Quelques aspects combinatoires et arithmétiques des variétés toriques complètes

Robin Guilbot

17 septembre 2012

Contenu de l'exposé

VARIÉTÉS TORIQUES COMPLÈTES

Contenu de l'exposé

VARIÉTÉS TORIQUES COMPLÈTES

ARITHMÉTIQUE
Résolution de certains problèmes diophantiens

Contenu de l'exposé

VARIÉTÉS TORIQUES COMPLÈTES

ARITHMÉTIQUE
Résolution de certains problèmes diophantiens

GÉOMÉTRIE (sur $\mathbb{C}$)
Étude du cône de Mori et de ses générateurs

Contenu de l'exposé

VARIÉTÉS TORIQUES COMPLÈTES

ARITHMÉTIQUE
Résolution de certains problèmes diophantiens

Description des principaux ingrédients

GÉOMÉTRIE (sur $\mathbb{C}$)
Étude du cône de Mori et de ses générateurs

Plan

Plan

Problème initial

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

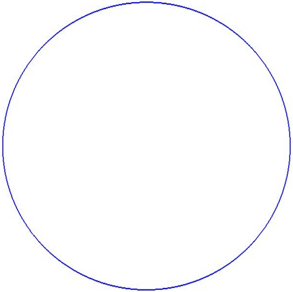
Sous-variétés

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Sous-variétés

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

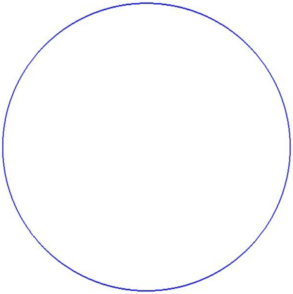
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



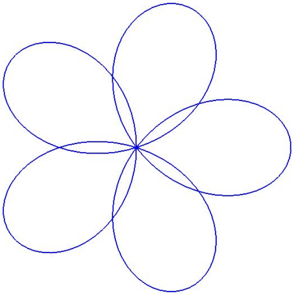
Sous-variétés

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



$$x^8 + y^8 + 6\,x^4y^4 + 4\,x^6y^2 + 4\,x^2y^6 - 9\,x^4y^2 - 9\,x^2y^4 - 2\,x^5 + 20\,x^3y^2 - 10\,xy^4 - 3\,x^6 + 3\,y^6 = 0$$

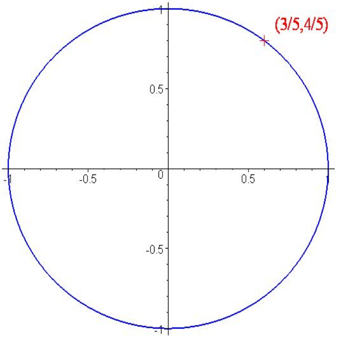


Points rationnels

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Points rationnels

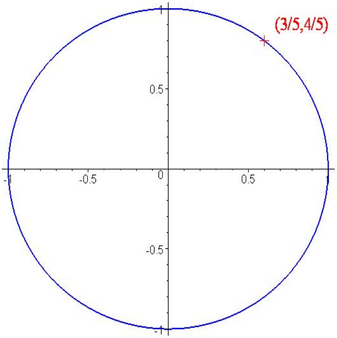
Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Points rationnels

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

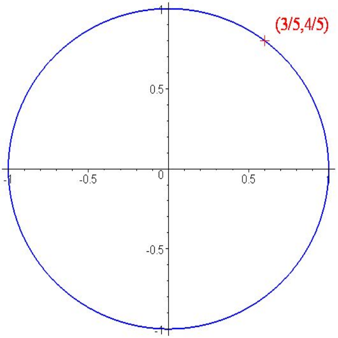


$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Downarrow$$

Points rationnels

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

Corps quasi algébriquement clos : définition

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Corps quasi algébriquement clos : définition

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Corps algébriquement clos : toutes les équations polynômiales ont des solutions.

Corps quasi algébriquement clos : définition

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Corps algébriquement clos : toutes les équations polynômiales ont des solutions.

Corps quasi algébriquement clos : toutes les équations polynômiales de "petit degré" ont des solutions.

Corps quasi algébriquement clos : définition

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Corps algébriquement clos : toutes les équations polynômiales ont des solutions.

Corps quasi algébriquement clos : toutes les équations polynômiales de "petit degré" ont des solutions.

Définition

On dit que K est un corps quasi algébriquement clos ou corps C_1 si toute sous-variété de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \leqslant n$ a des points rationnels.

Corps quasi algébriquement clos : exemples

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Les corps suivants sont quasi algébriquement clos : $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{Q}_p^{nr}$, ainsi que leurs extensions finies.

Corps quasi algébriquement clos : exemples

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Les corps suivants sont quasi algébriquement clos : $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{Q}_p^{nr}$, ainsi que leurs extensions finies.

Conjecture (E. Artin)

La clôture abélienne $\mathbb{Q}^{ab}$ de $\mathbb{Q}$ est C_1.

Corps quasi algébriquement clos : exemples

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Les corps suivants sont quasi algébriquement clos : $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{Q}_p^{nr}$, ainsi que leurs extensions finies.

Conjecture (E. Artin)

La clôture abélienne $\mathbb{Q}^{ab}$ de $\mathbb{Q}$ est C_1.

Conjecture (S. Lang, 1953)

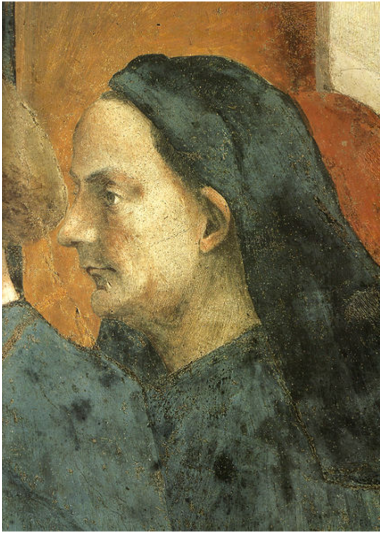
Soit X une courbe intègre sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Si $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, alors le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{R}(X)$ est C_1.

Dernier ingrédient

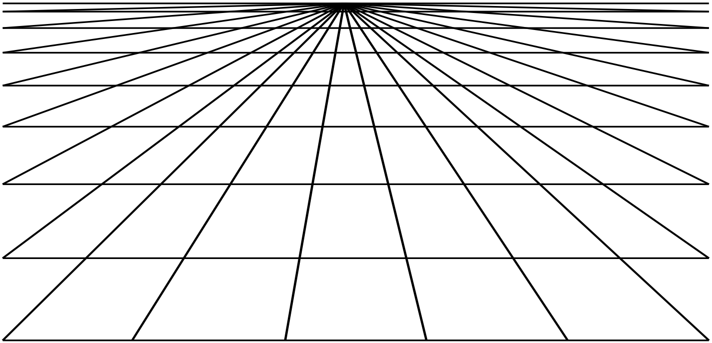
Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

La géométrie projective : question de perspective

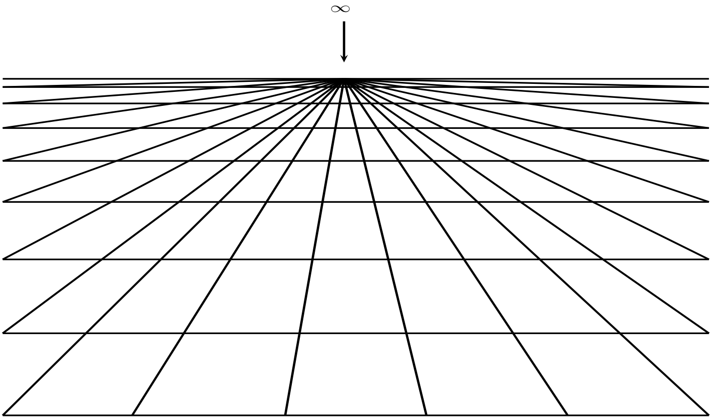
La géométrie projective : question de perspective



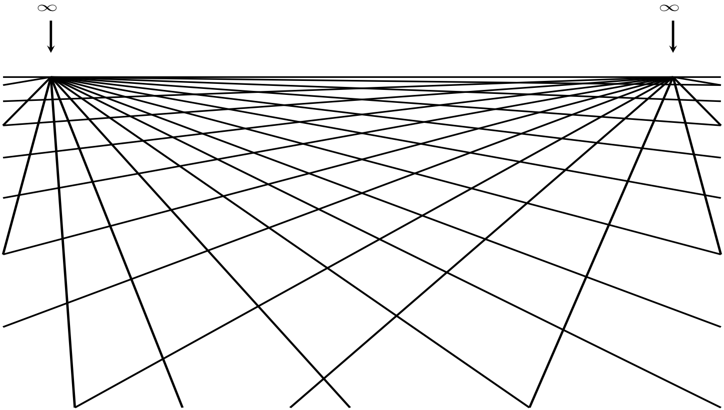
Les points à l'infini



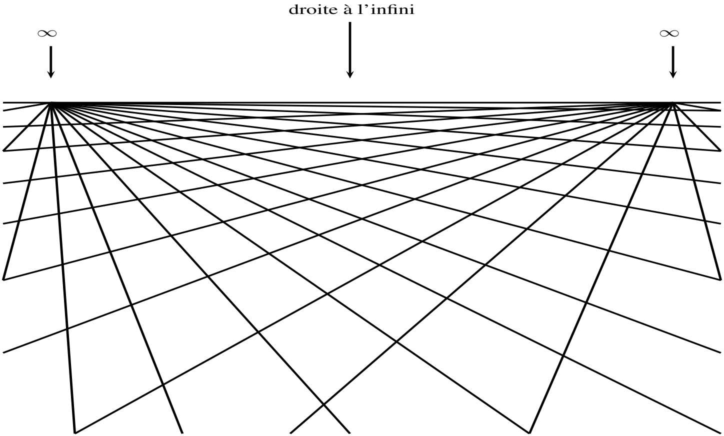
Les points à l'infini



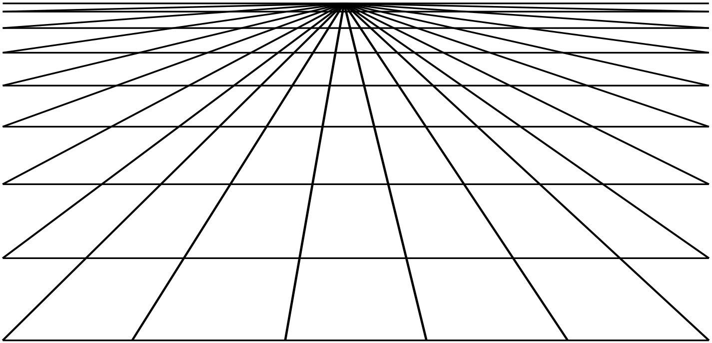
Les points à l'infini (2) : ligne d'horizon



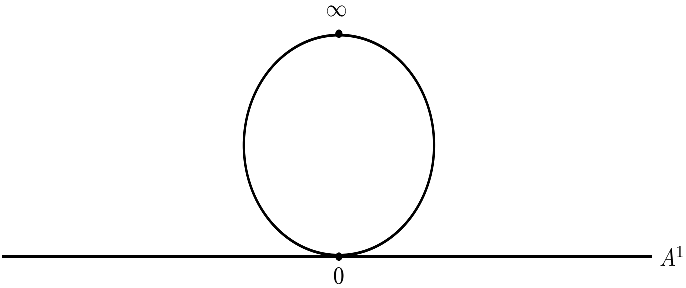
Les points à l'infini (2) : ligne d'horizon



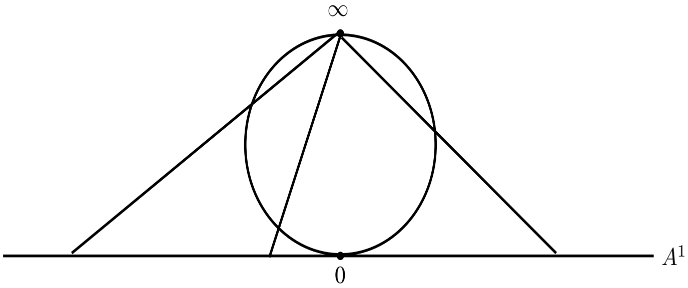
Les points à l'infini (3) : il en manque !



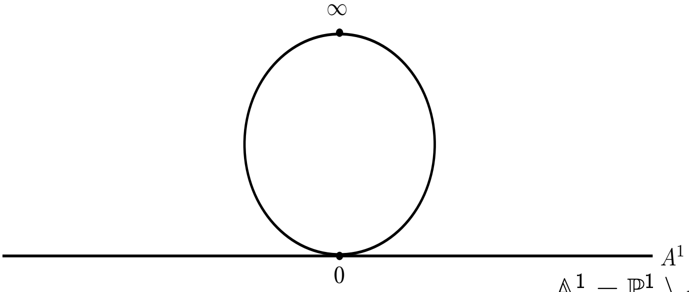
On complète : droite projective



On complète : droite projective

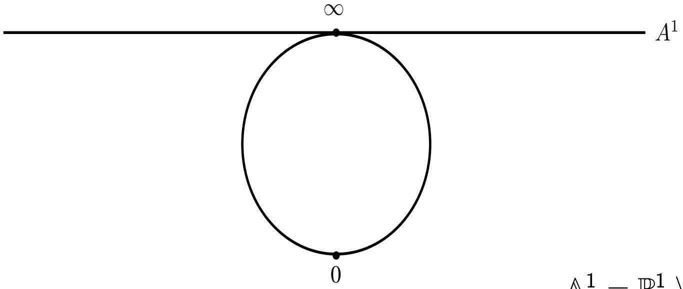


Droite projective : recollement



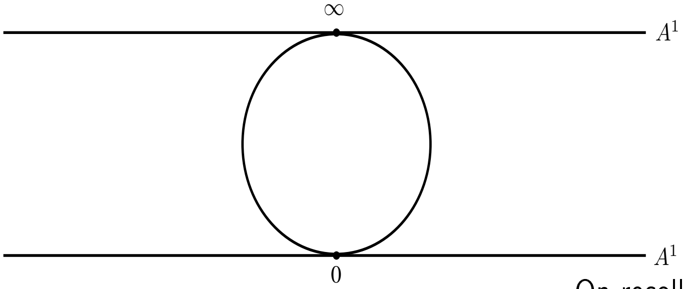
$\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$

Droite projective : recollement



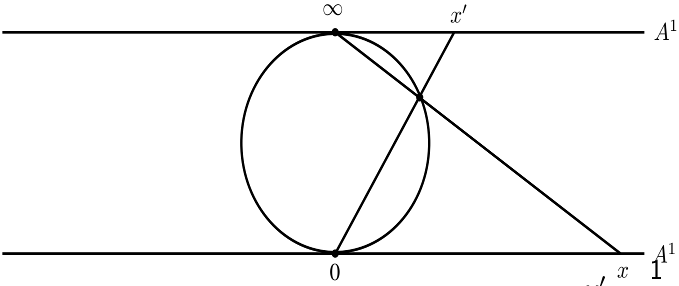
$$\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$$

Droite projective : recollement



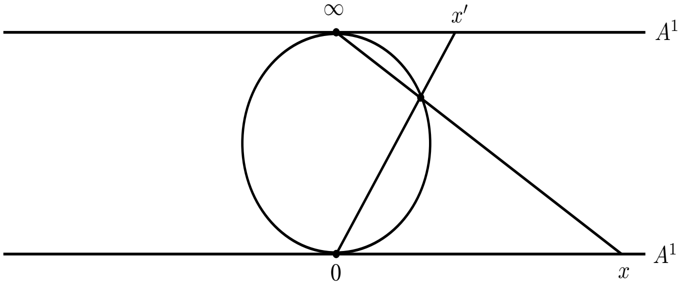
On recolle

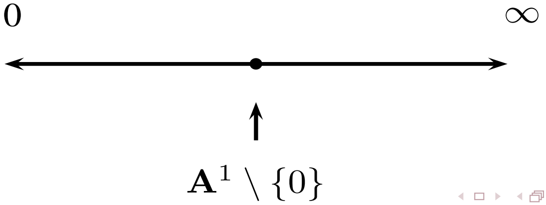
Droite projective : recollement



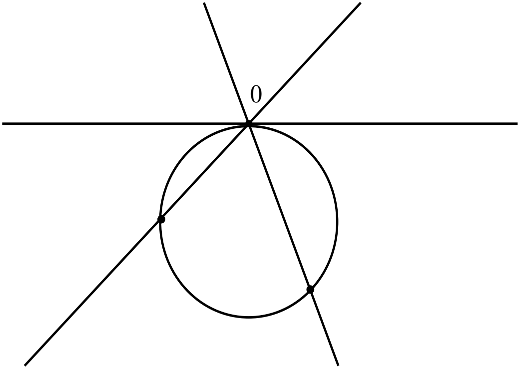
$x' = \frac{1}{x}$

Droite projective : recollement

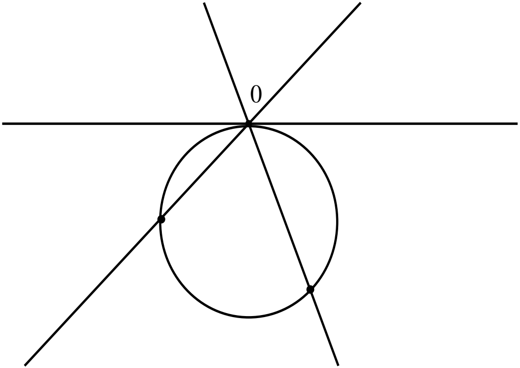




Droite projective : coordonnées homogènes

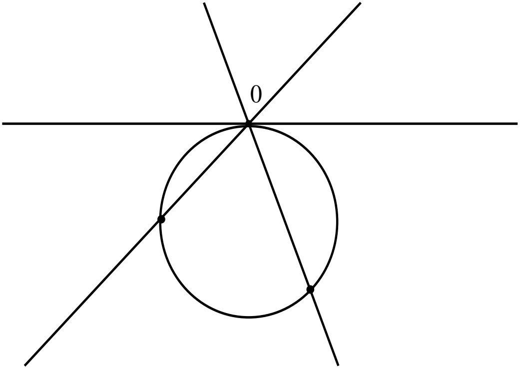


Droite projective : coordonnées homogènes



$$(x' : y') = (x : y) \Leftrightarrow \exists \lambda, (x', y') = (\lambda x, \lambda y)$$

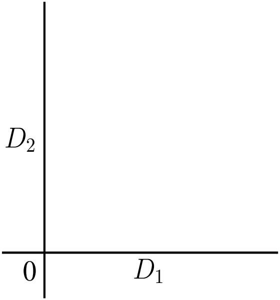
Droite projective : coordonnées homogènes



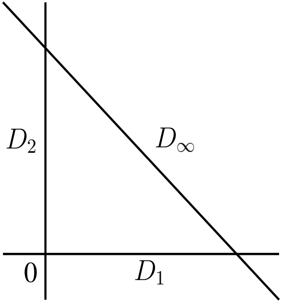
$$(x' : y') = (x : y) \Leftrightarrow \exists \lambda, (x', y') = (\lambda x, \lambda y)$$

$$\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} / \operatorname{GL}_1$$

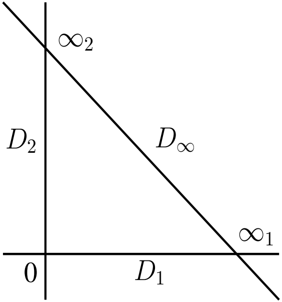
Le plan projectif $\mathbb{P}^2$



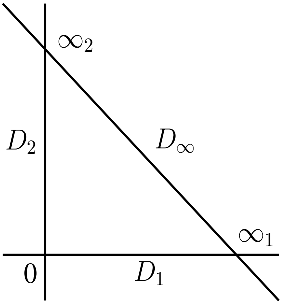
Le plan projectif $\mathbb{P}^2$

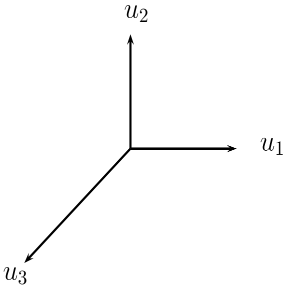


Le plan projectif $\mathbb{P}^2$

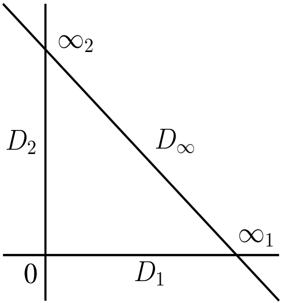


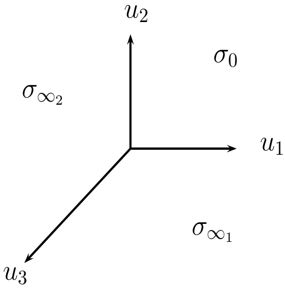
Le plan projectif $\mathbb{P}^2$



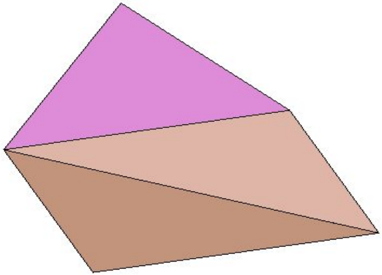


Le plan projectif $\mathbb{P}^2$

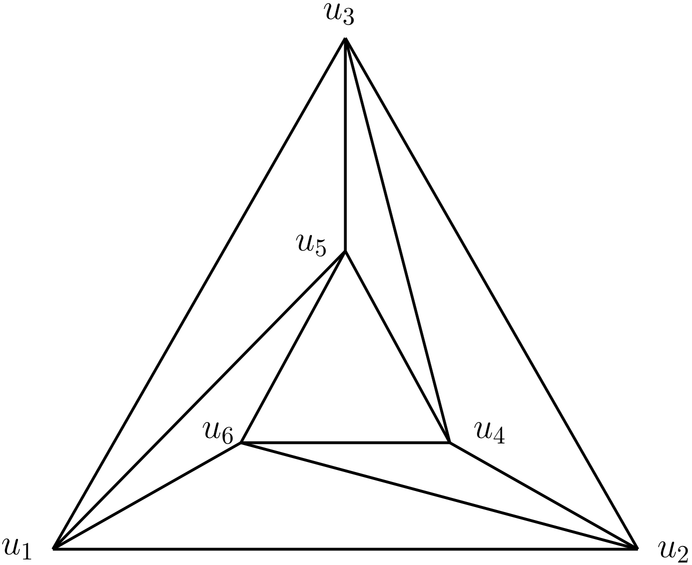




Éventails de dimension 3 : animation



Éventails de dimension 3 : projection



Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.

Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.
Générateurs minimaux : u_ρ.

Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.
Générateurs minimaux : u_ρ.

$$\text{1-cône } \rho \in \Sigma(1) \quad \leftrightarrow \quad \text{Diviseur torique } D_\rho$$

Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.
Générateurs minimaux : u_ρ.

$$\begin{array}{lcl} 1\text{-cône } \rho \in \Sigma(1) & \leftrightarrow & \text{Diviseur torique } D_\rho \\ n\text{-cône } \sigma \in \Sigma(n) & \leftrightarrow & \text{Point torique} \end{array}$$

Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.
Générateurs minimaux : u_ρ.

$$\begin{array}{rcl} 1\text{-cône } \rho \in \Sigma(1) & \leftrightarrow & \text{Diviseur torique } D_\rho \\ n\text{-cône } \sigma \in \Sigma(n) & \leftrightarrow & \text{Point torique} \\ (n-1)\text{-cône } \tau \in \Sigma(n-1) & \leftrightarrow & \text{Courbe torique } C_\tau \end{array}$$

Variétés toriques complètes

Σ éventail simplicial et complet dans $\mathbb{R}^n$.
Générateurs minimaux : u_ρ.

$$\begin{array}{rcl} 1\text{-cône } \rho \in \Sigma(1) & \leftrightarrow & \text{Diviseur torique } D_\rho \\ n\text{-cône } \sigma \in \Sigma(n) & \leftrightarrow & \text{Point torique} \\ (n-1)\text{-cône } \tau \in \Sigma(n-1) & \leftrightarrow & \text{Courbe torique } C_\tau \end{array}$$

$$X_\Sigma \simeq \left(\mathbb{A}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)\right) // G \quad ?$$

Collections primitives

Définition

Un sous-ensemble $P \subset \Sigma(1)$ *est une collection primitive si :*
(a) $P \not\subset \sigma(1)$ *pour tout* $\sigma \in \Sigma$.
(b) Pour toute partie stricte $Q \subsetneq P$ *il existe* $\sigma \in \Sigma$ *tel que* $Q \subset \sigma(1)$.
On note $\mathcal{P}_\Sigma$ *l'ensemble des collections primitives de* Σ.

Collections primitives

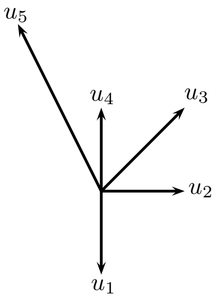
Définition

Un sous-ensemble $P \subset \Sigma(1)$ est une collection primitive si :
(a) $P \not\subset \sigma(1)$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.
(b) Pour toute partie stricte $Q \subsetneq P$ il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $Q \subset \sigma(1)$.
On note $\mathcal{P}_\Sigma$ l'ensemble des collections primitives de Σ.

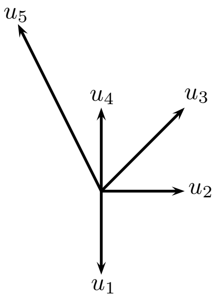
Ensemble exceptionnel :

$$Z(\Sigma) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \{x_\rho = 0, \rho \in P\}.$$

Exemple

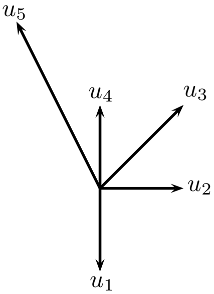


Exemple



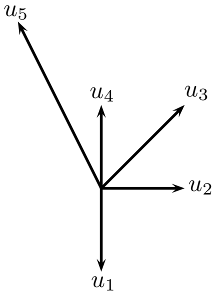
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors ?

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Alors ?

Trouver un critère d'existence de points rationnels sur des corps quasi algébriquement clos dans des sous-variétés de variétés toriques complètes.

Question

Qu'est-ce qu'un petit degré dans une variété torique complète (à éventail simplicial) X_Σ ?

Degrés = nombres d'intersections

Degrés = nombres d'intersections

Plan

Définitions

Définition

On note $N^1(X_\Sigma) = A^1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}, \quad N_1(X_\Sigma) = A_1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}$

Définitions

Définition

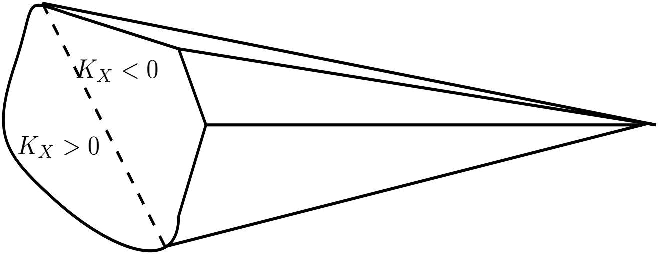
On note $N^1(X_\Sigma) = A^1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}$, $\quad N_1(X_\Sigma) = A_1(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}$ *et*

$$\mathrm{NE}(X_\Sigma) = \sum_{C \text{ irréd.}} \mathbb{R}_+[C] \subset N_1(X_\Sigma).$$

On appelle $\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma)$ *le* ***cône de Mori*** *de* X_Σ.

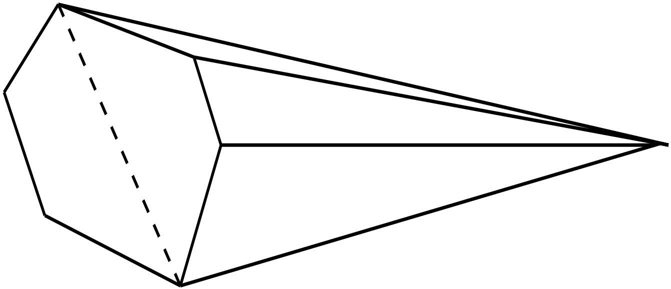
Cas projectif

Théorème sur le cône (S. Mori)

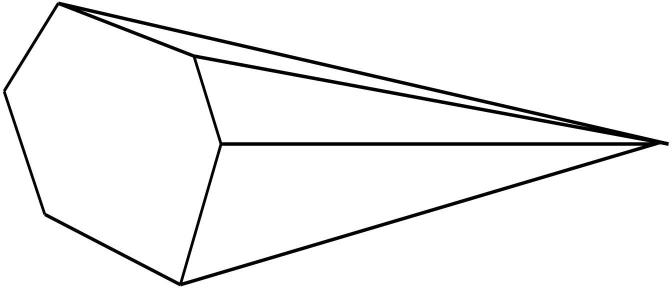


Cas projectif torique

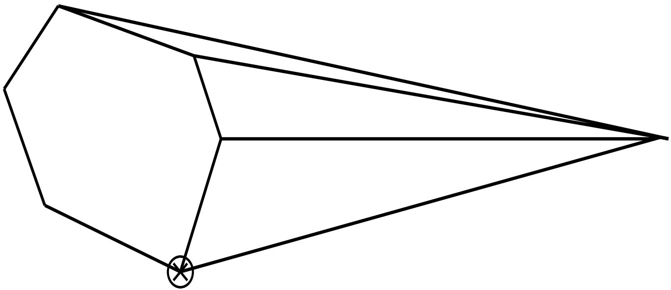
Théorème sur le cône torique (M. Reid)



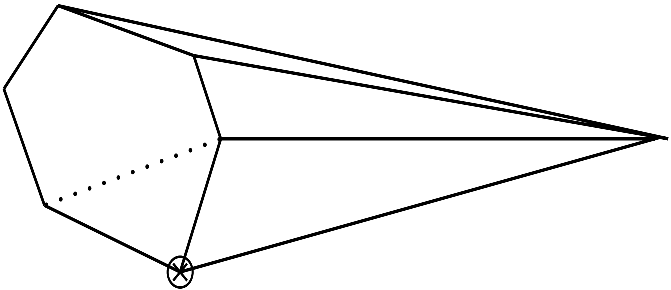
Contraction extrémale



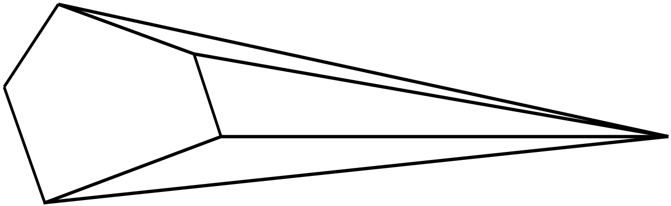
Contraction extrémale



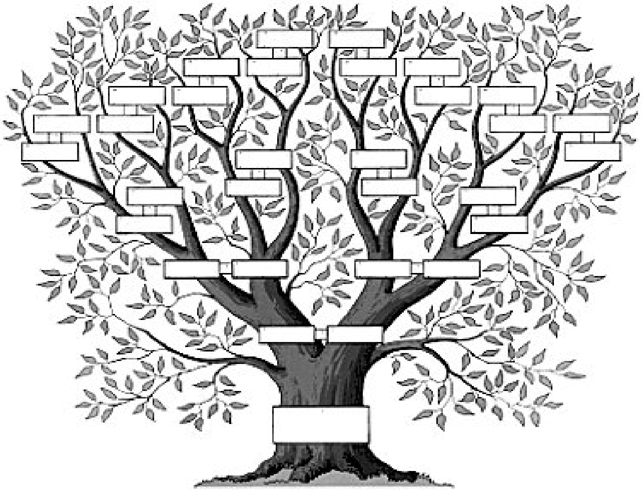
Contraction extrémale



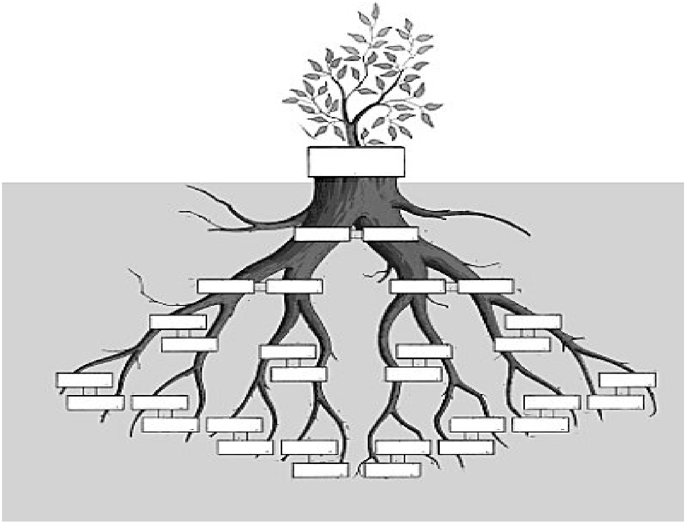
Contraction extrémale



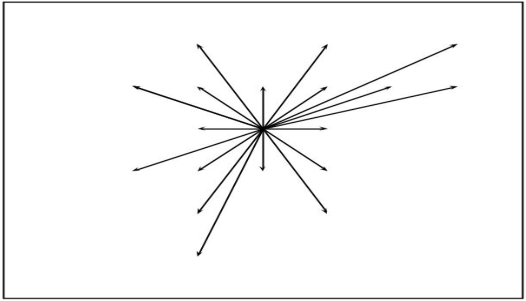
Programme de Mori



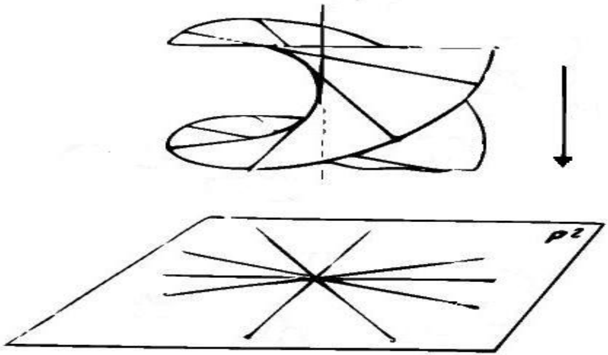
Programme de Mori



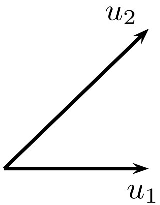
Cas des surfaces toriques lisses



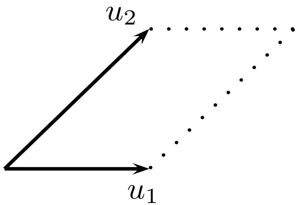
Éclatement



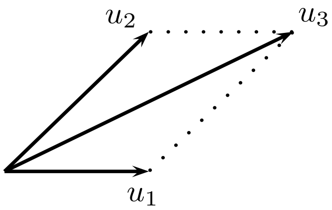
Éclatement torique



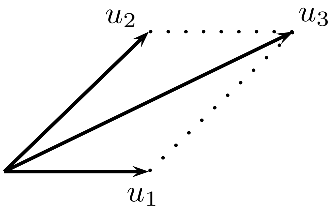
Éclatement torique



Éclatement torique

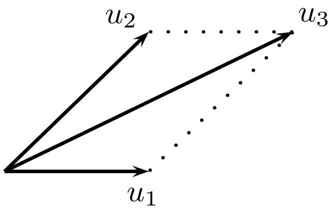


Éclatement torique



$$u_1 + u_2 = u_3$$

Éclatement torique



$$u_1 + u_2 = u_3$$

$$C_3 \cdot D_1 = 1,\ C_3 \cdot D_2 = 1,\ C_3 \cdot D_3 = -1$$

Classes primitives

Proposition-Définition

Soit $P = \{\rho_1, \dots, \rho_k\} \in \mathcal{P}_\Sigma$ *une collection primitive. Il existe un unique cône* $\gamma \in \Sigma$ *tel que le vecteur*

$$v_P := u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k}$$

appartienne à l'intérieur relatif de γ.

Classes primitives

Proposition-Définition

Soit $P = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \in \mathcal{P}_\Sigma$ une collection primitive. Il existe un unique cône $\gamma \in \Sigma$ tel que le vecteur

$$v_P := u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k}$$

appartienne à l'intérieur relatif de γ.
On en déduit une relation de la forme

$$u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k} = \sum_{\rho \in \gamma(1)} a_\rho u_\rho .$$

Classes primitives

Proposition-Définition

Soit $P = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \in \mathcal{P}_\Sigma$ *une collection primitive. Il existe un unique cône* $\gamma \in \Sigma$ *tel que le vecteur*

$$v_P := u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k}$$

appartienne à l'intérieur relatif de γ*.*
On en déduit une relation de la forme

$$u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k} - \sum_{\rho \in \gamma(1)} a_\rho u_\rho = 0.$$

Classes primitives

Proposition-Définition

Soit $P = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \in \mathcal{P}_\Sigma$ *une collection primitive. Il existe un unique cône* $\gamma \in \Sigma$ *tel que le vecteur*

$$v_P := u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k}$$

appartienne à l'intérieur relatif de γ*.*
On en déduit une relation de la forme

$$u_{\rho_1} + \cdots + u_{\rho_k} - \sum_{\rho \in \gamma(1)} a_\rho u_\rho = 0.$$

La classe de 1-cycles $[C_P]$ *associé à cette relation est appelé* ***classe primitive*** *associée à* P*.*

La conjecture de Cox - von Renesse

Théorème (Cox, von Renesse - 2009)

Si Σ est un éventail quasi-projectif à support convexe de dimension maximale, alors on a

$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P].$$

La conjecture de Cox - von Renesse

Théorème (Cox, von Renesse - 2009)

Si Σ est un éventail quasi-projectif à support convexe de dimension maximale, alors on a

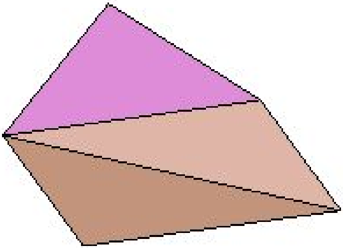
$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P].$$

Conjecture (Cox, von Renesse - 2009)

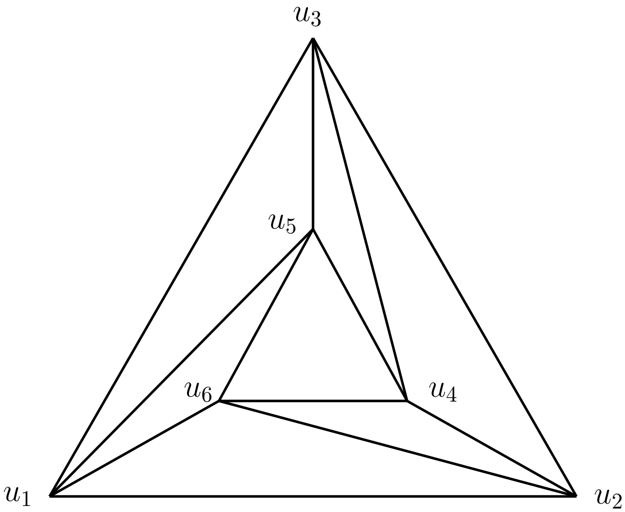
Si Σ est un éventail à support convexe de dimension maximale (en particulier si Σ est complet), alors on a

$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P]$$

Contrexemple



Contrexemple



Alternatives

Alternatives

Conjecture (G. - 2012)

Si Σ est un éventail complet et lisse alors on a

$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P]$$

Alternatives

Conjecture (G. - 2012)

Si Σ est un éventail complet et lisse alors on a

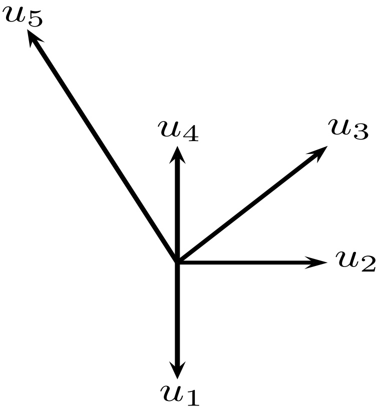
$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Sigma} \mathbb{R}_+[C_P]$$

Conjecture (G. - 2012)

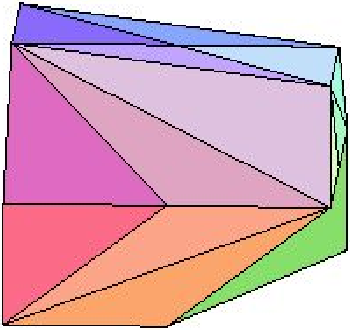
Si Σ est un éventail complet et lisse alors on a

$$\overline{\mathrm{NE}}(X_\Sigma) = \sum_{C \text{ loc. contractible}} \mathbb{R}_+[C]$$

Courbe localement contractible



Monstre



Plan

Motivation

Question

Est-il vrai que toute variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps C_1 admet toujours un point rationnel ?

Motivation

Question

Est-il vrai que toute variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps C_1 admet toujours un point rationnel ?

- C'est vrai sur $\mathbb{F}_q$ (H. Esnault, 2003)

Motivation

Question

Est-il vrai que toute variété propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps C_1 admet toujours un point rationnel ?

- C'est vrai sur $\mathbb{F}_q$ (H. Esnault, 2003)
- C'est vrai sur $\mathbb{C}(t)$ (T. Graber, M. Harris et J. Starr, 2003)

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

$$d \leqslant n \quad \Longrightarrow Y \text{ de Fano}$$

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

$$d \leqslant n \quad \Longrightarrow Y \text{ de Fano} \quad \Longrightarrow Y \text{ RC} .$$

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

$$\begin{array}{lllll} d \leqslant n & \Longrightarrow & Y \text{ de Fano} & \Longrightarrow & Y \text{ RC}. \\ \Downarrow & & & & \\ Y \text{ a un point rationnel} & & & & \end{array}$$

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

$$\begin{array}{ccccc} d \leqslant n & \Longrightarrow & Y \text{ de Fano} & \Longrightarrow & Y \text{ RC}. \\ \Downarrow & & & & \\ \multicolumn{5}{l}{Y \text{ a un point rationnel} \quad \text{(par définition !)}} \end{array}$$

Petit degré dans $\mathbb{P}^n$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de degré d.

$$\begin{array}{ccccc} d \leqslant n & \Longrightarrow & Y \text{ de Fano} & \Longrightarrow & Y \text{ RC} . \\ \Downarrow & & & & \\ \multicolumn{5}{l}{Y \text{ a un point rationnel} \quad \text{(par définition !)}} \end{array}$$

Les conditions de "petit degré" sont les mêmes.

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \ldots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \ldots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \dots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \dots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

L'application $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n, y) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$

est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré $\frac{d}{d'}$ non ramifié hors de Z.

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \ldots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \ldots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

L'application $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n, y) & \longmapsto & (x_0, \ldots, x_n) \end{array}$

est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré $\frac{d}{d'}$ non ramifié hors de Z.

$$d \leqslant n + d' \quad \Rightarrow Y \text{ de Fano} \quad \Rightarrow Y \text{ RC}.$$

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \dots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \dots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

L'application $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n, y) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$

est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré $\frac{d}{d'}$ non ramifié hors de Z.

$$\begin{array}{ccccc} d \leqslant n + d' & \Rightarrow & Y \text{ de Fano} & \Rightarrow & Y \text{ RC .} \\ \Downarrow & & & & \\ Y \text{ a un point rationnel} & & & & \end{array}$$

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \dots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \dots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \dots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

L'application $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n, y) & \longmapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$

est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré $\frac{d}{d'}$ non ramifié hors de Z.

$$\begin{array}{ccccc} d \leqslant n + d' & \Rightarrow & Y \text{ de Fano} & \Rightarrow & Y \text{ RC}. \\ \Downarrow & & & & \\ Y \text{ a un point rationnel} & & (\text{Th. de Kollar}). & & \end{array}$$

Revêtements de $\mathbb{P}^n$ rationnellement connexes

Soit $P(x_0, \ldots, x_n) = 0$ l'équation de $Z \subset \mathbb{P}^n$ de degré d.
Soit $d'|d$.
Alors $P(x_0, \ldots, x_n) = y^{\frac{d}{d'}}$ est l'équation de $Y \subset \mathbb{P}(1, \ldots, 1, d')$ de degré (pondéré) d.

L'application $\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n, y) & \longmapsto & (x_0, \ldots, x_n) \end{array}$

est un revêtement de $\mathbb{P}^n$ de degré $\frac{d}{d'}$ non ramifié hors de Z.

$$\begin{array}{ccccc} d \leqslant n + d' & \Rightarrow & Y \text{ de Fano} & \Rightarrow & Y \text{ RC}. \\ \Downarrow & & & & \\ Y \text{ a un point rationnel} & & \text{(Th. de Kollar).} & & \end{array}$$

Petit degré dans $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$

Définition

Une forme normique de degré d est un polynôme homogène

- *de degré d,*
- *à d variables,*

ne possédant aucune racine non triviale.

Petit degré dans $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$

Définition

Une forme normique de degré d est un polynôme homogène

- *de degré d,*
- *à d variables,*

ne possédant aucune racine non triviale.

Théorème (J. Kollar, 1996)

Soit K un corps quasi-algébriquement clos possédant des formes normiques de degré arbitraire. Toute sous-variété de $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ de degré

$$d < a_0 + \cdots + a_n$$

possède un point rationnel sur K.

Quelques aspects combinatoires et arithmétiques des variétés toriques complètes

Robin Guilbot

Introduction

Partie Géométrique

Partie Arithmétique

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d.

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d. Soit L un sous-espace linéaire de dimension k, contenu dans Y avec multiplicité μ.

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d. Soit L un sous-espace linéaire de dimension k, contenu dans Y avec multiplicité μ.

Soit $\tilde{Y}$ la transformée stricte de Y dans $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$.

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d. Soit L un sous-espace linéaire de dimension k, contenu dans Y avec multiplicité μ.

Soit $\tilde{Y}$ la transformée stricte de Y dans $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$.
Alors $\tilde{Y}$ est un fibré sur $\mathbb{P}^{n-k}$ en hypersurfaces de degré $d - \mu$ dans $\mathbb{P}^{k+1}$.

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d. Soit L un sous-espace linéaire de dimension k, contenu dans Y avec multiplicité μ.

Soit $\tilde{Y}$ la transformée stricte de Y dans $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$.
Alors $\tilde{Y}$ est un fibré sur $\mathbb{P}^{n-k}$ en hypersurfaces de degré $d-\mu$ dans $\mathbb{P}^{k+1}$.
Elle est donc rationnellement connexe si

$$d - \mu \leqslant k + 1.$$

Exemple cible

Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ lisse de degré d. Soit L un sous-espace linéaire de dimension k, contenu dans Y avec multiplicité μ.

Soit $\tilde{Y}$ la transformée stricte de Y dans $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$.
Alors $\tilde{Y}$ est un fibré sur $\mathbb{P}^{n-k}$ en hypersurfaces de degré $d-\mu$ dans $\mathbb{P}^{k+1}$.
Elle est donc rationnellement connexe si

$$d - \mu \leqslant k + 1.$$

Par définition, $\tilde{Y}$ est plongée dans l'éclaté $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$ de $\mathbb{P}^n$ le long de L, dont la graduation naturelle est une bigraduation.

Question

Qu'est-ce qu'un "petit degré" sur $\mathrm{Bl}_L(\mathbb{P}^n)$ *?*

Hypothèses de travail

Dans toute la suite on considère une variété torique déployée sur un corps quasi algébriquement clos K tel que

(H1) Σ est un éventail simplicial et complet.

(H2) La partie de torsion du groupe des classes $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ est d'ordre premier à la caractéristique de K.

(H3) X_Σ est déployée.

Hypothèses de travail

Dans toute la suite on considère une variété torique déployée sur un corps quasi algébriquement clos K tel que

(H1) Σ est un éventail simplicial et complet.

(H2) La partie de torsion du groupe des classes $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ est d'ordre premier à la caractéristique de K.

(H3) X_Σ est déployée.

Lemme

Sous les hypothèses ci-dessus, la variété X_Σ peut-être vue comme bon quotient géométrique (sur K) :

$$X_\Sigma \simeq \left(\mathbb{A}^{\Sigma(1)} \setminus Z(\Sigma)\right) // G.$$

Degré le long d'un 1-cycle

On note

$$\mathcal{J}_C^{\pm} = \{\rho \in \Sigma(1) \mid C \cdot D_\rho \gtrless 0\}$$

et

$$\mathcal{J}_C^{\pm} = \mathcal{J}_C^{+} \cup \mathcal{J}_C^{-}$$

Premier pas

Proposition

Soit X_Σ une variété torique vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et K un corps C_1 possédant des formes normiques de tout degré.
Soit D un diviseur de Weil effectif sur X_Σ. Soit $C \in Z_1(X_\Sigma)$ tel que $\mathrm{Cone}(\mathcal{J}_C^-) = \alpha \in \Sigma$ et posons

$$I_C = \bigcap_{P \in \mathcal{P}, P \subset \mathcal{J}_C} P.$$

Si I_C est de cardinal $\geqslant 2$ et

$$0 < C \cdot D < \sum_{\rho \in I_C} C \cdot D_\rho$$

alors D possède un point rationnel sur K.

Application

Théorème

Soit K un corps C_1. Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d contenant un sous-espace L de dimension k avec multiplicité μ. On considère l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de L :

$$\eta : X_\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Alors la transformée stricte $\tilde{Y}$ de Y par η possède un point rationnel sur K dès que

$$d < k + \mu + 2.$$

Application

Théorème

Soit K un corps C_1. Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré d contenant un sous-espace L de dimension k avec multiplicité μ. On considère l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long de L :

$$\eta : X_\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Alors la transformée stricte $\tilde{Y}$ de Y par η possède un point rationnel sur K dès que

$$d < k + \mu + 2.$$

Remarque – Une fois encore, la condition de petit degré qui implique la connexité rationnelle est exactement la condition qui assure l'existence de points rationnels.

Cas ample

Théorème

Soit D un diviseur ample sur X_Σ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *Il existe un 1-cycle C tel que* $\mathrm{Cone}(\mathcal{J}_C^-) \in \Sigma$ *et* $\mathrm{Card}(I_C) \geqslant 2$ *vérifiant*

$$0 < C \cdot D < \sum_{\rho \in I(C,D)} C \cdot D_\rho$$

(b) *Il existe une courbe extrémale C_τ telle que*

$$C_\tau \cdot D < \sum_{\rho \in \mathcal{J}^+_{C_\tau}} C_\tau \cdot D_\rho .$$

1-cycles graduants : définition

Définition

Soit D un diviseur de Weil effectif sur X_Σ. Un 1-cycle $C \in Z_1(X_\Sigma)$ est dit graduant pour D s'il vérifie les conditions suivantes :

(G1) *Il existe $\alpha \in \Sigma$ tel que $\mathcal{J}_C^- = \alpha(1)$.*

(G2) *L'ensemble $I(C, D) = \left\{\rho \in \mathcal{J}_C^+ \mid \forall C' \in A_1\left(\overline{\mathcal{J}_C \setminus \{\rho\}}^\Sigma(1)\right),\ C' \cdot D = 0\right\}$ est de cardinal au moins 2.*

(G3) *Pour toute collection primitive P contenue dans $\mathcal{J}_C$, le cardinal de $I(C, D) \setminus P$ est au plus 1.*

Théorème principal

Théorème

Soit X_Σ une variété torique vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et K un corps C_1 possédant des formes normiques de tout degré. Soit D un diviseur de Weil effectif sur X_Σ. Soit $C \in Z_1(X_\Sigma)$ un 1-cycle graduant pour D. Si

$$0 < C \cdot D < \sum_{\rho \in I(C,D)} C \cdot D_\rho$$

alors D possède un point rationnel sur K.