



HAL
open science

Quelques problèmes d'écoulements multi-fluide : analyse mathématique, modélisation numérique et simulation

Saad Benjelloun

► **To cite this version:**

Saad Benjelloun. Quelques problèmes d'écoulements multi-fluide : analyse mathématique, modélisation numérique et simulation. Mathématiques générales [math.GM]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0074 . tel-00823095

HAL Id: tel-00823095

<https://theses.hal.science/tel-00823095>

Submitted on 16 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN
ECOLE DOCTORALE SCIENCES PRATIQUES

T H E S E D E D O C T O R A T

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE
CACHAN

Specialité : MATHEMATIQUES

Présentée par

Saad BENJELLOUN

Quelques problèmes d'écoulements
multi-fluide : analyse mathématique,
modélisation numérique et simulation

Directeurs de thèse : Laurent Desvillettes et Jean-Michel Ghidaglia

Jury :

Rapporteurs : Fayssal Benkhaldoun - Professeur, Université Paris 13
Thierry Colin - Professeur, Université Bordeaux 1

Directeurs : Laurent Desvillettes - Professeur, ENS-Cachan
Jean-Michel Ghidaglia - Professeur, ENS-Cachan

Examineurs : Laurent Brosset - Ingénieur recherche sénior, Société GTT
Pauline Lafitte-Godillon - Professeur, Ecole Centrale de Paris

Septembre, 2012

Table des matières

Introduction	7
I Etude mathématique d'un modèle asymptotique de sprays	9
1 Introduction	11
1.1 Modélisation des sprays	12
1.1.1 Force de traînée	12
1.1.2 Exemple de modèle de fragmentation	13
1.2 Dérivation formelle d'un modèle asymptotique à la limite petites particules	14
1.3 Etude mathématique du modèle asymptotique	15
1.3.1 Estimation formelle de l'énergie	16
1.3.2 Enoncé du théorème d'existence globale	18
2 Dérivation formelle d'un modèle asymptotique à la limite des petites particules	19
2.1 Equations du modèle Vlasov-NS-incompressible et modèle de fragmentation simplifié	19
2.2 Système avec scaling	21
2.3 Majoration du terme avec l'énergie de traînée et passage à la limite formel dans le système	21
3 Etude mathématique du modèle asymptotique	23
3.1 Notations	24
3.1.1 Espaces fonctionnels	24
3.1.2 Moments	24
3.2 Le système étudié	24
3.3 Le système régularisé	25
3.4 Existence de solutions pour le système régularisé	25
3.4.1 Définition et continuité de $\mathbf{u} \mapsto (f^\diamond, \rho^\diamond)$	26
3.4.2 Existence de \mathbf{u}^\diamond	29
3.4.3 Estimations	32
3.4.4 Unicité de \mathbf{u}^\diamond	33
3.4.5 L'application S possède un point fixe	34
3.5 Élimination des perturbations : $\varepsilon \rightarrow 0$	35
3.5.1 Lemme de contrôle des moments	36
3.5.2 Estimations uniforme en ε	36
3.5.3 Compacité en ε	38
3.5.4 Vérification du système limite	39
3.5.5 Continuité en temps	41
3.5.6 Existence locale	42
3.5.7 Estimation de l'énergie	42
3.5.8 Prolongement de la solution et existence globale	47

Bibliographie	49
II Modèle de fuite d'un gaz en compression sous un piston	51
4 Introduction	53
4.1 Modèle de Bagnold sans fuite	54
4.2 Vers un modèle de Bagnold avec fuite	55
4.3 Fuite du gaz dans le cas incompressible	56
5 Modèle Euler 2D pour piston avec fuite : Cas horizontal	57
5.1 Mise sous forme sans dimension des équations	58
5.2 Piston dans un domaine borné	60
5.3 Simulation numérique du système	62
5.3.1 Choix des conditions initiales pour la simulation	62
5.3.2 Rappel des formules du schéma VFFC avec maillage fixe	62
5.3.3 Schéma VFFC-ALE pour le problème du piston	65
5.3.4 Stabilité linéaire du schéma VFFC-ALE en 1D	68
5.3.5 Traitement des conditions aux limites de type mur par méthode des flux normaux	70
5.3.6 Exemple de résultats numériques	72
5.4 Analyse paramétrique	77
5.4.1 Dépendance de ω et α par rapport à L_f et DR	77
5.4.2 Conclusion de l'étude paramétrique	80
6 Cas de chute verticale	82
6.1 Equations du système	83
6.2 Adimensionnement du système	83
6.3 Etude numérique	84
6.4 Résultats numériques	85
6.5 Conclusion du cas piston vertical	87
7 Perspective de l'étude paramétrique : Etude du voisinage du moment de l'impact	89
7.1 Validation en $2D$ par comparaison au code Flux-IC	90
7.2 Perspectives	91
Bibliographie	91
III Simulation numérique d'un spray dans un pipeline courbe	93
8 Modeling and Simulation of Thick Sprays through Coupling of a Finite Volume Euler Equation Solver and a Particle Method for a Disperse Phase	95
8.1 Introduction	95
8.2 Modeling of a spray in a pipe by 1D equations	97
8.3 The numerical method	98
8.4 Numerical results	102
8.4.1 Establishment of the equations in a curved pipe	103
8.4.2 Typical numerical experiences	105
8.4.3 A parametric study	107
8.4.4 Conclusions	108
Bibliographie	109

IV	Annexes	111
A	Validation du code ALE en dimension 1 par comparaison au modèle de Bagnold sans fuite	113
B	Démonstrations des lemmes utilisés au chapitre 3	116
	B.1 Inégalités de Grönwall	116
	B.2 Une version simple du lemme d'Aubin	118
	B.3 Compacité par la méthode de DiPerna-Lions	119
C	Existence de solution pour le modèle à deux rayons	122
	C.1 Système Régularisé	123
	C.1.1 Régularisation	123
	C.1.2 Propriétés des données initiales régularisées	124
	C.2 Système découplé et schéma itératif	125
	C.2.1 Le système découplé	125
	C.2.2 Résolution du système découplé	125
	C.2.3 Estimations pour les solutions du schéma itératif	126
	C.3 Convergence vers la solution du système régularisé	131
	C.3.1 Convergence du schéma itératif	131
	C.3.2 Une formulation faible du système découplé	134
	C.3.3 Formulation faible du système régularisé	135
	C.3.4 Solution faible du système régularisé	135
	C.3.5 Estimations pour les solutions du système régularisé à ε fixé	139
	C.4 Relaxation des perturbations et retour au système S^α	144
	C.4.1 Construction de la solution limite pour le système S^α	144
	C.4.2 Vérification de la formulation faible pour le système S^α	146
	C.5 Lemme de l'annexe C : Dérivée des caractéristiques par rapport au temps initial	148
	Bibliographie	148
	Publications extraites de cette thèse	150

Introduction

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans le domaine des mathématiques appliquées à la mécanique des fluides. Cette discipline s'intéresse à la modélisation des problèmes de la mécanique des fluides, à l'étude mathématique des équations des modèles établis, et à la simulation numérique de ces modèles par des méthodes numériques adaptées. Dans les travaux menés dans cette thèse, nous aurons l'occasion de voir ces trois aspects du domaine, sur trois problèmes différents.

Il existe principalement deux approches pour la modélisation et la simulation numérique des fluides. L'approche eulérienne consiste à voir en un point de l'espace, ou dans une maille fixe du domaine de la simulation, les variations des grandeurs physiques et thermodynamiques associées aux fluides. L'approche lagrangienne consiste à suivre et à décrire des éléments de la matière, ou des mailles du domaine de simulation, dans leurs mouvements. Les problèmes de mécanique des fluides rencontrés dans les applications pratiques et dans l'industrie sont très souvent multi-fluide, c'est à dire faisant intervenir plusieurs fluides différents. Lorsque le nombre de fluides dans le modèle est deux, ou est ramené à deux avec des hypothèses simplificatrices, on parle de modèle bi-fluide. On peut également se ramener à des problèmes mono-fluide dans le but de simplifier un modèle donné. Lorsqu'on a un problème multi-fluide, chacune des deux approches, lagrangienne et eulérienne, peut être choisie pour chacun des fluides du modèle. Les modèles numériques multi-fluides combinent souvent différentes approches pour les différents fluides.

Dans la première partie de cette thèse, on étudiera un problème en relation avec la modélisation des systèmes gaz-particules, dits sprays ou aérosols. Il s'agit d'un problème essentiellement bi-fluide. On a d'une part un fluide sous forme de particules ou gouttelettes, et d'autre part le gaz qui forme le milieu environnant. Cette partie traite de l'étude mathématique d'un modèle combinant une description eulérienne pour le gaz, et une description lagrangienne pour les particules. Ici, par étude mathématique, on signifie l'établissement du caractère bien posé des équations du modèle, c'est à dire l'existence de solutions pour ces équations dans des espaces fonctionnels adaptés.

La deuxième partie s'intéresse aussi à un problème bi-fluide, à savoir l'impact d'une vague de méthane liquide sur les parois d'une cuve de méthanier. Les fluides intervenants dans ce modèle sont d'une part le méthane liquide, et d'autre part le méthane gazeux remplissant le haut de la cuve. Ce phénomène d'impact de vague est un phénomène complexe. Notre étude s'intéresse aux toutes premières phases qui précèdent l'impact, c'est à dire au mouvement de la vague et à la modélisation de son interaction avec le gaz. En effet, le but précis de cette étude est la description du mouvement du gaz sous l'effet de la vague. On simplifie alors le modèle en négligeant la déformation de la vague, ramenant ainsi notre problème à celui du comportement d'un gaz sous l'effet d'un piston indéformable.

Dans la troisième partie de la thèse, on revient aux modèles de sprays et on présente une méthode numérique pour la simulation d'un tel système. Il s'agit d'une méthode qui combine un schéma eulérien dit *Volumes Finies à Flux Caractéristiques* (VFFC) pour la description du mouvement du milieu gazeux, et un schéma lagrangien pour les particules qui consiste en la méthode *Particle In Cell* (PIC). On présente dans cette partie une manière de coupler ces deux approches, en l'appliquant à la simulation du mouvement d'un spray dans un pipeline courbe, et on teste notre code sur un ensemble de cas test.

Première partie

Etude mathématique d'un modèle
asymptotique de sprays

Chapitre 1

Introduction

Cette première partie de la thèse porte sur l'étude des systèmes physiques appelés aérosols ou sprays. Il s'agit de systèmes formés de particules d'un liquide ou d'un solide évoluant dans un milieu fluide, c'est à dire un liquide ou un gaz. Ces systèmes interviennent par exemple dans la modélisation des moteurs de fusées Ariane où le carburant de propulsion est enrichi par des particules d'alumine pour accélérer la combustion [1, 2, 3]. L'étude numérique et la simulation de ces modèles ont pour rôle de contrôler le système d'injection du carburant et des particules pour avoir une distribution homogène de celles-ci et éviter leur agglomération non optimale pour la propulsion. Dans le domaine automobile, l'étude de la combustion dans les moteurs diesel fait appel aux modèles de sprays. En effet, le gazole liquide injecté dans la chambre de combustion prend la forme d'un jet de gouttelettes évoluant dans l'air. L'efficacité du moteur dépend alors de la distribution des gouttelettes et de leurs tailles au moment de la réaction de combustion [4]. La complexité de l'étude de ces systèmes provient de l'adjonction de plusieurs phénomènes physiques pouvant être eux mêmes complexes : l'écoulement du fluide, les différentes interactions possibles entre le fluide et les particules, et les interactions entre les particules elles mêmes. Un autre contexte où intervient la modélisation des sprays est le contexte médical. On s'intéresse à l'étude des particules évoluant dans l'air, qui rentrent dans le système respiratoire humain. Il peut s'agir de sprays pharmaceutiques administrés par voies respiratoires, des particules de pollution ou des dépôts de nicotine [5, 6]. L'enjeu de l'étude de ces systèmes est de connaître l'évolution des particules dans le poumon humain et prédire par la simulation numérique leur comportement et leurs lieux de déposition dans les voies respiratoires. Aux sources de complexité citées avant s'ajoute la complexité géométrique des voies respiratoires.

Il existe essentiellement deux approches différentes pour la modélisation des sprays, chacune se basant sur une description différente de la phase particules. La première approche est celle des modèles bi-fluides, où l'évolution de chacune des deux phases est décrite par une équation de la mécanique des fluides (par exemple le système d'Euler, ou Navier Stokes). Cette approche est dite eulérienne-eulérienne car on s'intéresse aux grandeurs moyennes (densité, vitesse et énergie) des particules en chaque point de l'espace. Des exemples de l'utilisation de cette approche peuvent être trouvés dans [7, 3, 8, 9]. La deuxième approche, dite eulérienne-lagrangienne, consiste à suivre la densité des particules dans l'espace, ainsi que la distribution des vitesses ξ , énergies internes e et rayons r des gouttelettes. Le fluide environnant est toujours décrit par une équation de la mécanique des fluides. La phase des particules est décrite par une équation dite équation de Vlasov qui porte sur la fonction de densité (*probability of density function* en anglais) $f = f(t, \mathbf{x}, \xi, r, e)$.

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot (f \mathbf{\Gamma}) + \partial_r(\phi f) + \partial_e(\psi f) = Q(f).$$

Les termes Γ , ϕ et ψ modélisent généralement les phénomènes physiques responsables de l'évolution des vitesses et rayons de chaque particule (forces extérieures, évaporation, conduction thermique...) [10, 3, 11], et le terme source $Q(f)$ contient une description des interactions des particules entre elles (collision, fragmentation, coalescences...)[12, 13, 14]. Les méthodes avec maillage ne sont pas envisageables généralement pour la simulation numérique de l'équation de Vlasov, dès que la dimension d'espace est supérieure à deux, car

l'espace à discrétiser est de grande dimension. Seule la méthode particulaire (ou lagrangienne), qui consiste à suivre le mouvement de paquets de particules, est adaptée aux applications réelles.

Dans le cadre de cette thèse on s'intéresse dans un premier temps aux modèles eulériens-lagrangiens. On présentera plus précisément dans la section qui suit les équations qui forment ces modèles et les différents termes de modélisation. Ensuite, on dérivera de ce modèle un modèle asymptotique où une partie des gouttelettes est décrite par une équation de Vlasov lagrangienne et une partie est décrite par une équation eulérienne sur la densité et la vitesse moyenne. Il s'agit donc d'une approche hybride entre les deux approches courantes présentées ci-dessus. La suite de notre travail sera de démontrer mathématiquement le caractère bien posé d'un tel modèle hybride.

1.1 Modélisation des sprays

Dans le cadre de ce travail on suppose que le fluide où évoluent les particules est un fluide visqueux incompressible. Le fluide est décrit en chaque point par sa densité $\rho(t, \mathbf{x})$ et sa vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Le mouvement de ce fluide est donc régi par le système de Navier-Stokes incompressible

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (1.2)$$

Le terme \mathbf{F}_{ext} modélise la force de rétroaction appliquée au fluide par les particules. La fonction de densité des particules vérifie l'équation de Vlasov

$$\partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot (f \boldsymbol{\Gamma}) + \partial_r(\phi f) + \partial_e(\psi f) = Q(f).$$

On suppose dans la suite qu'on n'a pas de phénomène d'évaporation ou d'échange d'énergie interne ($\phi = 0$, $\psi = 0$) et que seule la fragmentation des particules est à prendre en compte dans le terme d'interaction $Q(f)$. Par le principe d'action réaction, les termes $\boldsymbol{\Gamma}$ et \mathbf{F}_{ext} sont reliés entre eux par

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(t, \mathbf{x}) = - \int_{\boldsymbol{\xi}} \int_r m_p(r) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, r) \boldsymbol{\Gamma} d\boldsymbol{\xi} dr,$$

où $m_p(r)$ est la masse de la particule de rayon r . On présente dans les deux sections suivantes des exemples de modèles pour l'accélération de traînée $\boldsymbol{\Gamma}$ (et donc de \mathbf{F}_{ext}) et pour le noyau de fragmentation $Q(f)$.

1.1.1 Force de traînée

La force de traînée correspond à la force qu'exerce un fluide sur une particule supposée sphérique, en mouvement dans ce fluide. C'est donc la force responsable de la modification du mouvement dans le vide de la particule quand elle est placée dans un milieu fluide. Cette force englobe essentiellement deux phénomènes physiques :

- Les frottements exercés par le fluide sur la surface de la particule sphérique. Ces frottements tendent donc à freiner le mouvement relatif de la particule par rapport au fluide.
- Le mouvement relatif du fluide autour de la particule crée une sur-pression à l'arrière de la particule et une dépression à l'avant. Cette différence de pression tend donc à entraîner la particule dans le mouvement du fluide.

Un modèle général pour cette force de traînée est proposé par O'Rourke dans [10]

$$m_p \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8} \rho S C_D \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}\| (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}),$$

où ρ et \mathbf{u} sont respectivement la densité et la vitesse du fluide, $\boldsymbol{\xi}$ la vitesse de la particule, S sa surface et m_p sa masse. Le coefficient de traînée C_D est un paramètre sans dimension qui tient en compte le régime

de l'écoulement (relatif) du fluide. En effet les formules pour le coefficient C_D sont données en fonction du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{2\rho r \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}\|}{\nu}.$$

Dans le modèle de Schiller et Naumann, présenté dans [15], C_D est donné par la loi expérimentale

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{1}{6} Re^{\frac{2}{3}}\right), & \text{pour } Re < 1000 \\ 0.424, & \text{pour } Re \geq 1000. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour des écoulements à petits nombres de Reynolds, la formule (1.3) peut être simplifiée [16] et on utilise généralement l'expression

$$C_D = \frac{24}{Re}. \quad (1.4)$$

Dans la suite, on utilisera la formule (1.4) pour le coefficient de traînée C_D . L'accélération de traînée Γ devient

$$\Gamma = -\frac{9}{2} \frac{\nu}{\rho_l} \frac{(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))}{r^2}, \quad (1.5)$$

où l'on a utilisé $m_p(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l$, avec ρ_l la masse volumique des particules.

1.1.2 Exemple de modèle de fragmentation

Plusieurs modèles pour la fragmentation sont proposés dans la littérature [17, 13, 12, 3]. On suppose dans tous ces modèles que les particules fragmentent si elles subissent un grand effort de cisaillement. On mesure le rapport entre les forces aérodynamiques de cisaillement et la force stabilisante de tension de surface par le biais du nombre de Weber

$$We = \frac{2\rho|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 r}{\sigma},$$

où ρ est la densité du gaz, \mathbf{u} sa vitesse, r le rayon de la gouttelette, $\boldsymbol{\xi}$ sa vitesse et σ sa tension de surface. On considère qu'une particule fragmente si le nombre de Weber dépasse une valeur critique We_{cr} prise généralement à 12. Les particules dépassant le nombre de Weber critique fragmentent avec un taux ν donné expérimentalement par

$$\nu(\boldsymbol{\xi}, r) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|}{10r} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_l}}, & \text{si } We > We_{cr} \\ = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque modèle est caractérisé par la donnée d'une loi de distribution pour les rayons et vitesses des particules issues de la fragmentation. Dans [3], Dufour propose une loi de la forme

$$h(r^*, r) = \frac{r^3}{r^{*3}} b(r^*, r), \quad b(r^*, r) = \alpha r \exp(-\gamma^2 r^2) \chi_{r < r^*},$$

où r^* est le rayon de la particule initiale et r le rayon des particules issues de la fragmentation. Les paramètres γ et α sont calculés en fonction du volume initial r^{*3} pour conserver la masse, et en fonction de données expérimentales. On suppose dans ce modèle que les particules issues de la fragmentation gardent la même vitesse que la particule mère. Dans ce cas, le noyau de fragmentation $Q(f)$ est donné par

$$Q(f)(\boldsymbol{\xi}, r) = -\nu(\boldsymbol{\xi}, r) f(\boldsymbol{\xi}, r) + \int_{r^* > r} \frac{r^3}{r^{*3}} b(r^*, r) \nu(\boldsymbol{\xi}, r^*) f(\boldsymbol{\xi}, r^*) dr^*. \quad (1.6)$$

Le noyau $Q(f)$ est la somme de deux termes. Le premier est un terme de disparition des particules de rayons r avec un taux ν suite à leur fragmentation. Le deuxième est un terme de création de particules de rayon r par fragmentation de particules de rayon r^* .

Le système total à résoudre pour simuler le mouvement du spray est donc

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (1.7) \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \int_r \int_{\xi} m_p(r) \Gamma f(t, \mathbf{x}, \xi, r) d\mathbf{x} dr, & (1.8) \\ \partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot (f \Gamma) = Q(f). & (1.9) \end{cases}$$

1.2 Dérivation formelle d'un modèle asymptotique à la limite petites particules

Dans le modèle présenté dans la section précédente, on a vu que, à cause de la fragmentation, le nombre de particules augmente et leur rayon se réduit. On a apparition d'un grand nombre de particules de petite taille. La simulation numérique de tels systèmes par la méthode particulaire, consistant à suivre le mouvement de paquets de particules, devient rapidement très coûteuse.

Le but du chapitre 2 de cette thèse est de dériver un modèle permettant de pallier ce problème, en réservant un traitement particulier à ces petites particules, les simulant par une méthode autre que la méthode particulaire. Le modèle proposé est motivé par deux considérations physiques :

- Les petites particules sont rapidement en équilibre avec la vitesse du fluide à cause de l'accélération de traînée. En effet, le temps caractéristique du rappel de la vitesse de la particule à celle du fluide est en r^2 , d'après l'expression (1.5) de l'accélération de traînée.
- Au delà d'un certain rayon, les particules ne fragmentent plus. En effet, le nombre de Weber de la particule est proportionnel à son rayon.

La première considération nous indique que, modulo un régime transitoire bref, les petites particules ont la même vitesse que celle du fluide environnant $\xi = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, annulant ainsi le terme de traînée dans l'équation de Vlasov. Le deuxième point nous dit en outre que le terme $Q(f)$ est nul pour des valeurs petites de r . Il s'en suit que le seul phénomène à prendre en compte pour ces particules est celui du transport convectif à la vitesse du fluide. Le traitement de ces petites particules par la méthode particulaire n'est donc plus justifié et il suffit de simuler le transport de leur densité au sein du fluide. Le chapitre fournit une traduction mathématique formelle de ces intuitions physiques, en écrivant précisément le nouveau système à simuler. Toutefois, les calculs de dérivation de ce modèle se feront dans le cadre d'un système initial simplifié par rapport au système (1.7) – (1.9). Cette simplification consiste d'abord à prendre un taux de fragmentation constant pour les particules d'un rayon suffisamment grand et nul sinon

$$\nu(\xi, r) = \nu \chi_{r > r^*} = \frac{\chi_{r > r^*}}{\tau},$$

où τ est un temps caractéristique de la fragmentation. La deuxième hypothèse simplificatrice est de prendre uniquement deux valeurs r_1 et r_2 possibles pour les rayons des particules. Les particules de rayon $r_1 > r^*$ fragmentent pour donner des particules de rayons $r_2 < r^*$. On peut alors écrire la fonction de densité des particules

$$h(t, \mathbf{x}, \xi, r) = f(t, \mathbf{x}, \xi) \delta_{r=r_1} + g(t, \mathbf{x}, \xi) \delta_{r=r_2}.$$

Et le système s'écrit alors pour f et g

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0 & (1.10) \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g & (1.11) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] = -\frac{f}{\tau} & (1.12) \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] = \frac{m_f}{m_g} \frac{f}{\tau} & (1.13) \end{cases}$$

avec $m_f = \frac{4}{3}\rho_l\pi r_1^3$ la masse des particules de rayon r_1 et $m_g = \frac{4}{3}\rho_l\pi r_2^3$ la masse des particules de rayon r_2 . A partir de ce système simplifié et dans le chapitre 2 on montre formellement que dans la limite $\varepsilon = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow 0$, le système (1.10) - (1.13) se réduit au système suivant

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (1.14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\eta \mathbf{u}] = \int_{\xi} \frac{f}{\tau} d\xi, & (1.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi)f] = -\frac{f}{\tau}, & (1.16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t [(\rho + \eta)\mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\rho + \eta)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \\ = - \int_{\xi} (\mathbf{u} - \xi)f d\xi + \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau} d\xi. & (1.17) \end{cases}$$

Ainsi, seules les particules f doivent être simulées par la méthode particulaire, et les particules g sont intégrées dans le fluide via leur densité η . On voit alors l'apparition de termes sources dans les équations de la masse et quantité de mouvement du fluide, à cause de la création de petites particules par la fragmentation et l'intégration de ces particules dans le fluide.

L'établissement de limites asymptotiques pour des systèmes de sprays à fait l'objet de plusieurs travaux antérieurs. Ces études portent sur une variété de systèmes de sprays présentés dans la littérature physique et mathématique. En effet, les modèles pour les sprays présentent plusieurs déclinaisons selon l'équation fluide considérée (Navier-Stokes, Euler, Stokes ...) et selon les déclinaisons de l'équation de Vlasov (Vlasov, Vlasov-Fokker-Planck, Vlasov-Boltzmann ...). Le couplage entre les deux systèmes peut aussi se faire de façons diverses. On peut citer par exemple les différents modèles de sprays fins et sprays épais, présentés dans [10, 14], et obtenus selon que l'on néglige ou non le volume occupé par les particules dans le fluide. On peut alors citer comme exemple d'étude sur les limites asymptotiques le travail de Mathiaud qui établit formellement dans [14] une limite hydrodynamique pour un système Euler-Vlasov-Boltzmann, dans la limite d'un régime fortement collisionnel, vers un système Euler-bifluide. On peut citer également les travaux sur le système Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes-compressible et sa limite asymptotique dans un régime à très forte traînée et à très forte diffusion brownienne des particules. La limite formelle est réalisée par Goudon dans [18]. L'établissement rigoureux de cette limite fait l'objet des articles [19, 20] de Mellet et Vasseur. Dans [19], les auteurs montrent l'existence de solutions faibles globales pour le système Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes-compressible, et dans [20], on obtient le passage à la limite de ces solutions vers des solutions du modèle asymptotique. La limite asymptotique pour le système Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes-incompressible est prouvée par Goudon, Jabin et Vasseur dans [21] et [22] en admettant l'existence de solutions pour leur système initial.

On présente dans l'annexe C un théorème d'existence pour le système (1.10) - (1.13), basé sur une généralisation de la démonstration utilisée par Moussa dans [5] et Boudin et al. dans [23]. Notre démonstration diffère de celle de ces deux références en quelques points pour prendre en compte la deuxième fonction de densité g pour les petites particules et le terme source de fragmentation. Cette démonstration est présentée en annexe C. La dérivation mathématique et rigoureuse du nouveau modèle revient à démontrer que les solutions faibles obtenues, tendent lorsque le rapport des rayons $\varepsilon \rightarrow 0$, vers des quantités vérifiant le système asymptotique (1.14) - (1.17). Ceci représenterait également une démonstration, par construction, de l'existence de solution pour le système (1.14) - (1.17). Cette question n'est pas traitée dans le cadre de cette thèse. En effet on se contente dans le chapitre 2 de présenter une dérivation formelle du modèle asymptotique quand le rapport de rayon $\varepsilon = \frac{r_2}{r_1}$ tend vers 0. Ensuite, on s'intéresse dans le chapitre 3 à l'étude directe du système asymptotique (1.14) - (1.17) pour prouver l'existence de solutions faibles globales.

1.3 Etude mathématique du modèle asymptotique

L'étude directe du système asymptotique (1.14) - (1.17) présente en soi un intérêt mathématique. En effet, elle s'inscrit dans une famille de modèles de sprays pour lesquels des travaux ont été menés pour

démontrer l'existence de solutions. Le système Vlasov/Navier-Stokes-incompressible a fait l'objet de l'article [24] par Anoshchenko et al. pour démontrer l'existence de solutions faibles globales. Boudin et al. [23] traitent le même système avec une méthode constructive sans recourir au théorème de Schauder. Les solutions pour le cas Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes-compressible sont obtenues par Mallet et Vasseur dans [19]. On peut également citer quelques travaux sur les systèmes Euler-Vlasov : Baranger et Desvillettes ont obtenu dans [25] l'existence de solutions \mathcal{C}^1 pour ce système et Mathiaud a étendu dans [14] le résultat d'existence au système avec un noyau de collision de Boltzmann. Concernant les couplages avec les équations de Stokes, Hamdache prouve l'existence de solution globale pour un système Vlasov-Stokes dans [26].

Le système (1.14) – (1.17) est à rapprocher d'un modèle Vlasov/Navier-Stokes-incompressible avec densité variable. L'étude du système de Navier-Stokes-incompressible avec densité variable présente des difficultés supplémentaires par rapport au cas Navier-Stokes-incompressible avec densité constante [27, 28]. Notre système consiste donc à l'étude du couplage d'un tel système (Navier-Stokes-incompressible avec densité variable) avec une equation de Vlasov. Le couplage est fait via le terme de traînée mais également via les termes sources de masse et de quantité de mouvement qui ajoutent des difficultés supplémentaires. Nous avons obtenu dans le chapitre 3, l'existence de solutions faibles globales pour ce système.

On cherchera des solutions périodiques en espace pour ne pas avoir à traiter le problème des conditions aux limites. On introduit le tore $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ et un réel $T > 0$. On réécrit les équations de notre système asymptotique en prenant toutes les constantes physiques égales à 1, pour $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (1.18) \\ \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f] = -f, & (1.19) \\ \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = \int_{\boldsymbol{\xi}} f d\boldsymbol{\xi}, & (1.20) \\ \partial_t [(1 + \rho)\mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(1 + \rho)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \\ = - \int_{\boldsymbol{\xi}} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f d\boldsymbol{\xi} + \int_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} f d\boldsymbol{\xi}, & (1.21) \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= f_{\text{in}}(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \\ \rho(0, \mathbf{x}) &= \rho_{\text{in}}(0, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3. \end{aligned}$$

1.3.1 Estimation formelle de l'énergie

On écrit le bilan $\int_x u \cdot (1.21) + \int_{x, \boldsymbol{\xi}} \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} (1.19) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} (1.20)$

$$\begin{aligned} & \int_x \mathbf{u} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p - \Delta_x \mathbf{u} \right] + \int_x \mathbf{u} \cdot \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \\ & \int_{x, \boldsymbol{\xi}} \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_x f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f] \right] - \\ & \int_x \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = \\ & - \int_x \mathbf{u} \cdot \int_{\boldsymbol{\xi}} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})f + \int_x \mathbf{u} \int_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} f - \int_{x, \boldsymbol{\xi}} \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} f - \int_x \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \int_{\boldsymbol{\xi}} f. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_x \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_x \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right] + \int_x |\nabla_x \mathbf{u}|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{x,\xi} f \frac{|\xi|^2}{2} \\ & + \int_x \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) + \int_x \nabla_x \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \cdot \rho \mathbf{u} + \int_{x,\xi} \frac{|\xi|^2}{2} \nabla_\xi \cdot [(\mathbf{u} - \xi) f] = \\ & - \int_x \mathbf{u} \cdot \int_\xi (\mathbf{u} - \xi) f - \int_{x,\xi} \frac{|\mathbf{u} - \xi|^2}{2\tau} f, \end{aligned}$$

et les termes de traînée se simplifient par intégration par partie

$$\int_{x,\xi} \frac{\xi^2}{2} \nabla_\xi \cdot [(\mathbf{u} - \xi) f] + \int_x \mathbf{u} \cdot \int_\xi (\mathbf{u} - \xi) f = \int_{x,\xi} f |\mathbf{u} - \xi|^2.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_x (1 + \rho) \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \int_{x,\xi} f \frac{|\xi|^2}{2} = \\ - \int_x |\nabla_x \mathbf{u}|^2 - \frac{3}{2} \int_{x,\xi} |\mathbf{u} - \xi|^2 f. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ce bilan traduit formellement la dissipation de l'énergie cinétique totale du système par la viscosité du fluide et par le travail de la force de traînée. On tâchera d'établir une estimation de ce type pour les solutions obtenues pour le système. La preuve rigoureuse nous donne uniquement une inégalité entre les deux membres de (1.22) comme on va le voir dans le chapitre 3. Ceci motive également la considération de conditions initiales à énergie cinétique finie, par exemple

$$\begin{cases} f_{\text{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), & \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}} |\xi|^2 d\xi dx < \infty, & (1.23) \\ \rho_{\text{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3), & & (1.24) \\ \mathbf{u}_{\text{in}} \in L^2(\mathbb{T}^3), & \nabla_x \cdot \mathbf{u}_{\text{in}} = 0. & (1.25) \end{cases}$$

Le principe de notre preuve d'existence de solutions pour le système (1.18) - (1.21) est l'utilisation d'un théorème de point fixe de Schauder. On découple le système en partant d'un champ de vitesse \mathbf{u}_0 , qu'on utilise pour résoudre l'équation de Vlasov (1.19), puis l'équation de transport (1.20). Les solutions f et ρ sont ensuite injectées dans le système formé par (1.18) et (1.21) pour trouver \mathbf{u}_1 , qu'on appelle image de \mathbf{u} par une application S . Il s'agit de montrer que cette application admet un point fixe. Ceci se fait en étudiant la compacité de l'application S et en établissant des estimations sur les solutions f , ρ , et \mathbf{u}_1 . Le système initial se prête mal à une telle démarche. En effet, l'équation de Vlasov fournit des estimations sur la norme L^∞ de f mais ne permet pas de les moments $\int_\xi f$ et $\int_\xi \xi f$ dans les termes de traînée et de source de masse. On travaille alors sur un système modifié incluant une troncature des grandes vitesses ξ , à l'aide d'une fonction $\gamma_\varepsilon(\xi)$. Pour conserver la régularité des solutions f et ρ , on introduit également un noyau de régularisation appliqué au champ de transport.

On peut alors appliquer le théorème de Schauder sur le système modifié. L'étape suivante consiste à relaxer simultanément la régularisation et la troncature effectuées. Les estimations obtenues sur les solutions du système régularisé permettent d'exhiber des propriétés de compacité pour celles-ci, mais uniquement sur un intervalle local en temps à cause des termes non linéaires de traînée. On montre alors que les limites construites sont solutions du problème non régularisé sur ce même intervalle. Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes avec densité variable, le passage à la limite dans les termes produits se révèle être délicat. La régularité limitée des moments de f rend ce passage critique également. Le traitement des termes produits dans notre système est réalisé en utilisant un principe de compacité par compensation et se basant sur une méthode due à Di-Perna et Lions dans [29]. Pour notre preuve, on généralise la méthode de Di-Perna et

Lions en dehors du cadre L^1/L^∞ en temps de la méthode originale. Enfin, l'étude de la dépendance du temps d'existence local en fonction des quantités initiales nous permet de prolonger la solution sur un intervalle quelconque.

1.3.2 Enoncé du théorème d'existence globale

Théorème 1.3.1. *Pour tout $T > 0$, le système S_2 formé des équations (1.18) – (1.21) et des conditions initiales (1.23) – (1.25) admet au moins une solution (ρ, f, \mathbf{u}) faible au sens de $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et telle que*

$$\rho \in L^\infty([0, T], L^{5/3}(\mathbb{T}^3)),$$

$$f \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

et $\mathbf{u} \in L^2([0, T], H_{div}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^3))$. Les quantités ρ , \mathbf{u} et f sont continues en temps à valeur dans des espaces $H^{-q}(\mathbb{T}^3)$, $H^{-r}(\mathbb{T}^3)$, et $H^{-s}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ respectivement pour des valeurs de q , r et s assez grandes. Le triplet (ρ, f, \mathbf{u}) vérifie l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\mathbf{in}} + \|\sqrt{1 + \rho_{\mathbf{in}}} \mathbf{u}_{\mathbf{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

et la borne

$$\|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq e^{2T} \|f_{\mathbf{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}.$$

Chapitre 2

Dérivation formelle d'un modèle asymptotique à la limite des petites particules

2.1 Equations du modèle Vlasov-NS-incompressible et modèle de fragmentation simplifié

On considère le système (2.1) – (2.4) modélisant un spray formé d'un fluide visqueux et des particules ayant deux valeurs possibles de rayons. Le fluide est décrit par sa densité ρ constante, sa vitesse \mathbf{u} et la pression p . Les particules de rayon r_1 et masse $m_f = \frac{4}{3}\rho_l\pi r_1^3$ sont décrites par une fonction de densité f , et ont une probabilité de fragmentation non nulle avec un temps caractéristique τ . Les particules issues de ces fragmentations sont décrites par la fonction de densité g et sont de rayon r_2 et masse $m_g = \frac{4}{3}\rho_l\pi r_2^3$.

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0 & (2.1) \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g & (2.2) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] = -\frac{f}{\tau} & (2.3) \\ \frac{\partial g}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] = \frac{m_f}{m_g} \frac{f}{\tau} & (2.4) \end{cases}$$

La fragmentation est responsable de l'augmentation des nombres de particules de petite taille. La simulation numérique par la méthode particulaire devient alors très coûteuse. Le but de ce chapitre est de montrer qu'un modèle effectif peut être justifié au niveau formel traitant ces petites particules comme des traceurs dans le fluide en négligeant leur mouvement relatif au fluide environnant.

On se place dans le domaine $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ en espace avec des conditions aux bords périodiques. L'étude mathématique de ce système et la preuve de l'existence de solutions associées présente sensiblement les mêmes problématiques que le système Vlasov-Navier-Stokes sans fragmentation, et monodispersé (avec une seule valeur du rayon des particules) étudié dans [5, 23]. En adaptant la démonstration de ces deux références on démontre le théorème C.4.1 en annexe portant sur l'existence de solutions faibles pour le système (2.1) – (2.4). Le théorème et sa démonstration sont présentés dans l'annexe C. Dans ce chapitre, on se concentre donc sur l'établissement au niveau formel d'un modèle asymptotique.

Pour établir cette convergence formelle, on commence par écrire des bilans de masse, quantité de mouvement et énergie pour le système (2.1) – (2.4).

– Conservation de la masse des particules de petit rayon : $m_g \int_{\xi} (2.4)$

$$m_g \int_{\xi} \frac{\partial g}{\partial t} + m_g \int_{\xi} \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + m_g \int_{\xi} \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] = m_f \int_{\xi} \frac{f}{\tau},$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t} [m_g \int_{\xi} g] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [m_g \int_{\xi} \xi g] = m_f \int_{\xi} \frac{f}{\tau}. \quad (2.5)$$

– Conservation de la quantité de mouvement du mélange fluide incompressible et particules de petit rayon : (2.2) + $m_g \int_{\xi} (2.4) \xi$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + m_g \int_{\xi} \frac{\partial g}{\partial t} \xi + m_g \int_{\xi} (\xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g) \xi + m_g \int_{\xi} \xi \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] \\ = -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau}, \end{aligned}$$

soit, en intégrant par partie le dernier terme du membre de gauche

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \mathbf{u} + m_g \int_{\xi} g \xi \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + m_g \int_{\xi} g \xi \otimes \xi \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g \\ = -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \mathbf{u} + m_g \int_{\xi} g \xi \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + m_g \int_{\xi} g \xi \otimes \xi \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \\ -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

– Dissipation de l'énergie totale du système : $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot (2.2) + m_f \int_{\mathbf{x}, v} \frac{|\xi|^2}{2} (2.3) + m_g \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} (2.4)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \right] + m_f \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] \right) \\ + m_g \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] \right) = \\ \int_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \left(-m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g \right) + m_f \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \left(-\frac{f}{\tau} \right) + m_g \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \left(\frac{m_f f}{m_g \tau} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right] + \nu \int_{\mathbf{x}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|^2 + m_f \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{x}, \xi} f \frac{|\xi|^2}{2} + m_g \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{x}, \xi} g \frac{|\xi|^2}{2} \\ + m_f \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] + m_g \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g] = \\ \int_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \left(-m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f - m_g \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_g^{-2/3} g \right), \end{aligned}$$

et les termes de traînée se simplifient par intégration par partie

$$m_f \int_{\mathbf{x}, \xi} \frac{|\xi|^2}{2} \nabla_{\xi} \cdot [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] + m_f \int_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f = m_f \int_{\mathbf{x}, \xi} C f |\mathbf{u} - \xi|^2 m_f^{-2/3}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} f \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} + m_g \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} g \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} \right] = \\ - \nu \int_{\mathbf{x}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|^2 - m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C f |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 m_f^{-2/3} - m_g \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C g |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 m_g^{-2/3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2 Système avec scaling

On pose $\varepsilon = \frac{r_2}{r_1}$. Alors $m_g = \varepsilon^3 m_f$ et on réécrit le système (2.1) – (2.4)

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon &= 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon) \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p^\varepsilon - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon &= -m_f \int_{\boldsymbol{\xi}} C(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) m_f^{-2/3} f_\varepsilon \\ &\quad - m_f \int_{\boldsymbol{\xi}} C \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}}{\varepsilon^2} m_f^{-2/3} (\varepsilon^3 g^\varepsilon), \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} [C(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) m_f^{-2/3} f_\varepsilon] = -\frac{f_\varepsilon}{\tau}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon^3 g^\varepsilon)}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\varepsilon^3 g^\varepsilon) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} [C \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}}{\varepsilon^2} m_f^{-2/3} (\varepsilon^3 g^\varepsilon)] = \frac{f_\varepsilon}{\tau}. \quad (2.11)$$

Le bilan (2.7) d'énergie devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho \frac{|\mathbf{u}_\varepsilon|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} f_\varepsilon \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} (\varepsilon^3 g^\varepsilon) \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} \right] = \\ - \nu \int_{\mathbf{x}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|^2 - m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 m_f^{-2/3} - m_f \int_{\mathbf{x}, v} C(\varepsilon^3 g^\varepsilon) \frac{|\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2}{\varepsilon^2} m_f^{-2/3}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Et on intègre l'équation précédente (2.12) entre les instants 0 et T : \int_0^T (2.12)

$$\begin{aligned} \rho \int_{\mathbf{x}} \frac{|\mathbf{u}_\varepsilon(T)|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} f_\varepsilon(T) \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} (\varepsilon^3 g^\varepsilon)(T) \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} \\ + \nu \int_0^T \int_{\mathbf{x}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|^2 + m_f \int_0^T \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 m_f^{-2/3} + m_f \int_0^T \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C(\varepsilon^3 g^\varepsilon) \frac{|\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2}{\varepsilon^2} m_f^{-2/3} = \\ \rho \int_{\mathbf{x}} \frac{|\mathbf{u}_\varepsilon(0)|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} f_\varepsilon(0) \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2} + m_f \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} (\varepsilon^3 g^\varepsilon)(0) \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 Majoration du terme avec l'énergie de traînée et passage à la limite formel dans le système

On suppose que le membre de droite (énergie initiale) dans (2.13) est d'ordre 0 en ε . Puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs dans le membre à gauche, tous les termes de (2.13) sont d'ordre ≥ 0 en ε , on a donc que

$$\int_0^T \int_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} C(\varepsilon^3 g^\varepsilon) |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 m_f^{-2/3} = O(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

En particulier quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\varepsilon^3 g^\varepsilon)$ doit se comporter comme $\delta_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathbf{x})}$,

$$(\varepsilon^3 g^\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left[\int_{\boldsymbol{\xi}} (\varepsilon^3 g^\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right] \cdot \delta_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathbf{x})} + O(\varepsilon). \quad (2.15)$$

On suppose que $\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$, $p^\varepsilon \rightarrow p$, $f_\varepsilon \rightarrow f$ et $m_f(\varepsilon^3 g^\varepsilon)(t, x, v) \rightarrow \eta(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\xi=\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}$. On considère le système suivant formé des équations (2.8) – (2.11) et des équations moyennées (2.5) et (2.6)

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & (2.16) \\ \frac{\partial}{\partial t} [m_f \int_{\xi} (\varepsilon^3 g^\varepsilon)] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [m_f \int_{\xi} \xi (\varepsilon^3 g^\varepsilon)] = m_f \int_{\xi} \frac{f_\varepsilon}{\tau}, & (2.17) \\ \frac{\partial}{\partial t} [\rho \mathbf{u}_\varepsilon + m_f \int_{\xi} (\varepsilon^3 g^\varepsilon) \xi] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon + m_f \int_{\xi} (\varepsilon^3 g^\varepsilon) \xi \otimes \xi] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = \\ \quad - m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u}_\varepsilon - \xi) m_f^{-2/3} f_\varepsilon + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f_\varepsilon}{\tau} & (2.18) \\ \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\xi} [C(\mathbf{u}_\varepsilon - \xi) m_f^{-2/3} f_\varepsilon] = -\frac{f_\varepsilon}{\tau}, & (2.19) \end{cases}$$

et on suppose que tous les termes passent à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, (2.16) donne

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.20)$$

et (2.19) donne

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] = -\frac{f}{\tau}. \quad (2.21)$$

On passe à la limite dans (2.17)

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\eta \mathbf{u}] = m_f \int_{\xi} \frac{f}{\tau}. \quad (2.22)$$

On passe à la limite dans (2.18)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [(\rho + \eta) \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\rho + \eta) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \\ & = -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les équations (2.20) – (2.23) constituent le système d'équations du modèle asymptotique

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (2.24) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} [C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f] = -\frac{f}{\tau}, & (2.25) \\ S_2 \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\eta \mathbf{u}] &= m_f \int_{\xi} \frac{f}{\tau} d\xi, & (2.26) \\ \frac{\partial}{\partial t} [(\rho + \eta) \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\rho + \eta) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} &= \\ & -m_f \int_{\xi} C(\mathbf{u} - \xi) m_f^{-2/3} f d\xi + m_f \int_{\xi} \xi \frac{f}{\tau} d\xi. & (2.27) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Dans le chapitre suivant on s'intéressera à l'étude mathématique de ce nouveau couplage en démontrant un théorème d'existence de solutions pour ce système.

Chapitre 3

Etude mathématique du modèle asymptotique

Dans ce chapitre, on note α^1 le carré du rapport entre les deux rayons $\alpha = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. On prend toutes les autres constantes physiques égales à 1. À partir du système suivant

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = - \int_{\xi} (\mathbf{u} - \xi) f - \int_{\xi} \frac{\mathbf{u} - \xi}{\alpha} g, \\ \partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [(\mathbf{u} - \xi) f] = -f, \\ \partial_t g + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + \nabla_{\xi} \cdot \left[\frac{(\mathbf{u} - \xi)}{\alpha} g \right] = f, \end{cases}$$

on a établi formellement le passage à la limite quand $\alpha \rightarrow 0$ vers le nouveau système suivant

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = \int_{\xi} f d\xi, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [(\mathbf{u} - \xi) f] = -f, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \partial_t [(\rho + 1) \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\rho + 1) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \\ = - \int_{\xi} (\mathbf{u} - \xi) f d\xi + \int_{\xi} \xi f d\xi. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce système s'écrit également sous la forme

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = \int_{\xi} f d\xi, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\xi} \cdot [(\mathbf{u} - \xi) f] = -f, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} (1 + \rho) [\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 2 \int_{\xi} (\xi - \mathbf{u}) f d\xi. \end{cases} \quad (3.8)$$

1. Dans ce chapitre, la notation ε sera réservée au paramètre de régularisation dans la preuve de notre théorème, d'où l'introduction de α .

On souhaite démontrer que le système (3.5) – (3.8) admet au moins une solution faible globale, avec des conditions aux limites périodiques.

3.1 Notations

3.1.1 Espaces fonctionnels

Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté sur l'intervalle de temps $[0, T]$ considéré, on note $L_t^p(L_x^q)$ et $L_t^p(L_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}}^q)$ les espaces $L^p([0, T]; L^q(\mathbb{T}^3))$ et $L^p([0, T]; L^q(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, pour tout couple $(p, q) \in [1, \infty]^2$. De manière plus générale, pour E un espace fonctionnel, on adopte les notations $L_t^p(E)$ et $\mathcal{C}_t^0(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note \mathbf{H}_x^p l'espace $\mathbf{H}^p(\mathbb{T}^3)$, et on adopte les notations similaires pour $\mathbf{H}_t^q(\mathbf{H}_x^p)$. La norme d'un espace E est notée de manière générale $\|\cdot\|_E$. Quand on omet les variables en indice de la norme, $\|h\|_{L^p}$ ou plus simplement $\|h\|_p$ désignera la norme L^p de h en toutes ses variables. Par exemple, si h est définie pour $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3$, $\|h\|_{L^p}$ ou $\|h\|_p$ est sa norme dans $L^p([0, T] \times \mathbb{T}^3)$, tandis que $\|h(t)\|_p$ est la norme $L^p(\mathbb{T}^3)$ de $h(t)$.

3.1.2 Moments

On sera souvent amené à considérer les moments en vitesse de fonctions de densité prenant la forme générale

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &\longmapsto h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

On notera ainsi (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$m_\alpha(h)(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^\alpha h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad M_\alpha(h)(t) := \int_{\mathbb{T}^3} m_\alpha(h)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{m}_1(h)(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

On notera parfois $m_\alpha h$, $M_\alpha h$ et $\mathbf{m}_1 h$ les moments précédents, pour alléger l'écriture (s'il n'y a pas d'ambiguïté).

3.2 Le système étudié

On veut établir un résultat d'existence de solutions pour le système suivant

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (3.9) \\ \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho \mathbf{u}] = \int_{\boldsymbol{\xi}} f d\boldsymbol{\xi}, & (3.10) \\ \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) f] = -f, & (3.11) \\ \partial_t [(\rho + 1)\mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\rho + 1)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = - \int_{\boldsymbol{\xi}} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) f d\boldsymbol{\xi} + \int_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} f d\boldsymbol{\xi}. & (3.12) \end{cases}$$

On considère les données initiales suivantes

$$f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.13)$$

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.15)$$

avec les hypothèses

$$\begin{cases} f_{\text{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} < \infty, \\ \rho_{\text{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3), \\ \mathbf{u}_{\text{in}} \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_{\text{in}} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3 Le système régularisé

L'étape délicate qui permet de passer d'un système linéaire (découplé) à un système couplé, va être réalisée sur une perturbation du système. Soit $\varepsilon > 0$ et ψ_ε un noyau régularisant défini par $\psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^{-3}\psi(\boldsymbol{\xi}/\varepsilon)$, où ψ est un élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Soit φ_ε un autre noyau régularisant défini sur \mathbb{T}^3 . On définit la convolution sur \mathbb{T}^3 par

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Dans toute la suite \star désignera toujours la convolution au sens précédent (en la variable \mathbf{x} uniquement), sauf indication contraire. Soit γ_ε un autre élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, à support inclus dans la boule $\mathbf{B}(0, 2/\varepsilon)$, borné par 1 et valant 1 sur la boule $\mathbf{B}(0, 1/\varepsilon)$. Soit finalement $(\mathbf{w}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $\mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$, composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, à divergence nulle (typiquement les vecteurs propres de l'opérateur de Stokes $-\mathbb{P}\Delta$). On note $\mathbf{H}_p := \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$, que l'on munit de la norme $\mathbf{H}^1(\mathbb{T}^3)$.

Nous allons montrer l'existence de solutions pour le système régularisé suivant

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & (3.17) \\ \partial_t \rho_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_\varepsilon = \int_{\boldsymbol{\xi}} f_\varepsilon \gamma_\varepsilon d\boldsymbol{\xi}, & (3.18) \\ \partial_t f_\varepsilon + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \boldsymbol{\xi})f_\varepsilon] = -f_\varepsilon, & (3.19) \\ (1 + \rho_\varepsilon) \left[\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon \right] + \nabla_{\mathbf{x}} p_\varepsilon - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = 2 \int_{\boldsymbol{\xi}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_\varepsilon) f_\varepsilon \gamma_\varepsilon d\boldsymbol{\xi}, & (3.20) \end{cases}$$

associé à des conditions initiales données par

$$f_\varepsilon(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})(\phi_\varepsilon \star_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} f_{\text{in}})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.21)$$

$$\rho_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}) := (\varphi_\varepsilon \star \rho_{\text{in}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.23)$$

où $\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon$ est la projection de \mathbf{u}_{in} sur $\mathbf{H}_{p_\varepsilon}$ avec $p_\varepsilon = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$ et $\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$.

On notera \mathbb{P} le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle, de sorte que l'équation (3.20) s'écrit également (puisque \mathbf{u}_ε est à divergence nulle)

$$\mathbb{P} \left\{ (1 + \rho_\varepsilon) \left[\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon \right] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = 2\mathbb{P} \left\{ \mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) - \mathbf{u}_\varepsilon m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) \right\}.$$

3.4 Existence de solutions pour le système régularisé

Dans toute cette section, le paramètre ε est fixé, on ne le notera donc plus, par souci de simplification. On fixe $p \in \mathbb{N}$ et un jeu de conditions initiales $(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \in \mathbf{H}_p \times (\mathcal{C}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}}^1 \cap \mathbf{L}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}}^\infty) \times \mathcal{C}_{\mathbf{x}}^1$ (les deux dernières composantes sont supposées positives). Le système à étudier s'écrit

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, & (3.24) \\ \partial_t \rho + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = m_0(f\gamma), & (3.25) \\ \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} \star \varphi - \boldsymbol{\xi})f] = -f, & (3.26) \\ \mathbb{P} \left\{ (1 + \rho) \left[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \right] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = 2\mathbb{P} \left\{ \mathbf{m}_1(f\gamma) - \mathbf{u} m_0(f\gamma) \right\}. & (3.27) \end{cases}$$

On va montrer l'existence de solution pour le système non linéaire (3.24) – (3.27) en utilisant le théorème de Schauder pour l'application suivante

$$\begin{aligned} S : \mathcal{C}_t^0(\mathbf{L}_x^2) &\longrightarrow \mathcal{C}_t^0(\mathbf{L}_x^2) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{u}^\diamond, \end{aligned}$$

où l'on construit \mathbf{u}^\diamond par les trois étapes suivantes :

(i) On construit l'unique solution forte $f^\diamond \in \mathcal{C}_{t,x,\xi}^1$ de l'équation

$$\partial_t f^\diamond + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_x f^\diamond + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} \star \varphi - \boldsymbol{\xi})f^\diamond] = -f^\diamond,$$

initialisée par h ,

(ii) puis l'unique solution forte $\rho^\diamond \in \mathcal{C}_{t,x}^1$ de l'équation

$$\partial_t \rho^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_x \rho^\diamond = m_0(f^\diamond \gamma),$$

initialisée par ν ,

(iii) et finalement $\mathbf{u}^\diamond \in \mathcal{C}_t^0(\mathbf{L}_x^2)$ est l'unique solution faible à divergence nulle de l'équation

$$\mathbb{P} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{u}^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_x \mathbf{u}^\diamond \right] \right\} - \Delta_x \mathbf{u}^\diamond = 2\mathbb{P} \left\{ \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma) - \mathbf{u}^\diamond m_0(f^\diamond \gamma) \right\}, \quad (3.28)$$

initialisée par $\boldsymbol{\omega}$.

Le but des sections 3.4.1 et 3.4.2 est de montrer que cette application est bien définie, soit l'existence et l'unicité de f^\diamond , ρ^\diamond et \mathbf{u}^\diamond . On montrera de plus que $\mathbf{u}^\diamond \in L_t^2(\mathbf{H}_x^2) \cap H_t^1(\mathbf{L}_x^2)$ si bien que les fonctions tests à utiliser dans la formulation faible de (3.28) pourront être prises dans $L_t^2(\mathbf{H}_x^1)$.

Dans la suite $P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)$ désignera de manière générale une fonction scalaire positive (dépendant aussi de ε , mais on ne le note pas) s'écrivant sous la forme de somme finie de fonctions positivement homogènes de degré strictement positif de l'une des quantités suivantes : $\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}_p}, \|h\|_\infty$ ou $\|\nu\|_\infty$. $P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)$ pourra changer d'une ligne à l'autre mais vérifiera toujours les propriétés que l'on vient de citer. On montrera en particulier une estimation du type

$$\|\mathbf{u}^\diamond\|_{L_t^\infty(\mathbf{L}_x^2)} + \|\mathbf{u}^\diamond\|_{L_t^2(\mathbf{H}_x^1)} \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu), \quad (3.29)$$

$$\|\mathbf{u}^\diamond\|_{H_t^1(\mathbf{L}_x^2)} \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(\mathbf{L}_x^2)} + 1 \right]. \quad (3.30)$$

3.4.1 Définition et continuité de $\mathbf{u} \mapsto (f^\diamond, \rho^\diamond)$

On a $\mathbf{u} \star \varphi \in \mathcal{C}_t^0(\mathcal{C}_x^1)$, donc par la méthode des caractéristiques on obtient l'existence de $f^\diamond \in \mathcal{C}_{t,x,\xi}^1$ d'abord puis $\rho^\diamond \in \mathcal{C}_{t,x}^1$ ensuite, toutes les deux positives. On obtient alors, directement de l'expression par les caractéristiques

$$\|f^\diamond\|_\infty \leq e^{2T} \|h\|_\infty,$$

d'où l'on tire

$$\|m_0(f^\diamond \gamma)\|_\infty + \|\mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)\|_\infty \leq C_\gamma e^{2T} \|h\|_\infty \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu), \quad (3.31)$$

puis

$$\|\rho^\diamond\|_\infty \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu). \quad (3.32)$$

On note $\text{Lip}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions lipschitziennes définies sur \mathbb{R}^d , et pour $g \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)$, $\text{Lip}(g)$ désignera sa meilleure constante de Lipschitz. De même, $\text{Lip}^{2,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $\mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ composé des fonctions globalement lipschitziennes en leur deuxième variable. Pour $\mathbf{a} \in \text{Lip}^{2,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on note $\text{Lip}(\mathbf{a})$ sa meilleure constante de Lipschitz uniforme en la deuxième variable. On a le lemme général suivant

Lemme 3.4.1. Soient $g \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{a}, b \in \text{Lip}^{2,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. On note $\Psi[g, \mathbf{a}, b]$ l'unique solution, initialisée par g , de l'équation de transport

$$\partial_t \varphi + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi = b.$$

Pour toutes familles $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Lip}^{2,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ on a

$$\|\Psi[g, \mathbf{a}, b] - \Psi[g, \mathbf{a}_n, b_n]\|_{\infty} \leq [\text{Lip}(g) + T\text{Lip}(b)] T e^{T\text{Lip}(\mathbf{a})} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_{\infty} + T \|b - b_n\|_{\infty}.$$

Preuve :

On note par la suite $\mathbf{T}_{s,t}$ le flot associé au champ \mathbf{a} , c'est à dire que pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et s fixé, l'application $\mathbf{Y} : t \mapsto \mathbf{T}_{s,t}(\mathbf{x})$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}(t) &= \mathbf{a}(t, \mathbf{Y}(t)), \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note de manière analogue $\mathbf{T}_{s,t}^n$ le flot associé au champ \mathbf{a}^n . On rappelle qu'on a alors

$$\Psi[g, \mathbf{a}, 0](t, \mathbf{x}) = g(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x})), \quad (3.33)$$

$$\Psi[0, \mathbf{a}, b](t, \mathbf{x}) = \int_0^t b(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x})) ds, \quad (3.34)$$

$$\Psi[g, \mathbf{a}, b] = \Psi[g, \mathbf{a}, 0] + \Psi[0, \mathbf{a}, b]. \quad (3.35)$$

On déduit en particulier de (3.34)

$$\|\Psi[0, \mathbf{a}, b]\|_{\infty} \leq T \|b\|_{\infty}. \quad (3.36)$$

Écrivons maintenant que

$$\Psi[g, \mathbf{a}, b] - \Psi[g, \mathbf{a}_n, b_n] = \overbrace{\Psi[g, \mathbf{a}, b] - \Psi[g, \mathbf{a}_n, b]}^{\mathbf{R}_n^1} + \overbrace{\Psi[g, \mathbf{a}_n, b] - \Psi[g, \mathbf{a}_n, b_n]}^{\mathbf{R}_n^2}.$$

Traitons d'abord \mathbf{R}_n^2 . Par linéarité on obtient

$$\mathbf{R}_n^2 = \Psi[0, \mathbf{a}_n, b - b_n],$$

si bien qu'en utilisant (3.36) on voit que

$$\|\mathbf{R}_n^2\|_{\infty} \leq T \|b - b_n\|_{\infty}.$$

Pour \mathbf{R}_n^1 , on écrit en utilisant (3.33) – (3.35) et en notant $\mathbf{T}_{t,s}$ et $\mathbf{T}_{t,s}^n$ les difféomorphismes caractéristiques respectivement associés aux champs \mathbf{a} et \mathbf{a}_n ,

$$\mathbf{R}_n^1(t, \mathbf{x}) = g(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x})) + \int_0^t \{b(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x})) - b(s, \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}))\} ds.$$

On a donc

$$|\mathbf{R}_n^1(t, \mathbf{x})| \leq \text{Lip}(g) |\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x})| + T\text{Lip}(b) \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x})|. \quad (3.37)$$

Mais par définition des courbes caractéristiques, pour tout $t, s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}) &= \int_t^s \{ \mathbf{a}(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}(\mathbf{x})) - \mathbf{a}^n(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}^n(\mathbf{x})) \} d\sigma \\ &= \int_t^s \{ \mathbf{a}(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}(\mathbf{x})) - \mathbf{a}(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}^n(\mathbf{x})) \} d\sigma + \int_t^s \{ \mathbf{a}(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}^n(\mathbf{x})) - \mathbf{a}^n(\sigma, \mathbf{T}_{t,\sigma}^n(\mathbf{x})) \} d\sigma,\end{aligned}$$

en particulier, pour $t \geq s$,

$$\alpha_{t,\mathbf{x}}^n(s) := |\mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x})| \leq T \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty + \text{Lip}(\mathbf{a}) \int_s^t |\mathbf{T}_{t,\sigma}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_{t,\sigma}^n(\mathbf{x})| d\sigma.$$

On fait alors le changement de variable $\tau = t - \sigma$ dans l'intégrale du membre de droite pour obtenir

$$\alpha_{t,\mathbf{x}}^n(t - (t - s)) \leq T \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty + \text{Lip}(\mathbf{a}) \int_0^{t-s} \alpha_{t,\mathbf{x}}^n(t - \tau) d\tau.$$

Quand s parcourt $[0, t]$, $t - s$ parcourt le même intervalle, ce qui veut exactement dire que la fonction $\beta_{t,\mathbf{x}}^n(\theta) := \alpha_{t,\mathbf{x}}^n(t - \theta)$ vérifie, pour $\theta \in [0, t]$,

$$\beta_{t,\mathbf{x}}^n(\theta) \leq T \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty + \text{Lip}(\mathbf{a}) \int_0^\theta \beta_{t,\mathbf{x}}^n(\tau) d\tau,$$

d'où finalement par le lemme de Grönwall, pour $s \in [0, t]$,

$$\alpha_{t,\mathbf{x}}^n(s) = \beta_{t,\mathbf{x}}^n(t - s) \leq T \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty e^{(t-s)\text{Lip}(\mathbf{a})}.$$

Mais (3.37) se réécrit

$$|\mathbf{R}_n^1(t, \mathbf{x})| \leq \text{Lip}(g) \alpha_{t,\mathbf{x}}^n(0) + T \text{Lip}(b) \sup_{0 \leq s \leq t} \alpha_{t,\mathbf{x}}^n(s),$$

si bien que finalement

$$\|\mathbf{R}_n^1\|_\infty \leq [\text{Lip}(g) + T \text{Lip}(b)] T e^{T \text{Lip}(\mathbf{a})} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty,$$

et le lemme est démontré. ■

Il est clair que le lemme précédent s'étend au cas où l'espace \mathbb{R}^d est remplacé par $\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$. Maintenant f^\diamond est solution de l'équation

$$\partial_t f^\diamond + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f^\diamond + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} \star \varphi - \boldsymbol{\xi}) f^\diamond] = -f^\diamond,$$

qui s'écrit également

$$\partial_t f^\diamond - 2f^\diamond + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} f^\diamond = 0,$$

avec $\mathbf{z} := (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{a} := (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u} \star \varphi - \boldsymbol{\xi})$. En particulier, on voit qu'en reprenant la notation du lemme (f^\diamond est initialisée par h , supposée lipschitzienne)

$$f^\diamond(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = e^{2t} \Psi[h, \mathbf{a}, 0](t, \mathbf{z}).$$

Si $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_t^0(\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^2)^{\mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{u} dans $L_t^\infty(\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^2)$ il est aisé de voir que la suite de champs correspondants, $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, appartient bien à $\text{Lip}^{2,\infty}([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et converge vers \mathbf{a} , uniformément en toutes les variables impliquées. Le lemme s'applique pour donner la convergence uniforme de $(\Psi[h, \mathbf{a}_n, 0])_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\Psi[h, \mathbf{a}, 0]$ ce qui, en vertu de la formule précédente, est exactement la continuité de

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\longmapsto f^\diamond \\ \mathcal{C}_t^0(\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^2) &\longrightarrow L_t^\infty(\mathbf{L}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}}^\infty).\end{aligned}$$

Ensuite pour ρ^\diamond , on a

$$\partial_t \rho^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho^\diamond = m_0(f^\diamond \gamma).$$

La continuité de

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\longmapsto \rho^\diamond \\ \mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2) &\longrightarrow \mathbb{L}_t^\infty(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^\infty), \end{aligned}$$

découle donc également du lemme puisque :

- $m_0(f^\diamond \gamma)$ est bien globalement lipschitzienne en sa deuxième variable [$\mathbf{T}_{t,s}$ est le difféomorphisme caractéristique associé à \mathbf{u}] :

$$\begin{aligned} |m_0(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}_1) - m_0(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}_2)| &\leq e^{2T} \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(\boldsymbol{\xi}) |h(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi})) - h(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}))| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq e^{2T} C_\gamma \text{Lip}(h) \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{T}_{t,0}\|_\infty |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \end{aligned}$$

où la norme infinie du gradient est bien finie puisque le flot caractéristique $(t, s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et que la borne supérieure en question peut-être prise sur un compact de $[0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ (grâce à γ).

- La continuité de $\mathbf{u} \mapsto f^\diamond$ acquise précédemment se transmet à $\mathbf{u} \mapsto m_0(f^\diamond \gamma)$ (pour la norme uniforme à l'arrivée), encore grâce à la présence de γ .

3.4.2 Existence de \mathbf{u}^\diamond

On considère une base Hilbertienne $(\mathbf{w}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$, composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, à divergence nulle. On se place sur $\mathbb{H}_N := \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$, avec $N \geq p$ et on cherche $\mathbf{u}_N^\diamond \in \mathcal{C}_t^1(\mathbb{H}_N)$ vérifiant la formulation variationnelle de l'équation (3.28) face à tous les éléments de \mathbb{H}_N . \mathbf{u}_N^\diamond se décompose alors comme suit

$$\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \mathbf{w}_i(\mathbf{x}),$$

où les N fonctions \mathcal{C}_t^1 à valeurs réelles $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ sont à déterminer (en toute rigueur on devrait les noter α_i^N). Enfin, puisque la condition initiale $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{H}_p$,

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{w}_i(\mathbf{x}),$$

si bien que l'on considère naturellement les conditions initiales $\alpha_i(0) = a_i$ si $i \leq p$, $\alpha_i(0) = 0$ sinon. La formulation variationnelle de l'équation (3.28) si l'on prend comme fonctions test les éléments de \mathbb{H}_N est alors équivalente à (le crochet désigne le produit scalaire $\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2$ usuel)

Formulation variationnelle sur \mathbb{H}_N ($N \geq p$)

Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t) \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j [1 + \rho^\diamond(t)] \rangle + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \langle (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}_i, (1 + \rho^\diamond(t)) \mathbf{w}_j \rangle \\ + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \langle \nabla \mathbf{w}_i, \nabla \mathbf{w}_j \rangle \\ = 2 \langle \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)(t), \mathbf{w}_j \rangle - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \langle \mathbf{w}_i, m_0(f^\diamond \gamma)(t) \mathbf{w}_j \rangle, \end{aligned}$$

$$\text{et } \alpha_j(0) = a_j \mathbf{1}_{j \leq p}.$$

En introduisant le vecteur

$$Y(t) := \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_N(t) \end{pmatrix},$$

on voit que la formulation variationnelle obtenue s'écrit

$$M(t)\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t), \quad (3.38)$$

où $M(t)$ est la transposée de la matrice $\left[\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j(1 + \rho^\diamond(t)) \rangle \right]_{i,j}$ et A, B deux fonctions continues du temps respectivement à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^N . Mais puisque ρ^\diamond ne prend que des valeurs positives, on vérifie que $M(t) \in \mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$ à chaque instant : si $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\boldsymbol{\lambda} M(t)^t \boldsymbol{\lambda} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_j \lambda_i \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j [1 + \rho^\diamond(t)] \rangle = \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})|^2 [1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})] d\mathbf{x} > 0,$$

où l'on a noté $\boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$. En particulier $M(t)$ est donc bien inversible et l'existence de la fonction vectorielle Y est alors acquise. Maintenant que les $\alpha_i(t)$ sont bien définis, il s'agit de démontrer que la suite \mathbf{u}_N^\diamond converge effectivement vers un élément de $\mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)$ solution de (3.28).

On commence par l'estimation classique des équations paraboliques : on multiplie par $\alpha_j(t)$ chacune des N équations de la formulation variationnelle et on somme par rapport à l'indice j (ce qui revient exactement à multiplier (3.28) par \mathbf{u}^\diamond)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) \partial_t |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho^\diamond(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- 2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 m_0(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation vérifiée par ρ^\diamond par $|\mathbf{u}_N^\diamond|^2/2$ on obtient après intégration

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \partial_t \rho^\diamond(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho^\diamond(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 m_0(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ces deux égalités nous donnent finalement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} + \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= -\frac{3}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 m_0(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui, intégrée en temps devient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} ds \\
&= -\frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_N^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 m_0(f^\diamond \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\
&+ 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_N^\diamond(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(0, \mathbf{x})) |\mathbf{u}_N^\diamond(0, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

L'estimation (3.31) obtenue sur f^\diamond permet donc d'écrire, puisque $\rho^\diamond \geq 0$, $\rho^\diamond(0) = \nu$ et $\mathbf{u}_N^\diamond(0) = \boldsymbol{\omega}$ que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_N^\diamond\|_2^2(t) + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond\|_2^2(s) ds \\
&\leq [1 + P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)] \int_0^t \|\mathbf{u}_N^\diamond\|_2^2(s) ds. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

On obtient alors par le lemme de Grönwall que la suite $(\mathbf{u}_N^\diamond)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)$ puis dans $L_t^2(H_{\mathbf{x}}^1)$ par une constante de la forme $P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \exp(P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu))$.

On effectue ensuite le même calcul mais en multipliant chaque équation par $\dot{\alpha}_j(t)$ puis en sommant sur j (ce qui revient exactement à multiplier (3.28) par $\partial_t \mathbf{u}^\diamond$). On a alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} |\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} &= -\langle (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond, (1 + \rho^\diamond) \partial_t \mathbf{u}_N^\diamond \rangle(t) \\
&+ 2 \langle \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma), \partial_t \mathbf{u}_N^\diamond \rangle(t) - 2 \langle \mathbf{u}_N^\diamond m_0(f^\diamond \gamma), \partial_t \mathbf{u}_N^\diamond \rangle(t).
\end{aligned}$$

En notant que $\|\mathbf{u} \star \varphi\|_\infty \leq \|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} \|\varphi\|_2$ et en utilisant (3.31) – (3.32), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^3} |\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} \\
&\leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \|\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond\|_2(t) [\|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{H_{\mathbf{x}}^1}(t) + 1] \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + 1 \right].
\end{aligned}$$

Comme la suite $(\mathbf{u}_N^\diamond)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L_t^2(H_{\mathbf{x}}^1)$ par une constante de la forme $P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)$ et puisque ρ^\diamond est positive on obtient finalement, en intégrant en temps et en utilisant le fait que $\|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(0)\|_2 = \|\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega}\|_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond\|_2^2 &\leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \|\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond\|_2 (\|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{L_t^2(H_{\mathbf{x}}^1)} + T) \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + 1 \right] + \frac{1}{2} \|\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega}\|_2^2 \\
&\leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \|\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond\|_2 \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + 1 \right] + P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire par l'inégalité de Young que la suite $(\partial_t \mathbf{u}_N^\diamond)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L_{t, \mathbf{x}}^2$ par une constante de la forme

$$P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + 1 \right].$$

On a donc finalement les estimations suivantes sur la suite $(\mathbf{u}_N^\diamond)_{N \in \mathbb{N}}$

$$\|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + \|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{L_t^2(H_{\mathbf{x}}^1)} \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu), \tag{3.41}$$

$$\|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{H_t^1(L_{\mathbf{x}}^2)} \leq P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \left[\|\mathbf{u}\|_{L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)} + 1 \right]. \tag{3.42}$$

On extrait alors une sous-suite convergeant faiblement dans l'espace de Hilbert $H^1_{t,\mathbf{x}}$. Le lemme suivant démontré dans l'annexe B.2.1 donne alors la convergence forte (à une sous-suite près) dans $\mathcal{C}^0_t(L^2_{\mathbf{x}})$.

Lemme : *L'injection $H^1([0, T] \times \mathbb{T}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ est compacte.*

On note \mathbf{u}^\diamond cette limite présente dans tous les espaces cités. L'équation étant linéaire on obtient que \mathbf{u}^\diamond est une solution faible de l'équation (3.28) (avec fonctions tests dans $L^2_t(H^1_{\mathbf{x}})$). En effet, si $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1_t(H_p)$, les formulations variationnelles (intégrées en temps) valides pour $N \geq p$ passent à la limite pour \mathbf{u}^\diamond ; il suffit ensuite de constater que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^1_t(H_p)$ est dense dans $L^2_t(H^1_{\mathbf{x}})$ pour obtenir la formulation faible suivante : pour tout $\mathbf{v} \in L^2_t(H^1_{\mathbf{x}})$ à divergence nulle

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right\} (t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dt \\ & = 2 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma) - \mathbf{u}^\diamond m_0(f^\diamond \gamma) \right\} \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned}$$

En particulier, si $\mathbf{v} \in H^1_{\mathbf{x}}$ est une fonction à divergence nulle indépendante du temps, on voit que pour toute fonction $\psi \in L^2_t$ à valeurs réelles on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \psi(t) \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right\} (t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} dt \\ & = 2 \int_0^T \psi(t) \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma) - \mathbf{u}^\diamond m_0(f^\diamond \gamma) \right\} (t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\} dt, \end{aligned}$$

si bien qu'on a, pour toute fonction $\mathbf{v} \in H^1_{\mathbf{x}}$, presque sûrement en $t \in [0, T]$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond \cdot \mathbf{v} \right] + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right\} (t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & = 2 \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma) - \mathbf{u}^\diamond m_0(f^\diamond \gamma) \right\} (t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La condition initiale $\mathbf{u}^\diamond(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ est vérifiée au sens de $\mathcal{C}^0_t(L^2_{\mathbf{x}})$ puisqu'on a convergence forte de $(\mathbf{u}^\diamond_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dans cet espace.

3.4.3 Estimations

Les estimations (3.29) et (3.30) sont des conséquences directes de la construction de \mathbf{u}^\diamond comme limite d'une suite vérifiant les estimations (3.41) et (3.42). Mentionnons également qu'un passage à la limite dans (3.39) fournit, pour presque tout $t \in [0, T]$, l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right\} + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \, ds \\ & \leq -\frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 m_0(f^\diamond \gamma)(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ & \quad + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^\diamond(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \nu(\mathbf{x})) |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right\}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

en effet la convergence faible dans $L_t^2(H_x^1)$ nous donne, pour tout $t \in [0, T]$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} ds \leq \varliminf_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_N^\diamond(s, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} ds,$$

et tous les autres termes de l'égalité (3.39) sont convergents. On a également le lemme suivant

Lemme 3.4.2. *Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\diamond, \rho^\diamond) \in \mathcal{C}_t^0(L_x^2) \cap H_{t,\mathbf{x}}^1 \times \mathcal{C}_t^0(L_x^2) \times \mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^1$, \mathbf{u} et \mathbf{u}^\diamond étant de plus supposées à divergence nulle. On fixe $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \in \mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^0 \times \mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^0 \times L_{t,\mathbf{x}}^2$. On suppose que les équations suivantes sont vérifiées (respectivement initialisées par $\nu \in \mathcal{C}_x^1$ et $\omega \in H_p$)*

$$\partial_t \rho^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho^\diamond = \mathbf{F}, \quad (3.44)$$

$$\mathbb{P} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{u}^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond \right] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond = \mathbb{P} \left[\mathbf{G} \mathbf{u}^\diamond + \mathbf{H} \right], \quad (3.45)$$

la première au sens fort, la deuxième au sens des fonctions tests dans $L_t^2(H_x^1)$. Alors \mathbf{u}^\diamond est, en norme $L_t^\infty(L_x^2)$, dans la boule de rayon

$$\sqrt{\left[\|(1 + \nu)|\omega|^2\|_1 + \|\mathbf{H}\|_2^2 \right] \exp \left\{ T \left[\|\mathbf{F}\|_\infty + 2\|\mathbf{G}\|_\infty + 1 \right] \right\}}.$$

Preuve :

Les calculs effectués précédemment permettent d'aboutir à l'estimation annoncée. En effet en multipliant la première équation (3.44) par $\frac{1}{2}|\mathbf{u}^\diamond|^2$ et en prenant la fonction test admissible \mathbf{u}^\diamond dans l'équation (3.45), des calculs tout à fait similaires à ceux réalisés pour \mathbf{u}_N^\diamond conduisent à

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \frac{1}{2} \partial_t \rho^\diamond(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 + (1 + \rho^\diamond) \partial_t \mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x}) + |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 \right\} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 + \mathbf{G}(t, \mathbf{x}) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 + \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On a donc après intégration en temps

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \nu(\mathbf{x})) |\mathbf{u}^\diamond(0, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{F} + 2\mathbf{G}| |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(t, \mathbf{x})| d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui implique finalement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho^\diamond(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \|(1 + \nu)|\omega|^2\|_1 + \|\mathbf{H}\|_2^2 \\ &+ \left[\|\mathbf{F}\|_\infty + 2\|\mathbf{G}\|_\infty + 1 \right] \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^\diamond(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

si bien que le lemme de Grönwall permet de conclure. ■

3.4.4 Unicité de \mathbf{u}^\diamond

L'unicité de \mathbf{u}^\diamond (\mathbf{u} et ρ^\diamond étant donnés) est une conséquence immédiate du lemme précédent puisque si d'aventure il existait une autre solution \mathbf{w}^\diamond (même condition initiale), en soustrayant les deux équations on voit que $\mathbf{v}^\diamond := \mathbf{u}^\diamond - \mathbf{w}^\diamond$ vérifie précisément l'équation du lemme, avec $\mathbf{H} = 0$ ainsi qu'une condition initiale nulle.

3.4.5 L'application S possède un point fixe

Étant donné un triplet $(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \in \mathbb{H}_p \times \mathcal{C}_{\mathbf{x}, \xi}^1 \cap \mathbb{L}_{\mathbf{x}, \xi}^\infty \times \mathcal{C}_{\mathbf{x}}^1$, la section précédente permet de définir sans ambiguïté l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : \mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2) &\longrightarrow \mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2) \\ \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{u}^\diamond. \end{aligned}$$

Pour obtenir une solution au couplage il suffit de montrer que l'application obtenue possède un point fixe. On va pour cela faire appel au théorème de Schauder dont on rappelle l'énoncé ici

Théorème :

Soit E un espace de Banach et B un convexe fermé non vide de E. Toute application continue de B dans lui-même et d'image relativement compacte possède un point fixe.

L'espace de Banach que nous allons considérer est naturellement $\mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)$. Le lemme de la sous-section 3.4.3 implique

$$\|\mathbb{S}(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}_t^\infty(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)} \leq \sqrt{\left[(1 + \|\nu\|_\infty) \|\boldsymbol{\omega}\|_2^2 + \|2\mathbf{m}_1(f^\diamond \gamma)\|_2^2 \right] \exp \left\{ T \left[\|m_0(f^\diamond \gamma)\|_\infty + 4\|m_0(f^\diamond \gamma)\|_\infty + 1 \right] \right\}},$$

ce qui avec l'estimation (3.31) donne finalement

$$\|\mathbb{S}(\mathbf{u})\|_{\mathbb{L}_t^\infty(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)} \leq \sqrt{P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu) \exp\{P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)\}} := R_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu),$$

ce qui suggère de considérer comme convexe fermé la boule fermée de $\mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)$ de centre 0 et de rayon $R_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)$, puisque S est à valeurs dans celle-ci. On note $B_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu)$ cette boule.

Continuité de S

On considère une suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_t^0(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)$ convergeant vers un élément \mathbf{u} de cet espace. On note $(\mathbf{u}_n^\diamond, f_n^\diamond, \rho_n^\diamond)$ et $(\mathbf{u}^\diamond, f^\diamond, \rho^\diamond)$ les triplets de solutions respectivement associés à \mathbf{u}_n et \mathbf{u} . En soustrayant l'équation fluide indexée par n à l'équation fluide associée à \mathbf{u} et en notant $\mathbf{v}_n^\diamond := \mathbf{u}^\diamond - \mathbf{u}_n^\diamond$, $g_n^\diamond := f^\diamond - f_n^\diamond$, $\theta_n^\diamond := \rho^\diamond - \rho_n^\diamond$ on aboutit à

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ (1 + \rho^\diamond) \left[\partial_t \mathbf{v}_n^\diamond + (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n^\diamond \right] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n^\diamond = \mathbb{P} \left\{ 2\mathbf{m}_1(g_n^\diamond \gamma) - 2\mathbf{v}_n^\diamond m_0(f^\diamond \gamma) \right. \\ \left. - \theta_n^\diamond \partial_t \mathbf{u}_n^\diamond - \theta_n^\diamond (\mathbf{u}_n \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond \right. \\ \left. - (1 + \rho^\diamond) ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond \right. \\ \left. - 2m_0(g_n^\diamond \gamma) \mathbf{u}_n^\diamond \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

On note que \mathbf{v}_n^\diamond est initialement nulle. L'équation (3.46) associée à l'équation portant sur ρ^\diamond et au lemme 3.4.2 donne

$$\|\mathbf{v}_n^\diamond\|_{\mathbb{L}_t^\infty(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}^2)}^2 \leq \|\mathbf{H}_n\|_2^2 \exp \left\{ T \left[\|\mathbf{F}\|_\infty + 2\|\mathbf{G}\|_\infty + 1 \right] \right\},$$

où ici

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &:= m_0(f^\diamond \gamma), \\ \mathbf{G} &:= -2m_0(f^\diamond \gamma), \\ \mathbf{H}_n &:= 2\mathbf{m}_1(g_n^\diamond \gamma) - \theta_n^\diamond \partial_t \mathbf{u}_n^\diamond - \theta_n^\diamond (\mathbf{u}_n \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond \\ &\quad - (1 + \rho^\diamond) ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \star \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond - 2m_0(g_n^\diamond \gamma) \mathbf{u}_n^\diamond. \end{aligned}$$

L'estimation (3.31) permet de voir que l'exponentielle précédente est bornée par une constante de la forme $\exp(P_T(\boldsymbol{\omega}, h, \nu))$. On a par ailleurs, en reprenant termes à termes l'expression définissant \mathbf{H}_n (la troncature

en vitesse γ justifie le contrôle uniforme sur ρ^\diamond)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_n\|_2 &\leq C_\gamma \|g_n^\diamond\|_2 + \|\theta_n^\diamond\|_\infty \|\partial_t \mathbf{u}_n^\diamond\|_2 + \|\theta_n^\diamond\|_\infty \|\mathbf{u}_n\|_{L_t^\infty(L_x^2)} \|\varphi\|_2 \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond\|_2 \\ &\quad + \|1 + \rho^\diamond\|_\infty \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_{L_t^\infty(L_x^2)} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_n^\diamond\|_2 + C_\gamma \|g_n^\diamond\|_\infty \|\mathbf{u}_n^\diamond\|_2. \end{aligned}$$

La suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée dans $L_t^\infty(L_x^2)$, par une constante notée K . En vertu de (3.29) et (3.30), on en déduit une borne pour $(\mathbf{u}_n^\diamond)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L_t^\infty(L_x^2) \cap \mathbf{H}_{t,\mathbf{x}}^1$, par une constante de la forme $(K+1)P_T(\omega, h, \nu)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_n\|_2 &\leq C_\gamma \|g_n^\diamond\|_2 + (K+1)P_T(\omega, h, \nu) \left[\|\theta_n^\diamond\|_\infty + \|\theta_n^\diamond\|_\infty K \|\varphi\|_2 \right] \\ &\quad + \|1 + \rho^\diamond\|_\infty P_T(\omega, h, \nu) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_{L_t^\infty(L_x^2)} + C_\gamma P_T(\omega, h, \nu) \|g_n^\diamond\|_\infty. \end{aligned}$$

Mais d'après la section 3.4.1, $(g_n^\diamond)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_n^\diamond)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers 0 (uniformément en toutes leurs variables), puisque on a la convergence $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u}$ dans $L_t^\infty(L_x^2)$. Ceci permet d'obtenir la convergence de $(\mathbf{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 dans $L_{t,\mathbf{x}}^2$, et donc la continuité de S .

Compacité de S

Tout réside dans les estimations (3.29) et (3.30) : une partie bornée de $\mathcal{C}_t^0(L_x^2)$ est envoyée sur une partie bornée de $\mathbf{H}_{t,\mathbf{x}}^1$, espace qui s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}_t^0(L_x^2)$ d'après le lemme de l'annexe B.2.1.

3.5 Élimination des perturbations : $\varepsilon \rightarrow 0$

La section précédente nous assure que pour $T > 0$, $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}_t^0(L_x^2) \cap \mathbf{H}_{t,\mathbf{x}}^1$, $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_{t,\mathbf{x},\xi}^1$ et $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^1$ solutions du système

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, & (3.47) \\ \partial_t \rho_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_\varepsilon = m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon), & (3.48) \\ \partial_t f_\varepsilon + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) f_\varepsilon] = -f_\varepsilon, & (3.49) \\ \mathbb{P} \left\{ (1 + \rho_\varepsilon) \left[\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon \right] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = 2\mathbb{P} \left\{ \mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) - \mathbf{u}_\varepsilon m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) \right\}, & (3.50) \end{cases}$$

les équations (3.48) – (3.49) étant vérifiées au sens fort, et l'équation (3.50) au sens faible, avec des fonctions test dans $L_t^2(\mathbf{H}_{\mathbf{x}}^1)$. Les jeux de conditions initiales considérés incluent en particulier le cas des conditions initiales régularisées suivantes

$$f_\varepsilon(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) (\phi_\varepsilon \star_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} f_{\text{in}})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.51)$$

$$\rho_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}) := (\varphi_\varepsilon \star \rho_{\text{in}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (3.53)$$

où $\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon$ est la projection de \mathbf{u}_{in} sur $\mathbf{H}_{p_\varepsilon}$ avec $p_\varepsilon = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$ et $\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$. On peut noter en particulier que le support de $f_{\text{in}}^\varepsilon$ étant compact, il en est de même de celui de f^ε (support transporté par le flot caractéristique associé à un champ de la forme $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{a} - \boldsymbol{\xi})$ avec $\mathbf{a} \in L_t^\infty(L_x^\infty)$).

Dans toute la suite P_T^{in} désignera de manière générale une fonction scalaire positive s'écrivant sous la forme d'une puissance entière positive de la quantité : $(1 + \frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + \|f_{\text{in}}\|_\infty + \frac{1}{2} M_2(f_{\text{in}}))$ à une constante multiplicative près dépendant éventuellement du temps T . P_T^{in} pourra changer d'une ligne à l'autre mais vérifiera toujours les propriétés que l'on vient de citer. Notons que cette fois-ci P_T^{in} sera toujours une constante indépendante de ε . Par contre, la constante P_T^{in} dépendra fortement de la dimension considérée ; on y inclura par exemple des constantes provenant de l'injection de Sobolev $\mathbf{H}^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^3)$ pour $p \leq 6$.

Commençons d'abord par présenter un lemme qui nous permettra de contrôler les différents moments de f .

3.5.1 Lemme de contrôle des moments

Lemme 3.5.1. *Soit $\gamma > 0$ et h un élément de $L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, tels que $m_\gamma h(t, \mathbf{x}) < +\infty$, presque partout en temps et en espace. On a alors l'estimation suivante, pour tout $\alpha < \gamma$, presque partout en temps et en espace :*

$$m_\alpha h(t, \mathbf{x}) \leq \left(\frac{4}{3} \pi \|h(t, \mathbf{x}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_\gamma h(t, \mathbf{x})^{\frac{\alpha+3}{\gamma+3}}.$$

Preuve :

Pour tout $R > 0$, on a

$$\begin{aligned} m_\alpha h(t, \mathbf{x}) &= \int_{|\xi| \leq R} |\xi|^\alpha h(t, \mathbf{x}, \xi) d\xi + \int_{|\xi| > R} |\xi|^{\alpha-\gamma} |\xi|^\gamma h(t, \mathbf{x}, \xi) d\xi \\ &\leq \frac{4}{3} \pi \|h(t, \mathbf{x}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} R^{\alpha+3} + \frac{1}{R^{\gamma-\alpha}} m_\gamma h(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

En écartant le cas trivial où h est nulle presque sûrement en vitesse et en posant $R = m_\gamma h(t, \mathbf{x})^{\frac{1}{\gamma+3}}$, on obtient l'estimation annoncée. ■

3.5.2 Estimations uniforme en ε

– Grâce à la formule des caractéristiques, on a

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_\infty &\leq \|f_{\text{in}}\|_\infty e^{2T} \\ &\leq P_T^{\text{in}}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

– Du point précédent on déduit grâce au lemme 3.5.1 que

$$\|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{5/3} \leq P_T^{\text{in}} M_2 f_\varepsilon(t)^{3/5}, \tag{3.55}$$

$$\|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(t)\|_{5/4} \leq P_T^{\text{in}} M_2 f_\varepsilon(t)^{4/5}. \tag{3.56}$$

– f_ε est régulière, à support compact, et vérifie l'équation (3.49) au sens fort, si bien que

$$\frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon + 3M_2 f_\varepsilon = 2 \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \mathbf{m}_1(f_\varepsilon) d\mathbf{x}, \tag{3.57}$$

et donc grâce aux contrôles précédents

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_2 f_\varepsilon + 3M_2 f_\varepsilon &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_5 \overbrace{\|\varphi_\varepsilon\|_1}^{=1} \|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(t)\|_{5/4} \\ &\leq P_T^{\text{in}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_5 M_2 f_\varepsilon(t)^{4/5}, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} (M_2 f_\varepsilon)^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5} (M_2 f_\varepsilon)^{\frac{1}{5}} \leq P_T^{\text{in}} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_5.$$

Le lemme de Grönwall appliqué à $t \mapsto M_2 f_\varepsilon(t)^{1/5}$ donne alors que

$$M_2 f_\varepsilon(t) \leq \left\{ M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_5 ds \right\}^5.$$

On a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon = \varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon = M_2 f_{\text{in}} < \infty$, on en déduit que $M_2 f_{\text{in}}^\varepsilon \leq P_T^{\text{in}}$. Par injection de Sobolev il a finalement

$$M_2 f_\varepsilon(t) \leq P_T^{\text{in}} \left\{ 1 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds \right\}^5. \quad (3.58)$$

– En associant (3.58) à (3.55) – (3.56) il obtient

$$\|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{5/3} \leq P_T^{\text{in}} \left\{ 1 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds \right\}^3, \quad (3.59)$$

$$\|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(t)\|_{5/4} \leq P_T^{\text{in}} \left\{ 1 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 ds \right\}^4. \quad (3.60)$$

– On peut appliquer l'inégalité (3.43) avec $\nu := \rho_{\text{in}}^\varepsilon$, $\boldsymbol{\omega} := \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_\varepsilon(t, \mathbf{x})) |\mathbf{u}_\varepsilon(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\} + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} ds \\ & \leq -\frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon(s, \mathbf{x})|^2 m_0(f_\varepsilon \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\ & \quad + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_\varepsilon(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x})) |\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\}, \end{aligned}$$

et donc en particulier

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds & \leq \frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_1 ds \\ & \leq \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + 2 \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_1 ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection continue $H_{\mathbf{x}}^1 \hookrightarrow L_{\mathbf{x}}^5$, il obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds & \leq P_T^{\text{in}} + 2 \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_5 \|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_{5/4} ds \\ & \leq P_T^{\text{in}} + C_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 \|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_{5/4} ds + C_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2 \|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_{5/4} ds, \end{aligned}$$

si bien qu'avec l'inégalité de Young on obtient une estimation de la forme

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds \leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{m}_1 f_\varepsilon(s)\|_{5/4}^2 ds.$$

Utilisons (3.60), pour voir que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds & \leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ 1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2 d\sigma + \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2 d\sigma \right\}^8 ds \\ & \leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma + \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds \\ & \leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds \\ & \leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^8 d\sigma \right\} ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $(a+b)^4 \lesssim (a^4 + b^4)$. Finalement on a que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds &\leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^8 ds + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds \\ &\leq P_T^{\text{in}} + P_T^{\text{in}} \int_0^t \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 + \int_0^s \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right\}^4 ds, \end{aligned}$$

puisqu'on a également $a^4 + b^4 \lesssim (a+b)^4$. Le lemme de Grönwall surlinéaire B.1.3 permet donc d'aboutir à l'existence d'un temps $t_\star > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, t_\star]$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_2^2 ds \leq P_T^{\text{in}} \exp(P_T^{\text{in}}) = K_T.$$

On déduit de cette estimation locale que (toutes les bornes qui interviennent ci-dessous sont de la forme $K_T = P_T^{\text{in}} \exp(P_T^{\text{in}})$) :

- $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, t_\star]; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, t_\star]; \mathbf{H}^1(\mathbb{T}^3))$.
- En utilisant (3.58), on voit que $(M_2 f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, t_\star])$.
- Grâce à (3.55) et (3.56), on en déduit que $(m_0 f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{m}_1 f_\varepsilon)_\varepsilon$ sont respectivement bornées dans $L^\infty([0, t_\star], L^{5/3}(\mathbb{T}^3))$ et $L^\infty([0, t_\star], L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$.
- Enfin, en multipliant (3.48) par $\rho_\varepsilon^{2/3}$ et en utilisant l'estimation précédente sur $(m_0(f_\varepsilon))_\varepsilon$, on obtient que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, t_\star]; L^{5/3}(\mathbb{T}^3))$.
- De (3.58) on déduit qu'on a également pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, t_\star]$

$$M_2 f_\varepsilon(t) \leq K_T. \tag{3.61}$$

Remarque 3.5.1. *Le lemme de Grönwall surlinéaire B.1.3 nous indique que le temps d'existence locale t_\star est une fonction décroissante de la quantité P_T^{in} . Rappelons que P_T^{in} est prise de la forme*

$$P_T^{\text{in}} = C(T) \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + \frac{1}{2} M_2(f_{\text{in}}) + \|f_{\text{in}}\|_\infty + 1 \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

dans toutes les estimations précédentes (ceci est possible car toutes les quantités entre les parenthèses sont positives). Cette forme de P_T^{in} et la décroissance de t_\star seront utilisées pour le prolongement de la solution sur un intervalle de temps quelconque.

3.5.3 Compacité en ε

- Soit ρ la limite à une extraction près de $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $L^\infty([0, t_\star]; L^{5/3}(\mathbb{T}^3))$ faible- \star .
- Soit f la limite à une extraction près de $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $L^\infty([0, t_\star]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$ faible- \star .
- La fonction de troncature étant choisie de sorte que $|1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})| \leq \mathbf{1}_{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}| \geq 1}$, on a

$$\|m_0(f_\varepsilon)(t) - m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon)(t)\|_1 \leq \varepsilon^2 M_2 f_\varepsilon(t),$$

qui tend uniformément vers 0 sur $[0, t_\star]$ puisque $(M_2 f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, t_\star])$. Cette estimation, associée à la borne obtenue sur $(m_0 f_\varepsilon)_\varepsilon$ nous assure qu'à une extraction près, on peut supposer que $(m_0 f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon))_\varepsilon$ sont toutes les deux convergentes dans $L^\infty([0, t_\star]; L^{5/3}(\mathbb{T}^3))$ faible- \star , vers une même limite, dont on va maintenant s'assurer qu'il s'agit de $m_0 f$. En effet,

$$m_0(f - f_\varepsilon) = m_0((f - f_\varepsilon)\gamma_\varepsilon) + m_0((f - f_\varepsilon)(1 - \gamma_\varepsilon)),$$

et on montre comme précédemment que le deuxième terme du membre de droite tend fortement vers 0 avec η , uniformément en ε , dans $L^\infty([0, t_\star]; L^1(\mathbb{T}^3))$, tandis que le premier converge vers 0 dans $\mathcal{D}'([0, t_\star] \times \mathbb{T}^3)$ avec ε , à η fixé, puisque $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ tend vers f dans $L^\infty([0, t_\star]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

– De manière tout à fait similaire, on montre qu'à une extraction près $(\mathbf{m}_1 f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon))_\varepsilon$ sont toutes les deux convergentes dans $L^\infty([0, t_\star]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$ faible- \star vers $\mathbf{m}_1 f$. La seule différence avec ce qui précède étant qu'on obtient un contrôle $O(\varepsilon)$ au lieu du contrôle quadratique ci-dessus.

– $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ étant bornée dans et $L^\infty([0, t_\star]; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, t_\star]; H^1(\mathbb{T}^3))$, il existe \mathbf{u} tel que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2([0, t_\star]; H^1(\mathbb{T}^3)) \text{ faible,} \\ (\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2([0, t_\star]; L^6(\mathbb{T}^3)) \text{ faible,} \\ (\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty([0, t_\star]; L^2(\mathbb{T}^3)) \text{ faible} - \star, \end{aligned}$$

et il est clair que $(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ converge également vers \mathbf{u} pour les mêmes topologies.

3.5.4 Vérification du système limite

On vérifie dans ce paragraphe que le triplet (f, ρ, \mathbf{u}) est bien solution du système limite. Précisons que les estimations de la sous-section précédente n'ont été établies que sur un intervalle local $[0, t_\star]$. Pour alléger la lecture de ce qui suit, on conserve la notation " $L_t^p(\mathbb{E})$ " utilisée jusqu'à présent, mais il faut garder à l'esprit que l'indice t renvoie ici à l'intervalle $[0, t_\star]$.

Les termes linéaires ne posent pas de problème, on va donc se concentrer sur les non linéarités.

Rappelons que le triplet $(f_\varepsilon, \rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ est solution du système

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \tag{3.62}$$

$$\partial_t f_\varepsilon + \operatorname{div}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}}(\mathbf{a}_\varepsilon f_\varepsilon) - 2f_\varepsilon = 0, \tag{3.63}$$

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)) = m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon), \tag{3.64}$$

$$\mathbb{P} \left\{ \partial_t [(1 + \rho_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [(1 + \rho_\varepsilon)(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \mathbf{u}_\varepsilon] \right\} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbb{P} \left\{ 2\mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) - \mathbf{u}_\varepsilon m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon) \right\}, \tag{3.65}$$

où $\mathbf{a}_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := (\boldsymbol{\xi}, [\mathbf{u}_\varepsilon(t) \star \varphi_\varepsilon](\mathbf{x}))$.

L'équation (3.65) est le résultat de la combinaison $\mathbb{P}\{\mathbf{u}_\varepsilon \times (3.48)\} + (3.50)$. On va expliciter dans ce qui suit les passages à la limite dans les différents termes non-linéaires de ce système, en utilisant principalement la proposition de l'annexe B.3.1, dont on rappelle ici l'énoncé

Proposition : Soient $q \in [1, \infty]$ et $p \in [1, 3[$. Soit $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions de $L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p})$ et $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions de $L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'})$, avec $s < p^\star := \frac{3p}{3-p}$. On suppose qu'on a les convergences

$$(a_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a, \quad \text{dans } L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p}) - w\star,$$

$$(b_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} b, \quad \text{dans } L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'}) - w\star.$$

Si la suite $(\partial_t b_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L_t^{q'}(H_{\mathbf{x}}^{-m})$ pour un certain entier $m \in \mathbb{Z}$, alors on a la convergence

$$(a_\varepsilon b_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} ab,$$

au sens des mesures, *i.e.* contre des fonctions tests appartenant à $\mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^0$.

On a alors successivement

- Les produits $(\rho_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon))_\varepsilon$ et $(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ tendent tous les deux vers $\rho \mathbf{u}$ au sens des mesures.

En utilisant la proposition B.3.1 de l'annexe, ces deux produits se traitent de la même manière : le terme de vitesse (convolué ou non) joue le rôle de la suite $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $L_t^2(W_{\mathbf{x}}^{1,2})$, et $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ le rôle de $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^{5/3})$ ($(5/3)' = 5/2 < 2^* = 6$). D'après l'équation (3.64), $(\partial_t \rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L_t^2(W_{\mathbf{x}}^{-1,30/23}) \hookrightarrow L_t^2(H_{\mathbf{x}}^{-m})$, avec m suffisamment grand pour que $H_{\mathbf{x}}^m \hookrightarrow W_{\mathbf{x}}^{1,30/7}$ (puis renverser l'injection par dualité). La proposition s'applique :

$$\begin{aligned} (\rho_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon))_\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho \mathbf{u}, & \text{dans } \mathcal{M}_s([0, T] \times \mathbb{T}^3) - \mathbf{w}\star, \\ (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho \mathbf{u}, & \text{dans } \mathcal{M}_s([0, T] \times \mathbb{T}^3) - \mathbf{w}\star, \end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathcal{M}_s([0, T] \times \mathbb{T}^3) = \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^3)'$ l'espace des mesures signées sur $[0, T] \times \mathbb{T}^3$. Remarquons que, puisque les deux produits $(\rho_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon))_\varepsilon$ et $(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ sont bornés dans $L_t^2(L_{\mathbf{x}}^{30/23})$, la convergence précédente a également lieu (quitte à extraire une nouvelle fois) pour la topologie faible de ce dernier espace (par unicité de la limite faible et densité des fonctions continues dans les espaces L^p , $p < \infty$).

- $\langle (\rho_\varepsilon + 1)\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon \rangle_{L_{t,\mathbf{x}}^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle (\rho + 1)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{L_{t,\mathbf{x}}^2}$.

Autrement dit, on souhaite établir la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (\rho_\varepsilon + 1) |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (\rho + 1) |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} dt. \quad (3.66)$$

On écrit d'abord

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (\rho_\varepsilon + 1) |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x} dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (\rho_\varepsilon + 1) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x} dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} \mathbb{P}[(\rho_\varepsilon + 1)\mathbf{u}_\varepsilon] \cdot \mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Ensuite, on peut prouver que le projecteur de Leray est continu de $L^p(\mathbb{T}^3)$ dans lui-même pour tout $1 < p < \infty$ (voir [30] par exemple pour le lien avec la transformée de Riesz). On en déduit que \mathbb{P} induit un opérateur continu de $L_t^q(L_{\mathbf{x}}^p)$ dans lui-même pour tout $q \in [1, \infty]$ et $p \in]1, \infty[$. La continuité forte d'un opérateur impliquant sa continuité séquentielle pour les topologies faibles, on a en particulier que \mathbb{P} est continu de $L_t^2(L_{\mathbf{x}}^{30/23})$ dans lui-même, pour la topologie faible. Ainsi, en vertu du paragraphe précédent, on a la convergence $L_t^2(L_{\mathbf{x}}^{30/23})$ faible de $\left(\mathbb{P}[(\rho_\varepsilon + 1)\mathbf{u}_\varepsilon] \right)_\varepsilon$ vers $\mathbb{P}[(\rho + 1)\mathbf{u}]$. Il faut cette fois-ci utiliser la variante de la proposition de la section B.3.1, dans le cas où $q = 2$ et $r = \infty$

- $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est contrôlée dans $L_t^2(W_{\mathbf{x}}^{1,2}) \cap L_t^\infty(L_{\mathbf{x}}^2)$,
- d'après l'équation (3.65), en remarquant que la dérivation en temps commute avec \mathbb{P} , on contrôle $\left(\partial_t \mathbb{P}[(\rho_\varepsilon + 1)\mathbf{u}_\varepsilon] \right)_\varepsilon$ au moins dans $L_t^1(W_{\mathbf{x}}^{-1,15/14} + W_{\mathbf{x}}^{-1,2} + L_{\mathbf{x}}^{30/23} + L_{\mathbf{x}}^{5/4})$ qui s'injecte dans un $L_t^1(H_{\mathbf{x}}^{-m})$ pour un m assez grand,
- $(30/23)' = 30/7 < 2^* = 6$.

Ainsi le produit $\left\{ \mathbb{P}[(\rho_\varepsilon + 1)\mathbf{u}_\varepsilon] \cdot \mathbf{u}_\varepsilon \right\}_\varepsilon$ converge bien vers $\mathbb{P}[(\rho + 1)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{u}$ au sens des mesures, et donc en particulier face à la fonction constante égale à 1, d'où la convergence (3.66).

- En fait $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent fortement vers \mathbf{u} dans $L_{t,\mathbf{x}}^2$.

En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}|^2 dx dt &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_\varepsilon) |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}|^2 dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_\varepsilon) |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_\varepsilon) |\mathbf{u}|^2 dx dt \\ &\quad - 2 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} (1 + \rho_\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{u} dx dt. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tend vers la même expression, sans ε : c'est précisément la convergence (3.66). Le phénomène est analogue pour le deuxième terme : $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ converge faible- \star dans $L_t^\infty(L_x^{5/3})$ vers ρ et $|\mathbf{u}|^2 \in L_t^1(L_x^3)$. Enfin, pour le troisième terme, on utilise la convergence faible- \star déjà établie du produit $[(1 + \rho_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon]_\varepsilon$ vers $(1 + \rho)\mathbf{u}$, dans $L_t^2(L_x^{30/23})$ faible et l'appartenance $\mathbf{u} \in L_t^2(L_x^6)$. Une fois acquise la convergence forte de $L_t^2(L_x^2)$ de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$, la convergence de $(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ est immédiate.

- $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge (à une extraction près) fortement dans tous les $L_t^c(L_x^d)$, pour $c < 2$ et $d < 6$.

D'après le point précédent, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout, on associe alors cette convergence avec la borne $L_t^2(L_x^6)$ déjà obtenue.

- $(f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon))_\varepsilon$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon))_\varepsilon$ convergent au sens des distributions vers $f\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} m_0(f)$.

$(f_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers f dans $L_t^\infty(L_{x,\xi}^\infty)$ faible- \star , ce qui s'associe à la convergence forte de $(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $L_t^2(L_x^2)$ pour donner la convergence distributionnelle du produit. De même $(m_0(f_\varepsilon \gamma_\varepsilon))_\varepsilon$ converge vers $m_0 f$ dans $L_t^\infty(L_x^{5/3})$ faible- \star et le point précédent assure par exemple que $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge fortement dans $L_t^1(L_x^{5/2})$.

- $[(1 + \rho_\varepsilon)(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \mathbf{u}_\varepsilon]_\varepsilon$ converge au sens des distributions vers $(1 + \rho)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$.

C'est encore un produit faible-fort. Remarquons d'abord que

$$\frac{2}{11} = \frac{\theta}{6} + \frac{1 - \theta}{2},$$

avec $\theta = 21/22$. On a donc classiquement $L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(L_x^6) \hookrightarrow L_t^{2/\theta}(L_x^{11/2})$. Ainsi $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ sont toutes les deux bornées dans $L_t^{2/\theta}(L_x^{11/2}) \hookrightarrow L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(L_x^6)$, et le produit $[(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \mathbf{u}_\varepsilon]_\varepsilon$ (dont on a déjà montré qu'il convergerait presque partout vers $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$) est finalement borné dans $L_t^{1/\theta}(L_x^{11/4})$. Puisque $\theta < 1$ et $11/4 > 5/2$, on a convergence forte de ce produit vers $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ dans $L_t^1(L_x^{5/2})$ et on sait que $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers ρ dans $L_t^\infty(L_x^{5/3})$ faible- \star .

3.5.5 Continuité en temps

On montre dans cette section que les grandeurs ρ , u et f solutions du système (3.1) – (3.4) sont continues en temps à valeurs dans des espaces $H^{-q}(\mathbb{T}^3)$, $H^{-r}(\mathbb{T}^3)$, et $H^{-s}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ respectivement pour des valeurs de q , r et s assez grandes.

Soit ψ une fonction de x indépendante du temps. Ecrivons la formulation variationnelle de l'équation pour ρ intégrée entre t_1 et t_2

$$\langle \rho(t_1), \psi \rangle - \langle \rho(t_2), \psi \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla_x \psi dx ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \psi dx d\xi ds.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} (\rho \mathbf{u}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi \, dx \, ds \right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\rho \mathbf{u}\|_{L^{\frac{30}{23}}(\mathbb{T}^3)} \, ds \|\nabla_{\mathbf{x}} \psi\|_{L^{\frac{30}{7}}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \|\rho \mathbf{u}\|_{L_t^2(L^{\frac{30}{23}}(\mathbb{T}^3))} \|\psi\|_{W^{1, \frac{30}{7}}(\mathbb{T}^3)}, \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \psi \, dx \, d\xi \, ds \right| \leq |t_2 - t_1| \|m_0 f\|_{L_t^\infty(L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{T}^3))} \|\psi\|_{L^{\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^3)}.$$

Il s'en suit que ρ est dans $\mathcal{C}_t^0(W^{-1, 30/23}(\mathbb{T}^3)) \subset \mathcal{C}_t^0(H^{-q}(\mathbb{T}^3))$, pour q assez grand. La démarche est similaire pour \mathbf{u} et f .

3.5.6 Existence locale

On a donc démontré dans ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 3.5.1. *Il existe un temps $t_* > 0$, tel que le système S_2 formé des équations (3.1) – (3.4) et des conditions initiales (3.13) – (3.16) admet au moins une solution (ρ, f, \mathbf{u}) faible au sens de $\mathcal{D}'([0, t_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et tel que*

$$\rho \in L^\infty([0, t_*], L^{5/3}(\mathbb{T}^3)),$$

$$f \in L^\infty([0, t_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

et $\mathbf{u} \in L^2([0, t_*], H_{div}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, t_*], L^2(\mathbb{T}^3))$. Les quantités ρ , \mathbf{u} et f sont aussi continues en temps à valeur dans des espaces $H^{-q}(\mathbb{T}^3)$, $H^{-r}(\mathbb{T}^3)$, et $H^{-s}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ respectivement pour des valeurs de q , r et s assez grandes.

3.5.7 Estimation de l'énergie

On souhaite montrer dans cette section l'estimation dans la proposition suivante :

Proposition 3.5.2. *La solution construite dans la section précédente vérifie pour $t \in [0, t_*]$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \, ds + \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \xi|^2 f \, d\xi \, dx \, ds \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{in} + \|\sqrt{1 + \rho_{in}} \mathbf{u}_{in}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Preuve: On part de l'estimation (3.43) pour les solutions du problème régularisé qu'on somme avec

l'intégrale en temps de (3.57) $\times \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \frac{3}{2} \int_0^t M_2 f_\varepsilon(s) ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} \\ - \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon(s, \mathbf{x})|^2 m_0(f_\varepsilon \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\ + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}_\varepsilon(s, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}_1(f_\varepsilon \gamma)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \mathbf{m}_1(f_\varepsilon) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qu'on réécrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ + \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + R_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 (1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds}_{R_\varepsilon^1(t)} + 2 \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon (\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) - 1) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds}_{R_\varepsilon^2(t)} \\ + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds}_{R_\varepsilon^3(t)}. \end{aligned}$$

Lemme 3.5.2. Le reste R_ε tend uniformément vers 0 sur $[0, t_\star]$.

Preuve: On va démontrer cela successivement pour chacun des R_ε^i , $i = 1, 2, 3$.

En notant $h_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}))$, on a :

$$R_\varepsilon^1(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 m_0(h_\varepsilon)(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} ds.$$

Comme précédemment, on applique le lemme 3.5.1 ($\alpha = \gamma - 3/2 = 0$, $\|h_\varepsilon\|_\infty \leq \|f_\varepsilon\|_\infty$), pour obtenir

$$|m_0 h_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq C_{f_{\text{in}}} m_{3/2} h_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{2/3},$$

et

$$\|m_0 h_\varepsilon(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} \leq C_{f_{\text{in}}} M_{3/2} h_\varepsilon(t)^{2/3}.$$

Par hypothèse on a $|1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})| \leq \mathbf{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon}$, si bien que

$$\begin{aligned} M_{3/2} h_\varepsilon(t) &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} h_\varepsilon d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} f_\varepsilon |1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^{3/2} f_\varepsilon \mathbf{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \sqrt{2\varepsilon} M_2 f_\varepsilon(t) \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon} K_T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé la borne (3.61). Au final, $M_{3/2}h_\varepsilon$ tend uniformément vers 0 sur l'intervalle considéré, et il en est de même de $\|m_0h_\varepsilon(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)}$. On termine par l'inégalité de Hölder

$$|R_\varepsilon^1(t)| \leq \|m_0h_\varepsilon\|_{\infty,3/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,6},$$

qui tend bel et bien vers 0 car (\mathbf{u}_ε) est bornée dans $L^2([0, t_*]; \mathbf{H}^1(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^1([0, t_*]; L^6(\mathbb{T}^3))$. Pour R_ε^2 c'est sensiblement le même raisonnement. On a

$$|R_\varepsilon^2(t)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| m_1 h_\varepsilon(s, \mathbf{x}) dx ds.$$

On invoque encore une fois le lemme 3.5.1 ($\alpha = 1$, $\gamma = 9/5$, $\|h_\varepsilon\| \leq \|f_\varepsilon\|$), pour obtenir :

$$m_1 h_\varepsilon(t, \mathbf{x}) \leq C_{f_{\text{in}}} m_{9/5} h_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{5/6}$$

et donc

$$\|m_1 h_\varepsilon(t)\|_{L^{6/5}(\mathbb{T}^3)} \leq C_{f_{\text{in}}} M_{9/5} h_\varepsilon(t)^{5/6},$$

et, toujours grâce à la borne (3.61) on a

$$\begin{aligned} M_{9/5} h_\varepsilon(t)^{5/6} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (1 - \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})) |\boldsymbol{\xi}|^{9/5} dx d\boldsymbol{\xi} \leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\boldsymbol{\xi}|^{9/5} \mathbb{1}_{|\boldsymbol{\xi}| \geq 1/2\varepsilon} d\boldsymbol{\xi} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon |\boldsymbol{\xi}|^2 (2\varepsilon)^{1/5} d\boldsymbol{\xi} dx \\ &= 2^{1/5} \varepsilon^{1/5} M_2 f_\varepsilon(t) \leq 2^{1/5} \varepsilon^{1/5} K_T \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc au final on a bien

$$|R_\varepsilon^2(t)| \leq \|m_1 h_\varepsilon\|_{\infty,6/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,6} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

comme précédemment.

Pour traiter R_ε^3 montrons d'abord le lemme suivant

Lemme 3.5.3. Si une famille de champs de vecteurs $(\mathbf{v}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers 0 dans $L^1([0, t_*] \times \mathbb{T}^3)$ quand ε tend vers 0 et est bornée dans $L^1([0, t_*]; L^6(\mathbb{T}^3))$, alors

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

uniformément sur $[0, t_*]$.

Soit $\delta > 0$. Pour tous $0 < \varepsilon, \eta < 1$ on a

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds = \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\boldsymbol{\xi})) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds}^{A_\varepsilon^\eta(t)} + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \gamma_\eta(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} dx ds}^{B_\varepsilon^\eta(t)}.$$

Un calcul similaire à celui effectué pour R_ε^2 fournit

$$|A_\varepsilon^\eta(t)| \leq C_{f_{\text{in}}} \eta^{1/5} K_T \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,6} \leq \eta^{1/5} C_{f_{\text{in}}} K_T \sup_{\varepsilon \in]0,1[} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,6} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

uniformément en ε et t .

Par ailleurs

$$|B_\varepsilon^\eta(t)| \leq \frac{4}{3} \pi \frac{1}{\eta^4} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} e^{2t\star} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,1},$$

qui, à η fixé, tend bien vers 0, uniformément en t .

Il suffit donc de se fixer η tel que $|A_\varepsilon^\eta(t)| \leq \delta$, indépendamment de ε et t , puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| \leq \delta.$$

Puisque $\delta > 0$ est arbitraire, ceci conclut la preuve du lemme 3.5.3. \square

On revient finalement à

$$R_\varepsilon^3(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds,$$

en découpant

$$\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon = \underbrace{(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon}_{\mathbf{v}_\varepsilon^1} + \underbrace{\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}}_{\mathbf{v}_\varepsilon^2} + \underbrace{\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon}_{\mathbf{v}_\varepsilon^3}.$$

Vérifions que les hypothèses du lemme 3.5.3 sont vérifiées pour chaque \mathbf{v}_ε^i . Tout d'abord on a

$$\|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{L_{t,x}^1} \leq C \|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{L_{t,x}^2} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L_x^1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L_{t,x}^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{L_t^2(L_x^2)} &\leq C \|(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \star \varphi_\varepsilon\|_{L_t^2(H_x^1)} \leq \|\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon\|_{L_t^2(H_x^1)} + \|\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon\|_{L_t^2(H_x^1)} \\ &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_t^2(H_x^1)} + \|\mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)} \\ &\leq K_T + \|\mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 3.5.3 pour le bout avec \mathbf{v}_ε^1 . Ensuite on a $\mathbf{v}_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ et $\mathbf{v}_\varepsilon^3 \rightarrow 0$ dans $L_{t,x}^1$ et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \star \varphi_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)} &\leq 2\|\mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)}, \\ \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)} &\leq K_T + \|\mathbf{u}\|_{L_t^2(H_x^1)}, \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant encore le lemme 3.5.3, achève la démonstration du lemme 3.5.2. \square

Revenons à la démonstration de l'inégalité d'énergie (3.67) et rappelons que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_\varepsilon(t) + \|\sqrt{1 + \rho_\varepsilon(t)} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} &+ \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + R_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Et on vient de démontrer dans le lemme 3.5.2 la convergence uniforme de R_ε vers 0. L'estimation (3.67) peut alors être obtenue en majorant chacun des termes suivants

$$\int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds, \quad (3.68)$$

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} M_2 f_\varepsilon(t), \quad (3.69)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}|^2 f_\varepsilon d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds, \quad (3.70)$$

puis en faisant tendre ε vers 0 dans le terme qui reste en utilisant la convergence (3.66)

$$\|\sqrt{1 + \rho_\varepsilon(t)} \mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2.$$

Pour (3.68) on a utilisé la convergence de \mathbf{u}_ε dans $L^2([0, t_\star] \times \mathbb{T}^3)$ combinée à la convergence faible dans $L^2([0, t_\star]; H^1(\mathbb{T}^3))$ et à l'inégalité classique liée à la convergence faible. Pour (3.69), on a la convergence $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ dans $L^\infty([0, t_\star]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$. Et Pour $\eta \in]0, 1[$ un réel fixé, on constate que

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta](t) \leq M_2 f_\varepsilon(t) \leq K_T,$$

où $\gamma_\eta(\boldsymbol{\xi})$ est la fonction de troncature en vitesse introduite précédemment. On a, à une extraction diagonale près en ε , pour tout η

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g_\eta$$

dans $L^\infty([0, t_\star]) - \star$ et donc

$$\|g_\eta\|_{L^\infty([0, t_\star])} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta]\|_{L^\infty([0, t_\star])} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon]\|_{L^\infty([0, t_\star])}.$$

Or la convergence faible $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ dans $L^\infty([0, t_\star]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) - \star$ implique également que (pour tout η)

$$M_2[f_\varepsilon \gamma_\eta] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_2[f \gamma_\eta]$$

dans $L^\infty([0, t_\star]) - \star$, car le produit d'une fonction $\varphi \in L^1([0, t_\star])$ par $|\boldsymbol{\xi}|^2 \gamma_\eta$ est un élément de $L^1([0, t_\star] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Par unicité de la limite faible, on obtient donc

$$M_2[f \gamma_\eta] = g_\eta(t).$$

Mais alors, d'après le lemme de Fatou (tout est positif), pour tout $t \in [0, t_\star]$, on a

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} M_2[f \gamma_\eta](t) = \liminf_{\eta \rightarrow 0} g_\eta(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|M_2[f_\varepsilon]\|_{L^\infty([0, t_\star])},$$

et on a l'inégalité voulue.

Enfin, il reste à prouver (3.70) pour laquelle on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}|^2 f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} f d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Pour le premier terme du membre de droite, on a

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon d\xi dx ds = \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta) d\xi dx ds}^{\boxed{\text{A}}} + \overbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds}^{\boxed{\text{B}}}.$$

A η fixé, $\boxed{\text{B}}$ tend vers $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds$, par convergence $L^\infty([0, t_\star] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \rightarrow \star$. D'où (Fatou) :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f d\xi dx ds &\leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds = \lim_{\eta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 f_\varepsilon d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite de (3.71) est contrôlé à l'aide du lemme de Fatou et l'inégalité (3.69) précédemment obtenue.

Il reste alors le troisième terme, pour lequel on montre que c'est la limite quand ε tend vers 0 de la quantité

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u}_\varepsilon f_\varepsilon d\xi dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) f_\varepsilon d\xi dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\xi)) d\xi dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 d'après le lemme 3.5.3, et le dernier terme tend vers $\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds$ par convergence faible $\rightarrow \star$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u}_\varepsilon f_\varepsilon d\xi dx ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\xi)) d\xi dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f \gamma_\eta(\xi) d\xi dx ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u}_\varepsilon f_\varepsilon d\xi dx ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f d\xi dx ds \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f_\varepsilon (1 - \gamma_\eta(\xi)) d\xi dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \xi \cdot \mathbf{u} f (\gamma_\eta(\xi) - 1) d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Or par un calcul analogue à celui fait pour le terme A_ε^η au début de la preuve du lemme 3.5.3, les deux termes de droite peuvent être rendus aussi petits qu'on veut par un choix de η adéquat. Ce qui démontre l'inégalité (3.70). ■

3.5.8 Prolongement de la solution et existence globale

On démontre dans cette section qu'on peut prolonger la solution construite par la proposition 3.5.1 sur un intervalle $[0, T]$ quelconque. Soit (ρ, \mathbf{u}, f) la solution obtenue sur un temps local t_1 donné par le lemme de Grönwall non linéaire dans la démonstration : $t_1 = t_\star \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_2^2 + \frac{1}{2} M_2(f_{\text{in}}) + \|f_{\text{in}}\|_\infty \right)$. On a presque

partout en temps $\mathbf{u}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{T}^3)$, $\rho(t, \cdot) \in L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{T}^3)^2$, $f(t, \cdot, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, et également $M_2 f(t_1) < \infty$ et $\int_{\mathbb{T}^3} \rho(t_1) |\mathbf{u}_1(t, \cdot)|^2 < \infty$. Ainsi, quelque soit $\sigma > 0$, il existe $t_0 \in]t_1 - \sigma, t_1[$ tel que $(\rho(t_0, \cdot), \mathbf{u}(t_0, \cdot), f(t_0, \cdot, \cdot))$ sont des conditions initiales admissibles pour la proposition 3.5.1.

On peut donc construire grâce à la proposition 3.5.1 une solution qui démarre des données à l'instant t_0 et qui prolonge (ρ, \mathbf{u}, f) sur l'intervalle $[0, t_0 + t_2]$. Où le temps t_2 est le temps d'existence locale donné par la proposition 3.5.1. Ce processus peut alors être répété indéfiniment. D'autre part, d'après la remarque 3.5.1 le temps d'existence t_* dépend de manière décroissante de la quantité $\frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + \frac{1}{2} M_2(f_{\text{in}}) + \|f_{\text{in}}\|_\infty$. Et par l'inégalité (3.67) et l'estimation (3.54) on déduit alors que les temps de prolongement t_2, t_3, \dots sont minorés par $\bar{t} = t_* \left(\frac{1}{2} \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}^\varepsilon} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_2^2 + \frac{1}{2} M_2(f_{\text{in}}) + \|f_{\text{in}}\|_\infty e^{2T} \right)$. Ainsi il suffit de choisir $\sigma < \frac{\bar{t}}{2}$ à chaque prolongement pour pouvoir atteindre un intervalle d'existence de solution $[0, T]$ quelconque. ■

On a alors démontré le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *Pour tout $T > 0$, le système S_2 formé des équations (3.1) – (3.4) et des conditions initiales (3.13) – (3.16) admet au moins une solution (ρ, f, \mathbf{u}) faible au sens de $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et telle que*

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty([0, T], L^{5/3}(\mathbb{T}^3)), \\ f &\in L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

et $\mathbf{u} \in L^2([0, T], H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^3))$. Les quantités ρ, \mathbf{u} et f sont aussi continues en temps à valeur dans des espaces $H^{-q}(\mathbb{T}^3)$, $H^{-r}(\mathbb{T}^3)$, et $H^{-s}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ respectivement pour des valeurs de q, r et s assez grandes. Le triplet (ρ, f, \mathbf{u}) vérifie l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + \|\sqrt{1 + \rho(t)} \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \frac{3}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 f d\xi dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + \|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

et la borne

$$\|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq e^{2T} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}.$$

2. La démonstration de la proposition 3.5.1 reste valable dans le cas $\rho_{\text{in}} \in L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{T}^3)$, du moment que $\|\sqrt{1 + \rho_{\text{in}}} \mathbf{u}_{\text{in}}\|_2^2 \leq \infty$.

Bibliographie

- [1] V. G. Lavergne. *Modélisation de l'écoulement multiphasique dans le propulseur à poudre P230 d'Ariane V*. Thèse de doctorat, ONERA-SUPAERO, 2004.
- [2] J. J. Hylkema. *Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (Toulouse), 1999.
- [3] G. Dufour. *Modélisation multi-fluide eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, 2005.
- [4] K. Domelovo. *Analyse Mathématiques et numérique d'une modélisation cinétique d'un brouillard de gouttelettes dans un écoulement gazeux turbulent*. Thèse de doctorat, École polytechnique, 1996.
- [5] A. Moussa. *Etude mathématique et numérique du transport des aérosols dans le poumon humain*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [6] B. Mauroy. *Hydrodynamique dans les poumons, relations entre flux et géométrie*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [7] Aude. Champmartin. *Modélisation et étude numérique d'écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [8] M. Massot and P. Villedieu. Modélisation multi-fluide eulérienne pour la simulation de brouillards denses polydispersés. *Note aux C.R.A.S. Paris, Serie I Math*, 332(9) :869–874, 2001.
- [9] A. Sainsaulieu. Contribution à la modélisation mathématique et numérique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, 1995.
- [10] P. J. O'Rourke. *collective drop effect on Vaporizing Liquid Sprays*. Phd thesis, Los Alamos National University, 1981.
- [11] F. Laurent. *Modélisation mathématique et numérique de la combustion de brouillards de gouttes polydispersés*. Thèse de doctorat, université Claude Bernard - Lyon 1, 2002.
- [12] C. Baranger. *Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions dans les fluides complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [13] A.A. Amsden, P.J. O'Rourke, and T.D. Butler. *Kiva-ii : A computer program for chemically reactive flows with sprays*. Technical report, Los Alamos National University, 1989.
- [14] Julien Mathiaud. *Etude de systèmes de type gaz-particules*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2007.
- [15] R. Clift, J.R. Grace, and M.E. Weber. *Bubbles, drops, and particles*. Academic Press, 1978.
- [16] É. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique. Savoirs actuels*. EDP Sciences, 2001.
- [17] J. J. Hylkema and P. Villedieu. Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. *Actes du 3ème colloque R&T sur les Ecoulements Internes en Propulsion Solide*, 2 :119–139, 1998.

- [18] Jose A. Carrillo and Thierry Goudon. Stability and asymptotic analysis of a fluid-particle interaction model. *COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, 31(9) :1349–1379, SEP 2006.
- [19] Mellet A and Vasseur A. Global weak solutions for a vlasov-fokker-planck/navier-stokes system of equations. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 17(7) :1039–1063, 2007. eng.
- [20] MELLET A. and VASSEUR A. Asymptotic analysis for a vlasov-fokker-planck/ compressible navier-stokes system of equations. *Communications in mathematical physics*, 281(3) :573–596, 2008. eng.
- [21] GOUDON Thierry, JABIN Pierre-Emmanuel, and VASSEUR Alexis. Hydrodynamic limit for the vlasov-navier-stokes equations. part i : Light particles regime. *Indiana University mathematics journal*, 53(6) :1495–1515, 2004. eng.
- [22] GOUDON Thierry, JABIN Pierre-Emmanuel, and VASSEUR Alexis. Hydrodynamic limit for the vlasov-navier-stokes equations. part ii : Fine particles regime. *Indiana University mathematics journal*, 53(6) :1517–1536, 2004. eng.
- [23] Laurent Boudin, Laurent Desvillettes, Céline Grandmont, and Ayman Moussa. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Differential and integral equations*, 22(11-12) :1247–1271, November 2009.
- [24] O. Anoshchenko and A. Boutet de Monvel-Berthier. The existence of the global generalized solution of the system of equations describing suspension motion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20(6) :495–519, 1997.
- [25] Céline Baranger and Laurent Desvillettes. Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays : the local-in-time, classical solutions. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(1) :1–26, 2006.
- [26] K. Hamdache. Global existence and large time behaviour of solutions for the vlasov-stokes equations. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 15 :51–74, 1998. 10.1007/BF03167396.
- [27] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [28] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Incompressible models*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Clarendon Press, 1996.
- [29] R. J. DiPerna and P. L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones Mathematica e*, 98 :511–547, 1989. 10.1007/BF01393835.
- [30] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.

Deuxième partie

Modèle de fuite d'un gaz en compression sous un piston

Chapitre 4

Introduction

Pour transporter le gaz naturel à partir des lieux de production aux lieux de consommation, le moyen le plus courant de nos jours est l'acheminement du gaz dans les gazoducs. Depuis les années soixante, une nouvelle technologie est apparue dans le domaine du transport du gaz naturel. Il s'agit du transport du gaz sous forme liquide, dans des navires dits "méthaniers". Cette technique continue de se développer et est de plus en plus utilisée. Le gaz naturel liquéfié (GNL) est obtenu en refroidissant le gaz à une température de -161 degrés Celsius à la pression atmosphérique. Le méthanier emmagasine le gaz liquéfié dans un réservoir adiabatique et étanche grâce à une membrane étudiée et développée spécialement pour cette application, qui forme les parois du réservoir. Les entreprises transporteurs de GNL ont alors pour rôle de concevoir ces méthaniers et en particulier les réservoirs qui doivent résister aux différentes sollicitations et efforts lors du transport. Si les parois du réservoir sont endommagées lors du transport, le contact du gaz, transporté à une température de -161 degrés Celsius, avec la coque en acier du navire la rendra très cassante. Ceci menacera la structure du méthanier et pourra causer le naufrage du cargo. D'autre part, en mélange avec l'air, le gaz qui fuit pourra également devenir explosif à la moindre étincelle.

La cuve du méthanier partiellement remplie en GNL est siège d'un écoulement biphase à surface libre et il y a un équilibre thermodynamique entre le GNL et le gaz évaporé remplissant le reste de la cuve. La source majeure de sollicitations sur les membranes qui forment les parois des cuves sont les vagues de liquide, créées par le ballotement du GNL dans la cuve. Ces vagues, lorsqu'elles viennent impacter les parois, créent des pics de pression à l'instant ou au voisinage du moment de l'impact. L'étude physique, expérimentale et numérique de ce phénomène a alors pour rôle de prévoir les valeurs de ces pics de pression en modélisant et en simulant la création de ces vagues lors du mouvement du navire et surtout en étudiant le comportement des valeurs des pics de pression selon les différents types d'impacts possibles.

L'entreprise GTT, concepteur de technologie pour les cuves de méthaniers, réalise des tests expérimentaux à une échelle 1 : 40 pour simuler le ballotement du GNL et l'impact des vagues de GNL sur les parois. Les enregistrements des pressions sur les parois permettent d'obtenir des statistiques sur les valeurs des pics de pression atteintes. La question qui se pose pour mener et exploiter ces études expérimentales est la mise à l'échelle des grandeurs physiques et des propriétés des fluides pour reproduire le plus fidèlement possible les conditions du transport du GNL. Pour l'écoulement global il suffit de mettre à l'échelle le temps et l'espace en conservant le nombre de Froude gouvernant l'écoulement à surface libre [1, 2, 3]. Cependant, quand on s'intéresse à l'impact des vagues sur les parois de la cuve, d'autres phénomènes physiques rentrent en jeu et le changement d'échelle doit prendre en compte ceux qui ont un rôle important dans la détermination des pics de pression sur le mur. Dans [1] Braeunig et al. listent six phénomènes physiques pouvant avoir lieu lors de l'impact :

- **P1** : Transmission de la quantité de mouvement de la vague liquide au gaz et fuite du gaz entre le front de la vague et le mur.
- **P2** : Compression du gaz à la dernière phase de l'impact. Le gaz est soit piégé par le fluide ou continue à fuir.
- **P3** : Une partie du gaz comprimé ou piégé se condense.

- **P4** : Echange de quantité de mouvement entre le liquide et le mur pendant l'impact.
- **P5** : Possibilité de création d'une onde de pression dans le liquide, et d'une onde de déformation dans le mur après l'impact.
- **P6** : Effet hydro-élastique de l'interaction fluide-structure durant l'impact.

Les nombres sans dimension à conserver lors de la mise à l'échelle dépendent des phénomènes physiques que l'on juge importants et qu'on pense gouverner les conditions d'impact et surtout la valeur du pic de pression. Plusieurs études se sont intéressées aux phénomènes **P1** à **P6** pour d'une part trouver les nombres sans dimension qui gouvernent ces phénomènes et d'autre part comprendre l'effet des paramètres sur la pression maximale atteinte au mur P_{\max} .

4.1 Modèle de Bagnold sans fuite

Dans [4], Bagnold introduit un modèle simple $0D$ permettant d'isoler et d'étudier le phénomène **P2** du piégeage du gaz par le liquide. Il s'agit du modèle du piston de Bagnold [4, 5] présenté dans la figure 4.1. L'étude de ce modèle montre alors que ce piégeage est responsable d'oscillations de la pression, et que la période et les pics de ces oscillations dépendent uniquement du nombre sans dimension S , dit nombre d'impact, donné par

$$S = \frac{2\rho_l Lg}{p_0} \quad \text{ou} \quad S = \frac{\rho_l L u_0^2}{p_0 x_0},$$

selon que l'on considère un piston initialement immobile avec gravité g ([6]), ou un piston avec vitesse initiale u_0 et en négligeant la gravité ([7])¹.

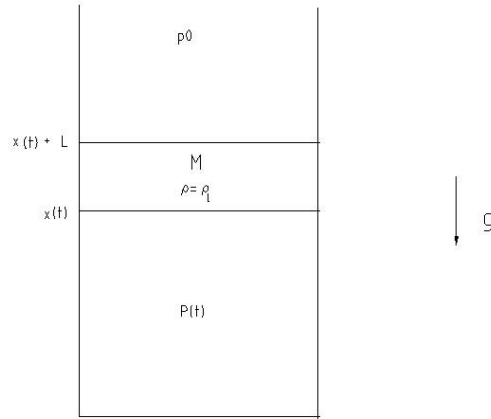


FIGURE 4.1 – Modèle de Bagnold 1D, cas avec pesanteur : $\rho_l L \frac{d^2 x}{dt^2} = P(\rho_0 \frac{x(t)}{x_0}) - p_0 - \rho_l Lg$.

Dans [2] Braeunig et al. complètent ce modèle de Bagnold pour y inclure le phénomène **P3** de condensation du gaz. Cette étude confirme les observations expérimentales que la condensation **P3** est responsable d'une atténuation rapide des oscillations et d'une chute du pic de pression. Il s'en suit que **P3** peut être négligé lors du changement d'échelle des données expérimentales puisqu'on cherche à estimer des bornes maximales de P_{\max} . Dans [1] Braeunig et al. considèrent un modèle EDP $2D$ prenant en compte les phénomènes **P1**, **P2** et **P4** et l'étudient à l'aide d'un code CFD (Computation Fluid Dynamics) adapté. En comparant les simulations numériques à deux échelles spatiales différentes, les auteurs trouvent les nombres sans dimension à conserver. L'avantage des modèles de type Bagnold $0D$, gouvernés par des équations différentielles ordinaires

1. On peut montrer que si on doit prendre en compte à la fois la gravité et une vitesse initiale, la solution du modèle de Bagnold dépend de deux nombres sans dimension : le nombre de Froude et le nombre d'impact $S = \frac{\rho_l L(u_0^2 + 2gx_0)}{p_0 x_0}$.

en temps uniquement et portant sur les moyennes en espace des quantités physiques, est qu'ils permettent une résolution très précise, sinon exacte des EDOs du problème. Les modèles EDP et codes CFD conduisent à des outils très lourds en terme de calculs inadaptés lorsque quand on veut mener des études paramétriques. Ainsi, on privilégie la construction de modèle de type Bagnold (dits petits modèles ou modèles $0D$) pour l'étude de ces phénomènes.

Le but de ce travail est de proposer un modèle de type Bagnold pour la première phase de l'impact **P1**.

4.2 Vers un modèle de Bagnold avec fuite

Pour proposer un modèle de Bagnold pour le problème du piston $2D$ dans la figure 4.2, on se heurte au problème de la fermeture des équations qui donnent l'évolution de la densité moyenne du gaz sous le piston. En effet, il est difficile de savoir analytiquement quelle quantité du gaz restera et se compressera sous le piston et quelle quantité quittera le domaine sous le piston à travers les interfaces Σ . Quantifier ce phénomène de fuite revient à donner un modèle pour l'évolution dans le temps du flux de matière à l'interface Σ en fonction des quantités macroscopiques du système, à savoir la vitesse du piston, sa hauteur et la densité (ou pression) moyenne sous le piston. Comme dans le cas du modèle de Bagnold 1D original, on s'intéresse aussi bien au cas d'un piston initialement immobile et avec gravité g , qu'au cas d'un piston avec vitesse initiale u_0 en négligeant la gravité.

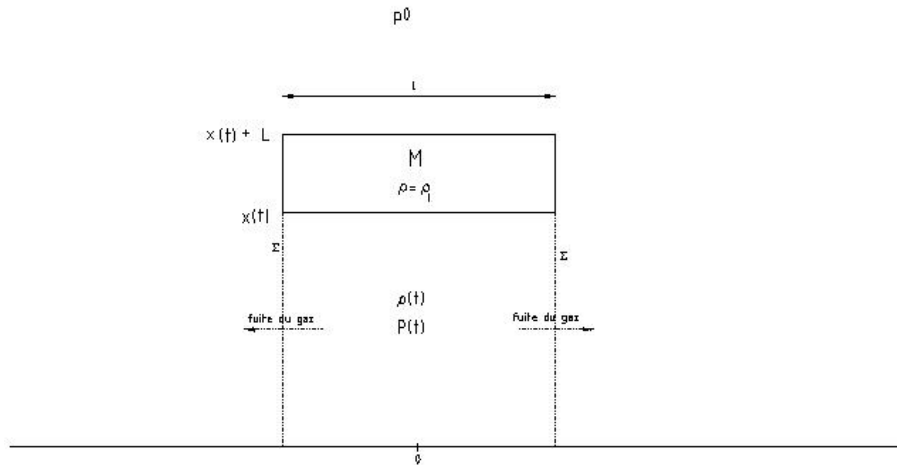


FIGURE 4.2 – Modèle de Bagnold 2D.

Il existe toutefois un cas où on peut exprimer analytiquement le flux de fuite du gaz. Il s'agit du cas où le gaz est supposé incompressible.

4.3 Fuite du gaz dans le cas incompressible

Pour alimenter le modèle de Bagnold présenté dans la section 4.2, on a besoin d'une formule de fermeture pour le débit moyen de fuite sur la face $\Sigma(t) = [0, x(t)] \times \{-\frac{l}{2}\}$:

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} \rho(t, x, -\frac{l}{2}) v(t, x, -\frac{l}{2}) dx,$$

en fonction de la densité moyenne sous le piston

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{l x(t)} \int_0^{x(t)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho(t, x, -\frac{l}{2}) dx dy,$$

de la vitesse $\dot{x}(t)$ et de la position $x(t)$ du piston. Dans le cas d'un gaz incompressible, l'obtention d'une telle formule est immédiate en écrivant le bilan de conservation de la masse sous le piston. En effet, en notant $\rho = \rho_0$ et en intégrant l'équation $\text{div} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$ sur le domaine mobile $[0, x(t)] \times [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, on obtient

$$-2 \int_0^{x(t)} v(t, x, -\frac{l}{2}) dx + \dot{x}(t) \cdot l = 0.$$

La vitesse moyenne de fuite le long de l'interface Σ est alors

$$\bar{v}_{incomp}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, -\frac{l}{2}) dx = \frac{l \dot{x}(t)}{2 x(t)}, \quad (4.1)$$

et le débit moyen est

$$\bar{q}_{incomp}(t) = \rho_0 \frac{l \dot{x}(t)}{2 x(t)}. \quad (4.2)$$

Dans le cas compressible, on ne peut pas, comme ici, écrire des formules explicites pour $\bar{v}(t)$ et $\bar{q}(t)$. Toutefois, on s'attend à retrouver (4.1) et (4.2) dans la limite d'un gaz faiblement compressible, c'est à dire quand la vitesse du son c dans le gaz tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on étudiera le cas d'un gaz faiblement compressible modélisé par un système d'EDPs présenté dans la section 5 qui suit. En réalisant une famille de simulations numériques de ce système, on donnera des formules pour l'évolution de la vitesse $\bar{v}(t)$ en la comparant à la vitesse du cas incompressible (4.1) à travers le nombre sans dimension

$$\lambda(t) = \frac{\bar{v}(t)}{\bar{v}_{incomp}(t)} = \frac{2 x(t)}{l \dot{x}(t)} \bar{v}(t).$$

Le cas du gaz incompressible correspond donc par construction au cas : $\lambda(t) = 1$.

On traitera dans la section 5 qui suit le cas d'un piston avec vitesse initiale et sans champ de gravité (cas appelé piston horizontal), ensuite et dans la section 6 on traitera le cas d'un piston initialement immobile avec une prise en compte de la gravité (piston vertical). La donnée de $\lambda(t)$ détermine l'évolution en temps du flux moyen du gaz qui fuit sous la masse M et complétera le modèle de Bagnold $2D$ de la figure 4.2 pour chacun des deux cas (horizontal et vertical). La section suivante

Chapitre 5

Modèle Euler 2D pour piston avec fuite : Cas horizontal

On considère un piston 2D formé par une masse rigide M de dimensions l et L , en mouvement dans le demi-espace $x > 0$. Au temps $t=0$, la masse est à une distance $x_0 > 0$ du mur en $x = 0$, et a une vitesse initiale $\dot{x}(t=0) = u_0$ négative (voir figure 5.1).

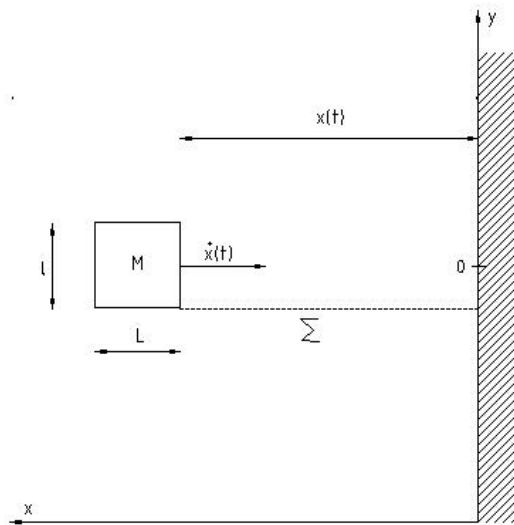


FIGURE 5.1 – Modèle pour piston 2D : Cas horizontal sans gravité.

La masse M est en mouvement dans un milieu gazeux. Les équations qui régissent la dynamique du gaz et de la masse sont données par le système suivant formé par un système d'Euler et une équation traduisant

le Principe Fondamental de la Dynamique sur la masse M ,

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_x(p) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_y(p) = 0, \\ \rho_l L \ddot{x} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \{p(t, x, y) - p(t, x + L, y)\} dy, \end{cases}$$

avec les notations suivantes :

- ρ la densité du gaz,
- u la vitesse horizontale du gaz,
- v sa vitesse verticale,
- p la pression du gaz donnée par une loi d'état $p = P(\rho)$,
- ρ_l la densité constante de la masse,
- l et L ses dimensions,
- $x(t)$ la distance de la masse au mur $x = 0$.

On s'est placé dans le cadre d'un écoulement continu sans propagation de choc et on a considéré un système Euler-isentropique, c'est à dire où l'équation de conservation de l'énergie du gaz est découplée des équations pour la dynamique.

On note \mathbf{n} la normale au bord. On impose des conditions aux limites de glissement $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} = 0$, aux interfaces de la masse et sur le bord $x = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned} u(t, x(t), y) = \dot{x}(t), & \quad u(t, x(t) + L, y) = \dot{x}(t), & \quad \text{pour } -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}, \\ v(t, x, -\frac{l}{2}) = 0, & \quad v(t, x, \frac{l}{2}) = 0, & \quad \text{pour } x(t) \leq x \leq x(t) + L, \\ u(t, 0, y) = 0. & & \end{aligned}$$

Les conditions initiales de l'état du gaz seront introduites ultérieurement quand on traitera la simulation du système.

5.1 Mise sous forme sans dimension des équations

On cherche la dépendance de la courbe $\lambda(t)$ en fonction des différents paramètres géométriques et physiques du système. Pour cela on doit d'abord procéder à la mise sous forme sans dimension du système pour exhiber les nombres sans dimension qui régissent la dynamique.

On introduit les grandeurs sans dimension suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{x_0}, \quad \xi(t) = \frac{x(t)}{x_0}, \\ \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{u_l}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \end{aligned}$$

avec le temps caractéristique

$$\tau = \frac{x_0}{u_0}.$$

On note P_0 la loi d'état reliant les grandeurs sans dimension \tilde{p} et $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{p} = P_0(\tilde{\rho}) = \frac{P(\rho_0 \tilde{\rho})}{\rho_0 c_0^2}.$$

Remarque 5.1.1. La mise sous forme sans dimension de la pression p se fait par le biais de la quantité ρc^2 appelée aussi module d'élasticité isostatique (bulk modulus) mesurant la résistance du gaz sous l'effet d'une compression uniforme. On donne deux exemples pour le calcul de P_0 pour deux types de loi d'état :
Cas d'une loi gaz parfait :

On a $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$ et $c_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, P_0 est alors donnée par

$$P_0(\tilde{\rho}) = \frac{\tilde{\rho}^\gamma}{\gamma}.$$

Cas d'une loi stiffened gas :

On a

$$P(\rho) = \frac{\gamma p_0 + \pi}{\gamma} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - \frac{\pi}{\gamma},$$

et

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0 + \pi}{\rho_0}.$$

Alors

$$P_0(\tilde{\rho}) = \frac{\tilde{\rho}^\gamma}{\gamma} + \frac{\rho_0 c_0^2 - \gamma p_0}{\gamma \rho_0 c_0^2}.$$

On remarque que dans les deux cas présentés ci-dessus, et vu que seul le gradient de P_0 apparait dans le système, on peut ne retenir de P_0 que la partie non constante $\frac{\tilde{\rho}^\gamma}{\gamma}$.

L'équation de conservation de la masse donne alors

$$\frac{\rho_0}{\tau} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \frac{\rho_0 u_0}{x_0} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0 u_0}{x_0} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0,$$

soit

$$\partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0.$$

L'équation de la quantité de mouvement selon e_x donne

$$\frac{\rho_0 u_0}{\tau} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{x_0} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}^2) + \frac{\rho_0 u_0^2}{x_0} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{\rho_0 c_0^2}{x_0} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = 0,$$

soit

$$\partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}^2) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 u_0^2} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = 0.$$

Le système vérifié par les nouvelles variables adimensionnées est

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0 \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u}^2) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{c_0^2}{u_0^2} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = 0 \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho} \tilde{v}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho} \tilde{v}^2) + \frac{c_0^2}{u_0^2} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{p}) = 0 \\ \tilde{p} = P_0(\tilde{\rho}) \\ \ddot{\xi} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0 u_0^2} \frac{x_0}{L} \frac{x_0}{l} \int_{-\frac{l}{2x_0}}^{\frac{l}{2x_0}} \left\{ \tilde{p}(\tilde{t}, \xi, \tilde{y}) - \tilde{p}(\tilde{t}, \xi + \frac{L}{x_0}, \tilde{y}) \right\} d\tilde{y}. \end{cases}$$

On introduit alors les nombres "géométriques" sans dimension $a = \frac{L}{x_0}$, $b = \frac{l}{x_0}$, et

$$\text{le nombre d'impact } S = L \frac{\rho_l u_0^2}{p_0 x_0},$$

$$\text{le rapport de densité gaz/masse } DR = \frac{\rho_0}{\rho_l},$$

et

$$\text{le module de compressibilité } \chi = \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2}.$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = 0, & (5.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}^2) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + a \frac{1}{DR.S.\chi} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = 0, & (5.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}^2) + a \frac{1}{DR.S.\chi} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{p}) = 0, & (5.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{p} = P_0(\tilde{\rho}), & (5.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \frac{1}{S.\chi} \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{ \tilde{p}(\tilde{t}, \xi, \tilde{y}) - \tilde{p}(\tilde{t}, \xi + a, \tilde{y}) \} d\tilde{y}. & (5.5) \end{cases}$$

Les conditions aux bords pour les variables adimensionnées sont

$$\tilde{u}(\tilde{t}, \xi(\tilde{t}), \tilde{y}) = \dot{\xi}(\tilde{t}), \quad \tilde{u}(\tilde{t}, \xi(\tilde{t}) + a, \tilde{y}) = \dot{\xi}(\tilde{t}), \quad \text{pour } -\frac{b}{2} \leq \tilde{y} \leq \frac{b}{2}, \quad (5.6)$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, -\frac{b}{2}) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, \frac{b}{2}) = 0, \quad \text{pour } \xi(\tilde{t}) \leq \tilde{x} \leq \xi(\tilde{t}) + a, \quad (5.7)$$

$$\tilde{u}(\tilde{t}, 0, \tilde{y}) = 0. \quad (5.8)$$

On remarque que, pour une géométrie fixée (a et b fixes), seuls les nombres sans dimension $L_f = S.\chi = \frac{\rho_l L u_0^2}{\rho_0 x_0 c_0^2}$ et DR apparaissent dans les équations. Il s'en suit que la fonction $\lambda(t)$ qu'on cherche à étudier ne dépend que de ces deux paramètres.

Proposition 5.1.1. *A géométrie fixée, la fonction $\lambda(t)$ ne dépend que de L_f et DR .*

5.2 Piston dans un domaine borné

Pour simuler le système précédent posé dans le demi plan $x > 0$, on se restreint à un domaine borné Ω , rectangulaire de dimension H et h . La position de la masse est centrée en $y = 0$ de sorte à garder la symétrie du problème (cf figure 5.2). Les bords extérieurs de Ω sont fixes, alors que les bords intérieurs formés par les interfaces avec la masse sont mobiles.

Des conditions aux limites doivent alors être fixées sur les nouveaux bord du domaine Ω . On choisit des conditions de type mur : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} . n = 0$, où n est la normale au bord. Le système complet à simuler devient :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, & (5.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho u v) + \partial_x(p) = 0, & (5.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho u v) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_y(p) = 0, & (5.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_l L \ddot{x} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \{ p(t, x, y) - p(t, x + L, y) \} dy, & (5.12) \end{cases}$$

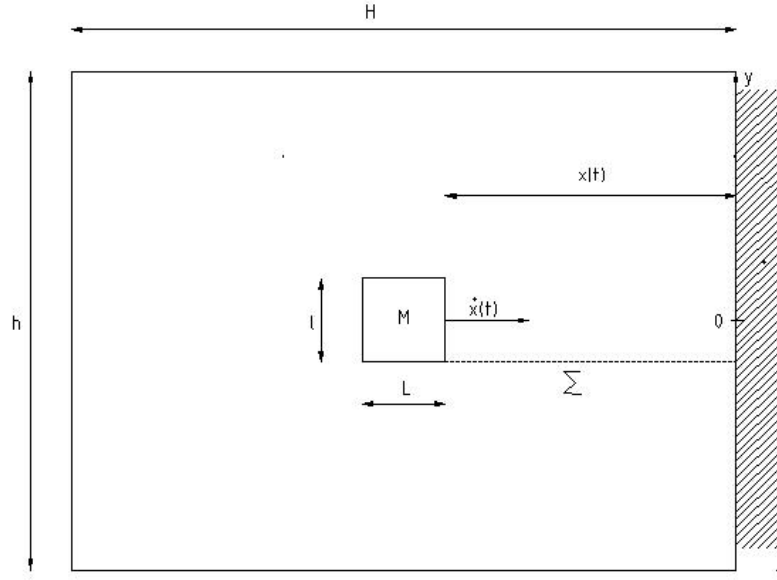


FIGURE 5.2 – Piston dans un domaine borné

$$u(t, x(t), y) = \dot{x}(t), \quad u(t, x(t) + L, y) = \dot{x}(t), \quad \text{pour } -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}, \quad (5.13)$$

$$v(t, x, -\frac{l}{2}) = 0, \quad v(t, x, \frac{l}{2}) = 0, \quad \text{pour } x(t) \leq x \leq x(t) + L, \quad (5.14)$$

$$u(t, 0, y) = 0, \quad u(t, H, y) = 0, \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}, \quad (5.15)$$

$$v(t, x, -\frac{h}{2}) = 0, \quad v(t, x, \frac{h}{2}) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq x \leq H. \quad (5.16)$$

Comme précédemment, on met sous forme sans dimension le système en introduisant les grandeurs définies ci-dessus

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}^2) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + a \frac{1}{DR.S.\chi} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}^2) + a \frac{1}{DR.S.\chi} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{p}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p} = P_0(\tilde{\rho}) \end{array} \right. \quad (5.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} = \frac{1}{S.\chi} \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{ \tilde{p}(\tilde{t}, \xi, \tilde{y}) - \tilde{p}(\tilde{t}, \xi + a, \tilde{y}) \} d\tilde{y}. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

$$\tilde{u}(\tilde{t}, \xi(\tilde{t}), \tilde{y}) = \dot{\xi}(\tilde{t}), \quad \tilde{u}(\tilde{t}, \xi(t) + a, \tilde{y}) = \dot{\xi}(\tilde{t}), \quad \text{pour } -\frac{b}{2} \leq \tilde{y} \leq \frac{b}{2}, \quad (5.22)$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, -\frac{b}{2}) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, \frac{b}{2}) = 0, \quad \text{pour } \xi(\tilde{t}) \leq \tilde{x} \leq \xi(\tilde{t}) + a, \quad (5.23)$$

$$\tilde{u}(\tilde{t}, 0, \tilde{y}) = 0, \quad \tilde{u}(\tilde{t}, e, \tilde{y}) = 0, \quad \text{pour } -\frac{d}{2} \leq \tilde{y} \leq \frac{d}{2}, \quad (5.24)$$

$$\tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, -\frac{d}{2}) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, \frac{d}{2}) = 0, \quad \text{pour } 0 \leq \tilde{x} \leq e. \quad (5.25)$$

avec les deux nombres géométriques sans dimensions supplémentaires

$$d = \frac{h}{x_0} \quad \text{et} \quad e = \frac{H}{x_0}.$$

Ainsi, les solutions du système (5.9) – (5.16) dépendant à priori des 9 paramètres physiques et géométriques

$$\rho_0, p_0, \rho_l, x_0, u_0, L, l, H \text{ et } h,$$

sont en fait fonction uniquement des 6 nombres sans dimension

$$L_f = S, \chi, DR, a, b, d, \text{ et } e.$$

Rappelons qu'on s'intéresse à la courbe $\lambda(t)$ définie par $\lambda(t) = \frac{\bar{v}(t)}{\bar{v}_{incomp}(t)} = \frac{2}{l} \frac{x(t)}{\dot{x}(t)} \bar{v}(t)$, et on cherche à exprimer cette courbe en fonction des six nombres sans dimension qui régissent le système. On suppose que λ est continue par rapport aux paramètres L_f et DR .

Le cas incompressible correspond au cas $\chi = 0$, c'est à dire $L_f = 0$. Et on a $\lambda(t) = 1$. Le cas sans fuite ($d = b$) (et donc $h = l$), correspond à un piston $1D$, avec $\lambda(t) = 0$.

5.3 Simulation numérique du système

5.3.1 Choix des conditions initiales pour la simulation

La masse M a une vitesse initiale u_0 . On initialise la vitesse du gaz de sorte qu'il n'y ait pas de propagation de choc à l'instant initial. Pour cela cette initialisation doit vérifier les conditions aux limites imposées par la vitesse u_0 de la masse. On prend alors pour vitesse $u(0, x, y)$ un profil linéaire par morceaux en x et indépendant de y . La figure 5.3 montre l'allure de la courbe $x \mapsto u(0, x, y)$ pour un y donné. La vitesse verticale v est initialisée à zéro. La densité initiale est une constante ρ_0 . Ces valeurs initiales satisfont les conditions aux limites aux bords intérieurs et extérieurs.

5.3.2 Rappel des formules du schéma VFFC avec maillage fixe

Pour se placer dans le cadre du formalisme d'un système de lois de conservation, on note

$$V = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix},$$

$$F(V) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{V_2^2}{V_1} + p(V_1) \\ \frac{V_2 V_3}{V_1} \end{pmatrix},$$

et

$$G(V) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 \\ \frac{V_2 V_3}{V_1} \\ \frac{V_3^2}{V_1} + p(V_1) \end{pmatrix},$$

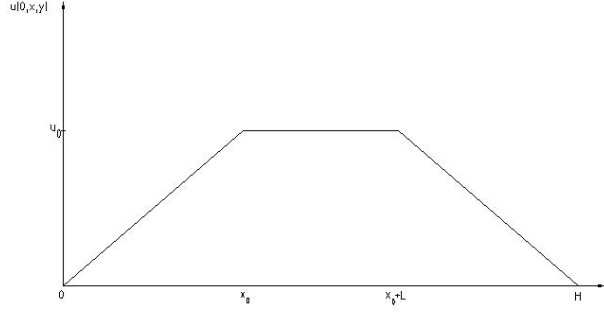


FIGURE 5.3 – Initialisation de la vitesse horizontale $u(0, ., y)$ du gaz.

où ρ est la densité du fluide, u et v les composantes de sa vitesse selon e_x et e_y respectivement, et p sa pression donnée par une loi d'état $p(\rho)$. On a alors un système de loi de conservation en 2D, sur un domaine cartésien Γ sous la forme suivante

$$\partial_t V + \partial_x F(V) + \partial_y G(V) = 0.$$

On veut résoudre le système précédent avec un schéma volumes finis sur un maillage cartésien du domaine Γ . On écrit le schéma volume fini en intégrant les équations sur une maille $K = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ avec $1 \leq i \leq N_x - 1$ et $1 \leq j \leq N_y - 1$:

$$\int_K \partial_t V + \int_K \partial_x F(V) + \int_K \partial_y G(V) = 0.$$

On note $(V_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}}$ la valeur moyenne de V dans la maille K , dx_i et dy_j étant les dimensions de cette maille. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V_{i,j}) + \frac{1}{dx_i dy_j} \left\{ \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i+1/2}, y)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}, y)) dy \right. \\ \left. + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G(V(t, x, y_{j+1/2})) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dx \right\} = 0. \end{aligned}$$

On note $F_{i-1/2,j} = \frac{1}{dy_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}, y)) dy$, pour $(1 \leq i \leq N_x$ et $1 \leq j \leq N_y - 1)$ et $G_{i,j-1/2} = \frac{1}{dx_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dx$ pour $(1 \leq i \leq N_x - 1$ et $1 \leq j \leq N_y)$. Le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V_{i,j}) + \frac{1}{dx_i} (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) \\ + \frac{1}{dy_j} (G_{j+1/2,i} - G_{j-1/2,i}) = 0, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq N_x - 1$, et $1 \leq j \leq N_y - 1$.

Un schéma volumes finis correspond à la donnée des formules approchées pour les flux moyens par interface $F_{i-1/2,j}$ et $G_{i,j-1/2}$ en fonction uniquement des valeurs moyennes par maille $V_{i,j}$. Le schéma discrétisé en

temps est

$$\begin{aligned} V_{i,j}(t + dt) = V_{i,j}(t) & - \frac{dt}{dx_i} (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) \\ & - \frac{dt}{dy_j} (G_{j+1/2,i} - G_{j-1/2,i}). \end{aligned}$$

On décrit dans la suite comment approcher les flux $F_{i+1/2,j}$ et $G_{j+1/2,i}$ dans le cadre du schéma VFFC. Soit $F_{ij} = F(V_{ij})$ et $G_{ij} = G(V_{ij})$ les valeurs des flux physiques F et G prises à l'état moyen dans la maille. Les formules des flux $(F_{i+1/2,j})_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 2 \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}}$ et $(G_{i,j+1/2})_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1 \\ 1 \leq j \leq N_y - 2}}$ du schéma VFFC sont données alors par

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j} &= \frac{F_{i,j} + F_{i+1,j}}{2} + \text{termes de décentrement}, \\ G_{i,j+1/2} &= \frac{G_{i,j} + G_{i,j+1}}{2} + \text{terme de décentrement}. \end{aligned}$$

Dans le cas du schéma VFFC, le décentrement se fait en utilisant le signe des matrices gradient des flux physiques

$$A_F = \nabla_V F(V),$$

et

$$A_G = \nabla_V G(V).$$

Dans le cas des équations d'Euler isentropique, ces matrices sont donnée par

$$A_F(V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - \frac{V_2^2}{V_1^2} & 2\frac{V_2}{V_1} & 0 \\ -\frac{V_2 V_3}{V_1^2} & \frac{V_3}{V_1} & \frac{V_2}{V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix},$$

et

$$A_G(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{V_2 V_3}{V_1^2} & \frac{V_2}{V_1} & \frac{V_3}{V_1} \\ c^2 - \frac{V_3^2}{V_1^2} & 0 & 2\frac{V_2}{V_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

Les formules des flux sont alors

$$F_{i+1/2,j} = \frac{F_{i,j} + F_{i+1,j}}{2} + \text{sign}(A_F(\mu_{i+\frac{1}{2},j})) \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{2},$$

et

$$G_{i,j+1/2} = \frac{G_{i,j} + G_{i,j+1}}{2} + \text{sign}(A_G(\mu_{i,j+\frac{1}{2}})) \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{2},$$

où $\mu_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\mu_{i,j+\frac{1}{2}}$ sont des états moyens pondérés par le volume des mailles

$$\mu_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{|K_{ij}|V_{ij} + |K_{i+1,j}|V_{i+1,j}}{|K_{ij}| + |K_{i+1,j}|},$$

$$\mu_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{|K_{ij}|V_{ij} + |K_{i,j+1}|V_{i,j+1}}{|K_{ij}| + |K_{i,j+1}|}.$$

On rappelle que le signe d'une matrice \mathbb{R} -diagonalisable A est la matrice définie par

$$\text{sign}(A) = L|\Lambda|R,$$

où Λ la matrice diagonale des valeurs propres, R la matrice des vecteurs colonnes propres à droite de la matrice A et L est la matrice des vecteurs lignes propres à gauche de la matrice A , avec la normalisation

$$L.R = I_d.$$

Dans le cas de la matrice A_F , on a les formules

$$\lambda_1^F = u - c, \quad \lambda_2^F = u, \quad \lambda_3^F = u + c,$$

$$R^F = (r_1^F \quad r_2^F \quad r_3^F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - c & 0 & u + c \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$L^F = \begin{pmatrix} l_1^F \\ l_2^F \\ l_3^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c+u}{2c} & \frac{-1}{2c} & 0 \\ -v & 0 & 1 \\ \frac{c-u}{2c} & \frac{1}{2c} & 0 \end{pmatrix}.$$

On dispose de formules similaires pour A_G

$$\lambda_1^G = v - c, \quad \lambda_2^G = v, \quad \lambda_3^G = v + c,$$

$$R^G = (r_1^G \quad r_2^G \quad r_3^G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u & 1 & u \\ v - c & 0 & v + c \end{pmatrix},$$

et

$$L^G = \begin{pmatrix} l_1^G \\ l_2^G \\ l_3^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c+v}{2c} & 0 & \frac{-1}{2c} \\ \frac{c-u}{2c} & 0 & \frac{1}{2c} \\ -u & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3.3 Schéma VFFC-ALE pour le problème du piston

Dans cette section, on présente un schéma numérique volumes finis adapté à la résolution numérique du système (5.9) – (5.16). On résout ce système en découplant les équations de la dynamique du gaz (Euler + condition aux limites), de l'équation du mouvement du piston (5.16). En d'autres termes, on résout le système d'Euler (5.9) – (5.11) et les conditions aux limites (5.13) – (5.16) avec une position x et une vitesse \dot{x} du piston fixées à un temps t^n , et on met ensuite à jour ces données à l'aide de l'équation pour le piston :

$$\rho_l L \ddot{x} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \{p^{n+1}(t, x, y) - p^{n+1}(t, x + L, y)\} dy.$$

Il s'agit donc d'une explicitation en x et \dot{x} .

La première étape de notre algorithme consiste à résoudre les équations d'Euler dans le domaine Ω occupé par le gaz, dont les bords intérieurs bougent suite au mouvement de la masse M . Le couplage avec le mouvement de la masse se fait via les conditions aux limites imposées par la vitesse de la masse. Sur les bords extérieurs, la vitesse du fluide est nulle dans la direction normale aux bords. Pour les bords intérieurs, la vitesse normale du fluide est égale à la vitesse de déplacement du bord dans la même direction. Comme précédemment, on note

$$V = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix},$$

$$F(V) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ \frac{V_2^2}{V_1} + p(V_1) \\ \frac{V_2 V_3}{V_1} \end{pmatrix},$$

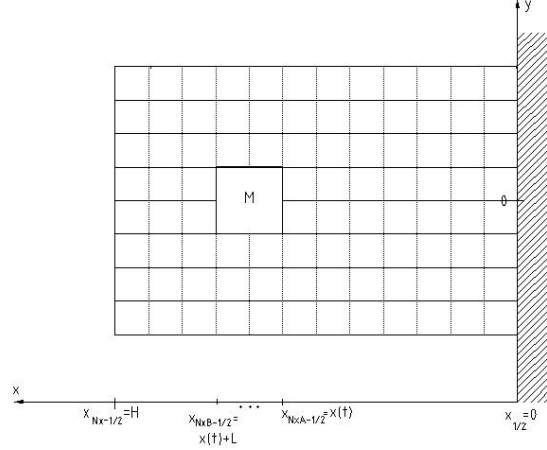


FIGURE 5.4 – Maillage mobile du domaine Ω occupé par le gaz.

et

$$G(V) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v w \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 \\ \frac{V_2 V_3}{V_1} \\ \frac{V_3^2}{V_1} + p(V_1) \end{pmatrix}.$$

On obtient un système de lois de conservation 2D sur le domaine occupé par le gaz de la forme

$$\partial_t V + \partial_x F(V) + \partial_y G(V) = 0,$$

avec les conditions aux limites définies précédemment : sur les bords extérieurs la vitesse du fluide est nulle dans la direction normale aux bords, et sur les bords intérieurs, la vitesse normale du fluide est égale à la vitesse de déplacement du bord dans la même direction.

On maille initialement le domaine Ω avec un maillage cartésien qui exclut la région occupée par la masse M (voir Figure 5.4). On note $NxA - \frac{1}{2}$ et $NxB - \frac{1}{2}$ les indices des noeuds en x qui délimitent la région de la masse, $NyA - \frac{1}{2}$ et $NyB - \frac{1}{2}$ les indices des noeuds en y qui délimitent la masse dans la direction y .

Les interfaces des mailles bougent dans la direction x pour suivre le mouvement de la masse M . On considère donc que chaque point $x_{i-\frac{1}{2}}$ a une vitesse $\omega_{i-\frac{1}{2}} = \dot{x}_{i-\frac{1}{2}}$. La vitesse des points $\{x_{i-\frac{1}{2}}, NxA \leq i \leq NxB\}$ est donnée par la vitesse de la masse $\omega = \dot{\xi}$. La vitesse des points sur les bords extérieurs $x_{\frac{1}{2}}$ et $x_{Nx-\frac{1}{2}}$ est nulle. Un exemple de l'état du maillage à un instant t est donné dans la figure 5.4. Dans les simulations numériques, on choisit la vitesse $\omega_{i-\frac{1}{2}}$ de sorte à avoir un maillage qui reste uniforme par morceau :

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = i \cdot \frac{\dot{\xi}}{NxA}$$

pour $1 \leq i \leq NxA - 1$,

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = \dot{\xi}$$

pour $NxA \leq i \leq NxB$, et

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = (Nx - i) \cdot \frac{\dot{\xi}}{Nx - NxB}$$

pour $NxB + 1 \leq i \leq Nx$.

Dans ce qui suit on suppose que cette vitesse ω est quelconque. On écrit le schéma volumes finis en intégrant les équations sur une maille mobile $K(t) = [x_{i-1/2}(t), x_{i+1/2}(t)] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$. En notant

$\omega_{i-1/2}(t)$ la vitesse de déplacement des noeux, et $dx_i(t)$ et dy_j les dimensions de la maille $K(t)$, on a

$$\int_{K(t)} \partial_t V + \int_{K(t)} \partial_x F(V) + \int_{K(t)} \partial_y G(V) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{K(t)} V &- \omega_{i+1/2}(t) \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i+1/2}(t), y) dy + \omega_{i-1/2}(t) \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i-1/2}(t), y) dy \\ &+ \left(\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i+1/2}(t), y)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}(t), y)) dy \right) \\ &+ \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j+1/2})) dx - \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

On note $(V_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1}$ la valeur moyenne de V dans la maille $K(t)$ et on discrétise en temps comme précédemment

$$\begin{aligned} \frac{|K(t+dt)|V_{i,j}(t+dt) - |K(t)|V_{i,j}(t)}{dt} &- \omega_{i+1/2}(t) \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i+1/2}(t), y) dy + \omega_{i-1/2}(t) \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i-1/2}(t), y) dy \\ &+ \left(\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i+1/2}(t), y)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}(t), y)) dy \right) \\ &+ \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j+1/2})) dx - \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Le schéma s'écrit alors

$$\begin{aligned} |K(t+dt)|V_{i,j}(t+dt) - |K(t)|V_{i,j}(t) &+ dt\omega_{i+1/2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i+1/2}(t), y) dy - dt\omega_{i-1/2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i-1/2}(t), y) dy \\ &- dt \left(\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i+1/2}(t), y)) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}(t), y)) dy \right) \\ &+ \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j+1/2})) dx - \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dx. \end{aligned}$$

On introduit les flux moyens sur les interfaces $F_{i-1/2,j} = \frac{1}{dy_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} F(V(t, x_{i-1/2}(t), y)) dy$ pour $(1 \leq i \leq N_x)$ et $(1 \leq j \leq N_y - 1)$, et $G_{i,j-1/2} = \frac{1}{dx_i(t)} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} G(V(t, x, y_{j-1/2})) dy$ pour $(1 \leq i \leq N_x - 1)$ et $(1 \leq j \leq N_y)$, ainsi que la nouvelle moyenne par interface

$$V_{i-1/2,j} = \frac{1}{dy_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} V(t, x_{i-1/2}(t), y) dy \quad (1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y - 1).$$

Alors

$$\begin{aligned} dx_i(t+dt) V_{i,j}(t+dt) &= dx_i(t) V_{i,j}(t) + dt(\omega_{i+1/2} V_{i+1/2,j} - \omega_{i-1/2} V_{i-1/2,j}) \\ &- dt(F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) \\ &- dt dx_i(t) \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{dy_j}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t+dt)}{dx_i(t)} V_{i,j}(t+dt) &= V_{i,j}(t) - dt \frac{[F_{i+1/2,j} - \omega_{i+1/2} V_{i+1/2,j}] - [F_{i-1/2,j} - \omega_{i-1/2} V_{i-1/2,j}]}{dx_i(t)} \\ &- dt \frac{G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}}{dy_j}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

La donnée d'un schéma revient à choisir des formules approchées pour les moyennes des flux F et G et l'état V sur les interfaces, en fonction des états moyens V_{ij} sur les mailles. Pour ce faire, on utilisera une généralisation du schéma VFFC au cas de notre maillage mobile, pour approcher les flux dans la discrétisation (5.29). Pour les flux selon e_y , les interfaces sont fixes et on utilise les mêmes formules que pour VFFC

$$G_{i,j+1/2} = \frac{G_{i,j} + G_{i,j+1}}{2} + \text{sign}(A_G(\mu_{i,j+\frac{1}{2}})) \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{2}.$$

Pour les flux selon e_x on choisit de prendre la même matrice de décentrement pour le flux F et le flux ωV , à savoir

$$F_{i+1/2,j} = \frac{F_{i,j} + F_{i+1,j}}{2} + \text{sign}(A_X(\mu_{i+\frac{1}{2},j}, \omega_{i+1/2})) \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{2}$$

et

$$V_{i+1/2,j} = \frac{V_{i,j} + V_{i+1,j}}{2} + \text{sign}(A_X(\mu_{i+\frac{1}{2},j}, \omega_{i+1/2})) \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{2},$$

où

$$A_X(V, \omega) = A_F(V) - \omega I_d.$$

Dans notre cas du système d'Euler, la matrice $A_X(V)$ est donnée par

$$A_X(V) = \begin{pmatrix} -\omega & 1 & 0 \\ c^2 - \frac{V_2^2}{V_1^2} & 2\frac{V_2}{V_1} - \omega & 0 \\ -\frac{V_2 V_3}{V_1^2} & \frac{V_3}{V_1} & \frac{V_2}{V_1} - \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u - \omega & 0 \\ -uv & v & u - \omega \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres à gauche et à droite sont les mêmes que pour la matrice A_F , avec

$$\lambda_1^X = u - \omega - c, \quad \lambda_2^X = u - \omega, \quad \lambda_3^X = u - \omega + c.$$

Le schéma Euler-ALE présenté ci-dessus est, par construction, un schéma conservatif. Les résultats numériques présentés dans ce travail ont été obtenus en utilisant ce schéma. On présentera dans la section 5.3.4 une analyse de stabilité linéaire de ce schéma dans le cas 1D et la condition CFL à respecter qui se déduit de cette analyse.

5.3.4 Stabilité linéaire du schéma VFFC-ALE en 1D

Dans cette section, on cherche une condition de type CFL pour assurer la stabilité du schéma VFFC-ALE présenté dans la section précédente. L'analyse de stabilité est réalisée dans le cadre linéaire, et en une dimension d'espace. On considère donc une équation d'advection scalaire

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.30)$$

avec vitesse c constante, et un maillage de l'espace $\cup_i M_i = \cup_i [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$. On note $h = \min_{i,n} dx_i^n$. On note Δt le pas de temps, et $\omega_{i+1/2}$ la vitesse du point $x_{i+1/2}$ du maillage. Les formules volumes finis (discrétisées en temps) s'écrivent

$$\frac{dx_i(t+dt)}{dx_i(t)} u_i(t+dt) = u_i(t) - \Delta t \frac{[F_{i+1/2} - \omega_{i+1/2} u_{i+1/2}] - [F_{i-1/2} - \omega_{i-1/2} u_{i-1/2}]}{dx_i(t)},$$

avec $u_{i+\frac{1}{2}} = u(t, x_{i+\frac{1}{2}})$ et $F_{i+\frac{1}{2}} = cu(t, x_{i+\frac{1}{2}})$. Le schéma VFFC-ALE est alors

$$dx_i^{n+1} u_i^{n+1} = dx_i^n u_i^n - \Delta t [\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}], \quad (5.31)$$

avec les flux numériques VFFC-ALE

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}} &= (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \frac{u_i + u_{i+1}}{2} - \text{sign}(c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1} - u_i}{2} \\ &= (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ u_i + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}. \end{aligned}$$

On peut simplifier la formule du schéma comme suit

$$\begin{aligned}
dx_i^{n+1} u_i^{n+1} &= dx_i^n u_i^n - \Delta t [\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}] \\
&= dx_i^{n+1} u_i^n - \Delta t [\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}] u_i^n - \Delta t [(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ u_i^n + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^n \\
&\quad - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ u_{i-1}^n - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- u_i^n] \\
&= dx_i^{n+1} u_i^n + \Delta t [-(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^+ u_i^n - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^n + (c - \omega_{i+\frac{1}{2}}) u_i^n] \\
&\quad + \Delta t [(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ u_{i-1}^n + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- u_i^n - (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) u_i^n],
\end{aligned}$$

et donc

$$dx_i^{n+1} u_i^{n+1} = dx_i^{n+1} u_i^n + \Delta t [(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n) + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n)]. \quad (5.32)$$

Proposition 5.3.1. *Le schéma VFFC sur maillage mobile (5.32) est stable pour la norme L^2 sous la condition CFL*

$$|c - \omega_{i+\frac{1}{2}}| \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{2} \quad \forall i, \forall n. \quad (5.33)$$

Sous la même condition le schéma vérifie les critères de stabilité

$$\max_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n \quad \forall n,$$

et

$$\min_i u_i^n \leq \min_i u_i^{n+1} \quad \forall n.$$

Preuve:

On note u^n la solution discrète au temps t^n , constante par morceaux sur chaque maille. On considère la norme L^2 de u^n :

$$E^n = \sum_i dx_i^n (u_i^n)^2.$$

On suppose que E^0 est fini et on montre que E^n est décroissante sous la condition (5.33). En utilisant (5.32), on peut écrire

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &= \sum_i (dx_i^{n+1} - dx_i^n) u_i^n^2 + \sum_i dx_i^{n+1} [u_i^{n+1}^2 - u_i^n^2] \\
&= \Delta t \sum_i [(c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})] u_i^n^2 \\
&\quad + \sum_i dx_i^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \right)^2 [(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n) + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n)]^2 \\
&\quad + dx_i^{n+1} 2u_i^n \cdot \left(\frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \right) [(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n) + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n)].
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_i [(c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})] u_i^n^2 = \sum_i (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) (u_i^n^2 - u_{i-1}^n^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &= \Delta t \sum_i (c - \omega_{i-\frac{1}{2}}) (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \\
&\quad + 2(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^- (u_{i-1}^n - u_i^n) u_{i-1}^n + 2(c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n) u_i^n \\
&\quad + \sum_i \frac{\Delta t^2}{dx_i^{n+1}} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n) + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n) \right]^2 \\
&= - \sum_i \Delta t |c - \omega_{i-\frac{1}{2}}| (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \\
&\quad + \sum_i \frac{\Delta t^2}{dx_i^{n+1}} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n) + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n) \right]^2.
\end{aligned}$$

Sous la condition (5.33),

$$\begin{aligned}
E^{n+1} - E^n &\leq - \sum_i \Delta t |c - \omega_{i-\frac{1}{2}}| (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \\
&\quad + 2 \sum_i \frac{\Delta t^2}{dx_i^{n+1}} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n)^2 + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n)^2 \right] \\
&\leq - \sum_i \Delta t |c - \omega_{i-\frac{1}{2}}| (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 \\
&\quad + 2 \sum_i \frac{\Delta t^2}{h} \left[(c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- (u_i^n - u_{i+1}^n)^2 + (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ (u_{i-1}^n - u_i^n)^2 \right] \\
&\leq - \sum_i \Delta t |c - \omega_{i-\frac{1}{2}}| (u_i^n - u_{i-1}^n)^2 + 2 \sum_i \frac{\Delta t^2}{h} (c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^2 (u_{i-1}^n - u_i^n)^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré la stabilité L^2 . Pour montrer que le schéma (5.32) vérifie le principe du maximum on remarque qu'il peut être réécrit

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= \left[1 - \frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \left((c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right) \right] u_i^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \left((c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ u_{i-1}^n - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- u_{i+1}^n \right).
\end{aligned}$$

Sous la condition (5.33) on voit alors que

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &\leq \left[1 - \frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \left((c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right) \right] u_i^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{dx_i^{n+1}} \left((c - \omega_{i-\frac{1}{2}})^+ - (c - \omega_{i+\frac{1}{2}})^- \right) \max_i u_i^n \\
&\leq \max_i u_i^n.
\end{aligned}$$

■

Pour une analyse plus complète du schéma upwind sur maillage mobile pour l'équation d'advection linéaire, on peut se référer à [8, 9].

5.3.5 Traitement des conditions aux limites de type mur par méthode des flux normaux

On présente dans cette section la discrétisation des conditions aux limites données sur les bords du domaine Ω . Cette discrétisation est faite en suivant l'approche des flux normaux introduite dans [10, 11].

Conditions aux limites sur les bords extérieurs de Ω

Bords horizontaux

Sur ces bords on impose une vitesse nulle selon $e_y : v = 0$. On a besoin des flux entrant ou sortant des interfaces $G_{i,1/2}$ et $G_{i,N_y-1/2}$ ($1 \leq i \leq N_x - 1$). Les formules de ces flux par la méthode des flux normaux sont obtenues en résolvant les équations

$$l_1^G(V_{i,1}) \cdot G_{i,1/2} = l_1^G(V_{i,1}) \cdot G_{i,1}, \quad (5.34)$$

et

$$l_3^G(V_{i,N_y-1}) \cdot G_{i,N_y-1/2} = l_3^G(V_{i,N_y-1}) \cdot G_{i,N_y-1}, \quad (5.35)$$

avec $G_{i,N_y-1/2} = G(V_{i,N_y-1/2})$, et $V_{i,N_y-1/2}$ de la forme $V_{|v=0} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $G_{i,N_y-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i,N_y-1/2} \end{pmatrix}$. Il

s'agit donc de calculer $p_{i,1/2}$ et $p_{i,N_y-1/2}$ en résolvant chacune des deux équations scalaires à une inconnue (5.34) et (5.35).

Bords verticaux

Sur ces bords on impose une vitesse nulle selon $e_x : u = 0$. On a besoin des flux entrant ou sortant des interfaces $F_{1/2,j} - \omega_{1/2,j} V_{1/2,j}$ et $F_{N_x-1/2,j} - \omega_{N_x-1/2,j} V_{N_x-1/2,j}$ ($1 \leq j \leq N_y - 1$). Les formules de ces flux par la méthode des flux normaux sont obtenues en résolvant les équations

$$l_1^F(V_{1,j}) \cdot (F_{1/2,j} - \omega_{1/2,j} V_{1/2,j}) = l_1^F(V_{1,j}) \cdot (F_{1,j} - \omega_{1,j} V_{1,j}),$$

et

$$l_3^F(V_{N_x-1,j}) \cdot (F_{N_x-1/2,j} - \omega_{N_x-1/2,j} V_{N_x-1/2,j}) = l_3^F(V_{N_x-1,j}) \cdot (F_{N_x-1,j} - \omega_{N_x-1,j} V_{N_x-1,j}),$$

avec $F_{N_x-1/2,j} = F(V_{N_x-1/2,j})$, et $V_{N_x-1/2,j}$ de la forme $V_{|u=\omega=0} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \rho v \end{pmatrix}$, et donc $F_{N_x-1/2,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{N_x-1/2,j} \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\omega_{N_x-1/2,j} = 0$. Pour les valeurs des $\omega_{1,j}$ et $\omega_{N_x-1,j}$ on interpole les vitesse des interfaces

$$\omega_{1,j} = \frac{\omega_{3/2,j}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_{N_x-1,j} = \frac{\omega_{N_x-3/2,j}}{2}.$$

Il s'agit là aussi de calculer des pressions $p_{1/2,j}$ et $p_{N_x-1/2,j}$ en résolvant les deux équations scalaires à une inconnue.

Conditions aux limites pour les bords intérieurs

Bords horizontaux

Sur ces bords on impose une vitesse nulle selon $e_y : v = 0$. On a besoin des flux entrant ou sortant des interfaces aux bords $G_{i,N_yA-1/2}$ et $G_{i,N_yB-1/2}$ ($N_xA \leq i \leq N_xB - 1$). Les formules de ces flux par la méthode des flux normaux sont obtenues en résolvant les équations

$$l_1^G(V_{i,N_yB}) \cdot G_{i,N_yB-1/2} = l_1^G(V_{i,N_yB}) \cdot G_{i,N_yB},$$

et

$$l_3^G(V_{i,N_yA-1}) \cdot G_{i,N_yA-1/2} = l_3^G(V_{i,N_yA-1}) \cdot G_{i,N_yA-1},$$

avec $G_{i, \frac{NyA-1/2}{NyB-1/2}} = G(V_{i, \frac{NyA-1/2}{NyB-1/2}})$, et $V_{i, \frac{NyA-1/2}{NyB-1/2}}$ de la forme $V|_{v=0} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $G_{i, \frac{NyA-1/2}{NyB-1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i, \frac{NyA-1/2}{NyB-1/2}} \end{pmatrix}$.

Bords verticaux

Les noeuds au niveau des deux bords horizontaux $x_{NxA-\frac{1}{2}}$ et $x_{NxB-\frac{1}{2}}$ ont une vitesse égale à $\dot{x}(t)$. Il faut donner les flux $F_{NxA-\frac{1}{2},j} - \omega_{NxB-1/2,j} V_{NxB-1/2,j}$ et $F_{NxB-\frac{1}{2},j} - \omega_{NxA-1/2,j} V_{NxA-1/2,j}$ pour $NyA \leq j \leq NyB - 1$. Les formules de ces flux sont obtenues par la méthode des flux normaux en résolvant les équations

$$l_1^F(V_{NxB,j}) \cdot (F_{NxB-1/2,j} - \omega_{NxB-1/2,j} V_{NxB-1/2,j}) = l_1^F(V_{NxB,j}) \cdot (F_{NxB,j} - \omega_{NxB,j} V_{NxB,j}), \quad (5.36)$$

et

$$l_3^F(V_{NxA-1,j}) \cdot (F_{NxA-1/2,j} - \omega_{NxA-1/2,j} V_{NxA-1/2,j}) = l_3^F(V_{NxA-1,j}) \cdot (F_{NxA-1,j} - \omega_{NxA-1,j} V_{NxA-1,j}), \quad (5.37)$$

avec $F_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j} = F(V_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j})$, et $V_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j}$ de la forme $V|_{u=\dot{x}(t)} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \dot{x}(t) \\ \rho v \end{pmatrix}$, $\omega_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j} = \dot{x}(t)$, et donc

$$F_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j} - \omega_{NxA-1/2,j} V_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{\frac{NxA-1/2}{NxB-1/2},j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et on a encore une fois une pression à calculer à chaque bord en résolvant (5.36) et (5.37). Pour définir les valeurs des $\omega_{NxB,j}$ et $\omega_{NxA-1,j}$ dont on a besoin dans ces équations, on interpole linéairement les vitesses des interfaces

$$\omega_{NxB,j} = \frac{\omega_{NxB+1/2,j} + \dot{x}(t)}{2}, \quad \omega_{NxA-1,j} = \frac{\omega_{NxA-3/2,j} + \dot{x}(t)}{2}.$$

5.3.6 Exemple de résultats numériques

On présente dans ce paragraphe les résultats d'un cas test qu'on appellera par la suite cas test 1. Le domaine Ω est un rectangle de dimension $3m \times 3m$. Les valeurs des paramètres utilisées sont

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_l = 1000, \quad p_0 = 8.10^5, \quad u_0 = 4,$$

$$x_0 = 1, \quad L = 0.5, \quad l = 1, \quad H = 3 \quad \text{et} \quad h = 0.3.$$

On suppose que le gaz est un gaz parfait de paramètre $\gamma = 1.4$. Ainsi pour ce cas on a les valeurs des nombres sans dimensions suivantes :

$$S = 0.01, \quad DR = 10^{-3}, \quad \chi = 1/\gamma$$

$$a = 0.5, \quad b = 1, \quad d = 3 \quad \text{et} \quad e = 3.$$

Pour le schéma numérique, on choisit pour discrétisation initiale de l'espace un maillage régulier de pas $h_x = 0.02$ et $h_y = 0.02$. Le pas de temps est fixé avec un nombre CFL de 0.3 donné par la condition dans la proposition (5.3.1)

$$\max_i |c_i - \omega_{i \pm \frac{1}{2}}| \frac{\Delta t}{h} = 0.3, \quad \text{et} \quad \max_i |c_i| \frac{\Delta t}{h_y} = 0.3.$$

Pour le choix de la vitesse du maillage, on garde un maillage immobile dans la direction y , régulier avec le pas initial h_y et un maillage dans la direction x régulier par morceaux dans les intervalles $[0, x(t)]$, $[x(t), x(t) + L]$, et $[x(t) + L, H]$. En d'autres termes, les vitesses $\omega_{i-\frac{1}{2}}$ sont données en fonction de la vitesse $\dot{x}(t)$ du piston par

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = \dot{x}(t) \cdot \frac{i-1}{Nx_A-1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq Nx_A, \quad (5.38)$$

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = \dot{x}(t) \quad \text{pour } Nx_A \leq i \leq Nx_B, \quad (5.39)$$

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = \dot{x}(t) \cdot \frac{Nx-i}{Nx-Nx_B} \quad \text{pour } Nx_B \leq i \leq Nx, \quad (5.40)$$

où les indices Nx , Nx_A et Nx_B ont été introduits dans la section 5.3.3 et la figure 5.4. La vitesse du piston au cours du temps est représentée par la figure 5.5. La vitesse moyenne de fuite du gaz sous le piston définie par

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, -\frac{l}{2}) dx \quad (5.41)$$

est représentée sur la figure 5.6. La figure 5.7 donne $\lambda(t)$, le rapport entre cette vitesse et celle du cas d'un gaz incompressible, donnée par (4.1).

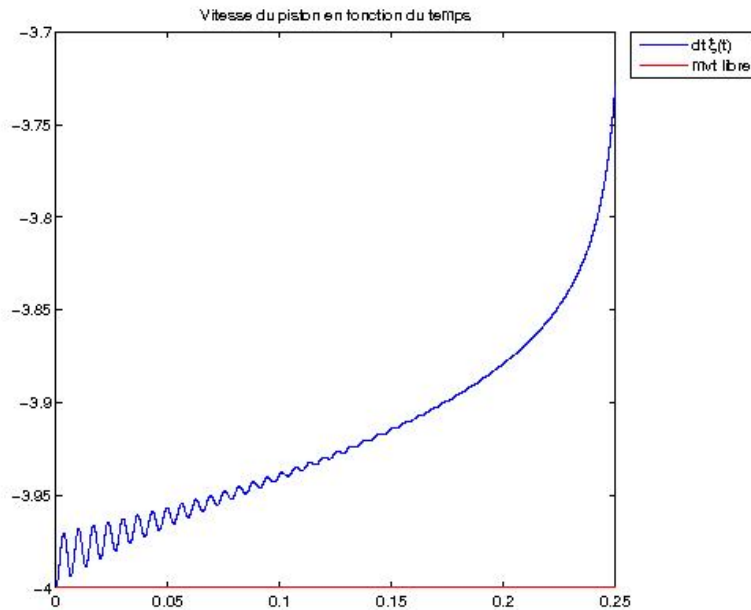


FIGURE 5.5 – Vitesse du piston pour le cas test 1.

On remarque que la courbe $\lambda(t)$ converge vers la valeur 1 pour les temps grands. C'est à dire que la vitesse de fuite du gaz s'approche de la valeur du cas incompressible au fur et à mesure que le gaz se comprime. Cela correspond donc bien à l'intuition physique. On remarque également que le mode transitoire est caractérisé par des oscillations autour de la valeur limite 1. La figure 5.8 montre la courbe $1 - \lambda(t)$. Le but du travail qui va suivre est d'étudier la dépendance de cette courbe par rapport aux paramètres adimensionnés L_f et DR pour une géométrie donnée.

Pour caractériser la courbe $1 - \lambda(t)$, on l'approche par une courbe d'expression : $f_{\omega, \alpha}(t) = \cos(2\pi\omega t)e^{-\alpha t}$, avec ω la pseudo période des oscillations du régime transitoire et α le taux de décroissance de ces oscillations.

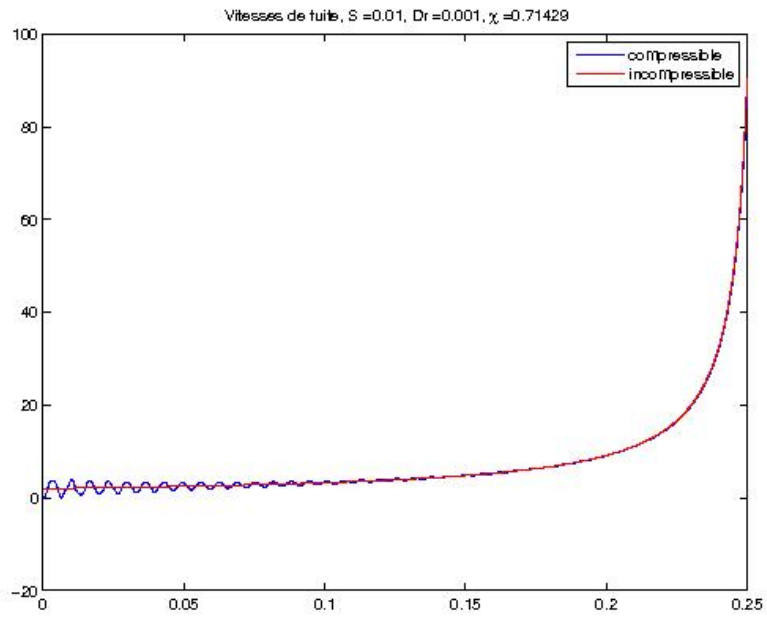


FIGURE 5.6 – Vitesse moyenne de fuite pour le cas test 1.

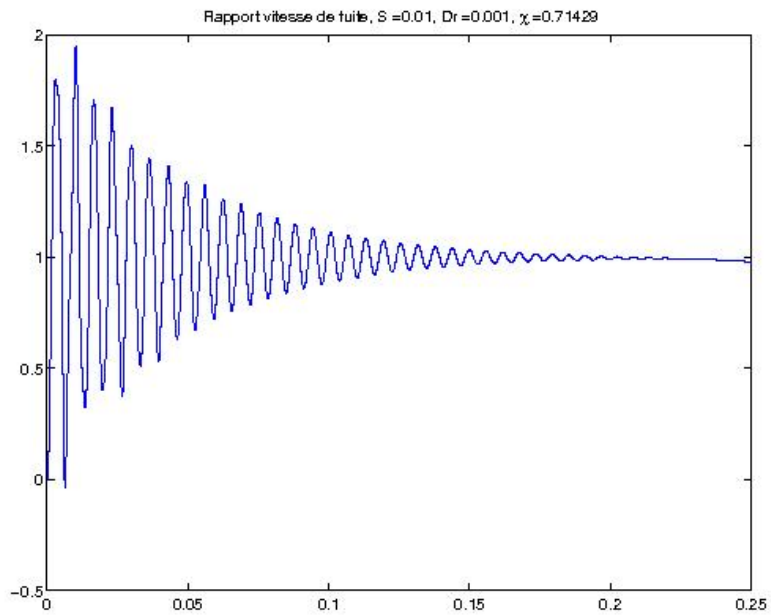


FIGURE 5.7 – Evolution du rapport $\lambda(t)$ pour le cas test 1.

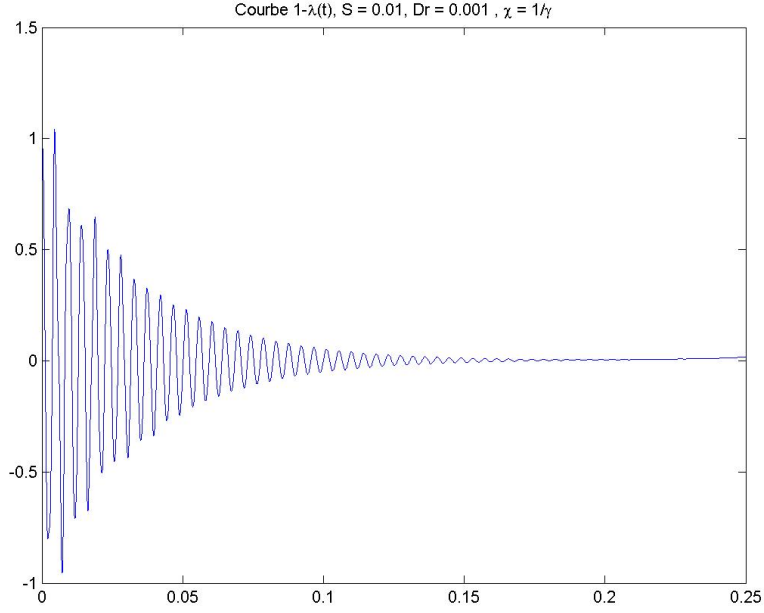


FIGURE 5.8 – Evolution de $1 - \lambda(t)$ pour le cas test 1.

Ainsi l'étude des variations de $\lambda(t)$ consistera à donner des lois pour les paramètres $\omega(L_f, DR)$ et $\alpha(L_f, DR)$. On utilise la transformée de Fourier pour trouver les paramètres ω et α de la courbe $f_{\omega, \alpha}$ approchant $1 - \lambda(t)$. Plus précisément on utilise la transformée de Fourier discrète (TFD) sur les signaux discrets que donnent notre simulation numérique $(1 - \lambda(t^n))_{1 \leq n \leq N}$, en re-échantillonnant éventuellement ces valeurs sur une séquence régulière $t^n = t_0 + k dt$ par interpolation.

On a tout d'abord la proposition suivante :

Proposition 5.3.2. *La Transformée de Fourier Discrète d'un signal $y_k = \exp(2i\pi\omega t_k)e^{-\alpha t_k}$, avec $t_k = k \frac{T_f}{N}$, $0 \leq k \leq N - 1$ est*

$$Y_n = \frac{1 - \exp(-\alpha T_f) \exp(2i\pi\omega T_f)}{1 - \exp(-\frac{\alpha T_f}{N}) \exp(-2i\pi \frac{n - \omega T_f}{N})}, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Si $m = \omega T_f \in \mathbb{N}$, alors le module $|Y_m|$ est maximal pour cet indice et l'amplitude maximale vaut

$$|Y_m| = \frac{1 - \exp(-\alpha T_f)}{1 - \exp(-\frac{\alpha T_f}{N})}.$$

Preuve:

On calcule la TFD du signal $(y_k)_k$

$$\begin{aligned}
 Y_n &= \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp\left(\frac{-2i\pi nk}{N}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\exp\left(2i\pi\omega \frac{T_f}{N}\right) e^{-\alpha \frac{T_f}{N}} \exp\left(\frac{-2i\pi nk}{N}\right) \right]^k \\
 &= \frac{1 - e^{-\alpha T_f} \exp(2i\pi\omega T_f)}{1 - e^{-\frac{\alpha T_f}{N}} \exp(-2i\pi \frac{n-\omega T_f}{N})}.
 \end{aligned}$$

Remarque 5.3.1. Pour les courbes $1 - \lambda(t)$ des simulations qui vont suivre, on a $\omega \gg 1$ et $T_f \sim 1$. Il est donc raisonnable de chercher une approximation de ω parmi les valeurs $\frac{p}{T_f}$, $p \in \mathbb{N}$. Ainsi dans la suite, on suppose toujours que $\omega T_f = m \in \mathbb{N}$. L'indice correspondant à l'amplitude maximale permet alors de calculer ω .

Remarque 5.3.2. Il est difficile d'utiliser directement la valeur du module maximal $|Y_m|$ pour retrouver α . Cependant si l'on suppose que $N \gg \alpha T_f \gg 1$, alors

$$|Y_m| \sim \frac{N}{\alpha T_f} (1 - \exp(-\alpha T_f)) \sim \frac{N}{\alpha T_f}.$$

La figure 5.9 montre la TFD du signal $1 - \lambda(t^k)$ pour le cas test 1 présenté ci-dessus. On remarque que le maximum de la courbe peut être facilement distingué.

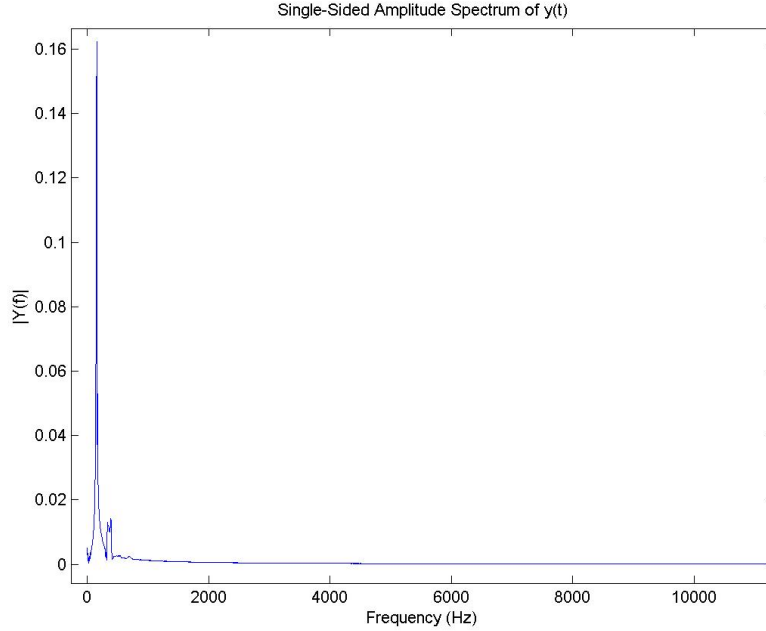


FIGURE 5.9 – Spectre de la courbe $1 - \lambda(t)$.

On vérifie numériquement que les solutions du système ne dépendent que de L_f et DR . Si on trace la courbe de $1 - \lambda(t)$ pour plusieurs valeurs de L_f et pour une valeur de DR fixée, on remarque que les courbes

$1 - \lambda(t)$ oscillent et tendent vers zéro plus rapidement quand $L_f \rightarrow 0$, comme on le voit dans la figure 5.10. On remarque le même type de comportement lorsque l'on fait tendre DR vers zéro à L_f fixé. Dans la section suivante on s'intéressera alors à donner des modèles pour les paramètres $\omega(L_f, DR)$ et $\alpha(L_f, DR)$ dans la limites $L_f \rightarrow 0$ et $DR \rightarrow 0$, c'est à dire au voisinage du cas incompressible.

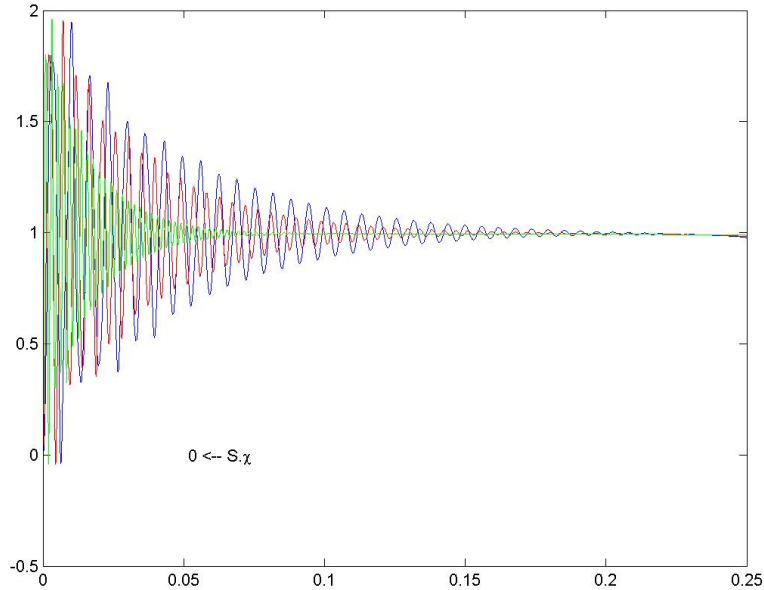


FIGURE 5.10 – Courbes $\lambda(t)$ pour différentes valeurs de $L_f = S/\gamma$, avec $DR = 0.001$.

5.4 Analyse paramétrique

5.4.1 Dépendance de ω et α par rapport à L_f et DR

Le but de cette section est de présenter des modèles pour les courbes $\omega(L_f, DR)$ et $\alpha(L_f, DR)$. La démarche est la suivante : On garde la géométrie du cas test 1 présenté dans la section précédente, et on modifie les valeurs des paramètres physiques de sorte à changer les nombres sans dimension L_f et DR . Ainsi, pour étudier la dépendance des paramètres ω et α caractérisant la courbe $1 - \lambda(t)$, on réalise une batterie de simulations avec 14 à 15 valeurs de L_f , pour plusieurs valeurs du rapport de densité DR .

Présentons d'abord les résultats obtenus pour une valeur de $DR = 0.001$ et plusieurs valeurs de L_f . La courbe dans la figure 5.11 montre la pseudo-période ω obtenue par TFD sur la courbe $1 - \lambda(t)$ pour plusieurs valeurs de L_f . La figure 5.12 montre le taux de décroissance exponentielle α pour les mêmes valeurs de L_f . On remarque alors que les courbes $\omega(L_f)$ et $\alpha(L_f)$ tendent vers l'infini exponentiellement quand $L_f \rightarrow 0$. Ainsi, dans la suite, on s'intéressera aux variations des ω et α en échelle logarithmique.

On réitère la même démarche pour plusieurs valeurs de DR

$$DR = 5.10^{-4}, 10^{-3}, 4.10^{-3}, 5.10^{-3} \quad \text{et} \quad 10^{-2}.$$

Dans la figure 5.13 on trace les courbes $\omega(L_f)$ en échelle logarithmique pour chaque valeur de DR . On remarque que les courbes sont quasiment des droites dont les pentes sont données approximativement par

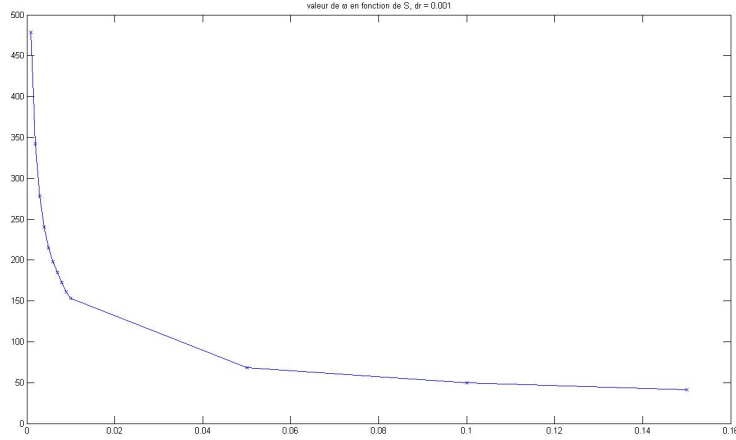


FIGURE 5.11 – Pseudo-fréquence de $1 - \lambda(t)$ en fonction de $L_f = S/\gamma$, $dr = 0.001$.

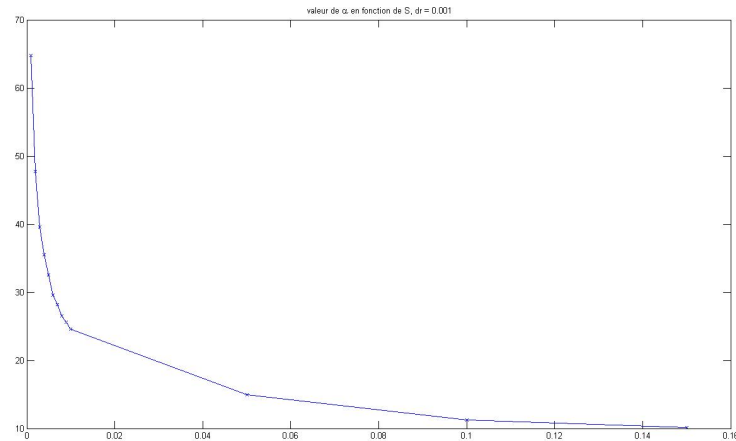


FIGURE 5.12 – Taux de décroissance de $1 - \lambda(t)$ en fonction de $L_f = S/\gamma$, $dr = 0.001$.

les valeurs $[-0.4958, -0.4841, -0.4883, -0.4904, -0.4926]$. On en déduit alors que la pseudo période ω est une fonction de $\frac{1}{\sqrt{L_f}}$, autrement dit on a

$$\omega = \frac{C(DR)}{\sqrt{L_f}}.$$

On trace dans la figure 5.14 la coefficient $C(DR)$ pour les courbes précédentes. On remarque qu'il s'agit là aussi d'une droite. Le calcul de la pente donne -0.4895 . Ainsi on en déduit qu'on peut approcher la pseudo-période ω par

$$\omega \approx \frac{C}{\sqrt{L_f DR}}.$$

où la constante C ne dépend que de la géométrie à travers les nombres sans dimensions a , b , d et e . Pour la

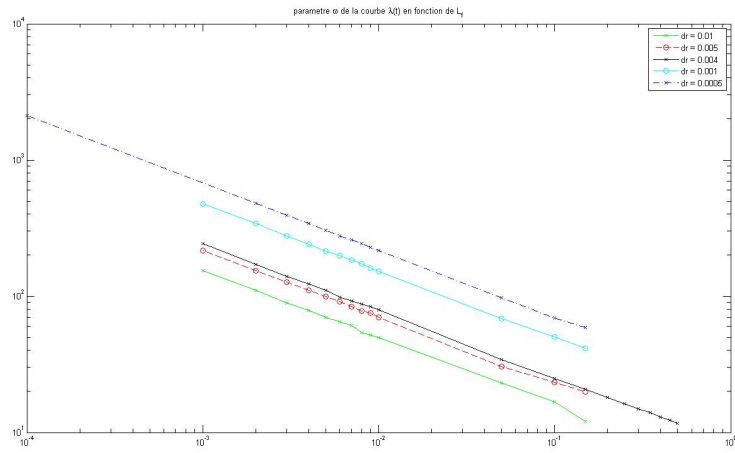


FIGURE 5.13 – Variations de ω en fonction de L_f et DR .

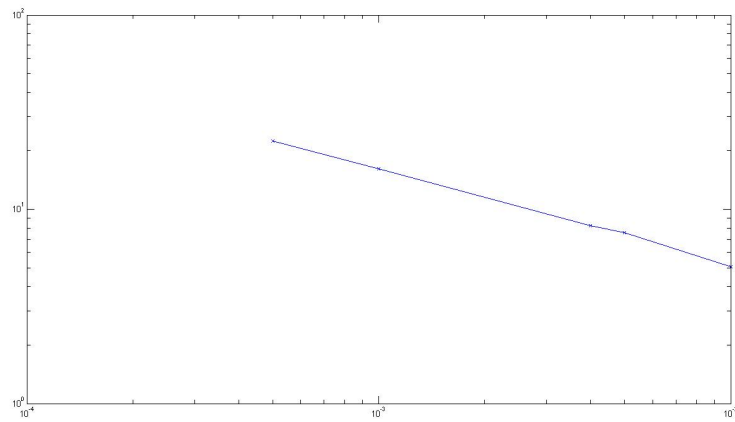


FIGURE 5.14 – Coefficient $C(DR)$ en fonction DR .

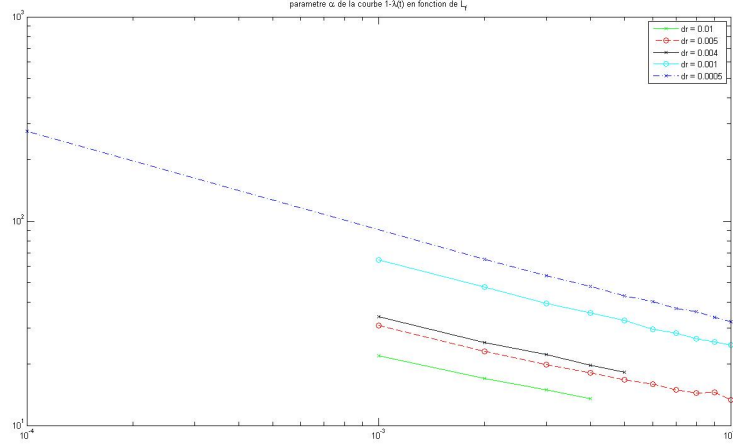


FIGURE 5.15 – Variations de α en fonction de L_f et DR .

batterie de cas test utilisés, on a obtenu $C = 0.464$.

On trace de la même manière les valeurs du taux de décroissance exponentielle α pour plusieurs valeurs de L_f et DR . On a la famille de courbes présentée dans la figure 5.15. Les pentes obtenues dans ce cas sont : $[-0.3451, -0.3501, -0.3854, -0.4203, -0.4659]$ rangées selon les valeurs décroissantes de DR . On remarque qu'ici la pente n'est pas constante mais s'approche de la valeur $\frac{1}{2}$ quand DR tend vers 0. Le modèle obtenu pour α est alors de la forme $\alpha = c_1(DR).L_f^{c_2(DR)}$ où les coefficients c_1 et c_2 sont tracés dans les figures 5.16.

5.4.2 Conclusion de l'étude paramétrique

Dans cette section, on a présenté et étudié un schéma numérique adapté au problème particulier du piston $2D$. On a démontré par une analyse dimensionnelle que la solution de ce problème dépend uniquement des nombres sans dimension DR et $L_f = S.\chi$. Ceci confirme et est cohérent avec les résultats obtenus dans [1], où par voie de simulation numérique, les auteurs montrent que le changement d'échelle entre deux échelles différentes doit conserver à la fois les nombres DR , S , et χ . En effet, dans l'étude de [1], le phénomène **P2** de piégeage du gaz (gouverné par le nombre S) est aussi pris en compte et la solution ne dépend plus seulement de $S.\chi$ mais de S et χ séparément.

En réalisant une série de simulations pour le problème du piston $2D$ avec le schéma proposé, on a obtenu dans le cas d'un piston avec vitesse initiale et sans prendre en compte la gravité, un modèle d'évolution en temps de la vitesse moyenne de fuite du gaz sous le piston

$$\bar{v} = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, -\frac{l}{2}) dx = \lambda(t) \frac{l\dot{x}(t)}{2x(t)},$$

et la courbe $\lambda(t)$ a été approchée par une formule

$$\lambda^{DR, L_f}(t) = 1 - \exp(-\alpha^{DR, L_f} t) \cos(2\pi\omega^{DR, L_f} t).$$

Le modèle obtenu pour la fréquence ω est assez simple

$$\omega^{DR, L_f} = \frac{C}{\sqrt{L_f \cdot DR}}.$$

Pour α^{DR, L_f} on peut également supposer une dépendance en $\sqrt{L_f}$ dans la limites d'un gaz faiblement compressible, avec un coefficient dépendant de DR .

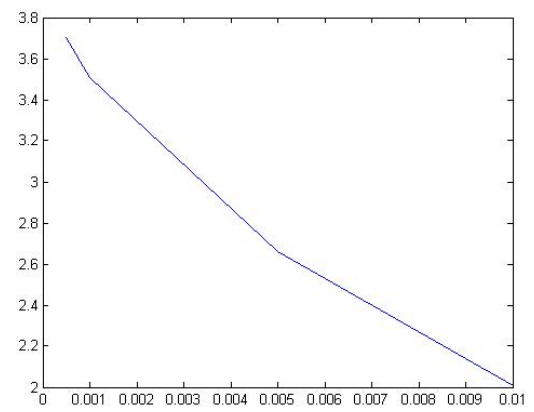
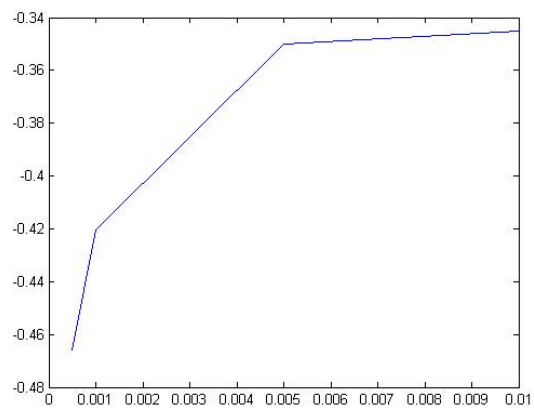


FIGURE 5.16 – Coefficient $c_1(DR)$ (à droite), et $c_2(DR)$ (à gauche).

Chapitre 6

Cas de chute verticale

On s'intéresse dans cette section au cas d'une masse en chute libre sous l'effet de la gravité sans vitesse initiale. La géométrie du problème est décrite dans la figure 6.1. Comme dans le cas horizontal, la vitesse moyenne de fuite du gaz sous la masse dans le cas incompressible est donnée par $\bar{v}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, \frac{l}{2}) dx = l \frac{\dot{x}(t)}{2x(t)}$, et on s'intéresse à modéliser cette même vitesse $v_m(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, \frac{l}{2}) dx$ dans le cas d'un gaz faiblement compressible.

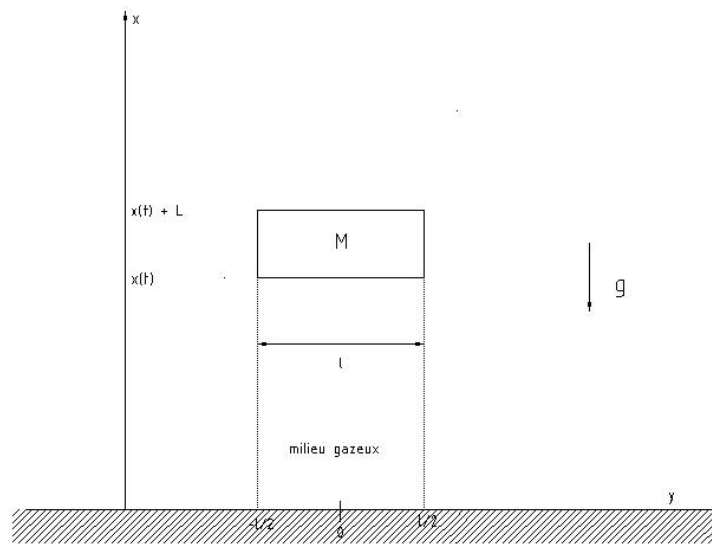


FIGURE 6.1 – Piston vertical : masse en chute libre.

6.1 Equations du système

Ecrivons les équations décrivant le système :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_x(p) = -\rho g, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_y(p) = 0, \\ \rho_l L \ddot{x} = -\rho_l L g + \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \{p(t, x, y) - p(t, x + L, y)\} dy. \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} u(t, x(t), y) = \dot{x}(t), & \quad u(t, x(t) + L, y) = \dot{x}(t), & \quad \text{pour } -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}, \\ v(t, x, -\frac{l}{2}) = 0, & \quad v(t, x, \frac{l}{2}) = 0, & \quad \text{pour } x(t) \leq x \leq x(t) + L, \\ u(t, 0, y) = 0, & & \end{aligned}$$

et les conditions initiales homogènes

$$\begin{aligned} u(t=0) = 0, \quad v(t=0) = 0, \quad \rho(t=0) = \rho_0, \\ p(t=0) = p_0, \quad x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = 0. \end{aligned}$$

On quantifie comme précédemment la compressibilité du gaz par le module de compressibilité $\chi = \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2}$ et on étudie le cas χ petit.

6.2 Adimensionnement du système

On introduit les grandeurs adimensionnées

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{x_0}, \quad \xi(t) = \frac{x(t)}{x_0}, \\ \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_l}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{u_l}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \end{aligned}$$

avec le temps caractéristique (temps de chute libre) $\tau = \sqrt{\frac{x_0}{g}}$, et la vitesse caractéristique $u_l = \frac{x_0}{\tau} = \sqrt{g x_0}$.

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = 0, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}^2) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + \frac{a}{S \cdot \chi \cdot DR} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{p}) = -\tilde{\rho}, \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) + \partial_{\tilde{y}}(\tilde{\rho}\tilde{v}^2) + \frac{a}{S \cdot \chi \cdot DR} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{p}) = 0, \\ \tilde{p} = P_0(\tilde{\rho}), \\ \ddot{\xi} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{S \cdot \chi \cdot b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \{\tilde{p}(\tilde{t}, \xi, \tilde{y}) - \tilde{p}(\tilde{t}, \xi + a, \tilde{y})\} d\tilde{y}, \end{cases}$$

avec les nombres sans dimensions $S = \frac{\rho_l L u_l^2}{\rho_0 x_0} = \frac{g L \rho_l}{\rho_0}$, $DR = \frac{\rho_0}{\rho_l}$, $a = \frac{L}{x_0}$, $b = \frac{l}{x_0}$, les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(\tilde{t}, \xi(t), \tilde{y}) = \dot{\xi}(t), & \quad u(\tilde{t}, \xi(t) + a, \tilde{y}) = \dot{\xi}(t), & \quad \text{pour } -\frac{b}{2} \leq \tilde{y} \leq \frac{b}{2}, \\ v(\tilde{t}, \tilde{x}, -\frac{b}{2}) = 0, & \quad v(\tilde{t}, \tilde{x}, \frac{b}{2}) = 0, & \quad \text{pour } \xi(t) \leq \tilde{x} \leq \xi(t) + a, \\ u(\tilde{t}, 0, \tilde{y}) = 0. & & \end{aligned}$$

et les conditions initiales homogènes $\tilde{u}(t=0) = 0$, $\tilde{v}(t=0) = 0$, $\tilde{\rho}(t=0) = 1$, $q(t=0) = \frac{1}{\gamma}$, $\xi(t=0) = 1$, $\dot{\xi}(t=0) = 0$. La loi P_0 dépend de la loi d'état choisie pour le gaz comme dans le cas du piston horizontal. La solution du système ne dépend donc que des nombres sans dimension $L_f = S \cdot \chi = \frac{\rho_l L u_l^2}{\rho_0 \times_0 c_0^2}$, DR et a et b .

6.3 Etude numérique

Comme précédemment, on se place pour l'étude numérique dans le cas d'un domaine borné avec des conditions aux limites de type mur imposées aux bords. On résout le système d'équations d'Euler par le schéma VFFC-ALE présenté précédemment, en le couplant de manière explicite avec les équations de mouvement de la masse M . Ici encore, le maillage bouge dans la direction x en restant uniforme par morceaux.

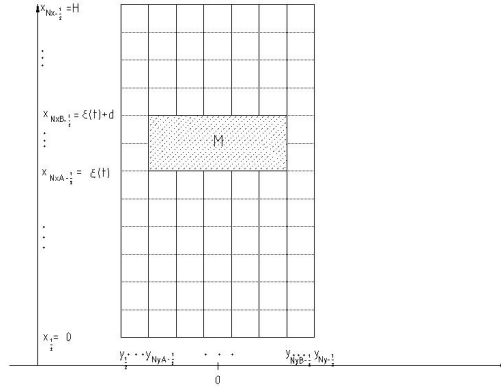


FIGURE 6.2 – Piston vertical dans un domaine borné et exemple de maillage initial.

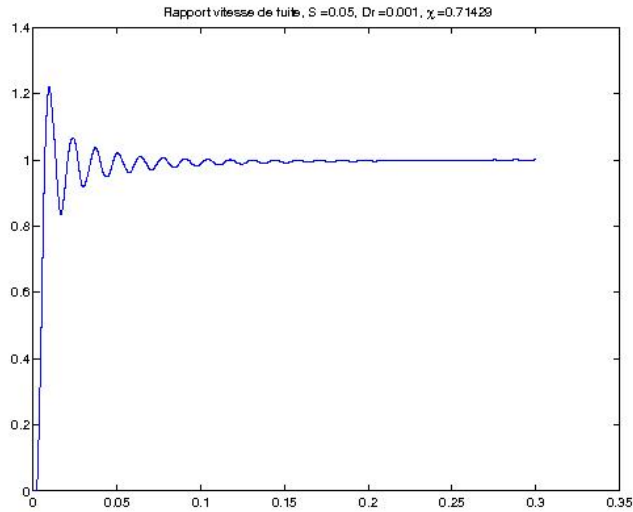


FIGURE 6.3 – Courbe $\lambda(t)$, $L_f = S/\gamma$, $S = 0.01$, $DR = 0.001$.

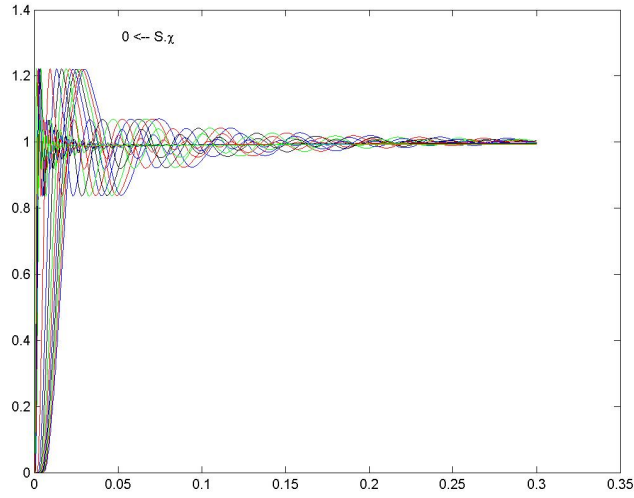


FIGURE 6.4 – Effet de la valeur de $L_f = S/\gamma$ sur la courbe $\lambda(t)$

6.4 Résultats numériques

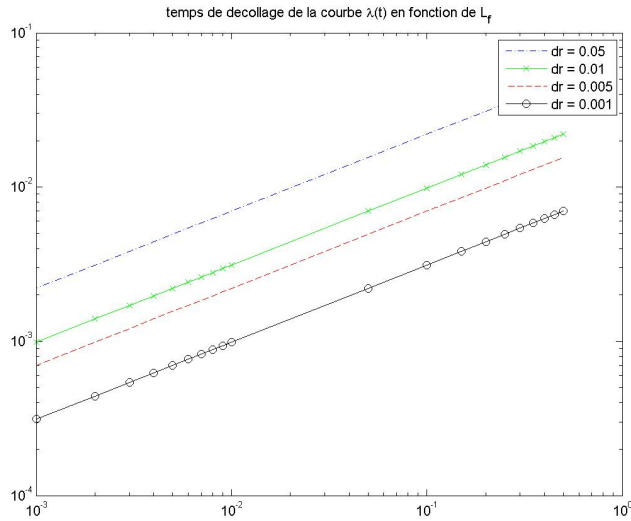


FIGURE 6.5 – Variations de τ en fonction de L_f et DR

On s'intéresse à la vitesse moyenne de fuite sous le piston, et au rapport entre cette vitesse et la valeur dans le cas incompressible $\lambda(t) = \frac{v_m(t)}{\bar{v}(t)} = v_m(t) \frac{2 \cdot x(t)}{l \cdot \dot{x}(t)}$. On cherche une loi donnant $\lambda(t)$ en fonction de $L_f = S \cdot \chi \ll 1$ et $DR \ll 1$. Pour une simulation avec les mêmes données que le cas test 1, sans vitesse initiale et avec une accélération de pesanteur $g = 9.8$ selon $-e_x$, on obtient la courbe $\lambda(t)$ présentée dans la figure 6.3. On remarque que cette courbe tend vers zéro après un mode transitoire oscillant. On remarque

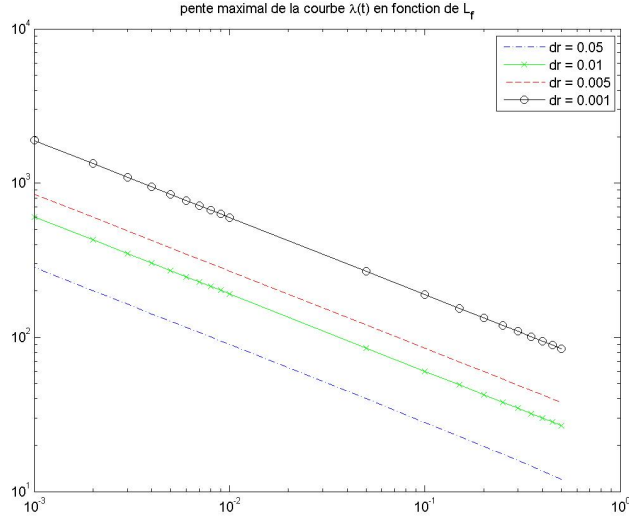


FIGURE 6.6 – Variations de dl en fonction de L_f et DR

aussi que la valeur $\lambda(t)$ reste presque nulle au bout d'un temps initial avant de décoller et croître vers la valeur 1. En modifiant les valeurs du paramètre L_f et en les faisant tendre vers zéro, on voit que les courbes $\lambda(t)$ tendent plus rapidement vers la valeur limite 1, et le temps de latence initiale devient plus petit. Physiquement cela signifie qu'initialement le gaz se comprime sans fuir sous l'effet de la vitesse du piston ($\lambda = 0$), puis un régime transitoire s'amorce pour enfin atteindre le cas limite $\lambda = 1$ où la fuite se fait à la vitesse moyenne du cas incompressible donnée par la formule (4.1).

Pour caractériser les courbes $\lambda(t)$, on définit les paramètres suivants : τ l'instant où la courbe 'décolle' et dl la pente maximale sur la partie ascendante de la courbe. On cherche des lois pour τ , dl en fonction de L_f et DR . Pour un ensemble de valeurs de L_f et DR on réalise une batterie de simulations, on détermine les paramètres τ et dl et on les trace en fonction de L_f en échelle logarithmique, pour chaque valeur de DR . On obtient alors les deux familles de courbes pour τ et dl présentées dans les figures 6.5 et 6.6 respectivement.

Pour la famille de courbes de τ on obtient pour le cas test réalisé les valeurs suivantes des pentes : [0.4991, 0.4497, 0.4998, 0.5000]. Il s'en suit qu'on peut modéliser τ par une formule : $\tau = C(DR)\sqrt{L_f}$. En traçant la variation du coefficient $C(DR)$ en échelle logarithmique en fonction des valeurs de DR on obtient encore une droite comme on le voit sur la figure 6.7. La pente obtenue (= 0.4988) est très proche de la valeur $\frac{1}{2}$. Ainsi on retient comme modèle pour τ la formule

$$\tau = C_1 \sqrt{L_f DR},$$

où C ne dépend que de la géométrie du problème. A titre indicatif, pour le cas test présenté, on a obtenu une valeur $C_1 = 0.3667$.

Pour les courbes de dl on a également des valeurs de pentes quasi-constantes [-0.5036, -0.5017, -0.5009, -0.5002], et on retient pour modèle la formule $dl = \frac{c(DR)}{\sqrt{L_f}}$. La figure 6.8 montre la courbe de $\log(c(DR))$ en fonction de $\log(DR)$. La courbe peut être approchée elle aussi par une droite de pente = -0.4900. On retient donc pour modèle de dl la formule

$$dl = \frac{C_2}{\sqrt{L_f DR}},$$

où C_2 dépend de la géométrie. Pour le cas test présenté, on a obtenu une valeur $C_2 = 1.698$.

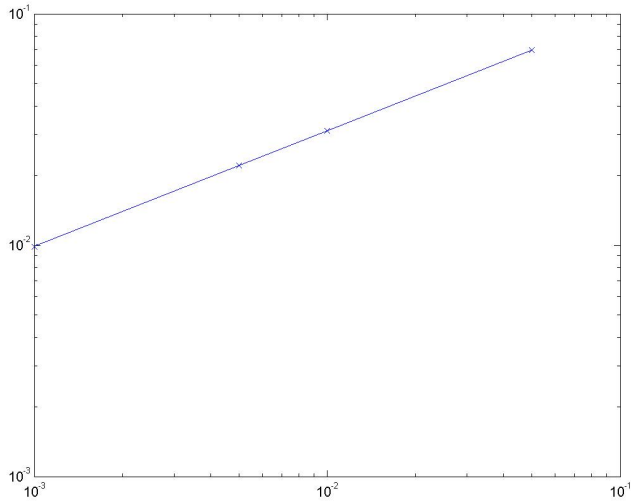


FIGURE 6.7 – Variation du coefficient $C(DR)$.

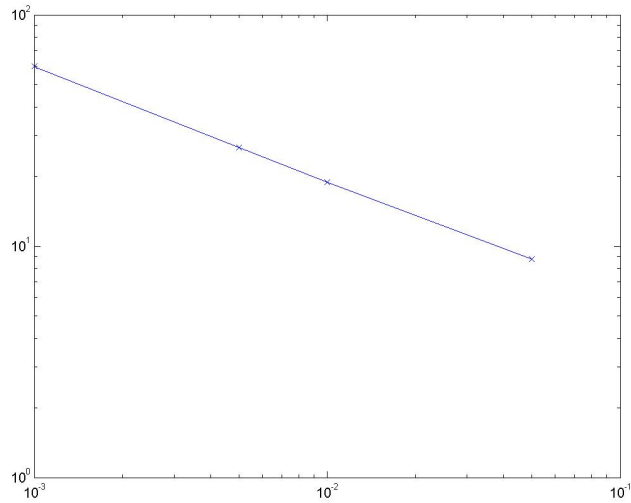


FIGURE 6.8 – Variation de $c(DR)$ en fonction de DR en échelle logarithmique.

6.5 Conclusion du cas piston vertical

En réalisant une série de simulations pour le problème du piston $2D$ avec le schéma proposé dans la section 5 (en prenant en compte le terme source de gravité), on a obtenu dans le cas d'un piston vertical, un modèle d'évolution en temps de la vitesse moyenne de fuite du gaz sous le piston

$$\bar{v} = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} v(t, x, -\frac{l}{2}) dx = \lambda(t) \frac{l\dot{x}(t)}{2x(t)}.$$

Dans le cadre de ce modèle, la courbe $\lambda(t)$ a été approchée par une fonction ayant l'allure de la courbe de la figure 6.9, où τ est un temps de réponse du gaz pendant lequel celui-ci se comprime sans fuir sous la masse,

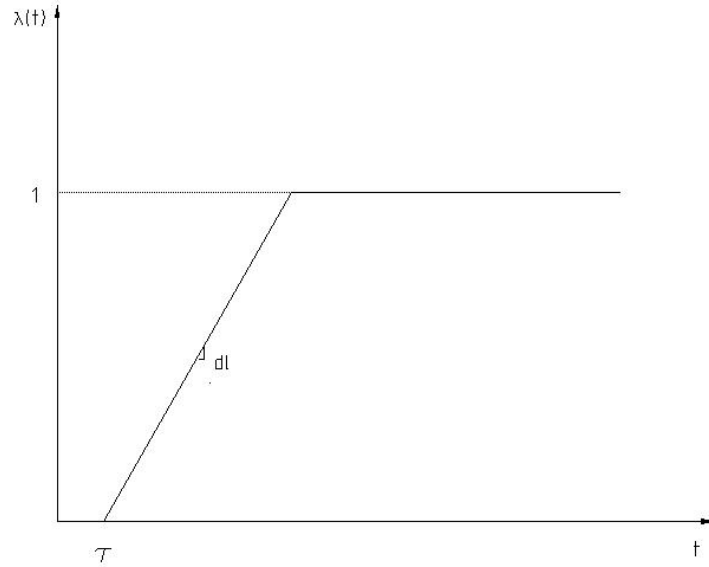


FIGURE 6.9 – Allure de la courbe $\lambda(t)$ dans le modèle proposé pour le piston vertical.

et dl la pente avec laquelle la courbe $\lambda(t)$ rejoint la valeur limite 1. Les modèles obtenus pour le temps de réponse τ et la pente dl sont assez simples

$$\tau^{DR,L_f} = C_1 \sqrt{L_f \cdot DR},$$

et

$$dl^{DR,L_f} = \frac{C_2}{\sqrt{L_f \cdot DR}}.$$

Ce modèle permet donc de compléter le modèle simplifié de Bagnold $2D$ avec fuite dans le cas avec gravité.

Chapitre 7

Perspective de l'étude paramétrique : Etude du voisinage du moment de l'impact

On a vu dans les deux chapitres précédents que les courbes de $\lambda(t)$ obtenues montraient deux régimes successifs de la vitesse de fuite. Le premier est un régime oscillatoire caractérisé par des oscillations de $\lambda(t)$ à amplitude exponentiellement décroissante autour de la valeur 1. Dans ce régime, la compressibilité du gaz joue un rôle important bien que le nombre de Mach soit faible à cause des faibles valeurs des vitesses. Le deuxième régime est caractérisé par une stabilisation de $\lambda(t)$ à la valeur 1. Le gaz fuit alors sans se compresser à la vitesse moyenne donnée par

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_{incomp}(t) = \frac{l \cdot \dot{x}(t)}{2 \cdot x(t)}. \quad (7.1)$$

Dans cette phase on peut dire que la compressibilité du gaz n'a plus de rôle, et le gaz étant comprimé par le mouvement de la masse lors du premier régime devient presque incompressible.

La formule (7.1) implique que la vitesse de fuite $\bar{v}(t)$ tend vers $+\infty$ quand $x(t)$ s'approche de zéro, c'est à dire quand la masse devient très proche du sol. Ceci ne semble pas être possible physiquement. En effet, la vitesse d'écoulement du gaz compressible ne peut augmenter indéfiniment, mais doit être contrôlée par la vitesse du son du gaz. Pour vérifier cette intuition on doit simuler et étudier le système au voisinage du moment d'impact de la masse avec le sol. La figure 7.1 montre l'allure de la courbe $\lambda(t)$ quand la simulation est menée pour un temps assez grand dépassant le moment d'impact en chute libre. On voit donc conformément à l'intuition physique un troisième régime de fuite, caractérisé par une chute de la valeur de $\lambda(t) = \frac{\bar{v}(t)}{\bar{v}_{incomp}(t)}$ vers 0.

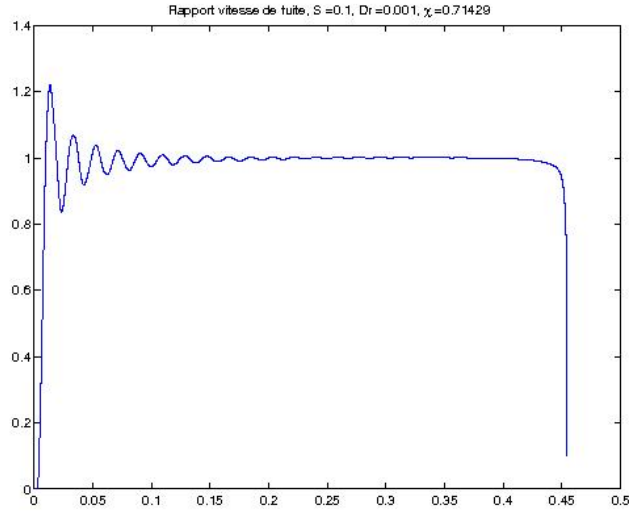


FIGURE 7.1 – Courbe $\lambda(t)$ simulée pendant un temps au delà du temps de chute libre.

7.1 Validation en 2D par comparaison au code Flux-IC

Pour valider les résultats obtenus précédemment par notre code VFFC-ALE dans le cas du piston 2D, et notamment au voisinage du moment d'impact, on compare ceux-ci aux résultats obtenus par un autre code numérique développé au laboratoire C.M.L.A. de l'ENS-Cachan. Il s'agit du code *Flux-IC*, qui est un code bi-fluide eulérien. Dans ce code la masse solide est remplacée par une masse liquide très peu compressible avec une loi d'état stiffened gaz. La figure 7.2 compare les différentes courbes $\lambda(t)$ obtenues par le code *ALE*, et le code *Flux-IC* pour deux maillages différents. On voit alors une bonne concordance des résultats, surtout lors des deux premiers régimes de fuites. Le dernier régime est présent dans les trois courbes avec une chute de la valeur de $\lambda(t)$. Il est toutefois difficile de comparer les deux codes dans ce régime vu que la masse liquide du code *Flux-IC* est déformée à ce stade de la simulation et vu que l'impact de celle-ci avec le sol est un phénomène beaucoup plus complexe.

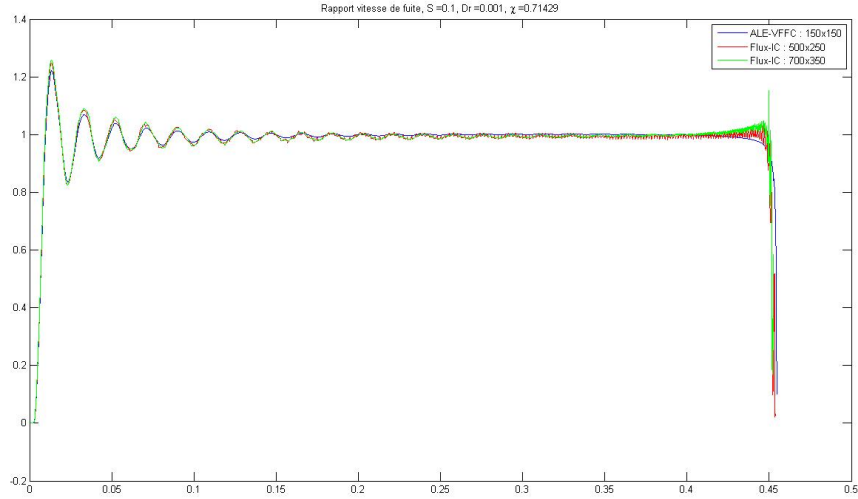


FIGURE 7.2 – Comparaison de la courbe $\lambda(t)$ obtenue par le code VFFC-ALE et le code Flux-IC.

Cette comparaison valide néanmoins notre code *VFFC – ALE*, et montre en outre son intérêt. En effet, le code *Flux – IC* montre des oscillations non physiques qui disparaissent lorsqu'on raffine le maillage. Dans le code *VFFC – ALE*, la courbe est lisse avec un maillage mobile de 150×150 mailles uniquement.

7.2 Perspectives

L'étude paramétrique menée dans les deux derniers chapitres et portant sur les deux premiers régimes de fuite est donc à compléter par une étude paramétrique du régime de chute de λ . Ceci permettra alors d'avoir un modèle de Bagnold complet pour les trois régimes valide jusqu'au moment de l'impact. Cette étude n'est pas réalisée dans le cadre de cette thèse et fait l'objet d'un travail en cours au sein du *CMLA*. Cette étude exploitera bien entendu le code *ALE – VFFC* développé dans le cadre cette thèse. Une fois cette étude conclue, la construction du modèle de Bagnold *0D* constituera l'étape suivante de ce projet de recherche. La résolution et l'étude de ce modèle de Bagnold permettra de comprendre l'influence de la fuite du gaz sur les valeurs maximales de pression atteintes avant ou au moment de l'impact.

Bibliographie

- [1] Jean-Philippe Braeunig, L. Brosset, Frédéric Dias, and Jean-Michel Ghidaglia. Phenomenological Study of Liquid Impacts through 2D Compressible Two-fluid Numerical Simulations. In *International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 21–29, Osaka, Japon, 2011. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE). ISBN : 978-1-880653-53-1 Lien vers le texte intégral : <http://www.isopec.org/publications/proceedings/ISOPE/ISOPE/2009/start.htm>.
- [2] Jean-Philippe Braeunig, L. Brosset, Frédéric Dias, and Jean-Michel Ghidaglia. On the effect of phase transition on impact pressures due to sloshing. In *International Offshore and Polar Engineering Conference*, Beijing, China, 2010. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE).
- [3] W. Lafeber, L. Brosset, and H. Bogaert. comparison of wave impact tests at large and full scale. In *International Offshore and Polar Engineering Conference*, Rodos, Greece, 2012. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE).
- [4] R. Bagnold. Interim report on wave-pressure research. *J. Inst Civil Eng.*, 12 :201–226, 1939.
- [5] H. Mitsuyasu. Shock pressure of breaking wave. In *Proc. of 10th Int. Conf. Coastal Eng.*, 1966.
- [6] C. Ramkema. A model law for wave impacts on coastal structures. In *Proceedings of 16th International Conference on Coastal Engineering*, pages 27–311, Hamburg, Germany, 1978.
- [7] H. Bogaert, L. Brosset, S. Léonard, and M. Kaminski. Sloshing and scaling : results from Sloskel project. In *20th Int. Offshore and Polar Eng. Conf.*, Beijing, China, 2010. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE).
- [8] Maud Mériaux and Serge Piperno. Méthodes de volumes finis en maillages variables pour des équations hyperboliques en une dimension. Rapport de recherche RR-4042, INRIA, 2000.
- [9] Maud Mériaux and Serge Piperno. Adaptation dynamique de maillage pour les lois de conservation hyperboliques en une dimension. Technical Report RR-4696, INRIA, January 2003.
- [10] Jean-Michel Ghidaglia and Frédéric Pascal. The normal flux method at the boundary for multidimensional finite volume approximations in cfd. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 24(1) :1 – 17, 2005.
- [11] J. M. Ghidaglia and F. Pascal. On boundary conditions for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws in the finite volume framework. *Publication du CMLA*, 2002.

Troisième partie

Simulation numérique d'un spray dans
un pipeline courbe

Chapitre 8

Modeling and Simulation of Thick Sprays through Coupling of a Finite Volume Euler Equation Solver and a Particle Method for a Disperse Phase

Cet article, en collaboration avec L. Desvillettes, J.M. Ghidaglia, et K. L. Nielsen¹ est paru dans la revue *Note di Matematica* (Note Mat.), 2012, vol. 32, no. 1, p. 63-85.

Abstract

We present here the principles of the coupling between an efficient numerical method for hyperbolic systems (and non conservative equations arising in multiphase flows), namely the FVCF scheme, on the one hand; and a particle method for the Vlasov-Boltzmann equation (of PIC-DSMC type), on the other hand.

Numerical results illustrating this coupling are shown for a problem involving a spray (droplets inside an underlying gas) in a pipe which is modeled by a 1D fluid-kinetic system.

8.1 Introduction

Sprays are complex flows which are constituted of an underlying gas in which a population of droplets or dust specks are dispersed, cf. [1]. There are various possibilities of modeling such flows cf. [2]; we wish here to focus on the case where the droplets are quite small (w.r.t to a characteristic length of the domain which is studied) but occupy a non negligible volume fraction of this domain (typically between 10^{-3} and 10^{-1}). In such a situation (in which the spray is sometimes called thick, cf. [1]), it is not possible to use a microscopic modeling (in which the shape of each droplet is computed), cf. [2], and one is led to use a statistical description of the disperse phase. It is then possible to model the spray by Eulerian-Lagrangian systems (cf. [1], [3]) or Eulerian-Eulerian systems (cf. [4], [5]) : we focus in this work on a typical Eulerian-Lagrangian system (described below).

Assuming (for the sake of simplicity) that the underlying gas follows the isentropic Euler's equations for compressible ideal flows, we now write the equations satisfied by the spray. Denoting by $\alpha := \alpha(t, x) \geq 0$, $\rho := \rho(t, x) \geq 0$, $u := u(t, x) \in \mathbb{R}^3$, $p := p(t, x) \geq 0$ the respective volume fraction, density, velocity and

1. K. L. Nielsen, Engineering Research & Development Department, ENI E&P Division, via Emilia 1, I-20097 San Donato Milanese (Mi), Italy.

pressure of the gas at time t and point x , and by $f := f(t, x, v, r) \geq 0$ the density in the phase space of the droplets (at time t , point x) of velocity v and radius r , we end up with the system (cf. [6] for example) :

Conservation of mass for the gas :

$$\partial_t(\alpha \rho) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u) = 0; \quad (8.1)$$

Balance of the i -th component of the momentum for the gas ($i = 1, \dots, 3$, the second component being vertical) :

$$\partial_t(\alpha \rho u_i) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u_i u) + \partial_{x_i} p = - \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}_+} f F_i dr dv - \alpha \rho |g| \delta_{2i}; \quad (8.2)$$

Balance of mass and momentum for the droplets :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot \left(f \left[\frac{F}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) = Q(f); \quad (8.3)$$

Conservation of total volume :

$$1 - \alpha = \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}_+} f \frac{4}{3} \pi r^3 dr dv; \quad (8.4)$$

Pressure law of the gas (for some constants $C_0, \gamma > 0$) :

$$p = C_0 \rho^\gamma. \quad (8.5)$$

In these equations, g is the (negative) acceleration of the gravity, ρ_l is the density of the droplets, and $F = (F_1, F_2, F_3)$ is the force received by a droplet from the gas :

$$F = \mathcal{F}(\rho, r, |u - v|) (u - v) - \frac{4}{3} \pi r^3 \nabla_x p, \quad (8.6)$$

where \mathcal{F} is a function given in a semi-empirical way (cf. [1] for example).

Finally, Q is a collision operator between droplets which reads :

$$\begin{aligned} Q(f)(t, x, v, r) = & \int_{v^* \in \mathbb{R}^3} \int_{r^* \in \mathbb{R}_+} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(f(t, x, v', r) f(t, x, v^*, r^*) \right. \\ & \left. - f(t, x, v, r) f(t, x, v^*, r^*) \right) B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\theta d\phi dr^* dv^*, \end{aligned} \quad (8.7)$$

where ingoing and outgoing velocities are related by the formulas

$$\begin{aligned} v' &= \frac{r^{*3} v^* + r^3 v}{r^{*3} + r^3} + \frac{r^{*3}}{r^{*3} + r^3} |v - v^*| \sigma, \\ v^{*'} &= \frac{r^{*3} v^* + r^3 v}{r^{*3} + r^3} - \frac{r^3}{r^{*3} + r^3} |v - v^*| \sigma, \end{aligned} \quad (8.8)$$

and $\sigma \in \mathcal{S}^2$ is a unit vector parameterized by two angles $\theta \in [0, \pi]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$.

Finally, the cross section appearing in definition (8.7) corresponds to hard spheres collisions :

$$B := B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) = |v - v^*| (r + r^*)^2 \frac{\sin \theta}{4}. \quad (8.9)$$

Note that the Euler equations for the gas and the Vlasov-Boltzmann equation for the disperse phase are coupled through the drag force (8.6) on the one side, and the volume fraction α on the other side : this is typical of thick sprays.

A large variety of schemes exists for solving the compressible Euler equation (or, more generally, systems of conservation laws and balance laws, cf. [7], [8] for example). Some of them can be extended in order to include nonconservative terms or lack of hyperbolicity which are typical of multiphase flows modeled by Eulerian-Eulerian systems. Recently, a family of schemes called FVCF (Finite Volume Characteristic Flux) has shown its efficiency for such flows (cf. [9], [10]). Our objective here is to extend the use of these FVCF schemes to the context of (thick) sprays modeled by Eulerian-Lagrangian systems such as (8.1) – (8.6), by coupling them to a particle method of PIC-DSMC type for the kinetic equation (8.3). Here PIC (Particles In Cells) means that quantities such as α are computed in each cell by adding quantities attached to each particle belonging to the corresponding cell (cf. [11] for example), and DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) means that the integrals in the collision kernel Q are computed by a Monte Carlo method (cf. [12] for example).

This paper is structured as follows : In section 2, we write down a 1D version of eq. (8.1) – (8.6), in order to get a suitable model for testing the behavior of our numerical method. Then, section 3 is devoted to the presentation of the numerical scheme. Finally, we show in section 4 the results of a few simulations.

8.2 Modeling of a spray in a pipe by 1D equations

We consider a (straight horizontal) pipe of diameter D (and section $\pi D^2/4$). It is represented by eq. (8.1) – (8.6) in the domain of computation $[0, L] \times B(0, D/2)$, where $B(0, D/2)$ is the disc of radius $D/2$. The axis are chosen in such a way that the vertical direction is along x_2 .

It is possible to average eq. (8.1) – (8.6) along a section of the pipe, and to perform an empirical closure by imposing $u_2 = u_3 = 0$ and by identifying nonlinear functions of averages and averages of nonlinear functions. This procedure is detailed in the more complex case of a curved pipe in section 4.

After these operations, we end up with the five following equations, where $t > 0$, $x \in [0, L]$ are the time and (1D) space variables, $\rho := \rho(t, x) \geq 0$, $u := u(t, x) \in \mathbb{R}$, $\alpha := \alpha(t, x) \in [0, 1]$, $p := p(t, x) \geq 0$ are the density, velocity along the axis of the pipe, volume fraction and pressure of the gas, and $f := f(t, x, v_1, v_2, v_3, r) \geq 0$ is the density in the phase space of droplets (note that like in most 1D kinetic models, the function f still depends on a 3D velocity, cf. [13] for example) :

$$\partial_t(\alpha \rho) + \partial_x(\alpha \rho u) = 0; \quad (8.10)$$

$$\partial_t(\alpha \rho u) + \partial_x(\alpha \rho u^2) + \partial_x p = - \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}} f F_1 dr dv; \quad (8.11)$$

$$\partial_t f + v_1 \partial_x f + \nabla_v \cdot \left(f \left[\frac{F}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) = Q(f); \quad (8.12)$$

$$1 - \alpha = \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}} f \frac{4}{3} \pi r^3 dr dv; \quad (8.13)$$

(for some constants $C_0, \gamma > 0$)

$$p = C_0 \rho^\gamma; \quad (8.14)$$

where

$$F = \mathcal{F} \left(\rho, r, \begin{vmatrix} u - v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} u - v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \pi r^3 \begin{pmatrix} \partial_x p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

is still empirically given and Q is still given by (8.7).

Note that thanks to eq. (8.15) and eq. (8.13), it is possible to rewrite eq. (8.11) as

$$\partial_t(\alpha \rho u) + \partial_x(\alpha \rho u^2) + \partial_x(\alpha p) = p \partial_x \alpha - \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}_+} f \mathcal{F} \begin{pmatrix} u - v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} dr dv. \quad (8.16)$$

This last formula is discretized in the next section (an empirical study shows that the direct discretization of $\alpha \partial_x p$ is slightly less stable).

We also introduce typical boundary conditions for both phases.

The boundary conditions are “entering” for the particles (this is the natural condition for kinetic equations when one deals with a non-physical boundary, the density of particles entering inside the tube is prescribed by two functions ψ_+ and ψ_-) :

$$\begin{aligned} f(t, 0, v, r) &= \psi_+(t, v, r) \quad \text{for } v_1 \geq 0, \\ f(t, L, v, r) &= \psi_-(t, v, r) \quad \text{for } v_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

For the fluid, various boundary conditions can be imposed. The numerical computations presented in section 4 are performed in the subsonic case : the flux of gas is prescribed on the left, and the pressure is prescribed on the right : in other words, for some value $\mathcal{G}_{in} \in \mathbb{R}$ and $p_{out} > 0$, we impose

$$\alpha(t, 0) \rho(t, 0) u(t, 0) = \mathcal{G}_{in}; \quad p(\rho(t, L)) = p_{out}. \quad (8.18)$$

Finally, the following initial data are given (for $x \in [0, L]$) : the density $\rho(0, x)$ and the velocity $u(0, x)$ of the gas, the density in the phase space $f(0, x, v, r)$ of the droplets :

$$\rho(0, x) \geq 0, \quad u(0, x) \in \mathbb{R}, \quad f(0, x, v, r) \geq 0. \quad (8.19)$$

8.3 The numerical method

We now describe how we couple the FVCF scheme and the particle (PIC-DSMC) method in order to discretize the previous set of equations (and boundary and initial conditions), that is (8.10), (8.12) – (8.14), (8.16) – (8.19).

We take a time step Δt and a space step Δx . The cells are therefore the intervals $[m\Delta x, (m+1)\Delta x]$, for $m \in \{0, \dots, M-1\}$ (where M is defined by $M\Delta x = L$).

The function f is semi-discretized (that is, discretized in space but not in time) as a sum of particles

$$f(t, x, r, v) \sim R \sum_{k=1}^{N(t)} \delta_{x_k(t), v_k(t), r_k}.$$

The numerical weight (representativity) R of the particles is fixed and common to all particles.

The macroscopic quantities are semi-discretized through their values at the center of the cells : $\rho(t, (m+1/2)\Delta x)$, $u(t, (m+1/2)\Delta x)$, $\alpha(t, (m+1/2)\Delta x)$ and $p(t, (m+1/2)\Delta x)$.

In the framework of the time discretization, we assume that the following quantities are given at a given time $n \Delta t$: the total number $N(n \Delta t)$ of particles in the simulation ; the positions, velocities and radiuses $x_k(n \Delta t)$, $v_k(n \Delta t)$, r_k of the particles, for $k = 1, \dots, N(n \Delta t)$; the macroscopic quantities $\rho(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x)$, $u(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x)$, $\alpha(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x)$, and $p(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x)$ for $m \in \{0, \dots, M - 1\}$.

First step : (PIC method) The evolution of the quantities x_k , v_k is performed (after time discretization) through an explicit Euler scheme (we denote by $[m\Delta x, (m + 1)\Delta x[$ the cell in which the particle k is located) :

$$x_k((n + 1) \Delta t) = x_k(n \Delta t) + \Delta t v_{k1}(n \Delta t),$$

$$v_k((n + 1) \Delta t) = v_k(n \Delta t) + \Delta t \left(\frac{F}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r_k^3} - |g| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

where

$$F = \mathcal{F} \left(\rho(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x), r_k, \begin{vmatrix} u(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x) - v_{k1} \\ -v_{k2} \\ -v_{k3} \end{vmatrix} \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} u(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x) - v_{k1} \\ -v_{k2} \\ -v_{k3} \end{pmatrix}$$

$$- \frac{2}{3} \pi \frac{r_k^3}{\Delta x} \begin{pmatrix} (p(n \Delta t, (q + 3/2)\Delta x) - p(n \Delta t, (m - 1/2)\Delta x)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The last term in the force is slightly modified (un-centered) for the first and the last cell of the domain.

The particles which leave the domain of computation $[0, L]$ are eliminated, and new particles are introduced, according to the boundary conditions. We obtain in this way $N((n + 1) \Delta t)$. Finally, at this point, the new cell in which each particle is living is computed, and the particles inside each cell are found.

Second step : (DSMC method)

The collisions (that is, the effect of $Q(f)$) are treated thanks to a standard DSMC (Discrete Simulation Monte Carlo) method, including the acceptance-rejection procedure sometimes known as ‘‘dummy collision procedure’’, cf. [14] and [15] for example.

Third step : The volume fraction of gas α is computed thanks to the formula

$$\alpha((n + 1) \Delta t, (m + 1/2)\Delta x) = 1 - \frac{4 \pi R}{3 \Delta x} \sum_{k \in L_m((n+1) \Delta t)} r_k^3,$$

where $L_m((n + 1) \Delta t)$ is the collection of k such that $x_k((n + 1) \Delta t) \in [m\Delta x, (m + 1)\Delta x[$.

Fourth step : (FVCF scheme) We denote by

$$W_m^n := \begin{pmatrix} W_{m(1)}^n \\ W_{m(2)}^n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\alpha \rho)(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x) \\ (\alpha \rho u)(n \Delta t, (m + 1/2)\Delta x) \end{pmatrix}$$

the vector made up of the discretized conservative quantities.

We also introduce the flux of the fluid system (8.10), (8.11) :

$$f_\alpha \begin{pmatrix} W_{(1)} \\ W_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{(2)} \\ W_{(2)}/W_{(1)} + \alpha p(W_{(1)}/\alpha) \end{pmatrix},$$

and its Jacobian matrix ($\partial f_\alpha / \partial W$) :

$$A_{\alpha,\rho,u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad (8.20)$$

where $c = \sqrt{p'(\rho)}$ is the velocity of sound. Finally we introduce the “sign” matrix

$$\text{sgn}(A_{\alpha,\rho,u}) = \begin{pmatrix} \text{sgn}(u+c) + \text{sgn}(u-c) - \frac{|u+c| - |u-c|}{2c} & \frac{\text{sgn}(u+c) - \text{sgn}(u-c)}{2c} \\ (c^2 - u^2) \frac{\text{sgn}(u+c) - \text{sgn}(u-c)}{2c} & \frac{|u+c| + |u-c|}{2c} \end{pmatrix},$$

which is used to upwind the fluxes for the finite volume scheme.

The FVCF scheme (cf. [9], [10]), originally designed for (non necessarily conservative) balance laws, can be adapted in the following way (here α is always taken at time $(n+1)\Delta t$, and ρ, u at time $n\Delta t$).

Fourth step, first part : We begin by the convective part of the equations, without taking into account the boundary conditions (that is, $m \neq 0, M-1$).

$$\begin{aligned} W_m^{n+1/2} = & W_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (f_{\alpha((m+1/2)\Delta x)}(W_m^n) + f_{\alpha((m+3/2)\Delta x)}(W_{m+1}^n)) \right. \\ & - \frac{1}{2} \text{sgn}(A_{\alpha,\rho,u((m+1/2)\Delta x)}) (f_{\alpha((m+3/2)\Delta x)}(W_{m+1}^n) - f_{\alpha((m+1/2)\Delta x)}(W_m^n)) \\ & - \frac{1}{2} (f_{\alpha((m-1/2)\Delta x)}(W_{m-1}^n) + f_{\alpha((m+1/2)\Delta x)}(W_m^n)) \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{sgn}(A_{\alpha,\rho,u((m+1/2)\Delta x)}) (f_{\alpha((m+1/2)\Delta x)}(W_m^n) - f_{\alpha((m-1/2)\Delta x)}(W_{m-1}^n)) \right\}. \end{aligned}$$

We obtain at this level the quantities $\rho((n+1/2)\Delta t, (m+1/2)\Delta x)$ and $u((n+1/2)\Delta t, (m+1/2)\Delta x)$, for $m \neq 0, M-1$. The formula for $W_m^{n+1/2}$ follows the FVCF method that is Finite Volume with Characteristic Fluxes. Indeed, this method consists in using the sign matrix in order to construct a numerical flux as a linear combination of the left flux and the right flux at an interface. As said, the principle is upwinding along the characteristic vectors of the Jacobian matrix (8.20).

Fourth step, second part : The boundary condition of the fluid are taken into account.

We introduce the left eigenvectors of $A_{\alpha,\rho,u}$ (that is, the right eigenvectors of ${}^t A_{\alpha,\rho,u}$) :

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} -(u+c) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} -(u-c) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

and its right eigenvectors (normalized in such a way that ${}^t \mathbf{l}_i \mathbf{r}_j = \delta_{ij}$),

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 \\ u-c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 \\ u+c \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

We first perform the discretization of the left boundary condition (at $x=0$) assuming that the flux $\alpha \rho u(0) =: \mathcal{G}_{in}$ is given.

We write down

$$\begin{aligned} W_0^{n+1/2} = & W_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \mathbf{l}_1 (f_{\alpha(3/2)\Delta x}(W_1^n) - f^-) \mathbf{r}_1 \right. \\ & \left. + {}^t \mathbf{l}_2 (f_{\alpha(1/2)\Delta x}(W_0^n) - f^-) \mathbf{r}_2 \right\}, \end{aligned}$$

or equivalently

$$\begin{aligned}
W_0^{n+1/2} = & W_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n) + f_{\alpha(3/2\Delta x)}(W_1^n)) \right. \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A_{\alpha,\rho,u(1/2\Delta x)}) (f_{\alpha(3/2\Delta x)}(W_1^n) - f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n)) \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} (f^- + f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n)) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A_{\alpha,\rho,u(1/2\Delta x)}) (f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n) - f^-) \right\},
\end{aligned}$$

where f^- is sought under the form :

$$f^- = f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n) + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{r}_2,$$

and

$${}^t\mathbf{l}_1 f^- = {}^t\mathbf{l}_1 f_{\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n), \quad f_1^- = \mathcal{G}_{in}.$$

This leads to

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 2c (\mathcal{G}_{in} - f_{1;\alpha(1/2\Delta x)}(W_0^n)).$$

Then, we perform the discretization of the right boundary condition (at $x = L$), assuming that the pressure $p(L) =: p_{out}$ is given.

We write down

$$\begin{aligned}
W_{M-1}^{n+1/2} = & W_{M-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \mathbf{l}_1 (f^+ - f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)) \mathbf{r}_1 \right. \\
& \left. + {}^t\mathbf{l}_2 (f^+ - f_{\alpha((M-3/2)\Delta x)}(W_{M-2}^n)) \mathbf{r}_2 \right\},
\end{aligned}$$

or equivalently

$$\begin{aligned}
W_{M-1}^{n+1/2} = & W_{M-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) + f^+) \right. \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A_{\alpha,\rho,u((M-1/2)\Delta x)}) (f^+ - f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)) \\
& \quad - \frac{1}{2} (f_{\alpha((M-3/2)\Delta x)}(W_{M-2}^n) + f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)) \\
& \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A_{\alpha,\rho,u((M-1/2)\Delta x)}) (f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) - f_{\alpha((M-3/2)\Delta x)}(W_{M-2}^n)) \right\},
\end{aligned}$$

where f^+ is sought under the form :

$$f^+ = f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) + \varepsilon_1 \mathbf{r}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{r}_2,$$

and

$${}^t\mathbf{l}_2 f^+ = {}^t\mathbf{l}_2 f_{\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n), \quad f_2^+ = (f_1^+)^2 / (\alpha p^{-1}(p_{out})) + \alpha p_{out}.$$

This leads to $\varepsilon_2 = 0$ and

$$\begin{aligned}
& f_{2;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) - \varepsilon_1 \frac{u-c}{2c} \\
& = \frac{1}{\alpha p^{-1}(p_{out})} (f_{1;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) - \frac{\varepsilon_1}{2c})^2 + \alpha p_{out}.
\end{aligned}$$

We take the smallest root ε_1 of the previous equation, that is

$$\varepsilon_1 = 2c^2 \min \left(-\alpha p^{-1}(p_{out}) \frac{u-c}{2c} + \frac{f_{1;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)}{c} + \sqrt{\Delta}, \right. \\ \left. -\alpha p^{-1}(p_{out}) \frac{u-c}{2c} + \frac{f_{1;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)}{c} - \sqrt{\Delta} \right),$$

with

$$\Delta = \left(\alpha p^{-1}(p_{out}) \frac{u-c}{2c} - \frac{f_{1;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)}{c} \right)^2 \\ - \frac{1}{c^2} \left(f_{1;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n)^2 + \alpha p^{-1}(p_{out}) (-f_{2;\alpha((M-1/2)\Delta x)}(W_{M-1}^n) + \alpha p_{out}) \right).$$

Fourth step, third part : The sources (which do not appear in the mass equation) are treated with a centered explicit scheme :

$$W_{m(1)}^{n+1} = W_{m(1)}^{n+1/2}, \\ W_{m(2)}^{n+1} = W_{m(2)}^{n+1/2} - \frac{R\Delta t}{\Delta x} \sum_{k \in L_m((n+1)\Delta t)} \mathcal{F} \\ \times \left(u((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x) - v_{k1}((n+1)\Delta t) \right) + \Delta t p((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x) \\ \times \left(\frac{\alpha((n+1)\Delta t, (m+3/2)\Delta x) - \alpha((n+1)\Delta t, (m-1/2)\Delta x)}{2\Delta x} \right).$$

The last term in the force is slightly modified (un-centered) for the first and the last cell of the domain. At the end of the third part of the fourth step, we obtain the quantities $\rho((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x)$ and $u((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x)$.

Fifth step : The pressure is computed thanks to the pressure law :

$$p((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x) = C_0 [\rho((n+1)\Delta t, (m+1/2)\Delta x)]^\gamma.$$

At the end of the fifth step, all the quantities x_k , v_k , $\rho(\cdot, (m+1/2)\Delta x)$, $u(\cdot, (m+1/2)\Delta x)$, $p(\cdot, (m+1/2)\Delta x)$, $\alpha(\cdot, (m+1/2)\Delta x)$ are known at the time $(n+1)\Delta t$, and the next time step of the numerical scheme can be performed.

8.4 Numerical results

We now present a typical computation for a spray in a curved pipe, thanks to the scheme described above (more precisely, to an adaptation of the scheme described above to a set of equations taking into account the curvature that is detailed below).

8.4.1 Establishment of the equations in a curved pipe

We present here the modifications to the equations (8.10) – (8.15) when one considers a pipe (of constant diameter D) with curvature (but without torsion : the center guide of the pipe is supposed to be contained in a vertical plane). The geometry of the pipe is described in Fig. 8.4.1

In order to get the equations for such a curved pipe, we introduce a change of variables in equations (8.1) – (8.6), defined as $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (s, h, q)$, with

$$x_1 = \int_0^s \cos(\gamma(\sigma)) d\sigma - h \sin(\gamma(s)), \quad x_2 = \int_0^s \sin(\gamma(\sigma)) d\sigma + h \cos(\gamma(s)),$$

$$x_3 = q,$$

where s is the curvilinear variable along the center guide of the pipe, h is an orthogonal variable included in the vertical plane, and γ is the angle with the horizontal at a given point of the centerline of the pipe. Finally, we denote by q a variable orthogonal to the vertical plane in which the center guide of the pipe is included.

Note that this change of variables makes sense when $\frac{D}{2} |\gamma'(s)| < 1$: we shall systematically make this assumption in the sequel. We also introduce the velocity of the gas in the new reference frame, and its components :

$$\begin{cases} u_s = \cos(\gamma(s)) u_1 + \sin(\gamma(s)) u_2, \\ u_h = -\sin(\gamma(s)) u_1 + \cos(\gamma(s)) u_2, \\ u_q = u_3, \end{cases}$$

and for the droplets :

$$v_s = \cos(\gamma(s)) v_1 + \sin(\gamma(s)) v_2, \quad v_h = -\sin(\gamma(s)) v_1 + \cos(\gamma(s)) v_2, \quad v_q = v_3.$$

Introducing now the unknowns $\rho_s = \rho(1 - h\gamma'(s))$, and $f_s = f(1 - h\gamma'(s))$, equations (8.1) – (8.6) become

$$\partial_t(\alpha \rho_s) + \partial_s \left(\frac{\alpha \rho_s u_s}{1 - h\gamma'(s)} \right) + \partial_h(\alpha \rho_s u_h) + \partial_q(\alpha \rho_s u_q) = 0; \quad (8.23)$$

$$\partial_t(\alpha \rho_s u_s) + \partial_s \left(\frac{\alpha \rho_s u_s^2}{1 - h\gamma'(s)} \right) + \frac{1}{1 - h\gamma'(s)} \partial_h((1 - h\gamma'(s)) \alpha \rho_s u_s u_h) \quad (8.24)$$

$$+ \partial_q(\alpha \rho_s u_s u_q) + \frac{\partial p}{\partial s} = - \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}_+} f_s F_s dr dv - \alpha \rho_s |g| \sin(\gamma(s));$$

$$\begin{aligned} \partial_t f_s + v_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{f_s}{1 - h\gamma'(s)} \right) + v_h (1 - h\gamma'(s)) \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{f_s}{1 - h\gamma'(s)} \right) + v_q \frac{\partial f_s}{\partial q} \\ + \frac{\gamma'(s)}{1 - h\gamma'(s)} v_s \left(v_h \frac{\partial f_s}{\partial v_s} - v_s \frac{\partial f_s}{\partial v_h} \right) + \frac{\partial}{\partial v_s} \left(f_s \left[\frac{F_s}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \sin(\gamma(s)) \right] \right) \\ + \frac{\partial}{\partial v_h} \left(f_s \left[\frac{F_h}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \cos(\gamma(s)) \right] \right) + \frac{\partial}{\partial v_q} \left(f_s \frac{F_q}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} \right) = \\ \int_{v^* \in \mathbb{R}^3} \int_{r^* \in \mathbb{R}_+} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(f_s(t, s, v', r) f_s(t, s, v^*, r^*) - f_s(t, s, v, r) f_s(t, s, v^*, r^*) \right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\frac{B(\theta, \left| \begin{pmatrix} v_s - v_s^* \\ v_h - v_h^* \\ v_q - v_q^* \end{pmatrix} \right|, r, r^*)}{1 - h \gamma'(s)} d\theta d\phi dr^* dv^*;$$

where $v' = \begin{pmatrix} v'_s \\ v'_h \\ v'_q \end{pmatrix}$ and $v^{*'} = \begin{pmatrix} v^{*'}_s \\ v^{*'}_h \\ v^{*'}_q \end{pmatrix}$ are given by

$$v' = \frac{r^{*3} \begin{pmatrix} v_s^* \\ v_h^* \\ v_q^* \end{pmatrix} + r^3 \begin{pmatrix} v_s \\ v_h \\ v_q \end{pmatrix}}{r^{*3} + r^3} + \frac{r^{*3}}{r^{*3} + r^3} \left| \begin{pmatrix} v_s - v_s^* \\ v_h - v_h^* \\ v_q - v_q^* \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \sigma_s \\ \sigma_h \\ \sigma_q \end{pmatrix},$$

$$v^{*'} = \frac{r^{*3} \begin{pmatrix} v_s^* \\ v_h^* \\ v_q^* \end{pmatrix} + r^3 \begin{pmatrix} v_s \\ v_h \\ v_q \end{pmatrix}}{r^{*3} + r^3} - \frac{r^3}{r^{*3} + r^3} \left| \begin{pmatrix} v_s - v_s^* \\ v_h - v_h^* \\ v_q - v_q^* \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \sigma_s \\ \sigma_h \\ \sigma_q \end{pmatrix},$$

and with the force

$$F = \begin{pmatrix} F_s \\ F_h \\ F_q \end{pmatrix} = \mathcal{F} \left(\frac{\rho_s}{(1 - h \gamma'(s))}, r, \left| \begin{pmatrix} u_s - v_s \\ u_h - v_h \\ u_q - v_q \end{pmatrix} \right| \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} u_s - v_s \\ u_h - v_h \\ u_q - v_q \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \pi r^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - h \gamma'(s)} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{\partial p}{\partial h} \\ \frac{\partial p}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

Note that the conservation of volume and pressure law now become

$$1 - \alpha = \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}} \frac{f_s}{1 - h \gamma'(s)} \frac{4}{3} \pi r^3 dr dv, \quad (8.26)$$

and

$$p = C_0 \left(\frac{\rho_s}{1 - h \gamma'(s)} \right)^\gamma. \quad (8.27)$$

We then take the average of the equation over sections of the pipe (that is, part of the pipe for which s is a given number : it consists in integrating over h and q in $B(0, D/2)$ and dividing by $|B(0, D/2)|$), and we identify averages of nonlinear functions of the unknowns as nonlinear functions of these averages. Moreover, we impose that $u_h = u_q = 0$.

We introduce the quantity $\delta := \delta(s)$ which is the average of $(1 - h \gamma'(s))^{-1}$:

$$\delta(s) = \frac{4}{\pi D^2} \int_{B(0, D/2)} \frac{1}{1 - h \gamma'(s)} dh dq,$$

and we keep the notations ρ_s, u_s, f_s, p for the averaged quantities.

Our set of equations becomes :

$$\partial_t(\alpha \rho_s) + \partial_s(\alpha \rho_s u_s \delta) = 0; \quad (8.28)$$

$$\partial_t(\alpha \rho_s u_s) + \partial_s(\alpha \rho_s u_s^2 \delta) + \partial_s(\alpha p) = - \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}} f_s F_s^* dr dv \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned}
& +p \partial_s \alpha - \alpha \rho_s |g| \sin(\gamma); \\
& \partial_t f_s + \partial_s (v_s \delta f_s) + \partial_{v_s} \left(\left[\gamma' \delta v_h v_s + \frac{F_s}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \sin(\gamma) \right] f_s \right) \\
& + \partial_{v_h} \left(\left[-\gamma' \delta v_s^2 + \frac{F_h}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} - |g| \cos(\gamma) \right] f_s \right) + \partial_{v_q} \left(\frac{F_q}{\frac{4}{3} \rho_l \pi r^3} f_s \right) = \\
& \delta \int_{v^* \in \mathbb{R}^3} \int_{r^* \in \mathbb{R}_+} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(f_s(t, s, v', r) f_s(t, s, v^{*'}, r^*) - f_s(t, s, v, r) f_s(t, s, v^*, r^*) \right) \\
& B(\theta, \left| \begin{pmatrix} v_s - v_s^* \\ v_h - v_h^* \\ v_q - v_q^* \end{pmatrix} \right|, r, r^*) d\theta d\phi dr^* dv^*;
\end{aligned} \tag{8.30}$$

with

$$\begin{aligned}
F^* &= \begin{pmatrix} F_s^* \\ F_h^* \\ F_q^* \end{pmatrix} = \mathcal{F} \left(\rho_s \delta, r, \left| \begin{pmatrix} u_s - v_s \\ -v_h \\ -v_q \end{pmatrix} \right| \right) \begin{pmatrix} u_s - v_s \\ -v_h \\ -v_q \end{pmatrix}; \\
F &= F^* - \frac{4}{3} \pi r^3 \delta \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
1 - \alpha &= \delta \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{r \in \mathbb{R}} f_s \frac{4}{3} \pi r^3 dr dv;
\end{aligned} \tag{8.31}$$

$$p = C_0 (\rho_s \delta)^\gamma. \tag{8.32}$$

8.4.2 Typical numerical experiences

We present here two typical computations for a spray in a curved pipeline. We present for each simulation the time evolution of pressure p , volume fraction α , gaz momentum $\rho_s u_s$, gaz velocity u_s and the mean velocity of the liquid computed as $u_l = \frac{\int f v d v d r}{\int f d v d r}$ (and taken 0 when $f = 0$).

First test case

The initial datum is homogeneous in space without droplets :

$$\rho_s = 1.0 \quad u_s = 100.0 \quad f_s = 0.0$$

The boundary conditions are as follows :

$$G_{in} = 100.0 \quad p_{out} = 80000.0$$

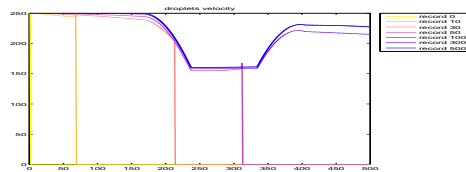
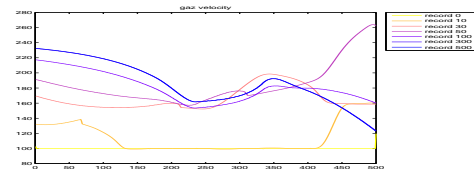
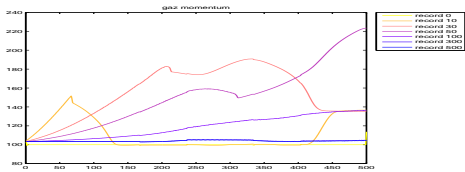
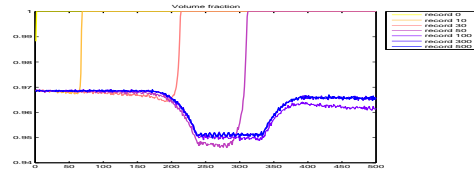
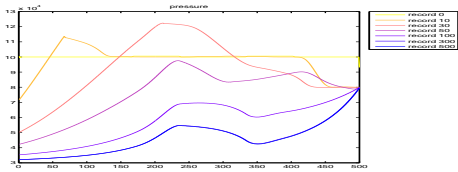
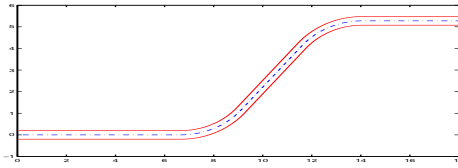
with the density of the entering droplets given by :

$$\psi_+(t, v, r) = 2 \cdot 10^5 \delta_{v=250.0} 1_{r \in [0.01, 0.02]}$$

The other constants and parameters of the computation are : the density of the liquid $\rho_l = 1100.0$, the pressure law in the gas $p = 100000.0 \rho_g^{1.4}$, and the drag force coefficient $\phi_{lg} = 0.00001$.

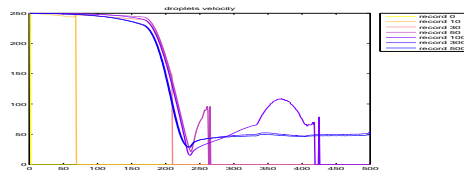
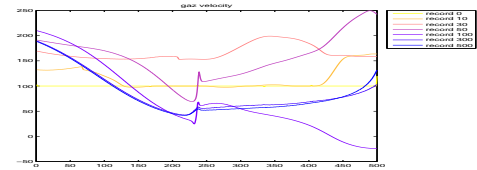
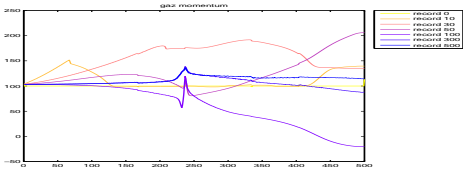
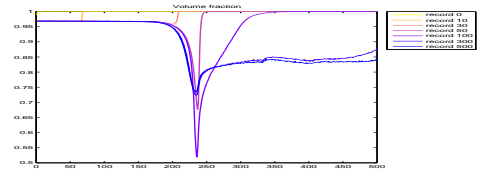
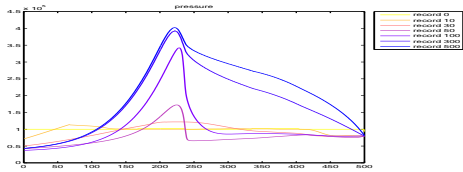
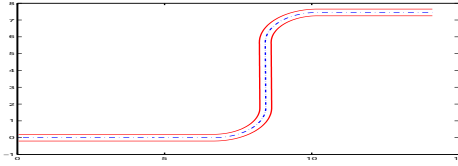
The representativity of the droplets is $R = 0.01$. The time step is $\Delta t = 0.00006$, the length step is $\Delta x = 0.04$.

The pipeline is curved and has the following geometry :



Second test case

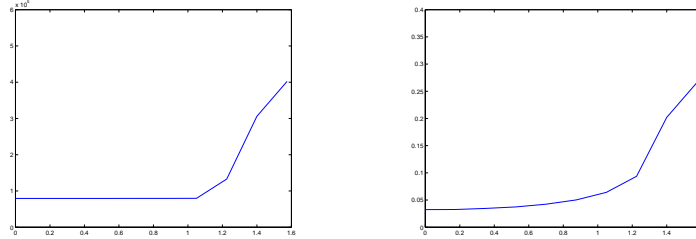
The parameters are the same as in the first test case, but the pipeline has a more steep geometry :



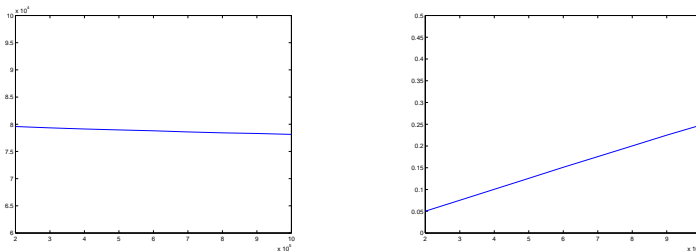
8.4.3 A parametric study

We present two parametric studies with respect to the slope of the pipeline and with respect to the ingoing particles flux. We present here the maximum pressure and maximum volume fraction of the steady state in function of the varying parameter. The figures in the left are concerned with the maximum pressure given in kPa , and those on the right with the maximum volume fraction between 0 and 1.

Variation with respect to the angle of curvature



Variation with respect to the flux of droplet



8.4.4 Conclusions

The model and numerical scheme presented here seem to be robust : not too big oscillations are appearing in the simulations, even in computations in which the model is at the limit of its validity (large volume fraction of droplets, important curvature of the pipe). This robustness is lessened when the model is discretized in such a way that the source term is not any more $p \partial_x \alpha$.

We also noted that the collisions have no visible effect on the physical macroscopic outputs, except from smoothing slightly the oscillations of the volume fraction profile.

Bibliographie

- [1] P. J. O'Rourke. *collective drop effect on Vaporizing Liquid Sprays*. Phd thesis, Los Alamos National University, 1981.
- [2] Laurent Desvillettes. Some aspects of the modeling at different scales of multiphase flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199(21-22) :1265–1267, 2010.
- [3] F.A. Williams. *Combustion Theory : Second Edition*. Combustion science and engineering series. Westview Press, 1994.
- [4] A. Faghri and Y. Zhang. *Transport Phenomena in Multiphase Systems*. Elsevier Academic Press, 2006.
- [5] Mamoru Ishii and Takashi Hibiki. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer, New York, 2006. With a foreword by Lefteri H. Tsoukalas.
- [6] Laurent Boudin, Laurent Desvillettes, and Renaud Motte. A modeling of compressible droplets in a fluid. *Commun. Math. Sci.*, 1(4) :657–669, 2003.
- [7] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [9] Jean-Michel Ghidaglia, Anela Kumbaro, and Gérard Le Coq. Une méthode “volumes finis” à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(10) :981–988, 1996.
- [10] Jean-Michel Ghidaglia, Anela Kumbaro, and Gérard Le Coq. On the numerical solution to two fluid models *via* a cell centered finite volume method. *Europ. Journal Mech. B/Fluids*, 20 :841–867, 2001.
- [11] I.U.N. Grigor'ev, Y.N. Grigoryev, V.A. Vshivkov, and M.P. Fedoruk. *Numerical "Particle-In-Cell" Methods : Theory and Applications*. Theory and Applications. VSP, 2002.
- [12] G. A. Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, volume 42 of *Oxford Engineering Science Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Corrected reprint of the 1994 original, With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch ; DD), Oxford Science Publications.
- [13] Leif Arkeryd, Carlo Cercignani, and Reinhard Illner. Measure solutions of the steady Boltzmann equation in a slab. *Comm. Math. Phys.*, 142(2) :285–296, 1991.
- [14] C. Baranger. *Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions dans les fluides complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [15] L. Pareschi. *Monte Carlo Methods for Kinetic Equations, Quantum and Kinetic Transport : Tutorials*. USA, march 2009.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Validation du code ALE en dimension 1 par comparaison au modèle de Bagnold sans fuite

Cette annexe a pour but de valider, dans le cas d'une simulation 1D, les résultats du schéma VFFC-ALE présenté dans le chapitre 5. On présentera brièvement une étude du modèle de Bagnold sans fuite de la figure A.1. On comparera certains résultats théoriques de ce modèle avec ceux obtenus en résolvant le système EDP associé par notre code VFFC-ALE (piston 1D). On se placera dans le cas d'un piston sans vitesse initiale et avec un champ de gravité $g = 9.8ms^{-2}$.

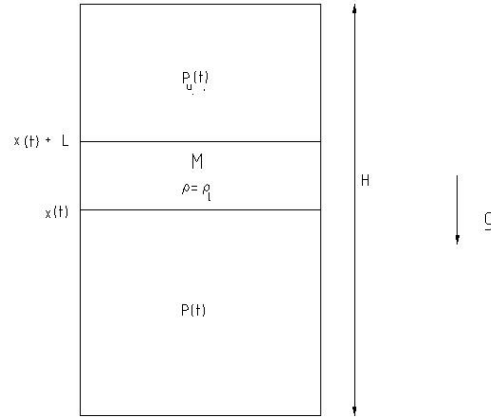


FIGURE A.1 – Modèle de Bagnold, cas avec pesanteur : $\rho_l L \frac{d^2 x}{dt^2} = P \left(\rho_0 \frac{x(t)}{x_0} \right) - P \left(\rho_0 \frac{H-L-x(t)}{H-L-x_0} \right) - \rho_l L g$.

L'équation décrivant le mouvement de la masse est alors

$$\rho_l L \frac{d^2 x}{dt^2} = P \left(\rho_0 \frac{x_0}{x(t)} \right) - P \left(\rho_0 \frac{H-L-x_0}{H-L-x(t)} \right) - \rho_l L g.$$

On suppose que le gaz entourant la masse M est un gaz parfait de coefficient adiabatique γ : $P(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$. Le cas d'un piston ouvert correspond au cas $H = +\infty$ et $P_u = P_0$. En introduisant les grandeurs sans

dimension

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{x_0} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} t,$$

et les nombres sans dimension

$$S = \frac{\rho_l L g}{p_0} \quad \text{et} \quad a = \frac{x_0}{H - L - x_0},$$

appelés respectivement nombre d'impact et rapport d'aspect, on aboutit à l'équation adimensionnée suivante

$$S \frac{d^2 \xi}{d\tilde{t}^2} = \left(\frac{1}{\xi}\right)^\gamma - \left(\frac{1}{1 + a(1 - \xi)}\right)^\gamma - S.$$

En multipliant cette équation par $\frac{d\xi}{d\tilde{t}}$ et en intégrant entre 0 et \tilde{t} on obtient

$$S \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tilde{t}}\right)^2 + S\xi = S + Q(\xi),$$

avec $Q(\xi) = \int_0^\xi \left[\left(\frac{1}{s}\right)^\gamma - \left(\frac{1}{1+a(1-s)}\right)^\gamma \right] ds$. On en déduit que les valeurs extrémales de ξ sont solutions de l'équation algébrique

$$S\xi_* = S + Q(\xi_*). \tag{A.1}$$

Les pressions adimensionnées extrémales sont alors données par : $p_* = \left(\frac{1}{\xi_*}\right)^\gamma$. Pour un rapport d'aspect a donné, l'équation algébrique (A.1) peut être résolue numériquement pour tracer la courbe de Bagnold donnant la pression maximale adimensionnée en fonction du nombre d'impact S .

Ayant obtenu ces courbes de Bagnold, on résout alors le système *EDP* décrivant le problème du piston en dimension 1 par la méthode VFFC-ALE du chapitre 5 pour différentes valeurs de S et pour des rapports de densité $DR = \frac{\rho}{\rho_l}$ différents. On compare alors la courbe des valeurs maximales de la pression adimensionnée en fonction de S avec la courbe théorique de Bagnold. La figure A.2 montre alors qu'on a une bonne concordance entre les pics de pression donnés par le schéma VFFC-ALE et les courbes théoriques de Bagnold, aussi bien pour le piston fermé que ouvert. On remarque également que la valeur de la pression maximale ne dépend pas de DR comme le prévoit le modèle de Bagnold.

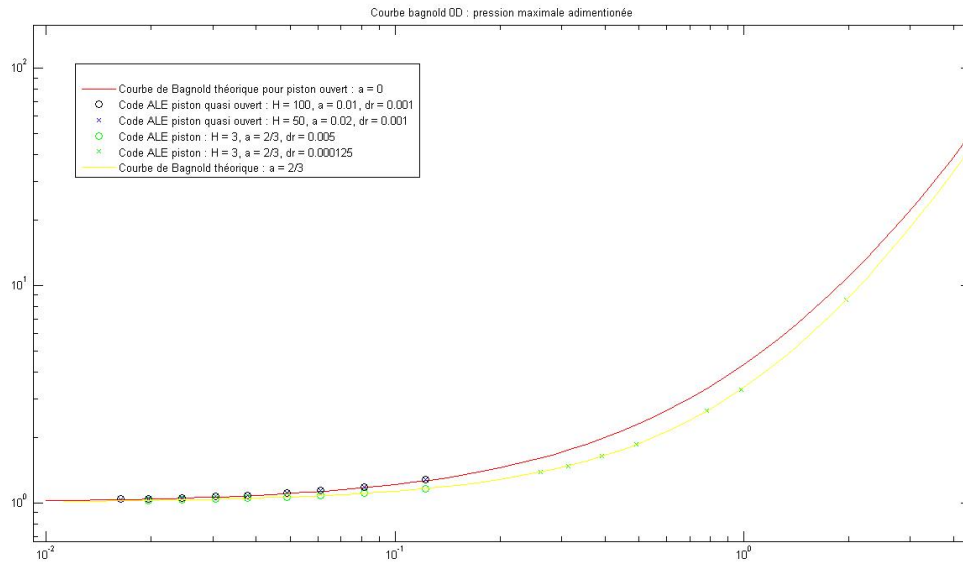


FIGURE A.2 – Comparaison des courbes de Bagnold avec les pics de pression obtenus pour le piston $1D$ par le schéma VFFC-ALE, pour différentes valeurs de a et DR .

Annexe B

Démonstrations des lemmes utilisés au chapitre 3

B.1 Inégalités de Grönwall

Lemme B.1.1 (Grönwall discret). Soit $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives et continues définies sur \mathbb{R}_+ . On fixe T un réel strictement positif et on suppose l'existence de trois constantes positives C_1 , C_2 et C_3 telles que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, T]$, on a

$$a_{n+1}(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t a_n(s) ds + C_3 \int_0^t a_{n+1}(s) ds.$$

Alors on a l'existence d'une constante K telle que, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, T]$

1. Si C_1 est nulle, alors

$$a_n(t) \leq \frac{K^n t^n}{n!}.$$

2. Si C_1 est non nulle, alors

$$a_n(t) \leq K e^{KT}.$$

Preuve :

Le cas où $C_3 = 0$ se traite par récurrence. Pour se ramener au cas général, il suffit de dériver la fonction $e^{-C_3 t} \int_0^t a_{n+1}(s) ds$. ♦

Lemme B.1.2 (Grönwall continu). Soit $a(t)$, $b(t)$ deux fonctions continues et positives définies sur \mathbb{R}_+ . On suppose qu'on a l'inégalité suivante pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$a(t) \leq b(t) + C \int_0^t a(s) ds.$$

Alors on a

$$a(t) \leq b(t) + C \int_0^t b(s) e^{C(t-s)} ds.$$

Preuve : On a

$$\left\{ e^{-Ct} \int_0^t a(s) ds \right\}' = e^{-Ct} \left[a(t) - C \int_0^t a(s) ds \right] \leq e^{-Ct} b(t).$$

Donc

$$\int_0^t a(s) ds \leq \int_0^t e^{C(t-s)} b(s) ds,$$

et le contrôle souhaité s'en déduit. \blacklozenge

Lemme B.1.3 (Grönwall continu surlinéaire). Soit $a(t)$ une fonction continue et positive définie sur \mathbb{R}_+ et soit α un réel strictement supérieur à 1. On suppose qu'on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$a(t) \leq A_0 + B_0 \int_0^t a(s)^\alpha ds. \quad (\text{B.1})$$

Alors il existe un réel $t_* > 0$, ne dépendant que de α et des constantes A_0 et B_0 , tels que pour $t \in [0, t_*]$, on a

$$a(t) \leq 2A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t).$$

Preuve : Si a est bornée sur \mathbb{R}_+ par $2A_0$, la proposition est démontrée. Sinon on pose :

$$T_* = \inf\{t \geq 0; a(t) \geq 2A_0\},$$

qui est bien défini. Remarquons alors que :

- ❶ Comme a est continue, on a nécessairement $a(T_*) \geq 2A_0$.
- ❷ Par définition, pour tout $t \leq T_*$, on a : $a(t) \leq 2A_0$.
- ❸ La fonction $t \mapsto A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t)$ est **strictement** majorée par $2A_0$ pour

$$t < t_* := \frac{\ln(2)}{2^{\alpha-1} B_0 A_0^{\alpha-1}}.$$

D'après ❷ il suffit de prouver que $t_* \leq T_*$. Supposons qu'on ait le contraire. Le point ❷, l'équation (B.1), puis le lemme de Grönwall continu fournissent successivement, pour $t < T_*$

$$\begin{aligned} a(t) &\leq 2A_0 \\ &\Downarrow \\ a(t) &\leq A_0 + B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} \int_0^t a(s) ds \\ &\Downarrow \\ a(t) &\leq A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} t). \end{aligned}$$

Mais alors, par continuité et d'après le point ❸, on a

$$a(T_*) \leq A_0 \exp(B_0 2^{\alpha-1} A_0^{\alpha-1} T_*) < 2A_0,$$

ce qui contredit ❶. \blacksquare

B.2 Une version simple du lemme d'Aubin

Lemme B.2.1. *L'injection $H^1([0, T] \times \mathbb{T}^3) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ est compacte.*

Preuve :

On reprend par la suite la convention $L_t^2(\mathbb{E})$ du chapitre 3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_{t, \mathbf{x}}^1$.

- ❶ Montrons que $A = \{t \in [0, T] : \|f_n(t)\|_{H^1(\mathbb{T}^3)} \rightarrow +\infty\}$ est de mesure nulle. Dans le cas contraire, on aurait, pour tout $R > 0$,

$$R\mu(A) \leq \int_A \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t)\|_{H_{\mathbf{x}}^1}^2 dt.$$

Il viendrait alors, d'après le lemme de Fatou,

$$R\mu(A) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_A \|f_n(t)\|_{H_{\mathbf{x}}^1}^2 \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H_{t, \mathbf{x}}^1}^2,$$

ce qui est impossible puisque le terme de droite est fini. Par définition de A , pour tout t dans $[0, T] \setminus A$, la suite $(\|f_n(t)\|_{H_{\mathbf{x}}^1})_n$ possède une sous-suite bornée. Comme A est de mesure nulle, $[0, T] \setminus A$ contient une partie dense et dénombrable de $[0, T]$, que l'on note $B = (t_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Puisque B est dénombrable, quitte à extraire diagonalement une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le long de B , on peut supposer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n(t_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_{\mathbf{x}}^1$.

- ❷ $(f_n)_n$ est **uniformément équicontinue** en t à valeurs dans $L_{\mathbf{x}}^2$, car bornée dans $H_t^1(L_{\mathbf{x}}^2)$.
 ❸ La compacité de l'injection $H_{\mathbf{x}}^1 \subset L_{\mathbf{x}}^2$ permet d'extraire diagonalement une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que pour tout p , la suite $(f_{\varphi(n)}(t_p))_n$ converge dans $L_{\mathbf{x}}^2$ vers un certain élément $f(t_p) \in L_{\mathbf{x}}^2$.
 ❹ f est uniformément continue sur B à valeurs dans $L_{\mathbf{x}}^2$. En effet, pour t, s dans B ,

$$\|f(t) - f(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq \|f(t) - f_{\varphi(n)}(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} + \|f_{\varphi(n)}(t) - f_{\varphi(n)}(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} + \|f_{\varphi(n)}(s) - f(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n = n(t, s) > 0$ tel que $\|f(t) - f_{\varphi(n)}(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} < \varepsilon/3$ et $\|f(s) - f_{\varphi(n)}(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} < \varepsilon/3$.
 $(f_{\varphi(n)})_n$ étant uniformément équicontinue, il existe δ indépendant de t, s et n tels que $|t - s| \leq \delta \Rightarrow \|f_{\varphi(n)}(t) - f_{\varphi(n)}(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} < \varepsilon/3$.
 Alors $|t - s| \leq \delta \Rightarrow \|f(t) - f(s)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} < \varepsilon$.

- ❺ On prolonge f en une fonction uniformément continue de $[0, T]$ à valeurs dans $L_{\mathbf{x}}^2$.
 ❻ f est limite uniforme de $(f_{\varphi(n)})_n$ dans \mathcal{C}_t^0 .

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ le rayon correspondant à ε dans la définition de l'uniforme continuité de f , et dans la définition de l'**uniforme** équicontinuité de $(f_n)_n$.

Il existe un ensemble fini $(t_i)_{i \in I}$ tel que $(B(t_i, \delta))_i$ recouvre $[0, T]$. Soit N tel que pour tout $n > N$ et pour tout $i \in I$, on a

$$\|f(t_i) - f_{\varphi(n)}(t_i)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq \varepsilon.$$

Soit alors $\sigma \in [0, T]$,

$$\|f(\sigma) - f_{\varphi(n)}(\sigma)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq \|f(\sigma) - f(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} + \|f(t) - f_{\varphi(n)}(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} + \|f_{\varphi(n)}(t) - f_{\varphi(n)}(\sigma)\|_{L_{\mathbf{x}}^2}.$$

Il existe donc $i = i(\sigma)$ tel que

$$\|f(\sigma) - f(t_i)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq \varepsilon,$$

et pour tout n

$$\|f_{\varphi(n)}(\sigma) - f_{\varphi(n)}(t_i)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout $n > N$

$$\|f(\sigma) - f_{\varphi(n)}(\sigma)\|_{L_{\mathbf{x}}^2} \leq 3\varepsilon.$$

■

B.3 Compacité par la méthode de DiPerna-Lions

On généralise une méthode due à DiPerna-Lions dans [1] en la sortant du cadre L^1/L^∞ en temps, comme le décrit le résultat suivant (dimension 3, sur le tore)

Proposition B.3.1. *Soient $q \in [1, \infty]$ et $p \in [1, 3[$. Soit $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions de $L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p})$ et $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions de $L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'})$, avec $s < p^* := \frac{3p}{3-p}$. On suppose qu'on a les convergences*

$$(a_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a, \quad \text{dans } L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p}) - w\star,$$

$$(b_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} b, \quad \text{dans } L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'}) - w\star.$$

Si la suite $(\partial_t b_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L_t^{q'}(H_{\mathbf{x}}^{-m})$ pour un certain entier $m \in \mathbb{Z}$, alors on a la convergence

$$(a_\varepsilon b_\varepsilon)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} ab,$$

au sens des mesures, i.e. contre des fonctions tests appartenant à $\mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^0$.

Preuve :

Remarquons d'abord que les produits $(a_\varepsilon b_\varepsilon)_\varepsilon$ sont bien des éléments de $L_{t,\mathbf{x}}^1$ (injection de Sobolev) et que les suites $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ sont évidemment bornées dans les espaces considérés (car convergentes faiblement).

❶ On a le lemme suivant

Lemme : (commutateur)

Soit $q \in [1, \infty]$ et $p \in [1, 3[$. Soit $(\phi_\eta)_{\eta>0}$ une famille de fonctions régularisantes (paires) telle que $\text{Supp}(\phi_\eta) \subset B_\eta := B(0, \eta)$. Soit $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de fonctions bornée dans $L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p})$ ($p < 3$) et $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille bornée dans $L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'})$, avec $s < p^ := 3p/(3-p)$. Alors le commutateur*

$$S_{\varepsilon,\eta} := a_\varepsilon(b_\varepsilon \star \phi_\eta) - (a_\varepsilon b_\varepsilon) \star \phi_\eta$$

tend vers 0 avec η dans $L_{t,\mathbf{x}}^1$, uniformément en ε .

Preuve :

Commençons par remarquer que pour $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^3$, la suite de fonctions $(\tau_{\mathbf{h}} a_\varepsilon - a_\varepsilon)_\varepsilon$ tend vers 0 avec \mathbf{h} dans $L_t^q(L_{\mathbf{x}}^s)$, uniformément en ε . Pour le voir, on écrit, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{t,\mathbf{x}}^\infty$ et $(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$:

$$\varphi(t, \mathbf{x} + \mathbf{h}) - \varphi(t, \mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{h} \cdot \nabla \varphi(t, \mathbf{x} + \sigma \mathbf{h}) d\sigma,$$

d'où on obtient

$$|\varphi(t, \mathbf{x} + \mathbf{h}) - \varphi(t, \mathbf{x})|^s \leq |\mathbf{h}|^s \int_0^1 |\nabla \varphi(t, \mathbf{x} + \sigma \mathbf{h})|^s d\sigma,$$

et donc finalement,

$$\begin{aligned}
\|\tau_{\mathbf{h}}\varphi(t) - \varphi(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^s} &\leq |\mathbf{h}|^s \int_{\mathbb{T}^3} \left\{ \int_0^1 |\nabla\varphi(t, \mathbf{x} - \sigma\mathbf{h})|^s d\sigma \right\} d\mathbf{x} \\
&= |\mathbf{h}|^s \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla\varphi(t, \mathbf{x} - \sigma\mathbf{h})|^s d\mathbf{x} \right\} d\sigma \\
&= |\mathbf{h}|^s \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla\varphi(t, \mathbf{x})|^s d\mathbf{x} \right\} d\sigma \\
&= |\mathbf{h}|^s \|\nabla\varphi(t)\|_{L_{\mathbf{x}}^s}^s.
\end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$\|\tau_{\mathbf{h}}\varphi - \varphi\|_{L_t^q(L_{\mathbf{x}}^s)} \leq |\mathbf{h}| \|\nabla_{\mathbf{x}}\varphi\|_{L_t^q(L_{\mathbf{x}}^s)},$$

qui s'étend par densité à $L_t^q(W_{\mathbf{x}}^{1,p})$. Ceci étant dit, on explicite la forme du commutateur

$$S_{\varepsilon,\eta}(t, \mathbf{x}) = \int_{B_\eta} \left[a_\varepsilon(t, \mathbf{x}) - a_\varepsilon(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] b_\varepsilon(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_\eta(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

et on a donc, par Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} |S_{\varepsilon,\eta}(t, \mathbf{x})| dt d\mathbf{x} \\
&\leq \|b_\varepsilon\|_{L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{s'})} \int_{B_\eta} |\varphi_\eta(\mathbf{y})| \|\tau_{\mathbf{y}}a_\varepsilon - a_\varepsilon\|_{L_t^q(L_{\mathbf{x}}^s)} d\mathbf{y},
\end{aligned}$$

ce qui assure la convergence uniforme annoncée. \square

- ② Puisque $(\partial_t b_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L_t^{q'}(H_{\mathbf{x}}^{-m})$, on obtient facilement que $(b_\varepsilon \star \varphi_\eta)_\varepsilon$ est bornée dans $W_t^{1,q'}(H_{\mathbf{x}}^\ell)$, avec ℓ suffisamment grand pour qu'on ait l'injection compacte $H_{\mathbf{x}}^\ell \hookrightarrow L_{\mathbf{x}}^{p'}$, et on obtient donc, pour tout η fixé, l'existence d'une extraction (en ε) de $(b_\varepsilon \star \varphi_\eta)_\varepsilon$ convergent fortement dans $L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{p'})$ vers $b \star \varphi_\eta$ (unicité de la limite faible- \star). Comme $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement dans $L_t^q(L_{\mathbf{x}}^s)$, on obtient finalement (faible + fort = faible), à η fixé

$$(a_\varepsilon(b_\varepsilon \star \varphi_\eta))_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a(b \star \varphi_\eta),$$

dans $L_{t,\mathbf{x}}^1$ faible. On peut choisir l'extraction en ε de sorte qu'elle convienne pour tous les η , après avoir discrétisés ceux-ci en $\eta = 1/k$ (extraction diagonale).

- ③ On a la convergence

$$a(b \star \varphi_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} ab,$$

dans $L_{t,\mathbf{x}}^1$ fort.

- ④ On a la convergence

$$(a_\varepsilon b_\varepsilon) \star \varphi_\eta - a_\varepsilon b_\varepsilon \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

au sens des mesures (fonctions tests continues), uniformément en ε (en ayant fixé la fonction test). En effet, si θ est une fonction continue de t, \mathbf{x} , par parité de φ_η , on a

$$\langle (a_\varepsilon b_\varepsilon) \star \varphi_\eta - a_\varepsilon b_\varepsilon, \theta \rangle = \langle a_\varepsilon b_\varepsilon, \theta \star \varphi_\eta - \theta \rangle,$$

et le terme du membre de droite tend vers 0 car $(a_\varepsilon b_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L_{t,\mathbf{x}}^1$ et $(\theta \star \varphi_\eta - \theta)_\eta$ tend vers 0 dans $L_{t,\mathbf{x}}^\infty$ (car θ est uniformément continue).

⑤ On forme les différences correspondant aux points précédents :

$$\begin{aligned}
ab - a_\varepsilon b_\varepsilon &= ab - a(b \star \varphi_\eta) \\
&\quad + a(b \star \varphi_\eta) - a_\varepsilon(b_\varepsilon \star \varphi_\eta) \\
&\quad + a_\varepsilon(b_\varepsilon \star \varphi_\eta) - (a_\varepsilon b_\varepsilon) \star \varphi_\eta \\
&\quad + (a_\varepsilon b_\varepsilon) \star \varphi_\eta - a_\varepsilon b_\varepsilon.
\end{aligned}$$

On se fixe une fonction test θ continue. On choisit d'abord η pour toutes les lignes sauf la deuxième (les convergences y sont uniformes en ε d'après ce qui précède). On choisit ensuite ε pour gérer la deuxième ligne.

On a finalement obtenu la convergence voulue. ■

Proposition (variante) : Dans la proposition précédente, dans le cas où $q < \infty$, on peut se contenter d'une borne dans $L_t^1(H_{\mathbf{x}}^{-m})$ pour $(\partial_t b_\varepsilon)_\varepsilon$, et aboutir à la même conclusion, en rajoutant aux hypothèses de convergences, la convergence de $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ vers a , dans $L_t^r(L_{\mathbf{x}}^p)$ faible- \star , pour un certain $r > q$.

Preuve :

La preuve est identique à l'exception du point ②. Pour ce dernier, on remarque que $(b_\varepsilon \star \phi_\eta)_\varepsilon$ est bornée dans $W_t^{1,1}(H_{\mathbf{x}}^\ell)$ avec ℓ suffisamment grand pour qu'on ait l'injection compacte $H_{\mathbf{x}}^\ell \hookrightarrow L_{\mathbf{x}}^{p'}$, et on obtient donc, pour tout η fixé, l'existence d'une extraction (en ε) de $(b_\varepsilon \star \varphi_\eta)_\varepsilon$ convergent fortement dans $L_t^1(L_{\mathbf{x}}^{p'})$ vers $b \star \varphi_\eta$ (unicité de la limite faible- \star). Comme $(b_\varepsilon)_\varepsilon$ et donc $(b_\varepsilon \star \varphi_\eta)_\varepsilon$ sont bornées dans $L_t^{q'}(L_{\mathbf{x}}^{p'})$, avec $q' > r' \geq 1$, on en déduit par interpolation que $(b_\varepsilon \star \varphi_\eta)_\varepsilon$ converge fortement dans $L_t^{r'}(L_{\mathbf{x}}^{p'})$, qui s'associe donc convenablement avec l'hypothèse de convergence faible- \star rajoutée sur $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ pour obtenir

$$(a_\varepsilon(b_\varepsilon \star \varphi_\eta))_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a(b \star \varphi_\eta),$$

dans $L_{t,\mathbf{x}}^1$ faible.

Annexe C

Existence de solution pour le modèle à deux rayons

On note α le carré du rapport entre les rayons des petites et grandes particules : $\alpha = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. On veut établir un résultat d'existence de solutions pour le système (1.10) – (1.13) du chapitre 1, paramétré par α :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}^\alpha = 0, \\ \rho[\partial_t \mathbf{u}^\alpha + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha)] + \nabla_{\mathbf{x}} p^\alpha - \nu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\alpha = \\ \quad - m_f \int_{\boldsymbol{\xi}} C(\mathbf{u}^\alpha - \boldsymbol{\xi}) m_f^{-2/3} f^\alpha - m_f \int_{\boldsymbol{\xi}} C \frac{\mathbf{u}^\alpha - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} m_f^{-2/3} g^\alpha, \\ \partial_t f^\alpha + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f^\alpha + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [C(\mathbf{u}^\alpha - \boldsymbol{\xi}) m_f^{-2/3} f^\alpha] = -\frac{f^\alpha}{\tau}, \\ \partial_t g^\alpha + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g^\alpha + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [C(\mathbf{u}^\alpha - \boldsymbol{\xi}) m_g^{-2/3} g^\alpha] = \frac{f^\alpha}{\tau}. \end{array} \right.$$

On simplifie le système en prenant toutes les constantes physiques = 1 (sauf α). On omettra aussi les α en indice pour la suite. Le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} p - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = - \int_{\boldsymbol{\xi}} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) f - \int_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} g, \\ \partial_t f + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) f] = -f, \\ \partial_t g + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left[\frac{(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})}{\alpha} g \right] = f. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(C.1)} \\ \text{(C.2)} \\ \text{(C.3)} \\ \text{(C.4)} \end{array}$$

On considère les données initiales suivantes :

$$f(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{in}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{(C.5)}$$

$$g(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = g_{in}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{(C.6)}$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3. \quad \text{(C.7)}$$

avec les hypothèses

$$\begin{cases} f_{\mathbf{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} < \infty, \\ g_{\mathbf{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} < \infty, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{in}} \in L^2(\mathbb{T}^3). \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

La démonstration présentée dans cette annexe est basée sur une généralisation de la démonstration de Moussa et al. dans [2] pour le système Vlasov/Navier-Stokes-incompressible. Notre démonstration suit la même démarche en incluant à chaque étape les modifications nécessaires pour traiter l'équation supplémentaire en g et les termes de création et de fragmentation de particules. Certaines étapes de la preuve communes avec la preuve dans [2] sont traitées différemment ici, et d'autres ne sont pas présentées, le lecteur est renvoyé à [2] pour les détails.

C.1 Système Régularisé

Soit $\varepsilon > 0$ et ψ_ε un noyau régularisant défini par $\psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon^{-3} \psi(\boldsymbol{\xi}/\varepsilon)$, où ψ est un élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Soit φ_ε un autre noyau régularisant défini sur \mathbb{T}^3 et périodique. On définit la convolution de deux éléments \mathbb{T}^3 -périodiques par :

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Soit γ_ε un autre élément positif de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{T}^3)$, à support inclus dans la boule $\mathbf{B}(0, 1/\varepsilon)$, borné par 1 et valant 1 sur la boule $\mathbf{B}(0, 1/2\varepsilon)$. On considère enfin une fonction saturante β_ε , définie par $\beta_\varepsilon(x) = x\beta(\varepsilon x)$, où β est un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égal à 1 sur $] -1, 1[$. On adoptera la notation vectorielle, pour $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$:

$$\beta(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \beta(u_1) \\ \vdots \\ \beta(u_N) \end{pmatrix}.$$

C.1.1 Régularisation

On considère le système régularisé suivant :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

$$S^\varepsilon \begin{cases} \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + ((\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) + \nabla_{\mathbf{x}} p_\varepsilon - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon = - \int_{\boldsymbol{\xi}} (\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) f_\varepsilon \gamma_\varepsilon - \int_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} g_\varepsilon \gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) f_\varepsilon] = -f_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{cases} \partial_t g_\varepsilon + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g_\varepsilon + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left[\frac{(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon - \boldsymbol{\xi})}{\alpha} g_\varepsilon \right] = f_\varepsilon, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

avec les données initiales

$$f_\varepsilon(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{C.13})$$

$$g_\varepsilon(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) (\phi_\varepsilon \star g_{\mathbf{in}})(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\mathbf{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}) := (\varphi_\varepsilon \star \mathbf{u}_{\mathbf{in}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^3, \quad (\text{C.15})$$

où

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}).$$

C.1.2 Propriétés des données initiales régularisées

1. $(f_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $f_{\mathbf{in}}$ fortement dans tous les $L^p(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, pour $1 \leq p < \infty$ et faible- \star dans $L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.
2. $(g_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $g_{\mathbf{in}}$ fortement dans tous les $L^p(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, pour $1 \leq p < \infty$ et faible- \star dans $L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.
3. $(M_2 f_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $M_2 f_{\mathbf{in}}$ et de même $(M_2 g_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $M_2 g_{\mathbf{in}}$. Démontrons le pour la suite $(M_2 f_{\mathbf{in}}^\varepsilon)_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
M_2 f_{\mathbf{in}}^\varepsilon - M_2 f_{\mathbf{in}} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) - 1) f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) - 1) [(\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 - f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2] dx d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) - 1) f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme converge vers 0 par convergence dominée. Les deux premiers termes se traitent de la même manière. On présente le calcul pour deuxième terme

$$\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathbf{in}} |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce qu'on obtient en écrivant :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\phi_\varepsilon \star f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\psi_\varepsilon \star_{\mathbf{x}} \varphi_\varepsilon \star_{\boldsymbol{\xi}} f_{\mathbf{in}}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\xi}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
&= \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
&+ 2 \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}| dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
&+ \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}|^2 dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $M_2 f_{\mathbf{in}}$. Pour les deux derniers termes, ceux-ci tendent vers 0 en les contrôlant respectivement par le premier et le deuxième moment de ψ_ε qui tendent vers 0. En effet,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} |\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta})| dx dy d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}^3 \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\mathbf{in}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) |\tilde{\boldsymbol{\xi}}| |\boldsymbol{\zeta}| d\tilde{\mathbf{x}} dy d\tilde{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\zeta} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) dy \right) \left(\int_{\mathbb{T}_{\tilde{\mathbf{x}}}^3 \times \mathbb{R}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}^3} f_{\mathbf{in}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) |\tilde{\boldsymbol{\xi}}| d\tilde{\boldsymbol{\xi}} d\tilde{\mathbf{x}} \right) \left(\int_{\mathbb{R}_{\boldsymbol{\zeta}}^3} \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}| d\boldsymbol{\zeta} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^3 \times \mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3 \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{\zeta}}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\zeta} \\
&= \int_{\mathbb{T}_{\tilde{\mathbf{x}}}^3 \times \mathbb{T}_{\tilde{\mathbf{y}}}^3 \times \mathbb{R}^3_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \times \mathbb{R}^3_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) f_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}) |\boldsymbol{\zeta}|^2 d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{\mathbf{y}} d\tilde{\boldsymbol{\xi}} d\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}_{\mathbf{y}}^3} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \left(\int_{\mathbb{T}_{\tilde{\mathbf{x}}}^3 \times \mathbb{R}^3_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}} f_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) d\tilde{\boldsymbol{\xi}} d\tilde{\mathbf{x}} \right) \left(\int_{\mathbb{R}_{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}^3} \psi_\varepsilon(\boldsymbol{\zeta}) |\boldsymbol{\zeta}|^2 d\boldsymbol{\zeta} \right).
\end{aligned}$$

C.2 Système découplé et schéma itératif

Pour établir l'existence de solutions pour le système régularisé S^ε , on passe par un système découplé et un schéma itératif.

C.2.1 Le système découplé

On considère la suite de systèmes découplés suivants (on omet les ε en indice) :

Pour $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$S^n \left\{ \begin{array}{l}
\partial_t f^n + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f^n + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot [(\varphi \star \mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) f^n] = -f^n, \\
\partial_t g^n + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g^n + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left[\frac{\varphi \star \mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} g^n \right] = f^n, \\
\partial_t \mathbf{u}^{n+1} + ((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n) + \nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} = \\
\quad - \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{u}^n(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{R}^3} g^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\mathbf{u}^n(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \\
\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\
f^n(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\
\mathbf{u}^{n+1}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}).
\end{array} \right.$$

C.2.2 Résolution du système découplé

On vérifie que le découplage considéré définit des suites de fonctions \mathbf{u}^n , f^n et g^n solutions du système découplé S^n . On part de $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon$, qui est \mathcal{C}^∞ et bornée, et on construit f_0 et g_0 solutions \mathcal{C}^∞ des équations de Vlasov. f_0 et g_0 sont de support compact en $\boldsymbol{\xi}$. On peut donc construire \mathbf{u}^1 solution \mathcal{C}^∞ de l'équation de Stokes.

On réitère le processus pour construire les suites \mathbf{u}^n , f^n et g^n . En particulier, les solutions des équations de Vlasov s'écrivent :

$$f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{2t}, \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned}
g^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= g_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{\frac{3}{\alpha}t} + e^{\frac{3}{\alpha}t} \int_0^t f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) \cdot e^{-\frac{3}{\alpha}s} ds \\
&= g_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) e^{\frac{3}{\alpha}t} + e^{\frac{3}{\alpha}t} \int_0^t f_{\text{in}}(\mathbf{T}_{s,0}^n(\tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))) \cdot e^{-s} \cdot e^{3(1-\frac{1}{\alpha})s} ds.
\end{aligned}$$

où \mathbf{T}_t^n sont les caractéristiques dans l'espace des phases $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ associées au champ de vecteurs $\left(\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi} \right)$, et $\tilde{\mathbf{T}}_t^n$ celles associées au champ $\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\alpha} \right)$. En d'autres termes, $s \mapsto \mathbf{T}_{t_0, s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ et $s \mapsto \tilde{\mathbf{T}}_{t_0, s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sont les solutions de l'EDO

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Y}}{ds} = V(s, \mathbf{Y}), \\ \mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \end{cases}$$

avec les champs $V(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left((\mathbf{u}^n \star \varphi)(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi} \right)$ et $V(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{(\mathbf{u}^n \star \varphi)(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} \right)$ respectivement.

C.2.3 Estimations pour les solutions du schéma itératif

On a les contrôles suivants sur les suites construites :

1. $(f^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, on note $K_f := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f^n\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))}$.
2. $(g^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, on note $K_g := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g^n\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))}$.

Les deux points précédents découlent de l'expression de f^n et g^n en fonctions des caractéristiques.

3. $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^2([0, T]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

Preuve:

Dans le système S^n on multiplie l'équation de Stokes par \mathbf{u}^{n+1} :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot [(\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_x \beta(\mathbf{u}^n)] + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla_x p^{n+1} \\ & - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \Delta_x \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n(t, \mathbf{x})) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \\ & + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} g^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n(t, \mathbf{x})}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

et on intègre cette équation sur \mathbb{T}^3 . Soit M_β un majorant de la fonction β et R_γ le rayon d'une boule contenant le support de γ . On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla_x p^{n+1} \, d\mathbf{x} &= 0, \\ - \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \Delta_x \mathbf{u}^{n+1} \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_x \mathbf{u}^{n+1}|^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot [(\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_x \beta(\mathbf{u}^n)] \, d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_x \mathbf{u}^{n+1} : [\beta(\mathbf{u}^n) \otimes (\mathbf{u}^n \star \varphi)] \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k, j=1}^3 \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{1}{2} M_\beta^2 |u_k^n \star \varphi|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla_x \mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{3}{2} M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\xi} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})| + |\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^n f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\xi}| f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 |\boldsymbol{\xi}| f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx \\
&+ \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx + \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u}^n|^2 f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx \\
&\leq \underbrace{K_f R_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)|}_{:=A_1} + \underbrace{K_f |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| (R_\gamma + 1)}_{:=A_3} \|\mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\
&+ \underbrace{K_f |\mathbf{B}(0, R_\gamma)|}_{:=A_2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\
&\leq A_1 + A_2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + A_3 \|\mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2.
\end{aligned}$$

Et de même on montre que

$$\left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n}{\alpha} g^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx \right| \leq \frac{B_1}{\alpha} + \frac{B_2}{\alpha} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{B_3}{\alpha} \|\mathbf{u}^{n+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx &\leq \underbrace{\left(A_1 + \frac{B_1}{\alpha} \right)}_{:=C_1/2} + \underbrace{\left(A_2 + \frac{B_2}{\alpha} + \frac{3}{2} M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 \right)}_{:=C_2/2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^n|^2 dx \\
&+ \underbrace{\left(A_3 + \frac{B_3}{\alpha} \right)}_{:=C_3/2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Grönwall à

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \right] \leq C_1 + C_2 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^n|^2 dx + C_3 \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}|^2,$$

on a que $\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)_n$ est bornée par une constante K uniformément sur $(0, T)$. On en déduit que pour $t \in [0, T]$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \leq (C_1 + C_2 K + C_3 K) T - \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}(t)|^2 + \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}^{n+1}(0)|^2,$$

et donc $\|\mathbf{u}^n\|_{L^2((0,T); H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}$ est bornée uniformément en n .

4. On pose $\mathbf{w}^n := \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}$. Il existe des constantes k et K indépendantes de n , telles que les suites f^n , g^n , \mathbf{u}^n , $\mathbf{T}_{t,0}^n$, et $\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n$ vérifient

$$\|\mathbf{T}_{t,0}^n - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}(t) \leq k \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}, \quad (\text{C.17})$$

$$\|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) \leq K \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}^2, \quad (\text{C.18})$$

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n - \tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}(t) \leq \frac{k}{\alpha} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}, \quad (\text{C.19})$$

$$\|g^n - g^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) \leq \frac{K}{\alpha^2} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}^2, \quad (\text{C.20})$$

et

$$\|\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)\|(t) \leq k \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{pmatrix} \right\|. \quad (\text{C.21})$$

Preuve:

On note $\Gamma^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi})$ et $V^n(t, (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \Gamma^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}$ le champ tangent aux caractéristiques $t \mapsto \mathbf{T}_{0,t}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. On a

$$\mathbf{T}_{t_0,t}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \int_{t_0}^t V^n(s, \mathbf{T}_{t_0,s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) ds,$$

donc

$$\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \int_0^t V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) ds,$$

et

$$\mathbf{T}_{t,0}^{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \int_0^t V^{n-1}(s, \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) ds.$$

On en déduit que (on ne note pas les dépendances en \mathbf{x} et $\boldsymbol{\xi}$ dans la suite) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_{t,0}^n - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}\| &= \left\| \int_0^t V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n) - V^{n-1}(s, \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n) - V^{n-1}(s, \mathbf{T}_{t,s}^{n-1})\| ds \\ &\leq C_1 \int_0^t \|\mathbf{T}_{t,s}^n - \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}\| + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

L'existence de la constante C_1 indépendante de n découle de ce qui suit. En posant :

$$\mathbf{T}_{t,s}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n(s) \\ \boldsymbol{\xi}^n(s) \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \|V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n) - V^{n-1}(s, \mathbf{T}_{t,s}^{n-1})\|_1 &= \|\boldsymbol{\xi}^n(s) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s)\| + \\ &\quad \left\| \overbrace{(\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^n(s)) - (\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi)(s, \mathbf{x}^{n-1}(s))}^{A(s)} + (\boldsymbol{\xi}^{n-1}(s) - \boldsymbol{\xi}^n(s)) \right\|. \end{aligned}$$

On remarque que

- La suite de fonctions $(\mathbf{u}^n \star \varphi)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3)$.
- À t fixé, les fonctions $(\mathbf{u}^n \star \varphi)(t)$ sont lipschitziennes en espace et leurs constantes de Lipschitz peuvent être bornées indépendamment de n et de t . En effet,

$$|\mathbf{u}^n \star \nabla_{\mathbf{x}} \varphi| \leq \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

on a alors

$$\begin{aligned} \|A(s)\| &\leq \|(\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^n(s)) - (\mathbf{u}^n \star \varphi)(s, \mathbf{x}^{n-1}(s))\| + \left\| \left([\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}] \star \varphi \right) (s, \mathbf{x}^{n-1}(s)) \right\| \\ &\leq K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{x}^n(s) - \mathbf{x}^{n-1}(s)\| + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

et donc

$$\begin{aligned} \|V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n) - V^{n-1}(s, \mathbf{T}_{t,s}^{n-1})\| &\leq 2 \cdot \|\boldsymbol{\xi}^n(s) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(s)\| \\ &\quad + K_{\mathbf{u}} \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{x}^n(s) - \mathbf{x}^{n-1}(s)\| + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C_1 \|\mathbf{T}_{t,s}^n - \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}\|_1 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré (C.22). Pour majorer $a_n(s) = \|\mathbf{T}_{t,s}^n - \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}\|$ dans (C.22), on va utiliser le lemme de Grönwall discret B.1.1. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{t,s}^n &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n(s) \\ \boldsymbol{\xi}^n(s) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}^n(s) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^n(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^n(s) \\ \Gamma^n(s, \mathbf{x}^n(s), \boldsymbol{\xi}^n(s)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}^n(t) \\ \boldsymbol{\xi}^n(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a d'abord (pour $s \leq t$) :

$$\begin{aligned} a_n(s) &\leq \int_s^t \|\boldsymbol{\xi}^n(z) - \boldsymbol{\xi}^{n-1}(z)\| dz + \int_s^t \|\Gamma^n(z, \mathbf{x}^n(z), \boldsymbol{\xi}^n(z)) - \Gamma^{n-1}(z, \mathbf{x}^{n-1}(z), \boldsymbol{\xi}^{n-1}(z))\| dz \\ &\leq \int_s^t a_n(z) dz + \int_s^t \|A(z)\| dz + \int_s^t \|\boldsymbol{\xi}^{n-1}(z) - \boldsymbol{\xi}^n(z)\| dz. \end{aligned}$$

En réutilisant (C.23), on obtient

$$a_n(s) \leq M \int_s^t a_n(z) dz + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_s^t \|\mathbf{w}^n(z)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dz.$$

Cette inégalité ressemble à une inégalité de Grönwall mais la variable s est le point initial des intégrales. Par changement de variable $\tilde{z} = (t - z)$, $\tilde{s} = (t - s)$, et en posant $h(\tilde{z}) = a_n(z)$, et

$$k(\tilde{s}) = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_s^t \|\mathbf{w}^n(z)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dz = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^{\tilde{s}} \|\mathbf{w}^n(t - \tilde{z})\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\tilde{z},$$

on a

$$h(\tilde{s}) \leq M \int_0^{\tilde{s}} h(\tilde{z}) d\tilde{z} + k(\tilde{s}).$$

On a donc par le lemme de Grönwall discret classique B.1.1,

$$h(\tilde{s}) \leq k(\tilde{s}) + M \int_0^{\tilde{s}} k(\tilde{z}) e^{M(\tilde{s}-\tilde{z})} d\tilde{z}.$$

Soit (on a démontré ainsi une sorte de lemme de Grönwall rétrograde)

$$\begin{aligned} a_n(s) &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_s^t \|\mathbf{w}^n(z)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dz + M \int_0^{\tilde{s}} k(\tilde{z}) e^{M(\tilde{s}-\tilde{z})} d\tilde{z} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_s^t \|\mathbf{w}^n(z)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dz + M \int_0^{\tilde{s}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} e^{M(\tilde{s}-\tilde{z})} \int_{t-\tilde{z}}^t \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma d\tilde{z} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_s^t \|\mathbf{w}^n(z)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dz + M \int_s^t \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} e^{M(z-s)} \int_z^t \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma dz. \end{aligned}$$

On a donc obtenu que

$$\|\mathbf{T}_{t,s}^n - \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}\| \leq (\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + M\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}Te^{MT}) \int_s^t \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma.$$

En reportant dans (C.22) on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_{t,0}^n - \mathbf{T}_{t,0}^{n-1}\| &\leq C_1 \int_0^t \|\mathbf{T}_{t,s}^n - \mathbf{T}_{t,s}^{n-1}\| ds + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\leq C_1 (\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + M\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}Te^{MT}) \int_0^t \int_s^t \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma ds \\ &\quad + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds \\ &\leq [\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_1T(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + M\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}Te^{MT})] \int_0^t \|\mathbf{w}^n(\sigma)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

L'inégalité (C.18) découle de (C.17), de l'expression de f^n et du caractère lipschitzien du f_{in} régularisé. Pour g^n , on montre en suivant la même démarche, que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n - \tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^{n-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}(t) &\leq \frac{k}{\alpha} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}, \\ \left\| g_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))e^{\frac{3}{\alpha}t} - g_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}^{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))e^{\frac{3}{\alpha}t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) &\leq \frac{K}{\alpha^2} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Vu l'expression de g^n , pour montrer (C.20) il reste à majorer

$$\begin{aligned} |f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f^{n-1}(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1})| &\leq |f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1})| + |f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1}) - f^{n-1}(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1})| \\ &\leq |f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1})| + \sqrt{K} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}. \end{aligned}$$

Pour majorer le premier terme on écrit

$$\begin{aligned} |f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1})| &\leq C(T) \cdot \text{Lip}(f_{\text{in}}) \cdot \text{Lip}(\mathbf{T}_{t,0}^n) \left\| \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \\ &\leq C(T) \cdot \text{Lip}(f_{\text{in}}) \cdot \text{Lip}(\mathbf{T}_{t,0}^n) \frac{k}{\alpha} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2((0,T) \times \mathbb{T}^3)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé une généralisation de (C.18) et (C.19), avec un temps initial $s \in [0, T]$.

Il reste donc à montrer que les caractéristiques $\mathbf{T}_{t,0}^n$ sont lipschitziennes uniformément en n et t , et donc à montrer (C.21). Soit $(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ et $(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ deux points du plan de phase. On a

$$\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) = (\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) - \int_0^t V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)) ds,$$

et

$$\mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) = (\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) - \int_0^t V^n(s, \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)) ds.$$

On pose pour $i = 1, 2$: $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i(s) \\ \boldsymbol{\xi}_i(s) \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i)$. On a

$$\begin{aligned}
|\mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)| &\leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\
&+ \int_s^t |\boldsymbol{\xi}_1(z) - \boldsymbol{\xi}_2(z)| dz + \int_s^t |\Gamma^n(z, \mathbf{x}_1(z), \boldsymbol{\xi}_1(z)) - \Gamma^n(z, \mathbf{x}_2(z), \boldsymbol{\xi}_2(z))| dz \\
&\leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\
&+ 2 \int_s^t |\boldsymbol{\xi}_1(z) - \boldsymbol{\xi}_2(z)| dz + K_u \|\nabla_x \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \int_s^t |\mathbf{x}_1(z) - \mathbf{x}_2(z)| dz \\
&\leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\
&+ C \int_s^t |\mathbf{T}_{t,z}^n(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathbf{T}_{t,z}^n(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)| dz.
\end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall permet alors de conclure sur le caractère lipschitzien de $\mathbf{T}_{t,s}^n$ et en particulier pour $\mathbf{T}_{t,0}^n$.

C.3 Convergence vers la solution du système régularisé

A l'aide des contrôles précédents, on va montrer que les suites f^n , g^n et \mathbf{u}^n convergent dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$ et $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ respectivement. On vérifie enfin que la limite construite est une solution faible du système S^ε dans un sens précisé ci dessous.

C.3.1 Convergence du schéma itératif

On montre cette convergence en 4 étapes :

1. \mathbf{u}^n est convergente dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ vers un élément \mathbf{u}

Preuve: On montre que la série de terme général \mathbf{w}^n est normalement convergente dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Écrivons l'équation vérifiée par \mathbf{w}^{n+1}

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{w}^{n+1} + ((\mathbf{w}^n \star \varphi) \cdot \nabla) \beta(\mathbf{u}^n) &+ ((\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \cdot \nabla) [\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u}^{n-1})] + \nabla_{\mathbf{x}}(p^{n+1} - p^n) - \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{R}^3} f^{n-1}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} (g^n - g^{n-1}) \frac{\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{R}^3} g^{n-1} \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par \mathbf{w}^{n+1} et on l'intègre sur \mathbb{T}^3 . Cela donne terme par terme :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \partial_t \mathbf{w}^{n+1} d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}, \\
\int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(p^{n+1} - p^n) d\mathbf{x} &= 0, \\
-\int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{T}^3} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Il reste ensuite six termes à majorer :

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \left\{ ((\mathbf{w}^n \star \varphi) \cdot \nabla) \beta(\mathbf{u}^n) \right\} d\mathbf{x}, \\
\boxed{2} &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \left\{ ((\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \cdot \nabla) [\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u}^{n-1})] \right\} d\mathbf{x}, \\
\boxed{3} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^{n-1} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \mathbf{w}^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \\
\boxed{4} &= \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \\
\boxed{5} &= \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g^{n-1} \mathbf{w}^{n+1} \cdot \mathbf{w}^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}, \\
\boxed{6} &= \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (g^n - g^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

On intègre par parties, et on utilise la périodicité de la vitesse et la nullité de sa divergence :

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &= \left| - \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial w_j^{n+1}}{\partial x_k} [w_k^n \star \varphi] \beta(u_j^n) d\mathbf{x} \right|, \\
&\leq \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|(\mathbf{w}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \sqrt{3} M_\beta \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n \star \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \sqrt{3} M_\beta \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \\
\boxed{2} &= \left| - \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{k,j=1}^3 \frac{\partial w_j^{n+1}}{\partial x_k} [u_k^{n-1} \star \varphi] [\beta(u_j^n) - \beta(u_j^{n-1})] d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|[\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi] \otimes [\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u}^{n-1})]\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \sqrt{3} \text{Lip}(\beta) \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \sqrt{3} \text{Lip}(\beta) \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \sqrt{3} K_u \text{Lip}(\beta) \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},
\end{aligned}$$

en utilisant les deux inégalités de Young suivantes (une pour chacune des deux majorations) :

$$\begin{aligned}
\|h_1 \star h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq \|h_1\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} \|h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \\
\|h_1 \star h_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} &\leq \|h_1\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|h_2\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &\leq \frac{1}{3} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{9}{4} M_\beta^2 \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}^2 \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \\
\boxed{2} &\leq \frac{1}{3} \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{9}{4} K_u^2 \text{Lip}(\beta)^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2.
\end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\boxed{3} \leq \frac{1}{2} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| K_f \left[\|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right],$$

et de même

$$\boxed{5} \leq \frac{1}{2\alpha} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| K_g \left[\|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right].$$

Il reste alors le quatrième et sixième termes à majorer.

$$\begin{aligned}
\boxed{4} &= \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{2} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{2} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + K_1 \frac{1}{2} \|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t),
\end{aligned}$$

où K_1 est une constante dépendante de K_u et de $|\mathbf{B}(0, R_\gamma)|$.

$$\begin{aligned}
\boxed{6} &= \frac{1}{\alpha} \left| \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (g^n - g^{n-1}) \mathbf{w}^{n+1} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (g^n - g^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (g^n - g^{n-1})^2 |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n|^2 \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} M_\gamma |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{w}^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + K_1 \frac{1}{2\alpha} \|g^n - g^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t).
\end{aligned}$$

Nous sommes donc arrivés à la majoration suivante (tous les \mathbf{w}^n sont nuls initialement) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) + \frac{1}{3} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds \\
&\leq D \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds + \frac{1}{2} |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| (K_f + \frac{K_g}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha}) \int_0^t \|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds \\
&\quad + K_1 \int_0^t \|f^n - f^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) + \frac{K_1}{\alpha} \int_0^t \|g^n - g^{n-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}^2(t) \\
&\leq D \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds + \frac{1}{2} |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| ((K_f + \frac{K_g}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha}) \int_0^t \|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds \\
&\quad + K.K_1 \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \frac{K.K_1}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé (C.18) et (C.20), et où D est une constante.

On a donc l'existence de deux constantes B_1 et B_2 telles que

$$\|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) \leq B_1 \int_0^t \|\mathbf{w}^n\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds + B_2 \int_0^t \|\mathbf{w}^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds,$$

et le lemme de Grönwall discret B.1.1 permet d'obtenir que $(\mathbf{w}^n)_n$ est le terme d'une série normalement convergente dans l'espace de Banach $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

On conclut donc que \mathbf{w}^n est une série convergente, et donc \mathbf{u}^n converge vers un élément \mathbf{u} dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

2. \mathbf{u}^n est faiblement convergente vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

En effet, \mathbf{u}^n est convergente vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$. La bornitude dans $L^2([0, T]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$, implique qu'il existe une sous-suite faiblement convergente dans $L^2([0, T]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ et donc dans

$L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ vers \mathbf{u} . L'élément \mathbf{u} est donc l'unique valeur d'adhérence faible de \mathbf{u}^n dans $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$. Donc \mathbf{u}^n est faiblement convergente vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$.

3. f^n est convergente vers un élément f dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

En effet, l'équation (C.18) nous montre que $f^n - f^{n-1}$ est une série normalement convergente dans le Banach $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$, donc convergente. Et donc f^n converge vers une fonction f dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

4. g^n est convergente vers un élément g dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

L'équation (C.20) nous montre que $g^n - g^{n-1}$ est normalement convergente dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$. Donc g^n converge vers g dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

C.3.2 Une formulation faible du système découplé

On souhaite montrer que les limites construites précédemment sont solutions d'une formulation faible explicitée plus tard, du système S^ε . On commence par écrire une formulation faible du système S^n . Les solutions fortes f^n , g^n et \mathbf{u}^n construites du système découplé S^n vérifient en effet la formulation faible suivante :

- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\langle f^n(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1(\mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi) f^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \quad (\text{C.25})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c) / H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c)$, et $\Pi_1(\mathbf{u}^n)$ est l'opérateur différentiel :

$$\Pi_1(\mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} - I_d,$$

et

$$\begin{aligned} \langle g^n(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \tilde{\Pi}_1(\mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (\phi) g^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$(\text{C.27})$$

où $\tilde{\Pi}_1(\mathbf{u}^n)$ est l'opérateur différentiel :

$$\tilde{\Pi}_1(\mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}.$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}) (\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n + \frac{g^n}{\alpha})(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et

$$\Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t.$$

C.3.3 Formulation faible du système régularisé

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la formulation précédente, on souhaite montrer que les limites construites sont solutions faibles de S^ε dans le sens faible suivant :

- $f_\varepsilon \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c))$.
- $g_\varepsilon \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c))$.
- $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$.
- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\langle f_\varepsilon(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f_\varepsilon(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \quad (\text{C.29})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c)/H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c)$, et $\Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel

$$\Pi_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} - I_d,$$

et

$$\begin{aligned} \langle g_\varepsilon(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \tilde{\Pi}_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) g_\varepsilon(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

où $\tilde{\Pi}_1^\varepsilon(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel

$$\tilde{\Pi}_1^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}.$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_\varepsilon(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f_\varepsilon + \frac{g_\varepsilon}{\alpha})(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et cette fois-ci $\Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)$ est donné par

$$\Pi_2^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \partial_t.$$

C.3.4 Solution faible du système régularisé

Grâce aux convergences démontrées dans la section C.3.1, et à la formulation faible décrite dans la section C.3.2, on va démontrer que les limites construites et notées (f, g, u) vérifient la formulation faible décrite dans la section C.3.3. Pour cela on passera à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans la formulation faible décrite dans la section C.3.2.

1. Les limites (u, f, g) vérifient la formulation faible de N.S. décrite par l'équation (C.31) :

En effet, soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \psi(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x})(\psi) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon \cdot \psi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \psi d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g^n \frac{(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\xi})}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \psi d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$, et

$$\Pi_3(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} - (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t.$$

Les convergences à obtenir sont alors

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{n+1} : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{2} \quad & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{3} \quad & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \partial_t \psi d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u} \cdot \partial_t \psi d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{4} \quad & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{5} \quad & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g^n \gamma(\boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g \gamma(\boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \psi d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} ds, \\ \boxed{6} \quad & \|\langle \mathbf{u}^{n+1}(t), \psi(t) \rangle - \langle \mathbf{u}(t), \psi(t) \rangle\|_{L^\infty([0, T])} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

La convergence $\boxed{1}$ découle des convergences faibles de $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ et $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

La convergence $\boxed{3}$ découle de la convergence forte de $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ puisque $\partial_t \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Pour $\boxed{2}$, on majore la différence comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi - (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \right| \\ & \leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} [(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \star \varphi] \otimes \beta(\mathbf{u}^n) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes (\beta(\mathbf{u}^n) - \beta(\mathbf{u})) : \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} ds \right| \\ & \leq \sqrt{3} M_\beta \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{2,2} \|\nabla_{\mathbf{x}} \psi\|_{2,2} + \sqrt{3} \text{Lip}(\beta) \sqrt{T} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} \|\mathbf{u} \star \varphi\|_{\infty,\infty} \|\nabla_{\mathbf{x}} \psi\|_{2,2} \\ & \leq \sqrt{3T} M_\beta \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_{\mathbf{x}} \psi\|_{2,2} + \sqrt{3T} \text{Lip}(\beta) \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} \|\mathbf{u}\|_{\infty,2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_{\mathbf{x}} \psi\|_{2,2}, \end{aligned}$$

et donc la convergence vers 0 découle de la convergence forte de $(\mathbf{u}^n)_n$ vers \mathbf{u} dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

Pour [4], on majore aussi la différence

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^n) \cdot \boldsymbol{\psi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \\
& \leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n \gamma(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^n - f) \gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\xi} dx ds \right| \\
& \leq |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| K_f \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty,2} + \|f^n - f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\gamma(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\psi}| d\boldsymbol{\xi} dx ds.
\end{aligned}$$

Les deux termes tendent vers 0 au vu des convergences obtenues. Le terme [5] se traite de façon similaire.

Pour obtenir la convergence [6], on va réaliser une dernière extraction. L'argument est inspiré de [2] et du polycopié de Chemin [3]. On définit :

$$\begin{aligned}
h_n : [0, T] & \longrightarrow \mathbb{R} \\
t & \longmapsto \langle \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{u}^n)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$, $(h_n)_n$ l'est dans $L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$. On peut écrire

$$\dot{h}_n(t) = \langle \partial_t \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \mathbf{u}^n, \partial_t \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

Comme \mathbf{u}^n vérifie fortement l'équation approchée de Navier-Stokes, on a en particulier la formulation faible en espace et forte en temps suivante

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}^{n-1} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}^{n-1}) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\mathbb{T}^3} f^{n-1} \gamma(\boldsymbol{\xi}) [\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}] \cdot \boldsymbol{\psi}(t, x) d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\mathbb{T}^3} g^{n-1} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{[\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}]}{\alpha} \cdot \boldsymbol{\psi}(t, x) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Au vu des estimations obtenues sur les suites $(\mathbf{u}^n)_n$, $(f^n)_n$ et $(g^n)_n$, on voit que $(\langle \partial_t \mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle)_n$ est borné dans $L^2([0, T]; \mathbb{R})$ et donc de même pour $(h_n)_n$

$$\int_0^T |\dot{h}_n(t)|^2 dt \leq C.$$

Il s'en suit que pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, on a

$$|h_n(t_2) - h_n(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{h}_n(s)| ds \leq \left\| \dot{h}_n \right\|_{L^2([0, T])} |t_2 - t_1|^{1/2}.$$

La suite $(h_n)_n$ est donc uniformément hölderienne d'exposant 1/2, et donc équicontinue. Le théorème d'Ascoli fournit alors une extraction (que l'on ne note pas) et un élément $h \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ limite de $(h_n)_n$ dans cet espace. Mais on sait que $(\mathbf{u}^n)_n$ tend vers \mathbf{u} dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$. En particulier $(h_n)_n(t)$ tend vers $\langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle$ dans $L^2([0, T]; \mathbb{R})$. Par unicité de la limite, on obtient la convergence [6].

2. Les limites (\mathbf{u}, f, g) vérifient les formulations faibles des équations de Vlasov décrites par les équations (C.29) et (C.30).

Preuve:

Soit une fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ à support compact en vitesse. On a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Pi_1(\mathbf{u}^n)(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f^n(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned}$$

où $\Pi_1(\mathbf{u}^n)$ est l'opérateur différentiel défini par

$$\Pi_1(\mathbf{u}^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u}^n \star \varphi - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} - I_d.$$

L'opérateur différentiel $\partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} - I_d$ envoie $\mathcal{C}_c^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ dans $L^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. La convergence forte L^∞ impliquant la convergence $L^\infty \star$, on a le résultat voulu pour les termes concernés dans l'expression de $\Pi_1(\mathbf{u}^n)$. Pour le dernier terme qui reste, on écrit que (on omet les variables)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u}^n \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f^n d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\phi) f d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \right| \\ & \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\infty, 2} K_f \|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi\|_{L^1([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + \|f^n - f\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |(\mathbf{u} \star \varphi) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend donc bien vers 0 car $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(f^n)_n$ approchent respectivement \mathbf{u} et f dans $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$ et $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$.

Pour le terme de gauche, on procède comme pour l'équation de Navier-Stokes (en réalisant une nouvelle extraction pour le crochet). La deuxième équation de Vlasov pour g se traite avec les mêmes arguments que précédemment. Les équations de Vlasov sont donc également vérifiées.

3. \mathbf{u} , f et g sont continues sur $(0, T)$ dans $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)$, $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c)$ et $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c)$ respectivement. En effet, f et g sont continues par limite uniforme en toutes leurs variables, et donc bien dans l'espace $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c))$. Pour \mathbf{u} , on écrit la forme faible de Navier-Stokes contre une fonction ψ de $\mathcal{C}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ (indépendante du temps)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \mathbf{u}(t_2), \boldsymbol{\psi} \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u}) : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g \frac{(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u} \star \varphi) \otimes \beta(\mathbf{u})\|_{\infty, 2} \leq M_\beta \|\mathbf{u}\|_{\infty, 2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} =: C_1, \\ & \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right\|_{\infty, 2} \leq \left\| \int_{\mathbb{R}^3} f \gamma(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \right\|_{\infty, 2} \leq 2K_f |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \left\{ R_\gamma^2 + \|\mathbf{u}\|_{\infty, 2} \right\} =: C_2, \\ & \left\| \int_{\mathbb{R}^3} g \frac{(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi})}{\alpha} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \right\|_{\infty, 2} \leq \left\| \int_{\mathbb{R}^3} g \gamma(\boldsymbol{\xi}) \frac{|\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|}{\alpha} d\boldsymbol{\xi} \right\|_{\infty, 2} \leq 2K_g |\mathbf{B}(0, R_\gamma)| \left\{ R_\gamma^2 + \|\mathbf{u}\|_{\infty, 2} \right\} =: C_3. \end{aligned}$$

En notant $M_{\mathbf{u}} = C_1 + C_2 + C_3$, on a par Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi} \rangle - \langle \mathbf{u}(t_2), \boldsymbol{\psi} \rangle| \leq \left[M_{\mathbf{u}} |t_1 - t_2| + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}\|_{2, 2} |t_1 - t_2|^{1/2} \right] \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)},$$

et la continuité en temps en découle. La fonction \mathbf{u} est donc bien un élément de $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$.

On a ainsi démontré par les points 1, 2 et 3 précédents l'existence de solutions $(f_\varepsilon, g_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ pour le système régularisé S^ε , dans le sens de la formulation faible décrite dans la section C.3.3.

C.3.5 Estimations pour les solutions du système régularisé à ε fixé

On établit dans cette sous-section des estimations sur les suites f_ε , g_ε et \mathbf{u}_ε uniformément en ε (points 3, 4 et 5). On commence d'abord par démontrer quelques propriétés pour les fonctions f_ε et g_ε (points 1 et 2).

1. f_ε est \mathcal{C}^1 en toutes ses variables, lipschitzien en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, à support borné en $\boldsymbol{\xi}$.

Preuve: Grâce à (C.17), les caractéristiques $\mathbf{T}_{\cdot,0}^n$ convergent dans $L^\infty\left([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)\right)$ vers $\mathbf{T}_{\cdot,0}$.

Donc $f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{T}_{\cdot,0}^n)$ converge vers $f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{T}_{\cdot,0})$ dans $L^\infty\left([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)\right)$, grâce au caractère lipschitzien de $f_{\text{in}}^\varepsilon$. On a donc $f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_{\text{in}}^\varepsilon(\mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))e^{2t}$, par unicité de la limite. Pour démontrer la régularité de f_ε , on commence par montrer le caractère \mathcal{C}^1 de $t \mapsto \mathbf{T}_{t,0}$. On montre pour cela que les dérivées premières de $t \mapsto \mathbf{T}_{t,0}^n$ convergent uniformément. En effet, on a :

$$\partial_t \mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp\left[-\int_0^t (\nabla_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} V^n)(s, \mathbf{T}_{t,s}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) ds\right] V^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (\text{C.32})$$

où $V^n = \left(\mathbf{u}^n \star \varphi^\varepsilon - \boldsymbol{\xi}\right)$ est le champ tangent aux caractéristiques $t \mapsto \mathbf{T}_{0,t}^n$ (Voir l'annexe C.5 pour les détails du calcul de cette dérivée).

La convolution par φ^ε permet un passage à la limite uniforme. En effet, on a la convergence de la dérivée $\partial_t \mathbf{T}_{t,0}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dans $L^\infty\left([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)\right)$ vers

$$\partial_t \mathbf{T}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp\left[-\int_0^t (\nabla_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}} V)(s, \mathbf{T}_{t,s}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) ds\right] V(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (\text{C.33})$$

avec $V(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon - \boldsymbol{\xi}\right)$.

Dans l'annexe C.5 on remarque également que la formule (C.33) implique que V est bien le champ tangent aux caractéristiques $t \mapsto \mathbf{T}_{0,t}$. Ainsi, le caractère \mathcal{C}^1 des caractéristiques par rapport à $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est assuré grâce à la continuité du champs tangent V par rapport à $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. f_ε est donc \mathcal{C}^1 en toutes ses variables.

D'autre part, f_ε est lipschitzienne en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ par limite uniforme de fonctions lipschitziennes en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de même constante de Lipschitz (ceci a été montré pour les $\mathbf{T}_{t,0}^n$ dans l'équation (C.21) et est valable pour les fonctions f^n).

Finalement, f^ε est à support compact en $\boldsymbol{\xi}$ car $\mathbf{T}_{t,0}$ est une application propre (en $\boldsymbol{\xi}$) comme limite uniforme d'applications propres (en $\boldsymbol{\xi}$).

2. g_ε est \mathcal{C}^1 en toutes ces variables, lipschitzienne en $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, à support borné en $\boldsymbol{\xi}$.

Preuve: On montre de la même manière que $\tilde{\mathbf{T}}_{\cdot,0}^n$ et $\tilde{\mathbf{T}}_{\cdot,s}^n$ à s fixé, convergent uniformément vers les fonctions \mathcal{C}^1 en t , $\tilde{\mathbf{T}}_{\cdot,0}$ et $\tilde{\mathbf{T}}_{\cdot,s}$, que $\tilde{\mathbf{T}}_{\cdot,0}$ sont les caractéristiques associées au champ $\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\alpha} - \mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi^\varepsilon\right)$, et donc \mathcal{C}^1 en \mathbf{x} et $\boldsymbol{\xi}$. On obtient aussi la convergence uniforme de $s \mapsto \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n$ vers $s \mapsto \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}$ et le caractère

\mathcal{C}^1 par rapport à la variable s . On pose finalement

$$h(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\text{in}}(\tilde{\mathbf{T}}_{t,0}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))e^{\frac{3}{\alpha}t} + e^{\frac{3}{\alpha}t} \int_0^t f_\varepsilon(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s})e^{-\frac{3}{\alpha}s} ds.$$

La fonction h est \mathcal{C}^1 et g^n converge uniformément vers h au vu de ce qui précède. En effet,

$$\left\| f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f_\varepsilon(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}) \right\|_\infty \leq \left\| f^n(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f_\varepsilon(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) \right\|_\infty + \left\| f_\varepsilon(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}^n) - f_\varepsilon(s, \tilde{\mathbf{T}}_{t,s}) \right\|_\infty,$$

et les deux termes du membre de droite tendent vers 0 uniformément en t et s , par la convergence uniforme de f^n et par le caractère lipschitzien de f_ε . Donc $g_\varepsilon = h$.

On peut maintenant démontrer des estimations uniformes en ε .

3. Les solutions $\mathbf{u}_\varepsilon, f_\varepsilon$ et g_ε de S^ε vérifient

$$M_2 f_\varepsilon + M_2 g_\varepsilon \leq \frac{C}{\alpha} \left\{ 1 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(s) ds + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(s) ds \right\}^5. \quad (\text{C.34})$$

Preuve: D'après les points 1 et 2 précédents, f_ε et g_ε sont régulières et à support compact en vitesse. Elles vérifient donc des formulations fortes des équations de Vlasov, qu'on peut multiplier par $|\boldsymbol{\xi}|^2$ et intégrer par parties. En sommant les deux équations on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M_2 f_\varepsilon + M_2 g_\varepsilon) + 2M_2 f_\varepsilon + \frac{2}{\alpha} M_2 g_\varepsilon &= 2 \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \cdot \boldsymbol{\xi} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} [\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \cdot \boldsymbol{\xi} g_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbb{T}^3} [\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \cdot (m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) + m_1 g_\varepsilon(t, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (\text{car } \alpha < 1) \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \|\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) + m_1 g_\varepsilon(t, \mathbf{x})\|_{L^{\frac{5}{4}}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq \frac{C_{\text{in}}}{\alpha} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} (M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t))^{4/5}, \end{aligned}$$

où on a utilisé successivement Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Young, $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)} = 1$ et le lemme des moments 3.5.1 avec $\alpha = \gamma - 1 = 1$ qui donne :

$$\begin{aligned} m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) + m_1 g_\varepsilon(t, \mathbf{x}) &\leq \\ &\leq \overbrace{\left[\frac{4}{3} \pi (e^{3T} \|f_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + e^{\frac{3T}{\alpha}} \|g_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}) + 1 \right]}^{C(f_{\text{in}}^\varepsilon, g_{\text{in}}^\varepsilon)} (m_2 f^\varepsilon(t, \mathbf{x}) + m_2 g^\varepsilon(t, \mathbf{x}))^{4/5}, \end{aligned}$$

et en remarquant que $C(f_{\text{in}}^\varepsilon, g_{\text{in}}^\varepsilon) \leq C(f_{\text{in}}, g_{\text{in}}) = C_{\text{in}}$, on obtient

$$\|m_1 f_\varepsilon(t, \mathbf{x}) + m_1 g_\varepsilon(t, \mathbf{x})\|_{L^{\frac{5}{4}}(\mathbb{T}^3)} \leq \frac{C_{\text{in}}}{\alpha} (M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t))^{4/5}. \quad (\text{C.35})$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}(M_2 f_\varepsilon + M_2 g_\varepsilon) + 2(M_2 f_\varepsilon + M_2 g_\varepsilon) \leq \frac{C_{\text{in}}}{\alpha} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} (M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t))^{4/5}. \quad (\text{C.36})$$

En posant $H(t) = (M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t))^{1/5}$ on obtient que

$$H' + \frac{2}{5}H \leq \frac{C}{\alpha} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)},$$

et donc par application du lemme de Grönwall on obtient

$$M_2 f_\varepsilon + M_2 g_\varepsilon \leq \frac{C}{\alpha} \left(1 + \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}\right)^5. \quad (\text{C.37})$$

On a alors (C.34) par injections de Sobolev.

4. Les solutions $\mathbf{u}_\varepsilon, f_\varepsilon$ et g_ε de S^ε vérifient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} f_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} g_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| \cdot \mathbf{m}_1 f_\varepsilon dx ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| \cdot \mathbf{m}_1 g_\varepsilon dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}(s) \left(M_2 f_\varepsilon(s) + \frac{M_2 g_\varepsilon(s)}{\alpha} \right)^{\frac{4}{5}} ds. \end{aligned}$$

(C.38)

Preuve: On multiplie l'équation de Navier-Stokes dans le système S^{n-1} par \mathbf{u}^n et on intègre sur $(0, T) \times \mathbb{T}^3$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} ((\varphi \star \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot [\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}] dx ds \\ = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^{n-1} + \frac{g^{n-1}}{\alpha}) \mathbf{u}^n \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} dx, \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

où l'on a utilisé $\operatorname{div}(\mathbf{u}^n) = \operatorname{div}(\varphi \star \mathbf{u}^n) = 0$ et en particulier

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} ((\varphi \star \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot \mathbf{u}^{n-1} d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \nabla_{\mathbf{x}} \beta(\mathbf{u}^{n-1}) : [\mathbf{u}^{n-1} \otimes (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1})] \\
&= - \int_{\mathbb{T}^3} \beta(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{u}^{n-1} \otimes (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1})]) \\
&= - \int_{\mathbb{T}^3} \beta(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot [\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1})] \\
&= - \sum_{i,j} \int_{\mathbb{T}^3} \eta'(\mathbf{u}_j^{n-1}) \partial_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{u}_j^{n-1}) (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1})_i \\
&= - \sum_{i,j} \int_{\mathbb{T}^3} (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1})_i [\partial_{\mathbf{x}_i} \eta(\mathbf{u}_j^{n-1})] \\
&= \int_{\mathbb{T}^3} [\nabla_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{u}^{n-1})] \cdot (\varphi \star \mathbf{u}^{n-1}) = 0,
\end{aligned}$$

où η est une primitive de β . On rappelle qu'on a les convergences suivantes :

$$\begin{aligned}
f^n &\rightarrow f \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)), \\
\mathbf{u}^n &\rightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3)), \\
\mathbf{u}^n &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } L^2([0, T]; \mathbf{H}_{\operatorname{div}}^1(\mathbb{T}^3)).
\end{aligned}$$

D'autre part, la suite $((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n)$ est bornée dans $L^1([0, T]; L^2(\mathbb{T}^3))$:

$$|(\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n)|^2 \leq 5 \sum_{k,j=1}^3 |\varphi \star \mathbf{u}_k^n|^2 \beta'(\mathbf{u}_j^n)^2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_j^n}{\partial x_k} \right]^2 \leq 5 \|\mathbf{u}^n\|_{\infty,2}^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 M_\beta |\nabla \mathbf{u}^n|^2.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 &\rightarrow \|\mathbf{u}^n(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \text{ dans } L^\infty([0, T]), \\
\int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^n(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds, \\
\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} ((\varphi \star \mathbf{u}^n) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \beta(\mathbf{u}^n) \cdot [\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}] d\mathbf{x} &\rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty([0, T]).
\end{aligned}$$

Enfin, en écrivant $\mathbf{u}^{n-1} \cdot \mathbf{u}^n - |\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}^{n-1} \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u})$ et grâce aux convergences uniformes de $(f^n)_n$ et $(g^n)_n$, on obtient pour tout temps t

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f^{n-1} + \frac{g^{n-1}}{\alpha}) \mathbf{u}^n \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}^{n-1}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \rightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f + \frac{g}{\alpha}) \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}.$$

En passant à la limite inférieure dans (C.39), il obtient que

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\mathbf{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f + \frac{g}{\alpha}) \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x},$$

et on obtient donc (C.38).

5. A partir des points 3 et 4 précédents, on montre qu'il existe une constante C et un temps T_* qui dépendent uniquement des conditions initiales, tels que pour presque tout $t \leq T_*$ on a

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq C \quad (\text{C.40})$$

et

$$M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t) \leq C. \quad (\text{C.41})$$

Preuve:

A partir de (C.38), (C.34) on obtient que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{\text{in}}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \\ & + \frac{C}{\alpha} \int_0^t \left(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(s) + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(s) \right) \left\{ 1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(\sigma) d\sigma + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}(\sigma) d\sigma \right\}^4 ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 & \leq C + C \int_0^t \left(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right) \left(1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^4 ds \\ & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \left(1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^4 ds \\ & + C \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \left(1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^4 ds \\ & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \left(1 + \int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^8 \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Young pour les termes produits. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \left(\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^8 \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \end{aligned}$$

Et donc (toutes les constantes sont notées C) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \left(\int_0^s \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^8 \\ & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \int_0^s \left(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^8 + C \int_0^t \left(\int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right)^8 \\ & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \int_0^s \left(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^4 + C \int_0^t \left(\int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^4 \\ & \leq C + C \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + C \int_0^t \left(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^4 + C \int_0^t \left(\int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right)^4 \\ & \leq C + C \left(\int_0^t \left\{ \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) + \int_0^s \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}^4 ds \right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $a^4 + b^4 + a \leq 2(a+b)^4 + 2$ pour $a, b \geq 0$.

Ainsi par le lemme de Grönwall surlinéaire B.1.3, on déduit qu'il existe un temps T_* et une constante C tels que pour presque tout $t \leq T_*$, on a

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(t) + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2(s) ds \leq C,$$

et grâce à (C.34) on a également :

$$M_2 f_\varepsilon(t) + M_2 g_\varepsilon(t) \leq C.$$

C.4 Relaxation des perturbations et retour au système S^α

Dans cette section, on fait tendre le paramètre de régularisation et de troncature ε vers 0 dans les solutions construites pour le problème régularisé et on montre que les limites construites vérifient le système S^α (système (C.1) – (C.4)).

C.4.1 Construction de la solution limite pour le système S^α

1. On construit des limites de $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(g_\varepsilon)_\varepsilon$.

On a que :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_*]} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} &\leq e^{3T_*} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}, \\ \sup_{t \in [0, T_*]} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \|g_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} &\leq e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|g_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + T_* e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Donc, à une extraction près, on a convergence faible dans $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$ – \star de $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(g_\varepsilon)_\varepsilon$ vers f et g de $L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$. On a de plus

$$\|f\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq e^{3T_*} \|f_{\text{in}}\|_\infty,$$

$$\|g\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|g_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))} \leq e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|g_{\text{in}}\|_\infty + T_* e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|f_{\text{in}}\|_\infty.$$

2. A une sous-suite près, $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers un élément \mathbf{u} faiblement dans $L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$ et fortement dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

En effet, l'inégalité (C.40) permet d'extraire une sous-suite $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge faiblement dans $L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))$. Pour démontrer la convergence forte dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$, on utilisera le lemme d'Aubin. On a pour une fonction test φ à support dans $]0, T_*[$, et $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$,

$$\begin{aligned} \langle \langle \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon, \varphi \rangle, \boldsymbol{\psi} \rangle &= \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}}(\varphi \boldsymbol{\psi}) - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla_{\mathbf{x}}(\varphi \boldsymbol{\psi}) \, dx ds \\ &\quad - \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f_\varepsilon + \frac{g_\varepsilon}{\alpha})(\mathbf{u}_\varepsilon - \boldsymbol{\xi}) \gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\varphi \boldsymbol{\psi}) \, dx d\boldsymbol{\xi} ds. \end{aligned}$$

On va alors borner $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon$ dans $L^{4/3}([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$ en majorant chacun des termes de droite par un terme $C \|\Psi\|_{L^4([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}$, où C est une constante indépendante de ε et $\Psi = \varphi \boldsymbol{\psi}$. Pour le premier

terme, on a :

$$\begin{aligned}
\|[\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon] \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}(t) \|\beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \overbrace{\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^3)}}^{=1} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \\
&= \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^3)}^2 = \left(\int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}_\varepsilon| |\mathbf{u}_\varepsilon|^3(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\
&\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^{1/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2} \\
&\leq \sqrt{C} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{T^*} \int_{\mathbb{T}^3} (\mathbf{u}_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon) \otimes \beta_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_{\mathbf{x}}(\Psi) d\mathbf{x} ds \right| &\leq \sqrt{C} \int_0^{T^*} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^{3/2} \|\nabla_{\mathbf{x}}\Psi(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt \\
&\leq \sqrt{K} \left(\int_0^{T^*} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2 dt \right)^{3/4} \left(\int_0^{T^*} \|\nabla_{\mathbf{x}}\Psi(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^4 dt \right)^{1/4} \\
&= \sqrt{C} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6}^{3/2} \|\nabla_{\mathbf{x}}\Psi\|_{4,2} \\
&\leq \sqrt{C} C_{\mathbb{T}^3}^{3/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2;1}^{3/2} \|\Psi\|_{4;1} \\
&\leq C^2 K_{\mathbb{T}^3}^{3/2} \|\Psi\|_{4;1}.
\end{aligned}$$

Ensuite, $\|\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,2}$ étant bornée, cela suffit pour borner le deuxième terme. Pour le dernier terme, on traite d'abord la partie en f_ε . On a vu que $(m_1 f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$, et donc dans $L^2([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$. Ensuite, en appliquant le lemme 3.5.1 avec $(\alpha = \gamma - 2 = 0)$, on écrit

$$|m_0 f_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq C_{f_{\text{in}}} m_2 f_\varepsilon(t, \mathbf{x})^{3/5},$$

et donc, $\forall t \in [0, T_*]$,

$$\|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \leq C_{f_{\text{in}}} (M_2 f_\varepsilon)^{3/5} \leq C_{f_{\text{in}}} C^{3/5}.$$

Mais alors, $\forall t \in [0, T_*]$, on a

$$\begin{aligned}
\|(m_0 f_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} &\leq \|m_0 f_\varepsilon(t)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \\
&\leq C_{f_{\text{in}}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \\
&\downarrow \\
\|(m_0 f_\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{2,5/4} &\leq C_{f_{\text{in}}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,5} \\
&\leq C_{f_{\text{in}}} K^{3/5} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2,6} \\
&\leq C_{f_{\text{in}}} K^{3/5} K_{\mathbb{T}^3} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{2;1} \\
&\leq C_{f_{\text{in}}} K^{8/5} K_{\mathbb{T}^3},
\end{aligned}$$

où $K_{\mathbb{T}^3}$ est la constante de Sobolev introduite précédemment. Le terme $(m_1 f_\varepsilon - m_0 f_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ est donc bien borné dans $L^2([0, T_*]; L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$ et l'injection continue $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^2([0, T_*]; L^5(\mathbb{T}^3))$ passée au dual donne alors que cette même suite est bornée dans $L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$, et donc dans $L^{4/3}([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$. On obtient alors par dualité le contrôle annoncé :

$$\left| \int_0^{T^*} \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \xi) \gamma_\varepsilon(\xi) \cdot (\varphi \psi) d\mathbf{x} d\xi ds \right| \leq C \|\Psi\|_{L^4([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}.$$

Le terme en g_ε se traite de la même manière.

Finalement, le lemme d'Aubin s'applique et on a bien, à extraction près, la convergence forte de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_\varepsilon$ vers un élément \mathbf{u} dans $L^2([0, T_*]; L^2(\mathbb{T}^3))$.

C.4.2 Vérification de la formulation faible pour le système S^α

– Les limites (\mathbf{u}, f, g) construites précédemment sont solutions du système S^α sur $[0, T_*]$ dans le sens faible suivant :

- $\mathbf{u} \in L^2([0, T_*]; H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)) \cap L^\infty([0, T_*]; L_{\text{div}}^2(\mathbb{T}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T_*]; H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3))$,
- $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0, g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq 0$, pour presque tout triplet $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$,
- $f, g \in L^\infty([0, T_*]; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^0([0, T_*]; H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3_c))$,
- $M_2 f \in L^\infty([0, T_*])$, $M_2 g \in L^\infty([0, T_*])$,
- Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^1([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, à support compact en vitesse, on a pour tout $t \in [0, T_*]$,

$$\langle f(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \Theta_1(\mathbf{u})(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) f(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \quad (\text{C.42})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)/H^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et $\Theta_1(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel

$$\Theta_1(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} - I_d.$$

et

$$\begin{aligned} \langle g(t), \phi(t) \rangle - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} g_{\text{in}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(0, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \tilde{\Theta}_1(\mathbf{u})(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})(\phi) g(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \phi(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

où $\tilde{\Theta}_1(\mathbf{u})$ est l'opérateur différentiel

$$\tilde{\Theta}_1(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}}{\alpha} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}.$$

- Pour toute fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3)$ à divergence nulle, on a pour tout $t \in [0, T_*]$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Theta_2(\mathbf{u})(s, \mathbf{x})(\boldsymbol{\psi}) d\mathbf{x} ds &= \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{u}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f + \frac{g}{\alpha})(\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le crochet de dualité $H_{\text{div}}^{-1}(\mathbb{T}^3)/H_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3)$ et cette fois-ci

$$\Theta_2(\mathbf{u})(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathbf{x}} - \mathbf{u} \cdot \partial_t.$$

Preuve:

On note K une constante qui majore sur $[0, T_*]$, uniformément en ε , les quantités $\|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}$, $M_2 f_\varepsilon(t)$, $\|g_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}$ et $M_2 g_\varepsilon(t)$; de même $K_{\mathbf{u}}$ majore sur le même intervalle $\|\mathbf{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ et

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2([0, T_*]; \mathbf{H}_{\text{div}}^1(\mathbb{T}^3))}.$$

La vérification des équations se fait en faisant tendre ε vers 0 dans la formulation faible du système S^ε . Les convergences et régularités obtenues pour les suites f_ε , g_ε et \mathbf{u}_ε sont ici les mêmes que dans [2]. Les termes de la formulation faible sont également les mêmes à des coefficients $\frac{1}{\alpha}$ près pour les termes en g . On renvoie alors le lecteur à la preuve dans [2] pour les détails du passage à la limite dans le système, et pour l'établissement de l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + M_2 g(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 \left(f + \frac{1}{\alpha} g \right) d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + M_2 g_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

et les estimations

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} & \leq e^{3T_*} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}, \\ \|g\|_{L^\infty([0, T_*] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} & \leq e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|g_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + T e^{\frac{3T_*}{\alpha}} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

L'utilisation de l'estimation d'énergie permet, comme dans [2], de prolonger les solutions construites sur un intervalle $[0, T]$ pour $T > 0$ quelconque. Ceci nous démontre donc l'existence de solution pour le système à deux rayons (C.1) – (C.4), et plus précisément le théorème suivant :

Théorème C.4.1. *Soit $T > 0$. Sous les conditions (C.8), le système (C.1) – (C.4) possède au moins une solution sur $[0, T]$ au sens défini dans la section C.4.2. De plus, cette solution vérifie les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ M_2 f(t) + M_2 g(t) + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\} + \int_0^t \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\mathbf{u} - \boldsymbol{\xi}|^2 \left(f + \frac{1}{\alpha} g \right) d\boldsymbol{\xi} dx ds \leq \frac{1}{2} \left\{ M_2 f_{\text{in}} + M_2 g_{\text{in}} + \|\mathbf{u}_{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

$$\|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq e^{3T} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)},$$

et

$$\|g\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq e^{\frac{3T}{\alpha}} \|g_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + T e^{\frac{3T}{\alpha}} \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)}.$$

C.5 Lemme de l'annexe C : Dérivée des caractéristiques par rapport au temps initial

On considère un système d'EDOs de la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a(t, y), \\ y(s) = y_0, \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

où le champ $a(t, y)$ est \mathcal{C}^1 , de croissance sous-linéaire en y . On note $t \mapsto \mathbb{T}_{s,t}(y_0)$ la solution de (C.46) pour un instant initial s et une donnée initiale y_0 . On veut calculer la dérivée : $\frac{\partial}{\partial s}(\mathbb{T}_{s,t}(y_0))$, pour $t = 0$ et y_0 donné. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{s,t}(y_0) &= y_0 + \int_s^t a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz \\ &= y_0 - \int_t^s a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz. \end{aligned}$$

En dérivant, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{T}_{s,t}(y_0) &= -a(s, \mathbb{T}_{s,s}(y_0)) - \int_t^s \frac{\partial}{\partial s} a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz \\ &= -a(s, y_0) - \int_t^s \frac{\partial}{\partial s} a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz \\ &= -a(s, y_0) - \int_t^s \nabla_y a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{T}_{s,z}(y_0) dz. \end{aligned}$$

En posant $h(z) = \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{T}_{s,z}(y_0)$ et $b(z) = \nabla_y a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0))$, la fonction h vérifie :

$$\begin{aligned} h(t) &= -a(s, y_0) - \int_t^s b(z) \cdot h(z) dz \\ &= -a(s, y_0) + \int_s^t b(z) \cdot h(z) dz, \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= -\exp\left(\int_s^t b(z) dz\right) \cdot a(s, y_0), \\ \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{T}_{s,t}(y_0) &= -\exp\left(\int_s^t \nabla_y a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz\right) \cdot a(s, y_0). \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Et en particulier pour $t = 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathbb{T}_{s,0}(y_0)) = -\exp\left(-\int_0^s \nabla_y a(z, \mathbb{T}_{s,z}(y_0)) dz\right) \cdot a(s, y_0).$$

Remarque C.5.1. On remarque que la donnée de $\frac{\partial}{\partial s}(\mathbb{T}_{s,t}(y_0))$ pour chaque triplet (t, s, y_0) définit de façon unique le champ $a(s, y_0)$ qui est donné par $-h(s)$ d'après l'équation (C.47). En d'autres termes (C.47) est équivalente au système initial (C.46).

Bibliographie

- [1] R. J. DiPerna and P. L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones Mathematicae*, 98 :511–547, 1989. 10.1007/BF01393835.
- [2] A. Moussa. *Etude mathématique et numérique du transport des aérosols dans le poumon humain*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [3] J.Y. Chemin. *Théorie des équations d'évolution*. Université Paris 6, 2009. Lien vers le texte intégral : <http://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/polycopies/chemin.pdf>.

Publications extraites de cette thèse :

- La partie III a fait l'objet d'un article paru dans la revue *Note di Matematica*
S. Benjelloun, L. Desvillettes, J.M. Ghidaglia et K. Nielsen. Modeling and Simulation of Thick Sprays through Coupling of a Finite Volume Euler Equation Solver and a Particle Method for a Disperse Phase. *Note di Matematica (Note Mat.)*, volume 32 (2012), n.1, pp. 63-85.
- La partie I fait l'objet d'un article en préparation, en collaboration avec L. Desvillettes et A. Moussa.
- La partie II fait l'objet d'un article en préparation, en collaboration avec Jean Michel Ghidaglia.