# Interpolation et comparaison de certains processus stochastiques

Benjamin Laquerrière

# UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

## *ÉCOLE DOCTORALE S2I*

LABORATOIRE : MIA

**THÈSE** présentée par :


## Benjamin Laquerrière


soutenue le : **10 mai 2012**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de La Rochelle**

Discipline : **Mathématiques et applications**

# Interpolation et comparaison de certains processus stochastiques

---

**JURY :**

| | | |
|---|---|---|
| **Marc ARNAUDON** | Président du jury | Université de Poitiers |
| **Michel BERTHIER** | Examinateur | Université La Rochelle |
| **Jean-Christophe BRETON** | Directeur de thèse | Université Rennes 1 |
| **Giulia DI NUNNO** | Rapporteur | Universitetet i Oslo |
| **Thierry KLEIN** | Examinateur | Université Toulouse 3 |
| **Jorge Alberto LEÓN VÁZQUEZ** | Rapporteur | Cinvestav |
| **Nicolas PRIVAULT** | Directeur de thèse | Nanyang Technological University |
| **Ciprian TUDOR** | Rapporteur | Université Lille 1 |

# Remerciements

Je ne saurais assez remercier Nicolas Privault et Jean-Christophe Breton de m'avoir accordé leur confiance lorsque j'ai commencé cette thèse. Merci aussi pour leurs encouragements et pour la patience dont ils ont dû, trop souvent, faire preuve.

Je remercie Giulia Di Nunno, Jorge León Vázquez et Ciprian Tudor d'avoir pris sur leur temps pour rapporter cette thèse, Thierry Klein et Michel Berthier qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury, ainsi que Marc Arnaudon qui m'a fait celui de le présider.

Je souhaite aussi remercier les différents laboratoires qui m'ont accueilli durant la préparation de cette thèse, en particulier le MIA de l'Université de La Rochelle et son directeur Michel Berthier (encore), mais aussi le LAGA de l'Université Paris 13, le CEREMADE de l'Université Paris Dauphine et le département de mathématiques de la City University de Hong Kong.

Je voudrais remercier quelques doctorants (maintenant docteurs) rencontrés çà et là, de l'intérêt que certains ont porté à mon travail, de l'enthousiasme avec lequel ils parlaient du leur ou tout simplement de la sympathie qu'ils m'ont témoigné. Je pense en particulier à Roland Diel, Guillaume Voisin, Laurent Tournier, Emmanuel Jacob et Jérémie Bettinelli. Je leur souhaite à tous une bonne continuation.

Je remercie également ma famille. En premier lieu, mes parents bien entendu et Martine de la gentillesse avec laquelle elle m'a hébergé quelques mois et du stress qu'elle a essayé de me mettre, ce savant mélange se manifestant le plus souvent par un "laisse la vaisselle, je la ferai. Toi, il faut que tu bosses !"

Un grand merci à mes "collègues" de thèse, Guillaume pour son soutien quotidien et "Petit o" pour son humour. Merci aussi à ma sœur de thèse Caroline dont la spontaneíté légendaire m'a suivi jusque sur les marchés et dans des gratte-ciel de Hong Kong. Je remercie Delphine à des titres trop nombreux pour être énumérés ici, Anthony, "parce que c'était lui" et Myriam de son éternelle présence.

Merci à Alexandra de m'avoir apporté son soutien depuis un an et d'avoir cru en moi alors qu'elle ne me connaissait que peu.

Enfin, mes derniers remerciements iront à mon grand oncle Jacques Cammas, homme à la curiosité infinie qui, alors que j'étais enfant, m'expliquait comment tracer une ellipse à l'aide de deux clous et d'une ficelle ou me parlait pendant des heures de l'apparente course vaine d'Achille contre la tortue et des suites de Fibonacci cachées au creux des coquilles d'escargot.

À Jacques Cammas

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Cette thèse a été élaborée sous la direction des Professeurs Jean-Christophe Breton et Nicolas Privault successivement aux seins du laboratoire Mathématiques, Image et Applications de l'Université de La Rochelle, du Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications de l'Université Paris 13 et du CEREMADE de l'Université Paris-Dauphine ainsi qu'au département de mathématiques de la City University de Hong Kong.

Elle se compose de deux grandes parties. La première est consacrée à l'étude d'inégalités de concentration convexe et d'inégalités de déviation, la deuxième est dédiée au conditionnement du mouvement brownien par des évènements de mesure nulle. Ces deux parties sont présentées respectivement dans les sections 1.1 et 1.2 de cette introduction.

## 1.1 Inégalités de déviation et de concentration

Nous commençons par rappeler une méthode classique pour obtenir des inégalités de déviation. Soit $X$ une variable aléatoire, on a pour toute fonction $\phi$ positive croissante, l'inégalité de Tchebytchev,

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \frac{1}{\phi(x)}\, \mathbb{E}[\phi(X)].$$

En appliquant cette inégalité à une classe $\Phi$ de fonctions $\phi$ pour lesquelles le calcul explicite du membre de droite est possible (ou, à défaut, pour lesquelles on peut obtenir une majoration fine de ce membre), on obtient une famille, indexée par $\Phi$, de borne de déviation pour $X$. Si la structure de $\Phi$ permet de le faire, en minimisant sur $\Phi$, on a alors une inégalité

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \min_{\phi \in \Phi} \frac{1}{\phi(x)}\, \mathbb{E}[\phi(X)],$$

où le membre de droite est explicite.

Les inégalités de concentration convexe ont été introduites par W. Hoeffding en 1963 (*cf.* [26]). Dans cet article, Hoeffding établit plusieurs inégalités de déviation pour des sommes de variables aléatoires bornées indépendantes [1], en utilisant le procédé que l'on vient de décrire avec $\Phi = \{x \mapsto e^{hx}, h > 0\}$. Puis dans la dernière partie de son article, Hoeffding remarque que les bornes ainsi obtenues sur une variable aléatoire $X$ sont transposables à une variable aléatoire $Y$ si l'inégalité

$$\mathbb{E}[\phi(Y)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(X)] \tag{1.1.1}$$

est vérifiée pour toute fonction $\phi \in \Phi$. Comme application de ce principe, il montre alors que si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des variables aléatoires obtenues par un tirage avec remise au sein d'une population finie tandis que $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ proviennent d'un tirage sans remise au sein de cette même population, l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

a lieu dès lors que $\phi$ est convexe. Ainsi les inégalités de déviation préalablement obtenues sur les sommes de variables aléatoires indépendantes sont transposables à une somme de variables aléatoires provenant d'un tirage sans remise dans une population finie.

On dit qu'une variable aléatoire $Y$ est plus concentrée que $X$ si l'inégalité (1.1.1) a lieu pour toute fonction $\phi$ convexe suffisamment intégrable.

En 1970, dans [20], M. L. Eaton obtient des inégalités de la forme (1.1.1) (la classe $\Phi$ n'est pas celle des fonctions convexes) pour des sommes pondérées de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de Rademacher [2]. Eaton étend ces inégalités de concentration aux sommes pondérées de variables aléatoires symétriques indépendantes uniformément bornées dans [21] puis, grâce à une remarque de W. Hoeffding, il les étend encore aux sommes pondérées de variables aléatoires indépendantes uniformément bornées centrées dans [22] . Dans ces trois articles, des inégalités de déviations sont également obtenues.

Plus récemment dans [45], Q. M. Shao obtient une inégalité de concentration pour des sommes de variables aléatoires négativement corrélées ainsi que pour le maximum des sommes partielles de telles variables. Il en déduit une inégalité maximale de Rosenthal.

En 2004 dans [6], V. Bentkus utilise des inégalités de concentration pour comparer la queue de déviation d'une martingale discrète $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec celle d'une marche aléatoire

1. en fait pour des moyennes de variables aléatoires bornées indépendantes
2. *i.e.* $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$

$(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendrée par des variables aléatoires de Bernoulli [3] et avec celle d'une variable aléatoire de Poisson $N$, *i.e.* il obtient des inégalités du type

$$\mathbb{P}(M_n > x) \leqslant \alpha\,\mathbb{P}(S_n > x), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

et

$$\mathbb{P}(M_n > x) \leqslant \beta\,\mathbb{P}(N > x), \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

sous des conditions de bornitude des accroissements de la martingale ou sur la variance des accroissements conditionnels.

Dans le domaine des mathématiques financières, la comparaison convexe de variables aléatoires a été introduite comme un outil de prévision du risque et permet d'obtenir des informations plus précises que la simple analyse de la moyenne et de la variance *cf. e.g.* [44].

Dans ce domaine, les fonctions convexes apparaissent naturellement comme fonctions de payoff d'options (*e.g.* $(x-K)_+$, $(K-x)_+$). Nous allons détailler cela au prochain paragraphe. Par ailleurs la convexité permet également de refléter la réduction du risque liée à la diversification des actifs.

**Pricing d'option**

Nous détaillons ici les applications des inégalités de concentration dans le domaine du pricing d'option.

Les options sont une large gamme de produits financiers de la famille des produits dits dérivés. La diversité des options est telle qu'il est malaisé d'en donner une définition générale. Contentons-nous de donner la définition de celles auxquelles on s'intéressera par la suite, les options dites européennes.

Un call (resp. put ) européen est un contrat par lequel l'une des parties – le vendeur – s'engage à vendre (resp. acheter ) à l'autre partie – l'acheteur – un actif (typiquement un actif financier) à une date $T$ déterminée appelée échéance et à un prix $K$ appelé strike, fixé à l'avance et donc indépendamment du prix de l'actif sur le marché à l'instant $T$. L'acheteur est, quant à lui, libre d'effectuer la transaction ou non. À la date $T$ le coût pour le vendeur d'une telle option est donc

$$\phi(S_T) = (S_T - K)_+,$$

où $S_T$ est le prix de l'actif au temps $T$. La fonction $\phi$ est appelée fonction de payoff. En contrepartie du risque pris par le vendeur, l'acheteur lui verse une certaine somme d'argent appelée prime.

3. au sens large : espace d'état à deux valeurs

Sur le même principe, il existe toute une gamme d'options. On peut citer par exemple les options américaines pour lesquelles l'acheteur peut exercer l'option à tout moment jusqu'à l'échéance, les options asiatiques pour lesquelles la fonction de payoff dépend du cours de l'actif sous-jacent entre la date de vente de l'option et la date d'exercice et non seulement de sa valeur à la date d'exercice, etc. Il existe également toute une gamme d'options multivariées, fondées non plus sur un mais sur plusieurs actifs. À titre d'exemple, on peut citer le "call on max". Il s'agit d'une option où le vendeur s'engage à vendre à l'acheteur l'actif sous-jacent le plus favorable à celui-ci, *i.e.* la fonction de payoff pour une telle option est

$$\phi = \max(0, S_T^1 - K_1, \dots, S_T^n - K_n),$$

où $S_T^1, \dots, S_T^n$ sont les prix des actifs, et $K_1, \dots, K_n$ les strikes associés.

Le problème qui se pose au vendeur est de déterminer au mieux le montant de la prime afin d'une part de se couvrir contre le risque en investissant cette prime sur le marché financier et d'autre part de rester compétitif face aux autres vendeurs.

Le Modèle de Black & Scholes

On se place dans le cadre d'un marché à deux actifs. Le premier est un actif risqué sur lequel porte un call européen. On suppose que son prix, $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, est modélisé par l'équation différentielle stochastique (E.D.S.)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{1.1.2}$$

où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard et où $\mu$ et $\sigma$ sont déterministes et constants, tandis le deuxième actif est un actif sans risque dont le prix, $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, est modélisé par

$$\frac{dM_t}{M_t} = dt. \tag{1.1.3}$$

Nous passons volontairement sous silence le détail des hypothèses économiques du modèle, celles-ci n'étant pas nécessaires à la compréhension du propos. Par ailleurs, on confondra dans la suite l'actif risqué (resp. non risqué) et son prix $S$ (resp. $M$).

Un agent propose un call européen sur l'actif $S$. Afin de couvrir son risque, cet agent investit la prime sur les actifs $S$ et $M$, puis change éventuellement au cours du temps la répartition de sa richesse. On note $\phi_t$ (resp. $\psi_t$) le montant investit dans l'actif sans risque (resp. risqué) à l'instant $t$. On suppose que $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\psi_t)_{t\in[0,T]}$ sont progressivement mesurables. En particulier ces processus sont $(\mathcal{F}_t)$-adaptés (on interdit ainsi les délits d'initiés).

Dans le modèle de Black et Scholes, le marché est complet dès lors que $\sigma \neq 0$. Cela signifie que pour toute variable $(\mathcal{F}_T)$-mesurable $\xi$ d'espérance finie, il existe une stratégie, d'investissement initial $\mathbb{E}[\xi]$, telle que

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T \phi_t dM_t + \int_0^T \psi dS_t.$$

En particulier, il est possible de trouver une telle stratégie pour $\xi = (S_t - K)_+$. Ainsi, s'il suit cette stratégie, le vendeur se couvre de son risque en partant d'une mise initiale $\mathbb{E}[(S_t - K)_+]$. On dit que

$$\mathbb{E}[(S_t - K)_+] \tag{1.1.4}$$

est le “fair price” de l'option.

Dans le modèle de Black et Scholes, le calcul d'Itô permet de déterminer la valeur de $\mathbb{E}[(S_t - K)_+]$. On a

$$\mathbb{E}[(S_t - K)_+] = S_0 N\left(\frac{d^+(t, S_0, \sigma)}{\sigma\sqrt{t}}\right) - Ke^{-t} N\left(\frac{d^-(t, S_0, \sigma)}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{1.1.5}$$

avec $d^{\pm}(t, S_0, \sigma) = \log\left(\frac{S_0}{K}\right) + t \pm \frac{1}{2}\sigma^2 t$ et $N(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

Le modèle de Black et Scholes permet donc le calcul explicite du fair price, cependant il présente des limites. La première critique que l'on peut faire, sans même sortir du modèle, est que le calcul explicite du fair price nécessite de connaître la valeur exacte des paramètres, or ceux-ci ne sont, en réalité, qu'estimés. Se pose donc la question de la sensibilité du fair price à une mauvaise spécification de ces paramètres.

Si l'on se pose maintenant la question de la pertinence du modèle, on peut alors formuler deux critiques supplémentaires. D'une part l'hypothèse selon laquelle les coefficients $\mu$ et $\sigma$ sont déterministes et constants n'est pas très réaliste d'un point de vue économique, d'autre part dans ce modèle les actifs ont des cours continus qui ne traduisent pas la possibilité de brusque variation de ces cours.

Afin de prendre en compte les remarques que l'on vient de formuler, on considèrera un autre modèle du cours d'un actif à risque, permettant les sauts et une volatilité aléatoire, à savoir la solution de E.D.S.

$$\frac{dR_t}{R_t} = \sigma_t dW_t + J_{t^-}(dN_t - \lambda_t), \tag{1.1.6}$$

où $(N_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Poisson d'intensité $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ et où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ et $(J_{t^-})_{t\in[0,T]}$ sont adaptés à la filtration engendrée par $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Dans ce cas cependant, le calcul explicite de

$$\mathbb{E}[(R_t - K)_+],$$

n'est en général pas possible. Néanmoins, sous certaines conditions sur les coefficients, il est possible de comparer le fair price de deux options. On peut par exemple dans certains cas obtenir l'inégalité

$$\mathbb{E}[(R_t - K)_+] \leqslant \mathbb{E}[(S_t - K)_+],$$

où $S_t$ est solution de (1.1.2) (avec $\mu = 0$). On est alors ramené au cadre de Black et Scholes où les calculs sont explicites. À défaut de déterminer le fair price de l'option basée sur le cours $(R_t)_{t\in[0,T]}$, on peut alors majorer celui-ci par celui d'une option qui serait basée sur le cours $(S_t)_{t\in[0,T]}$.

Ces considérations ont donné lieu à des travaux tels que [23] et [13] par exemple.

Le problème du pricing a également été étudié dans le cas de modèle multivarié, *cf.* [12] et [7].

### 1.1.1 Inégalités de déviation

Nous présentons ici les résultats qui sont détaillés dans le chapitre 2. Il s'agit d'inégalités de déviation pour des exponentielles de processus de diffusion à sauts à terme $T$ fixé. Dans le cas d'un processus de diffusion pur et dans celui d'un processus de sauts pur, les bornes que l'on obtient sont également meilleures que celles que l'on peut obtenir par un calcul direct.

Soient $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard engendrant une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. En appliquant le changement de temps

$$t \mapsto \int_0^t |\eta_s|^2 ds, \tag{1.1.7}$$

au mouvement brownien, on obtient la borne

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty \eta_t dW_t \geqslant x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma^2}\right), \qquad x > 0, \tag{1.1.8}$$

dès lors que

$$\Sigma^2 := \left\| \int_0^\infty |\eta_t|^2 dt \right\|_\infty < +\infty.$$

D'un autre côté, si $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus ponctuel d'intensité aléatoire $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et lorsque $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus adapté, on obtient la borne de déviation

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty U_{t^-}(dZ_t - \lambda_t dt) \geqslant x\right) \;\leqslant\; \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\log\left(1 + \frac{\beta}{\Lambda}x\right)\right), \tag{1.1.9}$$

pour $x > 0$, dès lors qu'il existe $\beta > 0$ tel que $U_t \leqslant \beta \; d\mathbb{P}$ - $p.s.$ et que

$$\Lambda := \left\| \int_0^\infty |U_t|^2 \lambda_t dt \right\|_\infty < +\infty,$$

*cf.* [2], [50].

Bien que $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ soit un processus de Poisson standard, lorsque l'on applique le changement de temps

$$t \mapsto \int_0^t \lambda_s ds,$$

lorsque $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ n'est pas constant on ne peut obtenir l'inégalité (1.1.9) de la même façon que l'on a obtenu (1.1.8) à partir de la borne de déviation gaussienne.

Les bornes de déviation (1.1.8) et (1.1.9) nécessitent une condition de bornitude sur les processus intégrés $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, et ne peuvent donc être appliquées directement aux solutions de l'E.D.S. :

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \sigma_t dW_t + J_{t^-}(dZ_t - \lambda_t dt), \tag{1.1.10}$$

où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard et $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus ponctuel d'intensité aléatoire $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, car les processus $(\eta_t)_{t\in[0,T]} = (\sigma_t S_t)_{t\in[0,T]}$ et $(U_t)_{t\in[0,T]} = (J_t S_t)_{t\in[0,T]}$ n'appartiennent pas à $L^\infty(\Omega, L^2([0,T]))$. Cela est cohérent avec le fait que lorsque $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ est déterministe, $S_T$ a une distribution log-normale et ne peut donc pas avoir une queue gaussienne.

Nous présentons maintenant succinctement les résultats d'inégalités de déviation pour les solutions d'E.D.S. de la forme (1.1.10) où les coefficients $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont $(\mathcal{F}_t)$-adaptés. Ces résultats sont obtenus par la méthode classique présentée plus haut et s'appuient sur l'inégalité de concentration suivante, obtenue par J.-C. Breton et N. Privault (*cf.* [14], Corollaire 5.2).

**Théorème 1.1.1.** *Soit* $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *la solution de* (1.1.10) *avec* $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *des processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adaptés et soit* $(S_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *la solution de*

$$\frac{dS_t^*}{S_{t^-}^*} = \sigma^*(t) d\hat{W}_t + J^*(t)(d\hat{N}_t - \lambda^*(t)dt),$$

*où* $(\hat{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Poisson d'intensité déterministe* $(\lambda^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $(\hat{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un mouvement brownien standard supposés indépendants l'un de l'autre et où* $\sigma^*(t)$ *et* $J^*(t) > 0$ *sont déterministes.*

*Supposons que les coefficients de $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de $(S_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifient l'une des conditions suivantes :*

*$(i)$ $-1 < J_t \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - p.p. et*

$$|\sigma_t| \leqslant |\sigma^*(t)|, \qquad J_t^2\lambda_t \leqslant |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }p.p.$$

*$(ii)$ $-1 < J_t \leqslant 0 \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - p.p. et*

$$|\sigma_t|^2 + J_t^2\lambda_t \leqslant |\sigma^*(t)|^2 + |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }p.p.$$

*$(iii)$ $0 \leqslant J_t \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - p.p., $J_t^2\lambda_t \leqslant |J^*(t)|^2\lambda^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - p.p. et*

$$|\sigma_t|^2 + J_t^2\lambda_t \leqslant |\sigma^*(t)|^2 + |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }p.p.$$

*Alors, on a l'inégalité*

$$\mathbb{E}[\phi(S_T) \mid S_0 = x] \leqslant \mathbb{E}[\phi(S_T^*) \mid S_0^* = x], \qquad x > 0, \quad T \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1.11}$$

*pour toute fonction $\phi$ convexe dont la dérivée est également convexe.*

Dans le cas continu, *i.e.* $J_t = J_t^* = 0$, et lorsque $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est déterministe, la relation (1.1.11) peut être obtenue par le théorème de Doob sur les temps d'arrêt et par l'inégalité de Jensen appliqués au changement de temps (1.1.7) et à l'exponentielle martingale

$$X_t := e^{W_t - t/2}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(S_T)] &= \mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi\left(\mathbb{E}\left[X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds} \middle| \mathcal{F}_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right]\right)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds}\right) \middle| \mathcal{F}_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[\phi(S_T^*)].
\end{aligned}$$

Cependant cet argument de changement de temps ne peut pas s'appliquer dans le cas mixte d'une diffusion à sauts. Par ailleurs, même dans le cas d'un processus de sauts pur, il ne s'applique pas dès lors que le coefficient $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ n'est pas constant et, dans le cas d'une diffusion pure, il ne s'applique pas lorsque $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aléatoire.

Nous présentons tout d'abord les résultats que nous avons obtenus dans le cas d'un processus de sauts pur, c'est à dire lorsque $\sigma_t = 0$.

**Théorème 1.1.2.** *On suppose que* $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est la solution de* (1.1.10) *avec* $\sigma_t = 0$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ *- p.p., et avec pour condition initiale* $S_0 = 1$ *et on suppose de plus que*

$$-1 < J_t \leqslant K, \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - } p.p.,$$

*pour un certain* $K \geqslant 0$. *On note*

$$\Lambda_T = \int_0^T \left\|J_t^2\lambda_t\right\|_\infty dt \quad \text{et} \quad \beta = \log(1+K).$$

*Pour tout* $x \geqslant \frac{\Lambda_T}{K}\left(\frac{\beta}{K}(1+K)^2 - 1\right)$, *on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &\leqslant \exp\left(-\frac{\Lambda_T}{K^2} g\left(\frac{K}{\beta}\left(1+\frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right)\\ &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta}+\frac{\Lambda_T}{K^2}\left(\frac{K}{\beta}-1\right)\right)\log\left(\frac{K}{\beta}\left(1+\frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right), \qquad (1.1.12)\end{aligned}$$

*avec*

$$g(u) = 1 + u\log u - u, \qquad u > 0.$$

Remarquons qu'en appliquant directement la borne de déviation classique (1.1.9) pour les variables de Poisson, on peut seulement obtenir

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x)\\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^T \log(1+J_{t^-})dZ_t - \int_0^T J_{t^-}\lambda_t dt \geqslant x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^T \log(1+J_{t^-})d(Z_t-\lambda_t dt) \geqslant x + \int_0^T J_{t^-}\lambda_t dt - \int_0^T \log(1+J_{t^-})\lambda_t dt\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\int_0^T \log(1+J_{t^-})d(Z_t-\lambda_t dt) \geqslant x\right)\\ &\leqslant \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\log\left(1+\beta\frac{x}{\tilde\Lambda_T}\right)\right), \qquad x>0,\end{aligned}$$

avec $K$ et $\tilde\Lambda_T$ vérifiant

$$J_t \leqslant K \quad \text{et} \quad \int_0^T |\log(1+J_t)|^2\lambda_t dt \leqslant \tilde\Lambda_T, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - } p.s.$$

Cette borne est moins bonne que (1.1.12) même dans le cas déterministe car $\tilde\Lambda_T \leqslant \Lambda_T$ et $1 < K/\beta \to +\infty$ lorsque $K \to +\infty$.

Nous présentons maintenant le cas mixte d'une diffusion à sauts où les sauts sont tous de même signe, on peut alors généraliser le théorème précédent.

**Théorème 1.1.3.** *Supposons qu'on a*

$$\text{soit} \quad -1 < J_t \leqslant 0, \quad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }p.p., \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant J_t \leqslant K, \quad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }p.p.,$$

*pour un certain $K > 0$. Notons*

$$\Lambda_T = \int_0^T \left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty dt.$$

*Alors pour tout $x \geqslant \frac{\Lambda_T}{K}\left(\frac{\beta}{K}(1+K)^2 - 1\right)$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &\leqslant \exp\left(-\frac{\Lambda_T}{K^2} g\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right) && (1.1.13) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta} + \frac{\Lambda_T}{K^2}\left(\frac{K}{\beta} - 1\right)\right) \log\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right), && (1.1.14) \end{aligned}$$

*avec $\beta = \log(1+K)$.*

Lorsque les sauts sont négatifs, le théorème précédent permet de déduire le résultat qui suit :

**Théorème 1.1.4.** *Supposons que $-1 < J_t \leqslant 0$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - $p.p.$, et notons*

$$\Sigma_T^2 = \int_0^T \left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty dt < +\infty, \qquad T > 0.$$

*Alors on a*

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{(x + \Sigma_T^2/2)^2}{2\Sigma_T^2}\right), \qquad x \geqslant 3\Sigma_T^2/2.$$

Dans le cas d'une diffusion pure, *i.e.* lorsque $J_t = 0$, et lorsque $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est déterministe, cette borne peut être obtenue directement par le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &= \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_t|^2 dt \geqslant x\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(W_{\Sigma_T^2} - \frac{1}{2}\Sigma_T^2 \geqslant x\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{(x + \Sigma_T^2/2)^2}{2\Sigma_T^2}\right), \qquad x > 0, \end{aligned}$$

cependant lorsque $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aléatoire, l'application de la borne (1.1.8) permet seulement d'obtenir

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) = \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_t|^2 dt \geqslant x\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma_t dW_t \geqslant x\right) \\
&\leqslant e^{-x^2/(2\Sigma_T^2)}, \qquad x > 0.
\end{aligned}$$

La borne que nous obtenons est donc meilleure d'un facteur $\exp(-x/2 - \Sigma_T^2/8)$.

### 1.1.2 Inégalités de comparaison convexe pour des intégrales stochastiques non markoviennes

Nous présentons maintenant les résultats qui seront détaillés dans le chapitre 3. Il s'agit d'inégalités de concentration convexe pour des variables aléatoires ayant les représentations intégrales suivantes $\int_0^T \sigma_t^* d\hat{W}_t$ et $\int_0^T \sigma_t dW_t$, où $0 \leqslant \sigma_t^* \leqslant \sigma_t$ sont des processus adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ engendrée par le mouvement brownien standard $(W_t)_{t\in[0,T]}$, et où $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien indépendant de $(W_t)_{t\in[0,T]}$. Les résultats sont obtenus par calcul stochastique forward/backward et par calcul de Malliavin et sont également valables lorsque on ajoute une composante à sauts.

#### Calcul stochastique forward/backward et calcul de Malliavin

Nous commençons par présenter les notions de calcul stochastique forward/backward et de calcul de Malliavin nécessaires à l'obtention des résultats. On renvoie à [39] pour plus de détails sur le calcul de Malliavin.

Notons $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et $\mu(dt, dx)$ un mouvement brownien et une mesure de saut forward et $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $\mu^*(dt, dx)$ un mouvement brownien et une mesure de saut backward. On suppose de plus que $(W_t, \mu(dt, dx))$ est indépendant de $(W_t^*, \mu^*(dt, dx))$, en revanche on ne suppose pas que $(W_t)_{t\in[0,T]}$ (resp. $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$) est indépendant de $\mu(dt, dx)$ (resp. $\mu^*(dt, dx)$).

Les mesures de saut forward et backward $\mu(dt, dx)$ et $\mu^*(dt, dx)$ ont des projections duales prévisibles de la forme $dt\nu_t(dx)$ et $dt\nu_t^*(dx)$. Dans ce cadre, on note $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration forward engendrée par $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et $\mu(dt, dx)$ et $(\mathcal{F}_t^*)_{t\in[0,T]}$ la filtration backward engendrée par $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $\mu^*(dt, dx)$.

Nous présentons ici une formule d'Itô pour une $(\mathcal{F}_t)$-martingale forward $(M_t)_{t\in[0,T]}$

$$M_t = \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} J_{s^-,x}(\mu(ds, dx) - ds\nu_s(dx)), \quad t \in [0, T], \tag{1.1.15}$$

et une $(\mathcal{F}_t^* \vee \mathcal{F}_T)$-martingale backward $(M_t^*)_{t\in[0,T]}$,

$$M_t^* = \int_t^T \sigma_s^* d^*W_s^* + \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} J_{s^+,x}^*(\mu^*(d^*s, dx) - ds\nu_s^*(dx)), \quad t \in [0, T], \tag{1.1.16}$$

où $(\sigma_s)_{s\in[0,T]}$, $(J_{s,x})_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}$, $(\sigma^*_s)_{s\in[0,T]}$ et $(J^*_{s,x})_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés de carrés intégrables. Cette formule d'Itô est similaire à celle obtenue dans [35] théorème 8.1.

Formule d'Itô forward/backward

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\phi(M_t, M^*_t) &= \phi(M_s, M^*_s) + \int_{s^+}^t \frac{\partial\phi}{\partial x}(M_{u^-}, M^*_u)dM_u + \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(M_u, M^*_u)|\sigma_u|^2 du\\
&+ \int_{s^+}^t \int_{\infty}^{+\infty} \left(\phi(M_{u^-} + J_{u^-,x}, M^*_u) - \phi(M_{u^-}, M^*_u) - J_{u^-,x}\frac{\partial\phi}{\partial x}(M_{u^-}, M^*_u)\right)\mu(du, dx)\\
&- \int_s^{t^-} \frac{\partial\phi}{\partial y}(M_u, M^*_{u^+})d^*M^*_u - \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(M_u, M^*_u)|\sigma^*_u|^2 du\\
&- \int_s^{t^-} \int_{\infty}^{+\infty} \left(\phi(M_u, M^*_{u^+} + J_{u^+,y}) - \phi(M_u, M^*_{u^+}) - J_{u^+,y}\frac{\partial\phi}{\partial y}(M_u, M^*_{u^+})\right)\mu^*(d^*u, dy),\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$.

Dans cette formule les intégrales forward

$$\int_{s^+}^t \frac{\partial\phi}{\partial x}(M_{u^-}, M^*_u)dM_u \tag{1.1.18}$$

et

$$\int_{s^+}^t \int_{\infty}^{+\infty} \left(\phi(M_{u^-} + J_{u^-,x}, M^*_u) - \phi(M_{u^-}, M^*_u) - J_{u^-,x}\frac{\partial\phi}{\partial x}(M_{u^-}, M^*_u)\right)\mu(du, dx) \tag{1.1.19}$$

sont anticipantes ($M^*_u$ n'étant généralement que $(\mathcal{F}^*_u \vee \mathcal{F}_T)$-mesurable) et sont à comprendre comme limites en probabilité de sommes de Riemann. Les conditions précises d'existence de ces intégrales sont données par les Lemmes 1.1.5 et 1.1.6. En revanche les intégrales backward contre $d^*M^*_t$ et $\mu^*(d^*t, dx)$ sont des intégrales backward au sens classique car les coefficients sont indépendants des processus intégrateurs $(W^*_t)_{t\in[0,T]}$ et $\mu^*(dt, dx)$.

Dans la suite on s'intéressera particulièrement au cas où les sauts de $(M_t)_{t\in[0,T]}$ et de $(M^*_t)_{t\in[0,T]}$ sont générés respectivement par un processus de Poisson forward $(N_t)_{t\in[0,T]}$ d'intensité $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ et un processus de Poisson backward $(N^*_t)_{t\in[0,T]}$ d'intensité $(\lambda^*_t)_{t\in[0,T]}$, indépendant de $(N_t)_{t\in[0,T]}$, *i.e.* la $(\mathcal{F}_t)$-forward martingale (1.1.15) est donnée par

$$M_t = \int_0^t \sigma_u dW_u + \int_0^t J_{u^-}\left(dN_u - \lambda_u du\right), \tag{1.1.20}$$

tandis que la $(\mathcal{F}_t^* \vee \mathcal{F}_T)$-backward martingale (1.1.16) est donnée par

$$M_t^* = \int_t^T \sigma_u^* d^* W_u^* + \int_t^T J_{u^+}^* \left( d^* N_u^* - \lambda_u^* du \right), \tag{1.1.21}$$

où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $(J_t)_{t\in[0,T]}$, $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés de carrés intégrables.

Dans ce cas la formule d'Itô (1.1.17) se réécrit

$$\begin{aligned}
\phi(M_t + M_t^*) &= \phi(M_s + M_s^*) + \int_{s^+}^t \phi'(M_{u^-} + M_u^*) dM_u - \int_s^{t^-} \phi'(M_u + M_{u^+}^*) d^* M_u^* \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2) du \\
&\quad + \int_{s^+}^t J_{u^-} \psi(M_{u^-} + M_u^*, J_{u^-}) dN_u - \int_s^{t^-} J_{u^+}^* \psi(M_u + M_{u^+}^*, J_{u^+}^*) d^* N_u^*,
\end{aligned}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$, où

$$\psi(x, y) = \frac{\phi(x+y) - \phi(x) - y\phi'(x)}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Nous rappelons maintenant quelques résultats du calcul de Malliavin sur l'espérance d'une intégrale (forward) d'un processus continu d'une part et d'un processus de sauts pur d'autre part. Notons $D^W$ le gradient de Malliavin relativement au mouvement brownien $(W_t)_{t\in[0,T]}$, défini par

$$D_t^W f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,t_i]}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}), \qquad t \in [0, T],$$

$f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$, et notons $(D^{W-}u)_t$ la trace de $(D_t^{W-} u_s)_{s,t\in[0,T]}$ lui-même défini par la limite à gauche

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0 \leqslant t < s} \mathbb{E}[|D_s^W u_t - (D^{W-}u)_s|^2] ds = 0, \tag{1.1.22}$$

*cf.* Relation (3.7) de la Definition 3.1.1 dans [39], pour $u$ un processus de l'espace $\mathbb{L}_{2,1}$ défini par la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}_{2,1}}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}^2 + \mathbb{E}\left[ \int_0^T \int_0^T |D_s^W u_t|^2 ds dt \right].$$

Par la Proposition 3.2.3 page 193 de [39], l'espérance d'une intégrale anticipante (forward) par rapport au mouvement brownien peut être calculée de la même manière que dans le lemme suivant :

**Lemme 1.1.5.** *On suppose que* $(u_t)_{t\in[0,T]}$ *est continu dans* $\mathbb{L}_{2,1}$ *et que le processus* $D^{W-}u$ *défini par* (1.1.22) *existe. Alors l'intégrale anticipante (forward)* $\int_0^T u_t dW_t$ *existe dans* $L^2(\Omega)$ *et on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (D^{W-}u)_t dt\right].$$

De la même façon, on note $D^N$ l'opérateur de différence par rapport au processus de Poisson $(N_t)_{t\in[0,T]}$, défini par

$$D_t^N F(N.) = F(N. + \mathbf{1}_{[t,\infty[}(\cdot)) - F(N.), \qquad t \in [0,T],$$

pour toute variable aléatoire $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Par le Corollaire 2.9. de [1] ou par le Corollaire 4.5 de [40], voir aussi la Proposition 3.1 de [38], on obtient le lemme suivant, dans lequel $(D^{N-}u)_t, t \in [0,T]$ est défini par

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0 \leqslant t < s} \mathbb{E}[|D_s^N u_t - (D^{N-}u)_s|^2] ds = 0.$$

**Lemme 1.1.6.** *Soit* $T > 0$*. Supposons que* $u \in L^1(\Omega \times [0,T])$ *et que* $((D^{N-}u)_t)_{t\in[0,T]} \in L^1(\Omega \times [0,T])$*, on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t dN_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T u_t \lambda_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_t (D^{N-}u)_t dt\right].$$

Les opérateurs $D^{W^*}$, $D^{W+}$, $D^{N^*}$ et $D^{N^*+}$ sont définis de manière similaire pour le mouvement brownien backward $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ et pour le processus de Poisson backward $(N_t^*)_{t\in[0,T]}$, de la façon suivante

$$D_t^{W^*} f(W_{t_1}^*, \dots, W_{t_n}^*) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[t_i,T]}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}^*, \dots, W_{t_n}^*), \qquad t \in [0,T],$$

$f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$, et

$$D_t^{N^*} F(N.) = F(N. + \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)) - F(N.), \qquad t \in [0,T],$$

et satisfont les analogues backward des Lemmes 1.1.5 et 1.1.6, *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t d^* W_t^*\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (D^{W^*+}u)_t dt\right], \tag{1.1.23}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t d^* N_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T u_t \lambda_t^* dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_t^* (D^{N^*+}u)_t dt\right],, \tag{1.1.24}$$

**Présentation des résultats**

Lorsque $X^*$ et $X$ sont des variables aléatoires gaussiennes représentables sous la forme

$$X^* = x_0 + \int_0^T \sigma^*(t) dW_t, \qquad X = x_0 + \int_0^T \sigma(t) dW_t,$$

avec $\sigma(t)$ et $\sigma^*(t)$ des fonctions déterministes et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien, l'inégalité

$$\mathbb{E}[\phi(X^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(X)], \tag{1.1.25}$$

pour $\phi$ convexe, a lieu si et seulement si

$$\int_0^T |\sigma^*(t)|^2 dt \leqslant \int_0^T |\sigma(t)|^2 dt, \tag{1.1.26}$$

comme on peut le voir en utilisant les probabilités conditionnelles et l'inégalité de Jensen, *cf. e.g.* [3].

Dans le cas où $\sigma_t$ et $\sigma_t^*$ sont aléatoires, la condition (1.1.26) n'est pas suffisante à elle seule pour garantir (1.1.25) pour $\phi$ convexe. Néanmoins, il existe d'ors et déjà quelques résultats dans ce sens. Lorsque $X^* = X_T^*$ est la valeur terminale d'un processus de diffusion $(X_t^*)_{t\in[0,T]}$ solution de l'E.D.S.

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t^*) dW_t, \qquad t \in [0,T], \tag{1.1.27}$$

et que $X = X_T$ est donnée par

$$X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t, \qquad t \in [0,T], \tag{1.1.28}$$

avec $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de carré intégrable, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_T^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(X_T)], \tag{1.1.29}$$

pour toute fonction convexe $\phi$, dès lors que

$$|\sigma_t^*(X_t)| \leqslant |\sigma_t| \; d\mathbb{P}\text{-}p.s., \qquad t \in [0,T],$$

(*cf.* [23]). Ce résultat est dû à la préservation de la convexité du semi-groupe de Markov de (1.1.27). Cette méthode a été étendue dans le cas multi-dimensionnel dans [7].

Les résultats que nous présentons ici constituent une extension de ce type de résultats au cas où $\sigma_t^*$ n'est pas nécessairement un coefficient de diffusion mais est un processus

$(\mathcal{F}_t)$-adapté, intégré contre un mouvement brownien indépendant $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$, *i.e.* lorsque (1.1.27) devient

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^* d\hat{W}_t, \qquad t \in [0,T],$$

tandis que le processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est toujours défini par (1.1.28), *i.e.*

$$X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t, \qquad t \in [0,T],$$

où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ ainsi que $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés.

Cette question a été étudiée en utilisant le calcul stochastique forward/backward dans le cas multi-dimensionnel dans [3], cependant les arguments de [3] ne sont valides que dans le cas où $\sigma_t^*$ est déterministe.

L'inégalité suivante

$$\text{Var}[X_T^*] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma_t^*|^2 dt\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma_t|^2 dt\right] = \text{Var}[X_T]$$

est valide lorsque

$$|\sigma_t^*| \leqslant |\sigma_t|, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - }p.s., \quad t \in [0,T], \tag{1.1.30}$$

cependant cette borne à elle seule ne permet pas d'obtenir l'inégalité de concentration convexe générale (1.1.29).

Les résultats que nous présentons s'appuient sur la proposition 1.1.7. On présente ici de manière informelle cette proposition dans le cas continu.

Soit $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien backward. On considère la $(\mathcal{F}_t)$-martingale

$$M_t = \int_0^t \sigma_u dW_u,$$

et la $(\mathcal{F}_t^* \vee \mathcal{F}_T)$-martingale

$$M_t^* = \int_t^T \sigma_u^* d^* W_u^*,$$

où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$, sont des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi(M_t + M_t^*)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi(M_s + M_s^*)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2)du\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*)\int_u^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right], \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$, où $D^W$ désigne le gradient de Malliavin sur l'espace de Wiener, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ dont la dérivée troisième est bornée.

On déduit de (1.1.31) que l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

est vérifiée sous la condition (1.1.30) et sous la condition additionnelle suivante

$$\sigma_s D_s^W |\sigma_t^*|^2 \geqslant 0, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - }p.s., \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{1.1.32}$$

En utilisant l'égalité en loi

$$\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u \overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^T \sigma_u^* d^* W_u^*,$$

on en déduit l'inégalité de concentration convexe (1.1.29) pour les fonctions convexes $\phi$ dont la dérivée est convexe, *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u\right)\right]. \tag{1.1.33}$$

On vérifie aisément que la condition (1.1.32) est nécessaire à l'obtention du résultat, en prenant par exemple $0 \leqslant \sigma_t = \sigma_t^*, t \in [0,T]$. On remarque également que (1.1.32) est invariante par changement de signe de $\sigma_t^*$ mais ne l'est pas par changement de signe de $\sigma_t$. Cela est cohérent avec le fait que la loi de $\displaystyle\int_0^T \sigma_t dW_t$ n'est pas symétrique en général. On traite le cas à sauts pur et le cas mixte sauts-diffusion dans le Corollaire 1.1.15 et dans le Théorème 1.1.13.

Considérons maintenant quelques exemples d'application de l'inégalité (1.1.33) dans le cas continu.

### Exemples

Considérons le cas où $\sigma_t^*$ et $\sigma_t$ ne sont aléatoires qu'au travers de la valeur courante du mouvement brownien $(W_t)_{t\in[0,T]}$, *i.e.*

$$\sigma_t^* = f^*(t, W_t) \qquad \text{et} \qquad \sigma_t = f(t, W_t), \qquad t \in [0,T],$$

$f, f^* \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$, on a alors

$$\sigma_s \sigma_t^* D_s \sigma_t^* = f(s, W_s) f^*(t, W_t) \frac{\partial f^*}{\partial x}(t, W_t) \mathbf{1}_{[0,t]}(s), \qquad s, t \in [0,T],$$

et on trouve donc que

$$X^* = x_0 + \int_0^T f^*(t, W_t) d\hat{W}_t$$

est plus concentrée que

$$X = x_0 + \int_0^T f(t, W_t) dW_t,$$

dès lors que

$$0 \leqslant f^*(t, x) \leqslant f(t, x), \qquad t \in [0, T], \qquad x \in \mathbb{R},$$

et que $x \mapsto f^*(t, x)$ est croissante pour tout $t \in [0, T]$.

Comme deuxième exemple, considérons le cas où

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t) d\hat{W}_t, \quad \text{et} \quad X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t,$$

*i.e.* $\sigma_t^*$ prend la forme $\sigma_t^* = \sigma_t^*(X_t)$, avec $x \mapsto \sigma_t^*(x)$ uniformément lipschitzienne en $t$, la condition (1.1.30) est alors satisfaite lorsque

$$|\sigma_t^*(X_t)| \leqslant |\sigma_t|, \qquad d\,\mathbb{P}\text{-}p.s., \quad t \in [0, T],$$

et (1.1.32) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \sigma_s \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) D_s^W X_t &= \sigma_s \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) \left( \int_s^t D_s^W \sigma_r dW_r + \sigma_s \right) \\ &\geqslant 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

Dans le cas où $(\sigma_t)_{t \in [0,T]}$ et $(\sigma_t^*)_{t \in [0,T]}$ ne sont aléatoires qu'au travers de la valeur du processus $(X_t)_{t \in 0,T]}$, *i.e.*

$$X^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t) d\hat{W}_t \quad \text{et} \quad X = x_0 + \int_0^T \sigma_t(X_t) dW_t,$$

la condition (1.1.30) s'écrit

$$|\sigma_t^*(x)| \leqslant |\sigma_t(x)|, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T],$$

et comme

$$\begin{aligned} D_s^W \sigma_t^*(X_t) &= \sigma_t^{*'}(X_t) D_s^W(X_t) \\ &= \sigma_t^{*'}(X_t) \sigma_s(X_s) \exp\left( \int_0^t \sigma_u'(X_u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_u'(X_u)|^2 du, \right) \end{aligned}$$

$s, t \in [0, T]$, (*cf. e.g.* Exercice 2.2.1 page 124 de [39]), la condition (1.1.32) devient

$$(\sigma_s(X_s))^2 \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) \geqslant 0, \qquad s, t \in [0, T],$$

ainsi, l'inégalité (1.1.29) est satisfaite si $x \mapsto |\sigma_t^*(x)|$ est croissante sur l'espace d'état de $X_t$. C'est en particulier le cas lorsque $X_T^*$ et $X_T$ admettent les représentations suivantes

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T X_t \sigma^*(t) d\hat{W}_t \quad \text{et} \quad X_T = x_0 + \int_0^T X_t \sigma(t) dW_t,$$

avec $x_0 > 0$ et $\sigma^*(t)$, $\sigma(t)$ des fonctions déterministes telles que

$$|\sigma^*(t)| \leqslant |\sigma(t)|, \qquad t \in [0,T].$$

On présente maintenant dans le détail les résultats du chapitre 3.

**Proposition 1.1.7.** *Supposons que les coefficients $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ appartiennent à l'espace $\mathbb{L}_{2,1}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ de dérivée troisième bornée, on a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2) du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t (J_u \lambda_u \psi(M_u + M_u^*, J_u) - J_u^* \lambda_u^* \psi(M_u + M_u^*, J_u^*)) du\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_u^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \int_u^T J_v^* \lambda_v^* (D_u^W J_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau J_v^*) d\tau dv du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 (\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau dv du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T \lambda_v^* (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)) d\rho d\tau dv du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T \lambda_v^* (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \right. \\
&\qquad \left. \int_0^1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*), J_u) d\rho d\tau dv du\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 (\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*, J_u) d\tau dv du\right],
\end{aligned}$$

*$0 \leqslant s \leqslant t$, où*

$$\psi(x,y) = \frac{\phi(x+y) - \phi(x) - y\phi'(x)}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

On considère maintenant l'application de la Proposition 1.1.7 au cas d'un processus continu puis au cas d'un processus de sauts pur. Considérons tout d'abord le cas d'un processus continu, *i.e.* nous supposons que

$$J_u = J_u^* = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_u = \lambda_u^* = 0, \qquad u \in [0,T]. \tag{1.1.34}$$

**Proposition 1.1.8.** *Supposons que* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Alors, sous la condition* (1.1.34)*, on a pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ *de dérivée troisième bornée*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2)du\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_u^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right], \end{aligned}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$.

Nous considérons maintenant le cas de processus de sauts pur, *i.e.*

$$\sigma_u = \sigma_u^* = 0, \qquad u \in [0,T]. \tag{1.1.35}$$

**Proposition 1.1.9.** *Supposons que* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Sous la condition* (1.1.35)*, on a, pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ *de dérivée troisième bornée*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] = \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t (\lambda_u J_u \psi(M_u + M_u^*, J_u) - \lambda_u^* J_u^* \psi(M_u + M_u^*, J_u^*))du\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)\right. \\ &\qquad\qquad \left.\int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)) d\rho d\tau dv du\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)\right. \\ &\qquad\qquad \left.\int_0^1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*), J_u) d\rho d\tau dv du\right], \end{aligned}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$.

Nous dérivons maintenant des conditions sur les coefficients $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$, $(J_t)_{t\in[0,T]}$, $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ ainsi que sur $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$, $(\lambda_t^*)_{t\in[0,T]}$ qui assurent la croissance de la martingale forward/backward $(M_t + M_t^*)_{t\in[0,T]}$ pour l'ordre convexe. Considérons tout d'abord le cas général d'un processus de diffusion à sauts.

**Théorème 1.1.10.** *Supposons que les processus* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *et* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartiennent à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$*, et que* *i)* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p.,*

*ii)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p.,*

*iii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p.,*

*iv)* $(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) D_u^N \sigma_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\,dudv$ *- p.p.,* $0 \leqslant u \leqslant v$, $\tau \in [0, 1]$,

*v)* $\sigma_u \sigma_v^* D_u^W \sigma_v^* \geqslant 0$, $\sigma_u D_u^W J_v^* \geqslant 0$, $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\,dudv$ *- p.p.* $0 \leqslant u \leqslant v$,

*alors on a*

$$\mathbb{E}[\phi(M_s + M_s^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(M_t + M_t^*)], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{1.1.36}$$

*pour toute fonction convexe* $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *dont les dérivées première et seconde sont convexes.*

Nous détaillons maintenant le cas de martingales continues d'une part et de martingales à sauts pur d'autre part pour lesquelles les conditions se simplifient. Considérons tout d'abord le cas continu, *i.e.* on suppose que la condition (1.1.34) est vérifiée.

**Théorème 1.1.11.** *Supposons que* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Supposons que* $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *vérifient* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p., ainsi que :*

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \geqslant 0, \qquad d\mathbb{P}\,dudv \text{ - } p.p. \tag{1.1.37}$$

*Alors pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*, on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_s + M_s^*)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi(M_t + M_t^*)\right], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1.38}$$

*pour toute fonction convexe* $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *de dérivée convexe.*

En remplaçant (1.1.37) par

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \leqslant 0, \qquad d\mathbb{P}\,dudv \text{ - } p.p.,$$

on obtient que (1.1.38) est vérifiée pour toute fonction convexe $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de dérivée concave.

Dans le théorème suivant, on s'intéresse au cas de processus de sauts pur, *i.e.* on suppose que la condition (1.1.35) est vérifiée.

**Théorème 1.1.12.** *Supposons que* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Supposons que les coefficients* $(J_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *vérifient :*

*i)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p.,*

*ii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- p.p.,*

*iii)* $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\,dudv$ *- p.p.,* *alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_s+M_s^*)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi(M_t+M_t^*)\right], \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \tag{1.1.39}$$

*pour toute fonction convexe $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de dérivées première et seconde convexes.*

On présente maintenant les résultats principaux énoncés et démontrés dans le chapitre 3. Il s'agit d'inégalités de concentration convexe entre deux variables aléatoires admettant les représentations intégrales suivantes

$$\int_0^T \sigma_u dW_u + \int_0^T J_{u^-}(dN_u - \lambda_u du),$$

et

$$\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^T J_{u^-}^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du),$$

où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$, $(J_t)_{t\in[0,T]}$ , $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ sont des processus $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés de carrés intégrables, et où $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\hat{N}_t)_{t\in[0,T]}$ sont respectivement un mouvement brownien standard forward et un processus de Poisson forward d'intensité $(\lambda_t^*)_{t\in[0,T]}$. On suppose $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\hat{N}_t)_{t\in[0,T]}$ indépendants l'un de l'autre et indépendants de $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et de $(N_t)_{t\in[0,T]}$. On présente ici le théorème dans le cas mixte.

**Théorème 1.1.13.** *Supposons que les processus $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ et $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ appartiennent à $\mathbb{L}_{2,1}$, et supposons de plus que*

*i)* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$ $d\,\mathbb{P}\,du$ - *p.p.*,

*ii)* $0\leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ - *p.p.*,

*iii)* $\lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ - *p.p.*,

*iv)* $(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) D_u^N \sigma_v^* \geqslant 0$, $d\,\mathbb{P}\,du$ - *p.p.*, $0\leqslant u\leqslant v$, $\tau\in[0,1]$,

*v)* $\sigma_u \sigma_v^* D_u^W \sigma_v^* \geqslant 0$, $\sigma_u D_u^W J_v^* \geqslant 0$, $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\,\mathbb{P}\,dudv$ - *p.p.*

*alors, on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^T J_u^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du)\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u + \int_0^T J_u(dN_u - \lambda_u du)\right)\right], \tag{1.1.40}$$

*pour toute fonction convexe $\phi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de dérivées première et seconde convexes.*

Lorsque $\sigma_v^*\geqslant 0$ la condition $(iv)$ ci-dessus peut être remplacée par la condition
$iv')$ $D_u^N\sigma_v^* \geqslant 0, d\,\mathbb{P}\,dudv$ - *p.p.*
En effet dans ce cas

$$\begin{aligned} \sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^* &= \sigma_v^* + \tau(\sigma_v^*(W., N. + \mathbf{1}_{[u,+\infty[}(\cdot)) - \sigma_v^*) \\ &= (1-\tau)\sigma_v^* + \tau\sigma_v^*(W., N. + \mathbf{1}_{[u,+\infty[}(\cdot)) \end{aligned}$$

$$\geqslant \; 0. \tag{1.1.41}$$

Nous détaillons ici les implications du théorème précédent dans les cas de processus continus d'une part et de sauts pur d'autre part. Commençons par le cas continu, *i.e.* on suppose que la condition (1.1.34) est vérifiée.

**Corollaire 1.1.14.** *Supposons que* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$. *Supposons de plus que* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$, $d\,\mathbb{P}\,dudv$ *- p.p. et que*

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \geqslant 0, \qquad d\,\mathbb{P}\,du\text{ - }p.p., \qquad 0 \leqslant u \leqslant v, \tag{1.1.42}$$

*alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u\right)\right], \qquad T > 0, \tag{1.1.43}$$

*pour toute fonction convexe* $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *de dérivée convexe.*

On s'intéresse maintenant au cas de processus à sauts pur, *i.e.* on suppose que la condition (1.1.35) est vérifiée.

**Corollaire 1.1.15.** *Supposons que* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *appartient à l'espace* $\mathbb{L}_{2,1}$ *et que*

*i)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ *- p.p.*,

*ii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ *- p.p.*,

*iii)* $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\,\mathbb{P}\,dudv$ *- p.p.*

*Alors pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, *on a*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T J_{u^-}^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du)\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T J_{u^-}(dN_u - \lambda_u du)\right)\right], \tag{1.1.44}$$

*pour toute fonction convexe* $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *de dérivées première et seconde convexes.*

## 1.2 Mouvement brownien conditionné à rester dans un segment

### 1.2.1 Théorèmes limites

On décrit ici les résultats relatifs au conditionnement de processus présentés dans le chapitre 4. Ce sont des résultats de convergence en loi, ils s'inscrivent dans la continuité de résultats obtenus dans [19], [24], etc. Nous comparons les processus obtenus avec le méandre brownien et avec l'excursion brownienne. Nous rappelons ici les définitions de ces processus.

Soit $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard. On note $\sigma$ (resp. $\tau$) le dernier temps de passage en 0 avant (resp. premier temps de passage après) le temps 1, *i.e.*

$$\sigma := \sup\{s < 1;\ W_s = 0\} \quad \text{et} \quad \tau := \inf\{s > 1;\ W_s = 0\}.$$

On appelle méandre brownien le processus $(W_t^+)_{t\in[0,1]}$ défini par

$$W_t^+ = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}|W_{\sigma+\Delta t}|,$$

où $\Delta = 1 - \sigma$. Le processus ainsi défini est positif sur $[0,1]$ et les propriétés de symétrie, d'invariance en loi par translation et par changement d'échelle permettent de considérer ce processus comme un mouvement brownien conditionné à rester positif.

On appelle excursion brownienne signée le processus $(W_t^\circ)_{t\in[0,1]}$ défini par

$$W_t^\circ = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}W_{\sigma+\Delta t},$$

où $\Delta = \tau - \sigma$, *cf. e.g.* [28]. Ce processus est de signe constant sur $[0,1]$ et on a $W_1^\circ = 0$. Les mêmes raisons que précédemment permettent de considérer ce processus comme un mouvement brownien conditionné à revenir pour la première fois en 0 au temps 1. On appelle excursion brownienne non-signée le processus $(|W_t^\circ|)_{t\in[0,1]}$.

Depuis le début des années 70 des théorèmes de convergence en loi ont été utilisés afin de construire des processus conditionnés par des évènements de probabilité nulle $\Lambda$. Parmi ces théorèmes, on peut distinguer essentiellement deux grandes familles. La première approche s'appuit sur les marches aléatoires tandis que la deuxième est une approche fonctionnelle.

Les idées sous-jacentes à chacune de ces approches se résument de la façon suivante : la première méthode consiste à approximer le mouvement brownien par une suite de processus approchants et à conditionner ces processus par un évènement $\Lambda$ alors que la deuxième méthode consiste à approximer l'évènement conditionnant. Nous détaillons maintenant chacune de ces approches.

Nous rappelons ici le théorème de Donsker sur lequel repose la première méthode.

**Théorème 1.2.1.** *Soit* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires* i.i.d. *centrées de variance finie. Lorsque* $n$ *tend vers* $+\infty$*, la suite des processus* $(X_n(t))_{t\in[0,1]}$, $n \geqslant 1$, *définis par*

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} X_i$$

*converge en loi dans l'espace $D([0,1])$ des fonctions continues à droite et limitées à gauche (càdlàg) muni de la topologie $J_1$ de Skorohod* (cf. *[10]), vers le mouvement brownien sur* $[0,1]$.

L'idée est alors que si l'on conditionne les marches aléatoires par un évenement $\Lambda$, la suite convergera alors vers un processus qui respectera la condition imposée par $\Lambda$ et qui pourra être interprété comme le mouvement brownien conditionné par un évènement $\Lambda$.

En 1974, D. L. Iglehart utilise cette approche dans [27] pour construire un mouvement brownien conditionné à rester positif sur $[0,1]$ et deux ans plus tard E. Bolthausen affaiblit les hypothèses techniques sur les variables aléatoires sous-jacentes à la marche. En 1976, W. D. Kaigh établit dans [30] qu'une suite de marches aléatoires conditionnées à revenir pour la première fois en 0 au temps $n$ et renormalisées comme dans le théorème 1.2.1 converge en loi vers un processus qu'il interprète comme le mouvement brownien conditionné à avoir un signe constant sur $[0,1]$ et à revenir en 0 au temps 1.

D'un point de vue technique les démonstrations comportent deux étapes. Dans un premier temps, on calcule les lois fini-dimensionnelles pour les marches aléatoires conditionnées et l'on montre que ces distributions convergent. Puis, dans un deuxième temps, on montre la tension de la suite de mesures induites sur l'espace des fonctions càdlàg, ce qui permet de conclure à la convergence en loi de la suite de mesures (*cf.* [10]).

L'approche fonctionnelle consiste à considérer une suite $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante d'évènements de probabilité non nulle qui "tend" vers $\Lambda$. Plus précisément, la suite $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion et $\cap_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n = \Lambda$. On cherche ensuite à établir la convergence en loi de la suite $(W_u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des mouvements browniens conditionnés par $\Lambda_n$. Notons que cette approche est plus générale et ne se limite pas au mouvement brownien.

Cette approche a notamment été utilisée par Durrett, Iglehart et Miller dans [19] pour établir des liens entre mouvement brownien, méandre brownien, pont brownien et excursion brownienne. Plus précisément, ces auteurs établissent que lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0 :

– le mouvement brownien sur $[0,1]$ conditionné à rester supérieur à $-\varepsilon$ tend vers le méandre brownien,
– le méandre brownien sur $[0,1]$ conditionné à avoir une valeur terminale inférieure à $\varepsilon$ tend vers l'excursion brownienne,
– le pont brownien conditionné à rester supérieur à $-\varepsilon$ tend vers l'excursion brownienne.

Plus récemment, un point de vue similaire a été utilisé pour conditionner le mouvement brownien (multidimensionnel) issu d'un point à rester dans un cône issu de ce même point (see [24]).

Les grandes lignes des preuves suivent la même ligne que précédemment. On calcule les lois fini-dimensionnelles pour les processus conditionnés, on montre la convergence de ces distributions puis on prouve la tension de la suite de mesures induites sur l'espace des fonctions continues ce qui permet de conclure à la convergence en loi de la suite de mesure (*cf.* [10]).

Dans le chapitre 4, on construit un mouvement brownien conditionné à rester dans l'intervalle $[0, \ell]$ jusqu'au temps 1 et on considère plusieurs cas selon le comportement voulu au temps 1. Le mouvement brownien prenant (presque sûrement) des valeurs négatives sur l'intervalle $[0, 1]$, l'évènement "le mouvement brownien reste dans l'intervalle $[0, \ell]$ jusqu'au temps 1" est de mesure nulle et il est impossible de procéder à un conditionnement direct. Nous adoptons pour répondre à ce problème le point de vue de [19], et établissons trois théorèmes de convergence fonctionnelle. Le Théorème 1.2.3 concerne le cas où le mouvement brownien est conditionné à rester dans $[0, \ell]$ jusqu'au temps 1 sans condition finale, dans le Théorème 1.2.4 on traite le cas où on ajoute la condition finale $W_1 = 0$, enfin le Théorème 1.2.5 concerne le cas où le mouvement brownien traverse le segment pour finir en $\ell$, *i.e.* $W_1 = \ell$.

Notons $m_t$ et $M_t$ les minimum et maximum courants du mouvement brownien, *i.e.*

$$m_t = \min_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s, \qquad M_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s.$$

On commence par rappeler le principe de réflexion, *cf. e.g.* [31].

Principe de Réflexion

*Soient $a < 0$ et $a < x_1 < x_2$, on a*

$$\mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2], m_t < a\right) = \mathbb{P}\left(W_t \in [2a - x_2, 2a - x_1]\right). \tag{1.2.1}$$

Donnons encore ici quelques notations. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Étant donné un évènement $\Lambda \in \mathcal{F}$ de probabilité non-nulle, l'espace $(\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, \mathbb{P}_\Lambda)$ où $\mathcal{F}_\Lambda := \{A \cap \Lambda : A \in \mathcal{F}\}$ est la trace de $\mathcal{F}$ sur $\Lambda$ et où $\mathbb{P}_\Lambda$ correspond à la mesure $\mathbb{P}$ conditionnellement à l'évènement $\Lambda$, *i.e.*

$$\mathbb{P}_\Lambda(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\Lambda)} = \mathbb{P}(A|\Lambda), \forall A \in \mathcal{F}_\Lambda.$$

À une variable aléatoire $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ correspond naturellement une variable aléatoire $X^\Lambda$ sur $(\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, \mathbb{P}_\Lambda)$ définie comme la restriction de $X$ à $\Lambda$. Compte tenu de la définition de la mesure $\mathbb{P}_\Lambda$, la variable aléatoire $X_\Lambda$ peut être considérée comme $X$ conditionnée par l'évènement $\Lambda$. Le résultat suivant assure que sous certaines conditions un processus markovien soumis à un conditionnement reste markovien, *cf.* [19].

**Lemme 1.2.2.** *Soit $X$ une fonction markovienne sur l'espace des fonctions continues $C[0, 1]$. Soit $\mathcal{L}$ un ensemble borélien de $C[0, 1]$ tel que $\mathbb{P}(X \in \mathcal{L}) \neq 0$. On note $\Lambda =$*

*$\{X \in \mathcal{L}\}$ et $\pi_{[0,t]}$ (resp. $\pi_{[t,1]}$) la projection de $C[0,1]$ sur $C[0,t]$ (resp. $C[t,1]$). Si pour tout $t \in [0,1]$, il existe des boréliens $A_t \subset C[0,t]$ et $B_t \subset C[t,1]$ tels que*

$$\mathcal{L} = \pi_{[0,t]}^{-1}(A_t) \cap \pi_{[t,1]}^{-1}(B_t),$$

*alors $X^\Lambda$ est markovien.*

Dans les théorèmes suivants, les noyaux de transition sont exprimés au moyen de la fonction theta de Jacobi $\vartheta$, définie pour $z \in \mathbb{C}$ et $\tau$ dans le demi-plan des complexes à partie imaginaire positive, par :

$$\vartheta(z,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi k^2 \tau + 2k\pi i z\right). \tag{1.2.2}$$

Il existe des liens profonds entre la fonction theta de Jacobi et d'autres fonctions associées d'une part et le conditionnement du mouvement brownien d'autre part. Ces liens proviennent de l'équation de la chaleur à laquelle la dynamique du mouvement brownien et la fonction theta de Jacobi sont toutes les deux rattachées. On renvoie à [41] pour une étude détaillée.

Nous énonçons ici les théorèmes obtenus dans le chapitre 4.

Le premier de ces résultats concerne le cas où l'extrémité du processus est laissée libre. On considère l'évènement

$$\Lambda_t^{a,b} := \{W_s \in [a,b], s \in [0,t]\}.$$

Dans le cas où $t = 1$, on notera simplement $\Lambda^{a,b} := \Lambda_1^{a,b}$, par ailleurs si $b = \ell$, on notera $\Lambda^\varepsilon := \Lambda^{-\varepsilon,\ell}$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $W^{\ell,\varepsilon}$ le mouvement brownien conditionné à rester dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ jusqu'au temps 1, *i.e.* $W^{\ell,\varepsilon} := W^{\Lambda^\varepsilon}$.
Dans la suite, $\phi_t$ désigne la densité gausienne centrée de variance $t$,

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

**Théorème 1.2.3.** *Lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, le processus conditionné $W^{\ell,\varepsilon}$ converge en loi, dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues muni de la topologie uniforme, vers un processus de Markov $W^\ell$ dont le noyau de transition est*

$$p_\ell(s,x;t,y) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\frac{H_{1-t}(y)G_t^\ell(y)}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)} & \textit{si } 0 = s,\ x = 0, \\ \frac{H_{1-t}(y)}{H_{1-s}(x)}\left(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\right) & \textit{si } 0 < s, \\ 0 & \textit{sinon}, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

*pour* $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ *et* $x, y \in (0, \ell)$, *où*

$$H_s(x) = \begin{cases} \int_{-x}^{\ell-x} \phi_s(\xi)\vartheta\left(\frac{\ell\xi}{2\pi s}i, 1 + \frac{\ell^2}{2\pi s}i\right) d\xi, & \textit{si } s > 0, \\ 1 & \textit{si } s = 0, \end{cases}$$

$$G_t^\ell(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x),$$

*et*

$$r_{s,t}\left(x\right) := \phi_{t-s}(x)\vartheta\left(\frac{\ell x}{\pi\left(t-s\right)}i, \frac{2\ell^2}{\pi\left(t-s\right)}i\right).$$

Nous présentons maintenant le cas où le mouvement brownien est également conditionné à quitter l'intervalle $[0, \ell]$ au temps 1. Deux cas sont possibles : ou bien $W_1 = 0$ ou bien $W_1 = \ell$.

Commençons par le cas où $W_1 = 0$. Soit $I^{\downarrow,\varepsilon} = [-\varepsilon, \varepsilon]$ et soit $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ le mouvement brownien conditionné à rester dans $[-\varepsilon, \ell]$ jusqu'au temps 1 et à appartenir à $I^{\downarrow,\varepsilon}$ au temps 1, *i.e.* $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ est le mouvement brownien conditionné par l'évènement

$$\Lambda^{\downarrow,\varepsilon} := \{W_1 \in I^{\downarrow,\varepsilon}, \Lambda^\varepsilon\}.$$

**Théorème 1.2.4.** *Il existe* $\ell_0 > 0$*, tel que pour* $\ell > \ell_0$*, le processus* $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ *converge en loi dans l'espace* $C[0, 1]$ *des fonctions continues muni de la topologie uniforme, lorsque* $\varepsilon$ *tend vers 0, vers un processus de Markov* $W^{\ell,\downarrow}$ *dont le noyau de transition est :*

$$p_{\ell,\downarrow}\left(s, x; t, y\right) dy = \begin{cases} -\frac{2G_{1-t}^\ell(y)G_t^\ell(y)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_1''(2k\ell)} dy & \textit{si } 0 = s < t < 1, \, x = 0, \\ \frac{G_{1-t}^\ell(y)}{G_{1-s}^\ell(x)}\big(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\big)dy & \textit{si } 0 < s < t < 1, \\ \delta_0(dy) & \textit{si t=1}, \\ 0 \, dy & \textit{sinon}, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

$0 \leqslant s < t \leqslant 1$ *et* $x, y \in (0, \ell)$, *avec* $G^\ell$ *définie comme dans le Théorème 1.2.3.*

Considérons maintenant le deuxième cas. Soient $I^{\uparrow,\varepsilon} = [\ell - \varepsilon, \ell]$ et $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ le mouvement brownien conditionné à rester dans $[-\varepsilon, \ell]$ jusqu'au temps 1 et à finir en $I^{\uparrow,\varepsilon}$, *i.e.* $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ est le mouvement brownien par l'évènement

$$\Lambda^{\uparrow,\varepsilon} := \{W_1 \in I^{\uparrow,\varepsilon}, \Lambda^\varepsilon\}.$$

**Théorème 1.2.5.** *Il existe $\ell_0$ tel que pour $\ell > \ell_0$, lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, le processus $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ converge en loi, dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues muni de la topologie uniforme, vers un processus de Markov $W^{\ell,\uparrow}$ dont le noyau de transition est*

$$p(s,x;t,dy) = \begin{cases} \frac{2G^{\ell}_{1-t}(\ell-y)G^{\ell}_{t}(y)}{\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_1''((2k+1)\ell)}dy & \text{si } 0 = s < t < 1,\ x = 0, \\ \frac{G^{\ell}_{1-t}(\ell-y)}{G^{\ell}_{1-s}(\ell-x)}\big(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\big)dy & \text{si } 0 < s < t < 1, \\ \delta_\ell(dy) & \text{si } t = 1, \\ 0\,dy & \text{sinon}, \end{cases} \tag{1.2.5}$$

*$0 \leqslant s < t \leqslant 1$, $x, y \in (0,\ell)$, avec $G^\ell$ définie comme dans le Théorème 1.2.3.*

**Remarque 1.2.6.** *Dans les deux précédents théorèmes, la convergence a lieu dès lors que le noyau de transition est bien défini,* i.e. *si les dénominateurs ne sont pas nuls. Par un argument de continuité, il est clair que c'est bien le cas pour $\ell$ assez grand. S'il n'existe pas de raisons profondes qui poussent à penser qu'il existe un seuil en-deça duquel la convergence n'a pas lieu, nous ne sommes cependant pas parvenus à le montrer et cette question reste ouverte. Néanmoins, par des arguments d'analyse élémentaire, nous avons établi que la convergence a lieu pour $\ell \geqslant 1,66$.*

D'un point de vue heuristique on s'attend à ce que le mouvement brownien conditionné à rester dans $[0,\ell]$ jusqu'au temps 1 converge vers le méandre brownien lorsque $\ell$ tend vers $+\infty$. Dans le même temps, on s'attend à ce que le mouvement brownien conditionné à rester dans $[0,\ell]$ et à finir en 0 au temps 1 converge vers l'excursion brownienne.

**Proposition 1.2.7.** *Les lois fini-dimensionnelles du processus $W^\ell$ convergent, lorsque $\ell$ tend vers $+\infty$, vers celles du méandre brownien.*
*Les lois fini-dimensionnelles du processus $W^{\ell,\uparrow}$ convergent, lorsque $\ell$ tend vers $+\infty$, vers celles de l'excursion brownienne non signée.*

### 1.2.2 Ponts markoviens

On présente ici une construction alternative de processus conditionnés. Nous nous appuyons sur un article de J.-C. Zambrini et N. Privault (*cf.* [43] ) dans lequel les auteurs cherchent à conditionner les lois initiale et finale d'un processus de Markov donné $(\xi_t)_{t\in[0,T]}$. Les processus ainsi construits sont markoviens backward et forward. La méthode utilisée est à rapprocher des $h$-transformées de Doob.

On note

$$h(s,x,t,dy) = \mathbb{P}(\xi_t \in dy | \xi_s = x)$$

et

$$h^\dagger(s,dx,t,y) = \mathbb{P}(\xi_s \in dx | \xi_t = y),$$

$0 \leqslant s < t$.

La combinaison des deux théorèmes suivants ([43]) permet de construire à partir du noyau de transition d'un processus markovien $(\xi)_{t\in[0,T]}$, un processus markovien avec des lois initiale et finale prescrites.

**Théorème 1.2.8.** *Supposons que $h$ et $h^\dagger$, sont adjoints par rapport à la mesure de Lebesgue,* i.e.

$$h(s,x,t,dy)dx = h^\dagger(s,dx,t,y)dy.$$

*Soit $\eta_0^*$ et $\eta_1$ deux fonctions strictement positives, telles que pour un certain $t \in [0,1]$.*

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_t^*(x)\eta_t(x)dx = 1, \tag{1.2.6}$$

*avec*

$$\eta_t^*(y) = \int_{\mathbb{R}} \eta_0^*(x)h^\dagger(0,dx,t,y), \tag{1.2.7}$$

*et*

$$\eta_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \eta_1(y)h(0,x,1,dy), \tag{1.2.8}$$

*alors il existe un processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ markovien forward et backward, dont les probabilités de transition sont données par*

$$p(s,x,t,y) = \frac{\eta_t(y)}{\eta_s(x)}h(s,x,t,y) \tag{1.2.9}$$

$$p^\dagger(s,x,t,y) = \frac{\eta_t^*(y)}{\eta_s^*(x)}h^\dagger(s,x,t,y)$$

*et dont la densité au temps $t$ est $\eta_t(x)\eta_t^*(x)$.*

En particulier les densités des lois aux temps $0$ et $1$ sont respectivement $\eta_0(x)\eta_0^*(x)$ et $\eta_1(x)\eta_1^*(x)$.

Le théorème suivant permet d'affirmer que l'on peut prescrire les lois initiale et finale du processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$. Ce résultat est la version unidimensionnelle d'un théorème dû à Beurling ([9]).

**Théorème 1.2.9.** *Soient $\pi_0$ et $\pi_1$ deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et soit un noyau de Markov $h(s,x,t,y)$ strictement positif et continu en $(x,y)$. Il existe deux mesures $\eta_0^*(dx)$ et $\eta_1(dy)$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que*

$$\pi_0(dx) = \Big(\int_{\mathbb{R}} h(0,x,1,y)\eta_1(dy)\Big)\eta_0^*(dx),$$

*et*

$$\pi_1(dy) = \Big(\int_{\mathbb{R}} h(0,x,1,y)\eta_0^*(dx)\Big)\eta_1(dy).$$

En particulier, lorsque les mesures $\pi_0(dx)$ et $\pi_1(dy)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, $\eta_0^*(dx)$ et $\eta_1(dy)$ le sont aussi. En notant $\eta_0^*(x)$ et $\eta_1(y)$ leur densité on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \eta_0(x)\eta_0^*(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \eta_1(y)h(0,x,1,y)\,dy\;\eta_0^*(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(0,x,1,y)\eta_1(dy)\eta_0^*(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi_0(dx) = 1.\end{aligned}$$

La condition (1.2.6) est satisfaite, nous pouvons donc appliquer le Théorème 1.2.8. Dans ce cas, le processus markovien $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ ainsi construit a donc bien les lois initiale et finale prescrites. Ainsi, si $\pi_0(dx)$ et $\pi_1(dy)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, $\eta_0^*(dx)$ et $\eta_1(dy)$ le sont aussi. En combinant les deux théorèmes précédents, on peut construire un pont markovien forward/backward dirigé par $\xi$, avec les lois initiale et finale choisies.

Le théorème suivant précise la dynamique du processus construit dans le cas particulier où $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus de diffusion donné par

$$d\xi_t = cdt + \sigma dW_t.$$

**Théorème 1.2.10.** *Soient $\pi_0(dx)$ et $\pi_1(dy)$ deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, de densités strictement positives. Il existe un processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ ayant pour loi initiale $\pi_0(dx)$ et pour loi finale $\pi_1(dy)$, dirigé par $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$, en ce sens que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ est solution faible de l'E.D.S.*

$$dZ_t = cdt + \sigma dW_t + \sigma^2 \nabla \log \eta_t(Z_t)dt. \tag{1.2.10}$$

Dans la fin de cette section nous expliquons comment le théorème 1.2.8 permet de construire certains processus usuels liés au mouvement brownien ainsi que les processus décrits dans les théorèmes 1.2.4 et 1.2.5.

Tout d'abord, rappelons que l'équation de la chaleur sur la droite $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tag{1.2.11}$$

admet pour solution fondamentale la fonction

$$K(t,x,y) = \phi_t(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}},$$

et que cette dernière est liée au noyau de transition $h$ du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ par l'identité

$$h(s,x,t,y) = K(t-s,x,y).$$

On considère maintenant l'équation de propagation de la chaleur sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$, *i.e.* on considère l'équation (1.2.11) avec la condition de Dirichlet

$$h(0,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Le noyau de Green de cette équation est

$$K_{hp}(t,x,y) = (\phi_t(y-x) - \phi_t(y+x)).$$

On définit alors $h_{hp}(s,x,t,y)$ par

$$h_{hp}(s,x,t,y) = K_{hp}(t-s,x,y), \qquad 0 \leqslant s < t < 1, \quad x,y \in \mathbb{R}_+.$$

Afin de construire l'excursion brownienne, on pose comme mesure finale $\eta_1(dy) = \delta_\varepsilon(dy)$, la mesure de Dirac en $\varepsilon > 0$. L'expression (1.2.8) devient alors

$$\eta_t(y) = \int_{\mathbb{R}_+} h_{hp}(t,y,x,\xi)\delta_\varepsilon(\xi) = h_{hp}(t,y,1,\varepsilon).$$

Pour $0 < s < t < 1$ et $x,y > 0$, la transformée (1.2.9) du noyau de transition est donc

$$p_\varepsilon(s,x,t,y) = \frac{\eta_t(y)}{\eta_s(x)} h_{hp}(s,x,t,y) = \frac{h_{hp}(t,y,1,\varepsilon)}{h_{hp}(s,x,1,\varepsilon)} h_{hp}(s,x,t,y).$$

en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$ dans cette expression, on a

$$p(s,x,t,y) = \frac{(1-s)\; y\; \phi_{1-t}(y)}{(1-t)\; x\; \phi_{1-s}(x)} \left(\phi_{t-s}(x-y) - \phi_{t-s}(x+y)\right). \tag{1.2.12}$$

Pour $s = 0 < t < 1$ et $x,y > 0$, on a

$$p_\varepsilon(0,x,t,y) = \frac{\eta_t(y)}{\eta_s(x)} = \frac{h_{hp}(t,y,1,\varepsilon)}{h_{hp}(t,x,1,\varepsilon)} h_{hp}(s,x,t,y).$$

En faisant tendre successivement $x$ et $\varepsilon$ vers 0, on obtient

$$p(0,0,t,y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(t(1-t))^{\frac{3}{2}}}\; y^2 e^{-\frac{y^2}{2t(1-t)}}. \tag{1.2.13}$$

Les expressions (1.2.12) et (1.2.13) constituent le noyau de transition de l'excursion brownienne non-signée (*cf. e.g.* [30]).

Le calcul de $\nabla \log \eta_t$ donne (en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0)

$$\nabla \log \eta_t(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1-t}.$$

La proposition 1.2.10 permet alors de penser que ce processus satisfait l'E.D.S.

$$dZ_t = dW_t + \left(\frac{1}{Z_t} - \frac{Z_t}{1-t}\right) dt. \tag{1.2.14}$$

**Remarque 1.2.11.** *On obtient le même résultat, en partant du noyau de Bessel*

$$h_B(s,x,t,y) = \frac{y}{x} h_{hp}(t-s,x,y).$$

*On a alors*

$$\nabla \log \eta_t(y) = -\frac{y}{1-t},$$

*et le théorème permet de conjecturer que le processus $Z$ est également solution de l'E.D.S.*

$$dZ_t = dB_t - \frac{Z_t}{1-t} dt, \tag{1.2.15}$$

*où $B_t$ est le processus de Bessel.*

Afin de construire le méandre brownien, on pose maintenant comme condition initiale $\eta_0^*(dx) = \delta_\varepsilon(dx)$. L'expression (1.2.7) devient

$$\eta_1^*(y) = \int_{\mathbb{R}_+} h_{hp}(0,x,1,y)\eta_0^*(dx) = h_{hp}(0,\varepsilon,1,y) = y \exp\left(-\frac{y}{2}\right) 2\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Par ailleurs le principe de réflexion permet de déterminer la loi finale du méandre brownien et on a

$$\mathbb{P}(W_1^+ \in dy) = y \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) dy.$$

On est donc amené à poser $\eta_1(dy) = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)dy$ de sorte que $\eta_1(y)\eta_1^*(y)$ soit la densité souhaitée, *i.e.*

$$\eta_1(y)\eta_1^*(y)dy = \mathbb{P}(W_1^+ \in dy).$$

L'expression (1.2.8) devient

$$\begin{aligned} \eta_t(y) &= \int_{\mathbb{R}_+} h_{hp}(t,y,1,\xi)\eta_1(d\xi) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_+} \phi_{1-t}(\xi - y) - \phi(\xi + y) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \phi_\xi d\xi$$

La transformée selon (1.2.9) du noyau $h_{hp}$ est donc formellement

$$p(s, x, t, y) = \frac{\int_0^y \phi_{1-t}(u)du}{\int_0^x \phi_{1-s}(u)du} \left(\phi_{t-s}(y-x) - \phi_{t-s}(y+x)\right). \tag{1.2.16}$$

Pour $s \neq 0$, l'expression (1.2.16) est bien définie. Pour $s = 0$, $x = \varepsilon$, on obtient en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0

$$p(0, 0, t, 1) = 2t^{-\frac{3}{2}} y \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \int_0^y \phi_{1-t}(u)du. \tag{1.2.17}$$

Les expressions (1.2.17) et (1.2.16) constituent le noyau de transition du méandre brownien.

Le calcul de $\nabla \log \eta_t$ donne (en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$)

$$\nabla \log \eta_t(x) = \frac{\phi_{1-t}(x)}{\int_0^x \phi_{1-t}(u)du}.$$

La proposition 1.2.10 permet alors de penser que ce processus satisfait l'E.D.S.

$$dZ_t = dW_t + \frac{\phi_{1-t}(Z_t)}{\int_0^{Z_t} \phi_{1-t}(u)du}.$$

Considérons maintenant, l'équation de la chaleur (1.2.11) sur $[0, 1]$ avec une condition de Dirichlet au bord, *i.e.*

$$h(x, t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \{0, 1\}.$$

Le noyau de Green de cette équation est

$$K_I(t, x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\phi_t(y - x + 2k) - \phi_t(y + x + 2k)). \tag{1.2.18}$$

De la même façon, on définit $h_I$ par

$$h_I(s, x, ty) = K_I(t, x, y).$$

En posant comme condition finale la mesure de Dirac en $\varepsilon$, *i.e.* $\eta_1(y) = \delta_\varepsilon(dy)$, et en suivant la méthode décrite plus haut, on trouve le noyau de transition défini dans le théorème 1.2.4. L'expression de $\nabla \log \eta_t$ n'est cependant pas suffisamment explicite pour apporter de l'information quant à la dynamique de ce processus.

### 1.2.3 Interpolation stochastique

Soit $X$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini *via* l'E.D.S.suivante :

$$dX_t = a\,(t, X_t)\,dt + b\,(t, X_t)\,dW_t \tag{1.2.19}$$

avec $a, b : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour $T > 0$ et soit $I$ une partie de $\mathbb{R}$. Supposons que la valeur du processus $X$ ne puisse pas être connue lorsque $X$ est dans $I$, en d'autres termes qu'on ait seulement connaissance du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par

$$Y_s = X_s \mathbb{1}_{X_s \notin I}.$$

Ce modèle peut par exemple décrire la situation où $X$ est un signal et où l'impossibilité d'observer le signal traduit un défaut des instruments de mesure (*e.g.* typiquement un phénomène de saturation). La question naturelle qui apparaît concerne l'estimation de $X_{t_0}$ en une date $t_0$ auquel la valeur du processus est inconnue. Ce problème a été étudié d'un point de vue statistique dans [16], [33] et [34].

Dans [33] par exemple, l'auteur étudie le cas où $I = \mathbb{R}_+$. Il considère alors un instant $t_0$ où le processus est caché et cherche à estimer $X_{t_0}$ en fonction de l'information contenue par le passé de sa trajectoire, $\mathfrak{S}(Y_s, s \leqslant t_0)$. Le caractère markovien de $X$ permet de conclure que $X_{t_0}$ ne dépend de son passé qu'au travers du dernier temps d'entrée dans $I$, $\sigma_{t_0} = \sup\{s \leqslant t_0; X_s \notin I\}$. Plus précisément, sous certaines conditions de régularité sur $f$ et $g$, la diffusion en temps inversé existe. Pour cette diffusion $\sigma_{t_0}$ est un temps d'arrêt et la propriété de Markov forte appliquée permet de conclure que le meilleur estimateur de $X_{t_0}$ est

$$\mathbb{E}[X_{t_0}|Y_s, s \leqslant t_0] = \mathbb{E}[X_{t_0}|\sigma_{t_0}].$$

Au moyen du calcul d'Itô et de ses liens avec les E.D.P.s, l'auteur donne une expression analytique de cet estimateur.

Dans [34], les auteurs étudient le problème dans un cadre plus général. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à valeurs dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ et l'E.D.S.(1.2.19) est modifiée en conséquence : $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$. Par ailleurs les auteurs autorisent l'obstacle à se mouvoir, *i.e.* $I = I(t)$ et $\sigma_{t_0} = \sup\{s \leqslant t_0; X_s \notin I(s)\}$.
Outre la complexification technique, la différence avec l'article précédent tient au fait qu'il faut maintenant tenir compte du point d'entrée $X_{\sigma_{t_0}}$ du processus dans l'obstacle en raison d'une part de la liberté de mouvement offerte par $\mathbb{R}^n$ et d'autre part de la mobilité de l'obstacle. Par des arguments similaires à [33], les auteurs concluent que le meilleur estimateur de $X_{t_0}$ est dans ce cas

$$\mathbb{E}[X_{t_0}|Y_s, s \leqslant t_0] = \mathbb{E}[X_{t_0}|\sigma_{t_0}, X_{\sigma_{t_0}}].$$

Par les même arguments que précédemment les auteurs établissent une formule analytique pour cet estimateur.

Enfin dans [16], les auteurs s'intéressent au cas où l'on dispose d'information sur le futur de la trajectoire. On observe une trajectoire jusqu'à une date $T$, et on cherche à estimer sa valeur en une date $t_0 \in [0, T]$ où la trajectoire est cachée. Par la propriété de Markov, l'information pertinente sur le futur de la trajectoire se résume aux temps et lieu de sortie de l'obstacle, *i.e.* à

$$\tau_{t_0} = \inf\{s \in ]t_0; T]; X_s \notin I(s)\} \qquad \text{et} \qquad X_{\tau_{t_0}}.$$

Le meilleur estimateur est donc

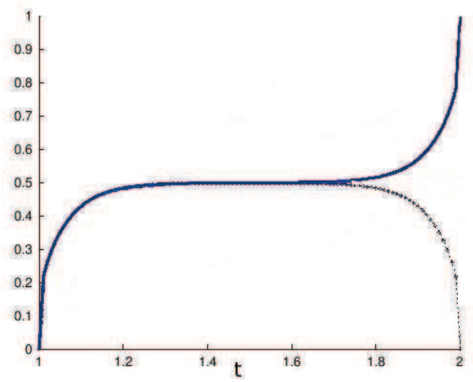
$$\mathbb{E}[X_{t_0} | Y_s, s \geqslant t_0] = \mathbb{E}[X_{t_0} | \sigma_{t_0}, X_{\sigma_{t_0}}, \tau_{t_0}, X_{\tau_{t_0}}].$$

Ici encore les auteurs donnent une formule analytique de l'estimateur.

Notons également que lorsque la trajectoire ne sort pas de l'obstacle après la date $t_0$, l'information correspondante ($\tau_0 = +\infty$), est porteuse de sens. En d'autres termes

$$\mathbb{E}[X_{t_0} | \sigma_{t_0}, X_{\sigma_{t_0}}, \tau_{t_0} = +\infty] \neq \mathbb{E}[X_{t_0} | \sigma_{t_0}, X_{\sigma_{t_0}}].$$

Dans la dernière partie de [16], les auteurs proposent une reconstruction de la trajectoire du signal pendant tout l'intervalle de temps où celui-ci est caché. Leur méthode consiste en une estimation temps par temps de la valeur du signal. Cela conduit naturellement à une trajectoire déterministe lisse, *e.g.* pour le cas où le processus considéré est un mouvement brownien standard, où l'obstacle $I$ est l'intervalle $[0, 1]$ et où le processus est caché sur l'intervalle de temps $[1, 2]$, les auteurs obtiennent, selon que $W_\tau = 0$ ou que $W_\tau = 1$, les reconstructions suivantes :



D'un point de vue statistique on ne peut espérer mieux, cependant si l'on n'est pas intéressé par une estimation de $X_{t_0}$, pour tout temps $t_0$ auquel la trajectoire est cachée, mais plutôt par une reconstruction plus réaliste d'une trajectoire rendant compte du caractère aléatoire du phénomène sous-jacent, une telle reconstruction n'est pas satisfaisante.

En fait, pour répondre à ce problème la solution consiste à conditionner le processus $X$ à rester dans $I$ durant l'intervalle $[s, t]$ avec $s$ et $t$ les valeurs observées de $\sigma_{t_0}$ et de $\tau_{t_0}$. Dans le cas où le signal est modélisé par un mouvement brownien, *i.e.* $a = 0$, $b = 1$ dans (1.2.19), et où l'obstacle est un intervalle, nous proposons des solutions à ce problème fondées sur les processus obtenus aux Théorème 1.2.3, Théorème 1.2.4 et Théorème 1.2.5.

**Cas 1 :** On suppose que l'obstacle est l'intervalle semi-borné $I = [a, +\infty[$ et que la trajectoire observée est cachée par $I$ à partir du temps $s$ (et ne réapparaît pas par la suite). À partir du temps $s$, $X$ est un mouvement brownien sur $[s, T]$ conditionné à être supérieur à $a$. Les propriétés classiques du mouvement brownien suggèrent que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u + s} - a \right), \qquad u \in [0, 1],$$

où $\Delta = T - s$, doit être un mouvement brownien $[0, 1]$ conditionné à rester positif, *i.e.* un méandre brownien. Par suite le processus adéquat pour interpoler $X$ entre les temps $s$ et $T$ est le processus $(\tilde{X}_u)_{u \in [s,T]}$, défini par

$$\tilde{X}_u = \sqrt{\Delta} W^{+}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, T],$$

où $W^+$ est le méandre brownien.

**Cas 2 :** L'obstacle est encore $I = [a, +\infty[$ mais la trajectoire est cachée pendant l'intervalle $[s, t]$, $0 < s < t < T$, *i.e.* le processus réapparaît en $a$ au temps $t$. Des arguments similaires à ceux du cas précédent conduisent à une interpolation par le processus $(\tilde{X}_u)_{u \in [s,t]}$, défini par

$$\tilde{X}_u = \sqrt{\Delta} W^{0,+}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, t],$$

où $\Delta = t - s$ et $W^{0,+}$ est l'excursion brownienne (non-signée).

**Cas 3 :** On suppose maintenant que l'obstacle est un intervalle borné $[a, b]$ et que la trajectoire observée est cachée à partir du temps $s$ (et qu'elle ne réapparaît pas). En notant $\Delta = T - s$, le processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u + s} - a \right), \qquad u \in [0, 1]$$

devrait être un mouvement brownien sur $[0,1]$ conditionné à rester dans $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$, ainsi l'interpolation stochastique de $X$ est donnée par le processus $(\tilde{X}_u)_{u\in[s,T]}$, défini par

$$\tilde{X}_u = \sqrt{\Delta} W^{\ell}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s,T],$$

avec $W^{\ell}$ le processus obtenu au Théorème 1.2.3 avec $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

**Cas 4 :** L'obstacle est toujours $[a,b]$ mais la trajectoire réapparaît en $a$ au temps $t$.

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u+s} - a \right), \qquad u \in [0,1]$$

où $\Delta = t - s$, est un mouvement brownien sur $[0,1]$ conditionné à rester dans $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$ et à réapparaître en $0$ au temps $1$, ainsi l'interpolation stochastique de $X$ est donnée par le processus $(\tilde{X}_u)_{u\in[s,t]}$, défini par

$$\tilde{X}_u = \sqrt{\Delta} W^{\ell,\downarrow}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s,t],$$

où $W^{\ell,\downarrow}$ est le processus obtenu au Théorème 1.2.4 avec $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

**Cas 5 :** L'obstacle est toujours $[a,b]$ mais la trajectoire réapparaît en $b$ au temps $t$. Le processus

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u+s} - a \right),$$

où $\Delta = t - s$, est un mouvement brownien sur $[0,1]$ qui reste dans $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$ et réapparaît en $\frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$ au temps $1$, ainsi l'interpolation stochastique de $X$ est donnée par le processus $(\tilde{X}_u)_{u\in[s,t]}$, défini par

$$\tilde{X}_u = \sqrt{\Delta} W^{\ell,\uparrow}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, u \in [s,t],$$

où $W^{\ell,\uparrow}$ est le processus obtenu au Théorème 1.2.5 avec $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

### 1.2.4 Perspectives

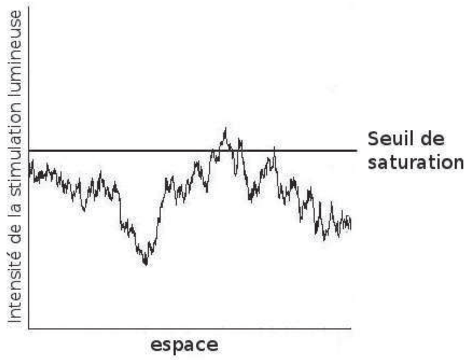
On peut envisager d'étendre la problématique des processus cachés à des processus à deux paramètres en vue d'applications à l'imagerie. Il faudrait alors utiliser un calcul stochastique à deux paramètres.

Une image numérique en niveau de gris (NdG) de taille $n \times m$ peut être vue comme une application

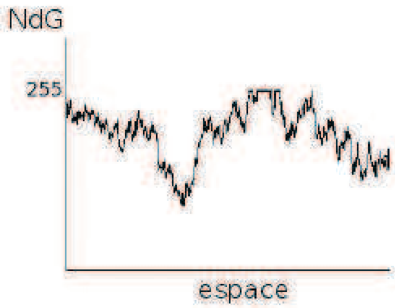
$$I : [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!] \to [\![0,255]\!],$$

la valeur $I(a, b)$ représentant l'intensité de niveau de gris du "point" de coordonnées $(a, b)$ ($0$ pour le noir et $255$ pour le blanc). On peut considérer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]255, +\infty[$ constituent des obstacles naturels à la variation du niveau de gris d'une image.

Considérons une image surexposée (dans les deux graphiques qui suivent, on considère une coupe de l'image) :



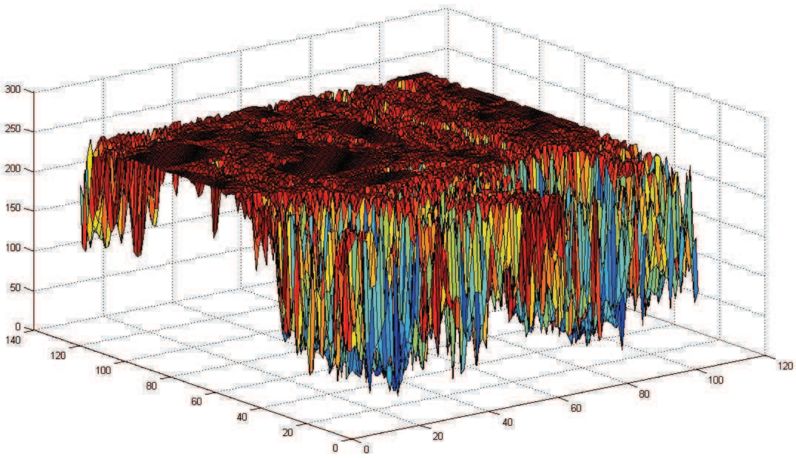

un phénomène de saturation fait apparaitre uniformément blanches des zones de l'image qui devraient apparaitre dans un dégradé de gris clair. L'image que l'on obtient alors est la suivante.




Dans ce cadre, on peut considérer qu'on observe un processus caché par l'obstacle $]255, +\infty[$. Ainsi en interpolant la trajectoire "derrière l'obstacle" et en renormalisant afin que la trajectoire reconstruite reste dans l'intervalle $[0, 255]$, on peut espérer obtenir une image restaurée.

Dans le cas d'une image, les instants d'entrée et de sortie de l'obstacle devront être remplacés par des courbes de transition partie observable/partie cachée. Les informations d'entrée et de sortie de l'obstacle seront alors remplacées par une information sur un ensemble de courbes. Pour illustrer notre propos, considérons une image qui présente un défaut d'illumination. Toute une zone de l'image apparaît blanche en raison de ce défaut.

Si l'on représente les niveaux de gris comme une surface au dessus de l'image, on obtient un graphe du type suivant :




Graphe des niveau de gris d'une partie de l'image

Comme on peut le voir des zones de plateaux apparaissent artificiellement. On a perdu de l'information de nature texturelle. C'est cette information que des travaux sur l'interpolation de processus à deux paramètres pourrait permettre de reconstituer.

# Première partie

# Inégalités de déviation et de concentration convexe

# Chapitre 2

# Deviation inequalities for exponential jump-diffusion processes

Ce chapitre, coécrit avec Nicolas Privault, fait l'objet d'un article publié dans *Theory of Stochastic Processes*, [37].


Abstract

We obtain deviation inequalities for the law of exponential jump-diffusion processes at a fixed time. Our method relies on convex concentration inequalities obtained by forward/backward stochastic calculus. In the pure jump and pure diffusion cases, it also improves on classical results obtained by direct application of Gaussian and Poisson bounds.


## 2.1 Introduction

Deviation inequalities for random variables admitting a predictable representation have been obtained by several authors. When $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a standard Brownian motion and $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ an adapted process, using the time change

$$t \mapsto \int_0^t |\eta_s|^2 ds \tag{2.1.1}$$

on Brownian motion yields the bound

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty \eta_t dW_t \geqslant x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma^2}\right), \qquad x > 0, \tag{2.1.2}$$

provided

$$\Sigma^2 := \left\|\int_0^\infty |\eta_t|^2 dt\right\|_\infty < \infty. \tag{2.1.3}$$

On the other hand, if $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a point process with random intensity $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is an adapted process, we have the inequality

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty U_{t^-}(dZ_t - \lambda_t dt) \geqslant x\right) \leqslant \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\log\left(1+\frac{\beta}{\Lambda}x\right)\right), \qquad (2.1.4)$$

$x > 0$, provided $U_t \leqslant \beta, d\mathbb{P}\text{ - }a.s.$ for some constant $\beta > 0$ and

$$\Lambda := \left\|\int_0^\infty |U_t|^2 \lambda_t dt\right\|_\infty < \infty,$$

*cf.* [2], [50] when $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a Poisson process, and [35] for the mixed point process-diffusion case. Note that although $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ becomes a standard Poisson process $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ under the time change

$$t \mapsto \int_0^t \lambda_s ds,$$

when $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is non-constant the inequality (2.1.4) can not be recovered from a Poisson deviation bound in the same way as (2.1.2) is obtained from a Gaussian deviation bound.

We consider linear stochastic differential equations of the form

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \sigma_t dW_t + J_{t^-}(dZ_t - \lambda_t dt), \qquad (2.1.5)$$

where $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a standard Brownian motion, $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a point process of (stochastic) intensity $\lambda_t$. Here the processes $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ may not be independent, but they are adapted to a same filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, and $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ are sufficiently integrable $(\mathcal{F}_t)$-adapted processes.

Clearly the above deviation inequalities (2.1.2) and (2.1.4) require some boundedness on the integrand processs $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(U_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, and for this reason they do not apply directly to the solution $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ of (2.1.5), since the processes $(\eta_t)_{t\in[0,T]} = (\sigma_t S_t)_{t\in[0,T]}$ and $(U_t)_{t\in[0,T]} = (J_t S_t)_{t\in[0,T]}$ are not in $L^\infty(\Omega, L^2([0,T]))$. This is consistent with the fact that when $\sigma_t$ is a deterministic function, $S_T$ has a log-normal distribution which is not compatible with a Gaussian tail.

In this paper we derive several deviation inequalities for exponential jump-diffusion processes $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ of the form (2.1.5). Our results rely on the following proposition, *cf.* [14], Corollary 5.2, and Theorem 2.1.1 below.

Let $(S^*_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ be the solution of

$$\frac{dS^*_t}{S^*_{t^-}} = \sigma^*(t)d\hat{W}_t + J^*(t)(d\hat{N}_t - \lambda^*(t)dt)$$

where $(\hat{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a standard Brownian motion, $(\hat{N}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a Poisson process of (deterministic) intensity $\lambda^*(t)$, which are assumed to be mutually independent, while $\sigma^*(t)$ and $J^*(t)$ are deterministic functions with $J^*(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

**Theorem 2.1.1.** *Assume that one of the following conditions is satisfied :*

$(i)$ $-1 < J_t \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - $a.e.$ *and*

$$|\sigma_t| \leqslant |\sigma^*(t)|, \qquad J_t^2\lambda_t \leqslant |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }a.e.$$

$(ii)$ $-1 < J_t \leqslant 0 \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - $a.e.$ *and*

$$|\sigma_t|^2 + J_t^2\lambda_t \leqslant |\sigma^*(t)|^2 + |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }a.e.$$

$(iii)$ $0 \leqslant J_t \leqslant J^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - $a.e.$, $J_t^2\lambda_t \leqslant |J^*(t)|^2\lambda^*(t)$, $d\,\mathbb{P}\,dt$ - $a.e.$ *and*

$$|\sigma_t|^2 + J_t^2\lambda_t \leqslant |\sigma^*(t)|^2 + |J^*(t)|^2\lambda^*(t), \qquad d\,\mathbb{P}\,dt\text{ - }a.e.$$

*Then we have*

$$\mathbb{E}[\phi(S_t) \mid S_0 = x] \leqslant \mathbb{E}[\phi(S_t^*) \mid S_0^* = x], \qquad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1.6}$$

*for all convex function $\phi$ such that $\phi'$ is convex.*

Note that in the continuous case $J = 0$ with $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ deterministic, Relation (2.1.6) can be recovered by the Doob stopping time theorem and Jensen's inequality applied to the time change (2.1.1) and to the exponential martingale $X_t := e^{W_t - t/2}$, $t \in \mathbb{R}_+$, as

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(S_T)] &= \mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi\left(\mathbb{E}\left[X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds} \middle| \mathcal{F}_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right]\right)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds}\right) \middle| \mathcal{F}_{\int_0^T |\sigma_s|^2 ds}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\phi\left(X_{\int_0^T |\sigma^*(s)|^2 ds}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[\phi(S_T^*)],
\end{aligned}$$

where $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is the filtration generated by $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. However this time change argument does not apply to the jump-diffusion case, in addition in the pure jump case it cannot be used when $(J_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is non-constant, and in the pure diffusion case it does not apply to a random $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

## 2.2 Deviation bounds

We begin with a result in the pure jump case, *i.e.* when $\sigma_t = 0$, $d\mathbb{P}\, dt$ - $a.e.$, and let

$$g(u) = 1 + u \log u - u, \qquad u > 0.$$

Let $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ denote the solution of (2.1.5) with $S_0 = 1$.

**Theorem 2.2.1.** *Assume that $\sigma_t = 0$, $d\mathbb{P}\, dt$ - $a.e.$, and that*

$$-1 < J_t \leqslant K, \qquad d\mathbb{P}\, dt \text{ - } a.e.,$$

*for some $K \geqslant 0$, and let*

$$\Lambda_t = \int_0^t \left\| J_s^2 \lambda_s \right\|_\infty ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

*Then for all $x \geqslant \dfrac{\Lambda_T}{K}\left(\dfrac{\beta}{K}(1+K)^2 - 1\right)$ we have*

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{\Lambda_T}{K^2} g\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right) \tag{2.2.1}$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta} + \frac{\Lambda_T}{K^2}\left(\frac{K}{\beta} - 1\right)\right)\log\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right), \tag{2.2.2}$$

*where $\beta = \log(1+K)$.*

*Proof.* Let $J^*(t) = K$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{K^2}\left\| J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

and denote by $S_t^* = e^{-\Lambda_t/K}(1+K)^{N_t^*}$, $t \in \mathbb{R}_+$, the solution of

$$\frac{dS_t^*}{S_{t^-}^*} = K(dN_t^* - \lambda^*(t)dt), \tag{2.2.3}$$

with $S_0^* = 1$, where $(N_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a Poisson process with deterministic intensity $(\lambda^*(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$. Under the above hypotheses, Theorem 2.1.1$-i)$ yields the inequality

$$\begin{aligned} y^\alpha\, \mathbb{P}(S_T \geqslant y) &\leqslant \mathbb{E}[(S_T^*)^\alpha] \qquad (2.2.4)\\ &= e^{-\alpha\Lambda_T/K}\, \mathbb{E}\left[\left((1+K)^{N_T^*}\right)^\alpha\right] \\ &= e^{-\alpha\Lambda_T/K} e^{\Lambda_T((1+K)^\alpha - 1)/K^2}, \end{aligned}$$

for the convex function $y \mapsto y^\alpha$ with convex derivative, $\alpha \geqslant 2$, hence

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \leqslant \exp\left(\frac{\Lambda_T}{K^2}((1+K)^\alpha - 1) - \alpha\frac{\Lambda_T}{K} - \alpha x\right). \tag{2.2.5}$$

The minimum in $\alpha \geqslant 0$ in the above bound is obtained at

$$\alpha^* = \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{K}{\beta} \left( 1 + \frac{Kx}{\Lambda_T} \right) \right),$$

which is greater than 2 if and only if

$$x \geqslant \frac{\Lambda_T}{K} \left( \frac{\beta}{K} (1+K)^2 - 1 \right). \tag{2.2.6}$$

Hence for all $x$ satisfying (2.2.6) we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &\leqslant \exp\left( \frac{\Lambda_T}{K^2} ((1+K)^{\alpha^*} - 1) - \alpha^* \left( x + \frac{\Lambda_T}{K} \right) \right) \\ &= \exp\left( -\frac{\Lambda_T}{K^2} g \left( \frac{K}{\beta} \left( 1 + \frac{Kx}{\Lambda_T} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

and Relation (2.2.2) follows from the classical inequality

$$\frac{1}{2} u \log(1+u) \leqslant g(1+u), \qquad u > 0.$$

□

Note that an application of the classical Poisson bound (2.1.4) only yields

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \\ &= \mathbb{P}\left( \int_0^T \log(1+J_{t^-}) dZ_t - \int_0^T J_{t^-} \lambda_t dt \geqslant x \right) \\ &= \mathbb{P}\left( \int_0^T \log(1+J_{t^-}) d(Z_t - \lambda_t dt) \geqslant x + \int_0^T J_{t^-} \lambda_t dt - \int_0^T \log(1+J_{t^-}) \lambda_t dt \right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left( \int_0^T \log(1+J_{t^-}) d(Z_t - \lambda_t dt) \geqslant x \right) \\ &\leqslant \exp\left( -\frac{x}{2\beta} \log\left( 1 + \beta \frac{x}{\tilde{\Lambda}_T} \right) \right), \qquad x > 0, \end{aligned}$$

provided

$$J_t \leqslant K \quad \text{and} \quad \int_0^T |\log(1+J_t)|^2 \lambda_t dt \leqslant \tilde{\Lambda}_T, \qquad d\,\mathbb{P}\text{-}a.s.$$

which is worse than (2.2.2) in the deterministic case since $1 < K/\beta \to \infty$ as $K \to \infty$, and $\tilde{\Lambda}_T \leqslant \Lambda_T$.

Theorem 2.2.1 admits a generalization to the case of a continuous component when the jumps $J_t$ have constant sign.

**Theorem 2.2.2.** *Assume that*

$$-1 < J_t \leqslant 0, \quad d\mathbb{P}\, dt\text{ - }a.e., \quad \textit{or} \quad 0 \leqslant J_t \leqslant K, \quad d\mathbb{P}\, dt\text{ - }a.e.,$$

*for some $K > 0$, and assume that*

$$\Lambda_T = \int_0^T \left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty dt < +\infty.$$

*Then for all $x \geqslant \frac{\Lambda_T}{K}\left(\frac{\beta}{K}(1+K)^2 - 1\right)$ we have*

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{\Lambda_T}{K^2} g\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right) \tag{2.2.7}$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\beta} + \frac{\Lambda_T}{K^2}\left(\frac{K}{\beta} - 1\right)\right)\log\left(\frac{K}{\beta}\left(1 + \frac{Kx}{\Lambda_T}\right)\right)\right), \tag{2.2.8}$$

*where $\beta = \log(1+K)$.*

*Proof.* We repeat the proof of Theorem 2.2.1, replacing the use of Theorem 2.1.1$-i$) by Theorem 2.1.1$-ii$) and Theorem 2.1.1$-iii$), and by defining $\lambda^*(t)$ as

$$\lambda^*(t) = \frac{1}{K^2}\left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

□

Letting $K \to 0$ in (2.2.7) or (2.2.8) we obtain the following Gaussian deviation inequality in the negative jump case with a continuous component.

**Theorem 2.2.3.** *Assume that $-1 < J_t \leqslant 0$, $d\mathbb{P}\, dt$ - $a.e.$, and let*

$$\Sigma_T^2 = \int_0^T \left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty dt < \infty, \qquad T > 0.$$

*Then we have*

$$\mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{(x + \Sigma_T^2/2)^2}{2\Sigma_T^2}\right), \qquad x \geqslant 3\Sigma_T^2/2. \tag{2.2.9}$$

*Proof.* Although this result follows from Theorem 2.2.2 by taking $K \to 0$, we show that it can also be obtained from Theorem 2.1.1. Let

$$|\sigma^*(t)|^2 = \left\| |\sigma_t|^2 + J_t^2 \lambda_t \right\|_\infty, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

and denote by $S_t^* = \exp\left(\int_0^t \sigma^*(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma^*(s)|^2 ds\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$, the solution of

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \sigma^*(t) dW_t, \tag{2.2.10}$$

with initial condition $S_0^* = 1$. By the Tchebychev inequality and Theorem 2.1.1$-ii)$ applied for $K = 0$, for all positive nondecreasing convex functions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with convex derivative we have

$$\phi(y)\, \mathbb{P}(S_T \geqslant y) \leqslant \mathbb{E}[\phi(S_T^*)]. \tag{2.2.11}$$

Applying this inequality to the convex function $t \mapsto y^\alpha$ for fixed $\alpha \geqslant 2$, we obtain

$$\begin{aligned} y^\alpha\, \mathbb{P}(S_T \geqslant y) &\leqslant \mathbb{E}[(S_T^*)^\alpha] \\ &= \exp\left(\alpha(\alpha-1)\Sigma_T^2/2\right), \end{aligned}$$

hence

$$\mathbb{P}(S_T \geqslant e^x) \leqslant \exp\left(-\alpha x + \alpha(\alpha-1)\Sigma_T^2/2\right), \qquad x \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 2. \tag{2.2.12}$$

The function

$$\alpha \mapsto -\alpha x + \alpha(\alpha-1)\Sigma_T^2/2$$

attains its minimum over $\alpha \geqslant 2$ at

$$\alpha^* = \frac{1}{2} + \frac{x}{\Sigma_T^2}, \qquad x \geqslant 3\Sigma_T^2/2,$$

which yields (2.2.9). □

In the pure diffusion case with $J = 0$ and $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ deterministic, the bound (2.2.9) can be directly obtained from

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\int_0^T \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_t|^2 dt\right) \geqslant e^x\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\exp\left(W_{\Sigma_T^2} - \frac{1}{2}\Sigma_T^2\right) \geqslant e^x\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{(x+\Sigma_T^2/2)^2}{2\Sigma_T^2}\right), \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On the other hand, when $J = 0$ and $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is adapted process, the bound (2.1.2) only yields

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\log S_T \geqslant x) &= \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |\sigma_t|^2 dt \geqslant x\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma_t dW_t \geqslant x\right) \\ &\leqslant e^{-x^2/(2\Sigma_T^2)}, \qquad x > 0, \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

which is worse than (2.2.13) by a factor $\exp(x/2 + \Sigma_T^2/8)$.

# Chapitre 3

# Convex comparison inequalities for non-Markovian stochastic integrals

Ce chapitre, coécrit avec J.-C. Breton et N. Privault, est l'objet d'un article à paraître dans *Stochastics*.


Abstract

We derive convex comparison inequalities for stochastic integrals of the form $\int_0^T \sigma_t^* d\hat{W}_t$ and $\int_0^T \sigma_t dW_t$, where $0 \leqslant \sigma_t^* \leqslant \sigma_t$ are adapted processes with respect to the filtration generated by a standard Brownian motion $(W_t)_{t\in[0,T]}$, and $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$ is an independent Brownian motion. Our method uses forward/backward stochastic integration and the Malliavian calculus, and is also applied to jump-diffusion processes.


## 3.1 Introduction

Partial orderings of probability distributions via convex comparison inequalities have been introduced in economics as a risk management tool that yields finer information than mean-variance analysis, *cf. e.g.* [44]. Namely, a random variable $X^*$ is said to be more concentrated than another random variable $X$ if

$$\mathbb{E}[\phi(X^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(X)], \tag{3.1.1}$$

for all sufficiently integrable convex functions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

As is well known, when $X^*$ and $X$ are Gaussian random variables written as

$$X^* = x_0 + \int_0^T \sigma^*(t)dW_t, \qquad X = x_0 + \int_0^T \sigma(t)dW_t,$$

where $\sigma(t)$ and $\sigma^*(t)$ are deterministic functions and $(W_t)_{t\in[0,T]}$ is a standard Brownian motion, (3.1.1) holds if and only if

$$\int_0^T |\sigma^*(t)|^2 dt \leqslant \int_0^T |\sigma(t)|^2 dt, \tag{3.1.2}$$

as can be shown using conditioning and the Jensen inequality, *cf. e.g.* [3], or by the Dubins-Schwarz theorem on time-changed Brownian motion.

In this chapter we are interested in deriving sufficient conditions for convex concentration inequalitiy (3.1.1) in the case where $\sigma_t$ and $\sigma_t^*$ are random processes. When $\sigma_t$ and $\sigma_t^*$ become random, the above condition (3.1.2) alone cannot be expected to yield (3.1.1), nevertheless some results already exist in that direction. When $X^* = X_T^*$ is the terminal value of a diffusion process $(X_t^*)_{t\in[0,T]}$ solution of

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t^*) dW_t, \qquad t \in [0,T], \tag{3.1.3}$$

and $X = X_T$ is given by

$$X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t, \tag{3.1.4}$$

where $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ is a square-integrable and adapted with respect to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ generated by $(W_t)_{t\in[0,T]}$, it is known [23] that (3.1.1) holds, *i.e.* we have

$$\mathbb{E}[\phi(X_T^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(X_T)],$$

for convex $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, under the almost sure bound

$$|\sigma_t^*(X_t)| \leqslant |\sigma_t|, \qquad t \in [0,T].$$

This result relies on the preservation of convexity by the Markov semigroup of (3.1.3), and this method has been extended to multidimensional jump-diffusion processes in [7].

Our goal is to state a different extension of the above results to the case where $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ does not have to be a diffusion coefficient. More precisely, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ will be an adapted process integrated against an independent Brownian motion $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$, *i.e.* (3.1.3) is replaced with

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^* d\hat{W}_t, \qquad t \in [0,T],$$

while (3.1.4) still holds, *i.e.*

$$X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t,$$

where $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ is an $(\mathcal{F}_t)$-adapted as $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$.

This question has also been investigated in the multidimensional case as an application of forward/backward stochastic calculus in [3] Theorem 4.1, however the argument of [3] is valid only when $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ is a deterministic function.

Clearly, the variance inequality

$$\text{Var}[X_T^*] = E\left[\int_0^T |\sigma_t^*|^2 dt\right] \leqslant E\left[\int_0^T |\sigma_t|^2 dt\right] = \text{Var}[X_T]$$

holds under the bound

$$|\sigma_t^*| \leqslant |\sigma_t|, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - }a.s., \quad t \in [0,T], \tag{3.1.5}$$

however this does not suffice to yield the convex concentration inequality (3.1.1) without additional assumptions, as noted from (3.1.8) below.

Our main tool will be Proposition 3.2.4 below, which states that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2)du\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*)\int_u^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right], \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$ for all $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ with $\phi^{(3)}$ bounded, where $D^W$ denotes the Malliavin gradient on the Wiener space with respect to $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *cf.* (3.2.10) below. From (3.1.6) we show in Corollary 3.4.2 below that (3.1.1) holds for all convex functions $\phi$ with convex derivative, *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u\right)\right], \tag{3.1.7}$$

provided that, in addition to (3.1.5), the processes $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ and $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ satisfy the condition

$$\sigma_s D_s^W |\sigma_t^*|^2 \geq 0, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - }a.s., \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{3.1.8}$$

It can be checked from (3.1.6) that Condition (3.1.8) is necessary for (3.1.1) to hold when $\phi^{(3)}(x) > 0, x \in \mathbb{R}$, by taking for example $0 \leqslant \sigma_t = \sigma_t^*,\ t \in [0,T]$. Note also that (3.1.8) is invariant only under change of sign of $\sigma_t^*$ as the law of $\displaystyle\int_0^T \sigma_t dW_t$ is not symmetric in general.

The pure jump and mixed jump-diffusion cases are treated in Corollary 3.4.3 and Theorem 3.4.1. Next, we consider some examples of applications of (3.1.7) in the continuous case.

**Examples**

As a first example of applications of (3.1.7), when $\sigma_t^*$ and $\sigma_t$ have the form

$$\sigma_t^* = f^*(t, W_t) \qquad \text{and} \qquad \sigma_t = f(t, W_t), \qquad t \in [0, T],$$

$f, f^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, we have

$$\sigma_s \sigma_t^* D_s^W \sigma_t^* = f(s, W_s) f^*(t, W_t) \frac{\partial f^*}{\partial x}(t, W_t) \mathbf{1}_{[0,t]}(s), \qquad s, t \in [0, T],$$

and we find that

$$X^* = x_0 + \int_0^T f^*(t, W_t) d\hat{W}_t$$

is more concentrated than

$$X = x_0 + \int_0^T f(t, W_t) dW_t,$$

provided

$$0 \leqslant f^*(t, x) \leqslant f(t, x), \qquad t \in [0, T], \qquad x \in \mathbb{R},$$

and $x \to f^*(t, x)$ is non-decreasing for all $t \in [0, T]$.

As a second example, when

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t) d\hat{W}_t, \quad \text{and} \quad X_T = x_0 + \int_0^T \sigma_t dW_t,$$

*i.e.* $\sigma_t^*$ takes the form $\sigma_t^* = \sigma_t^*(X_t)$, where $x \mapsto \sigma_t^*(x)$ is Lipschitz uniformly in $t$, Condition (3.1.5) holds if

$$|\sigma_t^*(X_t)| \leqslant |\sigma_t|, \qquad d\,\mathbb{P}\text{ - } a.s., \quad t \in [0, T],$$

and (3.1.8) reads

$$\begin{aligned} \sigma_s \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) D_s^W X_t &= \sigma_s \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) \left( \int_s^t D_s^W \sigma_r dW_r + \sigma_s \right) \\ &\geqslant 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

When $\sigma_t$ and $\sigma_t^*$ take both the form $\sigma_t^* = \sigma_t^*(X_t)$ and $\sigma_t = \sigma_t(X_t)$, *i.e.*

$$X^* = x_0 + \int_0^T \sigma_t^*(X_t) d\hat{W}_t \quad \text{and} \quad X = x_0 + \int_0^T \sigma_t(X_t) dW_t,$$

Condition (3.1.5) reads

$$|\sigma_t^*(x)| \leqslant |\sigma_t(x)|, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T],$$

and since

$$\begin{aligned} D_s^W \sigma_t^*(X_t) &= \sigma_t^{*'}(X_t) D_s^W(X_t) \\ &= \sigma_t^{*'}(X_t)\sigma_s(X_s) \exp\left(\int_0^t \sigma_u'(X_u) dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_u'(X_u)|^2 du,\right) \end{aligned}$$

$s, t \in [0,T]$, *cf. e.g.* Exercise 2.2.1 page 124 of [39], Condition (3.1.8) is equivalent to

$$(\sigma_s(X_s))^2 \sigma_t^*(X_t) \sigma_t^{*'}(X_t) \geqslant 0, \qquad s,t \in [0,T], \tag{3.1.10}$$

hence (3.1.1) holds when $x \mapsto |\sigma_t^*(x)|$ is non-decreasing on the state space of $X_t$. This is the case in particular when $X_T^*$ and $X_T$ are represented as

$$X_T^* = x_0 + \int_0^T X_t \sigma^*(t) d\hat{W}_t \quad \text{and} \quad X_T = x_0 + \int_0^T X_t \sigma(t) dW_t,$$

where $x_0 > 0$ and $\sigma^*(t)$, $\sigma(t)$ are deterministic functions such that

$$|\sigma^*(t)| \leqslant |\sigma(t)|, \qquad t \in [0,T].$$

The remaining of this chapter is organized as follows. In Section 3.2 we state the main prerequisites on forward/backward stochastic calculus and on the Malliavin calculus, including Proposition 3.2.3 on increasing forward/backward martingales in the convex order. Next we derive convex concentration inequalities for forward/backward martingales in Section 3.3, and for stochastic integrals in Section 3.4.

## 3.2 Forward/backward integrals and the Malliavin calculus

In this section we present the forward/backward Itô formula and the associated identities in expectation that will be used to derive our main results. We denote by $(W_t)_{t\in[0,T]}$ and $\mu(dt,dx)$ a forward Brownian motion and jump measure on $[0,T]\times\mathbb{R}_+$, and by $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $\mu^*(dt,dx)$ a backward Brownian motion and jump measure on $[0,T]\times\mathbb{R}_+$, such that $\{W_t, \mu(dt,dx)\}$ is independent of $\{W_t^*, \mu^*(dt,dx)\}$. However, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ may not be independent of $\mu(dt,dx)$, and $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ may not be independent of $\mu^*(dt,dx)$.

The forward and backward jump measures $\mu(dt, dx)$ and $\mu^*(dt, dx)$ on $[0, T] \times \mathbb{R}$ are assumed to have respective dual predictable projections of the form $dt\nu_t(dx)$ and $dt\nu_t^*(dx)$. We also let $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ denote the forward filtration generated by $(W_t)_{t\in[0,T]}$ and $\mu(dt, dx)$, and we let $(\mathcal{F}_t^*)_{t\in[0,T]}$ denote the backward filtration generated by $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $\mu^*(dt, dx)$.

Our results rely on the Itô type change of variable formula (3.2.3) for the $(\mathcal{F}_t)$-forward, resp. $(\mathcal{F}_t^* \vee \mathcal{F}_T)$-backward martingales

$$M_t = \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} J_{s^-,x}(\mu(ds, dx) - ds\nu_s(dx)), \qquad t \in [0, T], \quad (3.2.1)$$

resp.

$$M_t^* = \int_t^T \sigma_s^* d^* W_s^* + \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} J_{s^+,x}^*(\mu^*(d^*s, dx) - ds\nu_s^*(dx)), \qquad t \in [0, T], (3.2.2)$$

in which $(\sigma_s)_{s\in[0,T]}$, $(J_{s,x})_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}$, $(\sigma_s^*)_{s\in[0,T]}$ and $(J_{s,x}^*)_{(s,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}}$ are all square-integrable $(\mathcal{F}_t)$-forward adapted processes

For all $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ we have the change of variable formula

$$\begin{aligned}
\phi(M_t, M_t^*) &= \phi(M_s, M_s^*) + \int_{s^+}^t \frac{\partial \phi}{\partial x}(M_{u^-}, M_u^*) dM_u + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(M_u, M_u^*) |\sigma_u|^2 du \\
&+ \int_{s^+}^t \int_{\infty}^{+\infty} \left( \phi(M_{u^-} + J_{u^-,x}, M_u^*) - \phi(M_{u^-}, M_u^*) - J_{u^-,x} \frac{\partial \phi}{\partial x}(M_{u^-}, M_u^*) \right) \mu(du, dx) \\
&- \int_s^{t^-} \frac{\partial \phi}{\partial y}(M_u, M_{u^+}^*) d^* M_u^* - \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(M_u, M_u^*) |\sigma_u^*|^2 du \\
&- \int_s^{t^-} \int_{\infty}^{+\infty} \left( \phi(M_u, M_{u^+}^* + J_{u^+,y}) - \phi(M_u, M_{u^+}^*) - J_{u^+,y} \frac{\partial \phi}{\partial y}(M_u, M_{u^+}^*) \right) \mu^*(d^*u, dy),
\end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$0 \leqslant s \leqslant t$, in which the forward integrals

$$\int_{s^+}^t \frac{\partial \phi}{\partial x}(M_{u^-}, M_u^*) dM_u \quad (3.2.4)$$

and

$$\int_{s^+}^t \int_{\infty}^{+\infty} \left( \phi(M_{u^-} + J_{u^-,x}, M_u^*) - \phi(M_{u^-}, M_u^*) - J_{u^-,x} \frac{\partial \phi}{\partial x}(M_{u^-}, M_u^*) \right) \mu(du, dx) \quad (3.2.5)$$

are anticipating and assumed to exist as limits in probability of Riemann sums, since in general $M_u^*$ is only $(\mathcal{F}_u^* \vee \mathcal{F}_T)$-measurable, and not $\mathcal{F}_u$-mesurable, $0 \leqslant u \leqslant T$. In the sequel, sufficient conditions for the existence of the forward integrals will be provided by

Malliavin calculus.

The proof of the change of variable formula (3.2.3) follows the same lines as the proof of the forward/backward Itô formula of [35], to the exception that the forward integrals (3.2.4) and (3.2.5) with respect to $dM_t$ and $\mu(dt, dx)$ are defined using limits in probability since they are anticipating. On the other hand, the backward integrals with respect to $d^*M_t^*$ and $\mu^*(d^*t, dx)$ are backward integrals defined in the adapted sense since $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $\mu^*(dt, dx)$ are independent of $\mathcal{F}_T$ .

In the sequel the $(\mathcal{F}_t)$-forward martingale $(M_t)_{t\in[0,T]}$ of (3.2.1) and the $(\mathcal{F}_t^*)$-backward martingale $(M_t^*)_{t\in[0,T]}$ of (3.2.2) will be given by

$$M_t = \int_0^t \sigma_u dW_u + \int_0^t J_{u^-}\left(dN_u - \lambda_u du\right), \tag{3.2.6}$$

and

$$M_t^* = \int_t^T \sigma_u^* d^*W_u^* + \int_t^T J_{u^+}^*\left(d^*N_u^* - \lambda_u^* du\right), \tag{3.2.7}$$

where $(N_t)_{t\in[0,T]}$ and $(N_t^*)_{t\in[0,T]}$ are respectively a forward Poisson process with intensity $(\lambda_t)_{t\in[0,T]}$ and a backward Poisson process independent of $(N_t)_{t\in[0,T]}$ with intensity $(\lambda_t^*)_{t\in[0,T]}$, so that we have

$$\nu_t(dx) = \lambda_t\delta_{J_{t^-}}(dx) \qquad \text{and} \qquad \nu_t^*(dx) = \lambda_t^*\delta_{J_{t^+}^*}(dx),$$

where $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$, $(J_t)_{t\in[0,T]}$, $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ are square-integrable $(\mathcal{F}_t)$-adapted processes. The filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ and $(\mathcal{F}_t^*)_{t\in[0,T]}$ are now given by

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, N_s : 0 \leqslant s \leqslant t) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}_t^* = \sigma(W_s^*, N_s^* : t \leqslant s \leqslant T), \qquad t \in [0, T]. \tag{3.2.8}$$

Recall also that $\{(W_t)_{t\in[0,T]}, (N_t)_{t\in[0,T]}\}$ is independent of $\{(W_t^*)_{t\in[0,T]}, (N_t^*)_{t\in[0,T]}\}$.

In this case the Itô formula (3.2.3) rewrites as

$$\begin{aligned}\phi(M_t + M_t^*) &= \phi(M_s + M_s^*) + \int_{s^+}^t \phi'(M_{u^-} + M_u^*)dM_u - \int_s^{t^-} \phi'(M_u + M_{u^+}^*)d^*M_u^* \\ &\quad + \int_{s^+}^t J_{u^-}\psi(M_{u^-} + M_u^*, J_{u^-})dN_u - \int_s^{t^-} J_{u^+}^*\psi(M_u + M_{u^+}^*, J_{u^+}^*)d^*N_u^* \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2)du, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$0 \leqslant s \leqslant t$, where

$$\psi(x, y) = \frac{\phi(x + y) - \phi(x) - y\phi'(x)}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Next, we recall some results on the computation of the expectation of forward integrals for continuous and jump processes by the Malliavin calculus. We let $D^W$ denote the Malliavin gradient with respect to the Brownian motion $(W_t)_{t\in[0,T]}$, defined from

$$D_t^W f(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,t_i]}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n}), \qquad t\in[0,T], \tag{3.2.10}$$

$f\in\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$. We also define the partial difference operator $D^N$ with respect to the Poisson process $(N_t)_{t\in[0,T]}$, as

$$D_t^N F(N_\cdot) = F(N_\cdot + \mathbf{1}_{[t,\infty)}(\cdot)) - F(N_\cdot), \qquad t\in[0,T],$$

for any random variable $F:\Omega\to\mathbb{R}$, and consider the space $\mathbb{L}_{2,1}$ defined by the norm

$$\|u\|_{\mathbb{L}_{2,1}}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T |D_s^W u_t|^2 ds dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T |D_s^N u_t|^2 ds dt\right].$$

Let $(D^{W-}u)_t$ denote the trace of $(D_t^{W-}u_s)_{s,t\in[0,T]}$ defined by the left limit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0\leqslant t<s} \mathbb{E}[|D_s^W u_t - (D^{W-}u)_s|^2]ds = 0, \tag{3.2.11}$$

*cf.* Relation (3.7) in Definition 3.1.1 of [39], for $u$ a process in the space $\mathbb{L}_{2,1}$.

By Proposition 3.2.3 page 193 of [39], the expectation of the forward anticipating integral with respect to Brownian motion can be computed as in the next lemma. [1]

**Lemma 3.2.1.** *Assume that $(u_t)_{t\in[0,T]}$ is continuous in $\mathbb{L}_{2,1}$ and that the process $D^{W-}u$ defined by* (3.2.11) *exists. Then the anticipating forward integral $\int_0^T u_t dW_t$ exists in $L^2(\Omega)$ and we have*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (D^{W-}u)_t dt\right].$$

By Corollary 2.9. of [1] or Corollary 4.5 of [40], see also Proposition 3.1 of [38], we also have the following lemma, in which $(D^{N-}u)_t$, $t\in[0,T]$ is defined by

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0\leqslant t<s} \mathbb{E}[|D_s^N u_t - (D^{N-}u)_s|^2]ds = 0,$$

as in (3.2.11).

**Lemma 3.2.2.** *Let $T>0$ and assume that $u\in\mathbb{L}_{2,1}$ and $((D^{N-}u)_t)_{t\in[0,T]}\in L^2(\Omega\times[0,T])$. Then we have*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t dN_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T u_t\lambda_t dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_t (D^{N-}u)_t dt\right].$$

1. Note that a sign has to be changed in Proposition 3.2.3 page 193 of [39].

The operators $D^{W^*}$, $D^{W^*+}$ and $D^{N^*}$, $D^{N^*+}$ are similarly defined for the backward Brownian motion $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and Poisson process $(N_t^*)_{t\in[0,T]}$, from

$$D_t^{W^*} f(W_{t_1}^*,\dots,W_{t_n}^*) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[t_i,T]}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}^*,\dots,W_{t_n}^*), \qquad t\in[0,T],$$

$f\in\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$, and

$$D_t^{N^*} F(N.) = F(N. + \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)) - F(N.), \qquad t\in[0,T],$$

and satisfy the backward analogs of Lemmas (3.2.1) and (3.2.2), *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t d^*W_t^*\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (D^{W^*+}u)_t dt\right], \tag{3.2.12}$$

and

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t d^*N_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T u_t\lambda_t^* dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda_t^*(D^{N^*+}u)_t dt\right], , \tag{3.2.13}$$

The next proposition is the main result of this section.

**Proposition 3.2.3.** *Assume that the processes $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ belong to the space $\mathbb{L}_{2,1}$. For all $\phi\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ with $\phi^{(3)}$ bounded we have*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\phi\big(M_t+M_t^*\big)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s+M_s^*\big)\right] \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u+M_u^*)(|\sigma_u|^2-|\sigma_u^*|^2)du\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t (J_u\lambda_u\psi(M_u+M_u^*,J_u) - J_u^*\lambda_u^*\psi(M_u+M_u^*,J_u^*))du\right] \\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u\phi^{(3)}(M_u+M_u^*)\int_u^T D_u^W|\sigma_v^*|^2 dvdu\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u\int_u^T J_v^*\lambda_v^*(D_u^W J_v^*)\int_0^1 \phi^{(3)}(M_u+M_u^*+\tau J_v^*)d\tau dvdu\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_u^T (D_u^N\sigma_v^*)\int_0^1 (\sigma_v^*+\tau D_u^N\sigma_v^*)\phi^{(3)}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*)d\tau dvdu\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*)\int_0^1 (J_v^*+\tau D_u^N J_v^*)\right. \\
&\qquad\left.\int_0^1 \phi^{(3)}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*+\rho(J_v^*+\tau D_u^N J_v^*))d\rho d\tau dvdu\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*)\int_0^1 (J_v^*+\tau D_u^N J_v^*)\right.
\end{aligned}$$

$$\left.\int_0^1 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*), J_u) d\rho d\tau dv du\right]$$

$$+ \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 (\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*, J_u) d\tau dv du\right],$$

$0 \leqslant s \leqslant t$, *where*

$$\psi(x,y) = \frac{\phi(x+y) - \phi(x) - y\phi'(x)}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Proof.* First we note that by the Itô formula (3.2.9) and the fact that the backward stochastic integral of a backward adapted process has zero expectation, we get

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_t + M_t^*)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(M_s + M_s^*)\right] + \mathbb{E}\left[\int_{s^+}^t \phi'(M_{u^-} + M_u^*) dM_u\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2) du\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\int_{s^+}^t J_{u^-}\psi(M_{u^-} + M_u^*, J_{u^-}) dN_u\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u^*\psi(M_u + M_u^*, J_u^*)\lambda_u^* du\right].$$

Next we note that we have the relations $D_v^{W^*} M_u^* = \sigma_v^* \mathbf{1}_{[u,T]}(v)$, $D_v^{N^*} M_u^* = J_{v^+}^* \mathbf{1}_{[u,T]}(v)$, $(D^{W^-}\sigma)_u = 0$, $0 \leqslant v \leqslant u$, and

$$D_s^W M_u^* = \int_u^T D_s^W \sigma_v^* \, d^* W_v^* + \int_u^T D_s^W J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv), \qquad 0 \leqslant u \leqslant s,$$

hence by the same argument as in Proposition 3.1.1 in [39], *i.e.* by the bound

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0 \leqslant u \leqslant s} \mathbb{E}\left[\left|D_s^W M_u^* - \int_s^T D_s^W \sigma_v^* d^* W_v^* - \int_s^T D_s^W J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv)\right|^2\right] ds \\
&= \int_0^T \sup_{(s-\frac{1}{n})\vee 0 \leqslant u \leqslant s} \mathbb{E}\left[\left|\int_u^s D_s^W \sigma_v^* d^* W_v^* + \int_u^s D_s^W J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv)\right|^2\right] ds \\
&\leqslant 2\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{(s-\frac{1}{n})\vee 0}^s |D_s^W \sigma_v^*|^2 dv\right] ds + 2\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{(s-\frac{1}{n})\vee 0}^s |D_s^W J_{v^+}^*|^2 \lambda_v^* dv\right] ds,
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

we have

$$(D^{W^-} M^*)_u = D_u^W M_u^* = \int_u^T D_u^W \sigma_v^* d^* W_v^* + \int_u^T D_u^W J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv).$$

Similarily we have the relation

$$D_s^N M_u^* = \int_u^T D_s^N \sigma_v^* d^* W_v^* + \int_u^T D_s^N J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv), \qquad 0 \leqslant u \leqslant s,$$

which shows that

$$(D^{N-}M^*)_u = \int_u^T D_u^N \sigma_v^* d^* W_v^* + \int_u^T D_u^N J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv) = D_u^N M_u^*,$$

by the same bound as (3.2.14). Hence by Lemmas 3.2.1 and 3.2.2 and by (3.2.12) and (3.2.13) the expectation of the forward integral can be computed as follows :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi'(M_u + M_u^*) dW_u\right] &= \mathbb{E}\left[\int_s^t (D^{W-}(\sigma_u \phi'(M_u + M_u^*)))_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u (D^{W-} \phi'(M_u + M_u^*))_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*)(D^{W-} M^*)_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) \int_u^T D_u^W \sigma_v^* d^* W_v^* du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) \int_u^T D_u^W J_{v^+}^* (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv) du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W \sigma_v^* du d^* W_v^*\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W J_{v^+}^* du (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T D_v^{W^*+} \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W \sigma_v^* du dv\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^T D_v^{N^*+} \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W J_v^* du \lambda_v^* dv\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v \wedge t} \sigma_u D_v^{W^*} \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W \sigma_v^* du dv\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v \wedge t} \sigma_u D_v^{N^*} \phi''(M_u + M_u^*) D_u^W J_v^* du \lambda_v^* dv\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*)(D_v^{W^*} M_u^*) D_u^W \sigma_v^* du dv\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v \wedge t} \sigma_u \left(\phi''(M_u + M_u^* + D_v^{N^*} M_u^*) - \phi''(M_u + M_u^*)\right) D_u^W J_v^* du \lambda_v^* dv\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_u^T (D_v^{W^*} M_u^*) D_u^W \sigma_v^* dv du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \int_u^T J_v^* \lambda_v^* (D_u^W J_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau J_v^*) d\tau dv du\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_u^T \sigma_v^* D_u^W \sigma_v^* dv du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \int_u^T J_v^* \lambda_v^* (D_u^W J_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau J_v^*) d\tau dv du\right].
\end{aligned}
$$

Similarly, by Lemma 3.2.2 we have, since $D_u^N J_{u^-} = 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{s^+}^t J_{u^-}\phi'(M_{u^-} + M_u^*)\,(dN_u - \lambda_u du)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t (D^{N_-}(J\phi'(M + M^*)))_u \lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u (D^{N_-}\phi'(M_u + M_u^*)))_u \lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \left(\phi'(M_u + M_u^* + D_u^N M_u^*) - \phi'(M_u + M_u^*)\right) \lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u (D_u^N M_u^*) \int_0^1 \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T D_u^N \sigma_v^* d^* W_v^* \int_0^1 \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T D_u^N J_{v^+}^* \left(d^* N_v^* - \lambda_v^* dv\right) \int_0^1 \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v\wedge t} J_u \lambda_u (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du d^* W_v^*\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v\wedge t} J_u \lambda_u (D_u^N J_{v^+}^*) \int_0^1 \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du (d^* N_v^* - \lambda_v^* dv)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^T \int_s^{v\wedge t} J_u \lambda_u (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) D_v^{W^*}(M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) d\tau du dv\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\int_s^T \int_s^{v\wedge t} J_u \lambda_u (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (\phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + D_v^{N^*}(M_u^* + \tau D_u^N M_u^*)) \\
&\qquad\qquad - \phi''(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*)) d\tau du \lambda_v^* dv\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*)(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) d\tau dv du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T \lambda_v^* (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \\
&\qquad\qquad \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)) d\rho d\tau dv du\Bigg].
\end{aligned}
$$

On the other hand, still applying Lemma 3.2.2, we have

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_s^t J_{u^-}\psi\left(M_{u^-}+M_u^*,J_u\right)(dN_u-\lambda_u du)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u D_u^N \psi\left(M_u+M_u^*,J_u\right)\lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \left(\psi(M_u+M_u^*+D_u^N M_u^*,J_u)-\psi(M_u+M_u^*,J_u)\right)\lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u (D_u^N M_u^*)\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)d\tau\lambda_u du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \int_u^T D_u^N J_v^*(d^*N_v^*-\lambda_v^* dv)\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)d\tau\lambda_u du\right] \\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \int_u^T D_u^N \sigma_v^* d^*W_v^* \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)d\tau\lambda_u du\right] \\
&= \int_s^t\int_0^1 \mathbb{E}\left[J_u\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)\int_u^T D_u^N J_v^*(d^*N_v^*-\lambda_v^* dv)\right]d\tau\lambda_u du \\
&\quad+\int_s^t\int_0^1 \mathbb{E}\left[J_u\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)\int_u^T D_u^N \sigma_v^* d^*W_v^*\right]d\tau\lambda_u du \\
&= \int_s^t\int_0^1 \mathbb{E}\left[J_u\int_u^T \lambda_u^*(D_u^N J_v^*)D_v^{N^*}\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)dv\right]d\tau\lambda_u du \\
&\quad+\int_s^t\int_0^1 \mathbb{E}\left[J_u\int_u^T (D_u^N \sigma_v^*)D_v^{W^*}\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)dv\right]d\tau\lambda_u du \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_0^1\int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*)D_v^{N^*}\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)dvd\tau du\right] \\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_0^1\int_u^T (D_u^N \sigma_v^*)D_v^{W^*}\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)dvd\tau du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_0^1\int_u^T (D_u^N J_v^*)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*+D_v^{N^*}(M_u^*+\tau D_u^N M_u^*),J_u)\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.-\frac{\partial\psi}{\partial x}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)\right)\lambda_v^* dvd\tau du\right] \\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_0^1\int_u^T (D_u^N \sigma_v^*)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*,J_u)D_v^{W^*}(M_u^*+\tau D_u^N M_u^*)dvd\tau du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u\int_0^1\int_u^T (D_u^N J_v^*)D_v^{N^*}(M_u^*+\tau D_u^N M_u^*)\right. \\
&\qquad\left.\int_0^1 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(M_u+M_u^*+\tau D_u^N M_u^*+\rho D_v^{N^*}(M_u^*+\tau D_u^N M_u^*),J_u)d\rho\,\lambda_v^* dvd\tau du\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_0^1 \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*, J_u) D_v^{W^*}(M_u^* + \tau D_u^N M_u^*) dv d\tau du\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T \lambda_v^* D_u^N J_v^*\right. \\
& \left.\int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \int_0^1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_u^*), J_u) d\rho d\tau dv du\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_0^1 \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*, J_u)(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) dv d\tau du\right].
\end{aligned}
$$

□

Next we consider the application of Proposition 3.2.3 to the particular cases of continuous and pure jump processes, with respectively $J_u = J_u^* = 0$ and $\sigma_u = \sigma_u^* = 0$, $u \in [0, T]$.

**Continuous case**

In the next proposition we assume that

$$
J_u = J_u^* = 0 \quad \text{or} \quad \lambda_u = \lambda_u^* = 0, \qquad u \in [0, T]. \tag{3.2.15}
$$

**Proposition 3.2.4.** *Assume that the processes $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ belongs to the space $\mathbb{L}_{2,1}$. Under Condition* (3.2.15)*, for all $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ with $\phi^{(3)}$ bounded we have*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2) du\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_u^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right],
\end{aligned}
$$

*$0 \leqslant s \leqslant t$.*

**Pure jump case**

In the next proposition we assume that

$$
\sigma_u = \sigma_u^* = 0, \qquad u \in [0, T]. \tag{3.2.16}
$$

**Proposition 3.2.5.** *Assume that the processes $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ belongs to the space $\mathbb{L}_{2,1}$. Under Condition* (3.2.16)*, for all $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ with $\phi^{(3)}$ bounded we have*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\phi\big(M_t + M_t^*\big)\right] = \mathbb{E}\left[\phi\big(M_s + M_s^*\big)\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t (\lambda_u J_u \psi(M_u + M_u^*, J_u) - \lambda_u^* J_u^* \psi(M_u + M_u^*, J_u^*)) du\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T \lambda_v^* (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*)\right.
\end{aligned}
$$

$$\left. \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*))d\rho d\tau dv du \right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\int_s^t J_u\lambda_u \int_u^T \lambda_v^*(D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \right.$$
$$\left. \int_0^1 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*), J_u) d\rho d\tau dv du \right],$$

$0 \leqslant s \leqslant t$.

## 3.3 Convex increasing forward/backward martingales

In this section we derive sufficient conditions for the forward/backward martingale $(M_t + M_t^*)_{t\in[0,T]}$ defined from (3.2.6) and (3.2.7) to be non-decreasing in the convex order (3.1.1). The forward and backward filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ and $(\mathcal{F}_t^*)_{t\in[0,T]}$ are given by (3.2.8).

**Theorem 3.3.1.** *Assume that the processes $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ belong to the space $\mathbb{L}_{2,1}$, and*

*i)* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$, $d\mathbb{P}\,du$ *- a.e.,*

*ii)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- a.e.,*

*iii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\mathbb{P}\,du$ *- a.e.,*

*iv)* $(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) D_u^N \sigma_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\,dudv$ *- a.e.,* $0 \leqslant u \leqslant v$, $\tau \in [0,1]$,

*v)* $\sigma_u \sigma_v^* D_u^W \sigma_v^* \geqslant 0$, $\sigma_u D_u^W J_v^* \geqslant 0$, $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\,dudv$ *- a.e.* $0 \leqslant u \leqslant v$.

*Then we have*

$$E[\phi(M_s + M_s^*)] \leqslant E[\phi(M_t + M_t^*)], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{3.3.1}$$

*for all convex functions $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ such that $\phi'$ and $\phi''$ are convex.*

*Proof.* We start by assuming that $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$. Clearly, the terms

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_s^t \phi''(M_u + M_u^*)(|\sigma_u|^2 - |\sigma_u^*|^2)du\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\int_s^t (J_u\lambda_u\psi(M_u + M_u^*, J_u) - J_u^*\lambda_u^*\psi(M_u + M_u^*, J_u^*))du\right]$$

in Proposition 3.2.3 are non-negative due to Conditions $(i) - (iii)$ and the convexity of $\phi$, which shows that the function

$$\psi(x,y) = \frac{\phi(x+y) - \phi(x) - y\phi'(x)}{y} = y\int_0^1 (1-\tau)\phi''(x+\tau y)d\tau \geqslant 0, \tag{3.3.2}$$

is non-negative in $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ and non-decreasing in $y > 0$ for all fixed $x \in \mathbb{R}$. Next, by Conditions $(iv)$ and $(v)$ we have

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \phi^{(3)}(M_u + M_u^*) \int_t^T D_u^W |\sigma_v^*|^2 dv du\right] \geqslant 0,$$
$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma_u \int_u^T J_v^* \lambda_v^* (D_u^W J_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau J_v) d\tau dv du\right] \geqslant 0,$$
$$\mathbb{E}\left[\int_s^t J_u \lambda_u \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \int_0^1 \phi^{(3)}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*)(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) d\tau dv du\right] \geqslant 0,$$

and

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_0^1 \int_u^T (D_u^N \sigma_v^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^*, J_u)(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) dv d\tau du\right] \geqslant 0,$$

since

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\phi''(x+y) - \phi''(x) - y\phi^{(3)}(x)}{y} \geqslant 0$$

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, by (3.3.2) and the convexity of $\phi''$, and

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \lambda_u J_u \int_u^T \lambda_v^* (D_u^N J_v^*) \int_0^1 (J_v^* + \tau D_u^N J_v^*) \int_0^1 \left(\phi^{(3)}(X_{u,v}) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(X_{u,v}, J_u)\right) d\rho d\tau dv du\right]$$
$$\geqslant \ 0,$$

where

$$X_{u,v} = M_u + M_u^* + \tau D_u^N M_u^* + \rho(J_v^* + \tau D_u^N J_v^*),$$

since

$$\begin{aligned} J_v^* + \tau D_u^N J_v^* &= J_v^* + \tau(J_v^*(W_\cdot, N_\cdot + \mathbf{1}_{[u,+\infty[}(\cdot)) - J_v^*) \\ &= (1-\tau) J_v^* + \tau J_v^*(W_\cdot, N_\cdot + \mathbf{1}_{[u,+\infty[}(\cdot)) \\ &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$du dv\, \mathbb{P}(d\omega)$ - $a.e.$, $\tau \in [0, 1]$. The conclusion then follows from Proposition 3.2.3 when $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, and (3.3.1) finally extends to functions $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. $\square$

Next we consider the particular cases of continuous and pure jump processes, in which some of the above assumptions can be relaxed.

**Continuous case**

**Theorem 3.3.2.** *Assume that the processes* $(\sigma_t^*)_{t \in [0,T]}$ *and* $(J_t^*)_{t \in [0,T]}$ *belong to the space* $\mathbb{L}_{2,1}$. *Under condition* (3.2.15)*, assume* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$, $d\,\mathbb{P}\, du$ - $a.e.$*, and*

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \geqslant 0, \qquad d\,\mathbb{P}\, du dv \text{ - } a.e., \qquad 0 \leqslant u \leqslant v. \tag{3.3.4}$$

*Then for all* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, *we have*

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_s + M_s^*)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi(M_t + M_t^*)\right], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3.5}$$

*for all convex functions* $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *with convex derivative* $\phi'$.

Replacing (3.3.4) with

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \leqslant 0, \qquad d\,\mathbb{P}\,dudv\text{ - }a.e.,$$

we find that (3.3.5) holds true for all convex function $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ with concave derivative $\phi'$.

**Pure jump case**

**Theorem 3.3.3.** *Assume that the processes* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *and* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *belong to the space* $\mathbb{L}_{2,1}$. *Under Condition* (3.2.16), *assume that the following conditions are satisfied :*

*i)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ *- a.e.,*

*ii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\,\mathbb{P}\,du$ *- a.e.,*

*iii)* $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\,\mathbb{P}\,dudv$ *- a.e.,* $0 \leqslant u \leqslant v$,

*then we have*

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_s + M_s^*)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi(M_t + M_t^*)\right], \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3.6}$$

*for all convex functions* $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *such that* $\phi'$ *and* $\phi''$ *are convex.*

## 3.4 Convex ordering for stochastic integrals

In this section we apply the results of Section 3.3 to the derivation of convex concentration inequalities for random variables represented as stochastic integrals, as

$$\int_0^T \sigma_u dW_u + \int_0^T J_{u^-}(dN_u - \lambda_u du),$$

and

$$\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^T J_{u^-}^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du),$$

where $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$, $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$, $(J_t)_{t\in[0,T]}$ , $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ are square-integrable and $(\mathcal{F}_t)$ -adapted, $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$ is a standard (forward) Brownian motion and $(\hat{N}_t)_{t\in[0,T]}$ is a standard (forward) Poisson process with intensity $(\lambda_t^*)_{t\in[0,T]}$, mutually independent and independent of $(W_t)_{t\in[0,T]}$ and $(N_t)_{t\in[0,T]}$.

**Theorem 3.4.1.** *Assume that the processes* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *and* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *belong to the space* $\mathbb{L}_{2,1}$, *and* *i)* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u| \, d\mathbb{P}\, du$ - $a.e.$,

*ii)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$, $d\mathbb{P}\, du$ - $a.e.$,

*iii)* $\lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$, $d\mathbb{P}\, du$ - $a.e.$,

*iv)* $(\sigma_v^* + \tau D_u^N \sigma_v^*) D_u^N \sigma_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\, du$ - $a.e.$, $0 \leqslant u \leqslant v$, $\tau \in [0,1]$,

*v)* $\sigma_u \sigma_v^* D_u^W \sigma_v^* \geqslant 0$, $\sigma_u D_u^W J_v^* \geqslant 0$, $D_u^N J_v^* \geqslant 0$, $d\mathbb{P}\, dudv$ - $a.e.$, $0 \leqslant u \leqslant v$.

*Then we have*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^T J_u^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du)\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u + \int_0^T J_u(dN_u - \lambda_u du)\right)\right], \tag{3.4.1}$$

*for all convex functions $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ such that $\phi'$ and $\phi''$ are convex.*

*Proof.* Consider the (forward) martingale

$$\hat{M}_t = \int_0^t \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^t J_u^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du), \qquad t \in [0,T],$$

where the processes $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ are $(\mathcal{F}_t)$-adapted. Defining the backward Brownian motion $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and Poisson process $(N_t^*)_{t\in[0,T]}$ by

$$W_t^* = \hat{W}_T - \hat{W}_t, \qquad N_t^* = \hat{N}_T - \hat{N}_t, \qquad t \in [0,T], \tag{3.4.2}$$

We have the identity in law

$$\begin{aligned} \hat{M}_T &:= \int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u + \int_0^T J_u^*(d\hat{N}_u - \lambda_u^* du) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^T \sigma_u^* d^* W_u^* + \int_0^T J_u^*(d^* N_u^* - \lambda_u^* du) \\ &= M_0^*, \end{aligned}$$

which holds since the integrands $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ are independent of the integrators $(\hat{W}_t)_{t\in[0,T]}$, $(\hat{N}_t)_{t\in[0,T]}$, and by the definition (3.4.2) of $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ and $(N_t^*)_{t\in[0,T]}$.

We conclude by Theorem 3.3.1 which shows that

$$\mathbb{E}[\phi(\hat{M}_T)] = \mathbb{E}[\phi(M_0 + M_0^*)] \leqslant \mathbb{E}[\phi(M_T + M_T^*)] = \mathbb{E}[\phi(M_T)], \quad t \in [0,T].$$

□

Note that if $\sigma_v^* \geqslant 0$ then condition $(iv)$ above can be replace with
$iv')$ $D_u^N \sigma_v^* \geqslant 0, d\mathbb{P}\, dudv$ - $a.e.$,
by the same argument as in (3.3.3) above.

The following results can be proved in a similar way in the continuous and pure jumps cases.

**Corollary 3.4.2.** *Assume that the processes* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *and* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *belong to the space* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Under Condition* (3.2.15)*, assume that* $|\sigma_u^*| \leqslant |\sigma_u|$*,* $d\,\mathbb{P}\,dudv$ *-* $a.e.$ *and*

$$\sigma_u D_u |\sigma_v^*|^2 \geq 0, \qquad d\,\mathbb{P}\,du \text{ - } a.e., \qquad 0 \leqslant u \leqslant v. \tag{3.4.3}$$

*Then we have*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u^* d\hat{W}_u\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T \sigma_u dW_u\right)\right], \tag{3.4.4}$$

*for all convex functions* $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *with convex derivative* $\phi'$*.*

The next result is stated in the pure jump case.

**Corollary 3.4.3.** *Assume that the processes* $(\sigma_t^*)_{t\in[0,T]}$ *and* $(J_t^*)_{t\in[0,T]}$ *belong to the space* $\mathbb{L}_{2,1}$*. Under Condition* (3.2.16)*, assume that the following conditions are satisfied*

*i)* $0 \leqslant J_u^* \leqslant J_u$*,* $d\,\mathbb{P}\,du$ *-* $a.e.$*,*

*ii)* $0 \leqslant \lambda_u^* J_u^* \leqslant \lambda_u J_u$*,* $d\,\mathbb{P}\,du$ *-* $a.e.$*,*

*iii)* $D_u^N J_v^* \geqslant 0$*,* $d\,\mathbb{P}\,dudv$ *-* $a.e., 0 \leqslant u \leqslant v$*.*

*Then for all* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$*, we have*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T J_{u^-}^* (d\hat{N}_u - \lambda_u^* du)\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\phi\left(\int_0^T J_{u^-} (dN_u - \lambda_u du)\right)\right], \tag{3.4.5}$$

*for all convex functions* $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *such that* $\phi'$ *and* $\phi''$ *are convex.*

# Deuxième partie

# Mouvement Brownien conditionné

# Chapitre 4

# Brownian motion conditioned to stay in a strip

Ce chapitre fait l'objet d'une prépublication.

Abstract

In this chapter, we construct a Brownian motion conditioned to stay in a strip using weak convergence arguments. This approach extends known results for Brownian motion conditioned in the half plane, with or without final condition. We compare the resulting processes to Brownian meander and Brownian excursion.

## 4.1 Introduction

Since four decades functional limit theorems have been used to construct stochastic processes conditionally to events of zero probability. In [11] and [27], the authors use Donsker's invariance principle to construct the Brownian meander. To be precise, the Brownian meander appears as the weak limit as $n$ goes to infinity of rescaled (linearly interpolated) random walks conditioned to stay positive until time $n$. In the same spirit, the Brownian excursion is constructed in [30] as the weak limit of rescaled random walks that reach $0$ for the first time at time $n$. Instead of approximating the Brownian motion by random walks, another point of view, *cf.* [10] and [19], consists in approximating the conditioning event $\Lambda$ by a sequence $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of measurable sets satisfying

$$\mathbb{P}(\Lambda_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n = \Lambda.$$

By this means, it is proved in [19] that a Brownian motion on $[0,1]$ conditioned to be greater than $-\varepsilon$ for $\varepsilon > 0$ converges to the Brownian meander as $\varepsilon$ goes to $0$ and links are exhibited between Brownian meander, Brownian bridge and Brownian excursion. In the same spirit, the Brownian bridge appears in [10] as the weak limit of a Brownian motion conditioned to be in $[0,\varepsilon]$ at time $1$. More recently similar point of view is used to condition a Brownian motion to stay in a cone (see [24]).

We construct standard Brownian motions conditioned to stay in an interval $I=[0,\ell]$ up to time $1$ exiting or not $[0,\ell]$ at time $1$, for some $\ell>0$. Brownian motion takes almost surely infinitely negative values within any finite time hence those events have probability 0 and we will use the same point of view as in [19] to construct such processes. We propose three functional convergence results : in Theorem 4.2.1 we construct the Brownian motion conditioned to stay in $[0,1]$ up to time 1, Theorem 4.2.2 deals with the additional condition to return to 0 at time 1 and Theorem 4.2.4 treats the case where the Brownian motion crosses the segment $I$ and ends in $\ell$ at time 1. In each case the method consists in conditioning Brownian motion by events $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and passing to the limit in $n$. Therefore the resulting process can be understood as the Brownian motion conditioned by the limit event $\Lambda$. Let us stress on the fact that our method is not equivalent to reflecting Brownian motion (or Brownian bridges) at levels $0$ and $\ell$ and leads to differents processes. In particular our processes are inhomogeneous in time. This is a consequence of the fact that our conditions are about the trajectories of the processes until time $1$ : the condition "stay in $[0,\ell]$" up to time 1 gets weaker as $t$ goes to 1, in the same time the final condition in Theorems 4.2.2 and 4.2.4 gets stronger.

This chapter is organized as follows. Convergence theorems are stated and proved in Section 4.2 and comparison are made with Brownian meander and Brownian excursion. Section 4.3 contains some applications to signal processing. Some technical lemmas are recalled or proved in the appendix. We finish this section by introducing the general framework of this work.

In the sequel $(W_t)_{t\in[0,1]}$ is a Brownian motion starting at $x$ under probability $\mathbb{P}^x$. When $x=0$, we denote $\mathbb{P}$ instead of $\mathbb{P}^0$.

We define the current minimum and maximum of $W$ by

$$m_t=\min_{0\leqslant s\leqslant t} W_s \qquad \text{and} \qquad M_t=\max_{0\leqslant s\leqslant t} W_s.$$

In this chapter, it is made a huge use of the Reflection Principle that we recall now. Related results stand in the appendix.

***Reflection Principle :*** *Let $a<0$ and $a<x_1<x_2$, we have*

$$\mathbb{P}\big(W_t\in[x_1,x_2],m_t<a\big)=\mathbb{P}\big(W_t\in[2a-x_2,2a-x_1]\big). \tag{4.1.1}$$

Finally, in order to condition random variable, we use the following formalism :
Let $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ be a probability space. For $\Lambda\in\mathcal{F}$ with $\mathbb{P}(\Lambda)\neq 0$, we define a new

probability space $(\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, \mathbb{P}_\Lambda)$, where $\mathcal{F}_\Lambda := \{A \cap \Lambda : A \in \mathcal{F}\}$ is the trace of $\mathcal{F}$ on $\Lambda$ and where $\mathbb{P}_\Lambda$ is given by :

$$\mathbb{P}_\Lambda(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\Lambda)} = \mathbb{P}(A|\Lambda), \qquad \forall A \in \mathcal{F}_\Lambda.$$

To a random variable $X$ on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, we associate the random variable $X^\Lambda$ on $(\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, \mathbb{P}_\Lambda)$ defined as the restriction of $X$ on $\Lambda$, so that $X^\Lambda$ can be understood as $X$ conditioned by $\Lambda$.

The following result shows that under suitable conditioning the Markov property is conserved (*cf.* Lemma 1.5 in [19]).

**Lemma 4.1.1.** *Let $X$ be a Markov random function on $C[0,1]$, the space of continuous functions on $[0,1]$. Let $\mathcal{L}$ be a Borel subset of $C[0,1]$ such that $\mathbb{P}(X \in \mathcal{L}) \neq 0$ and denote $\Lambda = \{X \in \mathcal{L}\}$. Let $\pi_{[0,t]}$ (resp. $\pi_{[t,1]}$) be respectively the projection maps of $C[0,1]$ onto $C[0,t]$ (resp. $C[t,1]$).*
*If for all $t \in [0,1]$, there exist Borelians $A_t \subset C[0,t]$ and $B_t \subset C[t,1]$ such that*

$$\mathcal{L} = \pi_{[0,t]}^{-1}(A_t) \cap \pi_{[t,1]}^{-1}(B_t),$$

*then $X^\Lambda$ is Markovian.*

In the following theorems, transition kernel are stated using the Jacobi theta function $\vartheta$, defined for $z, \tau \in \mathbb{C}$ with $\tau$ in the upper half-plane, by :

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi k^2 \tau + 2k\pi i z\right). \tag{4.1.2}$$

Deep connections between Jacobi theta function and conditional Brownian motion are studied in [41].

## 4.2 Main Results

Our first main result is devoted to conditioning Brownian motion to stay in a strip up to time 1 without further requirement at time 1. For our purpose, we introduce the event

$$\Lambda_t^{a,b} := \{W_s \in [a,b], s \in [0,t]\}.$$

In case where $t = 1$, we simply denote $\Lambda^{a,b} := \Lambda_1^{a,b}$. Moreover if $b = \ell$, we denote $\Lambda^\varepsilon := \Lambda^{-\varepsilon,\ell}$. For $\varepsilon > 0$, we denote $W^{\ell,\varepsilon}$ the Brownian motion conditioned to stay in $[-\varepsilon, \ell]$ up to time 1, *i.e.* $W^{\ell,\varepsilon} := W^{\Lambda^\varepsilon}$.
In the sequel, $\phi_t$ stands for the centered Gaussian distribution with variance $t$.

**Theorem 4.2.1.** *For $\ell > 0$, the conditioned processes $W^{\ell,\varepsilon}$ converge weakly as $\varepsilon$ goes to $0$ to a Markov process $W^\ell$ with transition kernel :*

$$p_\ell(s,x;t,y) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\frac{H_{1-t}(y)G_t^\ell(y)}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)} & \text{if } 0 = s,\ x = 0, \\ \frac{H_{1-t}(y)}{H_{1-s}(x)}\left(r_{s,t}\left(y-x\right) - r_{s,t}\left(y+x\right)\right) & \text{if } 0 < s, \\ 0 & otherwise, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

*for $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ and $x, y \in (0,\ell)$, where*

$$H_s(x) = \begin{cases} \int_{-x}^{\ell-x} \phi_s(\xi)\vartheta\left(\frac{\ell\xi}{2\pi s}i, 1+\frac{\ell^2}{2\pi s}i\right)d\xi, & \text{if } s > 0 \\ 1 & \text{if } s = 0 \end{cases}$$

$$G_t^\ell(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x),$$

*and*

$$r_{s,t}\left(x\right) := \phi_{t-s}(x)\vartheta\left(\frac{\ell x}{\pi\left(t-s\right)}i, \frac{2\ell^2}{\pi\left(t-s\right)}i\right).$$

The identity

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^{k^2}z^k = \prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1-x^{2k}\right)\left(1+x^{2k-1}z\right)\left(1+x^{2k-1}z^{-1}\right)\right],$$

valid for all $x, z \in \mathbb{C}$, with $|x| < 1$, $z \neq 0$, (Theorem 352, [25], p. 282) with $x := e^{-\frac{\ell^2}{2}}$, $z := -1$ ensures that $\vartheta\left(0, 1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)$ is positive for $\ell > 0$. Indeed, taking logarithm of the product, this follows from the convergence of the serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\log\left(1-x^{2k}\right) + 2\log\left(1-x^{2k-1}\right)\right),$$

for all $x \in [0,1[$. Furthermore by equality (4.2.4) below, $H_{1-s}(x)$ is also positive $\forall x \in (0,\ell)$, so that expression (4.2.1) is well defined.

*Proof.* Let $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a decreasing sequence with limit $0$. We will prove that $W^\ell$ is the weak limit of $\left(W^{\ell,\varepsilon_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. As usual, the proof consists of two steps : the convergence of finite-dimensional distributions (f.d.d.) and the tightness.

**Step 1 : f.d.d. convergence**

Let $\mathcal{L}^{\varepsilon_n} = \{x(\cdot) \in C[0,1] : x(s) \in [-\varepsilon_n, \ell], \forall s \in [0,1]\}$. Since

$$\mathcal{L}^{\varepsilon_n} = \pi_{[0,t]}^{-1}(A_t) \cap \pi_{[t,1]}^{-1}(B_t), \forall t \in [0,1]$$

with
$$A_t = \{x(\cdot) \in C[0,t] : x(s) \in [-\varepsilon_n, \ell], \forall s \leqslant t\}$$
and
$$B_t = \{x(\cdot) \in C[t,1] : x(s) \in [-\varepsilon_n, \ell], \forall s \in [t,1]\},$$
Lemma 4.1.1 ensures that the processes $\{W^{\ell,\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ are Markovian. The first step thus reduces to show the convergence of the transition kernel $p_n(s,x;t,y)$ of $W^{\ell,\varepsilon_n}$ and to check that for all $0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$
$$(x_1,\ldots,x_m) \mapsto p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\ldots p_n(0,0;t_1,x_1)$$
are uniformly bounded (with respect to $n$) by an integrable function. Indeed, in this case the dominated convergence Theorem implies
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\Lambda^{\varepsilon_n}}\left(W^{\ell,\varepsilon_n}_{t_1} \in A_1,\ldots,W^{\ell,\varepsilon_n}_{t_m} \in A_m\right)\\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{A_1}\cdots\int_{A_m} p_\ell(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)\ldots p_\ell(0,0;t_1,x_1)dx_m\ldots dx_1\end{aligned}$$
where $p_\ell(s,x;t,y) = \lim_{n\to+\infty} p_n(s,x;t,y)$, for all $0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$ and $A_1,\ldots,A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
We begin to investigate the entrance transition probability. By the Markov property, we have for $\varepsilon > 0$
$$\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^\varepsilon}\left(W^{\ell,\varepsilon}_t \in dy\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda^{-\varepsilon,\ell}_{1-t}\right) f^\varepsilon_{W_t}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^\varepsilon\right)}, \tag{4.2.2}$$
where $f^\varepsilon_{W_t}(y) := \dfrac{\mathbb{P}\left(W_t \in dy, \Lambda^{-\varepsilon,\ell}_t\right)}{dy}$.

Let us compute the limit of the right-hand side of (4.2.2) as $\varepsilon$ goes to 0. We begin with the denominator $\mathbb{P}(\Lambda^\varepsilon)$. From Lemma 4.3.1,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Lambda^\varepsilon\right) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\,\mathbb{P}\big(-\varepsilon + k(\ell+\varepsilon) < W_1 < \ell + k(\ell+\varepsilon)\big)\\ &= 2\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\phi(k\ell)\right)\varepsilon + o(\varepsilon)\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\pi k^2 - \frac{k^2\ell^2}{2}\right)\right)\varepsilon + o(\varepsilon)\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\vartheta\left(0, 1 + \frac{\ell^2}{2\pi}i\right)\varepsilon + o(\varepsilon)\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

where $\vartheta$ is the Jacobi theta function given in (4.1.2). We compute now

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \mathbb{P}\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon-y,\ell-y}\right) f_{W_t}^{\varepsilon}(y)\right\}.$$

First, observe that since $\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon-y,\ell-y}$ decreases to $\Lambda_{1-t}^{-y,\ell-y}$, the monotony of probability ensures

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}\right) = \mathbb{P}\left(\Lambda_{1-t}^{-y,\ell-y}\right).$$

Next, using Lemma 4.3.1, we have for $t \neq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Lambda_{1-t}^{-y,\ell-y}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-y}^{\ell-y}(-1)^k\,\phi_{1-t}\left(\xi+k\ell\right)d\xi \\
&= \int_{-y}^{\ell-y}\phi_{1-t}(\xi)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left(ik^2\pi-\frac{k^2\ell^2}{2\left(1-t\right)}-\frac{k\xi\ell}{1-t}\right)d\xi \\
&= H_{1-t}(y). \qquad (4.2.4)
\end{aligned}$$

From Lemma 4.3.1, we have for all $y\in[-\varepsilon,\ell]$

$$\begin{aligned}
f_{W_t}^{\varepsilon}(y) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\phi_t\left(y-2k\left(\ell+\varepsilon\right)\right)-\phi_t\left(y+2\varepsilon-2k\left(\ell+\varepsilon\right)\right)\Big) \\
&= 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi_t'(2k\ell-y)\varepsilon+o(\varepsilon) \\
&= 2G_t^{\ell}(y)\varepsilon+o(\varepsilon). \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

Finally, combining (4.2.3), (4.2.4) and (4.2.5) together with the initial expression (4.2.2), we obtain the density of the entrance probability :

$$p_\ell\left(0,0;t,y\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^{\varepsilon_n}}\left(W_t^{\ell,\varepsilon_n}\in dy\right)}{dy}=\sqrt{2\pi}\frac{G_t^{\ell}(y)H_{1-t}(y)}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)},$$

for $t<1$, and

$$p_\ell\left(0,0;1,y\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f_{W_1}^{\varepsilon_n}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)}=\sqrt{2\pi}\frac{G_t^{\ell}(y)}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)}.$$

Next, we compute the general transition probability between time $s$ and $t$, for $0<s<$

$t \leqslant 1$.
For $x, y \in (0, \ell)$, we have

$$\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^\varepsilon}\left(W_t^{\ell,\varepsilon} \in dy \middle| W_s^{\ell,\varepsilon} = x\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}\right) f_{W_{t-s}}^{x,\varepsilon}(y)}{\mathbb{P}^x\left(\Lambda_{1-s}^{-\varepsilon,\ell}\right)} \tag{4.2.6}$$

where $f_{W_{t-s}}^{x,\varepsilon}(y)$ stands for $\frac{\mathbb{P}^x\left(W_{t-s} \in d\xi, \Lambda_{t-s}^{-\varepsilon,\ell}\right)}{d\xi}$. Thus, by monotony of probability and by convergence of $f_{W_{t-s}}^{x,\varepsilon}$ to $f_{W_{t-s}}^{x,0}$ as $\varepsilon$ goes to 0

$$p_\ell(s, x; t, y) := \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{P}_{\Lambda^{\varepsilon_n}}\left(W_t^{\ell,\varepsilon_n} \in dy \middle| W_s^{\ell,\varepsilon_n} = x\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}\left(\Lambda_{1-t}^{-y,\ell-y}\right) f_{W_{t-s}}^{x,0}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda_{1-s}^{-x,\ell-x}\right)}. \tag{4.2.7}$$

From Lemma 4.3.1, we obtain

$$\begin{aligned}
& f_{W_{t-s}}^{x,0}(y) \\
&= \left[\phi_{t-s}(y-x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2k\ell(y-x) - 2k^2\ell^2}{t-s}\right)\right. \\
&\left. -\phi_{t-s}(y+x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2k\ell(y+x) - 2k^2\ell^2}{t-s}\right)\right] \\
&= \left[\phi_{t-s}(y-x)\, \vartheta\left(\frac{\ell(y-x)}{\pi(t-s)} i, \frac{2\ell^2}{\pi(t-s)} i\right) - \phi_{t-s}(y+x)\, \vartheta\left(\frac{\ell(y+x)}{\pi(t-s)} i, \frac{2\ell^2}{\pi(t-s)} i\right)\right] \\
&= r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x).
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Plugging (4.2.4) and (4.2.8) in (4.2.7), we obtain :

$$p_\ell(s, x, t, y) = \frac{H_{1-t}(y)}{H_{1-s}(x)} \left(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\right),$$

for $t < 1$ and

$$p_\ell(s, x, 1, y) = \frac{r_{s,1}(y-x) - r_{s,1}(y+x)}{H_{1-s}(x)}.$$

It remains to check that the products $p_n(0, 0; t_1, x_1) \ldots p_n(t_{m-1}, x_{m-1}; t_m, x_m)$ are bounded by an integrable function. For $x, y \in [-\varepsilon_n, \ell]$, $0 < s < t \leqslant 1$, we have, from (4.2.2)

$$p_n(0, 0, t, y) = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon_n,\ell}\right) f_{W_t}^{\varepsilon_n}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)},$$

and from (4.2.6) and Lemma 4.3.1

$$p_n(s,x,t,y) = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon_n,\ell}\right) f_{W_{t-s}}^{x,\varepsilon_n}(y)}{\mathbb{P}^x\left(\Lambda_{1-s}^{-\varepsilon_n,\ell}\right)} \leqslant \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon_n,\ell}\right) K_{t-s}}{\mathbb{P}^x\left(\Lambda_{1-s}^{-\varepsilon_n,\ell}\right)},$$

with $K_{t-s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{t-s}(k\ell) < +\infty$. Thus, for $0 < t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$, $x_1, \ldots, x_m \in [-\varepsilon_n, \ell]$, we have

$$\begin{aligned} p_n(0,0;t_1,x_1)\ldots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m) &\leqslant \frac{\mathbb{P}^{x_m}\left(\Lambda_{1-t_m}^{-\varepsilon_n,\ell}\right) f_{W_{t_1}}^{\varepsilon_n}(x_1)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)} \prod_{k=2}^{m} K_{t_i-t_{i-1}} \\ &\leqslant \frac{f_{W_{t_1}}^{\varepsilon_n}(x_1)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)} \prod_{k=2}^{m} K_{t_i-t_{i-1}}. \end{aligned}$$

The expansions (4.2.3) and (4.2.5) entail

$$p_n(0,0;t_1,x_1)\ldots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m) \leqslant \sqrt{2\pi}\, \frac{G_{t_1}^{\ell}(x_1)}{\vartheta\left(0, 1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)} \left(\prod_{k=2}^{m} K_{t_i-t_{i-1}}\right) \big(1+o(1)\big).$$

Since $G_{t_1}^{\ell}(x_1)$ is bounded regardless to $x_1$ by a constant $C_{t_1} < +\infty$, the products

$$p_n(0,0;t_1,x_1)\ldots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)$$

are bounded by $\frac{2\sqrt{2\pi}}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)} \left(\prod_{k=2}^{m} K_{t_i-t_{i-1}}\right) C_{t_1} \mathbf{1}_{[-\varepsilon_0,\ell]^m}(x)$ for $n$ large enough.
This achieves the proof of the convergence of finite-dimensional distributions.

**Step 2 : Tightness**
Denote $\mathbb{P}_n$ the measure induced by $W^{\ell,\varepsilon_n}$ on $C[0,1]$.
Using standard tightness criterion (see [10], Theorem 7-3), it is sufficient to show that for each $\eta > 0$ and every $s \in [0,1]$

$$\lim_{\delta\to 0}\ \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t<s+\delta} |x(t) - x(s)| > \eta\right) = 0.$$

First, we consider the special case $s = 0$ for which we have :

$$\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{0<t<\delta} |x(t)| > \eta\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\sup_{0<t<\delta} |W(t)| > \eta, \Lambda^{\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)}.$$

For $\varepsilon < \eta$, we have :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0<t<\delta} |W(t)| > \eta, \Lambda^{\varepsilon}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(M_\delta > \eta, m_\delta > -\varepsilon\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mathbb{P}\left(M_\delta > \eta, m_\delta > -\varepsilon, W_\delta \in [-\varepsilon,\eta]\right) + \mathbb{P}\left(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta \in [\eta, 2\eta+\varepsilon]\right) + \mathbb{P}\left(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\right) \quad (4.2.9)\\
&\leqslant 2\,\mathbb{P}\left(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\right) \\
&\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\,\varepsilon\, e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}} \quad (4.2.10)
\end{aligned}
$$

where bounds (4.2.9) and (4.2.10) come respectively from inequality (4.3.2) and Lemma 4.3.3 $ii)$. Hence using (4.2.3) we have

$$\frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{0<t<\delta}|x(t)-x(0)|>\eta\right) \leqslant \frac{2}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)\delta^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}\left(1+o(1)\right). \tag{4.2.11}$$

In the other hand for $s\neq 0$, we have

$$\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t<s+\delta}|x(t)-x(s)|>\eta\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\sup_{s<t<s+\delta}|W_t-W_s|>\eta, \Lambda^{\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)}.$$

The numerator is bounded as follows

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{s<t<s+\delta}|W_t-W_s|>\eta, \Lambda^{\varepsilon}\right) &\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\ell}\mathbb{P}^x\left(\sup_{0<t<\delta}|W_t-W_0|>\eta\right)\mathbb{P}\left(W_s\in dx, m_s>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{0<t<\delta}|W_t|>\eta\right)\mathbb{P}\left(m_s>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant 2\,\mathbb{P}\left(M_\delta>\eta\right)\mathbb{P}\left(m_s>-\varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

Lemma 4.3.3 $i)$ and (4.2.3) entail

$$\frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t<s+\delta}|x(t)-x(s)|>\eta\right) \leqslant \frac{4}{\vartheta\left(0,1+\frac{\ell^2}{2\pi}i\right)s^{\frac{1}{2}}\delta}e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}\left(1+o(1)\right). \tag{4.2.12}$$

Hence (4.2.11) and (4.2.12) entail

$$\lim_{\delta\to 0}\ \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t<\delta+s}|x(t)-x(s)|>\eta\right) = 0.$$

Finally $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is tight in $C[0,1]$, and Theorem 4.2.1 is proved. □

Now, we investigate the case where the Brownian motion is also conditioned to leave the strip at time 1. Obviously, there are two possible exits for $W$ : either $W_1 = 0$ or $W_1 = \ell$. Let us first begin with the case $W_1 = 0$. Let $I^{\downarrow,\varepsilon} = [-\varepsilon,\varepsilon]$, and $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ be the Brownian motion conditioned to stay in $[-\varepsilon,\ell]$ up to time 1 and to be in $I^{\downarrow,\varepsilon}$ at time 1, *i.e.* $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ is the Brownian motion conditioned by the event $\Lambda^{\downarrow,\varepsilon} := \{W_1\in I^{\downarrow,\varepsilon}, \Lambda^\varepsilon\}$.

**Theorem 4.2.2.** *There exists $\ell_0$, such that for $\ell > \ell_0$, the processes $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ converge weakly as $\varepsilon$ goes to 0 to the Markov process $W^{\ell,\downarrow}$ defined by the following transition kernel :*

$$p_{\ell,\downarrow}(s,x;t,y)\,dy = \begin{cases} -\frac{2G^{\ell}_{1-t}(y)G^{\ell}_{t}(y)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi_1''(2k\ell)}dy & \text{if } 0 = s < t < 1,\ x = 0 \\ \frac{G^{\ell}_{1-t}(y)}{G^{\ell}_{1-s}(x)}\big(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\big)dy & \text{if } 0 < s < t < 1 \\ \delta_0(dy) & \text{if } t=1 \\ 0\,dy & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.2.13}$$

*with $G^\ell$ defined as in Theorem 4.2.1, for $0 < s < t \leqslant 1$, and $x, y \in (0,\ell)$.*

**Remark 4.2.3.** *The convergence holds as soon as the transition kernel is well defined,* i.e. *if the denominators are non zero. By continuity arguments it is easy to see that they are not for $\ell$ "large enough". Lemmas 4.3.6 and 4.3.7 ensures that for $\ell_0 = 1.66$ is a suitable choice for $\ell_0$.*

*Proof.* The scheme is the same as for Theorem 4.2.1 : we prove first the f.d.d. convergence by showing the convergence of the probability transition (step 1) and, next, tightness (step 2).

**Step 1 : f.d.d. convergence**

Here again Lemma 4.1.1 ensures that the processes $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$ is Markovian for any $\varepsilon > 0$, hence it is sufficient to show the convergence of the Markov kernel and to check that the functions

$$(x_1,\dots,x_m) \mapsto p_n(0,0;t_1,x_1)\dots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)$$

are bounded by an integrable function for all $0 < t_1 < \dots < t_m < 1$. We compute first the transition probability of $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}$.
Let us first treat the case when $t < 1$.
For $0 = s < t < 1$, we have

$$\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}}\left(W_t^{\ell,\downarrow,\varepsilon} \in dy\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(W_{1-t} \in I^{\downarrow,\varepsilon}, \Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}\right) f^{\varepsilon}_{W_t}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right)}, \tag{4.2.14}$$

where again $f^{\varepsilon}_{W_t}(y)$ stands for $\frac{\mathbb{P}\left(W_t\in dy, \Lambda_t^{-\varepsilon,\ell}\right)}{dy}$. From Lemma 4.3.1, we have :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^y\left(W_{1-t} \in I^{\downarrow,\varepsilon}, \Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}\right) &= \mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [-\varepsilon - y, \varepsilon - y], M_{1-t} < \ell - y, m_{1-t} > -\varepsilon - y\right) \\ &= \int_{-\varepsilon-y}^{\varepsilon-y} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{1-t}\left(x + 2k(\ell+\varepsilon)\right) - \phi_{1-t}\left(x + 2(y+\varepsilon) + 2k(\ell+\varepsilon)\right) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [-\varepsilon - y + 2k(\ell+\varepsilon), \varepsilon - y + 2k(\ell+\varepsilon)]\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [\varepsilon + y + 2k(\ell+\varepsilon), 3\varepsilon + y + 2k(\ell+\varepsilon)]\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi'_{1-t}\left(2k\ell - y\right)\ \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\
&= 4G^{\ell}_{1-t}(y)\ \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

Again, from Lemma 4.3.1

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\mathbb{P}\left(W_1 \in [-\varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right), \varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right)]\right) \\
&\quad - \mathbb{P}\left(W_1 \in [-3\varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right), -\varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right)]\right)\Big) \\
&= -4\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi''_1(2k\ell)\ \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3). \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

Note that for $\ell$ large enough (see Lemma 4.3.7)

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi''_1(2k\ell) < 0.
$$

Plugging (4.2.5), (4.2.15) and (4.2.16) into (4.2.14) entails

$$
p_{\ell,\downarrow}\left(0,0;t,y\right) = -\frac{2G^{\ell}_{1-t}(y)G^{\ell}_{t}(y)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi''_1(2k\ell)}.
$$

Now for $0 < s < t < 1$, we have

$$
\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}}\left(W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}_t \in dy \middle| W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}_s = x\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda^{-\varepsilon,\ell}_{1-t}, W_{1-t} \in I^{\downarrow,\varepsilon}\right) f^{x,\varepsilon}_{W_{t-s}}(y)}{\mathbb{P}^x\left(\Lambda^{-\varepsilon,\ell}_{1-s}, W_{1-s} \in I^{\downarrow,\varepsilon}\right)}.
$$

Observe again that from Lemma 4.3.6, for $\ell$ large enough,

$$
G^{\ell}_{1-s}(x) > 0,
$$

thus from (4.2.15) and (4.2.8), we have

$$
p_{\ell,\downarrow}(s,x,t,dy) = \frac{G^{\ell}_{1-t}(y)}{G^{\ell}_{1-s}(x)}\left(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\right).
$$

Let us now treat the special case $t = 1$. For each neighbourhood $V$ of 0, we have

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}_{\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}}\left(W^{\ell,\downarrow,\varepsilon}_1 \in V\right) = 1,
$$

therefore

$$\mathbb{P}_{\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}}\left(W_1^{\ell,\downarrow,\varepsilon}\in dy\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\delta_0(dy),$$

by a similar argument

$$\mathbb{P}_{\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}}\left(W_1^{\ell,\downarrow,\varepsilon}\in dy\middle|W_s=x\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\delta_0(dy).$$

Hence

$$p_{\ell,\downarrow}(s,x,1,dy)=\delta_0(dy).$$

Since the products $p_n(0,0;t_1,x_1)\dots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)$ are bounded by similar arguments as in the proof of Theorem 4.2.1, the f.d.d. convergence comes from the convergence of the transition probability.

**Step 2 : Tightness**

Denote by $\mathbb{P}_n$ the measure induced by $W^{\ell,\downarrow,\varepsilon_n}$ on $C[0,1]$.
For $s=0$, we have

$$\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1]:\sup_{t<\delta}|x(t)-x(0)|>\eta\right)=\frac{\mathbb{P}\left(\sup_{t<\delta}|W_t|>\eta,\Lambda^{\downarrow,\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\downarrow,\varepsilon_n}\right)}. \quad (4.2.17)$$

For $\varepsilon<\eta$, $\mathbb{P}\left(\sup_{t<\delta}|W_t|>\eta,\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right)=\mathbb{P}\left(M_\delta>\eta,\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right)$, which is bounded as follows :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M_\delta>\eta,\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right)&\leqslant\int_{-\varepsilon}^{\ell}\mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta}>-\varepsilon,W_{1-\delta}\in I^{\downarrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx,M_\delta>\eta,m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant\int_{-\varepsilon}^{\eta}\mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta}>-\varepsilon,W_{1-\delta}\in I^{\downarrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx,M_\delta>\eta,m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\quad+\int_{\eta}^{\ell}\mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta}>-\varepsilon,W_{1-\delta}\in I^{\downarrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx,m_\delta>-\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Let us estimate the above integrals.
Using the remark 4.3.5 the integral is bounded as follows

$$\mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta}>-\varepsilon,W_{1-\delta}\in I^{\downarrow,\varepsilon}\right)\leqslant\frac{4}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2e}}\varepsilon^2\left(1+R_{1-\delta}\varepsilon\right), \quad (4.2.18)$$

where $R_{1-\delta}=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{e}{1-\delta}}$ . On the other hand, by Lemma 4.3.2, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(W_\delta\in[-\varepsilon,\eta],M_\delta>\eta,m_\delta>-\varepsilon\right)&\leqslant\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta,2\eta+\varepsilon]\right)-\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta+2\varepsilon,2\eta+3\varepsilon]\right)\\
&\leqslant\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta,\eta+2\varepsilon]\right)\\
&\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}\varepsilon. \quad (4.2.19)
\end{aligned}$$

Thus (4.2.18) and (4.2.19) entail

$$\int_{-\varepsilon}^{\eta} \mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta} > -\varepsilon, W_{1-\delta} \in I^{\downarrow,\varepsilon}\right) \mathbb{P}\left(W_\delta \in dx, M_\delta > \eta, m_\delta > -\varepsilon\right) \leqslant \frac{4e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta)\sqrt{\delta e}} \varepsilon^3 \left(1 + R_{1-\delta}\varepsilon\right).$$

Next, for the second integral, we have :

$$\begin{aligned}
&\int_{\eta}^{\ell} \mathbb{P}^x\left(m_{1-\delta} > -\varepsilon, W_{1-\delta} \in I^{\downarrow,\varepsilon}\right) \mathbb{P}\left(W_\delta \in dx, m_\delta > -\varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}} \varepsilon^2 \left(1 + R_{1-\delta}\varepsilon\right) \mathbb{P}\left(W_\delta \in [\eta, \ell], m_\delta > -\varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}} \varepsilon^2 \left(1 + R_{1-\delta}\varepsilon\right) \Bigg( \mathbb{P}\left(W_\delta \in [\eta, \ell]\right) - \mathbb{P}\left(W_\delta \in [\eta + 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon]\right) \Bigg) \\
&\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}} \varepsilon^2 \left(1 + R_{1-\delta}\varepsilon\right) \mathbb{P}\left(W_\delta \in [\eta, \eta + 2\varepsilon]\right) \\
&\leqslant \frac{4e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta)\sqrt{\delta e}} \varepsilon^3 \left(1 + R_{1-\delta}\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Finally using these bounds and (4.2.16) in (4.2.17), we obtain

$$\frac{1}{\delta} \mathbb{P}_n \left( x(\cdot) \in C[0,1] : \sup_{s<\delta} |x(s) - x(0)| > \eta \right) \leqslant -\frac{2e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_1''(2k\ell) \sqrt{\delta^3 e}} \big(1+o(1)\big). \tag{4.2.20}$$

On the other hand, for $s \neq 0$, we have :

$$\mathbb{P}_n \left( x(\cdot) \in C[0,1] : \sup_{s<t<s+\delta} |x(t) - x(s)| > \eta \right) = \frac{\mathbb{P}\left( \sup_{s<t<s+\delta} |W_t - W_s| > \eta, \Lambda^{\downarrow,\varepsilon} \right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\downarrow,\varepsilon}\right)}.$$

We have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left( \sup_{s<t<s+\delta} |W_t - W_s| > \eta, \Lambda^{\downarrow,\varepsilon} \right) \\
&\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\ell} \int_{-\varepsilon}^{\ell} \mathbb{P}^y\left(W_{1-(s+\delta)} \in I^{\downarrow,\varepsilon}, m_{1-(s+\delta)} > -\varepsilon\right) \mathbb{P}^x \left( W_\delta \in dy, \sup_{t<\delta} |W_t - x| > \eta \right) \times \\
&\mathbb{P}\left(W_s \in dx, m_s > -\varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi(1-s-\delta)^2 e}} \varepsilon^2 \left(1 + R_{1-s-\delta}\varepsilon\right) \mathbb{P}\left( W_\delta \in [-\varepsilon - x, \ell - x], \sup_{t<\delta} |W_t| > \eta \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(W_s \in [-\varepsilon,\ell], m_s > -\varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{16\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\sqrt{2\pi^3\delta s(1-s-\delta)^2 e}}\varepsilon^3\left(1+R_{1-s-\delta}\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

where we have used (4.2.18), Lemma 4.3.3 $iii)$ and the following elementary bound :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(W_s \in [-\varepsilon,\ell], m_s > -\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(W_s \in [-\varepsilon,\ell]\right) - \mathbb{P}\left(W_s \in [\varepsilon,\ell+2\varepsilon]\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(W_s \in [-\varepsilon,\varepsilon]\right)\\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Thus with (4.2.16) we have

$$\frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{t\leqslant\delta}|x(t)-x(s)| > \eta\right) \leqslant -\frac{4\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi_1''(2k\ell)\sqrt{2\pi^3 s\delta^3(1-s-\delta)^2 e}}\left(1+o(1)\right). \tag{4.2.21}$$

Finally, (4.2.20) and (4.2.21) ensure that

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t\leqslant s+\delta}|x(t)-x(s)| > \eta\right) = 0 \tag{4.2.22}$$

so that $\{W^{\ell,\downarrow,\varepsilon_n}\}_n$ is tight in $C[0,1]$. $\square$

Heuristically, the Brownian motion conditioned to stay in $[0,\ell]$ up to time $1$ should converge to a Brownian meander while the Brownian motion conditioned to stay in $[0,\ell]$ during one unit of time and to end in 0 should converge to a Brownian excursion when $\ell\to+\infty$. The proof, which is omitted, consists in passing to the limit in $\ell$ in the transition kernels and to check that the products

$$p(0,0;t_1,x_1)\dots p(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)$$

where $p = p_\ell$ or $p_{\ell,\downarrow}$, are uniformly bounded in $\ell$.

Let us now treat the second case. Let $I^{\uparrow,\varepsilon} = [\ell-\varepsilon,\ell]$, and $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ be the Brownian motion conditioned to stay in $[-\varepsilon,\ell]$ up to time 1 and to finish in $I^{\uparrow,\varepsilon}$ at time 1, *i.e.* $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ is the Brownian motion conditioned by the event $\Lambda^{\uparrow,\varepsilon} := \{W_1 \in I^{\uparrow,\varepsilon}, \Lambda^\varepsilon\}$.

**Theorem 4.2.4.** *There exists $\ell_0$ such that for $\ell > \ell_0$, the processes $W^{\ell,\uparrow,\varepsilon}$ converge weakly as $\varepsilon$ goes to 0 to the Markov process $W^{\ell,\uparrow}$ defined by the following transition kernel :*

$$p(s,x;t,dy) = \begin{cases}
\frac{2G^\ell_{1-t}(\ell-y)G^\ell_t(y)}{\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_1''((2k+1)\ell)}dy & \text{if } 0 = s < t < 1,\ x = 0,\\
\frac{G^\ell_{1-t}(\ell-y)}{G^\ell_{1-s}(\ell-x)}\left(r_{s,t}\left(y-x\right) - r_{s,t}\left(y+x\right)\right)dy & \text{if } 0 < s < t < 1,\\
\delta_\ell(dy) & \text{if } t = 1,\\
0\ dy & \text{otherwise},
\end{cases} \tag{4.2.23}$$

*with $G^\ell$ defined as in Theorem 4.2.1, for $0 < s < t \leqslant 1$, $x, y \in (0, \ell)$.*

Again the convergence holds for $\ell > 1.66$ (see remark 4.2.3).

*Proof.* First, we will deal with the convergence of the finite-dimensional distributions. For the special case $t = 1$, the argument is similar to the one of Theorem 4.2.2. Let us now treat the case $t \neq 1$. When $s = 0$, we have

$$\frac{\mathbb{P}_{\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}}\left(W_t^{\ell,\uparrow,\varepsilon} \in dy\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}, W_{1-t} \in I^{\uparrow,\varepsilon}\right) f_{W_t}^{\varepsilon}(y)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right)}, \tag{4.2.24}$$

where $f_{W_t}^{\varepsilon}(y)$ stands for $\frac{\mathbb{P}\left(W_t \in dy, \Lambda_t^{-\varepsilon,\ell}\right)}{dy}$. We have, from Lemma 4.3.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}, W_{1-t} \in I^{\uparrow,\varepsilon}\right) &= \mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [\ell - y - \varepsilon, \ell - y], M_{1-t} \leqslant \ell - y, m_{1-t} \geqslant -\varepsilon - y\right)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [\ell - y - \varepsilon + 2k(\ell+\varepsilon), \ell - y + 2k(\ell+\varepsilon)]\right)\\
&\quad - \mathbb{P}\left(W_{1-t} \in [\ell - y + 2k(\ell+\varepsilon), \ell - y + \varepsilon + 2k(\ell+\varepsilon)]\right)\Big]\\
&= 2\varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{1-t}'\left(y - (2k+1)\ell\right) + o\left(\varepsilon^2\right)\\
&= 2\varepsilon^2 G_{1-t}^{\ell}(\ell - y) + o\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

We have also :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right) &= \mathbb{P}\left(W_1 \in [\ell - \varepsilon, \ell], M_1 \leqslant \ell, m_1 \geqslant -\varepsilon\right)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[\mathbb{P}\left(W_1 \in [\ell - \varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right), \ell + 2k\left(\ell+\varepsilon\right)]\right)\\
&\quad - \mathbb{P}\left(W_1 \in [\ell + \varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right), \ell + 2\varepsilon + 2k\left(\ell+\varepsilon\right)]\right)\Big]\\
&= 2\varepsilon^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_1''\left((2k+1)\ell\right) + o(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

We observe easily that for $\ell > 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_1''\left((2k+1)\ell\right) > 0. \tag{4.2.27}$$

Hence, gathering (4.2.5), (4.2.25) and (4.2.27) together in (4.2.24), we obtain

$$p_{\ell,\uparrow}\left(0, 0, t, y\right) = \frac{2G_{1-t}^{\ell}(\ell - y)G_t^{\ell}(y)}{\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_1''\left((2k+1)\ell\right)},$$

which is (4.2.23) for $s=0$ and $x=0$.
Now, for $0<s<t<1$, we have :

$$\frac{\mathbb{P}\left(W_t \in y \middle| W_s = x, \Lambda^{\varepsilon}, W_1 \in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)}{dy} = \frac{\mathbb{P}^y\left(\Lambda_{1-t}^{-\varepsilon,\ell}, W_{1-t} \in I^{\uparrow,\varepsilon}\right) f_{W_{t-s}}^{x,\varepsilon}(y)}{\mathbb{P}^x\left(\Lambda_{1-s}^{-\varepsilon,\ell}, W_{1-s} \in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)}.$$

For $\ell$ large enough (Lemma 4.3.6)

$$G_{1-s}^{\ell}(\ell-y)>0,$$

thus from (4.2.8) and (4.2.25) , we obtain :

$$p_{\ell,\uparrow}(s,x,t,y) = \frac{G_{1-t}^{\ell}(y)}{G_{1-s}^{\ell}(x)}\big(r_{s,t}(y-x) - r_{s,t}(y+x)\big).$$

Since the products $p_n(0,0;t_1,x_1)\ldots p_n(t_{m-1},x_{m-1};t_m,x_m)$ are bounded by the same argument as in Theorem 4.2.1, the convergence of the transition of the transition probability gives the f.d.d. convergence.

Let us prove the tightness. For $s=0$, we have

$$\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<\delta}|x(s)|>\eta\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\sup_{s<\delta}|W_s|>\eta, \Lambda^{\uparrow,\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\uparrow,\varepsilon_n}\right)}. \tag{4.2.28}$$

For $\varepsilon<\eta$, we have $\mathbb{P}\left(\sup_{s<\delta}|W_s|>\eta, \Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right) = \mathbb{P}\left(M_\delta>\eta, \Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right)$, which is bounded as follows

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M_\delta>\eta,\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right) &\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\ell} \mathbb{P}^x\left(M_{1-\delta}<\ell, W_{1-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx, M_\delta>\eta, m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\eta} \mathbb{P}^x\left(M_{1-\delta}<\ell, W_{1-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx, M_\delta>\eta, m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\quad+\int_{\eta}^{\ell} \mathbb{P}^x\left(M_{1-\delta}<\ell, W_{1-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx, m_\delta>-\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

For the first integral, Lemma 4.3.4 entails

$$\begin{aligned}
&\int_{-\varepsilon}^{\eta} \mathbb{P}^x\left(M_{1-\delta}<\ell, W_{1-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx, M_\delta>\eta, m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\,\mathbb{P}\left(W_\delta\in[-\varepsilon,\eta], M_\delta>\eta, m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\,\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta,2\eta+\varepsilon], m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\Big(\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta,2\eta+\varepsilon]\right) - \mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta+2\varepsilon,2\eta+3\varepsilon]\right)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\,\mathbb{P}\left(W_\delta\in[\eta,\eta+2\varepsilon]\right)\\
&\leqslant \frac{e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta)\sqrt{\delta e}}\varepsilon^3\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big).
\end{aligned}\tag{4.2.29}
$$

For the second integral, we have, using again Lemma 4.3.4

$$
\begin{aligned}
&\int_\eta^\ell \mathbb{P}^x\left(M_{1-\delta}<\ell, W_{1-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}\right)\mathbb{P}\left(W_\delta\in dx, m_\delta>-\varepsilon\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\,\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta,\ell], m_\delta>-\varepsilon)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\big(\,\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta,\ell])-\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta,\ell], m_\delta<-\varepsilon)\big)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\big(\,\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta,\ell])-\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta+2\varepsilon,\ell+2\varepsilon])\big)\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta)^2 e}}\varepsilon^2\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big)\,\mathbb{P}(W_\delta\in[\eta,\eta+2\varepsilon])\\
&\leqslant \frac{e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta)\sqrt{\delta e}}\varepsilon^3\big(1+R_{1-\delta}\varepsilon\big).
\end{aligned}\tag{4.2.30}
$$

Finally, using (4.2.26), (4.2.29) and (4.2.30) together with (4.2.28), we obtain

$$
\frac{1}{\delta}\,\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1]:\sup_{s<\delta}|x(s)-x(0)|>\eta\right)\leqslant \frac{e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-\delta)\delta^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_1''((2k+1)\ell)}\left(1+o(1)\right).\tag{4.2.31}
$$

On the other hand, for $s\neq 0$, we have

$$
\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1]:\sup_{s<t<s+\delta}|x\,(t)-x\,(s)\,|>\eta\right)=\frac{\mathbb{P}\left(\sup_{s<t<s+\delta}|W_t-W_s|>\eta,\Lambda^{\uparrow,\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\uparrow,\varepsilon_n}\right)},
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{s<t<s+\delta}|W_t-W_s|>\eta,\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right)\\
&\leqslant \int_{-\varepsilon}^\ell\int_{-\varepsilon}^\ell \mathbb{P}^y(W_{1-s-\delta}\in I^{\uparrow,\varepsilon}, M_{1-s-\delta}<\ell)\,\mathbb{P}^x\left(W_\delta\in dy,\sup_{t<\delta}|W_t-x|>\eta\right)\mathbb{P}\left(W_s\in dx, m_s>-\varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

Using Lemma 4.3.4 and Lemma 4.3.3, we obtain

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{s<t<s+\delta}|W_t-W_s|>\eta,\Lambda^{\uparrow,\varepsilon}\right)
$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-s-\delta)\sqrt{2\pi e}}\varepsilon^2\left(1+R_{1-s-\delta}\varepsilon\right)\mathbb{P}\left(W_\delta \in [-\varepsilon-x,\ell-x], \sup_{s<\delta}|W_s|>\eta\right)\times$$
$$\mathbb{P}\left(W_s\in[-\varepsilon,\ell], m_s>-\varepsilon\right)$$
$$\leqslant \frac{2\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-s-\delta)\sqrt{\delta e}}\varepsilon^2\left(1+R_{1-s-\delta}\varepsilon\right)\Big(\mathbb{P}\left(W_s\in[-\varepsilon,\ell]\right)-\mathbb{P}\left(W_s\in[-\varepsilon,\ell],m_s<-\varepsilon\right)\Big)$$
$$\leqslant \frac{2\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\pi(1-s-\delta)\sqrt{\delta e}}\varepsilon^2\left(1+R_{1-s-\delta}\varepsilon\right)\mathbb{P}\left(W_s\in[-\varepsilon,\varepsilon]\right)$$
$$\leqslant \frac{4\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\sqrt{2\pi^3 s\delta e}(1-s-\delta)}\varepsilon^3\left(1+R_{1-s-\delta}\varepsilon\right).$$

Finally, we have

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1]:\sup_{t\leqslant\delta}|x(t)-x(s)|>\eta\right)\leqslant \frac{2\ell e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}}{\sqrt{2\pi^3 s\delta^3 e}(1-s-\delta)\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_1''((2k+1)\ell)}\big(1+o(1)\big). \tag{4.2.32}$$

Hence (4.2.31) and (4.2.32) ensure that

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1]:\sup_{t\leqslant\delta}|x(t)-x(s)|>\eta\right)=0. \tag{4.2.33}$$

and $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is tight in $C[0,1]$. □

**Remark 4.2.5.** *In Taylor expansions used in this section, the order of the first non-zero term is equal to the number of constraints that made the probability tends to zero. For example :*
- *asymptotically the event $\Lambda^{\varepsilon_n}$ corresponds to one constraint : be above $0$ for $t$ close to 0,*
- *asymptotically the event $\Lambda^{\uparrow,\varepsilon_n}$ corresponds to three constraints : be above $0$ for $t$ close to 0, finish at $\ell$, and be below $\ell$ for $t$ close to 1.*

**Remark 4.2.6.** *The series $\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_1''((2k+1)\ell)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi_1''(2k\ell)$, and $G_{1-s}^{\ell}(x)$ appearing in the denominators of the transition probabilities given in this section seem to be non zero for all $\ell>0$ and $x\in[0,\ell]$, so that Theorems 4.2.2 and 4.2.4 should be true for $\ell_0=0$. However this is not easy to prove and we can only ensure that the optimal value for $\ell_0$ is less than $1.66$.*
*Moreover, following the same line of reasoning as in Remark 4.2.5, the fast decrease of the series is consistent with the fact that as $\ell$ goes to $0$, the limiting condition consists in infinitly many strong constraints (be zero at all time $t\in[0,1]$).*

## 4.3 Stochastic Interpolation

Let $X$ be the $\mathbb{R}$-valued diffusion process defined by

$$dX_t = a\,(t, X_t)\,dt + b\,(t, X_t)\,dW_t \tag{4.3.1}$$

where $W$ is a standard Brownian motion on $[0, T]$ and $a, b : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for $T > 0$. Let $I \subset \mathbb{R}$ and suppose that the value of $X$ is not accessible when the process belongs to $I$. Thus we really observe $Y_s = X_s \mathbb{1}_{X_s \notin I}$ so that we have only an incomplete observation of the whole signal. Such a phenomenom appears, for instance, when $X$ modelizes a signal. In this case, the non-observability of the signal can typically result from the saturation of the measurement tool.
The question that arises is to estimate $X_{t_0}$ at time $t_0$ when $X_{t_0}$ is not observable from the observation $Y$ and to reconstruct the whole trajectory-path of $X$.
This problem has already been addressed in [16], [33] and [34]. In [16], the authors show, under some additional conditions on the diffusion coefficients, that the optimal estimator for $X_{t_0}$, at time $t_0$ where $X$ is hidden, is given by

$$\hat{X}_{t_0} = \mathbb{E}[X|\sigma_{t_0}, \tau_{t_0}],$$

where $\sigma_{t_0}$ is the last observation time before the signal enters the obstacle and $\tau_{t_0}$ is the first time when the signal reappears, *i.e.* $\sigma_{t_0} = \sup\{s < t_0, X_s \notin I\}$ and $\tau_{t_0} = \inf\{s > t_0, X_s \notin I\}$. They give some explicit computations for this estimator and they reconstruct the trajectory of $X$ by estimating $X_{t_0}$ for each $t_0$ where the process is hidden.
Nevertheless, if we are not interested in an estimation of $X_{t_0}$ but rather in some more realistic reconstruction of a trajectory reflecting its stochastic very nature, this method is not satisfactory since it leads to a smooth deterministic interpolation. Actually, in this case a relevant solution is to condition the process $X$ to stay in $I$ during $[s, t]$, where $s$ and $t$ are the observed values of $\sigma_{t_0}$ and $\tau_{t_0}$.
In the simple case where the signal is modelized by a Brownian motion ($a = 0$, $b = 1$ in (4.3.1)), we can propose a solution using conditioned Brownian motion of different type, in particular the ones introduced in the Theorem 4.2.1, Theorem 4.2.2 and Theorem 4.2.4.

**Case 1 :** Let suppose that the obstacle is $I = [a, +\infty)$ and that the observed trajectory is hidden by $I$ from time $s$ (and does not reappear). From time $s$, $X$ is still stochastic and it is a Brownian motion on $[s, T]$ conditioned to remain above $a$. Classical properties of Brownian motion suggest that the process

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(X_{\Delta u + s} - a\right),$$

where $\Delta = T - s$, should be a Brownian motion on $[0, 1]$ that stays above $0$, *i.e.* a Brownian meander. So the relevant process to interpolate $X$ between time $s$ and $T$ is :

$$\sqrt{\Delta} W^+_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, T],$$

where $W^+$ is a Brownian meander.

**Case 2 :** The obstacle is still $I = [a, +\infty)$ but the trajectory is hidden on $[s, t]$, $0 < s < t < T$ *i.e* the process reappears below $a$ at time $t$. Similar arguments lead to an intepolation by

$$\sqrt{\Delta} W^{0,+}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, t],$$

where $\Delta = t - s$ and $W^{0,+}$ is a Brownian excursion.

**Case 3 :** Let suppose now that the obstacle is a finite interval $[a, b]$ and the observed trajectory is hidden from time $s$ (and does not reappear). Denoting $\Delta = T - s$, the process

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u+s} - a \right),$$

should be a Brownian motion on $[0, 1]$ that stays in $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$, *i.e.* a Brownian motion conditioned to stay in a string. Thereby the stochastic interpolation of $X$ is given by

$$\sqrt{\Delta} W^{\ell}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, T],$$

where $W^\ell$ is the process obtained in Theorem 4.2.1 with $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

**Case 4 :** The obstacle is still $[a, b]$ and the observed trajectory reappears in $a$ at time $t$.

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u+s} - a \right),$$

where $\Delta = t - s$, is a Brownian motion on $[0, 1]$ that stays in $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$ and reappears in $0$ at time $1$. Thereby the stochastic interpolation of $X$ is given by

$$\sqrt{\Delta} W^{\ell,\downarrow}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, t],$$

where $W^{\ell,\downarrow}$ is the process obtained in Theorem 4.2.2 with $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

**Case 5 :** The obstacle is still $[a, b]$ but the observed trajectory reappears in $b$ at time $t$. In this case, the process

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left( X_{\Delta u+s} - a \right),$$

where $\Delta = t - s$, is a Brownian motion on $[0, 1]$ that stays in $[0, \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}]$ and reappears in $\frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$ at time $1$. Thereby the stochastic interpolation of $X$ is given by

$$\sqrt{\Delta} W^{\ell,\uparrow}_{\frac{u-s}{\Delta}} + a, \qquad u \in [s, t],$$

where $W^{\ell,\uparrow}$ is the process obtained in Theorem 4.2.4 with $\ell = \frac{b-a}{\sqrt{\Delta}}$.

## 4.3.1 Appendix

**Lemma 4.3.1.** *(cf. e.g. [10], p. 96, 97). Let $a<0<b$, we have :*

$$\frac{\mathbb{P}\left(W_t \in dx, m_t > a, M_t < b\right)}{dx} = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t\big(x+2k(b-a)\big) - \phi_t\big(x-2a+2k(b-a)\big)\right] \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

*and*

$$\mathbb{P}\left(m_t > a, M_t < b\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, \mathbb{P}\left(a+k(b-a) < W_t < b+k(b-a)\right).$$

**Lemma 4.3.2.** *For $a<0<b$ we have for all $x\in[a,b]$*

$$\frac{\mathbb{P}\left(W_t \in dx, m_t > a, M_t > b\right)}{dx} \leqslant \phi_t\big(x-2b\big) - \phi_t\big(x-2(b-a)\big).$$

*Proof.* Let $t_{x(\cdot)} := \sup\{s\in[0,t]; x(s)=b\}$ (with $\sup\,\emptyset = t$), and define the map $R_t : C[0,t]\to C[0,t]$ by $R_t\big(x(\cdot)\big) = \tilde{x}(\cdot)$, where

$$\tilde{x}(s) = \begin{cases} x(s) & \text{if } s\leqslant t_{x(\cdot)} \\ 2b - x(s) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that $R_t$ preserves the measure induced by $W$ on $C[0,t]$. Let $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ be an interval, we have

$$\begin{aligned} &R_t^{-1}\left(\left\{x(\cdot)\in C[0,t] : x(t)\in[2b-x_2, 2b-x_1], \inf_{s<t} x(s) > a\right\}\right) \\ &\qquad\supset \left\{x(\cdot)\in C[0,t] : x(t)\in[x_1,x_2], \inf_{s<t} x(s) > a, \sup_{s<t} x(s) > b\right\}, \end{aligned}$$

thus

$$\mathbb{P}\left(W_t\in[x_1,x_2], m_t > a, M_t > b\right) \leqslant \mathbb{P}\left(W_t \in [2b-x_2, 2b-x_1], m_t > a\right) \qquad (4.3.2)$$

and from the classical Reflection Principle we obtain

$$\mathbb{P}\left(W_t\in[x_1,x_2], m_t>a, M_t>b\right) = \mathbb{P}\left(W_t\in[x_1-2b, x_2-2b]\right) - \mathbb{P}\left(W_t\in[x_1-2(b-a), x_2-2(b-a)]\right).$$

$\square$

**Lemma 4.3.3.** *For $m>0$, $a>0$ and $\eta>0$ we have*

*i)* $\mathbb{P}\left(m_t > -m\right) = \mathbb{P}\left(M_t < m\right) \leqslant m\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$

$\mathbb{P}\left(m_t < -m\right) = \mathbb{P}\left(M_t > m\right) \leqslant 2e^{-\frac{m^2}{2t}}$, *ii)* $\mathbb{P}\left(m_t > -m, W_t > a\right) \leqslant m\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}$,

*iii)* $\dfrac{\mathbb{P}\left(W_t \in dx, \sup_{s<t} |W_s| > \eta\right)}{dx} \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}} e^{-\frac{\eta^2}{2t}}$.

*Proof.* $i)$ The equalities come from the symmetry of the Brownian motion. Let us prove the inequalities. It is well known that $M_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} |W_t|$. Thus we have

$$\mathbb{P}\left(M_t < m\right) = 2\,\mathbb{P}\left(W_t \in [0, m]\right) \leqslant m\sqrt{\frac{2}{\pi t}},$$

on the other hand, by the classical Gaussian deviation bound

$$\mathbb{P}\left(M_t > m\right) = 2\,\mathbb{P}\left(W_t > m\right) \leqslant 2e^{-\frac{m^2}{2t}}.$$

$ii)$ We have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(m_t > -m, W_t > a\right) &= \mathbb{P}\left(W_t > a\right) - \mathbb{P}\left(W_t < -2m - a\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(W_t \in (a, a + 2m]\right)\\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi t}} m e^{-\frac{a^2}{2t}}.
\end{aligned}$$

$iii)$ For $0 < \eta \leqslant x_1 < x_2$ (or $x_1 < x_2 \leqslant -\eta < 0$), we have

$$\mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2], \sup_{s<t} |W_s| > \eta\right) = \mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2]\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\eta^2}{2t}} (x_2 - x_1),$$

while for $-\eta < x_1 < x_2 < \eta$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2], \sup_{s<t} |W_s| > \eta\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2], M_t > \eta\right) + \mathbb{P}\left(W_t \in [x_1, x_2], m_t < -\eta\right)\\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{\eta^2}{2t}} (x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

The result follows for general $x_1 < x_2$ by splitting the interval $[x_1, x_2]$. □

**Lemma 4.3.4.** *Let* $b > 0$*. For* $t > 0$

$$\mathbb{P}(W_t \in [b - \varepsilon, b], M_t < b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2 e}} \varepsilon^2 \left(1 + R_t \varepsilon\right), \forall 0 < \varepsilon < b,$$

*where* $R_t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{e}{t}}$.

*Proof.* We have

$$\mathbb{P}(W_t \in [b-\varepsilon, b], M_t < b) = \mathbb{P}(W_t \in [b-\varepsilon, b]) - \mathbb{P}(W_t \in [b, b+\varepsilon]).$$

We have

$$\mathbb{P}(W_t \in [b, b+\varepsilon]) = \phi_t(b)\varepsilon + \frac{\phi_t'(b)}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \phi_t''(b+u)(\varepsilon-u)^2 du$$

and

$$\mathbb{P}(W_t \in [b-\varepsilon, b]) = \phi_t(b)\varepsilon - \frac{\phi_t'(b)}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon \phi_t''(b-u)(\varepsilon-u)^2 du,$$

hence

$$\mathbb{P}(W_t \in [b-\varepsilon, b], M_t < b) \leqslant \left\|\phi_t'\right\|_\infty \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\left\|\phi_t''\right\|_\infty \varepsilon^3.$$

The results follows by bounding $\left\|\phi_t'\right\|_\infty$ and $\left\|\phi_t''\right\|_\infty$. □

**Remark 4.3.5.** *Following similar computation we have also*

$$\mathbb{P}^x(W_s \in [-\varepsilon, \varepsilon], m_s > -\varepsilon) \leqslant \frac{4}{\sqrt{2\pi t^2 e}}\varepsilon^2\left(1 + R_t\varepsilon\right),$$

where $R_t = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}$.

**Lemma 4.3.6.** *For* $\ell \geqslant 1.66$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x) > 0, \forall x \in (0, \ell), \forall t \in (0, 1].$$

*Proof.* Since $\phi_t'$ is increasing on $[\sqrt{t}, +\infty[$, we have

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell + 2\ell - x) - \phi_t'(2k\ell + x) > 0,$$

for all $x \geqslant \sqrt{t}$.
For $x < \sqrt{t}$ : since $\phi_t'$ is concave on $[\sqrt{3t}; +\infty[$, for all $t \in (0, 1]$ and $\ell > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x) &= \phi_t'(-x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x) - \phi_t'(2k\ell + x) \\
&\geqslant \phi_t'(-x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell - x) - \left(\phi_t'(2k\ell - x) + 2x\phi_t''(2k\ell - x)\right) \\
&\geqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\right) - 2t\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_t''\left(2k\ell - 1\right)\right), \qquad (4.3.3)
\end{aligned}$$

where $\psi_t(x) = \sqrt{2\pi t}\phi_t(x)$. We have

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_t''\left(2k\ell-1\right) &\leqslant \psi_t''\left(2\ell-1\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} M_{t,\ell}^k \\ &\leqslant \psi_t''\left(2\ell-1\right) + \frac{M_{t,\ell}^2}{1-M_{t,\ell}}. \qquad (4.3.4)\end{aligned}$$

where $M_{t,\ell} = \sup_{k\geqslant 2} \psi_t''\left(2k\ell-1\right)^{\frac{1}{k}}$, provided $M_{t,\ell} < 1$. Let us now determine $M_{t,\ell}$. The function $x \mapsto \exp(g(t,\ell,k))$, with $g(t,\ell,k) = \frac{1}{k}\left(-\frac{(2k\ell-1)^2}{2t} + \log\left(\frac{(2k\ell-1)^2-t}{t^2}\right)\right)$, is decreasing if $k \mapsto g(t,\ell,k)$ is. We have

$$\frac{\partial g}{\partial_k}(t,\ell,k) = \frac{1}{k^2}\left[-(2k\ell-1)\frac{8(k\ell)^3-4(k\ell)^2-(2+10t)k\ell+1-t}{2t\left((2k\ell-1)^2-t\right)} - \log\left(\frac{(2k\ell-1)^2-t}{t^2}\right)\right].$$

It is easy to see that both terms in the brackets are negative for $k \in [2;+\infty)$, $t \in (0,1]$ and $\ell \geqslant \frac{3}{4}$. Hence

$$M_{t,\ell} = \psi_t''(4\ell-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover since for all $t \in (0,1]$

$$\frac{\partial \psi_t''}{\partial_t}(y) = \frac{1}{2t^4}\left(2t^2-5ty^2+y^4\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) > 0, \forall y > \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}},$$

and

$$\psi_t^{(3)}(y) < 0, \forall y > \sqrt{3},$$

then for $\ell \geqslant \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$M_{t,\ell} = \psi_t''(4\ell-1)^{\frac{1}{2}} < \psi_1''(2\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

and (4.3.3) and (4.3.4) entail

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_t'(2k\ell-x) \geqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}B(t,\ell)$$

where $B(t,\ell) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - 2t\psi_t''(2\ell-1) - 2t\frac{\psi_t''(4\ell-1)}{1-\psi_t''(4\ell-1)^{\frac{1}{2}}}$. Since $B(t,\ell)$ is decreasing in $t \in (0,1]$ and increasing in $\ell > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, we have for $\ell_0 > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$\min_{t\in(0,1],\ell\geqslant\ell_0} B(t,\ell) = B(1,\ell_0).$$

It remains to observe that $1.66 > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ and $B(1,1.66) > 0$. $\square$

**Lemma 4.3.7.** *For $\ell \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$, we have*

$$F(\ell) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_1''(2k\ell) < 0. \tag{4.3.5}$$

*Proof.* First observe that, since $\phi_1''$ is decreasing on $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$, it is enough to check that $F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$. Let $\psi_1(x) = \sqrt{2\pi}\phi_1(x)$ and for $a > \sqrt{3}$, set $M_a = \sup_{k \geqslant 1} \psi_1''(ak)^{\frac{1}{k}}$. If $M_a < 1$, we have

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} F\left(\frac{a}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_1''(ak) &= \frac{1}{2} - 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_1''(ak) \\
&\leqslant -1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} M_a^k \\
&\leqslant -1 + 2\frac{M_a}{1-M_a}.
\end{aligned}$$

The function

$$x \mapsto \psi_1''(ax)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(g(x)\right),$$

where $g(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{a^2x^2}{2} + \log\left(a^2x^2 - 1\right)\right)$, is decreasing if $g$ is. We have

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\left(a^2x^2 \frac{5 - a^2x^2}{2\left(a^2x^2 - 1\right)} - \log\left(a^2x^2 - 1\right)\right),$$

which is non-positive for $a \geqslant \sqrt{5}$ and $x \geqslant 1$, thus $M_{\sqrt{5}} = \psi_1''\left(\sqrt{5}\right) < 1$. Finally

$$\sqrt{2\pi} F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \leqslant -1 + 2\frac{\psi_1''\left(\sqrt{5}\right)}{1 - \psi_1''\left(\sqrt{5}\right)} < 0,$$

which ensures (4.3.5). $\square$

# Bibliographie


[1] E. Alós, J.A. León, and J. Vives. An anticipating Itô formula for Lévy processes. *ALEA : Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 4 :285–305, 2008.

[2] C. Ané and M. Ledoux. On logarithmic Sobolev inequalities for continuous time random walks on graphs. *Probability Theory and Related Fields*, 116(4) :573–602, 2000.

[3] M. Arnaudon, J.-C. Breton, and N. Privault. Convex ordering for random vectors using predictable representation. *Potential Analysis*, 29(4) :327–349, 2008.

[4] B. Belkin. A limit theorem for conditioned recurrent random walk attracted to a stable law. *The annals of Mathematical Statistics*, 41(1) :146–163, 1970.

[5] B. Belkin. An invariance principle for conditioned recurrent random walk attracted to a stable law. *Probability Theory and Related Fields*, 21(1) :45–64, 1972.

[6] V. Bentkus. On Hoeffding's inequalities. *The Annals of Probability*, 32(2) :1650–1673, 2004.

[7] J. Bergenthum and L. Rüschendorf. Comparison of option prices in semimartingale models. *Finance and Stochastics*, 10(2) :222–249, 2006.

[8] J. Bertoin and R. A. Doney. On conditioning a random walk to stay nonnegative. *The Annals of Probability*, 22(4) :2152–2167, 1994.

[9] A. Beurling. An automorphism of product measures. *Annals of Mathematics*, 72(1), 1960.

[10] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, 1968.

[11] E. Bolthausen. On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive. *The Annals of Probability*, 4(3) :480–485, 1976.

[12] T. P Branson and Y. H. Choi. Option pricing on multiple assets. *Acta Applicandae Mathematicae*, 94(2) :137–162, 2006.

[13] J.-C. Breton, B. Laquerrière, and N. Privault. Convex comparison inequalities for non-markovian stochastic integrals. *to appear in Stochastics*, 2012.

[14] J.-C. Breton and N. Privault. Convex comparison inequalities for exponential jump-diffusion processes. *Communications on Stochastic Analysis*, 1(2) :263–277, 2007.

[15] L. Chaumont and R. A. Doney. On Lévy processes conditioned to stay positive. *Electronic Journal of Probability*, 10 :948–961, 2005.

[16] C. Choi and D. Nam. Interpolation for partly hidden diffusion processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 113(2) :199 –216, 2004.

[17] S. Cohen and T. Mikosch. Tail behavior of random products and stochastic exponentials. *Stochastic Processes and their Applications*, 118(3) :333–345, 2008.

[18] R. T. Durrett and D. L. Iglehart. Functionals of Brownian meander and Brownian excursion. *The Annals of Probability*, 5(1) :130–135, 1977.

[19] R. T. Durrett, D. L. Iglehart, and D. R. Miller. Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion. *The Annals of Probability*, 5(1) :117–129, 1977.

[20] M. L. Eaton. A note on symmetric Bernoulli random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(4) :1223–1226, 1970.

[21] M. L. Eaton. A probability inequality for sums of bounded symmetric random variables. *preprint*, 1972.

[22] M. L. Eaton. A probability inequality for linear combinations of bounded random variables. *The Annals of Statistics*, 2(3) :609–614, 1974.

[23] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué, and S. Shreve. Robustness of the Black and Scholes formula. *Mathematical Finance*, 8(2) :93–126, 1998.

[24] R. Garbit. Brownian motion conditioned to stay in a cone. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 49(3) :573–592, 2009.

[25] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers,* $4^{th}$ *edition*. Oxford University Press, 1960.

[26] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 58(301) :13–30, 1963.

[27] D. L. Iglehart. Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive. *The Annals of Probability*, 2(4) :608–619, 1974.

[28] K. Itô and H. P. McKean. *Diffusion processus and their sample paths*. Springer, 1996.

[29] W. D. Kaigh. A conditional local limit theorem for recurrent random walk. *The Annals of Probability*, 3(5) :883–888, 1975.

[30] W. D. Kaigh. An invariance principle for random walk conditioned by a late return to zero. *The Annals of Probability*, 4(1) :115–121, 1976.

[31] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus, 2nd edition*. Springer-Verlag, 1991.

[32] R. W. Keener. Limit theorems for random walks conditioned to stay positive. *The Annals of Probability*, 20(2) :801–824, 1992.

[33] H. G. Kim. Filtering of hidden diffusion processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 71 :217–226, 2001.

[34] H. G. Kim and D. Nam. Optimal estimation of diffusion processes hidden by general obstacles. *Journal of Applied Probability*, 38 :1067–1073, 2001.

[35] Th. Klein, Y. Ma, and N. Privault. Convex concentration inequalities and forward-backward stochastic calculus. *Electronic Journal of Probability*, 11(20) :486–512, 2006.

[36] B. Laquerrière. Brownian motion conditioned to stay in a strip. *preprint*, 2010.

[37] B. Laquerrière and N. Privault. Deviation inequalities for exponential jump-diffusion processes. *Theory of Stochastic Processes*, 16(32) :67–72, 2010.

[38] J.A. León, J.L Solé, and J. Vives. Sur certaines relations entre les intégrales trajectorielles et l'opérateur de translation et son dual dans l'espace de Poisson canonique. *Publ. Mat.*, 44(1) :325–337, 2000.

[39] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics,* $2^{nd}$ *edition*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[40] G. Di Nunno, Th. Meyer-Brandis, B. Øksendal, and F. Proske. Malliavin calculus and anticipative Itô formulae for Lévy processes. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 8(2) :235–258, 2005.

[41] J. Pitman P. Biane and M. Yor. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 38(4) :435–465, 2001.

[42] I. Pinelis. Extremal probabilistic problems and Hotelling's T2 test under a symmetry assumption. *The Annals of Statistics*, 22(1) :357–368, 1994.

[43] N. Privault and J.C. Zambrini. Markovian bridges and reversible diffusion processes with jumps. *Annales de l'Institut Henry Poincaré*, 40 :599–633, 2004.

[44] M. Rotschild and J.E. Stiglitz. Increasing risk : I. A definition. *Journal of Economic Theory.*, 2 :225–243, 1970.

[45] Q. M. Shao. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables. *Journal of Theorical Probability*, 13(2) :343–356, 2000.

[46] M. Shimura. A class of conditional limit theorems related to ruin problem. *The Annals of Probability*, 11(1) :40–45, 1983.

[47] M. Shimura. Excursions in a cone for two-dimensional brownian motion. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 25(3) :433–443, 1985.

[48] F. Spitzer. A Tauberian theorem and its probability interpretation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 94 :150–169, 1960.

[49] M. Talagrand. The missing factor in Hoeffding's inequalities. *Annales de l'Institut Henry Poincaré, section B*, 31(4) :689–702, 1995.

[50] L. Wu. A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probability Theory and Related Fields*, 118(3) :427–438, 2000.

## Interpolation et comparaison de certains processus stochastiques

Résumé : Dans la première partie de cette thèse, on présente des inégalités de concentration convexe pour des intégrales stochastiques. Ces résultats sont obtenus par calcul stochastique et par calcul de Malliavin forward/backward. On présente également des inégalités de déviation pour les exponentielles martingales à saut.
Dans une deuxième partie on présente des théorèmes limites pour le conditionnement du mouvement brownien.

Mots-clefs : inégalités de déviation, inégalités de concentration convexe, calcul stochastique forward/backward, mouvement brownien conditionné, $h$-transformée.

## Stochastic interpolation and comparison of some stochastic processes

Summary : In the first part of this thesis, we present some convex concentration inequalities for stochastic integrals. These results are obtained by forward/backward stochastic calculus combined with Malliavin calculus. We also present deviation inequalities for exponential jump-diffusion.
In the second part, we present some limit theorems for the conditionning of Brownian motion.

Keywords : deviation inequalities, convex concentration inequalities, forward/backward stochastic calculus, conditionned Brownian motion, $h$-transform

MIA

**Laboratoire Mathématiques, Image et Applications, Av. Michel Crépeau**

17042 LA ROCHELLE