



HAL
open science

Problèmes aux valeurs propres non linéaires dans les inéquations variaionnelles : Etude locale

Françoise Issard-Roch

► **To cite this version:**

Françoise Issard-Roch. Problèmes aux valeurs propres non linéaires dans les inéquations variaionnelles : Etude locale. Economies et finances. Ecole Centrale de Lyon, 1984. Français. NNT : 1984ECDL0084 . tel-00817274

HAL Id: tel-00817274

<https://theses.hal.science/tel-00817274>

Submitted on 24 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR 3e CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Françoise ISSARD-ROCH

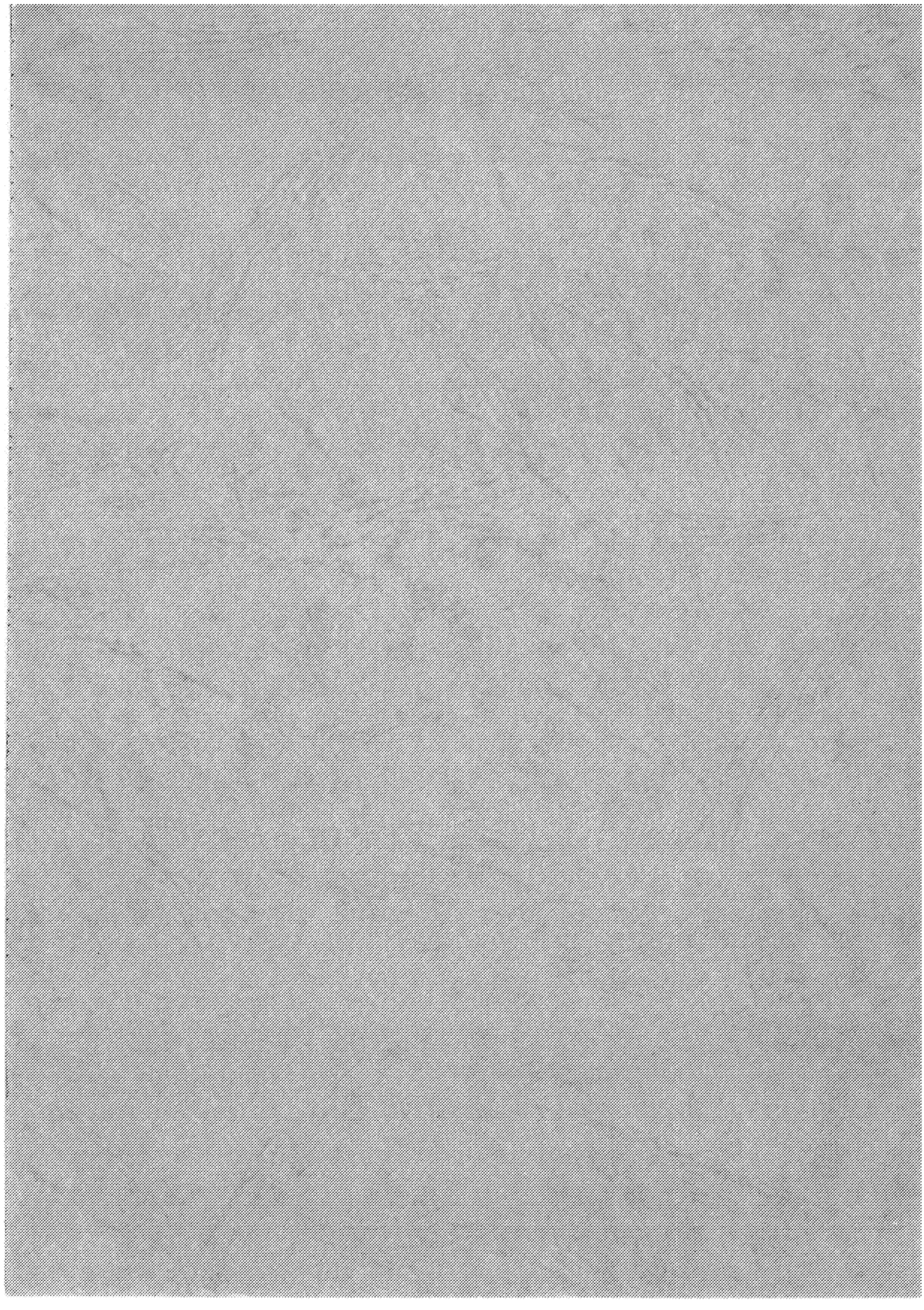
PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRES

DANS DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES .

ETUDE LOCALE .

soutenue le 9 Mars 1984

JURY : MM. B. NICOLAENKO Président
J. BARANGER Examineurs
C.H. BRAUNER
F. CONRAD
M. PIERRE



THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR 3e CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Françoise ISSARD-ROCH

PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRES

DANS DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES .

ETUDE LOCALE .

soutenue le 9 Mars 1984

JURY : MM. B. NICOLAENKO Président
J. BARANGER Examineurs
C.M. BRAUNER
F. CONRAD
M. PIERRE

ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTEUR A. MOIROUX
DIRECTEUR ADJOINT R. RICHE

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A DIRIGER DES THESES A L'E.C.L.

Mathématiques-Informatique-Systèmes

C.M. BRAUNER	Professeur 2e Classe
B. DAVID	Professeur 2e Classe
J.F. MAITRE	Professeur 2e Classe
F. CONRAD	Maître Assistant ENSM-St-Etienne
G. THOMAS	Maître Assistant

Physicochimie des Matériaux

P. CLECHET	Professeur 2e Classe
J. CURRAN	Professeur Associé
N. JAFFREZIC	Chargée de Recherche au CNRS
J. JOSEPH	Maître Assistant
Cl. MARTELET	Maître Assistant
J.R. MARTIN	Maître Assistant
R. OLIER	Maître Assistant
R. PHILIPPE	Maître Assistant IUT-St-Etienne
A. TAILLAND	Maître Assistant

Métallurgie et Physique des Matériaux

P. GUIRALDENQ	Professeur 1ère Classe
D. TREHEUX	Professeur 2e Classe
B. COQUILLET	Assistant
D. JUVE (Mme)	Ingénieur Contr. 3 A
NGUYEN Du	Assistant Associé

Electronique

J.J. URGELL	Professeur 2e Classe (détaché dans l'Industrie)
P. VIKTOROVITCH	Maître de Recherche au CNRS
R. BLANCHET	Professeur 2e Classe
S. KRAWCZYK	Professeur Associé
O. BONNAUD	Maître Assistant
J. BOREL	Direct. Technique Sté E.F.C.I.S.
J.P. CHANTE	Maître Assistant

Electrotechnique

Ph. AURIOL	Professeur 2e Classe
A. FOGGIA	Professeur 2e Classe
A. NICOLAS	Maître Assistant
G. ROJAT	Maître Assistant

Mécanique des Solides

F. SIDOROFF	Professeur 2e Classe
B. CAMBOU	Professeur 2e Classe
Cl. SURRY	Maître Assistant
L. VINCENT	Maître Assistant

Mécanique des Surfaces

J.M. GEORGES	Professeur 2e Classe
J. DIMNET	Professeur Lyon I
J. SABOT	Professeur 2e Classe
Ph. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
T. MATHIA	Chargé de Recherche au CNRS
J.M. MARTIN	Maître Assistant
H. MONTES	Maître Assistant

Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur Classe Exceptionnelle
J. BATAILLE	Professeur Lyon I
B. GAY	Professeur Lyon I
J.N. GENCE	Professeur Lyon I
D. JEANDEL	Professeur 2e Classe
J.P. SCHON	Professeur IUT -St- Etienne
E. ALCARAZ	Maître Assistant
R. MOREL	Maître Assistant INSA
Cl. CAMBON	Attaché de Recherche au CNRS
G. CHARNAY	Maître de Recherche au CNRS

Acoustique

(Mlle)	G. COMTE-BELLOT	Professeur Classe Exceptionnelle
	M. SUNYACH	Professeur IUT -Lyon
	H. ARBEY	Maître Assistant

Machines Thermiques

X. LYS	Professeur Associé
M. BRUN	Professeur 2e Classe
A. HAUPAIS	Maître Assistant

Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur B. NICOLAENKO de l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Cette thèse a été dirigée par F. CONRAD, qui m'a fait découvrir les problèmes non linéaires à frontière libre. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses nombreux conseils et encouragements tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur C.M. BRAUNER pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse et les précieux commentaires qu'il m'a donnés. Je remercie également Messieurs M. PIERRE, tout particulièrement pour ses remarques sur la théorie du potentiel, et J. BARANGER pour leur participation au jury.

Je remercie Monsieur G. LUDFORD qui a bien voulu s'associer au jury.

Mes remerciements vont aussi à Mesdames Véra SEGUDA et Raphaëlle HERBIN, pour leurs aides et leurs discussions enrichissantes. Je n'oublie pas tous les membres du laboratoire Informatique de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, qu'ils sachent combien leur amitié et leur soutien m'ont été utiles. Je remercie aussi tout le personnel de l'imprimerie de l'Ecole des Mines, qui a réalisé cet ouvrage.

Une pensée et non la moindre pour Hervé qui a partagé les bons moments et tous les autres.

o
o o
o

SOMMAIRE

	page
<u>Chapitre I</u> Introduction	9
<u>Chapitre II</u> Mise en place des principaux outils pour l'étude locale des branches de solutions.	
II.1 Cadre de l'étude..	15
II.1.1 Hypothèses et notations.	
II.1.2 Existence de branches de solutions de (1.1)..	17
II.2 Rappel : structure locale des branches de solutions de certaines équations..	18
II.1.2 Théorèmes généraux.	
II.2.2 Cas des équations.	20
II.3 Le processus de linéarisation conique..	23
II.3.1 Rappel sur la dérivation conique des projecteurs.	
II.3.2 Le spectre conique.	24
II.3.3 Les directions coniques en un point (λ, u)	26
II.3.4 Une interprétation géométrique de ces concepts..	27
<u>Chapitre III</u> Un résultat de théorie spectrale non linéaire.	
III.1 Un résultat d'inversion.	31
III.2 Comparaison avec des résultats de théorie spectrale non linéaire.	35
<u>Chapitre IV</u> Etude locale en certains points réguliers.	
IV.1 Existence de directions coniques à droite et à gauche en (λ, u)	39
IV.2 Cas où S_u est un espace vectoriel.	44
IV.3 Etude locale autour d'un point régulier.	48
IV.3.1 Recherche d'un développement autour de (λ_0, u_0) ; formulation du problème en terme de point fixe..	49
IV.3.2 Existence d'un développement autour de (λ_0, u_0)	50
IV.3.3 Existence de composantes connexes de solutions..	53

Chapitre V Etude locale autour d'un point singulier.

V.1	Préliminaires.	55
V.2	Recherche d'un développement; formulation du problème en terme de point fixe.	56
V.3	Existence d'un développement autour de (λ_0, u_0)	59
V.4	Existence de composantes connexes de solutions.	61

Chapitre VI Etude locale en un point de transition.

VI.1	Introduction.. . . .	63
VI.1.1	Définition du point de transition équation-inéquation; exemples.	
VI.1.2	Etude de la condition (Σ) en un point de transition.. . . .	65
VI.2	Quelques compléments lorsque (λ_t, u_t) vérifie $(\Sigma)_t$	69
VI.3	Etude locale en un point de transition vérifiant une condition plus faible que $(\Sigma)_t$	72
VI.3.1	Introduction d'une condition plus faible que $(\Sigma)_t$	
VI.3.2	Existence d'une direction conique à droite en (λ_t, u_t)	74
VI.3.3	Recherche d'un développement. Formulation en terme de point fixe.	79
VI.3.4	Etude plus précise de C_t	80
VI.3.5	Existence d'un développement au voisinage de (λ_t, u_t)	81

Chapitre VII Branches extrémales de solutions. Résultats numériques.

VII.1	Existence et propriétés des branches extrémales de solutions.. . . .	85
VII.1.1	Construction des branches extrémales de solutions.	
VII.1.2	Développement local des solutions de (1.1) autour d'un point appartenant à une des branches extrémales.	91
VII.1.3	Comportement des branches extrémales lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$	93
VII.2	Recherche d'un point singulier sur la branche maximale.. . . .	94
VII.2.1	Evolution de la condition (Σ) le long de la branche maximale de solutions.	

VII.2.2	Etude de la première valeur propre du problème linéarisé sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence, le long de la branche maximale.	98
VII.2.3	Etude du premier point de changement de stabilité.	102
VII.3	Analyse et interprétation des conditions (Σ), $(\Sigma)_t$, $(\Sigma'')_t$.	105
VII.3.1	Analyse de (Σ) et $(\Sigma'')_t$	
VII.3.2	Etude analytique de $\nu_C(\lambda, u)$ en dimension 1.	107
VII.3.3	Etude numérique de $\nu_C(\lambda, u)$ en dimension ≥ 1	112
Annexe	Quelques résultats numériques.. . . .	117
Bibliographie	129



CHAPITRE I Introduction

Dans tout ce travail, on s'intéresse à une classe d'inéquations variationnelles elliptiques, associées à un problème d'obstacle et dépendant d'un paramètre λ :

$$(1.1) \quad a(u, v-u) \geq \lambda \int_{\Omega} F(u) (v-u) dx \quad \forall v \in K; u \in K.$$

où $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega \}$ est le convexe des contraintes Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n ,

a une forme bilinéaire continue coercive sur $H_0^1(\Omega)$,
 F une non-linéarité régulière.

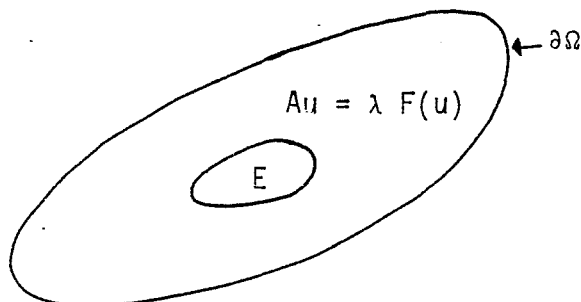
Si A désigne l'opérateur différentiel sous forme divergentielle, associé à a , ce problème s'interprète, avec de la régularité, comme un problème à une phase :

(λ, u) est solution de (1.1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega \\ Au - \lambda F(u) \leq 0 \text{ sur } \Omega \\ (u - \Psi)(Au - \lambda F(u)) = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

c'est la formulation forte du problème (1.1).

Si E désigne l'ensemble de coïncidence $\{u = \Psi\}$, on a : $Au - \lambda F(u) = 0$ sur $\Omega - E$, $Au \leq \lambda F(u)$ sur E , avec les conditions usuelles de transmission, lorsque la frontière libre ∂E est régulière.



Le problème sans contraintes associé à (1.1) s'écrit :

$Au = \lambda F(u)$ sur Ω , $u=0$ sur $\partial\Omega$; il a été étudié, de manière locale ou globale par de nombreux auteurs avec des non-linéarités variées : régulières sur \mathbb{R} [C.R], par exemple $F(u) = e^u$ ou régulières sur un ouvert de \mathbb{R} [B.N,M.P], par exemple $F(u) = (1-u)^{-k}$, $k \geq 0$.

On montre que des inéquations du type (1.1), par exemple avec $A=-\Delta$ $F(u)=(1-u)^{-k}$ $k \geq 0$ ou $F(u)=e^u$, apparaissent, sous certaines hypothèses, comme limites singulières de problèmes aux valeurs propres non linéaires :

$$-\Delta u = \lambda \frac{(1-u)^m}{\varepsilon + (1-u)^{m+k}} \quad \text{sur } \Omega, u=0 \text{ sur } \partial\Omega, \varepsilon \rightarrow 0 \quad [\text{B.N}].$$

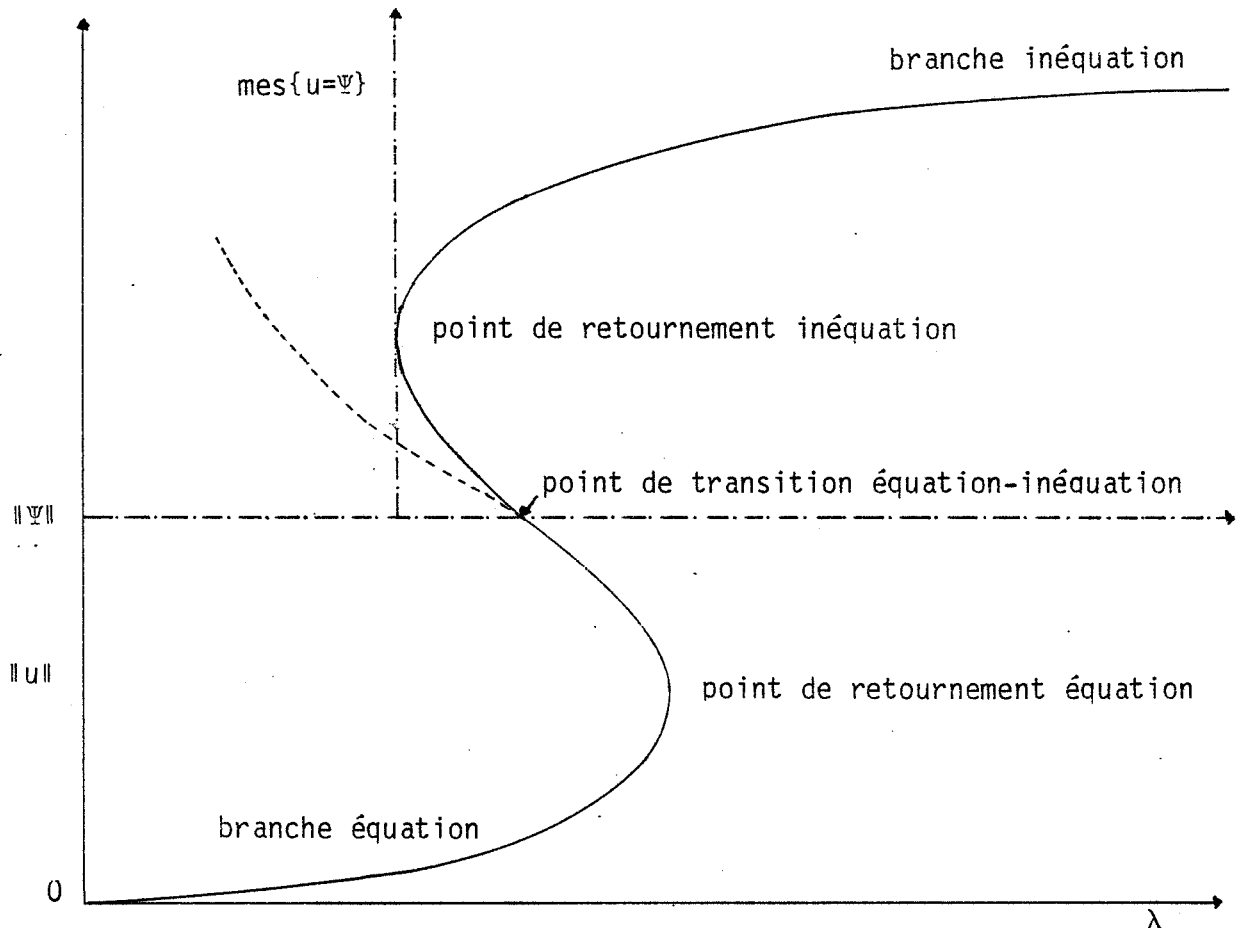
$$-\Delta u = \lambda \frac{a-u}{\varepsilon + |a-u|} e^u \quad \text{sur } \Omega, u=0 \text{ sur } \partial\Omega, \varepsilon \rightarrow 0 \quad [\text{Co}].$$

Ces exemples sont, en particulier, issus de la cinétique enzymatique ou de la catalyse chimique. Des solutions multiples ont été mises en évidence pour de telles équations non linéaires comme pour les problèmes limites.

Notons, de plus, que des problèmes aux valeurs propres non linéaires de la forme : $Au = \lambda F(u)$ sur Ω , $u=0$ sur $\partial\Omega$, où F est discontinue ont aussi été étudiés [Ch]; u est alors en fait solution d'un problème à frontière libre, qui, dans certains cas, admet une formulation variationnelle de type (1.1). Pour de tels problèmes, on montre l'existence globale de solutions, mais, à notre connaissance, aucune étude locale n'a été faite.

L'inéquation (1.1) admet, en général, un continuum \mathcal{C} non borné de solutions et plus précisément, pour tout $\lambda \geq 0$, l'inéquation (1.1) admet au moins une solution [Co].

Des simulations numériques avec $A = -\Delta$ $F(u) = e^u$, par exemple, ont montré [Co] que le diagramme de bifurcation d'un continuum \mathcal{C} de solutions (λ, u) de (1.1) a l'allure suivante :



On note l'existence d'une branche équation : (λ, u) est solution de (1.1) et $Au = \lambda F(u)$ sur Ω ;

et d'une branche inéquation : (λ, u) est solution de (1.1) et $\{u=\Psi\} \neq \emptyset$.

Ces deux branches sont reliées par un point que nous appelons point de transition équation-inéquation dont nous donnons, dans la suite de ce travail, une définition plus précise.

De plus, on constate, numériquement, que des points de retournement apparaissent sur la branche inéquation.

Ce travail tend à généraliser aux inéquations, l'étude locale classique faite pour les solutions des équations non linéaires :

- étude locale en un point régulier (développement selon λ)
- étude locale autour des points critiques, essentiellement des points de retournement [C.R].

Cette étude est, en particulier, un premier pas utile pour développer dans le cadre des inéquations, des méthodes numériques de suivi des branches de solutions par continuation.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans le deuxième chapitre, nous donnons, tout d'abord, les principales hypothèses que nous faisons pour étudier localement les branches inéquations, puis nous rappelons les résultats classiques sur la structure locale des solutions des équations non linéaires de type (1.3) : $Au = \lambda F(u)$ sur Ω , $u=0$ sur $\partial\Omega$; au voisinage de points réguliers ou de points de retournement [C.R]. L'équation qui régit cette étude est l'équation linéarisée de (1.3) en (λ, u) sur Ω . D'autre part, après avoir rappelé la notion de dérivée conique [H,M,Z], nous donnons l'inéquation conifiée homogène, associée à l'inéquation (1.1) [Co, Co₁, Co.I₂, Co.I] et l'inéquation conifiée non homogène dont les solutions sont appelées directions coniques [Co, Co₁, Co.I₂, Co.I]. Ce sont les principaux outils pour l'étude locale; ces inéquations conifiées introduites par F. Conrad, étendent le processus de linéarisation du cas sans contraintes. Elles permettent de classer les solutions (λ, u) de (1.1) en points réguliers ou singuliers.

Le chapitre III, technique, est centré sur un lemme d'inversion d'opérateurs particuliers, qui interviennent, dans la suite, pour montrer l'existence de directions coniques ou de développements de solutions.

Au **chapitre IV**, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude locale des solutions de (1.1) au voisinage des points réguliers; essentiellement deux cas se présentent : (λ, u) régulier vérifie une certaine condition (Σ) et le cas "linéaire" régulier que l'on caractérise. On montre qu'au voisinage de tels points, il existe un développement de solutions de (1.1) selon λ , le terme d'ordre 1 étant la direction conique [Co.I₂,Co,Co.I].

Puis, dans le **chapitre V**, on prouve, sous certaines hypothèses, l'existence d'un développement de solutions autour d'un point singulier dans le cas "linéaire". Ces hypothèses sont à rapprocher de celles faites pour les équations [C.R] et sous lesquelles, on a un point de retournement. Les résultats de ces chapitres représentent un travail fait en collaboration avec F. Conrad [Co.I₂,Co,Co.I].

Le point de transition équation-inéquation (λ_t, u_t) peut s'insérer dans le cadre du chapitre IV, on obtient alors quelques propriétés supplémentaires notamment sur les directions coniques [Co.I₂,Co,Co.I]. Une étude plus fine en ce point est faite au **chapitre VI**. On introduit une nouvelle condition $(\Sigma)_t$, plus faible que (Σ) , qui assure l'existence d'un développement de solutions de (1.1) au voisinage de (λ_t, u_t) , pour $\lambda > \lambda_t$.

Le **chapitre VII** est consacré aux solutions maximales et minimales de (1.1). On rappelle d'abord un procédé de construction et quelques propriétés de ces solutions; puis en étudiant, notamment, la variation de l'ensemble de coïncidence le long de la branche maximale, on montre qu'il existe, en général, un point singulier qui vérifie les hypothèses assurant (chapitre V) l'existence locale d'un développement de solutions. On note que les conditions (Σ) et $(\Sigma)_t$ sont fortement liées à des conditions de type stabilité (positivité d'une valeur propre); de plus des simulations numériques montrent qu'on a un changement de signe au passage d'un point de retournement, parfois même d'un point de transition ("échange" de stabilité).

Enfin, en **annexe**, on donne quelques résultats numériques qui illustrent ce travail.

<p>CHAPITRE II Mise en place des principaux outils pour l'étude locale des branches de solutions.</p>
--

Dans ce chapitre, nous donnons, tout d'abord, les hypothèses sous lesquelles nous nous plaçons pour l'étude locale des branches de solutions de (1.1). Nous rappelons ensuite des théorèmes généraux sur la structure locale des branches de solutions d'une large classe de problèmes aux valeurs propres non linéaires et nous énoncerons les résultats obtenus pour les solutions de l'équation (1.3). Enfin nous introduisons le processus de "linéarisation conique" qui est le principal outil pour l'étude locale des branches de solutions de (1.1).

II.1 Cadre de l'étude.

II.1.1 Hypothèses et notations.

On considère la forme bilinéaire continue symétrique coercive sur $H_0^1(\Omega)$ suivante :

$$a(u,v) = \sum_{ij=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx.$$

les a_{ij} étant des coefficients réguliers sur $\bar{\Omega}$, Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n (i.e. la frontière $\partial\Omega$ de Ω est au moins de classe C^2 et Ω est localement d'un seul côté de $\partial\Omega$.)

On appelle A l'opérateur du second ordre sous forme divergentielle associé à a :

$$Au = -\sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right].$$

L'obstacle Ψ est une fonction positive ou nulle sur Ω , non identiquement nulle, $\Psi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

Ultérieurement, on supposera Ψ quasi-continue pour la capacité associée à la forme $a[A]$ (c'est à dire : on remplacera Ψ par son représentant quasi-continu unique à un ensemble de capacité nulle près c.f. paragraphe II.3.1).

Dans tout ce travail, toute notion de capacité (notée parfois cap) est relative à la forme a .

Enfin, on se donne une fonction $\tilde{f} : (x,t) \in \Omega \times [0, |\Psi|_\infty] \rightarrow \tilde{f}(x,t) \in \mathbb{R}$, bornée, positive, telle que $\tilde{f}(x,0) \neq 0$, $t \rightarrow \tilde{f}(x,t)$ étant croissante, deux fois dérivable pour tout $x \in \Omega$, \tilde{f} , \tilde{f}_t , \tilde{f}_{tt} étant de Carathéodory et bornées. On suppose que \tilde{f} admet une extension f sur $\Omega \times \mathbb{R}$ possédant les mêmes propriétés que \tilde{f} ; ce qui est vérifié lorsque \tilde{f} est une fonction de classe C^2 sur $[0, |\Psi|_\infty]$ indépendante de x , par exemple $\tilde{f}(x,t) = e^t$.

On note F, F', F'' les opérateurs de Nemytskii associés à f, f_t, f_{tt} lorsqu'on substitue une fonction u de Ω dans \mathbb{R} à t :

$F(u)(x) = f(x, u(x))$. F est alors continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et même de $L^p(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $p \geq 2$.

Dans la suite de ce travail, $(,)$ désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)$; $\| \cdot \|$ la norme associée, $\| \cdot \|_p$ la norme usuelle dans $L^p(\Omega)$ et $\| \cdot \|$ celle de $H_0^1(\Omega)$: $\|u\|^2 = |u|^2 + |\nabla u|^2$.

Considérons le problème d'obstacle suivant, associé à $A - \lambda F$:

$$(1.1) \quad \begin{cases} a(u, v-u) > \lambda (F(u), v-u) \\ \forall v \in K; u \in K. \end{cases}$$

où $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega \}$

λ est un paramètre réel positif ou nul.

Notation

Soit $u \in K$, on pose $C(K, u) = \{ w \in H_0^1(\Omega) / \exists \mu > 0 : u + \mu w \in K \}$
 $= \bigcup_{\mu > 0} \mu \{K - u\}$

$C(K, u)$ est le cône des déplacements admissibles dans K à partir de u ; $\overline{C(K, u)}$ désigne son adhérence dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Remarque II.1

L'inéquation variationnelle (1.1) admet la formulation équivalente :

$$\begin{cases} a(u,z) \geq \lambda (F(u),z) \\ \forall z \in C(K,u); u \in K. \end{cases}$$

II.1.2 Existence de branches de solutions de (1.1).

L'ensemble $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega \}$, est un cône convexe fermé non vide de $H_0^1(\Omega)$; on désigne par P_K le a -projecteur sur le convexe K ; pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ $P_K[v]$ est caractérisé par $[H]$:

$$\begin{cases} a(v - P_K[v], w - P_K[v]) \leq 0 \\ \forall w \in K; P_K[v] \in K. \end{cases}$$

On désigne par G l'opérateur de Green de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ associé à A avec conditions de Dirichlet homogènes.

L'inéquation (1.1) admet une formulation équivalente en terme de point fixe :

$$(1.2) \quad u = P_K[\lambda GF(u)].$$

Considérons l'application $T : (\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega) \rightarrow T(\lambda, u) \in H_0^1(\Omega)$ défini par : $T(\lambda, u) = u - P_K[\lambda GF(u)]$; on montre $[Co]$ que c'est une application continue et compacte de $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En appliquant un résultat classique de Rabinowitz $[R]$, on obtient l'existence d'un **continuum** \mathcal{C} de solutions (λ, u) de (1.1) dans $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, non borné et contenant $(0,0)$. Plus précisément, on montre que la projection de \mathcal{C} sur \mathbb{R}^+ est \mathbb{R}^+ tout entier, ce qui implique que pour tout $\lambda > 0$, l'inéquation (1.1) admet au moins une solution u . De plus, on vérifie que, pour tout $\lambda > 0$, toute solution u de (1.1) est positive.

Remarque II.2

Par un procédé itératif, on montrera, [proposition VII.1], que pour tout $\lambda > 0$, l'inéquation (1.1) admet une solution maximale (pour l'ordre ponctuel) et une solution minimale.

De plus si $A\Psi$ est une mesure telle que $(A\Psi)^- \in L^p(\Omega)$, $p > 2$, pour toute solution (λ, u) de (1.1) on sait [Bre, B.N] que $u \in H^{2,p}(\Omega)$ (car $F(u) \in L^p(\Omega)$).

Si Ψ est >0 sur $\bar{\Omega}$ et régulière alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit, toute solution de l'équation associée à l'inéquation (1.1) :

$$(1.3) \quad Au = \lambda F(u) \text{ sur } \Omega, u=0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

est solution de (1.1) car f est bornée sur $\Omega \times \mathbb{R}$.

On dit alors que (λ, u) est une **solution équation** de (1.1), c'est à dire (λ, u) est solution de (1.1) et de (1.3) ou encore (λ, u) est solution de (1.3) et $u \in K$.

Sous ces hypothèses, l'inéquation (1.1) admet une branche de solutions équations.

De plus, si $F(0) \gg m > 0$ et si Ψ est régulière alors, pour λ assez grand, toute solution (λ, u) de (1.1) a un ensemble de coïncidence $\{u = \Psi\}$ non trivial. En effet sinon u serait solution de (1.3) [formulation forte] et $u \gg \lambda m \in \Omega$ ce qui contredit le fait que $u \in K$.

#

Ceci justifie l'introduction [chapitre I] d'une **branche de solutions inéquations** $((\lambda, u)$ solution de (1.1) et $\{u = \Psi\} \neq \emptyset$).

Notons de plus que si $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ est telle que $A\Psi(x) \neq \lambda F(\Psi)(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ alors : (λ, u) solution de (1.1) avec $\{u = \Psi\} \neq \emptyset \Rightarrow (\lambda, u)$ n'est pas solution de (1.3), on dit alors que (λ, u) est une **solution inéquation pure**.

Avant de donner les outils fondamentaux pour l'étude locale des branches de solutions inéquations de (1.1), rappelons les résultats locaux connus pour les équations.

II.2 Rappel : structure locale des branches de solutions de certaines équations.

II.2.1 Théorèmes généraux.

Soient X et Y deux espaces de Banach, considérons l'équation :

$$H(\lambda, u) = 0$$

où $H : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ est régulière (au moins de classe C^1).

Soit (λ_0, u_0) une solution de cette équation, on cherche à décrire la structure de l'ensemble des solutions de $H(\lambda, u) = 0$ au voisinage de (λ_0, u_0) .

Si $H_u(\lambda_0, u_0)$ est un isomorphisme de X sur Y , on dit que (λ_0, u_0) est un point régulier ; on peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites, d'où :

Proposition II.1

Soit (λ_0, u_0) un point régulier de l'équation : $H(\lambda, u) = 0$,
 $(\lambda, u) \in R \times X$;

il existe un voisinage ouvert V de (λ_0, u_0) , un voisinage ouvert W de λ_0 et une unique application $u : \lambda \in W \rightarrow u(\lambda) \in X$, continue telle que $u(\lambda_0) = u_0$ et $(\lambda, u(\lambda))$ soit l'unique solution, appartenant à V , de cette équation.

De plus $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ est une application de classe C^1 (de classe C^k si H est de classe C^k) et $u'(\lambda_0)$ est la solution de l'équation $-H_u(\lambda_0, u_0) z = H_\lambda(\lambda_0, u_0)$.

Ainsi les solutions de l'équation $H(\lambda, u) = 0$ forment autour de (λ_0, u_0) un arc $(\lambda, u(\lambda))$; $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ ayant la régularité de H ; on a autour de (λ_0, u_0) un développement de la forme :

$$\lambda = \lambda_0 + s, \quad u(\lambda) = u_0 + s u'(\lambda_0) + s \theta(s) \text{ avec } \lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) = 0 \text{ dans } X.$$

Si $H_u(\lambda_0, u_0)$ n'est pas un isomorphisme de X sur Y , on dit que (λ_0, u_0) est un point singulier ; la paramétrisation par λ n'est plus en général possible, mais, sous certaines hypothèses, il existe encore un arc régulier de solutions autour de (λ_0, u_0) .

Théorème II.1 [C.R]₁

Soit (λ_0, u_0) un point singulier de l'équation : $H(\lambda, u) = 0$,
où H est une application de $R \times X$ dans Y , au moins de classe C^1
au voisinage de (λ_0, u_0) .

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- le noyau \mathcal{N} de $H_u(\lambda_0, u_0)$ est de dimension 1, engendré par ϕ .
- l'image \mathcal{R} de $H_u(\lambda_0, u_0)$ est de codimension 1.
- $H_\lambda(\lambda_0, u_0) \notin \mathcal{R}$, cette dernière hypothèse est appelée "condition de transversalité".

Soit \mathcal{W} un supplémentaire de \mathcal{N} dans X ; alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que les solutions de l'équation $H(\lambda, u) = 0$ au voisinage de (λ_0, u_0) forment une courbe paramétrée par $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ de la forme :

$$\lambda(s) = \lambda_0 + \tau(s), \quad u(s) = u_0 + s\phi + sw(s) \quad w(s) \in \mathcal{W},$$

de plus $s \rightarrow (\tau(s), w(s))$ est de classe C^1 (C^k , $k \geq 1$ si H est de classe C^k) au voisinage de $s=0$, $\tau(0)=0, \tau'(0)=0, w(0)=0$.

Ces résultats sont applicables lorsque l'on considère des équations du type (1.3).

II.2.2 Cas des équations.

On s'intéresse plus particulièrement à l'équation :

$$(1.3) \quad Au = \lambda F(u) \text{ sur } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La non-linéarité f vérifie les hypothèses énoncées au début du paragraphe II.1.1, de plus :

$$f : (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R} \text{ est de classe } C^2,$$

$$f(x, 0) > 0 \text{ et } f_t(x, 0) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Les solutions (λ, u) de (1.3) appartiennent donc à $\mathbb{R}^+ \times C^2(\bar{\Omega})$, remarquons que $\lambda > 0$ et (λ, u) solution de (1.3) impliquent $u > 0$ sur Ω .

Si $\rho \in L^\infty(\Omega)$, notons $\mu_1(\rho)$ la valeur propre fondamentale de :

$$Av = \mu \rho v \text{ sur } \Omega, \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La proposition II.1 s'applique au point $(0, 0)$; on obtient les résultats plus précis suivants :

Théorème II.2 [C.R]₂

Il existe $\bar{\lambda}$ maximal vis à vis de l'existence d'une branche $(\lambda, u(\lambda))$ de solutions positives de (1.3) vérifiant :

- $\lambda \in (0, \bar{\lambda}) \rightarrow u(\lambda) \in C_0^{2, \alpha}(\bar{\Omega})$ est continue $\forall \alpha \ 0 < \alpha < 1$
- $\forall \lambda < \bar{\lambda} \quad \lambda < \mu_1(F'(u(\lambda)))$ donc l'opérateur :
 $v \in C_0^{2, \alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow Av - \lambda F'(u(\lambda))v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ est inversible.

Le nombre $\bar{\lambda}$ peut être fini ou infini.

Proposition II.2

Sous les hypothèses du début du paragraphe II.2.2, si de plus $\bar{\lambda} < +\infty$ et si il existe $M > 0$ telle que pour tout λ , $\lambda < \bar{\lambda}$ on ait $|u(\lambda)|_{\infty} \leq M$; alors $\bar{u} = \lim_{\lambda \uparrow \bar{\lambda}} u(\lambda)$ existe dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha$ $0 < \alpha < 1$;

$(\bar{\lambda}, \bar{u})$ est solution de (1.3) et on a : $\bar{\lambda} = \mu_1(F'(\bar{u}))$, c'est un point singulier qui vérifie les hypothèses du théorème II.1.

L'opérateur $A - \mu_1(F'(\bar{u})) F'(\bar{u})$ admet un vecteur propre strictement positif ϕ , la condition de transversalité qui dans ce cas s'écrit

$(F(\bar{u}), \phi) \neq 0$ est vérifiée.

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que les solutions de (1.3) forment, au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{u})$, une courbe $(\lambda(s), u(s))$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (\lambda(s), u(s)) \in R \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ soit de classe C^2

$\lambda(s) = \bar{\lambda} + \tau(s) \quad \tau(0) = 0 \quad \tau'(0) = 0$

$u(s) = \bar{u} + s(\phi + w(s)) \quad w(0) = 0.$

Lorsque la non-linéarité f est convexe, on connaît de façon plus précise l'allure de la courbe de solutions de (1.3) au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{u})$.

Faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

$f : \bar{\Omega} \times R \rightarrow R$ est une application de classe C^3 telle que $f_{tt}(x,t) > 0 \forall x \in \bar{\Omega}, \forall t > 0.$

Théorème II.3 $[C.R]_2$

Si f est une application de classe C^3 vérifiant les hypothèses du début du paragraphe II.2.2 et telle que $f_{tt}(x,t) > 0 \forall x \in \bar{\Omega}, \forall t > 0.$

i. si (λ, u) est une solution de (1.3) alors $\lambda \leq \mu_1(F'(0)) < +\infty.$

ii. il existe $\bar{\lambda} \leq \mu_1(F'(0))$ maximal vis à vis de l'existence d'une branche $(\lambda, u(\lambda))$ de solutions de (1.3) tel que :

. $\lambda \in (0, \bar{\lambda}) \rightarrow u(\lambda) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ soit continue $\forall \alpha, 0 < \alpha < 1.$

. l'opérateur : $v \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow Av - \lambda F'(u(\lambda))v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ est inversible $\forall \lambda, \lambda < \bar{\lambda}.$

. $\lambda \rightarrow u(\lambda)(x)$ est croissante $\forall x \in \bar{\Omega}$ et $u(\lambda)$ est pour λ fixé $< \bar{\lambda}$ la solution minimale de l'équation (1.3).

. (1.3) n'admet pas de solutions pour $\lambda > \bar{\lambda}.$

Application

Pour tout λ_0 , $\lambda_0 < \bar{\lambda}$, puisque l'opérateur $v \rightarrow Av - \lambda_0 F'(u(\lambda_0))v$ est inversible, $(\lambda_0, u(\lambda_0))$ est un point régulier de (1.3), en appliquant la proposition II.1, on montre l'existence d'un développement local des solutions de (1.3) autour de $(\lambda_0, u(\lambda_0))$ donné par :

$$u(\lambda_0 + s) = u(\lambda_0) + sz + s\varepsilon(s)$$

où z est la solution de $Az = \lambda_0 F'(u(\lambda_0))z + F(u(\lambda_0))$ sur Ω ,
 $z = 0$ sur $\partial\Omega$ avec $\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s) = 0$ dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

De plus si il existe $M > 0$ telle que pour tout $\lambda < \bar{\lambda}$, on ait :

$\|u(\lambda)\|_{\infty} \leq M$; alors [proposition II.2] $\bar{u} = \lim_{\lambda \uparrow \bar{\lambda}} u(\lambda)$ existe dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha \ 0 < \alpha < 1$;

$(\bar{\lambda}, \bar{u})$ est un point singulier de (1.3),

et il existe $\varepsilon > 0$ tel que les solutions de (1.3) au voisinage de $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ forment une courbe $(\lambda(s), u(s)) \ s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ qui vérifie :

. $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (\lambda(s), u(s)) \in \mathbb{R}^+ \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ est de classe C^2 .

. $\lambda(s) = \bar{\lambda} + \tau(s) \ \tau(0) = 0 \ \tau'(0) = 0$

. $u(s) = \bar{u} + s(\phi + w(s)) \ w(0) = 0$.

la convexité de f implique : $\tau''(0) < 0$

Conclusion.

Lorsque la non linéarité f est positive, croissante, convexe, on a mis en évidence un nombre $\bar{\lambda} < +\infty$ tel que si il existe $M > 0$ telle que pour tout $\lambda \ \lambda < \bar{\lambda}$ on ait $\|u(\lambda)\|_{\infty} \leq M$; alors :

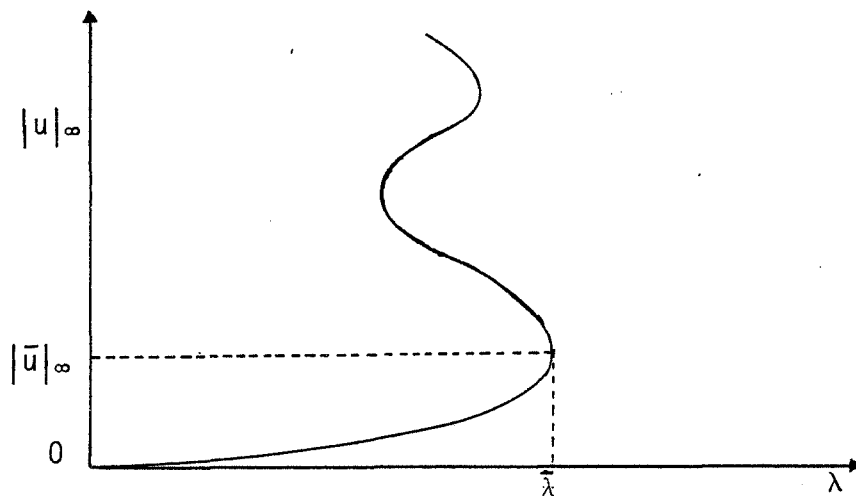
pour $\lambda > \bar{\lambda}$ (1.3) n'admet pas de solutions .

pour $\lambda = \bar{\lambda}$ (1.3) admet une unique solution u .

pour $\lambda < \bar{\lambda}$, λ voisin de $\bar{\lambda}$, (1.3) admet localement deux solutions .

(λ, u) est appelé **point de retournement** .

L'équation (1.3) admet le diagramme de bifurcation suivant :



II.3 Le processus de linéarisation conique.

On aimerait obtenir pour les solutions de l'inéquation variationnelle (1.1) des résultats semblables à ceux obtenus pour les équations au paragraphe II.2.

Les théorèmes précédents étant basés sur le théorème des fonctions implicites, ils nécessitent la différentiabilité (au sens Fréchet) de l'application H , ce qui n'est pas vérifié pour l'inéquation (1.1).

Or (λ, u) est solution de (1.1)

$\Leftrightarrow H(\lambda, u) = u - P_K [\lambda GF(u)] = 0$ d'après (1.2).

Nous allons utiliser cette formulation en terme de point fixe pour l'étude locale des solutions de (1.1).

Notons que l'application $z \in H_0^1(\Omega) \rightarrow P_K[z] \in H_0^1(\Omega)$ est lipschitzienne mais n'est pas Fréchet différentiable; mais elle admet une différentielle conique en tout point $z \in H_0^1(\Omega)$.

II.3.1 Rappel sur la dérivation conique des projecteurs.

Définition [M]

Considérons une application continue R de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et un élément $z \in H_0^1(\Omega)$.

On dit que R admet une **différentielle conique en z** , si il existe un opérateur positivement homogène Q tel que : $\forall w \in H_0^1(\Omega) \forall t > 0$ on ait :

$$R[v+tw] = R[v] + t Q[w] + t \varepsilon(t,w)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon(t,w) = 0$

Q est alors appelé la différentielle conique de R au point z .

Si P_K désigne le a -projecteur sur le convexe K , on montre $[H, M, Z]$ que P_K admet en tout point $v \in H_0^1(\Omega)$ une différentielle conique.

Pour cela, on supposera, dans toute la suite, que Ψ est quasi-continue (q.c.) $[A]$ (quitte à modifier Ψ sur un ensemble de capacité nulle).

Toute inégalité quasi-partout (q.p.) sur Ω entre deux éléments de $H_0^1(\Omega)$ sous-entendra toujours, par la suite, que l'on considère les représentants quasi-continus $[A]$, uniques, de ces éléments.

On a ainsi $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \Psi \text{ q.p. sur } \Omega \}$, c'est $[M]$ un convexe fermé supstable et héréditaire vers le bas;

donc le projecteur P_K admet $[H, M, Z]$, en tout point $v \in H_0^1(\Omega)$ une différentielle conique égale à $P_S(w)$

avec $w = P_K[v]$ et $S(w) = \overline{C(K, w)} \cap \{v-w\}^\perp$,

$\{v-w\}^\perp$ désigne l'orthogonal pour la forme a de $v-w$ c'est à dire :

$\{z \in H_0^1(\Omega) / a(z, w) = a(z, v)\}$.

On a en fait le résultat plus précis suivant :

$$P_K[v+th] = w + t P_S(w)[h] + t \varepsilon(t, h) \quad t > 0$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t, h) = 0$ uniformément par rapport à h , h restant dans un compact de $H_0^1(\Omega)$.

II.3.2 Le spectre conique;

Soit (λ, u) une solution de (1.1);

Rappelons que si u appartient à K , $C(K, u) = \bigcup_{\mu > 0} \mu \{K-u\}$.

Soit $\{u=\Psi\}$ l'ensemble de coïncidence défini comme dans $[M]$ à un ensemble de capacité nulle près ; alors :

$\overline{C(K, u)} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p. sur } \{u=\Psi\} \}$.

On note $S_u = \overline{C(K, u)} \cap \{u-\lambda GF(u)\}^\perp$.

Définitions : $[Co]$

On appelle **inéquation conifiée homogène** de l'équation (1.3) en (λ, u) par rapport à u ; l'inéquation suivante :

$$(2.1) \quad \begin{cases} a(w, h-w) \geq \lambda (F'(u)w, h-w) \\ \forall h \in S_u; w \in S_u. \end{cases}$$

Si $w=0$ est la seule solution de cette inéquation, on dit que (λ, u) est un **point régulier** de (1.1); sinon on dit que (λ, u) est un **point singulier** de (1.1).

Remarquons que :

w est une solution de l'inéquation (2.1)

$$\Leftrightarrow (2.1)' \quad w = \lambda P_{Su}[GF'(u)w].$$

Cette formulation suggère une extension de la théorie spectrale classique puisque l'opérateur :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow P_{Su}[GF'(u)w] \in H_0^1(\Omega)$$

est un opérateur compact positivement homogène mais non linéaire (sauf si Su est un espace vectoriel, cas qui sera envisagé par la suite (chapitre IV)).

L'équation (2.1)' est en fait obtenue, à partir de l'équation (1.2)

$u = P_K[\lambda GF(u)]$, par un processus de linéarisation conique semblable au processus de linéarisation utilisé pour l'étude des équations de type (1.3).

En effet, soit $k \in H_0^1(\Omega)$; cherchons à dériver l'équation :

$$u = P_K[\lambda GF(u)] \text{ par rapport à } u \text{ selon la direction } k.$$

Soit $t > 0$, supposons $n \leq 4$, l'équation suivante a alors un sens dans $H_0^1(\Omega)$ (car si $n \leq 4$ $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ donc $k \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow k^2 \in L^2(\Omega)$) :

$$GF(u+tk) = GF(u) + t GF'(u)k + \frac{t^2}{2} GF''(\xi)k^2$$

avec $\xi(x) \in [u(x)+tk(x), u(x)]$ ou $\in [u(x), u(x)+tk(x)]$

selon si $u(x)+tk(x) \leq u(x)$ ou si $u(x) \leq u(x)+tk(x)$.

Appliquons la formule du paragraphe II.3.1 donnant la dérivée conique de P_K au point $v = \lambda GF(u)$:

$$\text{avec } h = \lambda GF'(u)k + \lambda \frac{t}{2} GF''(\xi)k^2; \quad w = P_K[\lambda GF(u)] = u; \quad S(w) = Su;$$

en utilisant le caractère lipschitzien de P_K , on a :

$$P_K[\lambda GF(u+tk)] = u + t P_{Su}[\lambda GF'(u)k] + t \varepsilon(t, k)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0_+} \varepsilon(t, k) = 0$ uniformément par rapport à k , k restant borné dans $H_0^1(\Omega)$

(grâce à la compacité de l'opérateur de Green de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même)

Ainsi, en dérivant par rapport à t , l'équation $u+tk = P_K[\lambda GF(u+tk)]$

au point $t=0_+$, on obtient :

$$k = P_{Su}[\lambda GF'(u)k] \text{ c'est à dire } k \text{ est solution de } (2.1)'. \quad \#$$

II.3.3 Les directions coniques en un point (λ, u) .

Soit (λ, u) une solution de (1.1);

Définition : [Co]

On appelle **direction conique** à droite (resp. à gauche) en (λ, u) une solution, z_+ (resp. z_-), si elle existe, de l'**inéquation conifiée non homogène** suivante :

$$(2.2)_+ \begin{cases} a(z_+, w-z_+) \geq \lambda (F'(u)z_+, w-z_+) + (F(u), w-z_+) \\ \forall w \in Su; z_+ \in Su. \end{cases}$$

(resp. $(2.2)_-$ où l'on remplace z_+ par z_- , Su par $-Su$.)

Remarquons que :

$$z_+ \text{ est solution de } (2.2)_+ \Leftrightarrow z_+ = P_{Su} [\lambda GF'(u)z_+ + GF(u)]$$

$$z_- \text{ est solution de } (2.2)_- \Leftrightarrow z_- = P_{-Su} [\lambda GF'(u)z_- + GF(u)]$$

Ces équations sont elles aussi obtenues à partir de l'équation (1.2) par un processus de linéarisation conique.

En effet, soit $k \in H_0^1(\Omega)$ et $t > 0$; on montre, par un calcul analogue à celui fait au paragraphe II.3.2 que :

$$(2.3) P_K [(\lambda+t)GF(u+tk)] = u + t P_{Su} [\lambda GF'(u)k + GF(u)] + t \varepsilon(t, k)$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t, k) = 0$ uniformément par rapport à k , k restant borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Donc si on dérive par rapport à $t, t > 0$; l'équation :

$$u+tk = P_K [(\lambda+t)GF(u+tk)], \text{ au point } t=0, \text{ on obtient :}$$

$$k = P_{Su} [\lambda GF'(u)k + GF(u)], k \text{ est donc solution de } (2.2)_+.$$

#

Ainsi les outils présentés dans ce paragraphe sont les extensions naturelles de ceux obtenus par un processus de linéarisation standard pour les équations (1.3).

II.3.4 Une interprétation géométrique de ces concepts.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $n \leq 5$.

Proposition II.3

Soient $\lambda_0 > 0$ donné et $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow u(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ une branche de solutions de (1.1), continue à droite (resp. à gauche) en λ_0 .

Notons $u_0 = u(\lambda_0)$ et $z_\lambda = \frac{u(\lambda) - u_0}{\lambda - \lambda_0}$ pour $\lambda > \lambda_0$ (resp. $\lambda < \lambda_0$),

alors on a l'alternative suivante :

- i. soit la famille $(z_\lambda, \lambda > \lambda_0)$ (resp. $z_\lambda, \lambda < \lambda_0$) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et dans ce cas, toute limite faible dans $H_0^1(\Omega)$, notée z_+ (resp. z_-), de z_λ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$ (resp. $\lambda < \lambda_0$) est une direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ_0, u_0) .
- ii. soit (λ_0, u_0) est un point singulier de (1.1).

Remarque II.3

Ces résultats sont valables notamment lorsque $u(\lambda) = \bar{u}(\lambda)$ (resp. $\underline{u}(\lambda)$) la solution maximale (resp. minimale) de (1.1) [chapitre VII].

Démonstration de la proposition II.3

On fait la démonstration dans le cas où $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ est continue à droite en $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ donné.

1. Supposons que $(z_\lambda, \lambda > \lambda_0)$ soit bornée dans $H_0^1(\Omega)$

Soit $\lambda > \lambda_0$, $u(\lambda) = u_0 + (\lambda - \lambda_0)z_\lambda \in K$, donc $z_\lambda \in C(K, u_0)$.

Soit z_+ une limite faible de z_λ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$; z_+ appartient à l'adhérence faible de $C(K, u_0)$ c'est à dire à $\overline{C(K, u_0)}$ (car $C(K, u_0)$ est un convexe de $H_0^1(\Omega)$).

Montrons que $z_+ \in \{u_0 - \lambda_0 GF(u_0)\}^\perp$.

(λ_0, u_0) est une solution de (1.1) donc :

$$a(u_0, v - u_0) \geq \lambda_0 (F(u_0), v - u_0) \quad \forall v \in K.$$

Prenons $v = u(\lambda)$ et divisons l'inégalité obtenue par $\lambda - \lambda_0 > 0$, on a :

$$a(u_0, z_\lambda) \geq \lambda_0 (F(u_0), z_\lambda);$$

lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$, puisque $z_\lambda \rightarrow z_+$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, on obtient :

$$a(u_0, z_+) \geq \lambda_0 (F(u_0), z_+).$$

D'autre part $(\lambda, u(\lambda))$ est solution de (1.1) donc, avec $v=u_0$ dans (1.1) on a:

$$a(u(\lambda), u(\lambda)-u_0) \leq \lambda (F(u(\lambda)), u(\lambda)-u_0)$$

$$\Rightarrow a(u(\lambda), z_\lambda) \leq \lambda (F(u(\lambda)), z_\lambda).$$

lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$ $\lambda > \lambda_0$, $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ étant continue à droite en λ_0 , $u(\lambda) \rightarrow u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort, on obtient :

$$a(u_0, z_+) \leq \lambda_0 (F(u_0), z_+) \text{ d'où l'égalité; ainsi } \underline{z_+} \in \underline{Su_0}.$$

Enfin montrons que z_+ est une direction conique à droite en (λ_0, u_0)

Soit $h \in C(K, u_0) \cap \{u_0 - \lambda_0 GF(u_0)\}^\perp$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_0 + \varepsilon h \in K$; si $\varepsilon = 0$ c'est vrai pour tout h .

u_0 et $u(\lambda)$ sont, par définition, solutions des inéquations suivantes :

$$a(u_0, w-u_0) \geq \lambda_0 (F(u_0), w-u_0) \quad \forall w \in K.$$

$$a(u(\lambda), w-u(\lambda)) \geq \lambda (F(u(\lambda)), w-u(\lambda)) \quad \forall w \in K$$

On choisit $w = u(\lambda)$ dans la première inéquation, $w = u_0 + \varepsilon h$ dans la deuxième, et on ajoute les inégalités obtenues :

$$(2.4) \quad a(u(\lambda), \varepsilon h) + a(u_0 - u(\lambda), u(\lambda) - u_0) >$$

$$> \lambda (F(u(\lambda)), \varepsilon h) - (\lambda - \lambda_0) (F(u_0), u(\lambda) - u_0) - \lambda (F(u(\lambda)) - F(u_0), u(\lambda) - u_0).$$

En premier lieu, on choisit $\varepsilon = 0$ dans (2.4), on divise l'inégalité obtenue par $(\lambda - \lambda_0)^2 \Rightarrow$

$$a(z_\lambda, z_\lambda) \leq (F(u_0), z_\lambda) + \lambda \left(\frac{F(u(\lambda)) - F(u_0)}{\lambda - \lambda_0}, z_\lambda \right).$$

$$\left(\frac{F(u(\lambda)) - F(u_0)}{\lambda - \lambda_0}, z_\lambda \right) = (F'(u_0)z_\lambda, z_\lambda) + (\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} F''(\xi) z_\lambda^2 \cdot z_\lambda dx$$

avec $u_0(x) \leq \xi(x) \leq u(\lambda)(x)$ ou $u(\lambda)(x) \leq \xi(x) \leq u_0(x)$,
selon si $u_0(x) \leq u(\lambda)(x)$ ou si $u(\lambda)(x) \leq u_0(x)$.

$(z_\lambda, \lambda > \lambda_0)$ étant une famille bornée dans $H_0^1(\Omega)$, $n \leq 5$, les inclusions classiques pour les espaces de Sobolev impliquent :

$(z_\lambda, \lambda > \lambda_0)$ est une famille bornée dans $L^3(\Omega)$;

d'autre part :

$$\left| \int_{\Omega} F''(\xi) z_\lambda^2 z_\lambda dx \right| \leq C |z_\lambda|_3^3 \quad \text{car } F''(\xi) \in L^\infty(\Omega),$$

d'où $(\lambda - \lambda_0) \int_{\Omega} F''(\xi) z_\lambda^2 z_\lambda dx \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

$\Rightarrow a(z_+, z_+) \leq \liminf a(z_\lambda, z_\lambda) \leq (F(u_0), z_+) + \lambda_0 (F'(u_0)z_+, z_+)$,
car a est s.c.i. pour la topologie faible sur $H_0^1(\Omega)$.

Pour $\varepsilon > 0$, divisons l'inégalité (2.4) par $\lambda - \lambda_0$, en utilisant le fait que : $a(u_0, \varepsilon h) = \lambda_0 (F(u_0), \varepsilon h)$, on a :

$$\begin{aligned} & a(z_\lambda, \varepsilon h) + a(u_0 - u(\lambda), z_\lambda) > \\ & > \frac{(\lambda F(u(\lambda)) - \lambda_0 F(u_0), \varepsilon h)}{\lambda - \lambda_0} - (F(u_0), u(\lambda) - u_0) - \lambda (F(u(\lambda)) - F(u_0), z_\lambda) \end{aligned}$$

d'où lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$:

$$a(z_+, \varepsilon h) > \lambda_0 (F'(u_0)z_+, \varepsilon h) + (F(u_0), \varepsilon h).$$

En combinant cette inégalité avec le résultat obtenu pour $\varepsilon = 0$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a(z_+, h - z_+) > \lambda_0 (F'(u_0)z_+, h - z_+) + (F(u_0), h - z_+) \\ \forall h \in C(K, u_0) \cap \{u_0 - \lambda_0 GF(u_0)\}^\perp. \end{array} \right.$$

donc par densité $[M]$, $\forall h \in Su_0$.

2. Supposons qu'il existe au moins une suite λ_p telle que $\lambda_p > \lambda_0$, $\lambda_p \rightarrow \lambda_0$ et telle qu'en posant $u_p = u(\lambda_p)$, on ait :

$$\frac{\|u_p - u_0\|}{\lambda_p - \lambda_0} \rightarrow +\infty; \text{ montrons que } (\lambda, u) \text{ est un point singulier.}$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $u_p \neq u_0 \forall p$;

$$\text{posons } w_p = \frac{u_p - u_0}{\|u_p - u_0\|}, \quad \|w_p\| = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}, \text{ soit } w \text{ une valeur}$$

d'adhérence de $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

On montre, comme pour le point 1. de cette démonstration, que w appartient à Su_0 .

Ecrivons les inéquations vérifiées respectivement par u_0 et u_p :

$$a(u_0, v - u_0) \geq \lambda_0 (F(u_0), v - u_0) \quad \forall v \in K.$$

$$a(u_p, v - u_p) \geq \lambda_p (F(u_p), v - u_p) \quad \forall v \in K.$$

Choisissons respectivement $v = u_p$ et $v = u_0$; faisons la somme des inégalités obtenues et divisons cette nouvelle inégalité par $\|u_p - u_0\|^2$, on a :

$$a(w_p, w_p) \leq \lambda_0 \left(\frac{F(u_p) - F(u_0)}{\|u_p - u_0\|}, w_p \right) + \frac{\lambda_p - \lambda_0}{\|u_p - u_0\|} (F(u_p), w_p).$$

Si $\alpha > 0$ désigne la constante de coercivité de a , on a :

$a(w_p, w_p) \geq \alpha \forall p \in \mathbb{N}$; lorsque $p \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\alpha \leq \liminf a(w_p, w_p) \leq \lambda_0 (F'(u_0)w, w).$$

(on a de nouveau utilisé l'hypothèse $n \leq 5$ en faisant appel à une formule de Taylor, comme pour le point 1.)

ceci implique $w \neq 0$ et on montre, comme pour le point 1., que w est solution de (2.1).

#

Remarque II.4

En un point régulier (λ_0, u_0) d'une branche $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ de solutions de (1.1) continue à droite en λ_0 (resp. à gauche), on peut appliquer la proposition II.4. On obtient ainsi l'existence de directions coniques à droite (resp. à gauche) au point considéré. Ce résultat ressemble, au moins pour de telles branches de solutions, à une alternative de Fredholm faible et conique.

Remarque II.5

Considérons la branche maximale [chapitre VII] $\lambda \rightarrow \bar{u}(\lambda)$ de (1.1). Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $(\lambda_0, u_0 = \bar{u}(\lambda_0))$ soit un point régulier de (1.1); si z_+ désigne une limite faible de :

$$\frac{\bar{u}(\lambda) - u_0}{\lambda - \lambda_0} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0, \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ alors } z_+ \in S_{u_0} \text{ donc } z_+ \leq 0 \text{ q.p. sur}$$

$E_0 = \{u_0 = \Psi\}$; la branche maximale étant croissante par rapport à λ on a : $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω donc q.p. sur Ω et E_0 , ainsi $z_+ = 0$ q.p. sur E_0 .

Soit $S_0 = S_{u_0} \cap -S_{u_0}$, on a $z_+ \in S_0$; on montre (en utilisant la même démarche que dans la proposition II.4 1. mais avec h appartenant à $C(K, u_0) \cap -C(K, u_0) \cap \{u_0 - \lambda_0 GF(u_0)\}^\perp$) que :

$$z_+ = P_{S_0}[\lambda_0 GF'(u_0)z_+ + GF(u_0)].$$

Ce résultat n'est plus vrai, le long de la branche minimale de solutions de (1.1), pour la direction conique à gauche z_- .

CHAPITRE III Un résultat de théorie spectrale non linéaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la surjectivité et à l'inversibilité d'opérateurs de la forme :

$$w \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k]$$

où C est un cône convexe fermé de $H_0^1(\Omega)$. Puis nous montrons le lien qui existe entre ces résultats et la théorie spectrale non linéaire [F.V, G.M].

III.1 Un résultat d'inversion

Lemme III.1

Soit C un cône convexe fermé de sommet 0 inclus dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit (λ, u) une solution de (1.1) vérifiant la condition suivante $(\Sigma)_C$:

$$\inf\{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, \|w\|=1 \} > 0$$

alors, $\forall k \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur non linéaire:

$$w \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k]$$

est bijectif de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même; son inverse R_k est lipschitzien de rapport indépendant de k .

Supposons de plus que C soit stable par partie positive ($w \in C \Rightarrow w^+ \in C$); si $k = Gh$ avec $h \geq 0$ p.p. sur Ω et si $g \geq 0$ p.p. sur Ω alors $R_k[g] \geq 0$ p.p. sur Ω .

Remarque III.1

Si C est un espace vectoriel, l'opérateur:

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] \in H_0^1(\Omega)$$

est une perturbation linéaire compacte de l'identité, qui est donc bijective dès qu'elle est injective. Cette condition est plus faible que $(\Sigma)_C$ mais n'implique pas nécessairement la positivité de $R_k[g]$ lorsque $k = Gh$ avec $g \geq 0$ p.p. sur Ω et $h \geq 0$ p.p. sur Ω , même si C est stable par partie positive.

Démonstration du lemme III.1

Soit $k \in H_0^1(\Omega)$ fixé.

1. L'opérateur $w \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k]$ est bijectif.

Soit $g \in H_0^1(\Omega)$, on veut montrer que l'équation:

$$(3.1) \quad w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] = g$$

admet une unique solution, notée $R_k[g]$.

L'équation (3.1) est la formulation en terme de point fixe de l'inéquation suivante:

$$(3.2) \quad \begin{cases} a(w-g, v-w+g) \geq a(k, v-w+g) + \lambda (F'(u)w, v-w+g) \\ \forall v \in C; w-g \in C \end{cases}$$

c'est à dire en posant $z = w-g$

$$(3.3) \quad \begin{cases} a(z, v-z) - \lambda (F'(u)z, v-z) \geq a(k, v-z) + \lambda (F'(u)g, v-z) \\ \forall v \in C; z \in C \end{cases}$$

Notons $b(v_1, v_2) = a(v_1, v_2) - \lambda (F'(u)v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)^2$

$$\langle l, v \rangle = a(k, v) + \lambda (F'(u)g, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

b est une forme bilinéaire symétrique continue sur $H_0^1(\Omega)$.

l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.

(3.3) admet la formulation équivalente :

$$(3.4) \quad b(z, v-z) \geq \langle l, v-z \rangle \quad \forall v \in C; z \in C.$$

Considérons la fonctionnelle J :

$$J : v \in C \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} b(v, v) - \langle l, v \rangle \in \mathbb{R}$$

La condition $(\Sigma)_C$ implique:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty, v \in C} J(v) = +\infty$$

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall v_1 \in C, \forall v_2 \in C, b(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq \beta \|v_1 - v_2\|^2$$

J est donc une fonctionnelle strictement convexe continue

=> l'inéquation (3.4) admet une unique solution notée $T_k[g]$ qui minimise J sur C .

=> (3.1) admet une unique solution $R_k[g] = T_k[g] + g$

2. R_k est un opérateur lipschitzien de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même.

Il suffit de montrer que T_k est lipschitzien.

Soient $z_1 = T_k[g_1]$, $z_2 = T_k[g_2]$, $(g_1, g_2) \in H_0^1(\Omega)^2$

On peut supposer, sans restriction, que $z_1 \neq z_2$.

On a d'après (3.3) :

$$b(z_1, v - z_1) \geq a(k, v - z_1) + \lambda (F'(u)g_1, v - z_1) \quad \forall v \in C$$

$$b(z_2, v - z_2) \geq a(k, v - z_2) + \lambda (F'(u)g_2, v - z_2) \quad \forall v \in C$$

On choisit $v = z_2$ dans la première inéquation, $v = z_1$ dans la deuxième et on ajoute les inégalités obtenues :

$$b(z_1 - z_2, z_1 - z_2) \leq \lambda (F'(u)(g_1 - g_2), z_1 - z_2)$$

puisque $z_1 - z_2 \in C - C$ la condition $(\Sigma)_C$ implique :

$$b(z_1 - z_2, z_1 - z_2) \geq \beta \|z_1 - z_2\|^2 \quad (\beta \text{ ne dépend pas de } k)$$

de plus il existe $L > 0$ (indépendant de k) tel que :

$$\lambda (F'(u)(g_1 - g_2), z_1 - z_2) \leq L \|g_1 - g_2\| \cdot \|z_1 - z_2\|$$

$$\Rightarrow \|z_1 - z_2\| \leq \frac{L}{\beta} \|g_1 - g_2\|$$

T_k et donc R_k est un opérateur lipschitzien de rapport indépendant de k .

3. Si $k = Gh$ avec $h > 0$ p.p., $g > 0$ p.p. alors $R_k[g] \geq 0$ p.p. sur Ω .

On pose $z = R_k[g] - g = T_k[g]$.

On note v^+ (resp. v^-) la partie positive (resp. négative) de $v \in H_0^1(\Omega)$.

z appartient à C donc, C étant stable par partie positive, z^+ appartient à C .

L'inéquation (3.4) s'écrit dans ce cas :

$$b(z, v - z) \geq (h, v - z) + \lambda (F'(u)g, v - z) \quad \forall v \in C ; z \in C$$

choisissons $v = z^+$, on a $b(z, z^-) \geq (h, z^-) + \lambda (F'(u)g, z^-) \geq 0$

$$\Rightarrow b(z^-, z^-) \leq 0$$

or $z^- = z^+ - z \in C - C$; la condition $(\Sigma)_C$ implique $z^- = 0$ p.p.

d'où $z \geq 0$ p.p. sur $\Omega \Rightarrow R_k[g] \geq g > 0$ p.p. sur Ω .

#

Remarque III.2

Si (λ, u) solution de (1.1) vérifie la condition $(\Sigma)_C$:

$$\inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C, \|w\|=1 \} > 0$$

plus faible que la condition $(\Sigma)_C$, la fonctionnelle J n'est plus convexe. En utilisant une suite minimisante pour J , on montre que $\forall g \in H_0^1(\Omega)$ l'inéquation (3.4) admet au moins une solution, donc l'opérateur :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] \in H_0^1(\Omega)$$

est surjectif.

Donnons quelques formulations équivalentes à la condition $(\Sigma)_C$, elles nous permettront, en particulier la condition ii ci-dessous, d'interpréter, dans certains cas, $(\Sigma)_C$ comme une condition spectrale pour les équations [paragraphe IV.2 et chapitre VII].

Lemme III.2

Si $F'(u) > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $(\Sigma)_C : \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, \|w\|=1 \} > 0$

ii. $\inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, |w|=1 \} > 0$

iii. $\lambda < \inf \left\{ \frac{a(w, w)}{(F'(u)w, w)} / w \in C-C, w \neq 0 \right\}$

Démonstration du lemme III.2

On fait une preuve circulaire.

1. Montrons que i => ii.

Notons $\gamma = \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, \|w\|=1 \}$

Soit $w \in C-C, |w|=1$ alors $\|w\| \neq 0$ et on a :

$$a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) \geq \gamma \|w\|^2 \geq \gamma |w|^2 = \gamma$$

donc $\inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, |w|=1 \} \geq \gamma > 0$

2. Montrons que ii => iii

Soit $w \in C-C, w \neq 0; F'(u) > 0 \Rightarrow (F'(u)w, w) > 0$

Notons $\gamma' = \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, |w|=1 \}$

On a $a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) \geq \gamma' |w|^2$

$F'(u) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow (F'(u)w, w) \leq M |w|^2$

$$\text{donc } \frac{a(w, w)}{(F'(u)w, w)} \geq \lambda + \frac{\gamma'}{M}$$

$$\text{d'où } \mu_C = \inf \left\{ \frac{a(w, w)}{(F'(u)w, w)} / w \in C-C, w \neq 0 \right\} > \lambda$$

3. Montrons que iii => i

Supposons que μ_C soit strictement supérieur à λ .

Posons $\mu_C = \lambda + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Soit $w \in C-C$ tel que $\|w\|=1$, on a $a(w, w) - (\lambda + \varepsilon)(F'(u)w, w) \geq 0$

$$a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) = \frac{\lambda}{\lambda + \varepsilon} \left[\frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda} a(w, w) - (\lambda + \varepsilon)(F'(u)w, w) \right]$$

$$a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda + \varepsilon} a(w, w) \geq \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda + \varepsilon}$$

$$\text{donc } \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in C-C, \|w\|=1 \} \geq \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda + \varepsilon} > 0. \quad \#$$

Remarque III.3

Même si l'hypothèse $F'(u) > 0$ n'est pas vérifiée, les conditions i. et ii. restent équivalentes.

III.2 Comparaison avec des résultats de théorie spectrale non linéaire

En appliquant certains résultats de théorie spectrale non linéaire [F.V,G.M], on retrouve, parfois sous une forme moins précise, les résultats précédents [lemme III.1, Remarque III.2].

En effet, rappelons quelques définitions de théorie spectrale non linéaire [F.V.] :

- si Q est un opérateur continu de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même on dit que Q est **quasi-borné** si et seulement si il existe $A, B > 0$ tels que $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ on ait $\|Q[w]\| \leq A + B \|w\|$. Par exemple un opérateur positivement homogène et compact est quasi-borné.

-deux opérateurs Q et Q' quasi-bornés sur $H_0^1(\Omega)$ sont **asymptotiquement équivalents** si et seulement si :

$$\limsup_{\|w\| \rightarrow +\infty} \frac{\|Q[w] - Q'[w]\|}{\|w\|} = 0$$

-si Q est un opérateur quasi-borné sur $H_0^1(\Omega)$, on définit son **spectre asymptotique** :

$$\Sigma(Q) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \text{ tel que } \liminf_{\|w\| \rightarrow +\infty} \frac{\|\mu w - Q[w]\|}{\|w\|} = 0 \right\}$$

Application :

Soit C un cône convexe fermé de sommet 0 , inclus dans $H_0^1(\Omega)$ et (λ, u) une solution de (1.1) telle que $F'(u) > 0$; alors :

$\forall k \in H_0^1(\Omega)$, les opérateurs non linéaires :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow U_C[w] = P_C [GF'(u)w] \in H_0^1(\Omega)$$

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow V_C[w] = P_C [GF'(u)w + \frac{k}{\lambda}] \in H_0^1(\Omega)$$

sont quasi-bornés et asymptotiquement équivalents, U_C est positivement homogène et compact, donc $\Sigma(U_C) = \Sigma(V_C)$ [F.V, proposition 2.2].

On a [F.V] le résultat de surjectivité suivant :

Théorème III.1

Si $\frac{1}{\lambda}$ appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \Sigma(U_C)$ alors $\forall k \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur non linéaire :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] \in H_0^1(\Omega)$$

est surjectif.

Application : on suppose $F'(u) > 0$.

Soit $\mu'_C = \inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(u)w,w)} \mid w \in C, \|w\|=1 \right\}$,

Soit $w \in C, \|w\|=1; F'(u) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow (F'(u)w,w) \leq M \|w\|^2 \leq M$

$$\Rightarrow \frac{a(w,w)}{(F'(u)w,w)} \geq \frac{\alpha}{M}$$

donc μ'_C est strictement positif.

U_C est un opérateur compact et positivement homogène, si $\mu \in \Sigma(U_C)$ alors [F.V, proposition 2.2] $\mu=0$ ou bien il existe $w \in C, w \neq 0$ tel que $\mu w = P_C [GF'(u)w]$ en particulier on a, dans ce cas,

$$a(w,w) = \frac{1}{\mu} (F'(u)w,w) \Rightarrow \mu'_C \leq \frac{1}{\mu},$$

\Rightarrow la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \Sigma(U_C)$ contient $\left] \frac{1}{\mu'_C}, +\infty[\right]$, en appliquant le théorème III.1, on obtient :

si $\lambda < \mu'_C$ alors $\forall k \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] \in H_0^1(\Omega)$$

est surjectif. On retrouve ainsi le résultat de la remarque III.2.

Puisque $\mu_C \leq \mu'_C$, on a : si $\lambda < \mu_C$ (c'est à dire si $(\Sigma)_C$ est vérifiée) l'opérateur :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_C [\lambda GF'(u)w + k] \in H_0^1(\Omega)$$

est surjectif, ce résultat est moins précis que celui énoncé dans le lemme III.1.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons ces résultats de surjectivité et d'inversibilité pour prouver l'existence et éventuellement l'unicité de directions coniques à droite et à gauche en certains points (λ, u) , et l'existence de développements de solutions de (1.1) autour de (λ, u) . Le cône C est alors pris égal à Su dans le cas général, Su pouvant être un espace vectoriel [chapitre IV]; au point de transition équation-inéquation, on prendra $C = \overline{C(K, u)}$ [chapitre VI].



CHAPITRE IV Etude locale en certains points réguliers.

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'étude locale des solutions de (1.1) au voisinage de certains points réguliers. Nous allons en fait envisager deux cas :

$(-\lambda_0, u_0)$ est un point régulier de (1.1) vérifiant la condition $(\Sigma)_C$ avec $C = Su_0$.

$(-\lambda_0, u_0)$ est un point régulier de (1.1) et Su_0 est un espace vectoriel.

Nous prouvons que, sous certaines conditions (notamment lorsque l'obstacle et la frontière de l'ensemble de coïncidence sont réguliers), Su_0 est un espace vectoriel.

En envisageant ces deux cas, nous décrivons le comportement des solutions de (1.1) au voisinage des points réguliers les plus généraux. Le point de transition équation-inéquation ne s'insère pas toujours dans ce cadre d'étude, une étude plus fine sera faite, en ce point, au chapitre VI.

IV.1 Existence de directions coniques à droite et à gauche en (λ, u)

En appliquant les résultats du chapitre précédent, on montre, dans ce paragraphe, l'existence, en certains points réguliers, de directions coniques à droite (resp. à gauche) en (λ, u) notées z_+ (resp. z_-). On cherche donc z_+ vérifiant $(2.2)_+$ (resp. z_- vérifiant $(2.2)_-$) c'est à dire en utilisant la formulation point fixe de ces inéquations

$$(2.2)_+ \quad z_+ = P_{Su} [\lambda GF'(u)z_+ + GF(u)]$$

$$(2.2)_- \quad z_- = P_{-Su} [\lambda GF'(u)z_- + GF(u)]$$

avec $Su = \overline{C(K, u)} \cap \{ u - \lambda GF(u) \}^\perp$.

Notation

On dit que (λ, u) solution de (1.1) vérifie la condition (Σ) si et seulement si :

$$\inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in Su - Su, \|w\|=1 \} > 0.$$

Lorsque $F'(u) > 0$, on a déjà énoncé [Lemme III.2] des formulations équivalentes à (Σ) .

Proposition IV.1

Soit (λ, u) une solution de (1.1) vérifiant la condition (Σ)

i il existe une unique direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ, u) notée z_+ (resp. z_-).

On a $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω en particulier $z_+ = 0$ q.p. sur $\{u=\Psi\}$.

ii De plus, on a $z_- \geq z_+$ p.p. sur Ω en particulier $z_- \geq 0$ p.p. sur Ω .

Démonstration de la proposition IV.1

i Su est un cône convexe fermé de sommet 0, montrons que Su est stable par partie positive.

Soit $w \in Su$, désignons par w^+ sa partie positive dans $H_0^1(\Omega)$, $\overline{C(K, u)}$ étant $[M]$ sup-stable, w^+ appartient à $\overline{C(K, u)}$.

Or $w^+ \geq 0$ p.p. sur Ω donc q.p. sur $\{u=\Psi\}$ ainsi $w^+ \in \overline{C(K, u)}$.

L'inéquation (1.1) admet la formulation équivalente suivante :

$$a(u, v) \geq \lambda (F(u), v) \quad \forall v \in \overline{C(K, u)}; u \in K.$$

Soit $h \in \overline{C(K, u)} \cap \overline{-C(K, u)}$, en choisissant $v = \pm h$ dans l'inéquation ci-dessus, on a :

$$a(u, h) = \lambda (F(u), h) \quad \text{donc } h \in Su;$$

on montre ainsi que $\overline{C(K, u)} \cap \overline{-C(K, u)} = Su \cap -Su$.

En particulier $w^+ \in Su$.

On peut appliquer le lemme III.1 avec $C = Su$ $k = GF(u)$ et $g = 0$: il existe une unique solution notée z_+ de :

$$z_+ = P_{Su} [\lambda GF'(u)z_+ + GF(u)]$$

$F(u)$ étant positif on a $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω .

On peut appliquer le lemme III.1 avec $C = -Su$ $k = GF(u)$ et $g = 0$: il existe une unique direction conique à gauche en (λ, u) notée z_- ; on ne peut rien dire a priori sur son signe car $-Su$ n'est pas stable par partie positive .

ii Montrons que $z_- \geq z_+$ p.p. sur Ω .

z_+ (resp. z_-) sont solutions de (2.2)₊ (resp. (2.2)₋), elles vérifient donc les inéquations suivantes :

$$a(z_+, -h) - \lambda (F'(u)z_+, -h) \geq (F(u), -h) \quad \forall h \in -Su.$$

$$a(z_-, h) - \lambda (F'(u)z_-, h) \geq (F(u), h) \quad \forall h \in -Su.$$

On fait la somme de ces inéquations :

$$(4.1) \quad a(z_- - z_+, h) - \lambda (F'(u)(z_- - z_+), h) \geq 0 \quad \forall h \in -Su.$$

Soit $k = (z_+ - z_-)^+$, $k \geq 0$ p.p. sur Ω , donc $k \geq 0$ q.p. sur $\{u = \Psi\}$
 $\Rightarrow k \in \overline{-C(K, u)}$.

D'autre part :

$z_+ \in Su$, $-z_- \in Su$, donc $z_+ - z_- \in Su$ (car Su est un cône convexe);

Su étant stable par partie positive (c.f. point i de cette démonstration) on a : $k \in Su$, donc $k \in Su \cap -Su$.

On peut choisir $h = \pm k$ dans l'inéquation (4.1) ce qui donne :

$$a(k, k) - \lambda (F'(u)k, k) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \text{ i.e. } z_+ \leq z_- \text{ p.p. sur } \Omega$$

(puisque la condition (Σ) est vérifiée).

#

Remarque IV.1

Si (λ, u) vérifie la condition (Σ') :

$$\inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in Su, \|w\|=1 \} > 0$$

alors il existe au moins une direction conique à droite en (λ, u) et au moins une à gauche. L'unicité n'est pas assurée.

Cependant si il existe une direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ, u) , notée z_+ (resp. z_-), telle que $z_+ = 0$ q.p. sur $\{u = \Psi\}$ (ce qui est le cas si $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω) alors $z_- \geq z_+$ p.p. sur Ω .

Remarque IV.2

Tout point (λ, u) solution de (1.1) vérifiant (Σ) ou (Σ') est un point régulier.

En effet, si $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$ vérifie l'inéquation :

$$(2.1) \quad a(w, h-w) - \lambda (F'(u)w, h-w) \geq 0 \quad \forall h \in Su; w \in Su.$$

on a : $a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) = 0$ avec $w \in Su$ $w \neq 0$,
ce qui contredit (Σ) ou (Σ') .

Les conditions (Σ) ou (Σ') , en un point (λ, u) , sont plus restrictives que la régularité de (λ, u) , considérer par exemple le cas des équations.

En utilisant le théorème III.1, on a cependant un résultat d'existence plus général.

Proposition IV.2

Soit (λ, u) une solution de (1.1); notons U l'opérateur non linéaire quasi-borné :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow U[w] = P_{Su} [GF'(u)w] \in H_0^1(\Omega)$$

Si $\frac{1}{\lambda}$ appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}-\Sigma(U)$

alors il existe au moins une direction conique à droite en (λ, u) et au moins une à gauche.

Démonstration de la proposition IV.2

L'opérateur non linéaire :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow P_{Su} [GF'(u)w + \frac{1}{\lambda} GF(u)] \in H_0^1(\Omega)$$

$$(\text{resp. } w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow P_{Su} [GF'(u)w - \frac{1}{\lambda} GF(u)] \in H_0^1(\Omega))$$

est quasi-borné et asymptotiquement équivalent à U donc ils ont même spectre asymptotique.

Or $\frac{1}{\lambda}$ appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}-\Sigma(U)$, en

appliquant le théorème III.1, on a :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_{Su} [\lambda GF'(u)w + GF(u)] \in H_0^1(\Omega)$$

$$(\text{resp. } w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_{Su} [\lambda GF'(u)w - GF(u)] \in H_0^1(\Omega))$$

est surjectif.

$$\Rightarrow \text{ il existe } z_+ \text{ tel que } z_+ = P_{Su} [\lambda GF'(u)z_+ + GF(u)]$$

$$(\text{resp. il existe } z \text{ tel que } z = P_{Su} [\lambda GF'(u)z - GF(u)])$$

$$\text{posons } z_- = -z \text{ on a : } z_- = P_{-Su} [\lambda GF'(u)z_- + GF(u)].$$

#

Remarque IV.3

Notons enfin que si (λ_0, u_0) est un point régulier de (1.1) avec $n \leq 5$, appartenant à une branche de solutions $(\lambda, u(\lambda))$ de (1.1) croissante en λ , continue à droite en (λ_0, u_0) (resp. à gauche) alors il existe [proposition II.3, remarque II.5] au moins une direction conique à droite en (λ_0, u_0) notée z_+ (resp. à gauche, notée z_-); on a $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω , $z_+ = 0$ q.p. sur $\{u = \Psi\}$ (resp. $z_- \geq 0$ p.p. sur Ω , on ne peut pas affirmer que $z_- = 0$ q.p. sur $\{u = \Psi\}$).

En particulier en tout point régulier de la branche maximale (resp. minimale) de solutions de (1.1) il existe au moins une direction conique à droite (resp. à gauche) [chapitre VII].

IV.2 Cas où S_u est un espace vectoriel

Si S_u est un espace vectoriel alors :

$$S_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w = 0 \text{ q.p. sur } \{u=\Psi\} \}$$

(en effet $\overline{C(K,u)} \cap -\overline{C(K,u)} = S_u \cap -S_u$ c.f. la démonstration de la proposition IV.1);

et l'opérateur $U : w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow U(w) = P_{S_u} [GF'(u)w] \in H_0^1(\Omega)$ est linéaire compact;

si (λ, u) est une solution de (1.1) avec $\lambda > 0$, on a :

(λ, u) est un point singulier $\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de U .

Les inéquations $(2.2)_+$ et $(2.2)_-$ sont alors identiques et se réduisent à l'équation suivante :

$$(4.2) \quad a(z, v) = \lambda (F'(u)z, v) + (F(u), v) \quad \forall v \in S_u; z \in S_u .$$

Soit (λ, u) une solution de (1.1) telle que S_u soit un espace vectoriel; si $E = \{u=\Psi\}$ désigne l'ensemble de coïncidence défini comme dans [M], on suppose que ∂E est régulière et l'application $w \in S_u \rightarrow w|_{\Omega-E} \in H_0^1(\Omega-E)$ étant alors bijective, on identifie S_u et $H_0^1(\Omega-E)$.

On montre que l'inéquation (2.1) et l'équation (4.2) peuvent alors s'écrire sous la forme de problèmes de Dirichlet sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence $\Omega-E$:

$$(2.1) \quad Aw = \lambda F'(u)w \quad w \in H_0^1(\Omega-E).$$

$$(2.2) \quad Az = \lambda F'(u)z + F(u) \quad z \in H_0^1(\Omega-E).$$

De plus, la condition (Σ) est équivalente à :

$$\nu(\lambda, u) = \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in S_u, |w|=1 \} > 0$$

$\nu(\lambda, u)$ est, dans ce cas, la valeur propre fondamentale du problème de Dirichlet linéarisé sur $\Omega-E$:

$$(4.3) \quad Aw - \lambda F'(u)w = \nu w \quad w \in H_0^1(\Omega-E).$$

Nous donnerons, dans le chapitre VII, plus de détails sur l'interprétation de la condition (Σ) .

Proposition IV.3

Soit (λ, u) une solution de (1.1) avec $n \leq 4$, $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, on peut définir $E = \{u = \Psi\}$ ponctuellement; on suppose que ∂E est régulière (on ne suppose pas que S_u est un espace vectoriel).
Soit z une solution de (2.2) : $Az = \lambda F'(u)z + F(u)$ dans $\Omega - E$, $z = 0$ sur $\partial(\Omega - E)$; si $z \geq 0$ p.p. sur $\Omega - E$, en prolongeant z par 0 sur E , on obtient une direction conique à droite en (λ, u) .

La démonstration est semblable à celle de la proposition VI.3.

Lorsque (λ, u) est une solution de (1.1) telle que S_u soit un espace vectoriel, on est dans le cadre d'application de la remarque III.1, d'où le corollaire de la proposition IV.1.

Corollaire IV.1

Soit (λ, u) un point régulier de (1.1) tel que S_u soit un espace vectoriel.
Il existe une unique direction conique à droite et à gauche en (λ, u) notée z , i.e. z est solution de (4.2);
on a $z = 0$ q.p. sur $\{u = \Psi\}$.

Remarque IV.4

Lorsque S_u est un espace vectoriel, pour prouver l'existence et l'unicité des directions coniques en un point (λ, u) , on n'a pas besoin que la condition (Σ) soit vérifiée, la régularité de (λ, u) suffit mais on ne peut pas garantir alors que $z \geq 0$ p.p. sur Ω .

Remarque IV.5

Le cas vectoriel n'est pas le cas général.
En effet si (λ, u) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant la condition (Σ) et tel que $\{u = \Psi\} = \{x_0\}$ avec $n = 1$, on verra au chapitre VI que $z_+(x_0) = 0$, $z_-(x_0) > 0$ donc $z_+ \neq z_-$, S_u n'est pas un espace vectoriel.

D'autre part, si (λ, u) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) tel que $\text{cap}\{u=\Psi\}=0$ (par exemple $\{u=\Psi\}=\{x_0\}$ avec $n>1$) alors :

$$S_u = \overline{C(K, u)} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p. sur } \{u=\Psi\} \} = H_0^1(\Omega)$$

S_u est un espace vectoriel.

Montrons que, dans des cas un peu moins simples mais qui réclament notamment des propriétés topologiques et différentielles de l'ensemble de coïncidence, S_u peut être un espace vectoriel.

Théorème IV.1

Soit (λ, u) une solution de (1.1).

Désignons par $E=\{u=\Psi\}$ l'ensemble de coïncidence défini comme dans [M], donc à un ensemble de capacité nulle près.

On fait les hypothèses suivantes : $E \neq \emptyset$, $\bar{E}=E$, ∂E régulière, l'obstacle $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ est tel que $A\Psi - \lambda F(\Psi)$ ne s'annule pas sur Ω ; alors :

$S_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E \}$, c'est un espace vectoriel, et $\forall w \in S_u \quad \gamma w = 0$ où γw désigne la trace de w sur ∂E .

Démonstration du théorème IV.1

1. Montrons, tout d'abord, que $S_u \subset \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ p.p. sur } E \}$

Soit $w \in S_u$, on a : $a(u, w) - \lambda (F(u), w) = 0$.

D'autre part :

$$a(u, w) - \lambda (F(u), w) = \int_{\Omega} \left(\sum a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) - \lambda F(u)(x) w(x) \right) dx$$

par hypothèse $(A\Psi) \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ donc $u \in H^{2,p}(\Omega)$.

Ω étant régulier, on peut appliquer la formule de Green:

$$\Rightarrow a(u, w) - \lambda (F(u), w) = \int_{\Omega} (Au - \lambda F(u)) w \, dx$$

Soit $I(u)$ l'ensemble de coïncidence défini comme dans [L.S] par :

$C_I(u) = \{ u < \Psi \text{ au sens de } H_0^1(\Omega) \}$; soit $E=\{u=\Psi\}$ défini comme dans [M], à un ensemble de capacité nulle près; E et $I(u)$ diffèrent d'un ensemble de mesure nulle ainsi que leurs complémentaires.

De plus $Au - \lambda F(u)$ est une mesure à support dans $I(u)$ [L.S]

$$\text{donc } a(u, w) - \lambda (F(u), w) = \int_E (Au - \lambda F(u)) w \, dx$$

Un résultat classique de Stampacchia assure de plus que $Au = A\psi$ p.p. sur E

$$\text{d'où } \int_E (A\psi - \lambda F(\psi))w \, dx = 0$$

mais $w \leq 0$ q.p. sur E donc p.p. sur E , et $A\psi - \lambda F(\psi) < 0$ sur E
 $\Rightarrow w = 0$ p.p. sur E .

2. Montrons que si $w \in H_0^1(\Omega)$, $w=0$ p.p. sur E alors $\gamma w = 0$.

Par hypothèse $\bar{E}=E$ donc $\partial\bar{E} = \partial E$ et $\partial\bar{E}$ est régulière (i.e. $\partial\bar{E}$ est de classe C^1 et \bar{E} est localement d'un seul côté de $\partial\bar{E}$).

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $w = 0$ p.p. sur E , on peut définir la trace γw de w sur $\partial\bar{E}$;

puisque $w \in H^1(\bar{E})$, on a $\gamma w \in H^{1/2}(\partial E)$

$$\text{et } \|\gamma w\|_{H^{1/2}(\partial E)} \leq C \|w\|_{H^1(\bar{E})} = C \left(\int_E w^2 dx + \int_E (\nabla w)^2 dx \right)^{1/2}$$

où C désigne une constante strictement positive indépendante de w ;
 donc $\gamma w = 0$ dans $H^{1/2}(\partial E)$.

3. Pour finir montrons que $Su \subset \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E \}$

Soit $w \in Su$, puisque $\gamma w=0$, en posant $v = \begin{cases} w & \text{sur } \Omega-E \\ 0 & \text{sur } E \end{cases}$

on définit ainsi un élément de $H_0^1(\Omega)$, on a $v-w = 0$ p.p. sur Ω (c.f 1.); Ω étant ouvert on a $v-w = 0$ q.p. sur Ω donc sur E , d'où $w = 0$ q.p. sur E .

4. Réciproque.

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $w = 0$ q.p. sur E alors $w \in \overline{C(K,u)}$.

$$\text{Or } a(u,w) - \lambda (F(u),w) = \int_E (Au - \lambda F(u))w \, dx \quad (\text{c.f 1.})$$

$w = 0$ q.p. sur E donc p.p. sur E d'où $a(u,w) - \lambda (F(u),w) = 0$
 $\Rightarrow \{ w \in H_0^1(\Omega) / w = 0 \text{ q.p. sur } E \} \subset Su$.

#

Remarque IV.6

i Il est facile de voir que le théorème IV.1 reste vrai si on a seulement $\psi \in H^{2,p}(\Omega)$ $p \geq 2$ avec $A\psi - \lambda F(\psi) < 0$ p.p. sur E .

ii On a vu que si (λ,u) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) tel que $E = \{x_0\}$ avec $n=1$ Su n'est pas un espace vectoriel, mais c'est le cas où $\bar{E} = \emptyset \neq E = \{x_0\}$.

Remarque IV.7

La régularité de ∂E est utilisée dans le théorème IV.1 pour démontrer les points 2. et 3.; c'est à dire pour montrer que :

si $w \in H_0^1(\Omega)$, $w=0$ p.p. sur \dot{E} alors $w=0$ q.p. sur E .

Lorsque $n=1$, cette propriété est vérifiée sous l'hypothèse $\bar{\dot{E}}=E$.

En effet, soit $w \in H_0^1(\Omega)$, $w=0$ p.p. sur \dot{E} , on peut choisir w continu sur Ω , alors $w=0$ sur \dot{E} , donc par continuité $w=0$ sur $\bar{\dot{E}}=E$.

Conclusion : $S_u \subset \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ sur } E \}$; pour la réciproque, on utilise le point 4. de la démonstration précédente.

✱

D'autre part, si $n>1$ et si il existe une suite de sous ensembles fermés $E_p \subset E$, $\bar{\dot{E}}_p = E_p \neq \emptyset$, ∂E_p régulière et tels que :

$\text{cap}(E - \bigcup_p E_p) = 0$ alors on a aussi :

$S_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E \}$.

En effet, si $w \in S_u$, comme au 2. et 3., on montre que $w=0$ q.p. sur $E_p \quad \forall p$, en particulier $w>0$ sur E_p au sens de $H_0^1(\Omega)$

[L.S] $\forall p$ donc [A] $w>0$ sur $\bigcup E_p$, c'est à dire $w>0$ q.p. sur $\bigcup E_p$ donc sur E ; de la même manière, on a $w<0$ q.p. sur E .

✱

Grâce à cette extension, le résultat du théorème IV.1 est valable lorsque l'ensemble de coïncidence est de frontière ∂E régulière sauf en quelques points exceptionnels mais avec $\bar{\dot{E}}=E$ à un ensemble de capacité nulle près.

IV.3 Etude locale autour d'un point régulier.

Dans tout ce paragraphe, on suppose $n \leq 4$.

Soit (λ_0, u_0) un point régulier de (1.1); on va montrer, dans certains cas où l'unicité des directions coniques à droite (resp. à gauche) est assurée, l'existence d'un développement local de solutions à droite (resp. à gauche) de (λ_0, u_0) le terme d'ordre 1 par rapport à λ étant la direction conique à droite (resp. à gauche)

Soit (λ_0, u_0) une solution de (1.1), on cherche des solutions de (1.1) sous la forme suivante :

$$\lambda = \lambda_0 + s \quad u = u_0 + sz$$

IV.3.1 Recherche d'un développement autour de (λ_0, u_0) ; formulation du problème en terme de point fixe.

On choisit $s > 0$ (un calcul analogue peut être fait pour $s < 0$).

On cherche des solutions de (1.1) sous la forme :

$$\lambda = \lambda_0 + s, \quad u = u_0 + sz.$$

En utilisant la formulation (1.2) en terme de point fixe de (1.1) le problème à résoudre revient à chercher s et z solutions de :

$$(4.4) \quad u_0 + sz = P_K[(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)].$$

Puisque $n \leq 4$, la formule de dérivation conique (2.3) établie au chapitre II permet d'écrire :

$$P_K[(\lambda_0 + s) GF(u_0 + sz)] = u_0 + s P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] + s\varepsilon(s, z)$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s, z) = 0$ uniformément par rapport à z , z restant borné dans $H_0^1(\Omega)$.

D'où la formulation équivalente à (4.4) :

$$(4.5) \quad z = P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)] + \varepsilon(s, z).$$

Supposons que (λ_0, u_0) vérifie la condition (Σ) alors d'après le lemme III.1 et la proposition IV.1, il existe une unique direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ_0, u_0) notée z_+ (resp. z_-) et l'opérateur non linéaire :

$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w + GF(u_0)] \in H_0^1(\Omega)$
est inversible d'inverse R .

Or, pour $s=0$, l'équation (4.5) se réduit à :

$$z = P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)z + GF(u_0)]$$

c'est à dire z est une direction conique à droite en (λ_0, u_0) .

On pose $z = z_+ + \theta$ $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on a ainsi une formulation équivalente à (4.4) :

$$(4.6) \quad \theta = R[\varepsilon(s, \theta)] - z_+$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0_+} \varepsilon(s, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , θ restant borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarquons que $z_+ = R[0]$.

Soit $\phi(s, \theta) = R[\varepsilon(s, \theta)] - z_+$.

(4.6) est en fait un problème de point fixe :

(4.6) $\theta = \phi(s, \theta)$.

IV.3.2 Existence d'un développement autour de (λ_0, u_0) .

Théorème IV.2

Soit (λ_0, u_0) une solution de (1.1) vérifiant la condition (Σ) ;
 z_+ (resp. z_-) désigne l'unique direction conique à droite
(resp. à gauche) en (λ_0, u_0) .

Alors il existe $\eta > 0$ et une multi-application $\theta_+ : (0, \eta) \rightarrow H_0^1(\Omega)$
(resp. $\theta_- : (-\eta, 0) \rightarrow H_0^1(\Omega)$) tels que :

$u_0 + sz_+ + s\theta_+(s)$ (resp. $u_0 + sz_- + s\theta_-(s)$) soit solution de
(1.1) pour $\lambda = \lambda_0 + s$.

De plus $\|\theta_+(s)\|$ (resp. $\|\theta_-(s)\|$) $\rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0_+$ (resp. $s \rightarrow 0_-$).

Remarque IV.8

Dans le cas vectoriel (Su_0 espace vectoriel) le théorème IV.2
reste vrai dès que (λ_0, u_0) est un point régulier de (1.1). On a
alors $z_+ = z_- = z$ et il existe une multi-application :

$s \in (-\eta, \eta) \rightarrow \theta(s) \in H_0^1(\Omega)$ telle que $(\lambda_0 + s, u_0 + sz + s\theta(s))$
soit solution de (1.1) avec $\lim_{s \rightarrow 0} \|\theta(s)\| \rightarrow 0$.

Remarque IV.9

Au voisinage de (λ_0, u_0) , on obtient grâce au théorème IV.2 des
solutions de (1.1) sous la forme $(\lambda, u(\lambda))$, $u(\lambda)$ étant une multi-
application admettant, au voisinage de λ_0 , un développement à
l'ordre 1 selon λ .

Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus pour les équations
[proposition II.1 et théorème II.2]. Mais θ_+ et θ_- donc $u(\lambda)$
sont ici des multi-applications.

Remarque IV.10

Si (λ_0, u_0) est un point régulier de la branche maximale (resp. minimale) de solutions de (1.1) tel que Su_0 soit un espace vectoriel, $u_0 = \bar{u}(\lambda_0)$ (resp. $u_0 = \underline{u}(\lambda_0)$),
 pour $\lambda = \lambda_0 + s$ $s > 0$ on a [chapitre VII] $\bar{u}(\lambda) = u_0 + sz + s\bar{\theta}(s)$
 (resp. pour $\lambda = \lambda_0 + s$ $s < 0$ on a $\underline{u}(\lambda) = u_0 + sz + s\underline{\theta}(s)$)
 $\bar{\theta}$ (resp. $\underline{\theta}$) est une application de $(0, \eta)$, $\eta > 0$, (resp. $(-\eta, 0)$)
 dans $H_0^1(\Omega)$. L'interprétation géométrique des directions coniques à droite et à gauche, z_+ et z_- [proposition II.3 et remarque II.5] implique :
 $\bar{\theta}(s)$ (resp. $\underline{\theta}(s)$) $\rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$ faible (a priori on ne sait rien pour la topologie forte).

Démonstration du théorème IV.2

On raisonne pour $s > 0$.

D'après la formulation précédente, on cherche pour tout $s > 0$, voisin de 0, un point fixe de l'application :

$$\theta \rightarrow \phi(s, \theta) = R[\varepsilon(s, \theta)] - R[0].$$

On rappelle que d'après (2.5), pour $s > 0$, on a :

$$\varepsilon(s, \theta) = \frac{1}{s} (P_K[(\lambda_0 + s)GF(u_0 + sz_+ + s\theta)] - u_0) - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \theta) + GF(u_0)]$$

1. Montrons que $\forall s > 0$ l'application $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \phi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$ est compacte.

Soit $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille appartenant à un borné de $H_0^1(\Omega)$, on peut en extraire au moins une suite $(\theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\theta_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \theta \in H_0^1(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

en particulier $u_0 + sz_+ + s\theta_p \rightarrow u_0 + sz_+ + s\theta$ dans $L^2(\Omega)$ fort lorsque $p \rightarrow +\infty$,
 et $F(u_0 + sz_+ + s\theta_p) \rightarrow F(u_0 + sz_+ + s\theta)$ dans $L^2(\Omega)$ fort car $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ étant régulière et bornée, l'opérateur de Nemytskii associé est continu de $L^2(\Omega)$ fort dans lui-même, de même, puisque $F'(u_0) \in L^\infty(\Omega)$,
 $F'(u_0)(z_+ + \theta_p) \rightarrow F'(u_0)(z_+ + \theta)$ dans $L^2(\Omega)$ fort lorsque $p \rightarrow +\infty$.

On compose avec l'opérateur de Green G qui est compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ puis avec P_K , P_{Su_0} , et R qui sont continus de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même ainsi $\phi(s, \theta_p) \rightarrow \phi(s, \theta)$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

On montre de même la continuité de $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \phi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$ en partant directement d'une suite $\theta_p \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\theta_p \rightarrow \theta$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ dans $H_0^1(\Omega)$ donc dans $L^2(\Omega)$.

2. Existence d'une multi-application $s \rightarrow \theta_+(s)$.

On a vu que $\forall s > 0 \quad \theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \phi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$ est compacte; R étant lipschitzienne de rapport L et $\varepsilon(s, \theta)$ tendant vers 0 lorsque $s \rightarrow 0_+$, uniformément par rapport à θ tel que $\|\theta\| \leq 1$, il existe $\eta > 0$

tel que : $\forall s \in (0, \eta)$ on ait $\|\varepsilon(s, \theta)\| < \frac{1}{L} \quad \forall \theta \in H_0^1(\Omega), \|\theta\| \leq 1$

d'où $\|R[\varepsilon(s, \theta)] - R[0]\| < 1$.

Ainsi $\forall s \in (0, \eta)$ l'application $\theta \rightarrow \phi(s, \theta)$ envoie la boule unité fermée de $H_0^1(\Omega)$ dans elle-même. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Schauder, et définir pour $0 < s < \eta$ une multi-application $s \rightarrow \theta_+(s) \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\|\theta_+(s)\| < 1$ et $\theta_+(s) = \phi(s, \theta_+(s))$, d'après IV.3.1, cela veut dire que: $(\lambda_0 + s, u_0 + s z_+ + s \theta_+(s))$ est solution de (1.1).

3. Propriété de $s \rightarrow \theta_+(s)$;

On a $\theta_+(s) = \phi(s, \theta_+(s)) = R[\varepsilon(s, \theta_+(s))] - R[0]$

d'où $\|\theta_+(s)\| \leq L \|\varepsilon(s, \theta_+(s))\|$ qui tend vers 0 lorsque $s \rightarrow 0_+$ uniformément pour $\|\theta_+(s)\| \leq 1$.

#

IV.3.3 Existence de composantes connexes de solutions.

Une autre approche du problème a été faite [Co,Co.I.B.N]; sous les mêmes hypothèses que celles du paragraphe IV.3.2, à l'aide du degré topologique, on prouve l'existence de composantes connexes de solutions de (1.1), en les précisant un peu.

Théorème IV.3 [Co,Co.I.B.N]

Soit (λ_0, u_0) une solution de (1.1) vérifiant la condition (Σ) ; il existe une composante connexe C^+ (resp. C^-) de solutions (λ, u) de (1.1) avec $\lambda > \lambda_0$ (resp. $\lambda < \lambda_0$); C^+ (resp. C^-) contient (λ_0, u_0) , est non bornée dans $R \times H_0^1(\Omega)$ et vérifie la propriété suivante :

si $(\lambda_i, u_i)_{i \in I} \in C^+$ (resp. C^-) avec $\lambda_i \uparrow \lambda_0$ (resp. $\lambda_i \downarrow \lambda_0$) alors :

$$\frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0} \rightarrow z_+ \text{ (resp. } z_-) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort, où } z_+ \text{ (resp. } z_-)$$

est l'unique direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ_0, u_0) .

Remarque IV.11

i Dans le cas linéaire (Su_0 espace vectoriel) le théorème IV.3 reste vrai dès que (λ_0, u_0) est régulier et on a $z_+ = z_-$.

ii Notons que z_+ (resp. z_-) sont obtenus comme limite forte de

$$\frac{u_i - u_0}{\lambda_i - \lambda_0} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ et non pas seulement comme limite faible}$$

dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui était le cas dans l'interprétation géométrique [proposition II.3] et dans la remarque IV.10.

Schéma de démonstration du théorème IV.3

On raisonne pour $s > 0$; on pose $\lambda = \lambda_0 + s$ $u = u_0 + sz_+ + s\theta, \theta \in H_0^1(\Omega)$
On montre alors que (λ, u) est solution de (1.1) si et seulement si

$$\theta = R \left[\frac{P_K[(\lambda_0 + s)GF(u_0 + sz_+ + s\theta)] - u_0}{s} - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \theta) + GF(u_0)] \right] - R[0]$$

On a ainsi une formulation point fixe du problème : $\theta = \Phi(s, \theta)$ qui est semblable à la formulation utilisée dans la démonstration du théorème IV.2 sauf que l'on a remplacé $\varepsilon(s, \theta)$ par son expression exacte.

On pose $\Phi(0, \theta) = 0$ par continuité.

On utilise alors le degré topologique pour prouver l'existence de C^+ et de C^- .

On a ainsi précisé, par rapport au théorème IV.2, la structure topologique de l'ensemble des solutions de (1.1) au voisinage de (λ_0, u_0) . Cette amélioration peut s'expliquer par le fait que :
pour démontrer le théorème IV.3, on utilise la compacité de l'application: $(s, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \Phi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$
tandis que pour le théorème IV.2, on utilise seulement la compacité de $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \Phi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega) \quad \forall s > 0$ voisin de 0.

CHAPITRE V Etude locale autour d'un point singulier.

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'étude locale de solutions de (1.1) autour d'un point singulier (λ_0, u_0) , tel que Su_0 soit un espace vectoriel, et qui vérifie quelques propriétés supplémentaires. Ces propriétés sont à rapprocher de celles, énoncées au théorème II.1, et qui assurent, pour les équations, l'existence d'un arc régulier de solutions autour de (λ_0, u_0) . Nous voulons généraliser ce résultat aux inéquations de type (1.1).

V.1 Préliminaires.

Dans tout ce chapitre, on suppose $n \leq 4$.

Soit (λ_0, u_0) une solution de (1.1) telle que Su_0 soit un espace vectoriel. On suppose que (λ_0, u_0) est un point singulier et plus précisément que le noyau \mathcal{N} de l'opérateur H :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)w] \in H_0^1(\Omega)$$

est de dimension 1. Soit z_N un générateur de ce noyau. On se place, dans tout le chapitre, sous ces hypothèses et on montre l'existence d'un développement autour de (λ_0, u_0) .

Lemme V.1

Soit \mathcal{R} l'image de l'opérateur H :

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow w - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)w] \in H_0^1(\Omega)$$

\mathcal{R} est un sous espace vectoriel fermé de $H_0^1(\Omega)$ de codimension 1 et en fait $\mathcal{R} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / (F'(u_0)z_N, w) = 0 \}$.

Démonstration du lemme V.1

On a, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, $H(w) = w - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)w]$; H est une perturbation linéaire compacte de l'identité. On peut appliquer les résultats de l'alternative de Fredholm [S] :

$\mathcal{R} = \text{Im}(H)$ est donc un sous espace vectoriel fermé de $H_0^1(\Omega)$ et $\text{codim } \mathcal{R} = \dim \mathcal{N} = 1$.

Pour montrer que $\mathcal{R} = \{GF'(u_0)z_N\}^\perp = \{F'(u_0)z_N\}^{\perp 2}$, puisque $\{F'(u_0)z_N\}^{\perp 2}$ est de codimension 1, il suffit de montrer que :
 $\mathcal{R} \subset \{F'(u_0)z_N\}^{\perp 2}$.

Soit $w \in \mathcal{R}$ } $y \in H_0^1(\Omega)$ tel que $w = y - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)y]$; en appliquant la définition de l'opérateur P_{Su_0} , on a :

$$a(\lambda_0 GF'(u_0)y - y + w, h) = 0 \quad \forall h \in Su_0;$$

en particulier, si $h = z_N$, on obtient :

$$(5.1) \quad a(y-w, z_N) = \lambda_0 (F'(u_0)y, z_N)$$

$$\text{or } z_N = P_{Su_0}[GF'(u_0)z_N]$$

$$\text{donc } \forall h \in Su_0 \quad a(\lambda_0 GF'(u_0)z_N, h) = a(z_N, h)$$

on choisit $h = y-w$ d'où

$$(5.2) \quad a(y-w, z_N) = \lambda_0 (F'(u_0)y, z_N) - \lambda_0 (F'(u_0)z_N, w).$$

On soustrait l'équation (5.2) de l'équation (5.1)

$$\Rightarrow (F'(u_0)z_N, w) = 0.$$

#

En appliquant l'alternative de Fredholm [S] à l'opérateur H, on obtient :

Lemme V.2

Si \mathcal{W} est un supplémentaire de \mathcal{N} , par exemple $\mathcal{W} = \mathcal{N}^\perp$, alors H admet un pseudo-inverse [S] Q de $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{W}$ défini ainsi :
 si $w \in \mathcal{R}$ } $y \in \mathcal{W}$ tel que $H(y) = w$, on pose $y = Q(w)$, Q est linéaire continu pour la topologie de $H_0^1(\Omega)$.

Nous allons montrer que, sous ces hypothèses, il existe un développement local des solutions de (1.1) autour de (λ_0, u_0) ; par analogie avec les résultats obtenus pour les équations, nous cherchons des solutions de (1.1) sous la forme :

$$\lambda = \lambda_0 + s\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}, \quad u = u_0 + s(z_N + w), \quad w \in \mathcal{W}.$$

V.2 Recherche d'un développement; formulation du problème en terme de point fixe.

On choisit $s > 0$ (un calcul analogue peut être fait pour $s < 0$).

En utilisant la formulation (1.2) en terme de point fixe de (1.1), le problème à résoudre revient à chercher s , δ et w solutions de :

$$(5.3) \quad u_0 + s(z_N + w) = PK[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + s(z_N + w))].$$

On va, pour transformer cette équation, utiliser à nouveau la dérivation conique des projecteurs.

Ecrivons un développement de Taylor de F , autour de u_0 , à l'ordre 2.

$$F(u_0 + s(z_N + w)) = F(u_0) + s F'(u_0)(z_N + w) + \frac{s^2}{2} F''(\xi)(z_N + w)^2$$

$$\xi(x) \in [u_0(x) + s(z_N(x) + w(x)), u_0(x)] \text{ ou } [u_0(x), u_0(x) + s(z_N(x) + w(x))]$$

si $u_0(x) + s(z_N(x) + w(x)) \leq u_0(x)$ ou si $u_0(x) \leq u_0(x) + s(z_N(x) + w(x))$

$$\Rightarrow (\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + s(z_N + w)) = \lambda_0 GF(u_0) + s(\delta GF(u_0) + \lambda_0 GF'(u_0)(z_N + w)) + s^2 k(s, \delta, w).$$

$$\text{et } k(s, \delta, w) = \delta GF'(u_0)(z_N + w) + \frac{\lambda_0}{2} GF''(\xi)(z_N + w)^2 + \frac{s}{2} \delta GF''(\xi)(z_N + w)^2$$

$k(s, \delta, w)$ reste dans un compact de $H_0^1(\Omega)$ lorsque (s, δ, w) est borné dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$.

donc $sk(s, \delta, w) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$ uniformément par rapport à (δ, w) ,
 (δ, w) étant borné dans $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$.

La dérivation conique des projecteurs implique :

$$P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + s z_N + s w)] = u_0 + s P_{S_{u_0}}[\delta GF(u_0) + \lambda_0 GF'(u_0)(z_N + w) + sk(s, \delta, w)] + s \varepsilon_1(s, \delta, w)$$

$P_{S_{u_0}}$ étant lipschitzien, on a :

$$(5.4) P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + s z_N + s w)] = u_0 + s P_{S_{u_0}}[\delta GF(u_0) + \lambda_0 GF'(u_0)(z_N + w)] + s \varepsilon(s, \delta, w)$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s, \delta, w) = 0$ uniformément par rapport à (δ, w) ,

(δ, w) borné dans $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$.

or $P_{S_{u_0}}$ est, ici, un opérateur linéaire,

$$P_{S_{u_0}}[\delta GF(u_0) + \lambda_0 GF'(u_0)(z_N + w)] = z_N + P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w + \delta GF(u_0)]$$

on obtient ainsi la formulation suivante équivalente à (5.3) :

$$(5.5) w = P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w + \delta GF(u_0)] + \varepsilon(s, \delta, w).$$

Lemme V.3

Soit (λ_0, u_0) un point singulier vérifiant les hypothèses énoncées au début du paragraphe V.1 et tel que $(F(u_0), z_N) \neq 0$,

alors l'opérateur linéaire :

$$(\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow w - P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w] - \delta P_{S_{u_0}}[GF(u_0)] \in H_0^1(\Omega)$$

est bijectif d'inverse \tilde{Q} linéaire continu.

Remarque V.1

Puisque $P_{S_{u_0}}$ est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire associé à la forme a :

$$\begin{aligned} a(P_{S_{u_0}}[GF(u_0)], GF'(u_0)z_N) &= a(P_{S_{u_0}}[GF'(u_0)z_N], GF(u_0)) = \\ &= a\left(\frac{z_N}{\lambda_0}, GF(u_0)\right) = \frac{1}{\lambda_0} (z_N, F(u_0)). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme V.1, on a :

$(F(u_0), z_N) \neq 0 \Leftrightarrow P_{S_{u_0}}[GF(u_0)] \notin \mathcal{R}$, qui est une extension naturelle de la condition de transversalité introduite pour les équations (Théorème II.1).

Démonstration du lemme V.3

Soit $g \in H_0^1(\Omega)$, montrons que l'équation :

$$(5.6) \quad w - P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w] - \delta P_{S_{u_0}}[GF(u_0)] = g, \quad (\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W}$$

admet une unique solution (δ, w) notée $\tilde{Q}(g)$.

Compte tenu des résultats du lemme V.2, l'équation (5.6) admet une solution w si et seulement si : $g + \delta P_{S_{u_0}}[GF(u_0)] \in \mathcal{R}$

$$\Leftrightarrow (F'(u_0)z_N, g) + \delta (F'(u_0)z_N, P_{S_{u_0}}[GF(u_0)]) = 0 \quad (\text{lemme V.I})$$

$$\Leftrightarrow (F'(u_0)z_N, g) + \frac{\delta}{\lambda_0} (z_N, F(u_0)) = 0, \quad \text{grâce à la remarque V.1.}$$

$$\Leftrightarrow \delta = -\lambda_0 \frac{(F'(u_0)z_N, g)}{(F(u_0), z_N)} \quad \text{noté } Q_1(g);$$

et $g \in H_0^1(\Omega) \rightarrow Q_1(g) \in \mathbb{R}$ est linéaire continu.

Ce calcul est en fait la projection de l'équation (5.6)

sur $\mathcal{R}^\perp = (F'(u_0)z_N)$.

Projetons maintenant l'équation (5.6) sur \mathcal{R} .

L'opérateur $w \in \mathcal{W} \rightarrow w - P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)w] \in H_0^1(\Omega)$ admettant un pseudo-inverse Q , si w vérifie (5.6), on a :

$$w = Q(g + \delta P_{S_{u_0}}[GF(u_0)])$$

$$w = Q\left(g - \lambda_0 \frac{(F'(u_0)z_N, g)}{(F(u_0), z_N)} P_{S_{u_0}}[GF(u_0)]\right) \quad \text{noté } Q_2(g).$$

$g \in H_0^1(\Omega) \rightarrow Q_2(g) \in \mathcal{W} \subset H_0^1(\Omega)$ est linéaire continu.

$g \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \tilde{Q}(g) = (Q_1(g), Q_2(g)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W}$ est linéaire continu et répond à la question.

#

On munit $R \times H_0^1(\Omega)$ de la norme suivante :

$\|(\delta, w)\| = \max \{|\delta|, \|w\|\}$ et on note $\|\tilde{Q}\|$ la norme de \tilde{Q} , opérateur linéaire continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $R \times H_0^1(\Omega)$.

Application:

Notons $\Phi(s, \delta, w) = \tilde{Q}(\varepsilon(s, \delta, w))$.

On obtient la formulation en terme de point fixe, équivalente à (5.3)

$$(5.7) \quad (\delta, w) = \Phi(s, \delta, w) \quad (\delta, w) \in R \times \mathscr{W}.$$

V.3 Existence d'un développement autour de (λ_0, u_0) .

Théorème V.1

Soit (λ_0, u_0) un point singulier de (1.1) tel que Su_0 soit un espace vectoriel et $w \rightarrow H(w) = w - P_{Su_0}[\lambda_0 G F'(u_0)w]$ ait un noyau \mathscr{N} de dimension 1, de générateur z_N , avec $(F(u_0), z_N) \neq 0$;
alors il existe $\eta > 0$ et une multi-application :
 $s \in (-\eta, \eta) \rightarrow (\delta(s), w(s)) \in R \times H_0^1(\Omega)$, $w(s) \in \mathscr{W}$, un supplémentaire donné de \mathscr{N} , telle que $(\lambda_0 + s\delta(s), u_0 + sz_N + sw(s))$ soit solution de (1.1); de plus $\delta(s) \rightarrow 0$ et $\|w(s)\| \rightarrow 0$.
 $s \rightarrow 0^\pm$ $s \rightarrow 0^\pm$

Remarque V.2

Ainsi, sous des hypothèses à rapprocher de celles énoncées dans le théorème II.1, on obtient, au voisinage de (λ_0, u_0) , un développement local des solutions, semblable à celui obtenu pour les équations [théorème II.1 et proposition II.2].

Notons cependant que l'on a ainsi de nombreuses solutions voisines de (λ_0, u_0) car on montre l'existence de multi-applications. De plus, on ne sait pas si pour s voisin de 0, $s > 0$ ou $s < 0$, $\lambda(s) = \lambda_0 + s\delta(s)$ est toujours plus petit que λ_0 , donc on ne sait pas si on a vraiment un point de retournement.

Remarque V.3

On montre qu'il existe, en général, sur la branche maximale, un point singulier (λ_*, u_*) , appelé premier point de changement de stabilité, qui vérifie les hypothèses du théorème V.1 [chapitre VII].

Démonstration du théorème V.1

On raisonne, pour $s > 0$, en utilisant la formulation en terme de point fixe (5.7) établie au paragraphe V.2; il est donc nécessaire d'étudier l'application : $(\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow \Phi(s, \delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W}$.

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \varepsilon(s, \delta, w) &= \\ &= \frac{P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + sZ_N + sw)] - P_K[\lambda_0 GF(u_0)]}{s} - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)(Z_N + w) + \delta GF(u_0)] \end{aligned}$$

1. Montrons que $\forall s > 0$ l'application $(\delta, w) \rightarrow \Phi(s, \delta, w)$ est compacte pour la topologie de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$

Soit $(\delta_i, w_i)_{i \in I}$ une famille appartenant à un borné de $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ avec $w_i \in \mathcal{W}$ pour tout $i \in I$; on peut en extraire au moins une sous suite $(\delta_p, w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\delta_p \rightarrow \delta$, $w_p \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$ faible lorsque $p \rightarrow +\infty$; d'où $w \in \mathcal{W}$ car \mathcal{W} est un sous espace vectoriel fermé dans $H_0^1(\Omega)$;

en particulier $u_0 + sZ_N + sw_p \rightarrow u_0 + sZ_N + sw$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ et comme dans la démonstration du théorème IV.2, on a :

$$F(u_0 + sZ_N + sw_p) \rightarrow F(u_0 + sZ_N + sw) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$F'(u_0)(Z_N + w_p) \rightarrow F'(u_0)(Z_N + w) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On compose avec l'opérateur de Green G qui est compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ puis par P_K , P_{Su_0} qui sont continus de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même; ainsi $(\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow \varepsilon(s, \delta, w) \in H_0^1(\Omega)$ est compacte

$\Rightarrow (\delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow \tilde{Q}(\varepsilon(s, \delta, w)) = \Phi(s, \delta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ est compacte.

On montre de même la continuité en partant directement d'une suite $(\delta_p, w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ donc dans $\mathbb{R} \times L^2(\Omega)$.

2. Existence d'une multi-application $s \rightarrow (\delta(s), w(s))$.

On a vu que $\forall s > 0$, l'application $(\delta, w) \in R \times \mathscr{W} \rightarrow \Phi(s, \delta, w) \in R \times \mathscr{W}$ est compacte.

D'autre part, \tilde{Q} est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $R \times \mathscr{W}$ et $\varepsilon(s, \delta, w) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0_+$, uniformément par rapport à $(\delta, w) \in R \times \mathscr{W}$ lorsque $\|(\delta, w)\| \leq 1$.

Donc il existe $\eta > 0$ tel que, pour $0 < s < \eta$, on ait :

$$\|\varepsilon(s, \delta, w)\| \leq \frac{1}{\|\tilde{Q}\|} \quad \forall (\delta, w) \in R \times \mathscr{W} \quad \|(\delta, w)\| \leq 1 \Rightarrow \|\Phi(s, \delta, w)\| \leq 1$$

Ainsi $\forall s \in (0, \eta)$ l'application $(\delta, w) \rightarrow \Phi(s, \delta, w)$ envoie la boule unité de $R \times H_0^1(\Omega)$ dans elle-même.

On peut appliquer le théorème du point fixe de Schauder; on définit ainsi pour $0 < s < \eta$ une multi-application :

$s \in (0, \eta) \rightarrow (\delta(s), w(s)) \in R \times \mathscr{W}$ telle que $\|(\delta(s), w(s))\| \leq 1$ et $(\delta(s), w(s)) = \Phi(s, \delta(s), w(s))$

c'est à dire, d'après le paragraphe V.2 ,

$(\lambda_0 + s\delta(s), u_0 + sz_N + sw(s))$ est solution de (1.1).

3. Propriété de $s \rightarrow (\delta(s), w(s))$.

On a $(\delta(s), w(s)) = \tilde{Q}(\varepsilon(s, \delta(s), w(s)))$,

d'où $\|(\delta(s), w(s))\| \leq \|\tilde{Q}\| \|\varepsilon(s, \delta(s), w(s))\|$ qui tend vers 0 lorsque $s \rightarrow 0_+$ car $\|(\delta(s), w(s))\| \leq 1$.

On raisonne de même pour $s < 0$.

#

V.4 Existence de composantes connexes de solutions.

Une autre approche du problème a été faite [Co, Co.I.B.N]; sous les mêmes hypothèses que pour le théorème V.1, à l'aide du degré topologique, on prouve l'existence de composantes connexes de solutions de (1.1) en les précisant un peu :

Théorème V.2

Soit (λ_0, u_0) un point singulier de (1.1) tel que Su_0 soit un espace vectoriel et l'opérateur $w \rightarrow H(w) = w - P_{Su_0}[\lambda_0 GF'(u_0)w]$ ait un noyau \mathcal{N} de dimension 1 de générateur z_N avec $(F(u_0), z_N) \neq 0$.

Alors il existe deux composantes connexes de solutions : C^+ et C^- , non bornées dans $R \times H_0^1(\Omega)$ telles que $C^+ \cap C^- = (\lambda_0, u_0)$ et qui sont en fait de la forme suivante :

$\lambda = \lambda_0 + s\delta$, $u = u_0 + sz_N + sw$, $s \geq 0$ sur C^+ , $s \leq 0$ sur C^- , $a(w, z_N) = 0$ et $(\delta(s_i), w(s_i)) \rightarrow 0$ lorsque $s_i \rightarrow 0^\pm$.

Schéma de démonstration du théorème V.2.

On raisonne pour $s > 0$, on pose $\lambda = \lambda_0 + s\delta$, $u = u_0 + sz_N + sw$ $w \in \mathcal{W}$, on choisit $\mathcal{W} = \{z_N\}^\perp$, n'importe quel supplémentaire de \mathcal{N} convient. On montre alors que (λ, u) est solution de (1.1) si et seulement si $(\delta, w) =$

$$\frac{1}{s} (P_K[(\lambda_0 + s\delta)GF(u_0 + sz_N + sw)] - P_K[\lambda_0 GF(u_0)]) - P_{Su_0}[\delta GF(u_0) + \lambda_0 GF'(u_0)(z_N + w)]$$

On a ainsi une formulation en terme de point fixe du problème : $(\delta, w) = \Phi(s, \delta, w)$; elle est semblable à la formulation utilisée dans la démonstration du théorème V.1 (5.7) sauf que l'on a remplacé $\varepsilon(s, \delta, w)$ par son expression exacte.

On pose $\Phi(0, \delta, w) = 0$ par continuité .

On utilise alors le degré topologique pour prouver l'existence de C^+ et C^- .

#

On a ainsi précisé, par rapport au théorème V.1, la structure topologique de l'ensemble des solutions de (1.1) au voisinage de (λ_0, u_0) . Cette amélioration peut s'expliquer par le fait suivant :

on utilise, pour démontrer le théorème V.2, la compacité de l'application : $(s, \delta, w) \in R^+ \times R \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \Phi(s, \delta, w) \in R \times \mathcal{W} \subset R \times H_0^1(\Omega)$

tandis que pour le Théorème V.1, on utilise la compacité de:

$(\delta, w) \in R \times \mathcal{W} \rightarrow \Phi(s, \delta, w) \in R \times \mathcal{W} \quad \forall s > 0$, ce qui est moins fort.

CHAPITRE VI Etude locale en un point de transition

Nous avons vu que l'inéquation (1.1) admet, en général une branche de solutions équations et une branche de solutions inéquations [chapitre I et II]; ces deux branches sont reliées par un point que nous appelons point de transition équation-inéquation. Dans ce chapitre, nous donnons, tout d'abord, une définition plus précise du point de transition puis nous nous intéressons à l'étude locale des solutions au voisinage de ce point. En appliquant les résultats du chapitre IV, nous obtenons quelques informations supplémentaires sur les directions coniques. Puis nous faisons une étude plus fine en ce point : sous une nouvelle condition $(\Sigma'')_t$, plus faible que (Σ) et n'impliquant pas la régularité du point de transition (λ_t, u_t) , nous montrons l'existence d'un développement de solutions selon λ , pour $\lambda > \lambda_t$.

VI.1 Introduction

VI.1.1 Définition du point de transition équation-inéquation; exemples

Définition

On dit qu'une solution (λ_t, u_t) de (1.1) est un point de transition équation-inéquation si quelque soit le voisinage V de (λ_t, u_t) dans $R^+ \times H_0^1(\Omega)$, il existe $(\lambda_1, u_1) \in V$ solution équation (c'est à dire solution de (1.3) et de (1.1)) et il existe $(\lambda_2, u_2) \in V$ solution inéquation pure (c'est à dire solution de (1.1) et pas de (1.3)).

Remarque VI.1

i. si $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ et (λ_2, u_2) est solution de (1.1) et pas de (1.3) alors $\text{cap}\{u_2 = \Psi\} > 0$.

En effet, puisque $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, on a $u_2 \in H^{2,p}(\Omega) \forall p \geq 2$ donc $u_2 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$.

La mesure $Au_2 - \lambda_2 F(u_2)$ est à support dans $I(u_2) = \{u_2 = \Psi\}$ [L.S] et s'annule sur les ensembles de capacité nulle.

Si $\text{cap}\{u_2 = \Psi\} = 0$ alors $Au_2 - \lambda_2 F(u_2) = 0$ sur Ω , ce qui contredit le fait que (λ_2, u_2) n'est pas solution de (1.3)

ii. La définition précédente implique que si (λ, u) est un point de transition équation-inéquation de (1.1), (λ, u) est solution de (1.1) et de (1.3) c'est à dire (λ, u) est une solution équation de (1.1).

Dans certains cas, toutes les solutions inéquations pures $(\lambda, u(\lambda))$ de (1.1), voisines d'un point de transition (λ_t, u_t) sont telles que $\text{cap}\{u(\lambda)=\Psi\} > 0$ et $\text{mesure}\{u(\lambda)=\Psi\} = 0$. Ceci est illustré par l'exemple suivant :

Exemple VI.1

$$A = -\Delta, \Omega =]-1, 1[, n=1, \Psi(x) = 1+|x|, f(x, t) = 1.$$

La solution explicite de (1.1) est donnée par :

$$\lambda < 2 \quad u(x) = \frac{\lambda}{2}(1-x^2) \quad \text{solution équation, elle ne touche pas l'obstacle}$$

$$\lambda = 2 \quad u(x) = (1-x^2) \quad \text{solution équation, } \{u=\Psi\} = \{0\}$$

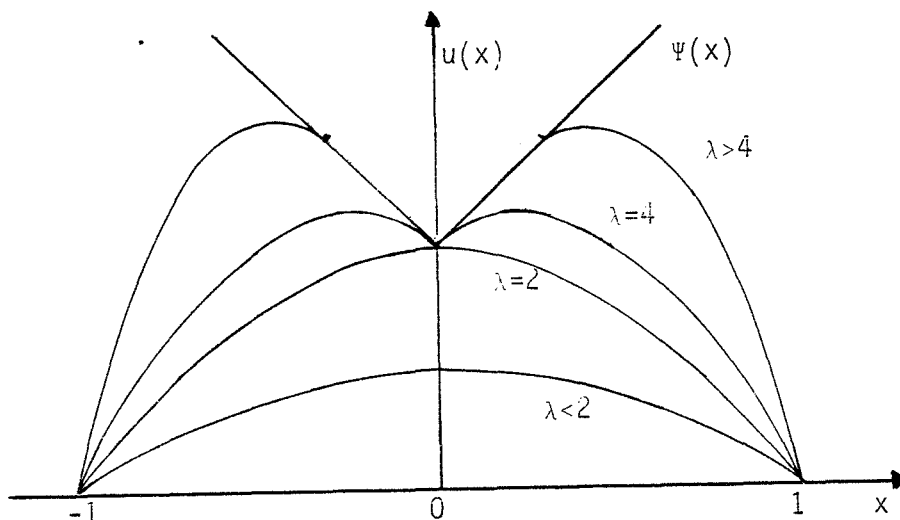
$$2 < \lambda < 4 \quad u(x) = -\frac{\lambda}{2}x^2 + \left(\frac{\lambda}{2}-1\right)|x| \quad \text{solution inéquation, } \{u=\Psi\} = \{0\}$$

$$\lambda > 4 \quad u(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } |x| \leq \rho \\ -\frac{\lambda}{2}x^2 + (1+\lambda-2\sqrt{\lambda})|x| - 1 - \frac{\lambda}{2} + 2\sqrt{\lambda} & \text{si } \rho \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

avec $\rho = 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$

c'est une solution inéquation et $\{u=\Psi\} = (-\rho, \rho)$

Le schéma suivant donne le profil des solutions :



$(\lambda=2, u(x)=1-x^2)$ est le point de transition équation-inéquation, $\text{cap}\{u(\lambda)=\Psi\}$ devient strictement positive dès que $\lambda \geq 2$ tandis que la mesure de $\{u(\lambda)=\Psi\}$ devient strictement positive seulement si $\lambda > 4$. Cet exemple nous a été proposé par M. Pierre.

VI.1.2 Etude de la condition (Σ) en un point de transition

Notons quelques particularités des points de transition équation-inéquation :

Soit (λ_t, u_t) un point de transition de (1.1) alors :

$$Su_t = \overline{C(K, u_t)} \text{ et } Su_t - Su_t = H_0^1(\Omega)$$

en effet (λ_t, u_t) est une solution équation [Remarque VI.1 ii] donc $\{u_t - \lambda_t GF(u_t)\}^\perp = H_0^1(\Omega)$ et $Su_t = \overline{C(K, u_t)}$

D'autre part soit $w \in H_0^1(\Omega)$, $w = w^+ - w^-$, $w^+ \geq 0$ p.p. sur Ω donc q.p. sur Ω ; si $E_t = \{u_t = \Psi\}$ est défini comme dans [M], on a en particulier $w^+ \geq 0$ q.p. sur E_t donc $w^+ \in -Su_t = -\overline{C(K, u_t)}$, de même $-w^- \in Su_t$ ainsi $Su_t - Su_t = H_0^1(\Omega)$.

#

La condition (Σ) s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$(\Sigma)_t : \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in H_0^1(\Omega), \|w\|=1 \} > 0$$

On avait aussi introduit la condition (Σ') , qui en ce point devient :

$$(\Sigma')_t : \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in \overline{C(K, u_t)}, \|w\|=1 \} > 0$$

Proposition VI.1

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1); alors les conditions $(\Sigma)_t$ et $(\Sigma')_t$ sont équivalentes. De plus si $F'(u_t) > 0$, ces conditions s'énoncent sous la forme suivante :

la valeur propre fondamentale μ_t du problème de Dirichlet linéarisé associé à (1.3) :

$$Aw - \lambda_t F'(u_t)w = \mu w \text{ dans } \Omega, w=0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

est strictement positive .

Démonstration de la proposition VI.1

$$\text{Soient } v_t = \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in H_0^1(\Omega), \|w\|=1 \}$$

$$v_t' = \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in \overline{C(K, u_t)}, \|w\|=1 \}$$

1. Montrons que $v_t = v_{t'}$

En effet puisque $\overline{C(K, u_t)} \subset H_0^1(\Omega)$ on a $v_t \leq v_{t'}$.

D'autre part, posons $b(v, w) = a(v, w) - \lambda_t(F'(u_t)v, w)$.

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\|w\|=1$

$$b(w, w) = b(w^+, w^+) + b(w^-, w^-),$$

or $w^+ \geq 0$ p.p. sur Ω donc $w^+ \in -\overline{C(K, u_t)}$, de même $w^- \in -\overline{C(K, u_t)}$

$$\Rightarrow b(w, w) \geq v_{t'}(\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2) = v_{t'}$$

d'où $v_t \geq v_{t'} \Rightarrow v_t = v_{t'}$, $(\Sigma)_t$ et $(\Sigma')_t$ sont équivalentes.

2. $F'(u_t)$ étant strictement positif, on peut appliquer le lemme III.2 :

$$\begin{aligned} (\Sigma)_t &\Leftrightarrow \inf \{ a(w, w) - \lambda_t(F'(u_t)w, w) / w \in H_0^1(\Omega), |w|=1 \} > 0 \\ &\Leftrightarrow \mu_t > 0 \end{aligned}$$

#

Notons que Su_t peut être un espace vectoriel ou pas ; en effet si $n=1$ et $\{u_t=\Psi\}=\{x_0\}$ alors $Su_t = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w(x_0) \leq 0 \}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$.

Mais si $n>1$ et $\{u_t=\Psi\}=\{x_0\}$ alors $Su_t=H_0^1(\Omega)$ car $\text{cap}\{u_t=\Psi\}=0$.

D'autre part (λ_t, u_t) peut être un point régulier ou singulier de (1.1).

Regardons tout d'abord comment, dans certains cas, on peut exprimer qu'un point de transition est un point singulier de (1.1).

Soit $z \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'inéquation conifiée homogène (2.1) :

$$(2.1) \begin{cases} a(z, w-z) \geq \lambda_t(F'(u_t)z, w-z) \\ \forall w \in \overline{C(K, u_t)}; z \in \overline{C(K, u_t)}. \end{cases}$$

Soit $E_t=\{u_t=\Psi\}$ défini comme dans [M] à un ensemble de capacité nulle près; $z \leq 0$ q.p. sur E_t donc au sens de $H_0^1(\Omega)$. On définit $I(z)$ comme dans [L.S] par $\Omega - I(z) = \{ x \in \Omega \text{ tels que } z(x) < 0 \text{ au sens de } H_0^1(\Omega) \text{ sur } E_t \}$, $I(z) \subset E_t$ et $Az - \lambda_t F'(u_t)z$ est une mesure négative à support dans $I(z)$ [L.S].

Supposons que $E_t = \{x_0\}$ (c'est le cas standard, l'ensemble de coïncidence peut toute fois être plus complexe).

Deux cas se présentent :

-si $n > 1$ alors $\text{cap} E_t = 0$; z est donc solution de : $Az = \lambda_t F'(u_t)z$ sur Ω , $z = 0$ sur $\partial\Omega$.

-si $n=1$:

soit $z(x_0) < 0$ alors $I(z) = \emptyset$ et on a $Az = \lambda_t F'(u_t)z$ sur Ω , $z = 0$ sur $\partial\Omega$.

soit $z(x_0) = 0$ alors $I(z) = \{x_0\}$ et on a $Az = \lambda_t F'(u_t)z$ sur $\Omega - \{x_0\}$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$, $z(x_0) = 0$.

Conclusion

Si (λ_t, u_t) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) tel que $E_t = \{x_0\}$:

si $n > 1$ (λ_t, u_t) est un point régulier de (1.1)

$\Leftrightarrow (\lambda_t, u_t)$ est un point régulier de l'équation (1.3)

si $n=1$ (λ_t, u_t) est un point régulier de (1.1)

$\Leftrightarrow (\lambda_t, u_t)$ est un point régulier de l'équation (1.3) sur Ω et sur $\Omega - \{x_0\}$.

Exemple VI.2

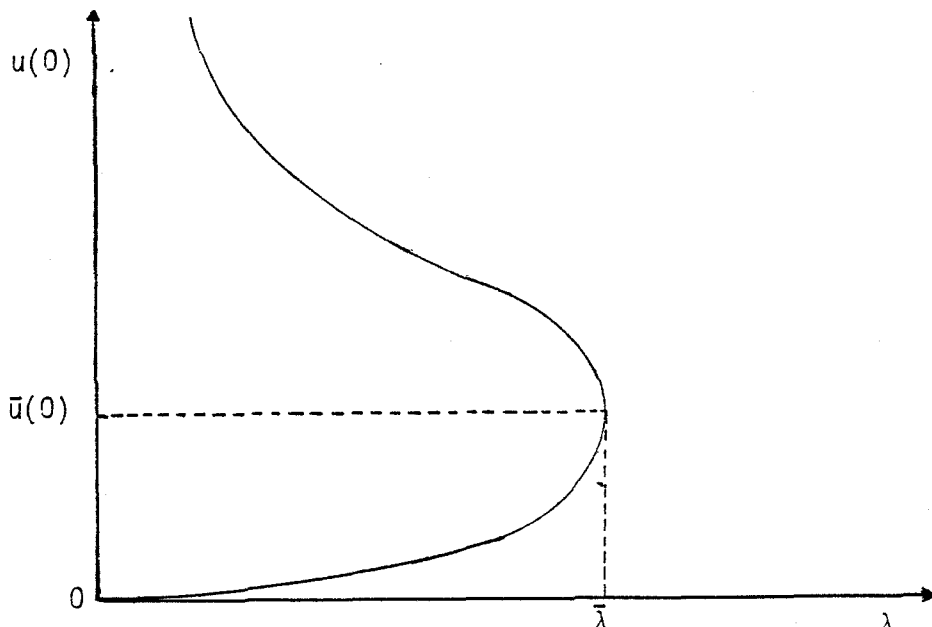
$n=1$, $\Omega =]-1, 1[$, $A = -\Delta$, $F(u) = e^u$, $\Psi(x) = a > 0$.

L'équation (1.3) est alors le problème de Guelfand [G], bien connu :

$$(1.3) \begin{cases} u'' + \lambda e^u = 0 & \text{dans }]-1, 1[\\ u(1) = u(-1) = 0 \end{cases}$$

On peut appliquer les résultats rappelés au paragraphe II.1.2;

l'équation (1.3) admet le diagramme de bifurcation suivant :



Remarque : on aurait pu prendre, à peu près, n'importe qu'elle non-linéarité positive croissante convexe pourvu que la branche équation associée ne se retourne qu'une fois.

si $a < \bar{u}(0)$

le point de transition équation-inéquation (λ_t, u_t) se situe avant le point de retournement $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ et puisque $\lambda_t < \bar{\lambda}$ on a :

$$\lambda_t < \inf \left\{ \frac{a(w, w)}{(\exp(u_t)w, w)} / w \in H_0^1(\Omega), w \neq 0 \right\} = \mu_1(u_t)$$

où $\mu_1(u_t)$ est la valeur propre fondamentale de : $Aw = \mu \exp(u_t)w$ dans Ω , $w=0$ sur $\partial\Omega$; on notera $\mu_2(u_t)$ la deuxième valeur propre .

La condition $(\Sigma)_t$ est donc vérifiée, (λ_t, u_t) est un point régulier de l'équation (1.3) et de l'inéquation (1.1).

si $a = \bar{u}(0)$

le point de transition équation-inéquation (λ_t, u_t) est le point de retournement $(\bar{\lambda}, \bar{u})$, donc $\lambda_t = \mu_1(u_t)$, la condition $(\Sigma)_t$ n'est pas vérifiée, (λ_t, u_t) est un point singulier de l'équation (1.3) et de l'inéquation (1.1);

$Su_t = \overline{C(K, u_t)} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w(0) < 0 \}$ n'est pas un espace vectoriel.

si $a > \bar{u}(0)$

si (λ_t, u_t) est le point de transition équation-inéquation , on a $\mu_1(u_t) < \lambda_t < \mu_2(u_t)$, la condition $(\Sigma)_t$ n'est pas vérifiée .

On ne considère désormais que des points de transition équation-inéquation (λ_t, u_t) tels que $\text{cap}\{u_t = \Psi\} \neq 0$; en dimension 1 c'est le cas le plus courant avec $E_t = \{u_t = \Psi\} = \{x_0\}$.

D'autre part si $\text{cap}\{u_t = \Psi\} = 0$, $Su_t = \overline{C(K, u_t)} = H_0^1(\Omega)$ on est donc dans le cadre vectoriel et on peut appliquer les résultats du chapitre IV.

VI.2 Quelques compléments lorsque (λ_t, u_t) vérifie $(\Sigma)_t$

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1).

Proposition VI.2

Si (λ_t, u_t) vérifie la condition $(\Sigma)_t$ et si $F(u_t) > 0$ avec $n \leq 5$ alors :

i. il existe une unique direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ_t, u_t) notée z_+ (resp. z_-).

ii. $z_+ \geq 0$ p.p. sur Ω en particulier $z_+ = 0$ q.p. sur $E_t = \{u_t = \Psi\}$ défini comme dans [M].

iii. $z_- \geq z_+$ p.p. sur Ω , donc $z_- \geq 0$ p.p. sur Ω .

iv. z_- est l'unique solution de l'équation linéarisée sur Ω :

$$Az_- - \lambda_t F'(u_t)z_- = F(u_t) \text{ dans } \Omega, z_- = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus $z_- \in C^{2, \alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$, et en fait $z_- > 0$ sur Ω .

On obtient ainsi, pour la direction conique à gauche z_- , quelques propriétés supplémentaires par rapport à celles obtenues dans la proposition IV.1.

Démonstration de la proposition VI.2

Les points i, ii et iii ont été démontrés dans la proposition IV.1; montrons que iv est vérifié.

Considérons l'équation (6.1) linéarisée de (1.3) en (λ_t, u_t) :

$$(6.1) \quad Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t), \quad z = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

(λ_t, u_t) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) en particulier $Au_t = \lambda_t F(u_t)$ sur $\Omega \Rightarrow u_t \in H^{2, p}(\Omega) \quad p \geq 2$
 $\Rightarrow u_t \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$.

$F(u_t)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$, la condition $(\Sigma)_t$ implique que l'équation (6.1) admet une unique solution z dans $H_0^1(\Omega)$.

D'autre part, $\forall n \geq 1 \exists q > 2$ tel que $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$;

$F(u_t), F'(u_t)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$, on a :

$\lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in L^q(\Omega)$; z est solution de (6.1), donc $Az \in L^q(\Omega) \Rightarrow z \in H^{2, q}(\Omega)$, q dépend de n ; par un argument de boot-strap, on montre que $z \in H^{2, q}(\Omega) \forall q \in \mathbb{N}$, donc $z \in C^{1, \alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$.

Or $u_t \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \Rightarrow \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \forall \alpha$,
 $0 < \alpha < 1$; z étant solution de (6.1) on a [Be] $z \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$,
 $Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) > 0$ car $F(u_t) > 0$; en appliquant le
 principe du maximum on a : $z > 0$ sur Ω , ainsi $z \in -Su_t$.

L'équation (6.1) implique que :

$a(z, w-z) - \lambda_t(F'(u_t)z, w-z) = (F(u_t), w-z) \forall w \in H_0^1(\Omega)$;
 z est donc solution de (2.2)₋, c'est [proposition IV.1] l'unique
 solution de (2.2)₋ $\Rightarrow z = z_-$; on a en particulier $z_- \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ et
 $z_- > 0$ sur Ω . #

Application

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de
 (1.1) vérifiant la condition $(\Sigma)_t$, tel que $\{u_t = \Psi\} = \{x_0\}$ avec $n=1$;
 alors $z_+(x_0) = 0$, $z_-(x_0) > 0$ donc $z_+ \neq z_-$ et Su_t n'est pas un
 espace vectoriel.

On peut appliquer le théorème IV.2 au point (λ_t, u_t) ; il donne l'
 existence de solutions de (1.1) sous la forme d'un développement au-
 tour de (λ_t, u_t) . Cependant (λ_t, u_t) étant un point de
 transition, on obtient des résultats plus précis :

Théorème VI.1

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de
 (1.1) vérifiant la condition $(\Sigma)_t$ et tel que $\text{cap}\{u_t = \Psi\} \neq 0$; on
 suppose que $n \leq 4$ et qu'il existe $\beta > 0$ tel que $F(u_t) \geq \beta$.

Notons z_+ (resp. z_-) l'unique direction conique à droite
 (resp. à gauche) en (λ_t, u_t) .

Alors il existe $\eta > 0$ et :

i. une multi-application $\theta_+ : (0, \eta) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ telle que :

$(\lambda_t + s, u_t + sz_+ + s\theta_+(s))$ soit solution de (1.1).

De plus $\|\theta_+(s)\| \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0_+$, et quelque soit le voisinage V
 de (λ_t, u_t) dans $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$ il existe $s > 0$ et $\theta_+(s) \in H_0^1(\Omega)$
 tels que $(\lambda_t + s, u_t + sz_+ + s\theta_+(s))$ soit une solution inéquation
 pure de (1.1) appartenant à V .

ii. une application continue $\theta_- : (-\eta, 0) \rightarrow C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ telle
 que $(\lambda_t + s, u_t + sz_- + s\theta_-(s))$ soit la seule solution de l'équa-
 tion (1.3), voisine de (λ_t, u_t) ; de plus on a :

$u_t + sz_- + s\theta_-(s) < \Psi$ sur Ω , donc $(\lambda_t + s, u_t + sz_- + s\theta_-(s))$ est
 solution équation de (1.1).

Démonstration du théorème VI.1

i. Appliquons tout d'abord le théorème IV.2 : il existe $\eta > 0$ et une multi-application θ_+ : $(0, \eta) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ telle que :

$(\lambda_t + s, u_t + sz_+ + s\theta_+(s))$ soit solution de (1.1), de plus $\|\theta_+(s)\| \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0_+$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un voisinage V_t de (λ_t, u_t) dans $R^+ \times H_0^1(\Omega)$ tel que si $s > 0$ est assez petit afin que $(\lambda_t + s, u_t + sz_+ + s\theta_+(s))$ appartienne à V_t , on ait :

$$(\lambda_t + s)GF(u_t + sz_+ + s\theta_+(s)) = u_t + sz_+ + s\theta_+(s).$$

Lorsque $s \rightarrow 0_+$ on obtient $z_+ = \lambda_t GF'(u_t)z_+ + GF(u_t)$ sur Ω ,

z_+ est donc solution de (6.1), or z_- est l'unique solution de (6.1) [proposition VI.2] $\Rightarrow z_+ = z_-$.

D'autre part : $z_- > 0$ sur Ω , $z_+ = 0$ q.p. sur $\{u_t = \Psi\}$, donc $z_+ \neq z_-$ car $\text{cap}\{u_t = \Psi\} \neq 0$ par hypothèse; on obtient une contradiction.

ii. On montre que, grâce à la condition $(\Sigma)_t$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'application suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda, u) \in R \times (C_0(\bar{\Omega}) \cap C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})) &\rightarrow \Phi(\lambda, u) = u - \lambda GF(u) \\ &\in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^{2, \alpha}(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de (λ_t, u_t) les solutions de (1.3) forment une courbe $(\lambda = \lambda_t + s, u_t + sz_- + s\theta_-(s))$ de classe C^1 .

On considère l'opérateur $B : w \rightarrow B(w) = Aw - \lambda_t F'(u_t)w$; la condition $(\Sigma)_t$ implique que B vérifie le principe du maximum sur Ω .

Puisque $\theta_-(s) \rightarrow 0$ dans $C_0(\bar{\Omega}) \cap C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})$ lorsque $s \rightarrow 0_-$,

$$\begin{aligned} B(\theta_-(s)) &\rightarrow 0 \text{ dans } C^\alpha(\bar{\Omega}) ; B(z_- + \theta_-(s)) \geq F(u_t) + B(\theta_-(s)) \\ &> \beta + B(\theta_-(s)), \end{aligned}$$

β est strictement positif donc pour s voisin de 0, on a :

$$B(z_- + \theta_-(s)) \geq \frac{\beta}{2} \Rightarrow z_- + \theta_-(s) > 0 \text{ et si } s < 0 \text{ on a } z_- + \theta_-(s) > 0$$

donc $u_t + sz_- + s\theta_-(s) < u_t \leq \Psi$. #

Afin de pouvoir obtenir des développements de solutions de (1.1) autour d'un point de transition équation-inéquation ne vérifiant pas la condition $(\Sigma)_t$, on introduit une nouvelle condition.

VI.3 Etude locale en un point de transition vérifiant une condition plus faible que $(\Sigma)_t$.

VI.3.1 Introduction d'une condition plus faible que $(\Sigma)_t$.

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1).

Définition

Soit $E_t = \{u_t = \Psi\}$ l'ensemble de coïncidence défini comme dans [M], $\Omega_t = \Omega - E_t$; notons $S_t = \overline{C(K, u_t)} \cap -\overline{C(K, u_t)}$
 $= Su_t \cap -Su_t$

on a $S_t = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E_t \}$

On dit que (λ_t, u_t) vérifie la condition $(\Sigma'')_t$ si et seulement si :

$$\inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in S_t, \|w\|=1 \} > 0$$

Remarque VI.2

Cette condition est intéressante lorsque Su_t n'est pas un espace vectoriel car sinon $S_t = Su_t$ et $(\Sigma)_t \Leftrightarrow (\Sigma'')_t$.

On a toujours $S_t \subset Su_t$, et si Su_t n'est pas un espace vectoriel $S_t \subsetneq Su_t$;

Dans ce cas, la nouvelle condition est, en général, strictement plus faible que $(\Sigma)_t$; c'est ce que nous illustrons ci après avec l'exemple VI.3.

Notons que le lemme III.2 s'applique dans ce cas, en particulier :

$$(\Sigma'')_t \Leftrightarrow \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in S_t, |w|=1 \} > 0$$

et si ∂E_t est régulière, $(\Sigma'')_t$ s'énonce ainsi :

la valeur propre fondamentale du problème de Dirichlet linéarisé sur $\Omega_t = \Omega - E_t$ associé à (1.3) :

$Aw - \lambda_t F'(u_t)w = \mu w$ sur Ω_t , $w=0$ sur $\partial(\Omega_t)$
est strictement positive.

Exemple VI.3

Reprenons l'exemple VI.2.

Dans ce cas $E_t = \{0\}$ et $S_t = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w(0)=0 \}$

Soit $\gamma = \inf \left\{ \frac{(\nabla w, \nabla w)}{(\exp(u_t)w, w)} / w \in H_0^1(\Omega), w(0)=0 \right\}$

$\Rightarrow \gamma = \inf \left\{ \frac{(\nabla w, \nabla w)}{(\exp(u_t)w, w)} / w \in H_0^1(\Omega), w \text{ impaire} \right\}$

Soit $\mu_1(u_t)$ la valeur propre fondamentale de : $Aw = \mu \exp(u_t)w$ sur Ω , $w = 0$ sur $\partial\Omega$; $\mu_1(u_t)$ admet un vecteur propre ϕ_1 tel que $\phi_1 > 0$ sur Ω , ϕ_1 est paire, donc si $w \in H_0^1(\Omega)$ est impaire on a : $(\phi_1, w) = 0$.

ainsi $\gamma \geq \inf \left\{ \frac{(\nabla w, \nabla w)}{(\exp(u_t)w, w)} / w \in H_0^1(\Omega), (\phi_1, w) = 0 \right\} = \mu_2(u_t)$

qui est la deuxième valeur propre de : $Aw = \mu \exp(u_t)w$ sur Ω , $w=0$ sur $\partial\Omega$.

si $a = \bar{u}(0)$

$$\lambda_t = \mu_1(u_t) < \mu_2(u_t) \leq \gamma$$

la condition $(\Sigma'')_t$ est vérifiée alors que la condition $(\Sigma)_t$ ne l'est pas; (λ_t, u_t) est un point singulier de (1.1).

si $a > \bar{u}(0)$

$$\mu_1(u_t) < \lambda_t < \mu_2(u_t).$$

La condition $(\Sigma'')_t$ est vérifiée, la condition $(\Sigma)_t$ n'est pas vérifiée, mais (λ_t, u_t) est un point régulier de (1.1).

On remarque ainsi que la condition $(\Sigma'')_t$ n'implique pas nécessairement la régularité du point (λ_t, u_t) solution de (1.1).

VI.3.2 Existence d'une direction conique à droite en (λ_t, u_t) .

Pour étudier le comportement des solutions de (1.1) autour du point (λ_t, u_t) , on fait les hypothèses suivantes :

(λ_t, u_t) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant la condition $(\Sigma'')_t$; on suppose de plus que :

- $n \leq 4$ et $\Psi \in C(\bar{\Omega})$.

- $F(u_t) > 0$ ce qui est, par exemple, vérifié dès que $F(0) > 0$.

- soit $E_t = \{u_t = \Psi\}$, on suppose que $\partial\Omega_t$ est régulière avec $\Omega_t = \Omega - E_t$ et est telle que quelque soit $x_0 \in \partial\Omega_t$ il existe une boule fermée $B \subset \Omega_t$ telle que $x_0 \in \partial B$.

Remarque

(λ_t, u_t) est solution de (1.3) $\Rightarrow Au_t = \lambda_t F(u_t)$ sur Ω

$F(u_t) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow u_t \in H^{2,p}(\Omega) \ p \geq 1 \Rightarrow u_t \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$

$\forall \alpha \ 0 < \alpha < 1$; $E_t = \{u_t = \Psi\}$ est défini ponctuellement et fermé, puisque $\Psi \in C(\bar{\Omega})$.

Tout d'abord nous montrons que, sous ces hypothèses, il existe au moins une direction conique à droite en (λ_t, u_t) notée z qui est solution de l'équation linéarisée non homogène de (1.3) en (λ_t, u_t) sur Ω_t , puis nous prouvons l'existence d'un développement local des solutions de (1.1) pour $\lambda > \lambda_t$.

Proposition VI.3

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant les hypothèses énoncées au début du paragraphe VI.3.2.

L'équation (6.2) $\begin{cases} Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) & \text{dans } \Omega_t \\ z=0 & \text{sur } \partial\Omega_t. \end{cases}$

admet une unique solution z que l'on prolonge par 0 sur E_t en un élément appartenant à S_t , encore noté z .

De plus $z > 0$ sur Ω_t et $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} < 0$ sur $\partial\Omega_t$;

z est une direction conique à droite en (λ_t, u_t) ;

(ν_A désigne la conormale; la normale à la frontière étant orientée vers l'extérieur).

Démonstration de la proposition VI.3

1. Montrons que l'équation (6.2) admet une unique solution z.

Considérons l'équation (6.2) linéarisée de (1.3) en (λ_t, u_t) sur Ω_t :

$$(6.2) \quad Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t), \quad z = 0 \text{ sur } \partial\Omega_t.$$

$F(u_t)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$, la condition $(\Sigma'')_t$ implique que l'équation (6.2) admet une unique solution $z \in H_0^1(\Omega_t)$.

De plus, $F(u_t), F'(u_t)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et $n \leq 4$,

$\lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in L^4(\Omega_t)$, donc $z \in H_0^1(\Omega_t) \cap H^{2,4}(\Omega_t)$
 $\Rightarrow z \in C^\alpha(\bar{\Omega}_t) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1.$

D'autre part on a vu que $u_t \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$,

donc $\lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in C^\alpha(\bar{\Omega}_t)$

z étant solution de $Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t)$ sur Ω_t , $z=0$ sur $\partial\Omega_t$, on a [Be] $z \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_t)$;

De plus, $Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) > 0$ sur Ω_t , car $F(u_t) > 0$, en appliquant le principe du maximum, on a : $z > 0$ sur Ω_t .

2. Comportement de z à la frontière de Ω_t .

On a vu que $z \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_t) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$;

$$z > 0 \text{ sur } \Omega_t; \quad z=0 \text{ sur } \partial\Omega_t, \quad Az \geq 0 \text{ sur } \Omega_t;$$

si $n \geq 2$ on peut appliquer le deuxième principe du maximum de Hopf

$$[P.W] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \nu_A}(x_0) < 0 \quad \forall x_0 \in \partial\Omega_t.$$

Si $n=1$, $\Omega =]a, b[$, $E_t = [c, d]$, on montre facilement, en utilisant l'équation (6.2) et le fait que $z(x)=0 \quad \forall x \in [c, d]$, que $z'(c_-) > 0$ et $z'(d_+) < 0$, d'où le résultat en orientant la normale vers l'extérieur.

3. Montrons que z est une direction conique à droite en (λ_t, u_t) .

Tout d'abord, si $z \in H_0^1(\Omega)$ désigne la solution de (6.2) prolongée par 0 sur E_t , montrons que, pour $h \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(z, h) - \lambda_t (F'(u_t)z, h) - (F(u_t), h) = \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} h \, d\Gamma - \int_{E_t} F(u_t) h \, dx$$

En effet, puisque $z=0$ sur E_t , on a :

$$\begin{aligned} & a(z,h) - \lambda_t (F'(u_t)z,h) - (F(u_t),h) = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \lambda_t F'(u_t)zh - F(u_t)h \right) dx - \int_{E_t} F(u_t)h dx \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green sur Ω_t si $n \geq 2$ (ou si $n=1$, $\Omega_t =]a,b[$, $E_t = [c,d]$, en intégrant par parties sur (a,c) et (d,b)) on obtient :

$$\begin{aligned} & a(z,h) - \lambda_t (F'(u_t)z,h) - (F(u_t),h) = \\ & = \int_{\Omega_t} (Az - \lambda_t F'(u_t)z - F(u_t)) h dx + \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} h d\Gamma - \int_{E_t} F(u_t)h dx \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque z est solution de (6.2).

Application

Soit $h \in \overline{C(K, u_t)}$, on a $h < 0$ q.p. sur E_t ; or $F(u_t) > 0$, $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} < 0$ sur $\partial\Omega_t$; en appliquant la formule précédente, on a :

$$a(z,h) - \lambda_t (F'(u_t)z,h) > (F(u_t),h) \quad \forall h \in \overline{C(K, u_t)}$$

de plus l'équation (6.2) implique :

$$a(z,z) = \lambda_t (F'(u_t)z,z) + (F(u_t),z), \text{ et } z \in \overline{C(K, u_t)}$$

donc z est solution de (2.2)₊.

#

Remarque VI.3

Puisque z est une direction conique à droite en (λ_t, u_t) ,

$$z = P_{\overline{C(K, u_t)}} [\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)].$$

De plus z appartient à S_t et on a :

$$z = P_{S_t} [\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)].$$

En effet, soit $h \in S_t$, l'équation (6.2) implique :

$$a(z,h) - \lambda_t (F'(u_t)z,h) - (F(u_t),h) = 0 \quad \#$$

Lemme VI.1

z est la plus grande des directions coniques à droite en (λ_t, u_t) et c'est l'unique direction conique à droite nulle q.p. sur E_t .

Démonstration du lemme VI.1

Soit z_+ une direction conique à droite en (λ_t, u_t) ,
soit $h \in \overline{C(K, u_t)} \cap -\overline{C(K, u_t)} = S_t$, l'équation (2.2)₊ implique :

$$(6.3) \quad a(z_+, h) - \lambda_t (F'(u_t)z_+, h) - (F(u_t), h) = 0.$$

Si $z_+ \in S_t$ l'équation (6.3) implique que z_+ est solution de (6.2) donc par unicité $z_+ = z$.

Si z_+ n'appartient pas à S_t , posons $k = (z_+ - z)^+$.

Puisque $z_+ \in Su_t$ et $z \in S_t$, on a $z_+ - z \in Su_t$; Su_t étant stable par partie positive [démonstration de la proposition IV.1], $k \in Su_t$; de plus, par définition $k > 0$ p.p. sur Ω , donc $k \in -\overline{C(K, u_t)}$, en conclusion $k \in Su_t \cap -Su_t = S_t$.

On choisit $h = k$ dans l'équation (6.2) et dans l'équation (6.3), on fait la différence des égalités obtenues :

$$a(z_+ - z, k) - \lambda_t (F'(u_t)(z_+ - z), k) = 0$$

$$\Rightarrow a(k, k) - \lambda_t (F'(u_t)k, k) = 0.$$

Puisque $k \in S_t$ la condition $(\Sigma'')_t$ implique $k = 0$ donc $z_+ \leq z$ p.p. sur Ω .

#

Remarque VI.4

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1), régulier, appartenant à la branche maximale de solutions de (1.1) et vérifiant les hypothèses énoncées au début du paragraphe VI.3.2.

$$\text{Posons } z_\lambda = \frac{\bar{u}(\lambda) - u_t}{\lambda - \lambda_t}.$$

Grâce à la proposition II.3, on sait que $(z_\lambda, \lambda > \lambda_t)$ admet pour valeurs d'adhérence dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$ faible lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_t$, des éléments $z \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifient les propriétés suivantes :

$z \geq 0$ p.p. sur Ω (car $\lambda \rightarrow \bar{u}(\lambda)$ est croissante), $z=0$ q.p. sur E_t

$z = P_{\overline{C(K, u_t)}} [\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)]$ [proposition II.3]

$z = P_{S_t} [\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)]$ [remarque II.5]

z est donc l'unique solution de (6.2), prolongée par 0 sur E_t et il existe une application $\lambda \in [\lambda_t, \infty) \rightarrow \theta(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ telle que $u(\lambda) = u_t + (\lambda - \lambda_t)z + (\lambda - \lambda_t)\theta(\lambda)$ avec $\theta(\lambda) \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_t$.

On a ainsi obtenu, pour la branche maximale, l'existence d'un développement des solutions maximales de (1.1) autour de (λ_t, u_t) pour $\lambda > \lambda_t$.

Nous voulons étendre et préciser ce résultat : si (λ_t, u_t) est un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant les hypothèses du début du paragraphe VI.3.2, en particulier vérifiant la condition $(\Sigma'')_t$ qui est plus faible que la condition $(\Sigma)_t$, cherchons des solutions de (1.1) sous la forme :

$$(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta), \theta \in H_0^1(\Omega), s > 0.$$

Pour cela, on reprend la démarche utilisée au paragraphe IV.3.; mais puisque $Su_t = \overline{C(K, u_t)}$, on peut dériver deux fois coniquement le projecteur P_K ; on obtient ainsi une nouvelle formulation du problème en terme de point fixe.

VI.3.3 Recherche d'un développement. Formulation en terme de point fixe.

Soient $s > 0$, $\theta \in H_0^1(\Omega)$.

En utilisant la formulation (1.2) en terme de point fixe de (1.1)

on a :

$$(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta) \text{ est solution de (1.1)}$$

$$\Leftrightarrow (6.4) \quad u_t + sz + s\theta = P_K [(\lambda_t + s) GF(u_t + sz + s\theta)]$$

Puisque $n \leq 4$, on peut appliquer la formule de dérivation conique (2.3) :

$$P_K [(\lambda_t + s) GF(u_t + sz + s\theta)] =$$

$$= u_t + s P_{Su_t} [\lambda_t GF'(u_t)(z + \theta) + GF(u_t)] + s\varepsilon(s, \theta)$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0_+} \varepsilon(s, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , θ borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Or $Su_t = \overline{C(K, u_t)} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq 0 \text{ q.p. sur } E_t \}$, c'est un cône convexe fermé sup-stable, héréditaire vers le bas donc [M], il existe ϕ q.s.c.i. telle que :

$$\overline{C(K, u_t)} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \phi \text{ q.p. sur } \Omega \};$$

ainsi [M] P_{Su_t} admet en $\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)$ une dérivée conique, i.e. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \eta > 0$, voisin de 0, on a :

$$P_{Su_t} [\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t) + \eta v] = z + \eta P_{C_t} [v] + \eta \varepsilon_1(\eta, v)$$

$$\text{avec } C_t = \overline{C(Su_t, z)} \cap \{ z - \lambda_t GF'(u_t)z - GF(u_t) \}^\perp$$

et $\lim_{\eta \rightarrow 0_+} \varepsilon_1(\eta, v) = 0$, uniformément par rapport à v , v restant dans un compact de $H_0^1(\Omega)$.

En particulier, soit $v = \lambda_t GF'(u_t) \frac{\theta}{\|\theta\|}$, $\theta \neq 0$; $F'(u_t) \in L^\infty(\Omega)$,

G est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc $\forall \theta \in H_0^1(\Omega)$, $\theta \neq 0$, $\lambda_t GF'(u_t) \frac{\theta}{\|\theta\|}$ reste dans un compact de $H_0^1(\Omega)$.

Posons $\eta = \|\theta\|$, $\varepsilon(\theta) = \varepsilon_1(\|\theta\|, \lambda_t GF'(u_t) \frac{\theta}{\|\theta\|})$; on a $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$

(6.4) admet, pour θ borné y compris $\theta=0$, la formulation équivalente suivante :

$$(6.5) \quad \theta = P_{C_t} [\lambda_t GF'(u_t)\theta] + \varepsilon(s, \theta) + \|\theta\| \varepsilon(\theta)$$

Remarque : on a en fait dérivé deux fois coniquement le projecteur P_K , ce qui est possible en un point de transition équation-inéquation (λ_t, u_t) de (1.1), car $Su_t = \overline{C(K, u_t)}$ est un cône convexe fermé sup-stable et héréditaire vers le bas.

VI.3.4 Etude plus précise de C_t

Proposition VI.4

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant les hypothèses énoncées au début du paragraphe VI.3.2.

Soit z la solution de (6.2) [proposition VI.3].

Si $C_t = \overline{C(Su_t, z)} \cap \{ z - \lambda_t GF'(u_t)z - GF(u_t) \}^\perp$
alors $C_t = S_t = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E_t \}$

Démonstration de la proposition VI.4

1. Montrons que $C(Su_t, z) = \overline{C(K, u_t)} = Su_t$

Soit $v \in C(Su_t, z)$, par définition, pour $\mu > 0$ assez grand il existe $w \in Su_t$ tel que $v = \mu(w - z)$.

On a $w \leq 0$ q.p. sur E_t , $z = 0$ q.p. sur $E_t \Rightarrow v \leq 0$ q.p. sur E_t , donc $C(Su_t, z) \subset \overline{C(K, u_t)}$.

Réciproquement: soit $w \in \overline{C(K, u_t)}$; puisque $z = 0$ q.p. sur E_t , $w + z \in \overline{C(K, u_t)} = Su_t \Rightarrow w \in C(Su_t, z)$.

2. Montrons que $C_t = S_t$

Soit $w \in S_t \subset \overline{C(K, u_t)}$; la première partie de la démonstration implique : $w \in C(Su_t, z)$.

D'autre part, on a vu que $z = P_{S_t}[\lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)]$

donc $a(z, w) - \lambda_t (F'(u_t)z, w) - (F(u_t), w) = 0$

$\Rightarrow w \in \{ z - \lambda_t GF'(u_t)z - GF(u_t) \}^\perp \Rightarrow S_t \subset C_t$.

Réciproquement:

Soit $w \in C_t$, donc $w \in C(Su_t, z) = \overline{C(K, u_t)} \Rightarrow w \in Su_t$,

et aussi $a(z, w) = \lambda_t (F'(u_t)z, w) + (F(u_t), w)$;

utilisons l'égalité établie dans la troisième partie de la démonstration de la proposition VI.3 :

$$a(z,w) - \lambda_t (F'(u_t)z, w) - (F(u_t), w) = \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} w \, d\Gamma - \int_{E_t} F(u_t) w \, dx$$

on a donc
$$\int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} w \, d\Gamma = \int_{E_t} F(u_t) w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega);$$

or $F(u_t) > 0$, $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} < 0$ [proposition VI.3] et $w \leq 0$ q.p. sur E_t ;

ainsi ces deux intégrales ont des signes opposés et sont égales elles sont donc nulles et on a :

$$\int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} w \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu_A} < 0 \quad \text{donc la trace de } w \text{ sur } \partial\Omega_t \text{ est nulle}$$

si E_t est de mesure nulle alors $w=0$ p.p. sur E_t ;

sinon $\int_{E_t} F(u_t) w \, dx = 0$ et $F(u_t) > 0$ donc $w=0$ p.p. sur E_t .

Ceci permet d'affirmer que $w=0$ q.p. sur E_t ; en effet on définit

un élément $v \in H_0^1(\Omega)$ en posant : $v = \begin{cases} w & \text{sur } \Omega_t \\ 0 & \text{sur } E_t \end{cases}$ alors $v-w=0$ p.p. sur Ω donc q.p. sur $\Omega \Rightarrow w=0$ q.p. sur E_t .

#

VI.3.5 Existence d'un développement au voisinage de (λ_t, u_t)

Reprenons la formulation (6.5) établie au paragraphe VI.3.3; en tenant compte de la proposition VI.4 on a :

$$(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta) \text{ est solution de (1.1)}$$

$$\Leftrightarrow (6.6) \quad \theta = P_{S_t} [\lambda_t GF'(u_t)\theta] + \varepsilon(s, \theta) + \|\theta\| \varepsilon(\theta)$$

Or (λ_t, u_t) vérifie la condition $(\Sigma'')_t$; grâce au lemme III.1, l'opérateur linéaire $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \theta - P_{S_t} [\lambda_t GF'(u_t)\theta] \in H_0^1(\Omega)$ est inversible, notons Q son inverse.

$$\text{Posons } \Psi(s, \theta) = Q(\varepsilon(s, \theta) + \|\theta\| \varepsilon(\theta))$$

On obtient la formulation suivante, équivalente à (6.6) :

$$(6.7) \quad \theta = \Psi(s, \theta) \quad \theta \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème VI.2

Soit (λ_t, u_t) un point de transition équation-inéquation de (1.1) vérifiant les hypothèses du paragraphe VI.3.2 et tel que $\text{cap}\{u_t = \Psi\} \neq 0$.

Soit z l'unique solution de l'équation linéarisée non homogène (6.2) de (1.3) en (λ_t, u_t) sur Ω_t .

Il existe $\eta > 0$ et une multi-application $\theta_t : s \in (0, \eta) \rightarrow \theta_t(s) \in H_0^1(\Omega)$ tels que :

$(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta_t(s))$ soit solution de (1.1).

De plus $\|\theta_t(s)\| \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0_+$ et quelque soit le voisinage V de (λ_t, u_t) dans $\mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$ il existe $s > 0$ et $\theta_t(s) \in H_0^1(\Omega)$ tels que $(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta_t(s))$ soit une solution inéquation pure de (1.1) appartenant à V .

On a donc, sous ces hypothèses, un développement local des solutions de (1.1) à droite de λ_t . Ce développement est à rapprocher de ceux obtenus pour les équations [proposition II.1 et théorème II.2] et pour l'inéquation (1.1) en certains points réguliers [théorème IV.2].

Fréquemment, en un point de transition équation-inéquation de (1.1), on a : $E_t = \{x_0\}$; alors si $n=1$ la capacité de E_t n'est pas nulle, c'est le cas de l'exemple VI.2. Le théorème VI.2 donne des solutions inéquation pure de (1.1), voisines de (λ_t, u_t) , sous la forme d'un développement, lorsque (λ_t, u_t) est après le premier point de retournement de la branche équation (1.3) issue de $(0,0)$ alors que le théorème VI.1 ne s'applique pas car la condition $(\Sigma)_t$ n'est pas vérifiée. Si (λ_t, u_t) est avant le premier point de retournement de la branche équation, on sait aussi conclure à l'existence d'un développement, grâce au théorème VI.1.

Démonstration du théorème VI.2

D'après la formulation précédente, on cherche, pour tout $s > 0$ voisin de 0, un point fixe de l'application $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \Psi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$.
On rappelle que (paragraphe VI.3.2 et VI.3.4) :

$$\Psi(s, \theta) = Q\left(\frac{1}{s} [PK[(\lambda_t + s)GF(u_t + sz + s\theta)] - u_t] - z - P_{S_t}[\lambda_t GF'(u_t)\theta]\right)$$

i. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème IV.2, mais en remplaçant $P_{S_{u_0}}$ par P_{S_t} et R par Q , on montre, grâce à l'expression ci dessus, que : $\forall s > 0$ l'application :
 $\theta \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \Psi(s, \theta) \in H_0^1(\Omega)$ est compacte.

ii. Existence d'une multi-application $s \rightarrow \theta_t(s)$

Puisque $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$, il existe $R_0 > 0$, $R_0 < 1$ tel que pour tout $\theta \in H_0^1(\Omega)$

$$\|\theta\| \leq R_0 \text{ on ait : } \|\varepsilon(\theta)\| \leq \frac{1}{2\|Q\|}.$$

Puisque $\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , $\|\theta\| \leq R_0$, il

existe $\eta > 0$ tel que si $0 < s < \eta$ on a : $\|\varepsilon(s, \theta)\| \leq \frac{R_0}{2\|Q\|}$ lorsque $\|\theta\| \leq R_0$

D'après (6.6) et (6.7) on a :

$$\Psi(s, \theta) = Q(\varepsilon(s, \theta)) + \|Q\| Q(\varepsilon(\theta)) ; \text{ ainsi si } 0 < s < \eta, \|\theta\| \leq R_0 \text{ on a :}$$

$$\|\Psi(s, \theta)\| \leq R_0.$$

L'application $\theta \rightarrow \Psi(s, \theta)$ envoie, pour $0 < s < \eta$, la boule fermée de centre 0 de rayon R_0 , de $H_0^1(\Omega)$, dans elle-même. On peut appliquer le théorème du point fixe de Schauder : pour $0 < s < \eta$ on définit une multi-application $s \in (0, \eta) \rightarrow \theta_t(s) \in H_0^1(\Omega)$ telle que:
 $\|\theta_t(s)\| \leq R_0$ et $\theta_t(s) = \Psi(s, \theta_t(s))$; c'est à dire, d'après le paragraphe VI.3.3, $(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta_t(s))$ est solution de (1.1).

iii. Montrons que $\|\theta_t(s)\| \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 0_+$

si $0 < s < \eta$, on a d'après le point ii :

$$\theta_t(s) = Q(\varepsilon(s, \theta_t(s))) + \|\theta_t(s)\| Q(\varepsilon(\theta_t(s)))$$

$$\text{avec } \|\theta_t(s)\| \leq R_0 \text{ et } \|Q(\varepsilon(\theta_t(s)))\| \leq \frac{R_0}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Posons } \rho(s) = \|Q(\varepsilon(s, \theta_t(s)))\|$$

puisque $\lim_{s \rightarrow 0_+} \varepsilon(s, \theta) = 0$ uniformément par rapport à θ , $\|\theta\| \leq R_0$, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \rho(s) = 0.$$

$$\text{Posons } \eta(\theta_t(s)) = \|Q(\varepsilon(\theta_t(s)))\|$$

$$\text{on a : } \eta(\theta_t(s)) \leq \frac{1}{2} \text{ et } \theta_t(s) = \Psi(s, \theta_t(s)) \quad \forall s \in (0, \eta)$$

$$\Rightarrow \|\theta_t(s)\| \leq \rho(s) + \|\theta_t(s)\| \eta(\theta_t(s)) \leq \rho(s) + \frac{1}{2} \|\theta_t(s)\|$$

$\forall s \in (0, \eta) \Rightarrow \|\theta_t(s)\| \leq 2 \rho(s)$ qui tend vers 0 lorsque s tend vers 0_+ .

iv. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un voisinage V_t de (λ_t, u_t) dans $R^+ \times H_0^1(\Omega)$ tel que si $s > 0$ est assez petit afin que $(\lambda_t + s, u_t + sz + s\theta_t(s))$ appartienne à V_t , on ait :

$$(\lambda_t + s)GF(u_t + sz + s\theta_t(s)) = u_t + sz + s\theta_t(s).$$

Lorsque $s \rightarrow 0_+$ on obtient : $z = \lambda_t GF'(u_t)z + GF(u_t)$ sur Ω .

L'équation (6.1) admet donc z comme solution; $n \leq 4$, $F(u_t)$, $F'(u_t)$ appartenant à $L^\infty(\Omega)$, $\lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in L^4(\Omega) \Rightarrow z \in H^{2,4}(\Omega) \Rightarrow z \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$.

Or $u_t \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \Rightarrow \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ donc [Be] $z \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$; $Az = \lambda_t F'(u_t)z + F(u_t) > 0$ car $F(u_t) > 0$, le principe du maximum fort implique que $z > 0$ sur Ω .

z admet donc deux représentants quasi-continus, l'un étant > 0 sur Ω , l'autre étant nul sur E_t , ce qui n'est possible que si $\text{cap}\{u_t = \Psi\} = 0$. Contradiction.

#

<p>CHAPITRE VII Branches extrémales de solutions. Résultats numériques.</p>
--

Après avoir construit les solutions minimale et maximale de l'inéquation (1.1), nous nous intéressons à leurs propriétés et plus particulièrement à celles de la solution maximale. En étudiant notamment le comportement de l'ensemble de coïncidence le long de la branche maximale, nous mettons en évidence, dans certains cas, un premier point de changement de stabilité (en un certain sens) et nous montrons que c'est un point singulier qui vérifie les hypothèses énoncées au chapitre V.

Ceci est ensuite illustré par les résultats numériques que nous donnons à la fin de ce chapitre.

VII.1 Existence et propriétés des branches extrémales de solutions.

Dans ce paragraphe, nous adaptons un procédé itératif de construction, pour tout $\lambda > 0$, d'une solution minimale (pour l'ordre ponctuel) et d'une solution maximale de l'inéquation (1.1). Nous étudions la monotonie et la continuité de ces branches extrémales; à l'aide des résultats des chapitres précédents, nous prouvons l'existence de directions coniques et de développements locaux de solutions au voisinage de certains points appartenant à ces branches.

VII.1.1 Construction des branches extrémales de solutions.

Soit $g \in L^2(\Omega)$ donné, pour tout $\lambda > 0$, l'inéquation variationnelle elliptique suivante :

$$(7.1) \quad \begin{cases} a(v, w-v) \geq \lambda (F(g), w-v) \\ \forall w \in K; v \in K. \end{cases}$$

où $K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega \}$

admet une unique solution $v \in K$, notée $v = T_\lambda[g] = P_K[\lambda GF(g)]$.

On définit ainsi une application $T_\lambda : g \in L^2(\Omega) \rightarrow T_\lambda[g] \in H_0^1(\Omega)$; nous allons mettre en évidence quelques propriétés de monotonie de cette application.

Lemme VII.1

Soit $g \in L^2(\Omega)$ et v l'unique solution de l'inéquation :
 $a(v, w-v) \geq (g, w-v) \quad \forall w \in K; v \in K$; alors $v = P_K[Gg]$ et l'application $g \in L^2(\Omega) \rightarrow P_K[Gg] \in H_0^1(\Omega)$ est croissante pour l'ordre ponctuel.

C'est un résultat classique dans la théorie des inéquations variationnelles elliptiques [D.L], nous le redémontrons ici :

Démonstration du lemme VII.1

Soient g_1 et g_2 deux éléments de $L^2(\Omega)$; posons $v_1 = P_K[Gg_1]$,
 $v_2 = P_K[Gg_2]$; v_1 et v_2 sont respectivement les solutions des inéquations suivantes :

$$a(v_1, w-v_1) \geq (g_1, w-v_1) \quad \forall w \in K; v_1 \in K.$$

$$a(v_2, w-v_2) \geq (g_2, w-v_2) \quad \forall w \in K; v_2 \in K.$$

On choisit $w = \min(v_1, v_2) = v_1 - (v_1 - v_2)^+$ dans la première inéquation, $w = \max(v_1, v_2) = v_2 + (v_1 - v_2)^+$ dans la deuxième et on fait la somme des inégalités obtenues :

$$\Rightarrow a((v_1 - v_2)^+, (v_1 - v_2)^+) \leq (g_1 - g_2, (v_1 - v_2)^+)$$

supposons $g_1 \leq g_2$ p.p. sur Ω , alors la coercivité de a implique $(v_1 - v_2)^+ = 0$ donc $v_1 \leq v_2$ p.p. sur Ω .

• #

Corollaire VII.1

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ l'application $g \in L^2(\Omega) \rightarrow T_\lambda[g] \in H_0^1(\Omega)$ est croissante pour l'ordre ponctuel.
2. Pour tout $g \in L^2(\Omega)$ l'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow T_\lambda[g] \in H_0^1(\Omega)$ est croissante pour l'ordre ponctuel.

Démonstration du corollaire VII.1

1. Soient g_1 et g_2 appartenant à $L^2(\Omega)$ tels que $g_1 \leq g_2$ p.p. sur Ω ; l'application $t \rightarrow f(x,t)$ étant, par hypothèse, croissante en t , on a : $F(g_1) \leq F(g_2)$ p.p. sur Ω ; en appliquant le lemme VII.1, on obtient $T_\lambda[g_1] \leq T_\lambda[g_2]$ p.p. sur Ω .
On démontre le point 2. de la même façon.

#

Remarquons que:

(λ, u) est solution de (1.1) $\Leftrightarrow u = T_\lambda[u]$.

De plus, puisque $\lambda F(g) \geq 0$ p.p. sur Ω pour tout $g \in L^2(\Omega)$, $\lambda > 0$, on a : $T_\lambda[g] \geq 0$ en particulier $T_\lambda[0] \geq 0$ p.p. sur $\Omega \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ et, par définition $T_\lambda[\Psi] \leq \Psi$ donc :

0 est sous-solution et Ψ est sur-solution de l'inéquation (1.1) au sens de [M.P,T]; de plus $g \rightarrow T_\lambda[g]$ est [corollaire VII.1] une application croissante; ce qui implique [T] l'existence, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, d'une solution minimale (resp. maximale) de (1.1) notée $\underline{u}(\lambda)$ (resp. $\bar{u}(\lambda)$).

Nous allons en fait redémontrer ce résultat en construisant $\bar{u}(\lambda)$ et $\underline{u}(\lambda)$ comme limites de suites particulières; ce procédé est semblable à celui utilisé pour les équations [Sa], tandis que dans [T], l'existence est assurée par un résultat abstrait.

Proposition VII.1

Pour tout $\lambda > 0$, l'inéquation variationnelle :

$$(1.1) \quad a(u, v-u) \geq \lambda (F(u), v-u) \quad \forall v \in K; u \in K.$$

admet une solution maximale (resp. minimale) notée $\bar{u}(\lambda)$ (resp. $\underline{u}(\lambda)$) (c'est à dire : quelque soit w solution de (1.1) pour λ , on a : $w \leq \bar{u}(\lambda)$ p.p. sur Ω , (resp. $w \geq \underline{u}(\lambda)$)).

De plus l'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{u}(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $\underline{u}(\lambda)$) est croissante pour l'ordre ponctuel .

Démonstration de la proposition VII.1

Nous allons montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'inéquation (1.1) admet une solution maximale .

1. Considérons la suite suivante définie par récurrence :

$$u^p(\lambda) = T_\lambda^p[\Psi] \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

T_λ étant une application croissante [corollaire VII.1], la suite $(u^p(\lambda), p \in \mathbb{N})$ est décroissante et vérifie :

$$0 \leq u^p(\lambda) \leq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega, \forall p \in \mathbb{N};$$

elle converge donc ponctuellement lorsque $p \rightarrow +\infty$,

$$\text{notons } \bar{u}(\lambda)(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} u^p(\lambda)(x)$$

on a : $0 \leq \bar{u}(\lambda) \leq \Psi$, $\bar{u}(\lambda) \in L^2(\Omega)$; le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique : $u^p(\lambda) \rightarrow \bar{u}(\lambda)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

F étant continue de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, l'opérateur de Green G étant continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, l'opérateur T_λ :

$g \in L^2(\Omega) \rightarrow T_\lambda[g] = P_K[\lambda Gg] \in H_0^1(\Omega)$ est continu; ainsi $T_\lambda[u^p(\lambda)] = u^{p+1}(\lambda) \rightarrow T_\lambda[\bar{u}(\lambda)]$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty \Rightarrow \bar{u}(\lambda) = T_\lambda[\bar{u}(\lambda)]$ et $\bar{u}(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ donc $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ est solution de (1.1).

2. Montrons que c'est la solution maximale de (1.1)

Soit (λ, v) une solution de (1.1), on a : $0 < v \leq \Psi$ et $T_\lambda[v] = v$.

L'application T_λ étant croissante pour l'ordre ponctuel, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$v = T_\lambda^p[v] \leq T_\lambda^p[\Psi] = u^p(\lambda) \text{ p.p. } \Rightarrow v \leq \bar{u}(\lambda) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

3. En utilisant les propriétés de monotonie des applications :

$\lambda \rightarrow T_\lambda[g]$ et $g \rightarrow T_\lambda[g]$ [corollaire VII.1], on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que si $\lambda \leq \lambda'$ on a : $u^p(\lambda) \leq u^p(\lambda')$ p.p. sur Ω .

L'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{u}(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ est donc croissante pour l'ordre ponctuel.

Par un raisonnement analogue, en considérant la suite $u_p(\lambda) = T_\lambda^p[0]$, on montre, pour tout $\lambda > 0$, l'existence d'une solution minimale de (1.1) notée $\underline{u}(\lambda)$ et la croissance de l'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \underline{u}(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$.

#

Montrons, par un procédé analogue à celui utilisé pour les équations [Sa], que ces branches extrémales sont continues. En effet :

Lemme VII.2

Soit $g \in L^p(\Omega)$ $p \geq 2$ et v l'unique solution de l'inéquation :
 $a(v, w-v) \geq (g, w-v) \quad \forall w \in K; v \in K$.

Si $A\psi$ est une mesure telle que $(A\psi)^- \in L^p(\Omega)$ avec $p > n$
 alors $v = P_K[Gg] \in H^{2,p}(\Omega) \Rightarrow v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ où $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$
 et l'application :

$g \in L^p(\Omega) \rightarrow v = P_K[Gg] \in H^{2,p}(\Omega)$ est continue de $L^p(\Omega)$
 dans $H^{2,p}(\Omega)$ faible ou dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ fort.

Démonstration du lemme VII.2

Si $A\psi$ est une mesure telle que $(A\psi)^- \in L^p(\Omega)$, si $g \in L^p(\Omega)$,
 alors [Bre] $v = P_K[Gg] \in H^{2,p}(\Omega)$ et il existe une constante
 $C > 0$, indépendante de g telle que :

$$\|P_K[Gg]\|_{2,p} \leq C (\|g\|_p + |(A\psi)^-|_p)$$

où $\| \cdot \|_{2,p}$ désigne la norme usuelle dans $H^{2,p}(\Omega)$.
 Soit $(g_i, i \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ tels que $g_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} g$
 dans $L^p(\Omega)$, cette suite est donc bornée dans $L^p(\Omega)$.

Notons $v_i = P_K[Gg_i]$, $\|v_i\|_{2,p} \leq C (\|g_i\|_p + |(A\psi)^-|_p)$.

La suite $(v_i, i \in \mathbb{N})$ est donc bornée dans $H^{2,p}(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite, encore notée v_i , convergente vers v dans $H_0^1(\Omega)$ fort, $H^{2,p}(\Omega)$ faible et dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ fort.

Montrons que $v = P_K[Gg]$.

$g_i \rightarrow g$ dans $L^p(\Omega)$ $p \geq 2$ donc dans $L^2(\Omega)$; G étant un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$; P_K étant lipschitzien sur $H_0^1(\Omega)$;

$P_K[Gg_i] \rightarrow P_K[Gg]$ dans $H_0^1(\Omega)$ or $v_i = P_K[Gg_i] \rightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$, par unicité de la limite, on a : $v = P_K[Gg]$.

La suite $(v_i, i \in \mathbb{N})$ admet donc une unique valeur d'adhérence dans $H_0^1(\Omega)$ fort et $H^{2,p}(\Omega)$ faible : $v = P_K[Gg]$ donc toute la suite $(v_i, i \in \mathbb{N})$ converge vers v dans $H_0^1(\Omega)$ fort, $H^{2,p}(\Omega)$ faible et $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ fort.

#

Proposition VII.2

Si $\bar{u}(\lambda)$ (resp. $\underline{u}(\lambda)$) désigne la solution maximale (resp. minimale) de l'inéquation (1.1) alors :

1. l'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{u}(\lambda)$ (resp. $\underline{u}(\lambda)$) $\in H_0^1(\Omega)$ est continue à droite (resp. à gauche).
2. de plus, si $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, ces applications sont continues à droite (resp. à gauche) de \mathbb{R}^+ dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha \ 0 < \alpha < 1$.

Démonstration de la proposition VII.2

On fait la démonstration pour la branche maximale de solutions.

1. Montrons que l'application $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{u}(\lambda) \in H_0^1(\Omega)$ est continue à droite.

Soit $\lambda_* \in \mathbb{R}^+$ fixé, posons $u_* = \bar{u}(\lambda_*)$.

$\bar{u}(\lambda)$ décroît lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$, $\bar{u}(\lambda) \geq 0$ donc $\bar{u}(\lambda)$ admet p.p. sur Ω une limite ponctuelle v lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$:

$$v(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} \bar{u}(\lambda)(x) \quad , \quad v \geq u_* \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Puisque $0 \leq \bar{u}(\lambda) \leq \Psi$ p.p. sur Ω , le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique $\bar{u}(\lambda) \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$

$\Rightarrow \bar{u}(\lambda) = P_K[\lambda \text{ GF}(\bar{u}(\lambda))] \rightarrow P_K[\lambda_* \text{ GF}(v)]$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$ $\Rightarrow v \in H_0^1(\Omega)$ et $v = P_K[\lambda_* \text{ GF}(v)] \Rightarrow v \leq \bar{u}(\lambda_*) = u_*$ p.p. d'où $v = u_*$ p.p. sur Ω .

2. Supposons $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ alors quelque soit (λ, u) solution de (1.1),

on a : $u \in H^{2,p}(\Omega) \quad \forall p \geq 2$, donc $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha \ 0 < \alpha < 1$.

On a vu au point 1. que $\bar{u}(\lambda) \rightarrow u_*$ p.p. sur Ω lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$. Comme $0 \leq \bar{u}(\lambda) \leq \Psi$ p.p. sur Ω , $\Psi \in L^\infty(\Omega)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que $\bar{u}(\lambda) \rightarrow u_*$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_*$, $\forall p \geq 2$.

F étant, par hypothèse, continue de $L^p(\Omega)$ dans lui-même, on a :

$$\lambda F(\bar{u}(\lambda)) \rightarrow \lambda_* F(u_*) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \lambda_*$$

or $\bar{u}(\lambda) = P_K[\lambda \text{ GF}(\bar{u}(\lambda))]$, la continuité de l'application :

$$g \in L^p(\Omega) \rightarrow P_K[Gg] \in H^{2,p}(\Omega) \text{ faible } \forall p \geq 2 \text{ et } C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ fort}$$

$\forall \alpha, \ 0 < \alpha < 1$ [lemme VII.2] implique $\bar{u}(\lambda) \rightarrow u_*$ dans $H^{2,p}(\Omega)$ faible $\forall p \geq 2$ et dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ fort $\forall \alpha, \ 0 < \alpha < 1$.

#

VII.1.2 Développement local des solutions de (1.1) autour d'un point appartenant à une des branches extrémales.

Les propriétés de continuité et de monotonie des branches extrémales de solutions de (1.1) nous permettent de construire des directions coniques. En effet, grâce à l'interprétation géométrique des directions coniques [proposition II.3 et remarque II.5] on sait que :

1. Si (λ_0, u_0) est un point régulier de la branche maximale de solutions de (1.1) ($u_0 = \bar{u}(\lambda_0)$), il existe au moins une direction conique à droite en (λ_0, u_0) notée z_+ . Si $E_0 = \{u_0 = \Psi\}$ désigne l'ensemble de coïncidence défini comme dans [M], on peut construire une direction conique à droite telle que : $z_+ = 0$ q.p. sur E_0 .

2. Si (λ_0, u_0) est un point régulier de la branche minimale de solutions de (1.1) ($u_0 = \underline{u}(\lambda_0)$), il existe au moins une direction conique à gauche en (λ_0, u_0) notée z_- . On a : $z_- > 0$ q.p. sur E_0 . On ne peut pas affirmer que $z_- = 0$ q.p. sur E_0 .

Le long des branches extrémales, les solutions de (1.1) admettent des développements locaux, en effet :

Proposition VII.3

Soit (λ_0, u_0) un point appartenant à la branche maximale (resp. minimale) de solutions de (1.1) tel que l'une des hypothèses suivantes (ou les deux) soit vérifiée :

- soit (λ_0, u_0) est un point régulier de (1.1), Su_0 étant un espace vectoriel.

- soit (λ_0, u_0) vérifie la condition (Σ) .

Alors, si $n \leq 5$, il existe une unique direction conique à droite (resp. à gauche) en (λ_0, u_0) notée z_+ (resp. z_-), et une application $\bar{\theta}$ (resp. $\underline{\theta}$) : $s \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{\theta}(s) \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $s \in \mathbb{R}^- \rightarrow \underline{\theta}(s) \in H_0^1(\Omega)$) telle que :

$$\bar{u}(\lambda_0 + s) = u_0 + sz_+ + s\bar{\theta}(s) \quad \forall s > 0$$

$$\text{(resp. } \underline{u}(\lambda_0 + s) = u_0 + sz_- + s\underline{\theta}(s) \quad \forall s < 0)$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0_+} \bar{\theta}(s)$ (resp. $\lim_{s \rightarrow 0_-} \underline{\theta}(s)$) = 0 dans $H_0^1(\Omega)$ faible et, si

$n \leq 4$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Démonstration de la proposition VII.3

Raisonnons pour la branche maximale de solutions de (1.1).

1. Existence de l'application $s \rightarrow \bar{\theta}(s)$

On peut appliquer la proposition II.4, (λ_0, u_0) étant régulier dans

les deux cas envisagés, la famille $(\frac{\bar{u}(\lambda_0+s)-u_0}{s}, s>0)$ est

bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et admet, dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$ faible, au moins une valeur d'adhérence, notée z_+ , c'est une direction conique à droite, elle est (compte tenu des hypothèses) unique.

Posons $\bar{\theta}(s) = \frac{\bar{u}(\lambda_0+s)-u_0}{s} - z_+$ pour $s>0$,

alors : $\bar{u}(\lambda_0+s) = u_0 + sz_+ + s\bar{\theta}(s)$ et $\lim_{s \rightarrow 0_+} \bar{\theta}(s) = 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

2. Si $n \leq 4$, montrons que $\bar{\theta}(s) \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort

$(\lambda_0+s, \bar{u}(\lambda_0+s))$ est solution de (1.1)

$$\Rightarrow \bar{u}(\lambda_0+s) = P_K[(\lambda_0+s) GF(\bar{u}(\lambda_0+s))]$$

$$\Rightarrow (7.2) \quad u_0 + sz_+ + s\bar{\theta}(s) = P_K[(\lambda_0+s) GF(u_0 + sz_+ + s\bar{\theta}(s))]$$

Si $n \leq 4$, on peut appliquer la formule de dérivation conique (2.3) :

$$P_K[(\lambda_0+s) GF(u_0 + sz_+ + s\bar{\theta}(s))] = u_0 + s P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \bar{\theta}(s)) + GF(u_0)] + s \varepsilon(s, \bar{\theta}(s)).$$

L'équation (7.2) s'écrit alors sous la forme équivalente suivante :

$$(7.3) \quad \bar{\theta}(s) = P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \bar{\theta}(s)) + GF(u_0)] - z_+ + \varepsilon(s, \bar{\theta}(s))$$

Pour tout $s>0$, (7.3) est vérifiée; $(\bar{\theta}(s), s>0)$ étant bornée dans $H_0^1(\Omega)$, $\lim_{s \rightarrow 0_+} \varepsilon(s, \bar{\theta}(s)) = 0$; $\bar{\theta}(s) \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $s \rightarrow 0_+$,

G est un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ donc :

$$P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)(z_+ + \bar{\theta}(s)) + GF(u_0)] \xrightarrow{s \rightarrow 0_+} P_{S_{u_0}}[\lambda_0 GF'(u_0)z_+ + GF(u_0)] = z_+$$

dans $H_0^1(\Omega)$ fort;

ainsi l'équation (7.3) implique $\bar{\theta}(s) \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort lorsque $s \rightarrow 0_+$

#

VII.1.3 Comportement des branches extrémales lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$

Supposons $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, alors si il existe λ_0 tel que :
 $\inf \{ -A\Psi(x) + \lambda_0 f(x,t) / (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \} > 0$, on montre [Co] que, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, les solutions de l'inéquation (1.1) pour $\lambda > 0$, notées $u(\lambda)$, tendent vers Ψ au sens suivant: $\text{dist}(\partial\Omega, \{u(\lambda) = \Psi\}) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$; en particulier $u(\lambda) \rightarrow \Psi$ dans $L^p(\Omega), \forall p \geq 1$, car $0 \leq u(\lambda) \leq |\Psi|_\infty$. Nous allons montrer que ce dernier résultat est vrai sous l'hypothèse $\Psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \Psi \geq 0$, que nous avons faite depuis le début de ce travail.

Proposition VII.4

Si $F(0) > 0$ alors, pour tout $p \geq 1$, la solution minimale $\underline{u}(\lambda)$ de l'inéquation (1.1) tend vers l'obstacle Ψ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$; ainsi toutes les solutions u de (1.1) pour $\lambda > 0$ tendent vers Ψ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Remarque VII.0

L'obstacle Ψ n'appartenant, a priori, pas à $H_0^1(\Omega)$, une couche limite apparaît au bord de Ω .
 Cependant, si $\Psi \in H_0^1(\Omega), \Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, et si il existe $\beta > 0$ tel que $F(0) \geq \beta$, on montre qu'il existe λ_0 tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0, \Psi$ est la seule solution de l'inéquation (1.1). Dans ce cas, toutes les solutions u de (1.1) pour $\lambda > 0$ tendent vers Ψ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Démonstration de la proposition VII.4

On raisonne pour la branche minimale de solutions de (1.1), on peut alors conclure pour toute solution u de (1.1) pour $\lambda > 0$ en utilisant le fait que $0 \leq \underline{u}(\lambda) \leq u \leq \Psi$.

1. Montrons que $\underline{u}(\lambda) \rightarrow \Psi$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$

Soit $\phi \in D(\Omega)$ telle que $0 \leq \phi \leq 1$, notons $F_\phi = \{x \in \Omega / \phi(x) = 1\}$,

$\Omega_\phi = \Omega - F_\phi$; F_ϕ est un fermé que l'on suppose non vide .

Soit $\lambda > 0$, on a :

$$a(\underline{u}(\lambda), w - \underline{u}(\lambda)) \geq \lambda (F(\underline{u}(\lambda)), w - \underline{u}(\lambda)) \quad \forall w \in K.$$

Or si $w = \phi\Psi$ alors $w \in K$,

$$\Rightarrow a(\underline{u}(\lambda), \phi\Psi - \underline{u}(\lambda)) \geq \lambda (F(\underline{u}(\lambda)), \phi\Psi - \underline{u}(\lambda))$$

\Rightarrow

$$a(\phi\Psi - \underline{u}(\lambda), \phi\Psi - \underline{u}(\lambda)) + \lambda (F(\underline{u}(\lambda)), \Psi - \underline{u}(\lambda)) \leq a(\phi\Psi, \phi\Psi - \underline{u}(\lambda)) + \lambda (F(\underline{u}(\lambda)), \Psi - \phi\Psi)$$

Si α et M désignent respectivement les constantes de coercivité et de continuité de la forme a , on a :

$$\alpha \|\phi\Psi - \underline{u}(\lambda)\|_1^2 + \lambda F(0) \|\underline{u}(\lambda) - \Psi\|_1 \leq M \|\phi\Psi\| \cdot \|\phi\Psi - \underline{u}(\lambda)\| + \lambda \int_{\Omega_\phi} F(\underline{u}(\lambda)) (\Psi - \phi\Psi) dx$$

L'inégalité de Young :

$$Mab = \frac{Ma}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha}b \leq \frac{1}{2} \frac{M^2 a^2}{\alpha} + \frac{\alpha b^2}{2} \quad \text{appliquée au terme } M \|\phi\Psi\| \cdot \|\phi\Psi - \underline{u}(\lambda)\|$$

implique :

$$\frac{\alpha}{2} \|\phi\Psi - \underline{u}(\lambda)\|_1^2 + \lambda F(0) \|\underline{u}(\lambda) - \Psi\|_1 \leq \frac{M^2}{2\alpha} \|\phi\Psi\|^2 + \lambda \|\Psi\|_\infty F(\|\Psi\|_\infty) \text{mes}(\Omega_\phi)$$

d'où, si $F(0) > 0$, on a :

$$\|\underline{u}(\lambda) - \Psi\|_1 \leq \frac{C_1}{\lambda} \|\phi\Psi\|^2 + C_2 \text{mes}(\Omega_\phi) \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constan-}$$

tes strictements positives indépendantes de ϕ ; ainsi quelque soit $\phi \in D(\Omega)$, $0 \leq \phi \leq 1$, telle que $F_\phi \neq \emptyset$, on a :

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\underline{u}(\lambda) - \Psi\|_1 \leq C_2 \text{mes}(\Omega_\phi)$$

Ceci prouve que $\underline{u}(\lambda) \rightarrow \Psi$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

2. Ψ appartenant à $L^\infty(\Omega)$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre que $\underline{u}(\lambda) \rightarrow \Psi$ dans $L^p(\Omega) \forall p \geq 1$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

#

VII.2 Recherche d'un point singulier sur la branche maximale.

VII.2.1 Evolution de la condition (Σ) le long de la branche maximale de solutions.

Dans tout ce paragraphe, nous nous intéressons à la condition (Σ) en un point $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ de la branche maximale de solutions de (1.1).

On suppose $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ et $F(0) > 0$, alors $\bar{u}(\lambda) \in C_0(\bar{\Omega})$.

On pose, $E_\lambda = \{\bar{u}(\lambda) = \Psi\}$, l'ensemble de coïncidence défini ponctuellement; E_λ est fermé; $\Omega_\lambda = \Omega - E_\lambda$.

De plus on suppose que $\bar{\Omega}_\lambda \subset \Omega$, $S\bar{u}(\lambda) = H_0^1(\Omega_\lambda)$ (ce qui est vrai dès que l'on sait que $S\bar{u}(\lambda)$ est un espace vectoriel et $\partial\Omega_\lambda$ est régulière) et que $F'(\bar{u}(\lambda)) > 0$.

$$\text{Posons } \nu(\lambda) = \inf \left\{ \frac{a(w,w)}{(F'(\bar{u}(\lambda)))_{w,w}} \mid w \in H_0^1(\Omega_\lambda), w \neq 0 \right\}$$

$\nu(\lambda)$ est la valeur propre fondamentale du problème suivant :

$$Aw = \nu F'(\bar{u}(\lambda))w \text{ sur } \Omega_\lambda, w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\lambda.$$

Rappelons que :

$(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ vérifie la condition $(\Sigma) \Leftrightarrow \lambda < \nu(\lambda)$ [lemme III.2]

Pour étudier la fonction $\nu(\lambda)$, nous allons tout d'abord étudier le comportement de l'ensemble de coïncidence le long de la branche maximale de solutions.

Lemme VII.3

Supposons $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ avec $A\Psi < 0$.

Soit (λ, u) une solution de (1.1), $\lambda > 0$, telle que si $E = \{u = \Psi\}$, $E \neq \emptyset$, ∂E soit régulière.

Alors il existe $k > 0$ et $r_0 > 0$ (dépendant de λ) tels que pour tout $x_0 \in \overline{\Omega - E}$ et pour tout $r < r_0$ tel que $B_r(x_0) \subset \Omega$, on ait :

$$\sup \left\{ u(x_0) - \Psi(x_0) - u(x) + \Psi(x) \mid x \in B_r(x_0) \right\} \geq kr^2.$$

($B_r(x_0)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r incluse dans Ω)

Démonstration du lemme VII.3

Soit (λ, u) une solution de (1.1), par hypothèse $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ donc $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$.

Soit $x_0 \in \overline{\Omega - E}$, posons $w(x) = u(x_0) - u(x) + \Psi(x) - \Psi(x_0) - k\|(x - x_0)\|^2$.

1. Montrons que l'on peut trouver $k > 0$ et $r_0 > 0$ tels que $-Aw > 0$ sur $B_r(x_0) \cap \Omega - E$

$$-Aw(x) = -A\Psi(x) + Au(x) - 2k \sum_i a_{ij}(x) - 2k \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x) (x_j - x_{0,j})$$

On a $Au = \lambda F(u)$ sur $\Omega - E$ au sens des distributions [formulation forte];

Les a_{ij} sont des fonctions, par hypothèse, régulières sur $\bar{\Omega}$ donc il existe $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ telles que :

$$-2k \sum_{i,j} a_{ij}(x) \geq -kM_1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

$$-2k \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x) (x_j - x_{0,j}) \geq -kM_2 r \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$$\Rightarrow -Aw \geq \lambda F(0) - kM_1 - kM_2 r \quad \text{sur } (\Omega - E) \cap B_r(x_0);$$

il existe $k > 0$ (dépendant de λ) tel que $\lambda F(0) - kM_1 > 0$;

soit $k > 0$ ainsi fixé, il existe $r_0 > 0$ (indépendant de x_0) tel que

$$\text{pour tout } r \leq r_0 \text{ on ait : } \lambda F(0) - kM_1 - kM_2 r > 0$$

ainsi $-Aw > 0$ sur $B_r(x_0) \cap (\Omega - E)$.

2. Montrons que $\sup\{u(x_0) - u(x) - \Psi(x_0) + \Psi(x) / x \in B_r(x_0)\} \geq kr^2$

On a $w(x_0) = 0$ et $-Aw > 0$ sur $B_r(x_0) \cap (\Omega - E)$, appliquons le principe du maximum fort sur $B_r(x_0) \cap (\Omega - E)$: [G.T]

$\sup\{w(x) / x \in B_r(x_0) \cap (\Omega - E)\} > 0$ et est atteint en un point x_m appartenant à la frontière de $B_r(x_0) \cap (\Omega - E)$.

Soit $x \in \partial E \cap \overline{B_r(x_0)}$, $u(x) = \Psi(x) \Rightarrow w(x) = u(x_0) - \Psi(x_0) - k\|x - x_0\|^2$
 $\Rightarrow w(x) < 0$ donc $x_m \in \partial(B_r(x_0)) \cap \overline{(\Omega - E)}$

$$\Rightarrow \sup\{u(x_0) - u(x) - \Psi(x_0) + \Psi(x) / x \in B_r(x_0)\} \geq kr^2 \quad \forall r \leq r_0.$$

#

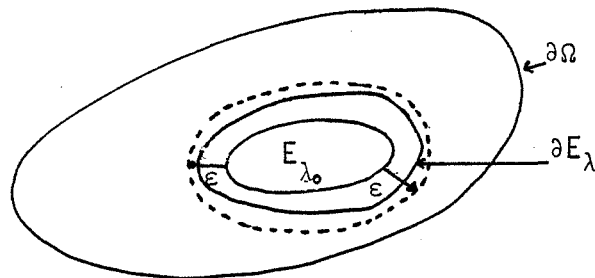
Remarque VII.1

Si l'on remplace l'hypothèse $A\Psi \leq 0$ par : il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $-A\Psi + \lambda_0 F(0) > 0$, alors le résultat du lemme VII.3 est vrai pour tout λ , $\lambda > \lambda_0$.

Utilisons ce lemme pour étudier la variation de l'ensemble de coïncidence le long de la branche maximale de solutions de (1.1).

Lemme VII.4

Soit $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ tel que $A\Psi < 0$, et (λ_0, u_0) un point de la branche maximale de solutions de (1.1) tel que, si $E_{\lambda_0} = \{u_0 = \Psi\}$, $E_{\lambda_0} \neq \emptyset$, ∂E_{λ_0} soit régulière.
 Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < r_0$), il existe $\eta > 0$ (dépendant de λ_0) tel que si $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \eta$, $\text{dist}(E_{\lambda_0}, \Omega_\lambda) < \varepsilon$ où $\Omega_\lambda = \Omega - \{\bar{u}(\lambda) = \Psi\}$.



Démonstration du lemme VII.4

1. Si $\lambda_0 \leq \lambda$ alors $u_0 \leq \bar{u}(\lambda) \leq \Psi$ p.p. sur Ω donc si $E_\lambda = \{\bar{u}(\lambda) = \Psi\}$ on a : $E_{\lambda_0} \subset E_\lambda$.
2. Soit $x_0 \in \partial \Omega_{\lambda_0}$, $k > 0$ et r_0 donnés par le lemme VII.3 appliqué à (λ_0, u_0) ; si $\varepsilon < r_0$ $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, on a : $\sup \{ -u_0(x) + \Psi(x) / x \in B_\varepsilon(x_0) \} \geq k\varepsilon^2$.
 D'autre part $\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{u}(\lambda) \in C_0(\bar{\Omega})$ est continue à droite en λ_0 [proposition VII.2] donc il existe $\eta > 0$ tel que si $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \eta$ $|\bar{u}(\lambda) - u_0|_\infty < k\varepsilon^2$.
 Ces deux résultats impliquent : $\sup \{ \Psi(x) - \bar{u}(\lambda)(x) / x \in B_\varepsilon(x_0) \} > 0$ donc $B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega_\lambda \neq \emptyset \forall \lambda$
 $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \eta \Rightarrow \text{dist}(E_{\lambda_0}, \Omega_\lambda) < \varepsilon$. #

Un résultat semblable a été établi par [C,F] pour le problème suivant

$$\begin{cases} u > 0 & \text{sur } \Omega \\ -\Delta u + f > 0 & \text{sur } \Omega \\ (-\Delta u + f)u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ $0 < \alpha < 1$.

VII.2.2 Etude de la première valeur propre du problème linéarisé sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence, le long de la branche maximale.

Dans ce paragraphe, on suppose que $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $A\Psi < 0$.

Soit $v(\lambda)$ la valeur propre fondamentale de :

$$Aw = v F'(\bar{u}(\lambda)) w \text{ sur } \Omega_\lambda, w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\lambda;$$

nous allons établir le résultat suivant :

Proposition VII.4

Si il existe λ_* tel que pour tout $\lambda > \lambda_*$, $S\bar{u}(\lambda)$ soit un espace vectoriel, $\partial\Omega_\lambda$ régulière et $F'(\bar{u}(\lambda_*)) > 0$ alors :

$\lambda \in \mathbb{R}^+ \rightarrow v(\lambda) \in \mathbb{R}$ est une application continue à droite en λ_* .

Considérons une suite de nombres réels λ_p , $\lambda_p \rightarrow \lambda_*$ lorsque $p \rightarrow +\infty$; on note $u_p = \bar{u}(\lambda_p)$, $u_* = \bar{u}(\lambda_*)$, $\Omega_p = \Omega - E_{\lambda_p}$,

$$\Omega_* = \Omega - E_{\lambda_*}.$$

On sait [proposition VII.1] que $u_p \rightarrow u_*$ dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $C_0(\bar{\Omega})$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Lemme VII.5

Pour toute suite λ_p telle que $\lambda_p \rightarrow \lambda_*$, et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$P_{S_{u_p}}[v] \rightarrow P_{S_{u_*}}[v] \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ lorsque } p \rightarrow +\infty$$

$$\text{et } P_{S_{u_p}}[P_{S_{u_*}}[v]] = P_{S_{u_p}}[v].$$

Démonstration du lemme VII.5

i. Cas où $v \in D(\Omega_*)$

Soit $v \in D(\Omega_*)$, $\delta = \text{dist}(E_*, \text{supp}(v))$ $\delta > 0$.

Appliquons le lemme VII.4 en λ_* : il existe p_0 tel que $\forall p$, $p \geq p_0$,

$$\text{dist}(E_*, \Omega_p) < \frac{\delta}{2}.$$

Or $E_* \subset E_p$ donc $\text{supp}(v) \subset \Omega_p$ $\forall p \geq p_0$ donc $P_{S_{u_p}}[v] = v$ et puisque $P_{S_{u_*}}[v] = v$, on a bien $\lim_{p \rightarrow +\infty} P_{S_{u_p}}[v] = P_{S_{u_*}}[v]$ dans $H_0^1(\Omega)$.

ii. $D(\Omega_*)$ étant dense dans $H_0^1(\Omega_*)$, alors en identifiant un élément de $D(\Omega_*)$ et son prolongement par 0 sur E_* , $D(\Omega_*)$ est dense dans Su_* pour la topologie de $H_0^1(\Omega)$; P_{Su_p} , P_{Su_*} étant des applications lipschitziennes sur $H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\forall v \in Su_* \quad P_{Su_p}[v] \rightarrow P_{Su_*}[v] = v \text{ lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

iii. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$, $v = P_{Su_*}[w] \in Su_*$ donc, d'après ii, $P_{Su_p}[P_{Su_*}[w]] \rightarrow P_{Su_*}[w]$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$; mais pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $E_* \subset E_p$ donc $Su_p \subset Su_*$ $\Rightarrow P_{Su_p}[P_{Su_*}[w]] = P_{Su_p}[w]$ d'où le résultat.

#

Notations

Soit Q_* l'opérateur $v \in H_0^1(\Omega) \rightarrow Q_*(v) = P_{Su_*}[GF'(u_*)v] \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $Q_p : v \in H_0^1(\Omega) \rightarrow Q_p(v) = P_{Su_p}[GF'(u_p)v] \in H_0^1(\Omega)$) c'est un opérateur linéaire compact.

De plus $\partial\Omega_*$ étant régulière et $Su_* = \{w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E_*\}$, on montre que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad a(Q_*(v), w) = \int_{\Omega_*} F'(u_*)v w \, dx$$

en écrivant $a(Q_*(v), w)$ sous la forme d'une intégrale sur Ω que l'on décompose en une intégrale sur Ω_* et une autre sur E_* ; cette dernière est nulle car $Q_*(v)=0$ q.p. sur E_* ; on transforme l'autre en utilisant la formule de Green sur Ω_* .

Ainsi Q_* (resp. Q_p) est un opérateur linéaire compact auto-adjoint et positif pour a . Il admet donc une suite décroissante de valeurs propres positives qui tendent vers 0; ses valeurs propres sont strictement positives car $F'(u_*) > 0$ (resp. $F'(u_p) > 0$ pour p assez grand par continuité). On note μ_*^1 (resp. μ_p^1) la plus grande valeur propre de Q_* (resp. Q_p).

On montre facilement que : pour $\mu \neq 0$

$$\mu \text{ valeur propre de } Q_* \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \text{ est valeur propre de } \begin{cases} Aw = v F'(u_*)w \text{ sur } \Omega_*, \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_*. \end{cases}$$

$$\text{donc } \mu_*^1 = \frac{1}{v(\lambda_*)} \quad \text{de même } \mu_p^1 = \frac{1}{v(\lambda_p)}.$$

Démonstration de la proposition VII.4

Considérons une suite $\lambda_p \rightarrow \lambda_*$; il suffit de montrer que :
 $\mu_p^1 \rightarrow \mu_*^1$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

1. Montrons, que pour tout $v \in L^2(\Omega)$, $Q_p(v) \rightarrow Q_*(v)$ dans $H_0^1(\Omega)$

Soit $v \in L^2(\Omega)$ donné,

$$Q_p(v) - Q_*(v) =$$

$$P_{S_{u_p}}[GF'(u_p)v - GF'(u_*)v] + P_{S_{u_p}}[GF'(u_*)v] - P_{S_{u_*}}[GF'(u_*)v]$$

$$\text{or } F'(u_p) = F'(u_*) + F''(\xi_p)(u_p - u_*)$$

où $\xi_p(x) \in [u_*(x), u_p(x)]$ donc $0 \leq \xi_p \leq |\Psi|_\infty$ p.p. sur Ω

et il existe $M > 0$ telle $|F''(\xi_p)|_\infty \leq M \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

C désigne dans toute la démonstration diverses constantes strictement positives indépendantes de p .

$$\begin{aligned} \|P_{S_{u_p}}[GF'(u_p)v - GF'(u_*)v]\| &\leq C |(F'(u_p) - F'(u_*))v|_2 \\ &\leq C |(u_p - u_*)v|_2 \\ &\leq C |u_p - u_*|_\infty |v|_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Q_p(v) - Q_*(v)\| \leq C |u_p - u_*|_\infty |v|_2 + \|P_{S_{u_p}}[GF'(u_*)v] - P_{S_{u_*}}[GF'(u_*)v]\|$$

Grâce à la proposition VII.2 : $|u_p - u_*|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

De plus en appliquant le lemme VII.5 à $GF'(u_*)v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\|Q_p(v) - Q_*(v)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } p \rightarrow +\infty.$$

2. Montrons que $\|Q_p - Q_*\| \rightarrow +\infty$ lorsque $p \rightarrow +\infty$

Pour tout $v \in L^2(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|Q_p(v)\| \leq C \|GF'(u_p)v\| \leq C |F'(u_p)v|_2 \leq C |v|_2$$

car $0 \leq u_p \leq |\Psi|_\infty$ donc il existe $M > 0$ telle que $|F'(u_p)|_\infty \leq M \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$(Q_p, p \in \mathbb{N})$ est une famille équicontinue d'opérateurs linéaires continus de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, $Q_p(v) \rightarrow Q_*(v)$ dans $H_0^1(\Omega) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$

Soit $B_a = \{ v \in H_0^1(\Omega) / a(v, v) = 1 \}$; B_a est compacte dans $L^2(\Omega)$.

Le théorème d'Ascoli appliqué sur B_a implique :

$$\|Q_p - Q_*\| = \sup \{ \sqrt{a((Q_p - Q_*)(v), (Q_p - Q_*)(v))} / v \in B_a \} \rightarrow 0$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$.

3. Q_p (resp. Q_*) est un opérateur compact de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même, auto-adjoint, défini positif pour a ;
donc $\mu_p^{-1} = \max(a(Q_p(v),v) / v \in H_0^1(\Omega), a(v,v)=1) = \|Q_p\|$
de même $\mu_*^{-1} = \|Q_*\|$; le point 2. implique que $\|Q_p\| \rightarrow \|Q_*\|$
donc $\mu_p^{-1} \rightarrow \mu_*^{-1}$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. #

Remarque VII.2

On a ainsi prouvé, sous des hypothèses assurant que :
 $u_p \rightarrow u_*$ dans $C_0(\bar{\Omega})$ et $\text{dist}(\Omega_p, E_*) \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$, la convergence de la valeur propre fondamentale de :
 $Aw = \mu F'(u_p)w$ sur Ω_p , $w = 0$ sur $\partial\Omega_p$,
vers la valeur propre fondamentale de :
 $Aw = \mu F'(u_*)w$ sur Ω_* , $w = 0$ sur $\partial\Omega_*$.

Remarque VII.3

Supposons $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $A\Psi < 0$;
Soit λ_* tel que pour tous $\lambda > \lambda_*$, $S\bar{u}(\lambda)$ soit un espace vectoriel et $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ vérifie la condition (Σ) , on sait que, pour tout $\lambda > \lambda_*$ il existe une unique direction conique à droite et à gauche en $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ notée z_λ . De plus l'application :
 $\lambda \in [\lambda_*, +\infty) \rightarrow z_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ est continue à droite en λ_* .

Idée de la démonstration

Considérons une suite $\lambda_p \rightarrow \lambda_*$ lorsque $p \rightarrow +\infty$, on montre que la suite z_{λ_p} est bornée dans $H_0^1(\Omega)$; on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers z dans $L^2(\Omega)$ fort et $H_0^1(\Omega)$ faible; en utilisant le lemme VII.5, on a $z = z_{\lambda_*}$ et $z_{\lambda_p} \rightarrow z_{\lambda_*}$ dans $H_0^1(\Omega)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.

#

VII.2.3 Etude du premier point de changement de stabilité.

On suppose $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $A\Psi < 0$, $F(0) > 0$.

Notation:

Supposons qu'il existe un point (λ_*, u_*) appartenant à la branche maximale de solutions de (1.1), $u_* = \bar{u}(\lambda_*)$, tel que :

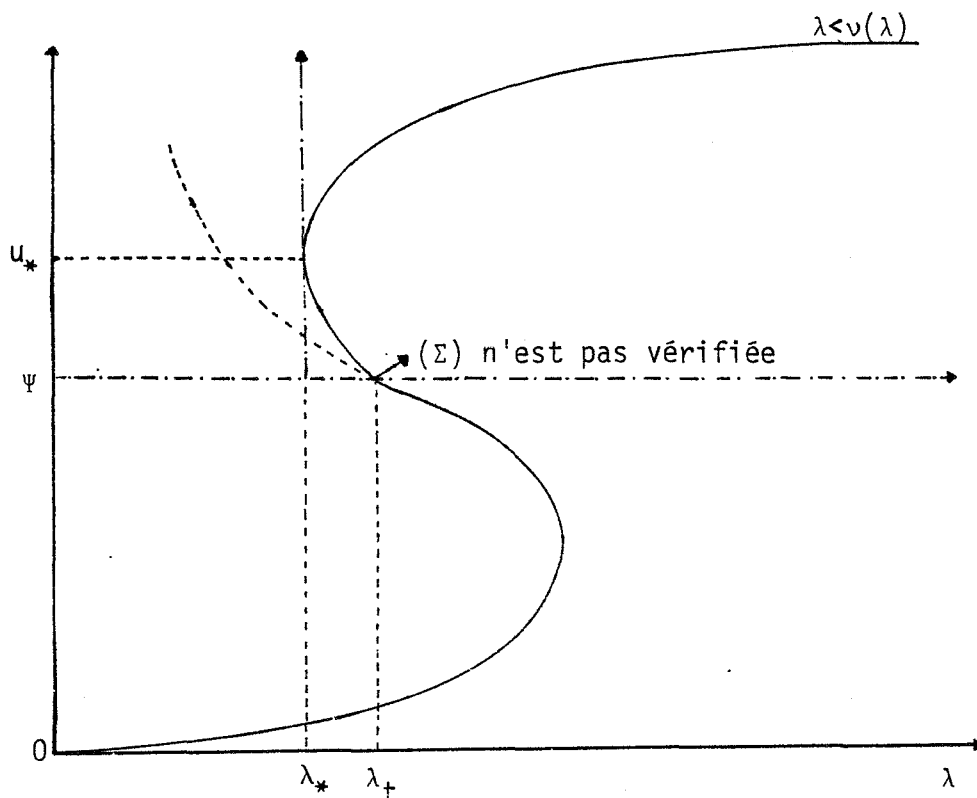
- $F'(u_*) > 0$
- $\forall \lambda > \lambda_*$ $S\bar{u}(\lambda)$ est un espace vectoriel, $\partial\Omega_\lambda$ est régulière.
- $\forall \lambda > \lambda_*$ $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ vérifie la condition (Σ) c'est à dire $\lambda < v(\lambda)$
- $\lambda_* = v(\lambda_*)$.

On dira alors que (λ_*, u_*) est le **premier point de changement de stabilité** le long de la branche de solutions maximales.

Nous allons montrer que (λ_*, u_*) est un point singulier de (1.1) vérifiant les hypothèses du théorème V.1, qui assurent l'existence d'un développement de solutions de (1.1) autour de (λ_*, u_*) .

Remarque VII.4

1. On peut évidemment remplacer la dernière hypothèse : $\lambda_* = v(\lambda_*)$ par la suivante : (λ_*, u_*) ne vérifie pas la condition (Σ) (car l'application $\lambda \rightarrow v(\lambda)$ est continue à droite en λ_* [proposition VII.4])
2. des simulations numériques (c.f. paragraphe VII.3) montrent qu'en général, on est dans la situation suivante:



C'est à dire :

- le point de transition équation-inéquation ne vérifie pas la condition (Σ)
- il existe, sur la branche maximale de solutions, un point de retournement (λ_*, u_*) tel que :
 - $\forall \lambda > \lambda_*$ $S\bar{u}(\lambda)$ est un espace vectoriel, $\partial\Omega_\lambda$ est régulière,
 - $\forall \lambda > \lambda_*$ $(\lambda, \bar{u}(\lambda))$ vérifie la condition (Σ)
 - (λ_*, u_*) ne vérifie pas la condition (Σ).

Proposition VII.5

On suppose que : $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $A\Psi < 0$, $F(0) > 0$, et qu'il existe un premier point (λ_*, u_*) de changement de stabilité le long de la branche maximale.

Alors (λ_*, u_*) est un point singulier de (1.1).

Si H_* désigne l'opérateur linéaire :

$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow H_*(w) = w - P_{S_{u_*}}[\lambda_* GF'(u_*)w] \in H_0^1(\Omega)$

alors $\text{Ker}(H_*)$ est un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$ de dimension 1, il existe $\phi \in \text{Ker}(H_*)$ tel que $\phi > 0$ sur Ω_* , $\phi = 0$ sur E_* donc $(F(u_*), \phi) > 0$.

Si $n \leq 4$, on peut alors appliquer le théorème V.1:

Corollaire VII.2

On suppose que : $n \leq 4$, $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $A\Psi < 0$, $F(0) > 0$ et qu'il existe un premier point (λ_*, u_*) de changement de stabilité le long de la branche maximale .

Alors il existe $\eta > 0$ et une multi-application :

$s \in (-\eta, \eta) \rightarrow (\delta(s), w(s)) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$, $w(s) \in \mathcal{W}$ (un supplémentaire donné de $\text{Ker}(H_*)$) tels que :

$(\lambda_* + s\delta(s), u_* + s\phi + sw(s))$ soit solution de (1.1).

De plus $\lim_{s \rightarrow 0} \delta(s) = 0$ et $\lim_{s \rightarrow 0} \|w(s)\| = 0$.

On obtient ainsi un résultat qui est à rapprocher de celui obtenu pour les équations [proposition II.2 et théorème II.3], mais on a seulement des multi-applications et on ne sait pas, même lorsque la non-linéarité f est convexe si $\lambda_* + s\delta(s) > \lambda_*$; on ne peut pas affirmer que l'on a un vrai point de retournement.

Démonstration de la proposition VII.5

1. Rappelons que $w \rightarrow Q_*(w) = P_{S_{u_*}}[GF'(u_*)w]$

est un opérateur linéaire compact de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même tel que si μ_*^{-1} est sa plus grande valeur propre, on ait :

$$v(\lambda_*) = \frac{1}{\mu_*^{-1}} ; \text{ donc } \lambda_* = \frac{1}{\mu_*^{-1}}, \text{ il existe } w \in H_0^1(\Omega) \ w \neq 0$$

tel que $Q_*(w) = \frac{1}{\lambda_*} w$ c'est à dire $w = P_{S_{u_*}}[\lambda_* GF'(u_*)w]$.

=> (λ_*, u_*) est un point singulier de (1.1).

2. D'autre part $\frac{1}{\mu_*^{-1}}$ est aussi la valeur propre fondamentale de :

$Aw = \mu F'(u_*)w$ sur Ω_* , $w = 0$ sur $\partial\Omega_*$, $F'(u_*) > 0$ donc [K.R] il existe $\phi \in H_0^1(\Omega_*)$ tel que $A\phi = \lambda_* F'(u_*)\phi$ sur Ω_* , $\phi = 0$ sur $\partial\Omega_*$, $\phi > 0$ sur Ω_* .

On prolonge ϕ en un élément de $H_0^1(\Omega)$, encore noté ϕ , en posant $\phi = 0$ sur E_* , alors $\phi = P_{S_{u_*}}[\lambda_* GF'(u_*)\phi]$ c'est à dire $\phi \in \text{Ker}(H_*)$ et $(F(u_*), \phi) > 0$ car $F(0) > 0$.

De plus, puisque les inverses des valeurs propres de Q_* sont les valeurs propres μ de : $Aw = \mu F'(u_*)w$ sur Ω_* , $w = 0$ sur $\partial\Omega_*$, les vecteurs propres se correspondant bijectivement par l'application :

$w \in S_{u_*} \rightarrow w/\Omega_*$ et réciproquement $w \in H_0^1(\Omega_*) \rightarrow v \in S_{u_*}$ avec $v=w$ sur Ω_* , $v=0$ sur E_* ;

λ_* étant la valeur propre fondamentale de $Aw = \mu F'(u_*)w$ sur Ω_* , $w = 0$ sur $\partial\Omega_*$, on sait [K.R] que $\text{Ker}(H_*)$ est de dimension 1.

#

VII.3 Analyse et interprétation des conditions (Σ) , $(\Sigma)_t$, $(\Sigma'')_t$

Nous avons, au cours de ce travail, introduit diverses conditions, principalement (Σ) , qui au point de transition équation-inéquation de (1.1) a été notée $(\Sigma)_t$, et $(\Sigma'')_t$ au point de transition, cette dernière hypothèse est plus faible que $(\Sigma)_t$.

Ces deux conditions (Σ) et $(\Sigma'')_t$, nous ont permis de prouver l'existence d'un développement local de solutions de (1.1).

Nous allons montrer qu'elles sont fortement liées à des conditions de stabilité et nous donnons des résultats numériques qui montrent l'évolution de (Σ) le long de la branche maximale de solutions de (1.1) et mettent en évidence un échange de stabilité aux points de retournement.

VII.3.1 Analyse de (Σ) et $(\Sigma'')_t$.

Soit (λ, u) une solution de (1.1), rappelons que : [chapitre IV]

(λ, u) vérifie (Σ)

$$\Leftrightarrow \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in Su-Su, \|w\|=1 \} > 0$$

Dans la suite, nous supposons que : si (λ, u) est solution de (1.1) on a $F'(u) > 0$;

alors si $v(\lambda, u) = \inf \{ a(w, w) - \lambda (F'(u)w, w) / w \in Su-Su, |w|=1 \}$,

d'après le lemme III.2, on a :

(λ, u) vérifie $(\Sigma) \Leftrightarrow v(\lambda, u) > 0$.

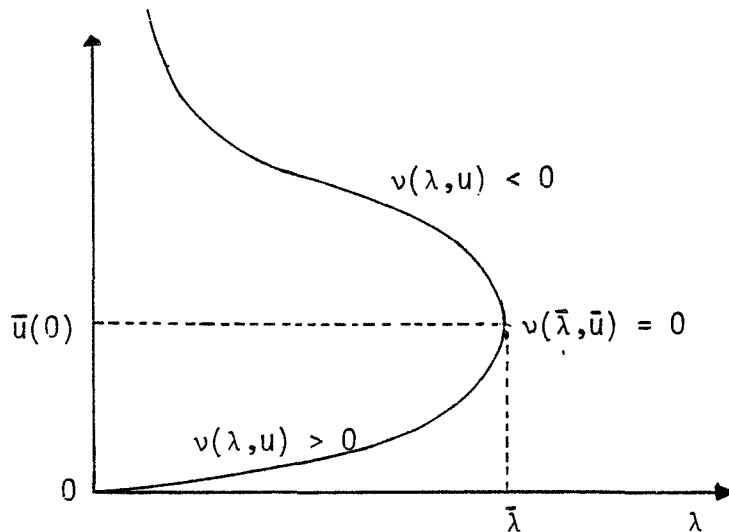
Cherchons à estimer, dans divers cas, $v(\lambda, u)$.

1. si (λ, u) est une solution équation de (1.1) (c'est à dire (λ, u) est solution de (1.1) et de (1.3)) telle que $\text{cap}\{u=\Psi\} = 0$, alors $Su = H_0^1(\Omega)$ et $v(\lambda, u)$ est la valeur propre fondamentale de l'équation linéarisée de (1.3) sur Ω :

$$(7.6) \quad Aw - \lambda F'(u)w = \mu w \text{ sur } \Omega, \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Dans ce cas , lorsque le théorème d'échange de stabilité [C.R] s'applique, on connaît le signe de $v(\lambda, u)$.

ceci est le cas si f est strictement convexe et si l'équation (1.3) admet un unique point de retournement $(\bar{\lambda}, \bar{u})$.



(Σ) est dans ce cas, exactement une condition de stabilité linéarisée relativement au problème d'évolution associé à l'équation (1.3).

2. si (λ, u) est une solution de (1.1) telle que S_u soit un espace vectoriel $S_u \neq H_0^1(\Omega)$ (le théorème IV.1 assure, sous certaines hypothèses, que l'on est dans ce cas) alors, E désignant l'ensemble de coïncidence $\{u = \Psi\}$,

si ∂E est régulière, $S_u = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E \}$ s'identifie à $H_0^1(\Omega - E)$; $v(\lambda, u)$ est, dans ce cas, la valeur propre fondamentale de l'équation linéarisée de (1.3) sur $\Omega - E$:

$$(7.7) \quad Aw - \lambda F'(u)w = \mu w \quad \text{sur } \Omega - E, \quad w = 0 \text{ sur } \partial(\Omega - E).$$

3. Envisageons enfin le cas du point de transition équation-inéquation de (1.1) [chapitre VI] alors $S_{u_t} - S_{u_t} = H_0^1(\Omega)$ et $v(\lambda_t, u_t)$ est la valeur propre fondamentale de l'équation linéarisée (7.6) sur Ω .

Cependant, nous avons vu au chapitre VI, que la condition $(\Sigma'')_t$:

$\inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in S_t, \|w\|=1 \} > 0$, qui est plus faible que $(\Sigma)_t$, assure l'existence d'un développement de solutions au voisinage de (λ_t, u_t) , $\lambda > \lambda_t$.

Rappelons que $S_t = S_{u_t} \cap -S_{u_t} = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w=0 \text{ q.p. sur } E_t \}$ avec $E_t = \{u_t = \Psi\}$.

Toujours sous l'hypothèse $F'(u_t) > 0$, la condition $(\Sigma'')_t$ est [lemme III.2] équivalente à :

$$v''(\lambda_t, u_t) = \inf \{ a(w, w) - \lambda_t (F'(u_t)w, w) / w \in S_t, |w|=1 \} > 0$$

si ∂E_t est régulière alors $S_t = H_0^1(\Omega - E_t)$ et $v''(\lambda_t, u_t)$ est la valeur propre fondamentale de l'équation linéarisée sur $\Omega - E_t$ (7.7).

Conclusion :

dans tous ces cas, en un point (λ, u) solution de (1.1), la condition la plus faible, (Σ) ou $(\Sigma'')_t$, peut s'énoncer ainsi :

$$v_c(\lambda, u) > 0$$

où $v_c(\lambda, u)$ est la valeur propre fondamentale de l'équation linéarisée (7.7) de (1.3) sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence : $\Omega - E(u)$ où $E(u) = \{u = \Psi\}$ (lorsque $\partial E(u)$ est régulière).

C'est cette condition qui permet de prouver l'existence d'un développement local de solutions de (1.1) autour de (λ, u) .

Nous allons estimer $v_c(\lambda, u)$, analytiquement en dimension 1, sur un problème particulier, puis numériquement en dimension ≥ 1 . Cette étude nous montrera que $v_c(\lambda, u)$ change de signe, en particulier aux points de retournement; par analogie avec les équations (c.f cas 1.) on peut dire que $v_c(\lambda, u) > 0$ est une condition de type stabilité.

VII.3.2 Etude analytique de $v_c(\lambda, u)$ en dimension 1.

On choisit $A = -\Delta$, $\Omega =]-1, 1[$, Ψ est constant égal à a , et f :

$t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}^+$ est de classe C^2 , strictement croissante, $f(0) > 0$ et telle qu'il existe $m > 0$ vérifiant $f''(t) > m \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ (cet exemple a été traité dans [Co]).

L'équation (1.3) devient :

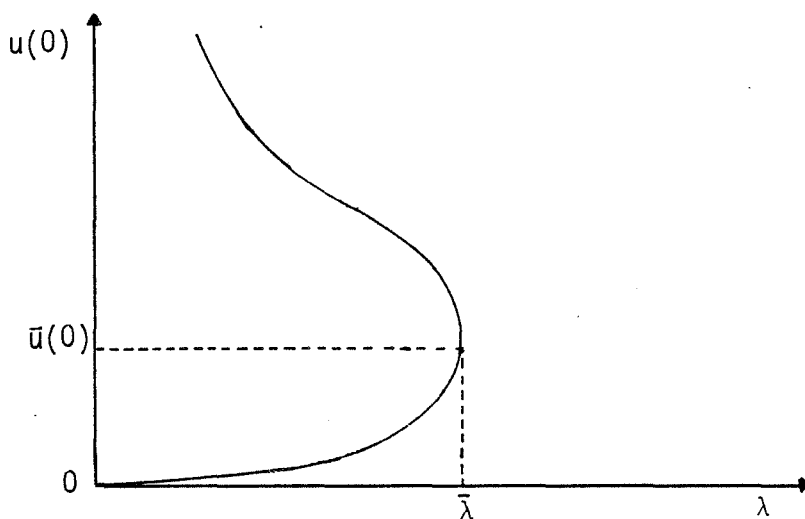
$$(7.8) \quad -u'' = \lambda f(u) \text{ sur }]-1, 1[, \quad u(1) = u(-1) = 0.$$

Alors [théorème II.3] il existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tel que l'équation (7.8) n'admette des solutions que pour $\lambda \leq \bar{\lambda}$, de plus [M.P] il existe $M > 0$ tel que $\forall \lambda \leq \bar{\lambda} \quad |u(\lambda)|_\infty \leq M$, on peut appliquer les résultats rappelés au paragraphe II.2.2 :

$\bar{u} = \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} u(\lambda)$ existe dans $C^{2, \alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$ et $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ est un point de

retournement.

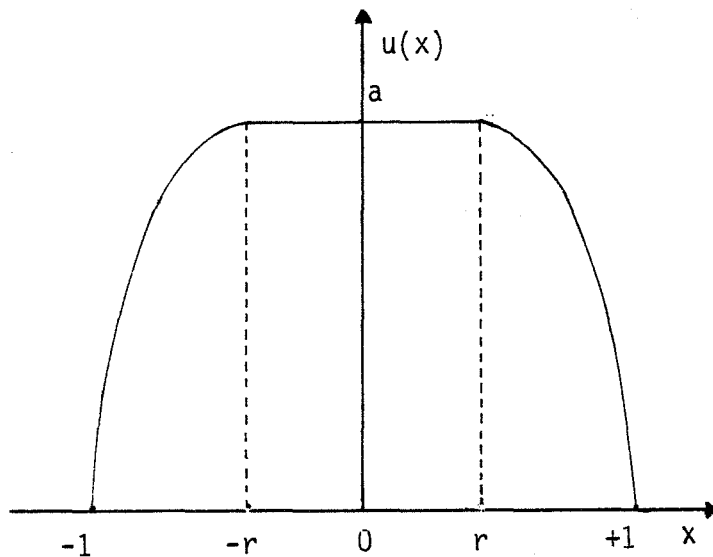
L'équation (7.8) admet le diagramme de bifurcation suivant :



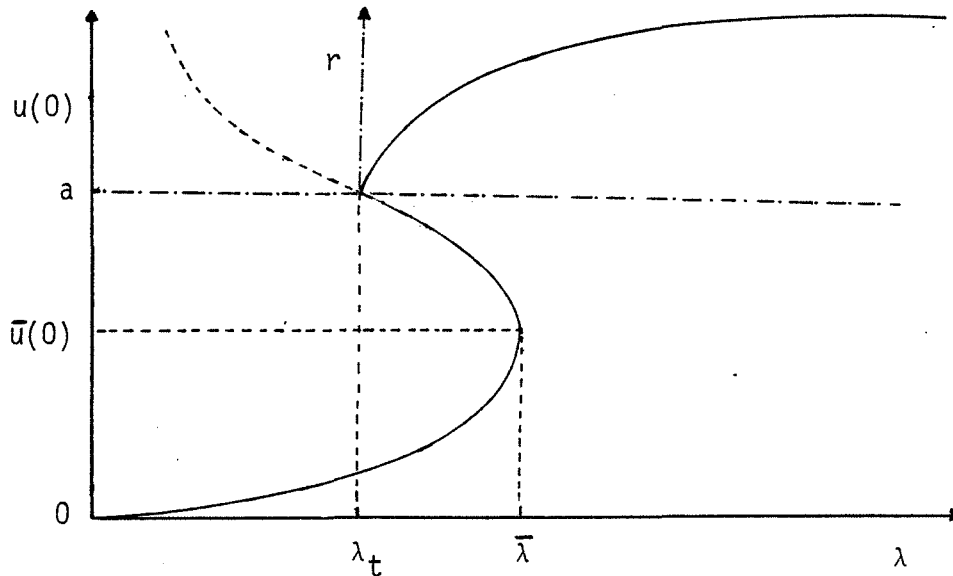
Les solutions symétriques, à frontière libre non triviale, du problème de l'obstacle (1.1) associé à (1.3) vérifient :

$$(7.9) \begin{cases} u(x)=a & \text{si } 0 < x < r, \quad u(r)=a; \quad u'(r)=0 \\ u'' + \lambda f(u) = 0 & \text{si } r < x < 1 \\ u(1)=0 \end{cases}$$

elles ont le profil suivant :



L'inéquation (1.1) admet le diagramme de bifurcation suivant :



Notons (λ_t, u_t) le point de transition équation-inéquation.

On a, dans ce cas particulier, une formule explicite donnant r en fonction de λ :

$$r = 1 - \frac{\sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{pour } \lambda > \lambda_t.$$

De plus, on a une estimation de $v_c(\lambda, u)$, en effet on montre que :

$$v_c(\lambda, u) > \frac{\lambda}{\lambda_t} v_2(\lambda_t, u_t) \quad \forall \lambda > \lambda_t$$

où $v_2(\lambda_t, u_t)$ est la deuxième valeur propre de l'équation (7.6) linéarisée en (λ_t, u_t) sur $\Omega =]-1, 1[$ qui, dans ce cas, s'écrit

$$(7.10) \quad -w'' - \lambda_t f'(u_t)w = \mu w \text{ dans }]-1, 1[, \quad w(-1) = w(1) = 0$$

Rappelons que $v(\lambda_t, u_t)$ est la première valeur propre de (7.10).

On montre aussi que :

$$v_c(\lambda, u) = \frac{\lambda}{\lambda_t} \gamma \quad \forall \lambda > \lambda_t, \quad \gamma \in \mathbb{R};$$

donc $\lambda \rightarrow v_c(\lambda, u)$ est une droite pour $\lambda > \lambda_t$.

Si on a un seul point de retournement $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ pour l'équation (1.3) (ce qui est, par exemple le cas avec $f(t)=e^t$) alors [C.R,M.P] :

$$v_2(\lambda_t, u_t) > 0;$$

ainsi $\forall \lambda > \lambda_t$ (c'est à dire sur toute la branche inéquation)
 $v_C(\lambda, u) > 0$.

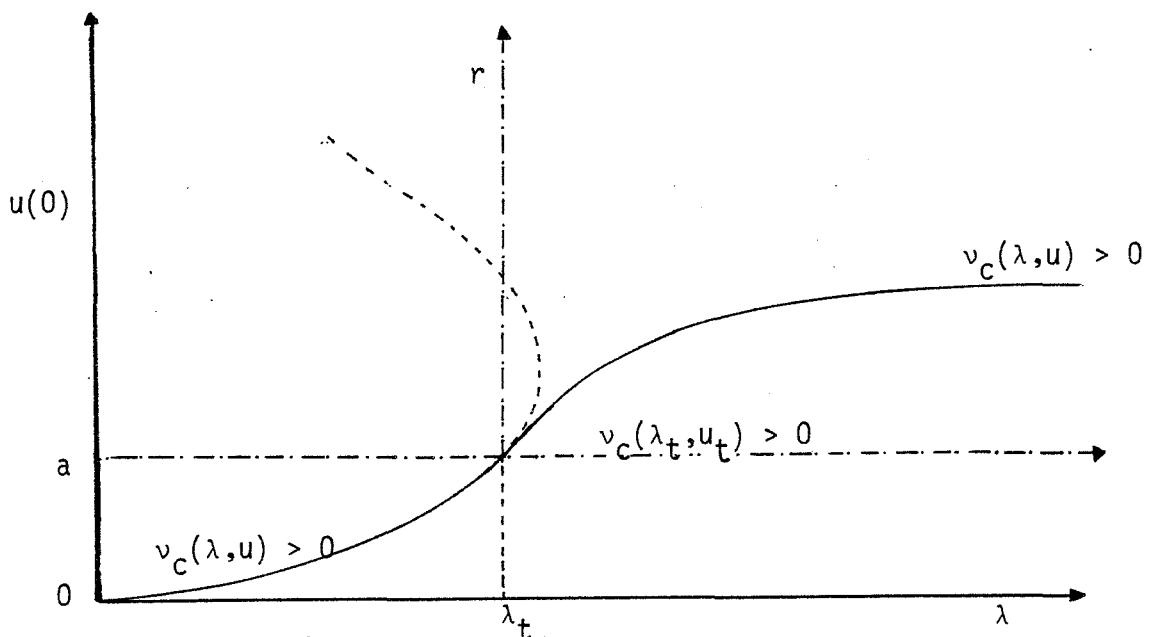
Etudions les changements de signe de $v_C(\lambda, u)$ en fonction de l'obstacle a :

si $a < \bar{u}(0)$

Le point de transition équation-inéquation est avant le premier point de retournement équation $(\bar{\lambda}, \bar{u})$, il est donc sur la branche minimale de solutions de (7.8) et $\forall \lambda > 0 \quad v_C(\lambda, u) > 0$:

Cependant, l'application $\lambda \rightarrow v_C(\lambda, u)$ est discontinue au passage du point de transition.

Le diagramme de bifurcation a l'allure suivante :



si $a = \bar{u}(0)$

Le point de transition équation-inéquation est le point de retournement équation $(\bar{\lambda}, \bar{u})$;

si $u(\lambda)$ désigne la solution équation de (1.1) pour $\lambda < \lambda_t$ (resp. maximale de (1.1) pour $\lambda > \lambda_t$), on a :

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_t} v_C(\lambda, u(\lambda)) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_t} v(\lambda, u(\lambda)) = v(\bar{\lambda}, \bar{u}) = 0$$

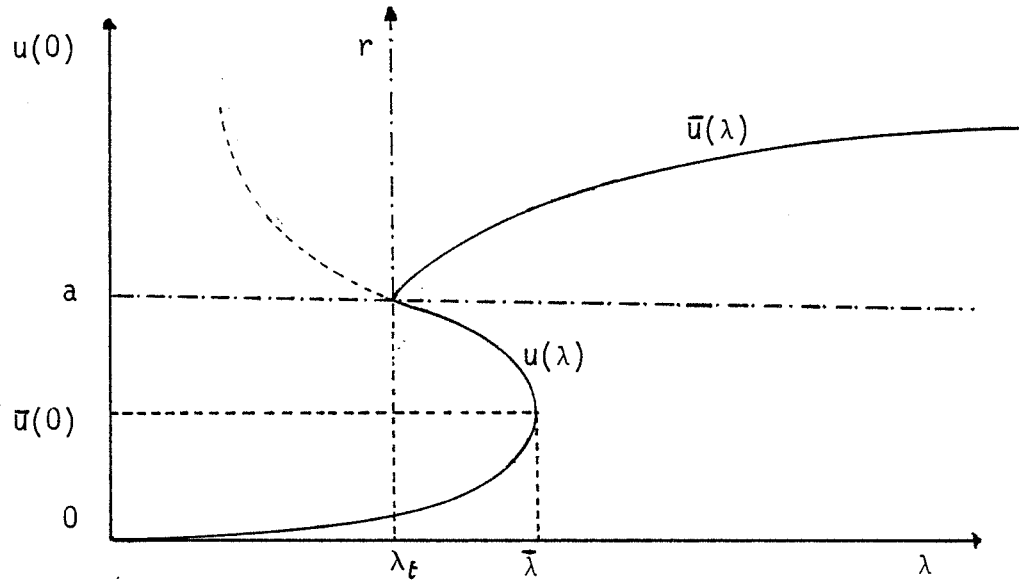
$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_t} v_C(\lambda, u(\lambda)) = v_C(\lambda_t, u_t) > 0 \text{ car } \{u_t = \psi\} = \{0\}.$$

L'application $\lambda \rightarrow v_C(\lambda, u(\lambda))$ n'est pas continue en λ_t .

si $a > \bar{u}(0)$

Le point de transition est après le point de retournement équation $(\bar{\lambda}, \bar{u})$, il n'est pas sur la branche minimale de solutions de (7.8).

Le diagramme de bifurcation a dans ce cas l'allure suivante :

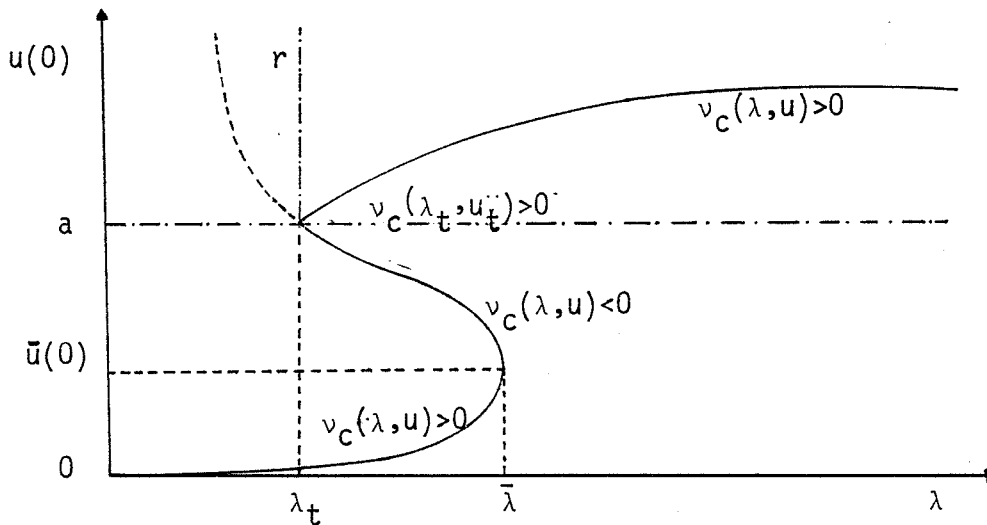


Si $u(\lambda)$ (resp. $\bar{u}(\lambda)$) désigne la solution équation maximale de (1.1) (resp. inéquation maximale) pour $\bar{\lambda} \geq \lambda \geq \lambda_t$ (resp. pour $\lambda \geq \lambda_t$) alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_t} v_c(\lambda, \bar{u}(\lambda)) = v_c(\lambda_t, u_t) > 0 \quad [\text{proposition VII.4}]$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_t} v_c(\lambda, u(\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_t} v(\lambda, u(\lambda)) < 0$$

Ce que l'on peut récapituler ainsi :



On remarque une discontinuité de l'application $(\lambda, u) \rightarrow v_c(\lambda, u)$ au passage du point de transition (λ_t, u_t)

Conclusion : pour cette classe de problèmes en dimension 1; le long de la branche inéquation, on a : $\nu_c(\lambda, u) > 0$; on dit, par analogie à la théorie des équations, que cette branche est stable (en un sens qu'il faudrait préciser); de plus quelque soit $a > 0$, cette branche ne se retourne pas.

On remarque que l'application $(\lambda, u) \rightarrow \nu_c(\lambda, u)$ est discontinue au passage du point de transition équation-inéquation; et lorsque $a > \bar{u}(0)$, elle change même de signe au passage de ce point, le point de transition apparaît alors comme un point de retournement généralisé avec échange de stabilité.

VII.3.3 Etude numérique de $\nu_c(\lambda, u)$ en dimension ≥ 1

On choisit $A = -\Delta$, $\Omega = B(0, 1)$ la boule unité ouverte de R^n , $f(t) = e^t$, l'obstacle Ψ est à symétrie radiale, différents cas ont été testés : $\Psi(x) = a$, $\Psi(x) = 1 - x^2$, $\Psi(x) = 2 - x^2$, $\Psi(x) = 4 \pm x^2$, $\Psi(x) = 2 - |x|$, $\Psi(x) = 1 + 5|x|$, $\Psi(x) = 2 + 5|x|$,

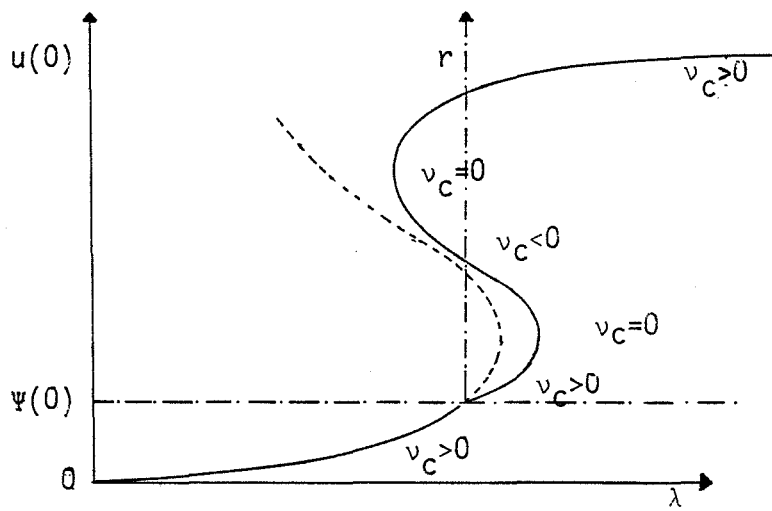
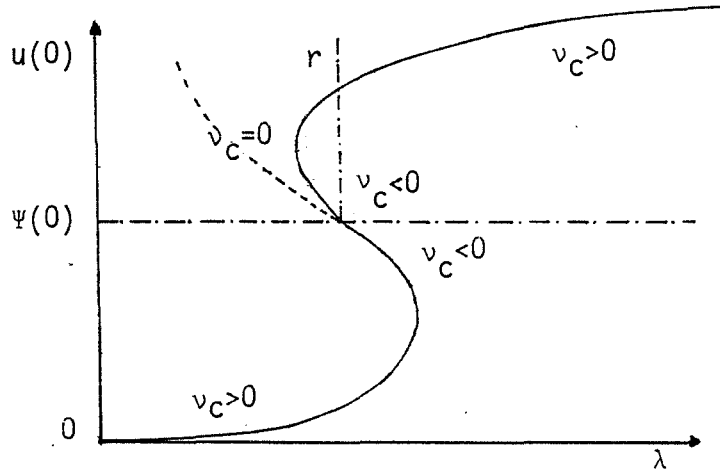
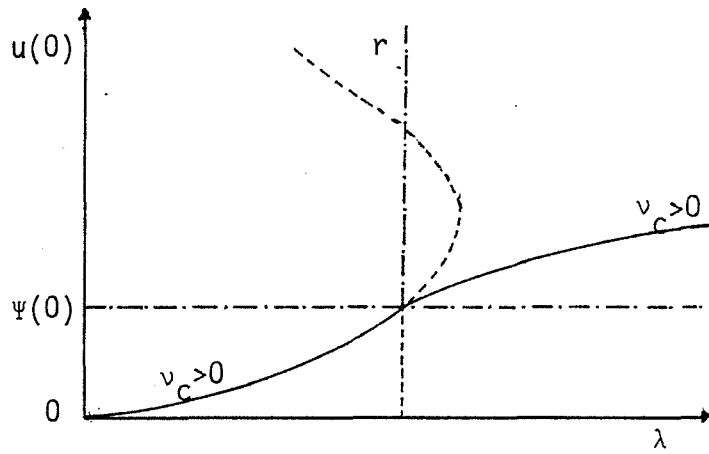
On s'intéresse aux solutions à symétrie radiale, et à frontière libre non triviale, qui vérifient donc:

$$(7.11) \quad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{\rho} u' + \lambda e^u = 0 & \text{si } r < \rho < 1 \\ u(r) = \Psi(r) \quad u'(r) = \Psi'(r) \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

Ce problème a été résolu numériquement par une méthode de tir [Co, He]. Pour chaque (λ, r, u) solution de (7.11), on a calculé numériquement la valeur propre fondamentale $\nu_c(\lambda, u)$ de l'équation linéarisée (7.7) sur le complémentaire de l'ensemble de coïncidence, qui dans ce cas s'écrit :

$$(7.12) \quad \begin{cases} z'' + \frac{n-1}{\rho} z' + \lambda e^z = \mu z & \text{si } r < \rho < 1 \\ z(r) = 0 \quad z(1) = 0 \end{cases}$$

Les résultats [He] apparaissent dans les figures en annexe; ils peuvent être schématisés par les diagrammes de bifurcation suivants :



CONCLUSIONS

- En dimension 1, on a $v_C(\lambda, u) > 0$ sur toute la branche inéquation et on vérifie que, si Ψ est constant $\lambda \rightarrow v_C(\lambda, u)$ est une droite. La branche inéquation ne se retourne jamais.

- En dimension 2, 3 ou 4, des retournements apparaissent parfois sur la branche inéquation .

On constate que lorsqu'il n'y a pas de retournement sur la branche inéquation, $v_C(\lambda, u) > 0 \quad \forall (\lambda, u)$ solution de (1.1), $\lambda > \lambda_t$, (λ_t, u_t) étant le point de transition équation-inéquation.

Nous avons mis en évidence des exemples où un, voir deux retournements apparaissent sur la branche inéquation. On observe que $v_C(\lambda, u)$ change de signe au voisinage de ces points et s'annule en ces points. De plus pour λ assez grand ($\lambda \rightarrow +\infty$) $v_C(\lambda, u) > 0$.

La condition $v_C(\lambda, u) > 0$ apparaît comme une condition de stabilité, avec échange de stabilité aux points de retournement.

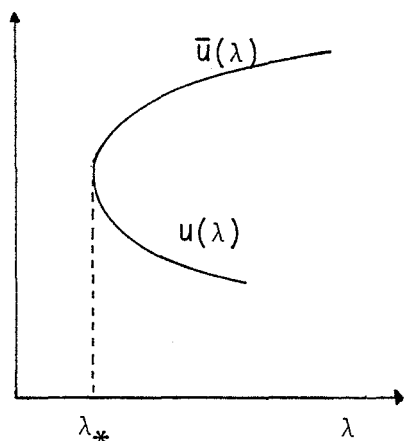
- Lorsqu'au voisinage du point de transition (λ_t, u_t) l'inéquation (1.1) admet, pour tout $\lambda > \lambda_t$, une solution équation et une solution inéquation, on constate que $v_C(\lambda, u)$ change de signe, sans s'annuler, au voisinage de λ_t . On peut dire que le point de transition équation-inéquation est un point de retournement en un sens généralisé.

Notons (λ_*, u_*) le premier point de retournement qui apparaît, lorsque l'on part de $\lambda = +\infty$, sur la branche maximale, on a :

$$\begin{aligned} v_C(\lambda, \bar{u}(\lambda)) &> 0 \quad \text{pour } \lambda > \lambda_*, \\ v_C(\lambda_*, u_*) &= 0 \end{aligned}$$

(λ_*, u_*) correspond au premier point de changement de stabilité le long de la branche maximale de solutions de (1.1) [paragraphe VII.2.3]

Si $u(\lambda)$ désigne la deuxième branche de solutions de (1.1) au voisinage de (λ_*, u_*) pour $\lambda > \lambda_*$; $u(\lambda) < u_*$;

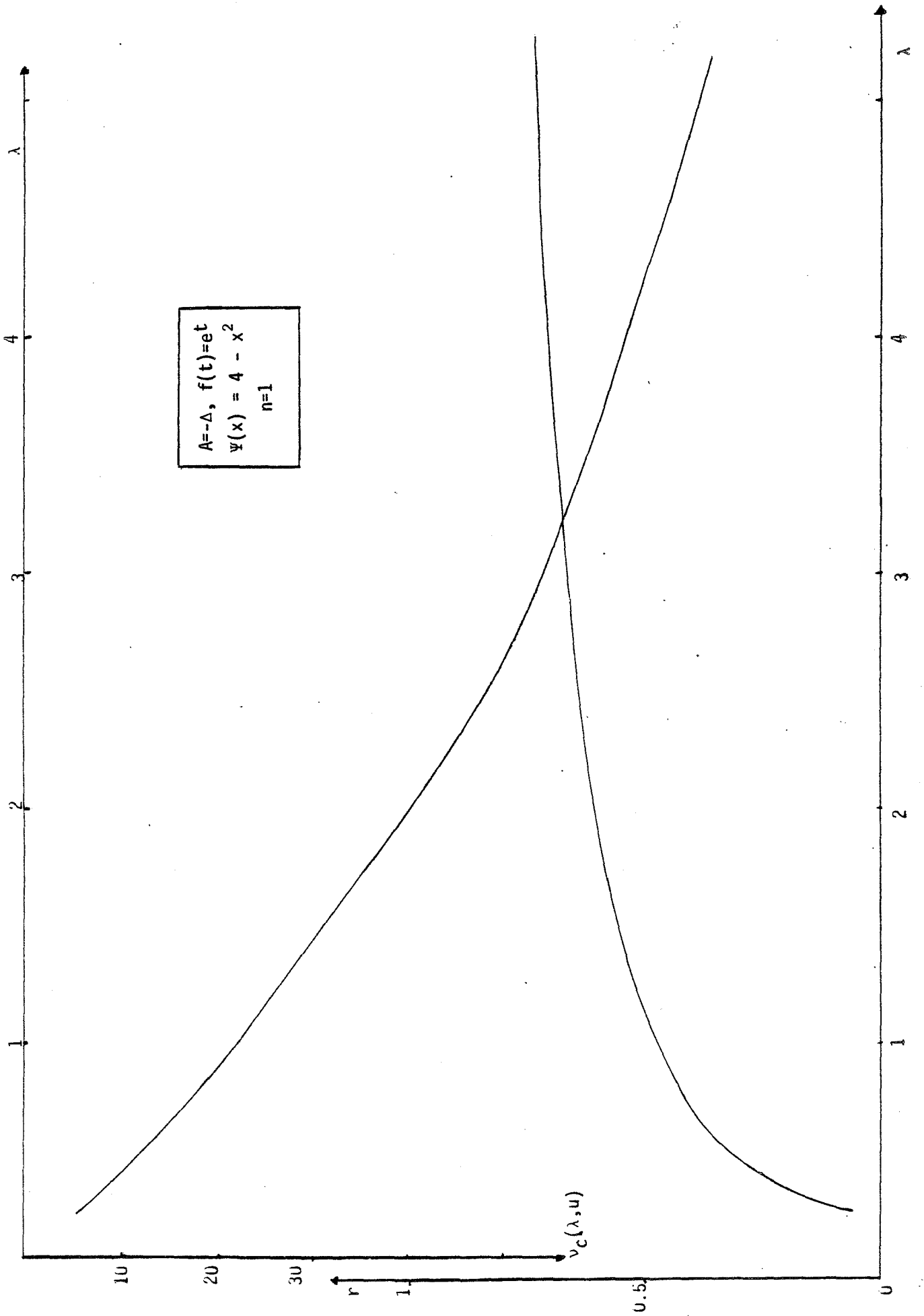


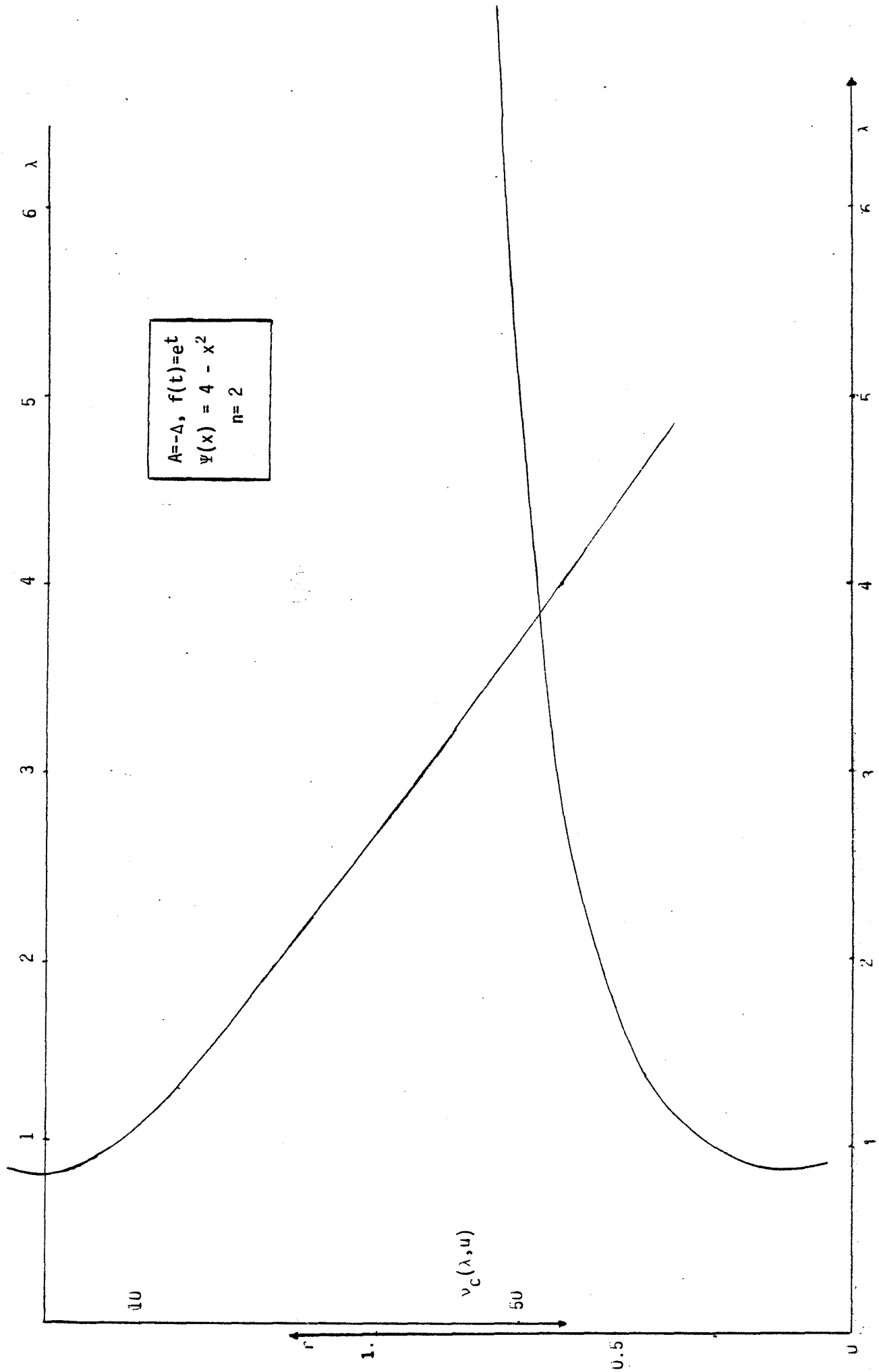
on observe que $v_c(\lambda, u(\lambda)) < 0$ pour $\lambda > \lambda_*$, λ voisin de λ_* , $u < u_*$.
Ceci justifie mieux le terme de point de changement de stabilité
introduit au paragraphe VII.2.3.

Remarquons enfin que : parmi les exemples considérés, certains vérifient les conclusions des résultats théoriques démontrés aux chapitres VI et VII, sans en vérifier toutes les hypothèses (notamment l'hypothèse $A \Psi < 0$).

ANNEXE

QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES





10

50

1

0.5

0

1

2

3

4

5

6

λ

1

2

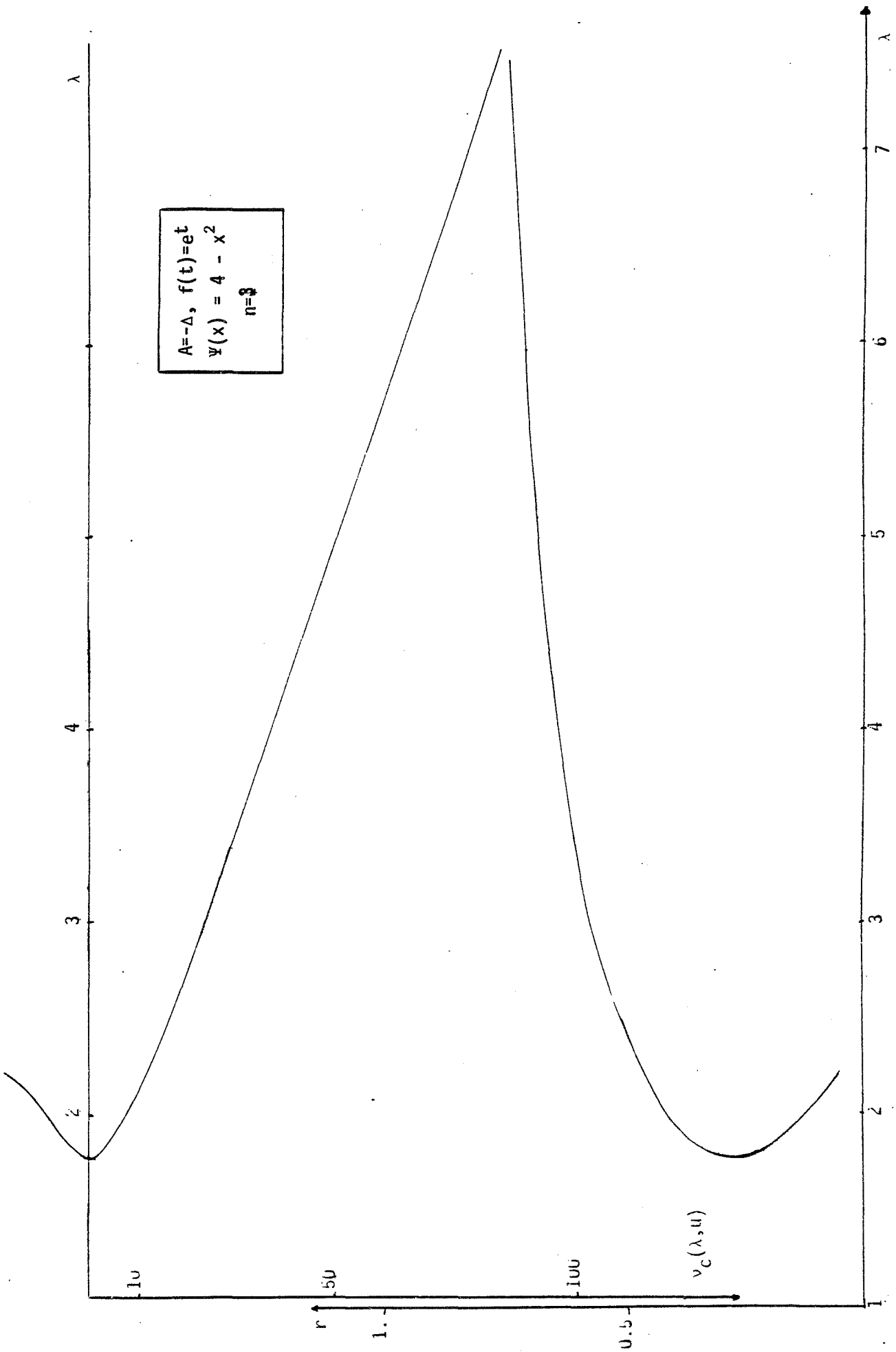
3

4

5

6

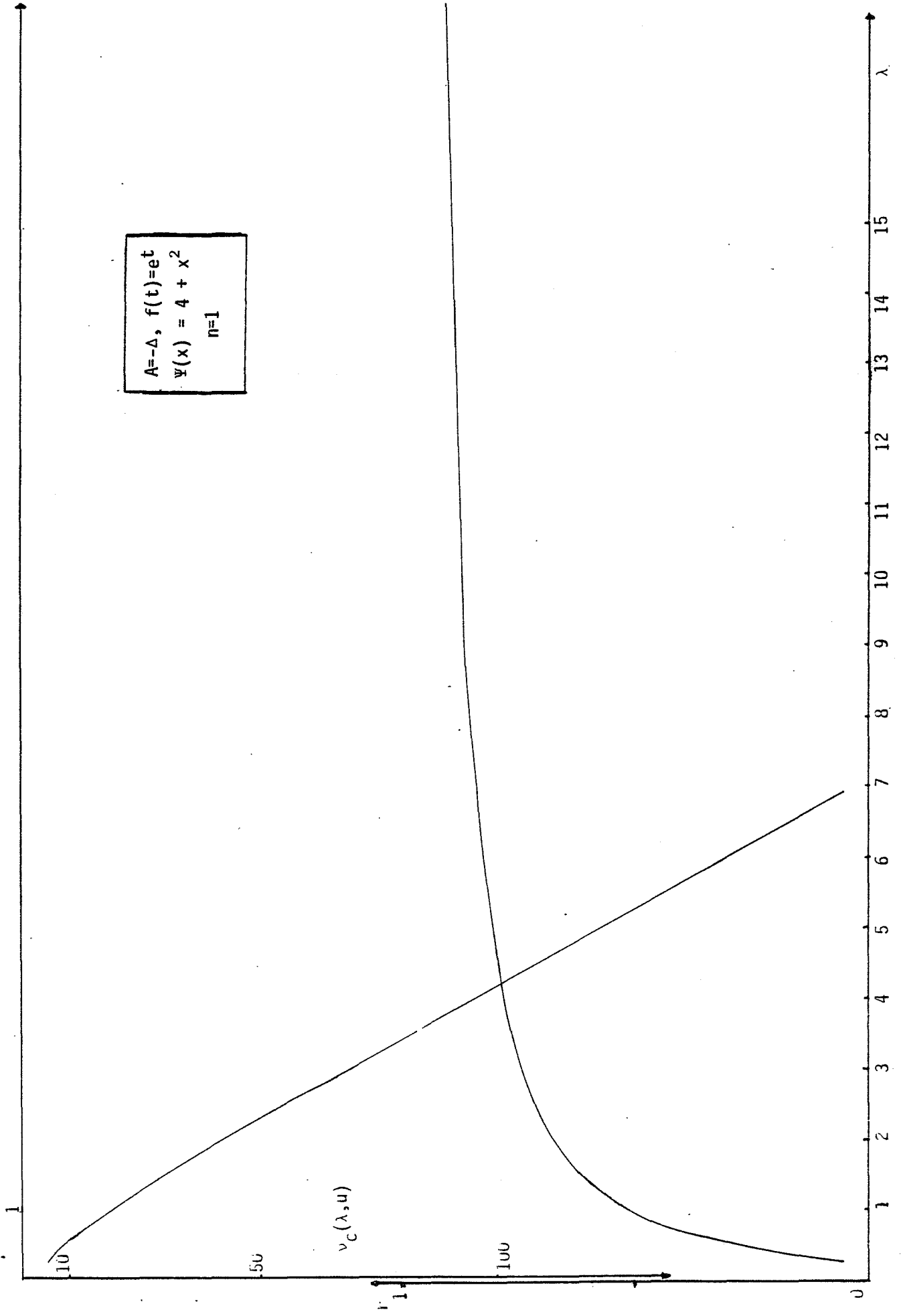
λ

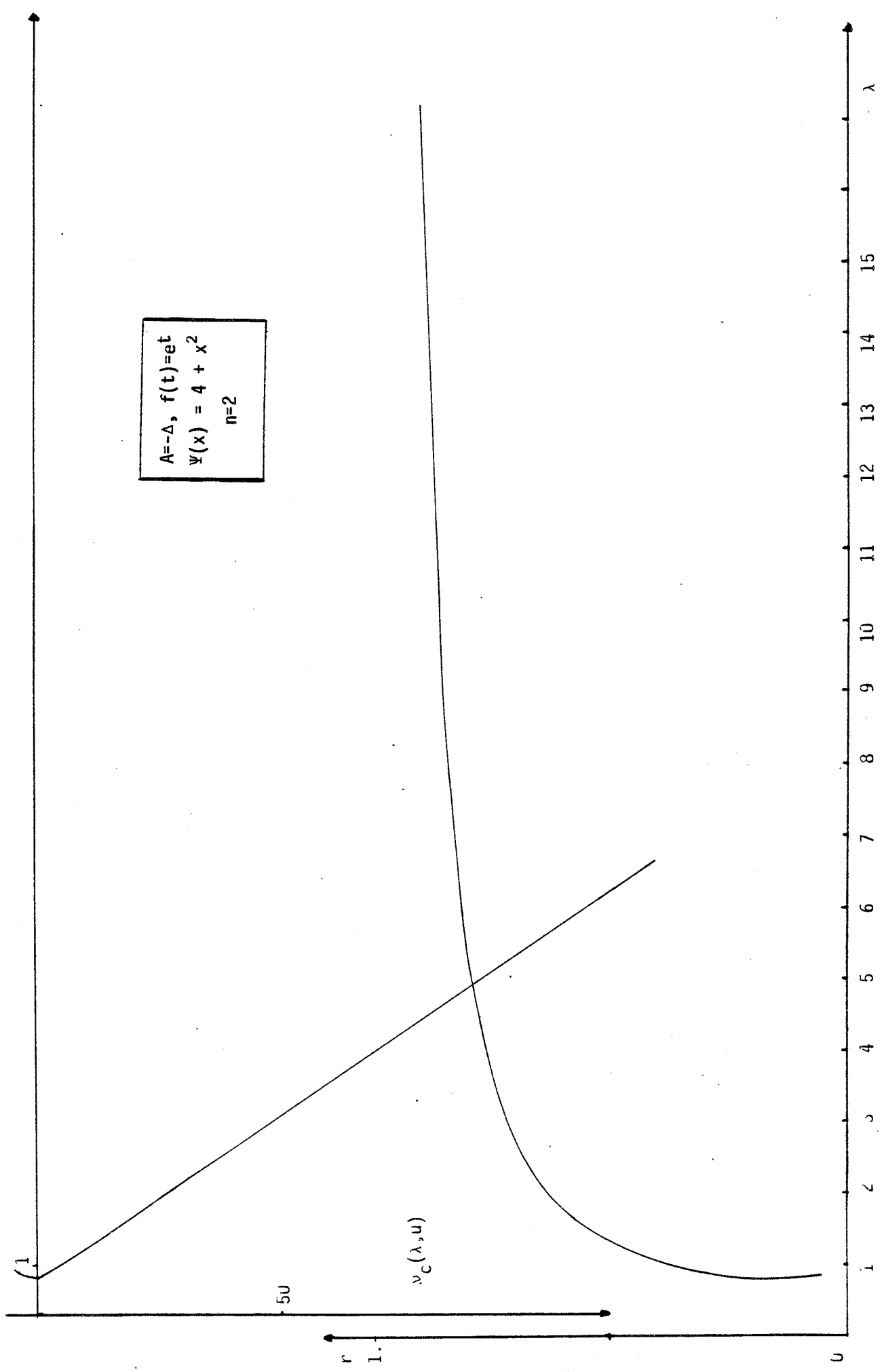


$$A = -\Delta, f(t) = et$$

$$\Psi(x) = 4 + x^2$$

$$n = 1$$





$A = -\Delta, f(t) = et$
 $\Psi(x) = 4 + x^2$
 $n = 2$

$v_c(\lambda, u)$

50

r
1.

λ

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

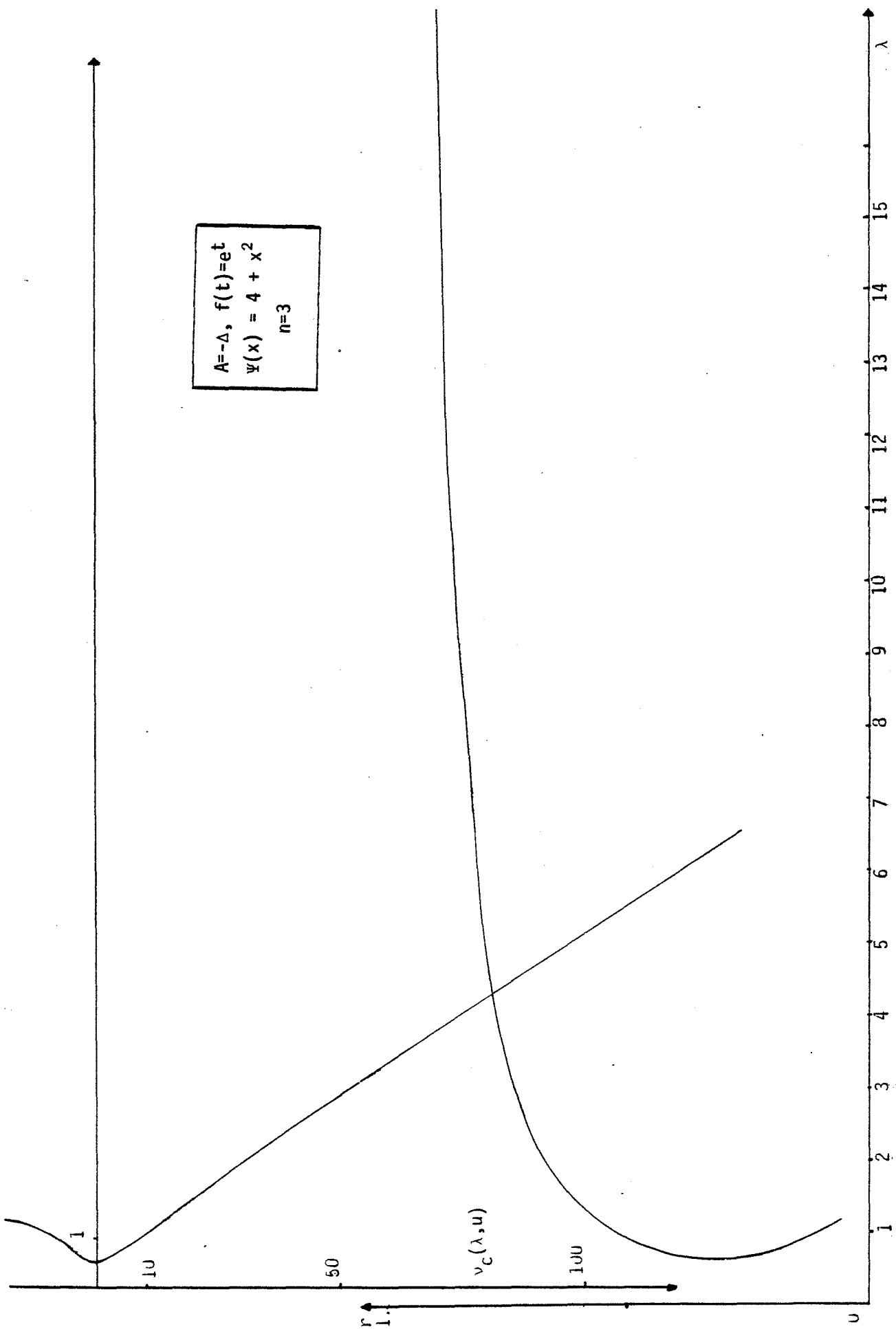
4

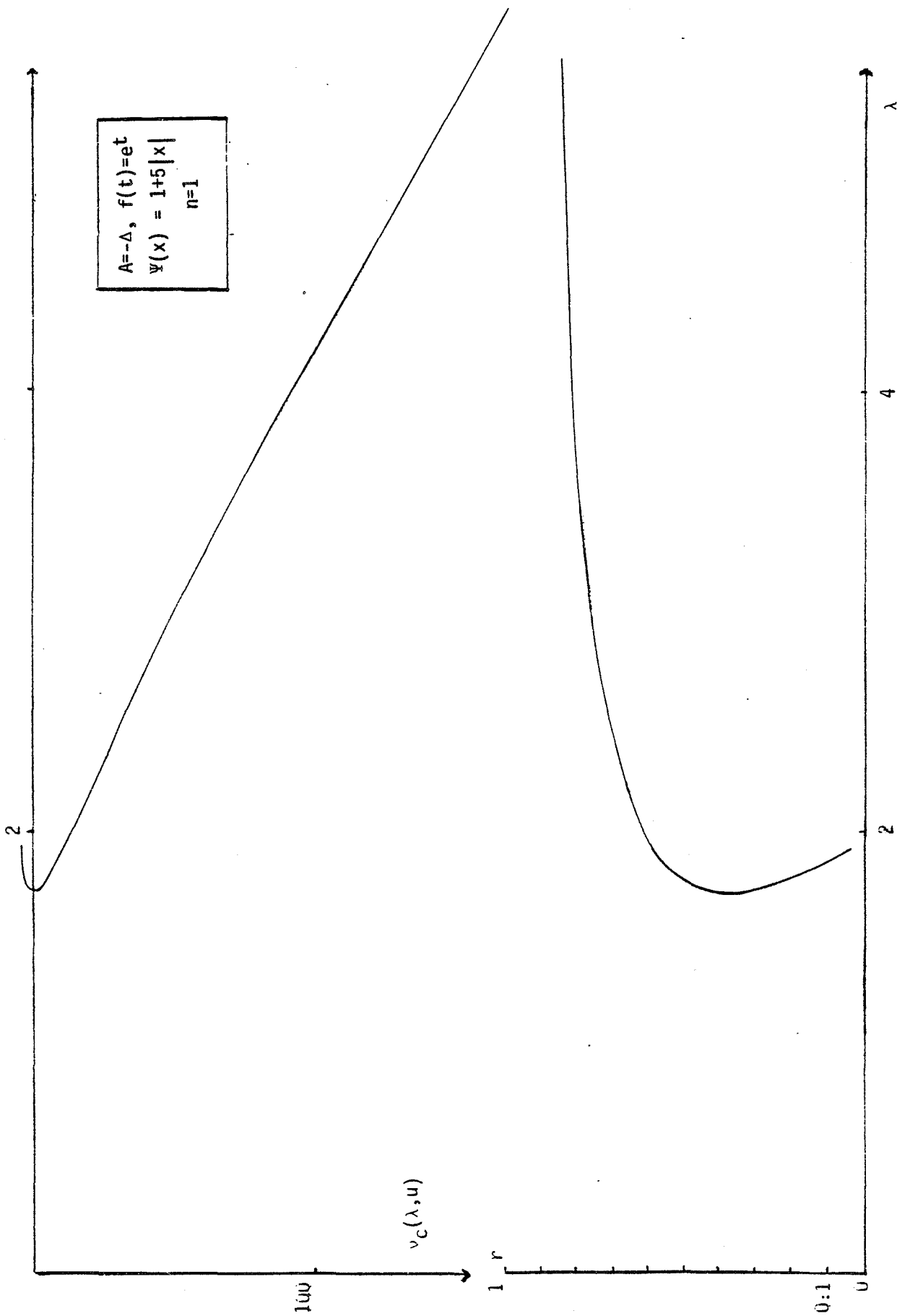
3

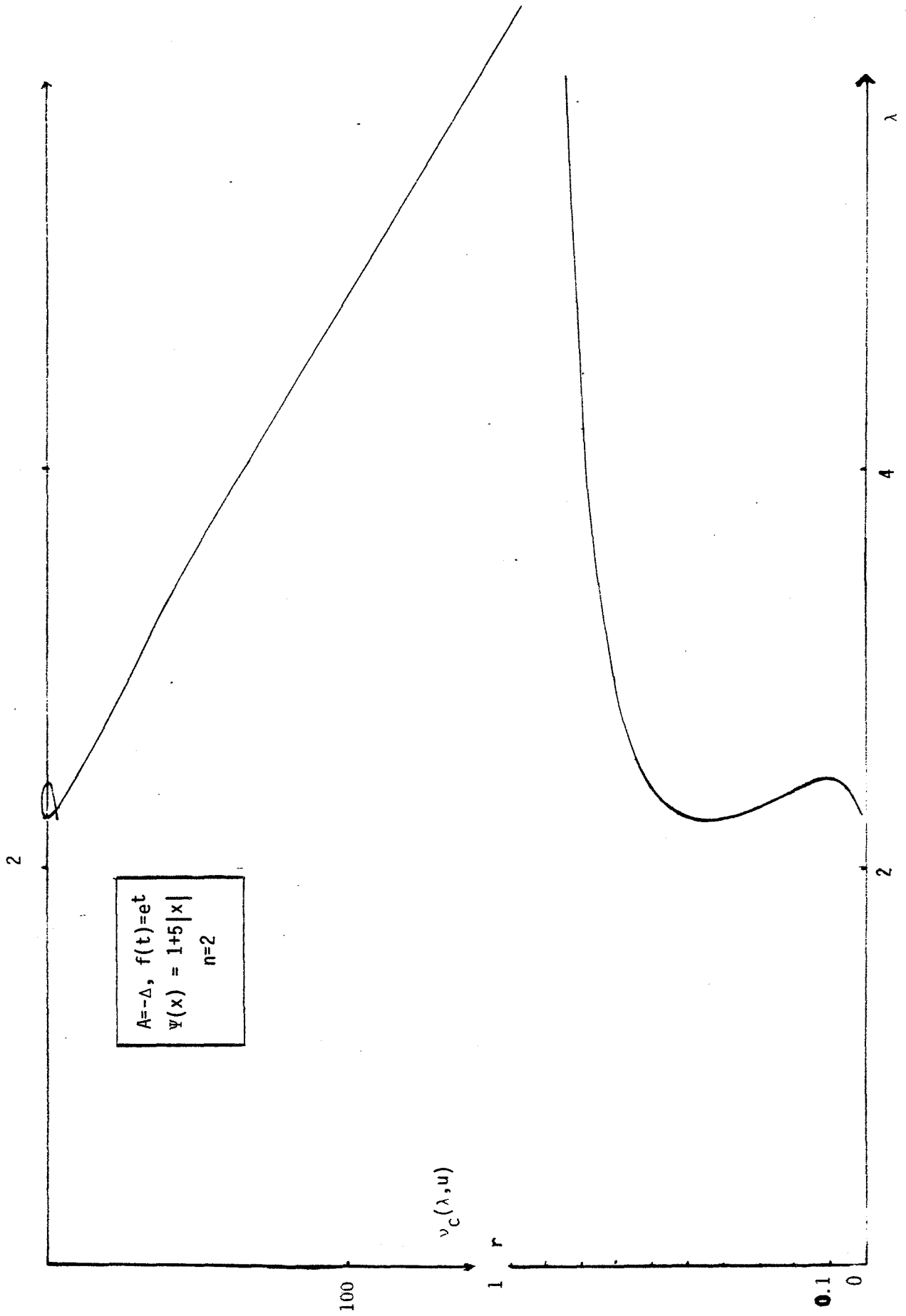
2

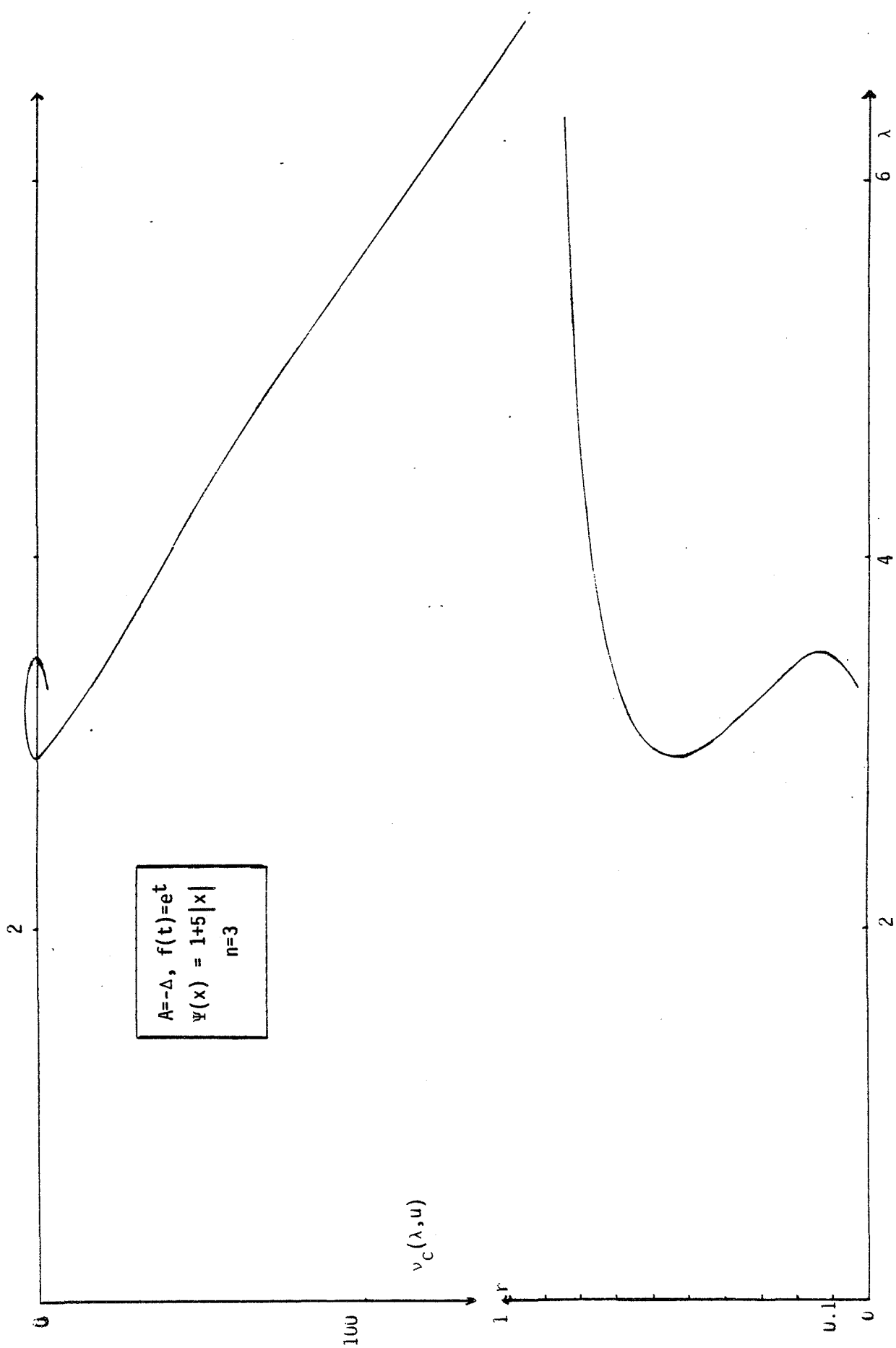
1

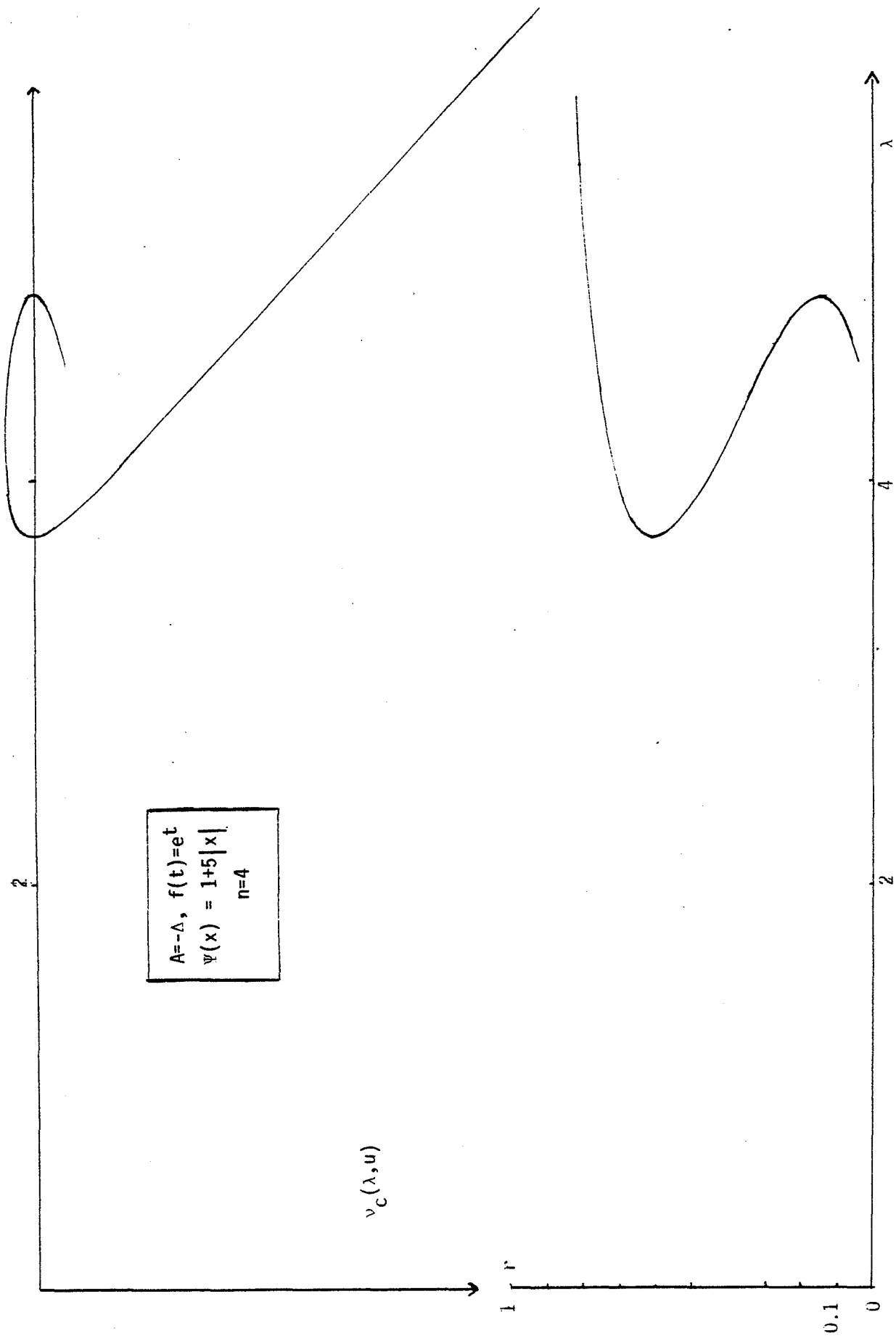
u













BIBLIOGRAPHIE

- [A] Ancona A. Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive; Cours de 3^o cycle. Université de Paris VI. (1973).
- [Be] Berger M.S. Nonlinearity and functional analysis. Academic Press. (1977).
- [B.N] Brauner C.M., Nicolaenko B. Sur des problèmes aux valeurs propres non linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre. CRAS. série A, t.287, p.1105-1108 (1978).
- Brauner C.M., Nicolaenko B. Sur des problèmes aux valeurs propres non linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre. CRAS. série A, t.288, p.125-127 (1979).
- Brauner C.M., Nicolaenko B. On nonlinear eigenvalue problems which extend into free boundary problems. Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue problems, C. Bardos and al., Eds., Lect. Notes in Math. 782, Springer Verlag, p.61-100 (1980)
- Brauner C.M., Nicolaenko B. Homographic approximation of free boundary problems characterized by elliptic variational inequalities. Proc. Seminar Collège de France, vol III, Research Notes in Math. 70, Pitman, p. 86-128 (1982).
- [Bre] Brezis H. Problèmes unilatéraux. J.Math.Pures et Appliquées. 51, p.1-168. (1972).
- [C] Caffarelli L.A. A remark on the Hausdorff measure of a free boundary problem and the convergence of the coincidence sets. Bolletino U.M.I.(5) 18.A, p.109-113. (1981).

- [Ch] Chang K.C. The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities. Comm.Pure.App. Math. vol 33, p.117-146 (1980).
- [Co] Conrad F. Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre. Thèse. Université Lyon I (Juin 1983).
- [Co]₁ Conrad F. Etude locale de branches de solutions dans un problème d'obstacle : I. points réguliers, points singuliers, directions coniques, exemples. Publication Lyon-Saint-Etienne n°15 (Janvier 1983).
- [Co.I]₂ Conrad F., Issard-Roch F. Etude locale de branches de solutions dans un problème d'obstacle : II. Développements locaux, points de retournement. Publication Lyon-Saint-Etienne n°18 (Avril 1983).
- [Co.I] Conrad F., Issard-Roch F. Etude locale de branches de solutions dans une classe d'inéquations variationnelles. CRAS série I, t.297, p.37-40 (1983).
- [Co.I.B.N] Conrad F., Issard-Roch F., Brauner C.M., Nicolaenko B. Nonlinear eigenvalue problems characterized by variational inequalities. A local study. (A paraître).
- [C.H] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Tome 1.
- [C.R]₁ Crandall M.C., Rabinowitz P.H. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. Arch. Rat. Mech. Anal. 59, p.161-180 (1973).
- [C.R]₂ Crandall M.C., Rabinowitz P.H. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear eigenvalue problems. Arch.Rat.Mech.Anal. 58, p.241-269 (1975).
- [D.L] Duvaut G., Lions J.L. Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod. Paris. (1977).

- [F] Friedman A. Variational principles and free boundary problems. Pure and Applied Mathematics. Wiley. (1982).
- [F.V] Furi M., Vignoli A. A nonlinear spectral approach to surjectivity in Banach spaces. J. Funct. Anal. 20, p. 304-318. (1975).
- [G] Guelfand I.M. Some problems in the theory of quasilinear equations. Amer. Math. Soc. Transl. 2, p.295-381. (1963).
- [G.M] Georg K., Martelli M. On spectral theory for nonlinear operators. J. Funct. Anal. 24, p.140-147.(1977).
- [G.T] Gilbarq D., Trudinger M.S. Elliptic partial differential equations . Springer Verlag. (1977).
- [H] Haraux A. How to differentiate the projection of a convex set in Hilbert space, some applications to variational inequalities. J. Soc. Japan. 29,1, p.615-631.(1977).
- [He] Herbin R. Etude essentiellement numérique d'une classe de problèmes à frontière libre issus de la cinétique enzymatique. Rapport de DEA. Université Lyon-Saint-Etienne. (octobre 1983).
- [K.S] Kinderhlerer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities. Academic Press. (1980).
- [K.R] Krein M.G., Rutman M.A. Linear operators leaving invariant a cone in Banach space. U.M.N.3,1,23, p.199-325 (1948).
- [L.S] Lewy H., Stampacchia G. On the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure. Appl. Math. 22, p.153-188 (1969).
- [M] Mignot F. Inéquations variationnelles et contrôle. Thèse Paris VI. (1975).

- [M.P] Mignot F., Puel J.P. Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéarité positive croissante convexe. Rapport Analyse numérique Paris VI. n°78028.
- [P.W] Protter M.H., Weinberger H.F. Maximum principles in differential equations. Prentice Hall. (1967).
- [R] Rabinowitz P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. J. Funct. Anal. 7, p.487-513 (1971).
- [Sa] Sattinger D.H. Topics in stability and bifurcation theory. Lect. Notes in Math. n°309, Springer Verlag . (1973).
- [S] Stakgold I. Branching of solutions of nonlinear equations. S.I.A.M. Review. vol 13 n°3, p.289-332. (1971).
- [T] Tartar L. Inéquations quasi-variationnelles abstraites. CRAS. série A, 278 p.1193-1196 (1974).
- [Z] Zarantonello E.H. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory. Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Ed E.H. Zarantonello. Academic Press (1971).

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu le rapport de présentation de Messieurs

NICOLAENKO B.
BARANGER J.
BRAUNER Cl.-M.
CONRAD Fr.
PIERRE M.

M^{me} R O C H Françoise (épouse ISSARD)

est autorisé à présenter une soutenance de thèse pour l'obtention du titre de
DOCTEUR 3^e CYCLE, Spécialité MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Fait à Ecully, le 10 février 1984

Le Directeur de l'E.C.L.


A. MOIROUX

THESES DE L'ACADEMIE DE LYON : 'ECOLE CENTRALE DE LYON

Nom : ISSARD née ROCH (nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Françoise		DATE DE SOUTENANCE 9 mars 1984
TITRE : Problèmes aux valeurs propres non linéaires dans des inéquations variationnelles (Etude locale).		
NATURE :		Numéro d'ordre : ECL 84-05
DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		DOCTORAT de 3e CYCLE
		<input checked="" type="checkbox"/>
		Spécialité : Mathématiques Appliquées
Cote B.I.U. - LYON : T 50/210/19 / et bis		CLASSE :
<p>Résumé :</p> <p>On s'intéresse à une classe d'inéquations variationnelles elliptiques, associées à un problème d'obstacle et dépendant d'un paramètre λ :</p> $a(u, v-u) \geq \int_{\Omega} \lambda F(u)(v-u) dx \quad \forall v \in K ; u \in K = \{ w \in H_0^1(\Omega) / w \leq \psi \text{ p.p. sur } \Omega \}.$ <p>Une telle inéquation admet au moins une branche de solutions équation et une branche de solutions inéquation. On cherche à connaître la structure locale des branches inéquations. Ce travail tend à généraliser aux inéquations, l'étude locale classique faite pour les branches de solutions des équations non linéaires.</p> <p>Grâce à un processus de linéarisation "conique", on classe les points de la branche inéquation en points réguliers ou singuliers. Au voisinage d'un point régulier, on montre que les solutions admettent un développement selon λ. Puis on étudie le comportement local des solutions au voisinage d'un point singulier vérifiant certaines hypothèses, qui sont à rapprocher de celles faites pour les équations et qui assurent qu'on a un point de retournement. On montre que, dans certains cas, il existe un tel point singulier, sur la branche de solutions maximales. Les branches équation et inéquation sont reliées par un point appelé point de transition.</p> <p>Une étude plus fine est faite au voisinage de ce point. Enfin, une analyse des diverses conditions introduites pour l'étude locale, montre qu'elles sont fortement liées à une condition de type stabilité. Cette analyse est illustrée par l'étude numérique de quelques problèmes d'obstacle présentant des solutions multiples sur la branche inéquation ; un changement de stabilité apparaît au passage des points de retournement.</p>		
MOTS CLES : Equations aux dérivées partielles, inéquations variationnelles elliptiques, problèmes aux valeurs propres non linéaires, solutions multiples.		
Laboratoire(s) de Recherche : Ecole des Mines de Saint-Etienne (Département Informatique) Ecole Centrale Lyon (Département M.I.S.)		
Directeur de Recherche : M. F. CONRAD		
Président du Jury : M. B. NICOLAENKO		
Composition du jury : MM J. BARANGER, C.M. BRAUNER, F. CONRAD, M. PIERRE.		

