqu'on ne souhaite pas les tester.



**Figure 5.8:** Cellule sphéroïdale allongée contenant une cavité de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement axisymétrique  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



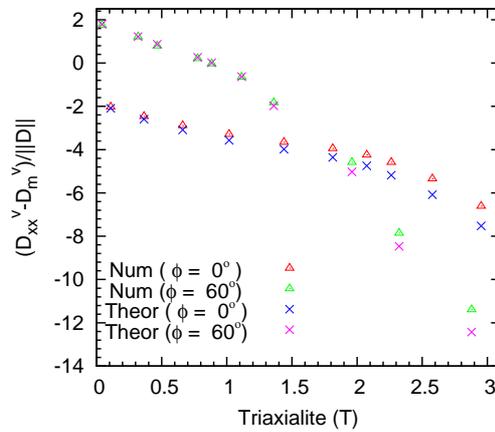
**Figure 5.9:** Cellule sphéroïdale allongée contenant une cavité de demi-axes dans les proportions 5 : 1 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement non-axisymétrique  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)

#### 5.2.4.4 Cas d'un sphéroïde aplati

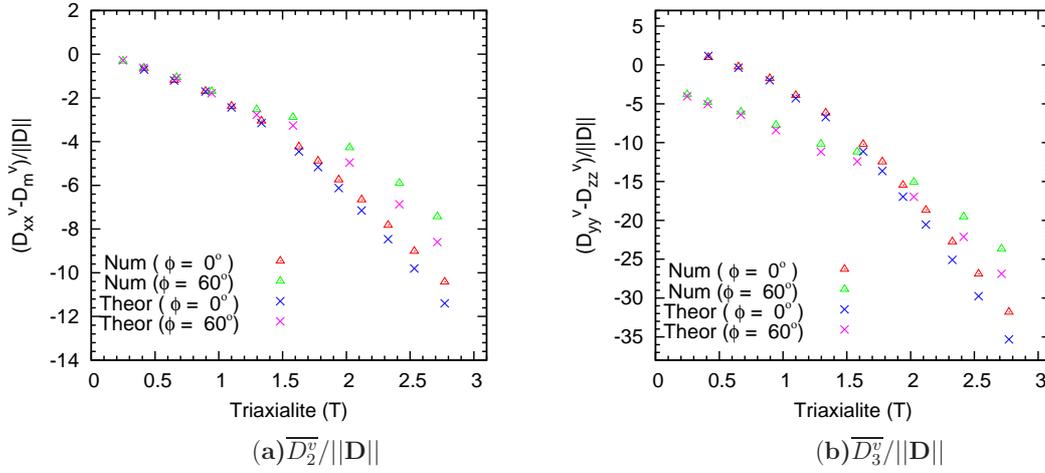
Nous avons ajusté l'interpolation (5.20), proposée dans la section 5.2.3.5, sur les résultats numériques résultant de chargements axisymétriques et non axisymétriques réalisés sur un sphéroïde aplati, de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0,01$ . On détermine ainsi l'exposant  $n$  figurant dans l'expression (5.20) de  $h_{ij}^{obl}$ . On obtient

$$h_{ij}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = (1 - e_{xz}^{50})h_{ij}^{sph}(f, \mathcal{C}) + e_{xz}^{50} \quad (5.42)$$

Les figures 5.10 et 5.11 montrent que le modèle reproduit bien les résultats numériques pour la cellule sphéroïdale aplatie considérée, pour les chargements axisymétriques. Cependant les coefficients  $h_{ii}^{obl}$ ,  $i = 4; 5; 6$  liés respectivement aux termes de cisaillement  $\overline{D}_{xy}$ ,  $\overline{D}_{yz}$ ,  $\overline{D}_{xz}$  n'ont pas été validés numériquement.



**Figure 5.10:** Cellule sphéroïdale aplatie contenant une cavité de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0,01$  : Déformation de la cavité pour un chargement axisymétrique  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



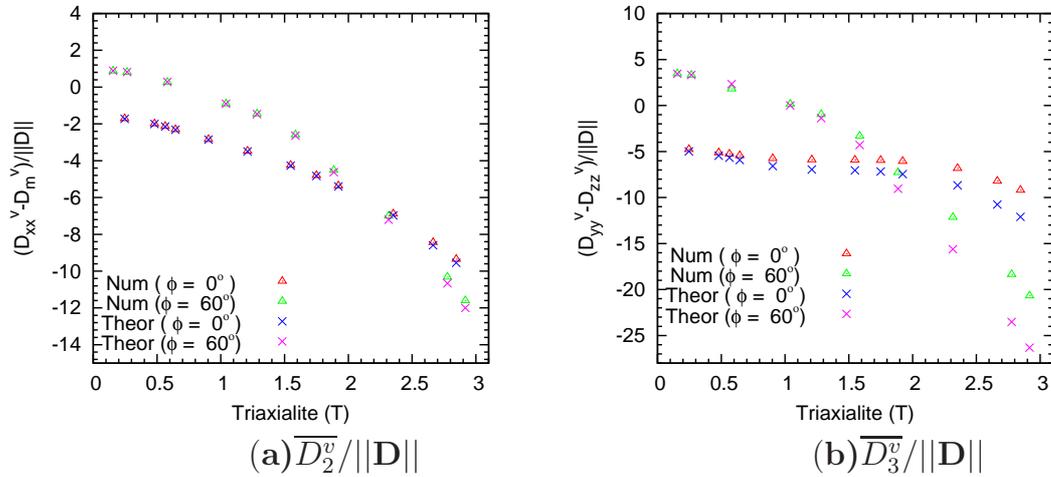
**Figure 5.11:** Cellule sphéroïdale aplatie contenant une cavité de demi-axes dans les proportions 5 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement non-axisymétrique  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}$  : - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)

#### 5.2.4.5 Cas d'un ellipsoïde général

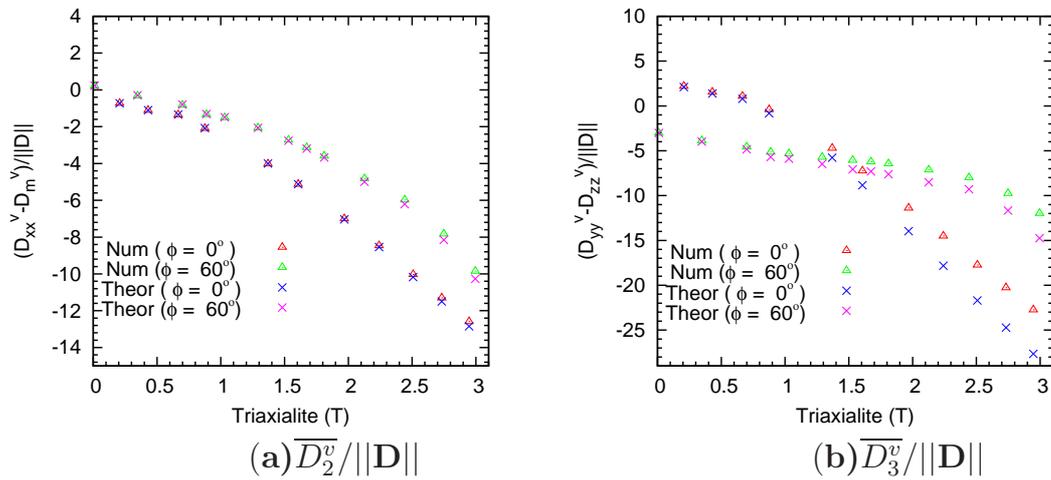
L'expression (5.22) donnée dans la section 5.2.3.6, avec l'exposant  $p$ , a été ajustée sur des calculs numériques effectués sur deux ellipsoïdes généraux contenant des cavités de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1, 10 : 2 : 1 et de porosité 0.01. Comme dans les sections 5.2.4.4 et 5.2.4.3, les validations n'ont pas été effectuées sur  $h_{44}$ ,  $h_{55}$ ,  $h_{66}$ . On a obtenu  $p = 1$  d'où

$$h_{ij}(f, e_{xz}, k, \mathcal{C}) = (1 - k)h_{ij}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) + kh_{ij}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) \quad (5.43)$$

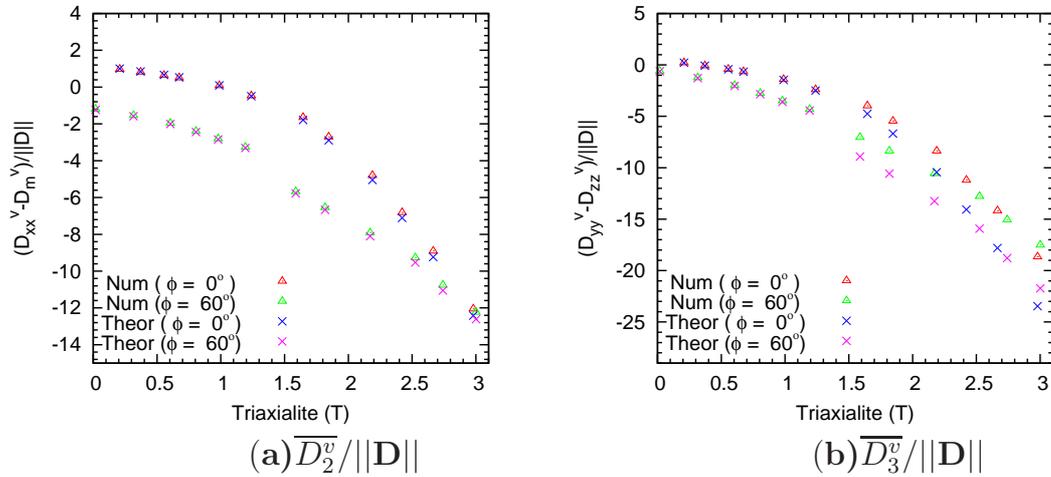
On remarque sur les figures 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 que le modèle reproduit au mieux les résultats numériques pour la cavité de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1.



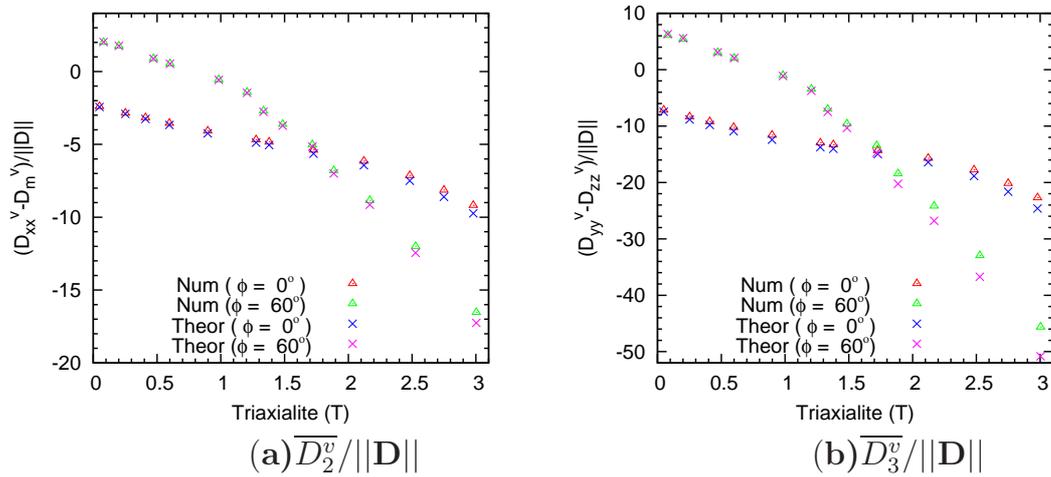
**Figure 5.12:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



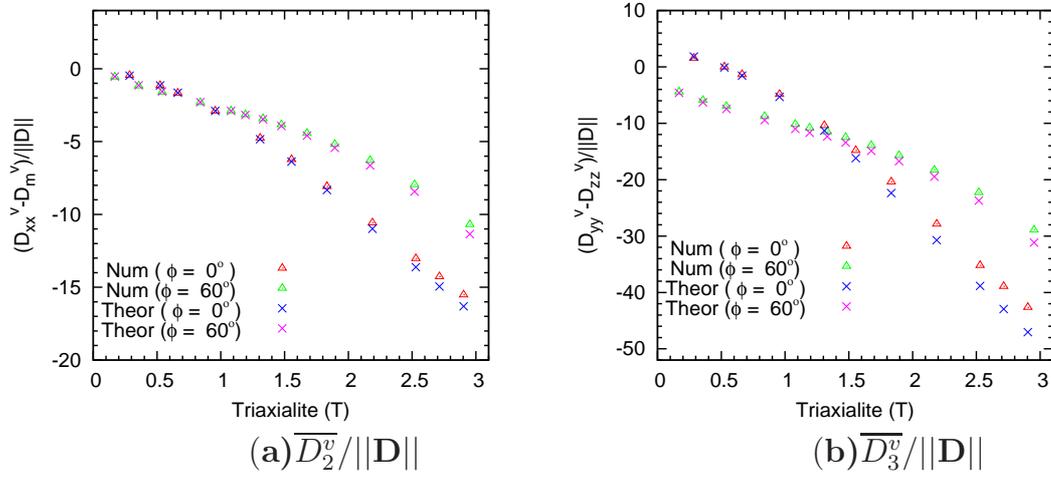
**Figure 5.13:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



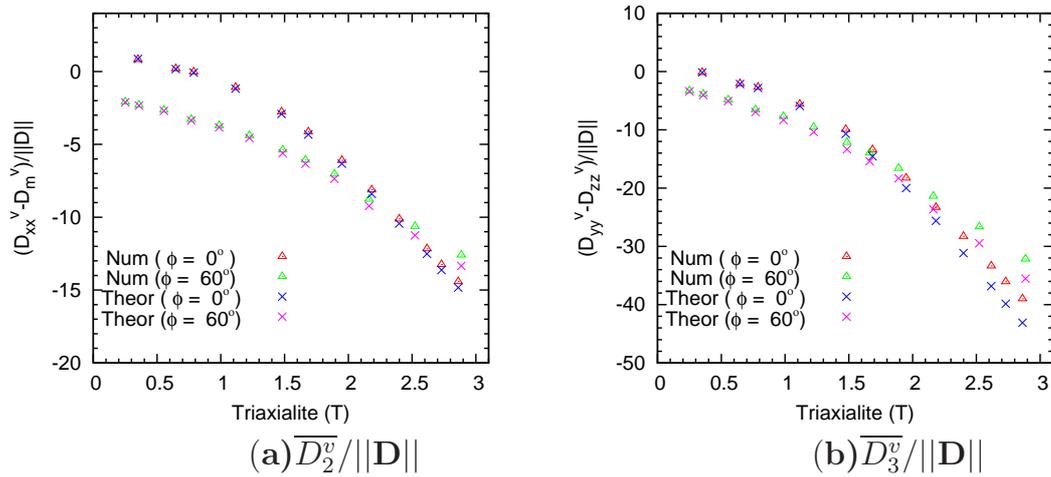
**Figure 5.14:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 2 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



**Figure 5.15:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq \Sigma_{zz}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



**Figure 5.16:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{xx} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{yy}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)



**Figure 5.17:** Cellule ellipsoïdale contenant une cavité ellipsoïdale confocale de demi-axes dans les proportions 10 : 5 : 1 et de porosité  $f = 0.01$  : Déformation de la cavité pour un chargement  $\Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} \neq \Sigma_{xx}$  - Résultats numériques (triangles), modèle (croix)

## 5.3 Taux de rotation de la cavité

### 5.3.1 Généralités

[Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998] ont proposé une formule donnant la rotation ou le taux de rotation d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu linéaire élastique ou visqueux. Cette formule s'écrit :

$$\mathbf{\Omega}^v = \mathbf{\Omega} + \mathbb{L}_r^e : \mathbf{D} \quad \mathbb{L}_r^e = (1 - f)\mathbf{\Pi} : \mathbb{L}_d^e \quad (5.44)$$

où  $\mathbf{\Pi}$  désigne le tenseur de rotation d' [Eshelby, 1957]. Le tenseur  $\mathbf{\Pi}$  est antisymétrique par rapport aux deux premiers indices et symétrique par rapport aux deux derniers. Ses seules composantes non nulles sont  $\Pi_{1212}$ ,  $\Pi_{2323}$ ,  $\Pi_{3131}$ .

[Scheyvaerts *et al.*, 2011] ont affirmé que cette relation demeure applicable aux matériaux rigides parfaitement plastiques. Ils ont atteint cette conclusion à partir de calculs par éléments finis. Le nombre de cas envisagés était cependant très restreint.

Notre but est de révéifier la formule (5.44) pour les matériaux parfaitement plastiques, en considérant d'abord le cas extrême d'une cellule cylindrique contenant une cavité cylindrique.

Les résultats obtenus, en mettant en évidence l'influence de la loi de comportement du milieu, nous conduiront à corriger la formule (5.44). Pour cela, nous remplacerons le tenseur  $\mathbb{L}_r^e$  par  $\mathbb{L}_r$  défini par

$$L_{rijij} = k_{ij}L_{rijij}^e \quad , \quad (i, j) \in \{(1; 2), (2; 3), (3; 1)\} \quad (\text{pas de sommation sur } i \text{ ni } j) \quad (5.45)$$

où les coefficients  $k_{ij}$  sont à déterminer.

### 5.3.2 Détermination des coefficients $k_{ij}$

#### Cavité cylindrique ( $a = +\infty, b, b$ )

Les seules rotations possibles de la cavité induites par la déformation macroscopique sont celles dans les plans  $xy$  et  $xz$  car cette déformation n'engendre pas de rotation dans le plan  $yz$ , comme on le voit en se plaçant dans ses axes principaux. Puisque la cellule cylindrique est isotrope transverse, on a  $k_{xy}^{cyl} = k_{xz}^{cyl}$ , donc on va juste étudier le coefficient  $k_{xy}^{cyl}$  qui est lié à la rotation dans le plan  $xy$ . Pour cela, les calculs numériques faits pour déterminer  $h_{44}^{cyl}$  sont réutilisés. On peut observer la rotation de la cavité sur la figure 5.18.

La relation (5.45) se réduit ici à

$$\begin{aligned} \Omega_{xy}^v &= \Omega_{xy} + (1 - f)\Pi_{xy}k_{xy}^{cyl}(L_r^e)_{mnl}D_{kl} \quad (\text{sommation sur } m, n, k \text{ et } l) \\ &= \Omega_{xy} + 4(1 - f)\Pi_{xy}k_{xy}^{cyl}(L_r^e)_{xyxy}D_{xy} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Dans le cas cylindrique  $\Pi_{xyxy} = \frac{1}{4}$  et  $(L_r^e)_{xyxy} = \frac{1}{1+f}$ , par conséquent :

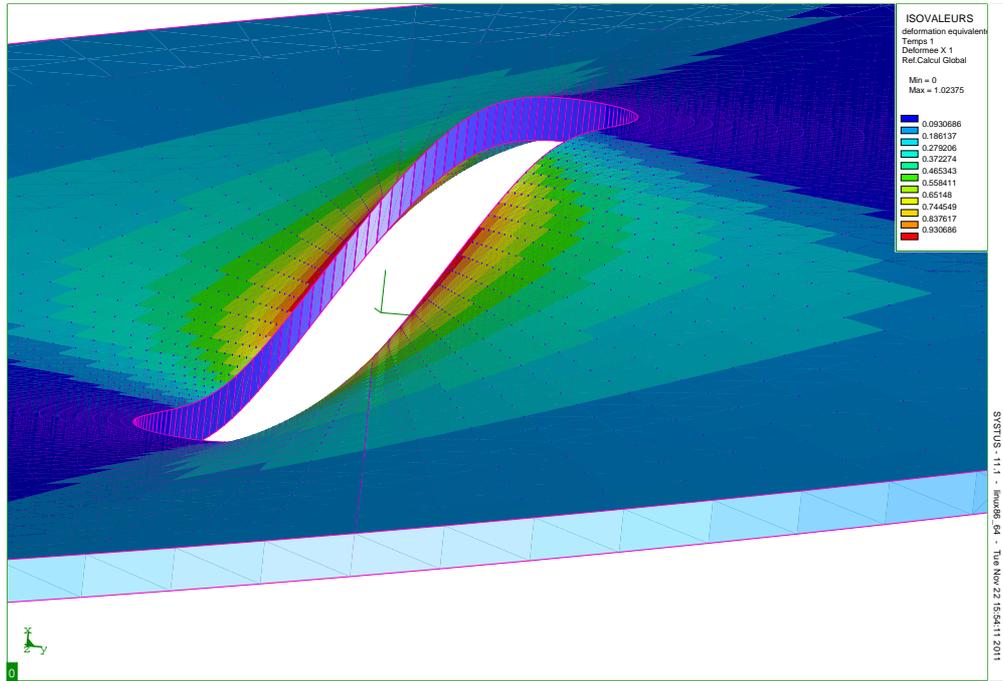


Figure 5.18: Zoom sur la cavité dans le maillage déformé

$$k_{xy}^{cyl} = \frac{1 + f}{1 - f} \frac{\Omega_{xy}^v - \Omega_{xy}}{D_{xy}} \quad (5.47)$$

A partir des résultats numériques, on remarque d'une part que  $k_{xy}^{cyl}$  est notablement supérieur à 1 ce qui signifie que la formule (5.44) n'est plus exacte dans le cas plastique, et que d'autre part il dépend de la contrainte déviatorique  $X = \frac{\Sigma_{xx} - (\Sigma_{yy} + \Sigma_{zz})/2}{\Sigma_{eq}}$  et du rapport  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$ .

Par analogie avec le coefficient  $h_{44}^{cyl}$ , on néglige l'influence du rapport  $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_{xx}}$ . Pour reproduire les résultats numériques, on propose la formule suivante :

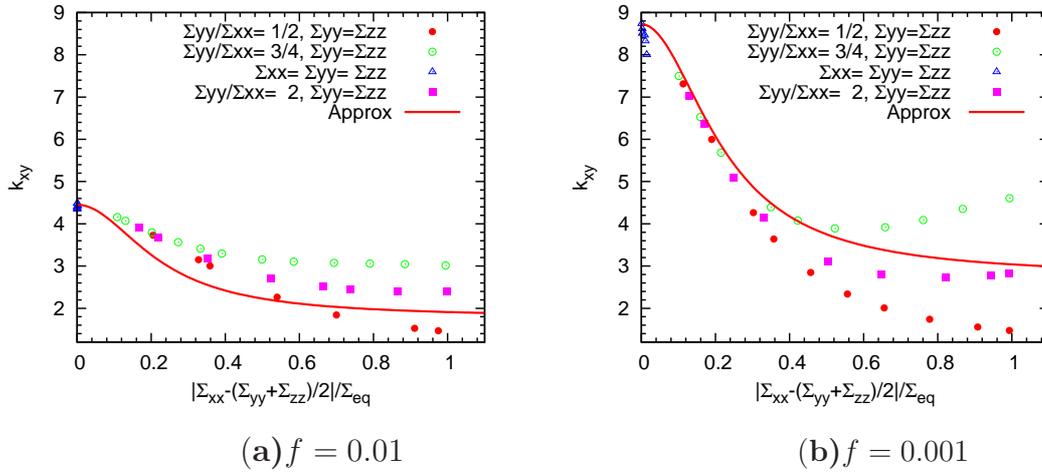
$$k_{xy}^{cyl}(f, \mathcal{C}) = 1 + 11(1 - \sqrt{f})^{11} - \frac{17}{2}(1 - \sqrt{f})^{11} \frac{20X^2}{1 + 20X^2} \quad (5.48)$$

Cette approximation est raisonnable comme on peut le voir sur la figure 5.19.

## Cas sphérique

Dans ce cas, il n'y a pas de rotation de la cavité induite par la déformation macroscopique comme on le voit en se plaçant dans les axes principaux de cette déformation, donc on peut prendre

$$k_{xy}^{sph}(f, \mathcal{C}) = k_{xz}^{sph}(f, \mathcal{C}) = k_{yz}^{sph}(f, \mathcal{C}) = 1. \quad (5.49)$$



**Figure 5.19:** Coefficient  $k_{xy}^{cyl}$  pour une cellule cylindrique contenant une cavité cylindrique - Les points indiquent les résultats numériques et la ligne continue l'approximation proposée

### Cas sandwich

La formule élastique est exacte dans ce cas puisque la cinématique est indépendante de la loi de comportement, donc on peut aussi prendre

$$k_{xy}^{sand}(f, \mathcal{C}) = k_{xz}^{sand}(f, \mathcal{C}) = k_{yz}^{sand}(f, \mathcal{C}) = 1. \quad (5.50)$$

Pour les sphéroïdes allongés ou aplatis ainsi que les ellipsoïdes généraux, nous allons utiliser les mêmes interpolations que pour les coefficients  $h_{ij}$ , mais les approximations obtenues ne sont pas validées numériquement.

### Cas d'un sphéroïde allongé

En se référant à l'expression (5.18) de la section 5.2.4.3, on prend :

$$\begin{cases} k_{xy}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) &= 1 - e_{xz}^{30} + e_{xz}^{30} k_{xy}^{cyl}(f, \mathcal{C}) \\ k_{xz}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) &= k_{xy}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}), \quad k_{yz}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = 1 \end{cases} \quad (5.51)$$

### Cas d'un sphéroïde aplati

En se référant à l'expression (5.20) de la section 5.2.4.4, on prend :

$$k_{xy}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = k_{xz}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = k_{yz}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) = (1 - e_{xz}^{50}) k_{xy}^{sph} + e_{xz}^{50} k_{xy}^{sand} = 1 \quad (5.52)$$

## Cas d'un ellipsoïde général

$$k_{ij}(f, e_{xz}, k, \mathcal{C}) = (1 - k)k_{ij}^{prol}(f, e_{xz}, \mathcal{C}) + k k_{ij}^{obl}(f, e_{xz}, \mathcal{C}), \quad (i, j) \in \{(x, y), (x, z), (y, z)\} \quad (5.53)$$

## 5.4 Évolution des axes et des directions principales d'une cavité ellipsoïdale

$\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$  donnent respectivement les taux de déformation et de rotation du vide mais pas le taux de déformation de ses demi-axes ni le taux de rotation de ses directions principales, qui sont ceux qui nous intéressent ; en fait  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$  sont des taux de déformation et de rotation de vecteurs matériels alors que les directions principales ne sont pas des vecteurs matériels. Le taux de déformation et le taux de rotation peuvent être calculés à partir de  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$  (voir [Aravas et Ponte-Castaneda, 2004]) mais le taux de rotation des directions principales diverge dans la limite où deux demi-axes deviennent confondus, ce qui est très gênant dans l'implémentation numérique du modèle.

On va voir qu'on peut résoudre ce problème numérique en déterminant l'évolution d'une autre grandeur caractérisant l'ellipsoïde, dont l'évolution ne fera apparaître aucune singularité dans la limite où deux demi-axes deviennent confondus, et à partir de laquelle il est facile de déterminer les demi-axes et directions principales.

Considérons une cavité ellipsoïdale centrée en  $O$ , de demi-axes  $a, b, c$  et de directions principales engendrées par les vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c$ . Cette cavité ellipsoïdale peut être caractérisée par l'équation :

$$\mathcal{P}(\mathbf{OM}) = \frac{(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_a)^2}{a^2} + \frac{(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_b)^2}{b^2} + \frac{(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_c)^2}{c^2} = 1 \quad (5.54)$$

où  $M$  est un point de l'ellipsoïde. Notons  $\mathbf{P} = (P_{ij})_{\{1 \leq i, j \leq 3\}}$  la matrice symétrique de la forme quadratique ainsi définie, dans le repère fixe de l'observateur. Les valeurs propres de cette matrice et les vecteurs propres associés sont respectivement les inverses des carrés des demi-axes et les directions principales de l'ellipsoïde.

Le taux de déformation de l'ellipsoïde est considéré comme homogène ; dans ces conditions le centre  $O$  de cet ellipsoïde suivi dans son mouvement reste le centre,  $M$ , point quelconque de son bord suivi dans son mouvement, reste sur son bord, et par conséquent  $\mathcal{P}(\mathbf{OM})$  reste constamment égal à 1, donc sa dérivée par rapport à  $t$  est nulle. Ceci se traduit par :

$$\frac{d\mathcal{P}(\mathbf{OM})}{dt} = \dot{P}_{ij}u_iu_j + P_{ij}\dot{u}_iu_j + P_{ij}u_i\dot{u}_j = 0 \quad (5.55)$$

où  $(u_1, u_2, u_3)$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{OM}$  dans la base fixe. En utilisant la relation classique, applicable puisque  $\mathbf{OM}$  est un vecteur matériel (suivi dans son mouvement) :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = (\mathbf{D}^v + \mathbf{\Omega}^v) \cdot \mathbf{OM}, \quad (5.56)$$

on trouve la dérivée des composantes  $u_i$ , qui s'écrit :

$$\dot{u}_i = (D_{ik}^v + \Omega_{ik}^v)u_k \quad (5.57)$$

En remplaçant  $\dot{u}_i$  et  $\dot{u}_j$  par leurs expressions dans l'équation (5.56), on obtient :

$$\dot{P}_{ij}u_iu_j + P_{ij}(D_{ik}^v + \Omega_{ik}^v)u_ku_j + P_{ij}(D_{jk}^v + \Omega_{jk}^v)u_iu_k = 0 \quad (5.58)$$

En échangeant les indices  $i$  et  $k$ ,  $j$  et  $k$  respectivement dans les deuxième et troisième termes de l'équation (5.58), on obtient

$$[\dot{P}_{ij} + P_{kj}(D_{ki}^v + \Omega_{ki}^v) + P_{ik}(D_{kj}^v + \Omega_{kj}^v)]u_iu_j = 0 \quad (5.59)$$

Comme le vecteur  $\mathbf{OM}$  prend toutes les directions de l'espace quand  $M$  parcourt l'ellipsoïde, il s'ensuit que :

$$\dot{P}_{ij} + P_{kj}(D_{ki}^v + \Omega_{ki}^v) + P_{ik}(D_{kj}^v + \Omega_{kj}^v) = 0, \quad (5.60)$$

relation qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\dot{P}_{ij} + ({}^tD_{ik}^v + {}^t\Omega_{ik}^v)P_{kj} + P_{ik}(D_{kj}^v + \Omega_{kj}^v) = 0 \quad (5.61)$$

d'où l'on déduit l'expression de la dérivée  $\dot{\mathbf{P}}$  en fonction de  $\mathbf{P}$  et des tenseurs  $\mathbf{D}^v$  et  $\mathbf{\Omega}^v$  :

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{D}^v + \mathbf{\Omega}^v) - {}^t(\mathbf{D}^v + \mathbf{\Omega}^v) \cdot \mathbf{P} \quad (5.62)$$

On voit que cette équation d'évolution ne présente, comme annoncé, aucune singularité dans la limite où deux demi-axes de la cavité deviennent égaux.

Dans un calcul de structure utilisant le modèle proposé, la procédure numérique se résumera comme suit :

1. Les demi-axes et vecteurs directeurs unitaires initiaux seront introduits comme données via la matrice  $\mathbf{P}$  initiale.
2. L'équation (5.62) sera utilisée pour actualiser la matrice  $\mathbf{P}$  aux instants successifs du calcul.
3. A chaque instant la diagonalisation de  $\mathbf{P}$  fournira  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{e}_b$ ,  $\mathbf{e}_c$ .

Il est à noter que la dégénérescence possible (coïncidence de deux ou trois valeurs propres de  $\mathbf{P}$ ) subsistera bien sûr, mais ne posera aucun problème à la routine de diagonalisation, qui fera un choix arbitraire de certains axes principaux en cas de dégénérescence.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord rappelé les lois d'évolution, obtenues avec une approche variationnelle par [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998], pour les taux de déformation et de rotation d'un vide ellipsoïdal contenu dans un milieu linéairement visqueux.

Ensuite nous avons proposé des modifications heuristiques de ces lois applicables aux matériaux parfaitement plastiques. Les coefficients de correction introduits dans les lois élastiques ont été déterminés numériquement en réalisant des calculs par la méthode des éléments finis sur des vides sphéroïdaux allongés et aplatis, cylindriques et ellipsoïdaux, pour certains types "représentatifs" de chargements.

Par ailleurs, la loi décrivant l'évolution de la rotation du vide n'a pas été validée complètement ; pour le faire, il faudrait réaliser des simulations numériques supplémentaires pour des chargements en cisaillement sur des cellules sphéroïdales et ellipsoïdales.



## Chapitre 6

# Algorithme de projection locale pour le critère de Hill et implémentation dans le code SYSTUS<sup>®</sup>

---

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	124
6.2	Modèle de plasticité de Tsai-Hill pour les solides anisotropes . .	124
6.3	Solution des problèmes de plasticité par la méthode des éléments finis . . . . .	125
6.4	Algorithme implicite de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge de Tsai-Hill . . . . .	126
6.5	Calcul de la matrice tangente élastoplastique . . . . .	129
6.6	Validation de l'implémentation numérique du critère de Tsai-Hill	130
6.6.1	Essais de traction . . . . .	130
6.6.2	Sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique . . . . .	133
6.7	Équivalence entre les équations de l'analyse-limite avec une plasticité anisotrope et celles du problème d'éléments finis . . .	135
6.8	Conclusion . . . . .	136

---

## 6.1 Introduction

Les matériaux ont souvent des propriétés mécaniques directionnelles. Il est important de prendre en compte l'anisotropie éventuelle pour pouvoir bien dimensionner les structures.

Ce chapitre est consacré à la numérisation du critère de Tsai-Hill adapté aux solides anisotropes, pour un comportement élastoplastique parfait. On proposera un nouvel algorithme de résolution des équations constitutives de ce modèle, ainsi qu'une implémentation dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS<sup>®</sup>.

Ce chapitre est un premier pas vers l'implémentation numérique du critère proposé dans les chapitres 2 et 3, puisqu'on pourra s'inspirer de l'algorithme proposé pour le critère de Tsai-Hill pour traiter le terme quadratique anisotrope figurant dans le critère.

De plus, non seulement on peut envisager des applications directes de l'implémentation réalisée à des structures constituées de matériaux anisotropes (laminage de plaques par exemple), mais surtout on peut envisager de refaire des calculs de cellules analogues à ceux présentés dans les chapitres 3, 4, et 5 mais avec des matrices anisotropes, pour assister le développement de modèles pour les matériaux poreux ductiles prenant en compte la forme des cavités *et* l'anisotropie plastique de la matrice.

## 6.2 Modèle de plasticité de Tsai-Hill pour les solides anisotropes

Les équations constitutives du modèle de plasticité de Tsai-Hill comprennent l'expression de la déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et celles du critère de plasticité et de la loi d'écoulement associée. Pour simplifier, on suppose que la température est constante et on raisonne en petites transformations (hypothèse des petites perturbations), l'extension aux grandes transformations ne posant pas de problème particulier.

L'hypothèse classique de partition de la déformation totale stipule que cette déformation peut être décomposée en une déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et une déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (6.1)$$

La déformation élastique est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (6.2)$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur des modules élastiques.

La déformation plastique est fournie par les équations de plasticité. La première est le critère de plasticité de Tsai-Hill pour les matériaux anisotropes qui s'écrit sous la forme :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{F} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} - 1 \leq 0 \quad (6.3)$$

où  $\mathbb{F}$  est un tenseur d'ordre quatre décrivant à l'anisotropie plastique et  $\mathbf{H}$  un tenseur d'ordre deux introduisant une dissymétrie traction-compression. Lorsque le tenseur  $\mathbf{H}$  est nul, l'équation (6.3) se réduit au critère quadratique de Hill [Hill, 1948].

Le tenseur  $\mathbb{F}$  présente les symétries mineure ( $F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{ijlk}$ ) et majeure ( $F_{ijkl} = F_{klij}$ ). De plus le critère de Hill est basé sur les hypothèses d'incompressibilité et d'existence d'axes d'orthotropie du matériau.

La deuxième équation de plasticité est la loi d'écoulement associée par normalité au critère. Elle s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \eta (2\mathbb{F} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H}) \quad (6.4)$$

où le multiplicateur plastique  $\eta$  est nul si  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) < 0$  (charge élastique), positif ou nul si  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  (charge plastique).

### 6.3 Solution des problèmes de plasticité par la méthode des éléments finis

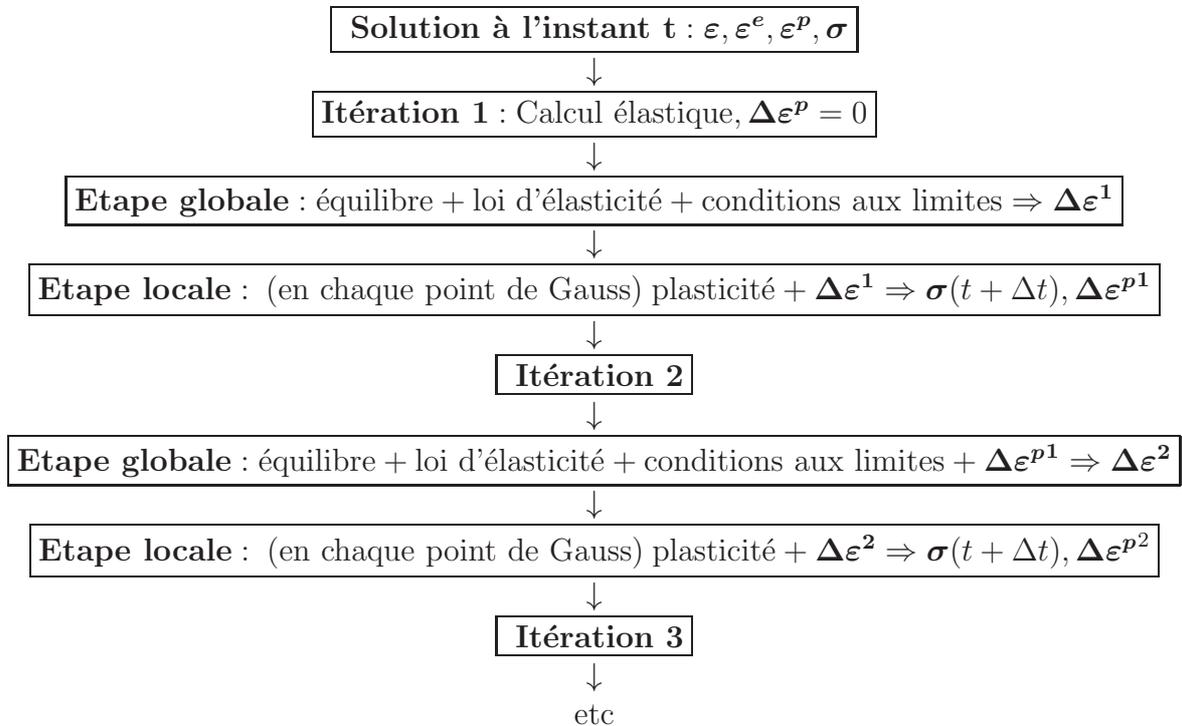
Nous adoptons la méthode pas à pas pour résoudre les équations du problème élastoplastique. Le problème consiste à déterminer les quantités mécaniques à l'instant  $t + \Delta t$  connaissant celles à l'instant  $t$ .

Puisque les équations sont non linéaires, la solution ne peut être obtenue directement comme pour des problèmes d'élasticité, donc nous allons utiliser une méthode itérative. Chaque itération est composée de deux étapes : une étape globale et une étape locale.

L'**étape globale** consiste à calculer les déplacements aux nœuds de la structure ainsi que les déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et les contraintes,  $\boldsymbol{\sigma}$  aux points de Gauss, en supposant connu en tout point l'incrément de déformation plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Au cours de la première itération, on suppose la valeur de cet incrément nulle (calcul purement élastique) ; et elle prend la valeur trouvée à la fin de l'itération précédente au cours des itérations ultérieures. Cette étape utilise les équations d'équilibre, la loi de comportement élastique et les conditions aux limites, ce qui entraîne la résolution d'un problème linéaire sur l'ensemble de la structure. Cependant, les équations de plasticité ne sont pas utilisées au cours de cette étape.

Au cours de l'**étape locale**, on considère comme donnée, en chaque point de Gauss, la déformation totale finale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (ou bien son incrément  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ) qui résulte de l'étape globale précédente, puis on calcule les incréments de déformation élastique et plastique,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , ainsi que la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , en utilisant les équations de plasticité. Au cours de cette étape, il n'est fait usage ni des équations d'équilibre, ni des conditions aux limites, ce qui exclut toute résolution d'un système linéaire sur l'ensemble de la structure. L'algorithme est effectué aux différents points d'intégration indépendamment les uns des autres.

Le schéma suivant résume les différentes étapes de la méthode.



**Remarque :** La présentation qui précède est quelque peu simplifiée ; elle ne correspond exactement à l'algorithme effectivement utilisé que lorsque le calcul est effectué avec une matrice-tangente purement élastique, ce qui n'est pas toujours le cas. Mais l'usage d'une autre matrice-tangente change peu de choses sur le fond.

La programmation de l'étape globale est complexe, mais on n'a pas à s'en soucier lors de l'implantation d'un nouveau modèle de plasticité, car elle est complètement indépendante du modèle utilisé et est réalisée automatiquement par le code de calcul par éléments finis. Nous allons juste nous focaliser sur l'étape locale.

## 6.4 Algorithme implicite de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge de Tsai-Hill

Un matériau de Hill étant un matériau standard généralisé, l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection du prédicteur élastique (défini ci-dessous) sur la surface de charge sont assurées si l'on adopte un schéma de discrétisation *implicite* par rapport aux variables internes (les composantes de la déformation plastique) [Halphen et Nguyen, 1975]. On adopte donc un tel schéma.

Dans le cas du critère de von Mises, la propriété classique de colinéarité des déviateurs des contraintes avant et après correction plastique simplifie les choses et permet de réduire le problème à la résolution (par la méthode de Newton) d'une seule équation à une inconnue.

On verra que pour le critère de Hill, la propriété de colinéarité n'est plus satisfaite, mais que néanmoins le caractère quadratique du critère permet encore de se ramener à une seule équation à une seule inconnue (le multiplicateur plastique).

Nous nous intéressons au problème incrémental entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Dans la suite les quantités à l'instant  $t$  seront munies d'un indice supérieur  $(0)$  et celles à l'instant  $t + \Delta t$  seront sans indice. Les quantités connues sont  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$  et  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  (incrément de déformation totale entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ ). Nous introduisons une nouvelle quantité connue  $\boldsymbol{\sigma}^*$  définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.5)$$

La quantité  $\boldsymbol{\sigma}^*$  est appelée *prédicteur élastique*, c'est la valeur du tenseur des contraintes à  $t + \Delta t$ , en supposant l'incrément de déformation totale purement élastique. Nous allons l'utiliser plutôt que  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$  et  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  pris séparément.

Notre objectif est de calculer les incréments de déformation élastique et plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , le multiplicateur plastique  $\Delta\eta$  et le tenseur des contraintes final  $\boldsymbol{\sigma}$ . En utilisant la loi d'élasticité (6.2) et l'hypothèse de partition (6.1), on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \boldsymbol{\sigma}^* - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (6.6)$$

La quantité  $\mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est appelée *correcteur plastique*. C'est la correction qu'il faut apporter au prédicteur élastique pour obtenir le tenseur des contraintes final  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Pour pouvoir numériser les équations, nous ferons usage de la notation de Voigt. Les tenseurs d'ordre quatre sont considérés comme des matrices  $6 \times 6$  et ceux d'ordre deux comme des vecteurs à 6 lignes. La forme matricielle des équations constitutives du modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \mathbb{C} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\eta(2\mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H}) \\ \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = {}^t \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} - 1 = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Ces équations constituent un système non-linéaire comportant sept inconnues (les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\Delta\eta$ ). La méthode de résolution exposée ci-dessous est applicable quel que soit le vecteur  $\mathbf{H}$ , bien qu'en pratique nous ne l'ayons appliquée qu'au critère de Hill (voir section 6.6).

En reportant l'équation (6.7)<sub>2</sub> dans l'équation (6.7)<sub>1</sub>, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - 2\Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbf{H}$$

Ceci implique que :

$$(\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbb{F}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbf{H} \quad (6.8)$$

où  $\mathbb{I}$  désigne le tenseur identité, d'où l'on déduit que :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbb{F})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* - \Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbf{H}) \quad (6.9)$$

En reportant ce résultat dans (6.7)<sub>3</sub>, on obtient l'équation suivante sur la seule inconnue  $\Delta\eta$ , à résoudre par la méthode de Newton :

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta) &= {}^t[(\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C}.\mathbb{F})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* - \Delta\eta \mathbb{C}.\mathbf{H})] \cdot \mathbb{F} \cdot [(\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C}.\mathbb{F})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* \\ &- \Delta\eta \mathbb{C}.\mathbf{H})] + \mathbf{H} \cdot [(\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C}.\mathbb{F})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* - \Delta\eta \mathbb{C}.\mathbf{H})] - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Une fois  $\Delta\eta$  connu, on peut remonter à  $\boldsymbol{\sigma}$  grâce à (6.9) et ensuite à  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  grâce à (6.7)<sub>2</sub>.

### Dérivée de la fonction $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta)$ par rapport à $\Delta\eta$

Pour la résolution par la méthode de Newton nous avons besoin de l'expression de la dérivée de la fonction  $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta)$  par rapport à  $\Delta\eta$  à  $\boldsymbol{\sigma}^*$  fixé. Cette dérivée peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\eta} \quad (6.11)$$

La dérivée  $\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  a pour expression :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2\mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H} \quad (6.12)$$

Il reste maintenant à déterminer l'expression de  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\eta}$ . En dérivant l'équation (6.8) par rapport à  $\Delta\eta$ , on obtient :

$$2\mathbb{C}.\mathbb{F}\boldsymbol{\sigma} + (\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C}.\mathbb{F}) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\eta} = -\mathbb{C}.\mathbf{H}, \quad (6.13)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\eta} = -(\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C}.\mathbb{F})^{-1} \cdot (2\mathbb{C}.\mathbb{F}\boldsymbol{\sigma} + \mathbb{C}.\mathbf{H}) \quad (6.14)$$

### Initialisation de $\Delta\eta$

Pour obtenir une convergence rapide de la méthode de Newton, nous proposons une initialisation appropriée de la variable  $\Delta\eta$ .

La valeur initiale de cette variable, au lieu d'être prise nulle comme habituellement sera remplacée par une valeur  $\Delta\eta_{\text{iso}}$  déduite en remplaçant le matériau réel anisotrope par un matériau isotrope fictif "proche" ; l'hypothèse d'isotropie permet d'obtenir immédiatement une valeur explicite de  $\Delta\eta$  sans résolution d'équation.

Pour un matériau isotrope, le critère (6.7) est celui de von Mises. On obtient alors :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = {}^t \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} - 1 = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} - 1 = \frac{3}{2\sigma_0^2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - 1 \quad (6.15)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}'$  est le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$ , d'où l'on tire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_0^2} \quad (6.16)$$

De plus, toujours dans le cas isotrope, la contrainte après correction plastique est liée au prédicteur élastique par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (6.17)$$

où  $\mu$  est le coefficient élastique de cisaillement (deuxième coefficient de Lamé). En prenant le déviateur de cette équation et en utilisant l'équation (6.16), on trouve :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^{*'} - 6\mu\Delta\eta_{\text{iso}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_0^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{6\mu}{\sigma_0^2}\Delta\eta_{\text{iso}}\right)\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^{*'} \quad (6.18)$$

En prenant la norme de von Mises des deux membres de l'équation (6.18), on obtient :

$$\left(1 + \frac{6\mu}{\sigma_0^2}\Delta\eta_{\text{iso}}\right)\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^* \quad (6.19)$$

d'où la valeur initiale, "isotrope", de  $\Delta\eta$  :

$$\Delta\eta_{\text{iso}} = \frac{\sigma_0^2}{6\mu} \left(\frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_{eq}} - 1\right) \quad (6.20)$$

Cette équation est appliquée en pratique en prenant  $\mu = C_{1212}$ ,  $\sigma_0^2 = F_{1111}^{-1}$  et  $\sigma_{eq} = \sigma_0 = F_{1111}^{-1/2}$  (c'est-à-dire pour un matériau isotrope fictif présentant les mêmes coefficients  $C_{1212}$  et  $F_{1111}$  que le matériau réel anisotrope).

## 6.5 Calcul de la matrice tangente élastoplastique

La convergence de l'algorithme itératif est facilitée si l'étape globale est réalisée en utilisant la matrice tangente élastoplastique  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Cette matrice peut être décomposée sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.21)$$

En dérivant l'équation (6.5) par rapport à  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C} \quad (6.22)$$

Par ailleurs, comme  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta(\boldsymbol{\sigma}^*)]$ , en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées, on obtient pour la dérivée  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}$  :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}[\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta(\boldsymbol{\sigma}^*)] = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}|_{\Delta\eta \text{ fixé}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta\eta} \cdot \frac{\partial \Delta\eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \quad (6.23)$$

La dérivation de l'équation (6.9) par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}^*$  à  $\Delta\eta$  fixé donne

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \Big|_{\Delta\eta \text{ fixé}} = (\mathbb{I} + 2\Delta\eta \mathbb{C} \cdot \mathbb{F})^{-1} \quad (6.24)$$

De plus la dérivée  $\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \Delta\eta$  est donnée par l'équation (6.14). Enfin le critère stipule que  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\Phi}[\boldsymbol{\sigma}^*, \Delta\eta(\boldsymbol{\sigma}^*)] = 0$  quel que soit  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , par conséquent

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \Big|_{\Delta\eta \text{ fixé}} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta\eta} \frac{\partial \Delta\eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0.$$

Ceci implique que :

$$\frac{\partial \Delta\eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \Big|_{\Delta\eta \text{ fixé}}}{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta\eta}} \quad (6.25)$$

où l'on remarque que la quantité figurant au dénominateur n'est autre que la pente de la méthode de Newton.

Les équations (6.21), (6.22), (6.23), (6.24) et (6.25) permettent le calcul de la matrice-tangente  $\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ .

## 6.6 Validation de l'implémentation numérique du critère de Tsai-Hill

Afin de tester l'implémentation du modèle dans le code SYSTUS, nous allons considérer deux problèmes de plasticité : celui d'un cube soumis à des essais de traction dans les trois directions et celui d'une sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique.

### 6.6.1 Essais de traction

Nous considérons un cube d'arête 1 mm dont le matériau constitutif obéit au critère quadratique de Hill. Les limites d'élasticité dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement  $\sigma_1 = 1000$  MPa,  $\sigma_2 = 900$  MPa et  $\sigma_3 = 800$  MPa. Le but est ici d'une part de retrouver ces limites d'élasticité en effectuant des chargements uniaxiaux dans les trois directions, et d'autre part de vérifier la loi d'écoulement associée. Compte tenu des symétries, on ne maille qu'un huitième du cube.

Le tenseur de Hill  $\mathbb{F}$  s'exprime de la manière suivante en fonction des limites d'élasticité  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , compte tenu de la condition d'incompressibilité :

$$\begin{aligned} F_{1111} &= \frac{3}{2\sigma_0^2} \frac{1}{\sigma_1^2}, & F_{2222} &= \frac{3}{2\sigma_0^2} \frac{1}{\sigma_2^2}, & F_{3333} &= \frac{3}{2\sigma_0^2} \frac{1}{\sigma_3^2} \\ F_{1122} &= \frac{3}{4\sigma_0^2} \left( \frac{1}{\sigma_3^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \\ F_{1133} &= \frac{3}{4\sigma_0^2} \left( \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \\ F_{2233} &= \frac{3}{4\sigma_0^2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

On n'a pas besoin des composantes  $F_{1212}$ ,  $F_{1313}$  et  $F_{2323}$ . Elles sont cependant prises égales à  $3.3333 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-4}$ .

Les chargements sont imposés via les liaisons qui sont différentes dans chaque cas comme on peut le voir sur les figures 6.1, 6.2 et 6.3. Les trois rectangles au niveau de chaque nœud représentent les valeurs de  $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$  qui lui sont imposées. La couleur blanche dans un rectangle signifie que le degré de liberté associé est laissé libre. Pour dépouiller les résultats, on regarde les trois composantes du déplacement du nœud 7 qui n'appartient à aucun des trois plans de symétrie.

### Solution pour la traction dans la direction $x$

Le cube est soumis à un déplacement  $U_x$  égal à 0.01 mm dans la direction  $x$ .

La valeur de la contrainte  $\sigma_{xx}$  obtenue est de 1000 MPa. C'est exactement la valeur de la limite d'élasticité  $\sigma_1$  donnée.

Les calculs analytiques sur la loi d'écoulement donnent :

$$\frac{\varepsilon_{yy}^p}{\varepsilon_{zz}^p} = \frac{F_{2211}}{F_{3311}} = 0.506 \quad (6.27)$$

Le calcul numérique donne les valeurs  $-0.3364$  mm et  $-0.6636$  mm respectivement pour les déplacements  $U_y$  et  $U_z$  du nœud 7, ce qui implique :

$$\frac{\varepsilon_{yy\text{num}}^p}{\varepsilon_{zz\text{num}}^p} = 0.507 \quad (6.28)$$

### Solution pour la traction dans la direction $y$

Le cube est soumis à un déplacement  $U_y$  égal à 0.01 mm dans la direction  $y$ .

La valeur de la contrainte  $\sigma_{yy}$  obtenue est de 900 MPa. C'est exactement la valeur de la limite d'élasticité  $\sigma_2$  donnée.

Les calculs analytiques sur la loi d'écoulement donnent :

$$\frac{\varepsilon_{xx}^p}{\varepsilon_{zz}^p} = \frac{F_{1122}}{F_{3322}} = 0.374 \quad (6.29)$$

Le calcul numérique donne les valeurs  $-0.2727$  mm et  $-0.7273$  mm respectivement pour les déplacements  $U_x$  et  $U_z$  du nœud 7, ce qui implique :

$$\frac{\varepsilon_{xx\text{num}}^p}{\varepsilon_{zz\text{num}}^p} = 0.375 \quad (6.30)$$

### Solution pour la traction dans la direction $z$

Le cube est soumis à un déplacement  $U_z$  égal à 0.01 mm dans la direction  $z$ .

La valeur de la contrainte  $\sigma_{zz}$  obtenue est de 800 MPa. C'est exactement la valeur de la limite d'élasticité  $\sigma_3$  donnée.

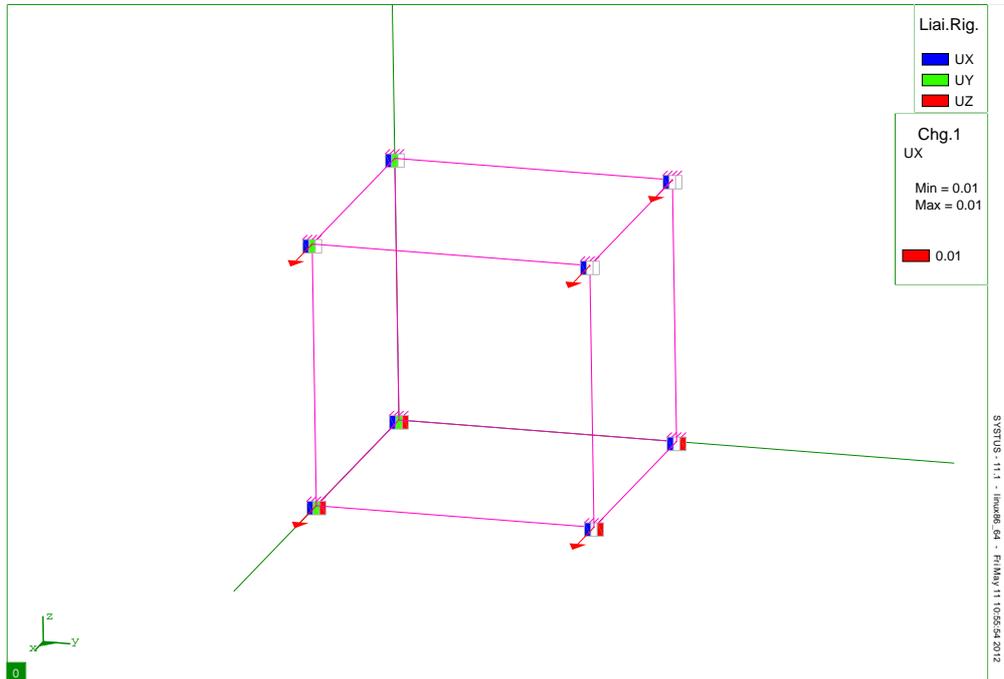


Figure 6.1: Traction dans la direction  $x$ .

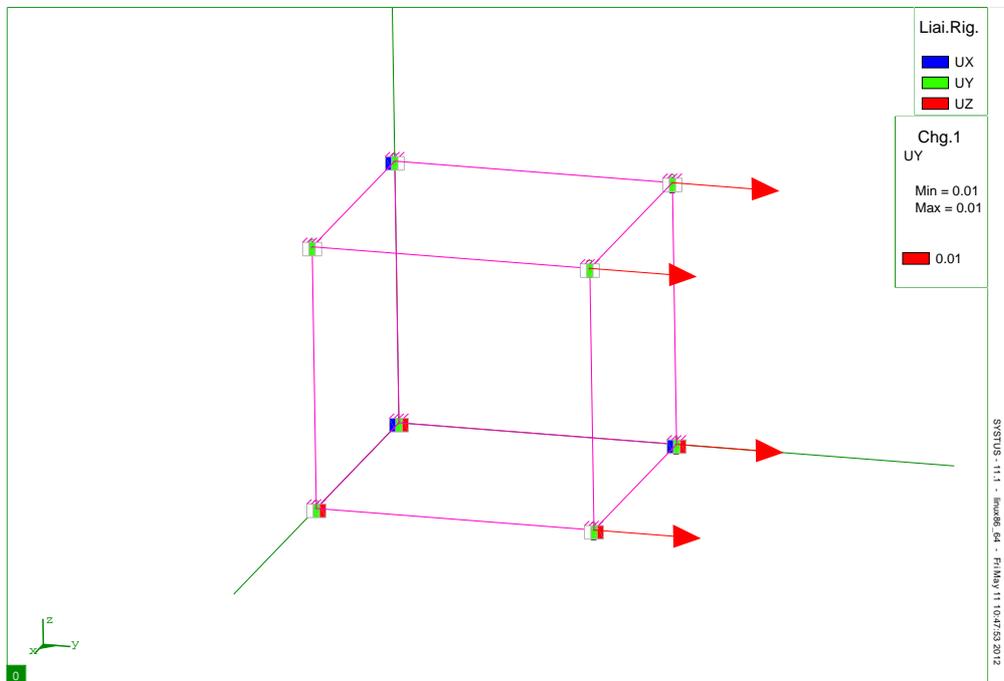


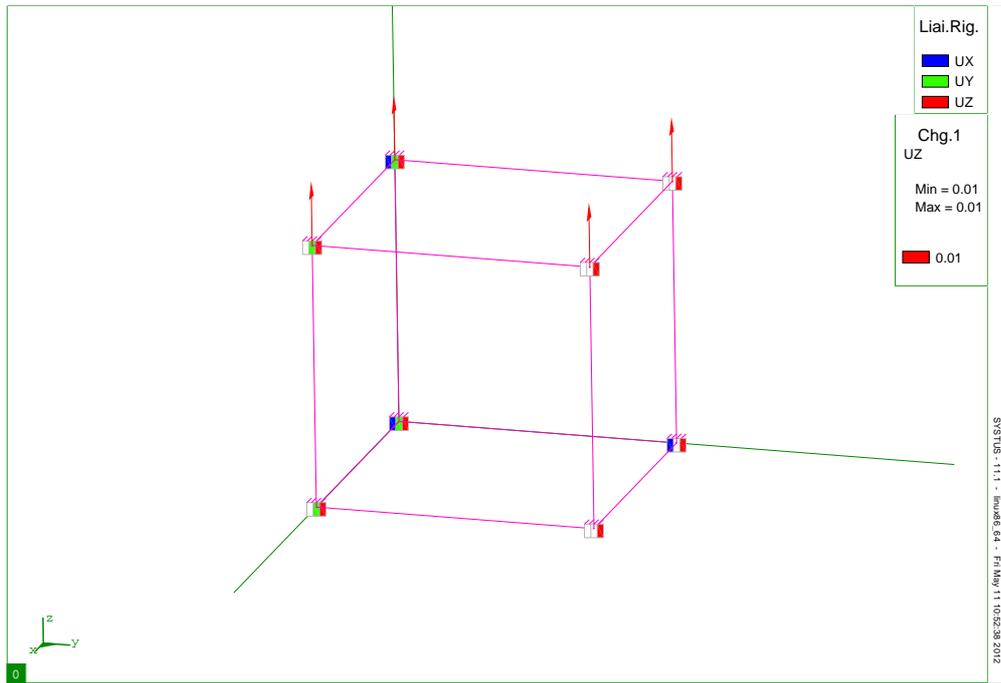
Figure 6.2: Traction dans la direction  $y$ .

Les calculs analytiques sur la loi d'écoulement donnent :

$$\frac{\varepsilon_{xx}^p}{\varepsilon_{yy}^p} = \frac{F_{1133}}{F_{2233}} = 0.739 \quad (6.31)$$

Le calcul numérique donne les valeurs  $-0.4251$  mm et  $-0.5749$  mm respectivement pour les déplacements  $U_x$  et  $U_y$  du noeud 7, ce qui implique :

$$\frac{\varepsilon_{xx}^p \text{ num}}{\varepsilon_{yy}^p \text{ num}} = 0.739 \quad (6.32)$$



**Figure 6.3:** Traction dans la direction  $z$ .

On voit que les trois essais de traction nous permettent de retrouver les limites d'élasticité; la loi de normalité est aussi vérifiée.

## 6.6.2 Sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique

Afin de tester l'algorithme de projection sur une structure complexe, nous considérons une cellule sphérique contenant un vide sphérique, de porosité 0.01. Le matériau constitutif de la matrice est rigide parfaitement plastique et obéit au critère quadratique de Hill. Les coefficients de Hill du matériau sont donnés par :

$$\begin{aligned} F_{1111} &= 1.222 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4}, & F_{2222} &= 0.950 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4}, & F_{3333} &= 0.832 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4} \\ F_{1122} &= -6.7 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-4}, & F_{1133} &= -5.52 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-4}, & F_{2233} &= -0.28 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4} \\ F_{1212} &= 6.115 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4}, & F_{1313} &= 1.902 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4}, & F_{2323} &= 0.3667 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-4} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Il s'agit d'un matériau imaginaire avec une anisotropie modérée.

Cette sphère est soumise à un chargement hydrostatique en contraintes via des conditions de déformation homogène au bord. Il n'y a pas de solution analytique du fait de l'anisotropie. Les déformations globales imposées pour réaliser le chargement hydrostatique sont :

$$D_{xx} = 0.009782, \quad D_{yy} = 0.011203, \quad D_{zz} = 0.006900 \quad (6.34)$$

On s'attendait à cet écart entre  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$  et  $D_{zz}$  du fait de l'anisotropie qui rompt la symétrie sphérique.

On peut observer sur la figure 6.4 la non uniformité de la déformation équivalente de von Mises autour de la cavité contrairement au cas isotrope.

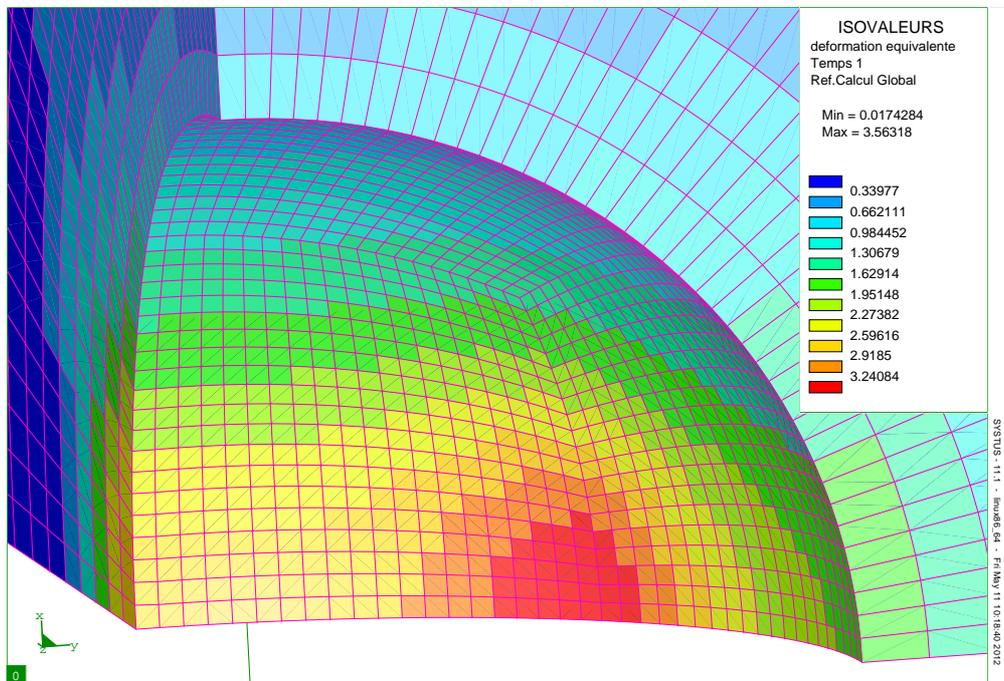


Figure 6.4: Répartition de la déformation équivalente dans la cellule sphérique

## 6.7 Équivalence entre les équations de l'analyse-limite avec une plasticité anisotrope et celles du problème d'éléments finis

Nous allons définir une procédure pour réaliser des calculs d'analyse-limite sur les mêmes cellules que dans les chapitres précédents, mais avec des matrices plastiquement anisotropes. Ces calculs pourront servir de support au développement d'un modèle de plasticité des matériaux ductiles poreux dont la matrice obéit au critère de Hill. Ils seront effectivement réalisés dans une thèse ultérieure.

Comme pour les matériaux isotropes, on va définir deux méthodes, la première exigeant de très grands pas, la seconde (sous certaines conditions) des pas plus modérés.

La première méthode consiste à faire, sans actualisation de la géométrie, un seul pas suffisamment grand pour que l'ordre de grandeur des déformations élastiques dans la structure soit très petit devant celui des déformations plastiques. La justification théorique de cette méthode a été donnée dans l'annexe E et n'est pas affectée par l'anisotropie plastique de la matrice.

Dans la seconde méthode, nous nous plaçons dans le cas particulier mais fréquent où la structure est entièrement plastifiée quand sa charge limite est atteinte. Les équations du problème théorique d'analyse-limite s'écrivent en adoptant les notations de l'annexe E :

$$\begin{cases} \Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ \mathbf{d} = \dot{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = 2\dot{\eta} \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\eta} > 0, \end{cases} \quad (6.35)$$

où  $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$  est la fonction de charge de Hill.

Dans le calcul numérique par la méthode des éléments finis, on utilise un matériau fictif quasi-incompressible élastiquement avec un tenseur de souplesse  $\mathbb{S}^{\text{mat}}$  proportionnel à la matrice de Hill :

$$\mathbb{S}^{\text{mat}} \simeq \alpha \mathbb{F}, \quad \alpha = \frac{1}{EF_{1111}} \quad (6.36)$$

où  $E$  est le module de Young du matériau (la valeur du coefficient  $\alpha$  est ajustée de sorte que les composantes de  $\mathbb{S}^{\text{mat}}$  soient de l'ordre de  $1/E$ ). Les termes diagonaux de  $\mathbb{S}^{\text{mat}}$  sont légèrement augmentés de sorte que la somme des éléments de chaque ligne soit légèrement supérieure à zéro. Le choix d'une telle matrice  $\mathbb{S}^{\text{mat}}$  (dont on verra l'importance plus loin) est possible car la charge limite est indépendante des caractéristiques élastiques du matériau.

Supposons que le problème élastoplastique est résolu en utilisant un seul pas de chargement suffisamment grand pour que la charge limite soit atteinte, mais pas nécessairement pour que la déformation élastique  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  soit très petite devant la déformation plastique  $\boldsymbol{\epsilon}^p$ . La déformation élastique finale  $\boldsymbol{\epsilon}^{e1}$  vaut  $\mathbb{S}^{\text{mat}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^1$ . Les équations du problème discrétisé s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0, \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 = \boldsymbol{\epsilon}^{e1} + \boldsymbol{\epsilon}^{p1} = \mathbb{S}^{\text{mat}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^1 + \Delta\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1) \simeq \alpha \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^1 + 2\Delta\eta \mathbb{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^1 \\ = \left[ \frac{\alpha}{2} + \Delta\eta \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1), \quad \Delta\eta > 0 \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Le facteur  $\left[ \frac{\alpha}{2} + \Delta\eta \right]$  est positif puisque  $\alpha$  et  $\Delta\eta$  sont positifs. Il s'ensuit que les systèmes d'équations (6.35) et (6.37) sont équivalents avec les correspondances  $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$  et  $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$  (la raison pour laquelle cette équivalence ne tient que pour une structure entièrement plastifiée lorsque sa charge limite est atteinte, est que si ce n'est pas le cas, le facteur  $\left[ \frac{\alpha}{2} + \Delta\eta \right]$  est positif partout tandis que le multiplicateur  $\dot{\eta}$  ne l'est qu'aux points où le critère est atteint). Il suffit donc d'un pas suffisamment grand pour que cette charge la limite soit atteinte, mais pas que la déformation élastique soit négligeable devant la déformation plastique.

## 6.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'implémentation du critère quadratique de Hill dans le code SYSTUS. Le système des sept équations à sept inconnues du problème de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge a été réduit à une seule équation ayant comme inconnue le multiplicateur plastique. Cette équation est résolue par la méthode de Newton. Cet algorithme pour le critère de Hill servira de base à un algorithme pour le modèle proposé dans les chapitres 2 et 3.

Le critère a été évalué sur deux cas tests. Nous avons d'abord réalisé des essais de traction sur un cube afin de vérifier les limites d'élasticité dans les trois directions du matériau et la loi de normalité. Le problème d'une cellule sphérique soumise à un chargement hydrostatique en contraintes a ensuite été étudié. La solution a mis en évidence la perte de la symétrie sphérique due à l'anisotropie.

Nous avons mis au point finalement une technique étendant celle exposée dans l'annexe E, permettant de faire des calculs d'analyse-limite avec des matrices anisotropes.

# Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire a porté sur la modélisation de la plasticité des matériaux ductiles poreux contenant des cavités ellipsoïdales générales et sur la modélisation des lois d'évolution de ces cavités.

Dans le chapitre 1, à caractère bibliographique, nous avons présenté d'une part les mécanismes de ruine des matériaux ductiles, d'autre part la méthode d'analyse-limite et les modèles de plasticité de milieux poreux dérivant de cette méthode. L'accent a été mis sur le modèle GLD de [Gologanu *et al.*, 1997], [Gologanu, 1997] applicable aux cavités sphéroïdales allongées et aplaties.

Tirant inspiration du modèle GLD, nous avons proposé dans le chapitre 2 une extension de ce modèle à des cavités ellipsoïdales générales, en utilisant les champs de vitesse récemment découverts par [Leblond et Gologanu, 2008] satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux. Le critère obtenu est globalement semblable au critère GLD pour des cavités sphéroïdales aplaties. Il est constitué d'un terme fonction quadratique des composantes du tenseur des contraintes macroscopiques, et d'un terme où apparaît un cosinus hyperbolique caractéristique (comme dans le critère de Gurson) dont l'argument est une forme linéaire des composantes diagonales du tenseur des contraintes macroscopiques. Ce critère contient des coefficients dont la détermination n'est pas encore complète à ce stade.

La détermination de ces coefficients a fait l'objet du chapitre 3. Afin d'obtenir les meilleures expressions explicites possibles des coefficients, l'analyse-limite du chapitre 2 a été améliorée. Les améliorations sont de deux types :

- Pour des chargements hydrostatiques, le champ de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008] a été remplacé par le champ supposé exact, déterminé numériquement par la méthode des éléments finis. Cette démarche est licite car les approximations faites dans le chapitre 2, ainsi que les liens existant entre les coefficients du critère proposé et les champs de vitesse, ne sont pas liés à la forme analytique précise des champs de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008] mais uniquement à certaines de leurs caractéristiques mathématiques générales.
- Pour des chargements déviatoriques, on a fait usage des résultats de la théorie de l'homogénéisation non-linéaire de [Ponte-Castaneda, 1991], [Willis, 1991], [Michel et Suquet, 1992] pour déterminer au mieux les coefficients de la forme quadratique.

Une fois le critère entièrement déterminé, nous l'avons comparé à certains résultats exacts ou approximations classiques disponibles dans la littérature.

La validation numérique complète du critère proposé a été faite dans le chapitre 4. Nous avons fait des calculs d'analyse-limite par éléments finis sur diverses cellules pour les mêmes conditions aux limites que celles utilisées pour obtenir le modèle. Les surfaces de charge numériques ont été comparées aux prédictions du modèle. Dans le cas des cellules sphéroïdales allongées ou aplaties (y compris les fissures), la surface de charge du modèle proposé a été aussi comparée à celle du modèle GLD. Le modèle proposé reproduit bien les résultats numériques, et ceux du modèle GLD dans le cas sphéroïdal.

Le chapitre 5 a été consacré à la modélisation de l'évolution des axes et des directions principales d'un vide ellipsoïdal (paramètres internes du modèle). Nous avons proposé des corrections heuristiques des lois donnant les taux de déformation et de rotation d'une cavité ellipsoïdale contenue dans un milieu élastique, proposées par Kailasam et Ponte-Castaneda [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998]. On a ensuite montré comment obtenir, à partir de ces taux, l'évolution de la forme quadratique donnant l'équation de l'ellipsoïde ; le calcul pas à pas de cette évolution, suivi de la diagonalisation de cette forme quadratique, permet de déterminer à tout instant les demi-axes et directions principales du vide en évitant les problèmes liés à la divergence du taux de rotation de ces directions dans le cas où deux ou trois demi-axes deviennent confondus.

Le chapitre 6 est consacré à l'implémentation du critère de Tsai-Hill dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS. En adoptant un algorithme d'Euler implicite, nous avons réduit le système des sept équations à sept inconnues du problème de projection du prédicteur élastique sur la surface de charge à une seule équation ayant comme inconnue le multiplicateur plastique, qui est résolue par la méthode de Newton.

Cet algorithme servira de base dans la définition d'un algorithme analogue pour l'implémentation du critère proposé dans les chapitres 2 et 3.

De plus, l'implémentation du critère de Tsai-Hill permettra de réaliser des calculs de cellule analogues à ceux des chapitres 2, 3, 4 et 5, mais avec des matrices plastiquement anisotropes, de manière à étendre le modèle à de telles matrices. Ces travaux feront l'objet de la thèse de Léo Morin.

## Annexe A

# Champs de vitesse de [Leblond et Gologanu, 2008]

---

On va rappeler brièvement l'étude des champs de vitesse incompressibles satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux.

Une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux est représentée, en coordonnées ellipsoïdales, par la famille des surfaces iso- $\lambda$  notées  $\mathcal{E}_\lambda$ . Il s'ensuit que le champ de vitesse recherché doit être de la forme (2.14) pour une certaine famille de tenseurs symétriques du second ordre  $\mathbf{D}(\lambda)$ . En calculant la divergence de ce champ, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = & \operatorname{tr} \mathbf{D}(\lambda) + \frac{2}{T} \left[ \frac{dD_{xx}}{d\lambda}(\lambda) \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{dD_{yy}}{d\lambda}(\lambda) \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{dD_{zz}}{d\lambda}(\lambda) \frac{z^2}{c^2+\lambda} \right. \\ & + \frac{dD_{xy}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} \right) xy + \frac{dD_{yz}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right) yz \\ & \left. + \frac{dD_{zx}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{c^2+\lambda} + \frac{1}{a^2+\lambda} \right) zx \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

En écrivant la condition d'incompressibilité sous la forme  $T \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$  et en regroupant les termes en  $x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{a^2+\lambda} \frac{dD_{xx}}{d\lambda}(\lambda) + \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2} \right] x^2 + \left[ \frac{2}{b^2+\lambda} \frac{dD_{yy}}{d\lambda}(\lambda) + \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}(\lambda)}{(b^2+\lambda)^2} \right] y^2 \\ & + \left[ \frac{2}{c^2+\lambda} \frac{dD_{zz}}{d\lambda}(\lambda) + \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}(\lambda)}{(c^2+\lambda)^2} \right] z^2 + 2 \frac{dD_{xy}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} \right) xy \\ & + 2 \frac{dD_{yz}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right) yz + 2 \frac{dD_{zx}}{d\lambda}(\lambda) \left( \frac{1}{c^2+\lambda} + \frac{1}{a^2+\lambda} \right) zx = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dans cette équation, le triplet  $(x, y, z)$  est lié à  $\lambda$  à travers l'équation (2.4)<sub>4</sub>. Mais si pour un  $\lambda$  donné, le triplet  $(x, y, z)$  vérifie l'équation (A.2), elle est aussi satisfaite pour la même valeur de  $\lambda$  par le triplet  $(kx, ky, kz)$ . Ainsi cette équation est vérifiée par tout triplet  $(x, y, z)$  satisfaisant ou non à l'équation (2.4)<sub>4</sub>. Ceci implique que les coefficients de  $x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx$  sont nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{dD_{xx}}{d\lambda} + \frac{\text{tr } \mathbf{D}(\lambda)}{a^2 + \lambda} = 0 \\ 2 \frac{dD_{yy}}{d\lambda} + \frac{\text{tr } \mathbf{D}(\lambda)}{b^2 + \lambda} = 0 \\ 2 \frac{dD_{zz}}{d\lambda} + \frac{\text{tr } \mathbf{D}(\lambda)}{c^2 + \lambda} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dD_{xy}}{d\lambda}(\lambda) = 0 \\ \frac{dD_{yz}}{d\lambda}(\lambda) = 0 \\ \frac{dD_{zx}}{d\lambda}(\lambda) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Les solutions des équations (A.3)<sub>4,5,6</sub> sont triviales :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{xy}(\lambda) = \Delta_{xy} \equiv \text{Cste} \\ D_{yz}(\lambda) = \Delta_{yz} \equiv \text{Cste} \\ D_{zx}(\lambda) = \Delta_{zx} \equiv \text{Cste} \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

En sommant les équations (A.3)<sub>1,2,3</sub>, on trouve une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre ayant pour inconnue  $\text{tr } \mathbf{D}(\lambda)$ , qui donne par intégration :

$$\text{tr } \mathbf{D}(\lambda) = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = \frac{\mathcal{A}}{v(\lambda)} \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathcal{A}$  est une constante arbitraire.

En remplaçant  $\text{tr } \mathbf{D}$  par cette expression dans les équations (A.3)<sub>1,2,3</sub>, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{dD_{xx}}{d\lambda} + \frac{\mathcal{A}}{(a^2 + \lambda)v(\lambda)} = 0 \\ 2 \frac{dD_{yy}}{d\lambda} + \frac{\mathcal{A}}{(b^2 + \lambda)v(\lambda)} = 0 \\ 2 \frac{dD_{zz}}{d\lambda} + \frac{\mathcal{A}}{(c^2 + \lambda)v(\lambda)} = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} D_{xx}(\lambda) = \mathcal{A} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(a^2 + \rho)v(\rho)} + \Delta_{xx} \\ D_{yy}(\lambda) = \mathcal{A} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(b^2 + \rho)v(\rho)} + \Delta_{yy} \\ D_{zz}(\lambda) = \mathcal{A} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(c^2 + \rho)v(\rho)} + \Delta_{zz} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

où  $\Delta_{xx}, \Delta_{yy}, \Delta_{zz}$  sont des constantes arbitraires a priori.

En sommant les équations (A.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{D}(\lambda) &= \mathcal{A} \int_{\lambda}^{+\infty} \left( \frac{1}{a^2 + \rho} + \frac{1}{b^2 + \rho} + \frac{1}{c^2 + \rho} \right) \frac{d\rho}{2v(\rho)} + \Delta_{xx} + \Delta_{yy} + \Delta_{zz} \\ &= \frac{\mathcal{A}}{v(\lambda)} + \Delta_{xx} + \Delta_{yy} + \Delta_{zz}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

expression qui doit être identifiée avec (A.5), ce qui donne

$$\Delta_{xx} + \Delta_{yy} + \Delta_{zz} = 0 \quad (\text{A.8})$$

En conclusion, le tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{\Delta}$  est déviatorique.

## Annexe B

### Calcul des limites des quantités $\langle d_{xz}^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ et $\langle d_{yz}^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ lorsque $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ dans le cas général ( $a > b > c$ )

– Calcul de la limite  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xz}^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$

On a

$$\begin{aligned}
 \langle d_{xz}^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} &\sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \frac{dv(\bar{\lambda})}{d\bar{\lambda}}} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \frac{(d_{xz}^0)^2 \bar{\mu} (\bar{\mu} - \bar{\nu}) \bar{\nu}}{v(\bar{\lambda}) v(\bar{\mu}) v(\bar{\nu})} d\bar{\mu} d\bar{\nu} \\
 &= \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \frac{\bar{a}\bar{b}}{2\sqrt{\bar{\lambda}}}} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \frac{(\bar{a}^2 + \bar{\mu})(\bar{a}^2 + \bar{\nu})(\bar{\mu} - \bar{\nu}) d\bar{\mu} d\bar{\nu}}{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \bar{a}^4 \bar{a} \bar{b} \sqrt{\bar{\lambda}} \sqrt{|a^2 + \nu|} \sqrt{|b^2 + \nu|} \sqrt{|\nu|} \sqrt{|a^2 + \mu|} \sqrt{|b^2 + \mu|} \sqrt{|\mu|}} \\
 &= \frac{1}{\frac{2\pi}{3} \bar{a}^6 \bar{b}^2 (\bar{a}^2 - \bar{b}^2)} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 + \bar{\mu}}{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}} \frac{(\bar{\mu} - \bar{\nu})}{\sqrt{|\bar{\mu}|} \sqrt{|\bar{\nu}|}} d\bar{\mu} d\bar{\nu} \\
 &= -\frac{1}{\frac{2\pi}{3} \bar{a}^6 \bar{b}^2 (\bar{a}^2 - \bar{b}^2)} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 + \bar{\mu}}{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}} \left( \sqrt{\frac{|\bar{\mu}|}{|\bar{\nu}|}} - \sqrt{\frac{|\bar{\nu}|}{|\bar{\mu}|}} \right) d\bar{\mu} d\bar{\nu}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

d'où

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{xz}^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = -\frac{3}{2\pi \bar{a}^6 \bar{b}^2 (\bar{a}^2 - \bar{b}^2)} (I_1 I_2 - I_3 I_4) \tag{B.2}$$

où les intégrales  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{|\bar{\mu}|} d\bar{\mu}; \quad I_2 = \int_{\bar{\nu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{a}^2} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}} \frac{d\bar{\nu}}{\sqrt{|\bar{\nu}|}} \\ I_3 = \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}} \frac{d\bar{\mu}}{\sqrt{|\bar{\mu}|}}; \quad I_4 = \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}} \sqrt{|\bar{\nu}|} d\bar{\nu} \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

– Calcul de la limite  $\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yz}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda}$

On a de même

$$\begin{aligned} \langle d_{yz}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} &\sim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \frac{dv(\bar{\lambda})}{d\bar{\lambda}}} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \frac{(d_{yz}^0)^2 \bar{\mu}(\bar{\mu} - \bar{\nu})\bar{\nu}}{v(\bar{\lambda})v(\bar{\mu})v(\bar{\nu})} d\bar{\mu}d\bar{\nu} \\ &= \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \frac{\bar{a}\bar{b}}{2\sqrt{\bar{\lambda}}}} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \frac{(\bar{b}^2 + \bar{\mu})(\bar{b}^2 + \bar{\nu})(\bar{\mu} - \bar{\nu}) d\bar{\mu}d\bar{\nu}}{(\bar{b}^2 - \bar{a}^2)\bar{b}^4 \bar{a}\bar{b}\sqrt{\bar{\lambda}} \sqrt{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|} \sqrt{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|} \sqrt{|\bar{\nu}|} \sqrt{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|} \sqrt{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|} \sqrt{|\bar{\mu}|}} \\ &= -\frac{1}{\frac{2\pi}{3} \bar{a}^2 \bar{b}^6 (\bar{b}^2 - \bar{a}^2)} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}} \frac{(\bar{\mu} - \bar{\nu})}{\sqrt{|\bar{\mu}|} \sqrt{|\bar{\nu}|}} d\bar{\mu}d\bar{\nu} \\ &= \frac{1}{\frac{2\pi}{3} \bar{a}^2 \bar{b}^6 (\bar{b}^2 - \bar{a}^2)} \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}} \left( \sqrt{\frac{|\bar{\mu}|}{|\bar{\nu}|}} - \sqrt{\frac{|\bar{\nu}|}{|\bar{\mu}|}} \right) d\bar{\mu}d\bar{\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

d'où

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow 0} \langle d_{yz}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = \frac{3}{2\pi \bar{a}^2 \bar{b}^6 (\bar{b}^2 - \bar{a}^2)} (J_1 J_2 - J_3 J_4) \quad (\text{B.5})$$

où les intégrales  $J_1, J_2, J_3$  et  $J_4$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \int_{\bar{\mu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\mu}=0} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}} \sqrt{|\bar{\mu}|} d\bar{\mu}; \quad J_2 = \int_{\bar{\nu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{a}^2} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}} \frac{d\bar{\nu}}{\sqrt{|\bar{\nu}|}} \\ J_3 = \int_{\bar{\nu}=-\bar{b}^2}^{\bar{\nu}=0} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\mu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\mu}|}} \frac{d\bar{\mu}}{\sqrt{|\bar{\mu}|}}; \quad J_4 = \int_{\bar{\nu}=-\bar{a}^2}^{\bar{\nu}=-\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 + \bar{\nu}|}{|\bar{a}^2 + \bar{\nu}|}} \sqrt{|\bar{\nu}|} d\bar{\nu} \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

## Annexe C

### Calcul des intégrales $I_1, I_2, I_3, I_4, J_1, J_2, J_3$ et $J_4$

---

*Calcul de  $I_1$*

On pose  $\mu' = -\bar{\mu}$  et on obtient :

$$I_1 = \int_{\mu'=0}^{\mu'=\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{a}^2 - \mu'|}{|\bar{b}^2 - \mu'|}} \sqrt{\mu'} d\mu' \quad (\text{C.1})$$

En posant  $x = \frac{\mu'}{\bar{b}^2}$  et  $\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = k$ , on obtient :

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{\bar{b}^2 (\frac{1}{k^2} - x)}{\bar{b}^2 (1-x)}} \bar{b} \sqrt{x} \bar{b}^2 dx = \bar{b}^3 \int_0^1 \sqrt{\frac{\frac{1}{k^2} - x}{1-x}} \sqrt{x} dx \quad (\text{C.2})$$

En posant  $x = \sin^2 \phi$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\bar{b}^3}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^2 \phi}{1 - \sin^2 \phi}} \sin \phi 2 \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= \frac{2\bar{b}^3}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \sin^2 \phi d\phi \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En utilisant la formule 2.583<sub>(4)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980], on obtient :

$$I_1 = 2 \frac{\bar{b}^3}{k} \left[ \frac{k'^2}{3k^2} K + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} E \right] = \frac{2\bar{a}^3}{3} [k'^2 K + (2k^2 - 1)E] \quad (\text{C.4})$$

Calcul de  $I_2$

En posant  $\nu' = -\bar{\nu}$ , on obtient :

$$I_2 = \int_{\nu'=\bar{b}^2}^{\nu'=\bar{a}^2} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 - \nu'}{-\bar{b}^2 + \nu'}} \frac{d\nu'}{\sqrt{\nu'}} \quad (\text{C.5})$$

En posant  $x = \frac{\nu' - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}$ , on obtient :

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) - x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)(x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) + \bar{b}^2)}} (\bar{a}^2 - \bar{b}^2) dx = \frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{b}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x \left[ x \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) + 1 \right]}} dx \quad (\text{C.6})$$

En posant  $x = \cos^2 \phi$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \phi}{\cos \phi \sqrt{\cos^2 \phi \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) + 1}} 2 \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= \frac{2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{\frac{1}{k^2} - \frac{k'^2}{k^2} \sin^2 \phi}} d\phi \\ &= \frac{2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

En utilisant la formule 2.584<sub>(4)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980], on obtient finalement :

$$I_2 = \frac{2k(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{k'^2 \bar{b}} (K' - E') \quad (\text{C.8})$$

Calcul de  $I_3$

Posons  $\mu' = -\bar{\mu}$  et  $\mu' = \bar{b}^2 \sin^2 \phi$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\bar{b}^2} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 - \mu'}{\bar{b}^2 - \mu'}} \frac{1}{\sqrt{\mu'}} d\mu' \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\bar{b}^2/k^2 - \bar{b}^2 \sin^2 \phi}{\bar{b}^2 - \bar{b}^2 \sin^2 \phi}} \frac{1}{\bar{b} \sin \phi} 2\bar{b}^2 \sin \phi \cos \phi d\phi \\ &= \frac{2\bar{b}}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \\ I_3 &= \frac{2\bar{b}}{k} E \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Calcul de  $I_4$

En posant  $\nu' = -\bar{\nu}$  et  $x = \frac{\nu' - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{\nu'=\bar{b}^2}^{\nu'=\bar{a}^2} \sqrt{\frac{\bar{a}^2 - \nu'}{\bar{b}^2 - \nu'}} \sqrt{\nu'} d\nu' \\
 &= (\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) - x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}} \sqrt{x(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) + \bar{b}^2} dx \\
 &= \bar{b}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x) \left[ x \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) + 1 \right]}{x}} dx
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

En posant  $x = \cos^2 \phi$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{2\bar{b}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} \sin \phi \cos \phi d\phi \\
 &= \frac{2\bar{b}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} d\phi \\
 I_4 &= \frac{2\bar{b}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{3kk'^2} [k^2 K' + (2k'^2 - 1)E']
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

d'après la formule 2.583<sub>(4)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980].

Calcul de  $J_1$

On pose  $\mu' = -\bar{\mu}$ ,  $x = \frac{\mu'}{\bar{b}^2}$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{\mu'=0}^{\mu'=\bar{b}^2} \sqrt{\frac{|\bar{b}^2 - \mu'|}{|\bar{a}^2 - \mu'|}} \sqrt{\mu'} d\mu' \\
 J_1 &= \bar{b}^3 \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x)x}{\left(\frac{1}{k^2} - x\right)}} dx
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

On applique la formule 3.141<sub>(20)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980] et on trouve :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{2\bar{b}^3}{3} \sqrt{\frac{1}{k^2}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) E - 2 \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) F \right] \\
 J_1 &= \frac{2\bar{b}^3}{3k^3} [(2 - k^2)E - 2(1 - k^2)K]
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Calcul de  $J_2$

On pose  $\nu' = -\bar{\nu}$  et  $x = \frac{\nu' - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}$  et on obtient :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\nu'=\bar{b}^2}^{\nu'=\bar{a}^2} \sqrt{\frac{-\bar{b}^2 + \nu'}{\bar{a}^2 - \nu'}} \frac{1}{\sqrt{\nu'}} d\nu' \\ &= \frac{2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{b}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{(1-x) \left[ x \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right) + 1 \right]}} dx \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

En posant  $x^2 = \cos^2 \phi$ , on obtient :

$$J_2 = \frac{2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\frac{\bar{b}}{k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (\text{C.15})$$

En utilisant la formule 2.584<sub>(6)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980] on obtient :

$$J_2 = \frac{2(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{\bar{a}k'^2} (E' - k^2 K') \quad (\text{C.16})$$

*Calcul de  $J_3$*

On pose  $\mu' = -\bar{\mu}$ ,  $x = \frac{\mu'}{\bar{b}}$  et on obtient :

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{\mu'=0}^{\mu'=\bar{b}^2} \sqrt{\frac{\bar{b}^2 - \mu'}{\bar{a}^2 - \mu'}} \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu'}} \\ &= \bar{b} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{\left(\frac{1}{k^2} - x\right) x}} dx \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

En utilisant la formule 3.141<sub>(9)</sub> de [Gradshteyn et Ryzhik, 1980], il vient :

$$\begin{aligned} J_3 &= \bar{b} \left[ 2\sqrt{\frac{1}{k^2}} E - 2\frac{\frac{1}{k^2} - 1}{\sqrt{\frac{1}{k^2}}} F \right] \\ &= 2\bar{a}(E - k'^2 K) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

*Calcul de  $J_4$*

On pose  $\nu' = -\bar{\nu}$ ,  $x = \frac{\nu' - \bar{b}^2}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}$ ,  $x = \cos^2 \phi$ , et on obtient :

$$\begin{aligned} J_4 &= 2\bar{a}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} d\phi \\ &= \frac{2\bar{a}(\bar{a}^2 - \bar{b}^2)}{3k'^2} [-k'^2 K' + (2 - k'^2) E'] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

## Annexe D

# Preuve du lemme de Gurson

---

La différentiation de l'expression (2.90) par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  et le calcul des intégrales donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_1} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2}} - \frac{1}{x_2} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_2^2}{\alpha^2}} \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} dx = \sinh^{-1} \left( \frac{\beta x_2}{\alpha} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{\beta x_1}{\alpha} \right) \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Il s'ensuit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right)^2 = \frac{1}{x_1^2} \left( 1 + \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{x_2^2} \left( 1 + \frac{\beta^2 x_2^2}{\alpha^2} \right) - \frac{2}{x_1 x_2} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_2^2}{\alpha^2}} \\ \cosh \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \right) = \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2 x_2^2}{\alpha^2}} - \frac{\beta^2 x_1 x_2}{\alpha^2} \end{array} \right. \quad (\text{D.2})$$

et le membre de gauche de l'équation (2.92) est trivialement égal à 0.



# Annexe E

## Analyse-limite numérique par la méthode des éléments finis

---

Nous allons étudier les relations entre les équations de l'analyse-limite et celles du problème d'éléments finis discrétisé en temps.

### Cas général

Les équations de l'analyse-limite d'une structure  $\Omega$  sont identiques à celles d'un problème de plasticité en petites transformations sans élasticité posé sur cette structure, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2}[\nabla_X \mathbf{v} + (\nabla_X \mathbf{v})^T], \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \\ \mathbf{d} = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}), \\ \dot{\eta} \begin{cases} = 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}) < 0, \\ \geq 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

+ les conditions aux limites

Dans ces équations  $\mathbf{X}$  désigne le vecteur position dans la configuration initiale,  $\mathbf{v}$  la vitesse,  $\mathbf{d}$  le taux de déformation,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $f(\boldsymbol{\sigma})$  la fonction de charge de von Mises,  $\dot{\eta}$  le multiplicateur plastique.

Supposons maintenant que le problème d'élastoplasticité est résolu par la méthode des éléments finis en utilisant un algorithme de projection *implicite* du prédicteur élastique sur la surface de charge, avec un seul grand pas et sans actualisation de la géométrie. Notons  $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^1$ ,  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}^1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^1$  les contraintes initiale et finale, les déplacements initial et final, les déformations initiale et finale, respectivement. A condition que l'incrément de charge soit assez grand pour que l'ordre de grandeur des déformations élastiques dans

la structure soit très petit devant celui des déformations plastiques, les équations du problème discrétisé en temps s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2} \{ \nabla_X \mathbf{u}^1 + [\nabla_X \mathbf{u}^1]^T \}, \\ f(\boldsymbol{\sigma}^1) \leq 0, \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 \simeq \Delta\eta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1), \\ \Delta\eta \begin{cases} = 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}^1) < 0, \\ \geq 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0, \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

+ les conditions aux limites

où  $\Delta\eta$  désigne l'incrément du multiplicateur plastique. L'équivalence des systèmes (E.1) et (E.2) est claire,<sup>1</sup> avec les correspondances  $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$ ,  $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$ . Ainsi on peut résoudre un problème d'analyse-limite par la méthode des éléments finis, avec un unique grand pas de chargement assurant que les déformations élastique de la structure soit très petites devant les déformations plastiques. A partir des simulations numériques par éléments finis, on peut déduire non seulement la charge-limite à partir des contraintes, mais aussi le champ de vitesse (proportionnel au champ de déplacement) et le champ de taux de déformation (proportionnel au champ de déformation).

## Cas particulier d'une structure complètement plastifiée

Nous allons examiner le cas particulier mais fréquent où la structure est entièrement plastifiée quand sa charge limite est atteinte. Les équations (E.1)<sub>3,4,5</sub> du problème d'analyse-limite peuvent être simplifiées en

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ \mathbf{d} = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\eta}}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}', \quad \dot{\eta} > 0, \end{array} \right. \quad (\text{E.3})$$

où a été utilisée la fonction de charge de von Mises,  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0$  où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente,  $\sigma_0$  la limite d'élasticité en traction simple, et  $\boldsymbol{\sigma}'$  le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Supposons encore que le problème élastoplastique est résolu par la méthode des éléments finis, mais en utilisant maintenant un coefficient de Poisson très proche de 1/2 et un seul pas de chargement suffisamment grand pour que la charge limite soit atteinte, mais pas nécessairement que la déformation élastique finale  $\boldsymbol{\epsilon}^{e1}$  soit très petite devant la déformation plastique finale  $\boldsymbol{\epsilon}^{p1}$ . Puisque le matériau est quasi-incompressible, on a  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^{e1} \simeq 0$  et donc  $\boldsymbol{\epsilon}^{e1} \simeq (\boldsymbol{\sigma}^1)' / (2\mu)$  où  $(\boldsymbol{\sigma}^1)'$  est le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}^1$  et  $\mu$  le module de cisaillement élastique. Les équations du problème discrétisé deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0, \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 = \boldsymbol{\epsilon}^{e1} + \boldsymbol{\epsilon}^{p1} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}^1)'}{2\mu} + \Delta\eta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1) = \left[ \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\eta}{\sigma_{eq}} \right] (\boldsymbol{\sigma}^1)', \quad \Delta\eta > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.4})$$

1. Le point clé ici est que  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  est pris au point  $\boldsymbol{\sigma}^1$  plutôt que  $\boldsymbol{\sigma}^0$  dans la loi d'écoulement discrétisée.

Le terme  $\left[ \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\eta}{\sigma_{eq}} \right]$  est positif puisque  $\mu$  et  $\Delta\eta$  sont positifs. Il s'ensuit que la solution des équations de la méthode des éléments finis (E.2)<sub>1,2,6</sub> - (E.3) est aussi solution des équations (E.1)<sub>1,2,6</sub> - (E.4) du problème théorique, avec les mêmes correspondances  $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$ ,  $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$  qu'avant. Ainsi si la structure est entièrement plastifiée quand sa charge limite est atteinte, la solution du problème peut être obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant une valeur du coefficient de Poisson proche de 1/2, et un unique pas de chargement modérément grand assurant que la charge limite soit atteinte, mais pas que la déformation élastique soit négligeable<sup>2</sup>. Il est toutefois important de noter que si une telle procédure est utilisée, le taux de déformation de l'analyse-limite correspond à la déformation totale du calcul par éléments finis, et non pas à la déformation plastique comme on pourrait s'y attendre.

---

2. La raison pour laquelle ceci ne reste pas vrai si la structure n'est que partiellement plastifiée, est que le terme  $\left[ \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\eta}{\sigma_{eq}} \right]$  de l'équation (E.4)<sub>2</sub> est alors positif partout tandis que le multiplicateur plastique  $\dot{\eta}$  de l'équation (E.3)<sub>2</sub> ne l'est qu'aux points où  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ .



## Annexe F

# La borne non linéaire de Willis pour les matériaux plastiques poreux

---

Pour exprimer la borne de Willis de la façon la plus simple possible, nous allons distinguer les composantes diagonales et non diagonales du tenseur des contraintes macroscopiques  $\Sigma$  en définissant les vecteurs

$$\Sigma^{dg} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{offdg} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yz} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.1})$$

Pour un matériau parfaitement plastique, la forme quadratique de Willis  $Q^W(\Sigma)$  définissant sa surface de charge (équation (3.44)) s'écrit

$$Q^W(\Sigma) = \Sigma^{dg} \cdot \mathbf{M}^{dg} \cdot \Sigma^{dg} + \Sigma^{offdg} \cdot \mathbf{M}^{offdg} \cdot \Sigma^{offdg}, \quad (\text{F.2})$$

où  $\mathbf{M}^{dg}$  et  $\mathbf{M}^{offdg}$  sont des tenseurs du second ordre symétriques définis par

$$\mathbf{M}^{dg} = (1 - f) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} + \frac{3f}{2} \begin{bmatrix} T_{xxxx} & T_{xxyy} & T_{xxzz} \\ T_{yyxx} & T_{yyyy} & T_{yyzz} \\ T_{zzxx} & T_{zzyy} & T_{zzzz} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{M}^{offdg} = 3(1 - f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3f}{2} \begin{bmatrix} T_{xyxy} & 0 & 0 \\ 0 & T_{xzzz} & 0 \\ 0 & 0 & T_{yzyz} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (\text{F.4})$$

Dans les équations (F.3) et (F.4) apparaît un tenseur  $\mathbb{T}$  d'ordre quatre lié au tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}(\nu)$  d'un vide ellipsoïdal de demi-axes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  noyé dans un milieu élastique infini fictif de module de cisaillement  $\mu$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , à travers la relation

$$\mathbb{T} = \lim_{\nu \rightarrow 1/2} \frac{1}{2\mu} \mathbb{L}(\mu, \nu) : [\mathbb{I} - \mathbb{S}(\nu)], \quad (\text{F.5})$$

où  $\mathbb{L}(\mu, \nu)$  désigne le tenseur de rigidité du milieu et  $\mathbb{I}$  le tenseur identité d'ordre quatre. Le tenseur  $\mathbb{T}$  est étroitement lié au tenseur  $\mathbb{Q} = \mathbb{L}(\mu, \nu) : [\mathbb{I} - \mathbb{S}(\nu)]$  d' [Aravas et Ponte-Castaneda, 2004] ; il est plus pertinent ici puisqu'il est indépendant du module de cisaillement  $\mu$ . Ses composantes vérifient les relations de symétrie  $T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{ijlk} = T_{klij}$  et sont données dans l'annexe G.

## Annexe G

# Composantes du tenseur $\mathbb{T}$

---

Les composantes du tenseur  $\mathbb{T}$  défini par l'équation (F.5) sont facilement obtenues à partir de celle du tenseur  $\mathbb{Q}$  d' [Aravas et Ponte-Castaneda, 2004]. Elles sont données par

$$\begin{cases} T_{xxxx} = 2 - \frac{3a^2 I_{aa} + I_a}{4\pi}, \\ T_{xxyy} = 1 - \frac{I_a + I_b + 3(a^2 + b^2)I_{ab}}{8\pi} \\ T_{xyxy} = \frac{1}{2} - \frac{3(a^2 + b^2)I_{ab}}{8\pi} \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

Les autres composantes sont obtenues par permutation circulaire simultanée de  $x, y, z$  et  $a, b, c$ . Dans ces expressions  $I_a, I_{aa}, I_{ab}$ , etc sont les intégrales d' [Eshelby, 1957] définies par

$$\begin{cases} I_a = 2\pi abc \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(a^2 + \rho)v(\rho)}, \\ I_{aa} = 2\pi abc \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(a^2 + \rho)^2 v(\rho)}, \\ I_{ab} = \frac{2\pi}{3} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(a^2 + \rho)(b^2 + \rho)v(\rho)} \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

et d'autres formules semblables, où  $v(\rho)$  désigne la fonction définie par l'équation (2.5) du chapitre 2.

Comme expliqué par [Eshelby, 1957], les relations

$$\begin{cases} I_a + I_b + I_c = 4\pi, \\ I_{aa} + I_{ab} + I_{ac} = \frac{4\pi}{3a^2}, \\ a^2 I_{aa} + b^2 I_{ab} + c^2 I_{ac} = 3I_a, \\ I_{ab} = -\frac{I_a - I_b}{3(a^2 - b^2)} \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

et d'autres semblables permettent de déterminer toutes les intégrales à partir seulement de deux choisies parmi  $I_a, I_b$  et  $I_c$ . La démarche se présente comme suit :

- D’abord, la troisième intégrale du type  $I_a$  peut être déduite des deux autres grâce à l’équation (G.3)<sub>1</sub>.
- Les intégrales  $I_{ab}$ ,  $I_{ac}$ ,  $I_{bc}$  peuvent ensuite être calculées. Si  $a > b > c$ , il suffit d’utiliser l’équation (G.3)<sub>4</sub> et d’autres semblables. Si  $a = b > c$ , l’équation (G.3)<sub>4</sub> pour  $I_{ab}$  n’est plus définie, mais d’autres équivalentes pour  $I_{ac}$  et  $I_{bc}$  le sont, et on peut déduire  $I_{ab}$  de la relation  $I_{aa} = 3I_{ab}$  combinée avec l’équation (G.3)<sub>2</sub>. Si  $a > b = c$ , on peut calculer de façon similaire  $I_{ab}$ ,  $I_{ac}$  directement, et déduire  $I_{bc}$  de l’égalité  $I_{bb} = 3I_{bc}$  combinée avec une équation similaire à (G.3)<sub>2</sub>. Finalement si  $a = b = c$ , les équations du type (G.3)<sub>4</sub> ne sont pas définies, mais l’équation (G.3)<sub>2</sub> et d’autres semblables, combinée avec des égalités évidentes, impliquent que  $I_{ab} = I_{ac} = I_{bc} = 4\pi/(15a^2)$ .
- La troisième étape consiste à déterminer les intégrales  $I_{aa}$ ,  $I_{bb}$ ,  $I_{cc}$  grâce à l’équation (G.3)<sub>2</sub> et d’autres semblables.

Pour calculer deux des intégrales  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ , la méthode la plus simple consiste à les relier à la fonction de Carlson

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(x+t)(y+t)(z+t)^3}} \quad (\text{G.4})$$

grâce à la relation

$$I_a = \frac{4\pi}{3} abc R_D(b^2, c^2, a^2) \quad (\text{G.5})$$

et d’autres semblables. Des routines courtes et extrêmement efficaces peuvent être trouvées en FORTRAN, C et C++ dans le livre de [Press *et al.*, 2007] pour calculer la fonction  $R_D$ .

# Bibliographie

- [Aravas et Ponte-Castaneda, 2004] ARAVAS, N. et PONTE-CASTANEDA, P. (2004). Numerical methods for porous metals with deformation-induced anisotropy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **193**:3767–3805.
- [Babout *et al.*, 2004] BABOUT, L., MAIRE, E. et FOUGÈRES, R. (2004). Damage initiation in model metallic materials : X-ray tomography and modelling. *Acta Materialia*, **52**:2475–2487.
- [Budiansky *et al.*, 1982] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J. W. et SLUTSKY, S. (1982). Void growth and collapse in viscous solids. *in Mechanics of Solids, The Rodney Hill Anniversary Volume, H. G. Hopkins and M.J. Sewell, eds., Pergamon Press, Oxford*, pages 13–45.
- [Budiansky et O’Connell, 1976] BUDIANSKY, B. et O’CONNELL, J. (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Struct.*, **12**:81–97.
- [Danas *et al.*, 2008] DANAS, K., IDIART, M. et PONTE-CASTANEDA, P. (2008). A homogenization-based constitutive model for isotropic viscoplastic porous media. *Int. Jour. of Sol. and Struc.*, **45**:3392–3409.
- [Danas et Ponte-Castaneda, 2009a] DANAS, K. et PONTE-CASTANEDA, P. (2009a). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : I - theory. *Eur. J. Mech. A./Solids*, **28**:387–401.
- [Danas et Ponte-Castaneda, 2009b] DANAS, K. et PONTE-CASTANEDA, P. (2009b). A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : II - applications. *Eur. J. Mech. A./Solids*, **28**:402–416.
- [de Buhan et Maghous, 1995] de BUHAN, P. et MAGHOUS, S. (1995). A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **14**:309–328.
- [Eshelby, 1957] ESHELBY, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Proc. Roy. Soc. London A*, **241**:376–396.
- [Fleck *et al.*, 1989] FLECK, N., HUTCHINSON, J. et TVERGAARD, V. (1989). Softening by void nucleation and growth in tension and shear. *J. Mech. Phys. Solids*, **37**:515–540.
- [Garajeu, 1995] GARAJEU, M. (1995). *Contribution à l’étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, Marseille.

- [Gologanu, 1997] GOLOGANU, M. (1997). *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Gologanu et Leblond, 1993] GOLOGANU, M. et LEBLOND, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axi-symmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, **41(11)**:1723–1754.
- [Gologanu et al., 1994] GOLOGANU, M., LEBLOND, J. et DEVAUX, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axi-symmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Engrg. Mat. Tech.*, **116**:290–297.
- [Gologanu et al., 1997] GOLOGANU, M., LEBLOND, J., PERRIN, G. et DEVAUX, J. (1997). Recent extensions of gurson's model for porous ductile metals. in : Suquet, p.(ed.). *Continuum Micromechanics, Springer-Verlag, New-York*, pages 61–130.
- [Gradshteyn et Ryzhik, 1980] GRADSHTEYN, I. et RYZHIK, I. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York.
- [Gurson, 1977] GURSON, A. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Parti-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME J. Engrg. Materials. Technol.*, **99**:2–15.
- [Halphen et Nguyen, 1975] HALPHEN, B. et NGUYEN, Q. (1975). Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mécanique*, **14**:39–63.
- [Hashin et Shtrikman, 1962] HASHIN, Z. et SHTRIKMAN, S. (1962). On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **10(4)**: 335–342.
- [Hill, 1948] HILL, R. (1948). A theory of yielding and plastic flow of anisotropic solids. *Proc. Roy. Soc. London*, **193**:281–297.
- [Hill, 1967] HILL, R. (1967). The essential structure of constitutive laws of metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:79–95.
- [Hom et McMeeking, 1989] HOM, C. L. et MCMEEKING, R. M. (1989). Void growth in elastic-plastic materials. *ASME J. Appl. Mech.*, **56**:309–317.
- [Kachanov, 1971] KACHANOV, L. (1971). *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland, Amsterdam.
- [Kailasam et Ponte-Castaneda, 1998] KAILASAM, M. et PONTE-CASTANEDA, P. (1998). A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *J. Mech. Phys. Solids*, **46**:427–465.
- [Keralavarma et Benzerga, 2008] KERALAVARMA, S. M. et BENZERGA, A. A. (2008). An approximate yield criterion for anisotropic porous media. *C. R. Mec.*, **336**:685–749.
- [Koplik et Needleman, 1988] KOPLIK, J. et NEEDLEMAN, A. (1988). Voigt growth and coalescence in porous plastic solids. *Inter. J. Solids Structures*, **24**:835–853.
- [Leblond, 2003] LEBLOND, J. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes Science, Paris.

- [Leblond et Gologanu, 2008] LEBLOND, J. et GOLOGANU, M. (2008). External estimate of the yield surface of an arbitrary ellipsoid containing a confocal void. *Comptes-Rendus Mécanique*, **336**:813–819.
- [Leblond *et al.*, 1994] LEBLOND, J., PERRIN, G. et SUQUET, P. (1994). Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *Int. Journ. of Plasticity*, **10**:213–235.
- [Lee et Mear, 1992] LEE, B. et MEAR, M. (1992). Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *J. Mech. Phys. Solids*, **40**:1805–1836.
- [Madou et Leblond, 2012a] MADOU, K. et LEBLOND, J. (2012a). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids - i : Limit-analysis of some representative cell. *J. Mech. Phys. Solids*, **60**:1020–1036.
- [Madou et Leblond, 2012b] MADOU, K. et LEBLOND, J. (2012b). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids - ii : Determination of yield criterion parameters. *J. Mech. Phys. Solids*, **60**:1037–1058.
- [Mandel, 1964] MANDEL, J. (1964). Contribution théorique à l'étude de l'écoulement et des lois de l'écoulement plastique. *In. : Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics, Munich*, pages 502–509.
- [McClintock, 1968] MCCLINTOCK, F. (1968). A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *ASME J. Appl. Mech.*, **35**:363–371.
- [Michel et Suquet, 1992] MICHEL, J. et SUQUET, P. (1992). The constitutive law of non-linear viscous and porous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **40**:783–812.
- [Monchiet, 2006] MONCHIET, V. (2006). *Contribution à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles*. Thèse de doctorat, Université de Lille.
- [Monchiet *et al.*, 2008] MONCHIET, V., CAZACU, O., CHARKALUK, E. et KONDO, D. (2008). Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. *International Journal of Plasticity*, **24**:1158–1189.
- [Monchiet *et al.*, 2007] MONCHIET, V., CHARKALUK, E. et KONDO, D. (2007). An improvement of gurson-type models of porous materials by using eshelby-like velocity fields. *C.-R. Mec.*, **335**:32–41.
- [Monchiet *et al.*, 2011] MONCHIET, V., CHARKALUK, E. et KONDO, D. (2011). A micromechanics-based modification of the gurson criterion by using eshelby-like velocity fields. *Eur. J. Mech.*, **30**:940–949.
- [Morse et Feshbach, 1953] MORSE, P. M. et FESHBACH, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics, Part I*. McGraw-Hill, New York.
- [Pastor *et al.*, 2009] PASTOR, F., LOUTE, E., PASTOR, J. et TRILLAT, M. (2009). Mixed method and convex optimization for limit-analysis of homogeneous gurson materials : a kinematical approach. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **28**:25–35.
- [Pastor et Ponte-Castaneda, 2002] PASTOR, F. et PONTE-CASTANEDA, P. (2002). Yield criteria for porous media in plan strain : second-order estimates versus numerical results. *C.-R. Mec.*, **330**:741–747.

- [Pastor, 1978] PASTOR, J. (1978). Analyse-limite : Détermination de solutions statiques complètes - application au talus vertical. *J. Mec. Appl.*, **2**:176–196 (in French).
- [Perrin, 1992] PERRIN, G. (1992). *Contribution à l'étude à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, France.
- [Perrin et Leblond, 1990] PERRIN, G. et LEBLOND, J. (1990). Analytic study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension - application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, **6**:677–699.
- [Ponte-Castaneda, 1991] PONTE-CASTANEDA, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **39**:45–71.
- [Ponte-Castaneda et Suquet, 1998] PONTE-CASTANEDA, P. et SUQUET, P. (1998). Non-linear composites. *Adv. Appl. Mech*, **34**:171–302.
- [Ponte-Castaneda et Willis, 1995] PONTE-CASTANEDA, P. et WILLIS, J. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behaviour of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, **43**:1919–1951.
- [Ponte-Castaneda et Zaidman, 1994] PONTE-CASTANEDA, P. et ZAIDMAN, M. (1994). Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**:1459–1497.
- [Press *et al.*, 2007] PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. et FLANNERY, B. (2007). *Numerical Recipes, third Ed.* Cambridge University Press.
- [Rice et Tracey, 1969] RICE, J. et TRACEY, D. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, **17**:201–217.
- [Rousselier, 1987] ROUSSELIER, G. (1987). Ductile fracture models and their potentiel in local approach of fracture. *Nucl. Engng Design*, **105**:97–111.
- [Rudnicki et Rice, 1975] RUDNICKI, J. et RICE, J. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure - sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **23**:371–394.
- [Scheyvaerts *et al.*, 2011] SCHEYVAERTS, F., ONCK, P., TEKOGU, C. et PARDOEN, T. (2011). The growth and coalescence of ellipsoïdal voids in plane strain under combined shear and tension. *J. Mech. Phys. Solids*, **59**:373–397.
- [Siruguet et Leblond, 2004] SIRUGUET, K. et LEBLOND, J. (2004). Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids - i : theoretical modeling and numerical study of void growth. *Int. Journ. of Plasticity*, **20**:225–254.
- [Thomason, 1985] THOMASON, P. (1985). Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Metall.*, **33**:1079–1085.
- [Thomson et Hancock, 1984] THOMSON, R. et HANCOCK, J. (1984). Local stress and strain fields near a spherical elastic inclusion in a plastically deforming matrix. *Inter. J. of Fracture*, **24**:209–228.

- [Tvergaard, 1981] TVERGAARD, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, **17**:389–407.
- [Tvergaard et Needleman, 1984] TVERGAARD, V. et NEEDLEMAN, A. (1984). Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall*, **32**:157–169.
- [Willis, 1977] WILLIS, J. (1977). Bound and self-consistent estimates for the overall moduli of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **25**:185–202.
- [Willis, 1991] WILLIS, J. (1991). On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **39**:73–86.



## **Résumé** :

La ruine des matériaux ductiles se produit par nucléation, croissance et coalescence de microcavités. Le modèle le plus célèbre décrivant la croissance des cavités dans les matériaux poreux plastiques est celui de Gurson. Il est basé sur l'analyse-limite d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord. Gologanu et al ont étendu ce modèle à des cavités sphéroïdales allongées ou aplaties. Nous étendons ici l'approche de Gologanu et al à des cavités ellipsoïdales générales. Dans la première partie, nous utilisons des champs de vitesse satisfaisant les conditions de taux de déformation homogène sur tous les ellipsoïdes confocaux avec le vide et l'ellipsoïde extérieur, découverts par Leblond et Gologanu, dans l'analyse-limite d'un domaine ellipsoïdal. On obtient un critère approché de type Gurson. Dans la seconde partie l'analyse-limite précédente est améliorée : (i) Pour des chargements hydrostatiques, en effectuant des calculs micromécaniques par éléments finis dans un certain nombre de cas significatifs ; (ii) Pour des chargements déviatoriques, en faisant directement usage de certains résultats rigoureux pour des composites non-linéaires. Dans la troisième partie, nous comparons les prédictions du critère proposé avec des calculs numériques réalisés sur diverses cellules. Dans la quatrième partie, nous proposons des équations convenables pour les taux de déformation et de rotation d'une cavité ellipsoïdale contenue dans un milieu parfaitement plastique. La cinquième partie est consacrée à l'implémentation du critère de Hill dans le code SYSTUS et permet d'envisager l'extension du modèle à des matériaux plastiquement anisotropes.

**Mots clés** : matériaux poreux ductiles, cavités ellipsoïdales, analyse-limite.

## **Abstract** :

Ductile fracture of materials occurs by nucleation, growth and coalescence of microvoids. The most classical model describing the voids growth in plastic porous materials is introduced by Gurson. This model was derived from limit-analysis of a hollow sphere subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate. Gurson's model was extended to spheroidal, both prolate and oblate voids by Gologanu et al. In this work, we further extend Gologanu et al.'s model to general ellipsoidal voids. In a first step, the velocity field satisfying conditions of homogenous strain rate on all ellipsoids confocal with the void and the outer boundary, discovered by Leblond and Gologanu, is used in a limit-analysis of an ellipsoidal domain. A Gurson-like approximate yield function is obtained. In a second step, the preceding limit analysis is improved : (i) For hydrostatic loadings, by performing micromechanical finite element computations in a number of significant cases ; (ii) For deviatoric loadings, by directly using some general rigorous results for nonlinear composites. In a third step, the yield function proposed is validated versus a number of numerical computations of yield surfaces of hollow cells of various ellipsoidal shapes. In a fourth step, suitable evolution equations for the shape and orientation of the voids in plastic material are defined. The last step is devoted to the implementation of the Hill's criterion in SYSTUS software and makes it possible to consider the extension of the model to plastic anisotropic materials.

**Keywords** : ductile porous materials, ellipsoidal voids, limit-analysis.