Contributionà l'élimination du balourd pour une machine tournanteà Paliers Magnétiques Actifs par des techniques de commandes non linéaires

Jérôme de Miras

▶ **To cite this version:**

Jérôme de Miras. Contributionà l'élimination du balourd pour une machine tournanteà Paliers Magnétiques Actifs par des techniques de commandes non linéaires. Automatique / Robotique. Université de Technologie de Compiègne, 1998. Français. NNT : . tel-00820083

HAL Id: tel-00820083

https://theses.hal.science/tel-00820083

Submitted on 3 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution à l'élimination du balourd pour une machine tournante à Paliers Magnétiques Actifs par des techniques de commandes non linéaires

Jérôme DE MIRAS - Thèse de Doctorat

Présentée devant l'Université de Technologie de Compiègne
Date : 21 décembre 1998
Spécialité : Contrôle des Systèmes

Jury :
Président : M. Christian MELIN
Rapporteurs : M. Pierre BORNE
M. Luc DUGARD
Examinateurs : M. Ali CHARARA (Directeur de thèse)
M. Alain GLUMINEAU
M. Luc LORON
M. Jean-Paul LOUIS
M. Dominique MEIZEL

A mon Père

Remerciements

Au cours de ces années de thèse, réalisées au sein du laboratoire HeuDiaSyc UMR CNRS 6599 de l'UTC, nombreuses ont été les personnes, parents, amis et autres, qui ont participé, directement ou indirectement, à la réalisation de ce mémoire. Par avance, merci à tous et mille excuses à ceux que j'oublierai.

Je voudrais commencer par remercier celui qui a accepté de me diriger au cours de ce long travail : M. Ali CHARARA, Maître de Conférences à l'Université de Technologie de Compiègne. Toujours plein d'idées et de conseils pour avancer nos travaux, il n'a pourtant pas hésité à me laisser explorer mes propres intuitions, dénuées, au départ, de solides fondations. C'est aussi grâce à sa vigilance que nous avons publié les résultats de nos travaux au fur et à mesure de leur validation. Mais cela serait incomplet si je ne faisais pas mention de la chaleur humaine dont il a fait preuve. Merci donc à l'homme et aussi à l'ami.

Toute ma gratitude aussi aux membres de mon jury de thèse, Messieurs Alain GLUMINEAU, Jean-Paul LOUIS, Luc LORON et Dominique MEIZEL, pour leur disponibilité lors de la soutenance, étant donnée la date choisie. J'attribuerai une mention spéciale à M. Pierre BORNE et M. Luc DUGARD, qui ont témoigné leur intérêt pour ce travail en acceptant d'en être les deux rapporteurs malgré le court délai imposé. Mes sincères remerciements, enfin, à M. Christian MELIN, pour avoir présidé le jury.

Je ne peux faire ici l'impasse sur la présence et l'acceuil chaleureux de mes collègues, enseignants et personnels technique et administratif. Tous ont participé à rendre ces années de travail plus intéressantes.

A tous mes amis, un grand merci aussi, pour avoir émaillé ma vie de multiples moments d'amitié et de rires. Ainsi je cite pour mémoire, dans le désordre (et en en oubliant) : Alex, Eric, Marc, Alain, Dom, Manu, David, Félix, Olivier, Pierre, Tanneguy, Virginie, ...

Enfin, je ne peux oublier ici toute ma famille, et surtout ma Mère, qui m'a toujours soutenu malgré les difficultés que l'on rencontre inévitablement au cours d'une thèse.

Ainsi, Merci à tous.

Sommaire

1 Introduction générale **11**

2 Modélisation **15**

2.1 Introduction . . . 17
2.2 Le monde des Paliers Magnétiques . . . 18
2.2.1 Palier actif ou passif? . . . 18
2.2.2 Quelques définitions . . . 18
2.2.3 Perturbations . . . 21
2.3 Modélisation : la théorie . . . 23
2.3.1 Equations fondamentales de la dynamique . . . 23
2.3.2 Degrés de liberté . . . 24
2.3.3 Equations d'Euler Lagrange . . . 25
2.3.3.1 Modèle par l'approche variationnelle . . . 25
2.3.3.2 Coordonnées Généralisées . . . 26
2.3.3.3 Définition de la fonctionnelle d'un système électromécanique . . . 26
2.3.3.4 Energies . . . 27
2.3.3.5 Les systèmes avec entrées . . . 28
2.3.3.6 Réécriture équationnelle . . . 29
2.4 Modélisation : application à une sustentation magnétique . . . 30
2.4.1 Positionnement du rotor dans l'espace . . . 30
2.4.1.1 Quelques Hypothèses et Simplifications . . . 32
2.4.2 Energie Mécanique . . . 34
2.4.2.1 Energie cinétique de translation . . . 34
2.4.2.2 Energie cinétique de rotation . . . 36
2.4.2.3 Energie potentielle mécanique . . . 39
2.4.3 Energie Electrique . . . 40
2.4.3.1 Energie stockée . . . 40
2.4.3.2 Calcul de l'inductance . . . 41
2.4.3.3 Inductance : Surface $\mathcal{S}$ et variation d'entrefer Δe . . . 43
2.4.3.4 Energie électrique dissipée . . . 46
2.4.4 Energie cinétique totale . . . 46
2.5 Quelques modèles . . . 47

2.5.1 Modèle du système plan . . . 47
2.5.2 Modèle de la broche . . . 51
2.5.2.1 Modèle de simulation . . . 52
2.5.2.2 Modèle pour l'analyse . . . 53
2.5.2.3 Modèle pour la commande . . . 55
2.5.2.4 Modèle d'une broche à actionneurs coniques . . . 57
2.5.3 Récapitulatif des équations composant les différents modèles . . . 58
2.6 Fonctionnement Linéaire et non Linéaire . . . 58
2.6.1 Fonctionnement linéaire . . . 59
2.6.2 Fonctionnement non linéaire . . . 62
2.7 Conclusion . . . 64

3 Commande du procédé **67**
3.1 Introduction . . . 69
3.2 Suppression du balourd . . . 70
3.2.1 Modes de suppression du balourd . . . 71
3.2.2 Deux méthodes de suppression de balourd . . . 73
3.2.2.1 Filtres de suppression de fréquence . . . 73
3.2.2.2 Observation du balourd . . . 77
3.2.3 Vers une solution alternative . . . 81
3.2.3.1 Premier pas : un observateur linéaire . . . 82
3.2.3.2 Des PID fixes et tournants . . . 85
3.3 Implémentations non linéaires . . . 95
3.3.1 Courant ou tension? . . . 95
3.3.2 Linéarisation entrée-état et Commande passive . . . 96
3.3.2.1 linéarisation entrée-état . . . 96
3.3.2.2 Choix des courants . . . 99
3.3.2.3 Robuste est-ce? . . . 102
3.3.2.4 Application aux actionneurs coniques . . . 103
3.3.2.5 Commande passive pour la tension . . . 106
3.3.2.6 Convergence des positions sous la condition de convergence des courants . . . 109
3.3.3 Modes Glissants et Linéarisation Entrée-Sortie . . . 111
3.3.3.1 Modes glissants : généralités . . . 111
3.3.3.2 Surfaces de glissement linéaires . . . 113
3.3.3.3 Linéarisation Entrée-Sortie . . . 115
3.3.3.4 Attractivité de la surface de glissement . . . 116
3.3.3.5 "Chattering" et solution . . . 121
3.3.3.6 Mode glissant et balourd : robuste est-ce? . . . 123
3.3.3.7 Mise en application . . . 125
3.4 Conclusion . . . 128

4 Simulations et essais réels **131**
4.1 Introduction . . . 133
4.2 Modèle et banc d'essais : comparaison et validation . . . 133
4.2.1 Paramètres constructeur . . . 133
4.2.2 Détermination des paramètres du balourd . . . 135
4.2.3 Simulations pour validation . . . 139
4.2.4 Essais réels pour validation . . . 142
4.3 Linéarisation entrée-état et passivité . . . 144
4.3.1 Résultats sans erreurs paramétriques . . . 146
4.3.2 Remarque supplémentaire . . . 151
4.3.3 Résultats avec erreurs paramétriques . . . 153
4.4 Mode glissant . . . 153
4.4.1 Commande sans élimination de balourd . . . 153
4.4.2 Commande avec élimination du balourd . . . 155
4.5 Conclusion . . . 157

5 Conclusions et Perspectives **161**

Annexes **172**

A Equation d'Euler Lagrange : origine **173**
A.1 Modèle par l'approche variationnelle . . . 173
A.2 Exemple . . . 175

B Calcul de la matrice C **177**
B.1 Les symboles de Christoffel . . . 177
B.2 Propriété de la matrice C . . . 179

C Position du centre géométrique O **181**

D Forme quadratique de la matrice d'inertie **183**
D.1 Energie cinétique de translation . . . 183
D.2 Energie cinétique de rotation . . . 186
D.3 Energie cinétique totale . . . 188

E Modèle de simulation : matrice C et dissipation électrique **189**
E.1 Matrice C . . . 189
E.2 Energie dissipée . . . 193
E.3 Les entrées du système . . . 194

F Le volant d'inertie **195**

G Modèle d'analyse **197**
G.1 Matrice D 197
G.2 Matrice C 200

H Modèle d'une broche à actionneurs coniques **205**

I Stabilité : méthode directe de Lyapunov **209**
I.1 Quelques définitions 209
I.2 Méthode directe de Lyapunov 210
I.2.1 Stabilité locale 210
I.2.2 Stabilité globale 210
I.2.3 Stabilité exponentielle 210

J Passivité : quelques définitions **213**
J.1 Systèmes passifs 213
J.2 Passivité des systèmes Lagrangiens 214

K Linéarisation Entrée-Sortie : rappels théoriques **217**

L Modèle d'état de la broche **221**
L.1 Modèle d'état 221
L.2 Dérivées des sorties 223

Les travaux présentés dans ce document ont en partie été publiés dans les articles suivants :

Articles dans des revues internationales :

"A Vector Oriented Control for a Magnetically Levitated Shaft"
J. De Miras, A. Charara,
IEEE Transactions on Magnetics, 1998, vol. 34, n^o4, pp. 2039-2041

"Nonlinear Control of a Magnetic Levitation System Without Premagnetization"
A. Charara , J. De Miras, B. Caron,
IEEE Transactions on Control Systems Technology, Septembre 1996, Vol. 4, n^o5, pp. 513-523

"Stabilisation Non Linéaire d'un Palier Magnétique Actif par Passivité et Mode de Glissement"
J. De Miras, A. Charara,
Algerian Journal of Technology, 1997, vol. 1,pp. 177-182

Articles dans des congrès internationaux avec comité de lecture :

"Vector Desired Trajectories for High Rotor Speed Magnetic Bearing Stabilization"
J. De Miras, A. Charara,
accepté pour : *IFAC'99, 14th World Congress*, Chine

"Unbalance Cancellation with Rotating Reference Control for a horizontal shaft"
J. De Miras, A. Charara,
6th International Symposium on Magnetic Bearings, MIT Cambridge USA, Août 1998, pp. 673-682

"Rotating Reference Control for Canceling the Unbalance of Active Magnetic Bearings"
J. De Miras, A. Charara,
CESA'98 IEEE-IMACS Multiconference, Tunisie, Avril 1998

"Nonlinear Sliding Mode Control of Electromagnetic Suspension"
J. De Miras, A. Charara, B. Caron,
IFAC'96, 13th World Congress, San Francisco USA, pp. 463-468

"Sliding Mode Control and Fuzzy Logic Control of a Magnetic Bearing Without Premagnetization"
J. De Miras, B. Vidolov, A. Charara, C. Mélin,
CESA'96 IEEE-IMACS Multiconference, Computational Engineering in Systems Applications, Lille, 1996, Vol. 1, pp. 599-604

"Two-Rules-Based Fuzzy Logic Control and Sliding Mode Control of an Active Magnetic Bearing"
B. Vidolov, C. Mélin, J. De Miras, A. Charara,
FUZZ-IEEE'96, New Orleans USA, 1996, Vol. 2, pp. 1205-1209

"Active magnetic bearing : advantage of the functioning without premagnetization"
A. Charara, J. De Miras,
EPE'95 6th European Conference on Power Electronics and Applications, Valence, Spain, September 1995, Vol. 3, pp. 3874-3879

"Commande d'un Palier Magnétique Actif : du Linéaire au Non Linéaire"
A. Charara, J. De Miras,
2ème Conférence Internationale sur l'Automatisation Industrielle, Nancy, June 1995, Vol. 1, pp. 307-312

Chapitre 1

Introduction générale

Un rêve

Echapper à la pesanteur : un rêve longtemps caressé par l'homme, et qui l'a poussé à fabriquer des machines volantes. La poursuite de ce rêve l'a conduit, dans un autre registre, à maîtriser les forces qui s'exercent à distance : forces électriques et forces magnétiques. Ces forces permettent de contrôler la position d'un objet à distance, et de le faire flotter si on le désire. Des travaux actuels étudient la sustentation des corps vivants sous l'effet de puissants champs magnétiques. Résultats limité pour l'instant à des corps de petites tailles (tels qu'un insecte), les chercheurs à l'origine de ces travaux pensent pouvoir un jour soulever un être humain (dans un système d'ascenseur magnétique par exemple) mais cela reste pour l'instant du domaine de la fiction.

Une réalité

Loin de ces travaux prospectifs sur la matière vivante, l'utilisation des champs magnétiques sur des pièces ferriques représente un domaine bien maîtrisé. L'exemple le plus connu, car le plus spectaculaire, reste le train à sustentation et propulsion magnétique. Les champs magnétiques permettent au train de se soulever au dessus de ses rails ; l'absence de contacts permet au train d'atteindre des vitesses sans commune mesure avec un train classique.

Cette application n'est pourtant pas la seule. En terme de nombre d'exemplaires existants, il s'agit même d'une goutte d'eau dans l'océan. L'application la plus commune consiste à sustenter un rotor de machine par l'intermédiaire d'électro-aimants : machines outils, pompes à vide, turbomachines, gyroscopes, volants d'inertie, ...

Ces applications, de domaines aussi variés que l'aérospatial ou le biomédical, profitent des nombreux avantages apportés par les rotors sustentés magnétiquement :

- l'absence de frottement (action à distance) élimine les problèmes d'usure. La longévité de la machine est largement accrue et son besoin de maintenance devient quasiment nul ;
- la vitesse de rotation du rotor est généralement limitée par la technologie des paliers qui supportent ce dernier. Lorsque le palier est à base de champs magnétiques (paliers magnétiques),

cette limite est largement repoussée car il n'y a plus de matériaux en contact. Actuellement, des machines à base de paliers magnétiques tournent à plus de 100 000 $tours/min$;

- l'élimination des paliers classiques (paliers à billes ou paliers fluides) supprime le nécessaire système de lubrification. Sans huile, la machine devient propre et peut aisément être utilisée dans des environnements où toute pollution est exclue (pompes biomédicales) ;
- l'environnement propre n'est pas le seul qui puisse accueillir des paliers magnétiques : le vide ou les hautes températures ne représentent pas un obstacle ;
- sans contact, il doit être virtuellement possible de supprimer toute vibration engendrée par les inévitables défauts de fabrication du rotor comme le balourd[1] (nous reviendrons sur ce point dans la suite de ce document).

Si les paliers magnétiques présentent des avantages, ils ne sont pas exempts de petits défauts :

- la technologie mise en œuvre est chère. Ce problème est le point de mire de quelques travaux dont le but est de réduire les coûts de production en simplifiant la structure mécanique ;
- les systèmes positionnés par des forces magnétiques présentent rarement un caractère stable si les forces ne sont pas asservies aux positions. Cet état de fait oblige la mise en place d'une structure d'asservissement complètement absente d'un système à paliers classiques. En plus du coût du matériel, la mise au point peut s'avérer complexe ;
- la force créée par un électro-aimant est non linéaire, proportionnelle au carré du courant et inversement proportionnelle à l'entrefer séparant le rotor du stator. Le modèle du palier magnétique est donc non linéaire, ce qui, a priori, ne simplifie pas la synthèse de commande.

Le dernier point cité a longtemps été contourné en utilisant une linéarisation physique du système par injection d'un courant de prémagnétisation dans les bobines. Ce changement forcé de point de fonctionnement a permis le développement de nombreux travaux dont la complexité n'a de limite que les difficultés présentées par l'intégration de paliers magnétiques dans des systèmes bien spécifiques.

Le développement conjoint de la commande non linéaire et des microprocesseurs, depuis les années 80, ouvre des perspectives importantes dans le domaine du fonctionnement non linéaire (sans courant de prémagnétisation). Pourtant, le nombre de travaux dans cette direction reste limité, peut-être par manque de communication entre les laboratoires spécialistes du palier magnétique et ceux compétents dans la commande non linéaire.

Dans ce document, nous nous proposons d'apporter des solutions à un double problème : l'élimination du balourd par des techniques non linéaires. Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

- le premier revisite les éléments nécessaires à la modélisation des paliers magnétiques. A partir de ces données, différents modèles seront proposés en fonction de l'usage qu'on leur réserve. La particularité de ces modèles est de prendre le balourd comme une perturbation intrinsèque ;

1. Le balourd est une perturbation créée par la non coïncidence de l'axe géométrique et de l'axe d'inertie principal du rotor.

- la deuxième partie concerne la commande non linéaire d'une broche à paliers magnétiques. Ce chapitre débute par une présentation de techniques d'élimination du balourd qui nous conduit à proposer notre propre stratégie. A la suite de cela, nous proposons deux techniques non linéaires de commande permettant l'implémentation de notre algorithme d'élimination du balourd ;
- la dernière partie est réservée à la validation des lois de commande proposées précédemment par l'intermédiaire de simulations et d'essais réels sur une broche de laboratoire.

Chapitre 2

Modélisation

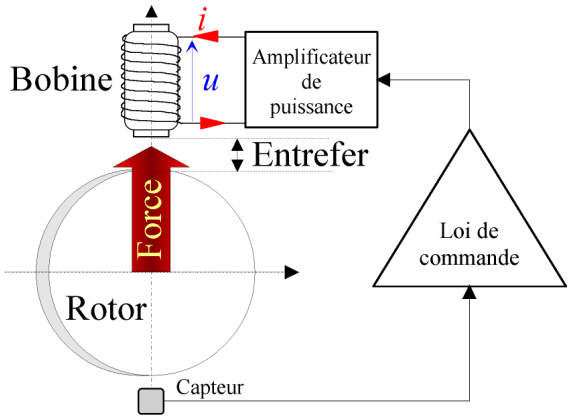


FIG. 2.1: *Représentation schématique d'un actionneur*

2.1 Introduction

Pour pouvoir agir sur un système, il faut posséder quelques informations sur celui-ci. C'est le rôle de la modélisation que de fournir ces informations. Plus le nombre de ces informations est important, plus on peut espérer, par la suite, synthétiser une commande performante. Les premiers modèles de broches à paliers magnétiques actifs remontent aux premiers travaux sur la commande (Habermann, 1978; Matsumura et al., 1981; Matsumura et al., 1983). Aujourd'hui encore, les modèles sont explorés et complexifiés afin d'étudier, en simulation, les comportements observés sur les machines réelles (Youcef-Toumi and Reddy, 1992; Mohamed and Emad, 1993; Barthod and Lemarquand, 1995; Carabelli and Genta, 1998; Spinger et al., 1998).

Dans ce chapitre, nous présentons, dans un premier temps, des définitions permettant d'appréhender la problématique attachée aux paliers magnétiques actifs et à leur modélisation. Dans un second temps, une méthode, par changement de variables, est introduite pour permettre le calcul de modèles contenant la perturbation due au balourd comme une partie intégrante des équations dynamiques. Cette technique est appliquée à la modélisation d'un plan de contrôle dont nous tirerons quelques données importantes pour la synthèse d'une commande éliminant le balourd. Puis c'est au tour de la broche d'être modélisée en utilisant cette technique ; ce dernier modèle a alors la particularité de prendre en compte l'effet de la perturbation due au balourd comme un phénomène intrinsèque du comportement du rotor. Nous proposons par la suite, plusieurs modèles de la broche, moins complexes, qui seront utilisés en fonction du contexte pour la synthèse des lois commande. Nous finirons en définissant ce que l'on appelle le fonctionnement linéaire et non linéaire d'un palier magnétique.

2.2 Le monde des Paliers Magnétiques

2.2.1 Palier actif ou passif?

Schweitzer (Schweitzer et al., 1994), propose une nomenclature très complète où il différencie principalement les paliers utilisant les forces de réluctance (famille à laquelle appartiennent les deux types de paliers cités plus bas), et ceux utilisant les forces de Lorentz (actions électrodynamiques par induction de courant). Parmi ces derniers, un axe de recherche important concerne les paliers à supraconductivité (Albanese et al., 1994a; Gauss and Elschner, 1994; Komori et al., 1994; Takahata and Ueyama, 1994; Moon, 1994; Albanese et al., 1994b; Hiebel, 1994; Terentiev et al., 1995; Tsuchimoto et al., 1995).

Dans la grande famille des Paliers Magnétiques, on peut distinguer deux classes :

- les Paliers Magnétiques Passifs (PMP), sont constitués principalement d'actionneurs à aimants permanents. Dans ce type de construction, les systèmes peuvent fonctionner avec des forces d'attraction ou de répulsion. La caractéristique dynamique de l'actionneur obtenu est, pour l'essentiel, équivalente à celle d'un ressort dans les directions axiales et radiales (Yonnet, 1981). Dans une de ces deux directions, la raideur est positive. Cela entraîne que l'on ne peut pas construire un système entièrement maintenu en suspension par des paliers magnétiques passifs car il se révèle instable ; cette propriété est montrée en 1839 par Earnshaw lorsqu'il prouve qu'une particule chargée ne peut léviter dans un champ de forces statiques. Bien entendu, cette caractéristique est fixée à la construction du palier et ne peut être changée lors de son fonctionnement ;

- les Paliers Magnétiques Actifs (PMA), dont les représentants les plus communs sont les paliers à ferro-attraction. Dans ce cas la force est créée par un électro-aimant dont le courant peut être modulé. La force ainsi appliquée étant directement fonction de ce courant (comme cela sera montré plus loin), il est possible de complètement la maîtriser. Les paliers magnétiques actifs se trouvent à l'intersection de plusieurs disciplines : par la mécanique et l'électromagnétisme, on peut définir des structures présentant une efficacité maximum, fonction des formes et des matériaux, en essayant de limiter les pertes ou les saturations ; l'électronique de puissance permet d'alimenter de façon optimale les différentes bobines. L'automatique est le support de construction pour obtenir le meilleur système de commande donnant les performances dynamiques désirées, ceci aussi bien au niveau de l'algorithmique que de la réalisation matérielle. C'est principalement dans le domaine de l'automatique qu'intervient ce travail.

2.2.2 Quelques définitions

Les définitions données ci-dessous ont pour but de faciliter la présentation de la problématique par la suite. Certaines définitions ne sont valables que pour la géométrie usuellement admise pour une broche sustentée magnétiquement. En effet, les formes que peuvent prendre les appareils contenant des paliers magnétiques sont multiples. Certains travaux (Ponsart, 1996; Meeker, 1996) étudient

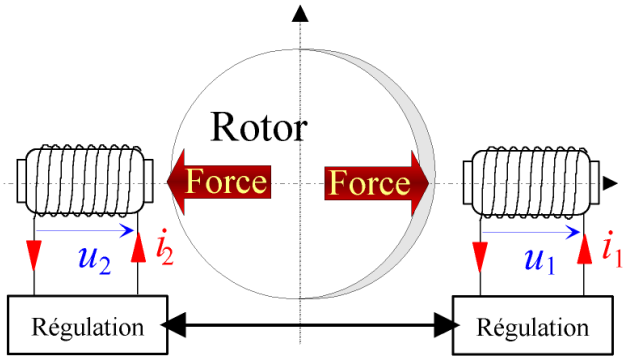


FIG. 2.2: *Représentation schématique d'un axe de contrôle*

les possibilités de réduction du nombre d'actionneur afin de réduire les coûts de production ; ainsi conçus les systèmes de sustentation présentent des formes mécaniques inhabituelles, et en dehors du contexte proposé par cette étude.

Définition 1 (Actionneur)
Un actionneur dans un Palier Magnétique Actif est représenté par un électro-aimant qui agit sur une partie mobile appelée le rotor *(voir Figure 2.1). L'électro-aimant est fixé sur le bâtit de la machine, que l'on dénommera* stator, *en vis à vis d'une partie métallique ferreuse solidaire du rotor. Rotor et stator sont séparés par un intervalle appelé* entrefer *de valeur nominale e_0. L'électronique de puissance est associée à l'actionneur. Elle permet de générer soit la tension soit le courant désiré dans le bobinage de l'électro-aimant. Etant donné qu'un électro-aimant ne peut exercer qu'une force d'attraction, il n'est en général pas utilisé seul (sauf dans le cas très particulier de la bille suspendue : dans ce cas, l'éloignement de la bille par rapport à l'actionneur est permis par l'action de la gravité), mais entre dans la composition d'un axe de contrôle.*

Définition 2 (Axe de contrôle)
Un axe de contrôle est constitué de deux actionneurs en vis à vis (voir Figure 2.2). Cela permet d'exercer des forces positives et négatives par rapport au sens de référence de cet axe. Au sein de ce groupe, la commande de chaque actionneur ne se fait pas, en général, séparément ; ils sont couplés pour obtenir une efficacité accrue et une réponse en adéquation avec les prévisions.

Définition 3 (Plan de contrôle)
Un plan de contrôle est constitué de deux axes de contrôle perpendiculaires (voir Figure 2.3)[1]*. Ce groupe est aussi appelé un* ***Centreur****, sa fonction étant de maintenir le rotor à une position donnée, soit zéro, soit une trajectoire généralement circulaire. Habituellement, les commandes des deux axes d'un plan ne sont pas couplées. Par la suite nous montrons comment ce couplage peut être exploité pour obtenir un meilleur comportement vis à vis de la perturbation.*

1. Cette définition est valable pour un système comprenant quatre actionneurs pour un plan. Plus loin dans ce chapitre sera abordée une structure différente où les plans de contrôle sont constitués de seulement trois bobines à 120^o les unes des autres.

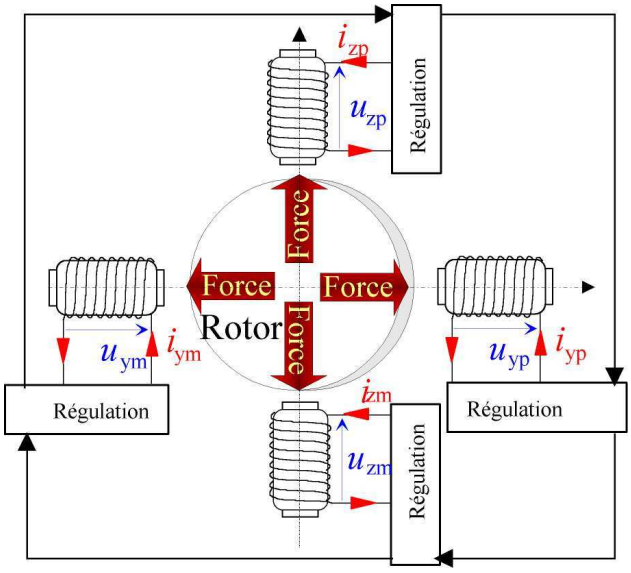


FIG. 2.3: *Représentation schématique d'un plan de contrôle*

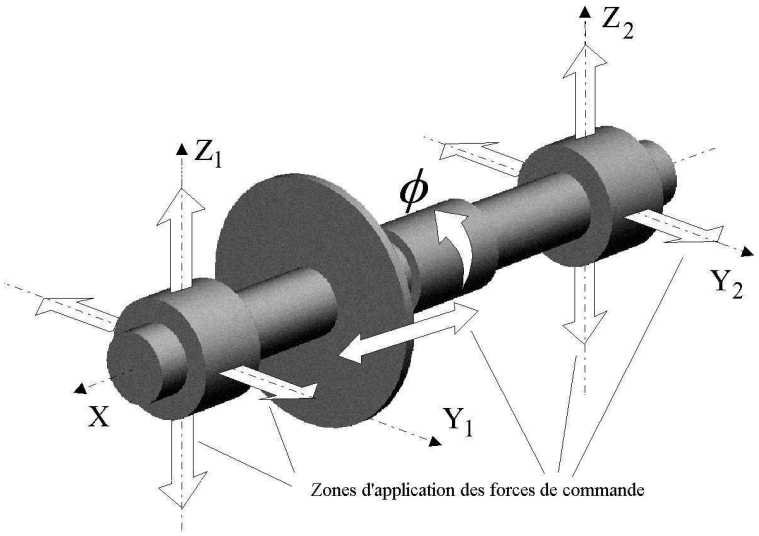


FIG. 2.4: *Représentation schématique du rotor d'une broche*

Définition 4 (Butée)

Une butée sert à maintenir en position le rotor le long de son axe principal. Une butée peut être considérée comme un axe de contrôle si celle-ci est active (PMA). Dans le cas où elle serait passive (PMP), elle introduit des forces de perturbation dans le modèle, et se comporte comme un ressort dont la raideur est fixée par construction (Yonnet, 1981; Charara, 1992).

Définition 5 (Broche)

Le modèle générique d'une broche se compose de deux plans de contrôle (contrôle de quatre degrés de liberté), d'une butée (contrôle d'un degré de liberté), et d'un moteur qui permet de maintenir la vitesse de rotation du rotor (voir Figure 2.4 et Figure 2.5).

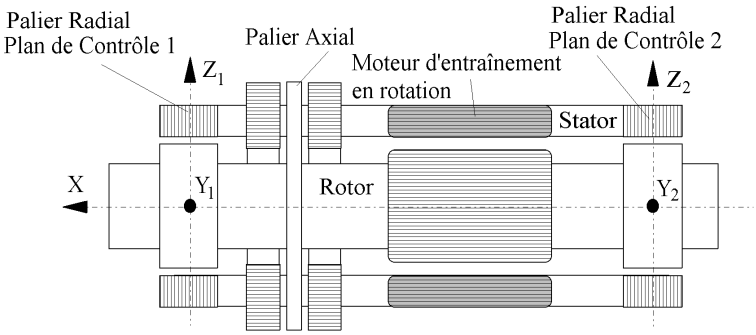


FIG. 2.5: *Représentation schématique d'une broche*

Le Centre Géométrique *O du rotor est défini comme le point milieu du segment compris entre les deux plans de contrôle lorsque le rotor est dans sa position nominale.*

2.2.3 Perturbations

Un système n'est jamais parfait et il présente généralement des défauts qu'il faut prendre en compte lorsque l'on construit une loi de commande. Ces imperfections sont plus ou moins importantes. Les systèmes sustentés par des paliers magnétiques présentent des défauts géométriques dus à leurs fabrications. Nous pouvons en citer trois principaux qui représentent (ou ont représenté) des axes de recherche importants quant à la réduction de leurs effets.

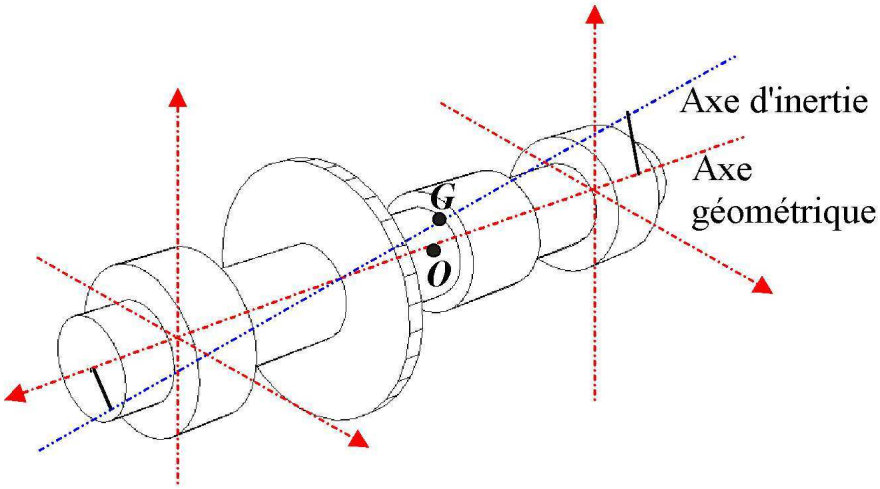


FIG. 2.6: *Position de l'axe d'inertie d'une broche*

– **Le balourd :** celui-ci est dû à la position de l'axe d'inertie du rotor. Comme on peut le voir sur la Figure 2.6, il est peu probable que sa position coïncide avec celle de l'axe géométrique (même si ce défaut n'excède pas quelques micromètres). Or, comme cela sera montré plus loin dans ce chapitre, cette erreur va induire une perturbation sur les positions observées ; cette

perturbation n'existe que parce que les capteurs mesurent la position de l'axe géométrique. Ainsi, si la position de l'axe d'inertie pouvait être mesurée, la perturbation n'existerait pas. Le balourd peut être modélisé sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= \delta_1 \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \gamma_1) \\ P_2 &= \delta_2 \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \gamma_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où δ_1 et δ_2 représentent les distances entre l'axe géométrique et l'axe d'inertie au niveau du plan de contrôle 1 et 2, et ϕ la position angulaire du rotor autour de son axe géométrique. Ces expressions sont simplifiées car elles ne tiennent pas compte des couplages de Coriolis dans le mouvement du rotor. Nous proposerons par la suite un modèle qui prend en compte ces couplages.

– **Le faux rond :** dans ce qui est énoncé précédemment, la mesure de la position est supposée être faite par rapport à une surface exempt de défaut. Si cette surface de référence présente des irrégularités comme sur la Figure 2.7, elles vont se répercuter sur les mesures, provoquant des bruits à diverses fréquences. Ce défaut est de moins en moins important avec les améliorations continuelles des états de surface dans les usinages modernes.

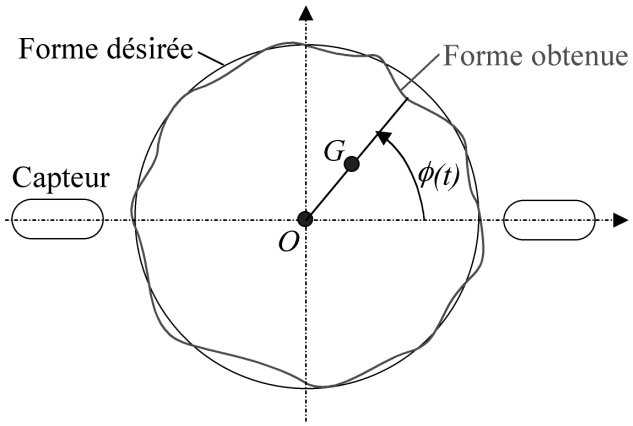


FIG. 2.7: *Etat de surface sous les capteurs de position*

– **La flexibilité du rotor :** toute pièce mécanique présente des fréquences de résonance qui peuvent être plus ou moins amorties par leur environnement. Le rotor d'une broche n'échappe pas à cette règle (Figure 2.8). Si les actionneurs excitent ces fréquences, on peut obtenir une instabilité du système. Quelques exemples de maîtrise de ce phénomène sont décrits dans (Tian and Nonami, 1994; Okada, 1994; Akishita and Iwatani, 1994; Petela and Botros, 1995; Nonami and Ito, 1996)

Pour le reste de notre exposé, nous allons uniquement nous intéresser à l'effet de la perturbation due au balourd dans le comportement dynamique du rotor. Dans un premier temps, nous montrerons comment on peut tenir compte de cette perturbation dans la modélisation d'un système à base

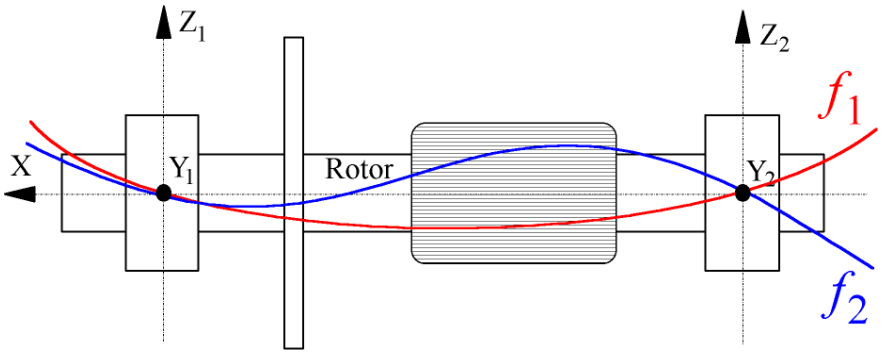


FIG. 2.8: *Modes flexibles d'un rotor*

de paliers magnétiques ; dans le chapitre suivant, nous verrons comment réduire son effet à travers la loi de commande.

2.3 Modélisation : la théorie

Modéliser un système est la première étape avant la synthèse de la commande de ce procédé. Le Palier Magnétique présente des spécificités qui nécessitent une attention particulière lors de cette étape. Connaître ces spécificités permet, de notre point de vue, d'être plus efficace lors de la conception de la commande.

Lors de l'étape de modélisation, l'utilisation d'une technique d'ordre général, capable de s'adapter facilement aux différents niveaux de complexité qui peuvent être introduits, peut se révéler importante. Dans cette optique, la méthode de modélisation par les équations d'Euler Lagrange a été choisie.

Les notions abordées dans les sections suivantes sont expliquées ou utilisées dans les références suivantes : (Annequin and Boutigny, 1973; Goldstein, 1980; Meisel, 1984; Chorot, 1991)

2.3.1 Equations fondamentales de la dynamique

Habituellement, pour décrire le mouvement d'un mobile, les équations fondamentales de la dynamique sont utilisées :

- pour les translations :

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\,v) \tag{2.2}$$

  où F est une force appliquée au mobile, et $m\,v = p$ la quantité de mouvement, produit de sa masse m par sa vitesse $v = dr/dt$. r est la position du mobile par rapport à un repère Galiléen donné ;

- pour les rotations :

$$\sum C = \frac{d}{dt}\left(J\,\dot{\theta}\right) \tag{2.3}$$

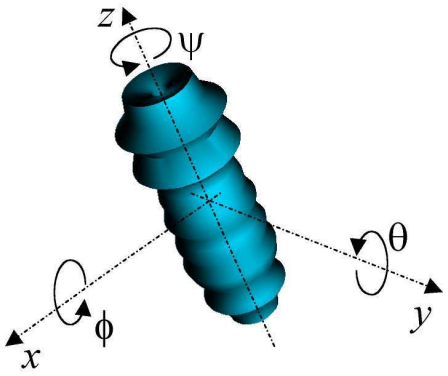


FIG. 2.9: *Les 6 degrés de liberté d'un solide*

où C est un couple selon l'axe de rotation qui est aussi la direction de $\dot{\theta}$. Cette direction est normale à la vitesse v. L'équation (2.3) se trouve en introduisant l'expression du moment angulaire

$$L = r \wedge p \tag{2.4}$$

dans l'équation (2.2)

Ces équations doivent être appliquées en tout point et selon tous les axes du système. A partir de là, il faut prendre en compte les liaisons qui existent entre les différentes équations afin de conserver un nombre minimal de variables.

2.3.2 Degrés de liberté

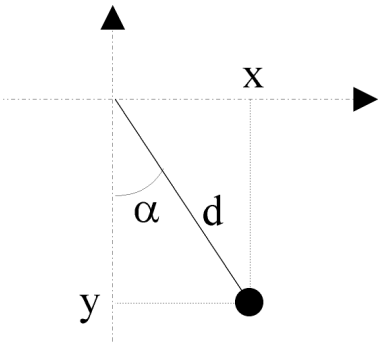


FIG. 2.10: *Coordonnées d'un pendule*

Un solide libre dans l'espace possède 6 degrés de liberté (Figure 2.9). Si n solides se trouvent dans cet espace, le nombre de degrés de liberté devrait donc être de $6n$. Pourtant, il peut exister des liaisons entre ces différents solides. Ces liaisons sont dites holonomes si elles correspondent à des relations analytiques entre des coordonnées des solides. Chaque liaison holonome réduit de un le nombre de degrés de liberté du système. Prenons l'exemple du pendule (Figure 2.10). La position

de la masse m peut être donnée par le couple (x, y). Pourtant on a la relation $x^2 + y^2 = d^2$; donc la seule connaissance de α permet de situer la masse. Bien entendu, la liaison entre ces différentes coordonnées peut s'exprimer par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \sin \alpha \\ -d \cos \alpha \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

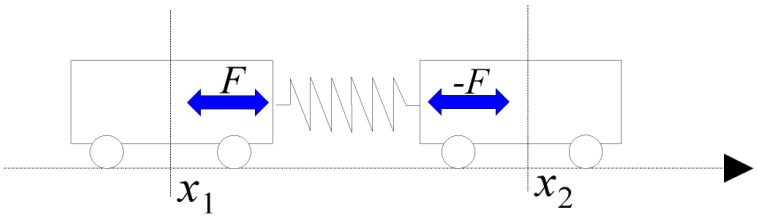


FIG. 2.11: *Contrainte par l'existence d'une force interne*

La liaison entre chaque solide n'est pas forcément une fonction des coordonnées des solides. Il se peut que deux solides contraignent leurs déplacements par l'intermédiaire d'une force comme on le voit sur la Figure 2.11. Le lien sera alors modélisé par une fonction énergétique.

2.3.3 Equations d'Euler Lagrange

La modélisation d'un système par les méthodes décrites plus haut peut s'avérer fastidieuse. Intéressons nous à un principe général de modélisation qui permet de systématiser ces procédures.

2.3.3.1 Modèle par l'approche variationnelle

La modélisation par l'approche variationnelle est issue d'une technique mathématique de recherche d'optimum. Ces équations permettent la recherche d'optimum pour les fonctionnelles de la forme (γ courbes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)

$$\gamma \xrightarrow{J} J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(X, \dot{X}, t\right) dt \quad X \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

L'annexe A rappelle rapidement la démarche permettant d'obtenir la solution suivante (s solution stationnaire) :

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = 0 \tag{2.7}$$

communément appelée équation d'Euler Lagrange. Le terme s représente le vecteur des variables présentes dans L.

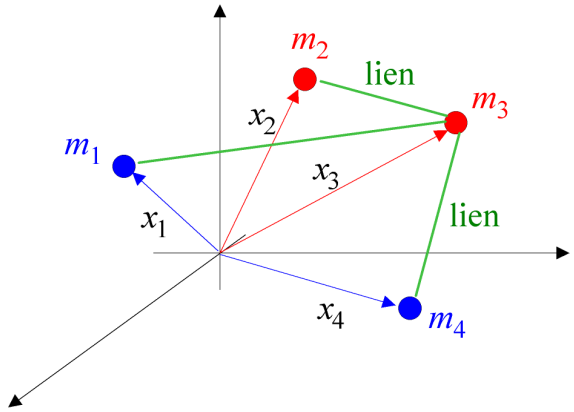


FIG. 2.12: *Contraintes dans un système*

2.3.3.2 Coordonnées Généralisées

Comme précisé dans la sous-section consacrée aux degrés de liberté, toutes les variables du système ne sont pas utilisables en même temps car il existe des contraintes de déplacement entre les différents solides (voir Figure 2.12). Chacune de ces fonctions de contrainte holonomique

$$f(r_1, \ldots, r_n, t) = 0 \tag{2.8}$$

va réduire le nombre de degrés de liberté. Pour cela, on va introduire les coordonnées généralisées q telles que $q \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ avec $\bar{n} \leqslant N$ où N est le nombre total de variables du système. Les variables r du système vont pouvoir s'exprimer comme des fonctions des coordonnées généralisées $r = \mathcal{F}(q)$, et les vitesses associées pourront être données par :

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} \tag{2.9}$$

Les fonctions $\mathcal{F}(q)$ peuvent être considérées comme des représentations paramétriques de r.

2.3.3.3 Définition de la fonctionnelle d'un système électromécanique

L'observation de la structure des équations de la dynamique de Newton, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \tag{2.10}$$

conduit au postulat de Hamilton selon lequel la trajectoire d'un système mécanique sans dissipation ni forces externes, entre deux configurations données, est telle que

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q})\, dt \tag{2.11}$$

est extrémale tout au long de la trajectoire suivie, c'est à dire

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}\right) dt = 0 \tag{2.12}$$

L'application $\mathcal{L}$ (le lagrangien) est définie comme la différence entre l'énergie cinétique T du système et son énergie potentielle U soit :

$$\mathcal{L}\left(q, \dot{q}\right) = T\left(q, \dot{q}\right) - U\left(q\right) \tag{2.13}$$

L'équation (2.12) peut être interprétée en écrivant que le comportement dynamique d'un système vérifie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{2.14}$$

Cette propriété peut aussi s'appliquer aux systèmes électriques.

2.3.3.4 Energies

Nous avons vu que les énergies, cinétique et potentielle, vont se révéler importantes pour obtenir le modèle d'un système.

L'énergie potentielle U : elle provient d'un stockage d'énergie, par le système, fonction de sa position. On peut donner comme exemple la charge d'un condensateur, la compression d'un ressort, l'action du champ de gravitation. c'est ce dernier cas qui interviendra dans notre problème.

L'énergie cinétique T : elle provient d'un stockage d'énergie, par le système, fonction de sa vitesse. Si on considère un système de n solides, on aura des énergies cinétiques de translation et de rotation par rapport à leurs centres de gravité, soit :

$$T\left(q, \dot{q}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k \left|\dot{r}_k\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} J_k \left|\dot{\theta}_k\right|^2 \tag{2.15}$$

où m_k et J_k sont respectivement la masse et le moment d'inertie du solide k. A partir de là peut être définie ce que l'on va appeler la *matrice d'inertie* D. En remplaçant l'équation (2.9) dans l'équation (2.15), on trouve les matrices suivantes, de dimension $m \times m$ et de rang 1, (m est le nombre de coordonnées généralisées) :

$$\left[\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)\right] \text{ ou } \left[\left(\frac{\partial \theta_k}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial q}\right)\right] \tag{2.16}$$

Elles vont être multipliées par la masse ou le moment d'inertie correspondant, puis sommées. Au final, on obtient une énergie cinétique de forme quadratique de dimension $m \times m$ et de rang m :

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T D\dot{q} \tag{2.17}$$

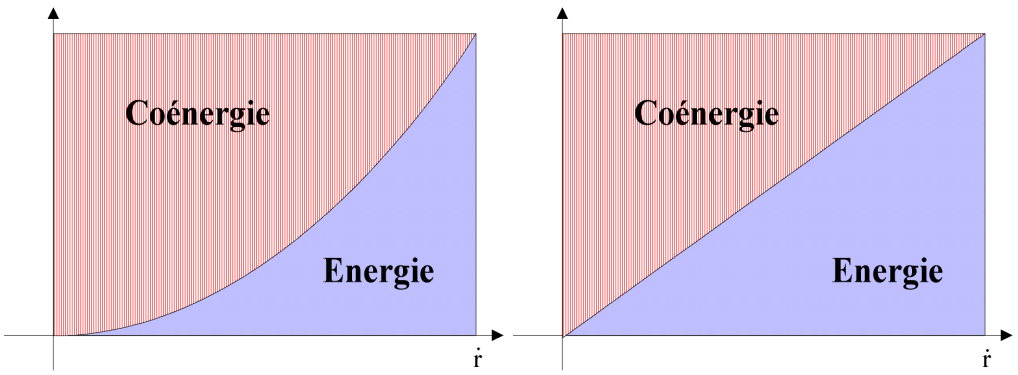
Cette description peut être étendue aux systèmes électriques. Si les systèmes mécanique et électrique sont mélangés, on aura une énergie cinétique qui s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} D_m & D_{me}^T \\ D_{me} & D_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

où D_{me} est très souvent nulle. On introduit ici l'idée d'une matrice d'inertie généralisée.

Energie et coénergie : dans les définitions précédentes, il n'a pas été précisé que l'on peut utiliser, pour la modélisation, soit l'énergie, soit la coénergie. Cette dernière est définie sur la Figure 2.13 où l'énergie est l'intégrale sous la courbe, et la coénergie son complément au dessus de la courbe. Si l'énergie a une forme quelconque comme sur la Figure 13(a), alors il n'y a aucune raison pour que énergie et coénergie aient la même valeur, et quelques précautions doivent être prises lors de leurs utilisations. Par contre si l'énergie a une forme quadratique (c'est à dire que le *moment* dont elle est l'intégrale, est linéaire : Figure 13(b)), alors énergie et coénergie ont exactement la même valeur. Par exemple, on peut définir l'énergie cinétique d'un point matériel en utilisant la quantité de mouvement ou la vitesse : en fait il s'agit de l'énergie et de la coénergie.

Par la suite, la différence entre les deux ne sera pas faite, car dans notre problématique, toutes les énergies cinétiques sont quadratiques.



(a) énergie de forme quelconque (b) énergie de forme quadratique

FIG. 2.13: *Energie et coénergie*

2.3.3.5 Les systèmes avec entrées

Par l'intermédiaire des entrées agissant sur un système, la quantité d'énergie contenue dans ce système peut être modifiée (cette vision du problème est même à l'origine d'une méthode de commande qui vise le modelage de l'énergie potentielle du système ; on trouve cette méthode exposée par

exemple dans (Gauthier and Bornard, 1980), et dans la philosophie qui prévaut dans la commande passive (Nicklasson et al., 1994; Panteley and Ortega, 1996)). L'équation du système avec entrées est déduite de l'équation (2.14) pour devenir :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = B\,E \tag{2.19}$$

où B est une matrice de distribution des entrées de dimention $m \times l$, l étant la dimension du vecteur d'entrées E.

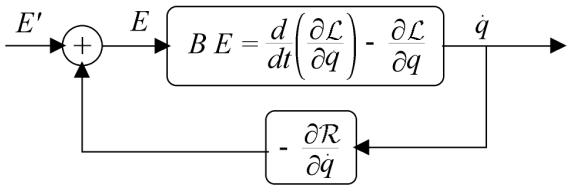


FIG. 2.14: *Effet dissipatif comme forces extérieures*

Energie dissipée : il existe plusieurs manières d'introduire l'effet dissipatif dans les équations de Lagrange. Pour rester simple, les forces de dissipation seront décrites comme des forces externes, dépendantes des vitesses généralisées $\dot{q}$, s'exerçant sur le système (Figure 2.14). Ces forces dérivent d'une énergie appelée *fonction de dissipation de Rayleigh* $\mathfrak{R}$. Les équations du système peuvent alors s'écrire en modifiant l'équation (2.19), en introduisant l'effet des forces dissipatives, et en les passant à droite de l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{2.20}$$

2.3.3.6 Réécriture équationnelle

L'équation (2.18) montre que dans un problème de modélisation électromécanique, l'énergie cinétique s'exprime comme une fonction quadratique. Celle-ci peut donc être introduite directement dans l'équation (2.20) pour obtenir une équation fonction de la matrice d'inertie du système. On obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(D\left(q\right)\dot{q}\right) - \frac{1}{2}\dot{q}^T \otimes \frac{\partial D}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{2.21}$$

Le symbole $\otimes$ est une notation vectorielle qui signifie :

$$\dot{q}^T \otimes \frac{\partial D}{\partial q}\dot{q} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dot{q}^T \dfrac{\partial D}{\partial q_i}\dot{q} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Après avoir dérivé par rapport au temps, on peut écrire l'équation suivante :

$$\underbrace{D(q)\,\ddot{q} + \dot{D}(q)\,\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \otimes \frac{\partial D}{\partial q}\dot{q}}_{\text{termes à rassembler}} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{2.23}$$

et alors obtenir une forme condensée des équations du système qui est :

$$D(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{2.24}$$

$C(q,\dot{q})$ peut se calculer directement en connaissant la matrice d'inertie D. Si on respecte certaines règles dans ce calcul (voir Annexe B), on obtient une matrice C telle que la matrice

$$\left(\dot{D} - 2C\right) \tag{2.25}$$

est antisymétrique (Spong and Vidyasagar, 1989). Cette propriété se révélera importante lors de démonstration de la stabilité avec des commandes basées sur la passivité.

2.4 Modélisation : application à une sustentation magnétique

Les systèmes à paliers magnétiques sont réellement représentatifs des systèmes électromécaniques. D'un côté, on a un rotor relativement simple mais complètement libre dans l'espace et dont le mouvement est perturbé, de l'autre, des actionneurs électriques (dont le nombre peut varier) qui doivent maîtriser le comportement du rotor afin de stabiliser sa trajectoire. De notre point de vue, on ne peut faire l'économie de la modélisation d'aucune partie, afin de bien appréhender les difficultés du problème.

Les premières sous-sections qui suivent donnent une méthode pour obtenir les énergies mécanique et électrique d'une sustentation magnétique. L'introduction de l'effet du balourd y est particulièrement mis en avant. Dans un second temps, différents modèles correspondant à différentes utilisations sont décrits.

2.4.1 Positionnement du rotor dans l'espace

Avant de donner l'expression de l'énergie de notre système pour en dériver ses équations, nous allons préciser les repères d'orientation du rotor par rapport au stator (voir par exemple (Brossard, 1994)).

Soit un solide dont la position peut être définie par un repère $\mathcal{C}'''$, sa position par rapport au repère fixe $\mathcal{C}$ peut être obtenu par l'intermédiaire de quatre transformations (1 translation et 3 rotations selon les axes d'une base). Le choix des trois rotations n'est pas unique. Elles peuvent s'exprimer selon les axes du repère fixe ou les axes du repère mobile selon les règles de composition qui suivent.

Soient un repère fixe $\{\mathcal{A}\}$ et un repère mobile $\{\mathcal{B}\}$. Soit $\mathcal{T}_1$ la position initiale de $\{\mathcal{B}\}$ par rapport à $\{\mathcal{A}\}$. Le repère $\{\mathcal{B}\}$ subit un déplacement $\mathcal{T}$.

Règle 1 : Si $\mathcal{T}$ est définie par rapport à $\{\mathcal{A}\}$ alors la position finale de $\{\mathcal{B}\}$ est $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}.\mathcal{T}_1$

Règle 2 : Si $\mathcal{T}$ est définie par rapport à la position initiale de $\{\mathcal{B}\}$ alors la position finale de $\{\mathcal{B}\}$ est $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1.\mathcal{T}$

Pour le positionnement du rotor, nous avons choisi les trois rotations selon les angles d'Euler (Z, Y, X) encore appelés angles d'Euler de type II. On les définit de la façon suivante (voir Figure 2.15) :

Rotation 1 : $\psi \longrightarrow \quad Rot\left({}^{\mathcal{C}}Z, \psi\right) \quad \{\mathcal{C}\} \rightarrow \{\mathcal{C}'\}$

Rotation 2 : $\theta \longrightarrow \quad Rot\left({}^{\mathcal{C}'}Y', \theta\right) \quad \{\mathcal{C}'\} \rightarrow \{\mathcal{C}''\}$

Rotation 3 : $\phi \longrightarrow \quad Rot\left({}^{\mathcal{C}''}X'', \phi\right) \quad \{\mathcal{C}''\} \rightarrow \{\mathcal{C}'''\}$

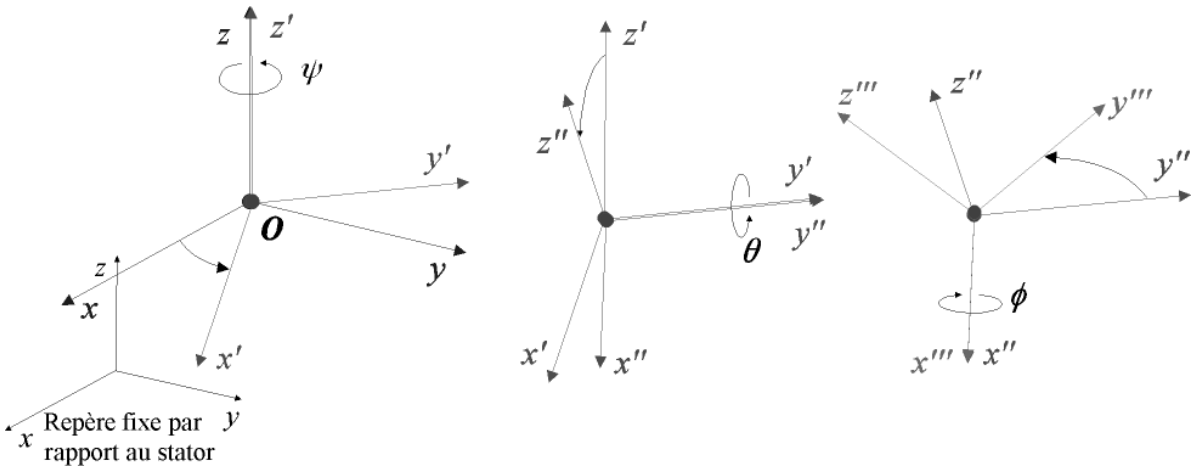


FIG. 2.15: *Angles d'Euler*

En vertu de la règle 2, la rotation complète s'écrit :

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi, \theta, \phi) &= Rot\left({}^{\mathcal{C}}Z, \psi\right)\ Rot\left({}^{\mathcal{C}'}Y', \theta\right)\ Rot\left({}^{\mathcal{C}''}X'', \phi\right) \\ &= \mathcal{R}_1\,\mathcal{R}_2\,\mathcal{R}_3 \end{aligned} \tag{2.26}$$

avec

$$\mathcal{R}_1 = Rot\left({}^{\mathcal{C}}Z, \psi\right) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\mathcal{R}_2 = Rot\left({}^{\mathcal{C}'}Y', \theta\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\mathcal{R}_3 = Rot\left({}^{\mathcal{C}''}X'', \phi\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Les matrices données ci-dessus sont telles que, si on connaît par exemple la position $P_{\mathcal{C}'''}$ d'un point dans $\mathcal{C}'''$, alors sa position $P_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{C}$ s'exprime comme

$$P_{\mathcal{C}} = \mathcal{R}_1\,\mathcal{R}_2\,\mathcal{R}_3\,P_{\mathcal{C}'''} = {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\;P_{\mathcal{C}'''} \tag{2.30}$$

Le produit des trois matrices de rotation est égale à [2] :

$${}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & -s(\psi)c(\phi) + c(\psi)s(\theta)s(\phi) & s(\psi)s(\phi) + c(\psi)s(\theta)c(\phi) \\ s(\psi)c(\theta) & c(\psi)c(\phi) + s(\psi)s(\theta)s(\phi) & -c(\psi)s(\phi) + s(\psi)s(\theta)c(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

2.4.1.1 Quelques Hypothèses et Simplifications

Les expressions données ci-dessus ne sont pas forcément ni aisées à manipuler, ni utiles à l'obtention d'un modèle du comportement réaliste. Pour cette raison, certaines simplifications peuvent intervenir si on désire alléger l'expression du modèle.

La première consiste à considérer les angles ψ et θ petits et très proches de leurs développements de Taylor à l'ordre 1. Leurs cosinus peuvent donc être remplacés par 1 et leurs sinus par la valeur de l'angle (dans certains travaux, on trouve même le sinus remplacé par zéro (Mouille, 1994)). Cette transformation est possible parce que la longueur du rotor est grande devant l'entrefer e_0. Plus que les angles, ce sont les vitesses de variation de ces angles qui vont avoir de l'importance dans les équations, et celles-ci ne sont pas négligeables. On peut réécrire la matrice de passage en tenant compte de cette remarque, pour obtenir :

$${}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} 1 & -\psi\,c(\phi) + \theta\,s(\phi) & \psi\,s(\phi) + \theta\,c(\phi) \\ \psi & c(\phi) + \psi\,\theta\,s(\phi) & -s(\phi) + \psi\,\theta\,c(\phi) \\ -\theta & s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

2. Pour des raisons de commodité d'écriture et afin de gagner de la place, on notera le *cos* « c » et le *sinus* « s »

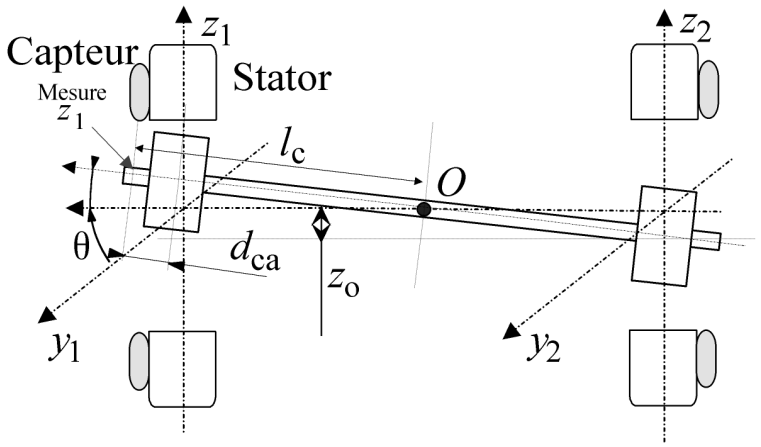


FIG. 2.16: *Description de quelques paramètres de la broche*

Cette simplification peut intervenir soit dès le début de la modélisation dans l'expression de la matrice d'inertie, soit à la fin des calculs lorsque l'on a obtenu le modèle complet, c'est à dire les matrices D et C.

La deuxième simplification que l'on peut faire intervenir correspond à l'expression de la position du centre géométrique O en fonction des positions (y_1, y_2, z_1, z_2) mesurées par les capteurs. On va écrire :

$$\begin{aligned} y_O(t) &\approx \frac{1}{2}\, y_1(t) + \frac{1}{2}\, y_2(t) \\ z_O(t) &\approx \frac{1}{2}\, z_1(t) + \frac{1}{2}\, z_2(t) \\ \tan\left(\theta(t)\right) \approx \sin\left(\theta(t)\right) \approx \theta(t) &\approx -\frac{1}{2}\, \frac{z_1(t) - z_2(t)}{l_c} \\ \tan\left(\psi(t)\right) \approx \sin\left(\psi(t)\right) \approx \psi(t) &\approx \frac{1}{2}\, \frac{y_1(t) - y_2(t)}{l_c} \end{aligned} \tag{2.33}$$

où l_c est la distance entre le centre géométrique O et les capteurs (dans la direction de l'axe x) lorsque le rotor est dans sa position nominale (voir Figure 2.16). La position exacte de O devrait en fait se déduire de l'identification des coefficients de la droite passant par les points (l_c, y_1, z_1) et $(-l_c, y_2, z_2)$ et ceux de la droite décrite par la position de O et les orientations θ et ψ (voir Annexe C).

Nous allons enfin donner deux hypothèses simplificatrices qui permettent de délimiter l'utilisation de notre modèle à l'étude de l'élimination du balourd :

Hypothèse 1 - Le rotor est rigide ; c'est un solide indéformable.

Hypothèse 2 - Le rotor, dans le plan des capteurs, est considéré comme parfaitement circulaire, c'est à dire que l'effet du faux-rond est négligé. Les mesures donnent donc la position de l'axe géométrique du rotor.

Une hypothèse importante habituellement admise lors de la modélisation va être relaxée dans cette étude : l'axe géométrique sera considéré distinct de l'axe d'inertie. Nous verrons plus loin comment intégrer ce phénomène dans nos équations.

2.4.2 Energie Mécanique

D'un point de vue mécanique, si on ne considère pas le rotor comme flexible, une lévitation magnétique reste simple. On trouve un mobile unique qui est le rotor. Son énergie cinétique se résume à une énergie de translation et une énergie de rotation. Bien entendu, le mobile est entièrement libre dans l'espace et les frottements de l'air sont négligés ; on va considérer ses 6 degrés de liberté.

2.4.2.1 Energie cinétique de translation

L'énergie de translation peut s'exprimer, dans un premier temps, par rapport à la vitesse de translation V_g du centre de gravité G, par la formule suivante :

$$T_{mt} = \frac{1}{2} m \ \ |V_g|^2 \tag{2.34}$$

soit, si on décompose le mouvement selon les trois axes d'un référentiel fixe par rapport au stator de la machine :

$$T_{mt} = \frac{1}{2} m \ \ \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{2.35}$$

A partir de ce point, deux cas peuvent se présenter.

Cas 1 - On suppose que l'axe d'inertie et l'axe géométrique du rotor sont confondus. Les positions délivrées par les capteurs sont donc supposées donner une image de l'axe d'inertie. On peut alors construire le modèle directement à partir de l'équation (2.34). Cette solution est généralement celle adoptée dans la littérature (parmi beaucoup d'exemples, on peut citer l'un des premiers articles ayant traité de la modélisation des PMA (Matsumura et al., 1983)). La perturbation, si on veut en tenir compte, est alors considérée comme une force extérieure appliquée au rotor. Cette force possède alors un modèle simple comme celui de l'équation (2.1).

Cas 2 - La position de l'axe d'inertie ne peut pas être mesurée par les capteurs. Ces derniers donnent, au mieux (c'est à dire sans bruits de mesure), la position de l'axe géométrique. En essayant de définir la dynamique de cet axe, on pourra obtenir,

- d'une part, des modèles de simulation très proches de la réalité surtout dans leur comportement vis à vis des couplages à travers les forces de Coriolis ;
- d'autre part, des équations permettant de visualiser l'effet du balourd au sein des couplages mécaniques pour affiner la synthèse de commande.[3].

3. Notre démarche s'est orientée vers le cas 2. Ce choix, fait à un moment où des essais sur un banc expérimental paraissaient difficiles à obtenir, et où un modèle de simulation très précis se révélait nécessaire, s'est vu renforcé par l'analyse et la compréhension des phénomènes qu'il a rendue possible.

Dès lors que l'on veut considérer l'axe géométrique du rotor comme référence de la dynamique du système, un changement de variables sera nécessaire pour exprimer la vitesse du centre géométrique O en fonction de celle du centre d'inertie G. Pour cela, on pourra utiliser la formule suivante :

$$\overrightarrow{V}_{p/C} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}(t)}{dt}}_{\substack{\text{Translation} \\ \text{du repère}}} + \underbrace{\xi(t)\,\dot{\vec{i}}(t) + \eta(t)\,\dot{\vec{j}}(t) + \zeta(t)\,\dot{\vec{h}}(t)}_{\text{Rotation du repère}} + \underbrace{\dot{\xi}(t)\,\vec{i}(t) + \dot{\eta}(t)\,\vec{j}(t) + \dot{\zeta}(t)\,\vec{h}(t)}_{\text{Mouvement relatif dans le repère}} \tag{2.36}$$

avec O le centre d'un repère fixe $\mathcal{C}$, A le centre d'un repère mobile $\mathcal{C}'$, et p un point mobile de l'espace. $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs directeurs du repère mobile contenant le point p. ξ, η et ζ sont les coordonnées de p dans le repère mobile.

Dans notre problématique, il n'y a pas de mouvement relatif du centre de gravité dans le repère tournant ; le troisième terme de l'équation (2.36) est donc nul. On peut alors réécrire cette équation en fonction d'un repère $\mathcal{C}$ fixe par rapport au stator pour obtenir :

$${}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{V}_{P}(t) = {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{V}_{\mathcal{C}'}(t) + {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'}(t) \wedge \left[{}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'}\ P_{\mathcal{C}'}\right] \tag{2.37}$$

où ${}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{V}_{\mathcal{C}'}(t)$ est la vitesse de translation du centre du repère $\mathcal{C}'$ par rapport au repère $\mathcal{C}$, ${}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du repère $\mathcal{C}'$ exprimé dans le repère $\mathcal{C}$ et que l'on peut écrire :

$${}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} \dot{\Phi} \tag{2.38}$$

avec $\dot{\Phi}$ la norme du vecteur vitesse de rotation, et K_x, K_y et K_z les proportions de projection de ce vecteur vitesse sur les trois axes du repère $\mathcal{C}$. ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'}$ est la matrice de rotation permettant d'exprimer la position d'un point du repère $\mathcal{C}'$ dans un repère dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{C}$ (cette matrice joue un rôle identique à celle de l'équation (2.31)), et $P_{\mathcal{C}'}$ est la position dans $\mathcal{C}'$ du point considéré.

Si on s'intéresse aux points O et G en définissant par avance les repères considérés (voir Figure 2.17), on obtient :

$$\overrightarrow{V}_{G} = \overrightarrow{V}_{O} + {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \wedge \left[{}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\ P_{G/\mathcal{C}'''}\right] \tag{2.39}$$

Pour faciliter les calculs qui vont suivre, le produit vectoriel sera remplacé par un produit matriciel tel que

$$\overrightarrow{V}_{G} = \overrightarrow{V}_{O} + {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \,.\, \left[{}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\ P_{G/\mathcal{C}'''}\right] \tag{2.40}$$

avec

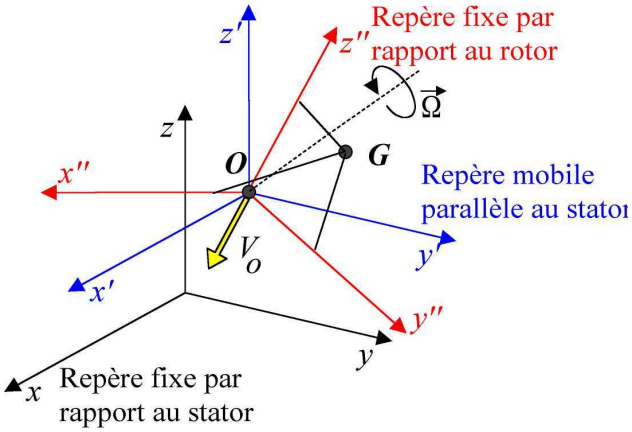


FIG. 2.17: *Position des repères pour la translation*

$$ {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = \begin{bmatrix} 0 & -K_z & K_y \\ K_z & 0 & -K_x \\ -K_y & K_x & 0 \end{bmatrix} \dot{\Phi} \tag{2.41} $$

une matrice antisymétrique.

Finalement, l'énergie cinétique de translation T_{mt} est obtenue en remplaçant l'équation (2.40) dans l'équation (2.34) :

$$ T_{mt} = \frac{1}{2}\, m \ \left\{ |V_O|^2 + P_{G/\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \, P_{G/\mathcal{C}'''} + 2\, V_O^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \, P_{G/\mathcal{C}'''} \right\} \tag{2.42} $$

Bien entendu, cette équation peut être développée sous forme d'une fonction quadratique avec le vecteur des vitesses généralisées choisi. Nous détaillons dans l'Annexe D le calcul de la matrice d'inertie associée à cette énergie cinétique de translation.

2.4.2.2 Energie cinétique de rotation

Exprimer l'énergie cinétique de rotation se révèle moins évident que ce qu'il peut sembler à priori. En effet, la position de l'axe d'inertie est fixée dès le départ par rapport à l'axe géométrique dans un repère lié au rotor (Figure 2.18). Il suffit pour cela d'une rotation et d'une translation. Fort de cette information, on pourrait appliquer le théorème de changement de base et le théorème de Huyghens au tenseur d'inertie $\mathcal{I}_{\mathcal{O}}$ connu dans le repère d'inertie, pour trouver son expression dans un repère parallèle au repère du stator. Malheureusement, on ne connaît pas à l'avance la position de l'axe réel de rotation du rotor. En fonction de la commande appliquée, l'axe de rotation peut très bien être l'axe géométrique, ou l'axe d'inertie, ou encore un axe quelconque ; il peut être mobile ou immobile. L'inertie peut alors difficilement s'exprimer seule dans une unique expression sans tenir compte du mouvement du rotor.

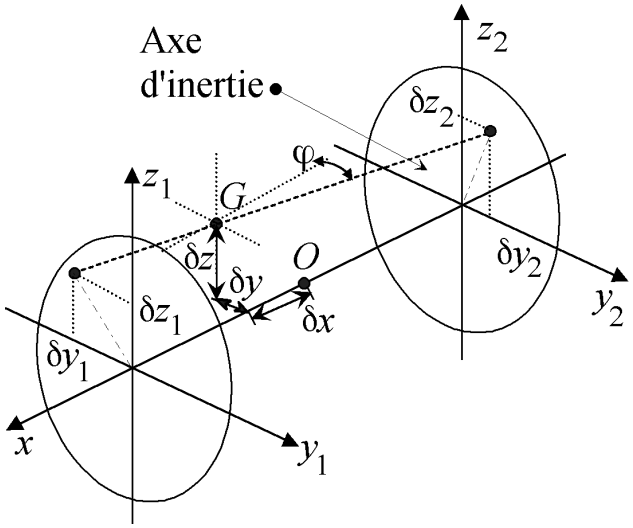


FIG. 2.18: *Position relative de l'axe d'inertie et de l'axe géométrique*

Nous allons donc faire un compromis, sachant que le théorème de Huyghens est recouvert par le changement de coordonnées effectué dans l'équation (2.39) décrivant la translation permettant de passer de G vers O. Dans l'expression de l'énergie de rotation, nous n'allons tenir compte que de l'orientation de l'axe d'inertie.

Le tenseur d'inertie $\mathcal{I}_\mathcal{O}$ est supposé diagonal dans le repère des axes d'inertie du rotor. Il s'écrit :

$$\mathcal{I}_\mathcal{O} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

D'après le théorème de changement de base, si le tenseur d'inertie s'exprime par la matrice $[\mathcal{I}_\mathcal{O}]_\mathcal{C}$ dans un repère $\mathcal{C}$, et par $[\mathcal{I}_\mathcal{O}]_{\mathcal{C}'}$ dans un repère $\mathcal{C}'$, alors la relation entre les deux matrices est la suivante :

$$[\mathcal{I}_\mathcal{O}]_{\mathcal{C}'} = [\mathcal{P}]^{-1} [\mathcal{I}_\mathcal{O}]_\mathcal{C} [\mathcal{P}] \tag{2.44}$$

où la matrice $[\mathcal{P}]$ est la matrice de changement de base entre les repères $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\mathcal{C} = [\mathcal{P}] \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{C}'} \tag{2.45}$$

Cette matrice est déjà connue en partie, puisque la matrice ${}^\mathcal{C}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi, \theta, \phi)$ permet le passage d'un repère parallèle à celui du stator à un repère lié aux axes géométriques du rotor. Il reste à ajouter l'effet de la rotation d'angle φ qui s'écrit :

$$\mathcal{R}_4 = Rot\left({}^{\mathcal{C}'''}Z''', \varphi\right) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

On obtient finalement :

$$[\mathcal{P}]^{-1} = {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\left(\psi, \theta, \phi\right)\ \mathcal{R}_4 \tag{2.47}$$

L'énergie cinétique peut alors s'écrire comme la fonction quadratique :

$$T_{mc} = \frac{1}{2}\ {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}^T_{\mathcal{C}'''}\ {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\ \mathcal{R}_4\ [\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}''''}\ \mathcal{R}_4^T\ {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}^T_{\mathcal{C}'''}\ {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \tag{2.48}$$

Or, on peut utiliser la transformation ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}$ pour exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}}$ du repère $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{C}'''$, telle que

$${}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}^T_{\mathcal{C}'''}\ {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \tag{2.49}$$

et donc l'équation (2.48) peut se réécrire :

$$T_{mc} = \frac{1}{2}\ {}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}^T_{\mathcal{C}'''}\ \mathcal{R}_4\ [\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}''''}\ \mathcal{R}_4^T\ {}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \tag{2.50}$$

Les deux termes de cette équation sont à présent possibles à exprimer. D'un coté on obtient le tenseur d'inertie dans un repère lié aux axes géométriques du rotor, et de l'autre la vitesse de rotation du rotor dans ce même repère. Le tenseur d'inertie est donné par :

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}'''} &= \mathcal{R}_4\ [\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}''''}\ \mathcal{R}_4^T \\ &= \begin{bmatrix} (c(\varphi))^2 I_x + (s(\varphi))^2 I_y & c(\varphi) I_x s(\varphi) - s(\varphi) I_y c(\varphi) & 0 \\ c(\varphi) I_x s(\varphi) - s(\varphi) I_y c(\varphi) & (s(\varphi))^2 I_x + (c(\varphi))^2 I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Bien entendu, on peut simplifier cette expression en considérant que l'angle φ est petit :

$$[\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}'''} = \begin{bmatrix} I_x + \varphi^2 I_y & I_x\,\varphi - \varphi I_y & 0 \\ I_x\,\varphi - \varphi I_y & \varphi^2 I_x + I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Le vecteur vitesse instantanée du rotor $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''}$ peut s'exprimer comme une composition des vitesses de rotation sur chaque axe, soit :

Rotation 1 - la rotation d'angle ψ d'axe Z induit une vitesse de rotation $\dot{\psi}$ autour de l'axe $\vec{k}_0$ (qui est aussi $\vec{k}_1$) du repère $\mathcal{C}$;

Rotation 2 - la rotation d'angle θ d'axe Y induit une vitesse de rotation $\dot{\theta}$ autour de l'axe $\vec{j}_1$ (qui est aussi $\vec{j}_2$) du repère $\mathcal{C}'$;

Rotation 3 - la rotation d'angle ϕ d'axe X induit une vitesse de rotation $\dot{\phi}$ autour de l'axe $\vec{i}_2$ (qui est aussi $\vec{i}_3$) du repère $\mathcal{C}''$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} &= \dot{\phi}\,\vec{i}_2 + \dot{\theta}\,\vec{j}_1 + \dot{\psi}\,\vec{k}_0 \\ \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} &= \dot{\phi}\,\vec{i}_3 + \dot{\theta}\,\vec{j}_2 + \dot{\psi}\,\vec{k}_1 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Or, les trois vecteurs $\vec{i}_3$, $\vec{j}_2$, et $\vec{k}_1$ peuvent être exprimés dans le repère $\mathcal{C}'''$ en utilisant les matrices de changement de base :

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} =& \dot{\phi}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &+ \dot{\psi}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.54}$$

On obtient finalement :

$${}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \cos(\phi)\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi)\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

Nous détaillons, dans L'Annexe D, le calcul de la matrice d'inertie associée à cette énergie cinétique de rotation et montrons qu'elle peut s'écrire à l'aide d'une matrice symétrique.

2.4.2.3 Energie potentielle mécanique

L'énergie potentielle U mécanique du rotor se résume dans l'effet produit par la force de gravité qui s'exerce sur le centre de gravité G. Imaginons que la gravité s'exerce dans la direction de l'axe z du repère fixe du stator, alors l'énergie potentielle va être fonction de la position de G selon cet axe z :

$$\begin{aligned} U &= m\,g\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}{}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi,\theta,\phi)\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix} + z_0 \\ \Longleftrightarrow U &= m\,g\ \{-\sin(\theta)\delta x + \delta y\,\cos(\theta)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\delta z + z_0\} \end{aligned} \tag{2.56}$$

Lorsque l'on dérive cette valeur par rapport au vecteur d'état q, on trouve un vecteur qui peut être considéré comme constant en première approximation. Cela veut dire que la force exercée au niveau des équations mécaniques est constante. Cela permet de considérer que l'effet de la gravité est une perturbation constante ; cette perturbation pourra être éliminée par un choix adéquat de lois de contrôle. Par conséquent, cette énergie potentielle ne sera plus considérée dans la suite.

2.4.3 Energie Electrique

La modélisation des systèmes électriques en terme d'énergie cinétique ou potentielle n'est pas systématique comme pour les systèmes mécaniques. En effet, que l'on considère des inductances ou des capacités, elles stockent de l'énergie soit sous forme de champs magnétiques, soit sous forme de champs électriques. Mais dans les deux cas, les variables considérées sont les charges électriques $\mathfrak{q}$ et les flux Ψ (Meisel, 1984). En fait, ces considérations dépendent du type de montage que l'on doit modéliser, parallèle, série, ou les deux à la fois. Dans le cas du palier magnétique, nous n'avons à considérer, pour chaque actionneur, qu'une maille alimentée par une tension E, où on trouve une inductance et une résistance. De plus, on va supposer qu'il n'y a pas d'interactions magnétiques et électriques entre les différents actionneurs (cela peut être obtenu lors de la construction des actionneurs).

2.4.3.1 Energie stockée

Si on considère un système composé de n inductances, on peut donner une expression générale pour calculer soit l'énergie W, soit la coénergie W' stockée. On a [4]:

$$W\left(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\Psi_i} \dot{\mathfrak{q}}'_i \left(\Psi'_1, \Psi'_2, \cdots, \Psi'_n\right) \, d\Psi'_i \tag{2.57}$$

$$W'\left(\dot{\mathfrak{q}}_1, \dot{\mathfrak{q}}_2, \cdots, \dot{\mathfrak{q}}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\dot{\mathfrak{q}}_i} \Psi'_i \left(\dot{\mathfrak{q}}'_1, \dot{\mathfrak{q}}'_2, \cdots, \dot{\mathfrak{q}}'_n\right) \, d\dot{\mathfrak{q}}'_i \tag{2.58}$$

Sachant qu'il n'y a pas d'interaction entre les différentes bobines, on peut réécrire les deux équations précédentes et on obtient :

$$W\left(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\Psi_i} \dot{\mathfrak{q}}'_i \left(\Psi'_i\right) \, d\Psi'_i \tag{2.59}$$

$$W'\left(\dot{\mathfrak{q}}_1, \dot{\mathfrak{q}}_2, \cdots, \dot{\mathfrak{q}}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\dot{\mathfrak{q}}_i} \Psi'_i \left(\dot{\mathfrak{q}}'_i\right) \, d\dot{\mathfrak{q}}'_i \tag{2.60}$$

Etant donné que les circuits ne présentent que des mailles, l'utilisation de la coénergie W' permet d'obtenir des sommes de potentiel. Cela va donc faire intervenir des charges $\mathfrak{q}$ comme coordonnées généralisées électriques, soit encore les courants dans les actionneurs comme vitesses généralisées. Bien entendu, il est toujours possible d'obtenir des équations où les coordonnées généralisées sont les flux Ψ en utilisant la relation :

4. Le symbole prime indique que l'on a affaire à une variable d'intégration.

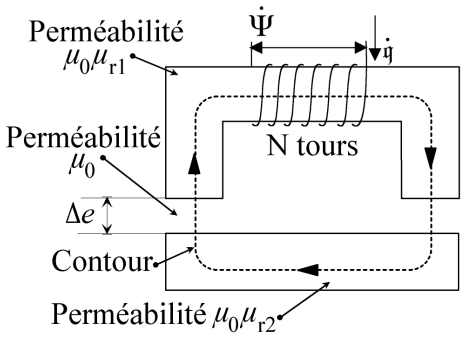


FIG. 2.19: *Schéma simplifié d'un actionneur pour le calcul de son inductance*

$$i\,(t) = \frac{1}{L}\,\Psi\,(t) \tag{2.61}$$

où L est la valeur de l'inductance

L'énergie électrique est obtenue en remplaçant, dans l'équation (2.60), $\dot{q}$ par le courant correspondant, et Ψ par sa valeur définie dans l'équation (2.61). On obtient

$$W'\,(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{i_j} L\; i'_j\; d\; i'_j \tag{2.62}$$

et en intégrant, on a :

$$W' = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} L\; i_j^2 \tag{2.63}$$

L'équation (2.63) est vraie dans le cas où L ne dépend pas de la valeur du courant et qu'il n'y a pas de saturation magnétique des actionneurs.

2.4.3.2 Calcul de l'inductance

Pour calculer la valeur de l'inductance, il faut déterminer la relation qui existe entre le flux Ψ et le courant $\dot{q}$. Pour cela, nous allons passer par la valeur des excitations magnétiques le long du contour défini sur la Figure 2.19. On utilise la loi d'Ampère :

$$\oint_C \mathbf{H} dl = \int_S \mathbf{J} dS \tag{2.64}$$

c'est à dire que la valeur des excitations magnétiques au long du contour C est égale à la valeur totale des courants traversant la surface S délimitée par C. Si on choisit comme contour la distance moyenne passant dans l'électro-aimant, on trouve :

$$\mathbf{H}_1 \, l_1 + \mathbf{H}_2 \, l_2 + 2 \, \mathbf{H}_e \, \Delta e = -N \, \dot{\mathfrak{q}} \tag{2.65}$$

Le signe négatif devant le courant est dû au sens de passage du courant à travers la surface S. Δe est la valeur de l'entrefer traversée deux fois. Le vecteur champ magnétique $\mathbf{B}$ reste constant au long du contour (si on excepte quelques zones particulières) :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \, \mu_{r1} \, \mathbf{H}_1 = \mu_0 \, \mu_{r2} \, \mathbf{H}_2 = \mu_0 \, \mathbf{H}_e \tag{2.66}$$

où μ_0 est la perméabilité de l'air, et μ_{r1} et μ_{r2} les perméabilités relatives des matériaux constituant respectivement la partie statorique et la partie rotorique. En associant les équations (2.65) et (2.66) on obtient la valeur du champ magnétique en fonction de la valeur de l'entrefer :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \, N \, \dot{\mathfrak{q}}}{2 \, \Delta e + \frac{l_1}{\mu_{r1}} + \frac{l_2}{\mu_{r2}}} \tag{2.67}$$

La valeur du flux total Φ traversant l'entrefer est donné par :

$$\Phi = \int_{S'} \mathbf{B} \, dS' \tag{2.68}$$

Si la surface vue par l'entrefer est $\mathcal{S}$, on trouve :

$$\Phi = -\frac{\mu_0 \, N \, \mathcal{S} \, \dot{\mathfrak{q}}}{2 \, \Delta e + \frac{l_1}{\mu_{r1}} + \frac{l_2}{\mu_{r2}}} \tag{2.69}$$

Finalement, l'expression du flux vu par la bobine, qui est proportionnel au nombre de spires N, est donnée par :

$$\Psi \left(\mathfrak{q}, \Delta e \right) = -N \, \Phi = \frac{\mu_0 \, N^2 \, \mathcal{S} \, \dot{\mathfrak{q}}}{2 \, \Delta e + \frac{l_1}{\mu_{r1}} + \frac{l_2}{\mu_{r2}}} \tag{2.70}$$

Le signe négatif qui apparaît peut être interprété par le fait que la tension $\dot{\Psi}$ augmente si Δe diminue (dans la configuration choisie). La valeur de l'inductance est donc :

$$L = \frac{\mu_0 \, N^2 \, \mathcal{S}}{2 \, \Delta e + \frac{l_1}{\mu_{r1}} + \frac{l_2}{\mu_{r2}}} \tag{2.71}$$

Bien entendu, cette expression peut être simplifiée si on considère que la perméabilité du fer, qui constitue les parties statoriques et rotoriques des actionneurs, est très largement supérieure à celle de l'air au niveau de l'entrefer[5]. On a alors :

5. Cette hypothèse peut ne pas se révéler justifiée. Dans notre étude, nous la considérerons pourtant toujours vraie afin de ne pas trop surcharger les équations. Cela ne présente en effet pas de difficulté de modifier les lois de commande que nous allons présenter dans le chapitre suivant pour les adapter à ce phénomène.

$$2\,\Delta e \gg \frac{l_1}{\mu_{r1}} + \frac{l_2}{\mu_{r2}} \tag{2.72}$$

et l'inductance devient :

$$L = \frac{\mu_0\, N^2\, \mathcal{S}}{2\,\Delta e} \tag{2.73}$$

On peut encore écrire :

$$L = \frac{\lambda}{\Delta e} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\mu_0\, N^2\, \mathcal{S}}{2} \tag{2.74}$$

Si on revient à l'expression de l'énergie électrique (2.63) et que l'on y insère la valeur de l'inductance de l'actionneur, on trouve :

$$W' = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_j}{\Delta e_j}\, i_j^2 \tag{2.75}$$

que l'on peut encore écrire sous forme d'une fonction matricielle quadratique :

$$W' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\Delta e_1} & & & & \\ & \ddots & & [0] & \\ & & \frac{\lambda_j}{\Delta e_j} & & \\ & [0] & & \ddots & \\ & & & & \frac{\lambda_n}{\Delta e_n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

$$\Longrightarrow\; W' = \frac{1}{2}\, \dot{q}_e^T\, D_e\, \dot{q}_e$$

2.4.3.3 Inductance : Surface $\mathcal{S}$ et variation d'entrefer Δe

La surface $\mathcal{S}$ peut varier en fonction de la géométrie de l'actionneur. Nous allons détailler deux cas particuliers.

Inclinaison des Pôles : lorsque les actionneurs sont construits en forme de "fer à cheval" (voir Figure 2.20), les deux forces F_r appliquées au rotor par l'électro-aimant sont inclinées de part et d'autre de l'axe principal. Cela est dû à l'inclinaison d'angle κ de la surface $\mathcal{S}_r$. La force appliquée réellement sur le rotor est donc la somme vectorielle des deux forces inclinées. Pour traduire ce phénomène dans l'expression de l'énergie électrique (qui une fois dérivée par rapport à Δe donnera les forces électromagnétiques) deux solutions se présentent. La première consiste à introduire dans la variation d'entrefer un déplacement qui n'est pas le déplacement réel y mais un déplacement modifié $y\cos(\kappa)$ (solution exacte). Pour la seconde, nous allons prendre comme surface $\mathcal{S}$ la valeur

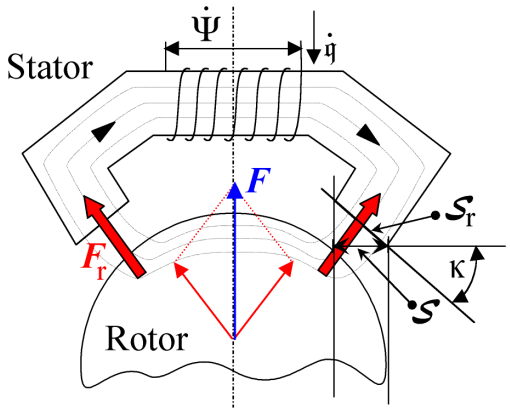


FIG. 2.20: *Actionneur en "fer à cheval" : conséquence sur la surface* $\mathcal{S}$

suivante (solution approchée qui évite d'introduire un coefficient supplémentaire dans l'expression de la variation d'entrefer) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_r \cos(\kappa). \tag{2.77}$$

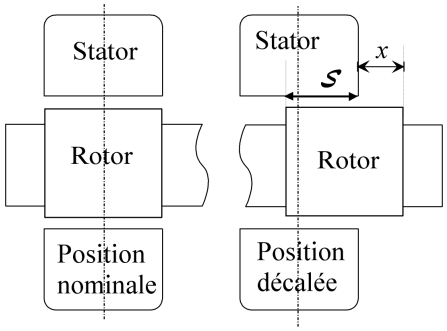


FIG. 2.21: *Action de* x *sur la surface* $\mathcal{S}$

Intervention de l'axe x *:* dans certains montages qui ne possèdent pas d'actionneur selon l'axe x, on peut tenir compte de la variation de surface qui intervient lorsque le rotor se déplace selon l'axe x (voir Figure 2.21). La surface $\mathcal{S}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{S} = l_l \left(l_L - |x|\right). \tag{2.78}$$

avec l_l la largeur du pôle, et l_L sa longueur.

Cela fait intervenir la valeur x dans l'expression de l'inductance de chaque actionneur. Par conséquent, des forces vont apparaître dans l'expression de l'accélération selon x lorsqu'on applique l'équation de Lagrange à l'énergie électrique. Ces forces correspondent à la variation de réluctance des électro-aimants, et peuvent empêcher l'échappement du rotor lorsque la broche ne comporte pas

de butée.

Variation de l'entrefer Δe *:* l'entrefer est une fonction des déplacements du rotor. Sa valeur dépend du contexte et de la géométrie du système.

Si on se place au niveau de l'actionneur, la valeur de Δe_j est fonction de la valeur nominale de l'entrefer et du déplacement $\wp$. Si on considère un axe de contrôle ou un plan de contrôle, tout en supposant que l'entrefer nominal e_0 est le même pour chaque actionneur, on obtient [6] :

$$\begin{aligned} \Delta e_{jp} &= e_0 - \wp_j \quad \text{dans la direction positive} \\ \Delta e_{jm} &= e_0 + \wp_j \quad \text{dans la direction négative} \end{aligned} \tag{2.79}$$

Bien entendu $\wp$ peut avoir une expression qui dépend de plusieurs coordonnées. Prenons l'exemple standard de la broche dont quelques paramètres sont définis sur le Figure 2.16.

On peut alors écrire [7] :

$$\begin{aligned} \wp_{z1} &= z_O - (l_c - d_{ca}) \tan(\theta) \\ \wp_{z2} &= z_O + (l_c - d_{ca}) \tan(\theta) \end{aligned} \tag{2.80}$$

Selon l'axe y, on trouve des relations similaires :

$$\begin{aligned} \wp_{y1} &= y_O + (l_c - d_{ca}) \tan(\psi) \\ \wp_{y2} &= y_O - (l_c - d_{ca}) \tan(\psi) \end{aligned} \tag{2.81}$$

Variation de l'entrefer Δe *en fonction de* x *:* quelques configurations matérielles (généralement étudiées pour réduire les coûts de fabrication) font intervenir la valeur de la position x dans Δe. Il s'agit en général d'actionneurs dont les pôles forment une partie de cône (Figure 2.22).

Si on donne directement les valeurs d'entrefer pour des capteurs positionnés selon les axes y et z des deux plans de contrôle, on obtient :

6. l'indice p (respectivement m) indique que l'on parle de données en relation avec un actionneur créant une accélération dans la direction positive (respectivement dans la direction négative).

7. l'indice 1 (respectivement 2) indique que l'on parle de données en relation avec le plan de contrôle 1 (respectivement 2) ; l_c est la distance qui sépare le centre géométrique des capteurs, et d_{ca} est la distance entre un capteur et l'actionneur correspondant.

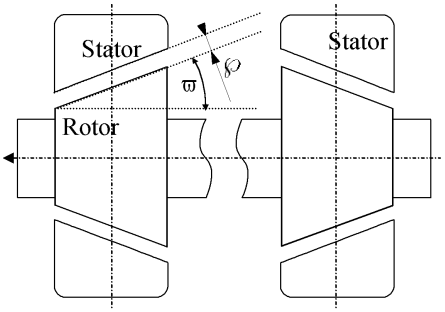


FIG. 2.22: *Broche à actionneurs coniques*

$$\begin{aligned}
\Delta e_{y1p} &= e_0 - \cos(\varpi)\,\wp_{y1} - \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{y1m} &= e_0 + \cos(\varpi)\,\wp_{y1} - \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{z1p} &= e_0 - \cos(\varpi)\,\wp_{z1} - \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{z1m} &= e_0 + \cos(\varpi)\,\wp_{z1} - \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{y2p} &= e_0 - \cos(\varpi)\,\wp_{y2} + \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{y2m} &= e_0 + \cos(\varpi)\,\wp_{y2} + \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{z2p} &= e_0 - \cos(\varpi)\,\wp_{z2} + \sin(\varpi)\,x \\
\Delta e_{z2m} &= e_0 + \cos(\varpi)\,\wp_{z2} + \sin(\varpi)\,x
\end{aligned} \tag{2.82}$$

où les $\wp$ sont identiques à ceux des équations (2.80) et (2.81). Grâce à ces expressions d'entrefer, pour un même actionneur, on obtient une action dans deux directions après dérivation. Le signe de chaque force devrait permettre de trouver un contrôle dans chaque direction (nous aborderons cet aspect dans le chapitre suivant).

2.4.3.4 Energie électrique dissipée

L'énergie électrique dissipée dans les résistances dues aux bobinages des actionneurs, constitue l'intégralité de la fonction de Rayleigh $\mathfrak{R}$. En effet, on suppose que les frottements mécaniques sont négligeables dans les directions que nous allons contrôler (c'est à dire en dehors de la rotation d'angle ϕ). On a :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} R_j\,\dot{\mathfrak{q}}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} R_j\,i_j^2 \tag{2.83}$$

Cette expression peut être réécrite sous forme d'une fonction matricielle quadratique en utilisant le vecteur des vitesses électriques $\dot{q}_e$.

2.4.4 Energie cinétique totale

Si on considère que l'énergie définie dans l'équation (2.76) peut être assimilée à une énergie cinétique électrique, elle pourra être rassemblée avec l'expression quadratique de l'énergie cinétique

mécanique, définie dans l'Annexe D, par l'équation :

$$\begin{aligned} T_{mc} &= \frac{1}{2}\,\dot{q}_m^T \begin{bmatrix} m\,D_{mct_1} & m\,D_{mct_3}^T \\ m\,D_{mct_3} & m\,D_{mct_2} + D_{mcr} \end{bmatrix} \dot{q}_m \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{q}_m^T\,D_m\,\dot{q}_m \end{aligned} \tag{2.84}$$

avec

$$\dot{q}_m = \left(\dot{x},\,\dot{y},\,\dot{z},\,\dot{\phi},\,\dot{\theta},\,\dot{\psi}\right)^T \tag{2.85}$$

En associant les deux équations (2.84) et (2.76), on obtient :

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T\,D\,\dot{q} \end{aligned} \tag{2.86}$$

2.5 Quelques modèles

Lorsqu'on parle de sustentation magnétique, il se cache derrière ce terme une multitude de systèmes à la géométrie et aux propriétés différentes. De même lorsqu'on veut définir le modèle d'un système donné, on peut donner quantité de représentations différentes en fonction de l'usage auquel elles sont destinées. Dans la suite, nous détaillerons quelques uns des modèles qui ont permis la progression dans notre travail.

2.5.1 Modèle du système plan

Un système plan est la représentation d'un mobile en forme de disque dont la position en translation est contrôlée par quatre actionneurs dans la disposition d'un plan de contrôle (voir Figure 2.23). Ce mobile ne peut pas bouger en rotation autour des axes y et z. Il peut par contre tourner autour de l'axe x avec une vitesse $\dot{\phi}$. Ce modèle ne représente un système réel que de très loin[8], mais permet d'appréhender très simplement ce que représente le balourd et la façon dont on peut le faire apparaître dans les équations de mouvement du mobile.

L'énergie mécanique du système est donnée par :

$$T_m = \frac{1}{2}\left(m\ |V_g|^2 + I_x\,\dot{\phi}^2\right) \tag{2.87}$$

et l'énergie électrique :

8. En fait, on peut considérer qu'il s'agit d'une version simplifiée du modèle d'un volant d'inertie tel que celui décrit dans l'Annexe F

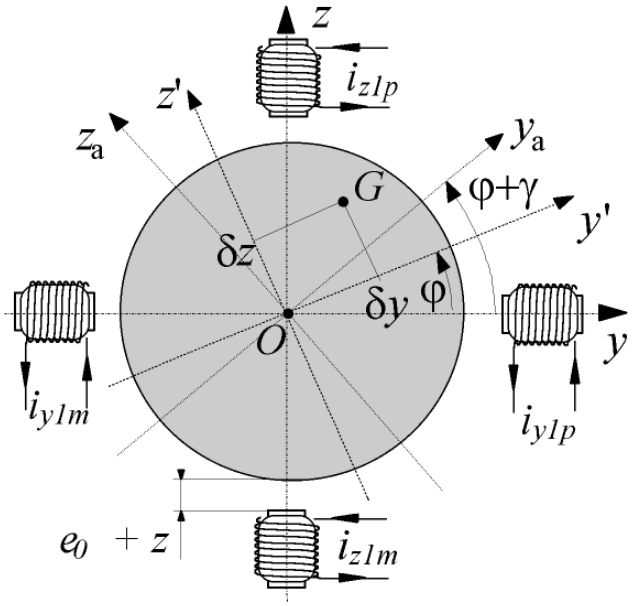


FIG. 2.23: *Système plan perturbé*

$$T_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\ i_{yp}^2}{e_0 - y} + \frac{\lambda\ i_{ym}^2}{e_0 + y} + \frac{\lambda\ i_{zp}^2}{e_0 - z} + \frac{\lambda\ i_{zm}^2}{e_0 + z}\right) \tag{2.88}$$

avec

$$q_g = \left[x_g, y_g, z_g, \phi, \int i_{y1p}\,dt, \int i_{y1m}\,dt, \int i_{z1p}\,dt, \int i_{z1m}\,dt\right] \tag{2.89}$$

V_g est la vitesse de translation du centre de gravité G dont la position est inconnue et différente de celle de O (Figure 2.23). Comme expliqué dans les sections précédentes, nous allons procéder à un changement de coordonnées dont les différents éléments sont définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} P_{G/\mathcal{C}'} &= [0, \delta y, \delta z]^T \\ {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.90}$$

où $\mathcal{C}'$ est le repère lié aux axes géométriques du rotor. Pour remplacer le produit vectoriel défini dans le changement de coordonnées, on va avoir besoin de :

$${}^{\mathcal{C}}\Omega_{\mathcal{C}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

Nous allons supposer que $\delta z = 0$ sans perte de généralité. Les énergies T_m et T_e peuvent être réécrites comme des fonctions de la position de $O\ (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2}\,\dot{q}_m^T\, D_m\, \dot{q}_m \\ \dot{q}_m &= \left[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}\right]^T \\ D_m &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & -m\,\delta y\,\sin(\phi) \\ 0 & 0 & m & m\,\delta y\,\cos(\phi) \\ 0 & -m\,\delta y\,\sin(\phi) & m\,\delta y\,\cos(\phi) & m\,\delta y^2 + I_x \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.92}$$

et

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2}\,\dot{q}_e^T\, D_e\, \dot{q}_e \\ \dot{q}_e &= [i_{yp}, i_{ym}, i_{zp}, i_{zm}]^T \\ D_e &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{e_0 - y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{e_0 + y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 - z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 + z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.93}$$

L'énergie complète devient :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T\, D\, \dot{q} \\ \dot{q} &= [\dot{q}_m, \dot{q}_e]^T \\ D &= \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.94}$$

On peut maintenant rechercher l'équation dynamique du système sous la forme :

$$D\,(q)\ \ddot{q} + C\,(q, \dot{q})\ \dot{q} + \frac{\partial\, \mathfrak{R}}{\partial\, \dot{q}} = B\, F \tag{2.95}$$

Après calcul, on obtient l'expression de C qui est :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m\,\delta y\,\cos(\phi)\dot{\phi} & \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,i_{yp}}{(e_0-y)^2} & \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{ym}}{(e_0+y)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m\,\delta y\,\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,i_{zp}}{(e_0-z)^2} & \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{zm}}{(e_0+z)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{yp}}{(e_0-y)^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\lambda\,\dot{y}}{(e_0-y)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,i_{ym}}{(e_0+y)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,\dot{y}}{(e_0+y)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{zp}}{(e_0-z)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\lambda\,\dot{z}}{(e_0-z)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,i_{zm}}{(e_0+z)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{-\lambda\,\dot{z}}{(e_0+z)^2} \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

Le système peut finalement s'écrire[9] :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{y} &= m\,\delta y\,\sin(\phi)\ddot{\phi} + m\,\delta y\,\cos(\phi)\left(\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{yp}^2}{(e_0-y)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{ym}^2}{(e_0+y)^2} + P_y \\ m\,\ddot{z} &= -m\,\delta y\,\cos(\phi)\ddot{\phi} + m\,\delta y\,\sin(\phi)\left(\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{zp}^2}{(e_0-z)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{zm}^2}{(e_0+z)^2} + P_z \\ \left(m\,\delta y^2 + I_x\right)\ddot{\phi} &= m\,\delta y\,\sin(\phi)\ddot{y} - m\,\delta y\,\cos(\phi)\ddot{z} \\ \frac{\lambda\,\dot{i}_{yp}}{e_0-y} &= -\frac{\lambda\,i_{yp}\,\dot{y}}{(e_0-y)^2} - R\,i_{yp} + E_{yp} \\ \frac{\lambda\,\dot{i}_{ym}}{e_0+y} &= \frac{\lambda\,i_{ym}\,\dot{y}}{(e_0+y)^2} - R\,i_{ym} + E_{ym} \\ \frac{\lambda\,\dot{i}_{zp}}{e_0-z} &= -\frac{\lambda\,i_{zp}\,\dot{z}}{(e_0-z)^2} - R\,i_{zp} + E_{zp} \\ \frac{\lambda\,\dot{i}_{zm}}{e_0+z} &= \frac{\lambda\,i_{zm}\,\dot{z}}{(e_0+z)^2} - R\,i_{zm} + E_{zm} \end{aligned} \tag{2.97}$$

avec P_y et P_z les forces représentant la pesanteur.

Dans l'équation (2.97) le premier et le second terme sont respectivement perturbés par :

$$\begin{aligned} & m\,\delta y\,\sin(\phi)\ddot{\phi} + m\,\delta y\,\cos(\phi)\left(\dot{\phi}\right)^2 \\ & \text{et} \\ & -m\,\delta y\,\cos(\phi)\ddot{\phi} + m\,\delta y\,\sin(\phi)\left(\dot{\phi}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Habituellement, lorsque la modélisation est faite sans tenir compte de la différence de position

9. Il s'agit d'une forme intermédiaire entre la forme de Lagrange et un modèle d'état ; lorsque l'on considère l'existence de la perturbation, l'obtention d'un modèle d'état est simplifiée si on suppose que l'accélération $\ddot{\phi}$ est nulle. Dans le cas contraire, l'inversion de la matrice d'inertie donne une expression relativement complexe.

entre G et O, le balourd est décrit comme une force extérieure qui est ajoutée aux accélérations mécaniques. Mais de notre point de vue, il est clair que :

- la perturbation[10] est constante (si $\dot{\phi}$ est constante) dans un repère $\mathcal{C}'_a$ centré en O tournant à la vitesse $\dot{\phi}$ et déphasé de l'angle γ par rapport au repère $\mathcal{C}'$. Cette intéressante propriété sera utilisée pour la synthèse des lois de commande. Dans $\mathcal{C}'_a$, l'expression de la perturbation est

$$F_{p/\mathcal{C}'_a} = \delta y \begin{bmatrix} -\sin(\gamma)\,\ddot{\phi} + \cos(\gamma)\,\dot{\phi}^2 \\ -\cos(\gamma)\,\ddot{\phi} - \sin(\gamma)\,\dot{\phi}^2 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

- la direction de cette perturbation est $\overrightarrow{OG}$, en régime établi, comme on le montre sur la Figure 2.24. Le vecteur accélération $\overrightarrow{\ddot{X}}$ de O est égal à la somme du vecteur Commande $\overrightarrow{C}$ et du vecteur Perturbation $\overrightarrow{F_p}$.

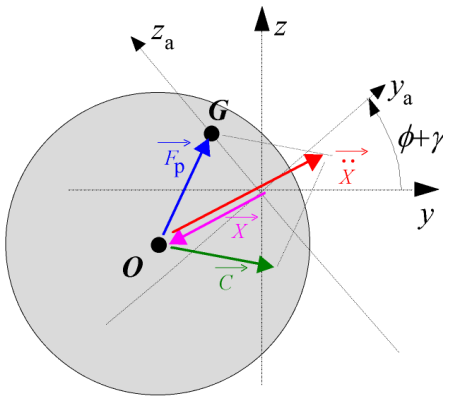


FIG. 2.24: *Vecteur de commande et vecteur perturbation appliqués au point O*

2.5.2 Modèle de la broche

En ce qui concerne la broche, nous n'allons pas donner un seul modèle mais trois. En effet, pour chaque utilisation, on peut trouver un modèle adéquat qui permet d'obtenir les résultats recherchés.

Le premier modèle que l'on va étudier permettra la réalisation de simulations très proches du comportement réel du système. C'est pour cette utilisation qu'ont été développés les changements de coordonnées dans les sections précédentes. En effet, au début de ce travail, l'accès à du matériel expérimental n'étant pas assuré, il fallait un modèle suffisamment précis pour tester l'efficacité de nos futurs algorithmes face aux couplages contenus dans la dynamique mécanique.

10. Nous tenons à insister sur le fait que cette perturbation est un phénomène uniquement dû au changement du point observé. Si on pouvait mesurer la position de G, il n'y aurait pas de perturbation. De plus, si dans ce modèle du plan, on retrouve une perturbation qui est quasiment identique à celle considérée par d'autres auteurs, il faut bien comprendre que cela devient complètement faux dès que l'on va passer au modèle de la broche, où l'expression du balourd est fortement fonction des couplages de Coriolis.

Le second est un modèle donné dans les coordonnées de capteurs, et légèrement simplifié, afin de vérifier l'effet du balourd au niveau des deux plans de contrôle du système.

Le troisième est une version sans balourd du modèle précédent. Il sera utile lors du calcul des lois de commande, en particulier lors des phases de découplage permettant de piloter indépendamment les deux plans de contrôle.

2.5.2.1 Modèle de simulation

Pour le modèle de simulation, les coordonnées généralisées q sont définies par la position du centre d'inertie (x, y, z), les trois angles d'Euler (ϕ, θ, ψ), ainsi que les dix charges électriques traversant les actionneurs.

L'énergie mécanique de ce modèle est déjà détaillée dans l'annexe D par les équations (D.3), (D.10), (D.13) et (D.20). A cela il faut ajouter l'énergie électrique :

$$W' = \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{2} \frac{\lambda_j}{\Delta e_j} i_j^2 \tag{2.100}$$

Les λ_j sont donnés par l'équation (2.74). Pour des commodités de notation, nous ne considérerons que deux valeurs pour λ_j : nous aurons λ pour les huit actionneurs des deux plans de contrôle, et λ_x pour les deux bobines contrôlant la position de l'axe x [11]. Les Δe_j sont donnés dans la sous-section 2.4.3.3.
On obtient :

$$\begin{aligned} W' = & \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 - (y + (l_c - d_{ca}) \tan(\psi))} i_{y1p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 + (y + (l_c - d_{ca}) \tan(\psi))} i_{y1m}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 - (y - (l_c - d_{ca}) \tan(\psi))} i_{y2p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 + (y - (l_c - d_{ca}) \tan(\psi))} i_{y2m}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 - (z - (l_c - d_{ca}) \tan(\theta))} i_{z1p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 + (z - (l_c - d_{ca}) \tan(\theta))} i_{z1m}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 - (z + (l_c - d_{ca}) \tan(\theta))} i_{z2p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{e_0 + (z + (l_c - d_{ca}) \tan(\theta))} i_{z2m}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda_x}{e_0 - x} i_{xp}^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_x}{e_0 + x} i_{xm}^2 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Comme indiqué dans la sous-section 2.4.3.2, cette expression peut se mettre sous forme quadratique matricielle. La matrice ainsi obtenue peut être associée avec la matrice d'inertie mécanique pour former la matrice D du système ; cette dernière est diagonale par bloc [12]. Dans l'Annexe E, nous donnons l'expression de la matrice C déduite de D, ainsi que la dissipation électrique. Grâce à toutes ces équations, une simulation relativement proche du comportement réel a pu être mise en ouvre.

11. Il s'agit de la configuration de notre banc expérimental.

12. Pour des raisons évidente de taille, l'expression de cette matrice ne sera pas donnée, mais avec les équations (2.101) et (D.22) cette matrice est tout à fait calculable.

Récapitulatif des équations du modèle : le modèle est donné par les équations suivantes : (D.3), (D.11), (D.14) et (D.21) pour la matrice D, (E.1), (E.2) et (E.3) pour le vecteur $C\,\dot{q}$, et (E.6) pour l'effet dissipatif.

2.5.2.2 Modèle pour l'analyse

Le calcul de ce modèle a pour but de vérifier si la propriété du balourd, observée sur le modèle dans le plan, peut se retrouver dans les coordonnées des plans de contrôle du modèle de la broche. Si c'est le cas, l'analogie entre les deux systèmes devrait permettre de proposer une méthode pratique pas trop complexe pour éliminer l'effet du balourd.

Toujours pour éviter de charger le corps de ce document avec de grosses équations, celles-ci sont développées dans l'Annexe G. Le modèle recherché est bien entendu sous la forme :

$$D\,(q)\,\ddot{q} + C\,(q,\dot{q})\,\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{2.102}$$

Pour obtenir ces équations à partir du modèle de simulation, quelques simplifications s'imposent afin de ne pas les surcharger. Bien que ces simplifications impliquent un cas particulier, il ne devrait pas être difficile de tirer de notre modèle suffisamment de données pour ensuite construire des lois de commande efficaces. Ces simplifications sont les suivantes :

- les cosinus de θ et ψ sont pris égaux à un ;
- les sinus de θ et ψ sont respectivement pris égaux à la valeur de l'angle ;
- le centre de gravité du rotor est à égale distance de deux plans de contrôle. Cela implique que le paramètre δx est égal à zéro ;
- l'angle φ qui intervient dans la valeur du moment d'inertie est pris égal à zéro. Cela va impliquer qu'il n'existe pas de déphasage spatial dans l'effet principal du balourd entre un plan de contrôle et l'autre pour ce modèle ;
- φ étant égal à zéro, il existe un repère dans lequel δy est égal à zéro ;
- les coordonnées généralisées sont modifiées par l'intermédiaire du changement de variables défini par les équations (2.33). Le vecteur des vitesses généralisées $\dot{q}$, intervenant dans l'énergie cinétique, passe de

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, i_{y1p}, i_{y1m}, i_{y2p}, i_{y2m}, i_{z1p}, i_{z1m}, i_{z2p}, i_{z2m}, i_{xp}, i_{xm}]$$

  à

$$[\dot{x}, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dot{\phi}, i_{y1p}, i_{y1m}, i_{z1p}, i_{z1m}, i_{y2p}, i_{y2m}, i_{z2p}, i_{z2m}, i_{xp}, i_{xm}]$$

le modèle du système plan a permis de constater que le balourd est principalement dû à un terme fonction de $\dot{\phi}^2$. Ce modèle d'analyse contient des termes similaires qui sont, pour les accélérations $\ddot{y}_1$ et $\ddot{z}_1$:

$$\begin{aligned} \text{pour } \ddot{y}_1 &\Rightarrow \left(ms(\phi)\delta z + \frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2)}{{l_c}^2} \right) \dot{\phi}^2 \\ \text{pour } \ddot{z}_1 &\Rightarrow -m\delta z\, c(\phi)\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{2.103}$$

et pour les accélérations $\ddot{y}_2$ et $\ddot{z}_2$:

$$\begin{aligned} \text{pour } \ddot{y}_2 &\Rightarrow \left(ms(\phi)\delta z + \frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2)}{{l_c}^2} \right) \dot{\phi}^2 \\ \text{pour } \ddot{z}_2 &\Rightarrow -m\delta z\, c(\phi)\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Si le terme $(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2)$ est considéré comme négligeable[13], alors chaque plan de contrôle voit la même perturbation qui est :

$$\begin{aligned} F_{py} &= m\, s(\phi)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 \\ F_{pz} &= -m\, c(\phi)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{2.105}$$

En considérant ce vecteur dans un repère tournant $\mathcal{C}_a$ à la vitesse $\dot{\phi}$ déphasé de γ de l'angle ϕ[14], la perturbation devient :

$$\begin{aligned} F_{p/\mathcal{C}_a} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi+\gamma) & \sin(\phi+\gamma) \\ -\sin(\phi+\gamma) & \cos(\phi+\gamma) \end{bmatrix} F_p \\ &= \begin{pmatrix} -m\, s(\gamma)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 \\ -m\, c(\gamma)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.106}$$

Si la vitesse $\dot{\phi}$ est constante, alors le terme principal du balourd dans chaque plan de contrôle est un vecteur de longueur $m\,\delta z\,\dot{\phi}^2$ tournant à la vitesse $\dot{\phi}$. Ce terme est identique à celui trouvé pour le modèle plan par l'équation (2.99). Donc, si on trouve une loi de commande adaptée à l'élimination du balourd pour le modèle plan, la méthode devrait être aussi adaptée pour la broche. Bien entendu, il faudrait vérifier sa robustesse vis à vis de tous les termes négligés[15].

En ce qui concerne les termes négligés, il est possible de différencier deux types d'influence qui viennent s'ajouter à l'effet principal du balourd.

Effet 1 : Les premiers sont ceux du vecteur $C\,\dot{q}$ comportant des produits des vitesses généralisées. Ils vont modifier la trajectoire du rotor en déformant le cercle qui serait obtenu si seul le terme

13. Ce terme provient du produit d'un cosinus ou sinus de ψ par un cosinus ou sinus de θ. S'il n'apparaît que dans le terme qui influence $\ddot{y}$, c'est dû aux simplifications sur les sinus et cosinus. Pour cette raison, il est possible de le supposer négligeable.

14. Cette technique est identique à celle utilisée dans la section évoquant le modèle du système plan.

15. Le modèle de simulation est un excellent moyen pour y parvenir.

principal existait. Pour mieux comprendre l'effet produit par ces petites perturbations, des mesures prises sur le banc d'essais dans un plan de contrôle, avec une loi de commande classique, seront données dans le chapitre consacré aux essais réels. Par l'expérience, il est possible de dire que ces perturbations ne sont pas complètement négligeables mais leur effet reste toutefois moins important que celui du terme principal $\dot{\phi}^2$.

Effet 2 : Le deuxième type de termes négligés correspond à ceux qui apparaîtraient si $\delta x \neq 0, \delta y \neq 0$ et $\varphi \neq 0$. Dans ce cas, l'effet principal du balourd sera différent d'un plan à l'autre. δx va avoir pour effet d'augmenter le module du vecteur balourd dans un plan et de le réduire dans l'autre. Il en va de même si φ et δy ne sont tous les deux non nuls. φ provoque un déphasage spatial entre un plan et l'autre. On aura alors un angle γ_1 dans le plan 1 et angle γ_2 dans le plan 2.

A ces deux effets, il faut aussi ajouter les couplages mécaniques qui existent dans la matrice d'inertie. Cela indique que les accélérations considérées (relatives au vecteur d'état) vont s'influencer mutuellement.

Récapitulatif des équations du modèle : le modèle est donné par les équations suivantes : (G.1) et (G.2) pour la matrice D, (G.4), (G.5), (G.6), (G.7) et (G.8) pour le vecteur $C\dot{q}$, et (E.6) pour l'effet dissipatif.

2.5.2.3 Modèle pour la commande

Le modèle de commande doit permettre de supprimer les termes de couplage qui existent entre les deux plans de contrôle en dehors de toute considération concernant le balourd. Ce modèle peut prendre différentes formes. Habituellement, son vecteur d'état comprend les trois translations, les trois angles d'Euler, et les charges électriques. A cela, peut être ajoutée une fonction de sortie :

$$\Gamma = h\left(q, \dot{q}\right) \tag{2.107}$$

qui donne les valeurs mesurées au niveau des capteurs par rapport au vecteur d'état (Il s'agit de la méthode adoptée dans (Mouille, 1994)).

Dans ce travail, étant données les lois de commande qui vont être mises en ouvre, ce sont les positions vues par les capteurs qui vont constituer le vecteur d'état, soit un vecteur vitesse qui est $\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dot{\phi}, i_{y1p}, i_{y1m}, i_{z1p}, i_{z1m}, i_{y2p}, i_{y2m}, i_{z2p}, i_{z2m}, i_{xp}, i_{xm}]$.

Ce dernier modèle est obtenu en partant du modèle d'analyse et en choisissant $\delta z = 0$ [16] et $I_y = I_z$ [17]. Le système devient (sous forme 2.102) [18] :

16. Dans le modèle de commande, le balourd n'est pas considéré ce qui entraîne $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ et $\varphi = 0$. Dans ce modèle δx peut ne pas être égal à zéro, ce paramètre reflétant le décalage de la position du centre de gravité par rapport au milieu du segment entre les deux plans de contrôle. Pour ne pas surcharger les équations δx est tout de même pris égale à zéro, mais les lois de contrôle qui vont être décrites s'appliquent tout de même si $\delta x \neq 0$.

17. Si le balourd n'est pas considéré, le rotor est alors un solide de révolution parfait.

18. Le système est coupé en deux parties : la première représente les six équations mécaniques et la seconde les dix

$$
\begin{bmatrix}
m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} \\
0 & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & \\
0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & \\
0 & \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} & 0 & -\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} & 0 & I_x
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xp}}^2}{(-e_0+x)^2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xm}}^2}{(e_0+x)^2} \\
\\
\frac{1}{8}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_1+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_2 \\
+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{z}_1\dot{y}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_2\dot{z}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
+\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(-2e_0l_c+2y_1l_c-d_{ca}y_1+d_{ca}y_2)^2}i_{y1p}^2-\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(2e_0l_c+2y_1l_c-d_{ca}y_1+d_{ca}y_2)^2}i_{y1m}^2 \\
-\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{y2p}^2}{(-2e_0l_c+2y_2l_c+d_{ca}y_1-d_{ca}y_2)^2}+\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{y2m}^2}{(2e_0l_c+2y_2l_c+d_{ca}y_1-d_{ca}y_2)^2} \\
\\
+\frac{1}{16}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1^2+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_2^2+\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
+\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(-2e_0l_c+2z_1l_c-d_{ca}z_1+d_{ca}z_2)^2}i_{z1p}^2-\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(2e_0l_c+2z_1l_c-d_{ca}z_1+d_{ca}z_2)^2}i_{z1m}^2 \\
-\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{z2p}^2}{(-2e_0l_c+2z_2l_c+d_{ca}z_1-d_{ca}z_2)^2}+\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{z2m}^2}{(2e_0l_c+2z_2l_c+d_{ca}z_1-d_{ca}z_2)^2} \\
\\
+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_1+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_2 \\
+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{z}_1\dot{y}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_2\dot{z}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{y1p}^2}{(-2e_0l_c+2y_1l_c-d_{ca}y_1+d_{ca}y_2)^2}+\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{y1m}^2}{(2e_0l_c+2y_1l_c-d_{ca}y_1+d_{ca}y_2)^2} \\
+\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(-2e_0l_c+2y_2l_c+d_{ca}y_1-d_{ca}y_2)^2}i_{y2p}^2-\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(2e_0l_c+2y_2l_c+d_{ca}y_1-d_{ca}y_2)^2}i_{y2m}^2 \\
\\
\frac{1}{16}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1^2+\frac{1}{8}\frac{I_x(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\frac{I_x(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_2^2-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{z1p}^2}{(-2e_0l_c+2z_1l_c-d_{ca}z_1+d_{ca}z_2)^2}+\frac{\lambda l_c d_{ca}i_{z1m}^2}{(2e_0l_c+2z_1l_c-d_{ca}z_1+d_{ca}z_2)^2} \\
+\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(-2e_0l_c+2z_2l_c+d_{ca}z_1-d_{ca}z_2)^2}i_{z2p}^2-\frac{\lambda l_c(d_{ca}-2l_c)}{(2e_0l_c+2z_2l_c+d_{ca}z_1-d_{ca}z_2)^2}i_{z2m}^2 \\
\\
\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_1\dot{z}_1}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_1\dot{z}_2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{z}_1\dot{y}_2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_x\dot{y}_2\dot{z}_2}{{l_c}^2}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{2.108}
$$

équations électriques.

Dans la matrice d'inertie apparaît un terme en $(z_1 - z_2)^2$; étant donnés les points de fonctionnement choisis pour le système, cette valeur est très proche de zéro et va être considérée comme telle.

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{e_0 - y_1 + \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{y1p} \\ \frac{\lambda}{e_0 + y_1 - \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{y1m} \\ \frac{\lambda}{e_0 - z_1 + \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{z1p} \\ \frac{\lambda}{e_0 + z_1 - \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{z1m} \\ \frac{\lambda}{e_0 - y_2 - \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{y2p} \\ \frac{\lambda}{e_0 + y_2 + \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{y2m} \\ \frac{\lambda}{e_0 - z_2 - \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{z2p} \\ \frac{\lambda}{e_0 + z_2 + \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2 l_c}} \dot{i}_{z2m} \\ \frac{\lambda_x}{e_0 - x} \dot{i}_{xp} \\ \frac{\lambda_x}{e_0 + x} \dot{i}_{xm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \frac{\lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{y}_1 i_{y1p} + \lambda l_c d_{ca} \dot{y}_2 i_{y1p}}{(-2 e_0 l_c + 2 y_1 l_c - d_{ca} y_1 + d_{ca} y_2)^2} \\ -2 \frac{\lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{y}_1 i_{y1m} + \lambda l_c d_{ca} \dot{y}_2 i_{y1m}}{(2 e_0 l_c + 2 y_1 l_c - d_{ca} y_1 + d_{ca} y_2)^2} \\ 2 \frac{\lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{z}_1 i_{z1p} + \lambda l_c d_{ca} \dot{z}_2 i_{z1p}}{(-2 e_0 l_c + 2 z_1 l_c - d_{ca} z_1 + d_{ca} z_2)^2} \\ -2 \frac{\lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{z}_1 i_{z1m} + \lambda l_c d_{ca} \dot{z}_2 i_{z1m}}{(2 e_0 l_c + 2 z_1 l_c - d_{ca} z_1 + d_{ca} z_2)^2} \\ 2 \frac{\lambda l_c d_{ca} \dot{y}_1 i_{y2p} + \lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{y}_2 i_{y2p}}{(-2 e_0 l_c + 2 y_2 l_c + d_{ca} y_1 - d_{ca} y_2)^2} \\ -2 \frac{\lambda l_c d_{ca} \dot{y}_1 i_{y2m} + \lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{y}_2 i_{y2m}}{(2 e_0 l_c + 2 y_2 l_c + d_{ca} y_1 - d_{ca} y_2)^2} \\ 2 \frac{\lambda l_c d_{ca} \dot{z}_1 i_{z2p} + \lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{z}_2 i_{z2p}}{(2 e_0 l_c - 2 z_2 l_c - d_{ca} z_1 + d_{ca} z_2)^2} \\ -2 \frac{\lambda l_c d_{ca} \dot{z}_1 i_{z2m} + \lambda l_c (2 l_c - d_{ca}) \dot{z}_2 i_{z2m}}{(2 e_0 l_c + 2 z_2 l_c + d_{ca} z_1 - d_{ca} z_2)^2} \\ \frac{\lambda_x \dot{x} i_{xp}}{(-e_0 + x)^2} \\ -\frac{\lambda_x \dot{x} i_{xm}}{(e_0 + x)^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R i_{y1p} \\ R i_{y1m} \\ R i_{z1p} \\ R i_{z1m} \\ R i_{y2p} \\ R i_{y2m} \\ R i_{z2p} \\ R i_{z2m} \\ R_x i_{xp} \\ R_x i_{xm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{y1p} \\ E_{y1m} \\ E_{z1p} \\ E_{z1m} \\ E_{y2p} \\ E_{y2m} \\ E_{z2p} \\ E_{z2m} \\ E_{xp} \\ E_{xm} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Récapitulatif des équations du modèle: le modèle est donné par les équations suivantes : première partie de (2.108) et première partie de (2.109) pour la matrice D, seconde partie de (2.108) et seconde partie de (2.109) pour le vecteur $C\,\dot{q}$, et troisième partie de (2.109) pour l'effet dissipatif.

2.5.2.4 Modèle d'une broche à actionneurs coniques

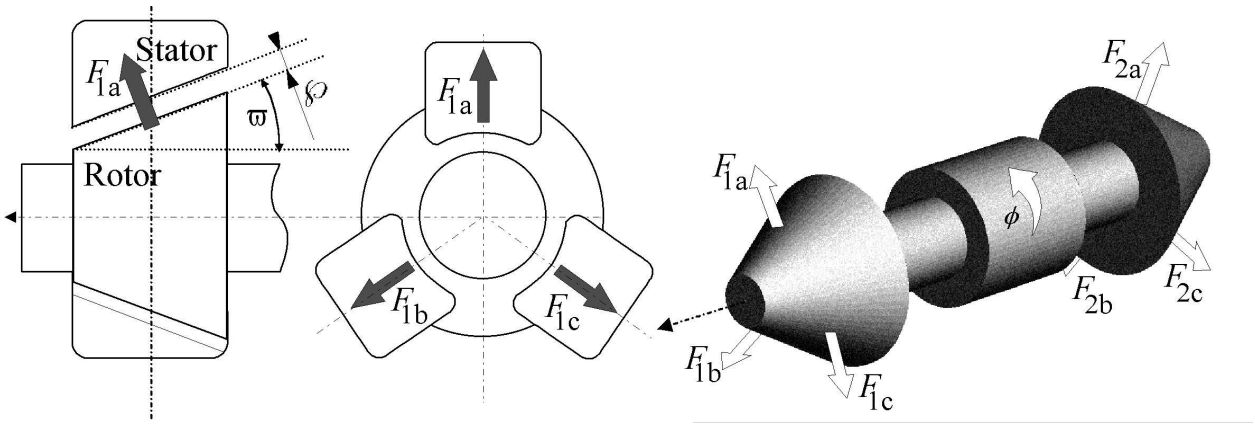


FIG. 2.25: *Broche à actionneurs coniques*

Une activité encore très vivace dans le monde du palier magnétique concerne la conception mécanique des systèmes. La tendance générale qui consiste à remplacer le *matériel* par du *logiciel* se retrouve dans ce domaine. La simplification du matériel permet de réduire les coûts de production

des broches à paliers magnétiques pour leurs ouvrir de nouvelles applications. Deux voies sont actuellement prisées : la première consiste à concevoir des paliers intégrés à l'architecture de moteurs électriques (Okada et al., 1995; Okada et al., 1996; Barthod and Lemarquand, 1998; Chiba and Fukao, 1998; Silber and Amrhein, 1998a; Silber and Amrhein, 1998b) ; la seconde réduit le nombre d'actionneurs nécessaires pour contrôler les cinq degrés de liberté d'une broche. Dans (Ponsart, 1996) ce problème est étudié et il y est justement écrit que $(N+1)$ actionneurs sont nécessaires pour contrôler N degrés de liberté.

La configuration la plus commune décrite pour six actionneurs est celle où ceux-ci sont regroupés par trois dans deux plans de contrôle et agissent sur des troncs de cône. Cette configuration est décrite dans la Figure 2.25. Chaque actionneur agit à la fois sur la direction x et une ou deux directions du plan de contrôle. La maîtrise d'une telle géométrie passe par une complexité accrue des lois de commande car les axes de contrôle ne peuvent assurément plus être considérés comme indépendants. Cette architecture commence à avoir quelques applications en commande non linéaire (Lin and Gau, 1997) et même des réalisations industrielles (Bühler et al., 1996a; Bühler et al., 1996b).

Si cette configuration apparaît dans ce travail, c'est pour signaler que les commandes qui y sont décrites peuvent s'appliquer à cette architecture. Cela sera montré dans une section du chapitre suivant. Pour cette commande, le modèle du système sera nécessaire et est donc donné dans l'Annexe H [19].

Récapitulatif des équations du modèle : Le modèle est donné par les équations suivantes : première partie de (H.1) et première partie de (H.2) pour la matrice D, seconde partie de (H.1) et seconde partie de (H.2) pour le vecteur $C\,\dot{q}$, et troisième partie de (H.2) pour l'effet dissipatif.

2.5.3 Récapitulatif des équations composant les différents modèles

Les différentes équations qui constituent les modèles décrits précédemment sont récapitulés dans la Table 2.1. En face de chaque modèle sont rappelés les paramètres qu'il faut mettre à zéro pour obtenir ce modèle.

2.6 Fonctionnement Linéaire et non Linéaire

Les Paliers Magnétiques Actifs présentent une caractéristique intéressante : on peut effectuer très naturellement une linéarisation physique du système ; la modification du point d'équilibre des variables électriques dans la machine permet de linéariser ses équations en un point de fonctionnement où cette linéarisation est valable et utilisable. En première approximation, cette linéarisation physique ne nuit pas aux performances que l'on peut espérer du palier magnétique. Par contre, elle facilite alors la mise au point de la commande, puisque s'ouvre alors tout le champ de la commande linéaire.

Cette modification du point de fonctionnement intervient au niveau des actionneurs. Dans chacune des deux bobines qui constituent un axe, est injecté un courant de biais dit courant de pré-

19. Il est possible de remarquer dans ce modèle que tout ce qui ne dépend pas d'une action électrique est identique à la partie équivalente dans le modèle pour la commande décrit précédemment.

TAB. 2.1: *Equations des différents modèles*

Modèle de simulation	$\underbrace{D(q)\,\ddot{q}}_{\substack{Eq.(D.3)\\Eq.(D.11)\\Eq.(D.14)\\Eq.(D.21)}} + \underbrace{C(q,\dot{q})\,\dot{q}}_{\substack{Eq.(E.1)\\Eq.(E.2)\\Eq.(E.3)}} + \underbrace{\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}}_{Eq.(E.6)} = E$	Tous les paramètres δx, δy, δz et φ sont considérés non nuls.
Modèle d'analyse	$\underbrace{D(q)\,\ddot{q}}_{\substack{Eq.(G.1)\\Eq.(G.2)}} + \underbrace{C(q,\dot{q})\,\dot{q}}_{\substack{Eq.(G.4)\\Eq.(G.5)\\Eq.(G.6)\\Eq.(G.7)\\Eq.(G.8)}} + \underbrace{\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}}_{Eq.(E.6)} = E$	Les paramètres δx, δy, et φ sont considérés nuls.
Modèle de commande	$\underbrace{D(q)\,\ddot{q}}_{\substack{D_m:Eq.(2.108)\\D_e:Eq.(2.109)}} + \underbrace{C(q,\dot{q})\,\dot{q}}_{\substack{C_m:Eq.(2.108)\\C_e:Eq.(2.109)}} + \underbrace{\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}}_{Eq.(2.109)} = E$	Les paramètres δx, δy, δz, et φ sont considérés nuls.
Modèle à actionneurs coniques	$\underbrace{D(q)\,\ddot{q}}_{\substack{D_m:Eq.(H.1)\\D_e:Eq.(H.2)}} + \underbrace{C(q,\dot{q})\,\dot{q}}_{\substack{C_m:Eq.(H.1)\\C_e:Eq.(H.2)}} + \underbrace{\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}}_{Eq.(H.2)} = E$	Les paramètres δx, δy, δz, et φ sont considérés nuls.

magnétisation I_0. Cette action modifie peu le comportement mécanique du système, mais permet d'utiliser un modèle linéaire de l'expression des forces qui s'exercent sur le rotor. Pourtant, il y a quelques avantages à ne pas utiliser ce courant de biais.

2.6.1 Fonctionnement linéaire

Le fonctionnement linéaire du palier magnétique a été la première voie explorée pour le contrôle de ce système depuis deux décennies. En effet, le modèle linéaire qui en résulte facilite la mise au point de commandes efficaces. Cette direction de recherche est encore très largement utilisée, mais la complexité et l'efficacité des commandes va en grandissant (Nonami and Yamagushi, 1991; Bleuler et al., 1994; Fujita et al., 1995; Petela and Botros, 1995; Herzog et al., 1996; Matsumura et al., 1996; Nonami and Ito, 1996; Yeh and Youcef-Toumi, 1996; Knospe et al., 1997; Knospe and Yang, 1997). Tout les derniers développements de l'automatique linéaire sont appliqués aux paliers magnétiques actifs en particulier en ce qui concerne la commande robuste.

Il peut être intéressant de rappeler quelques données concernant le fonctionnement linéaire. Soit le système schématisé sur la Figure 2.26 (système à un degré de liberté) et essayons de donner le comportement des équations linéarisées autour d'un point de fonctionnement donné. Le comportement mécanique est donné par :

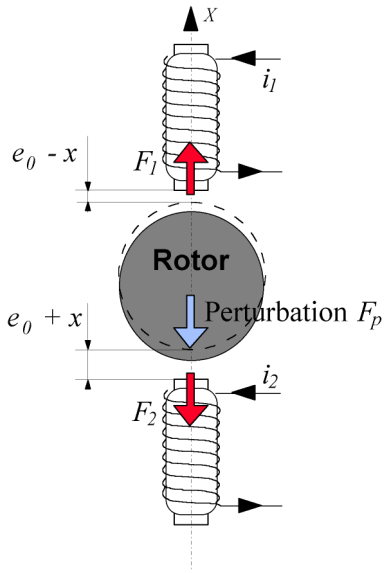


FIG. 2.26: *Définition de paramètres pour un axe perturbé à linéariser*

$$m\,\ddot{x} = F_1 - F_2 + F_p \tag{2.110}$$

où x est le déplacement du rotor, F_1 et F_2 sont les forces électromagnétiques exercées par les actionneurs, et F_p est une force de perturbation considérée constante (comme la gravité par exemple). En négligeant les effets de saturation et d'hystérésis, les expressions des forces électromagnétiques sont alors[20]

$$F_1 = K_1 \frac{i_1^2}{(e_0 - x)^2} \quad \text{et} \quad F_2 = K_2 \frac{i_2^2}{(e_0 + x)^2} \tag{2.111}$$

où e_0 est l'entrefer nominal séparant le rotor des actionneurs, i_1 et i_2 les courants dans les deux bobines, et K_1 et K_2 des coefficients qui dépendent de la structure des actionneurs. La linéarisation de l'équation (2.110) est obtenue en considérant des petites variations $[\delta x, \delta i_1, \delta i_2]$ autour d'un point de fonctionnement $[x_0, I_1, I_2]$, telles que

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ i_1 = I_1 + \delta i_1 \\ i_2 = I_2 + \delta i_2 \end{cases} \tag{2.112}$$

Au point d'équilibre l'accélération $\ddot{x}$ est nulle. Cela donne :

$$0 = K_1 \frac{I_1^2}{(e_0 - x_0)^2} - K_2 \frac{I_2^2}{(e_0 + x_0)^2} + F_p \tag{2.113}$$

20. Voir les sections précédentes.

Les valeurs de I_1 et I_2 ne sont pas définies à priori par le point d'équilibre mécanique choisi ; par contre, si une des deux valeurs est fixée, alors la seconde l'est aussi telle que

$$I_2 = (e_0 + x_0)\sqrt{\frac{K_1}{K_2}\frac{I_1^2}{(e_0 - x_0)^2} + \frac{F_p}{K_2}} \tag{2.114}$$

Introduisons maintenant (2.112) dans (2.110) pour obtenir :

$$m\ \delta\ddot{x} = K_1\frac{(I_1 + \delta i_1)^2}{(e_0 - x_0 - \delta x)^2} - K_2\frac{(I_2 + \delta i_2)^2}{(e_0 + x_0 + \delta x)^2} + F_p \tag{2.115}$$

Après développement avec la formule de Taylor, l'équation obtenue est :

$$\begin{aligned} m\ \delta\ddot{x} \approx K_1 &\left(\frac{I_1^2}{(e_0 - x_0)^2} + \frac{2\ I_1^2\ \delta x}{(e_0 - x_0)^3} + \frac{2\ I_1\ \delta i_1}{(e_0 - x_0)^2}\right) \\ - K_2 &\left(\frac{I_2^2}{(e_0 + x_0)^2} + \frac{2\ I_2^2\ \delta x}{(e_0 + x_0)^3} + \frac{2\ I_2\ \delta i_2}{(e_0 + x_0)^2}\right) + F_p \end{aligned} \tag{2.116}$$

En soustrayant l'équation (2.113) à l'équation (2.116) et en mettant sous forme d'équations d'état, cela donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\ddot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_1\ (2\ I_1^2)}{m(e_0 - x_0)^3} - \frac{K_2\ (2\ I_2^2)}{m(e_0 + x_0)^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\dot{x} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_1\ (2\ I_1)}{m(e_0 - x_0)^2} & \frac{K_2\ (-2\ I_2)}{m(e_0 + x_0)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i_1 \\ \delta i_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.117}$$

Le système linéaire obtenu de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$ a pour entrées δi_1 et δi_2. La matrice de commandabilité $[B \quad AB]$ donne les conditions sur les courants δi_1 et δi_2 assurant la commandabilité du système.

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_1\ (2\ I_1)}{m(e_0 - x_0)^2} & \frac{K_2\ (-2\ I_2)}{m(e_0 + x_0)^2} \\ \frac{K_1\ (2\ I_1)}{m(e_0 - x_0)^2} & \frac{K_2\ (-2\ I_2)}{m(e_0 + x_0)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

Immédiatement, il est visible que cette matrice est de rang plein si un des deux courants du point d'équilibre est non nul. Si la force de perturbation F_p est non nulle (voir équation (2.114)) alors un des deux courants peut être nul. Un des deux actionneurs peut être utilisé pour compenser cette perturbation à l'équilibre.

En général, les deux courants de biais sont choisis égaux à I_0 car les deux actionneurs sont identiques et la force de perturbation non prise en compte. Les variations de courant sont alors prises de même norme et de signes opposés. Les deux actionneurs fonctionnent en même temps

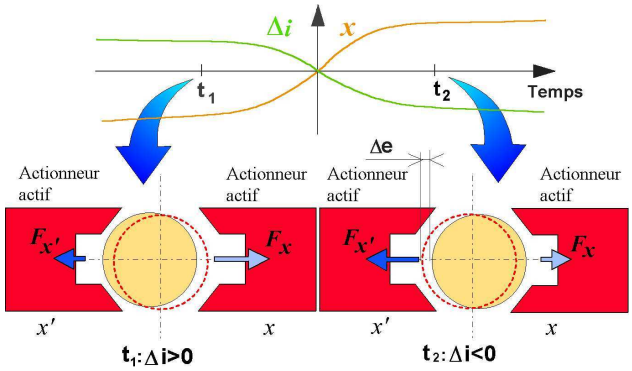


FIG. 2.27: *Fonctionnement linéaire d'un axe de contrôle (2 actionneurs actifs)*

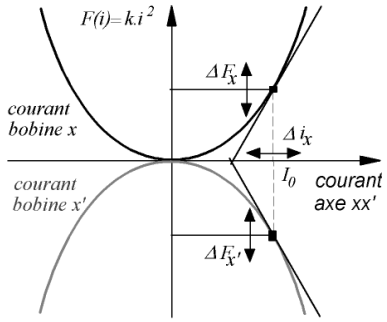


FIG. 2.28: *Linéarisation des forces*

et la force appliquée sur le rotor est directement proportionnelle à la variation du courant (voir Figures 2.27 et 2.28). La position d'équilibre mécanique est zéro. L'équation simplifiée obtenue est (Schweitzer et al., 1994) :

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} &= \frac{4K_1I_0^2}{m\ e_0^3}\delta x + \frac{4K_1I_0}{m\ e_0^2}\delta i \\ &= K_s\delta x + K_i\delta i \end{aligned} \tag{2.119}$$

En dehors de l'existence d'une force de perturbation, cas se présentant pour des axes de contrôle horizontaux, le système n'est commandable que si les courants de biais sont non nuls. Ce phénomène est dû à la dégénérescence du linéarisé tangent en zéro. Cela ne signifie pas pour autant qu'il est impossible de commander le système si les courants sont nuls au point d'équilibre. En utilisant des méthodes non linéaires, le modèle non linéaire du système peut être contrôlé. De plus quelques avantages peuvent être retirés du fonctionnement non linéaire.

2.6.2 Fonctionnement non linéaire

Injecter un courant de prémagnétisation dans les bobines facilite le contrôle du système, mais ne représente pas une obligation. Les équations non linéaires du palier magnétique peuvent être utilisées

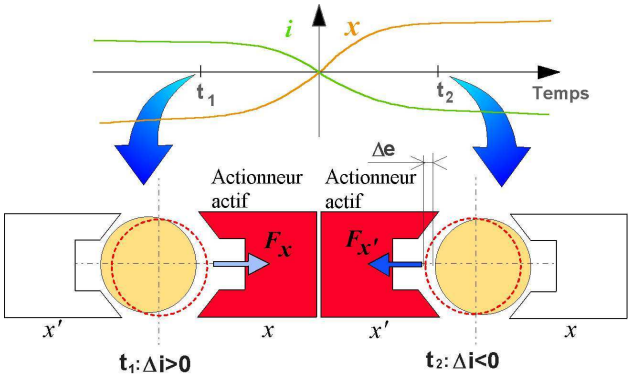


FIG. 2.29: *Fonctionnement non linéaire d'un axe de contrôle (1 actionneur actif)*

pour corriger certains désavantages présents dans la linéarisation. Bien qu'encore marginale, cette démarche prend de plus en plus d'ampleur (Charara et al., 1992; Mohamed and Emad, 1993; Lottin et al., 1994; Mouille, 1994; Zhong and Townsend, 1994; Smith and Weldon, 1995; Virgin et al., 1995; Charara et al., 1996; Lévine et al., 1996; de Queiroz and Dawson, 1996; Vidolov et al., 1996; Joo and Seo, 1997; Trumper et al., 1997; Carabelli and Genta, 1998; Cole et al., 1998; Namerikawa and Fujita, 1998; Wu et al., 1998).

Faire fonctionner le palier magnétique en non linéaire, c'est principalement essayer de n'utiliser qu'un actionneur à la fois sur un axe de contrôle (voir Figure 2.29). En effet, à un instant donné, la force à exercer sur le rotor est soit positive soit négative, mais ne requiert théoriquement pas l'utilisation simultanée des deux actionneurs. Cela peut permettre de diviser au moins par deux (c'est un minimum) l'énergie utilisée pour sustenter le rotor. En fonctionnement linéaire classique, la somme des courants dans un axe est de $2\,I_0$. En non linéaire le gain est immédiat : une seule bobine fonctionne à la fois d'où un courant en moyenne au moins deux fois inférieur. Mais le gain énergétique est en général plus élevé car les signaux de commande sont plutôt sinusoïdaux que carrés et la force appliquée n'est pas créée par une différentielle autour de I_0 mais par une différence par rapport à zéro. L'énergie dissipée est moins importante, ce qui peu influencer la conception du stator vis à vis de la dissipation thermique[21].

A ce principal avantage viennent se greffer deux autres améliorations du fonctionnement du palier magnétique en non linéaire (Charara, 1992) :

- lorsque deux bobines créent chacune des champs magnétiques diamétralement opposés, la force résultante sur le noyau ferreux du rotor est nulle ; par contre, le champ magnétique résultant n'est pas nul partout (voir Figure 2.30) ; ce noyau ferreux étant la plupart du temps en rotation, cela y induit des courants de Foucault qui tendent à s'opposer à ce mouvement de rotation. Là où l'on a éliminé du frottement mécanique, on crée du frottement électromagnétique. En fonctionnement non linéaire, cette perturbation est grandement diminuée ;

- dans le cas linéaire, un déplacement le long d'un axe de contrôle s'oppose à une raideur qui

21. Il est important de signaler que certains systèmes de moyenne et grande puissance nécessitent un refroidissement du stator.

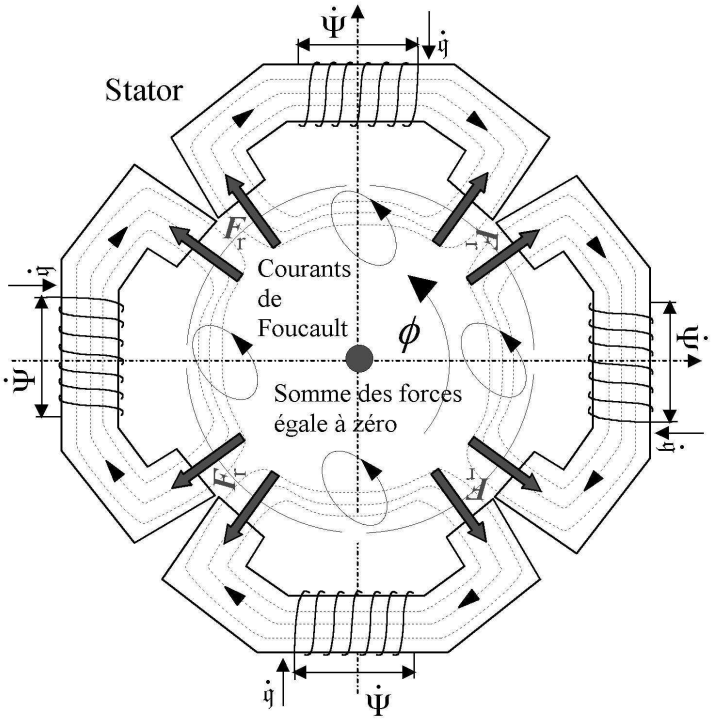


FIG. 2.30: *Champs Magnétiques dans le rotor pour une position statique en fonctionnement linéaire*

est fonction de I_0 mais indépendante de la variation du courant δi. Les courants étant plus faibles en non linéaire, ce phénomène est moins important ; à la limite, lorsqu'on se trouve autour du point d'équilibre, dans un système non perturbé, cette raideur est nulle et l'énergie nécessaire à un déplacement du rotor est minime.

De plus, Si le diagramme de Bode d'amplitude du système bouclé comporte une résonance, celle-ci présente une amplitude restreinte en fonctionnement non linéaire (phénomène de saut dans la courbe représentant la position en fonction de la pulsation d'entrée) par rapport au fonctionnement linéaire. En non linéaire, l'amortissement est en quelque sorte augmenté et *étale* la résonance.

2.7 Conclusion

Après La présentation de quelques définitions permettant d'appréhender la problématique liée aux Paliers Magnétiques Actifs, une méthodologie de modélisation a été donnée. Cette méthode, basée sur les équations d'Euler Lagrange, doit permettre de trouver des modèles non linéaires mécaniques et électriques, dont la complexité peut s'adapter aux besoins de l'utilisateur. En particulier, une solution pour introduire l'effet de la perturbation due au balourd est présentée par l'intermédiaire d'un changement de variables dans l'expression de l'énergie mécanique. Cette technique,

associée aux simplifications adéquates, permet d'obtenir :

- des modèles de simulation (broche standard, mais aussi broche à actionneurs coniques si besoin est) très proches du comportement réel où effet de balourd et effets gyroscopiques sont très étroitement liés ;
- après une première simplification, ce type de modélisation permet aussi d'analyser ce que représente le balourd en tant qu'accélérations dans chacun des deux plans de contrôle. Cela devrait permettre de construire des lois de commande adaptées à l'élimination de cette perturbation ;
- une seconde simplification conduit à des modèles sans balourd proches de ceux généralement rencontrés dans la littérature. Ces modèles sont utilisés pour la synthèse de commande assurant la stabilité de la broche lorsque le balourd n'est pas considéré.

Après la modélisation, une rapide présentation des avantages apportés par le fonctionnement non linéaire a été donnée. L'absence de courant de prémagnétisation dans les bobines va entraîner une grande complexité de la commande, mais les gains tant sur le comportement dynamique que sur la réduction de la consommation énergétique sont suffisamment importants pour que le contrôle non linéaire soit tenté.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de deux lois de commande qui tout en permettant le fonctionnement non linéaire des paliers, vont contenir un algorithme de suppression du balourd.

Chapitre 3

Commande du procédé

3.1 Introduction

L'évolution des machines qui composent notre monde les pousse chaque jour un peu plus vers la perfection. Plus précises, plus rapides, plus efficaces, plus silencieuses, plus ergonomiques, moins polluantes, telles sont les caractéristiques qu'elles acquièrent au fil des générations. Pour que cela soit possible, il faut leur insuffler une petite parcelle de *connaissance*, c'est à dire suffisamment de données pour atteindre le but fixé. C'est cette connaissance que l'automatique essaie d'extraire de la confrontation des divers domaines qu'elle met en jeu.

Le développement suivi par l'automatique, en terme de complexité, est très proche de celui la modélisation des systèmes. A l'origine, les modèles étaient simples, *linéaires*, assez éloignés de la réalité, et ainsi en était-il des commandes, linéaires elles aussi et relativement rudimentaires [1]. Au gré des développements mathématiques (ou des redécouvertes de travaux antérieurs) les méthodes de contrôle se sont améliorées. La commande linéaire s'est vue enrichie de multiples possibilités dont on peut citer, par exemple, la commande des systèmes multivariables, la commande adaptative, la commande robuste H^∞ et μ-synthèse [2], ... Les développements actuels cherchent, pour une grande part, à supprimer l'effet de l'imprécision de modélisation du système qui sert à synthétiser la commande. En effet, aussi complexe que puisse être un modèle obtenu avec les outils actuels, dès que la partie contrôle intervient, il faut immanquablement faire des simplifications. Celles-ci, encore aujourd'hui, conduisent souvent à linéariser le modèle pour pouvoir appliquer toute la panoplie de la commande linéaire. Les méthodes linéaires ont largement été utilisées depuis près de vingt ans pour le contrôle des paliers magnétiques actifs (voir références dans la section 2.6.1). Cette façon de procéder a permis l'éclosion d'une multitude de techniques devant répondre à chaque fois à un besoin précis (robustesse, élimination de vibration, rotor flexible, élimination du balourd), mais à chaque fois la linéarisation physique du système est requise.

Un système se plie rarement à la vision linéaire qu'on en a. La prise en compte de la non-linéarité peut apporter un gain non négligeable de précision dans l'action du contrôleur, et bien sûr éviter l'imprécision provoquée par la linéarisation du modèle. La multitude de non linéarités existantes fait que l'automatique non linéaire apporte bien peu de réponses par rapport à tous les problèmes qui se posent. Pourtant, pour certaines formes bien délimitées de non linéarité, des solutions suffisamment bien maîtrisées permettent de résoudre une quantité croissante de problèmes. On peut citer les commandes à base de fonctions de Lyapunov, la géométrie différentielle qui conduit à la linéarisation entrée-sortie, la passivité basée sur l'énergie du système, les modes glissants non linéaires, ... Depuis 1990, de plus en plus de travaux sont effectués sur la commande non linéaire des paliers magnétiques actifs, mais, bien souvent, ces commandes se contentent de stabiliser le rotor, sans autre raffinement.

Dans la suite de ce chapitre vont être explicitées deux lois de commande non linéaires développées au cours de ce travail.

La première partie est dédiée à l'action du balourd et aux méthodes de suppression de cette

1. On peut bien sûr penser au contrôleur Proportionnel Dérivée Intégrale, qui bien que simple reste pourtant toujours d'actualité.

2. Ces deux dernières sont actuellement particulièrement prisées pour la commande linéaire des paliers magnétiques (Matsumura et al., 1996; Nonami and Ito, 1996).

perturbation. Deux exemples sont donnés pour comparaison avec notre propre proposition pour éliminer le balourd.

La deuxième partie présente deux méthodes d'implémentation non linéaire pour notre technique de suppression de balourd.

- La première est basée sur la passivité et une linéarisation entrée-état. Elle a été proposée dès 1994 dans (de Miras, 1994; Charara and de Miras, 1995).

- La seconde repose sur l'utilisation de modes glissants non linéaires dérivés de la linéarisation entrée-sortie.

3.2 Suppression du balourd

En dehors du fait qu'il faille choisir un mode de fonctionnement, linéaire ou non linéaire, pour construire une loi de contrôle stabilisante, divers modules peuvent coexister avec la commande principale pour résoudre des défauts spécifiques. Dans le cadre de ce travail, il a été indiqué que le problème qui doit être résolu concerne l'existence d'une perturbation due au balourd. Comme cela a été vu au chapitre précédent, ce balourd peut être approximé par un vecteur accélération qui tourne à la vitesse $\dot{\phi}$ du rotor dans chacun des plans de contrôle.

Pour contrer les effets de cette perturbation, il est possible d'envisager deux grandes familles de commandes[3] : les *passives* et les *actives*.

- Une commande est dite passive par rapport au balourd si elle ne prend pas en compte un modèle de la perturbation pour en éliminer les effets (sauf peut-être que le balourd est synchrone à la vitesse $\dot{\phi}$) et si aucun module spécifique n'est ajouté à la commande. Ce sont ses caractéristiques de raideur et d'amortissement, ainsi que sa robustesse vis à vis d'une erreur de modèle (dont le balourd fait partie quand on n'en tient pas compte) qui vont diminuer (et non pas complètement éliminer) l'effet du balourd (Chen and Darlow, 1988; Matsumura et al., 1994; de Miras et al., 1996; Allaire and Sinha, 1998). Cette catégorie de commandes ne peut pas prétendre être plus performante que celles du type suivant, mais si l'élimination du balourd n'est pas critique pour l'application considérée, ces commandes sont largement suffisantes.

- Par opposition au genre précédent, une commande dite active sera constituée d'un module dont le contenu va être construit à partir d'informations issues du modèle du balourd. Grâce à cette information, la trajectoire du rotor pourra être modifiée telle que la perturbation semblera n'avoir pas d'effet (Knospe, 1991; Herzog et al., 1996; Lum et al., 1996; de Miras and Charara, 1998a).

La section suivante présente quelques idées qui sous-tendent les méthodes couramment employées dans les commandes actives de suppression de balourd.

3. La délimitation entre les deux genres n'est pas toujours très simple à appréhender.

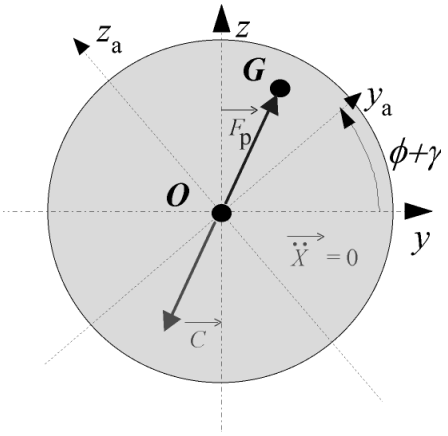


FIG. 3.1: *Elimination de l'effet du balourd sur la position du rotor*

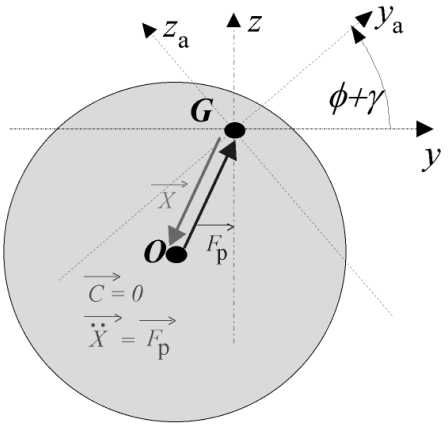


FIG. 3.2: *Elimination de l'effet du balourd sur les forces appliquées au rotor*

3.2.1 Modes de suppression du balourd

Dans un fonctionnement standard d'une loi de commande, l'accélération qui agit sur le rotor est donnée, sous une forme vectorielle, par [4] (de Miras and Charara, 1998a) :

$$\ddot{\overrightarrow{X}} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{F}_p \tag{3.1}$$

où $\ddot{\overrightarrow{X}}$ est le vecteur accélération de la position, $\overrightarrow{C}$ est le vecteur commande, et $\overrightarrow{F}_p$ est le vecteur perturbation (voir Figure 2.24 dans le chapitre précédent). En régime permanent, la géométrie formée par les trois vecteurs reste inchangée et tourne à la vitesse $\dot{\phi}$ du rotor. L'orientation relative entre $\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{F}_p$ ne dépend que des caractéristiques dynamiques imposées par la commande et de la norme de la perturbation. Il est visible que tant que la commande ne peut imposer $\ddot{\overrightarrow{X}} = 0$, le rotor

4. La forme décrite ici correspond à ce qui se passe dans un plan de contrôle et en effectuant des simplifications permettant d'éclaircir le propos.

va subir une accélération tournante l'obligeant à suivre une trajectoire très proche d'un cercle[5]. $\ddot{\overrightarrow{X}}$ est en quelque sorte une accélération normale.

Supprimer l'effet du balourd peut en fait se traduire par deux modes de fonctionnement bien différents.

Mode 1 : Il est possible d'empêcher le rotor de s'écarter d'une position fixe désirée, qui, en général, est le centre du repère lié au stator (ce qui sera appelé la position zéro). La situation a atteindre est alors celle dont il est fait allusion plus haut c'est à dire :

$$\ddot{\overrightarrow{X}} = 0 \tag{3.2}$$

Dans cette situation, la commande doit s'opposer à la perturbation, comme cela est montré sur la Figure 3.1. L'accélération étant nulle, le déplacement du rotor doit être nul lui aussi. Pour que la commande ait une norme égale et une direction opposée à la perturbation, la commande doit être capable de déterminer la phase et la norme de $\overrightarrow{F}_p$.

Ce mode de fonctionnement permet un centrage du rotor, mais pour obtenir ce centrage, les actionneurs doivent fournir une force de norme égale à celle de la perturbation. Or la perturbation est proportionnelle au carré de la vitesse $\dot{\phi}$. Il va donc exister une vitesse limite au delà de laquelle la force nécessaire ne pourra plus être fournie (dans (Carabelli and Genta, 1998)), quelques effets de la saturation des actionneurs sont explorés). Si cette vitesse limite est dépassée, il faut trouver un autre mode de fonctionnement qui évite la saturation des actionneurs. Il est possible ici de remarquer un autre avantage du fonctionnement non linéaire par rapport au fonctionnement linéaire : en linéaire, la variation de courant est proportionnelle à la force appliquée et donc proportionnelle au carré de $\dot{\phi}$, alors qu'en non-linéaire le courant est proportionnel à la racine carrée de la force demandée et donc proportionnel à $\dot{\phi}$. En non linéaire, la saturation des actionneurs se produit plus tard que s'ils sont utilisés en linéaire.

Un deuxième problème peut apparaître avec ce mode de fonctionnement. Les actionneurs vont transmettre cette force au bâti de la machine. Cette force étant cyclique, elle peut produire une vibration dans le support de la machine, néfaste pour l'intégrité de celle-ci.

Mode 2 : Le deuxième mode de fonctionnement a été introduit pour éliminer les deux problèmes énoncés précédemment. Pour cela il faut relaxer une condition : le rotor ne va plus rester en zéro, mais l'axe géométrique va se déplacer, dans chaque plan de contrôle, sur une trajectoire circulaire, proche du mouvement naturel du rotor, dont le centre sera l'axe d'inertie. En analysant cette trajectoire, il est visible que le balourd appliqué au centre O et dirigé vers le centre d'inertie G se comporte comme une accélération normale qui

5. Cette trajectoire circulaire va être déformée par exemple par les termes de couplage contenus dans la matrice C.

maintient O sur sa trajectoire circulaire (voir Figure 3.2). A partir de là, la commande ne doit plus servir qu'à stabiliser le rotor autour de cette trajectoire. Dans ce cas les actionneurs vont fonctionner en produisant très peu d'efforts et très loin de la zone de saturation.

3.2.2 Deux méthodes de suppression de balourd

De nombreuses études ont été menées (et continuent de l'être) pour trouver des méthodes actives permettant d'obtenir l'un ou l'autre mode de fonctionnement décrit ci-dessus. Il est possible de séparer ces travaux en divers groupements, sans pour autant rendre justice à la grande diversité de commande qui ont vu le jour, le mélange des genres étant souvent de mise. Les deux plus importants groupes sont les suivants :

- le type de méthodes le plus ancien[6] (Habermann, 1978) repose sur l'utilisation d'un générateur de signal synchrone avec la vitesse du rotor. Ce signal est généralement obtenu grâce à des filtres coupe fréquence chargés d'extraire le signal de fréquence $\dot{\phi}$ de la mesure des capteurs afin d'empêcher le contrôleur principal de réagir à ce déplacement. Ces commandes fonctionnent généralement sur le mode 2.

- La deuxième grande famille se compose de commandes abritant des observateurs. Certaines variables de l'état sont chargées de converger vers les valeurs de paramètres entrant dans le modèle choisi du balourd (de Miras and Charara, 1996; Lum et al., 1996; de Miras and Charara, 1998b). En possession de ces informations, la commande peut fonctionner soit en mode 1, soit en mode 2, soit les deux.

Pour illustrer ces méthodes deux exemples sont donnés dans les deux sous-sections suivantes.

3.2.2.1 Filtres de suppression de fréquence

Ce premier exemple est issu de l'article (Herzog et al., 1996) rapportant des résultats pour un nouveau type d'implémentation de filtre coupe fréquence (Notch Filter). Nous résumons le contenu de l'article afin d'éclairer cette méthodologie d'élimination de balourd ; les notations de l'article seront reprises dans la Table 3.1 comme notations locales.

Le but d'un filtre coupe fréquence est d'empêcher le signal de fréquence $\dot{\phi}$ (ou Ω dans ce qui suit) de passer à travers le contrôleur, tout en laissant passer le reste du signal capteur pour maintenir la stabilité autour de la trajectoire. Ce phénomène est schématisé sur la Figure 3.3. Le signal des capteurs de position contient différentes fréquences dues aux différents couplages et perturbations qui agissent sur le rotor. Il contient en particulier un signal à la fréquence de rotation du rotor due à l'effet du balourd (la deuxième courbe sur la figure). Si ce signal est soustrait du signal des capteurs, il reste la troisième courbe qui reflète les mouvements du rotor en dehors de celui imposé par le balourd. Le but est d'amener un signal de moyenne nulle et de faible amplitude sur le contrôleur.

6. Cette ancienneté est basée sur la date du premier article en notre possession parlant de filtre coupe fréquence en vue de supprimer le balourd.

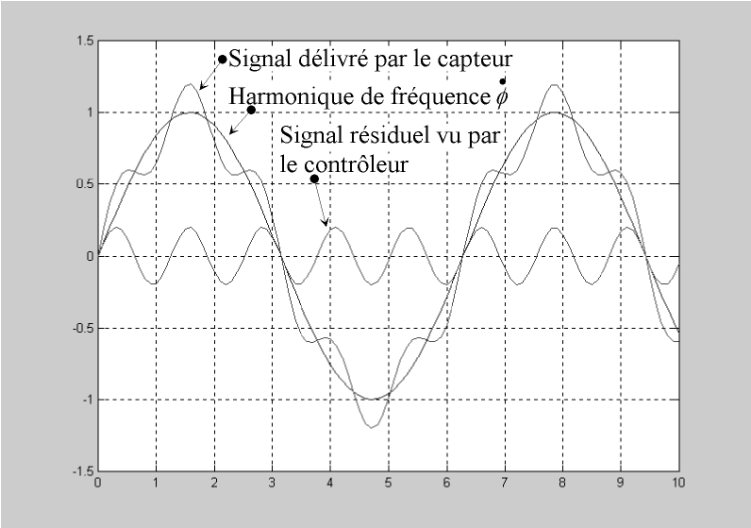


FIG. 3.3: *Type de signaux à l'entrée et à la sortie d'un filtre coupe fréquence de fréquence* $\dot{\phi}$

TAB. 3.1: *Nomenclature dans l'article (Herzog et al., 1996)*

s	Variable complexe de Laplace
j	Racine carrée de -1
$\mathbf{c}(t)$	Vecteur des signaux de compensation du balourd
$\mathbf{e}(t)$	Vecteur des signaux filtrés des capteurs
$\mathbf{y}(t)$	Vecteur des signaux des capteurs
Ω	Vitesse de rotation du rotor, fréquence centrale du filtre
$\mathbf{T}_R, \mathbf{T}_J$	Matrices des paramètres réels du filtre coupe fréquence
$\mathbf{I}$	Matrices Identité de dimension appropriée m
$\mathbf{N}(s)$	Matrices de transfert du filtre coupe fréquence
$\mathbf{N}_f$	Block de bouclage interne du filtre coupe fréquence
$\mathbf{P}(s)$	Matrices de transfert du système
$\mathbf{C}(s)$	Matrices de transfert du Contrôleur

Le balourd permet alors au rotor de tourner autour de l'axe d'inertie et le rotor ne cherche plus à s'écarter de cette trajectoire.

Le modèle du système noté $\mathbf{P}(s)$ est stabilisé par une boucle de retour $\mathbf{C}(s)$. Pour l'essentiel de cette méthode, il n'est pas nécessaire de connaître les expressions de ces deux blocs, mais seulement de savoir que la boucle est stable[7]. L'article montre que l'introduction du filtre de coupure ne déstabilise pas la boucle. Le système complet est montré sur la Figure 3.4.

7. Cela laisse penser que ce type de filtre d'élimination de balourd pourrait être utilisé avec des lois de commande non linéaires sans que cela ne pose de problème. Ce coté modulaire est une voie à explorer pour profiter du meilleur de l'élimination de balourd et de la commande non linéaire.

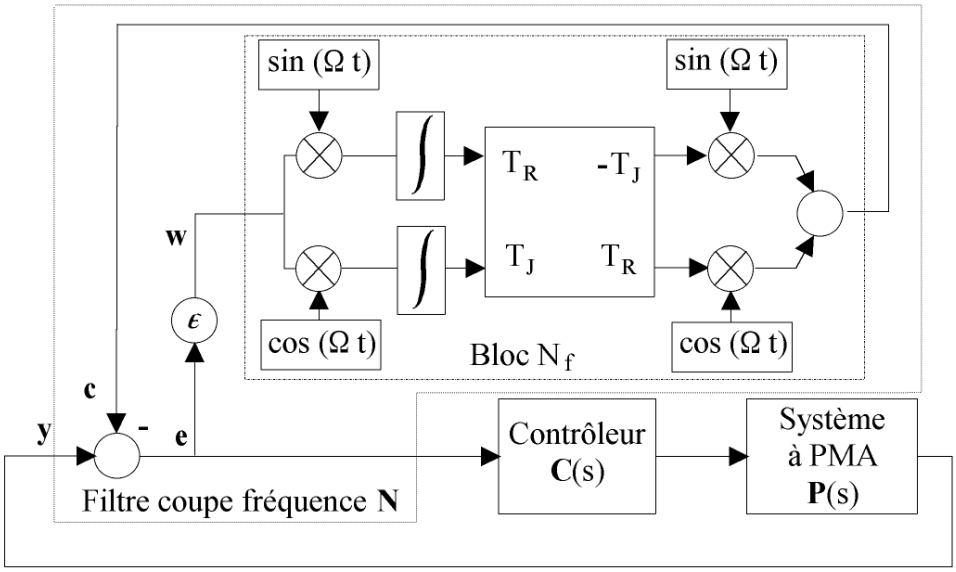


FIG. 3.4: *Bouclage de retour incluant un filtre coupe fréquence*

A la sortie du filtre, le signal a la forme suivante :

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\Omega\, t)\,\mathbf{I} & \cos(\Omega\, t)\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_R & -\mathbf{T}_J \\ \mathbf{T}_J & \mathbf{T}_R \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \sin(\Omega\, t)\,\mathbf{w}(t) \\ \cos(\Omega\, t)\,\mathbf{w}(t) \end{bmatrix} dt \tag{3.3}$$

Cette équation est multivariable, les symboles gras dénotant des vecteurs. On peut remarquer dans cette équation une forme très proche d'une matrice de rotation d'angle $\Omega\, t$, bien que cela n'en soit pas exactement une. La transformation de coordonnées est très souvent présente sous une forme ou une autre dans les commandes d'élimination de balourd.

En prenant la dérivée seconde de l'équation (3.3), il est possible de voir que $\mathbf{c}(t)$ est la solution de l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{\mathbf{c}} + \Omega^2\,\mathbf{c} = \mathbf{T}_R\,\dot{\mathbf{w}} - \Omega\,\mathbf{T}_J\,\mathbf{w} \tag{3.4}$$

$\mathbf{N}_f$ est donc l'implémentation de la solution de l'équation (3.4) et est équivalente d'un point de vue entrée-sortie à la fonction de transfert $\mathbf{N}_f(s)$ tel que $\mathbf{c}(s) = \mathbf{N}_f(s)\,\mathbf{w}(s)$ avec :

$$\mathbf{N}_f(s) = \frac{1}{s^2 + \Omega^2}\,(s\,\mathbf{T}_R - \Omega\,\mathbf{T}_J) \tag{3.5}$$

Ce système a des pôles imaginaires pures de fréquence Ω et un zéro fonction des paramètres du filtre. $\mathbf{N}_f(s)$ est bouclé par l'avant sur le reste du système. Il est donc possible d'écrire la boucle fermée contenant $\mathbf{N}_f(s)$. Cela donne :

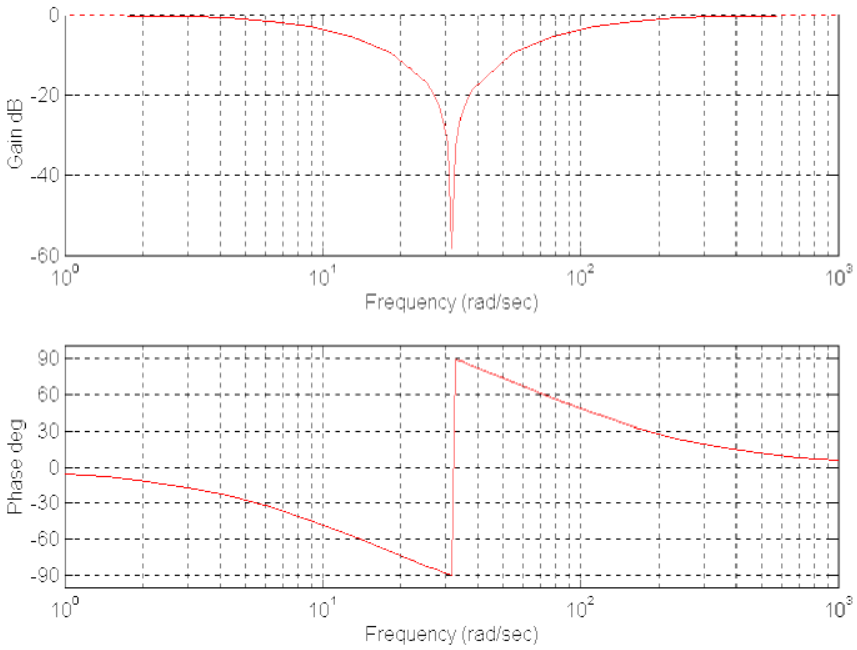


FIG. 3.5: *Diagramme de Bode d'un filtre coupe fréquence*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(s) &= \frac{1}{\mathbf{I} + \epsilon\, \mathbf{N}_f(s)} \\ &= \frac{s^2 + \Omega^2}{s^2\, \mathbf{I} + s\, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec :

$$\mathbf{A}_1 = \epsilon\, \mathbf{T}_R,\ \mathbf{A}_0 = \Omega^2\, \mathbf{I} - \epsilon\, \Omega\, \mathbf{T}_J \tag{3.7}$$

Il est clair que la fonction de transfert donnée dans l'équation (3.6) s'annule lorsque la variable $s = j\,\Omega$. Représenté sur un diagramme de Bode, cela implique une chute de gain centré autour de la valeur Ω. Dans ce filtre coupe fréquence, la largeur de la bande passante autour de la coupure est variable en fonction du paramètre ϵ.

L'avantage du filtre présenté dans cet article par rapport à des travaux antérieurs est la possibilité de régler librement les pôles grâce aux paramètres $\mathbf{T}_R$ et $\mathbf{T}_J$. En effet, en regardant ce qui se passe en simple entrée simple sortie (SISO) l'expression du filtre donne :

$$\mathbf{N}(s) = \frac{s^2 + \Omega^2}{(s - p)\,(s + \bar{p})} \tag{3.8}$$

p peut s'exprimer comme une fonction des zéros de la fréquence de coupure et de deux autres paramètres r et φ tel que

$$p = j\,\Omega + r\,e^{j\,\varphi} \tag{3.9}$$

Le filtre s'écrit alors :

$$\mathbf{N}(s) = \frac{s^2 + \Omega^2}{s^2 - 2\,r\,\cos(\varphi)\,s + \Omega^2 + 2\,r\,\sin(\varphi)\,\Omega + r^2} \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi &= arg\,(\mathbf{T}_R + j\,\mathbf{T}_J) + \pi \\ r &= \frac{1}{2}\,\epsilon\,|\mathbf{T}_R + j\,\mathbf{T}_J| \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'après les auteurs, l'implémentation du filtre sous la forme de la solution de l'équation différentielle plutôt que sous la forme de l'équation elle-même permet de robustifier son fonctionnement. Le réglage des gains du filtre représente une part non négligeable du travail afin de conserver les pôles de la boucle fermée dans le demi plan complexe gauche, mais n'entre pas dans le cadre de ce comparatif.

3.2.2.2 Observation du balourd

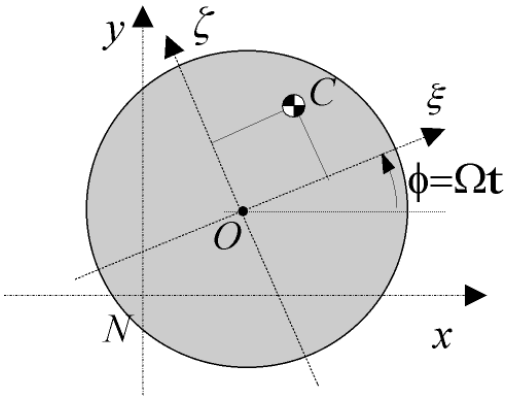


FIG. 3.6: *Système plan*

Le second exemple est lui aussi extrait d'un article (Lum et al., 1996). Dans cet article est rapporté un algorithme permettant de stabiliser le rotor autour de la position du centre de gravité pour un fonctionnement en mode 2[8]. La position du centre de gravité n'étant pas connue, un observateur est introduit pour trouver les coordonnées ξ et ζ du centre d'inertie dans un repère lié au rotor. La commande est donnée pour un système plan tel qu'il est décrit dans le chapitre précédent. Un schéma comportant les notations locales est donné sur la Figure 3.6 et la nomenclature locale est donnée dans la Table 3.2.

8. Quelques petits changements permettraient, si on le désire, d'obtenir des résultats identiques de stabilisation pour le centre géométrique.

TAB. 3.2: *Nomenclature dans l'article (Lum et al., 1996)*

s	Variable complexe de Laplace
F_x, F_x	Forces électromagnétiques sur les axes x et y
K_h, K_i	Paramètres du modèle linéaire de système
X, Y	Position du centre géométrique dans le repère du stator
x, y	Position du centre d'inertie dans le repère du stator
ξ, ζ	Position du centre d'inertie dans un repère fixé au rotor
i_x, i_y	Variation du courant dans les bobines des axes x et y
m	Masse du rotor
g	Accélération de la pesanteur terrestre
k_1, k_2, k_3, k_4	Coefficients du contrôleur

Le modèle choisi est un modèle linéaire avec courant de prémagnétisation. Les forces sont données par :

$$\begin{aligned} F_x\,(X, i_x) &= K_h\,X + K_i\,i_x \\ F_y\,(Y, i_y) &= K_h\,Y + K_i\,i_y \end{aligned} \tag{3.12}$$

En écrivant la seconde loi de Newton, l'équation dynamique du système est :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} = F_x\,(X, i_x) &= K_h\,\left(x - \xi\,\cos(\Omega\,t) + \zeta\,\sin(\Omega\,t)\right) + K_i\,i_x \\ m\,\ddot{y} = F_y\,(Y, i_y) &= K_h\,\left(y - \xi\,\sin(\Omega\,t) - \zeta\,\cos(\Omega\,t)\right) + K_i\,i_y - g \end{aligned} \tag{3.13}$$

Les positions X et Y délivrées par les capteurs sont remplacées dans les équations précédentes par les positions du centre d'inertie x et y par l'intermédiaire du changement de variables suivant [9]

$$\begin{aligned} X &= x - \xi\,\cos(\Omega\,t) + \zeta\,\sin(\Omega\,t) \\ Y &= y - \xi\,\sin(\Omega\,t) - \zeta\,\cos(\Omega\,t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

La Position du centre d'inertie est connue

Si la position et la vitesse du centre d'inertie sont connues, la lois de commande peut directement s'écrire :

$$\begin{aligned} i_x &= -\frac{K_h}{K_i}\,\left(x - \xi\,\cos(\Omega\,t) + \zeta\,\sin(\Omega\,t)\right) - \frac{m}{K_i}\,\left(k_1\,\dot{x} + k_2\,x\right) \\ i_y &= -\frac{K_h}{K_i}\,\left(y - \xi\,\sin(\Omega\,t) - \zeta\,\cos(\Omega\,t)\right) - \frac{m}{K_i}\,\left(k_1\,\dot{y} + k_2\,y\right) + \frac{m\,g}{K_i} \end{aligned} \tag{3.15}$$

9. Ce changement de variables fait encore intervenir une matrice de rotation fonction de la position $\Omega\,t$.

En substituant l'équation (3.15) dans l'équation (3.13) la dynamique du système résultant est donnée par :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k_1\,\dot{x} - k_2\,x \\ \ddot{y} &= -k_1\,\dot{y} - k_2\,y \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les coefficients de contrôle sont choisis pour que les équations du second ordre soient stables. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une commande en mode 2, il suffit d'injecter la valeur des courants dans l'expression de forces lorsque $x = 0$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$ pour trouver que $F_x \equiv 0$ et $F_y \equiv m\,g$. Lorsque le système est stabilisé autour du centre d'inertie, aucune force n'est transmise par les actionneurs sauf la compensation de la pesanteur.

La Position du centre d'inertie n'est pas connue

La position du centre d'inertie n'est bien entendue pas connue et les deux paramètres ζ et ξ vont être incorporés dans les équations dynamiques d'adaptation suivantes (le chapeau signifie que la variable est une estimée) :

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\xi}} &= -k_3\,\dot{\hat{\xi}} - k_4\,\left(\hat{x}\,\cos(\Omega\,t) + \hat{y}\,\sin(\Omega\,t)\right) \\ \ddot{\hat{\zeta}} &= -k_3\,\dot{\hat{\zeta}} - k_5\,\left(-\hat{x}\,\sin(\Omega\,t) + \hat{y}\,\cos(\Omega\,t)\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont définies par (cf equation 3.14) :

$$\begin{aligned} \hat{x} &\triangleq X + \hat{\xi}\,\cos(\Omega\,t) + \hat{\zeta}\,\sin(\Omega\,t) \\ \hat{y} &\triangleq Y + \hat{\xi}\,\sin(\Omega\,t) + \hat{\zeta}\,\cos(\Omega\,t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Par dérivation sont obtenus les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &\triangleq \dot{X} - \hat{\xi}\,\Omega\,\sin(\Omega\,t) - \hat{\zeta}\,\Omega\,\cos(\Omega\,t) \\ \dot{\hat{y}} &\triangleq \dot{Y} + \hat{\xi}\,\Omega\,\cos(\Omega\,t) - \hat{\zeta}\,\Omega\,\sin(\Omega\,t) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Par analogie avec la commande où la position du centre d'inertie est connue, les deux courants sont choisis comme :

$$\begin{aligned} i_x &= -\frac{K_h}{K_i}\,X - \frac{m}{K_i}\,\left(k_1\,\dot{\hat{x}} + k_2\,\hat{x}\right) \\ i_y &= -\frac{K_h}{K_i}\,Y - \frac{m}{K_i}\,\left(k_1\,\dot{\hat{y}} + k_2\,\hat{y}\right) + \frac{m\,g}{K_i} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Comme précédemment, l'équation (3.20) peut être injectée dans l'équation 3.13 pour obtenir la dynamique bouclée, et en utilisant les équations d'adaptation ainsi que les définitions suivantes $\tilde{\zeta} \triangleq \hat{\zeta} - \zeta$ et $\tilde{\xi} \triangleq \hat{\xi} - \xi$, le résultat est le suivant :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -k_1\,\dot{x} - k_2\,x + k_1\,\Omega\left(\tilde{\xi}\,\sin(\Omega\,t) + \tilde{\zeta}\,\cos(\Omega\,t)\right) - k_2\,\left(\tilde{\xi}\,\cos(\Omega\,t) - \tilde{\zeta}\,\sin(\Omega\,t)\right)\\
\ddot{y} &= -k_1\,\dot{y} - k_2\,y + k_1\,\Omega\left(\tilde{\xi}\,\cos(\Omega\,t) - \tilde{\zeta}\,\sin(\Omega\,t)\right) - k_2\,\left(\tilde{\xi}\,\sin(\Omega\,t) + \tilde{\zeta}\,\cos(\Omega\,t)\right)\\
\ddot{\tilde{\xi}} &= -k_3\,\dot{\tilde{\xi}} - k_4\,\tilde{\xi} - k_4\,\left(x\,\cos(\Omega\,t) + y\,\sin(\Omega\,t)\right)\\
\ddot{\tilde{\zeta}} &= -k_3\,\dot{\tilde{\zeta}} - k_5\,\tilde{\zeta} - k_5\,\left(-x\,\sin(\Omega\,t) + y\,\cos(\Omega\,t)\right)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Les deux premières équations correspondent aux équations (3.16) perturbées par des valeurs qui doivent tendre vers zéro. Les deux autres équations correspondent au comportement d'adaptation des valeurs de ξ et ζ qui interviennent dans la commande. Lorsque $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\zeta}$ tendent vers zéro, alors $\hat{\xi}$ et $\hat{\zeta}$ tendent vers les valeurs réelles ξ et ζ.
L'équation (3.21) peut être représentée par un système d'état linéaire :

$$
\dot{Z} = A\,(\Omega, t)\;Z \tag{3.22}
$$

où la matrice $A\,(\Omega, t)$ possède des termes périodiques dépendants du temps. Le vecteur d'état est donné par $Z = [x, y, \dot{x}, \dot{y}, \tilde{\xi}, \tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\xi}}, \dot{\tilde{\zeta}}]^T$. La stabilité d'une telle équation peut être montrée grâce au théorème suivant trouvé dans (Hale, 1980).

Théorème 1 (Floquet)
Soit un système linéaire d'ordre n décrit par $\dot{Z} = A\,(t)\;Z$, avec $A\,(t+T) = A\,(t)$ pour tout t et avec $T > 0$. Alors toutes les matrices fondamentales solutions $\Phi(t)$ de ce système ont la forme $\Phi(t) = P(t)\,e^{\tilde{A}t}$, où $P(t)$ est une matrice périodique de dimension $n \times n$ et de période T, et $\tilde{A}$ est une matrice constante de dimension $n \times n$. De plus, $P(t)$ est non singulière pour tout t et la transformation $z = P(t)\,Z$ transforme le système original en un système linéaire invariant dans le temps $\dot{z} = \tilde{A}\,z$.
L'origine du système $\dot{Z} = A\,(t)\;Z$ est stable si et seulement si $\tilde{A}$ est Hurwitz.

En prenant le changement de variables $z = P\,(\Omega, t)\;Z$ avec [10]

$$
P\,(\Omega, t) = \begin{bmatrix}
\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & & & & & & \\
-\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & & & & & & \\
 & & \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & & & & \\
 & & -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\tag{3.23}
$$

le système

10. La matrice de rotation d'angle Ωt est clairement représentée deux fois dans le changement de variables $P\,(\Omega, t)$.

$$\dot{z} = \tilde{A}(\Omega)\, z, \quad z \in \mathbb{R}^8 \tag{3.24}$$

est obtenu. $P(\Omega, t)$ et $\tilde{A}(\Omega)$ satisfont les conditions du théorème. La stabilité de l'algorithme de suppression de balourd doit alors passer par l'étude de la stabilité de la matrice $\tilde{A}(\Omega)$.

$$\tilde{A}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_1 & \Omega & -k_2 & -k_1\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -\Omega & -k_1 & -k_1\Omega & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_4 & 0 & 0 & 0 & -k_4 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

La dépendance de la matrice $\tilde{A}(\Omega)$ par rapport à la vitesse variable Ω rend l'étude de la stabilité relativement complexe[11]. Cette méthode, telle qu'elle est appliquée à une broche à la fin de l'article, ne permet pas de tenir compte des couplages gyroscopiques du rotor. De plus la démonstration de stabilité reste abordable du fait que le modèle du système est linéaire, mais cette méthode serait plus difficile à mettre en œuvre en non linéaire.

3.2.3 Vers une solution alternative

Dans les deux exemples donnés précédemment, très différents de par les méthodes mises en œuvre, le réglage des paramètres présente une part importante du travail afin d'assurer la stabilité du système bouclé dans toute les configurations de fonctionnement, en particulier lors de la variation de vitesse. De plus, ces deux commandes ne permettent au système que de fonctionner en mode 2 (élimination de force transmise). C'est le mode actuellement le plus utilisé pour les systèmes tournant à haute vitesse. Pourtant, le fait que la commande puisse indifféremment utiliser les deux modes peut se révéler intéressant.

Nous avons apporté une solution à ce problème en développant une nouvelle technique de commande dans le repère tournant du rotor. Cette technique répond aux critères suivants :

- permettre une implémentation pour un système à PMAs fonctionnant en linéaire aussi bien qu'en non-linéaire ;
- permettre au système de fonctionner en mode 1 et en mode 2 ;
- faciliter les réglages de la commande en rendant indépendants les coefficients du contrôleur de la vitesse $\dot{\phi}$.

11. La démonstration de stabilité ne sera pas rapportée ici car elle n'apporte rien en terme de comparaison de méthodes d'élimination de balourd.

Cette commande dans le repère tournant du rotor se comporte comme un bloc que l'on peut ajouter à un schéma bloc du système déjà stabilisé par une loi de commande linéaire ou non (voir Figure 3.7).

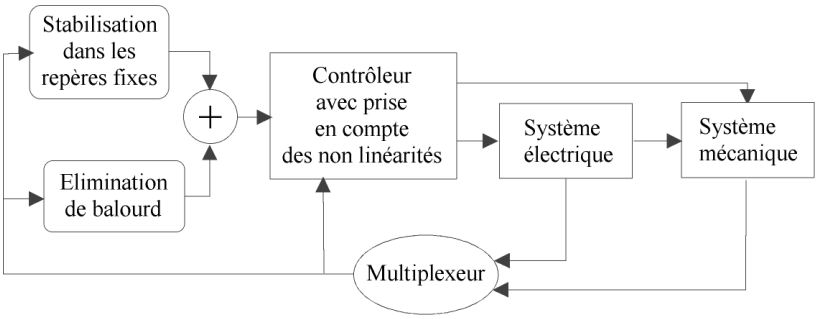


FIG. 3.7: *Schéma bloc général comportant le bloc d'élimination de balourd*

Avant de détailler cette stratégie de commande, nous présentons d'abord une technique basée sur une estimation de la perturbation que nous avons utilisée pour vérifier la possibilité de suppression de balourd en non linéaire connaissant une estimée de sa phase et de sa norme.

3.2.3.1 Premier pas : un observateur linéaire

Cette sous-section présente des travaux préliminaires sur l'élimination active du balourd en non linéaire présentés dans (de Miras and Charara, 1996). Cette démarche avait pour but de vérifier si il était possible d'éliminer la perturbation au niveau de l'accélération du rotor.

Soit un modèle non linéaire simplifié du système pour un seul axe de contrôle :

$$m\,\ddot{y} = m\,\delta y\,\cos(\phi)\left(\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{yp}^2}{(e_0 - y)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{ym}^2}{(e_0 + y)^2} \tag{3.26}$$

Cette équation peut être stabilisée par un bouclage où les entrées du système sont considérées ici comme étant les courants i_{yp} et i_{ym}. Imaginons qu'il soit possible de mettre en œuvre une commande qui impose, à l'axe non perturbé, la dynamique suivante[12] :

$$\begin{aligned} &\ddot{y} = -\alpha_1\,\dot{y} - \alpha_2\,y \\ &\text{avec } \alpha_1 = 2\,\zeta\,\omega_0 \text{ et } \alpha_2 = \omega_0^2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

où α_1 et α_2 sont des coefficients de réglage de la dynamique, ζ est le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation caractéristique de la boucle fermée.
Sachant que l'axe est perturbé, l'accélération après bouclage devient :

12. cette commande va être décrite plus loin et peut être considérée comme une linéarisation entrée-état ou entrée-sortie.

$$\ddot{y} = -\alpha_1 \dot{y} - \alpha_2 y + m\,\delta y \cos(\phi) \left(\dot{\phi}\right)^2 \tag{3.28}$$

Pour remédier à ce problème, la dynamique désirée $\overline{C}$ doit s'écrire

$$\overline{C} = -\alpha_1 \dot{\hat{y}} - \alpha_2 y - \hat{w} \tag{3.29}$$

avec $\hat{w}$ une estimation de la perturbation devant éliminer l'effet de cette dernière dans $\ddot{y}$. L'estimateur du balourd peut aussi donner une estimée de $\dot{y}$, notée $\dot{\hat{y}}$, cette valeur n'étant pas mesurée. Cet estimateur d'état linéaire prend la forme suivante :

$$\dot{\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \ddot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \\ \ddot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} \\ \hat{w} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E_K + L \left(\Gamma_K - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \hat{\xi} \right) \tag{3.30}$$

L'état de l'observateur est $\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \dot{\hat{x}} & \hat{w} & \dot{\hat{w}} \end{bmatrix}^T$. $\hat{w}$ et $\dot{\hat{w}}$ représentent les deux états d'un oscillateur, fonction de transfert du second ordre dont les pôles imaginaires purs sont placés en $j\dot{\phi}$ et $-j\dot{\phi}$. Cette oscillateur simule la fonction sinusoïdale du balourd.

E_K est l'entrée de l'observateur. Par analogie avec l'équation (3.26), sa valeur est donnée par

$$E_K = \frac{1}{2} \frac{\lambda\, i_{dyp}^2}{(e_0 - y)^2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda\, i_{dym}^2}{(e_0 + y)^2} \tag{3.31}$$

où i_{dyp} et i_{dym} sont les courants désirés construits par la commande.

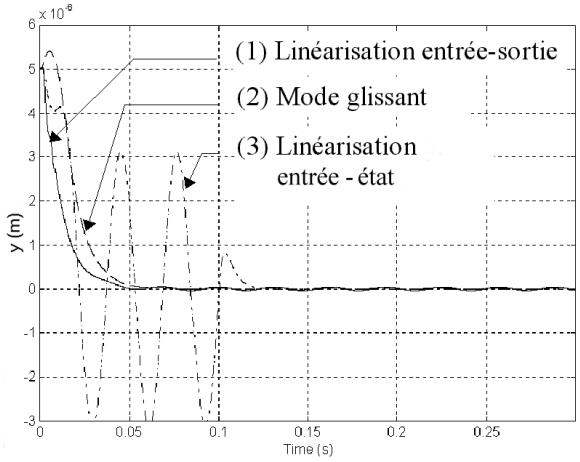
Le terme $L \left(\Gamma_K - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi} \right)$ représente la différence entre la valeur des sorties réelles et celles de l'observateur, multipliée par le vecteur gain L qui permet de régler les valeurs propres de la matrice A donnée par :

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\,\tilde{\xi} \Longleftrightarrow \dot{\tilde{\xi}} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dot{\phi}^2 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \\ \tilde{w} \\ \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

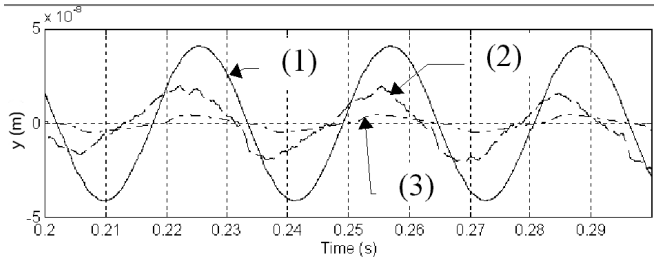
avec $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$, afin que $\tilde{\xi}$ converge vers zéro. Cela assure la convergence de $\hat{w}$ vers la valeur $\delta y \cos(\phi) \left(\dot{\phi}\right)^2$.

Des simulations comparatives entre différentes lois de commande ont été faites pour vérifier le bon fonctionnement de cet observateur. Les trois commandes sont les suivantes :

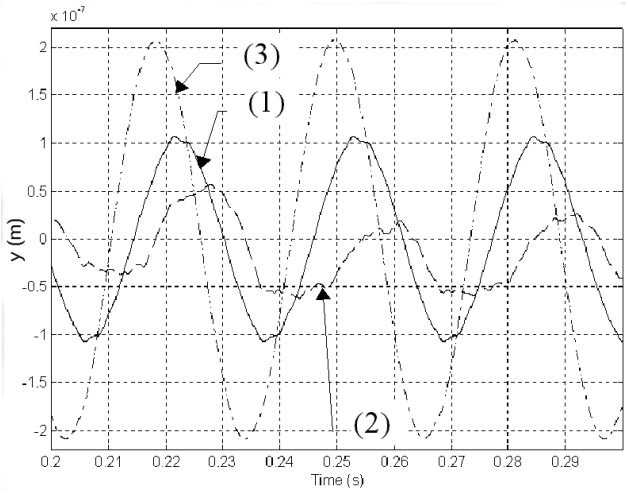
– la linéarisation entrée-sortie ;



(a) Pas d'erreur de modélisation



(b) Pas d'erreur de modélisation : régime permanent



(c) Avec erreurs de modélisation : régime permanent

FIG. 3.8: *Effet d'un observateur de balourd; comparaison avec deux autres lois de commande*

– le mode glissant non-linéaire ;

– une commande en courant par linéarisation entrée-état avec observateur.

Les courbes donnant la position y pour chaque contrôleur sont montrées sur la Figure 3.8. La Figure 8(a) montre le rotor partant d'une position de repos à 5.10^{-6} mètre pour aller se stabiliser autour de zéro. Durant le premier dixième de seconde, l'observateur de balourd est désactivé dans la linéarisation entrée-état. Il est visible qu'alors la commande est très sensible à l'effet de la perturbation. A partir de 0.1 seconde, l'observateur agit rapidement et permet à la position du rotor de se rapprocher de zéro. On peut voir sur la Figure 8(b) que la commande (3) est plus efficace que les deux autres.

Sur les deux premières figures, la simulation a été faite en supposant parfaitement connu la va-

leur des paramètres du système. Pour vérifier la robustesse des lois de commande vis à vis d'erreurs de modélisation du système ou de mesure des paramètres, une autre série de tests a été effectuée en multipliant par deux la masse du rotor (Figure 8(c)). On constate que l'observateur est moins performant et n'élimine pas totalement le balourd.

Après analyse de l'efficacité de cet observateur, les remarques suivantes peuvent être faites :

- si la valeur du balourd est connue pour un axe donné, elle peut être utilisée dans l'équation d'accélération mécanique correspondante pour contrer l'effet de la perturbation ;
- le réglage de la matrice de gain L dépend de la valeur de $\dot{\phi}$;
- l'observation du balourd se dégrade si il y a des erreurs de modélisation.

Ces différentes remarques nous ont conduit à détourner notre attention de cette méthode, tout en gardant à l'esprit qu'une estimation de la perturbation injectée au niveau de l'accélération mécanique produit l'effet voulu.

3.2.3.2 Des PID fixes et tournants

L'étude du balourd, dans le chapitre précédent, conduit à considérer que le terme principal de cette perturbation, dans un plan de contrôle, est un vecteur de norme proportionnelle à $\dot{\phi}^2$ et tournant à la vitesse $\dot{\phi}$. En considérant un repère $\mathcal{C}_a$ tournant à la vitesse $\dot{\phi}$ constante, le balourd est alors un vecteur de norme et de phase constante dans le repère $\mathcal{C}_a$. Un intégrateur placé dans la commande, devant une perturbation constante à l'entrée d'un système, supprime l'effet de la perturbation. D'où notre démarche qui consiste à éliminer le balourd en utilisant un PID "tournant" dans le repère $\mathcal{C}_a$. L'implémentation de cette commande dans le repère fixe (puisque les actionneurs sont fixes) va nécessiter un changement de repère.

Commande dans le repère tournant

Connaissant la dynamique simplifiée du système dans un plan de contrôle, donnée par :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \sin(\phi - \gamma)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 + c_y \\ \ddot{z} &= -\cos(\phi - \gamma)\, \delta z\, \dot{\phi}^2 + c_z \end{aligned} \tag{3.33}$$

il est possible de trouver les équations du système dans le repère tournant $\mathcal{C}_a$. c_y et c_z représentent les coordonnées du vecteur commande $\overrightarrow{C}$ selon les axes y et z. Ce changement de repère s'effectue en utilisant la matrice de rotation :

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

qui est telle que :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Connaissant la relation qui lie la position du rotor dans le repère fixe à la position du rotor dans le repère mobile, il est possible de trouver une relation du même ordre entre les vitesses et les accélérations. Pour les vitesses, cette relation est donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & -\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \mathcal{R} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \dot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pour les accélérations, la dérivée de l'équation (3.36) donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} - \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \\ &\quad + \dot{\phi} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\,\dot{z}_a \\ 2\,\dot{y}_a \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_a \\ y_a \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} - \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\,\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \ddot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

L'équation (3.37) peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} + \ddot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\,\dot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Introduire l'équation (3.33) dans l'équation (3.37) permet de trouver la dynamique du rotor dans le repère tournant[13] :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi-\gamma)\,\delta z\,\dot{\phi}^2 + c_y \\ -\cos(\phi-\gamma)\,\delta z\,\dot{\phi}^2 + c_z \end{bmatrix} &= \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} - \dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\,\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \ddot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \right) \\ \implies \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} &= \mathcal{R}^T \begin{bmatrix} \sin(\phi-\gamma)\,\delta z\,\dot{\phi}^2 \\ -\cos(\phi-\gamma)\,\delta z\,\dot{\phi}^2 \end{bmatrix} + \mathcal{R}^T \begin{bmatrix} c_y \\ c_z \end{bmatrix} + \left(\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\mathcal{J} \right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} - 2\,\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} \\ \implies \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} &= \delta z\,\dot{\phi}^2 \begin{bmatrix} -\sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{a\,y} \\ c_{a\,z} \end{bmatrix} + \left(\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\mathcal{J} \right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} - 2\,\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.40}$$

13. L'équation qui suit contient l'abus de notation suivant $\left(\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\mathcal{J} \right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix}$ ($\dot{\phi}^2$ et $-\ddot{\phi}\mathcal{J}$ n'ont pas la même dimension) adopté afin de réduire la taille de l'équation.

Ecrivons maintenant c_{ay} et c_{az} pour que la boucle fermée soit stable et que le terme constant en $\dot{\phi}^2$ soit éliminé. Les valeurs de c_{ay} et c_{az} sont [14] :

$$\begin{bmatrix} c_{ay} \\ c_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{a0} \int (y_{ad} - y_a)\, dt + k_{a1} (y_{ad} - y_a) + k_{a2} (\dot{y}_{ad} - \dot{y}_a) \\ k_{a0} \int (z_{ad} - z_a)\, dt + k_{a1} (z_{ad} - z_a) + k_{a2} (\dot{z}_{ad} - \dot{z}_a) \end{bmatrix} - \left(\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\mathcal{J}\right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\,\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

et donne la dynamique suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{a0} \int \tilde{y}_a\, dt + k_{a1} \tilde{y}_a + k_{a2} \dot{\tilde{y}}_a \\ k_{a0} \int \tilde{z}_a\, dt + k_{a1} \tilde{z}_a + k_{a2} \dot{\tilde{z}}_a \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

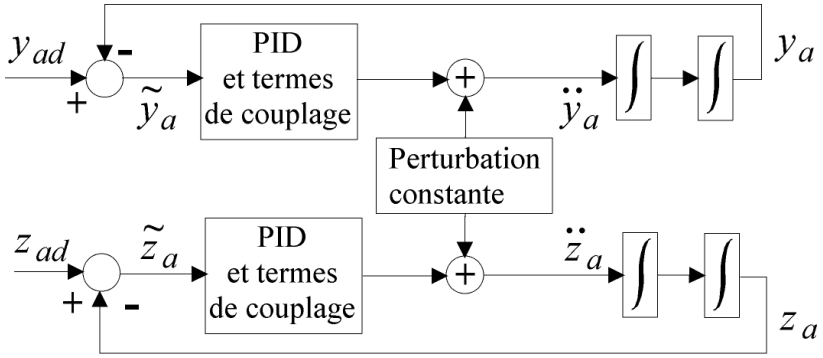


FIG. 3.9: *Système bouclé dans le repère tournant*

avec $\tilde{y}_a = y_{ad} - y_a$.

La partie droite de l'équation (3.42) représente deux contrôleurs Proportionnel Intégrale Dérivée (PID). Le schéma bloc équivalent est représenté sur la Figure 3.9. En utilisant la transformée de Laplace, les deux fonctions de transfert suivantes sont équivalentes à l'équation (3.42) (pour des conditions initiales nulles) :

$$\begin{aligned} \frac{y_a}{y_{ad}} &= \frac{k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}}{s^3 + k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}} \\ \frac{z_a}{z_{ad}} &= \frac{k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}}{s^3 + k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

avec s la variable complexe de Laplace. Le choix des coefficients k_{a0}, k_{a1} et k_{a2} permet de régler la dynamique de convergence de y_a et z_a. Cette convergence de y_a et z_a implique celle de y et z.

Les matrices de transfert entre les coordonnées constantes F_{Pay} et F_{Paz} de la perturbation dans le repère tournant, et les sorties du système, sont :

14. On supposera dans cette section, qu'il existe une méthode pour imposer cette valeur de la commande par l'intermédiaire des courants ou des tensions appliquées aux actionneurs.

$$\begin{aligned}\frac{y_a}{F_{Pa\,y}} &= \frac{s}{s^3 + k_{a2}\,s^2 + k_{a1}\,s + k_{a0}} \\ \frac{z_a}{F_{Pa\,z}} &= \frac{s}{s^3 + k_{a2}\,s^2 + k_{a1}\,s + k_{a0}}\end{aligned} \tag{3.44}$$

En faisant tendre s vers zéro, les matrices de transfert (3.44) tendent aussi vers zéro. Cela prouve l'élimination de la perturbation constante par l'effet Intégrateur.

Les commandes $c_{a\,y}$ et $c_{a\,z}$ ne peuvent être appliquées directement, les actionneurs agissant dans le repère fixe. La relation :

$$\begin{bmatrix} c_{a\,y} \\ c_{a\,z} \end{bmatrix} = \mathcal{R}^T \begin{bmatrix} c_y \\ c_z \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

permet de retrouver la commande réelle à appliquer au système :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} c_y \\ c_z \end{bmatrix} =& \mathcal{R} \begin{bmatrix} k_{a0} \int (y_{ad} - y_a)\,dt + k_{a1}\,(y_{ad} - y_a) + k_{a2}\,(\dot{y}_{ad} - \dot{y}_a) \\ k_{a0} \int (z_{ad} - z_a)\,dt + k_{a1}\,(z_{ad} - z_a) + k_{a2}\,(\dot{z}_{ad} - \dot{z}_a) \end{bmatrix} \\ & - \dot{\phi}^2 \mathcal{R} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \mathcal{R}\,\mathcal{J} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\,\dot{\phi} \mathcal{R}\,\mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.46}$$

Le raisonnement décrit ici pour obtenir cette commande est légèrement différent de celui présenté dans (de Miras and Charara, 1998a). Dans cet article, la commande est composée de PID directement dans les coordonnées tournantes. Cette commande, égale à l'accélération du rotor, est considérée comme une accélération désirée pour les coordonnées tournantes. En utilisant l'équation (3.37) et en remplaçant $\ddot{y}_a$ et $\ddot{z}_a$ par leur valeurs respectives de PID, on obtient des accélérations désirées $\ddot{y}_d$ et $\ddot{y}_d$, dans le repère fixe, dont les expressions sont identiques à l'équation de commande (3.41).

Dans la suite de ce chapitre, les commandes c seront considérées comme équivalentes à des accélérations désirées pour le rotor.

Commande dans le repère fixe

La commande présentée précédemment, pour éliminer le balourd dans le repère tournant, n'est pas suffisante pour éliminer toutes les perturbations qui agissent sur le système. Par exemple, la gravité est un vecteur constant dans le repère fixe. Ce vecteur, transposé dans le repère tournant, devient alors un vecteur tournant à la vitesse $-\dot{\phi}$. Cette perturbation sinusoïdale ne pourra être éliminée par le PID construit dans le repère tournant. Pour éliminer ce type de perturbations, une construction (dans le repère fixe) comme celle présentée sur la Figure 3.10 est nécessaire.
Connaissant les positions y et z, il est possible de construire les deux PID suivants :

$$\begin{bmatrix} c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \int (y_d - y)\,dt + k_1\,(y_d - y) + k_2\,(\dot{y}_d - \dot{y}) \\ k_0 \int (z_d - z)\,dt + k_1\,(z_d - z) + k_2\,(\dot{z}_d - \dot{z}) \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

où y_d et z_d sont les positions désirées pour le rotor. La dynamique du système est alors donnée par :

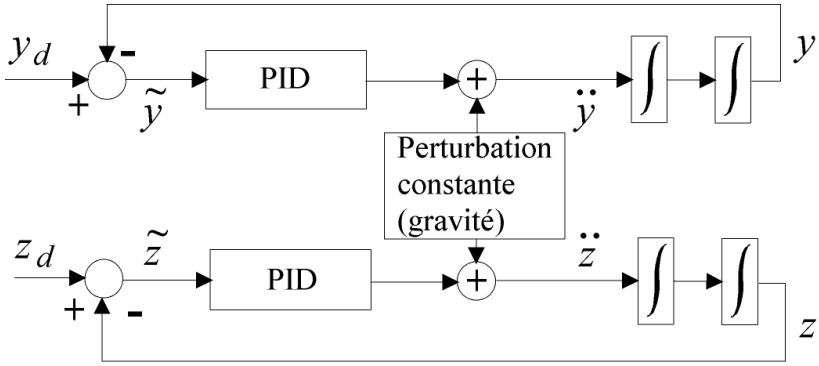


FIG. 3.10: *Système bouclé dans le repère fixe*

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \int \tilde{y}\, dt + k_1 \tilde{y} + k_2 \dot{\tilde{y}} \\ k_0 \int \tilde{z}\, dt + k_1 \tilde{z} + k_2 \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

avec $\tilde{y} = y_d - y$. Les coefficients k_0, k_1 et k_2 permettent de régler les pôles des fonctions de transfert :

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_d} &= \frac{k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0}{s^3 + k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0} \\ \frac{z}{z_d} &= \frac{k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0}{s^3 + k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0} \end{aligned} \tag{3.49}$$

déduites de l'équation (3.48). Les fonctions de transfert :

$$\begin{aligned} \frac{y}{P_y} &= \frac{s}{s^3 + k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0} \\ \frac{z}{P_z} &= \frac{s}{s^3 + k_2\, s^2 + k_1\, s + k_0} \end{aligned} \tag{3.50}$$

entre les perturbations constantes P_y et P_z et les positions, montrent que l'effet de la perturbation (gravité) peut être supprimé.

Commande complète

Les perturbations constantes, dans les repères fixes et tournants, s'appliquent en même temps sur le rotor. De même, les deux commandes définies ci-dessus vont être ajoutées pour associer leurs caractéristiques de suppression de perturbation. Ce couplage de commandes se fait selon la Figure 3.11.

L'équation complète, représentée sur la Figure 3.12, est donc :

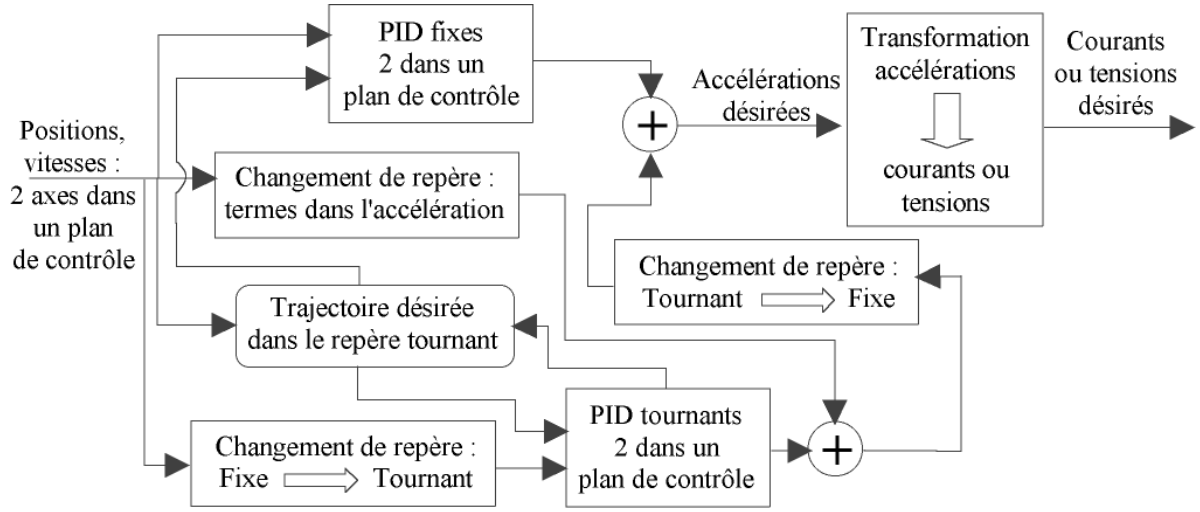


FIG. 3.11: *Schéma de principe de la commande complète associant repère fixe et repère tournant*

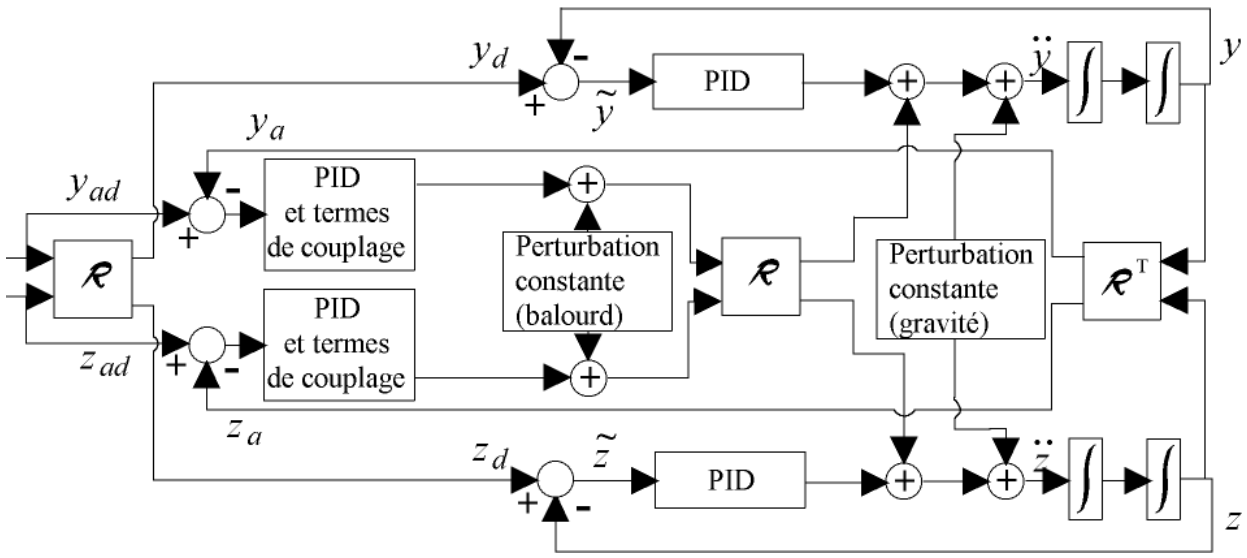


FIG. 3.12: *Commande complète associant repère fixe et repère tournant*

$$\begin{bmatrix} c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \int (y_d - y)\, dt + k_1 (y_d - y) + k_2 (\dot{y}_d - \dot{y}) \\ k_0 \int (z_d - z)\, dt + k_1 (z_d - z) + k_2 (\dot{z}_d - \dot{z}) \end{bmatrix} + \mathcal{R} \begin{bmatrix} k_{a0} \int (y_{ad} - y_a)\, dt + k_{a1} (y_{ad} - y_a) + k_{a2} (\dot{y}_{ad} - \dot{y}_a) \\ k_{a0} \int (z_{ad} - z_a)\, dt + k_{a1} (z_{ad} - z_a) + k_{a2} (\dot{z}_{ad} - \dot{z}_a) \end{bmatrix} - \dot{\phi}^2 \mathcal{R} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \mathcal{R} \mathcal{J} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} + 2\, \dot{\phi} \mathcal{R} \mathcal{J} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Cette équation ne sera pas utilisée en dessous d'une certaine vitesse $\dot{\phi}$ pour éviter que les Intégrateurs de la commande tournante ne suppriment une partie des perturbations constantes

dans le repère fixe[15].

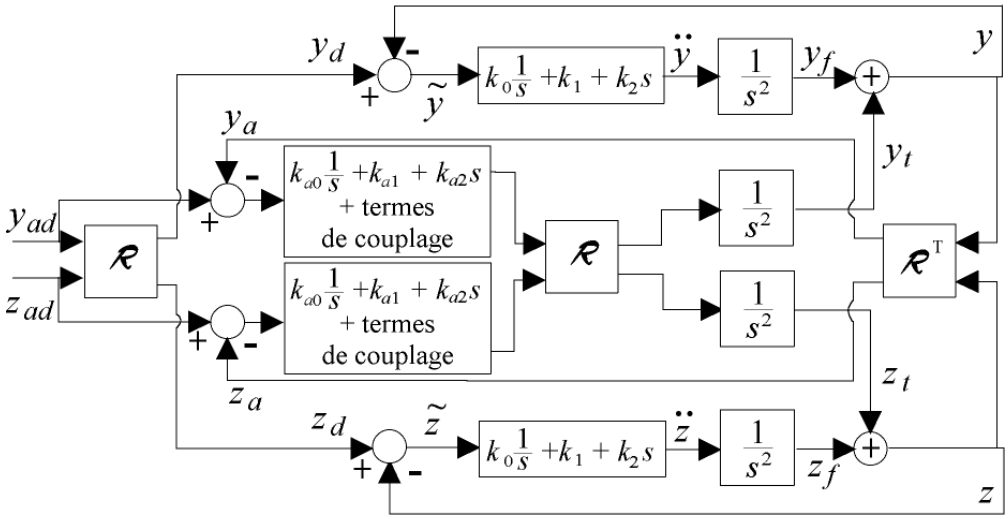


FIG. 3.13: *Premier schéma équivalent à la Figure 3.12*

Preuve de stabilité

Pour étudier la stabilité de la boucle fermée représentée sur la Figure 3.12, on va procéder en commençant par transformer le schéma de départ en schémas équivalents.

La première transformation utilise la linéarité de l'intégrale telle que

$$\int y_1(t) + y_2(t)\, dt = \int y_1(t)\, dt + \int y_2(t)\, dt \tag{3.52}$$

pour passer la double intégration des accélérations avant l'addition des deux lois de commande.

La commutativité et l'associativité de l'addition permet une deuxième modification. A partir de la Figure 3.13, on effectue les modifications suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_d \\ z_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_f + y_t \\ z_f + z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_d - y_t \\ z_d - z_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_f \\ z_f \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_{ad} \\ z_{ad} \end{bmatrix} - \mathcal{R}^T \begin{bmatrix} y_f + y_t \\ z_f + z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{ad} - y_{af} \\ z_{ad} - z_{af} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{at} \\ z_{at} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Cette transformation permet de trouver le schéma bloc représenté sur la Figure 3.14.

En réorganisant les blocs, en utilisant la propriété de distributivité de la matrice de rotation $\mathcal{R}$ par rapport à l'addition et le fait que $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathcal{I}$, on obtient la Figure 3.15.

15. Le cas typique se présente lorsque la commande soulève la broche de sa position de repos sur ses roulements à bille vers sa position nominale. L'effet des deux contrôleurs se superposent et leurs Intégrateurs se chargent chacun d'éliminer une partie de la pesanteur. Cela peut poser un problème lors de la mise en rotation du rotor car la partie

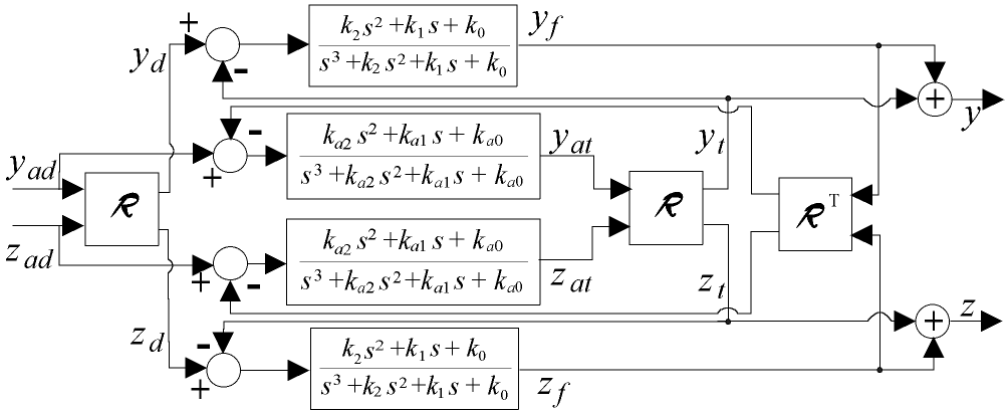


FIG. 3.14: *Deuxième schéma équivalent à la Figure 3.12*

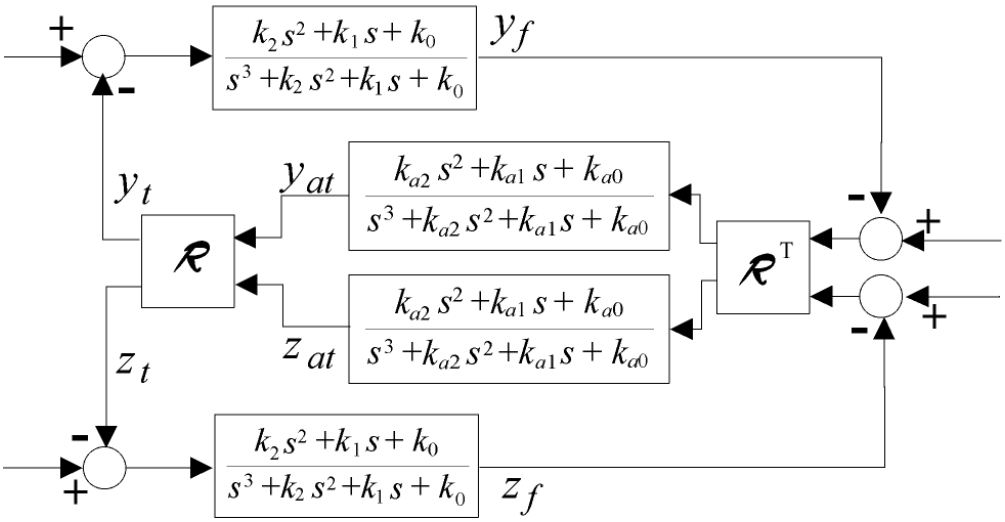


FIG. 3.15: *Troisième schéma équivalent à la Figure 3.12*

Le schéma de la Figure 3.15 peut enfin se compacter sous une forme multidimensionnelle décrite sur la Figure 3.16.

La bornitude des signaux peut se démontrer en utilisant le théorème du petit gain et une proposition permettant de passer du premier schéma de la Figure 3.16 au troisième schéma.

Proposition 1

Soit un opérateur Φ en boucle fermée avec un opérateur Δ de norme connue. Si l'opérateur Φ est noté :

$$\phi = \mathcal{R}^{-1} \Phi' \mathcal{R} \tag{3.54}$$

de la perturbation éliminée par les Intégrateurs tournants va se mettre à tourner créant une perturbation qui n'a pas lieu d'être.

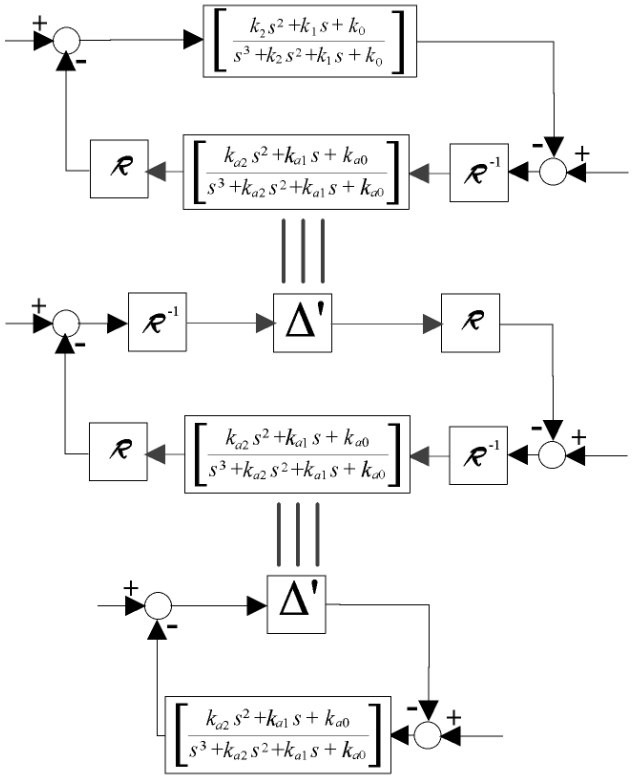


FIG. 3.16: *Simplification du troisième schéma équivalent*

avec $\mathcal{R}$ une transformation inversible de norme connue (changement de repère) qui ne dépend pas des variables intervenant dans Φ', et Φ' un opérateur connu dont on peut modifier la norme. Alors en notant :

$$\Delta = \mathcal{R}^{-1}\,\Delta'\,\mathcal{R} \tag{3.55}$$

et en utilisant le fait que $\mathcal{R}^{-1}\,\mathcal{R} = \mathcal{I}$, alors la stabilité de l'opérateur Φ en boucle fermée avec l'opérateur Δ est équivalente à celle de l'opérateur Φ' en boucle fermée avec l'opérateur Δ'.

La matrice de transfert composée des PID fixes peut se noter :

$$\frac{k_2\,s^2 + k_1\,s + k_0}{s^3 + k_2\,s^2 + k_1\,s + k_0} = \Delta \tag{3.56}$$

La norme de l'opérateur Δ est connu et peut être imposée puisque les coefficients k_0, k_1, et k_2 sont choisis. Cet opérateur peut s'écrire :

$$\Delta = \mathcal{R}^{-1}\,\Delta'\,\mathcal{R} = \mathcal{R}^{T}\,\Delta'\,\mathcal{R} \tag{3.57}$$

L'expression de l'opérateur Δ' n'est pas simple à donner à priori, mais en fait seule compte sa norme donnée par :

$$\|\Delta\| = \left\|\mathcal{R}^{-1}\right\| \|\Delta'\| \|\mathcal{R}\| \Longrightarrow \|\Delta'\| = \frac{\|\Delta\|}{\|R^{-1}\| \|\mathcal{R}\|} \tag{3.58}$$

Or une rotation ne change pas la norme du vecteur auquel elle est appliquée. Il est donc possible d'écrire $\|R^{-1}\| = 1$ et $\|R\| = 1$. En faisant apparaître $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$, il devient possible de simplifier les rotations déjà présentes dans le schéma (voir troisième partie de la Figure 3.16), ce qui laisse seulement la matrice de transfert des PID tournants en boucle fermée avec l'opérateur Δ'. Pour assurer la bornitude des signaux sortant des deux opérateurs, sous condition de bornitude et de continuité des entrées, il faut remplir la condition suivante :

$$\left\| \frac{k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}}{s^3 + k_{a2}\, s^2 + k_{a1}\, s + k_{a0}} \right\| \|\Delta'\| \leqslant 1 \tag{3.59}$$

ce qui ne pose aucun problème, la norme de la matrice de transfert étant imposée par les coefficients de réglage des PID.

Génération de trajectoire

Les trajectoires désirées doivent être les mêmes dans le repère fixe et dans le repère tournant. Elles sont liées par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} y_{ad} \\ z_{ad} \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Lorsque l'on veut faire fonctionner la commande en mode 1, il suffit de choisir la position désirée égale à $[0, 0]$. La stabilité et la suppression de perturbation vont assurer la convergence vers cette valeur.

Le mode 2 demande la génération d'une trajectoire circulaire pour laquelle les commandes c_{ay} et c_{az} doivent s'annuler. Observons c_{ay} pour trouver ce qui peut permettre cette annulation :

$$\begin{aligned} c_{ay} = & \underbrace{k_{a0} \int (y_{ad} - y_a)\, dt}_{=-F_{p_{ay}}} + \underbrace{k_{a1}\,(y_{ad} - y_a) + k_{a2}\,(\dot{y}_{ad} - \dot{y}_a)}_{\approx 0} \\ & \text{(valeur de la perturbation)} \\ & - \underbrace{\dot{\phi}^2\, y_a}_{\substack{\text{variable en fonction} \\ \text{de la position}}} - \underbrace{\ddot{\phi}\, z_a - 2\,\dot{\phi}\,\dot{z}_a}_{\approx 0} \end{aligned} \tag{3.61}$$

En supposant que la commande fasse son effet, les termes Proportionnel et Dérivée doivent être nuls où au moins très proches de zéro. Les termes de couplage $\ddot{\phi}\, z_a - 2\,\dot{\phi}\,\dot{z}_a$ sont supposés nuls car, d'une part la vitesse $\dot{\phi}$ est prise constante et donc sa dérivée est nulle, d'autre part la vitesse $\dot{z}_a$ est nulle car la trajectoire à suivre dans le repère tournant est un point fixe. La valeur du terme Intégral,

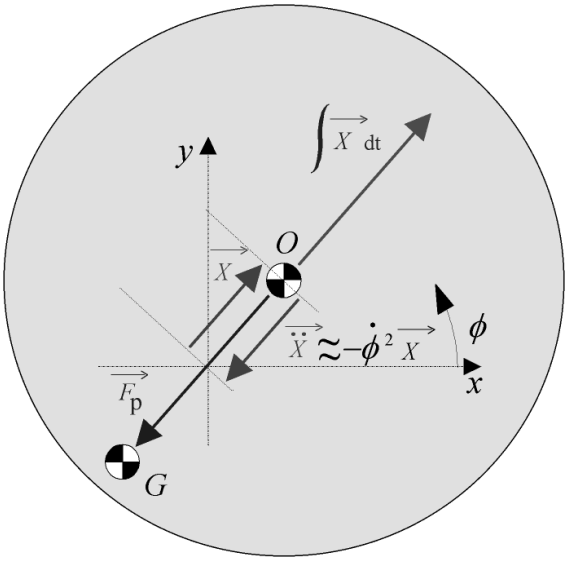


FIG. 3.17: *Disposition des différents vecteurs lors d'un passage du Mode 1 au Mode 2*

qui est égale à la perturbation $-F_{p_{ay}}$, peut se voir opposer une valeur égale par l'intermédiaire du terme $\dot{\phi}^2 y_a$ qui correspond à une accélération normale.

La disposition des différents vecteurs représentant les composants cités précédemment sont représentés sur la Figure 3.17 dans une position médiane entre le mode 1 et le mode 2. Il devient clair que pour amener le centre de gravité G comme centre de rotation du mode 2, il faut faire glisser le point O dans la direction du vecteur Intégrale $\int \overrightarrow{X} dt$ afin que le vecteur $-\dot{\phi}\overrightarrow{X}$ soit égal et opposé au vecteur Intégrale.

Le choix des valeurs de positions désirées va se faire dans le repère tournant car il s'agit alors de décider d'une position fixe. Ce point fixe est transformé en une trajectoire circulaire dans le repère fixe par l'intermédiaire de la rotation $\mathcal{R}$ qui lie y_{ad} et z_{ad} avec y_d et z_d. y_{ad} et z_{ad} sont déduites de $\int \overrightarrow{X} dt$ en divisant chacune de ses composantes par $\dot{\phi}^2$. Certaines précautions doivent être prises pour les faibles valeurs de $\dot{\phi}$ afin de ne pas provoquer de problèmes numériques.

3.3 Implémentations non linéaires

Dans la section précédente, la commande présentée possède la dimension d'une accélération désirée. Pour imposer ces accélérations désirées, il faut mettre en œuvre une seconde couche de commande permettant de réaliser les courants et tensions convenables. Cette seconde partie du contrôleur contiendra toutes les non linéarités nécessaires pour réussir le contrôle non-linéaire de la suspension magnétique.

3.3.1 Courant ou tension ?

Les systèmes électromagnétiques présentent la particularité de pouvoir se commander soit en tension, soit en courant. Les tensions ne servant en générale qu'à imposer les courants désirés, les

commandes en courant sont plus simples à synthétiser. La commande en courant est permise par les techniques de régulation d'électroniques de puissance : commande bang-bang, commande delta-sigma, mode glissant... Ces régulateurs, souvent analogiques, sont directement implantés sur les cartes de puissance, et permettent de considérer les courants comme les entrées réelles du système. Le système peut être représenté sous forme d'une boucle où partie mécanique et partie électrique interagissant mutuellement (voir Figure 3.18). Dans un palier magnétique, l'interaction du système électrique vers le système mécanique est forte (forces électromécaniques), et l'interaction du système mécanique vers le système électrique est faible (variation des inductances par les entrefers). Cette dernière représente une perturbation pour un régulateur de carte de puissance.

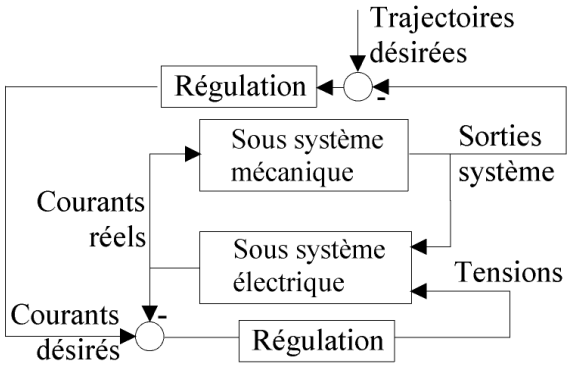


FIG. 3.18: *Représentation en boucle d'un système électromécanique*

Chacune de ces deux types de commande (courant ou tension) présente intérêts et inconvénients. Là où une commande en courant est simple, une commande en tension permet de conserver un degré de liberté supplémentaire, ce qui peut se révéler intéressant, par exemple, pour une commande adaptative.

Dans les deux sous-sections qui suivent, nous présentons deux types de commandes non linéaires, la première étant réalisable en courant ou en tension, la seconde ne pouvant par nature qu'être une commande en tension.

3.3.2 Linéarisation entrée-état et Commande passive

La commande proposée ici possède une structure en cascade à chaque étape de sa conception. On commence par décider de la cinématique du système, puis de sa dynamique avec les forces qui doivent être appliquées, puis les courants nécessaires pour réaliser ces forces, et enfin les tensions capables d'assurer les courants désirés (voir Figure 3.19).

3.3.2.1 linéarisation entrée-état

La première étape de la commande a été effectuée dans la sous-section 3.2.3.2 puisque l'accélération désirée, dans un plan de contrôle, est donnée par l'équation (3.51). La seconde étape doit conduire à la construction des forces et courants désirés. Ces derniers peuvent être considérés comme

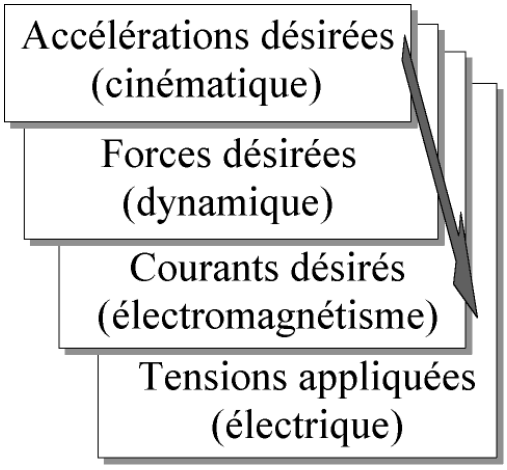


FIG. 3.19: *Structure en cascade de la commande par linéarisation entrée-état et passivité*

des entrées intermédiaires pour la partie mécanique.

Soit l'équation d'un système de la forme :

$$k\left(\ddot{\xi}\right) = f\left(\xi, \dot{\xi}\right) + g\left(\xi, \dot{\xi}, u\right) \tag{3.62}$$

où k, f et g sont des champs vectoriels de dimension n, ξ et u sont respectivement l'état et l'entrée. Si une valeur de l'accélération désirée $\ddot{\xi}_v$ est donnée, et si $g\left(\xi, \dot{\xi}, u\right)$ est inversible par rapport à l'entrée u, alors l'équation analytique (3.62) permet de calculer l'entrée du système :

$$u = g^{-1}\left(k\left(\ddot{\xi}_v\right) - f\left(\xi, \dot{\xi}\right)\right) \tag{3.63}$$

Aucune dynamique n'intervient dans le calcul de cette équation. La stabilité est assurée par le choix de $\ddot{\xi}_v$. Seule l'incertitude sur les paramètres intervenant dans l'expression des fonctions vectorielles peut modifier la stabilité du système. Ce point sera abordé plus loin pour le cas particulier de la sustentation magnétique.

L'équation (3.62) correspond aux six équations mécaniques dans le cas de la broche, c'est à dire l'équation (2.108) : $D\,\ddot{q}$ correspond à la fonction k, et f et g sont compris dans $C\,\dot{q}$. Observons, par exemple, le deuxième terme de $C\,\dot{q}$ pour analyser sa structure :

$$\underbrace{\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\,\dot{y}_1\dot{z}_1+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\,\dot{y}_1\dot{z}_2+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\,\dot{z}_1\dot{y}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\,\dot{y}_2\dot{z}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2}}_{\text{partie de } C\,\dot{q} \text{ ne dépendant pas de courants} = C_{\dot{q}part1}}$$
$$\underbrace{+\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\,i_{y1p}^2-\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\,i_{y1m}^2}_{\text{couple fonction des courants de l'axe } y \text{ du plan } 1 = \mathcal{F}(i)}$$
$$\underbrace{-\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,i_{y2p}^2}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}+\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,i_{y2m}^2}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}=0}_{\text{couple fonction des courants de l'axe } y \text{ du plan } 2 = \mathcal{F}(i)} \tag{3.64}$$

Ce terme (3.64) peut se décomposer en deux parties :

- la première ne contient pas de terme fonction du courant et correspond donc à la fonction f ; cette partie est appelée $C_{\dot{q}part1}$;
- la deuxième, appelée $\mathcal{F}(i)$, est fonction des courants i recherchés. Elle est affine par rapport aux forces électromagnétiques exercées par chaque axe.

On peut donc écrire :

$$i = \mathcal{F}^{-1}\,(D\,\ddot{q}_v + C_{\dot{q}part1}) \tag{3.65}$$

Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte de nombreux couplages compris dans la matrice d'inertie mécanique D, et elle ne requiert pas son inversion. La simplification que l'on introduit dans D peut être fonction de la capacité de calcul du processeur utilisé pour réaliser le contrôleur. L'inversion de $\mathcal{F}(i)$ se fait en deux temps. En premier lieu, la partie affine par rapport aux forces électromagnétiques doit être inversée. On a :

$$\mathcal{F}(i) = \mathfrak{F}\,F_i = D_m\,\ddot{q}_m + C_{\dot{q}part1}$$
$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_c\,(2\,l_c-d_{ca}) & 0 & l_c\,d_{ca} & 0 \\ 0 & 0 & l_c\,(2\,l_c-d_{ca}) & 0 & l_c\,d_{ca} \\ 0 & l_c\,d_{ca} & 0 & l_c\,(2\,l_c-d_{ca}) & 0 \\ 0 & 0 & l_c\,d_{ca} & 0 & l_c\,(2\,l_c-d_{ca}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy1} \\ F_{iz1} \\ F_{iy2} \\ F_{iz2} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

La matrice $\mathfrak{F}$ n'est que de dimension cinq car la commande de l'équation régissant la dynamique de ϕ n'est pas prise en compte[16]. L'inversion de cette matrice ne pose aucun problème ; elle est de rang plein est ses coefficients sont constants. Après inversion de $\mathfrak{F}$, on obtient les cinq termes suivants :

16. Si la commande du moteur est incluse avec la commande des paliers, rien n'empêche de réaliser cette commande selon la méthode expliquée ici.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\lambda_x\, i_{xp}^2}{(-e_0+x)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_x\, i_{xm}^2}{(e_0+x)^2} &= F_{ix} \\
\frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{(-2\,e_0\,l_c + 2\,y_1\,l_c - d_{ca}\,y_1 + d_{ca}\,y_2)^2} - \frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{(2\,e_0\,l_c + 2\,y_1\,l_c - d_{ca}\,y_1 + d_{ca}\,y_2)^2} &= F_{iy1} \\
\frac{\lambda\, i_{z1p}^2}{(-2\,e_0\,l_c + 2\,z_1\,l_c - d_{ca}\,z_1 + d_{ca}\,z_2)^2} - \frac{\lambda\, i_{z1m}^2}{(2\,e_0\,l_c + 2\,z_1\,l_c - d_{ca}\,z_1 + d_{ca}\,z_2)^2} &= F_{iz1} \\
\frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{(-2\,e_0\,l_c + 2\,y_2\,l_c + d_{ca}\,y_1 - d_{ca}\,y_2)^2} - \frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{(2\,e_0\,l_c + 2\,y_2\,l_c + d_{ca}\,y_1 - d_{ca}\,y_2)^2} &= F_{iy2} \\
\frac{\lambda\, i_{z2p}^2}{(-2\,e_0\,l_c + 2\,z_2\,l_c + d_{ca}\,z_1 - d_{ca}\,z_2)^2} - \frac{\lambda\, i_{z2m}^2}{(2\,e_0\,l_c + 2\,z_2\,l_c + d_{ca}\,z_1 - d_{ca}\,z_2)^2} &= F_{iz2}
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

La deuxième étape, devant conduire au calcul des courants, est décrite dans le paragraphe suivant.

3.3.2.2 Choix des courants

On remarque que chaque équation de (3.67) comporte deux inconnues qui sont les deux courants d'un même axe. Pour calculer un des deux courants, il faut donc fixer l'autre comme paramètre. Pour ce faire, on va adopter une méthode qui tient compte de la valeur de la force désirée. Si la force est positive (réciproquement négative), c'est le courant de l'actionneur créant une accélération négative (réciproquement positive) qui sera fixé comme paramètre.

Si on veut obtenir une commutation parfaite (un seul actionneur fonctionne à la fois sur un axe), le choix est simple : le courant pris comme paramètre est mis à zéro. Cette méthode comporte toutefois un problème. Dans ce cas de figure, le courant divisé par l'entrefer s'obtient en effet par (voir Figure 3.20):

$$
\frac{i}{\Delta e_0} = \sqrt{\frac{2\,|F_i|}{\lambda}} \tag{3.68}
$$

Lorsque la force F_i tend vers zéro , i tend vers zéro et sa dérivée est verticale à l'origine. Or la tension appliquée à l'actionneur est équivalente à la dérivée du courant, si on néglige l'effet de la résistance. Une tangente verticale signifie une dérivée *infinie* et donc une tension très importante pour obtenir le courant désiré. Il est probable que cette tension dépasse de loin ce que peut fournir l'électronique de puissance.

Afin de limiter cette forte demande de tension, on peut envisager de modifier la courbe liant le courant à la force autour de zéro. Cette modification s'obtient aisément en obligeant les deux bobines d'un axe à fonctionner en même temps dans une région autour de la force zéro (voir les courbes en pointillés sur la Figure 3.20). On crée ainsi une région très limitée de fonctionnement linéaire mais avec des courants de faibles amplitudes.

En dehors de la région de fonctionnement à deux actionneurs, le courant qui sert de paramètre est pris nul. A l'intérieur de cette région, c'est à dire pour une force désirée telle que $|F_i| \leqslant F_{lim}$ [17],

17. F_{lim} est une valeur choisie arbitrairement en fonction de la largeur de région que l'on veut obtenir.

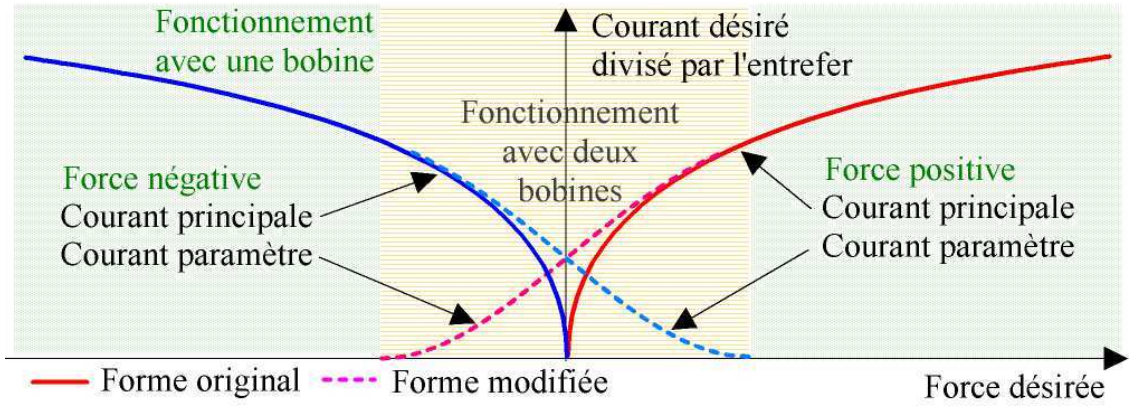


FIG. 3.20: *Mode de sélection du courant paramètre*

le courant paramètre sera le résultat d'un polynôme d'interpolation. Afin de faciliter le calcul de ce polynôme, on va user des symétries et des besoins de continuité du problème. Soit, sur un axe, la force :

$$F_i = \frac{1}{2}\lambda \left(\left(\frac{i_p}{\Delta_p e_0} \right)^2 - \left(\frac{i_m}{\Delta_m e_0} \right)^2 \right) \tag{3.69}$$

ou encore

$$F_i = F_k \left(\mathcal{I}_p^2 - \mathcal{I}_m^2 \right)$$

et F_i supposée positive[18]. Les notations utilisée dans ce qui suit sont définies sur la Figure 3.21.

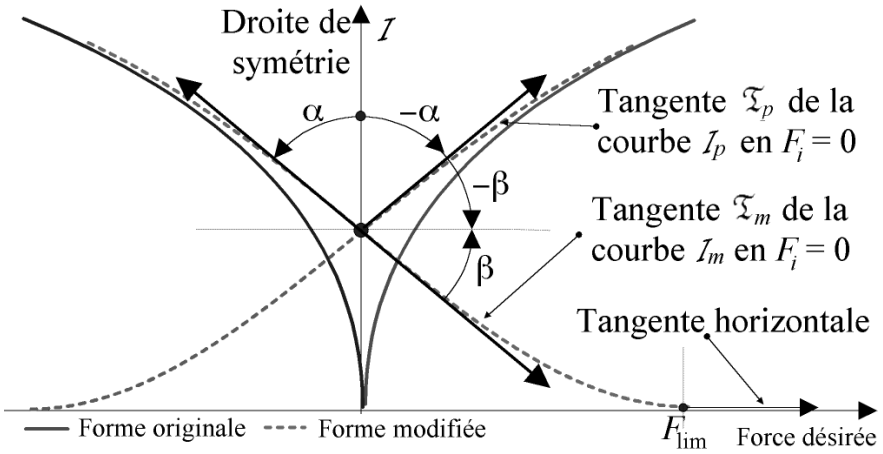


FIG. 3.21: *Quelques notations pour le mode de sélection du courant paramètre*

Etant donné que l'on suppose $F_i > 0$, c'est le courant i_m, soit encore la valeur $\mathcal{I}_m$, qui doit être choisi comme paramètre. Cette valeur est donnée par un polynôme d'ordre 2, $\mathcal{I}_m = a\,F_i^2 + b\,F_i + c$,

18. Le calcul du polynôme pour $F_i < 0$ est obtenu par symétrie.

pour assurer les contraintes suivantes :

Contrainte 1 : lorsque $F_i = F_{lim}$, le polynôme vaut zéro, soit

$$a\,F_{lim}^2 + b\,F_{lim} + c = 0 \tag{3.70}$$

Contrainte 2 : lorsque $F_i = F_{lim}$, la tangente $\mathfrak{T}_m(F_{lim})$ au polynôme doit valoir zéro, soit

$$2\,a\,F_{lim} + b = 0 \tag{3.71}$$

Contrainte 3 : lorsque $F_i = 0$ le polynôme donnant $\mathcal{I}_m$ doit avoir la même valeur que $\mathcal{I}_p$ (et ce pour des raisons de symétrie), soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p(0) = \mathcal{I}_m(0) &= \sqrt{\frac{F_i}{F_k} + \mathcal{I}_m(0)^2} \\ \Longrightarrow\quad c &= \sqrt{c^2} \end{aligned} \tag{3.72}$$

Cette contrainte, toujours vraie, montre simplement que quelle que soit la valeur du polynôme en $F_i = 0$, la continuité de la fonction $\mathcal{I}_m$ est assurée.

Contrainte 4 : lorsque $F_i = 0$ la tangente $\mathfrak{T}_m(0)$ du polynôme doit avoir une valeur opposée à celle de la tangente $\mathfrak{T}_p(0)$ [19], soit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_p(0) = \mathcal{I}'_p(0) = -\mathcal{I}'_m(0) &= \frac{\frac{1}{F_k} + 2\mathcal{I}'_m(0)\mathcal{I}_m(0)}{2\sqrt{\frac{F_i}{F_k} + \mathcal{I}_m^2(0)}} \\ \Longrightarrow\quad -b &= \frac{\frac{1}{F_k} + 2\,b\,c}{2\sqrt{c^2}} \end{aligned} \tag{3.73}$$

Contrainte 5 : lorsque $F_i = F_{lim}$, la dérivée à droite de $\mathcal{I}_p$ doit être égale à la dérivée à gauche :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{F_k} + 2\mathcal{I}'_m(F_{lim})\mathcal{I}_m(F_{lim})}{2\sqrt{\frac{F_i}{F_k} + \mathcal{I}_m(F_{lim})}} &= \frac{\frac{1}{F_k}}{2\sqrt{\frac{F_i}{F_k}}} \\ \Longrightarrow\quad \frac{\frac{1}{F_k} + 2 * 0 * 0}{2\sqrt{\frac{F_i}{F_k} + 0}} &= \frac{\frac{1}{F_k}}{2\sqrt{\frac{F_i}{F_k}}} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Cette contrainte est toujours respectée dès que le polynôme est égal à zéro en F_{lim}.

Au final, il reste trois contraintes exploitables, ce qui amène au choix d'un polynôme d'ordre 2. Après résolution du système d'équations, les trois coefficients sont :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{8\,F_{lim}^3\,F_k}} \\ b &= -\sqrt{\frac{1}{4\,F_{lim}\,F_k}} \\ c &= \sqrt{\frac{F_{lim}}{8\,F_k}} \end{aligned} \tag{3.75}$$

19. Ceci est vrai pour des raisons de symétrie, car la tangente au polynôme du côté droit doit être égale à celle de $\mathcal{I}_m$ du côté gauche, et cette dernière est opposée à celle de $\mathcal{I}_p$ à cause de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

La continuité des fonctions $\mathcal{I}$ est assurée par le choix de ce polynôme, ainsi que la continuité des courants qui en découlent, car pour chaque fonction $\mathcal{I}$ la variation d'entrefer est continue et ne peut prendre la valeur zéro. Par contre, si les deux fonctions $\mathcal{I}$ d'un même axe sont égales pour $F_i = 0$, ce n'est pas le cas des deux courants si le rotor n'est pas à la position zéro.

Une fois obtenues les fonctions $\mathcal{I}$ pour chaque actionneur, et par là même les courants, l'inversion de la fonction $\mathcal{F}$ est terminée. Les courants peuvent, soit être utilisés comme entrées de carte de puissance pilotées en courant, soit servir de courants désirés dans un bloc de contrôle des tensions.

On peut esquisser une comparaison avec la commande par platitude (Lévine et al., 1996) qui propose aussi une linéarisation locale pour des faibles courants. Pour celle-ci, il faut calculer des polynômes de dimension sept, ceci afin de générer la trajectoire pour la position et un des deux courants. En comparaison, notre solution, qui utilise la commutation entre les deux courants d'un même axe pour le choix du courant principal, se contente de polynôme de dimension deux et est indépendante de la position du rotor.

3.3.2.3 Robuste est-ce ?

Avant de passer à la commande des actionneurs en tension, regardons ce qui peut se passer si les paramètres du modèle sont différents des valeurs réelles. Pour ce faire, le modèle simplifié d'un axe est considéré :

$$m_c \ddot{y} = \frac{1}{2}\lambda \left(\left(\frac{i_p}{\Delta_p e_0} \right)^2 - \left(\frac{i_m}{\Delta_m e_0} \right)^2 \right) \tag{3.76}$$

avec $m_c = m\, m_r$: la masse supposée du rotor, m : la masse réelle du rotor et m_r : le pourcentage d'erreur. Pour limiter le nombre de cas, i_m est supposé nul. La valeur désirée de l'accélération est supposée construite uniquement par un PID dans le repère fixe, soit $\ddot{y}_v = k_0 \int \tilde{y}\, dt + k_1 \tilde{y} + k_2 \dot{\tilde{y}}$. L'équation (3.76) devient :

$$\begin{aligned} \frac{2\,m}{\lambda} m_r \left(k_0 \int \tilde{y}\, dt + k_1 \tilde{y} + k_2 \dot{\tilde{y}} \right) &= \left(\frac{i_p}{\Delta_p e_0} \right)^2 \\ \Longrightarrow i_p &= \sqrt{\frac{2\,m}{\lambda} m_r \left(k_0 \int \tilde{y}\, dt + k_1 \tilde{y} + k_2 \dot{\tilde{y}} \right)} \Delta_p e_0 \\ \Longrightarrow i_p &= \sqrt{\frac{2\,m}{\lambda} \left(k'_0 \int \tilde{y}\, dt + k'_1 \tilde{y} + k'_2 \dot{\tilde{y}} \right)} \Delta_p e_0 \end{aligned} \tag{3.77}$$

avec $k'_0 = m_r k_0$, $k'_1 = m_r k_1$ et $k'_2 = m_r k_2$. Si la dynamique désirée, imposée par le PID, est composée d'un premier ordre de pulsation ω_0 et d'un second ordre de pulsation ω_0 et de coefficient d'amortissement ξ telle que

$$(s + \omega_0) \left(s^2 + 2\,\xi\,\omega_0 + \omega_0^2 \right) \tag{3.78}$$

alors les paramètres de la dynamique réelle, ω'_0 et ξ', sont donnés par :

$$\begin{aligned} \omega_0' &= \sqrt[3]{m_r}\,\omega_0 \\ \xi' &= \xi\, {m_r}^{2/3} + \frac{1}{2}\left({m_r}^{2/3} - 1\right) \end{aligned} \tag{3.79}$$

TAB. 3.3: *Effet d'une erreur de modélisation sur la dynamique du rotor*

m_r	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.6
ω_0'	$0.74\,\omega_0$	$0.84\,\omega_0$	$0.93\,\omega_0$	$1.06\,\omega_0$	$1.12\,\omega_0$	$1.17\,\omega_0$
ξ'	$0.54\,\xi - 0.23$	$0.71\,\xi - 0.14$	$0.86\,\xi - 0.07$	$1.13\,\xi + 0.06$	$1.25\,\xi + 0.13$	$1.37\,\xi + 0.18$

Grâce à la Table 3.3, on voit qu'il est plus sage de surestimer l'inertie du rotor que de la sous-estimer. Pour des erreurs de mesures des coefficients de l'ordre de 20% (ce qui est déjà important) la dynamique réelle reste proche de celle prévue initialement.

Un raisonnement équivalent peut être fait en écrivant que la valeur λ_c estimée de λ est égale à $\lambda\,\lambda_r$. L'action de λ_r est opposée à celle de m_r, l'expression (3.77) contenant le rapport m/λ.

3.3.2.4 Application aux actionneurs coniques

La méthode décrite précédemment ne se limite pas qu'à la structure de la broche standard. Afin d'illustrer ces propos, nous montrons l'exemple de son application à une broche à actionneurs coniques.

La broche à actionneurs coniques diffère de la configuration standard par la fonction $\mathcal{F}(i)$. La matrice d'inertie mécanique D_m, ainsi que le terme $C_{\dot{q}part1}$, restent identiques dans les deux cas. $\mathcal{F}(i)$ est ici égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(i) &= \mathfrak{F}\,F_i = D_m\,\ddot{q}_m + C_{\dot{q}part1} \\ \mathcal{F} &= \begin{bmatrix} s(\varpi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\varpi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\varpi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(\varpi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c(\varpi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy1} \\ F_{iz1} \\ F_{iy2} \\ F_{iz2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.80}$$

L'inversion de $\mathfrak{F}$ est simpliste mais les expressions F_i contiennent des couplages dus à la projection des forces de chaque bobine sur les axes x, y et z. Les F_i sont égales aux expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, s(\varpi) {i_{1c}}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{2a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_2+s(\varpi)x\right)^2}\\
&\quad+\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, s(\varpi) {i_{2c}}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}=F_{ix}\\
&-\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1-\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}\\
&\quad+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}=F_{iy1}\\
&-\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{1b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1-\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{1c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}=F_{iz1}\\
&-\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}\\
&\quad+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}=F_{iy2}\\
&-\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{2c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}=F_{iz2}
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

Afin de simplifier le calcul permettant de passer des F_i aux courants, on va s'intéresser à la position du vecteur force par rapport aux 3 quadrants définis par les trois actionneurs dans chaque plan de contrôle (voir Figure 3.22).

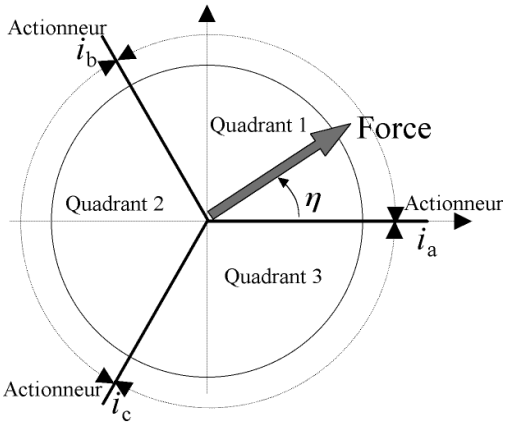


FIG. 3.22: *Position des trois quadrants dans le plan de contrôle*

Les projections du vecteur force sur les axes y et z de chaque plan de contrôle sont données par F_{iy} et F_{iz}. L'angle η que fait le vecteur avec l'axe y est obtenu comme étant[20] :

20. L'utilisation d'une arctangente quatre quadrants est ici nécessaire.

$$\eta = \arctan\left(\frac{F_{iz}}{F_{iy}}\right) \tag{3.82}$$

Connaissant η, le quadrant dans lequel se trouve la force peut être déterminé ; on a les trois cas suivants :

Cas 1 : $\eta \in [0, 2\pi/3[$ force dans le quadrant 1

Cas 2 : $\eta \in [2\pi/3, 4\pi/3[$ force dans le quadrant 2

Cas 3 : $\eta \in [4\pi/4, \pi[$ force dans le quadrant 3

Regardons ce qui se passe dans un quadrant donné, par exemple le 1. Un nouveau repère orthogonal, dont l'axe z est aligné sur la médiane du quadrant, doit être utilisé[21] (voir Figure 3.23).

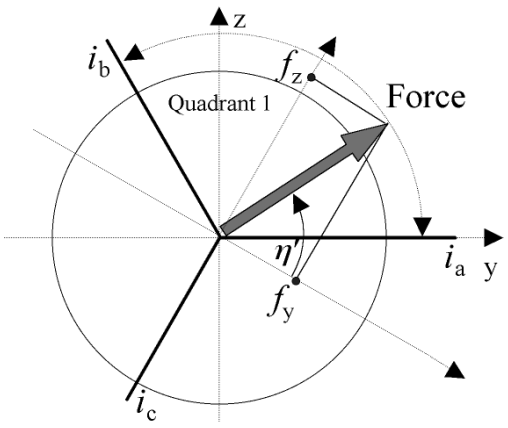


FIG. 3.23: *Projection du vecteur force dans le repère lié au quadrant*

Le courant de l'actionneur se trouvant en face du quadrant (le courant i_c dans notre exemple) va servir de paramètre, de la même façon que le courant de la bobine la moins chargée pour le modèle standard. Comme précédemment, un polynôme va permettre de décider la valeur du courant i_c en fonction de la norme de la force donnée par :

$$|F_i| = \sqrt{F_{iz}^2 + F_{iy}^2} \tag{3.83}$$

Si $|F_i|$ est supérieure à F_{lim}, i_c est pris égale à zéro. Si $|F_i|$ est inférieur à F_{lim}, i_c peut être choisi comme un polynôme d'ordre 2 de variable F_i. Connaissant le courant i_c, le terme $\mathcal{I}_c$ peut être obtenu[22]. Les deux termes de la force f_y et f_z, projetée dans le nouveau repère, s'expriment comme :

21. Pour le quadrant 1, ce repère est obtenu par une rotation de $-\pi/6$ du repère de base.
22. On rappelle que les termes $\mathcal{I}$ s'obtiennent comme étant le courant divisé par l'entrefer correspondant.

$$\begin{aligned} f_y &= |F_i|\,\cos(\eta') = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{I}_a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{I}_b^2\right) \\ f_z &= |F_i|\,\sin(\eta') = \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{2}\mathcal{I}_a^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_b^2 - \mathcal{I}_c^2\right) \end{aligned} \tag{3.84}$$

avec $\eta' = \eta + \frac{\pi}{6}$ pour notre exemple. La résolution du système (3.84) donne $\mathcal{I}_a$ et $\mathcal{I}_b$, $\mathcal{I}_c$ étant un paramètre. Ces trois valeurs, $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ et $\mathcal{I}_c$, peuvent ainsi être obtenues pour chacun des plans de contrôle. Pour autant, dans un des deux plans, ces valeurs ne sont pas définitives. En effet, la relation qui lie les deux plans n'a pas encore été utilisée.

La dernière étape de l'algorithme consiste à faire intervenir la force qui s'exerce selon l'axe x. La première ligne de l'équation (3.81) peut encore s'écrire[23] :

$$\frac{2\,F_{ix}}{\lambda} = \left({}^r\mathcal{I}_{1a}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1b}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1c}^2\right) - \left({}^r\mathcal{I}_{2a}^2 + {}^r\mathcal{I}_{2b}^2 + {}^r\mathcal{I}_{2c}^2\right) \tag{3.85}$$

Si la différence $(\mathcal{I}_{1a}^2 + \mathcal{I}_{1b}^2 + \mathcal{I}_{1c}^2) - (\mathcal{I}_{2a}^2 + \mathcal{I}_{2b}^2 + \mathcal{I}_{2c}^2)$ est supérieure (respectivement inférieure) à celle définie par les valeurs définitives de l'équation (3.85), la somme $(\mathcal{I}_{2a}^2 + \mathcal{I}_{2b}^2 + \mathcal{I}_{2c}^2)$ (respectivement $(\mathcal{I}_{1a}^2 + \mathcal{I}_{1b}^2 + \mathcal{I}_{1c}^2)$) doit être augmentée. Les valeurs qui ne doivent pas être augmentées sont alors définitives. Supposons qu'il faille augmenter $(\mathcal{I}_{1a}^2 + \mathcal{I}_{1b}^2 + \mathcal{I}_{1c}^2)$[24], on peut alors écrire

$$\frac{{}^r\mathcal{I}_{1a}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1b}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1c}^2}{\mathcal{I}_{1a}^2 + \mathcal{I}_{1b}^2 + \mathcal{I}_{1c}^2} = \frac{2\,\frac{F_{ix}}{\lambda} + (\mathcal{I}_{2a}^2 + \mathcal{I}_{2b}^2 + \mathcal{I}_{2c}^2)}{\mathcal{I}_{1a}^2 + \mathcal{I}_{1b}^2 + \mathcal{I}_{1c}^2} = \rho \tag{3.86}$$

Les termes de $\left({}^r\mathcal{I}_{1a}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1b}^2 + {}^r\mathcal{I}_{1c}^2\right)$ se mettent maintenant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} {}^r\mathcal{I}_{1a} &= \sqrt{\rho}\,\mathcal{I}_{1a} \\ {}^r\mathcal{I}_{1b} &= \sqrt{\rho}\,\mathcal{I}_{1b} \\ {}^r\mathcal{I}_{1c} &= \sqrt{\rho}\,\mathcal{I}_{1c} \end{aligned} \tag{3.87}$$

Connaissant toutes les valeurs ${}^r\mathcal{I}$, les courants à appliquer à chaque actionneur deviennent accessibles.

En résumé, connaissant les forces désirées dans chaque plan de contrôle, trois valeurs $\mathcal{I}$ peuvent être calculées pour chaque plan. Ensuite, sachant la force désirée (et son signe) selon l'axe x, les valeurs $\mathcal{I}$ d'un des deux plans doivent être modifiées en trois valeurs ${}^r\mathcal{I}$.

3.3.2.5 Commande passive pour la tension

Lorsque la technique décrite précédemment doit être appliquée à des amplificateurs de puissance pilotés en tension et non pas en courant, un algorithme simple permet de calculer les tensions nécessaires pour maintenir les courants désirés ; cette méthode s'adapte fort bien à la structure

23. L'indice r signifie qu'il s'agit d'une relation entre les valeurs définitives devant être appliquées au sytème.

24. Dans le cas où il faut augmenter $\left(\mathcal{I}_{2a}^2 + \mathcal{I}_{2b}^2 + \mathcal{I}_{2c}^2\right)$, le problème est tout à fait symétrique.

lagrangienne de la sustentation magnétique. En effet ce type de structure confère à un système des propriétés de passivité (Desoer and Vidyasagar, 1975), largement utilisées pour synthétiser des commandes stables, en régulation ou en poursuite, pour des bras manipulateurs (Loria, 1996) ou des machines tournantes électriques (Taoutaou, 1997; Kim et al., 1997). La passivité n'étant qu'un outil au service de notre commande, les définitions qui nous paraissent nécessaires à notre problématique se trouvent en Annexe J.

Dans (Paden and Penja, 1988), un contrôleur PD étendu à la poursuite de trajectoire pour des robots manipulateurs conduit à la forme suivante pour l'entrée du système :

$$E = \underbrace{D\left(q\right)\,\ddot{q}_d + C\left(q,\dot{q}\right)\,\dot{q}_d + \frac{\partial\,\Re}{\partial\,\dot{q}} + \frac{\partial\,U}{\partial\,q}}_{\text{Structure identique à celle du système}} \underbrace{+\sigma_1\,\dot{\tilde{q}} + \sigma_2\,\tilde{q}}_{\text{Terme PD}} \tag{3.88}$$

avec q_d les coordonnées généralisées désirées et $\tilde{q} = q_d - q$. Cette structure stabilise les positions généralisées q et autorise la poursuite de q_d. Or, pour le problème qui nous intéresse, ce ne sont pas les positions qu'il faut poursuivre, mais seulement les vitesses, les courants étant considérés comme des vitesses généralisées. Cette différence permet de simplifier la commande et autorise une preuve de stabilité simplifiée. La commande choisie est donnée par :

$$E = D_e\left(q\right)\,\ddot{q}_{ed} + C_e\left(q,\dot{q}\right)\,\begin{bmatrix}\dot{q}_m\\ \dot{q}_{ed}\end{bmatrix} + R\,\dot{q}_{ed} + r\,\dot{\tilde{q}} \tag{3.89}$$

en référence aux équations électriques du système ((2.109) pour la broche standard, (H.2) pour la broche à actionneurs coniques), donnée par :

$$D_e\left(q\right)\,\ddot{q}_e + C_e\left(q,\dot{q}\right)\,\begin{bmatrix}\dot{q}_m\\ \dot{q}_e\end{bmatrix} + R\,\dot{q}_e = E \tag{3.90}$$

avec D_e la matrice d'inertie électrique de dimension 10×10 pour la broche standard (6×6 pour la broche à actionneurs coniques) et C_e les 10 (ou 6) dernières lignes de la matrice C du système. Dans la commande, les coordonnées mécaniques sont considérées comme des paramètres.

Le système en boucle fermée avec la commande (3.89) peut être représenté par le schéma de la Figure 3.24.
Le système de forme lagrangienne :

$$D_e\left(q\right)\,\ddot{\tilde{q}}_{ed} + C_e\left(q,\dot{q}\right)\,\begin{bmatrix}\dot{\tilde{q}}_m\\ \dot{\tilde{q}}_e\end{bmatrix} + R\,\dot{\tilde{q}} = E \tag{3.91}$$

reçoit comme entrée :

$$E = r\,\dot{\tilde{q}} \tag{3.92}$$

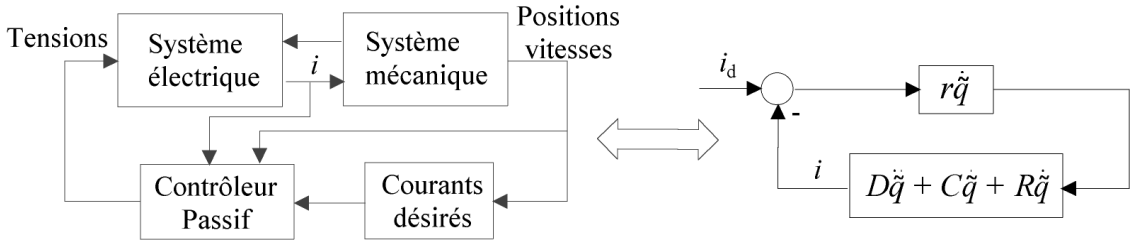


FIG. 3.24: *Représentation schématique de la boucle fermée de poursuite des courants*

avec r une matrice diagonale définie positive. Cette structure présente un système passif (le modèle lagrangien) en boucle fermée avec un système strictement passif (le terme en $r\,\dot{\tilde{q}}$). En se référant au théorème de stabilité par la passivité (voir Annexe J), cette boucle fermée doit être stable. Une seconde méthode pour prouver la stabilité est de trouver une fonction de Lyapunov V candidate (voir Annexe I). Cette fonction V peut prendre la forme de la fonction de stockage correspondant à la somme des équations (3.91) et (3.92) (voir Annexe J). Soit la fonction V définie par :

$$V = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T D_e\,\dot{\tilde{q}} \tag{3.93}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}^T D_e\,\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{D}_e\,\dot{\tilde{q}} \\ \Longrightarrow \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}^T \left(-C_e \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_m \\ \dot{\tilde{q}}_e \end{bmatrix} - R\,\dot{\tilde{q}} - r\,\dot{\tilde{q}}\right) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \dot{D}_e\,\dot{\tilde{q}} \\ \Longrightarrow \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}_e^T \left(\frac{1}{2}\dot{D}_e - C_e\right)\dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}_e^T\,(R+r)\,\dot{\tilde{q}}_e \end{aligned} \tag{3.94}$$

Or la matrice C est telle que le produit $\dot{\tilde{q}}_e^T \left(\frac{1}{2}\dot{D}_e - C_e\right)\dot{\tilde{q}}$ est nul (voir dans l'Annexe B la section B.2). On obtient donc :

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{q}}_e^T\,(R+r)\,\dot{\tilde{q}}_e \tag{3.95}$$

$R+r$ étant définie positive, la dérivée de la fonction de Lyapunov est strictement négative pour toute valeur de $\dot{\tilde{q}}_e$ différente de zéro. Cette propriété entraine la convergence asymptotique de $\dot{\tilde{q}}_e$ vers zéro, soit encore la convergence des courants réels vers les courants désirés.

En plus de la convergence asymptotique, l'utilisation du théorème 5 et du corollaire 1, donnés dans l'Annexe I dans la section I.2.3, permet de prouver la convergence exponentielle de $\dot{\tilde{q}}_e$. Ce théorème, développé pour les systèmes non autonomes, voit ses conditions parfaitement remplies par les formes quadratiques de V et $\dot{V}$, même si notre système est autonome. Cette convergence exponentielle joue un rôle important dans le paragraphe suivant.

3.3.2.6 Convergence des positions sous la condition de convergence des courants

Lorsque la commande des actionneurs se fait en tension, les courants réels ne sont pas exactement égaux aux courants désirés calculés dans les paragraphes 3.3.2.1 et 3.3.2.2. Qu'en est-il, alors, de la convergence des positions vers les positions désirées qui n'est assurée que pour des courants identiques aux courants désirés? [25] La réponse va être donnée en se basant sur l'équation d'un axe unique. Afin de ne pas surcharger les explications, on suppose que les deux bobines fonctionnent en commutation parfaite [26]. Les deux courants réels i_p et i_m, toujours positifs, peuvent alors être assemblés en un courant virtuel i, positif ou négatif, simplement en écrivant $i = i_p - i_m$ (Charara, 1992). La dynamique simplifiée de l'axe s'écrit [27] :

$$m\,\ddot{y} = F_k \frac{i^2}{\Delta e_0} \tag{3.96}$$

Etant donnée la valeur de la différence entre le courant réel et le courant désiré :

$$\tilde{i} = i_d - i \tag{3.97}$$

l'équation (3.96) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{y} &= F_k \frac{\left(i_d - \tilde{i}\right)^2}{\Delta e_0} \\ \Longrightarrow m\,\ddot{y} &= F_k \frac{i_d^2}{\Delta e_0} + F_k \frac{\tilde{i}\left(\tilde{i} - 2\,i_d\right)}{\Delta e_0} \end{aligned} \tag{3.98}$$

Or le courant désiré i_d est tel que (dans le cas où seul les PID fixes sont considérés) :

$$\frac{F_k}{m}\frac{\left(i_d - \tilde{i}\right)^2}{\Delta e_0} = k_0 \int (y_d - y)\,dt + k_1\,(y_d - y) + k_2\,(\dot{y}_d - \dot{y}) + \ddot{y}_d \tag{3.99}$$

On peut noter la présence dans l'équation (3.99) du terme $\ddot{y}_d$ non utilisé dans la sous-section 3.2.3.2. Ce terme permet d'améliorer la commande en poursuite, sans changer ses propriétés de stabilité. Dans la démonstration qui vient, il simplifie l'expression du système soumis au courant réel. L'équation (3.99) peut se réécrire :

$$N(s)\tilde{y} = \frac{F_k}{m}\frac{\tilde{i}\left(\tilde{i} - 2\,i_d\right)}{\Delta e_0} \tag{3.100}$$

25. L'idée de la démonstration qui suit a été donnée en premier dans (de Miras, 1994) puis plus en détail dans (Torres and Ortega, 1998)

26. La commutation parfaite correspond à un fonctionnement où seule une bobine fonctionne à la fois sur un axe.

27. On prend ici le cas $i > 0$; dans le cas où $i < 0$, La dynamique simplifiée de l'axe s'écrit $m\,\ddot{y} = F_k \frac{-i^2}{\Delta e_0}$, ce qui ne change rien à la démonstration.

avec $N(s)$ un polynôme de s (variable complexe de Laplace). L'équation (3.100) admet une réalisation sous forme d'état qui peut s'écrire :

$$\dot{\xi} = A\xi + B\,\mathcal{K}\left(\tilde{i}\left(\tilde{i} - 2\,i_d\right)\right) \tag{3.101}$$

avec $\mathcal{K} = \frac{F_k}{m\Delta e_0}$, $\xi = [\tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \zeta]^T$, $\dot{\zeta} = \tilde{y}$, B de dimension (3×1), et A de dimension (3×3). Les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, les pôles de $N(s)$ étant stables.
En supposant la bornitude des signaux mis en jeux et le fait que :

$$F_k \frac{i_d^2}{\Delta e_0} = \mathcal{F}_d \tag{3.102}$$

ainsi que :

$$\mathcal{F}_d = m\left(k_0 \int \tilde{y}\,dt + k_1\tilde{y} + k_2\dot{\tilde{y}} + \ddot{y}_d\right) \tag{3.103}$$

il est possible d'écrire les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |i_d| &\leqslant \alpha_1 + \alpha_2\,\mathcal{F}_d \\ \Longrightarrow |i_d| &\leqslant \alpha_3 + \alpha_4\,|\xi| \end{aligned} \tag{3.104}$$

avec les constantes positives α_j, $j = 1, \ldots, 4$ bien choisies. Le terme de perturbation peut alors être majoré :

$$\left|\mathcal{K}\left(\tilde{i}\left(\tilde{i} - 2\,i_d\right)\right)\right| \leqslant (\alpha_5 + \alpha_6\,|\xi|)\,\tilde{i} \tag{3.105}$$

avec α_5 et α_6 positives. Le système linéaire défini par :

$$\dot{\xi} = A(\xi) \tag{3.106}$$

est exponentiellement stable en $\xi = 0$, ce qui peut être montré à l'aide d'une fonction de Lyapunov $V = \xi^T P \xi$, et P une matrice symétrique définie positive, et solution de :

$$A^T P + A\,P = -Q, \qquad Q = Q^T > 0 \tag{3.107}$$

Le système (3.101) peut alors être pris pour un système linéaire exponentiellement stable perturbé par un terme fonction de l'état $(\alpha_5 + \alpha_6\,|\xi|)$ multiplié par un terme fonction du temps qui converge exponentiellement vers zéro $(\tilde{i})$. La section 5.4 de (Khalil, 1996) présente des résultats qui permettent de conclure à la convergence vers zéro d'un système linéaire perturbé par une perturbation convergeant exponentiellement vers zéro. Si le terme de perturbation $g(t, \xi)$ est tel que :

$$\|g(t,\xi)\| \leqslant \gamma(t)\|\xi\| + \delta(t) \tag{3.108}$$

il est alors possible de donner un borne supérieure à la norme de $\tilde{y}$, fonction de $\gamma(t)$ et $\delta(t)$ (lemme 5.7). Dans notre cas, les termes $\gamma(t)$ et $\delta(t)$ se composent de $\tilde{i}$; sa convergence exponentielle vers zéro implique alors la convergence de $\tilde{y}$ vers zéro.

3.3.3 Modes Glissants et Linéarisation Entrée-Sortie

Certaines méthodes de synthèse de commande pour les systèmes non linéaires commencent à devenir des "classiques". C'est le cas de la linéarisation entrée-sortie, dont on peut trouver une version détaillée dans (Isidori, 1989) (nous rappelons les grandes lignes de cette méthode dans l'Annexe K). Cette loi de commande, bien adaptée à une structure à paliers magnétiques commandée en tension, a été appliquée directement dans différentes études telles que (Charara, 1992; Lottin et al., 1994; Smith and Weldon, 1995; Thielman and Fabien, 1995; Joo and Seo, 1997; Lin and Gau, 1997; Namerikawa and Fujita, 1998) ou indirectement en considérant le système comme étant *plat* (Mouille, 1994; Ponsart, 1996) (pour en savoir plus sur la platitude des systèmes, consulter (Fliess et al., 1996)).

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à appliquer la linéarisation entrée-sortie à travers une version non linéaire des modes glissants (Slotine and Li, 1990; Utkin, 1992; Hassan, 1993). Ce choix a été effectué en raison de la robustesse apportée par les modes glissants à la linéarisation entrée-sortie vis à vis des erreurs de modélisation. Les modes glissants sont devenus une méthode très usitée pour la commande des machines électriques (Glumuneau et al., 1993; Glumineau, 1994; Benkhoris et al., 1994; Taoutaou et al., 1998).

3.3.3.1 Modes glissants : généralités

Une des premières références qui introduit le concept des modes glissants date de 1977 (Utkin, 1977) et traite de la stabilisation d'un système en se basant sur des résultats obtenus avec des systèmes à structures variables.

Soit un système qui possède deux ou plusieurs modes de fonctionnement (qui entraînent deux ou plusieurs dynamiques différentes) que l'on va écrire :

$$\dot{\xi} = \begin{cases} f_1(\xi,t) \text{ si condition 1 vérifiée} \\ f_2(\xi,t) \text{ si condition 2 vérifiée} \\ \quad \vdots \\ f_n(\xi,t) \text{ si condition n vérifiée} \end{cases} \tag{3.109}$$

Chaque sous-système f_i est appelé structure, et l'ensemble est un système à structure variable (SSV ou VSS). Supposons qu'il soit possible de commuter entre ces différentes structures, alors il peut exister une trajectoire qui ramène le système global à l'origine en choisissant de commuter au

bon moment, sans que chaque structure n'ait à avoir de propriété de stabilité. Deux exemples sont donnés sur la Figure 3.25 ; pour le premier la commutation doit se faire à chaque fois que l'on croise un axe du repère, et pour le second la commutation doit être effectuée lorsque le système croise une droite constituée comme une combinaison linéaire de la position et de sa dérivée.

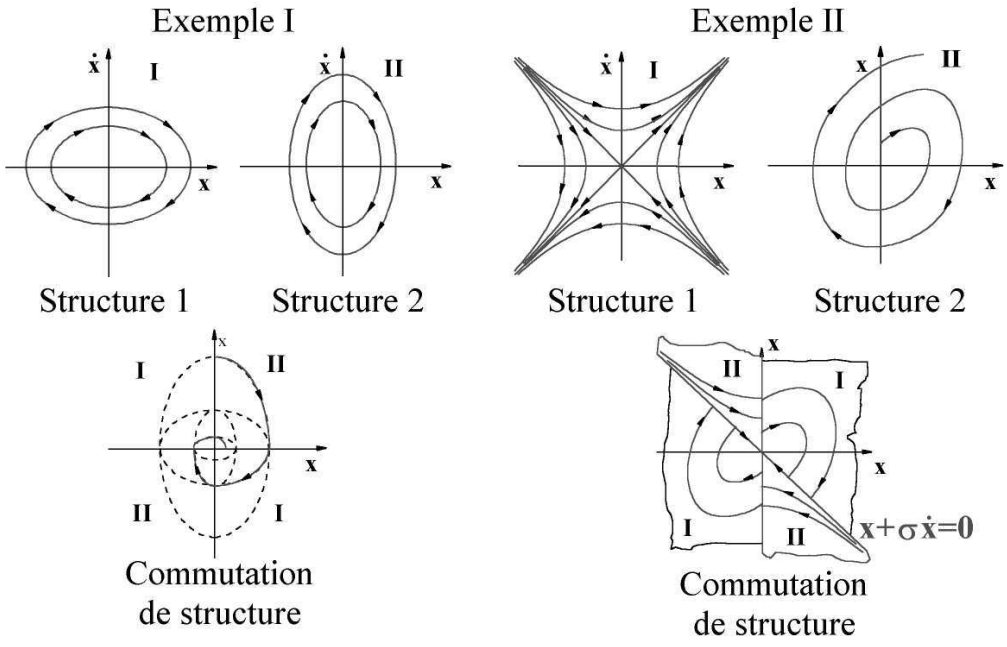


FIG. 3.25: *Deux exemples de commutation de structures donnant une trajectoire stable*

Cette idée de structure variable a été très rapidement transposée pour des systèmes d'équation :

$$\dot{\xi} = f(\xi, t, u) \tag{3.110}$$

avec u l'entrée du système. Si une commande discontinue est appliquée au système (la plus simple que l'on puisse imaginer correspond à une commande bang-bang à deux valeurs constantes), cela engendre différents modes de fonctionnement que l'on peut écrire :

$$\dot{\xi} = \begin{cases} f_1(\xi, t, u_1) \text{ si condition 1 vérifiée} \\ f_2(\xi, t, u_2) \text{ si condition 2 vérifiée} \\ \quad \vdots \\ f_n(\xi, t, u_n) \text{ si condition n vérifiée} \end{cases} \tag{3.111}$$

et en commutant judicieusement entre ces différents modes, il doit être possible de stabiliser le système. La commutation doit se faire pour imposer une dynamique au système et doit dépendre en partie au moins de l'état ξ du système. Cette dynamique peut s'exprimer sous forme d'une équation analytique :

$$\mathbb{S}(\xi, t) = 0 \tag{3.112}$$

$\mathbb{S}$ est appelée surface de glissement. La commande doit être choisie pour que deux étapes successives puissent avoir lieu :

étape 1 : l'état ξ du système n'appartient pas à la surface $\mathbb{S}$; la commande doit rendre cette surface attractive pour que l'état s'en rapproche (voir Figure 3.26);

étape 2 : une fois que l'état répond à l'équation (3.112), celui-ci va rester sur la surface (*glisser*) et se diriger vers le point de stabilité ξ_0 choisi ; Pour se faire, la surface $\mathbb{S}$ doit définir une dynamique stable (telle qu'un polynôme en s, dont les pôles seraient à partie réelle négative, multipliant la transformée de Laplace du signal position) telle que

$$\mathbb{S}(\xi, t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \xi \longrightarrow \xi_0 \tag{3.113}$$

le fait que l'état glisse sur $\mathbb{S}$ a donné son nom à la commande : *commande par mode de glissement.*

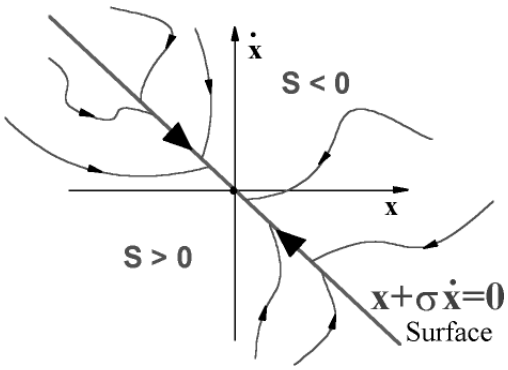


FIG. 3.26: *Attractivité de $\mathbb{S}$ et dynamique stable de la surface*

En théorie, tant que la dynamique imposée par $\mathbb{S}$ est stable, on peut imaginer que $\mathbb{S}$ peut prendre une forme non linéaire (Lee et al., 1991; Kawata et al., 1993), mais cette démarche reste marginale.

3.3.3.2 Surfaces de glissement linéaires

Dans la majeure partie des cas, la surface de glissement est définie comme une combinaison linéaire de l'erreur position (différence entre la position désirée y_d et la position mesurée y) notée :

$$\tilde{y} = y_d - y \tag{3.114}$$

et de ses dérivées $d^{r-1}\tilde{y}/dt^{r-1}$ par rapport au temps, avec r le degré relatif du système[28]. La surface $\mathbb{S}$ se note :

$$\mathbb{S} = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \frac{d^k \tilde{y}}{dt^k} \tag{3.115}$$

avec les b_k des coefficients bien choisis. Cette surface peut être considérée comme une extension de la surface de glissement :

$$\mathbb{S} = \left(\frac{d}{dt} + \tau\right)^{r-1} \tilde{y} \tag{3.116}$$

décrite dans (Slotine and Li, 1990). En supposant que la commande arrive à imposer $\mathbb{S} = 0 = v$ (avec v une commande fictive), on a alors la fonction de transfert :

$$\frac{\tilde{y}}{v} = \left(\sum_{k=0}^{r-1} b_k \, s^k\right)^{-1} \tag{3.117}$$

qui, si les coefficients b_k sont choisis pour que les pôles de la fonction de transfert (3.117) soient stables, imposent la convergence de $\tilde{y}$ vers 0, soit la convergence de y vers y_d.

Prenons maintenant un peu d'avance sur la démonstration de convergence de $\mathbb{S}$ vers zéro. Celle-ci va se faire en utilisant une fonction de Lyapunov candidate quadratique, qui dépend des différentes surfaces de glissement choisies, et notée :

$$V = \frac{1}{2}\overline{\mathbb{S}}^T \overline{\mathbb{S}} \tag{3.118}$$

avec $\overline{\mathbb{S}} = [\mathbb{S}_1, \cdots, \mathbb{S}_i, \cdots, \mathbb{S}_m]^T$ et m le nombre de variables à contrôler. Le calcul de la dérivée de la fonction V le long des trajectoires du système fait apparaître le terme $\dot{\overline{\mathbb{S}}}$:

$$\dot{V} = \overline{\mathbb{S}}^T \dot{\overline{\mathbb{S}}} \tag{3.119}$$

Or les surfaces $\mathbb{S}_i$ contiennent les dérivées $(r-1)^{\text{unième}}$ des sorties y_i considérées, ce qui implique que chaque $\dot{\mathbb{S}}_i$ contient la dérivée $(r)^{\text{ième}}$ de y_i (dérivée par rapport au temps). D'après ce que l'on sait sur le rôle joué par le degré relatif r, une ou plusieurs entrées apparaissent dans $y_i^{(r)}$. L'expression de $y_i^{(r)}$ peut facilement être obtenue lorsque le système est linéarisable au sens entrée-sortie (Fernandez and Hedrick, 1987), ce qui est le cas de la sustentation magnétique.

28. Le degré relatif est défini pour les systèmes linéaires et pour les systèmes non linéaires linéarisables par la linéarisation entrée-sortie. Pour résumer rapidement, il correspond au nombre de fois où il faut dériver une sortie du système pour voir apparaître une entrée (voir Annexe K)

3.3.3.3 Linéarisation Entrée-Sortie

La technique de linéarisation entrée-sortie avec découplage est rapidement décrite dans l'Annexe K. Son application est schématisée sur la Figure 3.27. La méthode permet le calcul de fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Theta(\xi)$, avec ξ l'état d'un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi)\, u_i(t) \\ \Gamma_K(t) = h_K(\xi)\, K = 1 \cdots m \end{cases} \tag{3.120}$$

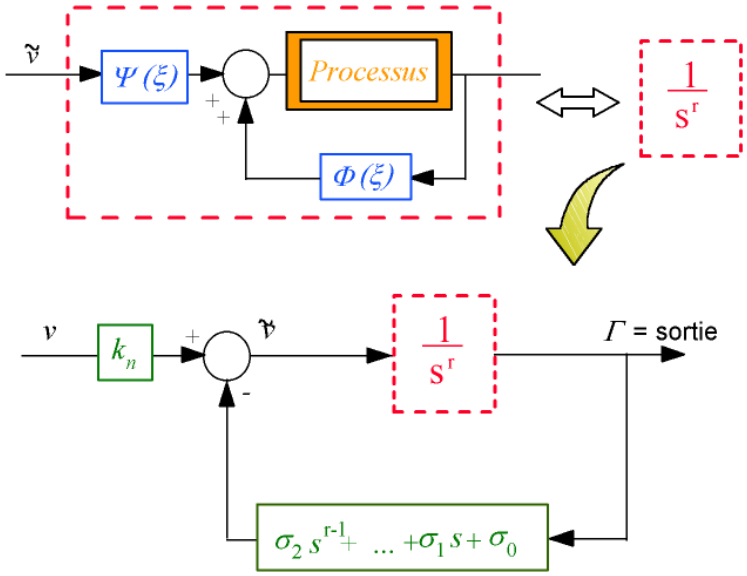


FIG. 3.27: *Schématisation de la linéarisation entrée-sortie*

Sous l'effet de ce bouclage statique, le système (3.120) devient équivalent à m chaînes d'intégrateurs[29], de fonction de transfert $1/s^{r_i}$ et de dimension r_i[30], tels que :

$$n = \sum_{i=1}^{k} r_i \tag{3.121}$$

avec n la dimension du système (3.120). Chacune des chaînes d'intégrateurs peut être stabilisées par un retour d'état statique.

Ce qui est intéressant pour la synthèse de la commande par mode glissant, c'est que la linéarisation entrée-sortie fait intervenir un changement de variable, ou difféomorphisme, qui transforme le système (3.120) en m systèmes de la forme :

29. m est aussi le nombre de sorties Γ_i considérées pour le système.
30. Pour une suspension magnétique, les degrés relatifs r_i associées à chaque position sont égaux à trois.

$$\begin{aligned} \frac{d^{r_i}\,\Gamma_i}{d\,t^{r_i}} &= L_f^{r_i}\left(h_i\left(\xi\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} L_{g_i}\left(L_f^{r_i-1}\left(h_i\left(\xi\right)\right)\right) u_i \\ \equiv\ \frac{d^{r_i}\,\Gamma_i}{d\,t^{r_i}} &= f'\left(\xi\right) + g'\left(\xi\right)\ u \end{aligned} \tag{3.122}$$

avec L la notation pour la dérivée de Lie (voir l'Annexe K). Les expressions définies par l'équation (3.122) sont suffisantes pour obtenir, dans la fonction $\dot{V}$, l'apparition des entrées du système. Cette propriété va permettre de trouver les commandes qui assurent l'attractivité des différentes surfaces $\mathbb{S}_i$.

3.3.3.4 Attractivité de la surface de glissement

Construction de la dérivée d'une fonction de Lyapunov

Pour assurer que les équations $\mathbb{S}_i = 0$ restent vraies, il faut que les surfaces soient attractives pour toute valeur de l'état des systèmes (3.122). Pour ce faire, un résultat décrit dans (de Carlo and Drakunov, 1994) a été utilisé. Cet article se propose de trouver un contrôle stabilisant pour un système de la forme :

$$\dot{\xi}\left(t\right) = f\left(\xi, t\right) + g\left(\xi, t\right) u(t) \tag{3.123}$$

en utilisant une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V\left(\overline{\mathbb{S}}, \xi, t\right) = \overline{\mathbb{S}}^T W\left(\xi, t\right) \overline{\mathbb{S}} \tag{3.124}$$

Dans notre problématique, la matrice W est prise égale à un demi de la matrice identité, et les surfaces ne dépendent pas directement du temps. En dérivant V le long des trajectoire du système, on obtient (sachant que W est choisie constante et égale à $1/2\,\mathcal{I}$) :

$$\dot{V} = \dot{\overline{\mathbb{S}}}^T W \overline{\mathbb{S}} + \overline{\mathbb{S}}^T W \dot{\overline{\mathbb{S}}} + \underbrace{\overline{\mathbb{S}}^T \dot{W} \overline{\mathbb{S}}}_{=0} = \overline{\mathbb{S}}^T \dot{\overline{\mathbb{S}}} \tag{3.125}$$

La dérivée de $\overline{\mathbb{S}}$ s'écrit :

$$\dot{\overline{\mathbb{S}}} = \left[\dot{\mathbb{S}}_1, \cdots, \dot{\mathbb{S}}_i, \cdots, \dot{\mathbb{S}}_m\right]^T \tag{3.126}$$

avec :

$$\dot{\mathbb{S}}_i = \underbrace{\frac{\partial\,\mathbb{S}_i}{\partial\,t}}_{=0} + \frac{\partial\,\mathbb{S}_i}{\partial\,\xi} f + \frac{\partial\,\mathbb{S}_i}{\partial\,\xi} g\ u = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} \tag{3.127}$$

Le terme $d^r\tilde{y}/dt^r$ est donné par l'équation (3.122). En combinant les équations (3.125) et (3.127), la valeur définitive de $\dot{V}$ peut être donnée :

$$\dot{V} = \overline{\mathbb{S}}^T \left[\frac{\partial \overline{\mathbb{S}}}{\partial \tilde{\xi}} f + \frac{\partial \overline{\mathbb{S}}}{\partial \tilde{\xi}} g\, u \right] \tag{3.128}$$

soit encore :

$$\dot{V} = \overline{\mathbb{S}}^T \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r_1-1} \left(\frac{d^{r_1} y_d}{dt^{r_1}} - \left(L_f^{r_i}\left(h_i\left(\xi\right)\right) + \sum_{j=\bar{k}_1}^{k_1} L_{g_j}\left(L_f^{r_j-1}\left(h_j\right)\right) u_j \right) \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_i-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r_i-1} \left(\frac{d^{r_i} y_d}{dt^{r_i}} - \left(L_f^{r_i}\left(h_i\left(\xi\right)\right) + \sum_{j=\bar{k}_i}^{k_i} L_{g_j}\left(L_f^{r_j-1}\left(h_j\right)\right) u_j \right) \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_m-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r_m-1} \left(\frac{d^{r_m} y_d}{dt^{r_m}} - \left(L_f^{r_i}\left(h_i\left(\xi\right)\right) + \sum_{j=\bar{k}_m}^{k_m} L_{g_j}\left(L_f^{r_j-1}\left(h_j\right)\right) u_j \right) \right) \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

Il est visible que si les intervalles $[\bar{k}_i, k_i]$ sont disjoints, ce qui arrive s'il n'y a pas de couplages entre toutes les sorties, la fonction $\dot{V}$ peut se décomposer en plusieurs sous fonctions constituant chacune un sous problème de stabilisation d'une ou plusieurs surfaces.

Pour assurer l'attractivité de $\overline{\mathbb{S}}$, il faut maintenant choisir correctement les valeurs des entrées u afin d'obtenir :

$$\dot{V} \leqslant -G(V) \tag{3.130}$$

avec $G(V)$ une fonction définie positive bien choisie pour assurer une convergence asymptotique de $\mathbb{S}$ vers zéro en conservant les entrées u bornées.

Choix de la fonction $G(V)$

$G(V)$ constitue une marge de stabilité (par exemple vis à vis des erreurs de modélisation du système). Elle doit être choisie en garantissant la bornitude des entrées u, ce qui ne peut être le cas si elle est par exemple prise constante. Une classe intéressante de fonction possible est donnée par :

$$G(V) = K_g\, V^{\alpha} \tag{3.131}$$

avec $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ en vertu du théorème suivant.

Théorème 2 ((de Carlo and Drakunov, 1994))
Dans une région de la surface $\mathbb{S}$, il existe une commande u, dans un espace bornée $\mathcal{B}$ de l'espace des commandes, et qui garantie l'inégalité :

$$\dot{V} \leqslant -G(V) \tag{3.132}$$

si et seulement si il existe $\delta > 0$, et $K \geqslant 0$, tels que pour $\|\mathbb{S}\| < \delta$ et et tout ξ et t, l'inégalité suivante soit vraie

$$0 \leqslant G(V) \leqslant K \left\| \mathbb{S}^T W \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g \right\| \tag{3.133}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$\left\| \mathbb{S}^T W \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g \right\| = \left\| \mathbb{S}^T H^T H \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g \right\| \leqslant \|H\,\mathbb{S}\| \left\| H \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g \right\| = \sqrt{V} \left\| H \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g \right\| \tag{3.134}$$

Cette expression donne une condition nécessaire pour l'existence d'un contrôle borné énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 3 ((de Carlo and Drakunov, 1994))
Si la commande u reste bornée dans $\mathcal{B}$ et satisfait l'équation (3.132), alors, dans une certaine région de $\mathbb{S}$:

$$G(V) \leqslant K\sqrt{V} \tag{3.135}$$

pour $K \geqslant 0$.

En intégrant l'expression suivante :

$$\dot{V}(\mathbb{S}, \xi, t) \leqslant -K_g \left[V(\mathbb{S}, \xi, t)\right]^{\alpha} \tag{3.136}$$

on trouve

$$\begin{aligned} V^{1-\alpha}(t) &\leqslant V^{1-\alpha}(0) - (1-\alpha) K_g\, t \qquad \text{pour } \alpha \neq 0 \\ V(t) &\leqslant V(0) e^{-K_g\, t} \qquad \text{pour } \alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Ainsi, pour garantir la convergence $V(t) \to 0$ quand $t \to 0$ en assurant la bornitude du contrôle, α doit être dans l'intervalle suivant :

$$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{3.138}$$

$\alpha = 1/2$ assure le taux de convergence le plus rapide.

Sélection dynamique des entrées

En observant l'équation (3.129), il est clair que cette équation est affine en la commande u. Soit Φ une fonction définie par :

$$\Phi(\overline{\mathbb{S}}, \xi, t, u) = \dot{V} + G(V) \tag{3.139}$$

Cette fonction définie une hypersurface linéaire (hyperplan) dans l'espace des commandes u. La co-dimension de Φ est de 1, et elle divise l'espace en deux régions telles que $\Phi < 0$ ou $\Phi > 0$. Cette surface Φ va servir à calculer une valeur admissible de u ; elle est appelée *surface de décision* $\mathcal{M}_d$. Pour respecter la condition (3.130), la commande doit être choisie telle que :

$$\Phi(\overline{\mathbb{S}}, \xi, t, u) \leqslant 0 \tag{3.140}$$

L'article (de Carlo and Drakunov, 1994) donne des conditions pour l'existence d'une commande répondant à la condition (3.140). La plus importante est la condition d'intersection entre la surface Φ et l'ensemble des commandes admissibles. Cette intersection assure l'existence d'une commande bornée à chaque instant.

Le calcul d'une commande admissible peut se faire de différentes façons. La première est utilisée (de Miras et al., 1996). Elle s'applique lorsque chaque commande u_i (m commande u_i) possède un nombre fini p d'état [31]. Le nombre de combinaisons possibles est alors p^m. Chacune de ces combinaisons peut être testée pour vérifier si la condition (3.140) est respectée. Si plusieurs combinaisons sont viables (voir Figure 3.28), un choix doit être effectué par une heuristique adaptée au problème [32].

Dans le cas où chaque commande u_i peut prendre ses valeurs dans un intervalle $[u_{i_{min}}, u_{i_{max}}]$, la construction peut encore prendre différentes formes. De Carlo propose une commande basée sur un vecteur unitaire normal à la surface de décision $\mathcal{M}_d$. Elle s'écrit :

$$u = -C \frac{g^T \frac{\partial \overline{\mathbb{S}}^T}{\partial \xi} W \overline{\mathbb{S}}}{\left\| g^T \frac{\partial \overline{\mathbb{S}}^T}{\partial \xi} W \overline{\mathbb{S}} \right\|} \tag{3.141}$$

avec C un paramètre de réglage (voir Figure 3.29).

31. Ce type de commande est tout à fait compatible avec la structure de l'électronique de puissance qui alimente les actionneurs de la sustentation magnétique. Plutôt que d'utiliser un système à modulation de largeur d'impulsion, il devient possible de piloter directement l'état de fermeture ou d'ouverture des interrupteurs de puissance. Cette possibilité sous-entend que la période d'échantillonnage du contrôleur reste compatible avec la fréquence de commutation admissible par les interrupteurs.

32. Dans la commande des onduleurs de puissance, par exemple, on essaie de ne faire commuter qu'un seul interrupteur à la fois pour limiter les pertes.

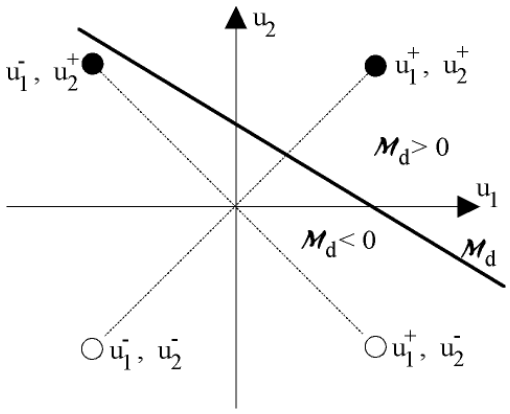


FIG. 3.28: *Commandes admissibles pour une commande à nombre d'états fini*

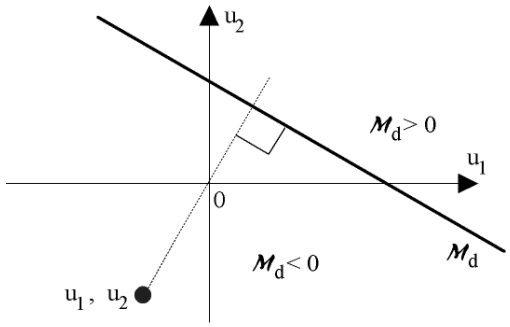


FIG. 3.29: *Vecteur commande choisi en utilisant un vecteur unitaire normal*

A partir de cette idée nous nous proposons de décrire une méthode qui nous paraît plus rationnelle. L'équation (3.141) assure la condition $\Phi < 0$. Or la condition $\Phi = 0$ est tout aussi valable, la marge de stabilité étant assurée par la fonction $G(V)$. L'équation $\Phi = 0$ représente un hyperplan dans l'espace des commandes, et toute commande solution de cette équation est admissible. Pour en choisir une, on peut, par exemple prendre celle qui possède la norme la plus petite. Cette dernière se trouve aisément en calculant l'intersection de l'hyperplan $\mathcal{M}_d$ et de la droite orthogonale $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d}$ à ce plan et passant par l'origine de l'espace des commandes (voir Figure 3.30) :

$$u = \bigcap \{\mathcal{M}_d, \mathcal{O}_{\mathcal{M}_d}\} \tag{3.142}$$

Cette intersection est toujours calculable car les coefficients de l'hyperplan sont entièrement connus. Par contre, il se peut que cette intersection ne soit pas dans l'intervalle $[u_{i_{min}}, u_{i_{max}}]$ des commandes applicables au système. Dans ce cas là, on peut prendre l'intersection de la droite $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d}$ avec la bordure de l'intervalle $[u_{i_{min}}, u_{i_{max}}]$, mais un ou plusieurs actionneurs seront saturés et la convergence n'est plus assurée.

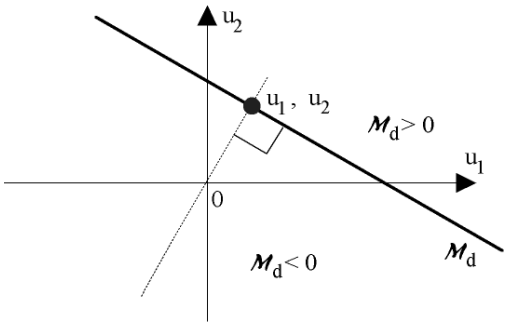


FIG. 3.30: *Vecteur commande choisi pour une commande à états continus*

3.3.3.5 "Chattering" et solution

Le glissement de l'état ξ du système sur la surface $\mathbb{S}$ est purement théorique et demande une fréquence de commutation infinie de la loi de commande, ce qui est bien sûr impossible. En fait, le système se déplace dans une mince région autour de la surface. A chaque période d'échantillonnage, l'entrée calculée ramène le système vers la surface ; soit celle-ci ne peut être atteinte en une période d'échantillonnage, soit elle peut être atteinte et même dépassée[33]. Ce phénomène est appelé *"chattering"* (voir Figure 3.31) et est d'autant plus important que les discontinuités de la commande sont importantes et que la période d'échantillonnage est grande.

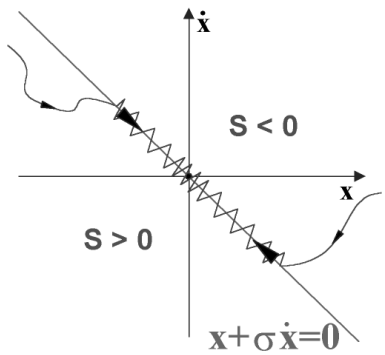


FIG. 3.31: *Représentation de l'effet "chattering"*

La méthode la plus classique pour remédier à ce problème est de *lisser* la discontinuité contenue dans la commande (généralement une fonction du signe de la surface $\mathbb{S}$) autour de la valeur $\mathbb{S} = 0$. La commande à mode glissant utilisée ici contient directement une solution partielle au problème. Observons la valeur de la surface de décision Φ pour un système SISO (Single Input Single Output) :

33. Un système, entre deux périodes d'échantillonnage, se comporte comme s'il était en boucle ouverte. Or sa dynamique naturelle n'a rien à voir avec celle qui doit être imposée par l'intermédiaire de la surface. Lorsque la trajectoire du système traverse la surface, celui-ci n'a aucune raison de rester dessus.

$$\Phi = \mathbb{S}^T \left[\sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - \left(L_f^r \left(h_i \left(\xi \right) \right) + L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right) u \right) \right) \right] + K_g V^\alpha = 0 \tag{3.143}$$

Si $\alpha = 1$, l'équation (3.143) devient :

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbb{S} \left[\sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - \left(L_f^r \left(h \right) + L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right) u \right) \right) \right] + K_g' \mathbb{S}^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - \left(L_f^r \left(h \right) + L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right) u \right) \right) = -K_g' \frac{\mathbb{S}^2}{\mathbb{S}} \\ &\Longrightarrow u = -\frac{1}{b_{r-1} L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right)} \left[\left(-K_g' \mathbb{S} - \sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} \right) - b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - L_f^r \left(h \right) \right) \right] \end{aligned} \tag{3.144}$$

L'expression (3.144) peut être comparée à celle de la commande issue de la linéarisation entrée-sortie :

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} \left(h \right)} \left(L_f^r \left(h \right) + v \right) \tag{3.145}$$

En prenant $b_{r-1} = 1$ (ce qui ne retire aucune généralité à la méthode) et $v = K_g' \mathbb{S}$ (il s'agit bien d'un retour d'état statique), les expressions (3.144) et (3.145) sont très proches l'une de l'autre. La commande par linéarisation entrée-sortie ne présente aucun problème de chattering [34] et les termes supplémentaires contenus dans (3.144) ne sont pas discontinus.
Prenons maintenant $\alpha = 1/2$ dans l'équation (3.143) :

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbb{S} \left[\sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - \left(L_f^r \left(h \right) + L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right) u \right) \right) \right] + K_g' \| \mathbb{S} \| = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} + b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - \left(L_f^r \left(h \right) + L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right) u \right) \right) = -K_g' \frac{\mathbb{S}}{\| \mathbb{S} \|} \\ &\Longrightarrow u = -\frac{1}{b_{r-1} L_g \left(L_f^{r-1} \left(h \right) \right)} \left[\left(-K_g' sign(\mathbb{S}) - \sum_{k=0}^{r-2} b_k \frac{d^{k+1}\tilde{y}}{dt^{k+1}} \right) - b_{r-1} \left(\frac{d^r y_d}{dt^r} - L_f^r \left(h \right) \right) \right] \end{aligned} \tag{3.146}$$

La dernière expression de (3.146) peut être comparée avec la classique expression de la commande par mode glissant utilisant la commande équivalente et le signe de la surface $\mathbb{S}$ comme terme discontinu (Slotine and Li, 1990; Hassan, 1993; Bouri, 1993) :

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + \Delta u \\ u &= -\frac{1}{\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g'} \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} f' - K_g' sign(\mathbb{S}) \end{aligned} \tag{3.147}$$

34. La linéarisation entrée-sortie ne présente aucun problème de chattering mais sa robustesse face aux erreurs de modélisation reste faible.

En prenant f' et g' en partant de l'équation (3.122), l'équation (3.147) devient très proche de l'équation (3.146) [35]. Cette commande classique nécessite généralement une méthode de réduction du chattering.

Ainsi, en jouant sur la valeur de α, on peut obtenir un comportement à mis chemin entre le mode glissant à commande équivalente (robustesse) et la linéarisation entrée-sortie (pas de chattering).

3.3.3.6 Mode glissant et balourd : robuste est-ce?

Les modes glissants ont une réputation de robustesse vis à vis des erreurs de modélisation. Ce phénomène présenté dans (Slotine and Li, 1990) est repris brièvement ci-dessous.
Soit un système qui s'écrit :

$$\xi^{(r)} = \hat{f}(\xi) + g(\xi) + \tilde{f}(\xi) \tag{3.148}$$

avec $\hat{f}$ l'estimée de la fonction réelle f et $\tilde{f} = f - \hat{f}$. De plus on connaît une borne à la valeur de l'erreur de modélisation :

$$\left|\hat{f} - f\right| = \left|\tilde{f}\right| < F \tag{3.149}$$

Si la commande choisie est du type mode glissant à commande équivalente telle que l'on ait :

- $u = u_{eq} - K_g sign(\mathbb{S})$, $K_g > 0$ et $u_{dis} = -K_g sign(\mathbb{S})$;
- $\left(\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g\right)^{-1}$ existe ;
- $\left(\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g\right)^{-1} > 0$;
- $\mathbb{S} = c\tilde{\xi}$.

La dérivée de la fonction de Lyapunov $V = 1/2\,\mathbb{S}^2$ devient :

$$\dot{V} = \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}} = \mathbb{S}\left[\left(\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi}\left(\hat{f}(\xi) + g(\xi)u_{eq}\right)\right) + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g(\xi) u_{dis} + \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi}\tilde{f}(\xi)\right] \tag{3.150}$$

Par construction de la commande u_{eq} (voir équation (3.147)), le terme $\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi}\left(\hat{f}(\xi) + g(\xi)u_{eq}\right)$ est égale à zéro. Etant donnée la forme du système (3.148), l'égalité suivante est vraie :

$$\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi}\tilde{f}(\xi) = \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi_{r-1}}\tilde{f}(\xi) \tag{3.151}$$

Si on choisit, pour simplifier, $\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi_{r-1}} = c_{r-1}$ et $\frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \xi} g = 1$, alors l'équation (3.150) devient (on pose $c_{r-1} = 0$) :

35. On a le terme $-K'_g sign(\mathbb{S})$ au lieu de $-\frac{1}{b_{r-1} L_g\left(L_f^{r-1}(h)\right)} K'_g sign(\mathbb{S})$.

$$\dot{V} = \mathbb{S}\left(u_{dis} + \tilde{f}(\xi)\right) \tag{3.152}$$

Pour obtenir la condition $\dot{V} < 0$ en prenant, par exemple, $\mathbb{S} > 0$, il faut que :

$$\begin{aligned} & u_{dis}\mathbb{S} + c_{r-1}\tilde{f}(\xi)\mathbb{S} < 0 \\ \Longrightarrow & -K_g\,|\mathbb{S}| + \tilde{f}(\xi)\mathbb{S} < 0 \\ \Longrightarrow & -K_g\mathbb{S} + \tilde{f}(\xi)\mathbb{S} < 0 \quad \text{car } \mathbb{S} > 0 \\ \Longrightarrow & -K_g + \tilde{f}(\xi) < 0 \end{aligned} \tag{3.153}$$

Or, d'après les hypothèses du problème, on a :

$$\left|\tilde{f}\right| < F \implies -F - K_g \leqslant \tilde{f} - K_g \leqslant F - K_g \tag{3.154}$$

et donc :

$$\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}} < 0 \implies K_g > F \tag{3.155}$$

Si $\mathbb{S} < 0$, le même résultat est obtenu. La stabilité de la boucle fermée est donc assurée lorsque le gain de la partie discontinue de la loi de commande est plus grand que la borne maximum de l'erreur de modélisation. Ce résultat est valable pour un système de la forme (3.148) (soit après application du difféomorphisme à un système de la forme $\dot{\xi} = \hat{f}(\xi) + g(\xi) + \tilde{f}(\xi)$).

Que peut-on dire lorsque l'erreur $\tilde{f}$ est connue sur le système avant application du difféomorphisme (ce qui est le cas pour le balourd) ? La réponse peut être donnée en partant d'un résultat de (Elmali and Olgac, 1992). Soit un système décrit par l'équation suivante :

$$\dot{\xi} = \left(\hat{f}(\xi) + \Delta f(\xi, t)\right) + \left(\hat{g}(\xi) + \Delta g(\xi, t)\right) u \tag{3.156}$$

où Δf et Δg sont des erreurs de modélisation. Il sera possible de trouver un gain K_g qui assure la stabilité malgré les erreurs de modélisation, si Δf et Δg répondent à ce qui est appelé *"the matching condition"* (après application du difféomorphisme, les élément Δf et Δg doivent apparaître dans la dérivée $r_i^{\text{ième}}$ des sorties). Pour vérifier si cette condition s'applique au balourd, effectuons simplement le calcul sur l'équation simplifiée d'un axe. Soit y la sortie de notre axe, on obtient :

$$\begin{aligned} & z_1 = y = h(\xi) \\ \Longrightarrow & \dot{z}_1 = z_2 = \frac{\partial h}{\partial \xi}\dot{\xi} = L_{\hat{f}}h = \dot{y} \\ \Longrightarrow & \dot{z}_2 = z_3 = L_{\hat{f}}^2 h + L_{\Delta f}L_{\hat{f}}h = L_{\hat{f}}^2 h + F_p = \ddot{y} \end{aligned} \tag{3.157}$$

avec $\Delta f = [0 \underbrace{k \sin(\omega_0 t)}_{F_p} 0]^T$ en considérant $\xi = [y\ \dot{y}\ i]^T$ et $\Delta g = 0$. Finalement, en dérivant encore une fois :

$$\dot{z}_3 = L_{\hat{f}}^3 h + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(L_{\Delta f} L_{\hat{f}} h)\dot{\xi}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(L_{\hat{f}}^2 h)\Delta f}_{=0} + L_{\hat{g}} L_{\hat{f}}^2 h\, u \tag{3.158}$$

car $(L_{\Delta f} L_{\hat{f}} h)$ dépend seulement du temps et $\frac{\partial}{\partial \xi}(L_{\hat{f}}^2 h) = [p_1(\xi), 0, p_2(\xi)]$. L'erreur de modélisation (le balourd) n'apparaît pas dans l'équation (3.158). Ainsi, La commande par mode glissant ne peut éliminer l'effet de la perturbation. Ce résultat rejoint un autre résultat (Amrouche, 1998) qui dit que le modèle du palier contenant la perturbation (tel qu'on l'a développé dans le chapitre précédent) est linéarisable au sens entrée-sortie ; mais ces expressions ne sont utilisables que si la position du centre de gravité est connue, ce qui n'est pas le cas. Sans cette information, on ne peut rien faire directement contre le balourd.

Par contre, il est possible de dire que la commande par mode glissant réagit mieux au balourd que la commande par linéarisation entrée-état (si on ne prend pas en compte les PID tournants). En effet, l'expression de la surface contient la dérivée seconde de la position[36], et donc une image de la perturbation (si cette dérivée seconde est calculée correctement, ce qui n'est pas forcément évident), ce qui n'est pas le cas des PID de la commande par linéarisation entrée-état. Cette image permet à la commande de réagir à la perturbation, et donc d'en compenser une partie.

3.3.3.7 Mise en application

L'application de la commande par mode glissant nécessite un modèle d'état de la broche. Ce modèle peut s'obtenir à partir du modèle de commande présenté dans le chapitre précédent. Le résultat est donné dans l'Annexe L.

Les sorties choisies sont les positions délivrées par les capteurs de la broche : x, y_1, z_1, y_2, et z_2. L'axe x peut être considéré comme découplé des autres sorties et sa stabilisation passe par une fonction de Lyapunov qui lui est propre. La stabilisation des quatre autres axes est réalisée grâce à une seule fonction de Lyapunov construite à partir de l'expression des différentes surfaces choisies. Afin de conserver une structure similaire (et donc des propriétés identiques) à celle qui est décrite dans la section 3.2.3.2 (PID fixes assistés de PID tournants), chacun des axes fixes des deux plans de contrôle va recevoir une surface construite par rapport à sa position "fixe", et chacun des axes tournants des deux plans de contrôle sera associé à une surface construite par rapport à sa position "tournante". Pour une variable y la surface sera :

$$\mathbb{S}_y = b_0 \int \tilde{y}\, dt + b_1 \tilde{y} + b_2 \dot{\tilde{y}} + b_3 \ddot{\tilde{y}} \tag{3.159}$$

36. En prenant un peu d'avance, on peut dire que chaque sous système de la suspension magnétique présente un degré relatif de trois.

avec $\tilde{y} = y_d - y$. L'intégrale de la variable, passée sous silence dans les sous-sections précédentes, joue exactement le même rôle que la fonction Intégrale dans un PID[37]. Le vecteur surface va être[38] :

$$\overline{\mathbb{S}} = [\mathbb{S}_{y_1}, \mathbb{S}_{z_1}, \mathbb{S}_{y_2}, \mathbb{S}_{z_2}, \mathbb{S}_{y_{1a}}, \mathbb{S}_{z_{1a}}, \mathbb{S}_{y_{2a}}, \mathbb{S}_{z_{2a}}]^T \tag{3.160}$$

La fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V = \frac{1}{2}\overline{\mathbb{S}}^T\overline{\mathbb{S}} \tag{3.161}$$

et sa dérivée par :

$$V = \overline{\mathbb{S}}^T\dot{\overline{\mathbb{S}}} \tag{3.162}$$

La dérivée des surfaces "fixes" ($\mathbb{S}_{y_1}$, $\mathbb{S}_{z_1}$, $\mathbb{S}_{y_2}$, et $\mathbb{S}_{z_2}$) ne présente aucune difficulté. Elle fait apparaître à chaque fois la dérivée troisième d'une position que l'on va remplacer par une des équations (L.3), (L.4), (L.5), et (L.6).

La dérivée des surfaces "tournantes" ($\mathbb{S}_{y_{1a}}$, $\mathbb{S}_{z_{1a}}$, $\mathbb{S}_{y_{2a}}$, et $\mathbb{S}_{z_{2a}}$) nécessite l'utilisation du changement de repère, déjà évoqué précédemment. Rappelons que nous avons :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

En dérivant trois fois, les dérivées troisièmes de y et z peuvent être obtenues sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dddot{y} \\ \dddot{z} \end{bmatrix} &= \mathcal{R} \begin{bmatrix} \dddot{y}_a \\ \dddot{z}_a \end{bmatrix} + 3\dot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} + 3\ddot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \dddot{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dddot{y} \\ \dddot{z} \end{bmatrix} &= \mathcal{R} \left(\begin{bmatrix} \dddot{y}_a \\ \dddot{z}_a \end{bmatrix} + 3\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} + 3\left(\ddot{\phi}\mathcal{J} - \dot{\phi}^2\right) \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} + \left(\dddot{\phi}\mathcal{J} - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - \dot{\phi}^3\mathcal{J}\right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.164}$$

avec

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.165}$$

La dérivée du couple $\mathbb{S}_{ya}$ et $\mathbb{S}_{za}$ peut s'écrire sous forme matricielle comme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{S}}_{ya} \\ \dot{\mathbb{S}}_{za} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0\tilde{y}_a + b_1\dot{\tilde{y}}_a + b_2\ddot{\tilde{y}}_a + b_3\dddot{y}_{ad} \\ b_0\tilde{z}_a + b_1\dot{\tilde{z}}_a + b_2\ddot{\tilde{z}}_a + b_3\dddot{z}_{ad} \end{bmatrix} - b_3 \begin{bmatrix} \dddot{y}_a \\ \dddot{z}_a \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

37. On peut remarquer que cela entraîne un décalage des indices des coefficients b_i dont il faut tenir compte, par exemple, dans l'équation (3.129).

38. L'indice a indique les surfaces correspondant à des variables tournantes.

L'équation (3.166) fait apparaître $\dddot{y}_a$ et $\dddot{z}_a$. Ces valeurs peuvent être obtenues en réécrivant l'équation (3.164) :

$$\begin{bmatrix} \dddot{y}_a \\ \dddot{z}_a \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{-1} \begin{bmatrix} \dddot{y} \\ \dddot{z} \end{bmatrix} - 3\dot{\phi}\mathcal{J} \begin{bmatrix} \ddot{y}_a \\ \ddot{z}_a \end{bmatrix} - 3\left(\ddot{\phi}\mathcal{J} - \dot{\phi}^2\right) \begin{bmatrix} \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \end{bmatrix} - \left(\dddot{\phi}\mathcal{J} - 3\dot{\phi}\ddot{\phi} - \dot{\phi}^3\mathcal{J}\right) \begin{bmatrix} y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{3.167}$$

Dans l'équation (3.166) le vecteur $[\dddot{y}_a, \dddot{z}_a]^T$ peut être remplacé par l'expression (3.167), ce qui à nouveau fait apparaître la dérivée troisième d'une position à remplacer par une des équations (L.3), (L.4), (L.5), et (L.6).

Dans les équations (L.3), (L.4), (L.5), et (L.6) apparaissent les huit tensions E_{y1p}, E_{y1m}, E_{z1p}, E_{z1m}, E_{y2p}, E_{y2m}, E_{z2p}, E_{z2m}. Pour autant, la dimension du vecteur commande choisi par l'intermédiaire de la fonction $\Phi(\overline{\mathbb{S}}, \xi, u)$ ne va être que de quatre ; car parmi les huit tensions, quatre jouent un rôle de paramètre. Une solution de linéarisation de la force autour de la valeur zéro comme celle décrite pour la linéarisation entrée-état dans 3.3.2.2 peut être envisagée mais est beaucoup plus difficile à obtenir car, ici, la force désirée n'est à priori pas calculée. Cette démarche n'est pas encore opérationnelle. Si cette linéarisation locale n'est pas utilisée, la commutation exacte s'impose[39]. Dans la commutation exacte, il faut construire un courant virtuel i_y, sur un axe y, qui est donné par :

$$i_y = i_{yp} - i_{ym} \tag{3.168}$$

sachant que i_{yp} et i_{ym} ne peuvent être que positifs (cela est imposé, par exemple, par l'électronique de puissance), et que si i_{yp} est non nul alors i_{ym} est forcé à la valeur nulle (et réciproquement). Reprenons l'équation (L.3) pour voir comment cela se traduit :

$$\begin{aligned} \dddot{y}_1 \approx & \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{R}{e_0 - y_1} i_{y1p}^2 + \frac{i_{y1p}}{e_0 - y_1} E_{y1p} + \frac{R}{e_0 + y_1} i_{y1m}^2 - \frac{i_{y1m}}{e_0 + y_1} E_{y1m}\right) \\ & + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{R}{e_0 - y_2} i_{y2p}^2 - \frac{i_{y2p}}{e_0 - y_2} E_{y2p} - \frac{R}{e_0 + y_2} i_{y2m}^2 + \frac{i_{y2m}}{e_0 + y_2} E_{y2m}\right) \end{aligned} \tag{3.169}$$

Dans la première ligne de l'équation (3.169), on trouve les deux termes $\frac{i_{y1p}}{e_0 - y_1} E_{y1p}$ et $-\frac{i_{y1m}}{e_0 + y_1} E_{y1m}$. Sachant qu'un des deux courants est toujours nul, alors un des deux termes est toujours nul. Les deux tensions E_{y1p} et E_{y1m} peuvent alors être remplacées par une seule E_{y1} (que l'on dénommera virtuelle aussi) qui sera alternativement appliquée à la bobine p ou m selon le courant qui doit rester positif ; si le courant de la bobine qui est alimentée tend à devenir "négatif" (signe du courant virtuel) alors il y a commutation et la tension est appliquée à l'autre bobine. On remarquera que si c'est le courant p qui tend à devenir négatif, et que la tension responsable de cet état est alors appliquée à la bobine m, le courant m devrait devenir négatif ; or, il doit être positif. On va donc appliquer, non pas E_{y1}, mais $-E_{y1}$ à la bobine m. La somme des deux termes va s'écrire :

39. Commutation exacte : fonctionnement d'une et d'une seule bobine sur un axe.

$$\frac{i_{y1p}}{e_0 - y_1} E_{y1p} - \frac{i_{y1m}}{e_0 + y_1} E_{y1m} = \frac{|i_{y1}|}{e_0 - \text{sign}(i_{y1}) y_1} E_{y1} \tag{3.170}$$

Le même type de transformation peut s'appliquer aux termes $-\frac{R}{e_0 - y_1} i_{y1p}^2$ et $\frac{R}{e_0 + y_1} i_{y1m}^2$:

$$-\frac{R}{e_0 - y_1} i_{y1p}^2 + \frac{R}{e_0 + y_1} i_{y1m}^2 = -\frac{R}{e_0 - \text{sign}(i_{y1}) y_1} \text{sign}(i_{y1})\, i_{y1}^2 \tag{3.171}$$

Ainsi l'équation (3.169) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 \approx & \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m} \left(-\frac{R}{e_0 - \text{sign}(i_{y1}) y_1} \text{sign}(i_{y1})\, i_{y1}^2 + \frac{i_{y1}}{e_0 - \text{sign}(i_{y1}) y_1} E_{y1} \right) \\ & + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m} \left(\frac{R}{e_0 - \text{sign}(i_{y2}) y_2} \text{sign}(i_{y2})\, i_{y2}^2 - \frac{i_{y2}}{e_0 - \text{sign}(i_{y2}) y_2} E_{y2} \right) \end{aligned} \tag{3.172}$$

Chacune des équations (L.4), (L.5), et (L.6) peut subir la même transformation. La fonction $\Phi(\overline{\mathbb{S}}, \xi, u)$ ne contient alors plus que quatre tensions E_{y1}, E_{z1}, E_{y2}, et E_{z2}.

3.4 Conclusion

Ce chapitre, dédié à la commande non linéaire d'une broche à paliers magnétiques, est construit autour de deux grandes idées, l'élimination du balourd, et l'implémentation non linéaire de cette technique :

- la première partie, qui se concentre sur les techniques d'élimination du balourd, est elle même scindée en trois sections. Dans un premier temps, les deux modes de suppression du balourd sont décrits :
  - rotation autour de l'axe géométrique ;
  - rotation autour de l'axe d'inertie.

  Deux exemples sont ensuite donnés pour pouvoir être comparés à notre propre solution. Cette solution est alors décrite. Elle est construite afin de permettre les deux modes de fonctionnement et un réglage simple des coefficients de contrôle. Bien que l'utilisation d'un changement de repère soit devenue classique dans les techniques de suppression du balourd, nous nous sommes attachés à l'utiliser d'une manière originale en introduisant l'idée des PID tournants chargés de compenser la perturbation, constante dans le repère tournant. A ces PID tournants sont associées des PID fixes pour la stabilisation classique et l'élimination des perturbations constantes dans le repère fixe. La bornitude des signaux, lorsque les deux types de PID sont associés, peut être démontrée grâce au théorème du petit gain.

– La seconde partie est réservée au calcul de commandes non linéaires permettant d'intégrer la méthode d'élimination du balourd définie précédemment. Cette section est elle-même découpée en deux parties correspondant chacune à une méthode d'implémentation non linéaire, originales quant à leur application aux paliers magnétiques actifs en fonctionnement non linéaire :

  – la linéarisation entrée-état et commande passive ;
  – le mode glissant.

  Pour chacune de ces deux commandes, on donne la méthode de synthèse générale et appliquée à la broche, ainsi que la démonstration de stabilité, plus quelques détails concernant la robustesse de chaque méthode. Pour la linéarisation entrée-état, une solution originale de linéarisation locale autour de la force désirée en zéro permet d'éliminer les saturations de tension lors de la commutation d'une bobine à l'autre (qu'il s'agisse d'une broche classique ou à actionneurs coniques). Nous allons essayer de transférer cette technique vers le mode glissant, mais cela est plus délicat car la valeur de la force désirée n'est pas à priori donnée.

La partie théorique étant énoncée, il reste tout de même à vérifier que ces propositions de commandes respectent bien les caractéristiques présentées. Cette vérification va passer par des simulations appliquées au modèle de simulation calculé dans le chapitre 2, et quelques essais réels sur une broche de laboratoire.

Chapitre 4

Simulations et essais réels

4.1 Introduction

Les deux premiers chapitres avaient pour but d'expliciter la théorie sous-jacente de notre travail, que ce soit au niveau du développement d'un certain nombre de modèles, ou de la synthèse de lois de commande non linéaires capables de supprimer l'effet du balourd. Une fois ces résultats énoncés, il reste à démontrer pratiquement leur validité. Cette démonstration s'effectue habituellement en deux étapes successives : la simulation et les essais sur une machine d'expérimentation. La partie simulation a été effectuée à l'aide des logiciels MATLAB et SIMULINK [1]. Les essais réels sont réalisés sur une broche de laboratoire de marque MECOS.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la validation du modèle, en comparant le comportement du modèle de simulation (voir le sous-chapitre 2.5.2.1) à celui de la broche réelle. Les deux vont être soumis à la même loi de commande pour pouvoir comparer les trajectoires obtenues.

La suite du chapitre présente des simulations et quelques essais réels qui permettent de juger de la pertinence des deux lois de commande présentées dans le chapitre précédent : linéarisation entrée-état avec passivité et mode glissant.

4.2 Modèle et banc d'essais : comparaison et validation

Nous commençons d'abord par la définition des paramètres de la machine de test afin de pouvoir réaliser des simulations proches de la réalité. La deuxième étape consiste à trouver une estimation des valeurs qui régissent le balourd. Finalement, la même loi de commande sera appliquée au modèle et à la machine pour comparer leurs comportements.

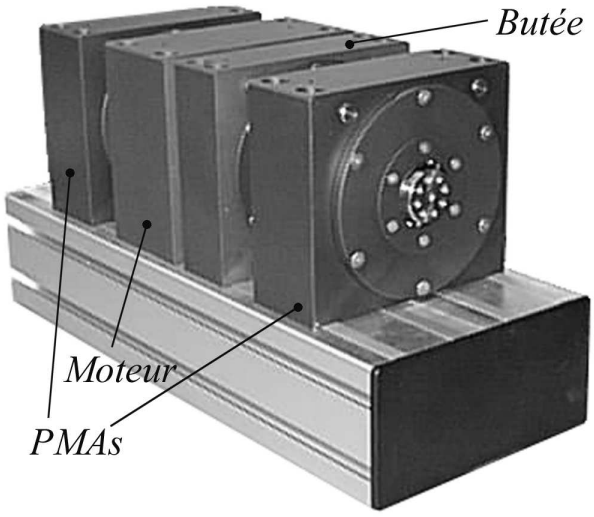
4.2.1 Paramètres constructeur

Le banc de test est une broche classique de petite taille (voir photo 1(a) de la Figure 4.1). Le rotor est centré par 10 actionneurs : deux plans de contrôle comportent chacun les deux axes y et z (huit actionneurs au total) ; l'axe x (horizontal) est contrôlé indépendamment par une butée axiale (cette géométrie est celle des Figures 2.4 et 2.5). Des roulements à billes d'atterrissage limitent les déplacements à une valeur inférieure à l'entrefer nominal. Un capteur inductif, de mesure de position, est couplé avec chacune des bobines, légèrement décalé selon x d'une valeur d_{ca}.

Chacune des dix bobines est indépendamment alimentée par une alimentation à découpage inversible en tension (mais pas en courant) de tension maximum 50 Volts et de courant maximum 6 Ampères. Cette électronique est commandable en courant ou en tension via le changement d'un cavalier (voir photo 1(b)).

Un moteur asynchrone est inclus dans la broche ; sa cage est collée sur le rotor de la broche, alors que le stator est accroché au même socle que les bobines. Cette structure est compacte et le rotor ne comporte aucun point de contact (contrairement à certains modèles où l'entraînement en rotation est fait par un moteur classique accouplé en bout de rotor). Ce moteur est alimenté par un boîtier séparé de l'électronique de puissance des actionneurs, et la consigne de la vitesse $\dot{\phi}$ est réglée manuellement (voir photo 1(c)).

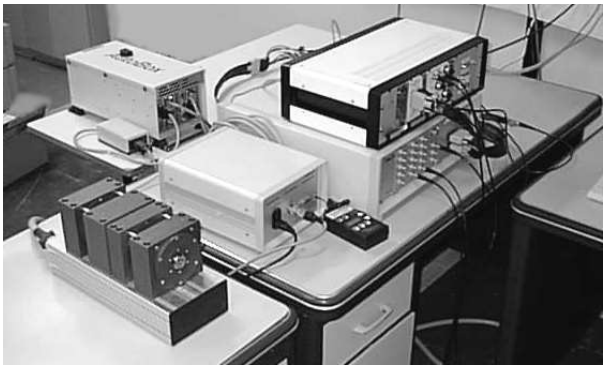
1. N'oublions pas que MATLAB et SIMULINK sont des marques déposées.



(a) Broche à dix actionneurs et moteur asynchrone

(b) Boîtier d'alimentation de la broche et boitier contenant des filtres et un PID analogiques

(c) Boîtier d'alimentation du moteur



(d) Vue d'ensemble : broche, boîtiers d'alimentation, et Dspace

FIG. 4.1: *Système expérimental*

Dans sa configuration de base, cette plate-forme expérimentale reçoit une carte de contrôle numérique à base de DSP. Cette carte se glisse dans le boîtier de l'électronique de puissance. Elle est fournie avec un contrôleur linéaire possédant une option de suppression de balourd. Bien que n'ayant pas acquis cette carte contrôleur, nous l'avons eu en prêt (par la société MECOS) ce qui nous a permis de faire quelques mesures très utiles pour estimer les paramètres du balourd. Afin de pouvoir utiliser un contrôleur extérieur au boîtier de puissance (comme un Dspace par exemple), les signaux entrants et sortants de la commande ont été redirigés sur la façade du boîtier.

Les paramètres mécaniques et électriques fournis par le constructeur sont rapportés dans la Table 4.1

Les deux valeurs λ et λ_x sont calculées à partir des valeurs des inductances des bobines en supposant que la relation suivante est exacte :

TAB. 4.1: *Données constructeur de la broche expérimentale*

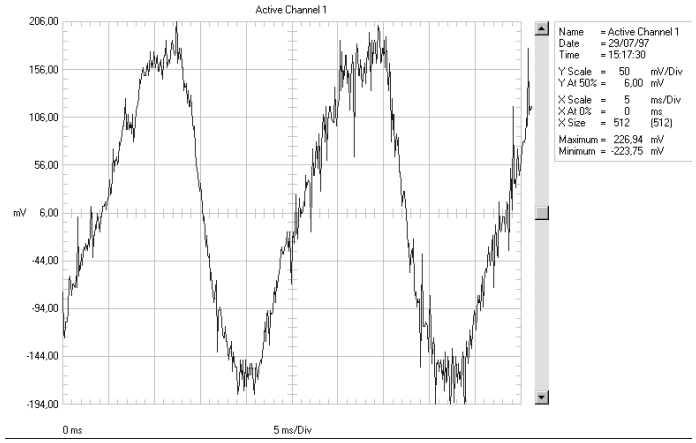
	Paramètres mécaniques	
m	$3.097\ kg$	Masse du rotor
I_x	$8.589\,10^{-4}\ kg.m^2$	Moment d'inertie selon l'axe x
I_y	$2.146\,10^{-2}\ kg.m^2$	Moment d'inertie selon l'axe y
I_z	$2.146\,10^{-2}\ kg.m^2$	Moment d'inertie selon l'axe z
e_0	$0.4\,10^{-3}\ m$	Entrefer nominal des 10 actionneurs
l_c	$0.1315\ m$	Distance entre le centre géométrique et les capteurs
d_{ca}	$1.8\,10^{-2}\ m$	Distance entre le capteur et l'actionneur correspondant
δx	$\approx 3\,10^{-3}\ m$	Distance entre le centre géométrique et le centre d'inertie
f_v	$\approx 1000\ Hz$	Fréquence du premier mode flexible du rotor
$\dot{\phi}_{max}$	$30000\ t/min$	Vitesse maximum de rotation
	Paramètres électriques	
R	$0.2\ \Omega$	Résistance des actionneurs des plans de contrôle
L	$3.0\ mH$	Inductance des actionneurs des plans de contrôle
λ	$1.2\,10^{-6}\ mH.m$	λ des actionneurs des plans de contrôle
R_x	$1.6\ \Omega$	Résistance des actionneurs de la butée axiale
L_x	$5.8\ mH$	Inductance des actionneurs de la butée axiale
λ_x	$2.32\,e^{-6}\ mH.m$	λ de la butée axiale
I_{max}	$6\ A$	Courant maximum dans les actionneurs
V_{max}	$50\ V$	Tension maximum appliquée aux actionneurs
	Paramètres capteurs et entrées	
Capteurs		$-10,\ +10\ V$ correspond au déplacement $-0.25\,10^{-3},\ +0.25\,10^{-3}\ m$
Entrées en courant		$0,\ +10\ V$ correspond à une variation du courant de 0 à $6\ A$
Entrées en tension		$0,\ +10\ V$ correspond à une variation de la tension de -50 à $+50\ V$

$$L = \frac{\lambda}{e_0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = L\, e_0 \tag{4.1}$$

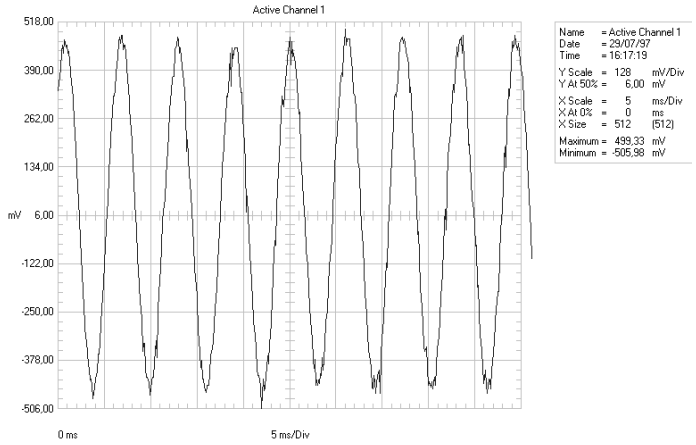
4.2.2 Détermination des paramètres du balourd

Afin de déterminer les paramètres descriptifs du balourd (δy, δz, Φ), la méthode la plus simple est de disposer d'une loi de commande permettant au système de tourner autour de son centre d'inertie. Cela a été possible grâce au prêt, par le fabricant de la machine, de leur carte de contrôle comportant un tel algorithme. Cette commande est linéaire à base de filtres coupe fréquence.

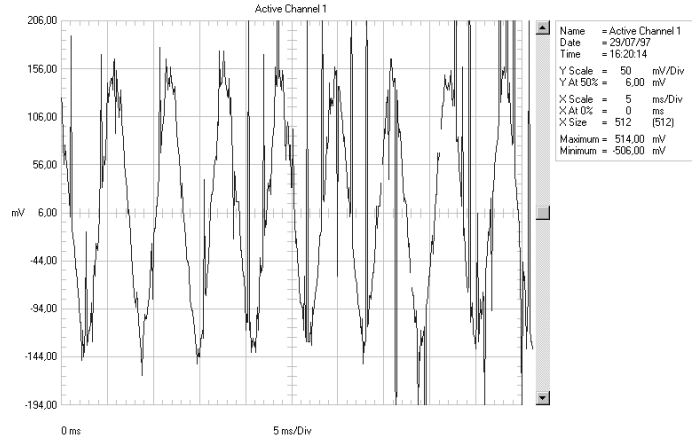
Le rotor est censé tourner autour de son axe d'inertie. Les positions délivrées par les capteurs dans chaque plan de contrôle, nous renseignent donc sur la distance, dans chacun de ces plans, entre l'axe d'inertie et l'axe géométrique ; une tension de 10 Volts représente un déplacement de 250 μm. Les mesures sont effectuées grâce à un oscilloscope numérique capable de dialoguer avec un PC par l'intermédiaire d'une liaison série. Les déplacements ont tout d'abord été mesurés par rapport au



(a) Position selon l'axe $z1$ à 15 Hz

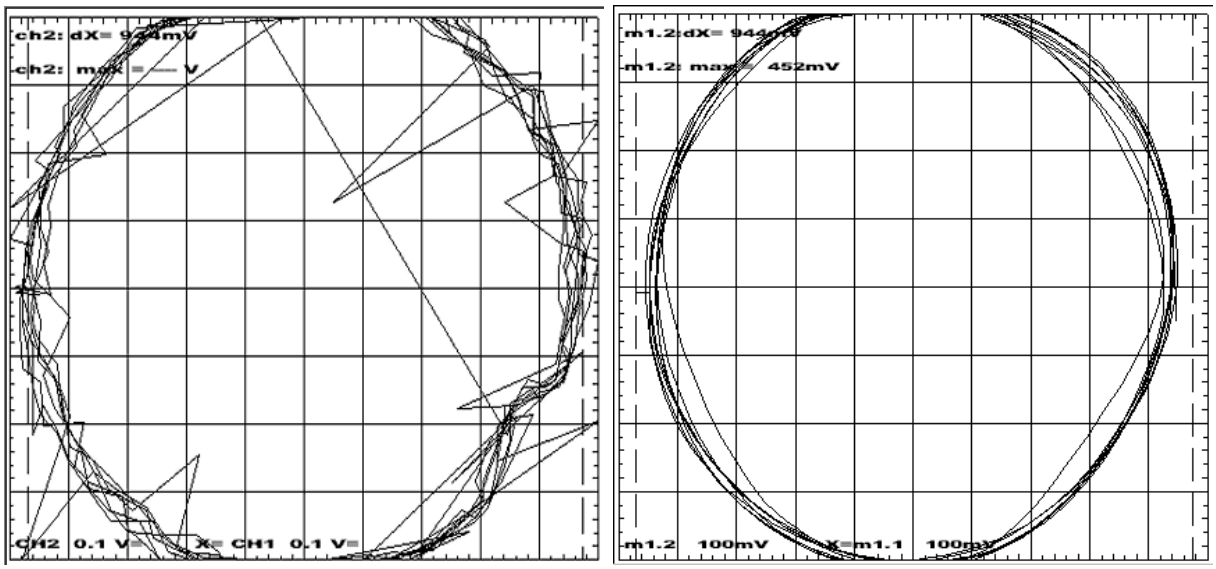


(b) Position selon l'axe $z1$ à 165 Hz



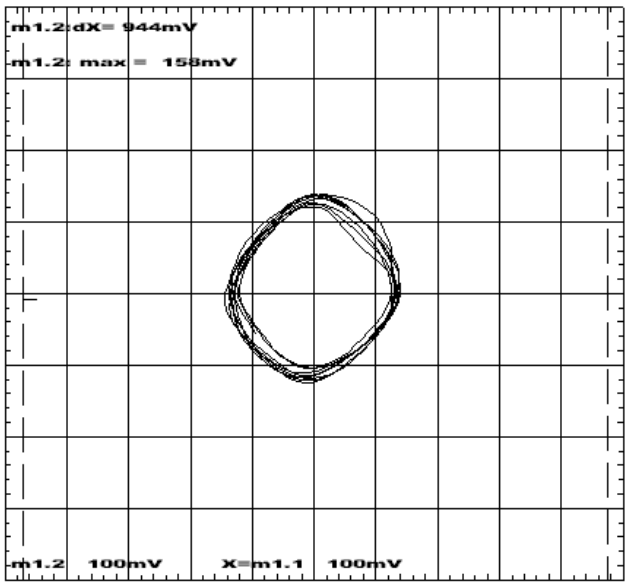
(c) Position selon l'axe $z2$ à 165 Hz

FIG. 4.2: *Essais réels avec une commande à filtres coupe fréquence : position selon z*



(a) Plan de contrôle 1 à 165 Hz

(b) Plan de contrôle 1 à 165 Hz : signal filtré



(c) Plan de contrôle 2 à 165 Hz : signal filtré

FIG. 4.3: *Essais réels avec une commande à filtres coupe fréquence : position dans le plan de contrôle*

temps, puis dans chaque plan $y - z$, et ce pour plusieurs vitesse de rotation $\dot{\phi}$. Dans le cas des mesures dans les plans $y - z$, un outil de filtrage numérique mis en oeuvre dans l'oscilloscope a été appliqué aux signaux (sur deux des trois images présentées ici) en raison des nombreux bruits de mesure constatés.

Trois exemples représentatifs de mesures de la position selon l'axe z sont donnés sur les Figures 2(a), 2(b) et 2(c) de la Figure 4.2. La première et la seconde représentent le déplacement z_1 à 15 Hz et 165 Hz respectivement. A 15 Hz, le déplacement z_1 est d'environ 5 μm (soit 200 mV). le déplacement z_2 (non donnée) n'est pas significatif. A 165 Hz, le déplacement z_1 est d'environ 12.5 μm. On remarque immédiatement que les valeurs à 15 Hz et 165 Hz diffèrent largement. On peut trouver deux raisons principales à cette différence :

- à faible vitesse, la partie principale du balourd (celle en $\dot{\phi}^2$) est petite devant les perturbations dues aux couplages gyroscopiques. Cela n'est plus vrai à grande vitesse ;

- la loi de commande appliquée ne tient pas compte des couplage gyroscopiques et l'algorithme de suppression de balourd doit être perturbé par ces derniers, et ce quelle que soit la vitesse.

Pour ces raisons, on apportera plus de crédit à l'essai fait à 165 Hz en supposant que la valeur déduite est peut-être surestimée à cause des couplages gyroscopiques. A 165 Hz, le déplacement z_2 est d'environ 3.75 μm. En comparant les graphes 2(b) et 2(c), on voit que la différence de phase des deux signaux est faible. Ils sont seulement séparés d'un angle β valant :

$$\beta = \frac{0.2 \times 5\, ms}{5\, ms} 2\,\pi \approx 1\, rd \tag{4.2}$$

Pour compléter les essais 2(a), 2(b) et 2(c), on a rapporté les déplacements dans les plans de contrôle sur les graphes 3(a), 3(b) et 3(c) de la Figure 4.3. Les deux premiers graphes représentent le même signal (plan 1) à la même vitesse (non filtré et filtré grâce au dispositif de l'oscilloscope). Le troisième donne le signal filtré dans le plan 2. On constate que le déplacement est le même dans les deux directions y et z, et ce pour les deux plans [2]. La forme légèrement carrée de la trajectoire est due aux erreurs de modélisation apportées par la linéarisation du modèle : la loi de commande y est plus sensible lorsque la trajectoire de l'axe géométrique se situe entre deux actionneurs que lorsque celle-ci passe sous un actionneur (voir Figure 4.4). La position, sur notre machine, des actionneurs (dans un plan), ainsi que les axes correspondants, est rapportée sur la Figure 4.4. L'orientation choisie permet la compensation de la pesanteur par deux actionneurs et non par un seul.

Possédant les informations r_1 (déterminé par l'amplitude de z_1 à 165 Hz), r_2 (déterminé par l'amplitude de z_2 à 165 Hz) et β (voir Figure 4.5), il devient possible de calculer les paramètres δy, δz et Φ (voir Figure 2.18) (Ces trois valeurs sont calculées numériquement par approximations successives). On trouve :

2. Le déplacement circulaire du système n'est pas forcément la règle s'il existe une dissymétrie dans les actionneurs.

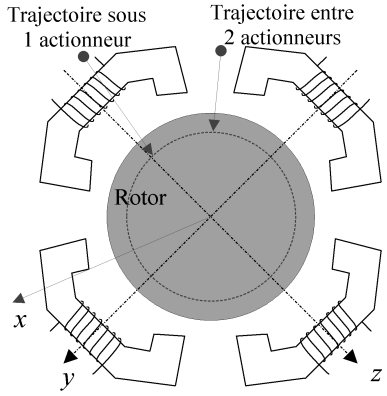


FIG. 4.4: *Position des actionneurs et des axes sur la machine expérimentale*

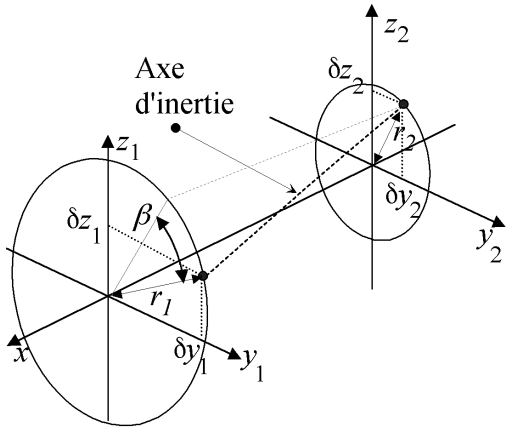


FIG. 4.5: *Paramètres issus des mesures sur la machine expérimentale*

- $\delta y = 6.5\,10^{-6}\,m$
- $\delta z = 3.5\,10^{-6}\,m$
- $\phi = 4.1\,10^{-5}\,rd$

4.2.3 Simulations pour validation

Tous les paramètres du modèle étant maintenant connus, il devient possible de faire une simulation avec une commande simple. Celle-ci est une linéarisation entrée-état (voir sous-chapitre 3.3.2.1) où les accélérations désirées sont déterminées par des PID fixes. La commande sera ensuite appliquée à la machine expérimentale pour vérifier si la réponse réelle présente des similitudes avec la simulation. La dynamique du troisième ordre choisie pour cet essai est donnée par :

$$(s+\omega_0)\left(s^2+2\,\xi\,\omega_0+\omega_0^2\right) \tag{4.3}$$

ω_0 est pris égal à $2\,10^2\,rd\,s^{-1}$ et ξ égale à 1.2. La simulation se déroule selon le scénario suivant :

- $t = 0\,s$: le rotor est posé sur ses roulements de repos et la position désirée passe à zéro ;
- $t = 0\,s \implies t = 0.1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est nulle ;
- $t = 0.1\,s \implies t = 0.8\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de zéro à $15\,Hz$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ;
- $t = 0.8\,s \implies t = 1.5\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de $15\,Hz$ à $30\,Hz$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ;
- $t = 1.5\,s \implies t = 2.2\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de $30\,Hz$ à $50\,Hz$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ;

La Figure 4.6 donne dans la case (1,1) le profil de la vitesse $\dot{\phi}$ appliquée à la broche dans cette simulation. Les cases (2,1), (2,2), (3,1) et (3,2) donnent les quatre positions des deux plans de contrôle. A chaque vitesse correspond une amplitude de déplacement, et bien sûr une fréquence d'oscillation (égale à $\dot{\phi}$). En comparaison aux premières mesures effectuées sur la broche, les paramètres choisis pour le balourd donnent une valeur plus faible de ce dernier dans le deuxième plan de contrôle que dans le premier. Ce choix se retrouve parfaitement sur les graphes où l'on peut remarquer que les amplitudes de y_2 et z_2 sont environ quatre fois moins importantes que celles de y_1 et z_1. Ce rapport rejoint le fait que r_2 est quasiment égal à $r_1/4$. Sur les graphes (3,1) et (3,2), on voit que les trajectoires démarrent d'une position hors des graphes (au départ le palier est dans sa position de repos). La réponse à cet échelon de consigne (passage de la position de repos à la position zéro) est détaillé sur les courbes (4,1) et (4,2).

Pour compléter les graphes précédents, les trajectoires dans les plans 1 et 2 sont données sur la Figure 4.7. On peut remarquer qu'à certains endroits la trajectoire n'est pas parfaitement circulaire (certaines lignes se coupent) ; cela est dû aux termes de couplages gyroscopiques du modèle.

Les derniers graphes présentés sur la Figure 4.8 donnent les huit courants des actionneurs des deux plans de contrôle. On peut faire trois remarques sur cette figure :

- sur les graphes correspondant aux axes y (direction selon laquelle ne s'exerce pas la pesanteur), on constate qu'à vitesse nulle (c'est à dire lorsqu'aucune perturbation ne s'exerce) que les courants ne sont pas nuls mais égaux à environ $0.1\ A$. Cela est dû à notre algorithme de linéarisation autour de la force zéro ;
- sur les graphes correspondant aux axes z (direction selon laquelle s'exerce la pesanteur), la valeur moyenne des courants dans les bobines p est de $2\ A$. Ces courants compensent la pesanteur. Dans les bobines m, les courants sont toujours nuls, car la perturbation due au balourd ajoutée à la pesanteur ne nécessite pas l'inversion du signe du courant. On est réellement en fonctionnement non linéaire ;
- les amplitudes de courant nécessaires pour compenser le balourd sont plus faibles pour les axes z (où les courants sont de moyenne non nulle) que pour les axes y. L'intérêt de conserver

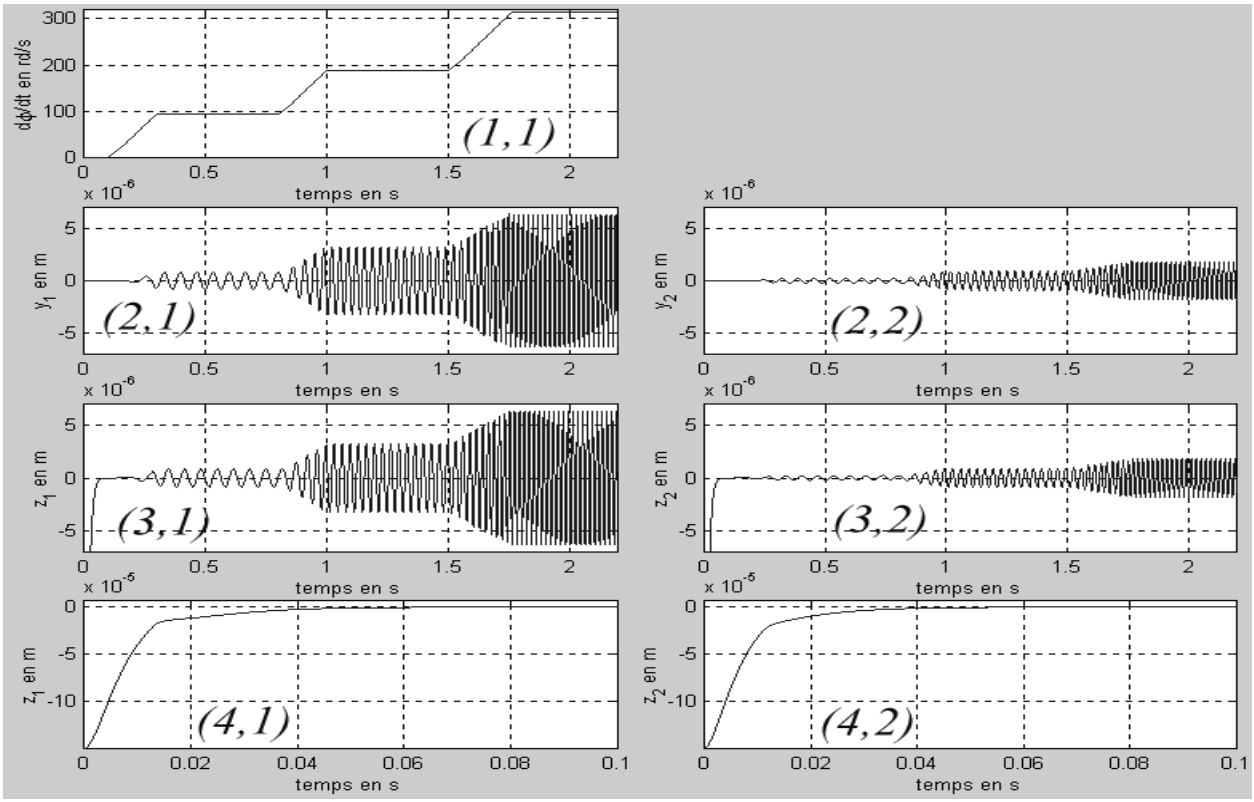


FIG. 4.6: *Vitesse $\dot{\phi}$ du rotor et positions en simulation*

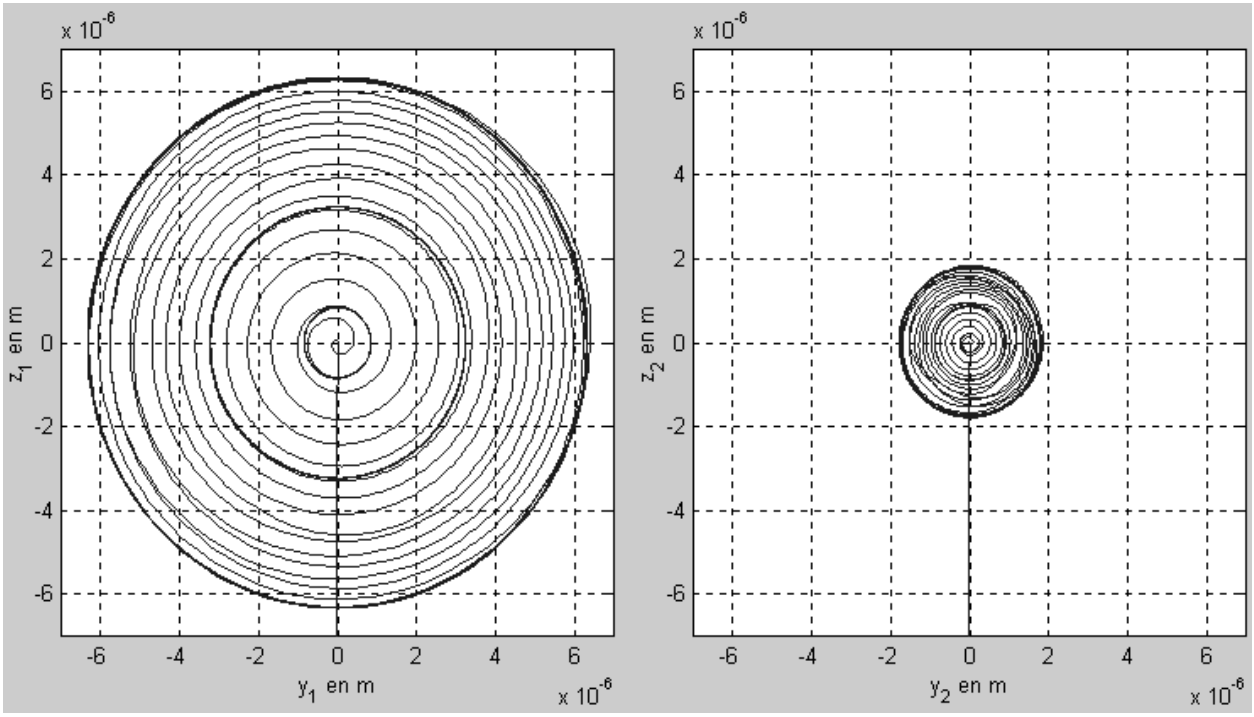


FIG. 4.7: *Trajectoires dans les plans de contrôle 1 et 2 en simulation*

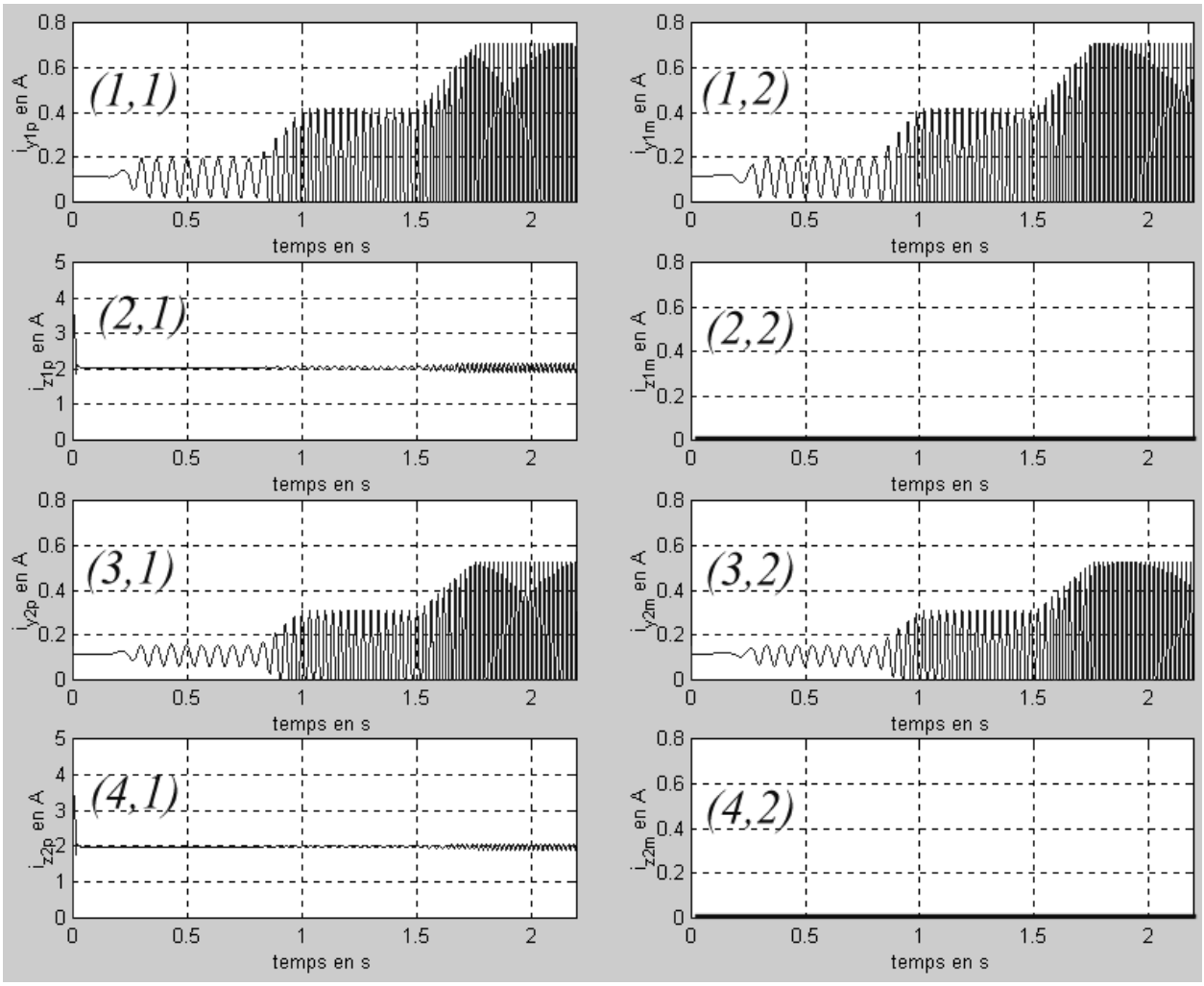


FIG. 4.8: *Les huit courants en simulation*

la non-linéarité, qui fait que la force est proportionnelle au carré du courant, est donc parfaitement visible. En extrapolant, on peut dire qu'une commande non linéaire (sans prise en compte du balourd) pourra supporter, sans saturation des courants, une valeur du balourd plus importante qu'une commande linéaire.

4.2.4 Essais réels pour validation

Pour les essais réels présentés ici, un système Dspace (à base de processeur DSP C40, visible sur la Figure 1(d)) a été utilisé. Pour optimiser le temps de calcul, la loi de commande est réalisée en langage C. La carte d'entrées-sorties analogiques numériques ne comporte que huit sorties. Cela nous a obligé à utiliser une carte PID analogique pour la commande de l'axe x (fonctionnement linéaire). La puissance de calcul disponible n'étant pas suffisante, c'est une commande en courant (linéarisation entrée-état) qui est mise en œuvre[3].

3. On a déterminé, en simulation, que les performances de la loi de commande commencent à se dégrader si la période d'échantillonnage dépasse 500 μs. or, la commande en courant sans élimination de balourd s'exécute en

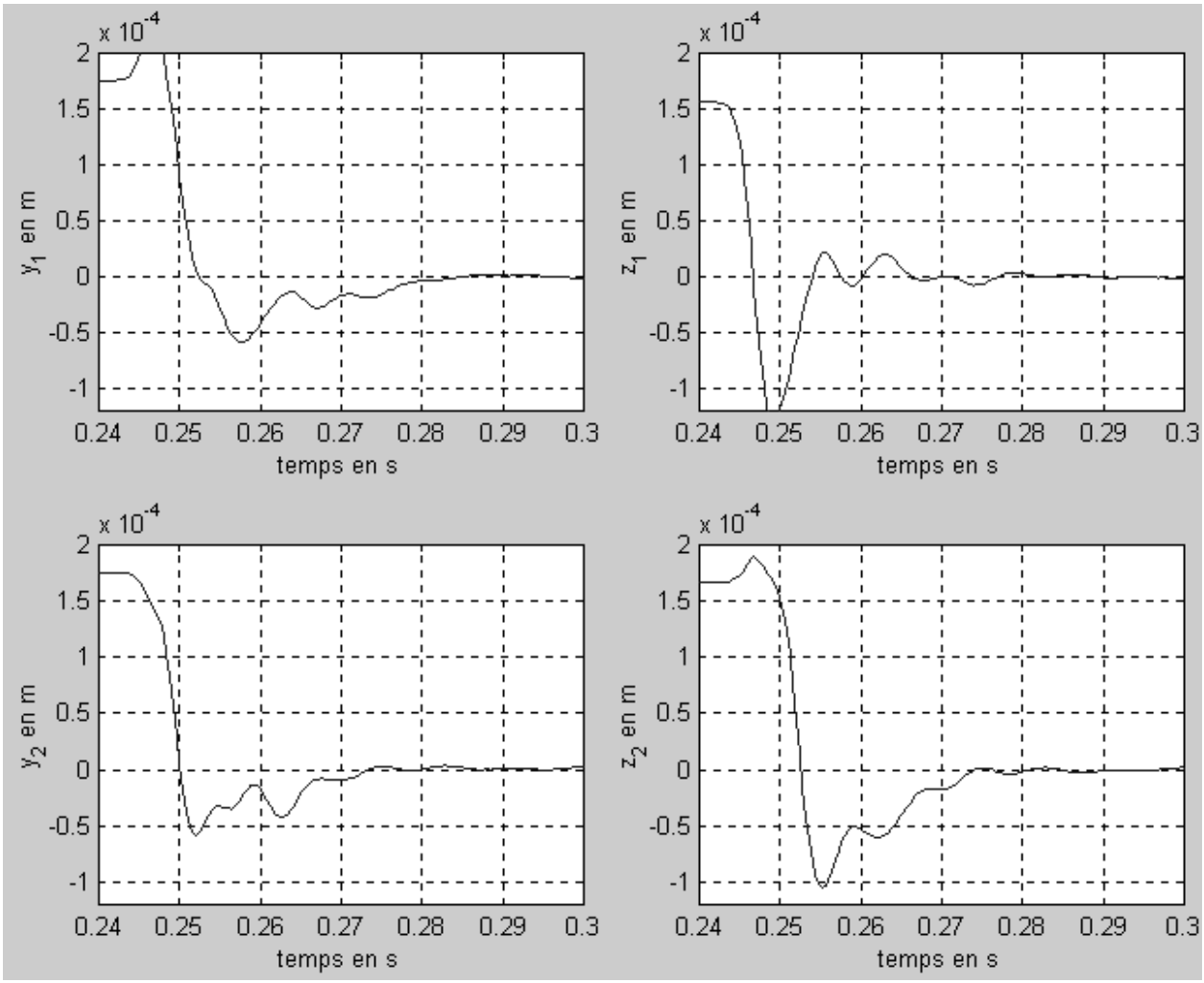


FIG. 4.9: *Essai réel: réponse à un échelon*

Le premier essai effectué est la réponse à l'échelon de consigne qui consiste à passer de la position de repos à la position d'équilibre (voir 4.9). Etant donnée la disposition des actionneurs (décrite un peu plus haut) les quatre positions présentent une valeur différente de zéro au repos. De plus les directions positives étant dirigés vers le bas, les valeurs au repos sont positives. En comparaison de la réponse à un échelon en simulation, on observe un grand dépassement. Deux raisons peuvent expliquer cette remarque :

– dans l'essai réel, la fonction intégrale se charge à la valeur maximale qu'autorise le système anti-saturation, et ce dès le démarrage du DSP (pour des raisons d'implémentation physique) ; cela provoque forcément un dépassement supérieur par rapport au cas où l'intégrateur a une condition initiale égale à zéro ;

environ 370 μs sur le C40. La commande en tension, qui nécessite l'acquisition de 10 signaux supplémentaires, ne peut pas être calculée en moins de 500 μs. Cette réalisation est prévue sur une plate-forme PC (avec un noyau temps réel sous DOS) équipé d'une carte d'acquisition rapide.

– on constate que pour un temps de réponse équivalent, on a un système oscillant ; on peut mettre cela sur le compte d'une erreur sur la valeur des paramètres utilisés, en particulier λ obtenu de façon discutable (ce point demandera plus de vérification). On a vu dans le chapitre précédent qu'une erreur de paramètres peut entraîner un système moins stable.

On peut aussi remarquer que les réponses sont différentes selon les actionneurs, ce qui peut traduire les petites dissymétries de fabrication des actionneurs et des capteurs.

La Figure 4.10 présente la réponse du système aux différentes valeurs de vitesse $\dot{\phi}$ choisie dans la simulation. Les réponses sont données dans les plans de contrôle. En comparant cette Figure aux Figures 4.6 et 4.7, on constate que les valeurs moyennes des amplitudes de déplacement sont très proches dans les deux cas, et ce pour les trois vitesses de rotation. Cela apporte une certaine validité aux valeurs des paramètres calculés pour le balourd. Par contre, il est clair que les trajectoires sont beaucoup moins circulaires que dans la simulation. On peut émettre l'hypothèse que les déformations observées sont dues à l'effet des couplages gyroscopiques. La commande doit ici être plus sensible à leurs effets à cause de son caractère plus oscillant.

La dernière Figure 4.11 permet d'apprécier les courants nécessaires pour compenser la pesanteur. Etant donné que deux actionneurs agissent dans un plan (au lieu d'un seul pour la simulation), que ces actionneurs sont à 45^o l'un de l'autre, et que les forces créées sont proportionnelles aux carrés des courants, alors les courants des bobines qui travaillent, dans l'essai réel, devraient être égaux à 0.8 fois celui de la bobine qui travaille dans la simulation. Or, au lieu des 1.6 A attendus, on observe 1.9 A, soit 20% de plus. Cela confirme l'idée que λ peut avoir été surestimé.

4.3 Linéarisation entrée-état et passivité

Afin de valider nos propos du chapitre 2, la loi de commande par linéarisation entrée-état et passivité est ici appliquée en simulation au modèle de la broche[4]. La dynamique du troisième ordre choisie pour cet essai (que ce soit pour les PID fixes ou les PID tournants) est donnée par :

$$(s + \omega_0)\left(s^2 + 2\,\xi\,\omega_0 + \omega_0^2\right) \tag{4.4}$$

ω_0 est pris égale à $4\,10^2\,rd.s^{-1}$ pour les PID fixes et à $2\,10^2\,rd.s^{-1}$ pour les PID tournants ; ξ est égal à 1.2 dans les deux cas. La simulation se déroule selon le scénario suivant :

– $t = 0\,s$: le rotor est posé sur ses roulements de repos et la position désirée passe à zéro ;

– $t = 0\,s \implies t = 0.1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est nulle ;

– $t = 0.1\,s \implies t = 1.2\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de zéro à $300\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; la position désirée est zéro ;

4. Des difficultés techniques font que son implémentation est toujours en cours au moment de la rédaction de ce mémoire. On a cependant vu que la partie linéarisation entrée-état avec PID fixes est déjà fonctionnelle.

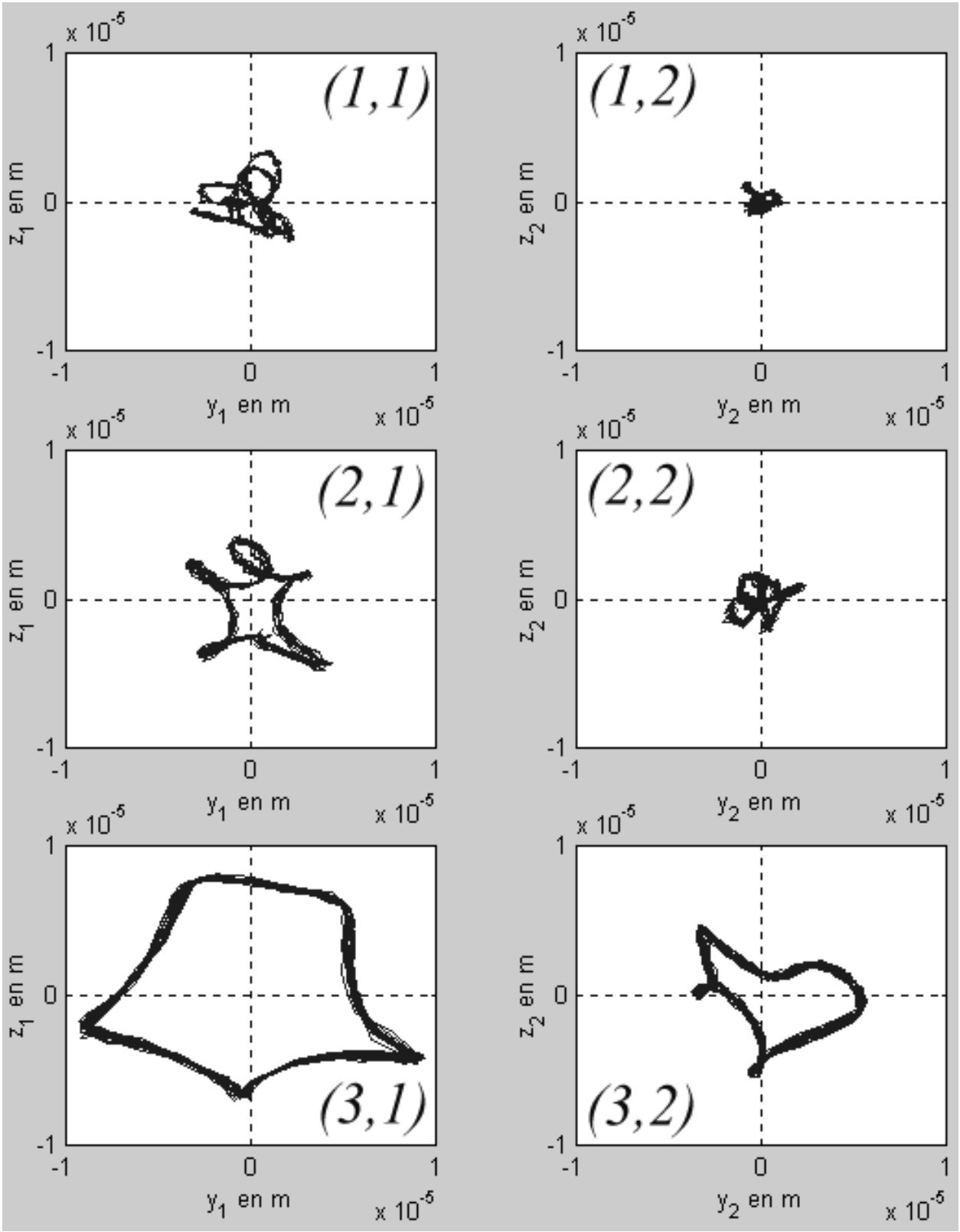


FIG. 4.10: *Essais réels : trajectoires dans les plans 1 et 2 pour 15 Hz, 30 Hz, et 50 Hz*

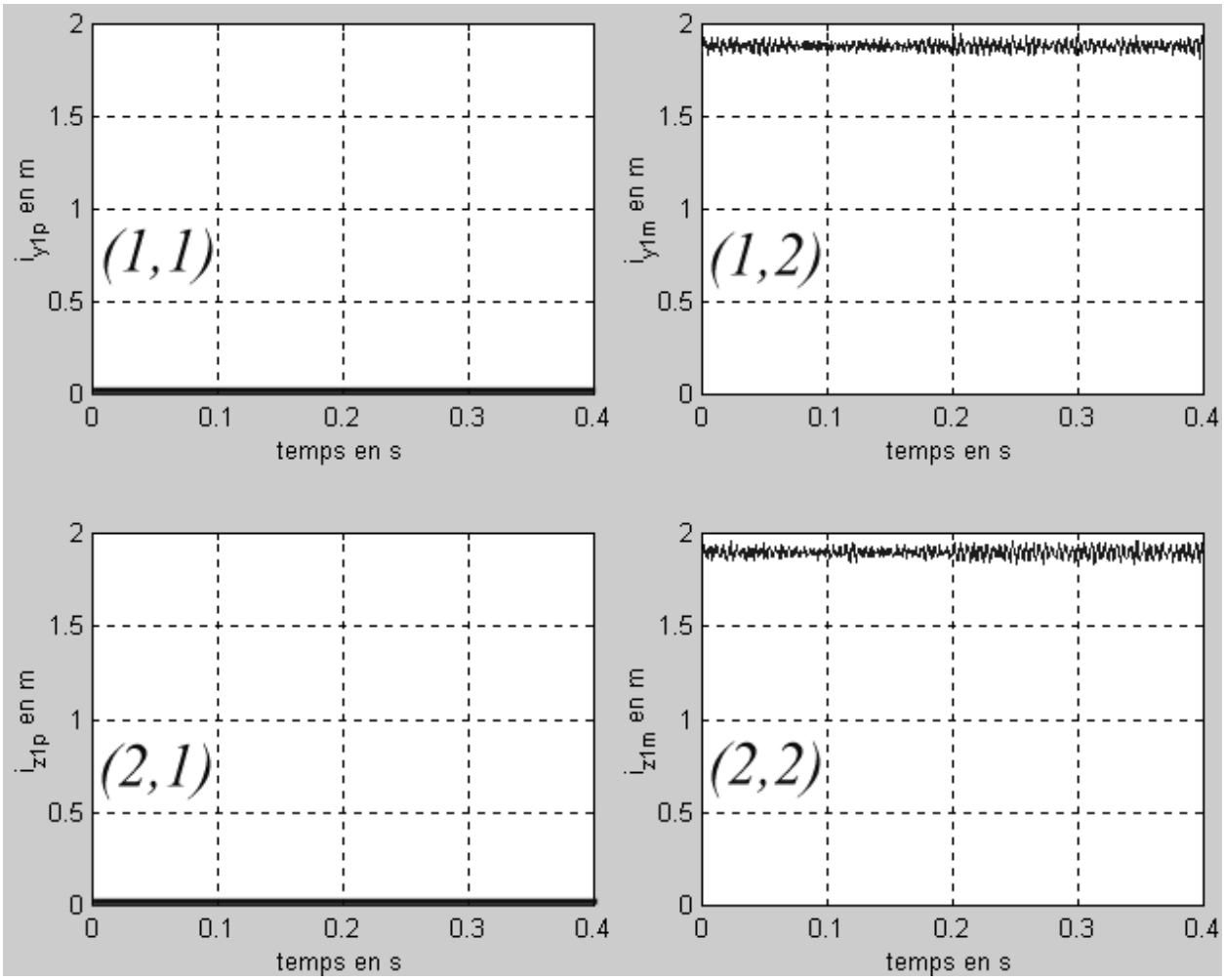


FIG. 4.11: *Essais réels: Courants du plan de contrôle 1 à vitesse nulle*

- $t = 1.2\,s \implies t = 2.5\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est stable à $300\,rd.s^{-1}$; la position désirée change grâce à un algorithme basé sur les longueurs des vecteurs Intégrale des PID tournants ; le rotor tourne maintenant autour de son axe d'inertie ;

- $t = 2.5\,s \implies t = 4\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de $300\,rd.s^{-1}$ à $1000\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; le rotor doit toujours tourner autour de son axe d'inertie ;

- $t = 4\,s \implies t = 5\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est stable à $1000\,rd.s^{-1}$; un couple de perturbation est appliqué selon l'axe z ; le rotor doit toujours tourner autour de son axe d'inertie.

4.3.1 Résultats sans erreurs paramétriques

La Figure 4.12 donne dans la case (1,1) le profil de la vitesse $\dot{\phi}$ appliquée à la broche dans cette simulation. Les cases (2,1), (2,2), (3,1) et (3,2) donnent les quatre positions des deux plans de contrôle. Entre 0 s et 1.2 s toutes les positions restent très proches de la consigne zéro : les PID

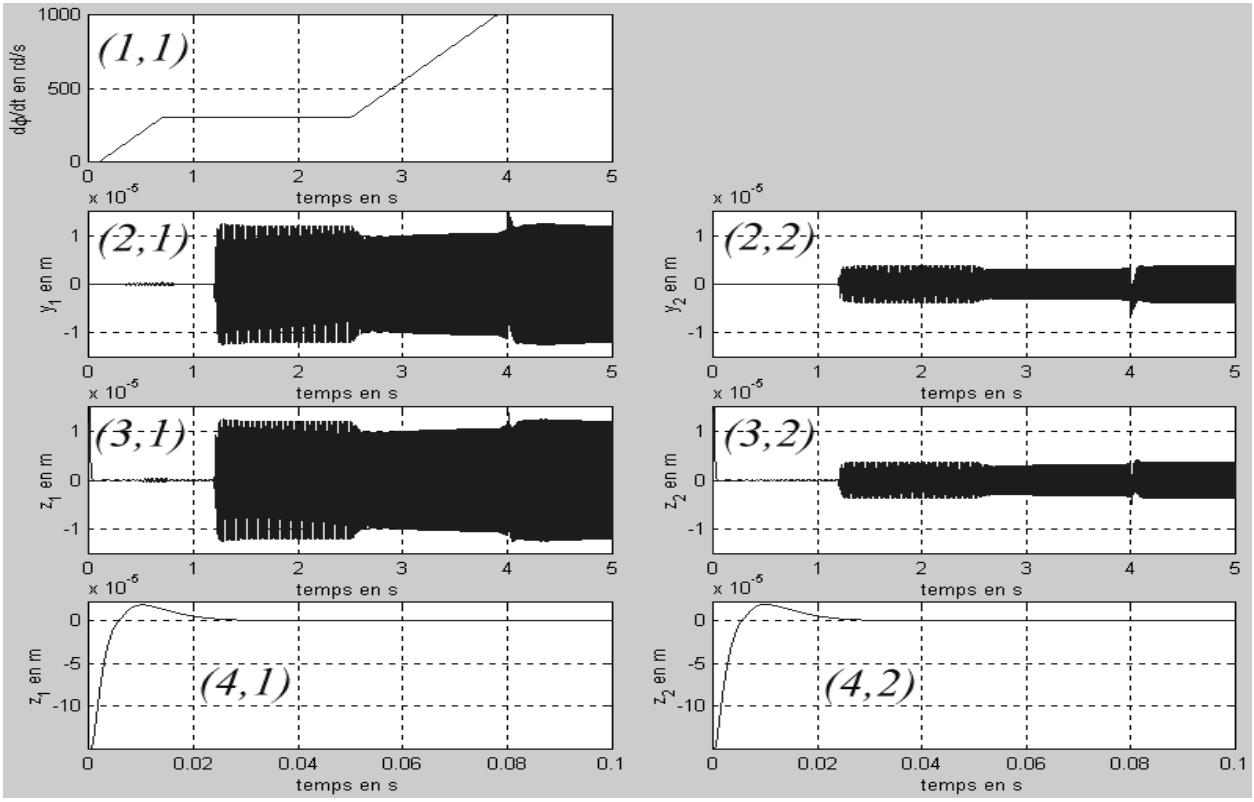


FIG. 4.12: *Linéarisation entrée-état et passivité : vitesse $\dot{\phi}$ du rotor et positions*

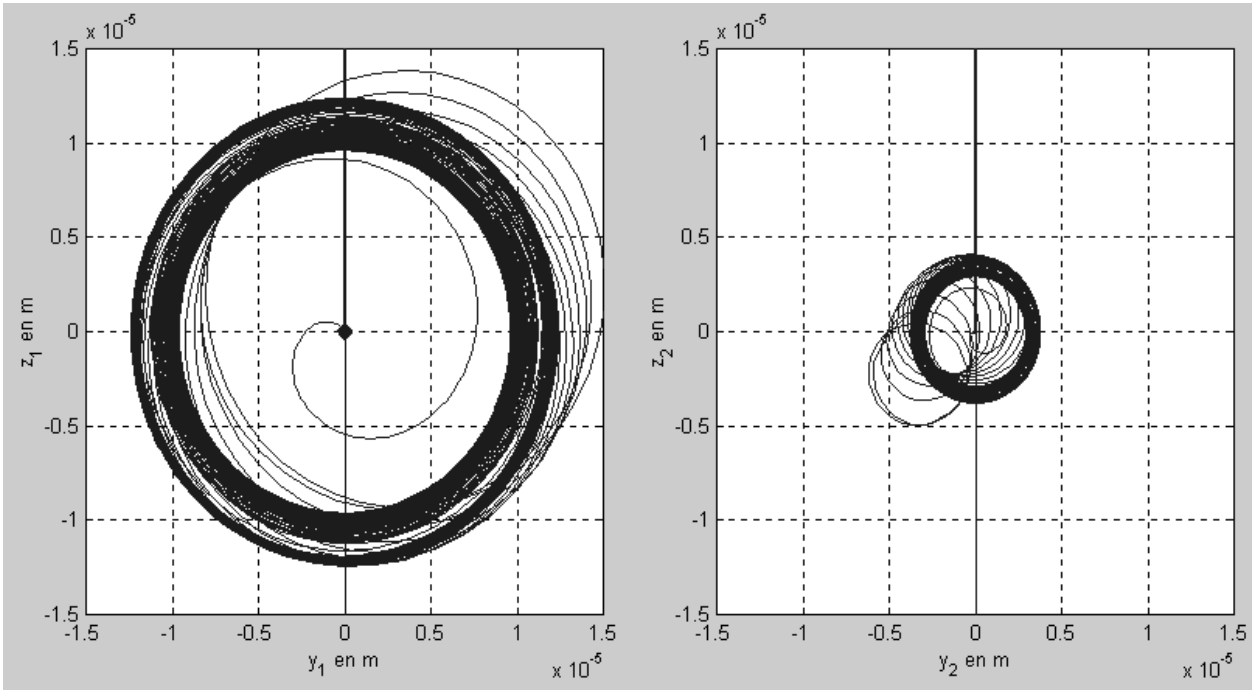


FIG. 4.13: *Linéarisation entrée-état et passivité : trajectoires dans les plans de contrôle 1 et 2*

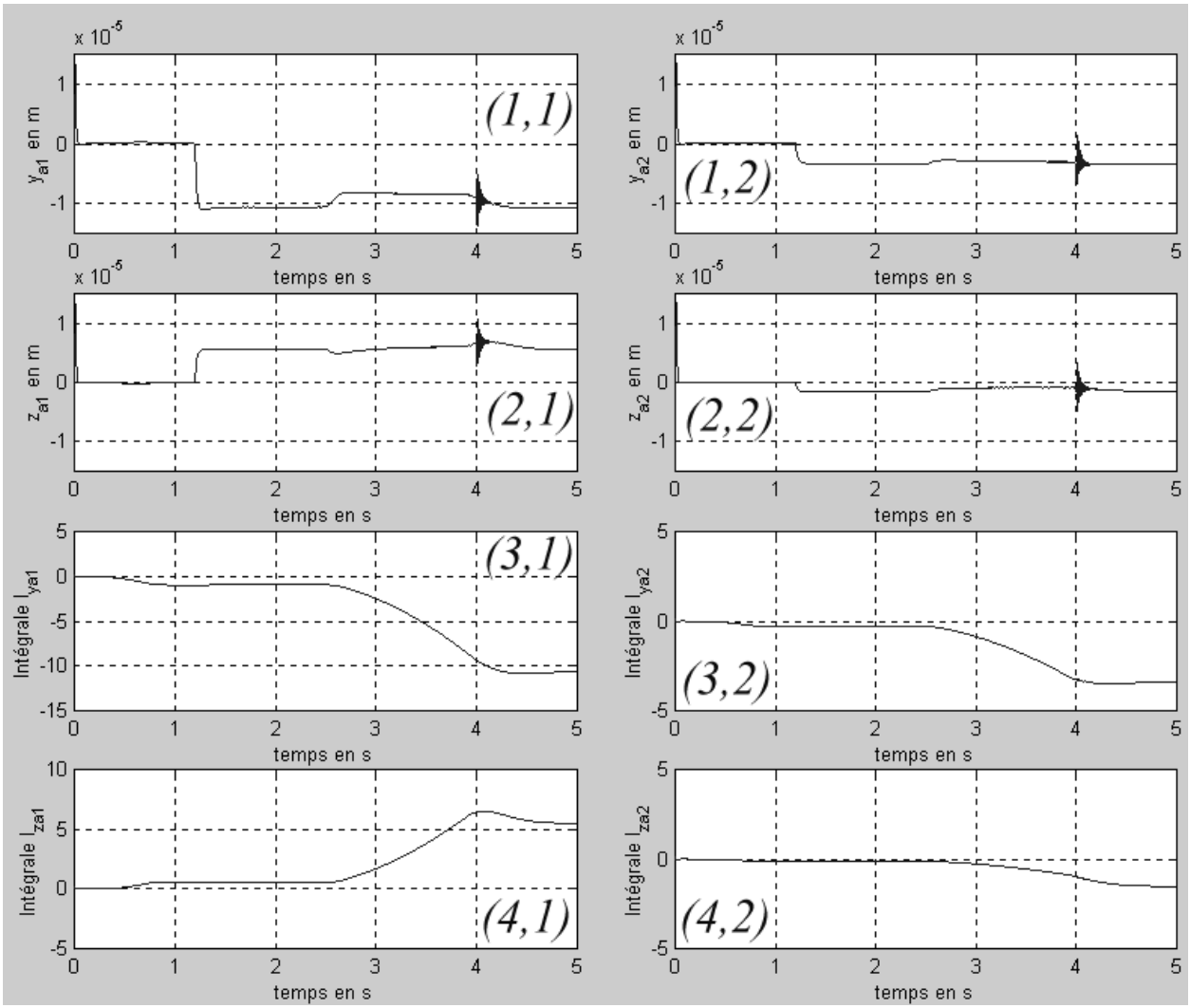


FIG. 4.14: *Linéarisation entrée-état et passivité : positions et fonctions Intégrale dans les repères tournants*

tournants jouent parfaitement leur rôle de compensation du balourd. On peut observer une très faible déviation pendant l'augmentation de $\dot{\phi}$; cette déviation peut être assimilée à une erreur de poursuite (bien qu'ici, ce ne soit pas la consigne qui change mais la perturbation qui augmente et tend à éloigner le rotor de la consigne). Le changement de consigne (à 1.2 s) peut se faire très rapidement. Les rayons des trajectoires ainsi atteintes sont, respectivement dans le plan 1 et 2, 12.5 μm et 3.75 μm. Ces valeurs sont exactement égales aux valeurs r_1 et r_2 qui ont permis le calcul des paramètres du balourd. Cela confirme deux points très importants :

- notre modélisation du balourd est correcte ; les rayons des trajectoires obtenues sur un essai réel (en rotation autour de l'axe d'inertie) sont parfaitement reproduits par le modèle ; ce bon comportement était déjà pressenti dans la comparaison entre simulation et essai réel ;
- l'algorithme chargé de trouver la trajectoire du centre géométrique dans chaque plan de

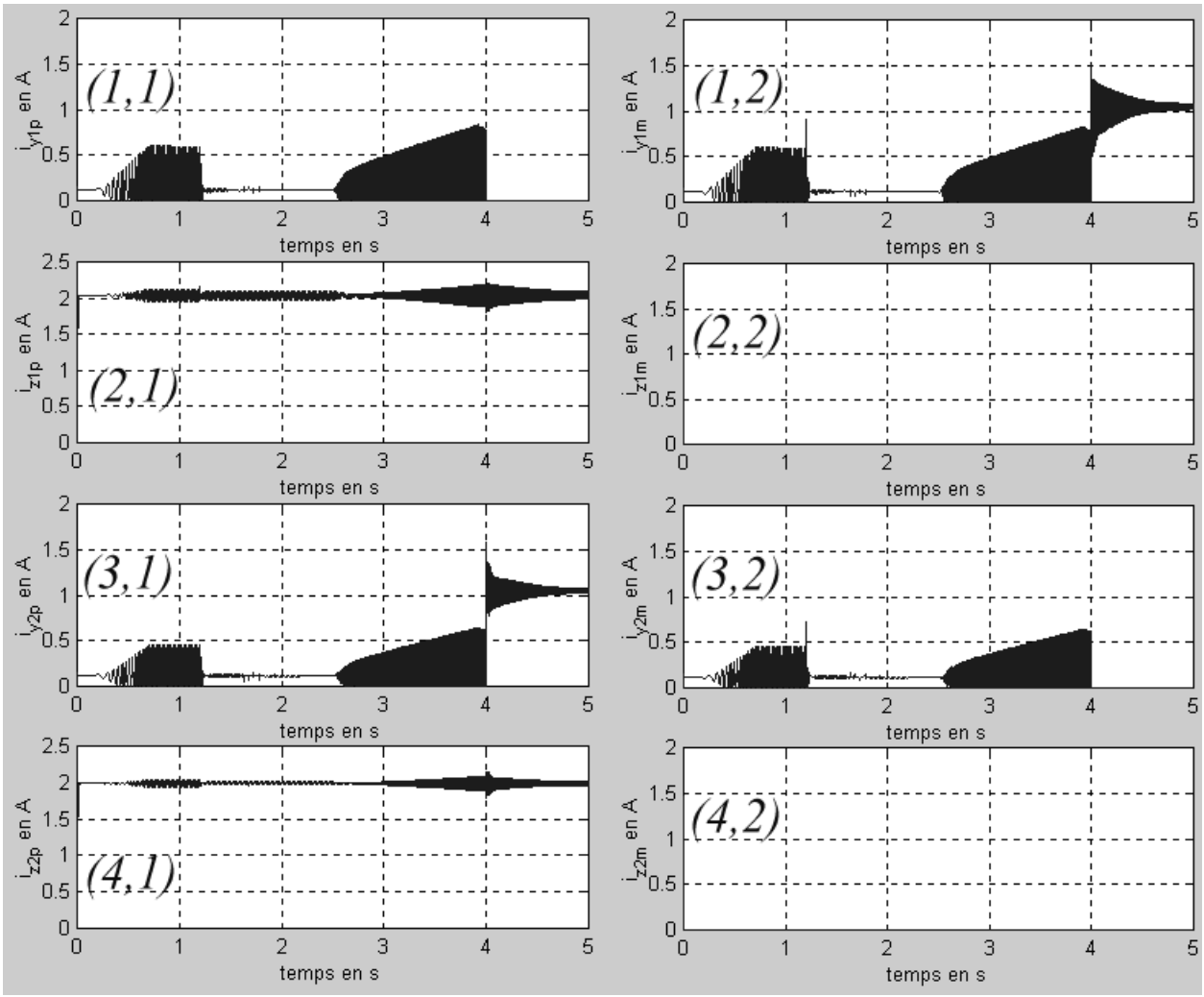


FIG. 4.15: *Linéarisation entrée-état et passivité : les huit courants*

contrôle, pour que le rotor tourne autour de l'axe géométrique, est fonctionnel, même si il reste actuellement relativement basique.

A partir de 2.5 s, la vitesse $\dot{\phi}$ augmente et crée à nouveau une erreur de poursuite. Lorsque $t = 4\,s$, un couple constant de perturbation est appliqué selon l'axe z. Ce couple qui provoque des déplacements opposés selon les axes y_1 et y_2 provoque aussi des déplacements dans les directions z_1 et z_2 (ce phénomène est particulièrement visible sur la Figure 4.13) ; cela montre que les effets gyroscopiques sont bien reproduits par le modèle de simulation. Entre 4 s et 5 s, cette perturbation constante est éliminée (le système revient sur les deux trajectoires circulaires de rayons r_1 et r_2) : les Intégrateurs fixes font leur effet.

Comme dans la simulation précédente, on remarque, sur les graphes (3,1) et (3,2), que les trajectoires démarrent d'une position hors des graphes (au départ le palier est dans sa position de repos). La réponse à cet échelon de consigne (passage de la position de repos à la position zéro) est détaillée dans les cases (4,1) et (4,2).

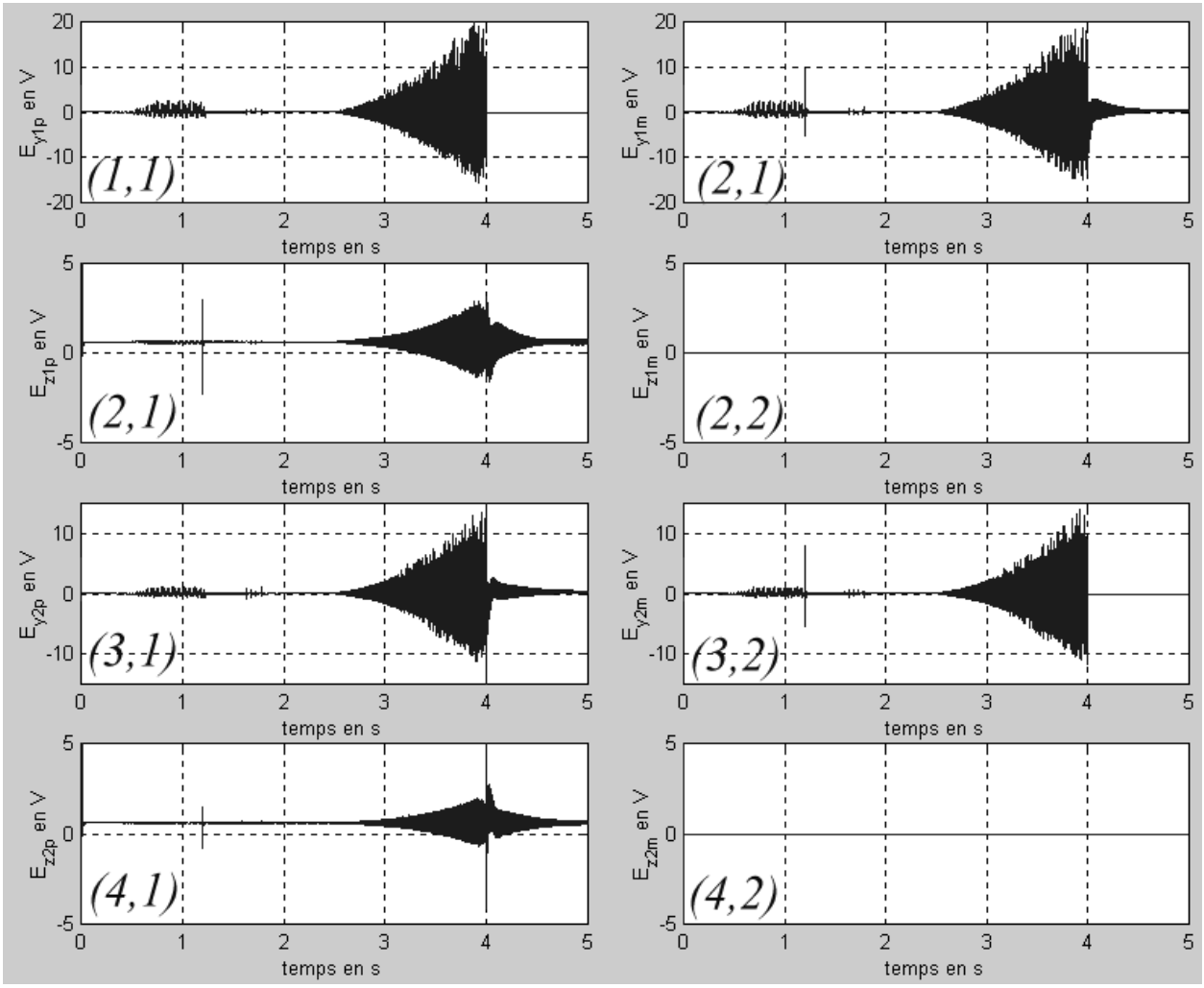


FIG. 4.16: *Linéarisation entrée-état et passivité : les huit tensions*

La Figure 4.14 vient compléter les graphes précédents. On observe que dans les repères tournants, les positions sont quasiment des constantes (phénomène qui nous a conduit a imaginer notre commande à base de PID tournants). Précisons tout de même que l'obtention d'un tel résultat nécessite une bonne mesure de la position ϕ (chose très difficile à obtenir sur la machine expérimentale).

Les deux dernières Figures 4.15 et 4.16 représentent les huit courants et les huit tensions dans les actionneurs des deux plans de contrôle. Comme précédemment, on peut faire les trois remarques suivantes sur les courants :

- sur les graphes correspondant aux axes y, l'effet de notre algorithme de linéarisation autour de la force zéro est visible ;
- sur les graphes correspondant aux axes z, les courants créent des forces qui compensent la pesanteur ;
- les amplitudes des courants nécessaires pour compenser le balourd sont plus faibles pour les

axes z (où les courants sont de moyenne non nulle) que pour les axes y.

On peut de plus remarquer (particulièrement sur les graphes correspondant aux axes y) que dès le changement de consigne à 1.2 s, l'amplitude de variation des courants devient très faible. Le fonctionnement en mode 2 permet bien la réduction du courant nécessaire pour maintenir le rotor sur la trajectoire désirée, ainsi que la diminution de la vibration transmise au stator par les actionneurs. Ce phénomène se remarque aussi à $1000\,rd\,s^{-1}$, bien que la perturbation introduite sur l'axe z le masque un peu.

A propos de la Figure 4.16, la remarque la plus intéressante que l'on puisse faire, concerne les amplitudes atteintes en fonction du fait que le courant correspondant passe ou ne passe pas par zéro. Sur l'axe y_1, par exemple, lorsque le courant doit commuter d'une bobine à l'autre, l'amplitude de la tension peut atteindre 40 V. Au même endroit, cette amplitude ne dépasse pas 5 V pour la tension correspondant à l'axe z. Ce phénomène est dû à la relation en racine carré du courant par rapport à la force désirée. Notre algorithme de linéarisation autour de la force zéro le rend ici compatible avec les valeurs maximales que peut délivrer l'électronique de puissance. Sans cet algorithme, les tensions atteindraient leurs valeurs de saturation.

4.3.2 Remarque supplémentaire

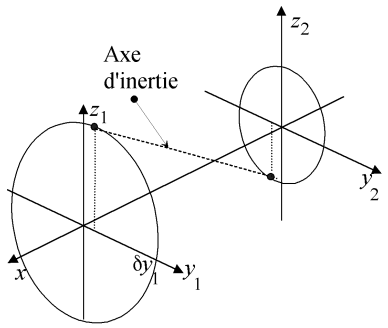


FIG. 4.17: *Position de l'axe d'inertie dans (de Miras and Charara, 1998a)*

Une remarque supplémentaire peut être faite par rapport aux résultats présentés dans (de Miras and Charara, 1998a). Dans ces simulations, l'axe d'inertie du rotor n'est pas du tout parallèle à l'axe géométrique[5] (voir Figure 4.17). Lorsque l'on demande au rotor de tourner autour de l'axe d'inertie, l'axe géométrique décrit un double cône. Les valeurs désirées des accélérations sont quasiment nulles, ce qui provoque un produit $D\,\ddot{q}$ quasiment nul. Par contre le terme $C_{\dot{q}part1}$ est loin d'être nul, ce qui induit des amplitudes de courants désirés non nulles. L'algorithme de sélection des trajectoires désirées en fonction des Intégrateurs tournants montre ici ses limites. Il sera peut-être nécessaire de le compléter pour tenir compte de la norme des vecteurs que l'on peut extraire de $D\,\ddot{q} + C_{\dot{q}part1}$ (équivalents à des forces).

5. Dans les simulations du paragraphe précédent, l'axe d'inertie est "presque" parallèle à l'axe géométrique.

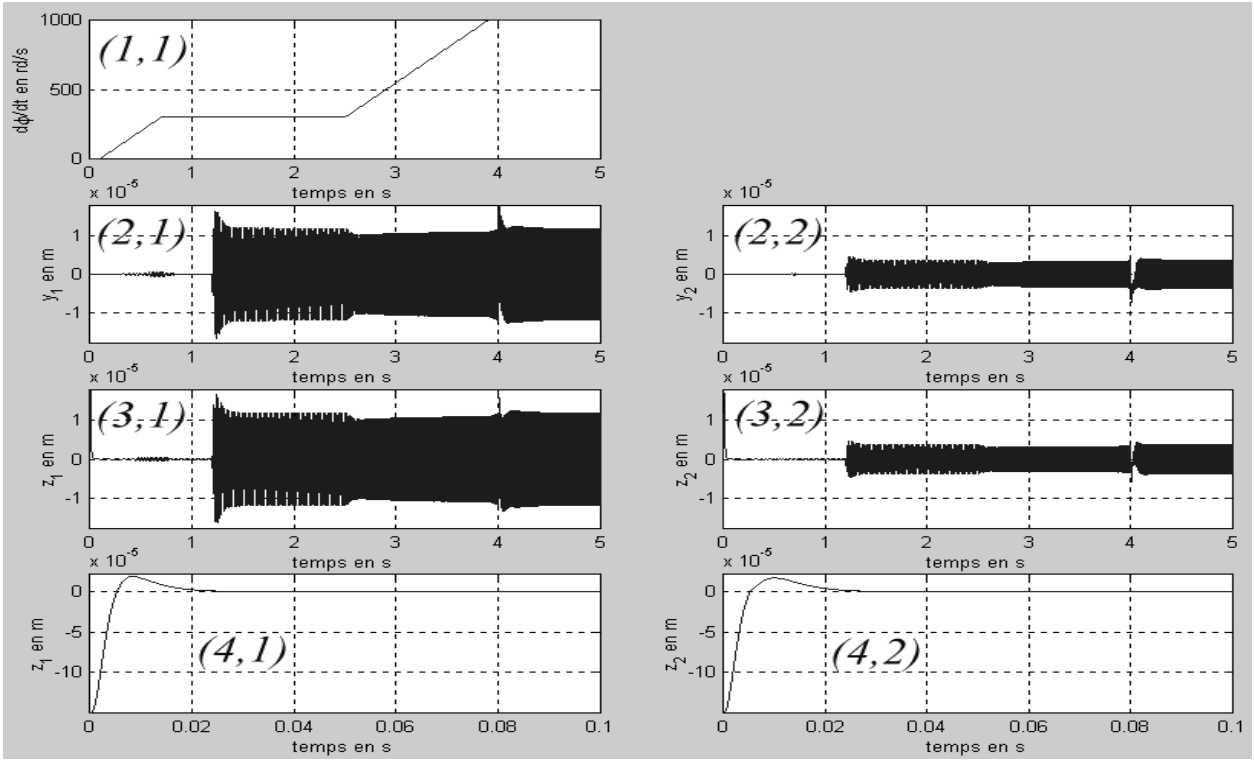


FIG. 4.18: *Linéarisation entrée-état et passivité: vitesse $\dot{\phi}$ du rotor et positions (avec erreurs paramétriques)*

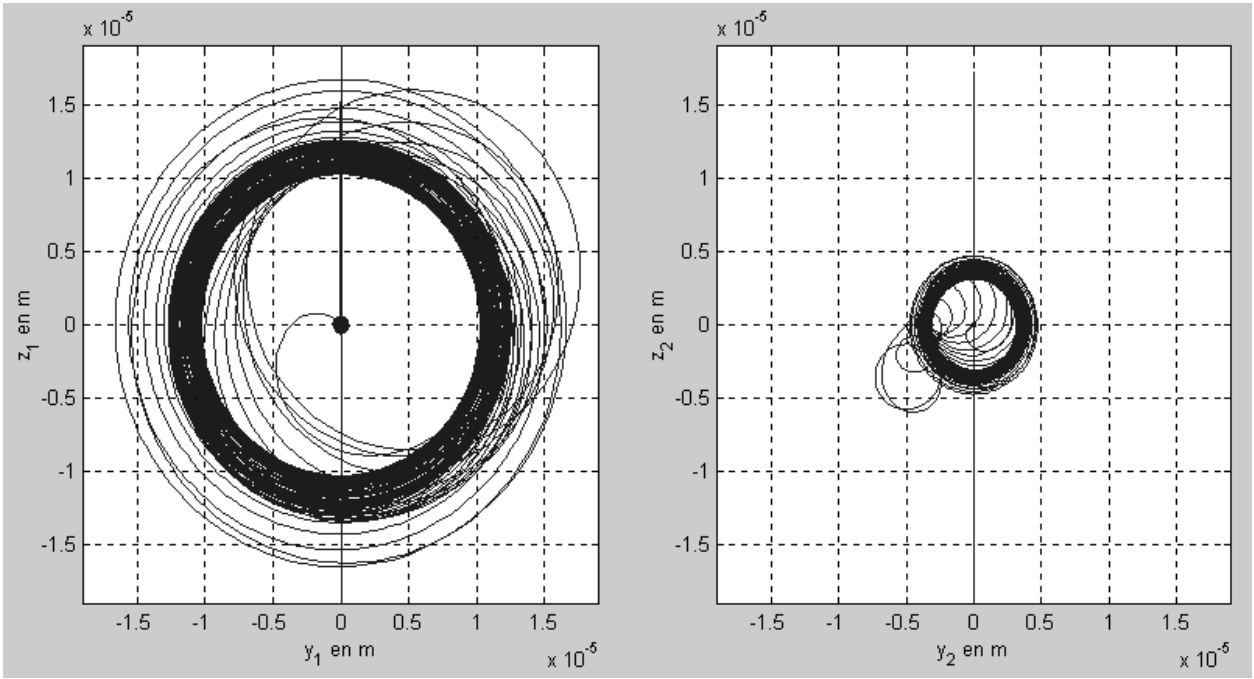


FIG. 4.19: *Linéarisation entrée-état et passivité: trajectoires dans les plans de contrôle 1 et 2 (avec erreurs paramétriques)*

4.3.3 Résultats avec erreurs paramétriques

Le scénario de la simulation est identique à celui de la précédente, mais maintenant les valeurs de certains paramètres utilisés dans la commande sont modifiés pour simuler une erreur de mesure de paramètres. Toutes les inerties (masse et moment) sont de 20% inférieures aux valeurs du modèle et λ est 20% supérieur à la valeur du modèle. Les résultats sont rapportés sur les Figure 4.18 et 4.19. Ces erreurs sont censés rendre la commande moins amortie (voir sous-chapitre 3.3.2.3). On peut s'en rendre compte lors du changement de consigne de trajectoire désirée : l'amplitude va jusqu'à $1.9\,10^{-5}\,m$ avant de revenir à la valeur r_1 (ou r_2), alors que sans erreurs paramétriques, l'amplitude ne dépasse pas $1.3\,10^{-5}\,m$. Malgré cet amortissement moindre, on peut constater la robustesse de la commande vis à vis des erreurs de modélisation.

4.4 Mode glissant

La commande par mode glissant, sans élimination de balourd, a été appliquée au modèle du volant d'inertie dans (Charara et al., 1996; de Miras et al., 1996). Dans ces travaux, les entrées étaient calculées en utilisant seulement deux ($-E_{max}$, $+E_{max}$) ou trois états ($-E_{max}$, 0, $+E_{max}$). La forte inertie du rotor permettait au système d'être peu sensible à la forte discontinuité de la commande. La masse de notre machine est largement inférieure à celle du volant d'inertie, alors que la valeur maximum de la tension est plus grande ; une commande à trois états risque de ne pas être appropriée. C'est donc une commande du type de celle décrite sur la Figure 3.30 dans le sous-chapitre 3.3.3.4 qui va être utilisée. Cette commande n'est actuellement appliquée qu'au modèle d'un système plan[6] (voir sous-chapitre 2.5.1).

4.4.1 Commande sans élimination de balourd

Dans cette simulation, les surfaces tournantes (voir sous-chapitre 3.3.3.7) sont inactives. Le but de cette simulation est de vérifier de quelle façon le mode glissant compense le balourd[7].

La dynamique du troisième ordre (expression des surfaces) choisie pour cet essai est donnée par :

$$(s+\omega_0)\left(s^2+2\,\xi\,\omega_0+\omega_0^2\right) \tag{4.5}$$

ω_0 est pris égale à $4.10^2\,rd.s^{-1}$ pour les surfaces fixes ; ξ est égal à 1.2. La masse du rotor est la moitié de celle du rotor de la broche, et le paramètre δy est égale à $0.7\,10^{-5}\ m$. La simulation se

6. Le modèle du système plan est très pratique pour obtenir un réglage correct d'une loi de commande : d'une part, il y a moins de variables à surveiller ; deuxièmement, on ne subit pas la contrainte des effets gyroscopiques ; enfin, le temps de calcul est largement moindre qu'avec le modèle de la broche (pour mémoire, 5 secondes de simulation avec le modèle de la broche, prennent environ 5 heures sur un PC à 300 MHz, pour moins de la moitié avec le système plan).

7. On a vu, dans le chapitre 3, que la robustesse du mode glissant ne s'applique pas au balourd ; par contre, la surface contient une image de la dérivée seconde et donc du balourd, ce qui peut aider la commande à contrer l'effet de la perturbation.

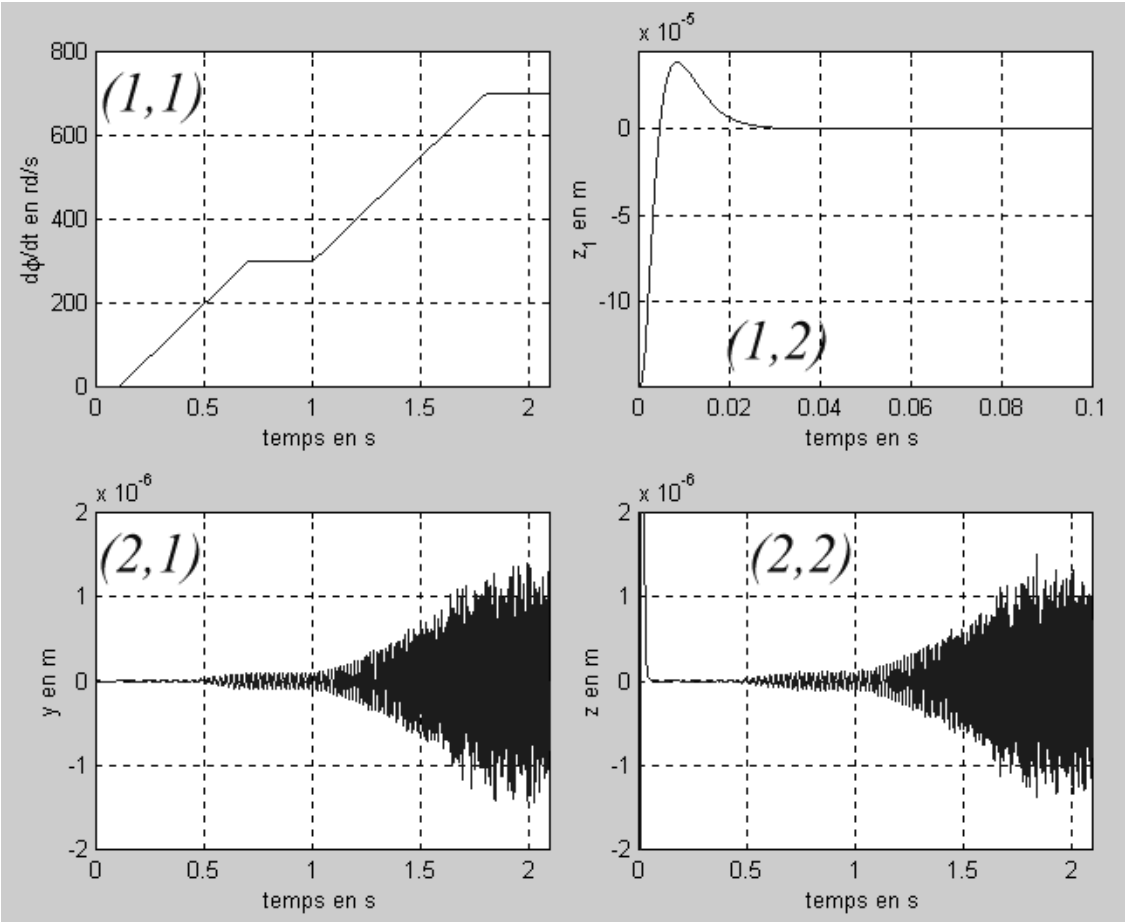


FIG. 4.20: *Mode glissant : position et vitesse $\dot{\phi}$ (sans élimination de balourd)*

déroule selon le scénario suivant :

- $t = 0\,s$: le rotor est posé sur ses roulements de repos et la position désirée passe à zéro ;
- $t = 0\,s \implies t = 0.1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est nulle ;
- $t = 0.1\,s \implies t = 1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de zéro à $300\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; la position désirée est zéro ;
- $t = 1\,s \implies t = 2.1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de $300\,rd.s^{-1}$ à $700\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; la position désirée reste zéro.

En remarque préliminaire, il faut préciser que l'implémentation de cette commande nécessite l'utilisation d'une astuce supplémentaire par rapport à la théorie. En effet, les termes contenant les tensions sont de la forme :

$$\frac{|i_y|}{e_0 - \text{sign}(i_y)\,y} E_y \tag{4.6}$$

Or le produit $|i_y|\,E_y$ empêche la commande de fonctionner lorsque les courants sont nuls (principalement au démarrage). Pour empêcher cela, c'est l'expression suivante qui est utilisée :

$$\frac{\max\left(|i_y|\,,i_{min}\right)}{e_0-\mathrm{sign}(i_y)y}E_y \tag{4.7}$$

avec i_{min} une valeur à trouver. Cette valeur reste très difficile à choisir car il existe une grande interaction entre son effet et le coefficient K_g (qui contrôle la vitesse de convergence des surfaces vers zéro). Un mauvais choix du couple (i_{min}, K_g) peut provoquer une oscillation dans la convergence de la surface qui se transmet à la position correspondante.

Le graphe (1,1) de la Figure 4.20 donne le profil de la vitesse $\dot{\phi}$. Le graphe (1,2) (réponse à un échelon) peut être comparé au graphe (4,1) de la figure 4.12 (au démarrage, l'élimination du balourd ne s'applique pas : les deux figures sont donc comparables). Les dynamiques définies étant les mêmes, il est normal de constater que les réponses sont quasiment identiques. Les graphes (2,1) et (2,2) donnent les positions y et z sur toute la durée de la simulation. A $300\,rd.s^{-1}$, l'amplitude de déplacement ne dépasse pas $0.1\ \mu m$, et à $800\,rd.s^{-1}$ l'amplitude dépasse à peine $1\ \mu m$. Sur la Figure 4.6 (linéarisation entrée-état sans élimination de balourd) cette amplitude atteint déjà $6\ \mu m$ à $310\,rd.s^{-1}$. On constate que le mode glissant possède une réelle capacité à contrer l'effet du balourd ; cette constatation avait déjà été faite lors des travaux sur le volant d'inertie.

4.4.2 Commande avec élimination du balourd

Dans cette simulation, les surfaces tournantes sont activées. La dynamique du troisième ordre (expressions des surfaces fixes et tournantes) choisie pour cet essai est donnée par :

$$(s+\omega_0)\left(s^2+2\,\xi\,\omega_0+\omega_0^2\right) \tag{4.8}$$

ω_0 est pris égale à $4.10^2\,rd.s^{-1}$ pour les surfaces fixes, et à $2\ 10^2\,rd.s^{-1}$ pour les surfaces tournantes ; ξ est égal à 1.2 dans les deux cas. La masse du rotor est la moitié de celle du rotor de la broche, et le paramètre δy est égale à $0.7\ 10^{-5}\ m$. Les paramètres $i_{min} = 0.3$ et $K_g = 9000$ sont ceux trouvés pour la simulation précédente. La simulation se déroule selon le scénario suivant :

- $t = 0\,s$: le rotor est posé sur ses roulements de repos et la position désirée passe à zéro ;
- $t = 0\,s \implies t = 0.1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ est nulle ;
- $t = 0.1\,s \implies t = 1\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de zéro à $300\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; la position désirée est zéro ;
- $t = 1\,s$: la position désirée est zéro à une rotation autour du centre d'inertie ;
- $t = 1.5\,s \implies t = 3\,s$: la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ passe de $300\,rd.s^{-1}$ à $700\,rd.s^{-1}$ selon une rampe de $500\,rd.s^{-2}$ puis se stabilise ; le rotor doit tourner autour de son centre d'inertie ;

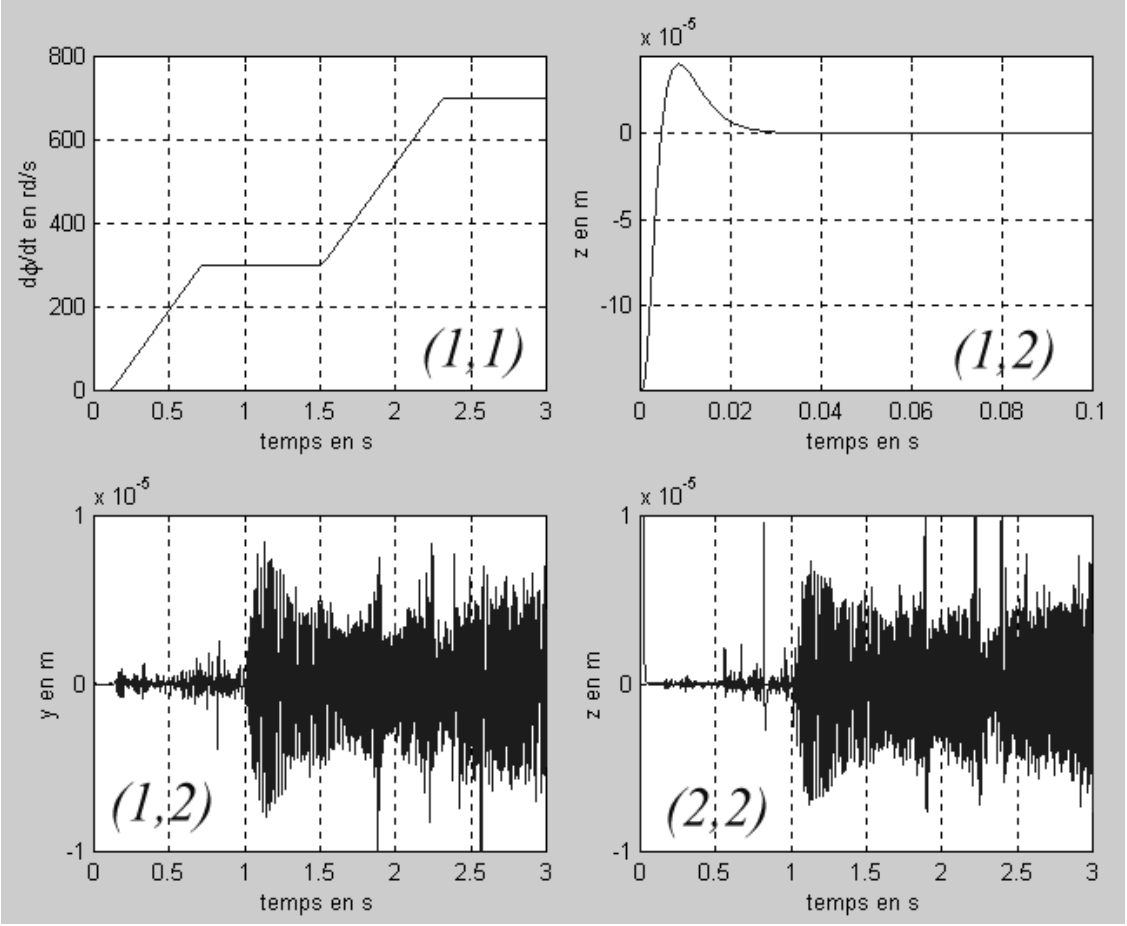


FIG. 4.21: *Mode glissant: position et vitesse* $\dot{\phi}$

Le graphe (1,1) de la Figure 4.21 donne le profil de la vitesse $\dot{\phi}$. Le graphe (1,2) (réponse à un échelon) est identique à celui de la simulation précédente (la dynamique n'a pas changée). Les graphes (2,1) et (2,2) donnent les positions y et z sur toute la durée de la simulation ; la Figure 4.22 complète ces graphes. Jusqu'à 1 s, la position désirée est zéro ; l'amplitude atteint alors presque 1 μm qu'il faut comparer au 0.1 μm obtenu sans élimination du balourd : la conclusion qui s'impose est que l'utilisation simultanée des surfaces fixes et tournantes modifie la réponse du système aux paramètres i_{min} et K_g (le réglage parfait reste à trouver). Pour autant, le système reste stable, même si la trajectoire est agitée.

L'utilisation des surfaces tournantes doit permettre au rotor de tourner autour du centre d'inertie. Cette trajectoire est demandée à $t = 1\ s$: on observe que le centre géométrique décrit une trajectoire en moyenne circulaire, mais à chaque instant très déformée. Cela se traduit par des courants (voir Figure 4.23) qui ne diminuent pas franchement lors du changement de consigne ; on peut tout de même constater une légère tendance à la diminution sur les graphes (1,1) et (1,2). Le graphe (2,1) montre le courant nécessaire à l'élimination de la pesanteur (identique à la valeur de ceux des simulations sur la linéarisation entrée-état : on s'est arrangé pour que notre système plan soit équivalent à une demi broche).

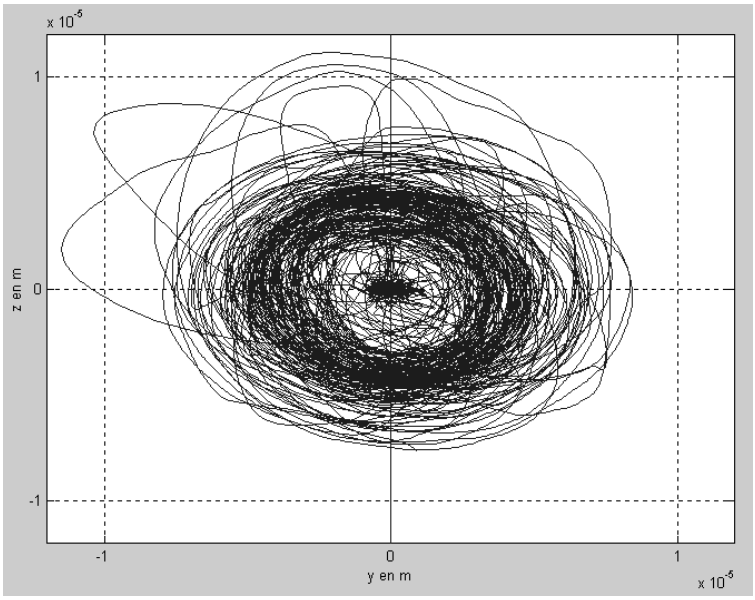


FIG. 4.22: *Mode glissant : trajectoires dans le plan de contrôle*

La dernière Figure 4.24 présente la valeur des surfaces y, z, y_a et z_a. On constate que la valeur des surfaces tournantes s'éloigne de zéro lorsque la vitesse augmente (réglage des paramètres approximatif). Il existe une forte corrélation entre l'éloignement de zéro des surfaces tournantes, et l'amplitude de la vibration des surfaces fixes. Une convergence approximative de l'une des surfaces entraîne des perturbations sur les autres.

4.5 Conclusion

La première étape de ce chapitre a été de valider expérimentalement notre modèle de simulation. Cette validation ne peut être complète, mais nous nous sommes intéressés surtout à la justification des paramètres choisis pour décrire la position relative de l'axe d'inertie par rapport à l'axe géométrique. Ces paramètres ont été calculés en partant d'essais réels effectués en utilisant une commande à base de filtres coupe fréquence. Une fois ces paramètres obtenus, la même commande, appliquée en simulation et sur la machine, a montré leur validité.

La deuxième partie est consacrée à la vérification du comportement des deux lois de commande décrites dans le chapitre 2 :

- la première est la linéarisation entrée-état associée à la passivité. La réponse de la commande correspond bien à ce que l'on attendait. La suppression du balourd se fait correctement par les PID tournants. L'heuristique qui permet de trouver la position de l'axe d'inertie (fonction de la valeur des Intégrateurs tournants) est fonctionnelle, bien qu'il soit encore possible de l'améliorer pour tenir compte de la norme de la force appliquée dans chaque plan de contrôle. De plus, cette simulation confirme la validité des paramètres descriptifs du balourd. Une deuxième simulation montre que la commande est robuste aux erreurs paramétriques de modélisation ;

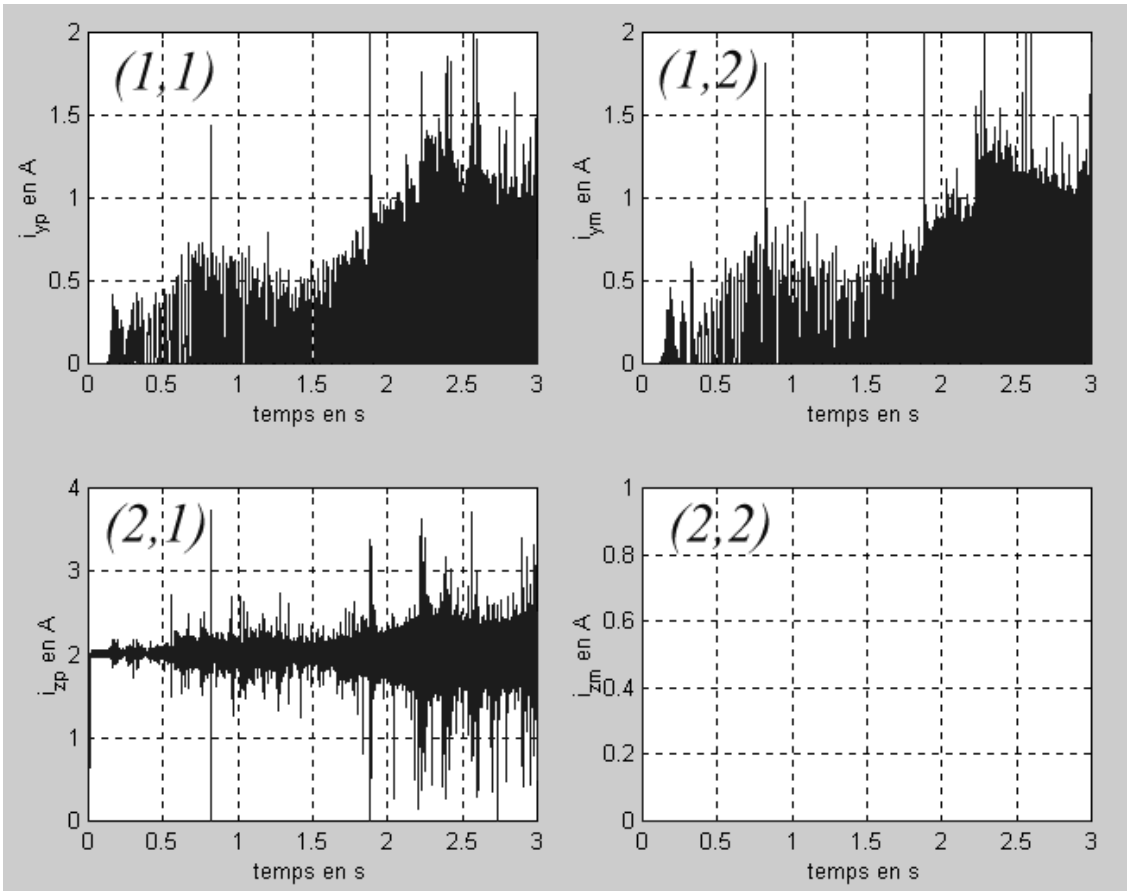


FIG. 4.23: *Mode glissant : courants*

– la seconde est une commande par mode glissant dérivée de la linéarisation entrée-sortie. Sans surfaces d'élimination du balourd, la commande se comporte selon les prévisions. Elle présente même une excellente robustesse vis à vis du balourd grâce à l'existence des dérivées secondes des positions dans l'expression des surfaces fixes. L'introduction des surfaces tournantes ne déstabilise pas le système mais le réglage de la commande devient obsolète, ce qui rend les trajectoires approximatives.

Au final, notre système d'élimination du balourd est efficace, mais plus difficile à mettre en œuvre dans un cas que dans l'autre. Les commandes non linéaires proposées pour stabiliser le rotor sont, quant à elles, parfaitement adaptées pour stabiliser le rotor en fonctionnement non linéaire.

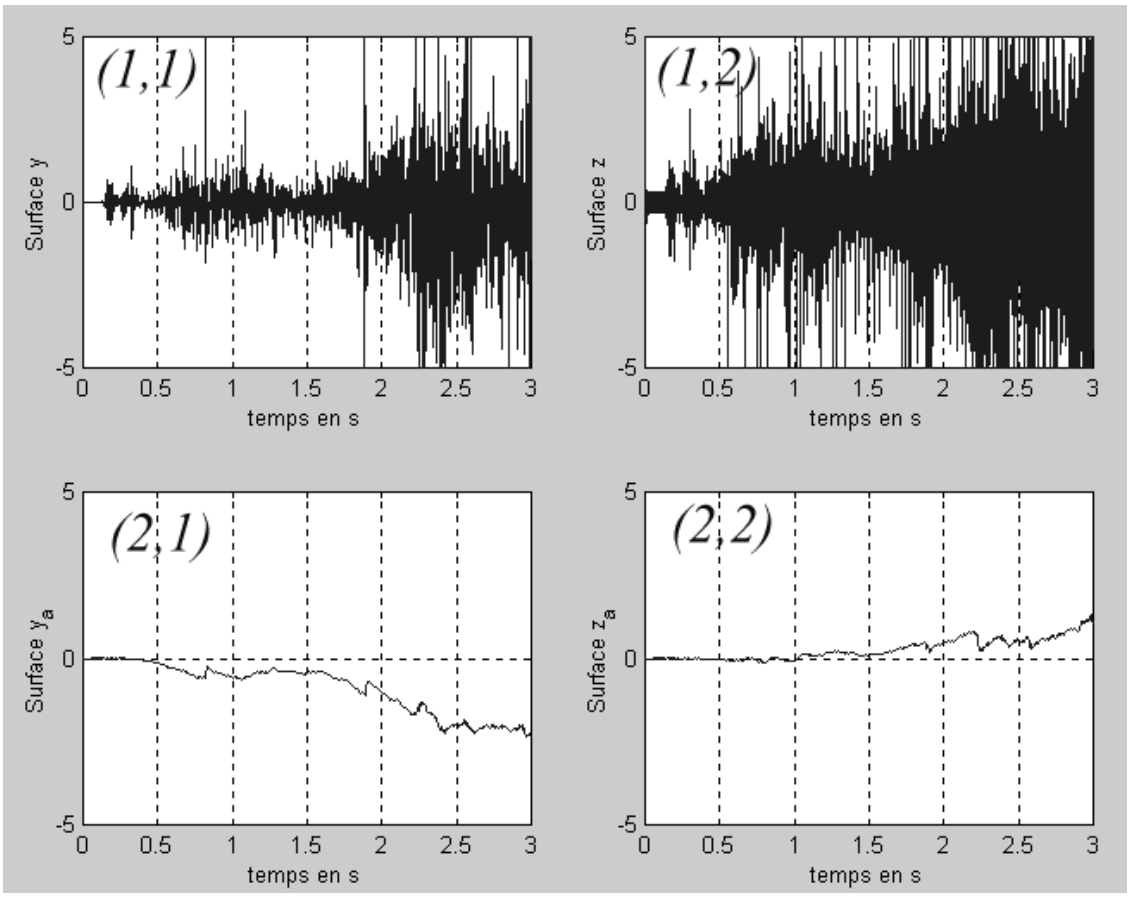


FIG. 4.24: *Mode glissant : surfaces*

Chapitre 5

Conclusions et Perspectives

Conclusions ...

Le travail effectué dans cette thèse est à la confluence de plusieurs domaines, ce que Schweitzer appelle la mécatronique :

- l'automatique ;
- la mécanique ;
- l'électromagnétisme ;
- l'électrotechnique ;
- l'informatique.

La complémentarité de ces différents domaines a représenté un véritable enrichissement personnel aussi bien au niveau théorique que pratique. Le procédé étudié représente un vrai challenge pour l'automaticien de par ses caractéristiques :

- forte non-linéarité ;
- instabilité en boucle ouverte ;
- dynamique très rapide nécessitant une période d'échantillonnage de quelques centaines de μs maximum.

La première partie a été consacrée à la modélisation non linéaire d'une broche à paliers magnétiques. Cette partie a donné lieu au calcul de plusieurs modèles afin de répondre à différents problèmes : simulations réalistes, modèles d'étude pour comprendre l'effet du balourd dans le système, modèles simplifiés pour la commande. L'utilisation des équations d'Euler Lagrange nous a permis de faire apparaître la perturbation due au balourd comme une partie intégrante des équations dynamiques du système. L'expression de ce modèle en fonction des variables de mesures (positions dans deux plans de contrôle) nous a permis d'identifier l'effet du balourd (dans chaque plan de contrôle) à ce qui se passe dans un simple système plan.

Ayant identifié la façon dont agit le balourd dans chacun des plans de contrôle, nous avons proposé une méthode originale de suppression du balourd, dérivée de l'esprit qui a prévalu dans des travaux antérieurs. L'utilisation d'Intégrateurs dans un repère tournant à la vitesse du rotor, permet la compensation du balourd, lui même vecteur constant dans ce repère. Afin d'assurer la stabilité du système, ces Intégrateurs sont réalisés au travers d'un système mêlant PID tournants et PID fixes.

Pour profiter des avantages de la non-linéarité, des lois de commande non linéaires doivent être mises en œuvre. Deux techniques générales sont ici adaptées à la problématique du palier. La linéarisation entrée-état associée à la passivité doit permettre la prise en compte des couplages qui existent dans l'expression du système ; de plus cette méthode est relativement peu sensible aux erreurs paramétriques. le mode glissant doit présenter une bonne robustesse vis à vis des erreurs paramétriques, mais aussi du balourd même si c'est de façon indirecte.

La dernière partie du mémoire est consacré à la validation des lois proposées par l'intermédiaire de simulations et d'essais réels. On en a retiré plusieurs résultats importants :

- les paramètres retenus pour modéliser le balourd dans le modèle de simulation sont pertinents. Il existe une bonne corrélation entre essais réels et simulations ;

- la linéarisation entrée-état associée à la passivité (avec élimination du balourd) est une technique très efficace pour éliminer le balourd. Ce bon comportement est associé une parfaite adaptation au fonctionnement linéaire ;

- la stabilité de la linéarisation entrée-état associée à la passivité est peu sensibles aux erreurs paramétriques ;

- la linéarisation entrée-état (sans élimination du balourd) a fait ses preuve sur la machine expérimentale ;

- le mode glissant (sans élimination du balourd) présente une bonne caractéristique de robustesse par rapport à cette perturbation ; son réglage reste toutefois sensible à cause de la forme du système après application du difféomorphisme ; le mode glissant (avec élimination de balourd) nécessite un réglage encore plus fin des paramètres du contrôleur sous peine de n'avoir que des trajectoire approximatives.

... et perspectives

Ce travail présente une bonne avancée en montrant principalement que l'on peut associer commande non linéaire et résolution d'une problématique donnée (ici l'élimination du balourd). Pour autant, ce n'est qu'une porte entrouverte sur les développements que l'on peut imaginer : tout ce qui s'est fait en linéaire peut sûrement être transposé en non linéaire : élimination du balourd classique (filtres coupe fréquence, observateurs), maîtrise de la flexibilité du rotor, commande robuste, ...

En liaison directe à ce travail, la suite peut être envisagée comme telle :

- implémentation complète de la linéarisation entrée-état avec passivité sur la machine expérimentale. Cette commande ne peut être envisagée sur le Dspace à notre disposition ; cela nous entraîne dans une autre direction qui consiste à utiliser un PC pour le calcul de la commande (la puissance démesurée des nouveaux PC permet d'espérer une division par cinq du temps de calcul pour un coût réduit). L'acquisition est confiée à deux cartes, une analogique digitale, l'autre digitale analogique ;
- recherche des paramètres optimaux de la commande par mode glissant ;
- implémentation du mode glissant sur la machine expérimentale ;
- de nouvelles architectures de conception des PMA apparaissent (par exemple broche à actionneurs coniques) avec pour objectif de réduire les coûts ; généralement la loi de commande est développée spécifiquement pour cette nouvelle architecture. Nous proposons une démarche plus générale qui pourra aboutir à une adaptation de la commande (linéarisation entrée-état avec passivité) à l'architecture en se basant sur la forme lagrangienne du système (nous avons esquissé ce point pour la broche à actionneurs coniques dans le chapitre 4).

L'étape suivante va consister à convaincre les industriels que le non linéaire est une bonne technique en leur présentant des résultats convainquants.

Enfin, au delà de la commande des paliers magnétiques, les techniques utilisées ici nous ont inspiré des méthodes de commande qui pourraient s'appliquer à une classe de systèmes ; on pense ici tout particulièrement aux systèmes sous-actionnés de forme lagrangienne. En associant linéarisation entrée-état, passivité et mode glissant, nous espérons pouvoir apporter une réponse satisfaisante à cette problématique.

Bibliography

Akishita, S. and Iwatani, K. (1994). Hybrid nonlinear robust control for magnetically supported flexible bean. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 95–99, ETH Zurich, Suisse.

Albanese, R., Delprete, C., and Genta, G. (1994a). Experimental characterisation and mathematical modelling of high-tc superconductors for magnetic bearings. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 389–394, ETH Zurich, Suisse.

Albanese, R., Delprete, C., Genta, G., Tonoli, A., Mazzocchetti, L., Rava, E., Frangi, F., and Zannella, S. (1994b). Design, construction and testing of a kinetic energy storage device with high-tc superconductive suspention. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 417–422, ETH Zurich, Suisse.

Allaire, R. and Sinha, A. (1998). Robust sliding mode control of planar rigid rotor system on magnetic bearing. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 577–586, MIT Cambridge, USA.

Amrouche, N. (1998). Commande par mode de glissement d'un palier magnétique. *Rapport de DEA, Université de Technologie de Compiègne, UMR CNRS Heudiasyc.*

Annequin, R. and Boutigny, J. (1973). *Mécanique 2.* Vuibert Paris.

Barthod, C. and Lemarquand, G. (1995). Degrees of freedom control of a magnetically levitated rotor. *IEEE Transaction on Magnetics*, 31(6):4202–4204.

Barthod, C. and Lemarquand, G. (1998). Design of an actuator being both a permanent magnet synchronous motor and a magnetic suspension. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):2105–2107.

Benkhoris, M., Dedecius, D., Siala, S., and Glumineau, A. (1994). Digital simulation of sliding mode control of brushless servo-motor. In *International Conference on Electrical Machines (I.C.E.M. 94)*, volume 2, pages 523–528, Gif sur Yvette, France.

Bleuler, H., Gähler, C., Herzog, R., Larsonneur, R., Mizuno, T., Siegwart, R., and Woo, S.-J. (1994). Application of digital signal processors for industrial magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2(4):280–288.

Bouri, M. (1993). Synthèse de commandes par mode de glissement : Application à un verin electro-pneumatique. *Rapport de DEA, INSA Villeurbanne, Laboratoire d'automatique Industrielle.*

Brossard, J. (1994). *Mécanique Générale.* Les Techniques de l'ingénieur, traité Généralités (Sciences fondamentales).

Bühler, P., Herzog, R., and Siegwart, R. (1996a). Highly integrated magnetic bearings. *Lieu de publication inconnu*, pages 1–10.

Bühler, P., Siegwart, R., and Herzog, R. (1996b). Digital control for low cost industrial AMB applications. *Lieu de publication inconnu*, pages 1–6.

Carabelli, S. and Genta, G. (1998). Nonlinear rotordynamic behaviour of rotors on active magnetic bearings. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 609–617, MIT Cambridge, USA.

Charara, A. (1992). *Contribution à la Modélisation et à la Commande d'un Palier Magnétique Actif en Fonctionnement Non Linéaire.* PhD thesis, Université de Savoie.

Charara, A., Caron, B., and Lemarquand, G. (1992). Modelling and noninteractive control of an active magnetic bearing. *International Journal of applied Electromagnetics in Materials*, 2:359–368.

Charara, A. and de Miras, J. (1995). Commande d'un palier magnétique actif : du linéaire au non linéaire. In $2^{ème}$ *Conférence International sur l'Automatisation Industrielle*, pages 307–312, Nancy, France.

Charara, A., de Miras, J., and Caron, B. (1996). Nonlinear control of a magnetic levitation system without premagnetization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):513–523.

Chen, H. and Darlow, M. (1988). Magnetic bearing with rotating force control. *Transactions of the ASME, Journal of Tribology*, 110:100–105.

Chiba, A. and Fukao, T. (1998). Optimal design of motor circuits in induction type bearingless motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):2108–2110.

Chorot, T. (1991). *Modélisation commande et observation des systèmes mécaniques Hamiltoniens, application à un pont roulant.* PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1.

Cole, M., Keogh, P., and Burrows, C. (1998). Control and nonlinear compensation of a rotor magnetic bearing system subject to base motion. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 618–627, MIT Cambridge, USA.

de Carlo, R. and Drakunov, S. (1994). Sliding mode control design via lyapunov approach. In *Proceedings of the* 33^{rd} *Conference on Decision and Control*, pages 1925–1930, Lake Buena Vista, Florida, USA.

de Miras, J. (1994). Commande d'un palier magnétique actif en fonctionnement non-linéaire : Comparatif de différentes lois de contrôle. *Rapport de DEA, Université de Technologie de Compiègne, UMR CNRS Heudiasyc.*

de Miras, J. and Charara, A. (1996). Stabilisation non-linéaire d'un palier magnétique actif par passivité et mode de glissement. *Algerian Journal of Technology*, 1:177–182.

de Miras, J. and Charara, A. (1998a). Unbalance cancellation with rotating reference control for a horizontal shaft. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 673–682, MIT Cambridge, USA.

de Miras, J. and Charara, A. (1998b). A vector oriented control for a magnetically levited shaft. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(4):2039–2041.

de Miras, J., Charara, A., and Caron, B. (1996). Nonlinear sliding mode control of electromagnetic suspension. In *IFAC'96* 13^{th} *Triennial World Congress*, volume 5, pages 463–468, San Francisco, USA.

de Queiroz, M. and Dawson, D. (1996). Nonlinear control of active magnetic bearings: a backstepping approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):545–552.

Desoer, C. and Vidyasagar, M. (1975). *Feedback systems: Input-Output Properties.* Academic Press, New York.

Elmali, H. and Olgac, N. (1992). Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique. *Automatica*, 28(1):145–151.

Fernandez, B. and Hedrick, J. (1987). Control of multivariable nonlinear systems by the sliding mode control. *International Journal of Control*, 46(3):1019–1040.

Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Rouchon, P., Sordalen, O., Murray, R., and Rudolph, J. (1996). Théorie et pratique des systèmes plats. In *Ecole d'Eté d'Automatique de Grenoble*, Grenoble.

Fujita, M., Namerikawa, T., Matsumara, F., and Ushida, K. (1995). μ synthesis of an electromagnetic suspension system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):530–536.

Gauss, S. and Elschner, S. (1994). Levitation and magnetic properties of melt processed high temperature superconductor cylinders. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 395–400, ETH Zurich, Suisse.

Gauthier, J. and Bornard, G. (1980). Stabilisation des systèmes non linéaires. *Note interne du L.A.G., n° 80-25.*

Glumineau, A. (1994). Commande de machines electriques par modes glissants : Test de robustesse. In *Proceedings des Journées d'Etudes sur les Méthodes de l'Automatique non linéaire appliquée à l'Electrotechnique, Tome 2*, Supelec, Gif sur Yvette, France.

Glumuneau, A., Hamy, M., Lanier, C., and Moog, C. (1993). Robust control of a brushless servo motor via sliding modes techniques. *International Journal Control*, 58(5):979–990.

Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics - Second edition.* Addison-Wesley Publishing company.

Habermann, H. (1978). Fonction guidage en rotation : Paliers magnétiques. *Les Techniques de l'ingénieur, B 5345*, pages 1–20.

Hale, J. (1980). *Ordinary Differential Equations - Second edition.* Huntington,NY : Krieger.

Hassan, A. (1993). *Contribution à la Commande des systèmes discontinus.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Herzog, R., Bühler, P., Gähler, C., and Larsonneur, R. (1996). Unbalance compensation using generalized notch filters in the multivariable feedback of magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):580–586.

Hiebel, P. (1994). Lévitation magnétique par association d'aimants permanents et de supraconducteurs. *RGE*, (10/94):19–24.

Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems.* New York: Springer Verlag.

Joo, S. and Seo, J. (1997). Design and analysis of the nonlinear feedback linearizing control for an electromagnetic suspension system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(1):135–144.

Kawata, S., Watanabe, A., and Okada, T. (1993). Linear position control by sliding mode with nonlinear surface. In *IFAC'96* 12^{th} *Triennial World Congress*, volume 4, pages 293–298, San Francisco, USA.

Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems, second edition.* Prentice Hall, Upper Saddle River.

Kim, K., Ortega, R., Charara, A., and Vilain, J. (1997). Theorical and experimental comparison of two nonlinear controllers for current-fed induction motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(3):338–348.

Knospe, C. (1991). Stability and performance of notch filter control for unbalance response. In *Proc.Int. Symp. Magn. Suspension Technol.*, NASA Langley Research Center.

Knospe, C., Fedigan, S., Hope, R., and Willams, R. (1997). A multitasking DSP implementation of adaptative magnetic bearing control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(2):230–238.

Knospe, C. and Yang, C. (1997). Gain-scheduled control of a magnetic bearing with low bias flux. *Lieu de publication inconnu (reçu pour review)*, pages 1–6.

Komori, M., Tsuruta, A., Fukata, S., and Matsushita, T. (1994). A superconducting bearing system using high tc superconductors. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 401–406, ETH Zurich, Suisse.

Lee, D., Kim, M., Kim, H., and Youn, M. (1991). Controller design of multivariable variable structure systems with nonlinear switching surfaces. *IEE Proceedings-D*, 138(5):493–499.

Lévine, J., Lottin, J., and Ponsart, J.-C. (1996). A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):524–544.

Lin, L.-C. and Gau, T.-B. (1997). Feedback linearization and fuzzy control for conical magnetic bearings. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(4):417–426.

Loria, A. (1996). *On Output Feedback Control of Euler-Lagrange Systems*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, URA CNRS Heudiasyc.

Lottin, J., Mouille, P., and Ponsart, J. (1994). Nonlinear control of active magnetic bearings. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 101–106, ETH Zurich, Suisse.

Lozano, R., Brogliato, B., Egeland, O., and Maschke, B. (1998). Journées thématique sur les systèmes passifs. In *GdR Automatique; Responsable D. Normand-Cyrot*, Université de Technologie de Compiègne, UMR CNRS Heudiasyc.

Lum, K.-Y., Coppola, V., and Bernstein, D. (1996). Adaptative autocentering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):587–597.

Matsumura, F., Fujita, M., Hatake, K., and Hirai, M. (1994). Elimination of unbalance vibration in AMB systems using gain scheduled h^∞ robust controllers. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 113–118, ETH Zurich, Suisse.

Matsumura, F., Kido, K., Tanaka, Y., and Takeda, T. (1983). Design method of horizontal shaft attractive controlled magnetic bearing and its characteristics. *Electrical Ingeneering in Japan*, 103(3):130–137.

Matsumura, F., Kobayashi, H., and Akiyama, Y. (1981). Fundamental equation for horizontal shaft magnetic bearing and its control system design. *Electrical Ingeneering in Japan*, 101(3):123–130.

Matsumura, F., Mamerikawa, T., Hagiwara, T., and Fujita, M. (1996). Application of gain scheduled h^∞ robust controllers to a magnetic bearing. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):484–493.

Meeker, D. (1996). *Optimal Solutions to the Inverse Problem in Quadratic Magnetic Actuators*. PhD thesis, University of Virginia.

Meisel, J. (1984). *Principles of Electromechanical Energy Conversion (Revised edition)*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.

Mohamed, A. and Emad, F. (1993). Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(8):1242–1245.

Moon, F. (1994). Progress in superconducting magnetic bearings. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 411–415, ETH Zurich, Suisse.

Mouille, P. (1994). *Commande Non Linéaire de Paliers Magnétiques*. PhD thesis, Université de Savoie.

Namerikawa, T. and Fujita, M. (1998). Wide area stabilization of a magnetic bearing using exact linearization. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 733–742, MIT Cambridge, USA.

Nicklasson, P., Ortega, R., and Espinosa, G. (1994). On output feedback tracking control of the general rotating machine. In *33rd IEEE Conference Decision and Conrol*, Orlando, Floride, USA.

Nonami, K. and Ito, T. (1996). μ synthesis of flexible rotor magnetic bearing systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):503–512.

Nonami, K. and Yamagushi, H. (1991). Robust control of magnetic bearing systems by means of sliding mode control. In *Proc.Int. Symp. Application Electromagnetic Forces - ISEM'91*, Sendai, Japan.

Okada, Y. (1994). Disturbance observer based controller for flexible rotor supported by magnetic bearings. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 53–58, ETH Zurich, Suisse.

Okada, Y., Dejima, K., and Ohishi, T. (1995). Analysis and comparison of PM synchronous motor and induction motor type magnetic bearings. *IEEE Transaction on Industry Applications*, 31(5):1047–1053.

Okada, Y., Miyamoto, S., and Ohishi, T. (1996). Levitation and torque control of internal permanent magnet type bearingless motor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(5):565–571.

Paden, B. and Penja, R. (1988). Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators. *International Journal of Control*, 47:1697–1712.

Panteley, E. and Ortega, R. (1996). Cascaded control of feedback interconnected systems: Application to robots with ac drives. *Lieu de publication inconnu.*

Petela, G. and Botros, K. (1995). Magnetic bearing control of flexible shaft vibrations based on multi-access velocity-displacement feedback. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 117:188–197.

Ponsart, J. (1996). *Asservissement Numériques de Paliers Magnétiques. Application aux pompes à vide*. PhD thesis, Université de Savoie.

Schweitzer, G., Bleuler, H., and Traxler, A. (1994). *Active Magnetic Bearings: Basics,Properties and Applications of Active Magnetic Bearings*. v.d.f. Edition, Zürich.

Silber, S. and Amrhein, W. (1998a). Bearingless single-phase motor with concentrated full pitch winding in exterior rotor design. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 476–485, MIT Cambridge, USA.

Silber, S. and Amrhein, W. (1998b). Bearingless single-phase motor with concentrated full pitch winding in interior rotor design. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 486–496, MIT Cambridge, USA.

Slotine, J. and Li, W. (1990). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions.

Smith, R. and Weldon, W. (1995). Nonlinear control of a rigid rotor magnetic bearing system: Modeling and simulation with full state feedback. *IEEE Transaction on Magnetics*, 31(2):973–980.

Spinger, H., Schlager, G., and platter, T. (1998). A nonlinear simulation model for active magnetic bearing actuators. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 189–203, MIT Cambridge, USA.

Spong, M. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley New York.

Takahata, R. and Ueyama, H. (1994). Characterization of superconducting magnetic bearings. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 407–410, ETH Zurich, Suisse.

Taoutaou, D. (1997). *Contrôle Non-linéaire des Machines Asynchrones: Passivité, Contrôle Vectoriel et Discrétisation Exacte*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, URA CNRS Heudiasyc.

Taoutaou, D., Glumineau, A., and Castro-Linares, R. (1998). A sliding mode controller for induction motors based on passivity feedback equivalence. In *Proceedings of IFAC SSC'98 Conference on System Structure and Control*, volume 3, pages 771–776, Nantes, France.

Terentiev, A., Harrison, J., Liang, R., Bonn, D., and Hardy, W. (1995). Damping of mechanical vibration superconducting $yba_2cu_3o_{7-x}$ in magnetic field. *Appl. Phys. lett.*, 5(66):643–645.

Thielman, S. and Fabien, B. (1995). Experimental application of an observer-based feedback linearizing controller to an electromagnetic suspension. In *Proceedings of American Control Conference*, pages 3818–3819, Seattle, Washington, USA.

Tian, H. and Nonami, K. (1994). Robust control of flexible rotor magnetic bearing systems using discrete time sliding mode control. In *Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 47–52, ETH Zurich, Suisse.

Torres, M. and Ortega, R. (1998). Feedback linearization, integrator backstepping and passivity-based controller designs: A comparison example. In *Perspectives in Control: Theory and applications (Coordonné par D. Normand Cyrot)*, pages 97–115, Springer Verlag.

Trumper, D., Olson, S., and Subrahmanhyan, P. (1997). Linearizing control of magnetic suspension systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(4):427–438.

Tsuchimoto, M., Kojima, T., Waki, H., and Honna, T. (1995). Numerical analyses of trapped field magnet and stable levitation region of htsc. *IEEE Transaction on Magnetics*, 31(3):1781–1784.

Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222.

Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag.

Vidolov, B., Mélin, C., de Miras, J., and Charara, A. (1996). Two-rules-based fuzzy logic control and sliding mode control of an active magnetic bearing. In *FUZZ-IEEE'96*, pages 1205–1209, New Orleans, USA.

Virgin, L., Walsh, T., and Knight, J. (1995). Nonlinear behavior of a magnetic bearing system. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 117:582–588.

Wu, Z., Mellor, P., Mason, P., and Howe, D. (1998). Nonlinear control of magnetic bearings for high-speed flywheels. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Magnetic Bearings*, pages 599–608, MIT Cambridge, USA.

Yeh, T.-J. and Youcef-Toumi, K. (1996). Achievable performance of magnetically levitated rotating machines. In *IFAC'96* 13^{th} *Triennial World Congress*, pages 451–456, San Francisco, USA.

Yonnet, J. (1981). *Etude des paliers magnétiques passifs*. PhD thesis, Thèse d'Etat, INP Grenoble.

Youcef-Toumi, K. and Reddy, S. (1992). Dynamic analysis and control of high precision active magnetic bearings. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 114:623–633.

Zhong, P. and Townsend, M. (1994). Stability of magnetic bearing-rotor systems and the effects of gravity and damping. *AIAA Journal*, 32(7):1492–1499.

Annexe A

Equation d'Euler Lagrange : origine

A.1 Modèle par l'approche variationnelle

Définition 6 (Fonctionnelle)
Une Fonctionnelle *est une application de l'espace des courbes* γ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *que l'on note :*

$$\gamma \xrightarrow{J} J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(X, \dot{X}, t\right) dt \quad X \in \mathbb{R}. \tag{A.1}$$

Soit une perturbation de la trajectoire $X(t)$ que l'on va noter :

$$\bar{X}(t) = X(t) + \varepsilon\eta(t) \tag{A.2}$$

où ε est petit et $\eta(t)$ prend une valeur arbitraire. La variation de trajectoire s'exprime comme :

$$\delta X(t) = \bar{X}(t) - X(t). \tag{A.3}$$

et est schématisée sur la Figure A.1.

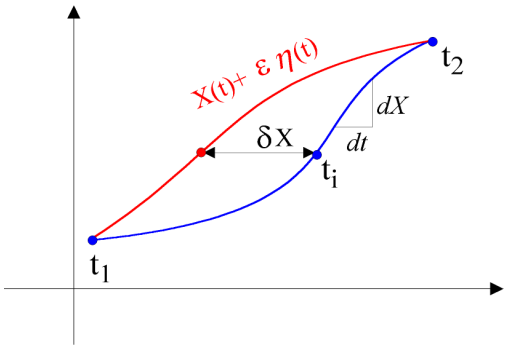


FIG. A.1: *Variation de trajectoire*

Nous allons rechercher les trajectoires du système qui conservent une valeur stationnaire à la fonctionnelle J entre t_1 et t_2. Pour cela, nous allons observer la valeur de l'intégrale qui constitue

la fonctionnelle au long des trajectoires voisines de $X(t)$. Soit la fonctionnelle J stationnaire pour $X(t) = s(t)$ (avec l'application $L \in C^{\omega}$ analytique), cela est équivalent à avoir $\delta J \to 0$ si $\delta s \to 0$. Soit J_s la valeur stationnaire de J, on a

$$J_s + \delta J_s = \int_{t_1}^{t_2} L(s + \varepsilon\eta, \dot{s} + \varepsilon\dot{\eta}, t)\, dt. \tag{A.4}$$

L étant C^{ω}, on utilise une expansion en série de Taylor et on trouve :

$$\begin{aligned} L(s + \varepsilon\eta, \dot{s} + \varepsilon\dot{\eta}, t) =& L(s, \dot{s}, t) + \varepsilon\left(\eta \frac{\partial L}{\partial s} + \dot{\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\eta^2 \frac{\partial^2 L}{\partial s^2} + 2\,\eta\dot{\eta}\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{s}} + \dot{\eta}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{s}^2}\right) + O\left(\varepsilon^3\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

ce qui implique que :

$$\delta J_s = \int_{t_1}^{t_2} \left[\varepsilon L_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} L_2 + O\left(\varepsilon^3\right)\right] dt. \tag{A.6}$$

J_s sera un extremum si on a les propriétés suivantes :

i. $\delta J_s = 0$ si $\varepsilon = 0$;

ii. $\delta J_s < 0$ si $\varepsilon > 0$ ou $\varepsilon < 0$ (maximum) ;

iii. $\delta J_s > 0$ si $\varepsilon > 0$ ou $\varepsilon < 0$ (minimum).

Cela revient à observer les valeurs des dérivées première et seconde de δJ_s. On a alors les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{d(\delta J_s)}{d\varepsilon} = J_1 + \varepsilon J_2 + O\left(\varepsilon^2\right) \\ &\frac{d^2(\delta J_s)}{d\varepsilon^2} = J_2 + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} J_1 &= \int_{t_1}^{t_2} L_1 dt \\ J_2 &= \int_{t_1}^{t_2} L_2 dt. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Les trajectoires recherchées sont telles que J soit extrémale. on va donc étudier les équations précédentes pour $\varepsilon = 0$. on obtient la condition suivante :

$$\left.\frac{d(\delta J_s)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \Big\} \Rightarrow \left\{ J_1|_{\varepsilon=0} = 0 \right. \tag{A.8}$$

Cela implique que

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial L}{\partial s} + \dot{\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) dt = 0. \tag{A.9}$$

On peut alors intégrer par partie le second terme de l'intégrale (A.9) pour obtenir :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} dt = \left[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) \right] dt. \tag{A.10}$$

Par définition de la variation entre t_1 et t_2, on a $\eta(t_1) = \eta(t_1) = 0$ (voir Figure A.1). Le premier terme de l'intégration par partie est donc nul. Il nous reste l'équation suivante :

$$J_1 = 0 \Longleftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) \right] \eta(t)\, dt = 0 \quad \forall \eta(t)\,. \tag{A.11}$$

Pour arriver à la conclusion, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1
Soit une application $G(t) \in C^0$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$, et $\eta(t) \in C^2$ une application quelconque. Soit l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} G(t)\, \eta(t)\, dt \quad \forall \eta(t)\,, \tag{A.12}$$

on a alors :

$$I = 0 \implies G(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]\,. \tag{A.13}$$

Au final, on se retrouve avec l'equation suivante

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = 0 \tag{A.14}$$

communément appelée équation d'Euler - Lagrange. On peut donc formuler notre conclusion comme suit : pour qu'une fonctionnelle J garde une valeur stationnaire qui soit un extremum, l'équation (A.14) doit être vérifiée.

A.2 Exemple

Exemple 1
Soit l'application $L(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 + 12xt$. Il faut trouver parmi toutes les fonctions $x(t) \in C^0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, celle qui minimise

$$J = \int_0^1 L(x, \dot{x}, t)\, dt$$

On a: $\frac{\partial L}{\partial x} = 12t$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$. la trajectoire $x(t)$ doit être solution de l'équation $2\ddot{x} - 12t = 0$ et finalement on va trouver : $x(t) = t^3 + \alpha t + \beta$; sachant les conditions en $t = 1$ et $t = 2$, on a: $x(t) = t^3$.

Annexe B

Calcul de la matrice C

Cette annexe décrit le cheminement qui permet de calculer la matrice $C(q, \dot{q})$, qui se trouve dans l'équation (2.24), à partir de la matrice d'inertie $D(q)$ du système. Après cela, le théorème qui prouve que l'équation (2.25) est valide sera énoncé (Spong and Vidyasagar, 1989).

B.1 Les symboles de Christoffel

Soit le lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j \; - \; U(q) \tag{B.1}$$

avec :

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ d_{j1} & \dots & d_{ij} & \dots & d_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nj} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}. \tag{B.2}$$

Les équations d'Euler-Lagrange, appliquées à l'équation (B.1) sous leur forme ligne par ligne, qui est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = b_k E_k \tag{B.3}$$

donnent la dérivée du lagrangien par rapport aux vitesses généralisées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}(q)\, \dot{q}_j \tag{B.4}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \sum_j d_{kj}\left(q\right)\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt}\left(d_{kj}\left(q\right)\right)\dot{q}_j \\ &= \sum_j d_{kj}\left(q\right)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j\end{aligned} \tag{B.5}$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{B.6}$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{B.7}$$

L'équation de Lagrange devient donc :

$$\sum_j d_{kj}\left(q\right)\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = b_k E_k \tag{B.8}$$

En utilisant la symétrie de la matrice d'inertie c'est à dire $d_{kj} = d_{jk}$, le terme précédent peut se réécrire:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} &= \sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \\ &= \sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{j,i}\frac{1}{2}\frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\end{aligned} \tag{B.9}$$

pour finalement obtenir :

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{B.10}$$

Le terme suivant :

$$c_{kij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right) \tag{B.11}$$

est appelé symbole de Christoffel (il possède la particularité suivante : $c_{kij} = c_{kji}$). En effectuant la première sommation sur i, le terme suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}\left(q\right)\dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i \end{aligned} \tag{B.12}$$

Il représentent le $(k,j)^{\text{ième}}$ élément de la matrice $C\left(q,\dot{q}\right)$ qui se retrouve dans l'équation (2.24).

B.2 Propriété de la matrice C

Théorème 4

Soit la matrice $N\left(q,\dot{q}\right) = \dot{D}\left(q\right) - 2C\left(q,\dot{q}\right)$. Alors la matrice $N\left(q,\dot{q}\right)$ est antisymétrique, c'est à dire que les composantes n_{jk} de N satisfont $n_{jk} = -n_{kj}$.

Preuve : *Soit la matrice d'inertie $D\left(q\right)$, la $(k,j)^{\text{ième}}$ composante de $\dot{D}\left(q\right)$ est donnée par :*

$$\dot{d}_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i \tag{B.13}$$

On trouve alors le $(k,j)^{\text{ième}}$ élément de $N = \dot{D} - 2C$ qui est :

$$\begin{aligned} \dot{n}_{kj} &= \dot{d}_{kj} - 2c_{kj} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\right]\dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right]\dot{q}_i \end{aligned} \tag{B.14}$$

Etant donné que la matrice d'inertie $D\left(q\right)$ est symétrique, c'est à dire que $d_{ij} = d_{ji}$, il s'en suit, en interchangeant les indices que :

$$n_{jk} = -n_{kj} \tag{B.15}$$

et que :

$$x^t\left[\dot{D}\left(q\right) - 2C\left(q,\dot{q}\right)\right]x = 0 \quad \forall x. \tag{B.16}$$

Annexe C

Position du centre géométrique O

Dans le chapitre sur la Modélisation, quelques hypothèses simplificatrices sont faites pour exprimer la position du centre géométrique du rotor en fonction des mesures effectuées par les capteurs. Les expressions complètes de ce changement de coordonnées sont données dans cette annexe.

Soient $A = (l_c, y_1, z_1)$ et $B = (-l_c, y_2, z_2)$ les deux points représentant la position du rotor dans chacun des plans de contrôle (Figure 2.16). La droite passant par A et B a pour équation :

$$\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} = \frac{y_0 - y}{y_0 - y_1} = \frac{z_0 - z}{z_0 - z_1} \tag{C.1}$$

en écrivant l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AX} \tag{C.2}$$

soit :

$$\begin{aligned} &\frac{l_c - x}{2\,l_c} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_2} \\ &\text{ou encore} \\ &\frac{-x}{l_c} = \frac{y_1 + y_2 - 2\,y}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 + z_2 - 2\,z}{z_1 - z_2} \end{aligned} \tag{C.3}$$

Prenons maintenant deux points dans le repère attaché au rotor $C = (l_c, 0, 0)$ et $D = (-l_c, 0, 0)$. On peut très bien trouver leur coordonnées dans le repère du stator par les transformations de changement de base définie dans la section 2.4.1 :

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \begin{bmatrix} l_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) l_c + x_O \\ \sin(\psi)\cos(\theta) l_c + y_O \\ -\sin(\theta) l_c + z_O \end{bmatrix} \\ {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \begin{bmatrix} -l_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\psi)\cos(\theta) l_c + x_O \\ -\sin(\psi)\cos(\theta) l_c + y_O \\ \sin(\theta) l_c + z_O \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.4}$$

Les deux points définis dans l'équation (C.4) appartiennent à l'axe géométrique définie par l'équation (C.3). Ils sont donc solutions de cette équation, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{l_c - \cos(\psi)\cos(\theta)l_c - x_O}{2\,l_c} &= \frac{y_1 - \sin(\psi)\cos(\theta)l_c - y_O}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 + \sin(\theta)l_c - z_O}{z_1 - z_2} \\ \frac{l_c + \cos(\psi)\cos(\theta)l_c - x_O}{2\,l_c} &= \frac{y_1 + \sin(\psi)\cos(\theta)l_c - y_O}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 - \sin(\theta)l_c - z_O}{z_1 - z_2}\end{aligned} \tag{C.5}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\frac{-\cos(\psi)\cos(\theta)l_c - x_O}{l_c} &= \frac{y_1 + y_2 - 2\,(\sin(\psi)\cos(\theta)l_c + y_O)}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 + z_2 + 2\,(\sin(\theta)l_c - z_O)}{z_1 - z_2} \\ \frac{\cos(\psi)\cos(\theta)l_c - x_O}{l_c} &= \frac{y_1 + y_2 + 2\,(\sin(\psi)\cos(\theta)l_c - y_O)}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 + z_2 - 2\,(\sin(\theta)l_c + z_O)}{z_1 - z_2}\end{aligned} \tag{C.6}$$

La solution de l'équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\tan(\psi) &= \frac{y_1 - y_2}{2\,l_c} \\ \frac{\tan(\theta)}{\cos(\psi)} &= -\frac{z_1 - z_2}{2\,l_c} \\ y_O &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + 2\,x_O\tan(\psi) \\ z_O &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - 2\,x_O\frac{\tan(\theta)}{\cos(\psi)}\end{aligned} \tag{C.7}$$

Bien entendu, ces expressions ne sont pas forcément simples à utiliser ni même utiles pour l'obtention d'un modèle représentatif. Elles peuvent être simplifiées en supposant que x_0 est nulle ainsi que ψ lorsqu'il s'agit d'équations comportant θ. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tan(\psi) &= \frac{y_1 - y_2}{2\,l_c} \\ \tan(\theta) &= -\frac{z_1 - z_2}{2\,l_c} \\ y_O &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ z_O &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\end{aligned} \tag{C.8}$$

qui sera le changement de variable utilisé pour obtenir le modèle de la broche dans les coordonnées de mesure [1].

1. Il s'agit du modèle qui est appelé *modèle d'analyse* dans ce document.

Annexe D

Forme quadratique de la matrice d'inertie

D.1 Energie cinétique de translation

Dans la section 2.4.2.1 nous avons donné l'énergie cinétique de translation dans le cas où la position du centre d'inertie G diffère de celle du centre géométrique O. Cette expression est :

$$T_{mct} = \frac{1}{2} m \left\{ |V_O|^2 + p_{G/\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''}^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \, p_{G/\mathcal{C}'''} + 2 \, V_O^T \, {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \, {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \, p_{G/\mathcal{C}'''} \right\} \tag{D.1}$$

Chacun des termes de cette expression sera calculé pour pouvoir trouver la matrice d'inertie de translation du rotor. Commençons par $|V_O|^2$ qui est la partie qui reste lorsque O et G sont confondus. cela donne :

$$|V_O| = [\dot{x}, \, \dot{y}, \, \dot{z}]^T \tag{D.2}$$

La première partie s'écrit donc :

$$T_{mct_1} = \frac{1}{2} m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

Pour calculer le second terme, il est nécessaire d'avoir l'expression du vecteur vitesse instantanée de rotation du rotor exprimé dans le repère du stator, la position du centre d'inertie dans le repère fixé aux axes géométriques du rotor, et la matrice de passage entre ce dernier repère et le repère du stator.

Il a été vu dans la section 2.4.1 que la matrice de changement de base s'exprime par l'équation :

$$ {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}(\psi,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & -s(\psi)c(\phi)+c(\psi)s(\theta)s(\phi) & s(\psi)s(\phi)+c(\psi)s(\theta)c(\phi) \\ s(\psi)c(\theta) & c(\psi)c(\phi)+s(\psi)s(\theta)s(\phi) & -c(\psi)s(\phi)+s(\psi)s(\theta)c(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix} \quad \text{(D.4)} $$

La position du centre d'inertie dans le repère fixé aux axes géométriques du rotor peut s'écrire :

$$ p_{G/\mathcal{C}'''} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad \text{(D.5)} $$

Comme on le montre sur la figure 2.18, il existe toujours un repère lié aux axes géométriques du rotor dans lequel la rotation d'angle φ se fait selon l'axe z, même si ce repère n'est pas connu à priori [1].

Il reste à donner l'expression du vecteur vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''}$ dans le repère fixe du stator :

$$ \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = \dot{\phi}\,\vec{i}_2 + \dot{\theta}\,\vec{j}_1 + \dot{\psi}\,\vec{k}_0 \quad \text{(D.6)} $$

En utilisant les transformations de changement de base, cela devient :

$$ \begin{aligned} {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = & \dot{\phi} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{(D.7)} $$

En effectuant le calcul, on trouve :

$$ {}^{\mathcal{C}}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\cos(\psi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\psi) \\ \dot{\phi}\sin(\psi)\cos(\theta) + \dot{\theta}\cos(\psi) \\ -\dot{\phi}\sin(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{(D.8)} $$

Le deuxième terme de l'équation (D.1) devient alors :

1. Dans une simulation, on introduira un offset sur la mesure de ϕ

$$
\begin{aligned}
& {}^{T}_{G/\mathcal{C}'''}p \; {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}^{T}_{\mathcal{C}'''} \; {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}^{T}_{\mathcal{C}'''} \; {}^{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \; {}^{\mathcal{C}}\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''} \; {}_{G/\mathcal{C}'''}p = \\
& \left\{\delta y^2 + \delta z^2\right\}\dot{\phi}^2 + \left\{-c(\phi)\delta x\,\delta y + \left(-\delta y\, c(\phi) + \delta z\, s(\phi)\right)\delta x + s(\phi)\delta x\,\delta z\right\}\dot{\phi}\dot{\theta} \\
& + \left\{\begin{array}{l} \left(-2\,\delta y\, s(\theta) - \delta x\, c(\theta)s(\phi)\right)\delta y + \left(-\delta y\, c(\theta)s(\phi) - c(\theta)c(\phi)\delta z\right)\delta x \\ + \left(-\delta x\, c(\theta)c(\phi) - 2\,\delta z\, s(\theta)\right)\delta z \end{array}\right\}\dot{\phi}\dot{\psi} \\
& + \left\{\left(\delta y\, s(\phi)c(\phi) + \delta z\,\left(c(\phi)\right)^2\right)\delta z + \delta x^2 + \left(\delta z\, s(\phi)c(\phi) + \delta y\,\left(1 - \left(c(\phi)\right)^2\right)\right)\delta y\right\}\dot{\theta}^2 \\
& + \left\{\begin{array}{l} \left(-\delta z\, s(\theta)s(\phi) + \delta y\, s(\theta)c(\phi)\right)\delta x \\ + \left(\delta y\,\left(c(\theta) - 2\,c(\theta)\left(c(\phi)\right)^2\right) - \delta x\, s(\theta)s(\phi) + 2\,\delta z\, c(\theta)c(\phi)s(\phi)\right)\delta z \\ + \left(\delta z\,\left(c(\theta) - 2\,c(\theta)\left(c(\phi)\right)^2\right) + \delta x\, s(\theta)c(\phi) - 2\,\delta y\, c(\theta)c(\phi)s(\phi)\right)\delta y \end{array}\right\}\dot{\theta}\dot{\psi} \\
& + \left\{\begin{array}{l} \left(\delta x\,\left(c(\theta)\right)^2 + \delta y\, c(\theta)s(\theta)s(\phi) + \delta z\, c(\theta)s(\theta)c(\phi)\right)\delta x \\ + \left(\delta x\, c(\theta)s(\theta)s(\phi) + \delta y\,\left(\left(c(\phi)\right)^2\left(c(\theta)\right)^2 - \left(c(\theta)\right)^2 + 1\right) - \delta z\, s(\phi)c(\phi)\left(c(\theta)\right)^2\right)\delta y \\ + \left(\delta x\, c(\theta)s(\theta)c(\phi) + \delta z\,\left(1 - \left(c(\phi)\right)^2\left(c(\theta)\right)^2\right) - \delta y\, s(\phi)c(\phi)\left(c(\theta)\right)^2\right)\delta z \end{array}\right\}\dot{\psi}^2
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

qui peut se réécrire sous la forme matricielle suivante en factorisant par rapport au vecteur $\dot{q} = \left[\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z},\, \dot{\phi},\, \dot{\theta},\, \dot{\psi}\right]^T$:

$$
T_{mct_2} = \frac{1}{2}\, m \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^T D_{mct_2} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\tag{D.10}
$$

avec :

$$
T_{mct_2} =
\begin{bmatrix}
\delta y^2 + \delta z^2 & \begin{array}{l} -\,c(\phi)\delta x\,\delta y \\ +\,s(\phi)\delta x\,\delta z \end{array} & \begin{array}{l} -\,c(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta y \\ -\,c(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta z \\ -\,s(\theta)\delta y^2 \\ -\,s(\theta)\delta z^2 \end{array} \\
\begin{array}{l} -\,c(\phi)\delta x\,\delta y \\ +\,s(\phi)\delta x\,\delta z \end{array} & \begin{array}{l} \delta x^2 + \left(s(\phi)\right)^2\delta y^2 \\ +\,2\,s(\phi)c(\phi)\delta y\,\delta z \\ +\,\left(c(\phi)\right)^2\delta z^2 \end{array} & \begin{array}{l} s(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y \\ -\,s(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z \\ -\,c(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta y^2 \\ +\,\left(c(\theta) - 2\,c(\theta)\left(c(\phi)\right)^2\right)\delta y\,\delta z \\ +\,c(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta z^2 \end{array} \\
\begin{array}{l} -\,c(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta y \\ -\,c(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta z \\ -\,s(\theta)\delta y^2 - s(\theta)\delta z^2 \end{array} & \begin{array}{l} s(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y - s(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z \\ -\,c(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta y^2 \\ +\,\left(c(\theta) - 2\,c(\theta)\left(c(\phi)\right)^2\right)\delta y\,\delta z \\ +\,c(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta z^2 \end{array} & \begin{array}{l} \left(c(\theta)\right)^2\delta x^2 \\ +\,2\,c(\theta)s(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta y \\ +\,2\,c(\theta)s(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta z \\ +\,\left(\left(c(\phi)\right)^2\left(c(\theta)\right)^2 - \left(s(\theta)\right)^2\right)\delta y^2 \\ -\,2\,s(\phi)c(\phi)\left(c(\theta)\right)^2\delta y\,\delta z \\ +\,\left(1 - \left(c(\phi)\right)^2\left(c(\theta)\right)^2\right)\delta z^2 \end{array}
\end{bmatrix}
\tag{D.11}
$$

De même, le troisième terme de l'équation (D.1) peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
&2\,V_O^T\ {}^C\overline{\Omega}_{\mathcal{C}'''}\ {}^C\mathcal{R}_{\mathcal{C}'''}\ p_{G/\mathcal{C}'''} = \\
&\left\{\begin{array}{l} -2\,\delta z\,s(\theta)c(\psi)s(\phi) + 2\,\delta z\ (c(\theta))^2\,c(\phi)s(\psi) + 2\,\delta y\ (s(\theta))^2\,s(\psi)s(\phi) \\ +2\,\delta y\ (c(\theta))^2\,s(\phi)s(\psi) + 2\,\delta y\,s(\theta)c(\psi)c(\phi) + 2\,\delta z\ (s(\theta))^2\,s(\psi)c(\phi) \end{array}\right\}\dot{x}\dot{\phi} \\
&+\left\{-2\,s(\theta)c(\psi)\delta x + 2\,c(\theta)s(\phi)c(\psi)\delta y + 2\,c(\theta)c(\phi)c(\psi)\delta z\right\}\dot{x}\dot{\theta} \\
&+\left\{-2\,s(\psi)c(\theta)\delta x + 2\,\delta z\,c(\psi)s(\phi) - 2\,\delta y\,c(\psi)c(\phi) - 2\,\delta z\,s(\psi)s(\theta)c(\phi) - 2\,\delta y\,s(\psi)s(\theta)s(\phi)\right\}\dot{x}\dot{\psi} \\
&+\left\{\begin{array}{l} -2\,\delta y\ (s(\theta))^2\,c(\psi)s(\phi) - 2\,\delta z\ (s(\theta))^2\,c(\psi)c(\phi) + 2\,\delta y\,s(\theta)s(\psi)c(\phi) \\ -2\,\delta z\ (c(\theta))^2\,c(\phi)c(\psi) - 2\,\delta z\,s(\theta)s(\psi)s(\phi) - 2\,\delta y\ (c(\theta))^2\,s(\phi)c(\psi) \end{array}\right\}\dot{y}\dot{\phi} \\
&+\left\{2\,c(\theta)s(\phi)s(\psi)\delta y + 2\,c(\theta)c(\phi)s(\psi)\delta z - 2\,s(\theta)s(\psi)\delta x\right\}\dot{y}\dot{\theta} \\
&+\left\{2\,\delta y\,c(\psi)s(\theta)s(\phi) + 2\,\delta z\,s(\psi)s(\phi) + 2\,c(\psi)c(\theta)\delta x - 2\,\delta y\,s(\psi)c(\phi) + 2\,\delta z\,c(\psi)s(\theta)c(\phi)\right\}\dot{y}\dot{\psi} \\
&+\left\{-2\,\delta z\ (c(\psi))^2\,c(\theta)s(\phi) - 2\,\delta z\ (s(\psi))^2\,c(\theta)s(\phi) + 2\,\delta y\ (c(\psi))^2\,c(\theta)c(\phi) + 2\,\delta y\ (s(\psi))^2\,c(\theta)c(\phi)\right\}\dot{z}\dot{\phi} \\
&+\left\{\begin{array}{l} -2\,\delta z\ (c(\psi))^2\,s(\theta)c(\phi) - 2\,\delta y\ (s(\psi))^2\,s(\theta)s(\phi) - 2\,\delta x\ (s(\psi))^2\,c(\theta) - 2\,\delta x\ (c(\psi))^2\,c(\theta) \\ -2\,\delta y\ (c(\psi))^2\,s(\theta)s(\phi) - 2\,\delta z\ (s(\psi))^2\,s(\theta)c(\phi) \end{array}\right\}\dot{z}\dot{\theta}
\end{aligned}
\tag{D.12}
$$

qui peut se réécrire sous la forme matricielle suivante en factorisant par rapport au vecteur $\dot{q} = \left[\dot{x},\,\dot{y},\,\dot{z},\,\dot{\phi},\,\dot{\theta},\,\dot{\psi}\right]^T$:

$$
T_{mct_3} = \frac{1}{2}\,m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} [0]_{3\times 3} & D_{mct_3}^T \\ D_{mct_3} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\tag{D.13}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
&D_{mct_3} = \\
&\left[\begin{array}{ccc}
\begin{array}{l}(s(\psi)s(\phi) + c(\psi)s(\theta)c(\phi))\,\delta y \\ +\,(-c(\psi)s(\theta)s(\phi) + s(\psi)c(\phi))\,\delta z\end{array} & \begin{array}{l}(-c(\psi)s(\phi) + s(\psi)s(\theta)c(\phi))\,\delta y \\ +\,(-s(\psi)s(\theta)s(\phi) - c(\psi)c(\phi))\,\delta z\end{array} & \begin{array}{c} c(\theta)c(\phi)\delta y \\ -\,c(\theta)s(\phi)\delta z \end{array} \\
\begin{array}{c} -\,s(\theta)c(\psi)\delta x \\ +\,c(\theta)s(\phi)c(\psi)\delta y \\ +\,c(\theta)c(\phi)c(\psi)\delta z \end{array} & \begin{array}{c} -\,s(\theta)s(\psi)\delta x \\ +\,c(\theta)s(\phi)s(\psi)\delta y \\ +\,c(\theta)c(\phi)s(\psi)\delta z \end{array} & \begin{array}{c} -\,c(\theta)\delta x - s(\theta)s(\phi)\delta y \\ -\,s(\theta)c(\phi)\delta z \end{array} \\
\begin{array}{l} -\,s(\psi)c(\theta)\delta x \\ +\,(-s(\psi)s(\theta)s(\phi) - c(\psi)c(\phi))\,\delta y \\ +\,(c(\psi)s(\phi) - s(\psi)s(\theta)c(\phi))\,\delta z \end{array} & \begin{array}{l} c(\psi)c(\theta)\delta x \\ +\,(-s(\psi)c(\phi) + c(\psi)s(\theta)s(\phi))\,\delta y \\ +\,(s(\psi)s(\phi) + c(\psi)s(\theta)c(\phi))\,\delta z \end{array} & 0
\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{D.14}
$$

Les trois termes de l'énergie cinétique de translation s'assemblent dans une matrice carrée comme cela sera montré après avoir calculé l'énergie cinétique de rotation.

D.2 Energie cinétique de rotation

Il a été dit précédemment que l'énergie cinétique de rotation peut s'écrire comme :

$$T_{mcr} = \frac{1}{2} \, {}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}^{T}_{\mathcal{C}'''} \, [\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}'''} \, {}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{C}'''} \tag{D.15}$$

avec :

$$[\mathcal{I}_{\mathcal{O}}]_{\mathcal{C}'''} = \begin{bmatrix} I_x + \varphi^2 I_y & I_x \varphi - \varphi I_y & 0 \\ I_x \varphi - \varphi I_y & \varphi^2 I_x + I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{D.16}$$

et :

$${}^{\mathcal{C}'''}\overrightarrow{\Omega}^{T}_{\mathcal{C}'''} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \cos(\phi)\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi)\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{D.17}$$

Or c'est une forme quadratique qui est recherchée, qui peut s'écrire $1/2\,\dot{q}^T D\,\dot{q}$ avec :

$$\dot{q} = \left[\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z},\, \dot{\phi},\, \dot{\theta},\, \dot{\psi}\right]^T \tag{D.18}$$

Pour y arriver, la valeur scalaire de T_{mcr} doit être calculée :

$$T_{mcr} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \left\{I_x + \varphi^2 I_y\right\} \dot{\phi}^2 + \{-2\,\varphi\, I_y + 2\,\varphi\, I_x\}\, c(\phi)\, \dot{\phi}\dot{\theta} \ldots \\ + \left\{(-2\,\varphi\, c(\theta)\, I_y + 2\,\varphi\, c(\theta) I_x)\, s(\phi) - 2\, I_x\, s(\theta) - 2\,\varphi^2 I_y\, s(\theta)\right\} \dot{\phi}\dot{\psi} \ldots \\ + \left\{\left(\varphi^2 I_x + I_y\right)\, (c(\phi))^2 + I_z\, \left(s(\phi)\right)^2\right\} \dot{\theta}^2 \ldots \\ + \left\{ \begin{array}{l} \left(-2\, I_z\, c(\theta) + 2\,\varphi^2 I_x\, c(\theta) + 2\, I_y\, c(\theta)\right) c(\phi) s(\phi) \ldots \\ + (-2\, s(\theta) I_x\, \varphi + 2\, s(\theta) I_y\, \varphi)\, c(\phi) \end{array} \right\} \dot{\theta}\dot{\psi} \ldots \\ + \left\{ \begin{array}{l} (2\,\varphi\, c(\theta) I_y\, s(\theta) - 2\,\varphi\, c(\theta) I_x\, s(\theta))\, s(\phi) + I_x\, \left(s(\theta)\right)^2 \ldots \\ + I_z\, \left(c(\theta)\right)^2 (c(\phi))^2 + \left((c(\theta))^2\, I_y + (c(\theta))^2\, \varphi^2 I_x\right) (s(\phi))^2 \ldots \\ + I_y\, \varphi^2\, \left(s(\theta)\right)^2 \end{array} \right\} \dot{\psi}^2 \end{array} \right] \tag{D.19}$$

puis refactorisée par rapport au vecteur $\dot{q}$ désiré pour obtenir :

$$T_{mcr} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^T D_{mcr} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{D.20}$$

avec :

$$
D_{mcr} = \begin{bmatrix}
I_x + \varphi^2 I_y & \varphi\, c(\phi) I_x - \varphi\, c(\phi) I_y & \begin{pmatrix} \varphi\, c(\theta) s(\phi) \dots \\ -\, s(\theta) \end{pmatrix} I_x \dots \\ & & + \begin{pmatrix} -\, \varphi\, c(\theta) s(\phi) \dots \\ -\, \varphi^2 s(\theta) \end{pmatrix} I_y \\
\varphi\, c(\phi) I_x - \varphi\, c(\phi) I_y & \begin{matrix} \varphi^2 \left(c(\phi)\right)^2 I_x \dots \\ +\left(c(\phi)\right)^2 I_y \dots \\ +\left(s(\phi)\right)^2 I_z \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{pmatrix} \varphi^2 c(\theta) c(\phi) s(\phi) \dots \\ -\, s(\theta) \varphi\, c(\phi) \end{pmatrix} I_x \dots \\ + \begin{pmatrix} c(\theta) c(\phi) s(\phi) \dots \\ +\, s(\theta) \varphi\, c(\phi) \end{pmatrix} I_y \dots \\ - c(\theta) c(\phi) s(\phi) I_z \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} \varphi\, c(\theta) s(\phi) \dots \\ -\, s(\theta) \end{pmatrix} I_x \dots & \begin{pmatrix} \varphi^2 c(\theta) c(\phi) s(\phi) \dots \\ -\, s(\theta) \varphi\, c(\phi) \end{pmatrix} I_x \dots & \begin{pmatrix} -\, 2\, \varphi\, c(\theta) s(\theta) s(\phi) \dots \\ +\left(c(\theta)\right)^2 \varphi^2 \left(s(\phi)\right)^2 \dots \\ +\left(s(\theta)\right)^2 \end{pmatrix} I_x \dots \\
+ \begin{pmatrix} -\, \varphi\, c(\theta) s(\phi) \dots \\ -\, \varphi^2 s(\theta) \end{pmatrix} I_y & + \begin{pmatrix} c(\theta) c(\phi) s(\phi) \dots \\ +\, s(\theta) \varphi\, c(\phi) \end{pmatrix} I_y \dots & + \begin{pmatrix} 2\, \varphi\, c(\theta) s(\theta) s(\phi) \dots \\ +\, \varphi^2 \left(s(\theta)\right)^2 \dots \\ +\left(c(\theta)\right)^2 \left(s(\phi)\right)^2 \end{pmatrix} I_y \dots \\
 & - c(\theta) c(\phi) s(\phi) I_z & + \left(c(\theta)\right)^2 \left(c(\phi)\right)^2 I_z
\end{bmatrix} \tag{D.21}
$$

Cette équation peut encore être transformée en utilisant le changement de coordonnées (C.8).

D.3 Energie cinétique totale

Maintenant que sont connues les expressions des différents termes constituant l'énergie cinétique mécanique du rotor d'une broche, elles peuvent être assemblées dans une même équation delà forme suivante :

$$
\begin{aligned}
T_{mc} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} m\, D_{mct_1} & m\, D_{mct_3}^T \\ m\, D_{mct_3} & m\, D_{mct_2} + D_{mcr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow T_{mc} &= \frac{1}{2}\, \dot{q}_m^T\, D_m\, \dot{q}_m
\end{aligned} \tag{D.22}
$$

Annexe E

Modèle de simulation : matrice C et dissipation électrique

E.1 Matrice C

Connaissant la matrice d'inertie du système, la formule des symboles de Christoffel définie dans l'Annexe B peut directement être appliquée pour obtenir la matrice C. En fait, pour simplifier l'écriture de cette partie de l'équation du système, c'est $C\,\dot{q}$ qui va être donnée. Au regard de la dimension de cette équation, elle va être coupée en trois parties. La première correspond aux trois translations (x, y, z) :

$$
\left[\begin{array}{l}
\left(-m\delta y\, c(\psi)s(\theta)s(\phi) - m\delta z\, c(\psi)s(\theta)c(\phi) - m\delta z\, s(\psi)s(\phi) + m\delta y\, s(\psi)c(\phi)\right)\dot{\phi}^2 \\
+ \left(-2\, mc(\theta)c(\psi)s(\phi)\delta z + 2\, mc(\theta)c(\psi)c(\phi)\delta y\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \\
+ \left(2\, m\delta z\, c(\psi)c(\phi) + 2\, m\delta z\, s(\theta)s(\psi)s(\phi) + 2\, m\delta y\, c(\psi)s(\phi) - 2\, m\delta y\, s(\theta)s(\psi)c(\phi)\right)\dot{\phi}\dot{\psi} \\
+ \left(-mc(\psi)c(\theta)\delta x - m\delta y\, c(\psi)s(\theta)s(\phi) - m\delta z\, c(\psi)s(\theta)c(\phi)\right)\dot{\theta}^2 \\
+ \left(-2\, ms(\psi)\delta y\, c(\theta)s(\phi) - 2\, ms(\psi)\delta z\, c(\theta)c(\phi) + 2\, ms(\psi)s(\theta)\delta x\right)\dot{\theta}\dot{\psi} \\
+ \left(-m\delta z\, s(\psi)s(\phi) - mc(\psi)c(\theta)\delta x + m\delta y\, s(\psi)c(\phi) - m\delta z\, c(\psi)s(\theta)c(\phi) - m\delta y\, c(\psi)s(\theta)s(\phi)\right)\left(\dot{\psi}\right)^2 \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xp}}^2}{\left(-e_0 + x\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xm}}^2}{\left(e_0 + x\right)^2} \\
\\
\left(-m\delta z\, s(\psi)s(\theta)c(\phi) - m\delta y\, s(\psi)s(\theta)s(\phi) + m\delta z\, c(\psi)s(\phi) - m\delta y\, c(\psi)c(\phi)\right)\dot{\phi}^2 \\
+ \left(2\, mc(\theta)s(\psi)c(\phi)\delta y - 2\, mc(\theta)s(\psi)s(\phi)\delta z\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \\
+ \left(2\, m\delta y\, s(\theta)c(\psi)c(\phi) + 2\, m\delta y\, s(\psi)s(\phi) - 2\, m\delta z\, s(\theta)c(\psi)s(\phi) + 2\, m\delta z\, s(\psi)c(\phi)\right)\dot{\phi}\dot{\psi} \\
+ \left(-ms(\psi)c(\theta)\delta x - m\delta y\, s(\psi)s(\theta)s(\phi) - m\delta z\, s(\psi)s(\theta)c(\phi)\right)\dot{\theta}^2 \\
+ \left(2\, mc(\psi)\delta y\, c(\theta)s(\phi) + 2\, mc(\psi)\delta z\, c(\theta)c(\phi) - 2\, mc(\psi)s(\theta)\delta x\right)\dot{\theta}\dot{\psi} \\
+ \left(m\delta z\, c(\psi)s(\phi) - ms(\psi)c(\theta)\delta x - m\delta y\, c(\psi)c(\phi) - m\delta z\, s(\psi)s(\theta)c(\phi) - m\delta y\, s(\psi)s(\theta)s(\phi)\right)\left(\dot{\psi}\right)^2 \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{y1p}}^2}{\left(-e_0 + y + l_a\, \tan(\psi)\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{y1m}}^2}{\left(e_0 + y + l_a\, \tan(\psi)\right)^2} \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{y2p}}^2}{\left(e_0 - y + l_a\, \tan(\psi)\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{y2m}}^2}{\left(e_0 + y - l_a\, \tan(\psi)\right)^2} \\
\\
\left(-mc(\theta)\delta y\, s(\phi) - mc(\theta)\delta z\, c(\phi)\right)\dot{\phi}^2 + \left(-2\, ms(\theta)c(\phi)\delta y + 2\, ms(\theta)s(\phi)\delta z\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \\
+ \left(-mc(\theta)\delta z\, c(\phi) + ms(\theta)\delta x - mc(\theta)\delta y\, s(\phi)\right)\dot{\theta}^2 \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{z1p}}^2}{\left(-e_0 + z - l_a\, \tan(\theta)\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{z1m}}^2}{\left(e_0 + z - l_a\, \tan(\theta)\right)^2} \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{z2p}}^2}{\left(-e_0 + z + l_a\, \tan(\theta)\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, {i_{z2m}}^2}{\left(e_0 + z + l_a\, \tan(\theta)\right)^2}
\end{array}\right] \qquad \text{(E.1)}
$$

Chaque ligne de cette matrice peut se décomposer en trois parties :
- la première comporte un terme avec $\dot{\phi}^2$ en facteur. Il s'agit de l'effet que provoque le balourd ;
- la deuxième correspond au reste des couplages par les vitesses (Coriolis) qui agissent sur chaque axe ;
- la troisième partie (celle comprenant des courants au carré) correspond aux forces électromagnétiques exercées par les actionneurs. Pour $\ddot{x}$ seul les actionneurs de cet axe ont une action. Par contre sur $\ddot{y}$ (respectivement sur $\ddot{z}$), agissent les actionneurs des axes y (respectivement des axes z) des chaque plans de contrôle.

Le deuxième vecteur correspond aux actions sur les axes (ϕ, θ, ψ) :

$$
\left[\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l} -mc(\phi)s(\phi)\delta y^2 - 2\,m\,(c(\phi))^2\,\delta y\,\delta z + m\delta y\,\delta z + mc(\phi)\delta z^2 s(\phi) \\ +\varphi^2 c(\phi) I_x\, s(\phi) + c(\phi) I_y\, s(\phi) - s(\phi) I_z\, c(\phi) \end{array}\right)\dot{\theta}^2 \\
+\left(\begin{array}{l} 2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta y^2 - 4\,mc(\theta)s(\phi)c(\phi)\delta y\,\delta z + \varphi^2 I_x\, c(\theta) - 2\,I_x\,\varphi^2 c(\theta)\,(c(\phi))^2 \\ +I_y\, c(\theta) - 2\,I_y\, c(\theta)\,(c(\phi))^2 + 2\,I_y\, s(\theta)\varphi\, s(\phi) + 2\,c(\theta)\,(c(\phi))^2 I_z - I_z\, c(\theta) \\ -I_x\, c(\theta) + 2\,ms(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta y + 2\,ms(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta z - 2\,mc(\theta)\delta y^2 \\ -2\,I_x\, s(\theta)\varphi\, s(\phi) - 2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta z^2 - I_y\,\varphi^2 c(\theta) \end{array}\right)\dot{\theta}\dot{\psi} \\
+\left(\begin{array}{l} -mc(\theta)s(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y + mc(\theta)s(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z + m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi)\delta y^2 \\ -m\,(c(\theta))^2\,\delta y\,\delta z + 2\,m\,(c(\phi))^2\,(c(\theta))^2\,\delta y\,\delta z - m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi)\delta z^2 \\ -I_x\,(c(\theta))^2\,\varphi^2 s(\phi)c(\phi) + I_x\,\varphi\,c(\theta)s(\theta)c(\phi) - I_y\,\varphi\,c(\theta)s(\theta)c(\phi) \\ -I_y\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi) + c(\phi)\,(c(\theta))^2\,I_z\,s(\phi) \end{array}\right)\left(\dot{\psi}\right)^2 \\
\\
(ms(\phi)\delta x\,\delta y + mc(\phi)\delta x\,\delta z - \varphi\, s(\phi) I_x + \varphi\, s(\phi) I_y)\,\dot{\phi}^2 \\
+\left(\begin{array}{l} 4\,m\,(c(\phi))^2\,\delta y\,\delta z - 2\,m\delta y\,\delta z + 2\,s(\phi) I_z\, c(\phi) - 2\,c(\phi) I_y\, s(\phi) \\ -2\,\varphi^2 c(\phi) I_x\, s(\phi) + 2\,mc(\phi)s(\phi)\delta y^2 - 2\,mc(\phi)\delta z^2 s(\phi) \end{array}\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \\
+\left(\begin{array}{l} -2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta y^2 + I_y\,\varphi^2 c(\theta) - I_y\, c(\theta) + 2\,mc(\theta)\delta y^2 + I_x\, c(\theta) + I_z\, c(\theta) \\ +2\,I_x\,\varphi^2 c(\theta)\,(c(\phi))^2 - 2\,I_y\, s(\theta)\varphi\, s(\phi) + 2\,I_y\, c(\theta)\,(c(\phi))^2 + 2\,I_x\, s(\theta)\varphi\, s(\phi) \\ -2\,ms(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta y - 2\,c(\theta)\,(c(\phi))^2\,I_z + 4\,mc(\theta)s(\phi)c(\phi)\delta y\,\delta z - \varphi^2 I_x\, c(\theta) \\ +2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta z^2 - 2\,ms(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta z \end{array}\right)\dot{\phi}\dot{\psi} \\
+\left(\begin{array}{l} mc(\theta)\delta x^2 s(\theta) + ms(\phi)\delta x\,\delta y - 2\,m\,(c(\theta))^2\,s(\phi)\delta x\,\delta y + mc(\phi)\delta x\,\delta z \\ -2\,m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)\delta x\,\delta z + m\delta y^2 c(\theta)\,(c(\phi))^2\,s(\theta) - m\delta y^2 c(\theta)s(\theta) \\ -2\,mc(\phi)s(\phi)c(\theta)\delta y\,\delta z\,s(\theta) - mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,s(\theta)\delta z^2 + I_x\, c(\theta)\varphi^2 s(\theta) \\ -I_x\, c(\theta)\varphi^2 s(\theta)\,(c(\phi))^2 - I_x\, c(\theta)s(\theta) - \varphi\, s(\phi) I_x + 2\,I_x\,\varphi\,(c(\theta))^2\,s(\phi) \\ -I_y\,\varphi^2 s(\theta)c(\theta) + \varphi\, s(\phi) I_y - 2\,I_y\,\varphi\,(c(\theta))^2\,s(\phi) \\ +I_y\, c(\theta)s(\theta) - I_y\, c(\theta)s(\theta)\,(c(\phi))^2 + (c(\phi))^2\, c(\theta) I_z\, s(\theta) \end{array}\right)\left(\dot{\psi}\right)^2 \\
+\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\theta))^2+1\right)}{(-e_0+z-l_a\,\tan(\theta))^2}{i_{z1p}}^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\theta))^2+1\right)}{(e_0+z-l_a\,\tan(\theta))^2}{i_{z1m}}^2 \\
-\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\theta))^2+1\right)}{(-e_0+z+l_a\,\tan(\theta))^2}{i_{z2p}}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\theta))^2+1\right)}{(e_0+z+l_a\,\tan(\theta))^2}{i_{z2m}}^2 \\
\\
(-mc(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y + mc(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z + \varphi\, c(\theta)c(\phi) I_x - \varphi\, c(\theta)c(\phi) I_y)\,\dot{\phi}^2 \\
+\left(\begin{array}{l} 2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta z^2 - 2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,\delta y^2 - 2\,c(\theta)\,(c(\phi))^2\,I_z - \varphi^2 I_x\, c(\theta) \\ -2\,mc(\theta)\delta z^2 - I_x\, c(\theta) + 2\,I_x\,\varphi^2 c(\theta)\,(c(\phi))^2 + 4\,mc(\theta)s(\phi)c(\phi)\delta y\,\delta z \\ -I_y\,\varphi^2 c(\theta) + I_z\, c(\theta) - I_y\, c(\theta) + 2\,I_y\, c(\theta)\,(c(\phi))^2 \end{array}\right)\dot{\phi}\dot{\theta} \\
+\left(\begin{array}{l} -2\,c(\phi)\,(c(\theta))^2\,I_z\, s(\phi) + 2\,m\,(c(\theta))^2\,\delta y\,\delta z + 2\,mc(\theta)s(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y - 2\,m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi)\delta y^2 \\ +2\,I_y\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi) + 2\,I_x\,(c(\theta))^2\,\varphi^2 s(\phi)c(\phi) - 4\,m\,(c(\phi))^2\,(c(\theta))^2\,\delta y\,\delta z \\ +2\,m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)s(\phi)\delta z^2 - 2\,mc(\theta)s(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z - 2\,I_x\,\varphi\,c(\theta)s(\theta)c(\phi) + 2\,I_y\,\varphi\,c(\theta)s(\theta)c(\phi) \end{array}\right)\dot{\phi}\dot{\psi} \\
+\left(\begin{array}{l} mc(\theta)c(\phi)\delta x\,\delta y - mc(\theta)s(\phi)\delta x\,\delta z + ms(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta y^2 - m\delta y\,\delta z\,s(\theta) + 2\,m\delta y\,\delta z\,s(\theta)\,(c(\phi))^2 \\ -ms(\theta)c(\phi)s(\phi)\delta z^2 - I_x\,\varphi^2 s(\theta)s(\phi)c(\phi) - \varphi\, c(\theta)c(\phi) I_x - I_y\, s(\theta)s(\phi)c(\phi) + \varphi\, c(\theta)c(\phi) I_y \\ +s(\theta)s(\phi)c(\phi) I_z \end{array}\right)\dot{\theta}^2 \\
+\left(\begin{array}{l} 2\,I_x\, c(\theta)\varphi^2 s(\theta)\,(c(\phi))^2 - 2\,mc(\theta)\delta x^2 s(\theta) - 2\,m\delta y^2 c(\theta)\,(c(\phi))^2\,s(\theta) - 2\,(c(\phi))^2\,c(\theta) I_z\, s(\theta) \\ +4\,m\,(c(\theta))^2\,s(\phi)\delta x\,\delta y + 2\,I_y\,\varphi^2 s(\theta)c(\theta) + 2\,I_y\, c(\theta)s(\theta)\,(c(\phi))^2 + 2\,mc(\theta)\,(c(\phi))^2\,s(\theta)\delta z^2 \\ +4\,mc(\phi)s(\phi)c(\theta)\delta y\,\delta z\,s(\theta) + 4\,m\,(c(\theta))^2\,c(\phi)\delta x\,\delta z - 2\,I_x\, c(\theta)\varphi^2 s(\theta) - 2\,\varphi\, s(\phi) I_y \\ -2\,I_y\, c(\theta)s(\theta) - 2\,ms(\phi)\delta x\,\delta y + 2\,\varphi\, s(\phi) I_x + 2\,m\delta y^2 c(\theta)s(\theta) + 4\,I_y\,\varphi\,(c(\theta))^2\,s(\phi) \\ +2\,I_x\, c(\theta)s(\theta) - 2\,mc(\phi)\delta x\,\delta z - 4\,I_x\,\varphi\,(c(\theta))^2\,s(\phi) \end{array}\right)\dot{\theta}\dot{\psi} \\
-\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\psi))^2+1\right)}{(-e_0+y+l_a\,\tan(\psi))^2}{i_{y1p}}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\psi))^2+1\right)}{(e_0+y+l_a\,\tan(\psi))^2}{i_{y1m}}^2 \\
+\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\psi))^2+1\right)}{(e_0-y+l_a\,\tan(\psi))^2}{i_{y2p}}^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda\, l_a\,\left((\tan(\psi))^2+1\right)}{(e_0+y-l_a\,\tan(\psi))^2}{i_{y2m}}^2
\end{array}\right] \qquad \text{(E.2)}
$$

Le premier terme de ce vecteur correspond aux efforts qui vont être subits principalement par l'accélération $\ddot{\phi}$. On constate qu'il n'existe aucune force électromagnétique dans ce vecteur. En fait celle-ci existe par l'intermédiaire du couple que va créer le moteur [1]. Ce couple n'étant pas pris en

1. Moteur asynchrone sur notre banc d'essais ; la cage du moteur est incluse dans le rotor.

compte dans la commande, il n'apparaîtra pas forcément dans les équations. On remarque aussi que cette accélération n'est pas perturbée par un terme en $\dot{\phi}^2$.

Les deuxième et troisième termes présentent les mêmes caractéristiques que les éléments du vecteur (E.1) : y apparaissent l'action principale du balourd (terme en $\dot{\phi}^2$), les couplages supplémentaires par les vitesses[2], ainsi que les forces électromagnétiques.
Le troisième vecteur correspond aux dix équations électriques :

$$\left[\begin{array}{l}
\dfrac{\lambda\,\dot{y} i_{y1p}}{\left(-e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\left(\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(-e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\psi)\right)^2}{\left(-e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}\right)\dot{\psi} i_{y1p}\\
-\dfrac{\lambda\,\dot{y} i_{y1m}}{\left(e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\left(-\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}-\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\psi)\right)^2}{\left(e_0+y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}\right)\dot{\psi} i_{y1m}\\
\dfrac{\lambda\,\dot{y} i_{y2p}}{\left(-e_0+y-l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\left(-\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(e_0-y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}-\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\psi)\right)^2}{\left(e_0-y+l_a\,\tan(\psi)\right)^2}\right)\dot{\psi} i_{y2p}\\
-\dfrac{\lambda\,\dot{y} i_{y2m}}{\left(e_0+y-l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\left(\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(e_0+y-l_a\,\tan(\psi)\right)^2}+\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\psi)\right)^2}{\left(e_0+y-l_a\,\tan(\psi)\right)^2}\right)\dot{\psi} i_{y2m}\\
\dfrac{\lambda\,\dot{z} i_{z1p}}{\left(-e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\left(-\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(-e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}-\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\theta)\right)^2}{\left(-e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}\right)\dot{\theta} i_{z1p}\\
-\dfrac{\lambda\,\dot{z} i_{z1m}}{\left(e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\left(\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\theta)\right)^2}{\left(e_0+z-l_a\,\tan(\theta)\right)^2}\right)\dot{\theta} i_{z1m}\\
\dfrac{\lambda\,\dot{z} i_{z2p}}{\left(-e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\left(\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(-e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\theta)\right)^2}{\left(-e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}\right)\dot{\theta} i_{z2p}\\
-\dfrac{\lambda\,\dot{z} i_{z2m}}{\left(e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}+\left(-\dfrac{\lambda\,l_a}{\left(e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}-\dfrac{\lambda\,l_a\,\left(\tan(\theta)\right)^2}{\left(e_0+z+l_a\,\tan(\theta)\right)^2}\right)\dot{\theta} i_{z2m}\\
\dfrac{\lambda_x\,\dot{x}\,i_{xp}}{\left(-e_0+x\right)^2}\\
-\dfrac{\lambda_x\,\dot{x}\,i_{xm}}{\left(e_0+x\right)^2}
\end{array}\right] \qquad \text{(E.3)}$$

Il s'agit de l'effet obtenu par la variation de l'inductance des actionneurs lorsque varient les entrefers. C'est exactement les termes $\frac{dL}{dt}\,i(t)$ qui sont obtenus lorsqu'on écrit que la tension aux bornes d'une inductance est :

2. Ces couplages sont en partie fonction de la différence de position entre l'axe d'inertie et l'axe géométrique par l'intermédiaire de termes comportant des carrés ou des produits de δx et δz. Ces éléments sont directement issus des inerties de Huyghens.

$$u = \frac{d}{dt}\left(L\, i(t)\right) = \frac{d\, L}{dt}\, i(t) + L\, \frac{d\, i(t)}{dt} \tag{E.4}$$

Chacun des éléments des vecteurs ci-dessous agit principalement sur l'accélération qui lui est en vis à vis dans l'équation de Lagrange. Mais il ne faut pas oublier que la matrice d'inertie mécanique n'est pas diagonale. Si on s'intéresse à la forme de chaque accélération, il faut inverser la matrice D pour arriver sur un modèle d'état qui serait :

$$\ddot{q} = D^{-1}\left(-C\,\dot{q} - \frac{\partial\,\mathfrak{R}}{\partial\,\dot{q}} + E\right) \tag{E.5}$$

Chacune des dynamiques des coordonnées mécaniques va être composée d'une action principale modifiée par l'ensemble des autres termes pondérés par les éléments de D^{-1}. C'est ainsi que l'ensemble des actionneurs va agir sur chaque accélération par l'intermédiaire des couplages. Or, tous ces couplages ne pourront être pris en compte lors de la conception des lois de commande. Ce modèle de simulation devrait donc permettre de tester l'efficacité de nos commandes vis à vis des inévitables simplifications effectuées avant de passer à des essais réels.

E.2 Energie dissipée

L'énergie dissipée (fonction de Rayleigh) est due à la valeur des résistances des bobinages. En supposant que les actionneurs des deux plans de contrôle aient une composition identique, il va être possible d'écrire :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8} R\, i_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=9}^{10} R_x\, i_j^2 \tag{E.6}$$

où R est la résistance des huit actionneurs des plans de contrôle, et R_x celle des actionneurs qui positionnent le rotor axialement.

En calculant la dérivée de la fonction de Rayleigh par rapport au vecteur des vitesses généralisées $\dot{q}$, la dissipation intervenant dans l'équation du système s'écrit :

$$\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} [0]_{6\times 1} \\ \\ R\, i_{y1p} \\ R\, i_{y1m} \\ R\, i_{y2p} \\ R\, i_{y2m} \\ R\, i_{z1p} \\ R\, i_{z1m} \\ R\, i_{z2p} \\ R\, i_{z2m} \\ R_x\, i_{xp} \\ R_x\, i_{xm} \end{bmatrix} \tag{E.7}$$

E.3 Les entrées du système

Pour terminer cette annexe, il faut parler des entrées de ce modèle de simulation. Au niveau de la partie mécanique, il n'y a normalement d'entrée que sur l'équation contrôlant le comportement de $\ddot{\phi}$. Il s'agit du couple moteur [3] qui va permettre de contrôler la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ du rotor.

Pourtant, dans ce modèle, la possibilité d'avoir des entrées sur la partie mécanique [4] va permettre de simuler des perturbations telles que des efforts de coupe sur un outil fixé au rotor.

En ce qui concerne les équations électriques, les entrées sont les tensions appliquées aux bornes des actionneurs. Ces tensions seront notées E_j, où l'indice j est identique à l'indice du courant correspondant.

3. Couple moteur de la machine asynchrone sur notre banc d'essais.
4. On pense ici à la réalisation pratique de la simulation

Annexe F

Le volant d'inertie

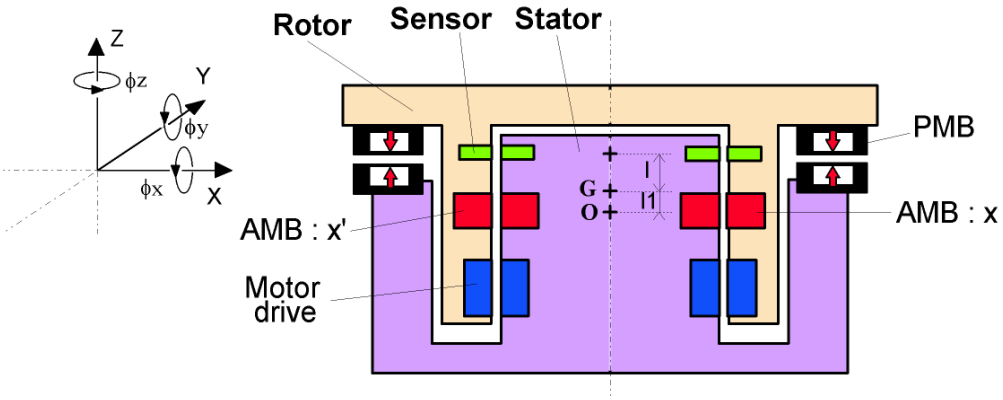


FIG. F.1: *Représentation schématique d'un volant d'inertie*

Un volant d'inertie (voir Figure F.1) est un appareillage qui permet de stocker de l'énergie mécanique par l'intermédiaire de la vitesse du rotor. Cette énergie peut être utilisée pour son effet gyroscopique ou pour être restituée plus tard. Ce système est actuellement utilisé dans les satellites, mais des études sont en cours pour les incorporer dans des véhicules électriques (si le danger potentiel que représentent ces mécanismes en cas d'accident est écarté). Les paliers magnétiques sont bien pratiques pour réduire les frottements qui nuisent au stockage de l'énergie.

Le modèle développé dans (Charara, 1992) a été utilisé dans nos propres travaux et principalement dans (Charara et al., 1996). Ce modèle présente la particularité, par rapport au modèle de la broche, de présenter une partie inobservable lorsqu'on applique la linéarisation entrée-sortie. Sinon, son comportement est très proche de celui d'un système plan.

Annexe G

Modèle d'analyse

G.1 Matrice D

La matrice D de ce modèle est obtenue en partant de l'équation (D.22). La première simplification effectuée est le remplacement des cosinus de θ et ψ par un, et leurs sinus par l'angle.

La deuxième opération dans (D.22) consiste à utiliser le changement de variables défini par les équations (2.33). $\dot{q}$ passe de $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, i_{y1p}, i_{y1m}, i_{y2p}, i_{y2m}, i_{z1p}, i_{z1m}, i_{z2p}, i_{z2m}, i_{xp}, i_{xm}]$ à $[\dot{x}, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dot{\phi}, i_{y1p}, i_{y1m}, i_{z1p}, i_{z1m}, i_{y2p}, i_{y2m}, i_{z2p}, i_{z2m}, i_{xp}, i_{xm}]$. La matrice d'inertie est découpée en plusieurs partie à cause de sa taille. La partie mécanique devient :

$D_m =$

$$
\begin{bmatrix}
m & \frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^3} + \frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z}{l_c} & -\frac{1}{2}\frac{m\delta z\,c(\phi)}{l_c} \\
\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^3} + \frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z}{l_c} & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 - \frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{m\,(y_1-y_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2} + \frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2\,I_x}{{l_c}^4} + \frac{1}{4}\,m & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) - \frac{1}{8}\frac{m\delta z\,(y_1-y_2)\,c(\phi)}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{2}\frac{m\delta z\,c(\phi)}{l_c} & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) - \frac{1}{8}\frac{m\delta z\,(y_1-y_2)\,c(\phi)}{{l_c}^2} & \left(\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 - \frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\,m + \frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^3} - \frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z}{l_c} & \left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 - \frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2} - \frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2\,I_x}{{l_c}^4} + \frac{1}{4}\,m & \left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) - \frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} \\
\frac{m\delta z\,c(\phi)}{l_c} & \left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) + \frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 + \frac{1}{4}\,m - \frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2} \\
\frac{1}{2}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{l_c} + \frac{1}{2}\frac{m\,(z_1-z_2)\,s(\phi)\delta z}{l_c} & -\frac{1}{2}m\delta z\,c(\phi) + \frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,\delta z^2}{{l_c}^2} + \frac{1}{8}\frac{m\,(z_1-z_2)\,(y_1-y_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)\,I_x}{{l_c}^2} & -ms(\phi)\delta z
\end{bmatrix}
$$

$$
\left|\begin{array}{ccc}
-\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^3} & \frac{1}{2}\frac{m\delta z\,c(\phi)}{l_c} & \frac{1}{2}\frac{m\delta z\,(y_1-y_2)\,c(\phi)}{l_c} \\
-\frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z}{l_c} & & +\frac{1}{2}\frac{m\,(z_1-z_2)\,s(\phi)\delta z}{l_c} \\
\left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 & & \\
-\frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2} & \left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) & -\frac{1}{2}m\delta z\,c(\phi)+\frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,\delta z^2}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2} & +\frac{1}{8}\frac{m\delta z\,(y_1-y_2)\,c(\phi)}{{l_c}^2} & +\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2\,I_x}{{l_c}^4} & & +\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)\,I_x}{{l_c}^2} \\
+\frac{1}{4}m & & \\
\left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 & \\
-\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & +\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2} & -\frac{1}{2}ms(\phi)\delta z \\
\left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 & & \\
+\frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & & -\frac{1}{2}m\delta z\,c(\phi) \\
+\frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2} & \left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) & -\frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,\delta z^2}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{4}\frac{m\,(y_1-y_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & +\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & +\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} \\
+\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2} & & -\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)\,I_x}{{l_c}^2} \\
+\frac{1}{16}\frac{(z_1-z_2)^2\,I_x}{{l_c}^4} & & \\
+\frac{1}{4}m & & \\
\left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_y-I_z}{{l_c}^2}\right)s(\phi)c(\phi) & \left(\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}\right)(c(\phi))^2 & \\
+\frac{1}{8}\frac{m\,(y_1-y_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & +\frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,c(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & -\frac{1}{2}ms(\phi)\delta z \\
 & +\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}\frac{(s(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2} & \\
-\frac{1}{2}m\delta z\,c(\phi) & & \\
-\frac{1}{4}\frac{m\,(z_1-z_2)\,\delta z^2}{{l_c}^2} & & \\
+\frac{1}{8}\frac{m\,(z_1-z_2)\,(y_1-y_2)\,s(\phi)\delta z}{{l_c}^2} & -\frac{1}{2}ms(\phi)\delta z & m\delta z^2+I_x \\
-\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)\,I_x}{{l_c}^2} & &
\end{array}\right| \qquad \text{(G.1)}
$$

Pour simplifier plus l'expression de la partie mécanique de l'énergie cinétique, on considère δx égale à zéro. Bien que ce ne soit pas un cas généralisé, cela n'enlève rien à ce que peut révéler l'observation de ce modèle. δx ne fait que "déplacer" l'inertie du rotor par rapport aux plans de contrôle, faisant varier l'influence relative du balourd dans chacun de ces plans. De même l'angle φ et le paramètre δy ont été choisis égaux à zéro. Leur existence provoque un déphasage spatial de l'action du balourd dans un plan par rapport à l'autre. Ces trois quantités ne sont pas primordiales pour extraire du modèle la caractéristique qui nous intéresse.

La partie électrique devient :

$$D_e = \begin{bmatrix}
\frac{\lambda}{e_0 - y_1 + \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda}{e_0 + y_1 - \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 - z_1 + \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 + z_1 - \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2\,l_c}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 - y_2 - \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2\,l_c}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\lambda}{e_0 + y_2 + \frac{d_{ca}(y_1 - y_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda}{e_0 - z_2 - \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\lambda}{e_0 + z_2 + \frac{d_{ca}(z_1 - z_2)}{2\,l_c}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_x}{e_0 - x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_x}{e_0 + x}
\end{bmatrix} \tag{G.2}$$

Bien entendu, l'énergie cinétique s'exprime comme :

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} D_m & [0]_{6\times 10} \\ [0]_{10\times 6} & De \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_e \end{pmatrix} \tag{G.3}$$

G.2 Matrice C

A partir de la matrice d'inertie précédente, on peut obtenir le vecteur $C\dot{q}$. Encore une fois, ce vecteur va être découpé afin de faciliter son insertion dans ce document. Le premier terme correspond à l'action principale sur $\ddot{x}$:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(z_1 - z_2)}{{l_c}^3}\ddot{y}_1^2 + \frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1 - y_2)}{{l_c}^3}\dot{y}_1\dot{z}_1 + \frac{1}{2}\frac{m\delta z\, c(\phi)(z_2 - z_1)}{{l_c}^3}\dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_2 - y_1)}{{l_c}^3}\dot{y}_1\dot{z}_2 \\
+ \left(\frac{1}{4}\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2 - y_1)\,(z_1 - z_2)}{{l_c}^3} + 2\frac{m\delta z\, c(\phi)}{l_c}\right)\dot{y}_1\dot{\phi} + \frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_2 - y_1)}{{l_c}^3}\dot{z}_1\dot{y}_2 + 2\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{l_c} \\
+ \frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(z_1 - z_2)}{{l_c}^3}\dot{y}_2^2 + \frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1 - y_2)}{{l_c}^3}\dot{y}_2\dot{z}_2 + \left(-2\frac{m\delta z\, c(\phi)}{l_c} + \frac{1}{4}\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2)}{{l_c}^3}\right)\dot{y}_2\dot{\phi} \\
- 2\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{l_c} + \left(\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2 - y_1)}{l_c} + \frac{m\delta z\, c(\phi)(z_1 - z_2)}{l_c}\right)\dot{\phi}^2 \\
- \frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xp}}^2}{(-e_0 + x)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xm}}^2}{(e_0 + x)^2}
\end{bmatrix} \tag{G.4}$$

Les deux termes suivants correspondent respectivement à l'action principale sur $\ddot{y}_1$ et $\ddot{z}_1$:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{z}_1+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{z}_2+\frac{1}{4}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2-y_1)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{\phi}\\
+\frac{1}{8}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_1^2}{{l_c}^2}+\left(\frac{1}{8}\,\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}-\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{z}_1-\frac{1}{4}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_1\dot{y}_2}{{l_c}^2}\\
+\left(\frac{1}{8}\,\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{z}_2\\
+\left(\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_1-z_2)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{\phi}\\
+\left(\frac{1}{4}\,\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}+\frac{1}{2}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{y}_2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_1-y_2)}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{\phi}\\
+\frac{1}{8}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_2^2}{{l_c}^2}+\left(-\frac{1}{2}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\right)\dot{y}_2\dot{z}_2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_2-z_1)}{{l_c}^2}-\frac{mc(\phi)\delta z^2s(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2\dot{\phi}\\
+\left(\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2-y_1)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_2\dot{\phi}\\
+\left(ms(\phi)\delta z+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^2}\right)\dot{\phi}^2\\
+\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}{i_{y1p}}^2-\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}{i_{y1m}}^2\\
-\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,{i_{y2p}}^2}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}+\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,{i_{y2m}}^2}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}
\end{bmatrix}
\tag{G.5}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_1+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_2+\left(-\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\,\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\right)\dot{y}_1^2\\
+\frac{1}{4}\,\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{\phi}\\
-\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)\dot{z}_1^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)\dot{z}_1\dot{z}_2}{{l_c}^2}\\
+\left(-\frac{1}{2}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_1-z_2)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{\phi}\\
+\left(\frac{1}{16}\,\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}+\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2^2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2\dot{\phi}\\
-\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)\dot{z}_2^2}{{l_c}^2}+\left(-\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{mc(\phi)\delta z^2s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_2\dot{\phi}-m\delta z\,c(\phi)\dot{\phi}^2\\
+\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(-2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\,{i_{z1p}}^2-\frac{\lambda\,l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\,{i_{z1m}}^2\\
-\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,{i_{z2p}}^2}{(2\,e_0\,l_c-2\,z_2\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}+\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,{i_{z2m}}^2}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_2\,l_c+d_{ca}\,z_1-d_{ca}\,z_2)^2}
\end{bmatrix}
$$

Les deux termes suivants correspondent respectivement à l'action principale sur $\ddot{y}_2$ et $\ddot{z}_2$:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{z}_1+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{z}_2+\frac{1}{4}\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{\phi}+\frac{1}{8}\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_1^2}{{l_c}^2}\\
+\left(-\frac{1}{2}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\right)\dot{y}_1\dot{z}_1-\frac{1}{4}\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_1\dot{y}_2}{{l_c}^2}+\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}+\frac{1}{2}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{z}_2\\
+\left(-\frac{c(\phi)I_y\, s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{s(\phi)I_z\, c(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{m\delta z\, s(\phi)(z_1-z_2)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{\phi}\\
+\left(\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{y}_2\\
+\left(\frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_1-y_2)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2 I_z}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{I_z}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_x}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2 I_y}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{\phi}\\
+\frac{1}{8}\frac{ms(\phi)\delta z\,\dot{y}_2^2}{{l_c}^2}+\left(-\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\right)\dot{y}_2\dot{z}_2\\
+\left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, s(\phi)(z_2-z_1)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{s(\phi)I_z\, c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{c(\phi)I_y\, s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2\dot{\phi}\\
+\left(-\frac{(c(\phi))^2 I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2-y_1)}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2 I_z}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{I_x}{{l_c}^2}+\frac{m\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_z}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_2\dot{\phi}\\
+\left(ms(\phi)\delta z+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^2}\right)\dot{\phi}^2\\
-\frac{\lambda\, l_c\, d_{ca}\, {i_{y1p}}^2}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}+\frac{\lambda\, l_c\, d_{ca}\, {i_{y1m}}^2}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\\
+\frac{\lambda\, l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}\,{i_{y2p}}^2-\frac{\lambda\, l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}\,{i_{y2m}}^2
\end{bmatrix}
\tag{G.6}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_1+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_2+\left(\frac{1}{8}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\right)\dot{y}_1^2\\
+\frac{1}{4}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2+\left(\frac{1}{2}\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2 I_y}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2 I_z}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{I_x}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{\phi}\\
-\frac{1}{8}\frac{m\delta z\, c(\phi)\dot{z}_1^2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, c(\phi)\dot{z}_1\dot{z}_2}{{l_c}^2}+\left(-\frac{s(\phi)I_z\, c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{c(\phi)I_y\, s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{\phi}\\
+\left(\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}-\frac{1}{8}\frac{m\delta z\, c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2^2\\
+\left(\frac{1}{2}\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2 I_z}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2 I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_x}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2\dot{\phi}\\
-\frac{1}{8}\frac{m\delta z\, c(\phi)\dot{z}_2^2}{{l_c}^2}+\left(\frac{1}{4}\frac{m\delta z\, s(\phi)(z_2-z_1)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{c(\phi)I_y\, s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\frac{s(\phi)I_z\, c(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_2\dot{\phi}\\
-m\delta z\, c(\phi)\dot{\phi}^2\\
-\frac{\lambda\, l_c\, d_{ca}\, {i_{z1p}}^2}{(-2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}+\frac{\lambda\, l_c\, d_{ca}\, {i_{z1m}}^2}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\\
+\frac{\lambda\, l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c-2\,z_2\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\,{i_{z2p}}^2-\frac{\lambda\, l_c\,(d_{ca}-2\,l_c)}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_2\,l_c+d_{ca}\,z_1-d_{ca}\,z_2)^2}\,{i_{z2m}}^2
\end{bmatrix}
$$

Il est possible de noter au passage, la similitude qui existe entre ces deux termes et ceux agissant sur $\ddot{y}_1$ et $\ddot{z}_1$. Le choix des paramètres $\delta x = 0$, $\varphi = 0$ et $\delta y = 0$ donne une certaine symétrie au comportement du rotor vu des deux plans de contrôle.

Le dernier terme mécanique correspond à l'action principale sur $\ddot{\phi}$:

$$
\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{4}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_1+\frac{1}{4}\,\frac{ms(\phi)\delta z\,(y_2-y_1)\,(z_1-z_2)}{{l_c}^3}\dot{x}\dot{y}_2\\
+\left(\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_1-z_2)}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_2-y_1)}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1^2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{z}_1\\
+\left(-\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{y}_2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_1\dot{z}_2\\
+\left(-\frac{1}{4}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_2-z_1)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1^2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}-\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{y}_2\\
+\left(-\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_1\dot{z}_2\\
+\left(\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,c(\phi)(y_1-y_2)}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_2-z_1)}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2^2\\
+\left(\frac{1}{2}\,\frac{I_z}{{l_c}^2}+\frac{(c(\phi))^2\,I_y}{{l_c}^2}+\frac{m\,(c(\phi))^2\,\delta z^2}{{l_c}^2}-\frac{(c(\phi))^2\,I_z}{{l_c}^2}-\frac{1}{2}\,\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{2}\,\frac{I_x}{{l_c}^2}\right)\dot{y}_2\dot{z}_2\\
+\left(\frac{1}{4}\,\frac{mc(\phi)\delta z^2 s(\phi)}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\,\frac{s(\phi)I_z\,c(\phi)}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\,\frac{m\delta z\,s(\phi)(z_1-z_2)}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\,\frac{c(\phi)I_y\,s(\phi)}{{l_c}^2}\right)\dot{z}_2^2
\end{array}\right]
\tag{G.7}
$$

Les termes $\frac{d\,L}{d\,t}$ intervenant dans les équations électriques sont :

$$
\left[\begin{array}{l}
2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\dot{y}_1\,i_{y1p}+2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,y_2 i_{y1p}}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\\
-2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\dot{y}_1\,i_{y1m}-2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,y_2 i_{y1m}}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_1\,l_c-d_{ca}\,y_1+d_{ca}\,y_2)^2}\\
2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(-2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\dot{z}_1\,i_{z1p}+2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,z_2 i_{z1p}}{(-2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\\
-2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\dot{z}_1\,i_{z1m}-2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,z_2 i_{z1m}}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_1\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\\
2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,y_1 i_{y2p}}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}+2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(-2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}\dot{y}_2\,i_{y2p}\\
-2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,y_1 i_{y2m}}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}-2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(2\,e_0\,l_c+2\,y_2\,l_c+d_{ca}\,y_1-d_{ca}\,y_2)^2}\dot{y}_2\,i_{y2m}\\
2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,z_1 i_{z2p}}{(2\,e_0\,l_c-2\,z_2\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}+2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(2\,e_0\,l_c-2\,z_2\,l_c-d_{ca}\,z_1+d_{ca}\,z_2)^2}\,\dot{z}_2\,i_{z2p}\\
-2\,\frac{\lambda\,l_c\,d_{ca}\,z_1 i_{z2m}}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_2\,l_c+d_{ca}\,z_1-d_{ca}\,z_2)^2}-2\,\frac{\lambda\,l_c(2\,l_c-d_{ca})}{(2\,e_0\,l_c+2\,z_2\,l_c+d_{ca}\,z_1-d_{ca}\,z_2)^2}\,\dot{z}_2\,i_{z2m}\\
\frac{\lambda_x x i_{xp}}{(-e_0+x)^2}\\
-\frac{\lambda_x x i_{xm}}{(e_0+x)^2}
\end{array}\right]
\tag{G.8}
$$

Energie dissipée et entrées du système

L'énergie dissipée ne diffère pas de celle donnée dans l'équation (E.7) ; seul change l'ordre des courants dans le vecteur. Il en va de même pour les entrées E_j de ce modèle.

Annexe H

Modèle d'une broche à actionneurs coniques

Le modèle est découpé en deux parties pour des raisons de taille. Les six premières équations correspondent au comportement mécanique du système, et les dix autres au comportement électrique.

$$
\begin{bmatrix}
m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} \\
0 & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & \\
0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & -\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & 0 & \frac{1}{4}\frac{I_y}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}m & \\
0 & \frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} & 0 & -\frac{1}{4}\frac{(z_1-z_2)I_x}{{l_c}^2} & 0 & I_x
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{1a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_1-s(\varpi)x\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{1b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2} \\
-\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi) {i_{1c}}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{2a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_2+s(\varpi)x\right)^2} \\
+\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi)\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda\, s(\varpi) {i_{2c}}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_1+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_2+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{z}_1\dot{y}_2 \\
+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_2\dot{z}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{2}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2} \\
+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{1c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1^2+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_2^2+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{1b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{1c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_1+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_1-s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_1+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{z}_2+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{z}_1\dot{y}_2 \\
-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_2\dot{z}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{2}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2a}^2}{\left(e_0-c(\varpi)y_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2} \\
+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\, i_{2c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_1^2+\frac{1}{8}\frac{I_x\,(z_2-z_1)}{{l_c}^4}\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2}+\frac{1}{16}\frac{I_x\,(z_1-z_2)}{{l_c}^4}\dot{y}_2^2-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} \\
-\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{2b}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2-\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\, i_{2c}^2}{\left(e_0+\frac{1}{2}c(\varpi)y_2+\frac{1}{2}c(\varpi)\sqrt{3}z_2+s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{z}_1}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{z}_2}{{l_c}^2}-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{y}_2}{{l_c}^2}+\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{z}_2}{{l_c}^2}
\end{bmatrix}
\qquad \text{(H.1)}
$$

$$
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T
$$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)y_1 - s(\varpi)x}\,\dot{i}_{1a} \\
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)\left(-\frac{1}{2}\,y_1 + \frac{1}{2}\,\sqrt{3}z_1\right) - s(\varpi)x}\,\dot{i}_{1b} \\
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)\left(-\frac{1}{2}\,y_1 - \frac{1}{2}\,\sqrt{3}z_1\right) - s(\varpi)x}\,\dot{i}_{1c} \\
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)y_2 + s(\varpi)x}\,\dot{i}_{2a} \\
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)\left(-\frac{1}{2}\,y_2 + \frac{1}{2}\,\sqrt{3}z_2\right) + s(\varpi)x}\,\dot{i}_{2b} \\
\dfrac{\lambda}{e_0 - c(\varpi)\left(-\frac{1}{2}\,y_2 - \frac{1}{2}\,\sqrt{3}z_2\right) + s(\varpi)x}\,\dot{i}_{2c}
\end{bmatrix}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
\dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{1a}}{\left(e_0 - c(\varpi)y_1 - s(\varpi)x\right)^2} + \dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_1\, i_{1a}}{\left(e_0 - c(\varpi)y_1 - s(\varpi)x\right)^2} \\
\dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{1b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_1\, i_{1b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} \\
\quad + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\,\dot{z}_1\, i_{1b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} \\
\dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{1c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_1\, i_{1c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} \\
\quad - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\,\dot{z}_1\, i_{1c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_1 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_1 - s(\varpi)x\right)^2} \\
- \dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{2a}}{\left(e_0 - c(\varpi)y_2 + s(\varpi)x\right)^2} + \dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_2\, i_{2a}}{\left(e_0 - c(\varpi)y_2 + s(\varpi)x\right)^2} \\
- \dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{2b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_2\, i_{2b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2} \\
\quad + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\,\dot{z}_2\, i_{2b}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 - \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2} \\
- \dfrac{\lambda\, s(\varpi)\,\dot{x}\, i_{2c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\,\dot{y}_2\, i_{2c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2} \\
\quad - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\lambda\, c(\varpi)\sqrt{3}\,\dot{z}_2\, i_{2c}}{\left(e_0 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)y_2 + \frac{1}{2}\,c(\varpi)\sqrt{3}z_2 + s(\varpi)x\right)^2}
\end{bmatrix}
\qquad \text{(H.2)}
$$

$$
+
\begin{bmatrix}
R\, i_{1a} \\
R\, i_{1b} \\
R\, i_{1c} \\
R\, i_{2a} \\
R\, i_{2b} \\
R\, i_{2c}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
E_{1a} \\
E_{1b} \\
E_{1c} \\
E_{2a} \\
E_{2b} \\
E_{2c}
\end{bmatrix}
$$

Annexe I

Stabilité : méthode directe de Lyapunov

Les définitions et théorèmes exposés ici sont rapportés dans de multiples ouvrages dont (Slotine and Li, 1990; Khalil, 1996).

I.1 Quelques définitions

Définition 7 (Fonctions définies positives)
Soit une fonction $V(\xi)$, cette fonction est localement définie positive si

– *première condition*

$$V(0) = 0 \tag{I.1}$$

– *deuxième condition*

$$V(\xi) > 0 \quad pour\ tout\ \xi \neq 0\ et\ \xi \in B \tag{I.2}$$

avec B l'espace contenant les points ξ. si B est $\mathbb{R}^n$, V est alors dite globalement définie positive.

Définition 8 (Fonction de Lyapunov)
Une fonction $V(x)$ définie positive, est une fonction de Lyapunov si elle répond aux conditions suivantes :

$$\bullet\ V(\xi) > 0 \quad \forall\ \xi \neq 0\ et\ \xi \in B \tag{I.3}$$

$$\bullet\ \dot{V}(\xi) \leqslant 0 \quad \forall\ \xi \neq 0\ et\ \xi \in B \tag{I.4}$$

La valeur de $\dot{V}(\xi)$ est prise le long des trajectoires d'un système autonome d'équation $\dot{\xi} = f(\xi)$. Une fonction de Lyapunov doit être fonction de tout l'état du système.

I.2 Méthode directe de Lyapunov

I.2.1 Stabilité locale

L'origine du système $\dot{\xi} = f(\xi)$ est localement stable dans un domaine B si il existe une fonction définie positive V telle que :

$$\bullet\ V(\xi) > 0 \quad \forall\, \xi \neq 0 \text{ et } \forall \xi \in B \tag{I.5}$$

$$\bullet\ \dot{V}(\xi) \leqslant 0 \quad \forall\, \xi \neq 0 \text{ et } \forall \xi \in B \tag{I.6}$$

soit encore si V est une fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système.

L'origine est asymptotiquement stable si $\dot{V}(\xi) < 0,\ \forall \xi \in B$. Le long des trajectoires du système, $\dot{V}(\xi)$ s'écrit :

$$\dot{V}(\xi) = \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi}\dot{\xi} = \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi} f(\xi) \tag{I.7}$$

I.2.2 Stabilité globale

L'origine du système $\dot{\xi} = f(\xi)$ est globalement stable si il existe une fonction définie positive V telle que :

$$\bullet\ V(\xi) > 0 \quad \forall\, \xi \neq 0 \tag{I.8}$$

$$\bullet\ \dot{V}(\xi) \leqslant 0 \quad \forall\, \xi \neq 0 \tag{I.9}$$

$$\bullet\ V(\xi) \longrightarrow \infty \text{ lorsque } \|\xi\| \longrightarrow \infty \tag{I.10}$$

I.2.3 Stabilité exponentielle

La stabilité asymptotique n'est parfois pas suffisante pour obtenir un comportement adéquate, particulièrement vis à vis de perturbation. La convergence exponentielle présente certaine caractéristique de robustesse très utiles. Les deux résultats suivant sont extraits de (Khalil, 1996).

Théorème 5
Soit $\xi = 0$ un point d'équilibre pour le système :

$$\dot{\xi} = f(t, \xi) \tag{I.11}$$

et $D \subset \mathbb{R}$ un domaine contenant $\xi = 0$. Soit $V : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que :

$$W_1(\xi) \leqslant V(t, \xi) \leqslant W_2(\xi) \tag{I.12}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \xi} f(t, \xi) \leqslant -W_3(\xi) \tag{I.13}$$

$\forall\, t \geqslant 0$, $\forall\, \xi \in D$, *où* $W_1(\xi)$, $W_2(\xi)$, *et* $W_3(\xi)$ *sont des fonctions continues définies positives sur* D. *Alors,* $\xi = 0$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

Corollaire 1

supposons que toutes les assertions du théorème 5 sont satisfaites avec les trois fonctions :

$$\begin{aligned} W_1(\xi) &\geqslant k_1\|\xi\|^c \\ W_2(\xi) &\leqslant k_2\|\xi\|^c \\ W_3(\xi) &\geqslant k_3\|\xi\|^c \end{aligned} \tag{I.14}$$

avec k_1, k_2, k_3, *et* c *des constantes positives. Alors,* $\xi = 0$ *est exponentiellement stable. De plus, si les assertions s'inscrive dans un cadre global, alors* $\xi = 0$ *est globalement exponentiellement stable.*

Annexe J

Passivité : quelques définitions

Les définitions et résultats rapportés ici sont extraites de (Lozano et al., 1998).

J.1 Systèmes passifs

Soit le système non linéaire d'équation $\sum : u(t) \longrightarrow \Gamma(t)$

$$\left(\sum\right) \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)\ u \\ \Gamma = h(\xi) + j(\xi)\ u \end{cases} \tag{J.1}$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^n$, $u, \Gamma \in \mathbb{R}^m$, f, g et h dérivables et $f(0) = h(0) = 0$.

Le terme $w = w(u, \Gamma)$ est appelé énergie de stockage et est tel que $\forall\, u$, $\forall\, \xi(0)$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^t |w(s)| < \infty \tag{J.2}$$

Définition 9 (Système dissipatif)
Le système $\sum$ est dit dissipatif si il existe une fonction de stockage $V(\xi) \geqslant 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie :

$$V(\xi) \leqslant V(\xi(0)) + \int_0^t w(s)\, ds\ ;\ \forall u,\ \forall \xi(0) \tag{J.3}$$

Le problème est alors de trouver une fonction de stockage correcte.

Définition 10 (Energie disponible)
L'énergie disponible $V_a(\xi)$ du système $\sum$ est donnée par :

$$0 \leqslant V_a(\xi) = \sup_{\xi=\xi(0),u,t\geqslant 0} -\left\{\int_0^t w(s)\, ds\right\} \tag{J.4}$$

où $V_a(\xi)$ est la quantité maximum d'énergie qui peut être extraite du système.

L'énergie de stockage $V_a(\xi)$ est finie si et seulement si le système est dissipatif. De plus on a $0 \leqslant V_a \leqslant V$ pour les systèmes dissipatifs et V_a est elle même une fonction de stockage.

Définition 11 (Système passif)
*Un système $\sum$ est dit **passif** si il est dissipatif avec une énergie de stockage $w = u^T\Gamma$ et la fonction de stockage V avec $V(0) = 0$, et*

$$V(\xi) \leqslant V(\xi(0)) + \int_0^t u^T(s)\Gamma(s)\, ds \tag{J.5}$$

Définition 12 (Système strictement passif)
*Un système $\sum$ est dit **strictement passif** si il est dissipatif avec une énergie de stockage $w = u^T\Gamma$ et la fonction de stockage V avec $V(0) = 0$, et il existe une fonction définie positive $\mathfrak{S}(\xi)$ telle que :*

$$V(\xi) \leqslant V(\xi(0)) + \int_0^t u^T(s)\Gamma(s)\, ds + \int_0^t \mathfrak{S}(\xi(t))\, dt \tag{J.6}$$

Si $\mathfrak{S}(\xi) \equiv 0$, alors le système est sans pertes.

Définition 13 (Stricte passivité à la sortie)
Considérons un système dissipatif avec l'énergie de stockage :

$$w(u, \Gamma) = \Gamma^T Q\Gamma + u^T Ru + 2\Gamma^T Su \tag{J.7}$$

avec $q = q^T$ et $R = R^T$.

Si $R = 0$, $Q = -\delta\, I_m$, $\delta > 0$, $S = \frac{1}{2} I_m$, le système est dit strictement passif à la sortie, c'est à dire

$$\int_0^t \Gamma^T u\, ds \geqslant \beta + \int_0^t \Gamma^T\Gamma\, dt \tag{J.8}$$

avec $\beta(\xi(t_0))$ une fonction bornée.

J.2 Passivité des systèmes Lagrangiens

Soit le système lagrangien suivant :

$$D(q)\,\ddot{q} + C(q, \dot{q})\,\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = E \tag{J.9}$$

Lemme 2
Considérons l'énergie de stockage $E\,\dot{q}$ et la dynamique (J.9). Alors, pour toute condition initiale $(q(0), \dot{q}(0)) = (q_0, \dot{q}_0)$, on a

$$\int_0^t E^T(s)\dot{q}(s)\, ds \geqslant -T(q_0, \dot{q}_0) + U(q_t) - U(q_0) \tag{J.10}$$

Maintenant, si $U(q)$ est bornée inférieurement, c'est à dire si il existe une constante $U_{min} > -\infty$ telle que pour tout q, $U(q) \geqslant U_{min}$, le système considéré est passif.

Le lemme précédent montre que le système (J.9) est sans perte. Avec l'introduction du terme de Rayleigh, l'énergie n'est plus conservative et le système s'écrivant :

$$D\left(q\right)\ddot{q} + C\left(q,\dot{q}\right)\dot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}} = B\,E \tag{J.11}$$

présente la propriété suivante :

Lemme 3

En supposant que $U(q)$ est bornée inférieurement comme dans le lemme 2. La dynamique de (J.11) définie un opérateur $E \longmapsto \dot{q}$ strictement passif à la sortie.

Annexe K

Linéarisation Entrée-Sortie : rappels théoriques

(Isidori, 1989)
Considérons un système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi)\, u_i(t) \\ \Gamma_K(t) = h_K(\xi)\, K = 1 \cdots m \end{cases} (\Sigma) \tag{K.1}$$

Γ : sortie, u : entrées

où $\xi \in R^n, \Gamma \in R^m$, f et g sont des fonctions suffisamment dérivables (on admet que ce sont des champs de vecteurs C^∞ sur R^m) et $u \in R^m$. Γ est un champ de vecteurs analytique. Notons que ce système possède un nombre d'entrées égal à celui des sorties. Les évolutions des deux systèmes (Σ) et (Ξ) (système linéaire) sont comparées.

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = F\eta(t) + G\nu(t) \\ \Gamma(t) = C\eta(t) \end{cases} (\Xi) \tag{K.2}$$

Dans la procédure de linéarisation entrée-sortie, chaque sortie Γ_K peut être dérivée tant qu'un coefficient de contrôle reste différent de zéro, c'est à dire :

$$d\Gamma_i/dt = (\partial h_i/\partial \xi)\left[f(\xi) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi)\, u_i\right] \tag{K.3}$$

Si un des éléments $(\partial h_i/\partial \xi)\, g_i(\xi)$ est différent de zéro, alors la sortie Γ_i n'est plus dérivée, sinon la dérivation continue jusqu'à l'étape r_i (degré relatif). Il s'agit de l'ordre minimum de dérivation de Γ_i quand le coefficient de l'entrée correspondante u_i n'est pas nul. Cette dérivation peut s'écrire sous forme de dérivées de Lie de la manière suivante :

$$d^{r_i}\,\Gamma_i/d\,t^{r_i} = L_f^{r_i}\,(h_i\,(\xi)) + \sum_{i=1}^{m} L_{g_i}\left(L_f^{r_i-1}\,(h_i\,(\xi))\right) u_i \tag{K.4}$$

Définition 14

Pour des fonctions analytiques $f : R^n \to R^n$ et $\phi : R^n \to R$, la dérivée directionnelle, dite dérivée de Lie, est définie comme étant:

$$L_f\phi\,(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(\xi)\ \ \frac{d\,\phi}{d\,\xi_i}\,(\xi) \tag{K.5}$$

et itérativement:

$$L_f^K\phi\,(\xi) = L_f\left(L_f^{K-1}\phi\,(\xi)\right) \tag{K.6}$$

et, par convention: $L_f^0\phi\,(\xi) = \phi\,(\xi)$.

Le théorème suivant (Isidori, 1989) peut être utilisé.

Théorème 6

Pour un système analytique (Σ) qui possède autant de sortie p que d'entrée m $(m = p)$, si tous les degrès relatifs r_i existent, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un bouclage découplant et linéarisant est que $\Delta^{-1}\,(\xi)$ existe. Cette loi de contrôle est donnée par:

$$u\,(t) = \Theta\,(\xi) + \Psi\,(\xi)\,\tilde{v}\,(t)\,. \tag{K.7}$$

où $\tilde{v}\,(t)$ sont les nouvelles entrées. La dimension de $\Theta\,(\xi)$ est $(m \times 1)$ et la dimension de $\Psi\,(\xi)$ est $(m \times m)$. Ces champs de vecteurs sont donnés par:

$$\begin{cases} \Psi\,(\xi) = \Delta^{-1}\,(\xi)\ \ B \\ \Theta\,(\xi) = \Delta^{-1}\,(\xi)\,[A\,(\xi) - \Delta_0\,(\xi)] \end{cases} \tag{K.8}$$

où

$$\begin{array}{l} \Delta ik\,(\xi) = L_{gk}L_f^{r_i-1}h_i\,(\xi) \quad i = 1\cdots m,\ k = 1\cdots m \\ A^T\,(\xi) = [A_1\,(\xi)\ \cdots\ A_m\,(\xi)] \\ A_i\,(\xi) = \sum_{j=0}^{r_i-1}\sigma_{ij}L_f^j h_i\,(\xi) \quad i = 1\cdots m \\ \Delta_0^T\,(\xi) = [\Delta_{01}\,(\xi)\ \cdots\ \Delta_{0m}\,(\xi)] \\ \Delta_{0i}\,(\xi) = L_f^{r_i}h_i\,(\xi) \\ B_{ik} = \left| \begin{array}{l} 0 \quad for\,(i \neq k) \\ k_{ri} \quad for\,(i = k) \end{array} \right. \end{array} \tag{K.9}$$

Cette loi de contrôle permet d'obtenir un découplage des sorties. Les coefficients k_{ri} sont des constantes arbitraires qui correspondent aux nouvelles entrées $\tilde{v}_i$ agissant sur les sorties Γ_k. Le nouveau vecteur d'état est alors

$$\eta^T = \left[h_1,\ L_f h_1,\ \cdots,\ L_f^{r_1-1}h_1,\ h_p,\ L_f h_p,\ \cdots,\ L_f^{r_p-1}h_p,\ h_m\ L_f h_m,\ \cdots,\ L_f^{r_m-1}h_m\right] \tag{K.10}$$

et sa dimension est :

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{m} r_i \quad \text{avec} \quad \vartheta \leqslant n \tag{K.11}$$

Dans le cas où $\vartheta < n$, le système est "partiellement linéarisable par bouclage". Une partie du vecteur d'état est rendue inobservable par le bouclage ; la stabilité en boucle fermée dépend alors de la stabilité de la partie inobservable.

Annexe L

Modèle d'état de la broche

L.1 Modèle d'état

L'équation d'état de la broche s'obtient en inversant la matrice D du modèle de commande décrit dans le chapitre 2. Afin de ne pas surcharger les équations (et par la même les calculs qui devront être effectués par le simulateur ou le processeur pour obtenir une commande), quelques simplifications sont introduites. La différence $z_1 - z_2$ est considérée nulle, ce qui revient à dire que l'angle θ varie peu et reste proche de zéro. Le paramètre d_{ca} (distance entre actionneur et capteur associé) est pris nul, ce qui limite le volume des coefficients en facteur des forces électromagnétiques, ainsi que leurs dénominateurs (simplification lors du calcul des dérivées de Lie). Le modèle est présenté en deux partie : les 6 équations mécaniques (L.1) et les 10 équations électriques (L.2)

$$
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xp}}^2}{(e_0+x)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_x {i_{xm}}^2}{(e_0+x)^2}\right) \\
\frac{\left(I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{(e_0-y_1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{(e_0+y_1)^2}\right) \\
+\frac{\left(-I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{(e_0-y_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{(e_0+y_2)^2}\right) \\
\frac{\left(I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z1p}^2}{(e_0-z_1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z1m}^2}{(e_0+z_1)^2}\right) \\
+\frac{\left(-I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z2p}^2}{(e_0-z_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z2m}^2}{(e_0+z_2)^2}\right) \\
\frac{\left(-I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{(e_0-y_1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{(e_0+y_1)^2}\right) \\
-\frac{\left(I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}(t)}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{(e_0-y_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{(e_0+y_2)^2}\right) \\
\frac{\left(-I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z1p}^2}{(e_0-z_1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z1m}^2}{(e_0+z_1)^2}\right) \\
-\frac{\left(I_y+ml_c{}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z2p}^2}{(e_0-z_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{z2m}^2}{(e_0+z_2)^2}\right) \\
\frac{1}{I_x}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{z}_1}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{z}_2}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{y}_2}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{z}_2}{{l_c}^2}\right)
\end{bmatrix}
\tag{L.1}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{i}_{y1p} \\ \dot{i}_{y1m} \\ \dot{i}_{z1p} \\ \dot{i}_{z1m} \\ \dot{i}_{y2p} \\ \dot{i}_{y2m} \\ \dot{i}_{z2p} \\ \dot{i}_{z2m} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-\frac{\dot{y}_1\, i_{y1p}}{e_0-y_1} - \frac{e_0-y_1}{\lambda} R\, i_{y1p} \\
\frac{\dot{y}_1\, i_{y1m}}{e_0+y_1} - \frac{e_0+y_1}{\lambda} R\, i_{y1m} \\
-\frac{\dot{z}_1\, i_{z1p}}{e_0-z_1} - \frac{e_0-z_1}{\lambda} R\, i_{z1p} \\
\frac{\dot{z}_1\, i_{z1m}}{e_0+z_1} - \frac{e_0+z_1}{\lambda} R\, i_{z1m} \\
-\frac{\dot{y}_2\, i_{y2p}}{e_0-y_2} - \frac{e_0-y_2}{\lambda} R\, i_{y2p} \\
\frac{\dot{y}_2\, i_{y2m}}{e_0+y_2} - \frac{e_0+y_2}{\lambda} R\, i_{y2m} \\
-\frac{\dot{z}_2\, i_{z2p}}{e_0-z_2} - \frac{e_0-z_2}{\lambda} R\, i_{z2p} \\
\frac{\dot{z}_2\, i_{z2m}}{e_0+z_2} - \frac{e_0+z_2}{\lambda} R\, i_{z2m} \\
\frac{\dot{x}\, i_{xp}}{-e_0+x} + \frac{-e_0+x}{\lambda_x} R_x\, i_{xp} \\
\frac{\dot{x}\, i_{xm}}{e_0+x} - \frac{e_0+x}{\lambda_x} R_x\, i_{xm}
\end{bmatrix} +
\begin{bmatrix}
\frac{e_0-y_1}{\lambda} E_{y1p} \\
\frac{e_0+y_1}{\lambda} E_{y1m} \\
\frac{e_0-z_1}{\lambda} E_{z1p} \\
\frac{e_0+z_1}{\lambda} E_{z1m} \\
\frac{e_0-y_2}{\lambda} E_{y2p} \\
\frac{e_0+y_2}{\lambda} E_{y2m} \\
\frac{e_0-z_2}{\lambda} E_{z2p} \\
\frac{e_0+z_2}{\lambda} E_{z2m} \\
\frac{e_0-x}{\lambda_x} E_{xp} \\
\frac{e_0+x}{\lambda_x} E_{xm}
\end{bmatrix}
\tag{L.2}
$$

L.2 Dérivées des sorties

Les sorties du système sont données par x, y_1, z_1, y_2, et z_2 et les courants sont mesurables. La sortie x étant naturellement découplée des autres sorties, seules y_1, z_1, y_2, et z_2 seront considérées. Pour réaliser la commande par mode glissant décrite dans le chapitre précédent, il faut calculer les dérivées successives des sorties jusqu'à ce qu'apparaissent les entrées.

Sortie y_1

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y_1 = \dot{y}_1 \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\dot{y}_1 = \ddot{y}_1 = \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{\left(e_0 - y_1\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{\left(e_0 + y_1\right)^2}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{\left(e_0 - y_2\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{\left(e_0 + y_2\right)^2}\right) \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\ddot{y}_1 = \dddot{y}_1 = \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{4}\frac{I_x\,\ddot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\ddot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\ddot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\ddot{\phi}}{{l_c}^2} \\ + \frac{\lambda\, i_{y1p}\,\dot{i}_{y1p}}{\left(e_0 - y_1\right)^2} + \frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{\left(e_0 - y_1\right)^3}\dot{y}_1 - \frac{\lambda\, i_{y1m}\,\dot{i}_{y1m}}{\left(e_0 + y_1\right)^2} + \frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{\left(e_0 + y_1\right)^3}\dot{y}_1 \end{array}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{4}\frac{I_x\,\ddot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\ddot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\ddot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\ddot{\phi}}{{l_c}^2} \\ - \frac{\lambda\, i_{y2p}\,\dot{i}_{y2p}}{\left(e_0 - y_2\right)^2} - \frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{\left(e_0 - y_2\right)^3}\dot{y}_2 + \frac{\lambda\, i_{y2m}\,\dot{i}_{y2m}}{\left(e_0 + y_2\right)^2} - \frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{\left(e_0 + y_2\right)^3}\dot{y}_2 \end{array}\right) \\
&\qquad \approx \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\begin{array}{l} \left(\frac{\lambda\, i_{y1p}^2}{\left(e_0 - y_1\right)^3} + \frac{\lambda\, i_{y1m}^2}{\left(e_0 + y_1\right)^3}\right)\dot{y}_1 \\ + \frac{\lambda\, i_{y1p}}{\left(e_0 - y_1\right)^2}\left(-\frac{\dot{y}_1\, i_{y1p}}{e_0 - y_1} - \frac{e_0 - y_1}{\lambda}R\, i_{y1p} + \frac{e_0 - y_1}{\lambda}E_{y1p}\right) \\ - \frac{\lambda\, i_{y1m}}{\left(e_0 + y_1\right)^2}\left(\frac{\dot{y}_1\, i_{y1m}}{e_0 + y_1} - \frac{e_0 + y_1}{\lambda}R\, i_{y1m} + \frac{e_0 + y_1}{\lambda}E_{y1m}\right) \end{array}\right) \qquad \text{(L.3)} \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\begin{array}{l} -\left(\frac{\lambda\, i_{y2p}^2}{\left(e_0 - y_2\right)^3} + \frac{\lambda\, i_{y2m}^2}{\left(e_0 + y_2\right)^3}\right)\dot{y}_2 \\ - \frac{\lambda\, i_{y2p}}{\left(e_0 - y_2\right)^2}\left(-\frac{\dot{y}_2\, i_{y2p}}{e_0 - y_2} - \frac{e_0 - y_2}{\lambda}R\, i_{y2p} + \frac{e_0 - y_2}{\lambda}E_{y2p}\right) \\ + \frac{\lambda\, i_{y2m}}{\left(e_0 + y_2\right)^2}\left(\frac{\dot{y}_2\, i_{y2m}}{e_0 + y_2} - \frac{e_0 + y_2}{\lambda}R\, i_{y2m} + \frac{e_0 + y_2}{\lambda}E_{y2m}\right) \end{array}\right) \\
&\qquad \approx \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{R}{e_0 - y_1}i_{y1p}^2 + \frac{i_{y1p}}{e_0 - y_1}E_{y1p} + \frac{R}{e_0 + y_1}\,i_{y1m}^2 - \frac{i_{y1m}}{e_0 + y_1}E_{y1m}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{R}{e_0 - y_2}\,i_{y2p}^2 - \frac{i_{y2p}}{e_0 - y_2}E_{y2p} - \frac{R}{e_0 + y_2}\,i_{y2m}^2 + \frac{i_{y2m}}{e_0 + y_2}E_{y2m}\right)
\end{aligned}
$$

La dérivation de la sortie s'arrête après la dérivée troisième car les commandes E_{y1p}, E_{y1m}, E_{y2p} et E_{y2m} apparaissent. Dans la série d'équations précédente, les termes comportants $\ddot{\phi}$ sont négligés, la vitesse du rotor étant considérée comme lentement variable. Les termes comportant les dérivées secondes sont aussi éliminés pour ne pas surcharger la fonction de Lyapunov ; si la puissance de

calcul est suffisante, il peuvent alors être pris en compte car il contiennent en partie les couplages qui existent entre les deux plans de contrôle.

Sortie z_1

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}z_1 = \dot{z}_1 \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\dot{z}_1 = \ddot{z}_1 = \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z1p}^2}{\left(e_0 - z_1\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z1m}^2}{\left(e_0 + z_1\right)^2}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z2p}^2}{\left(e_0 - z_2\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z2m}^2}{\left(e_0 + z_2\right)^2}\right) \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\ddot{z}_1 = \dddot{z}_1 \approx \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{R}{e_0 - z_1}i_{z1p}^2 + \frac{i_{z1p}}{e_0 - z_1}E_{z1p} + \frac{R}{e_0 + z_1}\,i_{z1m}^2 - \frac{i_{z1m}}{e_0 + z_1}E_{z1m}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{R}{e_0 - z_2}\,i_{z2p}^2 - \frac{i_{z2p}}{e_0 - z_2}E_{z2p} - \frac{R}{e_0 + z_2}\,i_{z2m}^2 + \frac{i_{z2m}}{e_0 + z_2}E_{z2m}\right)
\end{aligned}
\tag{L.4}
$$

Sortie y_2

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y_2 = \dot{y}_2 \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\dot{y}_2 = \ddot{y}_2 = \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{y1p}^2}{\left(e_0 - y_1\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{y1m}^2}{\left(e_0 + y_1\right)^2}\right) \\
&\qquad - \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{z}_2\dot{\phi}(t)}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{y2p}^2}{\left(e_0 - y_2\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{y2m}^2}{\left(e_0 + y_2\right)^2}\right) \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\ddot{y}_2 = \dddot{y}_1 \approx \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{R}{e_0 - y_1}i_{y1p}^2 - \frac{i_{y1p}}{e_0 - y_1}E_{y1p} - \frac{R}{e_0 + y_1}\,i_{y1m}^2 + \frac{i_{y1m}}{e_0 + y_1}E_{y1m}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{R}{e_0 - y_2}\,i_{y2p}^2 + \frac{i_{y2p}}{e_0 - y_2}E_{y2p} + \frac{R}{e_0 + y_2}\,i_{y2m}^2 - \frac{i_{y2m}}{e_0 + y_2}E_{y2m}\right)
\end{aligned}
\tag{L.5}
$$

Sortie z_2

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}z_2 = \dot{z}_2 \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\dot{z}_2 = \ddot{z}_2 = \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} + \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z1p}^2}{\left(e_0 - z_1\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z1m}^2}{\left(e_0 + z_1\right)^2}\right) \\
&\qquad - \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_1\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{4}\frac{I_x\,\dot{y}_2\dot{\phi}}{{l_c}^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z2p}^2}{\left(e_0 - z_2\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda\,i_{z2m}^2}{\left(e_0 + z_2\right)^2}\right) \\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{dt}\ddot{z}_2 = \dddot{z}_2 \approx \frac{\left(-I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(\frac{R}{e_0 - z_1}i_{z1p}^2 - \frac{i_{z1p}}{e_0 - z_1}E_{z1p} - \frac{R}{e_0 + z_1}\,i_{z1m}^2 + \frac{i_{z1m}}{e_0 + z_1}E_{z1m}\right) \\
&\qquad + \frac{\left(I_y + m{l_c}^2\right)}{I_y m}\left(-\frac{R}{e_0 - z_2}\,i_{z2p}^2 + \frac{i_{z2p}}{e_0 - z_2}E_{z2p} + \frac{R}{e_0 + z_2}\,i_{z2m}^2 - \frac{i_{z2m}}{e_0 + z_2}E_{z2m}\right)
\end{aligned}
\tag{L.6}
$$

Ici, si on remplace les courants par les courants virtuels et les tensions par les tensions virtuelles (voir paragraphe 3.3.3.7) on a alors $\vartheta = n$, et donc pas de partie inobservable.