



HAL
open science

Investigation et application des méthodes d'ordre réduit pour les calculs d'écoulements dans les faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur

Marie Pomarede Pomarède

► **To cite this version:**

Marie Pomarede Pomarède. Investigation et application des méthodes d'ordre réduit pour les calculs d'écoulements dans les faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur. Autre [cond-mat.other]. Université de La Rochelle, 2012. Français. NNT : 2012LAROS355 . tel-00815992

HAL Id: tel-00815992

<https://theses.hal.science/tel-00815992>

Submitted on 19 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE
UFR Sciences Fondamentales et Sciences pour l'Ingénieur

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de La Rochelle
Discipline : Mécanique

par

MARIE POMARÈDE

INVESTIGATION ET APPLICATION DES MÉTHODES D'ORDRE RÉDUIT POUR LES CALCULS D'ÉCOULEMENTS DANS LES FAISCEAUX TUBULAIRES D'ÉCHANGEURS DE CHALEUR

sous la direction de AZIZ HAMDOUNI

Thèse soutenue le 7 février 2012 devant le jury composé de :

| | | | |
|-----------------|-----------------------|--|------------|
| M. | AZIZ HAMDOUNI | Professeur, Université de La Rochelle | Directeur |
| M. | JEAN-YVES BILLARD | Professeur, IRENAV | Rapporteur |
| M. | AZZEDDINE SOULAÏMANI | Professeur, Université du Québec (Montréal) | Rapporteur |
| M ^{me} | MARIANNA BRAZA | Directrice de Recherche CNRS, IMFT | Examineur |
| M. | DANIEL BROU | Ingénieur de Recherche, CEA Saclay | Examineur |
| M. | ERWAN LIBERGE | Maître de Conférences, Université de La Rochelle | Examineur |
| M ^{me} | ÉLISABETH LONGATTE | Ingénieur de Recherche, EDF R&D | Examineur |
| M. | JEAN-FRANÇOIS SIGRIST | Ingénieur de Recherche, DCNS Research | Examineur |

*À Sylviane Hochard
À mes parents*

INVESTIGATION ET APPLICATION DES MÉTHODES D'ORDRE RÉDUIT POUR LES CALCULS D'ÉCOULEMENTS DANS LES FAISCEAUX TUBULAIRES D'ÉCHANGEURS DE CHALEUR

RÉSUMÉ

Cette thèse s'intéresse à la faisabilité de la mise en place de modèles d'ordre réduit pour l'étude des vibrations sous écoulement au sein de faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur. Ces problématiques sont cruciales car les systèmes étudiés sont des éléments majeurs des centrales nucléaires civiles et des chaufferies embarquées dans les sous-marins.

Après avoir rappelé le fonctionnement et les risques vibratoires existants au sein des échangeurs de chaleur, des calculs complets d'écoulement et de vibrations sous écoulement ont été effectués, d'abord pour un tube seul en milieu infini, puis pour un faisceau de tubes. Ces calculs ont été menés avec l'outil CFD *Code_Saturne*. La méthode de réduction de modèle POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) a été appliquée au cas des écoulements avec la structure laissée fixe. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode pour ces configurations, moyennant l'introduction de méthodes de stabilisation pour l'écoulement au sein du faisceau.

La méthode POD-multiphasique, permettant d'adapter la méthode POD à l'interaction fluide-structure, a ensuite été appliquée. Les grands déplacements d'un cylindre seul dans la zone d'accrochage (*lock-in*) ont été correctement reproduits par cette méthode de réduction de modèle. De même, on montre que les grands déplacements d'un cylindre en milieu confiné dans un faisceau de tubes sont fidèlement reconstruits.

Enfin, l'extension de l'utilisation de la réduction de modèle aux études d'évolution paramétrique a été testée. Nous avons d'abord utilisé la technique considérant une base POD unique pour reproduire des écoulements à divers nombres de Reynolds autour d'un cylindre seul. Les résultats confirment la prédictivité bornée à une gamme de paramètres de cette méthode. Enfin, l'interpolation de bases POD pré-calculées pour une famille de paramètres donnés, utilisant les variétés de Grassmann et permettant de générer de nouvelles bases POD, a été testée sur des cas modèles.

Mots-clés : Vibrations sous écoulement, Interaction Fluide-Structure, POD, POD-multiphasique, réduction de modèle, faisceaux tubulaires

INVESTIGATION AND APPLICATION OF REDUCED-ORDER METHODS FOR FLOWS STUDY IN HEAT EXCHANGER TUBE BUNDLES

ABSTRACT

The objective of this thesis is to study the ability of model reduction for investigations of flow-induced vibrations in heat exchangers tube bundle systems. These mechanisms are a cause of major concern because heat exchangers are key elements of nuclear power plants and on-board stoke-holds.

In a first part, we give a recall on heat exchangers functioning and on vibratory problems to which they are prone. Then, complete calculations leaded with the CFD numerical code *Code_Saturne* are carried out, first for the flow around a single circular cylinder (fixed then elastically mounted) and then for the case of a tube bundle system submitted to cross-flow. Reduced-order method POD is applied to the flow resolution with fixed structures. The obtained results show the efficiency of this technique for such configurations, using stabilization methods for the dynamical system resolution in the tube-bundle case.

Multiphase-POD, which is a method enabling the adaptation of POD to fluid-structure interactions, is applied. Large displacements of a single cylinder elastically mounted under cross-flow, corresponding to the lock-in phenomenon, are well reproduced with this reduction technique. In the same way, large displacements of a confined moving tube in a bundle are shown to be faithfully reconstructed.

Finally, the use of model reduction is extended to parametric studies. First, we propose to use the method which consists in projecting Navier-Stokes equations for several values of the Reynolds number onto a unique POD basis. The results obtained confirm the fact that POD predictability is limited to a range of parameter values. Then, a basis interpolation method, constructed using Grassmann manifolds and allowing the construction of a POD basis from other pre-calculated basis, is applied to basic cases.

Keywords : Flow-Induced Vibrations, Fluid-Structure Interaction, POD, multiphase-POD, Model Reduction, Tube Bundles

REMERCIEMENTS

Pouvoir saluer ici les personnes grâce auxquelles le travail de ces trois années de thèse n'a pas été complètement solitaire est un plaisir.

Je souhaite avant tout remercier chaleureusement mon directeur de thèse Aziz Hamdouni, véritable capitaine m'ayant témoigné sa confiance et dont l'énergie m'a permis d'aller toujours plus loin. L'étendue de ses connaissances dans un très grand nombre de domaines est impressionnante. Ce qui en fait une exception, c'est l'enthousiasme avec lequel il les partage sans relâche... et sans jamais oublier que la géométrie est partout.

Je remercie Messieurs les Professeurs Jean-Yves Billard et Azzeddine Soulaïmani d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que tous les membres du jury.

Cette thèse a pu être effectuée grâce à l'acharnement, je devrais même écrire l'abnégation totale, de Jean-François Sigrist qui, depuis le stage de fin d'études qu'il m'a proposé en 2008, n'a eu de cesse de chercher à réunir les éléments et conditions nécessaires pour que je puisse découvrir les joies et les peines de la réduction de modèle, de l'interaction fluide-structure et de *Code_Saturne* ; je l'en remercie. Il a su me motiver dans les moments de doute et de découragement. Nos échanges ont souvent dépassé le strict cadre scientifique : *et tout le reste est littérature*, mais littérature quand même.

Je remercie Élisabeth Longatte pour m'avoir permis d'accéder aux ressources de calcul d'EDF, grâce à la collaboration qu'elle a accepté de réaliser entre EDF R&D et DCNS Research. Sa relecture attentive du présent mémoire m'a également été très utile.

Erwan Liberge mériterait un long paragraphe de remerciements, à l'image des longues heures pendant lesquelles il m'a épaulée pour "débuguer" mes codes, mais aussi pour tous ses précieux conseils et son aide au quotidien dans de multiples domaines (logistique, informatique et bien d'autres). Programmeur perspicace, tel un aigle fondant sur sa proie, il n'a pas son pareil pour dénicher LE bug : cela m'a, plus d'une fois, été d'un grand secours. La clarté de ses travaux m'a permis d'aborder les miens avec plus de facilité.

L'aventure qu'a été cette thèse, riche en découvertes, en apprentissages et en rencontres, s'est déroulée dans les règles de l'art : avec un sac sur le dos. Ainsi, tortue partant à point, j'ai été accueillie avec beaucoup de sympathie dans le Service Technique et Scientifique de DCNS, à La Montagne. J'y ai découvert l'émulation du travail en équipe, les petits-déjeuners copieux tout au long de l'année et les débats animés. Les TSO (ou assimilés) et le chameau n'ont plus de secret pour moi, de même que les plaisanteries sur les contraintes de Tresca ou les douches casse-siphon. Je remercie amicalement tous les membres du service et les stagiaires de passage avec qui je me suis tout de suite sentie à l'aise et qui en ont subi les conséquences : une mention spéciale est accordée à mes voisins directs Pascal, Ludovic et Stéphane. Philippe, Gilbert et Stéphane : restez (encore) alignés. Thierry et Yoann, libérez-vous du joug Mélotien. Christophe, n'oublie pas le don du sang. Sylvie, j'ai hâte de rencontrer Anaïs. Je remercie également, pour leur gentillesse, Dominique Lemoine dont l'érudition modeste m'impressionne beaucoup ainsi que Vincent Mélot qui, sous ses airs de clown infatigable, est d'une humanité rare.

Bien entendu, je laisse une place de choix dans mes remerciements à Lydia Jouhannet (notre maman à tous) qui m'a accueillie comme sa propre fille : sa générosité est une leçon de vie.

Les affres de l'informatique m'ont été souvent évitées par Stéphane Prigent : merci pour son aide déterminante depuis les installations successives de *Code_Saturne* et des librairies dont plus personne ne se sert, jusqu'aux envois de fichiers de dernière minute qui, assurément, m'ont permis d'arriver au terme de mon travail plus sereinement.

D'abord timidement, j'ai posé mon sac à dos au LEPTIAB, au beau milieu de l'effervescence des doctorants (des pairs ! Ils existent vraiment !). Petit à petit, j'ai pris mes marques et ai même eu droit à un bureau. Je remercie les personnes qui ont accompagné mon quotidien à La Rochelle : Abdelkrim, pour m'avoir fait découvrir Charla Town et ses chars latents ; Axel, Hassan, Mahfoud, Salah, Aubin, Adrien (le Gros) pour les parties de basket improvisées, Juslin pour les débats géopolitiques. Issa, Nissrine, Nazir, Ibrahim, Mireille et Rayan pour les cours personnalisés de libanais : choukran. Adrien (le maigre), Pierre, Kamilia, les Antoine et tous les doctorants, un grand merci pour votre accueil qui m'a permis de me sentir comme chez moi, même en logeant à Altica. Un merci particulier à Alexandra Tallet qui lit maintenant les routines de *Code_Saturne* comme dans sa langue maternelle : son aide m'a été très précieuse lors des tests sur la projection optimale. Merci également à Cédric Leblond et Cyrille Allery pour nos échanges scientifiques réduits mais optimisés. Je remercie Sylvie Lhoumeau qui a facilité mes allées et venues souvent improvisées à La Rochelle.

Lors de mes brefs passages sur le site de EDF R&D à Chatou, j'ai toujours pu compter sur l'appui de Yoann Jus, en plus de son soutien téléphonique amical. Je remercie également Cédric Tavé et David Monfort pour leur aide précieuse.

J'en viens à remercier celles et ceux qui, durant mes études, ont semé en moi le goût d'apprendre : merci à Gérard Grein, Suzanne Bauguil, Olivier Brusque, Pierre Charrier, Nicholas Kevlahan et Christophe Berthon. Plusieurs amis, futurs grands chercheurs j'en suis convaincue, ont également éclairé ma route : merci à Hélène Fay, Maxime Ballarotta, Aurélie Le Cain, Grégory Futhazar, Gilles Serre, Audrey Bonnement et Jorge César Brändle de Motta, dit Motta.

Ces trois années nantaises ont été pour moi l'occasion de découvrir des milieux à l'esprit moins scientifique mais tout aussi enrichissant : un grand merci à l'équipe de basket de La Montagne pour m'avoir acceptée sans réserve, ainsi qu'à Yves et Julien Raynard qui m'ont appris l'esprit d'équipe et le travail collectif. Je remercie également les jeunes du CCFD-Terre Solidaire grâce à qui j'ai pu faire mes armes sur les questions des paradis fiscaux ou de la souveraineté alimentaire, bref, de la solidarité internationale. Un merci tout particulier à Julie Marchand et Antoine Gazeau, ma fratrie nantaise (ou sud-africaine¹), pour leur amitié et leur accueil toujours chaleureux.

Merci à Emmanuelle Jullian pour son écoute bienveillante et éclairée à toute heure et en toutes circonstances.

Je remercie les relectrices attentives de cette thèse pour l'effort considérable qu'elles ont dû accomplir : Cécile, grande dame s'il en est, te (re-)rencontrer a été un bonheur. Sylviane, le jour où tu m'as vue arriver Gare Sud avec plus d'affaires dans mes sacs qu'ils ne peuvent physiquement en contenir, je ne savais pas encore que ce que tu allais m'apprendre était un bagage bien plus important pour le reste de ma vie. C'est un mot qui te gêne mais, par respect et déférence envers mon Único Puissant Chef : merci. Je remercie ma mère Catherine pour son soutien indéfectible et ses mots toujours justes. Nos échanges libérateurs ont été, à chaque fois, l'occasion de me rappeler la maxime de Karine : "hauts les cœurs!".

1. www.ubumi.com

Je remercie mon père Bernard pour l'insatiable curiosité qui le caractérise et qui m'a donné l'envie d'explorer le monde par le prisme scientifique. Merci à toute ma famille, la pétillante Arthémise pour ses légumes pleins de forces, mes grands-parents et Marie-Thé pour leur soutien aveyronnais (donc solide). Merci Bénédicte pour tes encouragements quasi quotidiens, merci Jean-Baptiste pour m'avoir toujours poussée vers le haut. Je suis reconnaissante envers Messieurs Nathanaël Pomarède et Antoine Hochard qui, sans le savoir, m'ont fait partager leurs joies insouciantes.

Enfin, qu'on se le dise, s'il y a des contrôleurs aériens sans aéroport, il y a aussi des phares sans la mer : la preuve, j'en ai trouvé à Reims. L'inestimable se passe de mots, mais comme *tout est langage* : merci Thibaud.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| TABLE DES MATIÈRES | x |
| LISTE DES FIGURES | xii |
| PRÉFACE | 1 |
| 1 PROBLÈMES VIBRATOIRES ET ÉCHANGEURS DE CHALEUR | 5 |
| 1.1 LES GÉNÉRATEURS DE VAPEUR | 7 |
| 1.1.1 Fonctionnement général d'un générateur de vapeur | 7 |
| 1.1.2 Le faisceau de tubes | 9 |
| 1.1.3 Paramètres du système | 10 |
| 1.2 VIBRATIONS SOUS ÉCOULEMENT : DIFFÉRENTS TYPES D'EXCITATION . . . | 12 |
| 1.2.1 Un bref historique | 12 |
| 1.2.2 Vibrations sous écoulement d'un faisceau tubulaire | 12 |
| 1.2.3 Excitation turbulente | 13 |
| 1.2.4 Vibrations induites par détaché tourbillonnaire | 14 |
| 1.2.5 Résonance acoustique | 22 |
| 1.2.6 Instabilité fluide-élastique | 23 |
| 1.3 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ANALYSE VIBRATOIRE | 27 |
| 1.3.1 Enjeux et problématiques | 27 |
| 1.3.2 Stratégies de couplage | 28 |
| 1.3.3 Couplage en espace | 30 |
| 1.3.4 Gestion de la dynamique de maillage | 31 |
| 1.3.5 Avancée en temps du couplage | 39 |
| 1.3.6 Conclusion | 42 |
| 2 ÉTUDE NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS FLUIDE-STRUCTURE | 45 |
| 2.1 MISE EN SITUATION D'UN PROBLÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE | 47 |
| 2.1.1 Formulation du problème couplé | 47 |
| 2.1.2 Couplage fluide-structure avec <i>Code_Saturne</i> | 49 |
| 2.2 CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE | 50 |
| 2.2.1 Outil employé | 50 |
| 2.2.2 Tube seul sous écoulement transversal | 51 |
| 2.2.3 Faisceau tubulaire sous écoulement transversal | 58 |
| 2.2.4 Conclusion | 69 |
| 3 LA RÉDUCTION DE MODÈLE : ÉTAT DE L'ART, ENJEUX ET INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE | 71 |
| 3.1 LA RÉDUCTION DE MODÈLE : CONTEXTE | 73 |
| 3.1.1 Qu'entend-on par réduction de modèle? | 73 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.2 | RÉDUCTION DE MODÈLE PAR PROJECTION : PROBLÈMES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES | 74 |
| 3.2.1 | Les méthodes de réduction pour les problèmes linéaires | 75 |
| 3.2.2 | Les méthodes de réduction pour les problèmes non linéaires | 79 |
| 3.2.3 | Conclusion | 84 |
| 3.3 | RÉDUCTION DE MODÈLE PAR PROJECTION POUR L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE | 85 |
| 3.3.1 | Les méthodes à domaine fixe | 85 |
| 3.3.2 | Méthodes à domaine mobile | 88 |
| 3.3.3 | Conclusion | 93 |
| 4 | CHOIX D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION : LA DÉCOMPOSITION ORTHOGONALE AUX VALEURS PROPRES (POD) | 95 |
| 4.1 | LA MÉTHODE POD : ÉTAT DE L'ART ET DESCRIPTION | 95 |
| 4.1.1 | Débuts de la méthode | 95 |
| 4.1.2 | Description de la méthode pour la mécanique des fluides incompressibles | 95 |
| 4.1.3 | Exemples d'application | 103 |
| 4.1.4 | Conclusion | 120 |
| 4.2 | STABILISATION DU SYSTÈME DYNAMIQUE | 122 |
| 4.2.1 | Stabilisations en première approximation | 122 |
| 4.2.2 | Modification du système dynamique | 133 |
| 4.2.3 | Conclusion | 149 |
| 5 | UNE TECHNIQUE PRIVILÉGIÉE POUR L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE : L'APPROCHE MULTIPHASIQUE | 151 |
| 5.1 | PRINCIPE DE LA MÉTHODE | 151 |
| 5.1.1 | Première approche | 151 |
| 5.1.2 | Écriture du système dynamique | 154 |
| 5.1.3 | Seconde approche | 155 |
| 5.1.4 | Mise en œuvre des calculs pour la méthode POD-multiphasique | 157 |
| 5.1.5 | Intérêt industriel de la méthode | 158 |
| 5.2 | EXEMPLE SIMPLE D'APPLICATION | 158 |
| 5.2.1 | Tube mobile en grands déplacements | 158 |
| 5.3 | APPLICATION DE LA POD MULTIPHASIQUE À L'ÉTUDE DES VIBRATIONS D'UN FAISCEAU TUBULAIRE SOUS ÉCOULEMENT | 162 |
| 5.3.1 | Hypothèses et conditions du calcul | 162 |
| 5.3.2 | Cas des petits déplacements du cylindre central | 162 |
| 5.3.3 | Cas des grands déplacements du cylindre central | 165 |
| 5.3.4 | Conclusion | 168 |
| 6 | RÉDUCTION DE MODÈLE ET ÉTUDES PARAMÉTRIQUES | 171 |
| 6.1 | REVUE RAPIDE DE QUELQUES TECHNIQUES DE RÉDUCTION DE MODÈLE POUR L'ÉVOLUTION PARAMÉTRIQUE | 173 |
| 6.1.1 | Méthode élémentaire : une base POD unique | 173 |
| 6.1.2 | Les méthodes de bases réduites | 174 |
| 6.1.3 | Utilisation de la géométrie Grassmannienne | 176 |
| 6.2 | APPLICATIONS D'ÉTUDES PARAMÉTRIQUES | 181 |
| 6.2.1 | Première méthode : utilisation d'une base unique | 181 |
| 6.2.2 | Cas du tube seul fixe sous écoulement transversal | 182 |
| 6.2.3 | Cas du faisceau fixe sous écoulement transversal | 185 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.3 | APPLICATION SIMPLE DE LA MÉTHODE GRASSMANNIENNE | 186 |
| 6.4 | CONCLUSION | 187 |
| | CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES | 189 |
| A | ANNEXES | 191 |
| A.1 | UN MODÈLE DE DESCRIPTION DES GRANDEURS AU SEIN D'UN FAISCEAU DE TUBES SOUS ÉCOULEMENT | 193 |
| A.2 | L'ANALYSE VIBRATOIRE AU SEIN DES FAISCEAUX TUBULAIRES | 200 |
| A.2.1 | Modèles pour l'excitation turbulente | 200 |
| A.2.2 | Modèles pour les vibrations induites par détaché tourbillonnaire | 204 |
| A.2.3 | Modèles pour la résonance acoustique | 207 |
| A.2.4 | Modèles pour l'instabilité fluide-élastique | 209 |
| A.2.5 | Conclusion | 219 |
| A.3 | DESCRIPTION DES CALCULS EFFECTUÉS PAR <i>Code_Saturne</i> DANS LA PHASE DE PRÉDICTION | 220 |
| A.3.1 | Le terme de convection | 220 |
| A.3.2 | La partie diffusive | 220 |
| A.4 | ACTUALISATION DU MAILLAGE DANS <i>Code_Saturne</i> | 221 |
| A.5 | EXTRACTION DU TERME DE RIGIDITÉ EFFECTIVE POUR UN CYLINDRE EN OSCILLATIONS LIBRES | 222 |
| A.6 | DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE L'UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIM- ITES PÉRIODIQUES AU SEIN DE <i>Code_Saturne</i> | 224 |
| A.7 | ALGORITHME UTILISÉ POUR METTRE EN PLACE LE DÉBIT COMME TERME SOURCE | 225 |
| A.8 | CALCUL DES TERMES DE BORDS DES OPÉRATEURS D'ORDRE 1 ET 2 DANS <i>Code_Saturne</i> | 226 |
| A.9 | MÉTHODE DE PROJECTION OPTIMALE AVEC OPÉRATEURS AU PREMIER ORDRE | 228 |
| A.10 | MÉTHODE DE PROJECTION OPTIMALE À L'ORDRE DEUX EN TEMPS | 229 |
| | BIBLIOGRAPHIE | 231 |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Fonctionnement général d'un Réacteur nucléaire à Eau Pressurisée (REP). Source : Areva. | 7 |
| 1.2 | Fonctionnement d'un générateur de vapeur de Réacteur à Eau Pressurisée (REP) | 8 |
| 1.3 | Dispositif d'un réacteur nucléaire (a) à boucles, (b) intégré ou compact. Source : CEA | 9 |
| 1.4 | Mailles unitaires les plus courantes des faisceaux tubulaires | 10 |
| 1.5 | Évolution de l'écart-type σ_γ de l'amplitude de la réponse vibratoire d'un tube en écoulement transverse en fonction de la vitesse réduite | 13 |
| 1.6 | Écoulement transversal autour d'un cylindre | 15 |

| | | |
|------|--|----|
| 1.7 | Schéma des deux types de réponse en amplitude possible selon le paramètre $m^*\zeta$ choisi (Khalak et Williamson, 1999) | 17 |
| 1.8 | Différents modes d'émission des tourbillons selon la branche d'observation | 18 |
| 1.9 | Phénomène de détachement tourbillonnaire à l'arrière d'un tube en configuration de faisceau en air (Weaver et al. 1993), pour $\mathcal{R}_e \sim 10^6$ | 20 |
| 1.10 | Réponse excitée d'un faisceau de tubes en fonction de la vitesse de pas (Weaver et al. 2000). | 25 |
| 1.11 | Différence entre les approches (a) lagrangienne et (b) eulérienne : exemple de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre | 28 |
| 1.12 | Couplage entre les milieux fluide et solide | 30 |
| 1.13 | Principe de la méthode Arbitraire Lagrange Euler pour le cas d'un cylindre dans un domaine fluide | 32 |
| 1.14 | Principe de la méthode de transpiration, d'après Fernández-Varela (2001) | 34 |
| 1.15 | Mise en évidence du décalage temporel entre les résolutions des systèmes fluide et solide | 39 |
| 1.16 | Principe du schéma de couplage explicite synchrone | 40 |
| 1.17 | Principe du schéma de couplage explicite asynchrone | 41 |
| 2.1 | Représentation des domaines fluide et structure | 49 |
| 2.2 | Simplification de la modélisation de la structure : masse ponctuelle et interpolation des données moyennées | 49 |
| 2.3 | Dimensions du domaine maillé | 52 |
| 2.4 | Domaine fluide maillé en éléments hexaédriques | 52 |
| 2.5 | Conditions aux limites pour le fluide dans le domaine étudié | 53 |
| 2.6 | Déplacement adimensionnel Y^* du cylindre au cours du temps, $U^* = 3$ | 56 |
| 2.7 | Déplacement adimensionnel Y^* du cylindre au cours du temps, $U^* = 4.91$ | 57 |
| 2.8 | Amplitude adimensionnelle des vibrations du cylindre sans amortissement à $\mathcal{R}_e = 100$ et $m^* = 3.3$ en fonction de k_{eff}^* . ♦ Données de référence (Shiels et al. 2001); ■ Résultats Code_Saturne; ▼ Résultat Code_Saturne correspondant au cas de faible amplitude; ▲ Résultat Code_Saturne correspondant au cas de l'accrochage | 58 |
| 2.9 | Différents maillages du domaine fluide : (a) Longatte et al. (2003), (b) Benhamadouche et Laurence (2003). | 59 |
| 2.10 | Représentation du modèle de la maquette AMOVI, Huvelin (2008) | 60 |
| 2.11 | Configuration "9 tubes" bidimensionnelle choisie | 60 |
| 2.12 | Conditions aux limites et orientation de l'écoulement au sein de la maille élémentaire "9 tubes" du faisceau | 61 |
| 2.13 | Créneau temporel imposé au débit cible pour introduire une perturbation dans l'écoulement | 63 |
| 2.14 | Comportement de la réponse au débit imposé au second membre | 64 |
| 2.15 | Points de contrôle des grandeurs physiques dans le domaine du faisceau | 65 |
| 2.16 | Evolution de la vitesse au point numéro 1 | 66 |
| 2.17 | Evolution de la vitesse selon x sur une pseudo-période aux quatre points de contrôle | 67 |
| 2.18 | Champ de vitesse global au cours du temps | 68 |
| 2.19 | Observation des zones de recirculation dans le domaine fluide | 68 |
| 2.20 | Évolution temporelle du déplacement selon y du tube central au sein du faisceau | 69 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.1 | Principe de la réduction de modèle par projection | 75 |
| 4.1 | Isovaleurs des deux composantes de la vitesse pour deux dates de la période d'échantillonnage | 104 |
| 4.2 | Erreur résiduelle en norme L^2 de la reconstruction d'un échantillon de vitesses pour le cas de l'écoulement autour d'un cylindre fixe à $\mathcal{R}_e = 100$ | 105 |
| 4.3 | Isovaleurs des deux composantes des deux premiers modes POD pour le champ de vitesses instantané | 106 |
| 4.4 | Isovaleurs des deux composantes des deux premiers modes POD pour le champ de vitesses fluctuant | 107 |
| 4.5 | Comparaison entre le champ de vitesse complet et sa reconstruction directe par POD | 107 |
| 4.6 | Reconstruction des coefficients temporels par le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe; — coefficient temporel direct; +++ coefficient temporel reconstruit | 109 |
| 4.7 | Points de suivi pour l'affichage du champ de vitesse à l'arrière du cylindre | 110 |
| 4.8 | Comparaison entre la vitesse selon x en 8 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du tube seul fixe et la vitesse selon x reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet ; +++ Vitesse reconstruite, projection matricielle; xxx Vitesse reconstruite, POD-Galerkin | 112 |
| 4.9 | Comparaison entre la vitesse selon y en 8 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du tube seul fixe et la vitesse selon y reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet ; +++ Vitesse reconstruite, projection matricielle; xxx Vitesse reconstruite, POD-Galerkin | 113 |
| 4.10 | Comparaison entre le champ de vitesse complet et le calcul du modèle réduit par projection matricielle | 114 |
| 4.11 | Premiers modes POD pour le champ instantané du fluide au sein du faisceau fixe | 115 |
| 4.12 | Premiers coefficients temporels pour le champ fluctuant du fluide au sein du faisceau fixe | 116 |
| 4.13 | Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit en fonction du nombre de modes POD pour le champ fluctuant du fluide autour d'un faisceau tubulaire fixe; — calcul direct; +++ reconstruction avec 10 modes; xxx reconstruction avec 15 modes; xxx reconstruction avec 20 modes | 118 |
| 4.14 | Comparaison entre la vitesse selon x en 4 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du faisceau tubulaire fixe et la vitesse selon x reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet; xxx Vitesse reconstruite, projection matricielle | 119 |
| 4.15 | Comparaison entre la vitesse selon y en 4 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du faisceau tubulaire fixe et la vitesse selon y reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet; xxx Vitesse reconstruite, POD-Galerkin interne | 120 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.16 | Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non à 15 modes POD pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe; — coefficient temporel direct; +++ coefficient temporel reconstruit sans stabilisation; ××× coefficient temporel reconstruit avec stabilisation | 124 |
| 4.17 | Comparaison du champ de vitesse global pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé | 125 |
| 4.18 | Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non avec opérateurs du premier ordre à 15 modes POD et des coefficients obtenus avec une formulation sans stabilisation avec les opérateurs de deuxième ordre, pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe; — coefficient temporel direct; — coefficient temporel reconstruit sans stabilisation et opérateurs du premier ordre; ××× coefficient temporel reconstruit avec stabilisation et opérateurs du premier ordre; +++ coefficient temporel reconstruit sans stabilisation avec opérateurs du second ordre | 127 |
| 4.19 | Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non à 20 modes POD pour le champ fluctuant du fluide autour d'un faisceau tubulaire fixe; — calcul direct; ××× calcul du modèle réduit sans stabilisation; +++ calcul du modèle réduit avec stabilisation | 129 |
| 4.20 | Comparaison du champ de vitesse selon x et selon y en quatre points choisis dans le domaine fluide pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé; — calcul direct; +++ calcul du modèle réduit avec stabilisation . . . | 131 |
| 4.21 | Comparaison du champ de vitesse global pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé | 132 |
| 4.22 | Comparaison entre les reconstructions en norme L^2 et H^1 du champ u pour l'équation de Burgers avec $\nu = 0.05$. — calcul complet; +++ modèle réduit | 134 |
| 4.23 | Comparaison entre les reconstructions en norme L^2 et H^1 du champ u pour l'équation de Burgers avec $\nu = 0.02$. — calcul complet; +++ modèle réduit | 135 |
| 4.24 | Cavité ventilée étudiée pour l'application de la méthode de projection optimale | 142 |
| 4.25 | Notations du calcul du laplacien pour un cas unidimensionnel | 143 |
| 4.26 | Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant du fluide au sein d'une cavité ventilée; — calcul direct; +++ reconstruction avec 15 modes sans stabilisation | 144 |
| 4.27 | Captures du champ de vitesse global dans le domaine de la cavité à deux dates différentes, colonne de gauche : calcul complet; colonne de droite : modèle réduit POD-Galerkin | 145 |
| 4.28 | Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de vitesse du fluide au sein d'une cavité ventilée; — calcul direct; ××× reconstruction avec 15 modes par projection de Galerkin sans stabilisation; +++ reconstruction avec 15 modes de vitesse et 8 modes de pression par projection optimale sans stabilisation . . | 147 |
| 4.29 | Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de pression du fluide au sein d'une cavité ventilée; — calcul direct; +++ reconstruction avec 15 modes de vitesse et 8 modes de pression par projection optimale sans stabilisation | 148 |
| 5.1 | Conditions imposées au cas du tube seul mobile en milieu infini | 158 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.2 | Comparaison entre les deux premiers coefficients temporels issus du calcul direct et les coefficients reconstruits par le système dynamique construit avec l'approche multiphasique pour de grands déplacements d'un cylindre en milieu semi-infini ; — coefficient temporel direct ; +++ Coefficient temporel reconstruit | 160 |
| 5.3 | Portrait de phase pour les deux premiers coefficients ; — coefficient temporel direct ; +++ Coefficient temporel reconstruit | 160 |
| 5.4 | Pourcentage d'énergie de chaque mode POD pour le cas du tube seul en grands déplacements, 50 premiers modes | 161 |
| 5.5 | Reconstruction du déplacement selon la direction y du cylindre par le système dynamique réduit en formulation multiphasique ; — Déplacement du centre de gravité (calcul complet) ; +++ Déplacement reconstruit . . . | 161 |
| 5.6 | Comparaison entre la vitesse du cylindre par calcul complet et la vitesse reconstruite par POD directe (petits déplacements) ; — calcul direct ; +++ reconstruction par POD directe | 162 |
| 5.7 | Représentation du déplacement du centre de gravité du cylindre central au cours du temps (CL périodiques) ; — calcul direct ; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (19 modes) avec stabilisation ($v_{\text{artif}} = 0,01$) . . | 163 |
| 5.8 | 4 premiers coefficients temporels, petits déplacements et CL périodiques ; — calcul direct ; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (19 modes) avec stabilisation ($v_{\text{artif}} = 0,01$) | 164 |
| 5.9 | Pourcentage d'énergie de chaque mode POD pour le cas du faisceau de tubes en grands déplacements, 20 premiers modes | 165 |
| 5.10 | Comparaison entre le champ de vitesse complet et le champ interpolé pour le cas des grands déplacements du cylindre à deux dates t_1 et t_2 , $\mathcal{R}_e = 2000$. | 166 |
| 5.11 | Comparaison entre la vitesse du cylindre par calcul complet et la vitesse reconstruite par POD directe (grands déplacements) ; — calcul direct ; +++ reconstruction par POD directe | 166 |
| 5.12 | Représentation du déplacement du centre de gravité du cylindre central au cours du temps (CL entrée/sortie) ; — calcul direct ; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (7 modes) sans stabilisation | 167 |
| 5.13 | Deux premiers coefficients temporels, grands déplacements et CL entrée/sortie ; — calcul direct ; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (7 modes) sans stabilisation | 168 |
| 5.14 | Portrait de phase pour les deux premiers coefficients ; — coefficient temporel direct ; +++ Coefficient temporel reconstruit | 168 |
| 6.1 | Illustration de l'espace tangent \mathcal{T}_S en un point S de la variété de Grassmann $\mathcal{G}(N, n)$ | 178 |
| 6.2 | Comparaison entre les champs de vitesse complet et reconstruit par la POD pour le tube seul, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 100$ | 183 |
| 6.3 | Comparaison entre les champs de vorticité complet et reconstruit par la POD, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 100$ | 184 |
| 6.4 | Comparaison entre les champs de vitesse complet et reconstruit par la POD pour le faisceau de tubes, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 2600$ | 185 |
| 6.5 | Reconstruction du champ de l'équation de Burgers pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (a) avec la base POD construite pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ avec 3 modes (b) avec la base POD construite pour $\nu = 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ avec 3 modes ; — calcul complet ; +++ reconstruction | 186 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.6 | Comparaison entre la base POD pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ calculée directement et la même base calculée par interpolation des bases POD pour $\nu = 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et $\nu = 0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; — base directe; — base interpolée | 187 |
| 6.7 | Reconstruction du champ de l'équation de Burgers pour la base interpolée pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; — calcul complet; +++ reconstruction avec base interpolée | 187 |
| A.1 | Comparaison entre le modèle d'amortissement de lame fluide (A.2) pour un écoulement monophasique liquide et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a). | 194 |
| A.2 | Comparaison entre la formule théorique de l'amortissement visqueux pour un écoulement monophasique liquide et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a). | 195 |
| A.3 | Comparaison entre le calcul de l'amortissement total pour un écoulement monophasique liquide par la formule A.2 et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a). | 196 |
| A.4 | Comparaison entre les préconisations données par la formule (A.12) et les données d'amortissement en fluide diphasique, en fonction de la fraction de vide. ζ_{TP} correspond à ζ_D normalisé. | 199 |
| A.5 | Données expérimentales et valeurs limites de la densité spectrale de puissance équivalente en fonction du nombre de Strouhal pour un faisceau de tubes soumis à des excitations turbulentes en écoulement monophasique (Taylor et Pettigrew 2000). | 201 |
| A.6 | Données expérimentales et valeurs limites de la densité spectrale de puissance équivalente en fonction de la fréquence réduite pour un faisceau de tubes soumis à des excitations turbulentes pour divers écoulements diphasiques (Pettigrew et Taylor 2003b). | 202 |
| A.7 | Densités spectrales de puissance adimensionnées en fonction de la fréquence réduite pour différents auteurs (Weaver et al. 2000) | 204 |
| A.8 | Nombre de Strouhal en fonction du rapport P/D pour différentes configurations de faisceaux de tubes, d'après Pettigrew et Gorman (1981) | 205 |
| A.9 | Coefficient de portance en fonction du rapport P/D pour différentes configurations de faisceau (Pettigrew et Taylor 2003b) | 206 |
| A.10 | Paramètres de résonance selon les arrangements de faisceau | 208 |
| A.11 | Calcul de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique en fonction du paramètre masse-amortissement (Pettigrew et Taylor 1991) | 212 |
| A.12 | Calcul de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique en fonction du paramètre masse-amortissement pour un écoulement diphasique (Pettigrew et Taylor 2003a) | 213 |
| A.13 | Limite de stabilité théorique pour l'instabilité fluide-élastique d'un faisceau de tubes en arrangement carré en ligne, avec $P/D = 1.33$: résultats de Tanaka et Takahara (1980; 1981) avec — $\delta = 0.01$, - - $\delta = 0.03$, . . . $\delta = 0.1$ | 215 |
| A.14 | Existence théorique de plusieurs bornes d'instabilité (a) selon Chen (1983b), (b) selon Lever et Weaver (1986b) : vitesse réduite en fonction du paramètre masse-amortissement | 216 |
| A.15 | Schématisation de la méthode d'actualisation du maillage | 221 |
| A.16 | Cellule de bord (EDF 2008) | 226 |

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LES PROGRAMMES INDUSTRIELS DE R&D regroupent aujourd'hui des activités de production de systèmes complexes et de développement pour l'optimisation et l'innovation de ces derniers. Certains domaines stratégiques comme l'industrie nucléaire, civile ou de défense, mettent l'accent sur la recherche afin de conserver les savoirs et savoir-faire nécessaires à la conception de systèmes fiables et durables.

L'agencement d'une centrale nucléaire pour la production d'électricité civile diffère en de nombreux points de celui d'une chaufferie nucléaire embarquée permettant la propulsion de bâtiments de la marine (notamment les sous-marins). Cependant, ces deux systèmes présentent des similarités en terme de fonctionnement et sont donc également soumis aux mêmes problématiques.

L'une des problématiques majeures se posant aux ingénieurs du domaine nucléaire est l'apparition de vibrations des systèmes soumis à de fortes sollicitations induites en cours de fonctionnement (qui suppose températures élevées et écoulements turbulents) au sein d'installations complexes. Que ce soit à cause d'une trop grande amplitude de ces vibrations ou de leur répétition fréquente, elles peuvent mener à la ruine du système en place. L'étude de ces phénomènes est donc cruciale ; l'objectif est de tenter de les éviter dès la phase de conception, ou du moins, de les réduire pour maintenir le système en conditions opérationnelles. De plus, les phénomènes vibratoires observés au sein d'une installation nucléaire sont de natures très variées. L'un d'entre eux, auquel nous allons nous intéresser plus particulièrement, apparaît lorsque les structures sont soumises aux contraintes induites par le fluide en écoulement incident. On retrouve notamment ces interactions fluide-structure au sein des échangeurs de chaleur, où les cylindres en réseau qui les composent sont baignés par un fluide en écoulement turbulent, mono- ou diphasique. Les mécanismes y entrant en jeu sont nombreux, couplés et difficilement dissociables, c'est pourquoi leur modélisation est nécessaire.

Cette étude a longtemps été menée via des campagnes d'essais visant à reproduire les conditions réelles, ou au moins à s'en rapprocher. L'amélioration notable des capacités informatiques (puissance des ordinateurs, grande capacité de stockage des données, architectures adaptées au calcul massivement parallèle) a permis de compléter ces expériences par des modèles numériques rendant possible l'étude systématique de certains phénomènes plus difficiles à reproduire ou à instrumenter. Le coût que représentent les essais a ainsi été diminué, grâce à la complémentarité apportée par la modélisation numérique. Cependant, au vu de la complexité des mécanismes à étudier et avec l'augmentation des exigences en matière de finesse des résultats, le coût des calculs peut lui aussi s'avérer élevé. C'est pourquoi le niveau actuel des performances informatiques ne permet toujours pas d'absorber les grandes quantités de données à traiter en un temps acceptable pour des cas d'études complexes et parfois même pour des cas élémentaires.

Ainsi, une étape supplémentaire dans le développement de méthodes

numériques pour les études industrielles consiste à s'intéresser à la *réduction de modèle*. Cette dernière consiste à écrire des modèles numériques de taille très inférieure à celle des modèles classiques déjà existants, ce qui permet d'approcher les solutions de ces modèles en un temps réduit. L'utilisation de modèles réduits ne permet pas de s'affranchir des modèles classiques ; cependant elle permet d'effectuer un plus grand nombre de calculs à moindre coût, ce qui permet notamment d'envisager la systématisation d'études paramétriques (suivi de l'évolution d'un paramètre pour une configuration donnée), voire le contrôle actif d'un système.

L'utilisation de la réduction de modèle dans le cadre de l'étude numérique des interactions fluide-structure au sein d'un faisceau de tubes d'échangeur de chaleur vise également à accéder à des informations encore inaccessibles du fait du coût prohibitif d'un seul calcul numérique complet. Pourtant, la réduction de modèle pour l'interaction fluide-structure en grands déplacements et avec un maillage mobile reste un défi à l'heure actuelle. Les travaux s'y intéressant restent relativement rares, de par la difficulté qu'entraîne la présence de structures mobiles et parfois déformables à suivre au cours du temps. La tendance actuelle tend cependant à se modifier, grâce à la multiplicité des types de réduction de modèle qui se développent ainsi que par la parution de récents résultats qui ont montré la possibilité de traiter efficacement l'interaction fluide-structure par l'utilisation de modèles réduits. L'objectif de cette thèse consiste à proposer l'application d'une méthode de réduction de modèle, basée sur la classique méthode POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) adaptée à l'étude des vibrations sous écoulement des faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleur.

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la collaboration industrielle entre DCNS Research et EDF R&D, deux partenaires industriels confrontés à des thématiques similaires qui ont décidé d'associer leurs programmes de recherche. EDF R&D développe depuis une dizaine d'années un code de calcul pour la mécanique des fluides, appelé *Code_Saturne*, qui est particulièrement adapté aux écoulements confinés des installations nucléaires. Ce code de calcul a fait ses preuves sur une large gamme de problèmes d'écoulements fluides et d'interactions fluide-structure : son développement s'inscrit dans le cadre de la mise en œuvre de méthodes numériques pour la modélisation d'écoulements monophasiques ou diphasiques au sein de différents composants des centrales nucléaires et *Code_Saturne* est l'outil de référence à EDF R&D pour ces problématiques.

Dans le cadre de cette thèse, *Code_Saturne* a été déployé au sein des équipes de calcul de mécanique des fluides de DCNS. Ce code est *libre* (ou *OpenSource*), il est distribué sous la licence GNU/GPL. L'usage d'un tel code de calcul au sein d'une entreprise présente des avantages certains au vu des coûts de licence d'un code commercial, d'autant plus élevés dans le cadre du calcul parallèle, tandis que ces coûts sont nuls dans le cadre de la licence de type GNU/GPL².

Dans ce cadre, nous avons effectué la mise en place des calculs avec *Code_Saturne* ainsi que sa qualification pour les besoins spécifiques de DCNS. L'objectif est de proposer aux ingénieurs une utilisation du code de calcul complémentaire à celle des codes commerciaux. Ce travail a été mené en collaboration avec une équipe de techniciens et d'ingénieurs à DCNS et avec l'équipe de développement

2. Un forum Internet (<http://code-saturne.info/>) dédié à la communauté des utilisateurs du code ainsi que la réunion annuelle *Code_Saturne User Meeting* sont autant d'outils permettant de faciliter l'usage du code.

de *Code_Saturne* à EDF R&D. De même, les calculs effectués dans le cadre de cette thèse ont été, sauf mention contraire, menés avec l'outil *Code_Saturne*.

Dans ce rapport, nous nous attarderons sur les principales techniques qui ont été utilisées pour étudier les vibrations sous écoulement ainsi que sur les méthodes de réduction de modèle. Sans prétendre à l'exhaustivité, le présent document a pour objectif d'être, autant que possible, autosuffisant pour faciliter son utilisation future dans un contexte industriel.

Dans le premier chapitre, les échangeurs de chaleur et leur fonctionnement seront décrits dans le détail, ainsi que les problèmes vibratoires auxquels ils sont soumis. Certains mécanismes, comme l'instabilité fluide-élastique, sont très destructeurs et à éviter. Divers modèles, empiriques, analytiques et numériques seront présentés pour l'étude de ces phénomènes afin de montrer tout l'intérêt de l'approche de couplage de codes fluide/structure pour un traitement numérique robuste.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude numérique avec *Code_Saturne* de deux cas de vibrations de structures sous écoulement. Nous considérerons d'abord le cas d'un tube seul sous écoulement, puis celui d'un faisceau de tubes soumis à un écoulement transversal. Le premier cas permet de confirmer la validité du code par l'étude du phénomène dit "d'accrochage mécanique". Ceci, ajouté aux études concluantes déjà existantes de phénomènes d'interaction fluide-structure avec *Code_Saturne*, permettra de passer au cas de l'étude du modèle de faisceau de tubes. Ce dernier est assez simplifié par rapport à une configuration proche de la physique réelle. Ces deux applications numériques permettront de mettre en place l'étude de la réduction de modèle pour l'interaction fluide-structure dans le contexte des vibrations induites par écoulement, ce qui justifie le choix de ne pas travailler directement dans le cadre de calculs "très haute fidélité", puisque l'objectif premier est de tester la validité des méthodes d'ordre réduit utilisées. Le travail n'est donc pas axé sur l'étude fine des résultats obtenus par rapport à une physique connue ou à des connaissances issues d'études numériques de référence, mais plutôt sur la possibilité de l'exploitation des méthodes de réduction de modèle pour la mise en place de telles études comparatives.

Dans un troisième chapitre, nous nous intéresserons à l'état de l'art des méthodes de réduction de modèle. L'intérêt pour ces approches se manifeste dans un grand nombre de disciplines variées et elles se déclinent donc sous diverses formes. Nous préciserons d'abord ce qui est entendu par *réduction de modèle*, puis nous proposerons de distinguer les méthodes construites pour les problèmes linéaires de celles pour les problèmes non linéaires. Enfin et surtout, la réduction de modèle adaptée à l'interaction fluide-structure sera abordée. Nous séparerons les méthodes conservant un domaine fixe de celles qui proposent la mise en place du suivi d'un domaine mobile. Parmi les méthodes les plus utilisées, nous décrirons de façon plus précise celles qui semblent présenter des avantages de robustesse et d'adaptabilité.

Le choix que nous faisons d'utiliser la méthode POD nous amène à rappeler son origine ainsi que sa définition mathématique dans le quatrième chapitre. Elle y sera appliquée aux études numériques effectuées dans le premier chapitre, dans le but de vérifier sa capacité à reproduire divers régimes d'écoulement. La stabilisation de la méthode sera également présentée, puisqu'elle s'avère nécessaire dans certaines configurations étudiées. La méthode de projection optimale, qui semble être une approche intéressante pour stabiliser le système (notamment pour le con-

trôle d'écoulements), sera décrite et appliquée dans le cadre des études numériques proposées.

Au cœur du sujet de cette thèse, le cinquième chapitre aborde l'adaptation de la méthode POD à l'interaction fluide-structure via la méthode dénommée *POD-multiphasique*, technique qui permet de suivre l'évolution d'un solide en grands déplacements au sein d'un fluide en écoulement. Elle semble adaptée à l'étude des phénomènes vibratoires dont les faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur sont le siège. Le fonctionnement de la méthode *POD-multiphasique* sera illustré pour le cas de vibrations sous écoulement d'un cylindre seul et d'un réseau de cylindres sous écoulement transversal.

Le sixième et dernier chapitre permet d'ouvrir l'application des méthodes de réduction de modèle aux études paramétriques. Une idée simple et peu coûteuse proposant l'utilisation de la méthode POD est appliquée à l'étude d'un écoulement dont un paramètre change. Des modèles constituant des améliorations possibles de cette technique seront ensuite présentés et étudiés. Les résultats obtenus permettront d'établir des premières conclusions pour l'application de ces méthodes aux écoulements qui nous intéressent : pour une observation globale de l'écoulement, la projection pour plusieurs valeurs du paramètre sur une base POD unique est envisageable. Pour une étude plus fine, il est nécessaire de recourir à des techniques plus riches comme l'approche utilisant la géométrie grassmannienne.

Enfin, les conclusions de ces travaux seront tirées, notamment concernant l'application des méthodes d'ordre réduit pour l'interaction fluide-structure et particulièrement de la méthode POD multiphasique, pour l'étude des vibrations sous écoulement dans les échangeurs de chaleur. L'intérêt principal de l'utilisation de cette méthode réside dans sa robustesse à l'étude de grands déplacements d'une structure dans un écoulement, ce qui est prometteur justement pour l'insertion de cette technique dans les codes de calculs adaptés aux besoins de la R&D.

PROBLÈMES VIBRATOIRES ET ÉCHANGEURS DE CHALEUR

1

DANS ce premier chapitre, les mécanismes vibratoires auxquels sont soumis les faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleurs sont décrits. En effet, l'objectif est de construire un modèle numérique pertinent pour toute une gamme de régimes de fonctionnement ; il est donc nécessaire de balayer l'ensemble des phénomènes pouvant se produire au niveau du système étudié. Dans une première partie, le fonctionnement et l'agencement du générateur de vapeur d'une centrale et d'un système de propulsion navale nucléaires sont présentés et les principales grandeurs caractéristiques ainsi que les différentes configurations d'utilisation de ces échangeurs sont précisées.

Puis, les quatre types d'excitation vibratoire qui peuvent se mettre en place au sein d'un faisceau de tubes de générateur de vapeur sont décrits, pour un faisceau de tubes sous écoulement monophasique liquide ou gazeux, ou bien un écoulement diphasique.

Ces mécanismes vibratoires sont étudiés de façon approfondie depuis les dernières décennies. Le défi consiste à déterminer des modèles robustes et à large spectre permettant de couvrir l'ensemble des configurations possibles et ce, de la façon la moins coûteuse possible. Quelques modèles proposés par différents auteurs sont présentés. Certains relèvent de la théorie ou présentent des configurations simplifiées d'arrangements de tubes, d'autres sont très proches d'une vision industrielle, proposant des critères numériques pratiques permettant de s'assurer du bon fonctionnement du générateur dans tous les régimes d'utilisation. Ces modèles sont tous, au moins partiellement, issus de données tirées de l'expérience. Ils ont permis de grandes avancées dans la connaissance des phénomènes vibratoires du faisceau de tubes.

Aujourd'hui, ces modèles sont à confronter aux modèles numériques qui peuvent s'appuyer sur la puissance de calcul numérique : la dernière partie de ce chapitre propose une présentation des méthodes numériques de couplage fluide-structure qui sont actuellement utilisées pour poursuivre l'étude des mécanismes de vibrations sous écoulement au sein des faisceaux tubulaires.

1.1 LES GÉNÉRATEURS DE VAPEUR

1.1.1 Fonctionnement général d'un générateur de vapeur

Avant de détailler le fonctionnement d'un générateur de vapeur, un bref rappel sur celui d'un réacteur nucléaire s'impose. Il existe un grand nombre de réacteurs nucléaires dans le parc mondial de l'énergie nucléaire civile, et ces réacteurs diffèrent encore des réacteurs de propulsion embarqués dans les bâtiments de la marine. L'objectif ici n'est pas de s'étendre sur l'ensemble des types de réacteurs existants, mais d'en décrire le principe de base.

Les réacteurs français de production d'électricité sont tous à *eau pressurisée*, de même que les chaufferies nucléaires embarquées. Cela signifie que la chaleur produite par la réaction de fission en chaîne au cœur du réacteur est véhiculée par un fluide caloporteur (circuit primaire, voir figure 1.1) à un second circuit d'eau au travers d'un générateur de vapeur. L'eau de ce second circuit ainsi vaporisée au moment du passage par le générateur de vapeur permet d'actionner une turbine. Grâce à un alternateur, l'énergie mécanique est alors transformée en énergie électrique. Le fluide caloporteur du circuit primaire est de l'eau à 300 degrés Celsius maintenue sous pression (environ 155 bars) demeurant ainsi sous phase liquide.

L'eau du circuit secondaire, après son passage dans la turbine, est refroidie grâce à un troisième circuit d'eau qui, s'il est ouvert, peut être la mer ou une rivière. C'est la raison pour laquelle un grand nombre de centrales nucléaires se trouvent à proximité d'un point d'eau important. De même, dans le cas d'un propulseur nucléaire marin, l'eau de mer constitue une source directement utilisable d'eau froide.

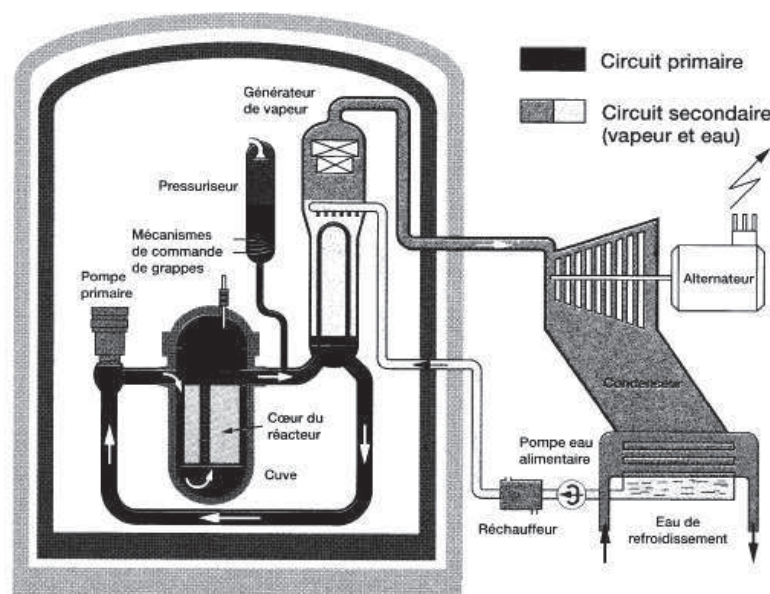


FIGURE 1.1 – Fonctionnement général d'un Réacteur nucléaire à Eau Pressurisée (REP). Source : Areva.

Au niveau d'un générateur de vapeur, le mécanisme est présenté de façon générale, puisque les principes fondamentaux sont identiques dans le contexte des centrales nucléaires, par exemple les centrales exploitées par EDF, ou bien dans le contexte de la propulsion navale nucléaire, développée notamment à DCNS.

Les réseaux de tubes permettant l'échange thermique entre l'eau du circuit primaire et l'eau du circuit secondaire sont minces, élancés et de forme cintrée. La figure 1.2 donne une vue simplifiée d'un générateur de vapeur du type des générateurs utilisés dans les Réacteurs à Eau Pressurisée (REP). L'eau chaude du circuit primaire alimente les tubes par le bas du générateur et passe au travers des tubes grâce à un système de pompe. La première branche d'un tube traversée par cette eau est appelée la branche chaude et la seconde, branche froide, puisque la chaleur est extraite par l'eau du circuit secondaire par l'intermédiaire de la surface d'échange que constituent les tubes. L'eau du circuit secondaire arrive par le haut du générateur, elle vient au contact des tubes sous forme liquide et, par ascension le long des tubes, récupère la chaleur de l'eau du circuit primaire et se vaporise.

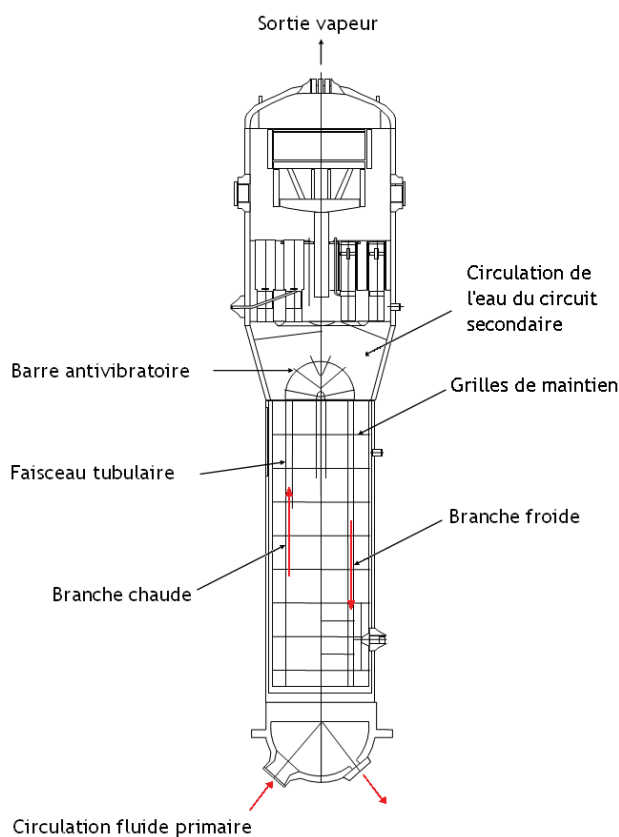


FIGURE 1.2 – Fonctionnement d'un générateur de vapeur de Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

Le principe de fonctionnement général d'une chaufferie nucléaire embarquée est similaire à celui d'une centrale; les réacteurs sont tous les deux à eau pressurisée. Le fluide caloporteur pour un propulseur nucléaire est aussi l'eau maintenue sous pression. La figure 1.3 donne une comparaison simplifiée des deux types de réacteurs : on appelle "réacteur à boucles" le système utilisé pour les centrales nucléaires (figure 1.3 (a)), tandis que pour la propulsion nucléaire, on parle de "réacteur intégré" (figure 1.3 (b)). Dans le cas du réacteur à boucles, pour un cœur, plusieurs générateurs de vapeur de grande taille (24,1 m par exemple pour un réacteur à eau pressurisée de type N4) sont utilisés, alors que pour le réacteur intégré, la chaufferie est compacte : un seul générateur, placé au-dessus du cœur, est utilisé. La taille du générateur doit tenir compte du diamètre du sous-marin, parfois assez faible (environ 7 mètres pour les sous-marins nucléaires d'attaque).

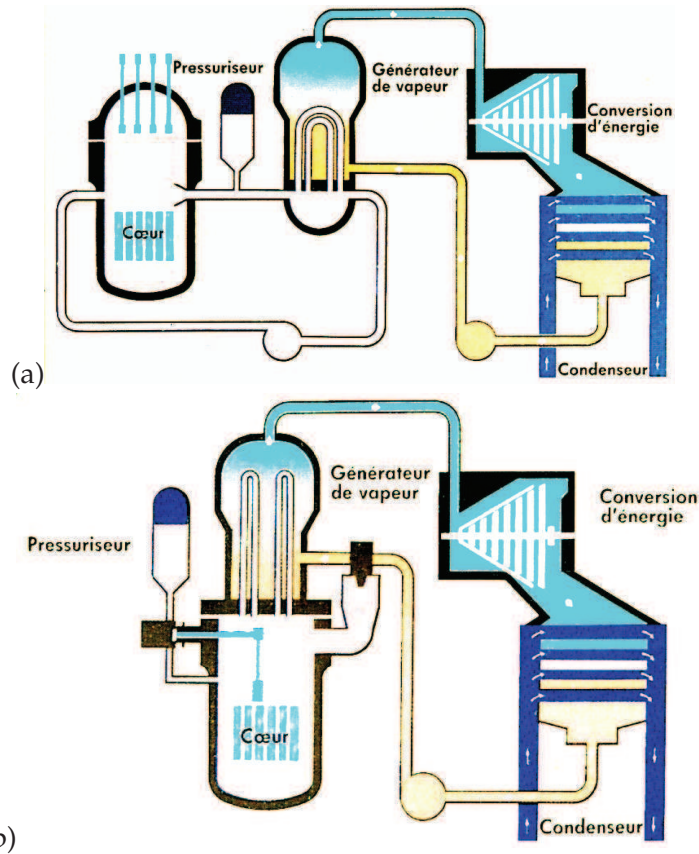


FIGURE 1.3 – Dispositif d'un réacteur nucléaire (a) à boucles, (b) intégré ou compact. Source : CEA

Le générateur de vapeur utilisé en propulsion nucléaire diffère du générateur de vapeur d'une centrale nucléaire sur un certain nombre de points, le plus évident concernant les dimensions. En effet, les contraintes de compacité pour une chaufferie de propulseur nucléaire sont très importantes : c'est pourquoi le générateur de vapeur dans ce cas est très compact. Ceci implique notamment que les tubes du générateur sont beaucoup plus rapprochés les uns des autres. Le confinement des tubes est alors particulier, et certains des phénomènes décrits ci-après peuvent apparaître dans des conditions d'utilisation différentes, ou ne pas être observés, selon que le générateur est celui d'un réacteur à boucles ou intégré.

1.1.2 Le faisceau de tubes

Comme une certaine compacité du générateur est requise (d'autant plus restrictive dans le cas d'une chaufferie nucléaire embarquée), le diamètre de l'enceinte du générateur est limité, ce qui interdit une grande surface d'échange. Or, entre les circuits primaire et secondaire, un grand coefficient d'échange global est nécessaire pour obtenir un rendement intéressant. Cependant, pour une surface d'échange donnée, le coefficient d'échange ne dépend ni du diamètre des tubes, ni de leur nombre : ainsi, pour augmenter le coefficient d'échange avec un volume à occuper inextensible, il faut réduire au maximum le diamètre des tubes, ce qui permet d'en loger un grand nombre dans l'enceinte du générateur de vapeur et donc, d'augmenter la surface d'échange. Les tubes ont ainsi un profil très élancé, et sont très rapprochés les uns des autres.

Il existe différentes manières d'agencer les tubes entre eux, compte tenu des contraintes de confinement, de vibration des tubes, d'écoulement... Très souvent, ils sont arrangés selon un motif régulier ; ce motif est appelé "motif élémentaire" du faisceau, exactement de la même manière que pour la description des arrangements d'atomes en cristallographie. La maille élémentaire témoigne de l'arrangement unitaire choisi. Le motif permettant de placer le plus grand nombre de tubes dans l'enceinte est hexagonal, on dit souvent "triangulaire", et l'on spécifie la direction de l'écoulement par rapport à la maille : ainsi, on distingue la maille triangulaire parallèle (pour laquelle l'écoulement est parallèle à un côté du triangle équilatéral) de la maille triangulaire normale (pour laquelle l'écoulement est parallèle à une hauteur du triangle). La figure 1.4(a) illustre ces différentes configurations, avec U_∞ la vitesse moyenne de l'écoulement. La distance entre deux axes de tubes est appelée *pas* inter-tubes et notée P . Vient ensuite une configuration dont la maille est carrée : dans ce cas aussi, l'écoulement peut être dirigé selon le côté du carré (maille "en ligne") ou selon la diagonale (maille "en quinconce"), (figure 1.4(b)).

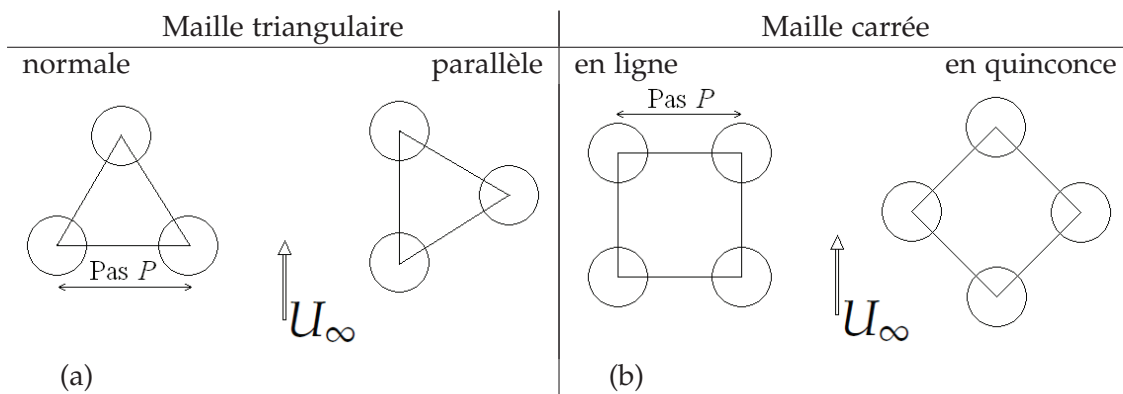


FIGURE 1.4 – Mailles unitaires les plus courantes des faisceaux tubulaires

Comme cela vient d'être évoqué, les tubes sont très minces et généralement très longs. De ce fait, lorsque l'eau du circuit secondaire s'écoule autour du faisceau, les tubes sont amenés à vibrer sous cet écoulement, et comme ils sont très proches les uns des autres, ils risquent de s'entrechoquer. Il est donc nécessaire de les maintenir suivant leur longueur. Pour cela, les tubes sont déjà maintenus à leur extrémité grâce à une plaque à tubes qui impose une condition d'encastrement. En outre, des grilles de maintien sont disposées de façon régulière tout au long des tubes.

1.1.3 Paramètres du système

Le problème de vibration sous écoulement d'un faisceau de tubes sous-entend d'une part que des interactions fluide-structure vont apparaître et d'autre part que les paramètres mécaniques du système sont spécifiques pour tenir compte des conditions du système (écoulement turbulent, confinement, géométrie, fluide diphasique, etc.). Dans ce paragraphe, ces paramètres sont précisés et sauf exception, ils sont utilisés dans la suite de ce document.

Le diamètre extérieur d'un tube est noté D et, lorsqu'il est régulier, le pas inter-tubes est noté P . Dans le cas où l'on distingue les deux directions dans le plan de l'écoulement pour le motif du faisceau, on note P le pas inter-tubes dans

la direction transversale à l'écoulement, et L le pas dans la direction parallèle à l'écoulement.

Vitesse caractéristique et nombres sans dimension

La vitesse moyenne de l'écoulement en l'absence d'obstacle est notée U_∞ . Dans le cas du faisceau de tubes, la vitesse moyenne tient compte de la présence des tubes : elle est appelée vitesse de pas, notée U_p et est décrite par :

$$U_p = U_\infty \frac{P}{P - D} \quad (1.1)$$

Les nombres adimensionnels utilisés sont les suivants : le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e (caractérisant le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité dans le fluide) et le nombre de Strouhal \mathcal{S}_t (rapport de la longueur de référence avec la longueur parcourue par une particule fluide à la vitesse de référence pendant une durée de référence de l'écoulement) ; ils sont définis comme suit :

$$\mathcal{R}_e = \frac{U_p D}{\nu} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{S}_t = \frac{f_s D}{U_p} \quad (1.3)$$

avec f_s la fréquence de détachement des tourbillons en aval du tube et ν la viscosité cinématique du fluide.

À partir de ces nombres de références et de considérations sur les caractéristiques des écoulements observés, un grand nombre de modèles se sont développés depuis les dernières décennies. L'annexe A.1 présente un modèle fournissant l'évaluation des grandeurs et paramètres dans un faisceau tubulaire en vibrations sous écoulement. Ce modèle a notamment été proposé par Pettigrew et Taylor (2003a;b). Il n'est pas unique mais a cependant été largement utilisé (tel quel ou par des versions approchantes) dans l'industrie nucléaire, la méthode a pour intérêt de proposer un cadre pour les écoulements diphasiques.

Afin d'étudier les vibrations au sein des générateurs de vapeur, le développement de modèles (semi-empiriques, semi-analytiques, analytiques ou numériques) permettant de décrire l'ensemble des situations observées au sein d'un réseau de cylindres soumis à un écoulement s'est accru depuis que les capacités de calcul se sont améliorées, à partir des grandeurs et nombres sans dimensions présentés ici. La partie 1.2 propose une présentation des différents types d'excitations vibratoires observés.

1.2 VIBRATIONS SOUS ÉCOULEMENT : DIFFÉRENTS TYPES D'EXCITATION

1.2.1 Un bref historique

Dès 1878, les premières études concernant les interactions entre un écoulement et une structure mobile sont menées par Strouhal. Les applications qui en découlent sont vastes : l'aéronautique, l'hydrodynamique navale, mais aussi l'étude au sens large de toutes les structures soumises à un écoulement (câbles électriques, cheminées, ponts suspendus, ...) et se trouvant au sein d'un système complexe (moteur, échangeur de chaleur, ...). L'une des études menées consiste à observer un écoulement transversal autour d'un cylindre. C'est notamment ainsi que le mécanisme d'émission de tourbillons à l'arrière du cylindre est mis en lumière par Von Karman ; la fréquence réduite d'émission de ces tourbillons est appelée nombre de Strouhal. Gerrard (1966) explique la raison pour laquelle le nombre de Strouhal est pratiquement constant pour une large plage du nombre de Reynolds. L'année suivante, Koopman (1967) étudie les effets des oscillations transversales d'un cylindre dans un écoulement sur la fréquence d'émission des tourbillons. Il détermine les conditions pour lesquelles les fréquences d'émission de tourbillons et d'oscillation du cylindre coïncident, pour un écoulement à faible nombre de Reynolds. En faisant varier la fréquence d'oscillation du cylindre, il détermine le domaine pour lequel on assiste au phénomène d'accrochage, ou "lock-in" : les deux fréquences coïncident, et l'émission de tourbillons est contrôlée par la fréquence propre du cylindre.

1.2.2 Vibrations sous écoulement d'un faisceau tubulaire

Dans le cas d'un faisceau tubulaire en fonctionnement normal, l'eau du circuit secondaire s'écoule autour du faisceau. C'est la détermination des forces exercées par cet écoulement sur les tubes qui permet de quantifier la réponse de ces derniers.

Pour un fluide monophasique, cadre dans lequel nous nous plaçons dans toute la suite de nos travaux, on compte quatre formes différentes de mécanismes d'excitation vibratoire des tubes sous un écoulement transversal : l'excitation turbulente, l'excitation par détaché tourbillonnaire, la résonance acoustique et enfin l'instabilité fluide-élastique. La figure 1.5 représente l'écart à la moyenne de l'amplitude des vibrations sous écoulement d'un cylindre seul en fonction de la vitesse réduite.

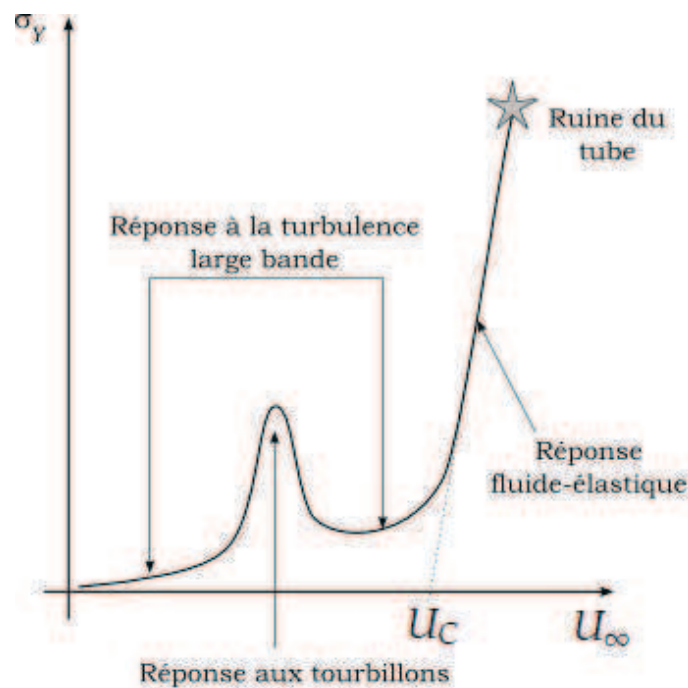


FIGURE 1.5 – Évolution de l'écart-type σ_Y de l'amplitude de la réponse vibratoire d'un tube en écoulement transverse en fonction de la vitesse réduite

L'apparition de ces différents mécanismes dépend de l'ensemble des paramètres du système. Dans cette partie, chacun de ces phénomènes est décrit (écoulement monophasique, diphasique, liquide ou gazeux, régime de l'écoulement, etc.) ainsi que les conséquences qu'il implique. Cette description est une première étape importante pour l'analyse vibratoire des systèmes étudiés.

1.2.3 Excitation turbulente

L'excitation d'un tube de générateur de vapeur dans l'écoulement du circuit secondaire est inévitable. En effet, le régime de l'écoulement est tel que la turbulence y est intrinsèque (le nombre de Reynolds est généralement compris dans la gamme $\mathcal{R}_e \in [10^4 - 10^7]$). De plus, un écoulement turbulent est même préconisé, puisque la finalité de l'échangeur est d'optimiser les transferts de chaleur au niveau des tubes. La turbulence de l'écoulement n'engendre cependant que des mouvements structurels *a priori* bornés. En effet, la génération d'éventuelles structures tourbillonnaires organisées en aval des tubes pouvant augmenter le niveau vibratoire des tubes est empêchée par le caractère aléatoire de l'écoulement. Mais le phénomène d'excitation turbulente doit tout de même être pris en considération, puisque les vibrations générées, même faibles, peuvent avoir un effet sur l'usure du tube à long terme.

Plusieurs cas d'excitation turbulente sont à distinguer, comme le rappellent Pettigrew et Taylor (2003b). D'une part, ce mécanisme s'observe pour les cas d'écoulements transversaux monophasiques liquides, d'autre part, pour les écoulements diphasiques. Pour un écoulement monophasique gazeux, quel que soit le gaz, sa densité est trop faible pour engendrer des forces excitatrices assez importantes sur les tubes et les amener à vibrer. En effet, Pettigrew et Taylor (2003b) ont noté, pour une vitesse d'écoulement donnée, que ces forces sont inférieures d'en-

viron un ordre de grandeur pour un gaz par rapport à celles d'un liquide ou un mélange diphasique. Cependant, si l'écoulement est maintenu à une forte pression, il est possible que les vitesses et densités soient relativement élevées, et dans ce cas, l'amplitude des vibrations peut être non négligeable.

Pour l'écoulement transversal monophasique liquide, Pettigrew et Taylor (2003b) distinguent deux types d'écoulements. D'une part, l'écoulement existant au cœur du faisceau, où les tubes sont excités par des turbulences générées au sein même du faisceau. La nature de l'excitation est gouvernée par la géométrie du faisceau lui-même. D'autre part, les tubes se situant à l'entrée du faisceau sont excités par des éléments se trouvant en amont de l'écoulement, comme par exemple les orifices d'entrée, les tuyaux d'admission ou d'autres canalisations en amont de l'échangeur. C'est la géométrie des lignes de courant en amont qui régit les niveaux de turbulence, lesquels sont généralement beaucoup plus importants que ceux générés au cœur du faisceau.

Le cas de l'écoulement transversal diphasique est beaucoup plus complexe, de par la multiplicité des régimes d'écoulements existants, comme le rappelle Axisa (2001) : l'écoulement peut être à gouttelettes, à bulles, voire intermittent. Les niveaux de turbulence peuvent être relativement élevés, notamment dans la partie coudée (en "U") des tubes. Pettigrew et Taylor (2003b) font la distinction entre les écoulements à faible fraction de vide (inférieure à 10%), où les forces aléatoires engendrées par l'écoulement ont globalement le même comportement que pour un écoulement turbulent monophasique, et les cas d'écoulements où la fraction de vide est supérieure à 10%, où les effets du mélange commencent à apparaître, voire à régir complètement l'évolution des champs de forces fluctuantes (Pettigrew et Taylor 2003b).

1.2.4 Vibrations induites par détaché tourbillonnaire

Dans le cas d'un écoulement autour d'un tube seul, dès lors que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé (à partir d'environ $\mathcal{R}_e \sim 50$), le sillage se détache à l'arrière du tube et des tourbillons se forment, de façon asymétrique de part et d'autre de la ligne médiane de l'écoulement en aval du tube. Ceci est dû à l'apparition de petites instabilités dans un écoulement laminaire. Ces perturbations s'amplifient rapidement en aval du tube, pour créer des tourbillons, à partir de fluctuations en vitesse et en pression. La génération de ces tourbillons est périodique, on peut donc définir une fréquence d'émission des tourbillons f_S , dont la forme sans dimension couramment utilisée est le nombre de Strouhal $\mathcal{S}_t = \frac{f_S D}{U_\infty}$ avec D le diamètre du cylindre et U_∞ la vitesse moyenne de l'écoulement.

Il est parfois possible d'observer un pic dans l'amplitude de la réponse vibratoire d'un tube sur une gamme de vitesses réduites (figure 1.5, zone "réponse aux tourbillons"). Ce pic apparaît lorsque la fréquence du détachement tourbillonnaire à l'arrière du tube est proche de la fréquence propre du tube. Sur la gamme de vitesses réduites où le pic est observé (l'amplitude des vibrations est inversement proportionnelle à la masse réduite et à l'amortissement structurel (Khalak et Williamson 1999, Shiels et al. 2001)), c'est la vibration du tube qui régit l'organisation de l'écoulement, c'est-à-dire que le tube impose sa fréquence de vibration au phénomène de détachement tourbillonnaire du sillage. Dans le cas où ce phénomène dit d'*accrochage mécanique* apparaît, les forces d'excitation augmentent, mais leur amplitude reste limitée par les non-linéarités de l'écoulement, elles-mêmes issues du mouvement du tube lui-même. De plus, lorsque la vitesse

réduite augmente encore, cet accrochage disparaît et la loi que suivait l'amplitude adimensionnelle pour de faibles vitesses reprend son cours, c'est le décrochage.

Comme le cas du tube seul en vibrations sous écoulement transversal fait l'objet d'un grand nombre d'études, nous nous attardons sur quelques résultats qui permettent de classer les mécanismes observés, tant au sein du sillage à l'arrière du cylindre que dans l'interaction fluide-structure due au phénomène de détachement tourbillonnaire.

1.2.4.1 Cas d'un tube seul

Mise en situation du problème

En figure 1.6, on présente schématiquement l'écoulement bidimensionnel autour du cylindre de diamètre D , en coupe dans un plan (x, y) , U_∞ est la vitesse à l'infini en amont du cylindre. Pour les travaux en trois dimensions, il faut considérer la direction selon z , sur laquelle on voit apparaître beaucoup de phénomènes complexes en interaction avec les phénomènes bidimensionnels.

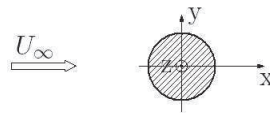


FIGURE 1.6 – Écoulement transversal autour d'un cylindre

Grandeurs caractéristiques

De par l'introduction de ce phénomène de vibrations, le cylindre est soumis à des efforts selon les deux directions x et y . Ces efforts sont respectivement appelés traînée et portance. On introduit alors, pour décrire ces efforts quelle que soit la configuration, les coefficients hydrodynamiques sans dimension : le coefficient de traînée défini comme :

$$C_D = \frac{F_y}{0.5 \rho U_\infty^2 D} \quad (1.4)$$

où F_y est la force exercée par le fluide sur le cylindre dans la direction y perpendiculaire à la direction de l'écoulement et le coefficient de portance :

$$C_L = \frac{F_x}{0.5 \rho U_\infty^2 D} \quad (1.5)$$

où F_x est la force exercée par le fluide sur le cylindre dans la direction x de l'écoulement et $\frac{1}{2}\rho U_\infty$ représente l'effort exercé sur le cylindre en hypothèse d'écoulement non détaché.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à un cylindre ayant la possibilité de vibrer, c'est-à-dire monté de façon élastique, tel un système masse-ressort, comme dans le cas d'un grand nombre d'études portant sur un cylindre fixe (Chen 1987, Norberg 2001). Ainsi, il est possible de relever et quantifier les effets de l'écoulement comportant un détaché tourbillonnaire sur la réponse du cylindre d'une part, et en retour, des effets du mouvement du cylindre sur la forme de l'écoulement, notamment sur le sillage. Pour un cylindre long et un nombre de Reynolds

assez grand, les mouvements générés nous amènent à considérer non seulement la forme du sillage dans le plan (x, y) , mais aussi les structures observées selon l'axe du cylindre (direction z), et les effets engendrés.

Réponse du cylindre en amplitude

L'une des principales questions que l'on se pose pour le problème considéré est celle de l'amplitude maximale que peut atteindre la réponse du cylindre. Khalak et Williamson (1999) introduisent le choix, maintenant généralement utilisé, de tracer le maximum en amplitude de la réponse adimensionnelle du cylindre en fonction de la vitesse réduite. Dans ce cas, les observations faites par Khalak et Williamson ont mis en lumière plusieurs phénomènes.

D'abord, les choix de la masse de la structure et de son amortissement conduisent à des profils de réponse différents. Les grandeurs considérées sont le coefficient d'amortissement réduit ζ et la masse réduite :

$$m^* = \frac{m}{\rho \pi l (D^2/4)} \quad (1.6)$$

avec l la longueur du cylindre. Khalak et Williamson (1999) montrent que l'on peut décrire le problème grâce à un seul paramètre couplé masse-amortissement $m^*\zeta$. Cependant, ils n'écartent pas la possibilité qu'il existe des conditions entraînant que m^* ait une influence sur la valeur de l'amplitude, même à $m^*\zeta$ constant.

Dans ces conditions, selon que le paramètre $m^*\zeta$ est faible ou élevé, les réponses en amplitude diffèrent : en figure 1.7, on peut observer que pour $m^*\zeta$ grand, on n'a que deux branches de réponse, appelées respectivement (pour une vitesse réduite croissante, notée U^* sur la figure) branche d'excitation initiale et branche inférieure. Par contre, si $m^*\zeta$ est faible, on a trois branches distinctes : on retrouve la branche d'excitation initiale, puis une nouvelle branche appelée branche supérieure, et enfin la branche inférieure.

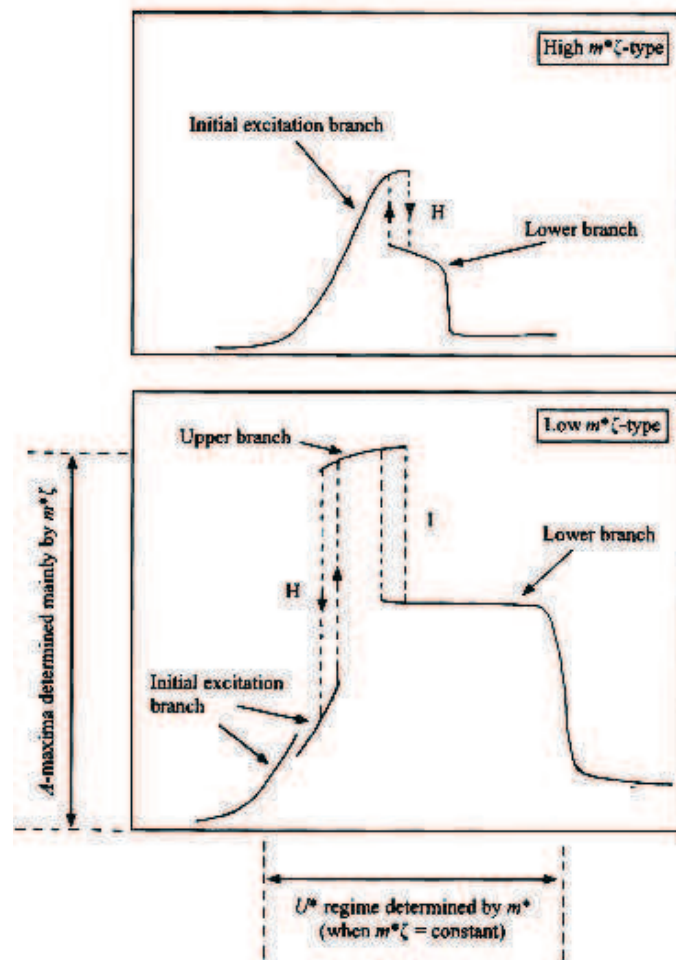


FIGURE 1.7 – Schéma des deux types de réponse en amplitude possible selon le paramètre $m^*\zeta$ choisi (Khalak et Williamson, 1999)

Plusieurs observations peuvent être faites sur les détails de ces réponses : sur la figure 1.7, au passage de la branche initiale à la branche inférieure ou supérieure selon le cas, est indiqué un phénomène d'hystérésis : selon que l'on fasse les expériences pour une vitesse réduite croissante ou décroissante, la forme de la réponse diffère. D'autre part, le passage de la branche supérieure à la branche inférieure dans le cas de faible $m^*\zeta$ est caractérisé par un comportement non pas hystérétique mais intermittent, c'est-à-dire que l'on observe des valeurs très fluctuantes pour une certaine plage de valeurs de la vitesse réduite.

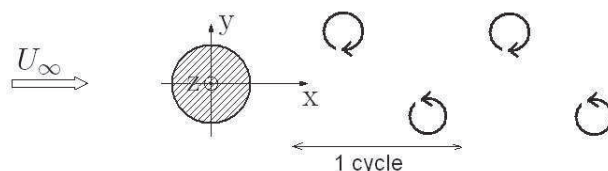
D'autres auteurs proposent, dans certaines conditions, de ne pas tracer l'évolution de l'amplitude maximale réduite en fonction de la vitesse réduite, mais plutôt en fonction d'un paramètre combinant le coefficient de masse réduite m^* et la rigidité réduite k^* , appelé rigidité effective et notée k_{eff}^* par Shiels et al. (2001), qui travaillent à $Re \sim 100$. Ces derniers souhaitent observer les vibrations induites pour des conditions extrêmes, avec masse, amortissement et rigidité (réduits) nuls. Dans ce cas, ils observent des vibrations induites par l'écoulement, sans que l'on puisse réellement parler ni de couplage mécanique, ni de phénomène d'accrochage (puisque'il n'y a pas de fréquence mécanique définissable). Lorsqu'ils ajoutent des coefficients m^* et k^* non nuls, en gardant un amortissement nul ou très faible (in-

férieur à 1×10^{-2} , afin de n'avoir qu'un effet négligeable sur le mouvement), ils montrent que l'on peut combiner m^* et k^* en k_{eff}^* , coefficient qui définit complètement le système, pour un nombre de Reynolds donné. Ceci présente un intérêt dans le cadre d'analyses numériques de sensibilité paramétrique (Leonard et Roshko 2001).

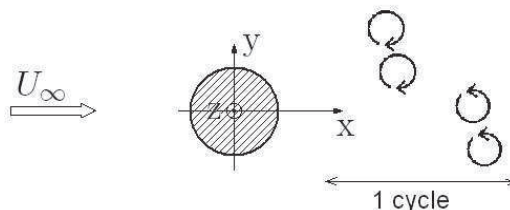
Modes d'émission de tourbillons

Revenons sur les observations faites par Khalak et Williamson (1999). Ils observent le sillage à l'arrière du cylindre, et, selon la branche de réponse dans laquelle on se trouve, constatent des modes d'oscillation différents.

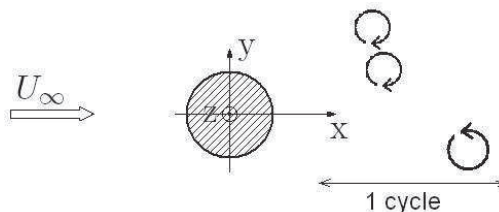
Pour la branche initiale, l'émission des tourbillons consiste en des détachements alternés aux côtés opposés du cylindre, et le tourbillon de dessus tourne dans le sens opposé à celui du tourbillon de dessous (figure 1.8 (a)). Ce mode est appelé "2S" d'après Khalak et Williamson (1999), pour *2 Single vortices shed per cycle*.



(a) Mode d'émission des tourbillons pour la branche initiale : 2S



(b) Mode d'émission des tourbillons pour la branche inférieure : 2P



(c) Mode d'émission observé dans certains cas lors de l'accrochage : P+S

FIGURE 1.8 – Différents modes d'émission des tourbillons selon la branche d'observation

Pour la branche inférieure, l'émission des tourbillons est décrite comme suit : deux tourbillons sont lâchés simultanément des deux côtés du cylindre (figure 1.8 (b)), on appelle ce mode "2P", pour *2 Pairs of vortices shed per cycle*. Ce mode semble avoir des caractéristiques de périodicité presque parfaites, par rapport aux autres modes observés dans le régime de synchronisation (accrochage). En ce qui concerne la branche supérieure, Govardhan et Williamson (2000) expliquent clairement l'observation du mode 2P.

Nobari et Naderan (2006) constatent que lorsque l'accrochage est possible, si l'amplitude de la réponse du cylindre est augmentée, un second tourbillon est

observé d'une part ou de l'autre du cylindre, en plus de chaque tourbillon lâché. On appelle ce mode "P+S", pour *Pair of vortices + Single vortex shed per cycle* (figure 1.8 (c)). Ce mode est observé par Placzek et al. (2008) pour des simulations à $Re = 100$, et est également détecté dans des simulations effectuées par Singh et Mittal (2005) pour des nombres de Reynolds situés au-delà de $Re \sim 300$, pour un cylindre libre d'osciller dans les deux directions (x et y), mais il reste à vérifier que ce mode est bien observé dans la réalité.

Les forces de traînée et portance

Lors des vibrations du cylindre, on peut observer non seulement des valeurs maximales de ces forces assez importantes en comparaison avec les valeurs du cas du cylindre fixe, mais aussi de grandes fluctuations des grandeurs. Leur courbe de tendance, que ce soit pour la force de traînée ou de portance, est la suivante : elles augmentent rapidement pour des valeurs croissantes de la vitesse réduite dans la zone de la branche inférieure, atteignent leur maximum au début de la branche supérieure (quand elle existe, c'est-à-dire pour une masse réduite faible), puis elles diminuent rapidement le long de la branche supérieure, et enfin, diminuent lentement dans la branche inférieure. La portance, dans la zone de la branche inférieure, diminue beaucoup, pour atteindre des valeurs très faibles, même inférieures à celles observées dans le cas du cylindre fixe (Khalak et Williamson 1999, Guilmineau et Queutey 2004).

Le cas d'écoulements tridimensionnels

Dès lors que l'on dépasse environ $Re \sim 190$, les effets tridimensionnels de l'écoulement sont à prendre en compte. Pour des observations qualitatives, certains auteurs se permettent de rester à des cas de simulation en deux dimensions, puisque les événements restent observables.

Afin de pouvoir capturer les caractéristiques 3D d'un écoulement, il faut introduire la notion de longueur de corrélation. C'est une grandeur caractéristique pour la direction de l'axe principal du cylindre, soit z , elle représente la longueur selon z sur laquelle se détache un tourbillon (en effet, un tourbillon a une "épaisseur" selon l'axe du cylindre).

De Langre (2002) évoque les effets tridimensionnels observés dans le sillage d'un cylindre de grande dimension. Il définit une fonction de corrélation entre les signaux de fluctuations de l'écoulement observés à différentes sections du cylindre. Cette fonction notée r est définie comme :

$$r(x_2 - x_1) = \frac{\langle f(x_1, t) \cdot f(x_2, t) \rangle}{\langle f^2(x_1, t) \rangle^{1/2} \langle f^2(x_2, t) \rangle^{1/2}} \quad (1.7)$$

où $\langle . \rangle$ représente la moyenne temporelle et f est la fréquence d'émission des tourbillons en différentes sections (repérées par les points x_1 et x_2). Pour un cylindre, De Langre montre que cette fonction décroît de façon exponentielle avec l'augmentation de la distance entre les sections d'observation, sachant qu'elle vaut 0 pour des signaux totalement décorrélés (pour lesquels on ne peut pas trouver d'influence réciproque) et 1 si les signaux sont identiques ou proportionnels. Ainsi, dès lors que la distance entre deux sections dépasse quelques diamètres, les signaux sont décorrélés.

De la même façon, les efforts transversaux (de portance) que le fluide applique au cylindre sont décorrélés le long du tube. Il résulte, comme le montre

De Langre (2002) par un exemple simple, que plus le tube est long, plus l'amplitude des déplacements du cylindre sous l'effet des efforts du fluide est faible. Ceci peut se résumer par le fait que, étant donné que les détachements de tourbillons ne se font pas au même moment selon l'axe du cylindre, la force subie par le cylindre diminue si la longueur de corrélation diminue aussi.

Dans le cas des installations de faisceaux tubulaires d'échangeurs de chaleur, les tubes sont maintenus régulièrement le long de leur axe par des grilles ; ce qui crée artificiellement des "morceaux" de tubes qui peuvent parfois être considérés comme des tubes indépendants (si le maintien est effectif), dont la longueur individuelle est bien inférieure à celle du tube complet. Ainsi, la fonction de corrélation est potentiellement importante sur chacun de ces tronçons.

1.2.4.2 Cas du faisceau de tubes

Dans le cas présent du faisceau de tubes, l'écoulement à l'arrière des tubes peut, lui aussi, présenter des phénomènes de détachement tourbillonnaire, comme le montre la figure 1.9, mais il est globalement bien plus complexe que pour un tube seul en milieu infini, sachant de plus que les plages de nombre de Reynolds d'intérêt sont élevées ($\mathcal{R}_e \in [10^4 - 10^7]$), ce qui implique que l'écoulement comporte un grand nombre de structures dites cohérentes de tailles variées. Un phénomène d'accrochage mécanique, engendrant de grandes amplitudes, est mis en évidence par Pettigrew et Gorman (1981).

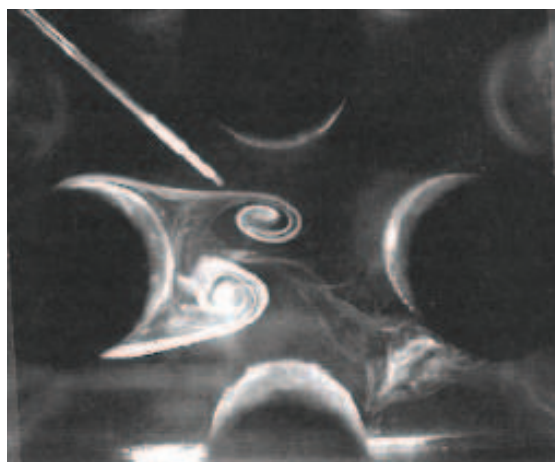


FIGURE 1.9 – Phénomène de détachement tourbillonnaire à l'arrière d'un tube en configuration de faisceau en air (Weaver et al. 1993), pour $\mathcal{R}_e \sim 10^6$

La vibration des tubes sous l'effet de réponse au détaché tourbillonnaire (ou *synchronisation*) est généralement observée dans le cas d'un écoulement liquide, comportant des caractéristiques uniformes dans l'espace et dans le temps. Ainsi, le problème ne se pose en général pas dans les zones où l'écoulement est fortement turbulent ou peu uniforme, comme c'est le cas dans la région d'entrée de générateurs de vapeur. Le développement de la turbulence tend en effet à réduire l'excitation par détaché tourbillonnaire, comme le rappellent Pettigrew et Taylor (2003a). Le détachement tourbillonnaire n'engendre généralement pas de vibrations excessives en écoulement diphasique, en distinguant cependant les mélanges où le taux

de vide est très faible ($\varepsilon_g \lesssim 10\%$ selon Pettigrew et Taylor (1994)) : la situation est alors très proche du cas monophasique liquide (Pettigrew et Taylor 2003a).

Il est difficile de déterminer l'ordre de grandeur des forces qu'exerce le fluide sur un tube lors du mécanisme de détachement tourbillonnaire, c'est pourquoi les informations sont extraites des fréquences de détachement des tourbillons. Ainsi, la description du phénomène se fait à partir du nombre de Strouhal S_t , des coefficients de portance C_L et de traînée C_D , définis de façon analogue au cas du tube seul :

$$C_L = \frac{F_y}{0,5\rho DU_p^2} \quad (1.8)$$

$$C_D = \frac{F_x}{0,5\rho DU_p^2} \quad (1.9)$$

Le nombre de Strouhal dépend de la configuration de l'assemblage du faisceau de tubes. De plus, pour une configuration de faisceau donnée, le nombre de Strouhal correspond à certaines gammes de valeurs de la vitesse de pas : ce sont les gammes où le phénomène de détachement tourbillonnaire est susceptible de se déclencher. Dans le cas de vitesses d'écoulement non uniformes, seules les forces fluctuantes correspondant à ces zones de vitesse adimensionnelle sont considérées. Finalement, Pettigrew et Taylor (2003b), en réunissant différentes données disponibles, montrent la dépendance des forces fluctuantes dues à l'émission des tourbillons, à la configuration du faisceau, à la localisation du tube considéré au sein du faisceau (en entrée, en sortie, au milieu, ...), au nombre de Reynolds, au niveau de turbulence, à la densité du fluide, et enfin au confinement, c'est-à-dire au rapport P/D .

Weaver et al. (2000) évoquent également le cas où, malgré la présence de structures turbulentes empêchant *a priori* l'apparition d'un phénomène de détachement tourbillonnaire à l'arrière des tubes, un mécanisme de ré-alimentation en aval du tube (par la présence d'une autre structure par exemple) peut autoriser la formation de structures périodiques organisées juste à l'arrière du tube.

Païdoussis (1982) met l'accent sur la difficulté qui réside dans le discernement entre le phénomène de vibration par excitation turbulente et celui issu de l'excitation par détachement tourbillonnaire, d'autant que, selon la position du tube dans le faisceau, les effets de la turbulence peuvent différer. Païdoussis cite notamment Owen (1965) qui, remettant en cause la mise en place du phénomène de détachement tourbillonnaire, propose d'utiliser la fréquence dominante du spectre d'énergie turbulente f_b comme fréquence de référence, qui coïncide éventuellement avec la fréquence propre du tube ; il détermine alors un nouveau nombre de Strouhal basé sur cette fréquence f_b . Les auteurs qui succèdent à Owen (1965) maintiennent l'idée de la possibilité de vibrations induites par le détaché tourbillonnaire, en revoyant tout de même sa définition dans le cas d'un faisceau tubulaire (Chen 1968). Païdoussis (1982) conclut qu'il n'existe qu'un seul et même phénomène périodique générant de la résonance, que les uns appellent détaché tourbillonnaire et les autres excitation turbulente. Ce phénomène apparaît dans des conditions particulières et, même lorsqu'il apparaît, ce n'est pas de façon uniforme dans tout le faisceau. En effet, Païdoussis relève différentes études (Grover et Weaver 1978, Pettigrew et al. 1978) qui montrent la forte dépendance de la forme de l'écoulement à la position du tube dans le faisceau, ainsi que la différence quantitative notable entre le phénomène de vibration induite par l'écoulement dans le cas du faisceau

de tubes par rapport à un écoulement autour d'un tube seul, notamment en ce qui concerne le coefficient de portance.

1.2.5 Résonance acoustique

Un autre type d'accrochage peut être observé dans les échangeurs gazeux, c'est l'accrochage acoustique. Dans ce cas, l'apparition de fréquences d'émissions de tourbillons dans le sillage des tubes, coïncidant avec une fréquence propre acoustique de l'enceinte qui contient le faisceau, génère un bruit acoustique très intense. En effet, les niveaux sonores atteignent des valeurs de l'ordre de 150 dB d'après Axisa (2001). Le bruit mais aussi les dommages sérieux qui en résultent amènent à se préoccuper du dimensionnement de l'échangeur dans l'optique d'éviter ce phénomène. Selon Pettigrew et Taylor (2003b), la résonance acoustique suppose deux conditions :

- la coïncidence entre la fréquence d'émission périodique de structures (tourbillonnaires ou autres) dans le sillage et une fréquence acoustique de l'enceinte,
- une énergie acoustique suffisante, ou bien un amortissement acoustique suffisamment faible pour permettre l'émission d'une résonance par une onde acoustique stationnaire.

Dans les faisceaux de tubes des échangeurs de chaleur, les ondes acoustiques stationnaires sont généralement perpendiculaires à la fois à l'axe des tubes et à la direction de l'écoulement.

La fréquence associée aux ondes acoustiques stationnaires, notée f_{ai} pour le $i^{\text{ème}}$ mode, est définie par Pettigrew et Taylor (2003b) comme :

$$f_{ai} = \frac{iC}{2W} \quad (1.10)$$

où W est la dimension, dans la direction perpendiculaire à l'écoulement et à l'axe des tubes, de la cavité dans laquelle se trouve le faisceau de tubes, i est le numéro du mode considéré, et C est la vitesse effective du son, définie par Ziada et al. (1989) comme suit :

$$C \simeq C_0 \sqrt{1 + \sigma} \quad (1.11)$$

La célérité du son C_0 est calculée comme $C_0 = \sqrt{C_s p_p / \rho_p}$ avec C_s le coefficient de chaleur spécifique ($C_s = 1.33$ pour la vapeur), p_p et ρ_p respectivement la pression et la densité pariétales du fluide, du côté de la calandre. Le coefficient σ , dit coefficient de solidité, est introduit afin de prendre en compte l'effet de la présence des tubes et de leur confinement sur la vitesse du son. Ce coefficient est le rapport entre le volume occupé par les tubes et le volume du faisceau entier :

- pour un faisceau à maille triangulaire : $\sigma = \frac{\pi D^2}{2\sqrt{3}P^2}$;
- pour un faisceau à maille carrée : $\sigma = \frac{\pi D^2}{P^2}$.

avec P le pas inter-tubes. Il suffit de calculer les fréquences des ondes acoustiques stationnaires pour les premiers modes acoustiques (les cinq premiers suffisent en général, Pettigrew et Taylor (2003b)). Si une ou plusieurs de ces fréquences modales en vient à se trouver dans la gamme des fréquences de détachement tourbillonnaire, alors les conditions sont réunies pour rendre possible une résonance acoustique.

Howe (1975) développe une procédure de calcul de la puissance acoustique Π_a générée par la convection de la vorticit   ω au sein d'un champ acoustique. Une

formule existe dans le cas d'un nombre de Reynolds élevé et d'un nombre de Mach relativement faible :

$$\Pi_a = -\rho \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) d\Omega \quad (1.12)$$

où ρ est la densité du fluide, Ω le volume de fluide contenant le champ de vorticité, \mathbf{v} est la vitesse du fluide et \mathbf{u} la vitesse particulaire du champ acoustique. Ainsi, en fonction du signe de la puissance Π_a , la vorticité est soit une source, soit un puits acoustique. Ceci montre aussi qu'il existe une condition de phase entre l'émission des tourbillons et les ondes acoustiques pour avoir une source, ce qui explique pourquoi la résonance acoustique est susceptible de se déclencher uniquement sur une certaine gamme de nombres de Strouhal.

Weaver et al. (2000) rappellent que, la plupart du temps, les modes des ondes acoustiques stationnaires dans un conduit sont excités par le mécanisme de détachement tourbillonnaire en aval d'une structure disposée (et confinée) dans ce conduit. Les modes excités sont ceux qui sont perpendiculaires à la fois à la direction de l'écoulement et à l'axe de la structure. Dans le cas où aucune structure ne se trouve dans le sillage, la source acoustique est associée au processus de formation de tourbillons. Dans le cas où des objets se trouvent dans le sillage, une source sonore supplémentaire entre en jeu. Alors, l'existence d'une résonance dépend de l'effet ajouté des différentes sources acoustiques au niveau des zones de séparation de l'écoulement et d'empi tement de l'écoulement sur l'objet situé dans le sillage. Des résonances acoustiques de très grande amplitude peuvent alors se développer.

Les auteurs s'accordent aujourd'hui pour dire que le phénomène d'excitation acoustique est très diff rent selon que le faisceau possède une configuration en quinconce ou alignée. Dans le premier cas, la résonance est déclenchée par l'excitation tourbillonnaire, qui domine l'écoulement même avant la mise en place de la résonance : pour définir la vitesse de l'écoulement de déclenchement de la résonance acoustique, il faut alors se baser sur le nombre de Strouhal de l'excitation tourbillonnaire. Dans le second cas, le déclenchement de la résonance n'est pas nécessairement d  à l'excitation tourbillonnaire propre. Il est alors nécessaire de construire un nombre de Strouhal acoustique, basé sur des données en résonance existantes pour déterminer la vitesse de départ en résonance. Et, comme cela a déjà été mentionné, cette vitesse d'écoulement ne suffit pas pour déclencher la résonance : il faut aussi une énergie d'excitation suffisante.

Weaver et al. (2000) proposent d'axer les travaux sur la caractérisation des coefficients d'amortissement et d'absorption des modes de résonance, afin de mieux estimer l'intensité des résonances prévues, et de déterminer si l'accrochage acoustique peut avoir lieu.

1.2.6 Instabilité fluide-élastique

Le phénomène d'instabilité fluide-élastique mène à une ruine très rapide du tube qui y est sujet, c'est donc une instabilité à éviter. Elle apparaît lorsque la vitesse moyenne de l'écoulement dépasse une certaine valeur seuil, appelée la vitesse critique, notée U_C sur la figure 1.5.   partir de ce seuil, le mouvement de la structure produit une force fluide dirigée dans la direction du mouvement de la structure et les amplitudes vibratoires deviennent largement supérieures à celles observées en régime usuel. Seules une rupture ou une usure très rapide du tube, par des impacts répétés avec les grilles de maintien du faisceau, mettent fin

à l'excitation vibratoire. C'est pourquoi ce phénomène est appelé instabilité fluide-élastique, puisqu'il est auto-entretenu (on parle aussi de *feedback positif*) et dépend de l'interaction mutuelle des forces fluides avec les déplacements de la structure élastique. L'instabilité fluide-élastique se distingue fortement du phénomène d'accrochage mécanique par le fait qu'aucun décrochage n'a lieu puisque la ruine du tube est presque immédiate : augmenter la vitesse de l'écoulement ne fait qu'augmenter l'amplitude des vibrations, contrairement au cas d'accrochage mécanique où il existe une vitesse supérieure pour laquelle le décrochage a lieu.

Remarque 1.1 *L'instabilité fluide-élastique d'un cylindre seul sous écoulement transversal a été étudiée par de nombreux auteurs, on peut se référer aux travaux de Jus (2011) pour une bibliographie récente. Ici, seul le cas du faisceau de tubes est évoqué.*

Price (1995) rappelle l'importance de classifier les types d'instabilités. En effet, l'efficacité des moyens mis en place pour éviter l'instabilité dépend fortement de la nature de son mécanisme (c'est-à-dire de sa nature statique ou dynamique). Par exemple, une instabilité statique n'est pas affectée par un amortissement structural. Ainsi, on sait que l'instabilité fluide-élastique est une instabilité dynamique. Cependant, il faut encore définir si elle est due à des forces de vibrations dépendantes de la vitesse ou bien du déplacement de la structure.

Price (1995) propose une définition simple permettant de comprendre la source de l'instabilité fluide-élastique. Il considère un cylindre à un seul degré de liberté en mouvement harmonique. Son déplacement x est donc défini comme :

$$x = X \sin(\omega t) \quad (1.13)$$

avec X l'amplitude des oscillations, ω la pulsation et t le temps. Si l'on se place dans l'hypothèse de la dynamique linéaire quasi-statique d'un fluide, la force que le fluide exerce sur le solide est simplement donnée par :

$$F = Cx \quad (1.14)$$

avec C la "raideur" du fluide, proportionnelle à la pression dynamique de l'écoulement. Le travail des forces fluides sur le cylindre, pour une période d'oscillation est donc :

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \dot{x} F dt \quad (1.15)$$

avec \dot{x} la dérivée du déplacement par rapport au temps. Comme le système est conservatif, le travail W est nul. Ce qui montre que la force fluide ne peut pas mener à une instabilité dynamique, même si C est négatif. Une instabilité statique peut apparaître avec $C < 0$, lorsque la pression dynamique est assez grande : en effet, la raideur du fluide est négative et dépasse, en valeur absolue, la raideur positive du solide.

Par contre, pour que l'on observe une instabilité dynamique pouvant mener à un mécanisme d'instabilité fluide-élastique, il faut que le travail W soit négatif.

Axisa (2001) rappelle les travaux de Blevins (1974) qui formule un modèle de ce phénomène d'instabilité, initialement proposé par Connors (1970), pour le cas de rangées de tubes. Dans le cas où l'on considère que le temps d'établissement de l'écoulement perturbé par le mouvement des tubes est faible devant la période des vibrations, les forces sont supposées quasi-statiques et donc proportionnelles au déplacement vibratoire. Ce modèle suppose que le déplacement d'un tube modifie

l'écoulement interstitiel, et donc la répartition des pressions pariétales sur les cylindres avoisinants. Comme on assiste alors à une perte de la symétrie des pressions, des forces fluctuantes apparaissent. La projection des équations vibratoires sur les modes transverses des tubes donnent un système d'équations couplées de façon asymétrique.

Des auteurs proposent d'autres modèles afin de tenir compte de l'aspect dynamique de l'instabilité, d'autres abandonnent la formulation quasi-statique. Pour cela, ils se basent sur l'idée que l'écoulement ne réagit pas de façon strictement spontanée aux sollicitations de l'obstacle : ils introduisent ainsi la notion de retard de la réponse par rapport à la contrainte dans les équations qui régissent le phénomène de couplage fluide-élastique. C'est de ce retard que dépend fortement la limite de stabilité en vitesse réduite de l'écoulement.

Price (1995) montre que mathématiquement, le mécanisme d'instabilité fluide-élastique est dû à un travail négatif des forces fluides sur une période d'oscillation. Physiquement, ceci correspond à une extraction de l'énergie du fluide par la structure. Pour que cette extraction soit possible, trois mécanismes peuvent être mis en place d'après Price.

Le premier correspond à un déphasage entre le déplacement de la structure et les forces fluides générées par ce mouvement, ces dernières ayant une composante en phase avec la vitesse de vibration du cylindre : ceci signifie que ce mécanisme est régi par l'amortissement (qui est le facteur devant le terme de vitesse dans l'équation du mouvement). Le départ en instabilité apparaît donc lorsque cet amortissement devient négatif (Blevins 1974).

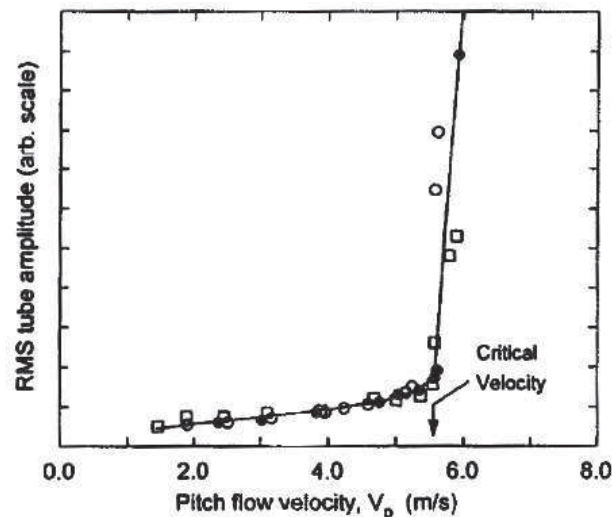


FIGURE 1.10 – Réponse excitée d'un faisceau de tubes en fonction de la vitesse de pas (Weaver et al. 2000).

La figure 1.10 reporte l'amplitude moyenne en fonction de la vitesse de pas inter-tubes, et montre la pente abrupte en amplitude. La question se pose alors de la définition de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique : en effet, elle diffère d'un auteur à l'autre. Pour les uns, le départ est défini comme une amplitude seuil du déplacement de la structure : lorsqu'elle dépasse une certaine fraction du diamètre, la vitesse pour laquelle cette amplitude est obtenue est

définie comme critique. D'autres auteurs s'intéressent au concours des tangentes des deux parties de la courbe de la figure 1.10 (la partie des faibles vitesses, où règne le phénomène d'excitation turbulente, et la partie des vitesses plus élevées, où l'amplitude subit une augmentation brutale). Il est aussi possible (Weaver et Grover 1978) de considérer la mise en place d'oscillations sinusoïdales cohérentes, d'observer l'annulation de l'amortissement, ou bien encore de se baser sur l'amplitude du bruit généré par les impacts des cylindres : cette disparité complique la mise en confrontation des différentes données de la littérature.

Malheureusement, le phénomène d'instabilité fluide-élastique n'épargne aucune configuration de faisceau et aucune nature de fluide. L'annexe A.2 présente quelques modèles pour l'analyse vibratoire.

1.3 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ANALYSE VIBRATOIRE

Ce paragraphe devrait constituer à lui seul une synthèse bibliographique complète, tant l'activité de recherche sur le sujet est dense, bien que relativement nouvelle, compte tenu de l'amélioration récente des capacités informatiques. Cependant, cette partie ne se veut pas exhaustive, le but est seulement d'aborder les méthodes et problématiques actuelles dans la simulation des écoulements transverses autour de faisceaux de tubes ainsi que de la prédiction du départ en instabilité fluide-élastique.

1.3.1 Enjeux et problématiques

La simulation numérique des phénomènes vibratoires des échangeurs de chaleur constitue un enjeu important à plus d'un titre. D'abord, connaissant les coûts et la difficulté de la mise en place d'expérimentations, il devient nécessaire de simuler les phénomènes physiques autant que faire se peut, lorsque l'on sait les modéliser. La puissance des calculateurs actuels permet d'effectuer des simulations fournissant des résultats dont la qualité s'est bien améliorée. D'autre part, il reste délicat de mesurer de façon précise et exhaustive tous les paramètres d'un écoulement et du faisceau de tubes. Les champs de vitesse et de pression de l'écoulement, notamment en écoulement diphasique, restent difficiles à capturer. Là encore, la simulation numérique permet de fournir des données en plus grande quantité et ainsi de mieux appréhender les phénomènes vibratoires complexes, la compréhension totale de ces événements restant bien sûr hors de portée avec le seul apport de la simulation numérique.

Le phénomène d'accrochage mécanique a été étudié en profondeur depuis quelques dizaines d'années et, même si des divergences persistent, les principales caractéristiques de ce mécanisme sont aujourd'hui relativement bien comprises et bien reproduites numériquement. Pour quelques exemples d'études sur le sujet ainsi qu'une bibliographie complète, on pourra se référer aux articles suivants : Khalak et Williamson (1999), Shiels et al. (2001).

L'excitation turbulente se caractérise par son aspect multi-échelle et fondamentalement tridimensionnel. Tout un panel de modèles a été formulé pour décrire au mieux les écoulements turbulents ainsi que leurs effets sur le mouvement d'une structure dans l'écoulement. L'existence de toutes les échelles pose des problèmes. On choisit soit l'utilisation de méthodes plus coûteuses mais précises, soit de faire des choix sur les échelles que l'on conserve, par exemple par l'utilisation d'un opérateur de moyenne (temporelle, spatiale ou statistique). La simulation numérique permet ainsi de fournir des spectres d'excitation turbulente, tandis que Weaver et al. (2000) mettent le doigt sur la faible quantité de données expérimentales disponibles concernant les forces d'excitations turbulentes. Des auteurs comme Perrin et al. (2008) exploitent au mieux les techniques de mesure actuelles les plus poussées en les couplant à la simulation numérique, notamment en utilisant les méthodes d'ordre réduit permettant de minimiser les temps de calcul, afin d'accomplir des analyses physiques relativement complètes et précises.

Enfin, la simulation numérique du départ en instabilité fluide-élastique fait partie des défis actuels, notamment par le fait que ce phénomène implique un couplage entre les comportements dynamiques de la structure et du fluide. Simuler l'instabilité fluide-élastique pour tenter d'en comprendre les mécanismes reste un challenge à part entière (voir par exemple les travaux de Longatte et al. (2003)),

les calculs à mettre en œuvre restant lourds, *a fortiori* lorsqu'un grand nombre de degrés de liberté est mis en jeu.

1.3.2 Stratégies de couplage

Le couplage rend les gestions des équations du fluide et de la structure indissociables. Les échelles de temps entre les évolutions des deux domaines fluide et solide étant du même ordre, il est impossible de s'affranchir des conditions à l'interface entre les deux milieux afin de reproduire correctement les phénomènes physiques observés (vibrations induites par les tourbillons, départ en instabilité, dynamique de flottement, etc.).

1.3.2.1 Formulations selon les domaines

L'étude numérique d'un domaine solide se traite plus naturellement avec une approche lagrangienne, tandis que celle d'un domaine fluide est généralement effectuée avec une méthode eulérienne. Si l'on considère un domaine global Ω de l'espace, supposons que l'on souhaite observer l'évolution dynamique des points qui le constituent. On considère un domaine Σ qui tient lieu de fenêtre d'observation (voir figure 1.11) : l'approche lagrangienne consiste à partir d'un domaine initial Σ_0 qui se déplace et se déforme au cours du temps en $\Sigma(t)$ afin de suivre l'ensemble des particules qui étaient situées en son sein à l'instant initial. L'approche eulérienne, quant à elle, consiste à garder Σ fixe au cours du temps et à observer l'ensemble des particules qui seront passées par cette zone au cours de l'intervalle de temps considéré $[0, T]$.

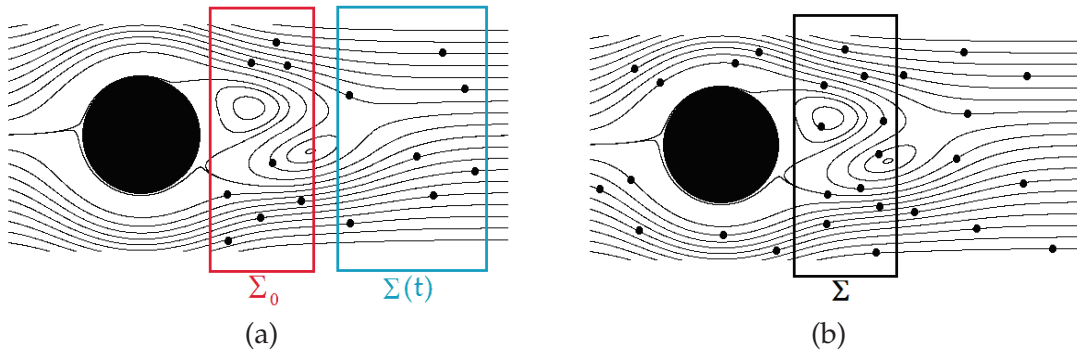


FIGURE 1.11 – Différence entre les approches (a) lagrangienne et (b) eulérienne : exemple de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre

En termes de formalisme, on peut écrire qu'un point matériel $M(X, t)$ suivi de façon lagrangienne est représenté par X sa coordonnée spatiale à l'instant initial et $t \in [0, T]$ sa coordonnée temporelle. Dans sa représentation eulérienne, sa coordonnée spatiale est notée x et on souhaite observer la variation de la position des points de Σ . Il existe un C^1 -difféomorphisme ϕ permettant de passer de la représentation lagrangienne à la représentation eulérienne :

$$\begin{aligned} \phi : \Sigma_0 \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, t) &\longrightarrow x = \phi(X, t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

La vitesse eulérienne d'un point étant :

$$\mathbf{u}(x, t) \quad (1.17)$$

sa formulation lagrangienne est :

$$U(X, t) = \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t} \quad (1.18)$$

1.3.2.2 Méthodes de couplage

Quelle que soit la formulation choisie, il est également nécessaire de se poser la question de la résolution du problème couplé fluide-structure : soit on résout le système couplé sous la forme d'un seul système à résoudre contenant les inconnues fluide et solide, soit on sépare la résolution sur les deux domaines.

La première approche consiste à considérer le système fluide-structure dans son intégralité et permet de résoudre ensemble les équations du problème fluide et du problème structure. Cette méthode est dite **monolithique**. Le problème couplé est formulé en bloc et le transfert d'énergie à l'interface fluide-structure est exact : c'est généralement la raison pour laquelle elle est utilisée (Blom 1998, Etienne et Pelletier 2005, Hübner et al. 2004). Cependant, par cette formulation unique, le nombre d'inconnues peut devenir très important et engendrer des matrices mal conditionnées. Cette approche est donc réservée aux géométries simples et aux systèmes comportants peu de degrés de liberté. Comme le rappelle Piperno (2005), la mise à jour d'un tel code reste lourde puisqu'il est nécessaire de reformuler l'ensemble du modèle lorsque l'on souhaite y intégrer une nouvelle méthode numérique.

L'autre approche, plus couramment utilisée, appelée approche **partitionnée**, consiste à résoudre les équations de façon séparée en tenant compte de conditions de conservation à l'interface entre la partie fluide et la partie solide. Une plateforme de couplage entre deux codes de calcul traitant chacun un domaine est ainsi construite. L'objectif, ici, est de tenir compte de l'efficacité des codes fluide et structure chacun dans son domaine. Numériquement, nous l'avons vu, la différence fondamentale est que les équations pour la structure sont formulées avec une méthode lagrangienne et les équations fluides avec la méthode eulérienne. Pour l'approche partitionnée, le problème de la conservation de l'énergie lors du passage de l'information du solveur fluide au solveur structure se pose. Cela étant, cette approche est largement préférée à l'approche monolithique dans la plupart des codes de calcul, car elle est plus réaliste en ce qui concerne la mise en œuvre de calculs couplés pour des géométries complexes.

Dans cette approche partitionnée, des algorithmes de couplage entre les deux codes sont développés : il s'agit d'une méthode itérative (et non directe) pour la résolution. Un cyclage entre les deux résolutions fluide et solide est mis en place, parfois même avec des sous-cyclages permettant l'amélioration des résultats par la vérification de certains critères de convergence. À l'interface entre le domaine fluide et le domaine solide, les efforts et les déplacements sont échangés : les efforts que le fluide impose à la structure sont transférés à cette dernière via l'interface. De fait, la structure se déplace et parfois se déforme : elle modifie simultanément l'écoulement du fluide. Le schéma 2.1 résume ce mécanisme de couplage fluide-structure.

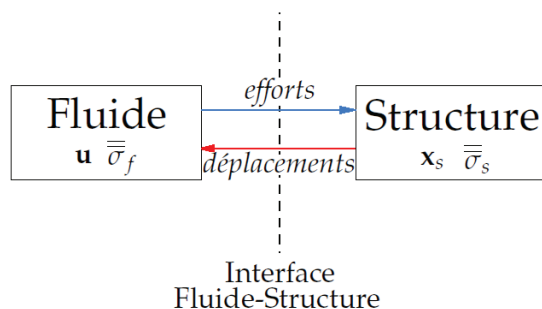


FIGURE 1.12 – Couplage entre les milieux fluide et solide

En résumé, l'application de l'approche partitionnée pour un couplage fluide-structure fort nécessite les outils suivants (Sigrist 2004, Piperno 2005) :

- ▷ Un *code de calcul structure* qui résout les équations de la dynamique de la structure. Pour cela, le code doit être capable de recevoir les données concernant les efforts que fournit le fluide au solide. De plus, après une avancée en temps, le code de calcul structure envoie les nouvelles données en termes de déplacement et de vitesse du solide.
- ▷ Un *code de calcul fluide* qui résout les équations de la dynamique des fluides. Pour cela, le code doit être capable de recevoir les données concernant les déplacements du solide qui est en contact avec le fluide. Ceci entraînera une déformation du domaine où se situe le fluide. Enfin, après une avancée en temps, le code de calcul fluide envoie les nouvelles données en termes d'efforts exercés à l'interface fluide-structure.
- ▷ Une *interface de couplage en espace* : comme le solide se déplace au sein ou au bord du domaine fluide, le domaine global est modifié au cours du temps. L'interface de couplage en espace se charge de transférer les données cinématiques et d'efforts dans les deux sens. Elle est nécessaire dès que les formulations fluide et solide sont différentes et/ou que les maillages utilisés sont différents.
- ▷ Une *interface de couplage en temps* qui a pour rôle essentiel de réduire au maximum le décalage temporel introduit de façon intrinsèque par la séparation des résolutions.

Le problème structure est traité, généralement, par un modèle en Éléments Finis, même s'il existe des travaux ayant mis en place des modèles de volumes finis pour le traitement de phénomènes de mécanique des structures (Giannopapa et Papadakis 2004). Le problème fluide, lui, est formulé grâce au modèle des Volumes Finis la plupart du temps. De récents travaux proposent l'utilisation des Éléments Finis dits avancés pour traiter des applications d'écoulements fluides, avec des résultats très intéressants (Hachem et al. 2009).

1.3.3 Couplage en espace

Le travail de l'interface de couplage en espace se fait après avoir considéré le type de discrétisation spatiale utilisé. En effet, selon les caractéristiques du maillage de chacune des zones, mais aussi selon le choix d'approche de discrétisation (Éléments Finis, Volumes Finis), le couplage spatial ne se fait pas de la même façon. Il existe même des méthodes permettant de travailler avec un maillage commun aux deux domaines, voire sans maillage pour la zone fluide par exemple.

1.3.3.1 Projection des données à l'interface

Dans le cas du calcul dans le milieu solide, on demande au solveur d'être capable de simuler de façon précise les efforts induits par l'écoulement sur une structure discrétisée. L'inconvénient majeur est que, si l'on considère que le fluide et le solide possèdent chacun leur maillage et leur géométrie tous deux disjoints, conserver les conditions limites à l'interface commune aux deux milieux peut s'avérer complexe. Il faut également distinguer les cas où les interfaces sont jointes (*i.e.* où l'interface physique est confondue avec les interfaces fluide et structure à tout instant) et où elles sont disjointes (Farhat et al. 1998, Maman et Farhat 1995, Huvelin 2008).

1.3.4 Gestion de la dynamique de maillage

La difficulté de la discrétisation du domaine fluide réside dans sa prise en compte des déplacements de la structure à l'interface fluide/structure et donc du suivi de cette interface. Comme on l'a énoncé plus haut, le problème fluide est usuellement formulé de façon eulérienne et le problème solide de façon lagrangienne.

1.3.4.1 La formulation Arbitraire Lagrange-Euler

La formulation mixte Euler/Lagrange permet de s'affranchir (ou d'amenuiser) des inconvénients des deux méthodes eulérienne et lagrangienne et d'en garder les avantages, lors de l'étude des vibrations d'une structure dans un fluide pour des petits ou grands déplacements de la structure. Cette méthode est appelée la méthode ALE (*Arbitrary Lagrange Euler*) et est devenue extrêmement classique dans le traitement numérique de l'interaction fluide-structure. Dans ce cas, le maillage du domaine fluide est amené à se déplacer en fonction du déplacement de la structure. On introduit ainsi la vitesse du maillage dans les équations de la dynamique du fluide. À partir de la valeur de cette vitesse, le maillage se déplace plus ou moins : le déplacement des points du maillage qui sont situés proches de la structure est voisin du déplacement de la structure, ces points sont ainsi repérés par une approche lagrangienne. La vitesse de maillage est donc proche de la vitesse du solide. Par contre, le déplacement des points du maillage qui sont situés très loin du solide en mouvement (proche des bords extérieurs du domaine fluide) est nul : la vitesse de maillage est nulle puisque la description est eulérienne. Enfin, pour la zone du domaine qui se situe entre ces deux secteurs, on attribue au maillage une vitesse arbitraire qui permet de lisser les déformations du maillage. La figure 1.13 représente l'application de cette méthode pour le cas simple d'un cylindre dans un domaine fluide.

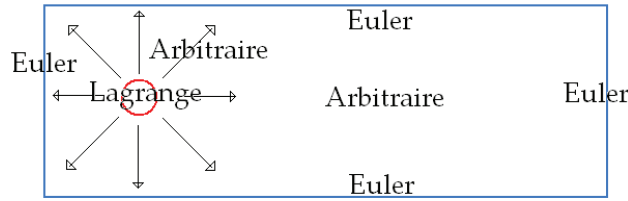


FIGURE 1.13 – Principe de la méthode Arbitraire Lagrange Euler pour le cas d'un cylindre dans un domaine fluide

Ici, on rappelle rapidement la formulation ALE, mais une description complète de la méthode et de ses applications peut être trouvée dans les travaux de Donea et al. (2004). L'utilisation de cette méthode pour les problèmes d'interaction fluide/structure est proposée par exemple par Souli et al. (1999) et Souli et Zolesio (2001). Dans le cadre de l'étude des vibrations tubulaires sous écoulement, cette méthode est notamment exploitée dans les travaux de Newman et Karniadakis (1996; 1997) qui étudient les vibrations induites par les tourbillons le long de câbles extracteurs d'une plate-forme pétrolière, ou encore Longatte et al. (2003) et Huvelin (2008) qui, eux, s'intéressent au cas des vibrations d'un tube en faisceau dans un écoulement transversal.

Considérons le domaine d'étude mobile au cours du temps $\Omega(t)$. On introduit un autre domaine arbitraire Ω_{ale} qui représente une discrétisation arbitraire du domaine $\Omega(t)$ et qui coïncide avec le maillage eulérien du domaine fluide sur sa frontière. Un point matériel M du domaine Ω_{ale} dont les coordonnées eulériennes sont représentées par x est repéré par ses coordonnées ξ vérifiant :

$$\begin{aligned} x &= \psi(\xi, t) \\ \mathbf{w}(\xi, t) &= \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} = \tilde{\mathbf{w}}(x, t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec ψ une fonction régulière et injective, w la vitesse du point M dans Ω_{ale} .

Reprenant les notations (1.16), une quantité f s'exprime dans le repère eulérien en fonction des coordonnées dans le repère lagrangien par :

$$f(x, t) = f(\phi(X, t), t) \quad (1.20)$$

Sa dérivée particulière s'écrit alors :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_x f \quad (1.21)$$

avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ et ∇_x l'opérateur gradient dans l'espace eulérien. On pose maintenant

$$f(x, t) = f(\psi(\xi, t), t) = \hat{f}(\xi, t) \quad (1.22)$$

Il vient :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla_x f \quad (1.23)$$

Ainsi, nous en déduisons la dérivée particulière de la quantité f dans le domaine Ω_{ale} :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla_x f \quad (1.24)$$

Considérant la quantité $f = \mathbf{u}$, soit la vitesse du fluide, on peut finalement écrire les équations de conservation (Navier-Stokes) pour l'écoulement incompressible dans le domaine Ω_{ale} :

$$\begin{cases} \rho_f \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla_x \mathbf{u} \right] = -\nabla_x \sigma_f + f_f \\ \nabla_x \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

avec $\nabla_x \cdot$ l'opérateur divergence dans l'espace eulérien.

À cette écriture, il est nécessaire de rajouter une équation supplémentaire liant le taux de variation d'un volume élémentaire à la divergence de la vitesse. Cette équation, permettant de vérifier la contrainte dite Loi de Conservation Géométrique (*Geometric Conservation Law*, Lesoinne et Farhat (1996)), a pour objectif de minimiser les erreurs induites sur l'écoulement par la déformation des volumes de contrôle définis par la méthode des Volumes Finis. Grossièrement, la GCL a la conséquence suivante : si la divergence de la vitesse est positive, le volume de contrôle augmente et inversement. Concrètement, la loi énonce que la variation du volume de contrôle Ω_k doit être égale au volume parcouru pendant ce temps par les faces de bords Γ_k de ce même volume de contrôle :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_k} dx = \int_{\Gamma_k} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dx \quad (1.26)$$

L'équation 1.26 permet d'assurer que le champ de vitesse est à divergence nulle. Le respect de la GCL est une condition nécessaire pour assurer la stabilité du schéma.

L'actualisation du maillage est un point clef dans l'algorithme général, car étant appelée à chaque pas de temps, elle doit être robuste pour ne pas entraîner de trop grande modification de la topologie du maillage. De plus, son algorithme doit être adapté à des formes de mailles très diverses et enfin, elle ne doit pas être trop gourmande en temps de calcul. Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme satisfaisant toutes ces conditions, notamment celle de la conservation de la topologie qui est difficile à assurer. Dans le but de garder des mailles régulières, le choix de la vitesse de maillage peut se baser sur différentes méthodes (Donea et al. 2004). Dans le cas où l'on choisit une loi linéaire pour la vitesse du maillage, on peut faire l'approximation du premier ordre suivante :

$$\mathbf{w}_i^n = \frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} \quad (1.27)$$

avec ξ_i^{n+1} et ξ_i^n les déplacements du maillage aux instants respectifs $n + 1$ et n , \mathbf{w}_i^n la vitesse du maillage à l'instant n et enfin Δt le pas de temps choisi.

1.3.4.2 Méthode de Transpiration

Pour des petits déplacements de la structure dans le fluide, il est possible de conserver un domaine totalement fixe et d'adopter la technique dite de "transpiration". Celle-ci considère que, du point de vue du fluide, le déplacement de la structure est équivalent à un développement limité au voisinage de la position initiale de la structure. A l'interface fluide-structure, on modifie donc les conditions aux limites au cours du temps et on attribue au fluide une vitesse de transpiration au travers du solide. Mais cette méthode reste adaptée uniquement aux cas des petits déplacements.

Fernández-Varela (2001), se basant sur la technique de "transpiration" originellement introduite par Lighthill (1958) propose l'approche qui consiste à conserver un domaine global fixe où l'on modifie les conditions aux limites à l'interface fluide/solide au cours du temps. Cette technique semble bien adaptée aux mouvements de faible amplitude. L'idée est de n'avoir pas à traiter de domaine mobile comme cela est fait lorsque l'on considère une structure mobile dans un domaine fluide et qu'il est nécessaire de recalculer, à chaque pas de temps, la position et la forme de l'interface et donc de modifier en conséquence la forme du maillage. La méthode permet ainsi de s'affranchir de ces calculs et de ne considérer que des modifications à l'interface entre le fluide et le solide. De plus, les méthodes habituelles associées aux déformations du maillage comme la méthode ALE sont très intrusives, c'est-à-dire que les équations du domaine fluide sont modifiées pour traiter les déformations du maillage. Comme la méthode de transpiration se borne à des modifications sur l'interface, seules les conditions aux limites du problème à résoudre sont affectées, ce qui permet de garder les équations de Navier-Stokes originelles.

Le principe de la méthode est le suivant : considérons trois domaines : le domaine fluide Ω_f , le domaine solide Ω_s et l'interface entre les deux Γ_i , qui sont tous des domaines de \mathbb{R}^3 . Soit x la variable d'espace et t la variable temporelle. On considère l'interface entre le fluide et la structure comme étant une membrane "poreuse", au travers de laquelle le fluide peut s'écouler avec une vitesse différente de celle du domaine fluide, cette vitesse est dite vitesse de "transpiration". La vitesse du fluide u_f est développée à l'ordre 1 au voisinage de l'interface fluide/structure :

$$\mathbf{u}_f(x_0 + \delta \mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_f(x_0) + \nabla \mathbf{u}_f(x_0) \delta \mathbf{x}_s \text{ sur } \Gamma_i(t) \quad (1.28)$$

où les notations sont les suivantes (figure 1.14) :

- \mathbf{u}_f la vitesse fluide à l'instant considéré,
- x_0 un point pris sur l'interface fluide-structure à la date $t = 0$
- $\delta \mathbf{x}_s$ un petit déplacement de la structure
- $\nabla \mathbf{u}_f$ le gradient de la vitesse fluide

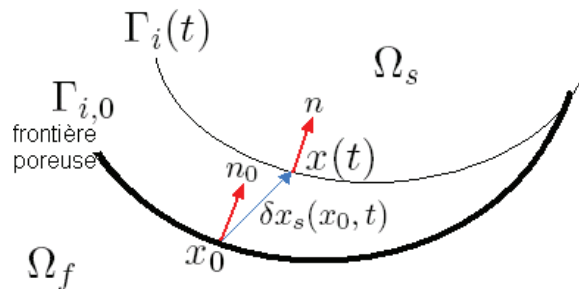


FIGURE 1.14 – Principe de la méthode de transpiration, d'après Fernández-Varela (2001)

La vitesse de la structure \mathbf{u}_s , elle, correspond à la dérivée temporelle du petit déplacement $\delta \mathbf{x}_s$, on a donc : $\mathbf{u}_s = \dot{\delta \mathbf{x}}_s$ dans $\Omega_s(t)$. Si l'on impose la continuité des vitesses à l'interface fluide/structure lorsque celle-ci est située au voisinage du point x_0 , après un petit déplacement, soit :

$$\mathbf{u}_f(x_0 + \delta \mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s \text{ sur } \Gamma_i(t) \quad (1.29)$$

Ceci implique la loi de transpiration pour un fluide visqueux :

$$\mathbf{u}_f(x_0, t) = \mathbf{u}_s - \nabla \mathbf{u}_f(x, t) \delta \mathbf{x}_s \quad (1.30)$$

sur l'interface $\Gamma_{i,0}$, au point x_0 . Cette condition est rajoutée à l'expression de la formulation forte des équations adimensionnelles régissant le système pour un fluide incompressible avec p le champ de pression et \mathcal{R}_e le nombre de Reynolds :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f + \nabla p - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u}_f = 0 & \text{dans } \Omega_f(t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 & \text{dans } \Omega_f(t) \\ \mathbf{u}_f = \mathbf{u}_{\Gamma_f} & \text{sur } \Gamma_f \text{ où } \Gamma_f = \partial \Omega_f \setminus \Gamma_i \\ \mathbf{u}_f(x_0, t) = \mathbf{u}_s - \nabla \mathbf{u}_f(x, t) \delta \mathbf{x}_s & \text{sur } \Gamma_{i,0} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Dans cette formulation, les équations sont considérées sur les domaines à la date courante t tandis que la condition de transpiration est exprimée sur la frontière fixe $\Gamma_{i,0}$: pour plus de cohérence, une simplification supplémentaire consiste à identifier les domaines à la date courante t avec le domaine dans sa configuration initiale.

Une difficulté évidente est le caractère implicite de la condition de transpiration telle qu'elle est formulée en (1.30). Fernández-Varela propose de simplifier cette formulation en considérant que l'on peut supposer que le système couplé est fait de la somme d'un écoulement permanent et de vibrations de la paroi solide. Alors, il identifie le gradient $\nabla \mathbf{u}_f(x, t)$ par le gradient de la vitesse à sa configuration initiale, soit $\nabla \mathbf{u}_f(x_0)$. La continuité des vitesses à l'interface implique que :

$$\mathbf{u}_f(x_0 + \delta \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} \quad (1.32)$$

sur l'interface $\Gamma_{i,0}$. On a donc

$$\mathbf{u}_f(x_0, t) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{u}_s - \nabla \mathbf{u}_f(x_0) \delta \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n} \quad (1.33)$$

\mathbf{n} est la normale extérieure au solide.

Le terme du gradient de vitesse est souvent négligé en première approximation, car il est d'ordre inférieur au terme \mathbf{u}_s .

Reste le problème de l'application des contraintes fluides à l'interface fluide-structure. En effet, il est nécessaire de connaître la position et la forme de l'interface à chaque instant ; or il n'en est rien puisque l'on choisit la formulation en transpiration. C'est pourquoi le champ des contraintes fluides est lui aussi développé au premier ordre afin d'imposer une condition de "transpiration" pour les contraintes à l'interface. On écrit ainsi, avec σ_f le tenseur des contraintes fluides :

$$\sigma_f(x_0 + \delta \mathbf{x}_s) = \sigma_f + \nabla \sigma_f \delta \mathbf{x}_s \quad (1.34)$$

Cette formulation reste une façon d'appréhender la technique de transpiration, mais concrètement, elle n'est pas appliquée de cette manière. Fernández-Varela propose une écriture issue de la linéarisation du problème couplé fluide-structure autour d'un état stationnaire. La linéarisation a pour avantage de permettre de se

placer dans le cas d'une configuration fixe et d'écrire un problème totalement indépendant de l'extension de δx_s . La formulation variationnelle est ainsi associée à ces conditions aux limites non standard sur l'interface fluide-structure, les conditions cinématiques sont remplacées par des conditions de transpiration similaires à (1.30) et la continuité des efforts à l'interface est assurée par des termes correcteurs. Une variante est proposée pour se placer dans le cas non-linéaire. Fernández-Varela propose l'application de cette technique pour la détection d'instabilités de couplage, en l'appliquant au cas d'une structure bidimensionnelle soumise à trois degrés de liberté, une rotation et deux translations, sous écoulement visqueux incompressible. L'instabilité recherchée est bien capturée par la méthode : cette approche présente un intérêt certain pour l'application aux cas de départs en instabilité qui intéressent fortement l'ingénieur, comme par exemple le départ en instabilité fluide-élastique des tubes au sein d'un échangeur de chaleur. Cependant, encore une fois, l'hypothèse des petits déplacements doit être vérifiée pour la mise en place d'une telle méthode.

1.3.4.3 Autres techniques de gestion du domaine spatial

Bogaers (2010) présente différentes techniques de remaillage au cours du temps pour des maillages non structurés de domaines fluides, pour l'étude de problèmes d'interaction fluide-structure. La première consiste à effectuer une interpolation des fonctions de base radiales (FBR). Ces fonctions sont basées sur la connaissance des déplacements des noeuds situés sur les bords du domaine. Ainsi, il suffit de connaître ces derniers pour reconstruire, point par point, les déplacements des noeuds internes. Aucune connaissance des connectivités n'est nécessaire. Considérons les fonctions d'interpolations suivantes s_j , définies par la somme d'une famille de fonctions de base radiales Φ données :

$$s_j = s(x_j) = \sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i \phi(\|x_j - x_{bi}\|) + p(x_j) \text{ pour } j = 1, \dots, N \quad (1.35)$$

avec N le nombre total de noeuds dans le maillage, N_b le nombre de noeuds sur la frontière du domaine, x_{bi} les noeuds de la frontière dont on connaît la position et les x_j les noeuds de l'intérieur du domaine où est évaluée s_j . p est un polynôme linéaire et les α_i sont des coefficients réels à déterminer. On sait que l'on doit avoir l'égalité suivante :

$$s(x_{bi}) = d_{bi} \text{ le déplacement des noeuds du bord} \quad (1.36)$$

Une condition supplémentaire est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{N_b} \alpha_i q(x_{bi}) = 0 \quad (1.37)$$

pour tout polynôme q de degré inférieur ou égal à celui de p . Grâce à ces deux conditions, on peut construire un problème matriciel pour déterminer les α_i et les coefficients du polynôme p . Donc, les fonctions d'interpolation s_j sont utilisées pour définir, point par point, le déplacement des noeuds internes :

$$d_{\text{interne}} = s(x_{\text{interne}}) \quad (1.38)$$

Comme cette interpolation est faite indépendamment pour chaque point, il n'est pas nécessaire d'avoir la connaissance des connectivités des nœuds. Ainsi, la résolution est très rapide. Les fonctions de base réduite sont souvent choisies à support compact et échelonnées par un rayon d'influence r , tel que :

$$\Phi_r = \Phi(\xi) \quad (1.39)$$

avec $\xi = x/r$. L'augmentation de la taille du rayon r améliore la qualité du maillage, puisque l'interpolation touche un grand nombre de points. En contrepartie, le nombre d'équations à résoudre est plus important. Cette méthode est très prisée car elle fournit généralement des résultats très corrects en un temps de calcul restreint.

Une autre méthode étudiée est basée, elle, sur l'optimisation de la qualité du maillage. Cette dernière n'était pas contrôlable avec la méthode d'interpolation des FBR, ici c'est la qualité qui régit le mouvement du maillage en se basant sur une fonction objectif qui permet d'optimiser la qualité du maillage global à chaque itération. Cette méthode est extrêmement coûteuse en temps de calcul.

On peut aussi se baser sur la considération des nœuds du maillage comme des masses ponctuelles reliées par des ressorts : leur mouvement est donc régi par les équations d'élasticité linéaire. Une famille d'équations aux dérivées partielles est construite pour résoudre le déplacement des nœuds au cours du temps. Le déplacement des nœuds est ainsi traité par la méthode des Éléments Finis. Il est nécessaire d'imposer un facteur de raideur aux éléments les plus petits du maillage, afin qu'ils ne se déforment pas trop. Cette méthode est très rapide, même si elle demande des ressources non négligeables en mémoire. Cette technique, de même que l'interpolation des FBR, a pour inconvénient majeur de fournir une qualité de maillage dépendante du nombre d'incrémentés effectués : ceci peut avoir des conséquences néfastes dans le cadre de l'interaction fluide-structure (Bogaers 2010).

Pour le moment, nous avons considéré les méthodes pour lesquelles les domaines fluide et solide comportent chacun leur propre maillage. Cependant, il existe d'autres approches dont l'objectif est de s'affranchir de la contrainte que représente le remaillage du domaine fluide par exemple, ou bien le transfert de champs sur les points de l'interface.

Méthodes à maillage fixe

L'une des méthodes à maillage fixe est appelée méthode des frontières immergées (Peskin 2002). Elle consiste à utiliser un seul maillage cartésien indépendant de la géométrie, qui contient tout le domaine susceptible d'être occupé par le fluide et le solide au cours du temps. Dans ce modèle, on rajoute un terme source de type Dirac aux équations de la dynamique des fluides afin de modéliser la présence de l'interface dans le mouvement. Cette technique a pour avantage de n'avoir pas à considérer les problématiques de compatibilité à l'interface entre les deux domaines. Par contre, afin d'obtenir les efforts fournis par le fluide au solide, il est nécessaire d'effectuer une interpolation à chaque pas de temps sur l'interface, ce qui peut avoir un certain coût et parfois engendrer des erreurs.

De nombreuses adaptations de la méthode aux frontières immergées ont été développées ; on note également la méthode des domaines fictifs, développée par Glowinski et al. (1994) qui consiste à étendre le formalisme des équations fluides à la zone solide en utilisant une méthode de pénalisation afin de forcer la rigidité du solide. Un multiplicateur de Lagrange est introduit dans la formulation variationnelle pour vérifier cette rigidité.

La méthode de maillage fixe proposée par Codina et al. (2009) se distingue également des méthodes de frontières immergées. L'idée est d'adapter le procédé de la méthode ALE au cas du maillage fixe. Pour cela, un maillage fixe est construit à la date initiale du calcul. Puis, au lieu de projeter les équations sur un nouveau maillage à chaque pas de temps, Codina et al. considèrent le maillage ALE comme fictif. Une fois la position de l'interface recalculée, seules les cellules voisines de l'interface étant concernées par le déplacement subissent un recalcul, les autres sont les cellules du maillage initial. Le gain de temps de calcul est colossal et on a l'avantage d'utiliser la puissance de la méthode ALE.

Méthodes sans maillage

Les méthodes particulières sans maillage sont particulièrement adaptées aux problèmes de grands déplacements. Les grandeurs physiques ne sont, dans ce cas, plus définies sur les noeuds d'une grille fixe ou mobile, mais dans des particules ayant chacune sa masse, sa densité, sa viscosité. L'avantage des méthodes particulières réside dans l'absence de gestion des connectivités et la facilité à gérer les frontières internes. Ainsi, la méthode SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) utilise ce principe. Sur chaque particule (représentée par une petite bille), on procède à une interpolation des grandeurs physiques des particules voisines. Par exemple, pour la particule numérotée i , on peut définir une approximation du champ u_i en fonction des champs u_j de ses J voisines dont le volume est Ω_j par l'utilisation de la fonction d'interpolation f :

$$u_i = u_j \sum_{j=1}^J f(x_i - x_j) |\Omega_j| \quad (1.40)$$

avec x_i et x_j les positions des particules i et j . Dès lors que l'on est amené à considérer des cas où les voisins peuvent changer (cas des écoulements à surface libre, etc.), le coût de recherche des voisins peut devenir très important. Il est cependant possible d'avoir recours à l'utilisation d'une méthode SPH lagrangienne totale (Maurel et al. (2007), Maurel (2008)) permettant de s'affranchir de cette recherche de voisins.

Méthodes avec recouvrement de maillage

Une autre méthode considère cette fois la superposition de plusieurs maillages. Cette méthode est appelée méthode Chimère et a pour objectif de ne pas avoir à traiter un seul maillage, souvent très lourd en mécanique des fluides, au cours du temps. L'idée est de décomposer le maillage global en plusieurs sous-maillages indépendants. La seule condition à respecter est que tous les maillages possèdent entre eux une zone où ils se superposent. D'une part, la création des maillages s'en trouve simplifiée et d'autre part, la gestion du mouvement d'une structure dans un fluide par exemple se fait par déplacement des grilles les unes par rapport aux autres, avec recours à des interpolations consistantes pour les transferts de champs (voir par exemple les travaux récents de Deloze (2011)).

1.3.5 Avancée en temps du couplage

Comme, dans un couplage partitionné, les résolutions sur les domaines fluide et structure ne sont pas effectuées aux mêmes instants, un décalage entre les données échangées apparaît (Longatte et al. 2005, Piperno et Farhat 2001) et la conservation de l'énergie peut être affectée. Ce décalage peut être décrit comme suit (Huvelin 2008) : si l'on connaît le déplacement de la structure à l'instant t^{n+1} , alors on peut effectuer le calcul permettant de passer d'un état du fluide connu à la date t^n à un nouvel état à la date t^{n+1} et ainsi en déduire les efforts exercés par le fluide sur l'interface.

Si maintenant on connaît ces efforts à t^{n+1} , on calcule le déplacement de la structure à t^{n+1} à partir de l'état t^n , grâce à la donnée des efforts à l'interface à t^{n+1} (figure 1.15).

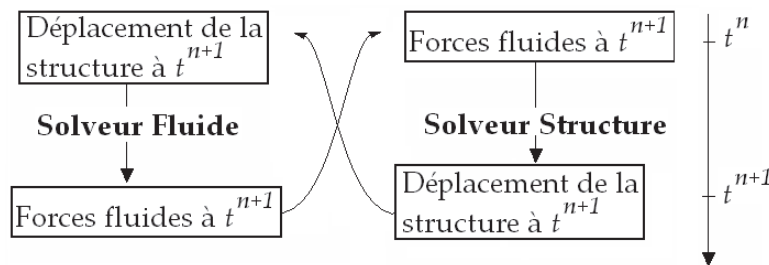


FIGURE 1.15 – Mise en évidence du décalage temporel entre les résolutions des systèmes fluide et solide

En d'autres termes, le solveur A (fluide ou solide) fournit au solveur B (solide ou fluide) des informations à la date t^{n+1} , dont le solveur B avait besoin à la date t^n et vice-versa. Ainsi, il existe un décalage lors du calcul du déplacement de l'interface. Le choix du mode de prédiction de la position de l'interface permettant d'obtenir une réponse la plus proche possible de la réalité est donc crucial ; il est effectué par l'interface de couplage en temps.

Il existe un grand nombre de variantes permettant la gestion de ce décalage en temps. Les procédures de couplage peuvent être explicites (Farhat et Lesoinne 1997) ou implicites (Abouri et al. 2003, Sigrist et Abouri 2006, Farhat et al. 1998, Hermann et Steindorf 1999). Dans le premier cas, l'attention est portée sur la prédiction des données : chaque schéma de prédiction doit être construit en gardant la conservation de l'énergie à l'interface. Huvelin (2008) propose de tester, pour le cas de deux cylindres dans un fluide au repos, plusieurs couples de prédicteurs-correcteurs afin d'évaluer leurs propriétés de conservation de l'énergie. Les prédicteurs en déplacement sont obtenus par développement limité sur le déplacement ou la vitesse d'un pas de temps ou d'un demi pas de temps, jusqu'à l'ordre 3. Les prédicteurs de force, eux, dépendent soit de l'instant auquel sont prises les variables de calcul, soit du critère de conservation de l'énergie à l'interface entre les deux domaines. Huvelin propose un classement des couples de prédicteurs en fonction de leur capacité à conserver l'énergie du système, en procédant à une comparaison avec une solution semi-analytique de référence.

Les schémas explicites se déclinent en un grand nombre de variantes. Longatte et al. (2008) proposent une comparaison de deux de ces schémas pour des configurations élémentaires d'interaction fluide-structure (deux cylindres coaxiaux

dont l'un est mobile, séparés par un fluide). Ces deux schémas sont respectivement le schéma explicite synchrone et le schéma explicite asynchrone, décrits ci-après.

Schémas de couplage explicites

– Couplage partitionné explicite synchrone

L'algorithme explicite synchrone résout les problèmes fluide et structure au même instant (figure 1.16).

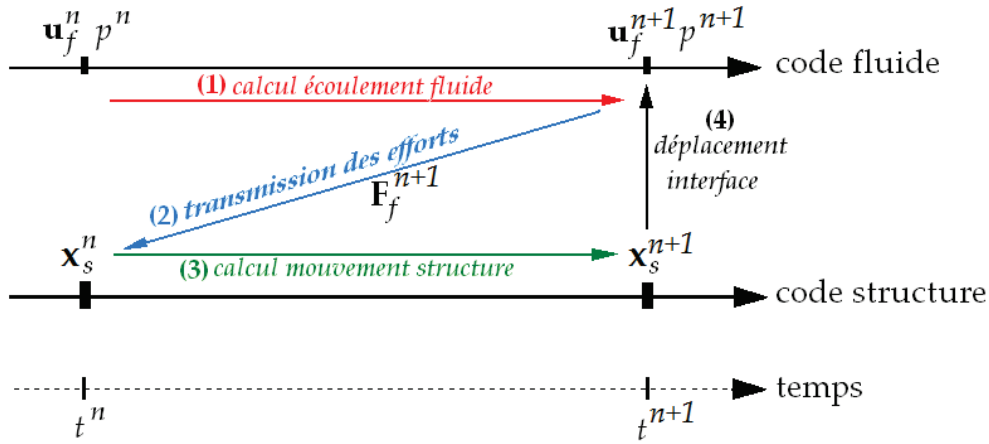


FIGURE 1.16 – Principe du schéma de couplage explicite synchrone

Comme on l'a vu ci-dessus, il est nécessaire de conserver l'énergie à l'interface, ce qui se traduit par le respect des deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{F}_s^{n+1} + \mathbf{F}_s^n}{2} = \mathbf{F}_f^{n+1} \\ \mathbf{x}_s^{n+1} - \mathbf{x}_s^n = \mathbf{x}_f^{n+1} - \mathbf{x}_f^n \end{cases} \quad (1.41)$$

où \mathbf{F}_s est l'effort reçu par la structure, \mathbf{F}_f l'effort calculé par le solveur fluide, \mathbf{x}_f et \mathbf{x}_s respectivement le déplacement du maillage fluide à l'interface et le déplacement de la structure, et $(\cdot)^n$ une variable calculée au temps t^n , $(\cdot)^{n+1}$ une variable calculée au temps t^{n+1} .

Ces conditions ne sont pas exactement réalisées concrètement ; on détermine alors une prédiction $(\cdot)^P$ pour les efforts sur la structure :

$$\mathbf{F}_s^{n+1,P} \simeq 2\mathbf{F}_f^{n+1} - \mathbf{F}_s^{n,P} \quad (1.42)$$

Et le terme explicite indique que l'on prédit la position de l'interface fluide-structure \mathbf{x}_{ifs} à l'instant t^{n+1} en fonction des variables calculées aux temps t^n et t^{n-1} :

$$\mathbf{x}_{ifs}^{n+1,P} = \mathbf{x}_s^n + \alpha_0 \Delta t \dot{\mathbf{x}}_s^n + \alpha_1 \Delta t (\dot{\mathbf{x}}_s^n - \dot{\mathbf{x}}_s^{n-1}) \quad (1.43)$$

où le point supérieur indique une dérivée en temps. Les paramètres α_0 et α_1 sont des paramètres constants du schéma. Selon leur choix, on peut améliorer la précision du schéma. Par exemple, avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, la précision du schéma peut être à l'ordre 2.

– Couplage partitionné explicite asynchrone

Ce schéma (voir le principe sur la figure 1.17), consiste à considérer un pas de temps intermédiaire $t^{1/2}$. La prédiction de l'effort $\mathbf{F}_s^{n+1,P}$ au temps $n+1$ pour le solveur structure est identifiée à l'effort fluide calculé \mathbf{F}_f :

$$\mathbf{F}_s^{n+1,P} = \mathbf{F}_f^{n+1/2} \quad (1.44)$$

où l'exposant P signifie que la grandeur est prédite. La position de l'interface fluide-structure \mathbf{x}_{ifs} est prédite au temps $n+1/2$ grâce aux variables calculées au temps n :

$$\mathbf{x}_{\text{ifs}}^{n+1/2,P} = \mathbf{x}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{x}}_s^n \quad (1.45)$$

La conservation du champ de vitesse et de contraintes à travers l'interface ne nécessite pas de condition supplémentaire. Piperno et Farhat (2001), qui détaillent aussi ces méthodes de couplage partitionné, montrent l'intérêt de cette méthode en comparaison avec le couplage explicite synchrone.

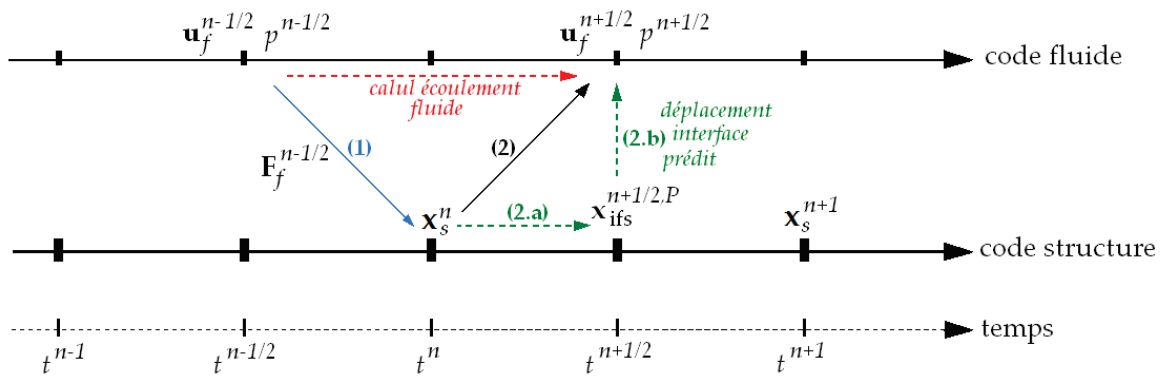


FIGURE 1.17 – Principe du schéma de couplage explicite asynchrone

Le choix des prédicteurs-correcteurs conditionne la pertinence des résultats (Huvelin 2008).

L'utilisation de schémas itératifs, dits aussi semi-implicites (car ils sont basés sur la même racine qu'un schéma explicite, mais avec implémentation de sous-cyclages), est préconisée pour obtenir une meilleure conservation de l'énergie). Mais même si cette méthode est moins restrictive concernant le pas de temps, elle implique des temps de calcul globalement plus longs, puisque son principe est d'introduire des sous-itérations entre chaque pas de temps, en suivant un algorithme de type point fixe ou algorithme de Newton (Longatte et al. 2008). Le principe d'un schéma semi-implicite est décrit ci-dessous.

Schéma itératif semi-implicite :

Dans le cas de ce schéma, des sous-itérations sont introduites à chaque pas de temps de la résolution fluide, afin de faire converger la prédiction. Une première partie de l'algorithme consiste en une phase d'initialisation, puis les prédictions du déplacement de l'interface sont effectuées grâce aux valeurs obtenues à la sous-itération précédente (Huvelin et al. 2006). L'algorithme d'une sous-itération type notée k est présenté ci-après :

(a) Prédiction initiale de la position de l'interface \mathbf{x}_{ifs} :

$$\mathbf{x}_{\text{ifs}}^{n+1,k} = \mathbf{x}_{\text{ifs}}(\mathbf{x}_s^{n+1,k-1}, \dot{\mathbf{x}}_s^{n+1,k-1})$$

(b) Résolution des équations du fluide (\mathbf{u}_f est le champ de vitesse du fluide) :

$$p^{n+1,k} = p(p^n, \mathbf{u}_f^n, \mathbf{x}_{\text{ifs}}^{n+1,k}) \mathbf{u}_f^{n+1,k} = \mathbf{u}_f(p^n, \mathbf{u}_f^n, \mathbf{x}_{\text{ifs}}^{n+1,k})$$

(c) Calcul des efforts hydrodynamiques :

$$\mathbf{F}_f^{n+1,k} = \mathbf{F}(p^{n+1,k}, \mathbf{u}_f^{n+1,k})$$

(d) Résolution des équations de la structure :

$$\mathbf{x}_s^{n+1,k} = \mathbf{x}_s(\mathbf{x}_s^n, \dot{\mathbf{x}}_s^n, \ddot{\mathbf{x}}_s^n, \mathbf{F}_f^{n+1,k})$$

(e) Test de convergence sur la position de la structure :

$$\left\| \frac{\mathbf{x}_s^{n+1,k} - \mathbf{x}_s^{n+1,k+1}}{\mathbf{x}_s^{n+1,0}} \right\| \leq \varepsilon$$

Avec ε un réel choisi par l'utilisateur. Si le test de convergence est réussi : passage au pas de temps suivant ; sinon, passage à l'itération suivante $k + 1$.

Il est à noter que par construction, un schéma de couplage partitionné est sensible aux déformations des mailles et ce, particulièrement lors de la première sous-itération du couplage. De ce fait, il est possible de générer des situations hors équilibre pouvant conduire à des instabilités dans les itérations de couplage, ces instabilités peuvent elles-mêmes engendrer une divergence du calcul. Afin d'éviter ce phénomène fâcheux, on utilise alors une sous-relaxation adaptative. Cette méthode consiste à introduire un facteur de relaxation α_{ifs}^m qui permet de pondérer linéairement la position calculée $\tilde{\mathbf{x}}_s^m$ par la valeur \mathbf{x}_s^{m-1} de l'itération précédente afin d'en déduire la nouvelle position \mathbf{x}_s^{m+1} :

$$\mathbf{x}_s^{m+1} = \alpha_{\text{ifs}}^m \tilde{\mathbf{x}}_s^m + (1 - \alpha_{\text{ifs}}^m) \mathbf{x}_s^{m-1}$$

avec $\alpha_{\text{ifs}}^m \in]0; 1[$. Le terme α_{ifs}^m peut être déterminé grâce à un facteur, dit facteur de Aitken, qui lui est calculé par extrapolation à partir des valeurs aux deux itérations précédentes. Cette méthode de sous-relaxation ne modifie pas la solution finale convergée.

D'autres tests de convergence pour l'étape (e) peuvent être proposés, par exemple en incluant aussi la convergence sur les efforts ou encore la vitesse du fluide.

1.3.6 Conclusion

La simulation numérique du couplage fluide-structure nécessite donc la mise en œuvre d'outils spécifiques qui ont été développés depuis quelques dizaines

d'années : pour le cas de plusieurs structures rapprochées les unes des autres soumises à un écoulement, Price (1995) évoque les premiers travaux datant de la fin des années 1970 et du début des années 1980. Depuis, les techniques numériques ont été rendues relativement efficaces notamment en ce qui concerne la précision des résultats. Cependant, très souvent, les modèles numériques développés, pour des raisons de coût, se plient à plusieurs hypothèses (Liang et Papadakis 2007) : bi-dimensionnalité de l'écoulement, écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds, etc.

En ce sens, la réduction de modèle peut être une solution afin de réduire les temps de calcul et de mener des études paramétriques, voire d'effectuer du contrôle actif des phénomènes. Cette thèse a pour objectif de mettre en place plusieurs cas d'étude des vibrations sous écoulement de tubes grâce à une méthode d'ordre réduit. Dans le chapitre suivant, nous présenterons la mise en place de ces cas d'études par calcul numérique. Ceux-ci seront effectués dans le but de construire un modèle réduit efficace, à partir des données qu'ils fourniront, pour l'étude de l'interaction fluide-structure de tubes vibrants sous écoulement transversal. Les choix effectués pour mener à bien cette étude seront présentés dans les chapitres 4 et 5.

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES COUPLÉS FLUIDE-STRUCTURE

2

DANS ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude numérique de deux cas de problèmes d'interaction fluide-structure : d'abord le cas d'un tube seul sous écoulement transversal, puis celui d'un faisceau de tubes dont l'un est soumis à des vibrations du fait de l'écoulement. La formulation du problème couplé sera présentée. Nous nous placerons dans l'objectif d'un travail pour l'application des modèles réduits dans un contexte industriel futur ; aussi l'accent sera mis sur la discussion des outils choisis ainsi que sur les choix de configuration puisque les calculs couplés effectués dans ce chapitre seront, par la suite, exploités afin de mettre en place un modèle d'ordre réduit pour l'interaction fluide-structure.

2.1 MISE EN SITUATION D'UN PROBLÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE

Dans cette partie, nous présentons le cadre dans lequel nous nous plaçons pour la construction des modèles utilisés par la suite. Ces derniers sont des calculs complets du point de vue de la réduction de modèle; c'est-à-dire que, loin de représenter toute la physique du problème, ils possèdent tous les degrés de libertés que lui imposent les discrétisations spatiales et temporelles. Les modèles réduits, *a contrario*, sont construits à partir des modèles complets mais ne possèdent qu'un nombre très restreint de degrés de liberté.

Dans un premier temps, nous présentons la formulation du problème couplé et les équations effectivement résolues. Le contexte de la mise en place des calculs, les outils, les choix de géométrie et de configurations sont discutés. Puis, les résultats des calculs complets sont présentés.

2.1.1 Formulation du problème couplé

Le tableau 2.1 rassemble les notations utilisées dans le cas que nous étudions ici, pour la modélisation des deux milieux. S'il n'y a pas d'ambiguïté, le champ de vitesse fluide est noté \mathbf{u} . Les opérateurs ne sont pas distingués par leur notation respective dans les variables d'Euler et de Lagrange selon que l'on travaille dans le domaine fluide ou le domaine structure. Un gradient dans le domaine fluide devrait par conséquent être noté ∇_x (variables eulériennes) tandis que le gradient dans le solide devrait s'écrire ∇_X (variables lagrangiennes). Nous faisons le choix de confondre les notations, mais il faut garder à l'esprit que les espaces dans lesquels sont écrites les équations fluide et structure ne sont pas les mêmes.

| Domaine | Grandeur | Notation |
|-----------|----------------------------------|---|
| Fluide | Vitesse | \mathbf{u}_f |
| | Déplacement | \mathbf{x}_f |
| | Masse volumique | ρ_f |
| | Forces volumiques extérieures | \mathbf{f}_f |
| | Tenseur des contraintes internes | σ_f |
| | Normale extérieure au domaine | \mathbf{n}_f |
| Structure | Déplacement | \mathbf{d}_s |
| | Vitesse | $\mathbf{u}_s = \frac{\partial \mathbf{d}_s}{\partial t}$ |
| | Accélération | $\dot{\mathbf{u}}_s$ |
| | Masse volumique | ρ_s |
| | Forces volumiques extérieures | \mathbf{f}_s |
| | Normale extérieure au domaine | \mathbf{n}_s |
| | Tenseur des contraintes internes | σ_s |

TABLE 2.1 – Tableau des notations utilisées pour la modélisation des milieux fluide et structure

Nous présentons ici succinctement les équations qui régissent le mouvement de la structure et du fluide en tant que milieux continus, afin de mieux appréhender leur résolution numérique. Une formulation complète de ce problème est proposée, par exemple, dans les travaux de Sigrist (2004).

Le problème structure est formulé en déplacement. Du point de vue du domaine structure, on résout les équations du mouvement dans le but de déterminer les champs de déplacement, des déformations (s'il y en a) et des contraintes.

Le problème fluide, lui, est formulé en vitesse et en pression. Dans le domaine fluide, on résout les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Navier-Stokes), afin de déterminer les champs de contraintes et de vitesse.

On considère un domaine Ω de \mathbb{R}^3 contenant un domaine fluide $\Omega_f(t)$ et un domaine solide $\Omega_s(t)$ (on a $\Omega = \Omega_f(t) \cup \Omega_s(t)$), avec t la variable temporelle sur un intervalle $[0, T]$ de \mathbb{R}^+ . Le fluide est incompressible et newtonien, le solide est considéré comme élastique, vérifiant la loi de Hooke d'élasticité linéaire. L'interface entre les deux domaines fluide et solide est notée $\Gamma_i(t)$. On considère l'absence d'interpénétration entre les domaines fluide et solide et les phénomènes sont considérés comme adiabatiques. Ainsi, les équations de conservation pour un écoulement fluide incompressible s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \rho_f \mathbf{f}_f & \text{dans } \Omega_f \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 & \text{dans } \Omega_f \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_f$ est le tenseur des contraintes de Cauchy tel que

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}_f) \quad (2.2)$$

avec p le champ pression à l'intérieur du fluide, \mathbb{I} la matrice identité, μ la viscosité dynamique du fluide et \mathbf{D} le tenseur des taux de déformations tel que

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_f) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_f + \nabla^T \mathbf{u}_f) \quad (2.3)$$

Le solide, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et soumis à des forces volumiques \mathbf{f}_s , est décrit par l'équation du mouvement suivante :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{d}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{f}_s \quad \text{dans } \Omega_s \quad (2.4)$$

où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_s$ est relié au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{E}{1 + \nu_p} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu_p}{1 - 2\nu_p} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} \right] \quad (2.5)$$

avec ν_p le coefficient de Poisson et E le module d'Young de la structure ; Tr représentant la trace au sens matriciel du terme.

Aux équations (2.1) et (2.4) se rajoutent les conditions initiales associées.

Les domaines fluide et solide peuvent respectivement avoir des vitesses et efforts imposés à leur frontière ou encore des surfaces libres, chaque cas est spécifique. Cependant, deux conditions doivent être respectées à l'interface fluide-structure :

▷ la continuité des vitesses à l'interface :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s \quad \text{à l'interface} \quad (2.6)$$

▷ la continuité des efforts à l'interface :

$$\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}_f = \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}_s \quad \text{à l'interface} \quad (2.7)$$

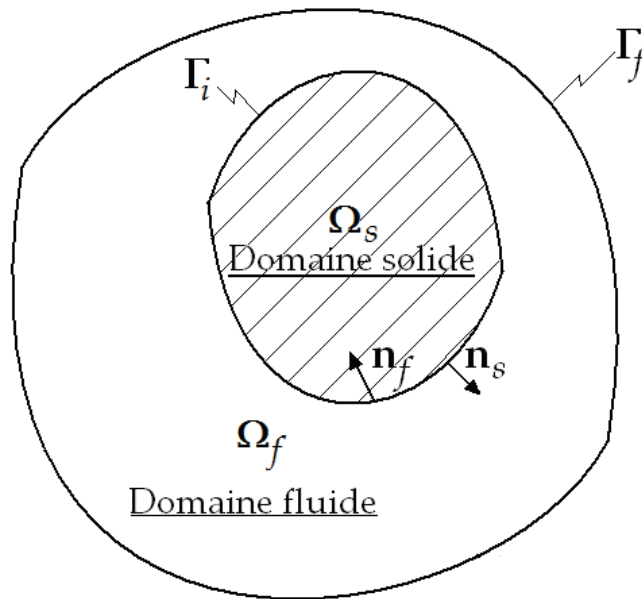


FIGURE 2.1 – Représentation des domaines fluide et structure

2.1.2 Couplage fluide-structure avec *Code_Saturne*

Pour les calculs couplés fluide-structure, il est possible de coupler *Code_Saturne* avec un code externe de calcul des structures (comme par exemple *Code_Aster*, également développé par EDF R&D). Dans le cadre de ce travail, nous avons fait le choix de considérer des structures à un degré de liberté en les modélisant par un point matériel possédant une masse (éléments discrets). La résolution temporelle de la dynamique de la structure est effectuée en utilisant le schéma classique de Newmark. Les deux équations (fluide et solide) sont résolues de par une approche de couplage partitionné. Les données du domaine fluide sont moyennées et interpolées sur la masse ponctuelle représentant le solide (figure 2.2).

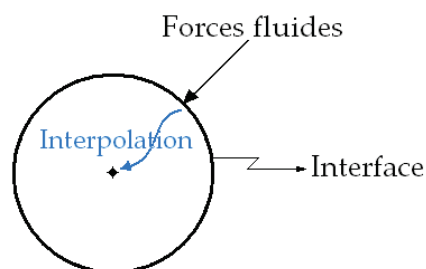


FIGURE 2.2 – Simplification de la modélisation de la structure : masse ponctuelle et interpolation des données moyennées

Les schémas de couplage disponibles au sein du code sont les schémas explicites synchrone et asynchrone et le schéma semi-implicite (Archambeau et al. 2004).

2.2 CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

Dans cette partie, nous présentons deux applications numériques de l'étude des vibrations d'une structure sous écoulement. Dans un premier temps, le cas d'un tube seul en milieu infini en présence d'un écoulement à faible nombre de Reynolds, d'abord pour de faibles amplitudes de vibrations puis dans le cadre de l'accrochage mécanique.

Puis, une deuxième étape consiste à mettre en place le calcul d'un faisceau de tubes sous écoulement transversal. Ce cas est très simplifié par rapport à une géométrie et un régime d'écoulement réels. L'objectif de ces deux études numériques est de pouvoir les exploiter par la suite par une méthode de réduction de modèle, ce qui justifie les hypothèses simplificatrices choisies.

2.2.1 Outil employé

L'ensemble des calculs effectués dans cette partie est mis en place grâce à l'outil de calcul numérique des écoulements fluides *Code_Saturne*. Dans ce code, les calculs peuvent être bidimensionnels ou tridimensionnels, stationnaires ou instationnaires. Les écoulements newtoniens incompressibles, laminaires ou turbulents, isothermes ou non peuvent être modélisés. D'autres modules spécifiques peuvent être ajoutés (modèles de combustion de gaz, modèles de phénomènes électriques, etc.) (Arhambeau et al. 2004).

Code_Saturne est un code de calcul utilisant la méthode des volumes finis pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes sur un maillage qui peut être mobile ; la méthode ALE y est intégrée.

La résolution temporelle des équations de Navier-Stokes dans *Code_Saturne* se fait par une méthode de pas fractionnaire (algorithme de Chorin). Cela signifie que l'on décompose l'avancée en deux temps :

- ▷ D'abord, on effectue une *prédiction* des termes de vitesses avec les termes sources, convectif et diffusif de l'équation de quantité de mouvement.
- ▷ Puis, la valeur prédite est *corrigée*, grâce à la résolution d'une équation de Poisson sur l'incrément de la pression et à la correction de la vitesse avec l'équation de conservation de la masse.

Pour effectuer la discrétisation temporelle des variables d'intérêt, on utilise un θ -schéma : Soit Φ une variable, on a

$$\Phi^{n+\theta} = \theta \Phi^{n+1} + (1 - \theta) \Phi^n$$

En choisissant θ , on détermine l'ordre du schéma : si $\theta = 1$, on résout le schéma d'Euler implicite (ordre global en temps : 1), et si $\theta = 1/2$, on résout le schéma de Crank-Nicolson, d'ordre 2. Dans toute la suite de ce travail, nous choisissons $\theta = 1$.

2.2.1.1 Étape de prédiction

L'étape de prédiction consiste à résoudre dans le domaine fluide l'équation discrétisée suivante :

$$\rho \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) + \rho \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p^n + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + f^n \quad (2.8)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ représente le champ de vitesse fluide prédit, Δt est le pas de discrétisation temporelle, f^n représente un terme source éventuel.

Des précisions sur les calculs des différents éléments de l'équation (2.8) sont fournies en annexe A.3.

2.2.1.2 Étape de correction

On effectue ensuite l'étape de correction : c'est-à-dire que l'on projette la vitesse sur l'espace des fonctions à divergence nulle. De ce fait, le terme de pression est mis à jour. On note δp l'incrément de pression défini comme :

$$\delta p = p^{n+1} - p^n \quad (2.9)$$

Comme on souhaite déterminer les champs au temps $n + 1$, on résout l'équation de Poisson suivante sur l'incrément de pression :

$$\Delta \delta p = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.10)$$

Ce qui fournit la nouvelle valeur de la vitesse au temps $n + 1$:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \delta p \quad (2.11)$$

La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation spatiale du domaine fluide. Les valeurs physiques sont constantes sur chaque élément, et les variables vitesse et pression sont toutes deux calculées aux centres des cellules, on dit qu'elles sont colocalisées. Alors, comme on souhaite connaître les flux sur les faces des mailles, on utilise des méthodes de reconstruction pour déterminer les valeurs aux faces de bords des mailles en fonction des valeurs aux centres des mailles. La méthode de réactualisation du maillage est présentée en annexe A.4¹.

2.2.2 Tube seul sous écoulement transversal

2.2.2.1 Modélisation du domaine d'étude

Pour ce premier cas, nous travaillons sur un cylindre seul en deux dimensions, qui doit être placé dans un domaine considéré comme infini (voir figure 2.3) afin de n'avoir pas à considérer le confinement du tube. Pour cela, il faut éviter les effets de bords autour du cylindre et de l'écoulement : c'est pour cette raison qu'il existe des contraintes pour la taille du domaine. En outre, le choix d'un maillage assez fin est primordial afin de calculer avec précision les efforts du fluide sur le cylindre, ainsi que les effets du mouvement du cylindre sur l'écoulement aval.

Il existe des recommandations quant au choix de la taille du domaine en fonction du diamètre du cylindre. Guerouache (2000) précise notamment que lorsque le nombre de Reynolds est faible, les effets de diffusion sont très importants (puisqu'ils varient de façon inversement proportionnelle au nombre de Reynolds). Ainsi, la hauteur du domaine ne doit pas être trop faible.

1. D'un point de vue informatique, *Code_Saturne* possède une architecture lui permettant d'effectuer des calculs parallèles efficaces. Sauf indication contraire, la version de *Code_Saturne* qui a été utilisée pour les calculs et développements dans le cadre de cette thèse est la version 1.3.3.

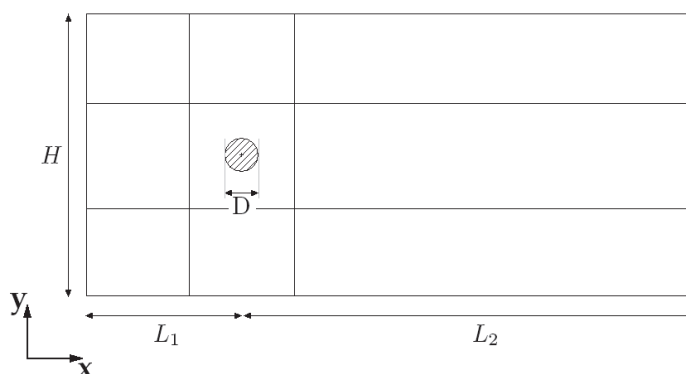


FIGURE 2.3 – Dimensions du domaine maillé

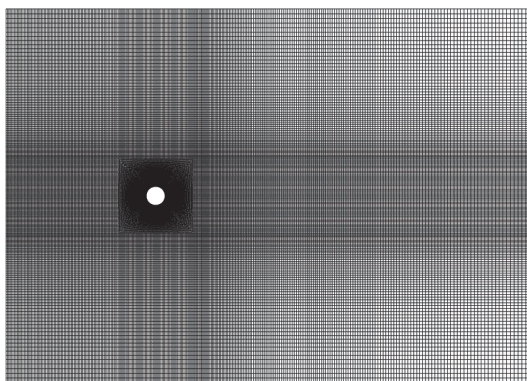
Nous présentons dans le tableau 2.2 les données géométriques retenues.

| Diamètre du cylindre (m) D | Hauteur du domaine H | Longueur en amont du cylindre L_1 | Longueur en aval du cylindre L_2 |
|---------------------------------|---------------------------|--|---------------------------------------|
| 0.025 | $20 D$ | $8 D$ | $20 D$ |

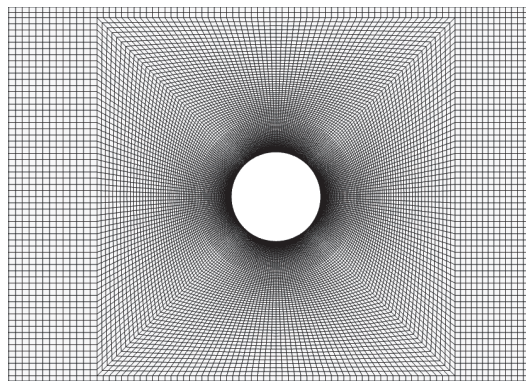
TABLE 2.2 – Tableau des données géométriques du domaine pour le cylindre seul

2.2.2.2 Mise en place de l'écoulement autour du cylindre fixe

Le maillage utilisé est présenté en figure 2.4, il contient environ 65 000 mailles ; les plus petites mailles se trouvent proche du cylindre et leur épaisseur est d'environ 1.10^{-4} m. Les conditions aux limites sont résumées sur la figure 2.5.



Maillage total du domaine fluide



Zoom sur la partie entourant le cylindre

FIGURE 2.4 – Domaine fluide maillé en éléments hexaédriques

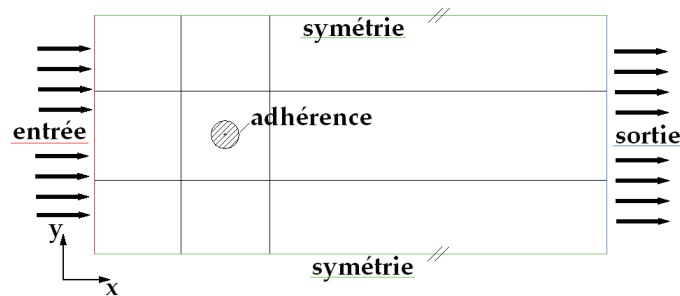


FIGURE 2.5 – Conditions aux limites pour le fluide dans le domaine étudié

Sur les côtés du domaine (de taille $L1 + L2$), comme on est assez loin du cylindre, on peut choisir une condition de symétrie, car il n’y a pas d’influence sur l’écoulement autour du cylindre. Étant donné l’éloignement des bords, il aurait aussi été possible de choisir des conditions aux limites du type paroi, cela n’aurait pas eu d’influence sur l’écoulement à l’arrière du cylindre. On travaille en deux dimensions, mais le maillage possède une maille d’épaisseur dans la troisième direction, on a donc une longueur du cylindre L non nulle. Ainsi, pour le maillage lui-même, c’est-à-dire les deux sections créées par l’extrusion du domaine 2D dans la direction axiale, on applique également une condition de symétrie. Les paramètres physiques de l’écoulement sont rassemblés dans le tableau 2.3. Le fluide considéré est de l’eau.

| | |
|--|--|
| Vitesse uniforme de l’écoulement en entrée | $U_{\infty} = 4 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ |
| Diamètre du cylindre | $D = 0.025 \text{ m}$ |
| Masse volumique | $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ |
| Viscosité dynamique | $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ |

TABLE 2.3 – Tableau des caractéristiques physiques pour le cylindre seul

Les forces à la paroi sont calculées sur la surface du cylindre. Et comme on souhaite les ramener à une valeur linéique, ces grandeurs sont divisées par la longueur L du cylindre, que l’on a choisie telle que : $L = D/2 = 0.0125 \text{ m}$.

Le régime de l’écoulement est instationnaire, puisqu’à partir de $\mathcal{R}_e \sim 50$, apparaît le sillage asymétrique à l’arrière du cylindre. Cependant, en conservant le nombre de Reynolds à la faible valeur de $\mathcal{R}_e = 100$, nous nous affranchissons des effets tridimensionnels qui sont présents dans le cas où le nombre de Reynolds est élevé. Le profil des vitesses est uniforme dans la direction x de l’écoulement (figure 2.5).

D’un point de vue numérique, la condition de CFL (*Courant-Friedrichs-Levy*) est vérifiée pour un pas de temps $\Delta t = 0,025\text{s}$. Comme le cas d’étude proposé ici a fait l’objet d’un grand nombre de travaux dans la littérature, il est facile de comparer les résultats obtenus avec des données pour s’assurer de la validité des résultats. Nous faisons le choix de comparer le nombre de Strouhal et les coefficients hydrodynamiques avec les résultats numériques de Guerouache (2000) eux-mêmes comparés avec les résultats de Norberg (2001). Les grandeurs sont calculées comme suit : les coefficients de portance fluctuants (auxquels on soustrait la valeur moyenne) C_L' et de traînée C_D' sont calculés à chaque pas de temps, ainsi que leurs valeurs moyennes ($C_{L,\text{moy}}$, $C_{D,\text{moy}}$) et RMS ($C_{L,\text{rms}}$, $C_{D,\text{rms}}$). Si pour une grandeur quelconque g on note :

$$g' = g - g_{\text{moy}} \quad (2.12)$$

alors leurs définitions respectives sont :

$$C_{L,moy} = \frac{\sum_{i=1}^n C_{L,i}}{n} \quad C'_{L,rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C'_{L,i})^2}{n}} \quad (2.13)$$

$$C_{D,moy} = \frac{\sum_{i=1}^n C_{D,i}}{n} \quad C'_{D,rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C'_{D,i})^2}{n}} \quad (2.14)$$

où n est le nombre de pas de temps courant. Les valeurs maximales sont obtenues par une moyenne des maxima locaux des signaux temporels. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau 2.4.

| | $C_{D,moy}$ | $C'_{L,max}$ | $C'_{L,rms}$ | S_{tr} |
|-------------------------------|-------------|--------------|--------------|----------|
| Résultats présents | 1.389 | 0.328 | 0.224 | 0.166 |
| Guerouache (2000) | 1.386 | 0.323 | | 0.165 |
| Norberg (2001) | | | 0.227 | 0.164 |
| Erreur présent/Guerouache (%) | 0.2 | 1.5 | | 0.6 |
| Erreur présent/Norberg (%) | | | 1.3 | 1.2 |

TABLE 2.4 – Résultats obtenus pour un calcul à cylindre fixe, $Re = 100$

Ces résultats sont tout à fait corrects, ce qui permet de valider ce calcul comme régime établi pour mettre en place le déplacement du cylindre.

2.2.2.3 Vibrations sous écoulement : deux cas d'étude

Une fois l'écoulement établi, nous mettons en place un calcul offrant la possibilité au cylindre de se mouvoir dans la direction y transversale à celle de l'écoulement moyen. Pour cela, la technique ALE permettant au maillage fluide de se déplacer en suivant le déplacement du solide est utilisée.

Par défaut, le schéma de couplage utilisé est le schéma explicite asynchrone, avec une précision à l'ordre 2 pour le calcul de pression. Le pas de temps est fixé à la valeur $\Delta t = 0,025$ s.

Les deux cas d'étude qui sont présentés ci-après proposent l'observation des résultats numériques pour de faibles amplitudes du cylindre, puis pour des vibrations de plus grande ampleur. Le cylindre est considéré sans amortissement structural. Afin de mettre en place ces calculs, on choisit ainsi deux valeurs différentes de la vitesse réduite pour le même nombre de Reynolds et la même masse réduite m^* du cylindre. En effet, pour le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$, une zone d'accrochage mécanique existe et a été étudiée numériquement par Shiels et al. (2001) notamment. Comme on l'a vu dans la partie 1.2, cela signifie que le cylindre peut voir l'amplitude de ses vibrations augmenter pour une certaine gamme de valeurs de la vitesse réduite, du fait du rapprochement de la fréquence d'émission des tourbillons à l'arrière du cylindre $f_{S_{tr}}$ et donc de la fréquence d'oscillations du

cylindre f avec la fréquence propre en eau du cylindre f_N . Ainsi, si l'on choisit une vitesse réduite dans cette gamme, les oscillations du cylindre sont de grande amplitude et si l'on choisit une vitesse réduite hors de cette gamme, les vibrations restent limitées. La masse réduite du cylindre est définie comme suit :

$$m^* = \frac{m}{\frac{\pi}{4}\rho D^2 L} \quad (2.15)$$

avec m la masse du cylindre et L la longueur du cylindre.

Premier cas : faible amplitude de vibrations

Dans un premier temps, nous considérons de faibles amplitudes de vibrations du cylindre, c'est-à-dire que nous nous plaçons dans le cas où l'accrochage mécanique n'est pas mis en place. La vitesse réduite, définie comme :

$$U^* = \frac{U_\infty}{f_N D} \quad (2.16)$$

avec f_N la fréquence propre en eau du cylindre, est égale à $U^* = 3$. Pour cette valeur, les résultats en termes d'amplitude réduite $A^* = y_{\max}/D$ (avec y_{\max} la moyenne des maxima de l'amplitude du déplacement du cylindre), de coefficient de traînée moyen et de coefficient de portance maximum sont reportés dans le tableau 2.5.

| U^* | A^* | $\overline{C_D}$ | $C_{L,\max}$ |
|-------|-------|------------------|--------------|
| 3.00 | 0.02 | 1.40 | 0.41 |

TABLE 2.5 – Résultats des simulations en vibrations induites sans amortissement à $Re = 100$ et $m^* = 3.3$, vitesse réduite $U^* = 3$

L'amplitude du déplacement du cylindre reste faible, puisqu'elle est de deux ordres de grandeur inférieure au diamètre du cylindre. Le déplacement adimensionnel $Y^* = y/D$ du cylindre au cours du temps est présenté sur la figure 2.6. Le temps adimensionnel est défini comme $t^* = t \frac{U_\infty}{D}$.

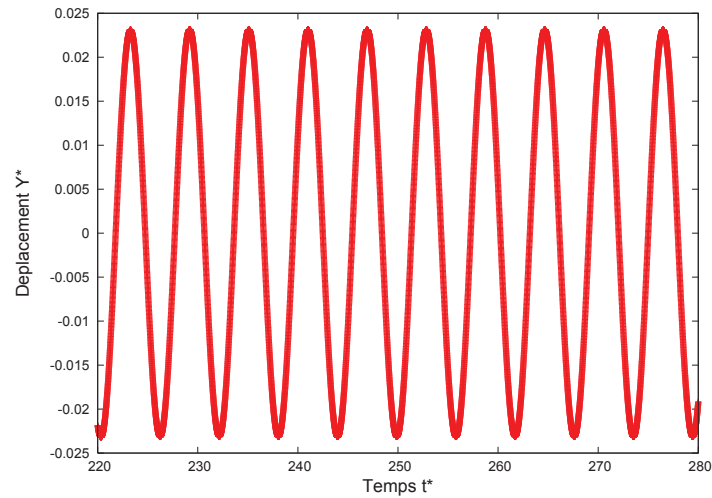


FIGURE 2.6 – Déplacement adimensionnel Y^* du cylindre au cours du temps, $U^* = 3$

Second cas : accrochage mécanique

Dans un second cas, nous nous intéressons au cas de vibrations de grande amplitude du cylindre sous l'effet de l'écoulement. Shiels et al. (2001) observent un accrochage pour une vitesse réduite aux alentours de $U^* = 5$. Ainsi, pour la vitesse réduite de $U^* = 4.91$, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau récapitulatif 2.6.

| U^* | A^* | $\overline{C_D}$ | $C_{L,max}$ |
|-------|-------|------------------|-------------|
| 4.91 | 0.58 | 2.36 | 1.45 |

TABLE 2.6 – Résultats des simulations en vibrations induites sans amortissement à $Re = 100$ et $m^* = 3.3$, vitesse réduite $U^* = 4.91$

Cette fois, on note que l'amplitude des oscillations du cylindre est beaucoup plus importante, les maxima d'amplitude dépassent la valeur du rayon du cylindre. Le déplacement adimensionnel Y^* du cylindre au cours du temps adimensionnel est présenté sur la figure 2.7.

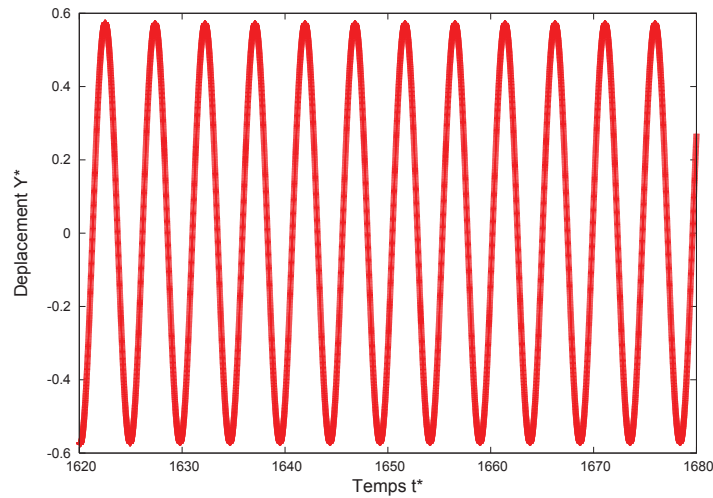


FIGURE 2.7 – Déplacement adimensionnel Y^* du cylindre au cours du temps, $U^* = 4.91$

Balayage de la zone d'accrochage

Par la suite, une grande gamme de vitesses réduites est balayée, l'ensemble des résultats n'est pas détaillé ici. Cependant, en guise de récapitulatif, la figure 2.8 présente la valeur de l'amplitude maximale du cylindre obtenue en fonction d'une grandeur appelée rigidité effective notée k_{eff} et introduite par Shiels et al. (2001). La définition de cette grandeur, qui a pour avantage de représenter complètement le système du fait de la nullité de l'amortissement de la structure, est détaillée en annexe A.5. Ici, on retient qu'à chaque valeur de la rigidité effective correspond une valeur de la vitesse réduite et que le balayage des valeurs de la rigidité effective est similaire à celui de la vitesse réduite. On remarque simplement la très bonne corrélation entre les résultats obtenus avec *Code_Saturne* et ceux de Shiels et al. Les deux points correspondant aux deux tests décrits ci-avant (vitesse réduite de $U^* = 3$ et $U^* = 4.91$) sont représentés de façon distincte, correspondant respectivement aux valeurs $k_{\text{eff}} = 2.44$ et $k_{\text{eff}} = 21.37$.

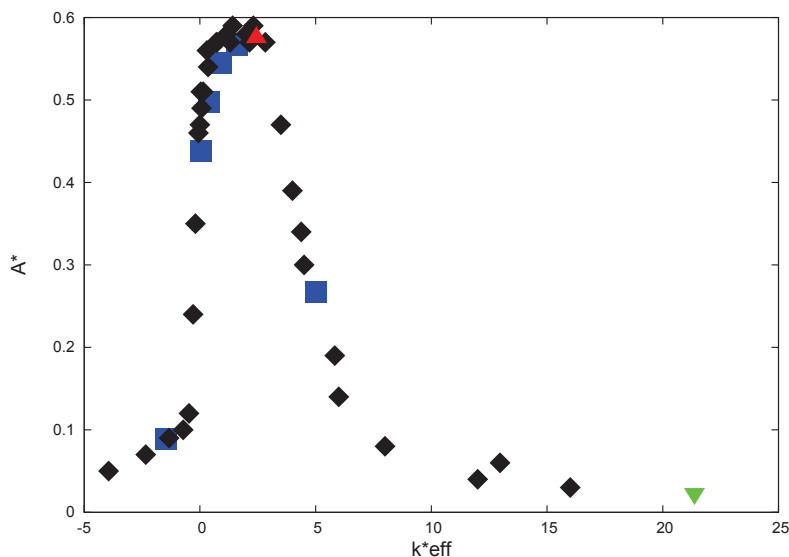


FIGURE 2.8 – Amplitude adimensionnelle des vibrations du cylindre sans amortissement à $\mathcal{R}_e = 100$ et $m^* = 3.3$ en fonction de k_{eff}^* . \blacklozenge Données de référence (Shiels et al. 2001); \blacksquare Résultats Code_Saturne; \blacktriangledown Résultat Code_Saturne correspondant au cas de faible amplitude; \blacktriangle Résultat Code_Saturne correspondant au cas de l'accrochage

Les résultats obtenus pour les deux cas de faible et de grande amplitude des déplacements du cylindre sont corrects, le schéma de couplage explicite asynchrone fournit des résultats satisfaisants dans ce type de configuration de mécanisme d'interaction fluide-structure. Les données que nous avons obtenues nous permettront par la suite de mettre en place un modèle d'ordre réduit pour la même configuration, avec un tube seul mobile : cela constituera une première étape dans la construction d'un modèle réduit pour l'interaction fluide-structure.

2.2.3 Faisceau tubulaire sous écoulement transversal

Nous nous intéressons au cas d'un écoulement bidimensionnel au sein d'un faisceau de tubes, afin de nous rapprocher du cas d'un écoulement confiné, qui n'était pas représenté par l'étude du tube seul sous écoulement transversal. Nous effectuons l'étude numérique en deux temps : d'abord, l'écoulement au sein du faisceau de tubes fixes est établi, puis un tube au sein du faisceau est laissé libre d'osciller dans la direction transverse à celle de l'écoulement.

2.2.3.1 Configuration géométrique

Dans une volonté d'alléger les calculs, une configuration bidimensionnelle est choisie. Comme cela a été présenté dans la partie 1.1, il existe plusieurs configurations possibles concernant l'agencement des tubes dans un échangeur de chaleur ; celle qui a été retenue est la configuration en pas carré, avec un pas réduit $P/D = 1.44$, où P est le pas inter-tubes (distance entre les centres de deux tubes voisins) et D le diamètre d'un tube. Cette configuration a fait l'objet de plusieurs

études numériques, voir les travaux de Adobès et al. (2006), Longatte et al. (2003) et Benhamadouche et Laurence (2003) par exemple. Le diamètre d'un tube est de $D = 0.01 m$.

Le choix du nombre de tubes dans la configuration considérée a son importance. Si l'on considère des conditions aux limites d'entrée/sortie dans le faisceau ou au contraire, des conditions de périodicité, le comportement de l'écoulement et donc des tubes qui sont amenés à vibrer s'ils y sont autorisés n'est pas le même. Un faisceau tubulaire est constitué d'un très grand nombre de tubes ; cependant, il n'est pas possible de tous les représenter dans une simulation.

En effet, pour des raisons de temps de calcul, un certain nombre d'auteurs a choisi de travailler avec un maillage contenant le cylindre étudié, entouré de ses plus proches voisins, avec des symétries (figure 2.9 (a)), en espérant que l'hypothèse de faisceau infini soit validée. Or, Longatte et al. (2003) montrent qu'en augmentant la taille du domaine aux seconds plus proches voisins, les résultats sont meilleurs : ainsi, les conditions aux limites de symétrie ne suffisent pas pour assurer l'hypothèse de faisceau infini. C'est pourquoi il est conseillé de travailler avec un domaine fluide comprenant plusieurs tubes, même si un seul d'entre eux est mobile (Longatte et al. 2003, Benhamadouche et Laurence 2003, Huvelin 2008) (figure 2.9 (b)).

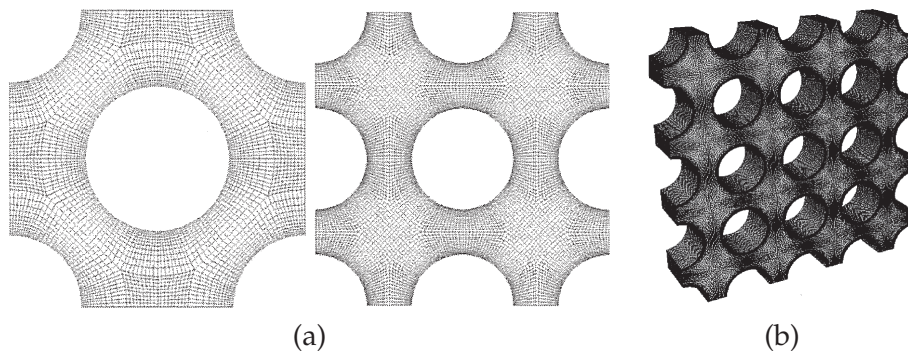


FIGURE 2.9 – Différents maillages du domaine fluide : (a) Longatte et al. (2003), (b) Benhamadouche et Laurence (2003).

Benhamadouche et Laurence (2003) proposent l'utilisation de la méthode LES pour observer ces effets de la taille du domaine considéré sur la réponse du système, ainsi que les effets de l'angle d'attaque de l'écoulement ou encore du confinement. Les travaux de Longatte et al. (2003) montrent que dans le cas où l'on considère un tube et ses 8 voisins, l'étude des vibrations d'un tube dans un fluide au repos donne de bons résultats. Huvelin (2008) travaille, d'abord sans modèle de turbulence, sur une configuration plus importante, se basant sur celle d'une maquette d'essai AMOVI du CEA (de Morais 2006, Huvelin et al. 2007), voir la figure 2.10 : cette maquette est constituée de 15 tubes entiers et de 10 demi-tubes. Des études de vibrations pour un tube au centre de la maquette sont effectuées avec des conditions d'entrée/sortie dans le sens de l'écoulement. Dans ce cas, l'écoulement se met en place autour des premiers tubes avant d'atteindre le tube central pour lequel les grandeurs physiques sont relevées et qui est amené à se déplacer dans la direction transverse à l'écoulement.

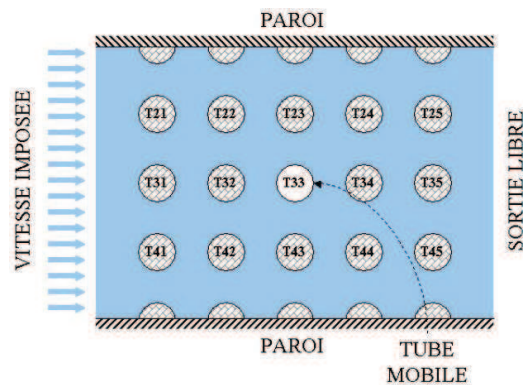


FIGURE 2.10 – Représentation du modèle de la maquette AMOVI, Huvelin (2008)

Une telle configuration semble intéressante, puisque même si l'ensemble du faisceau tubulaire n'est pas modélisé, l'influence des tubes voisins est considérée. Cependant, cette configuration implique de travailler avec un maillage comportant un nombre de mailles très conséquent. Or, comme nous mettons en place ce calcul complet dans le but de traiter les données obtenues pour effectuer des calculs d'ordre réduit, nous sommes dans l'obligation d'anticiper en évaluant la quantité de données à stocker : notre objectif est donc de travailler dans un cadre permettant de reproduire globalement un mécanisme tout en conservant un domaine de calcul relativement restreint. D'autant que, selon la richesse de la physique de l'écoulement, il peut être nécessaire de conserver un grand nombre de données pour avoir une représentation pertinente de cet écoulement.

C'est pourquoi il est préférable, dans le cas présent, de travailler dans la configuration "9 tubes", c'est-à-dire celle pour laquelle on considère un tube et ses 8 plus proches voisins, comme cela est représenté en figure 2.11. Pour pallier la problématique de la mise en place de l'écoulement et de sa forme autour du tube considéré, des conditions aux limites périodiques seront choisies ; autrement dit, le faisceau tubulaire est considéré comme infini dans les deux directions du plan.

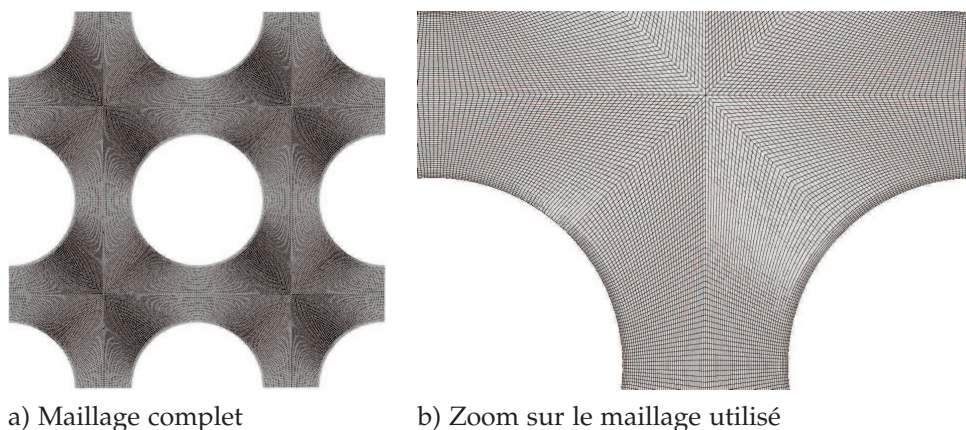


FIGURE 2.11 – Configuration "9 tubes" bidimensionnelle choisie

Le maillage utilisé comporte environ 64 000 cellules. Les conditions aux limites choisies ainsi que l'orientation de l'écoulement sont résumées sur la figure 2.12.

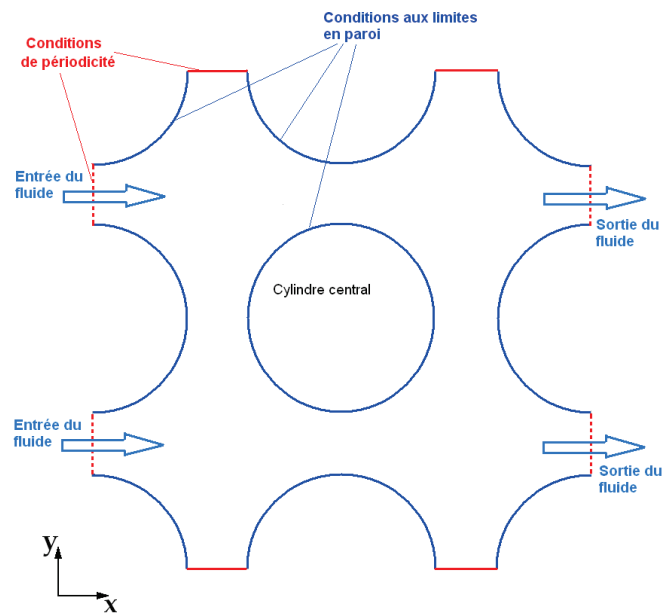


FIGURE 2.12 – Conditions aux limites et orientation de l'écoulement au sein de la maille élémentaire "9 tubes" du faisceau

La configuration géométrique du domaine est résumée dans le tableau 2.7.

| Diamètre du cylindre (m) D | Largeur et longueur du domaine H | Pas inter-tubes P | Longueur du cylindre L |
|-------------------------------|-------------------------------------|----------------------|---------------------------|
| 0,01 | 2,88 D | 1,44 D | 0,5 D |

TABLE 2.7 – Tableau des données géométriques du domaine pour le faisceau de tubes (m)

2.2.3.2 Calcul de l'écoulement : modèle utilisé, objectif

Le code de calcul CFD utilisé pour calculer l'écoulement au sein de la configuration de faisceau est également *Code_Saturne*.

L'objectif ici est de travailler non pas dans un contexte d'instabilité (instabilité fluide-élastique, accrochage, ...) qui impliquerait la mise en place d'un calcul très haute fidélité avec toutes les difficultés de représentation du phénomène physique que cela entraîne, mais plutôt d'observer un régime d'écoulement stable.

Afin d'étudier un écoulement dont les caractéristiques sont tout de même assez riches, nous cherchons à mettre en place un calcul d'écoulement instationnaire. Pour cela, il est nécessaire de se placer à un nombre de Reynolds qui permette la mise en place d'instationnarités. Les principales hypothèses adoptées pour ce calcul sont le fait qu'il reste bidimensionnel et l'absence de modèle de turbulence.

Première hypothèse : calcul 2D

Comme le calcul est bidimensionnel, il est nécessaire de déterminer le nombre de Reynolds le plus faible pour lequel on voit apparaître des instationnarités dans l'écoulement. En effet, il a été montré (Huvelin 2008) que l'utilisation d'une

configuration 2D pour décrire un phénomène intrinsèquement tridimensionnel entraîne généralement une surestimation des grandeurs physiques : l'écoulement au sein d'un faisceau tubulaire à haut nombre de Reynolds dépend fortement des effets tridimensionnels ; il faut donc, en théorie, tenir compte de la longueur de corrélation de l'écoulement sur les tubes. C'est pourquoi, dans le cadre de ce calcul, le choix du plus faible nombre de Reynolds auquel apparaissent les instationnarités permet de minimiser l'erreur due à la configuration 2D du domaine.

Rappel

Dans le cadre des travaux sur la configuration de faisceau tubulaire, l'énoncé du nombre de Reynolds se rapporte au nombre de Reynolds prenant en compte le confinement des tubes, c'est-à-dire pour rappel :

$$\mathcal{R}_e = \frac{U_p D}{\nu} \quad (2.17)$$

avec

$$U_p = U_\infty \frac{P}{P - D} \quad (2.18)$$

Après une étude de convergence en nombre de Reynolds, le nombre de Reynolds pour lequel les premières instationnarités sont observées est mesuré à $\mathcal{R}_e = 2600$ avec ce modèle numérique.

Remarque 2.1 *Il est important de noter que la configuration de cette étude étant très particulière, nous ne sommes pas en mesure de pouvoir comparer les résultats numériques obtenus avec des travaux numériques ou expérimentaux. En effet, à notre connaissance, il n'existe pas d'étude ayant été effectuée dans une configuration similaire (nombre de Reynolds, conditions aux limites, nombre de tubes et modèle d'équations). Il n'est donc pas envisagé de conclure sur la physique de l'écoulement et du déplacement du cylindre. L'objectif ici est seulement de fournir un calcul numérique de base afin de mener à bien l'étude des vibrations sous écoulement d'un tube au sein d'un faisceau via la réduction de modèle. Et, d'un point de vue ingénieur, il est primordial que la méthode de réduction de modèle soit assez robuste pour reproduire un mécanisme, quelle que soit la provenance des données de base ayant permis sa construction.*

Pour obtenir les instationnarités désirées, plusieurs étapes ont été nécessaires. Dans un premier temps, au lieu des conditions de périodicité présentées en figure 2.12, des conditions d'entrée/sortie avaient été imposées sur les faces respectives de gauche et de droite du domaine, et des conditions de symétries appliquées au niveau du "haut" et du "bas" du domaine. Avec ces conditions aux limites, aucune instationnarité dans l'écoulement n'était observée, malgré les différentes configurations de perturbations imposées dans l'écoulement. Ceci est principalement dû au fait que la maille élémentaire du faisceau (c'est-à-dire la considération de seulement 9 tubes) n'est pas suffisante pour laisser à l'écoulement le temps de s'établir autour des structures. C'est pourquoi la configuration de la maquette AMOVI est meilleure dans le cas où ces conditions aux limites sont considérées. De plus, la configuration actuelle ne permettrait pas d'obtenir des résultats corrects du fait de l'absence de zones libres en amont et en aval de l'écoulement, contrairement à ce qui est effectué par Huvelin et que l'on a appliqué dans le cas du tube seul.

Avec des conditions aux limites périodiques, il est possible de mettre en place un écoulement instationnaire. L'utilisation des conditions aux limites péri-

diques au sein de *Code_Saturne* est présentée en détail dans l'annexe A.6. Concrètement, comme les conditions aux limites sont périodiques, il est nécessaire d'imposer autrement ces conditions, puisque la limite du domaine n'est plus considérée comme un bord mais comme une zone interne au domaine fluide. Pour cela, un terme source sous forme de flux massique est rajouté au second membre des équations de Navier-Stokes, il représente le débit que l'on souhaite imposer à l'écoulement. Ce débit est un débit "cible", vers lequel le système tend au cours du temps. Il est donc nécessaire d'effectuer un calcul préalable d'initialisation du débit ; une fois la valeur du débit atteinte, le calcul réel peut débiter.

Le débit imposé est fonction du nombre de Reynolds. Le tableau 2.8 rassemble les caractéristiques physiques de l'écoulement.

| | |
|--|--|
| Nombre de Reynolds | $\mathcal{R}_e = 2600$ |
| Vitesse uniforme de l'écoulement en entrée | $U_\infty = 0.079 \text{ m.s}^{-1}$ |
| Masse volumique | $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ |
| Viscosité dynamique | $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ |

TABLE 2.8 – Tableau des caractéristiques physiques pour le faisceau de tubes

Pour mettre en place un écoulement instationnaire, une perturbation temporelle sur le débit entrant est imposée ; elle est schématisée en figure 2.13 : un créneau est imposé au débit entrant. Sur un laps de temps, le débit entrant est doublé ; ce qui entraîne des perturbations dans l'écoulement *a posteriori*.

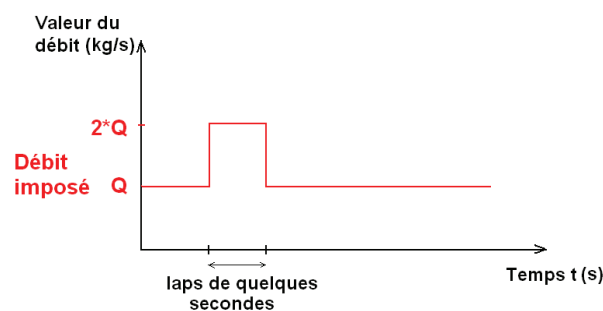


FIGURE 2.13 – Créneau temporel imposé au débit cible pour introduire une perturbation dans l'écoulement

Pour satisfaire la condition de *Courant-Friedrichs-L Levy*, le pas de temps choisi est évalué à $\Delta t = 1.10^{-3}$ s. et est fixe.

La réponse du système à cette perturbation temporelle est représentée en figure 2.14, où la vitesse observée en entrée ainsi que la vitesse correspondant au débit cible sont tracées en fonction du temps ; le débit cible est atteint, puis le créneau temporel est imposé, et enfin le débit cible revient à sa valeur initiale ; la vitesse observée devient fluctuante autour de la valeur cible.

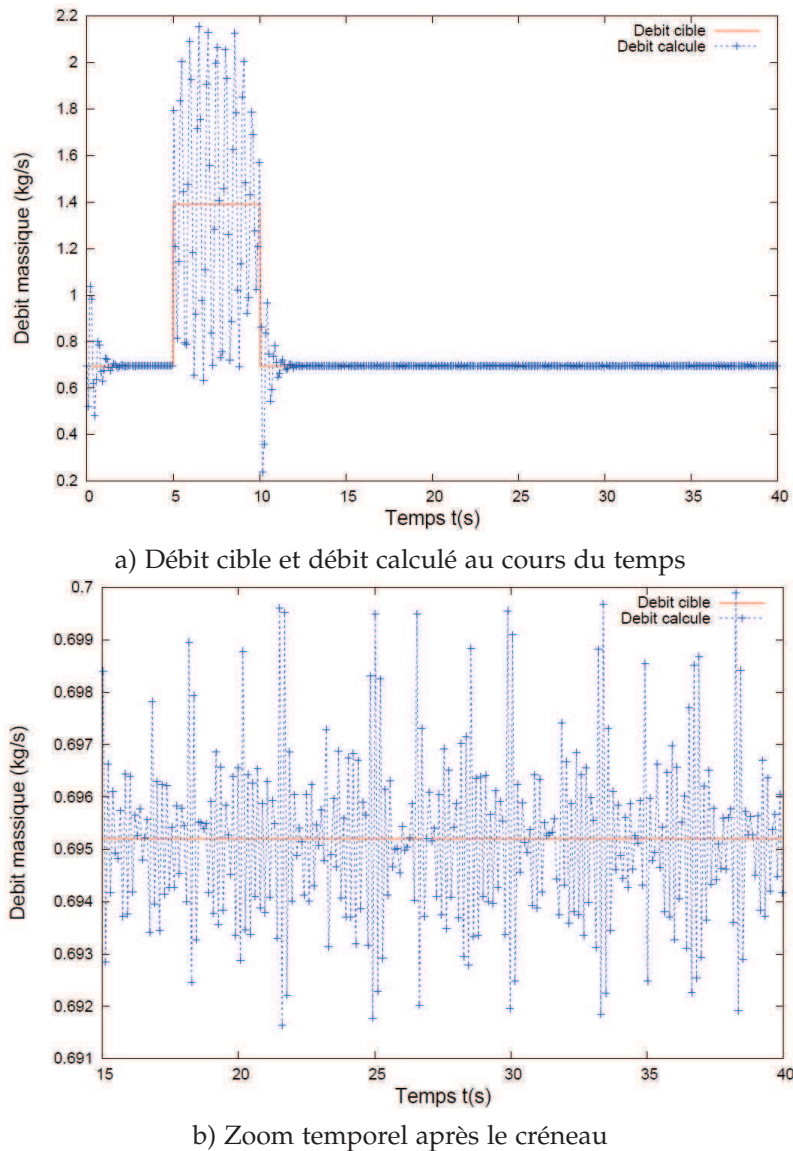


FIGURE 2.14 – Comportement de la réponse au débit imposé au second membre

L'algorithme utilisé au sein de *Code_Saturne* pour mettre en place le calcul de ce débit est présenté en annexe A.7.

Seconde hypothèse : pas de modèle de turbulence

Une seconde et forte hypothèse est la suivante : le calcul est réalisé sans aucun modèle de turbulence, alors que l'écoulement est mené à un nombre de Reynolds relativement élevé : en effet, Huvelin (2008) rappelle que dès le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = 1200$, le système se situe dans la gamme d'initialisation de la turbulence. Cependant, il effectue lui-même différents calculs tridimensionnels pour des nombres de Reynolds se situant entre $\mathcal{R}_e = 1200$ et $\mathcal{R}_e = 6000$, en conservant l'hypothèse de fluide laminaire. Pour le moment, le calcul mené ici est donc bidimensionnel et sans modèle de turbulence. Cette dernière hypothèse nous permettra, lors de la construction du modèle d'ordre réduit, d'observer le comportement

du modèle sans rajout de termes supplémentaires (viscosité de turbulence, etc.) qui pourraient avoir une influence sur la stabilité et donc, compliquer l'interprétation des résultats obtenus.

2.2.3.3 Calcul de l'écoulement pour le faisceau fixe

Caractéristiques de l'écoulement

Une fois l'écoulement établi dans son régime instationnaire, il est possible de lancer le calcul réel. On remarque que le signal de la vitesse en entrée, au point de contrôle numéro 1 (figure 2.15) n'est pas parfaitement périodique : au contraire, des pseudo-périodes sont observées (voir figure 2.16). La figure 2.17 présente l'évolution de la vitesse selon x (direction de l'écoulement d'entrée) aux quatre points de contrôle présentés sur la figure 2.15 sur une pseudo-période. On remarque l'aspect très chahuté de l'écoulement.

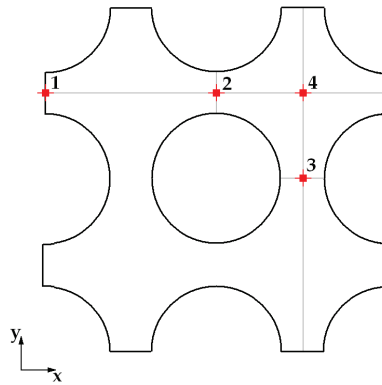


FIGURE 2.15 – Points de contrôle des grandeurs physiques dans le domaine du faisceau

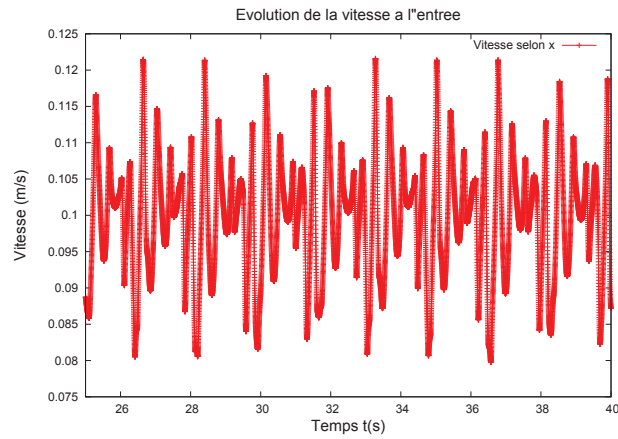
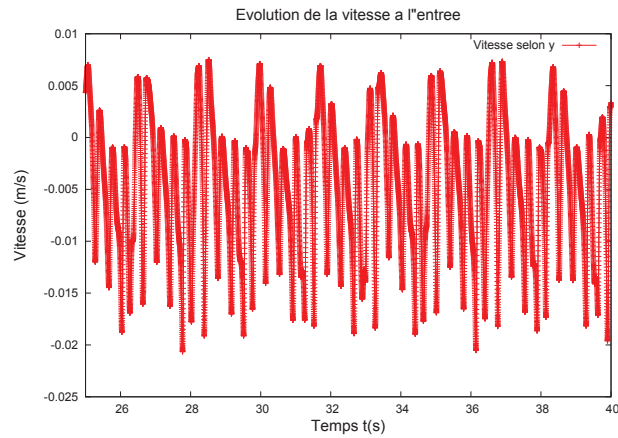
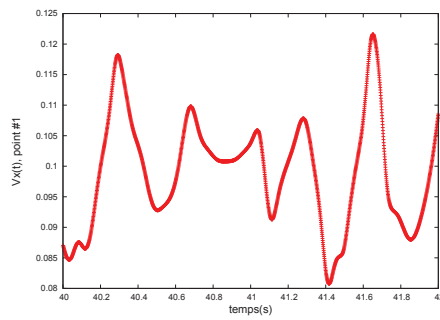
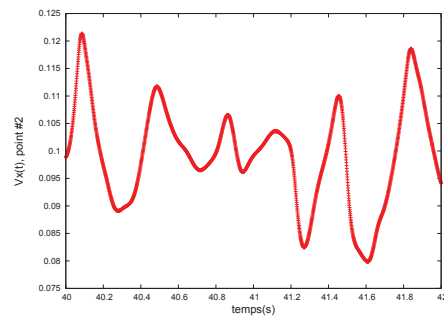
(a) Vitesse selon x en entrée(b) Vitesse selon y en entrée

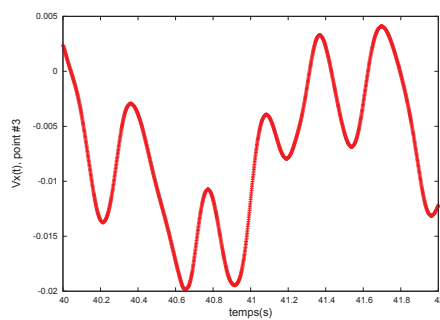
FIGURE 2.16 – Evolution de la vitesse au point numéro 1



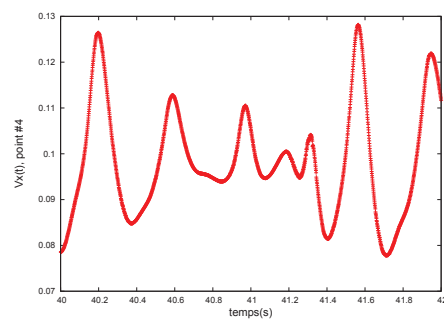
(a) Point 1



(b) Point 2



(c) Point 3



(d) Point 4

FIGURE 2.17 – Evolution de la vitesse selon x sur une pseudo-période aux quatre points de contrôle

C'est dans les deux zones séparant les tubes dans le sens de l'écoulement que l'on observe les maxima du champ de vitesse ; ceux-ci se déplacent au cours du temps dans le sens de l'écoulement (figure 2.18). Il existe plusieurs zones où sont observées des recirculations ; cependant, ces recirculations restent d'une relative faible amplitude par rapport à l'écoulement moyen. Ces zones se situent principalement à l'arrière des tubes, comme on peut le constater en observant la vorticité de l'écoulement ainsi que les lignes de courant, qui révèlent des zones tourbillonnaires (figure 2.19).

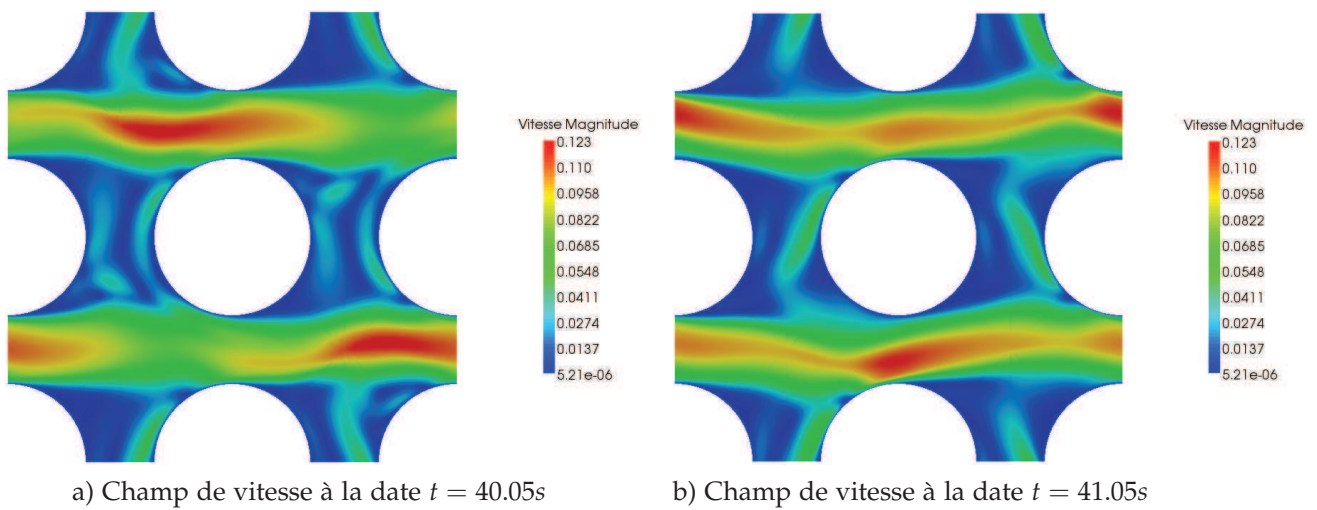


FIGURE 2.18 – Champ de vitesse global au cours du temps

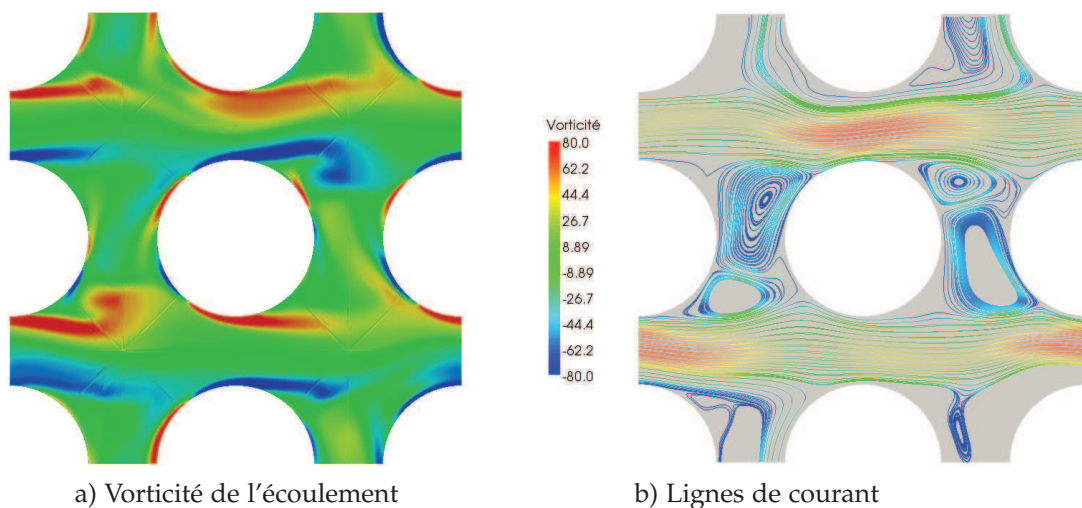


FIGURE 2.19 – Observation des zones de recirculation dans le domaine fluide

2.2.3.4 Calcul de l'écoulement pour le faisceau mobile

Modèle utilisé

La configuration géométrique utilisée dans le cas du faisceau dit "mobile" est la même que celle pour le cas du faisceau fixe. La formule de "faisceau mobile" est utilisée par abus de langage, mais cela signifie simplement que seul le tube central de la maille élémentaire du faisceau est autorisé à se déplacer et ce, uniquement dans la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement moyen. C'est-à-dire que le tube central est amené à se déplacer selon la direction y (figure 2.12). Le domaine est toujours bidimensionnel et les équations de résolution du mouvement du fluide sont toujours traitées sans modèle de turbulence.

Pour l'établissement de l'écoulement, on se place exactement dans les mêmes conditions que dans le cas du faisceau fixe, c'est d'ailleurs ce dernier

qui tient lieu d'initialisation de l'écoulement au sein du faisceau ; le nombre de Reynolds étant fixé à $\mathcal{R}_e = 2600$. Afin de prendre en compte le déplacement de la structure, c'est la formulation ALE qui est utilisée puisque le calcul est mené avec *Code_Saturne*.

Les tubes sont constitués d'acier, dont la masse volumique est de $\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$. Le déplacement du tube central reste faible, on évalue sa raideur à $k = 26.36 \text{ N.m}^{-1}$ pour avoir une fréquence d'oscillation proche de 1 Hz et un déplacement dont l'amplitude ne dépasse pas 4.10^{-3} m . Dans ce cas, on observe des déplacements du cylindre qui ne sont pas périodiques, malgré un comportement quasi-sinusoidal (figure 2.20). Notons toutefois qu'un comportement pseudo-périodique apparaîtrait peut-être sur un intervalle de temps plus long. D'autre part, il sera nécessaire de rassembler un grand nombre de clichés afin de constituer une base assez riche pour tenter de reconstruire un mouvement aussi agité.

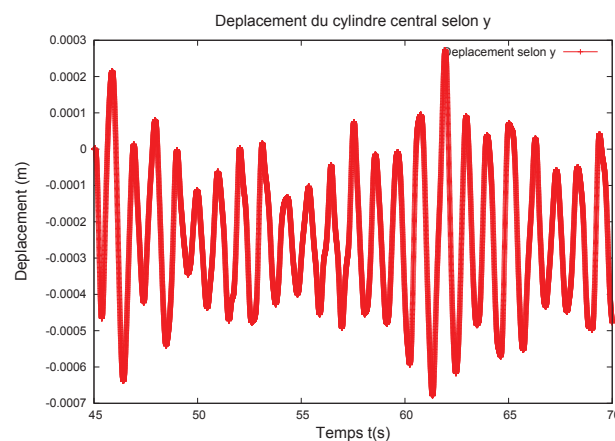


FIGURE 2.20 – Évolution temporelle du déplacement selon y du tube central au sein du faisceau

2.2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé deux applications numériques simples d'interaction fluide-structure. Dans le premier cas, l'existence d'un grand nombre de travaux numériques et expérimentaux sur le sujet nous a permis de conclure quant au bon comportement du code pour le traitement du phénomène d'accrochage en fréquence.

Le deuxième cas, lui, n'est pas validé par l'expérience ou par le calcul et présente des limites non négligeables ; cependant, il permet de poser les bases pour la mise en place de calculs d'ordre réduit. En effet, il sera ensuite considéré comme le calcul "de confiance" à partir duquel seront extraites les données nécessaires pour construire le modèle réduit.

LA RÉDUCTION DE MODÈLE : ÉTAT DE L'ART, ENJEUX ET INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

3

LA RÉDUCTION DE MODÈLE est un enjeu actuel majeur pour la modélisation numérique des phénomènes. Les dernières décennies ont vu l'industrie se transformer du fait de l'arrivée des moyens informatiques dans toutes les étapes de la vie d'un produit : de la conception à sa mise en œuvre en passant par sa production, l'outil informatique est désormais indispensable. C'est grâce à l'amélioration numérique sur plusieurs fronts (meilleure algorithmique, plus grande puissance et compacité des composants) que cette transformation a pu avoir lieu, fournissant à l'ingénieur et au chercheur des outils de grande qualité et lui permettant de diminuer le coût des bancs d'essai expérimentaux.

Aujourd'hui, la course à la puissance des calculateurs semble s'essouffler, du fait de la très grande quantité de données à traiter pour accéder à la connaissance de phénomènes réels. Bien que les super-calculateurs permettent de se rapprocher toujours plus de la physique d'un problème, l'accès à de tels moyens de calcul reste limité, de par le coût qu'ils représentent. De plus, il existe une limite à la puissance des processeurs classiques (CPU), même si la recherche pour en modifier l'architecture a permis de fournir des éléments plus puissants, comme le processeur CELL par exemple, notamment très adapté au calcul parallèle et permettant d'atteindre des fréquences élevées.

D'autres moyens se développent pour tenter de gagner en puissance et en rapidité de calcul. On peut citer notamment l'utilisation des processeurs graphiques - dits GPU - pour exécuter les tâches habituellement confiées au seul CPU. Les performances du système informatique, distribuant les tâches entre le CPU et le GPU (qui accélère certaines phases du calcul) permettent d'accéder à des résultats avec une grande rapidité. Le GPU est tout à fait adapté à du calcul massivement parallèle et les tests de performances montrent la supériorité du GPU face au CPU à partir d'un petit nombre d'unités. Par contre, l'utilisation des GPU peut avoir des limites en ce qui concerne la quantité de mémoire à utiliser.

Parallèlement à l'amélioration technique des matériels informatiques, les méthodes numériques de réduction de modèle sont de plus en plus prisées, sous toutes leurs formes. Elles consistent à traiter numériquement un problème *via* les techniques habituelles de modélisation, mais en proposant un modèle de taille très

réduite par rapport à celle du modèle complet. Par exemple, l'étude d'un écoulement turbulent tridimensionnel en simulation numérique directe nécessite un raffinement en temps et en espace qui demande la résolution d'un système comportant, de façon non exceptionnelle, plusieurs millions de degrés de liberté, ce qui nécessite des moyens de calcul conséquents. L'objectif de la réduction de modèle est, pour un problème de ce type, de parvenir à n'avoir à résoudre que des systèmes dont la taille n'excède pas l'ordre de la centaine de degrés de liberté.

Dans ce chapitre, nous proposons une revue des différents types de réduction de modèle et de leurs domaines d'application. Nous choisissons une classification globale entre les méthodes de réduction dites *a posteriori*, nécessitant une certaine connaissance du problème étudié et les méthodes *a priori*, se construisant sans apport préalable. Certaines de ces méthodes sont décrites plus en détail, dès lors qu'elles présentent un intérêt particulier dans le cadre de ce projet. Puis, nous nous intéressons aux méthodes d'ordre réduit pour l'interaction fluide-structure. Là encore nous distinguons les techniques reposant sur la considération d'un domaine fluide-structure fixe au cours du temps de celles qui s'appuient sur le suivi du domaine mobile dans l'intervalle de temps de l'étude.

3.1 LA RÉDUCTION DE MODÈLE : CONTEXTE

3.1.1 Qu'entend-on par réduction de modèle ?

Le terme de *réduction de modèle* peut prendre un grand nombre de significations. Un modèle peut déjà, à la base, être considéré comme une réduction par rapport à la réalité qu'il représente. La simplification d'un modèle en fonction des besoins de l'utilisateur constitue une autre réduction : par exemple, dans l'étude du comportement d'un bateau à la houle, il ne sera pas toujours nécessaire de concevoir le modèle contenant l'ensemble des rivets de la coque. On peut voir également le passage de la représentation d'un modèle tridimensionnel à un modèle unidimensionnel comme une réduction, ce qui est fait par exemple dans la théorie des coques et des plaques. La discrétisation de problèmes continus est également une réduction de modèle qui permet de passer d'Équations aux Dérivées Partielles à un système d'Équations Différentielles Ordinaires.

Dans le cadre de notre travail, nous nous plaçons dans le contexte suivant : connaissant un modèle défini par l'équation aux dérivées partielles pour l'inconnue $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ (espace topologique) et $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ avec $\Omega \in \mathbb{R}^3$ et $T \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

où f est un opérateur de \mathbf{u} et de ses dérivées. On écrit la discrétisation spatiale de (3.1) qui fournit le système :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = f^h(\mathbf{X}) \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{X} \in \mathcal{W}$ où \mathcal{W} est une variété de dimension n . La réduction de modèle telle que nous l'entendons consiste à trouver une variété \mathcal{W}_r de dimension $N \ll n$ tel que la solution $x_r \in \mathcal{W}_r$ de l'équation

$$\frac{dx_r}{dt} = f_r(x_r) \quad (3.3)$$

vérifie la condition

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{x}_r) \leq \varepsilon \quad (3.4)$$

où d est une distance, avec ε un réel choisi. \mathcal{W} et \mathcal{W}_r sont supposées être des variétés plongées dans \mathbb{R}^n . En d'autres termes, on cherche un modèle qui soit équivalent au modèle 3.2 formulé dans \mathcal{W}_r , où la distance et \mathcal{W}_r sont à déterminer.

Nous nous intéresserons par la suite plus particulièrement à la définition des méthodes de réduction de modèle par projection. Nous distinguerons deux types de méthodes : celles pour lesquelles le domaine d'étude est fixe et celles qui permettent la gestion de cas mobiles ; ainsi nous pourrions introduire la réduction de modèle pour l'interaction fluide-structure.

3.2 RÉDUCTION DE MODÈLE PAR PROJECTION : PROBLÈMES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES

Dans cette partie, nous présentons différentes méthodes de réduction de modèle en orientant notre description sur les méthodes par projection ; il existe bien entendu d'autres types d'approches. Nous proposons de distinguer les méthodes selon les éléments sur lesquels la réduction est effectuée.

Une première famille d'approches nécessite la connaissance préalable de certaines solutions du problème, elles sont appelées les méthodes *a posteriori*. C'est sur l'ensemble des solutions connues que se construira le modèle réduit. Si l'on réécrit l'équation aux dérivées partielles 3.1 sous la forme de la recherche de \mathbf{u} dans l'espace \mathcal{V} tel que :

$$A(\mathbf{u}) = f \quad (3.5)$$

avec A un opérateur différentiel défini par le problème. Connaissant plusieurs solutions, nous pouvons construire un modèle réduit par projection sur une certaine base à définir. Si l'excitation est modifiée, les solutions du problème seront modifiées et donc, la base de projection pour la construction du modèle réduit sera différente.

D'autres méthodes, considérées comme faisant partie des modèles *a priori*, ne nécessitent aucune connaissance préalable de la solution. Le modèle réduit est alors construit à partir des propriétés des opérateurs du système, ou encore même à partir de l'équation. Par exemple, les méthodes modales sont construites à partir de la recherche des valeurs propres de l'opérateur A . Ainsi, une modification de l'excitation initiale n'aura pas d'effet sur la base choisie.

Dans tous les cas, les méthodes de réduction de modèle par projection peuvent se définir par le schéma 3.1. Une fois la discrétisation du problème étudié formulée par

$$A^h(\mathbf{u}_h) = f^h \quad (3.6)$$

sur l'espace \mathcal{W} , on projette soit le problème continu 3.5, soit le problème discret (3.6) sur une base de taille réduite, ce qui permet d'obtenir le problème

$$A_r(\mathbf{u}_r) = f_r \quad (3.7)$$

dans l'espace \mathcal{W}_r de taille très inférieure à celle de \mathcal{W} .

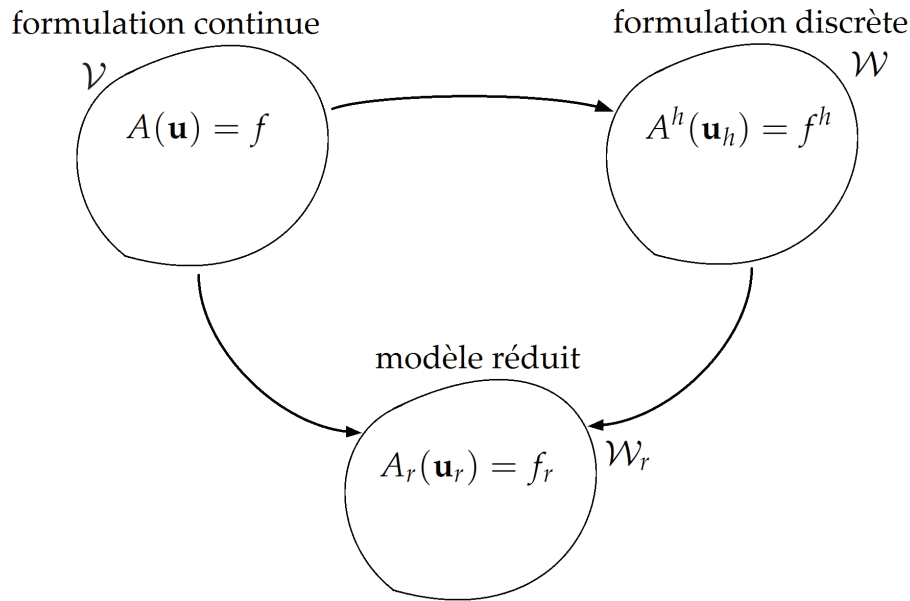


FIGURE 3.1 – Principe de la réduction de modèle par projection

Nous proposons ci-dessous une description de différentes méthodes de réduction par projection qui nous permettront dans un premier temps de nous attarder sur des méthodes de réduction devenues classiques pour des domaines d'étude fixe, puis de présenter des approches relativement récentes adaptées à l'étude de domaines mobiles au cours du temps et plus précisément aux problèmes d'interaction fluide-structure.

3.2.1 Les méthodes de réduction pour les problèmes linéaires

3.2.1.1 Réduction par méthode modale

Une première approche de la réduction de modèle pour les problèmes linéaires consiste à considérer la méthode modale basée sur la recherche des valeurs propres d'un problème lié à l'équation. Prenons par exemple le problème linéaire de vibrations d'une structure. Soit $x_s(t)$ le déplacement de la structure avec $t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}^+$, M la matrice de masse et K la matrice de rigidité, avec M et K appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le problème s'écrit :

$$M \frac{d^2 x_s}{dt^2} + K x_s = F \quad (3.8)$$

Les matrices M et K sont symétriques définies positives. On construit alors le problème aux valeurs propres suivant : trouver les vecteurs $\Psi \in \mathbb{R}^n$ et les valeurs propres associées λ solutions de :

$$K\Psi = \lambda M\Psi \quad (3.9)$$

Ce problème présente les propriétés suivantes :

- ▷ Les valeurs propres sont positives, on peut donc écrire $\lambda_i = \omega_i^2$ pour chaque valeur propre λ_i , $i = 1, \dots, n$.
- ▷ Il est possible d'ordonner les valeurs propres par ordre croissant
- ▷ Les vecteurs propres obtenus forment une base de \mathbb{R}^n

▷ On a $\psi_i^T M \psi_j = \delta_i^j$ et $K \psi_j = \omega_j^2 \delta_i^j$ avec δ_i^j le symbole de Kroenecker, pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Si l'on ne conserve que les q premiers vecteurs propres, associés aux q premières valeurs propres (qui sont les q plus petites valeurs propres parmi l'ensemble des valeurs propres), on écrit que x_s peut s'approcher par la décomposition :

$$x_s \simeq \Psi \mathbf{a} \quad (3.10)$$

avec $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_q)^T$. De même, on a :

$$\tilde{F} = \Psi^T F \quad (3.11)$$

Alors on peut donc écrire, pour $j = 1, \dots, q$:

$$\frac{d^2 a_j}{dt^2} + \omega_j^2 a_j = \tilde{F}_j \quad (3.12)$$

Ainsi, le modèle est réduit à la résolution d'un système de q équations avec $q \ll n$.

3.2.1.2 Les approximants de Padé

Nous proposons maintenant de nous intéresser au cas de la réduction de modèle pour les problèmes de contrôle linéaire, car un grand nombre de problèmes peuvent être écrits sous la forme d'un problème de contrôle. Dans ce cadre, les systèmes dynamiques construits peuvent être vus comme l'arrangement d'un ensemble d'entrées et de sorties, avec une fonction de transfert qui permet de décrire le système global. Si le système dynamique à résoudre s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

où la première équation représente un système dynamique linéaire, avec \mathbf{x} contenant les degrés de liberté du système, \mathbf{x} est appelée la variable d'état du système et \mathbf{y} contient les sorties du système, contenant ce que l'on appelle les variables d'intérêt du système (par exemple, des efforts, une vitesse, ...); \mathbf{u} représente l'entrée du système, qui contient le ou les paramètres à prendre en compte pour comprendre la réponse du système (cette entrée peut être une géométrie, un nombre adimensionnel, ...).

On a $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, $C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $D \in \mathbb{R}$, avec n , q , p des entiers positifs. Ainsi, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$. La fonction de transfert du système est la matrice qui relie l'entrée à la sortie; elle est notée H et est généralement écrite dans le domaine de Laplace :

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = H(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \quad (3.14)$$

où $\hat{\cdot}$ représente la transformée de Laplace et s est la variable complexe de Laplace. À l'observation du système (3.13), on peut définir formellement la fonction de transfert de la façon suivante :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.15)$$

où I est la matrice identité. Le calcul de cette matrice n'est pas possible concrètement, car le nombre de degrés de liberté peut être très important, ce qui entraîne

un calcul d'inversion de la matrice A très lourd. C'est là qu'intervient la réduction de modèle; on cherche à projeter le système dynamique sur une base permettant de réduire la taille de la matrice à inverser. Le problème est de déterminer la base convenable permettant de réduire considérablement le système, tout en gardant une bonne précision pour rester proche du système d'origine. La réduction d'un tel système consiste à construire un système de taille réduite par rapport à celle du système (3.13), soit de taille $N \ll n$. Ce nouveau système réduit peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_N(t) &= A^N \mathbf{x}_N(t) + B^N \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_N(t) &= C^N \mathbf{x}_N(t) + D^N \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

avec $A^N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $B^N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$, $C^N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^p)$, $D^N \in \mathbb{R}$ et $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_N\| \leq \varepsilon$ en choisissant $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

L'utilisation des approximants de Padé pour traiter ces problématiques de systèmes automatiques à entrée/sortie est proposée par plusieurs auteurs, par exemple Bai et Freund (1999), qui travaillent dans le cadre de l'étude de circuits RLC (association de dipôles passifs de type bobine, résistances et condensateurs). Les approximants de Padé ont été introduits à la fin du 19^{ème} siècle; l'objectif est d'approcher une fonction analytique f , de la même façon que cela est fait par l'usage des séries entières. Ces dernières sont des polynômes, tandis qu'un approximant de Padé s'écrit sous forme de fraction rationnelle de deux polynômes. Considérant ainsi la fonction de transfert $H(s)$, l'approximant de Padé $H_{p,q}$ de H au voisinage de s_0 est défini par :

$$H_{p,q}(s) = \sum_{i=1}^{p+q-1} a_i (s - s_0)^i + \mathcal{O}((s - s_0)^{p+q}) \quad (3.17)$$

c'est-à-dire que H_{p+q} et le développement limité de H au voisinage de s_0 :

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (s - s_0)^i \quad (3.18)$$

coïncident sur les $p + q$ premiers termes, avec p et q deux entiers positifs. À partir de cette définition, il est possible de réduire la taille du problème à résoudre pour calculer la fonction de transfert. En effet, puisque nous réduisons le degré de la fonction de transfert en nous arrêtant à l'ordre $p + q$, nous réduisons le nombre de degrés de liberté du système.

Dans le cas de l'étude des systèmes dynamiques linéaires, la stabilité du système est recherchée. Le défi de la construction d'un modèle réduit pour ces systèmes est donc de la conserver. Or, se basant sur deux exemples simples, nous voyons que les approximants de Padé peuvent ne pas préserver la stabilité : recherchons l'approximant de Padé $H_{0,1}$ au voisinage de $s_0 = 0$ de la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{6s + 8}{s^2 + 5s + 4} \quad (3.19)$$

On trouve $H_{0,1} = \frac{2}{1 + 0,5s}$, qui est stable. Par contre, si l'on souhaite travailler avec l'approximant de Padé $H_{0,1}$ au voisinage de $s_0 = 0$ de :

$$H(s) = \frac{18s + 8}{s^2 + 5s + 4} \quad (3.20)$$

cette fois, on a $H_{0,1} = \frac{2}{1-s}$ qui fournit un système entrée-sortie instable puisque son pôle admet une partie réelle positive. Cet exemple simple illustre la raison pour laquelle des techniques ont depuis été mises en place afin de préserver la stabilité et la "contrôlabilité" du système dynamique : dans le paragraphe suivant, la méthode dite de "troncature équilibrée" en est un exemple. Il est à noter également que l'utilisation des approximants de Padé ne permet pas toujours de réduire efficacement les systèmes les plus gros et n'est pas adaptée au cas des problèmes non linéaires.

3.2.1.3 La méthode de troncature équilibrée

Dans le but de conserver les caractéristiques de stabilité et de "contrôlabilité" du système linéaire, une méthode nommée "troncature équilibrée", ou *balanced truncation* en anglais (Moore 1981) est proposée. Pour cette méthode, on introduit les matrices grammiennes, l'une dite de *contrôlabilité* et définie comme suit :

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (3.21)$$

Et l'autre est dite matrice d'*observabilité* :

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad (3.22)$$

Elles sont obtenues par la résolution des équations de Lyapounov :

$$\begin{cases} AW_c + W_c A^T + B B^T = 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Les critères de contrôlabilité respectifs et d'observabilité de ces grammiennes sont les suivants : le système étudié est dit contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité W_c est définie positive. De même, le système est observable si et seulement si la matrice d'observabilité W_o est définie positive.

En notant σ_i la racine carrée des valeurs propres λ_i de la matrice $W_c W_o$, valeurs appelées aussi valeurs singulières de Hankel :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (3.24)$$

pour $i = 1, \dots, n$ on parle de troncature équilibrée lorsque les matrices W_c et W_o vérifient :

$$W_c = W_o = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (3.25)$$

Dans ce cas, la projection du système (3.13) se fait à partir de ces matrices, et l'on tronque le système à un ordre $N \ll n$. En effet, si le système est observable et contrôlable, il existe une transformation T telle que l'on puisse écrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_N(t) = T A T^{-1} \mathbf{x}(t) + T B \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_N(t) = C T^{-1} \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.26)$$

et telle que ce système soit équilibré (on tronque aux N premières valeurs propres σ_i). $\mathbf{x}_N = T \mathbf{x}$ est le vecteur réduit contenant les variables d'état. Cette troncature équilibrée assure la construction d'un système réduit stable, d'où son intérêt pour la résolution de systèmes dynamiques linéaires de grande taille. Cependant, la résolution des équations de Lyapounov reste lourde à mettre en œuvre.

Il faut également noter que les techniques de troncature équilibrée et des approximants de Padé ne s'appliquent qu'à la résolution de systèmes linéaires, qu'ils soient scalaires ou matriciels. Leur application à des problèmes de types écoulement fluide ou interaction fluide-structure nécessite donc obligatoirement une linéarisation des équations.

D'autres techniques existent pour définir la projection sur une base de taille réduite, comme par exemple la méthode de Krylov, qui permet d'effectuer une projection sur les sous-espaces de Krylov engendrés par les matrices de contrôlabilité et d'observabilité.

3.2.2 Les méthodes de réduction pour les problèmes non linéaires

L'étude des problèmes non linéaires *via* la réduction de modèle est également très usitée, puisque les temps de calcul peuvent être très importants (présence d'opérateurs de grande taille, pas de temps restreint en cas de calcul instationnaire, etc.). Nous présentons ici, sans exhaustivité, quelques méthodes de réduction de modèle adaptées aux équations non linéaires.

3.2.2.1 La méthode de Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)

La méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres, ou POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) est l'une des techniques de réduction de modèle les plus prisées actuellement. Elle peut être vue soit comme une compression de données efficace, soit comme une méthode permettant d'écrire des modèles d'ordre réduit optimaux (au sens énergétique) pour de nombreuses applications. C'est dans le cadre de cette utilisation que nous nous plaçons pour nos travaux. La méthode POD prend également le nom de décomposition de Karhunen-Loève.

La méthode POD fait partie de la famille des méthodes spectrales. En effet, elle se base sur la transformation du problème initial comportant n degrés de liberté en un problème aux valeurs propres. De la résolution de ce dernier, on extrait des fonctions de base constantes, que l'on associe à des variables réduites dépendantes du temps afin d'approcher la solution du problème dit "complet", c'est-à-dire le problème de taille n . C'est le choix des modes propres, qui constituent les fonctions de base, qui distingue les méthodes spectrales entre elles.

Dans le cas de la méthode POD, l'approche est empirique. En effet, la construction des modes propres se fait à partir de la collecte de données issues soit de campagnes expérimentales, soit de calculs existants sur le problème étudié. Une certaine quantité N de clichés (aussi désignés par l'anglicisme *snapshots*) est ainsi placée dans une matrice de corrélation, à partir de laquelle on résout un problème aux valeurs propres. Les vecteurs propres extraits constituent la base POD.

Parmi les modes propres POD, on ne conserve que les N premiers associés aux N plus grandes valeurs propres, avec $N \ll n$, grâce à un critère permettant d'indiquer quels sont les modes dont la contribution énergétique est prépondérante. La méthode POD est dite optimale au sens où elle est la méthode qui permet de minimiser l'erreur de reconstruction des données par le modèle réduit.

Une description détaillée de la méthode se trouve dans la partie 4.1 : c'est cette technique que nous choisissons pour traiter les problèmes de réduction de modèle, notamment en l'adaptant à l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure.

Holmes et al. (1996) recensent un grand nombre de travaux ayant été effectués avec l'aide de la méthode POD comme outil de réduction de modèle. Malgré la diversité des domaines où la POD est exploitée, elle trouve un essor particulier dans le domaine de la mécanique des fluides numérique du fait de l'efficacité de la réduction elle-même mais également de la qualité de la reconstruction des écoulements, même complexes (Couplet et al. (2005), Iollo et al. (2000) par exemple). Chinesta (2009) propose des applications de la méthode pour des problèmes de mécanique des structures.

3.2.2.2 Méthode POD *a priori*

Ryckelynck (2002) est le premier à proposer l'application de la méthode POD *a priori*, appelée approche APR-POD. Cette technique a pour intérêt de ne pas nécessiter de calcul complet fournissant les données pour la construction de la base réduite, contrairement à la méthode POD qui se base sur des échantillons de données initiales (issues de calculs complets ou de banques de données expérimentales).

Cette technique *a priori* diffère de la POD habituelle par la construction de sa base. Pour la POD habituelle, on a vu que cette base est construite à partir d'un échantillon temporel. Ici, la méthode *a priori* (ou APR pour A Priori Reduction) consiste à partir d'une base arbitraire, puis à corriger et enrichir si besoin cette base de façon itérative, jusqu'à ce qu'elle décrive correctement (moyennant un critère bien choisi) la solution approchée sur l'intervalle de temps considéré. Ainsi, nul besoin de connaître un comportement préalable du système. Cette méthode est présentée et appliquée dans la thèse de Verdon (2007), notamment aux équations de Navier-Stokes.

Les étapes de cette méthode sont décrites ci-après, pour l'approximation $u_h(x, t)$ d'un champ $u(x, t)$.

L'itération APR courante est indiquée k , le nombre de modes dans la base à cette itération est N_k . Le nombre total de coefficients temporels sur l'intervalle de temps complet $[0, T]$ étudié est M , nous notons alors les coefficients temporels $\mathbf{a}(t_m)$, pour $m = 1, \dots, M$ avec $\mathbf{a}(t_m) = \{a_n(t_m)\}_{n=1, \dots, N_k}$. Le domaine physique est constitué de N points.

- **Initialisation de la base réduite.** Verdon (2007) préconise l'utilisation de la condition initiale du problème pour le premier vecteur de la base, ce qui est plus physique et permet généralement une convergence plus rapide.
- On se place à l'itération k de l'algorithme : de la même manière que pour la méthode POD habituelle, on construit le **modèle d'ordre réduit** et on détermine les coefficients temporels. On note ici $\{\psi_n^j\}_{j=1, \dots, N_k ; n=1, \dots, N}$ la base correspondant au sous-espace de projection à l'itération k , et N_k le nombre de vecteurs de la base. Ainsi, le champ approché recherché u_h s'écrit :

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_k} a_k(t) \psi^j(x) \quad (3.27)$$

Ce champ est injecté dans les équations continues à résoudre que l'on projette sur la base $\{\psi_n^j\}_{j=1, \dots, N_k ; n=1, \dots, N}$

- **Calcul du résidu $\mathbf{R}(x, t)$** de cette projection discrète. Deux options s'offrent alors :

- si les résidus pour chaque coefficient temporel sont inférieurs en norme L^2 à un certain critère de convergence ε : la base utilisée est apte à reconstruire l'inconnue sur l'intervalle de temps considéré, l'algorithme s'arrête.
- si l'un des résidus est supérieur en norme L^2 au critère de convergence ε , c'est-à-dire si :

$$\exists t_i \text{ tel que } \|\mathbf{R}(x, t_i)\| > \varepsilon \quad (3.28)$$

c'est que la base utilisée n'est pas valide au-delà de la date t_i considérée. Il est nécessaire de la **mettre à jour** ; cette mise à jour se décompose elle-même en deux étapes qui seront décrites ci-après :

- ▷ L'**amélioration** de la base
- ▷ L'**enrichissement** de la base
- Après mise à jour de la base, on a obtenu une nouvelle base qu'il convient d'orthogonaliser (par exemple, par le processus de Gram-Schmidt).
- On reboucle le calcul des coefficients temporels avec cette nouvelle base, pour réévaluer les nouveaux résidus.
- L'algorithme s'arrête lorsque les résidus sont tous inférieurs à ε , quelle que soit la date t_i considérée.

Les étapes d'amélioration et d'enrichissement sont les suivantes :

- ▷ L'amélioration consiste à se baser sur l'étape de construction du système dynamique à l'itération courante k : les coefficients temporels a_1, \dots, a_k ont été obtenus. On construit alors la matrice de corrélation \mathcal{K} suivante :

$$K_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_i(t_m) a_j(t_m) \text{ pour } i, j = 1, \dots, N_k \quad (3.29)$$

De la résolution du problème aux valeurs propres associé à la matrice \mathbf{K} , on extrait des vecteurs propres et des valeurs propres, on effectue une troncature sur ces dernières (*via* un critère imposé par l'utilisateur) pour ne conserver que les N_p premiers vecteurs propres notés V_p avec $p = 1, \dots, N_p$. La base $\{\tilde{\psi}_n^j\}_{j=1, \dots, N_k; n=1, \dots, N}$ améliorée par ce processus est la suivante :

$$\tilde{\psi}_p = \sum_{n=1}^N \psi_n V_n^p \quad (3.30)$$

pour $p = 1, \dots, N_p$.

- ▷ L'enrichissement consiste à rajouter un mode supplémentaire à la base existante à l'itération k . Pour cela, on se base sur le résidu ne satisfaisant pas le critère de convergence que l'on note \mathbf{R}^+ et qui est tel que $\mathbf{R}^+ > \varepsilon$. Puis, on forme le sous-espace de Krylov d'ordre q qui lui est associé :

$$\mathcal{K}^q = \{\mathbf{R}^+, J\mathbf{R}^+, \dots, J^{q-1}\mathbf{R}^+\} \quad (3.31)$$

avec J la jacobienne du système initial à résoudre.

La nouvelle base obtenue à la date $k+1$ est ainsi constituée de la concaténation de la base améliorée $\{\tilde{\psi}_n^j\}_{j=1, \dots, N_k; n=1, \dots, N}$ et du sous-espace de Krylov \mathcal{K}^q . Verdon considère toujours le sous-espace de Krylov d'ordre $q = 1$.

Verdon (2007) montre la capacité de la méthode APR à fournir des résultats très intéressants sur des temps longs, en comparaison avec une méthode de réduction de modèle sans amélioration de la base au cours du temps, pour des cas

simples (équations de convection-diffusion, équation de Burgers 1D et 2D). L'application aux équations de Navier-Stokes nécessite une adaptation de la méthode, qui consiste à utiliser une approche de prédiction/correction : on calcule ainsi une base à la fois en vitesse et en pression.

Verdon observe des résultats corrects pour des écoulements stationnaires en vitesse. Le problème est que, au bout d'un certain temps, la pression oscille. Verdon attribue ces oscillations à la difficulté de la résolution de la condition inf-sup quand on effectue un enrichissement de la base. En effet, à la différence de la méthode POD pour laquelle la base est construite *a posteriori* et vérifie donc la condition d'incompressibilité, ici on a un couplage entre la base de vitesse et la base de la pression durant toute la phase d'enrichissement avant convergence. Il faut donc que, comme pour les problèmes mixtes en Elements Finis, les espaces de vitesse et de pression vérifient une condition de compatibilité inf-sup (LBB).

Une piste consiste à effectuer un enrichissement plus important sur la vitesse que sur la pression, ou encore à améliorer l'enrichissement de la vitesse par le gradient de la pression à chaque étape.

Ryckelynck et Missoum Benziane (2010) propose une modification de la méthode, effectuant le calcul du résidu seulement dans des régions d'intérêt. Cette méthode est adaptée aux problèmes non linéaires avec variables internes.

Allery et al. (2011) appliquent la méthode APR à l'équation de Burgers bidimensionnelle et montrent sa supériorité en ce qui concerne le gain de temps de calcul par rapport au schéma de Newton-Raphson. La comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode POD montre des caractéristiques similaires : des applications intéressantes pourraient voir le jour, notamment en ce qui concerne les équations de Navier-Stokes.

3.2.2.3 PGD : *Proper Generalized Decomposition*

Une autre méthode itérative, de la même famille que la méthode APR-POD dans le sens où elle est également une méthode *a priori*, est appelée la méthode PGD (*Proper Generalized Decomposition*) pour "Décomposition Propre Généralisée". Cette technique, qui trouve son origine dans le calcul des structures, a connu d'importants développements ces dernières années, notamment proposés et appliqués par Ladevèze et al. (2010), Pruliere et al. (2010) ou encore Nouy (2010). Elle se base sur la séparation des variables temporelles et spatiales. Dans le cas linéaire, la base obtenue est la base POD. Par contre, dans le cas général, il n'y a aucun lien avec un problème aux valeurs propres, malgré le nom de la méthode.

L'idée est d'effectuer une décomposition des variables pour le problème complet. Celui-ci est projeté sur des fonctions d'une seule variable, ce qui permet d'obtenir un système d'équations non linéaires. Ce système est résolu par un algorithme de point fixe, et fournit une nouvelle fonction \mathbf{u} que l'on souhaite être solution du problème. On observe le résidu obtenu par l'introduction de cette fonction dans le problème complet. Si ce résidu est inférieur à un certain ε réel, alors on considère que la solution est obtenue, sinon, on reboucle.

On cherche la solution \mathbf{u} d'une équation aux dérivées partielles décomposée selon chacune des variables, soit, généralement :

$$\mathbf{u}(x_1, \dots, x_K) \simeq \sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^K F_k^i(x_k) \quad (3.32)$$

où les x_k peuvent être les coordonnées de l'espace ou le temps, ou bien être des

paramètres du problème. Lorsque l'on travaille avec des variables dépendant de l'espace et du temps, l'objectif est de pouvoir séparer les variables spatiales et temporelles et d'écrire :

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^N X^i(\mathbf{x})T^i(t) \quad (3.33)$$

Cette séparation des variables permettant de réels gains de temps de calcul. L'étape principale de la technique est l'*enrichissement*, qui permet de calculer les nouvelles valeurs de X et T : ainsi, si à l'itération n (à laquelle le critère d'arrêt n'est pas satisfait, c'est-à-dire que le résidu reste supérieur à ε), on avait le couple de fonctions (X^n, T^n) , on cherche le couple (X^{n+1}, T^{n+1}) pour l'itération $n + 1$ suivante. Pour cela, on introduit le couple d'enrichissement (Y, S) qui représente le couple (X^{n+1}, T^{n+1}) lorsque l'algorithme de point fixe est terminé. On suppose ainsi que l'on peut écrire, à l'itération $n + 1$:

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x})T^i(t) + Y(\mathbf{x})S(t) \quad (3.34)$$

les n premiers X^i et T^i étant connus. On introduit cette expression dans le problème à résoudre, par exemple, les équations de Navier-Stokes incompressibles que l'on peut écrire sous la forme simplifiée :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathcal{F} \quad (3.35)$$

dans un domaine Ω considéré, problème auquel il faut bien sûr rajouter les conditions aux limites. En se basant sur le formalisme choisi par Dumon et al. (2011), on obtient alors, après introduction de (3.34) dans (3.35) :

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x})T^i(t) + Y(\mathbf{x})S(t)\right) = \mathcal{F} + Res^{n+1} \quad (3.36)$$

avec Res^{n+1} le résidu dû à l'approximation. Pour déterminer Y et S , on projette l'équation (3.36) d'une part sur Y , d'autre part sur S , selon la méthode de Galerkin ; c'est-à-dire que l'on force le résidu à être orthogonal à Y et S . On a donc finalement :

$$\left(\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x})T^i(t) + Y(\mathbf{x})S(t)\right), Y\right) = (\mathcal{F}, Y) \quad (3.37)$$

et

$$\left(\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x})T^i(t) + Y(\mathbf{x})S(t)\right), S\right) = (\mathcal{F}, S) \quad (3.38)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 . Ces deux dernières équations sont résolues simultanément, grâce à un algorithme de point fixe. Une amélioration de cette méthode, appliquée par Dumon et al. (2011) qui traitent les équations de Navier-Stokes, consiste à considérer le cas où le résidu est orthogonal à chacune des fonctions de la décomposition. Ils montrent les performances de la méthode pour un calcul bidimensionnel. Pour un cas tridimensionnel, l'avantage de la méthode est moins marqué en ce qui concerne le temps de calcul, du fait de la nécessité de la résolution de l'équation de Poisson pour la pression et de la gestion de la condition inf-sup. En effet, comme pour la méthode APR, cette condition n'est pas garantie et il est nécessaire d'enrichir fortement la base en compensation.

3.2.3 Conclusion

Dans cette partie, nous avons posé le cadre dans lequel nous nous plaçons pour étudier la réduction de modèle : l'idée est de chercher un espace de dimension faible par rapport à celui du problème de départ, afin de décrire la physique étudiée de façon moins coûteuse mais assez précise. Quelques techniques de réduction de modèle efficaces pour les problèmes linéaires ou non linéaires ont été présentées. La méthode POD est particulièrement adaptée à l'étude des écoulements fluides et ses améliorations *via* l'APR ainsi que sa généralisation avec par exemple la PGD sont autant de possibilités encourageantes pour la poursuite de son utilisation de façon avancée. Dans le cadre de ce travail, nous souhaitons utiliser une méthode de réduction de modèle qui soit validée pour les équations de Navier-Stokes. Le chapitre 4 sera ainsi consacré à la description de la POD et à son utilisation pour des écoulements dans des configurations d'intérêt pour notre problématique. La partie suivante 3.3 est consacrée à la construction de modèles d'ordre réduit pour l'interaction fluide-structure.

3.3 RÉDUCTION DE MODÈLE PAR PROJECTION POUR L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les méthodes de réduction de modèle qui permettent de traiter des cas de domaine mobile au cours du temps. En effet, cet aspect induisant le traitement d'un maillage mobile, voire d'une variation de l'interface, reste un défi aujourd'hui. Là encore, nous pouvons distinguer deux grandes familles de techniques. Les premières conservent un domaine fixe, tandis que les secondes se concentrent sur le traitement du mouvement du domaine.

Étant donné que nous allons être amenés à étudier les vibrations d'une structure sous écoulement, il sera utile de prendre en compte les intérêts et les limites de chacune de ces méthodes pour notre cas d'étude.

3.3.1 Les méthodes à domaine fixe

Un premier volet de méthodes de réduction de modèle adaptées à des problématiques d'interaction fluide-structure consiste à considérer le domaine d'étude fixe, avec une modification de l'écriture des équations pour prendre en compte le déplacement du domaine mobile (une structure dans un fluide, une interface mobile, une déformation de domaine, etc.). Plusieurs méthodes se rangent dans cette catégorie, comme les techniques de linéarisation des équations, la méthode dite de transpiration ou encore le procédé consistant à changer de repère pour écrire le système dynamique.

3.3.1.1 Méthodes de linéarisation

Les modèles réduits sont aujourd'hui de plus en plus plébiscités dans le domaine de l'aéroélasticité. En effet, c'est un domaine dans lequel les calculs pour la mécanique des fluides sont très largement développés, mais aussi pour lequel les ressources nécessaires à la mise en place de ces calculs sont colossales. Les études paramétriques, l'optimisation de formes, l'étude en fatigue et rupture des structures soumises à un chargement en pression et plus largement l'étude du comportement aéroélastique des profils portants ont largement contribué à l'essor des méthodes d'ordre réduit (on citera par exemple l'étude d'éléments de turbomachines (Placzek 2010), de profils d'ailes (Marsden et al. 2007), d'un avion complet (Lieu et al. 2006) ou de profils portants hydrodynamiques (Ducoin 2008), ...).

Le défi de l'étude d'un système couplé fluide/structure en aéroélasticité revêt plusieurs aspects, notamment le fait que les nombres de Reynolds auxquels l'écoulement du système couplé est soumis sont souvent très élevés. Cependant, il en découle que les échelles de temps ne sont pas les mêmes entre la dynamique du fluide et celle de la structure : c'est pourquoi on peut, sous certaines conditions, considérer que le couplage fluide-structure est *faible* : l'utilisation d'un domaine fluide fixe y est donc adaptée.

Pour un domaine fluide seul, on peut construire une base à partir des vecteurs propres de l'opérateur des équations de Navier-Stokes linéarisées, comme le proposent Dowell et Hall (2001). Cependant, cette technique reste lourde dès que le nombre de degrés de liberté du système est élevé.

Lors de l'étude d'un système couplé fluide-structure, il faut résoudre de façon itérative les équations de la dynamique du fluide et du solide, en gérant le couplage entre les deux. Les équations étant non linéaires, leur résolution n'est pas

évidente. Dans le cas d'un fluide compressible, Barone et al. (2009) proposent l'écriture linéarisée de l'équation d'Euler, pour $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, 1/\rho, p)^T$ le vecteur des variables d'état (vitesse du fluide, volume spécifique, avec ρ la masse volumique, et pression) en décomposant \mathbf{u} en une partie moyenne et une partie fluctuante (cette dernière est notée \mathbf{q}') :

$$\begin{cases} \mathbf{q}(x, t) = \bar{\mathbf{q}}(x, t) + \mathbf{q}'(x, t) \\ \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + \mathcal{L}\mathbf{q}' = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

avec \mathcal{L} un opérateur linéaire. Déjà, cette linéarisation permet de diminuer les temps de calcul par rapport à la résolution totalement non-linéaire. À partir de ces équations, un modèle POD-Galerkin est construit. De la même façon, on peut écrire un modèle réduit pour la structure à partir des équations habituelles. Les termes sources des deux équations sont couplés, ce qui fournit un modèle réduit que l'on peut écrire sous la forme (Barone et al. 2009) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{F}} \\ \dot{\mathbf{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

où les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} proviennent du modèle réduit fluide et les matrices \mathbf{C} et \mathbf{D} du modèle réduit solide. Le système (3.40) contient les conditions de couplage à l'interface fluide-structure.

De façon similaire, Lieu et al. (2006) proposent, en partant du problème couplé fluide-structure non linéaire, d'écrire une linéarisation du problème au voisinage d'une configuration donnée de la position de la structure. On a donc le système à résoudre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + H\mathbf{u}_f + E\frac{\partial x}{\partial t} + Gx = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + C\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + K_s\mathbf{u}_s = P\mathbf{u}_f \\ x = K\mathbf{u}_s \end{cases} \quad (3.41)$$

où \mathbf{u}_f désigne le champ de vitesse du fluide, \mathbf{u}_s le déplacement du solide et x la position de l'interface. Dans la première équation, on peut alors remplacer x en fonction de \mathbf{u}_s et rechercher des clichés pour le champ de vitesse associés à une solution de type exponentielle du déplacement de la structure. On obtient alors un système d'ordre réduit couplé fluide-structure du type (3.40). Les résultats obtenus par Lieu et al. pour l'étude de l'écoulement autour d'un avion complet (F-16) sont très corrects.

Ces techniques peuvent ainsi avoir un intérêt pour l'étude des vibrations sous écoulement, bien que restant limitées aux cas des petits déplacements d'une structure.

3.3.1.2 Méthode de changement de repère pour les mouvements de corps rigide

Une autre approche pour un écoulement compressible autour d'une structure en déplacement consiste à se placer dans le repère lié au solide. Cette approche est notamment proposée par Placzek (2010) qui étudie l'écoulement d'un fluide compressible visqueux autour d'un profil amené à se déplacer de façon harmonique et cherche à proposer un contrôle de l'écoulement. L'hypothèse d'un mouvement de corps rigide est faite dans le cadre de son étude. L'objectif de Placzek est de construire un modèle d'ordre réduit permettant d'approcher des phénomènes

d'écoulements aérodynamiques au sein des turbomachines, phénomènes délicats à reproduire de par la complexité de la géométrie ainsi que par les conditions extrêmes de fonctionnement. La partie étudiée de la turbomachine est un secteur de roue aubagée, sous un écoulement non-linéaire, visqueux, compressible et avec des effets tridimensionnels.

Placzek propose d'écrire la formulation des équations du fluide dans le repère entraîné, c'est-à-dire dans le repère lié à la structure en déplacement. En effet, dans certains cas d'écoulement, on peut constater un écoulement stationnaire lorsque l'on se place dans le repère de la structure mobile, alors que l'écoulement est instationnaire dans le repère absolu. Des termes supplémentaires sont alors rajoutés aux équations de Navier-Stokes afin de tenir compte des effets du mouvement de la structure. Les clichés utilisés pour ensuite construire un modèle réduit par la méthode POD sont construits avec cette formulation, couplée avec la méthode ALE.

Le domaine fluide est d'abord considéré comme ayant des frontières fixes, afin de choisir un schéma de stabilisation numérique adéquat pour améliorer la réponse du système dynamique d'ordre réduit (voir la partie 4.2 pour des précisions sur les méthodes de stabilisation du système dynamique). Afin de contourner la problématique de l'interaction fluide-structure, c'est-à-dire du mouvement de la structure dans le domaine fluide et donc du traitement du déplacement de l'interface, Placzek propose de considérer un mouvement de corps rigide (sans déformations) et de formuler les équations dans le repère entraîné associé au mouvement : le domaine spatial reste alors fixe. Il est possible de formuler le système dynamique d'ordre réduit POD soit à partir de la vitesse dans le repère absolu, soit à partir du champ de vitesse relatif au domaine en mouvement.

Le jeu de variables utilisées pour l'écriture des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement n'est pas le jeu de variables conservatives habituel

$$(\rho, \rho \mathbf{u}, e) \quad (3.42)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, \mathbf{u} son champ de vitesse et e l'énergie totale du système, mais avec les variables qualifiées de *primitives modifiées* (Vigo 2000) :

$$(\vartheta, \mathbf{u}, p) \quad (3.43)$$

où $\vartheta = 1/\rho$ est le volume pour une unité de masse et p la pression ; ce jeu de variables permet d'écrire un système dynamique sous forme polynomiale. On modifie également les équations pour travailler non pas avec la vitesse absolue \mathbf{u} mais la vitesse relative \mathbf{u}_r .

La réponse d'un profil portant est testée avec cette méthode à laquelle une stabilisation du système est rajoutée, et les résultats semblent encourageants. Cette technique est bien adaptée aux problèmes d'aéroélasticité dans le cas où les structures soumises à un écoulement sont dans un milieu non confiné et permet de simplifier considérablement les calculs. De plus, la formulation couplée reste relativement simple à mettre en œuvre. Cependant, lorsque l'on considère un solide se déplaçant dans un domaine confiné, comme c'est le cas pour les vibrations de tubes au sein d'un faisceau d'échangeur de chaleur, il n'est pas possible d'utiliser cette méthode puisque les bords fixes autour de la structure en mouvement deviennent alors mobiles.

3.3.1.3 Méthode d'introduction de conditions aux limites fictives

Bourguet (2008), qui travaille dans le cadre de la mécanique des fluides compressibles, propose une technique de réduction de modèle par POD-Galerkin pour l'étude d'un écoulement autour d'un profil portant pouvant se déformer grâce à l'introduction de conditions aux limites fictives. Pour cela, il considère une petite déformation $\delta\gamma_i$ de l'interface Γ_i fluide/structure. En première approximation, le champ de vitesse \mathbf{u} en un point x de Γ_i après la déformation peut s'écrire :

$$\mathbf{u}(x, \delta\gamma_i) = \mathbf{u}(x, 0) + \frac{\partial \mathbf{u}(x, 0)}{\partial \gamma_i} \delta\gamma_i \quad (3.44)$$

où $\mathbf{u}(x, 0)$ est la condition aux limites pour le cas non déformé. Bourguet propose l'introduction de la formule de Hadamard qui fournit une expression de $\frac{\partial \mathbf{u}(x, 0)}{\partial \gamma_i}$ sur la frontière. La formule d'Hadamard est donnée par l'écriture suivante, pour une fonction g dépendante de la position de la frontière Γ :

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\int_{\Gamma} g(\gamma) d\sigma \right] \delta\gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\gamma)}{\partial \gamma} \delta\gamma d\sigma + \int_{\Gamma} [\nabla_{\mathbf{n}} g(\gamma) + Cg(\gamma)] \delta\gamma d\sigma \quad (3.45)$$

où σ désigne ici une mesure de la frontière Γ , C est la courbure locale de la frontière et $\nabla_{\mathbf{n}}$ est le gradient normal à la frontière. Alors, en supposant qu'il est possible d'écrire les conditions aux limites telles que l'on ait $\mathbf{u}(x, 0) = 0$ pour $x \in \Gamma_i$, on arrive finalement à :

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial \mathbf{u}(x, 0)}{\partial \gamma_i} \delta\gamma_i \psi(x) d\sigma = - \int_{\Gamma_i} \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x, 0) \delta\gamma \psi(x) d\sigma \quad (3.46)$$

avec ψ une fonction-test dans l'espace des fonctions recherchées. Ceci donne :

$$\mathbf{u}(x, \delta\gamma_i) \simeq -\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}(x, 0) \delta\gamma \quad (3.47)$$

pour tout $x \in \Gamma_i$. L'introduction de ces conditions aux limites fictives dans le modèle complet permet alors de collecter des clichés provenant de la configuration déformée mais pour lesquels les modes POD seront valides, puisque la géométrie n'est pas modifiée par rapport au cas initial. Ainsi, à partir de clichés issus de la configuration initiale et de la configuration déformée, Bourguet construit un modèle réduit valable pour plusieurs déformations intermédiaires, grâce à la capacité prédictive du modèle réduit POD.

3.3.2 Méthodes à domaine mobile

Nous présentons ici des méthodes de réduction de modèle adaptées aux cas où le domaine d'étude est mobile au cours du temps. La réduction peut ainsi avoir lieu sur le processus de suivi de l'entité déplacée (par exemple, les méthodes Multi-POD et la POD dite adaptative cherchent à réduire le processus de déplacement du maillage). On peut également effectuer la réduction sur l'étude directe du problème physique avec prise en compte du déplacement du domaine : c'est ce que propose la technique POD-multiphasique.

3.3.2.1 Méthode Multi-POD

Anttonen et al. (2003) s'attaquent au problème de la déformation de maillage couplée à la réduction de modèle. Ce problème apparaît largement dans les cas d'études d'interaction fluide-structure, dès lors que les données permettant de construire le domaine sont issues de calculs numériques traités avec une technique de remaillage, comme par exemple avec la méthode ALE.

Anttonen et al. proposent une variante de la méthode POD pour le traitement des écoulements dans un cas de maillage mobile. Dans un premier temps, ils montrent la forte influence de la déformation du maillage sur la qualité du résultat, en comparant une solution analytique à deux études séparées menées avec la méthode Snapshot POD : la première utilise un maillage qui se déplace en bloc autour d'une structure (donc pour lequel il n'y a aucune déformation du maillage) et la seconde se base sur un maillage libre de se déformer selon les déplacements de la structure. L'application de la méthode POD habituelle sur ces deux études montre que le second cas nécessite un plus grand nombre de modes POD pour reconstruire correctement l'écoulement.

Cette dégradation des résultats (pour le même nombre de modes considérés) due à la présence de déformations du maillage trouve son origine dans le fait que les clichés utilisés pour construire la base POD (base contenant des vecteurs spatiaux ne dépendant pas du temps) sont capturés pour différentes configurations du maillage puisque les coordonnées de chaque noeud sont modifiées au cours du temps, alors que ces dernières ne sont pas considérées ensuite dans la construction de la base.

Alors, Anttonen et al. proposent l'utilisation d'une technique qu'ils appellent "Multi-POD", qui permet non seulement de fournir des bases POD issues de problèmes indépendants dont chacun représente une déformation du maillage, mais aussi et surtout de choisir la base POD qui convient le mieux pour représenter la déformation au temps voulu. C'est-à-dire que, pour un problème donné, ils calculent autant de bases POD (dites "indépendantes") que de déformations potentielles du maillage. Une fois qu'ils ont constitué cette "base de bases", au lieu de projeter les équations du problème complet sur toute cette grande base (ce qui, Anttonen et al. le montrent, n'améliore pas la précision des résultats par rapport aux problèmes indépendants), ils effectuent le calcul d'une métrique permettant de faire le suivi de la déformation relative du maillage. La position des noeuds du maillage est stockée durant le calcul de toutes les bases POD indépendantes. Ainsi, l'utilisateur peut, grâce à l'observation de l'erreur de déformation, faire le meilleur choix parmi les bases indépendantes pour reproduire au mieux l'écoulement pour une gamme large de situations de déformation.

Pour définir le changement de la base, l'idée est la suivante : on compare l'erreur de grille relative et l'erreur du modèle réduit. Pour cela, on introduit une matrice modale de grille Φ_G grâce à des snapshots extraits sur les différentes positions pré-calculées (à la même date que sont extraits les snapshots de vitesse), de la même façon que pour un calcul POD classique. Cette matrice représente l'ensemble des mouvements de grille durant les calculs initiaux. On écrit le maillage \mathbf{x} comme une combinaison linéaire des clichés de maillages $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x} = \Phi_G \hat{\mathbf{x}} \quad (3.48)$$

ce qui donne, par inversion et modification afin d'avoir un système de taille carrée : $\hat{\mathbf{x}}$ comme :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\Phi_G^T \Phi_G)^{-1} \Phi_G^T \mathbf{x} \quad (3.49)$$

Puis, on définit une erreur acceptable pour le modèle réduit, ce qui donne un seuil d'acceptabilité également pour le maillage déformé. L'erreur e est définie comme :

$$e(x) = \mathbf{x} - (\Phi_G^T \Phi_G)^{-1} \Phi_G^T \mathbf{x} \quad (3.50)$$

Si le seuil est dépassé, c'est qu'il faut changer la base POD (passer à une autre des bases POD pré-calculées) pour adapter le modèle réduit au problème.

Anttonen et al. (2005) proposent également l'application de la méthode Multi-POD au cas des vibrations d'un profil d'aile sous écoulement moyen. Ils calculent des bases POD pour les différents régimes (amortissement, cycle limite et instabilité) afin d'avoir un panel de modes permettant d'étudier un large spectre de configurations.

Cette technique représente un grand intérêt pour les problématiques de design et d'optimisation de forme par exemple, mais également pour les études d'interaction fluide-structure. Elle nécessite cependant le calcul de plusieurs bases, ce qui a un coût initial ; cependant, elle est robuste pour un grand nombre de cas étudiés.

3.3.2.2 Une méthode POD adaptative

Bogaers (2010) propose l'utilisation de la méthode POD pour traiter des algorithmes de déplacement de maillage avec plus de rapidité. En effet, dans l'étude numérique d'un problème d'interaction fluide-structure, le temps de calcul nécessaire au remaillage est parfois prépondérant dans le temps de calcul global. À partir de différentes techniques de remaillage, Bogaers suggère d'observer les effets de l'implémentation de la méthode POD.

Le recours à plusieurs techniques de remaillage est proposé par Bogaers (2010). Ces techniques sont décrites dans la partie 1.3 : la méthode d'interpolation des fonctions de base radiales (FBR), la méthode d'optimisation de la qualité du maillage et enfin la technique consistant à considérer le déplacement des noeuds comme régi par les équations de l'élasticité linéaire.

Afin de mettre en place la méthode POD, il est nécessaire de constituer une base de données contenant les snapshots qui servent à la construction de la base POD. Or, cette première phase est coûteuse, puisque cette base de données doit être assez riche pour contenir la plupart des positions des noeuds du maillage. Il est donc nécessaire de lancer au préalable des calculs complets permettant de récolter l'ensemble des données. Bogaers propose, afin d'éviter cette étape, de construire directement une base de snapshots sans passer par la phase d'échantillonnage du calcul complet. Pour cela, l'utilisation de la méthode LHS (Latin Hypercube Sampling) est utilisée. Elle permet de générer une distribution de collections de valeurs des paramètres étudiés (ces paramètres ici sont les translations et rotations du maillage) : ainsi, un échantillonnage est formé. Il suffit ensuite de conserver assez de snapshots pour avoir une bonne base POD.

Se référant aux trois techniques de remaillage sus-citées, Bogaers construit un algorithme de réduction de modèle basé sur la méthode POD. Cet algorithme est le suivant : après création de M snapshots, une base POD est construite de façon classique. On peut donc écrire :

$$\mathbf{x} \simeq \sum_{i=1}^M \alpha(x_b)_i \Phi_i \quad (3.51)$$

où \mathbf{x} est le maillage recherché (contenant les coordonnées des nœuds), $\alpha(x_b)$ représente les coefficients d'expansion recherchés (les x_b sont les coordonnées des points du maillage sur le bord du domaine) et les Φ_i sont les modes POD. Par l'introduction d'une fonction objectif J sur les n coordonnées du maillage :

$$\min_{\mathbf{x}}(J(\mathbf{x})), \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \quad (3.52)$$

on souhaite finalement résoudre, en remplaçant (3.51) dans (3.52), le problème de taille réduite $M \ll n$:

$$\min_{\alpha}(J(\mathbf{x}(\alpha))), \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}^T \quad (3.53)$$

Ainsi, avec la méthode d'interpolation des FBR, on détermine les coefficients α recherchés. Il est possible de devoir considérer les coefficients temporels ainsi obtenus comme des coefficients de départ pour ensuite appliquer la méthode d'optimisation de la qualité du maillage. L'utilisation de la méthode de déformation élastique est abandonnée, la méthode d'interpolation des FBR fournissant des résultats suffisamment satisfaisants.

Afin de se passer complètement de la production de snapshots au début du calcul, Bogaers propose ensuite une méthode POD adaptative, qui se rapproche des techniques *a priori* comme la méthode APR-POD par exemple. En effet, la méthode POD adaptative est basée seulement sur la connaissance du maillage initial dans sa configuration non déformée et sur le premier pas de temps du calcul complet, avec déformation du maillage. La base POD constituée à partir de ces renseignements est utilisée sur les pas de temps suivants, jusqu'à détérioration de la qualité du maillage. Une fois le seuil de qualité outrepassé, la technique d'optimisation de la qualité est mise en place : les résultats obtenus permettent de fournir un cliché supplémentaire à l'échantillon initial. La base POD est alors reconstruite à partir de ce nouvel échantillonnage, puis on itère et ce, jusqu'à ce que l'on arrive à la date de fin de l'intervalle de temps étudié.

Les résultats obtenus avec cette méthode sont très intéressants, tant du point de vue du gain de temps de calcul que de celui de la qualité du maillage obtenue. Bogaers (2010) montre qu'également, la valeur seuil de la qualité du maillage peut être rendue adaptative, en la baissant légèrement par rapport à celle de l'étape d'optimisation précédente. De même, le nombre de modes POD est adaptable à chaque pas de temps par l'observation du critère énergétique. La technique de POD adaptative ainsi proposée semble très intéressante, Bogaers suggère que les étapes d'amélioration de la base POD, malgré le fait qu'elles rajoutent un coût au temps de calcul, restent préférables à la constitution préalable d'un échantillon de snapshots. Ceux-ci sont en effet parfois mal choisis, peuvent être en nombre trop élevé ou, au contraire, insuffisant. La POD adaptative peut être appliquée à tout code de calcul possédant déjà son propre algorithme de remaillage, notamment dans le but d'effectuer des calculs rapides qui peuvent fournir une première vision sur le comportement du système étudié.

3.3.2.3 Méthode POD-multiphasique

L'approche dite multiphasique pour l'application de la méthode snapshot POD à un problème d'interaction fluide-structure trouve sa justification dans la définition même de la méthode snapshot POD. En effet, si l'on revient à la définition de cette méthode, on constate qu'elle se base sur la collecte d'un échantillon

temporel de données spatiales issues soit de l'expérience, soit d'un calcul préalable. C'est cet ensemble de données qui permet de constituer la base des modes POD sur lesquels est projeté le système dynamique afin de construire un modèle réduit viable. Or, la base POD se construit à partir de données spatiales sur le système étudié. Par exemple, dans le cas de l'utilisation d'une simulation numérique préalable, la vitesse de l'écoulement aux noeuds du maillage. Ainsi, si la position même des noeuds du maillage évolue au cours du temps, il est nécessaire de se poser la question de la validité des données spatiales récoltées, comme l'ont fait remarquer Anttonen et al. (2003) - ce qui a d'ailleurs justifié la mise en place de leur méthode Multi-POD.

Lors de l'étude d'un écoulement seul sans mouvement de structure, les valeurs du champ de vitesse du fluide sont échantillonnées pour un maillage fixe et unique : la base POD est construite sur ce maillage afin de permettre la prédiction de l'écoulement.

Cependant, dans le cas d'un problème d'interaction fluide-structure initialement résolu grâce à une simulation numérique utilisant des méthodes de remaillage ou encore la méthode ALE aujourd'hui très répandue, le maillage est modifié à chaque pas de temps. Lorsque l'on désire construire une base POD à partir d'un tel type de données, l'échantillon est formé de la façon suivante : le premier cliché de vitesses sur le domaine d'étude Ω est constitué d'un tableau V_1 de valeurs de la vitesse aux noeuds du maillage à l'instant t_1 de la prise du cliché, soit le maillage m_1 , puis d'un tableau V_2 de valeurs de la vitesse aux noeuds du maillage à l'instant suivant $t_2 = t_1 + \Delta t$, qui est un nouveau maillage m_2 et ainsi de suite jusqu'au dernier cliché à l'instant t_M . Lors de la construction de la base POD, les différents tableaux V_1, V_2, \dots, V_M sont rassemblés dans le tenseur des corrélations dont on détermine les valeurs et vecteurs propres. Mais à aucun moment dans la résolution du problème aux valeurs propres n'est pris en compte le fait que les clichés de vitesses sont définis pour des maillages différents, ce qui fait perdre à la base sa validité : le tenseur des corrélations spatiales effectue des corrélations entre des clichés de la vitesse dont les valeurs sont prises en des points différents. Avec une telle méthode, lorsque l'on observe la zone proche de l'interface fluide-structure, il est possible d'effectuer une corrélation inexistante en réalité : par exemple, le champ de vitesse du fluide peut être évalué à un instant sur un noeud sur lequel, à l'instant suivant, se trouve le solide !

Un exemple simple de l'échec de reconstruction de la solution par la base POD ne tenant pas compte du déplacement du maillage se trouve dans la thèse de Liberge (2008). Liberge, s'appuyant sur les travaux de Glowinski et al. (1994) propose une approche dite "multiphasique" afin de gérer le déplacement de la structure au cours du temps tout en appliquant la méthode POD avec une base valable. Pour cela, il distingue deux étapes. La première concerne la construction de la base POD. À partir d'un domaine défini contenant le fluide et la structure, noté Ω et étant un domaine global, Liberge définit un champ de vitesse global pour l'ensemble des points du domaine, l'idée étant de se ramener à un domaine fixe pour pouvoir construire une base POD de modes spatiaux. Le champ de vitesse vaut la valeur du champ fluide sur la partie fluide $\Omega_f(t)$ et la valeur des déplacements du solide sur la partie solide $\Omega_s(t)$. À partir de ces champs, Liberge (2008) suggère d'interpoler, pour chaque instant retenu, l'ensemble des champs de vitesse issus des snapshots sur un maillage fixe et unique de référence et d'appliquer ensuite la méthode des snapshots pour les champs de vitesses interpolés sur ce maillage,

comme le proposent Utturkar et al. (2005). Ainsi, il est possible de construire une base POD de modes spatiaux.

La question qui se pose est alors la suivante : comment écrire les équations du problème dans le domaine global Ω pour un champ de vitesses global afin de le projeter sur la base POD construite précédemment ? L'idée, proposée à l'origine par Glowinski et al. (1994), est d'écrire les équations de manière monolithique, c'est-à-dire en résolvant en même temps les équations du fluide et de la structure, avec un solide considéré comme suivant un mouvement de corps rigide et un fluide, l'ensemble étant vu comme un fluide comportant deux phases. Afin de distinguer la phase solide de la phase fluide, la contrainte d'indéformabilité du solide est imposée, et les caractéristiques physiques (masse volumique, viscosité) ne sont pas les mêmes selon le domaine : c'est l'application de la méthode de pénalisation. Il devient alors possible de construire un modèle réduit pour la résolution du système dynamique.

L'intérêt principal de cette méthode est donc que l'on peut construire une base POD valable pour la réalisation d'une étude sur un problème d'interaction fluide-structure avec un modèle réduit et ce, même pour de grands déplacements ou des déformations du solide.

3.3.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'appréhender la réduction de modèle en tant que méthode d'ordre réduit par projection. Son application à l'interaction fluide-structure constitue un défi provenant de la complexité intrinsèque à la résolution d'un problème couplé fluide-structure. Cependant, certaines techniques semblent offrir d'une part des allègements ponctuels dans la gestion du calcul couplé (avec notamment les méthodes de réduction pour le remaillage, comme la POD adaptative), d'autre part, des solutions efficaces pour la résolution du domaine fluide couplé faiblement et en petits déplacements du solide (méthodes à domaine fixe, modification des conditions aux limites) et enfin, efficaces pour l'étude de mécanismes avec des mouvements de grande ampleur et un couplage fluide-structure fort (méthode POD multiphasique par exemple).

L'approche POD multiphasique nous semble la plus adaptée à l'étude des vibrations sous écoulement au sein d'un faisceau de tubes pour envisager les instabilités. Aussi, nous proposons une description plus détaillée de cette méthode, agrémentée d'exemples d'application dans le chapitre 5.

CHOIX D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION : LA DÉCOMPOSITION ORTHOGONALE AUX VALEURS PROPRES (POD)

4.1 LA MÉTHODE POD : ÉTAT DE L'ART ET DESCRIPTION

4.1.1 Débuts de la méthode

L'utilisation de la méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) en mécanique des fluides trouve son origine notamment dans les travaux de Lumley (1967). D'autres auteurs avant lui ont déjà proposé des travaux se basant sur le même principe (Obukhov 1954). Lumley donne une définition "constructive" des structures cohérentes à partir des fonctions de la POD. Comme cela est présenté dans la partie 3.2.2.1, la POD a d'abord été employée comme méthode d'analyse de données. Cette approche se retrouve aujourd'hui dans nombre de travaux de compression de données et de traitement d'images. C'est avec l'apparition d'une variante de cette méthode, appelée *Snapshot POD* introduite par Sirovich (1987), que la POD s'est imposée parmi les différents moyens de réduction de modèles, spécialement en mécanique des fluides. La Snapshot POD s'appuie sur la recherche aux valeurs propres d'un opérateur lié aux corrélations non pas spatiales mais temporelles, ce qui permet encore de réduire la taille du problème à résoudre. Les deux méthodes (POD dite "classique" utilisant les corrélations spatiales et Snapshot POD) sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

L'étude des problématiques de contrôle optimal amène également à se pencher sur l'utilisation de la méthode POD (Bergmann et Cordier (2008) par exemple).

4.1.2 Description de la méthode pour la mécanique des fluides incompressibles

4.1.2.1 Contexte et notions prérequis

Dans cette partie, le contexte de travail est présenté et une rapide revue des notions nécessaires à la compréhension de la mise en place de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres est proposée. Pour cela, nous présentons d'abord les différents outils mathématiques utilisés, puis le principe général de la réduction de modèle est détaillé. Nous nous plaçons dans le contexte de la mécanique des fluides incompressibles ; pour le cas des fluides compressibles étudiés avec la méthode POD, on se référera par exemple aux travaux de Bourguet (2008).

On considère un domaine fluide nommé Ω , un ouvert de \mathbb{R}^3 . L'écoulement est décrit par la vitesse instantanée $\mathbf{u}(x, t)$ pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}^+$.

Notations

Lorsque l'on écrit qu'un champ \mathbf{u} est dans l'espace $L^2(0, T; H(\Omega))$, cela signifie que pour tout $t \in [0, T]$, on a $\mathbf{u}(t) \in H(\Omega)$ (où $H(\Omega)$ est un espace de Hilbert) tel que $\int_{[0, T]} \|\mathbf{u}(t)\|_H^2 < \infty$.

La moyenne temporelle d'une fonction de l'espace et du temps $f(x, t)$ est notée et représentée par :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt \quad (4.1)$$

on la note également $\langle \cdot \rangle$ pour des raisons de simplicité typographique.

Le produit scalaire dans $H(\Omega)$ est noté (\cdot, \cdot) s'il n'y a pas de confusion possible. Sinon, on l'indice sous la forme $(\cdot, \cdot)_H$.
Le module d'un vecteur est noté $|\cdot|$.

4.1.2.2 La méthode POD

On suppose le champ de vitesse $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H(\Omega))$. L'espace $H(\Omega)$ peut être par exemple l'espace des fonctions de carré intégrable L^2 , mais qui peut tout aussi bien être un autre espace, par exemple l'espace $H^1(\Omega)$.

On cherche un champ stationnaire dans $H(\Omega)$ qui soit le plus proche du champ \mathbf{u} au sens de la norme énergétique et en moyenne sur $[0, T]$. Ceci signifie que l'on cherche à minimiser la distance entre les deux champs, ce qui revient à maximiser la valeur de la moyenne de la projection du champ \mathbf{u} sur un vecteur Φ . On cherche donc à déterminer :

$$\max_{\Phi \in H(\Omega)} \langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle \quad (4.2)$$

sous la contrainte $\|\Phi\|^2 = 1$. On introduit la fonctionnelle suivante :

$$J(\Phi) = \langle |(\mathbf{u}, \Phi)|^2 \rangle - \lambda(\|\Phi\|^2 - 1) \quad (4.3)$$

avec λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\|\Phi\|^2 = 1$. Une condition nécessaire de l'optimalité de la projection est de définir un extremum pour J , c'est-à-dire d'annuler sa dérivée. On note δJ la dérivée de J suivant la direction $\delta\Phi$ où $\delta\Phi$ est une variation quelconque de Φ . On cherche ainsi à vérifier :

$$\delta J = 0 \quad (4.4)$$

soit encore :

$$\langle (\mathbf{u}, \Phi)(\mathbf{u}, \delta\Phi) \rangle - \lambda(\Phi, \delta\Phi) = 0 \quad (4.5)$$

que l'on peut écrire comme étant :

$$\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle \Phi, \delta\Phi = \lambda(\Phi, \delta\Phi) \quad (4.6)$$

où \otimes est le produit tensoriel.

On introduit alors l'opérateur R associé au tenseur des corrélations spatiales en deux points : ce dernier, que l'on note C , est défini comme :

$$C(x, y) = \langle \mathbf{u}(x, t) \mathbf{u}(y, t) \rangle \quad (4.7)$$

On note R l'opérateur associé à C tel que pour tout $\Phi \in H(\Omega)$ on ait :

$$\begin{aligned} R : H(\Omega) &\longrightarrow H(\Omega) \\ \Phi &\longrightarrow R\Phi \end{aligned}$$

Avec $R\Phi$ défini par :

$$R\Phi(x) = (C(x, \cdot), \Phi) \quad (4.8)$$

Exemples :

– Si l'on choisit $H = L^2$ (ce qui est très souvent le cas) on a :

$$R\Phi(x) = \int_{\Omega} \langle \mathbf{u}(x, t), \mathbf{u}(y, t) \rangle \Phi(y) dy \quad (4.9)$$

– Si l'on choisit $H = H_{\varepsilon}^1(\Omega)$ où $H_{\varepsilon}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$ muni du produit scalaire $(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \varepsilon \sum_{n=1}^n (\partial_{x_n} u, \partial_{x_n} v)$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$R\Phi(x) = \int_{\Omega} \langle \mathbf{u}(x, t) \mathbf{u}(y, t) \rangle \Phi(y) dy + \varepsilon \int_{\Omega} \langle \partial_x \mathbf{u}(x, t) \partial_y \mathbf{u}(y, t) \rangle \Phi(y) dy \quad (4.10)$$

La définition de R nous ramène à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$R\Phi = \lambda\Phi \quad (4.11)$$

On montre que R est autoadjoint non négatif. En effet,

$$\begin{aligned} (R\Phi, \Phi) &= ((\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle, \Phi), \Phi) \\ &= (\langle (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \Phi) \rangle, \Phi) \\ &= \langle (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \Phi), \Phi \rangle \\ &= \langle (\mathbf{u}, \Phi), (\mathbf{u}, \Phi) \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Comme R est un opérateur compact symétrique non négatif, grâce au théorème de Hilbert-Schmidt, on peut extraire une suite décroissante vers zéro de valeurs propres positives à laquelle est associée une suite de vecteurs propres orthogonaux $\{\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, solution du problème (4.11) et formant une base hilbertienne de $H(\Omega)$. Les fonction propres obtenues sont indifféremment appelées fonctions propres empiriques, fonctions de base empiriques et fonctions orthogonales empiriques ou modes POD. Les valeurs propres de ce problème sont classées dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire :

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, \infty \quad (4.13)$$

Le champ $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H(\Omega))$ peut s'écrire¹ :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \Phi_i(x) \quad (4.14)$$

1. où $a_i(t) = (\mathbf{u}(\cdot, t), \Phi_i)$

En pratique, comme le problème de maximisation pour chaque Φ_i , avec i allant de 1 à l'infini, revient à choisir les modes POD associés aux plus grandes valeurs propres, on effectue une troncature sur les M premiers modes :

$$\mathbf{u}(x, t) \simeq \sum_{n=1}^M a_n(t) \Phi_n(x) \quad (4.15)$$

Les coefficients a_i , $i = 1, \dots, M$ sont définis comme étant :

$$a_i = (\mathbf{u}, \Phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (4.16)$$

Ces coefficients sont décorrelés, ils vérifient :

$$\langle a_i a_j \rangle = \lambda_i \delta_i^j \quad (4.17)$$

sans sommation sur les indices répétés et avec δ_i^j le symbole de Kronecker.

Optimalité de la base POD

La base POD $\{\Phi_n\}_{n=1, \dots, M}$ est optimale au sens énergétique. Cela signifie que pour toute base hilbertienne orthonormée $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $H(\Omega)$ et pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\langle \|\mathbf{u} - \sum_{n=1}^M (\mathbf{u}, \Phi_n) \Phi_n\|^2 \rangle \leq \langle \|\mathbf{u} - \sum_{n=1}^M (\mathbf{u}, \Psi_n) \Psi_n\|^2 \rangle \quad (4.18)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\sum_{n=1}^M \langle a_n \rangle^2 = \sum_{n=1}^M \lambda_n \leq \sum_{n=1}^M \langle b_n \rangle^2 \quad (4.19)$$

avec $b_n = (\mathbf{u}, \Psi_n)$ pour tout $n = 1, \dots, M$.

Propriétés de la méthode POD

Récapitulons les propriétés intéressantes de la base POD :

- ▷ Les valeurs propres représentent les fractions de l'énergie totale que, par simplification de langage, on considère comme étant l'énergie des modes qui leur sont associés.
- ▷ L'erreur induite par la troncature de la base correspond à la somme des valeurs propres des modes négligés :

$$\langle \|\mathbf{u} - \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i\|^2 \rangle = \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \quad (4.20)$$

Cette relation permet de définir un critère de troncature des modes les plus énergétiques. Le critère le plus souvent utilisé est celui qui revient à définir le plus petit entier N tel que :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k}{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k} \leq 1 \quad (4.21)$$

avec ε petit, souvent choisi tel que l'on capture 99% de l'énergie.

- ▷ D'une manière générale, s'il existe un opérateur (ou une forme) linéaire continu \mathcal{L} défini sur $H(\Omega)$ tel que :

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = 0 \quad (4.22)$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathcal{L}\Phi_n = 0 \quad (4.23)$$

Deux cas particuliers peuvent être considérés :

- si \mathbf{u} vérifie une condition aux limites homogène sur une partie Γ du bord $\partial\Omega$ alors :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 \implies \Phi_{n|_{\Gamma}} = 0 \quad (4.24)$$

- Si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (écoulement incompressible) alors

$$\nabla \cdot \Phi_n = 0 \quad (4.25)$$

4.1.2.3 La snapshot POD

Afin d'éviter un calcul POD restant parfois lourd du fait de la grande taille du domaine spatial, Sirovich (1987) propose d'appliquer la méthode POD séparée pour un ensemble de M champs discrets relevés ou calculés au cours du temps : $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}(x, t_m)$, $m = 1, \dots, M$. Ces champs sont appelés des clichés ou *snapshots*, puisque ce sont des "photographies" du champ de vitesse tout au long de l'expérience ou d'un calcul. Sirovich propose de se baser non pas sur l'opérateur associé aux corrélations spatiales en deux points, mais de passer à un opérateur associé aux corrélations temporelles². Pour cela, on cherche les scalaires A_m tels que :

$$\Phi = \sum_{m=1}^M A_m \mathbf{u}(x, t^{(m)}) \quad (4.26)$$

On introduit pour cela l'opérateur associé aux corrélations spatiales en deux points (4.7) dans le problème aux valeurs propres (4.11). Pour une illustration claire mais sans perte de généralité, on choisit d'utiliser le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C(x, y) \Phi(y) dy &= \lambda \Phi(x) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^{(m)}(x) \mathbf{u}^{(m)}(y) \sum_{n=1}^M A_n \mathbf{u}^{(n)}(y) dy &= \lambda \sum_{l=1}^M A_l \mathbf{u}^{(l)}(x) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \mathbf{u}^{(m)}(x) A_n \frac{1}{M} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{(m)}(y) \mathbf{u}^{(n)}(y) dy &= \lambda \sum_{l=1}^M A_l \mathbf{u}^{(l)}(x) \\ \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^M B_{mn} A_n - \lambda A_m \right) \mathbf{u}^{(m)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

2. En fait, il s'agit de s'intéresser au problème dual du problème POD classique

avec $A = (A_1, \dots, A_M)$. Dans le cas où la famille $U = (\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(M)})$ est libre, on peut écrire, pour tout $m = 1, \dots, M$:

$$\left(\sum_{n=1}^M B_{mn} A_n - \lambda A_m \right) = 0 \quad (4.27)$$

Par contre, si la famille U n'est pas libre, il est nécessaire d'avoir recours à la décomposition aux valeurs singulières. De la famille des vecteurs propres $\{\Phi_n\}_{n=1, \dots, M}$ ainsi construite, on ne garde que les N premiers vecteurs associés aux valeurs propres les plus importantes, c'est-à-dire ceux vérifiant :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n}{\sum_{n=1}^M \lambda_n} \leq 1 \quad (4.28)$$

4.1.2.4 Construction d'un système dynamique d'ordre réduit pour les équations de Navier-Stokes

Pour construire le modèle d'ordre réduit, les équations de Navier-Stokes incompressibles sont projetées avec la méthode de Galerkin sur la famille $\{\Phi_n\}_{n=1, \dots, N}$. Le système est réduit puisque très souvent, on a $N \ll M$.

La projection des équations de Navier-Stokes incompressibles dans le domaine Ω de \mathbb{R}^3 sur la base POD pour le champ vectoriel de vitesse $\mathbf{u}(x, t)$ et le champ scalaire de pression $p(x, t)$, $x \in \Omega, t \in [0, T]$ où $T \in \mathbb{R}^+$ donne la formulation variationnelle suivante, sous sa forme adimensionnelle :

$$\int_{\Omega} \partial_t u \cdot \Phi_i \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \Phi_i \, dx = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \Phi_i \, dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Phi_i \, dx \quad (4.29)$$

Avec $\nabla \cdot \Phi_i = 0$ et pour $i = 1, \dots, N$.

Système dynamique pour le champ instantané

À partir de cette formulation (4.29), on injecte l'écriture de $u(x, t)$ sous la forme décomposée (4.15) pour les $N \ll M$ premiers modes et on tient compte de l'orthogonalité des modes POD. On obtient donc le système, pour tout i avec $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m C_{nmi} + \sum_{n=1}^N a_n B_{ni} + D_i \quad (4.30)$$

où l'on doit expliciter les termes C_{nmi} , B_{ni} et D_i en fonction respectivement du terme d'advection, du terme en Laplacien et enfin du terme de pression. Ainsi, on a pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
C_{nmi} &= - \int_{\Omega} ((\Phi_n(x) \cdot \nabla) \Phi_m(x) \cdot \Phi_i(x)) dx \\
B_{ni} &= - \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{D}(\Phi_n(x)) \mathbf{D}(\Phi_i(x))] dx + \\
&\quad \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\Phi_n(x)) \mathbf{n} \cdot (\Phi_i(x)) d\gamma \\
D_i &= - \int_{\partial\Omega} p \Phi_i(x) \cdot \mathbf{n} d\gamma
\end{aligned} \tag{4.31}$$

où Tr représente la trace au sens matriciel, \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine fluide Ω sur la frontière $\partial\Omega$ dont une mesure est $d\gamma$ et avec \mathbf{D} l'opérateur des taux de déformations, défini comme suit :

$$\mathbf{D}(\Phi) = \frac{1}{2} [\nabla\Phi + \nabla^T\Phi] \tag{4.32}$$

Système dynamique pour le champ fluctuant

Si l'on considère que le champ des vitesses $\mathbf{u}(x, t)$ se décompose sous la forme de la somme d'un champ moyen et de perturbations, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$\mathbf{u}(x, t) = \bar{\mathbf{u}}(x) + \mathbf{u}'(x, t) \tag{4.33}$$

où $\bar{\cdot}$ est un opérateur de moyenne et \cdot' représente les fluctuations, alors on peut intégrer cette décomposition au système décrit dans la partie précédente. Ainsi, on cherche à déterminer les coefficients temporels du champ fluctuant uniquement. L'avantage est que l'on s'affranchit du champ moyen puisque il est contenu dans la partie $\bar{\mathbf{u}}(x)$; il n'apporte pas d'information supplémentaire donc on se contente de le rajouter à la reconstruction finale du champ de vitesse. De plus, on montre (Liberge 2008) qu'il peut avoir une influence néfaste sur la détermination des coefficients temporels par le système dynamique d'ordre réduit.

Le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant $\mathbf{u}'(x, t)$ s'écrit sous la forme suivante, après avoir injecté la décomposition 4.33 dans la formulation variationnelle (4.29) :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a'_n a'_m C_{nmi} + \sum_{n=1}^N a'_n B_{ni} + D_i + E_i \tag{4.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
 C_{nmi} &= - \int_{\Omega} ((\Phi'_n(x) \cdot \nabla) \Phi'_m(x) \cdot \Phi'_i(x)) dx \\
 B_{ni} &= - \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathbf{D}(\Phi'_n(x)) \mathbf{D}(\Phi'_i(x))] dx + \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\Phi'_n(x)) \mathbf{n} \cdot \Phi'_i(x) d\gamma - \\
 &\quad \int_{\Omega} (\Phi'_n(x) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) \cdot \Phi'_i(x) dx - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi'_n(x)) \cdot \Phi'_i(x) dx \\
 D_i &= - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \Phi'_i(x) d\gamma \\
 E_i &= - \int_{\Omega} \frac{2}{\mathcal{R}_e} \text{Tr}[\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{D}(\Phi'_i(x))] dx + \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\partial\Omega} \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n} \cdot \Phi'_i(x) d\gamma - \\
 &\quad \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) \cdot \Phi'_i(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Écriture du modèle réduit à partir des équations linéarisées

Une autre façon d'écrire le système dynamique peut être envisagée : l'idée est de conserver une formulation matricielle, afin de rester plus proche de l'équation discrète qui est résolue à la base. En effet, lorsque l'on récupère les clichés issus d'un calcul complet, ce dernier est effectué grâce à la résolution d'un système matriciel lui-même provenant de la discrétisation des équations continues de Navier-Stokes. Nous proposons donc de projeter la matrice discrète utilisée dans le calcul complet sur les modes POD, afin de ne pas introduire de biais³.

Supposons que le problème discret à résoudre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A^h(\mathbf{u}_h) = f^h \tag{4.36}$$

avec A^h l'opérateur s'appliquant au champ de vitesse discret \mathbf{u}_h et f^h le second membre. Dans cette démarche, on projette directement les équations discrètes sur l'espace engendré par les vecteurs de la base POD. Alors on peut écrire :

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{a}\Phi \tag{4.37}$$

avec Φ la matrice formée par $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N)$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$. Le modèle réduit s'écrit alors simplement :

$$A_r \mathbf{a} = F_r \tag{4.38}$$

avec $A_r = \Phi^T A^h \Phi$ et $F_r = \Phi^T f^h$.

Par défaut, dans la suite des calculs nous utilisons la méthode classique de projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes, mais nous présentons l'application de la méthode matricielle pour le cas de l'écoulement autour d'un tube seul et au sein du faisceau tubulaire.

3. Cette technique n'est possible que lorsque le code de calcul utilisé pour la création des clichés est accessible. L'avantage indéniable de la technique de projection de Galerkin à partir des équations continues est que les clichés peuvent provenir d'une "boîte noire" sans que l'utilisateur ne connaisse leur origine (code de calcul, campagne d'essai, ...), ce qui est très fréquent dans le milieu industriel.

Traitement du terme de pression

On remarque que le terme D_i , dans les deux formulations (4.30) et (4.34), contient le champ de pression. Or, ce dernier n'est pas pris en compte lors de la construction de la base POD, donc aucune information sur ce champ n'est disponible. Il est possible de modéliser ce terme de pression, ou bien une alternative à cette modélisation consiste à utiliser une méthode permettant de transformer les conditions aux limites en vitesse en une relation en contraintes (Allery 2002, Batoz et Dhatt 1990).

Soit \mathbf{u}_d un champ de vitesse imposé sur une partie Γ_d de Γ_f le bord du domaine fluide, tel que :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_d} = \mathbf{u}_d \quad (4.39)$$

Cette condition peut être vue comme une limite de la condition de Neumann, quand le paramètre de pénalisation G devient grand :

$$\sigma_f \mathbf{n}|_{\Gamma_d} = G(\mathbf{u}|_{\Gamma_d} - \mathbf{u}_d) \quad (4.40)$$

L'application de cette méthode dans le système dynamique pour le champ fluctuant donne le système dynamique (4.41).

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a'_n a'_m C_{nmi} + \sum_{n=1}^N a'_n (B_{ni} + F_{ni}) + D_i + E_i \quad (4.41)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{ni} &= G \int_{\Gamma_\sigma} \Phi'_n(x) \Phi'_i(x) d\Gamma_\sigma \\ D_i &= -\frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} \text{Tr}(\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{D}(\Phi'_i(x))) dx - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \Phi'_i(x) dx \\ E_i &= G \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^{CL}) \Phi'_i(x) d\Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (4.42)$$

Les termes C et B étant les mêmes que pour le système (4.34).

4.1.3 Exemples d'application

Dans ce paragraphe, nous présentons l'application de la méthode POD directe, puis la construction du système dynamique réduit pour deux configurations étudiées : l'écoulement autour d'un tube seul puis l'écoulement confiné dans un faisceau de tubes, toutes les structures étant ici fixes.

4.1.3.1 Cylindre fixe sous écoulement transversal

Projection de l'écoulement sur la base POD

Afin d'aborder un premier cas d'écoulement autour d'une structure qui, pour le moment, reste fixe, l'écoulement autour d'un cylindre à $\mathcal{R}_e = 100$ est exploité. La discrétisation des équations de Navier-Stokes est effectuée avec la méthode des volumes finis avec le *Code_Saturne* sur un temps suffisamment long pour avoir l'obtention d'un régime établi de détaché tourbillonnaire à l'arrière du tube. À

partir de ces résultats numériques, des clichés de la vitesse instantanée sont stockés pour y effectuer la décomposition orthogonale aux valeurs propres ; d'abord la POD "directe", puis la reconstruction du système dynamique.

Les clichés, au nombre de 180, sont pris sur un intervalle de temps de 45 secondes, qui correspond à une période de la force de traînée à l'arrière du cylindre, avec une fréquence d'échantillonnage de 0.25 s ; le pas de temps entre chaque itération du calcul complet étant de $\Delta t = 0.025$. Le calcul complet comprend donc 1800 itérations, effectuées en 66 minutes et 30 secondes en calcul parallèle sur 8 processeurs.

Deux clichés des composantes de la vitesse, l'un pris au début de l'intervalle, l'autre à la date $t = 24.5$ s, sont présentés en figure 4.1. Les classiques allées de Von Karmán sont bien visibles à l'arrière du cylindre. Ces calculs sont la suite de ceux effectués dans la partie 2.2.2 pour le cas fixe.

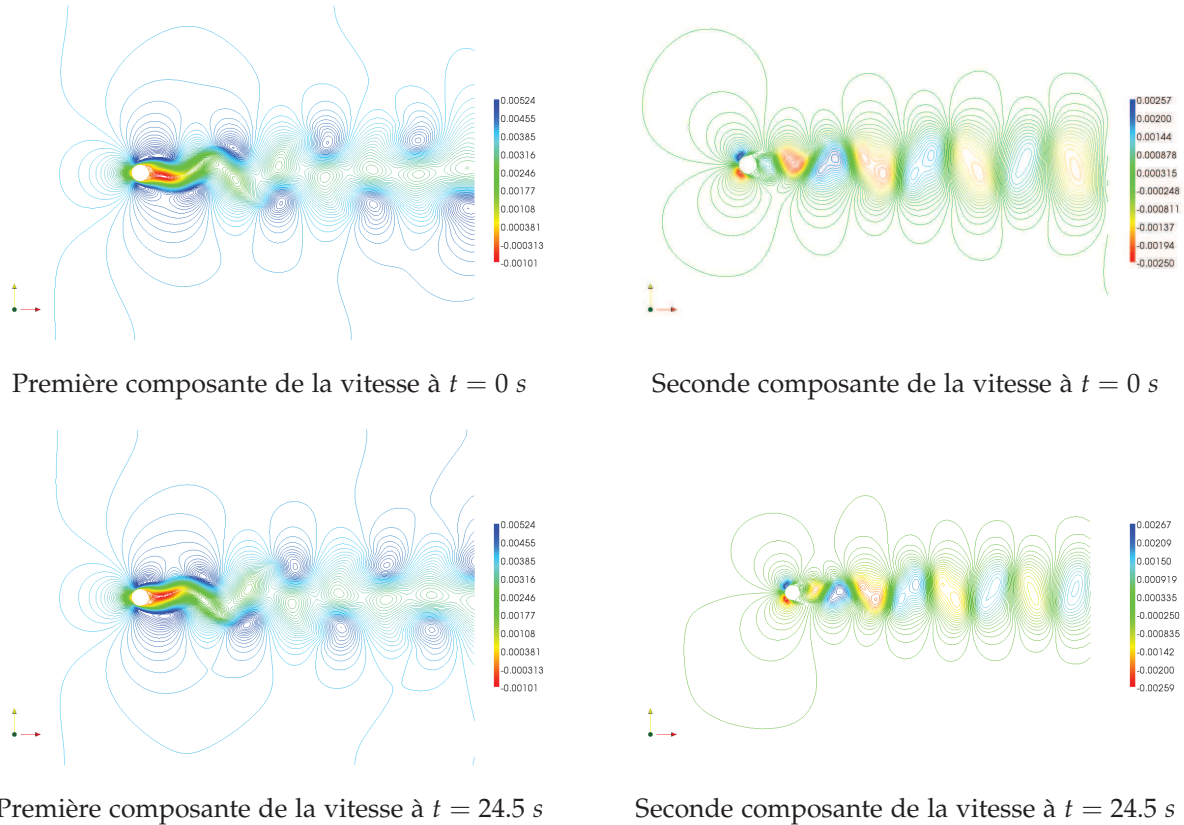


FIGURE 4.1 – Isovaleurs des deux composantes de la vitesse pour deux dates de la période d'échantillonnage

Le tableau 4.1 présente la contribution énergétique des premiers modes propres. En premier lieu, on note que très peu de modes sont nécessaires pour capturer plus de 99 % de l'énergie. En second lieu, l'observation des valeurs propres montre le "couplage" des valeurs deux à deux, excepté pour la première. En effet, le premier mode propre s'apparente à l'écoulement moyen, tandis que les suivants se rapportent aux fluctuations de l'écoulement. Le tableau 4.2 rapporte le résidu calculé en norme L^2 pour un nombre croissant de modes POD retenus pour effectuer la reconstruction de la vitesse. À partir de 7 modes, l'erreur résiduelle est inférieure

à 1%. Le même résultat était obtenu par Liberge (2008) pour la reconstruction du champ de vitesse issu d'un calcul de l'écoulement autour d'un cylindre fixe dans un canal, à $\mathcal{R}_e = 200$ effectué⁴.

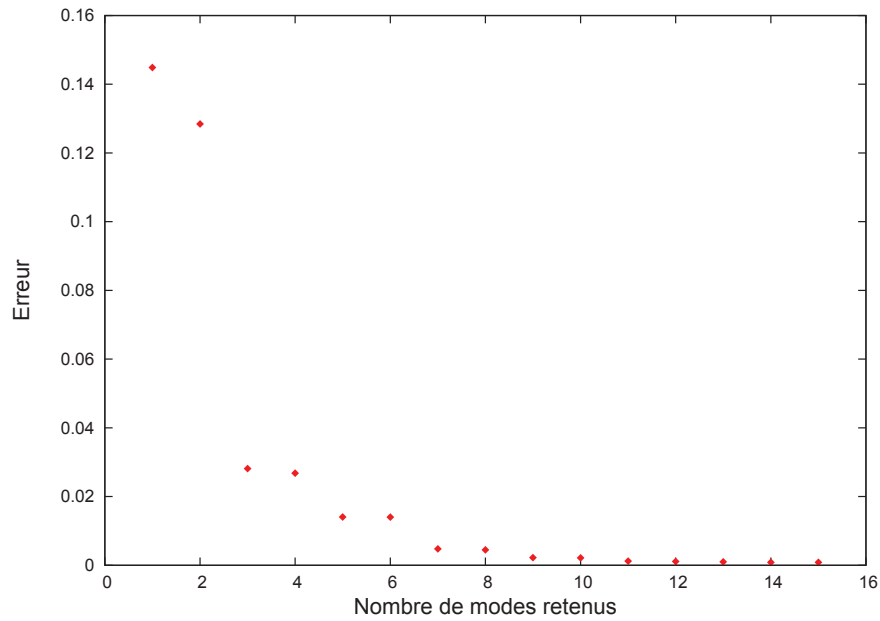


FIGURE 4.2 – Erreur résiduelle en norme L^2 de la reconstruction d'un échantillon de vitesses pour le cas de l'écoulement autour d'un cylindre fixe à $\mathcal{R}_e = 100$

| Indice de la valeur propre | Valeur propre | Pourcentage de l'énergie (%) |
|----------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1 | $9,59 \cdot 10^{-5}$ | 98.579 |
| 2 | $7,03 \cdot 10^{-7}$ | 99.302 |
| 3 | $6,22 \cdot 10^{-7}$ | 99.942 |
| 4 | $2,27 \cdot 10^{-8}$ | 99.966 |
| 5 | $2,01 \cdot 10^{-8}$ | 99.986 |
| 6 | $6,00 \cdot 10^{-9}$ | 99.992 |
| 7 | $5,77 \cdot 10^{-9}$ | 99.998 |

TABLE 4.1 – Contribution énergétique cumulée des premiers modes propres pour le cas de l'écoulement autour d'un cylindre fixe à $\mathcal{R}_e = 100$

⁴ Liberge (2008) a travaillé avec le logiciel Castem pour le calcul complet

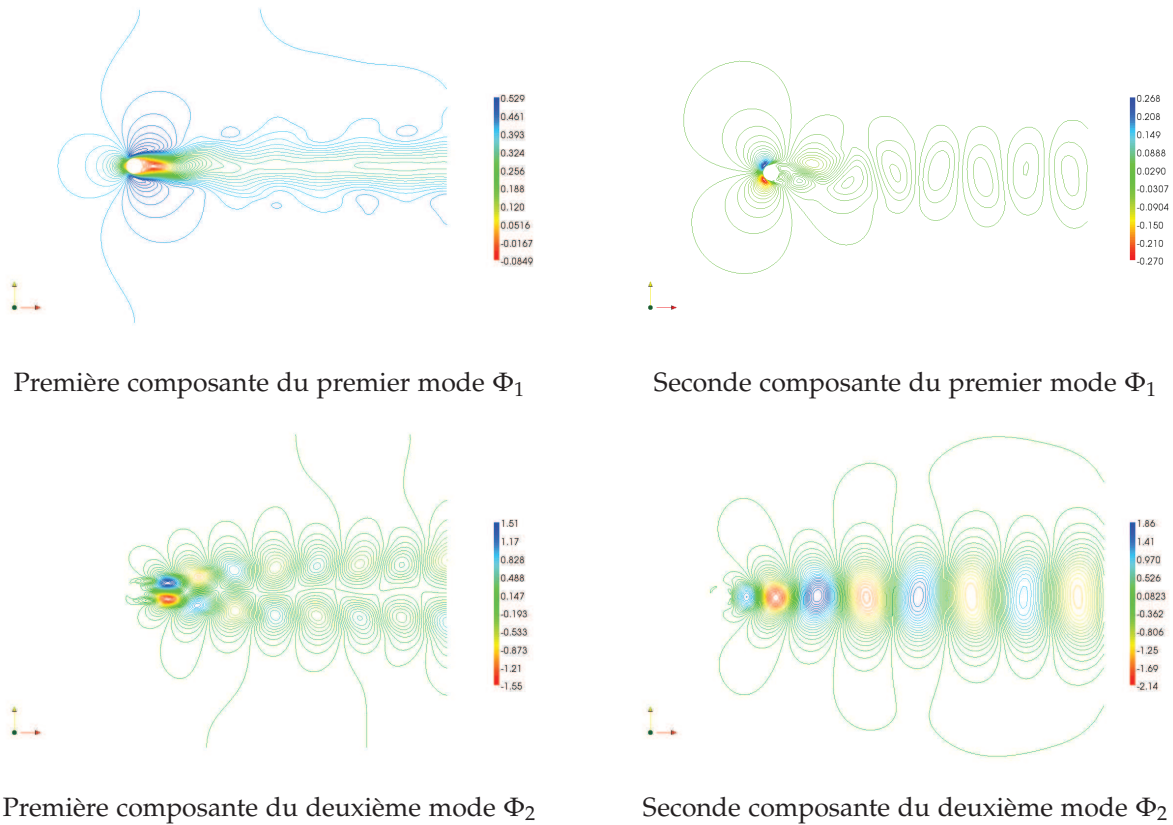


FIGURE 4.3 – Isovaleurs des deux composantes des deux premiers modes POD pour le champ de vitesses instantané

La figure 4.4 reporte les isovaleurs des premiers modes POD calculés à partir des clichés du champ de vitesse fluctuant.

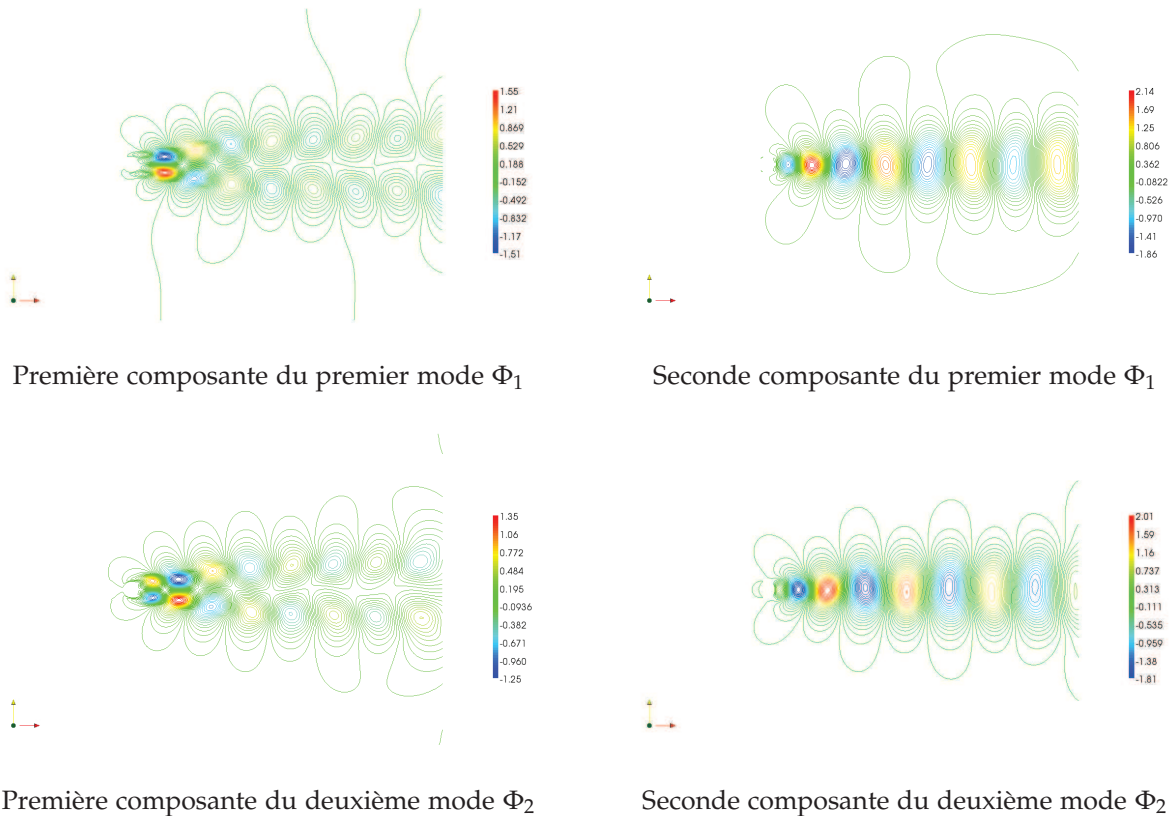


FIGURE 4.4 – Isovaleurs des deux composantes des deux premiers modes POD pour le champ de vitesses fluctuant

Le décalage d'un indice des modes propres POD entre les modes du champ instantané et du champ fluctuant est bien mis en valeur. Enfin, la figure 4.5 représente la reconstruction directe du champ de vitesse global grâce à la formule (4.16) par la POD. La reconstruction est très bonne, comme cela était attendu.

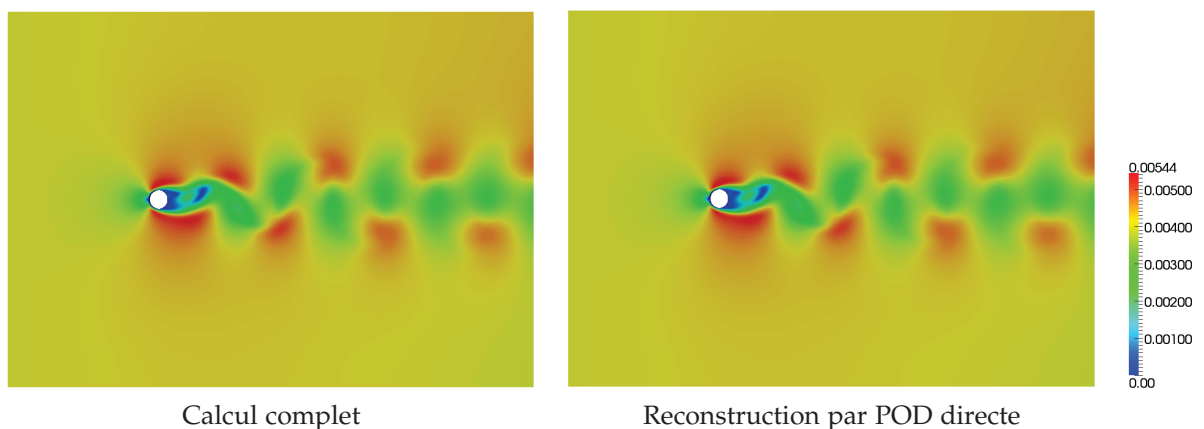


FIGURE 4.5 – Comparaison entre le champ de vitesse complet et sa reconstruction directe par POD

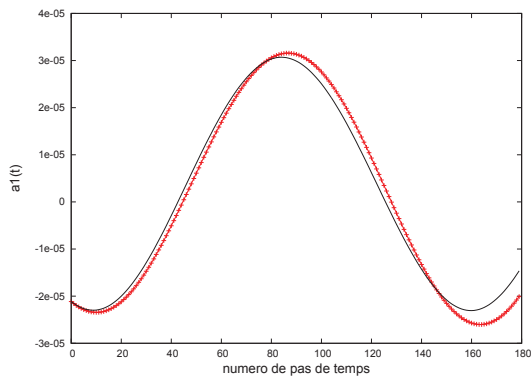
Nous nous intéressons maintenant à la construction du système dynamique d'ordre réduit pour ce cas d'étude.

Construction du système dynamique d'ordre réduit

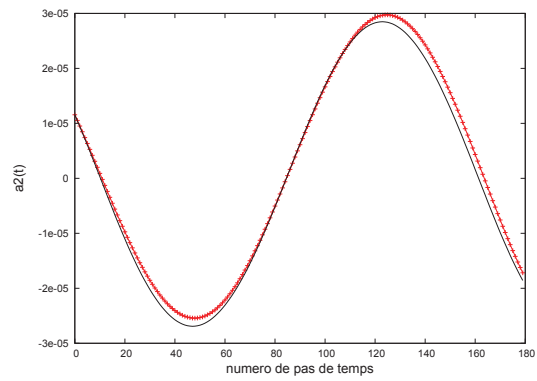
Afin de calculer le système dynamique d'ordre réduit, nous avons développé un module au sein de *Code_Saturne*. Sauf mention contraire, les calculs sont effectués pour le champ de vitesse fluctuant ; c'est-à-dire que le système résolu est le système (4.34). Le terme de pression n'est pas considéré sur les bords du domaine fluide et les termes de bord sont négligés.

On considère la résolution du système d'ordre réduit (4.34) pour le cas du cylindre seul à Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$ sur une période de l'écoulement. Une étude de sensibilité au nombre de modes est effectuée. Avec une base constituée de 15 modes, la reconstruction des deux premiers coefficients temporels est légèrement meilleure que pour les 7 modes préconisés dans l'observation de la contribution énergétique des modes effectuée dans le paragraphe précédent. Pour cette étude, nous considérons une base de 15 modes puisque le temps de calcul n'est que très peu modifié, même si un nombre plus faible serait suffisant pour reproduire déjà très correctement les caractéristiques de l'écoulement. Le calcul effectué avec 15 modes dure 6 minutes et 48 secondes quand un calcul pour seulement 6 modes dure 6 minutes et 40 secondes, le tout sur un seul processeur. On remarque l'important gain de temps de calcul par rapport à la période d'échantillonnage qui, elle, calculée en parallèle sur 8 processeurs, dépasse l'heure.

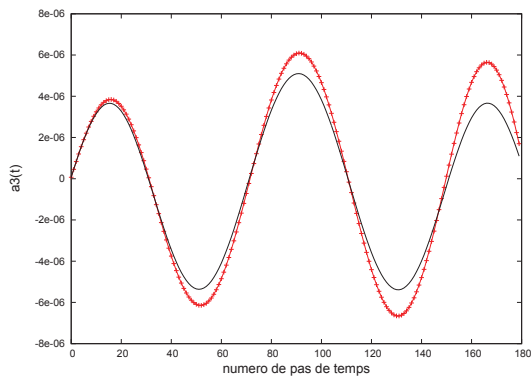
La figure 4.6 présente la reconstruction des premiers coefficients temporels pour un calcul à 15 modes POD. Sur le premier coefficient, on remarque un léger déphasage entre le coefficient temporel reconstruit et le coefficient calculé directement à partir de la base POD à la fin de l'intervalle de temps. De plus, pour les coefficients d'indice élevé, on observe une déstabilisation qui se traduit par une augmentation de l'amplitude des coefficients. Ceci semble illustrer clairement l'effet de la troncature de la base : les modes POD contenant la dissipation de l'énergie n'étant pas représentés, on assiste à une déstabilisation du système. D'autre part, comme le terme de pression et les termes de bord n'ont pas été pris en compte et que le terme de pression a lui aussi un effet stabilisateur, il est possible que sa non-prise en compte ait un effet sur l'instabilité du système. Concernant les termes de bords, nous verrons par la suite qu'il n'est pas forcément judicieux de les négliger. Cependant, le champ de vitesse global est très bien reconstruit puisque, de la même manière que sur la figure 4.5 pour la reconstruction par POD directe, on ne distingue pas de différence entre le calcul complet et la reconstruction par modèle réduit (la figure n'a donc pas été reproduite ici). Ces résultats peuvent également être améliorés *via* la stabilisation du système dynamique.



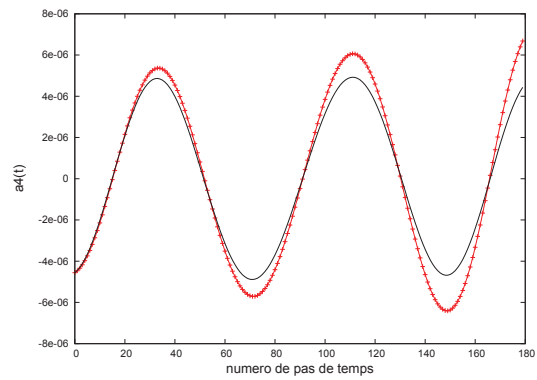
a) Premier coefficient



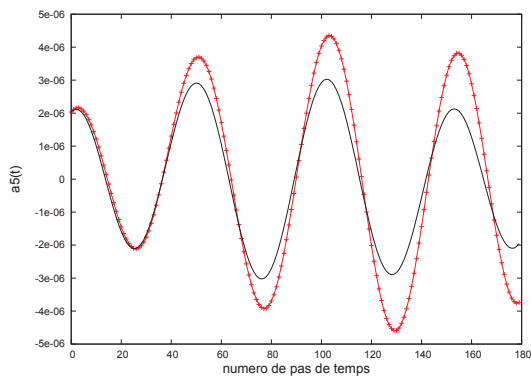
b) Deuxième coefficient



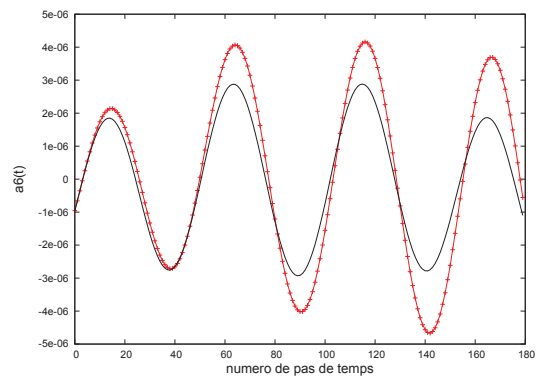
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient



e) Cinquième coefficient



f) Sixième coefficient

FIGURE 4.6 – Reconstruction des coefficients temporels par le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe ; — coefficient temporel direct ; +++ coefficient temporel reconstruit

Modèle réduit par projection matricielle

Nous proposons l'application de la méthode de projection matricielle pour le cas du tube seul sous écoulement, afin de vérifier si le fait de se conformer aux formulations internes au code de calcul utilisé nous permet d'obtenir des résultats plus proches des clichés qui ont été fournis grâce à un calcul complet avec le même code.

L'opérateur qui est discrétisé par la POD n'est pas exactement celui que l'on trouve au sein de *Code_Saturne*. En effet, dans le code, c'est un opérateur légèrement différent de celui que l'on obtient de façon analytique par discrétisation des équations de Navier-Stokes, puisque l'algorithme choisi au sein du code est un algorithme de prédiction-corrrection. L'opérateur qu'il faut projeter est donc celui qui est relié à la vitesse prédite (avant l'étape de correction par résolution de l'équation pour la pression). Nous nous basons donc sur la résolution de l'équation (2.8). On suppose que le champ de vitesse estimé peut se décomposer sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, t) \simeq \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \tag{4.43}$$

Ainsi, en suivant le formalisme (4.38), on multiplie (2.8) par la matrice des modes POD Φ et on y introduit (4.43). On considère que

$$\nabla \cdot \Phi = \{\nabla \cdot \Phi_1, \dots, \nabla \cdot \Phi_N\} = 0 \tag{4.44}$$

puisque les modes POD sont construits à partir du champ de vitesse convergé. Ceci permet d'éviter l'étape de correction : en projetant directement, on obtient les équations de Navier-Stokes discrètes linéarisées. Cependant, il est possible que le fait de négliger le terme (4.44) induise un biais dans le calcul.

On reconstruit ensuite le champ de vitesse à partir des résultats de la projection. Le champ sur lequel on travaille est donc le champ instantané et non pas le champ fluctuant. Les résultats obtenus sont présentés ci-après.

Les figures 4.8 et 4.9 représentent le champ de vitesse au cours du temps, en différents points, répertoriés sur la figure 4.7. 15 modes ont été utilisés pour cette reconstruction.

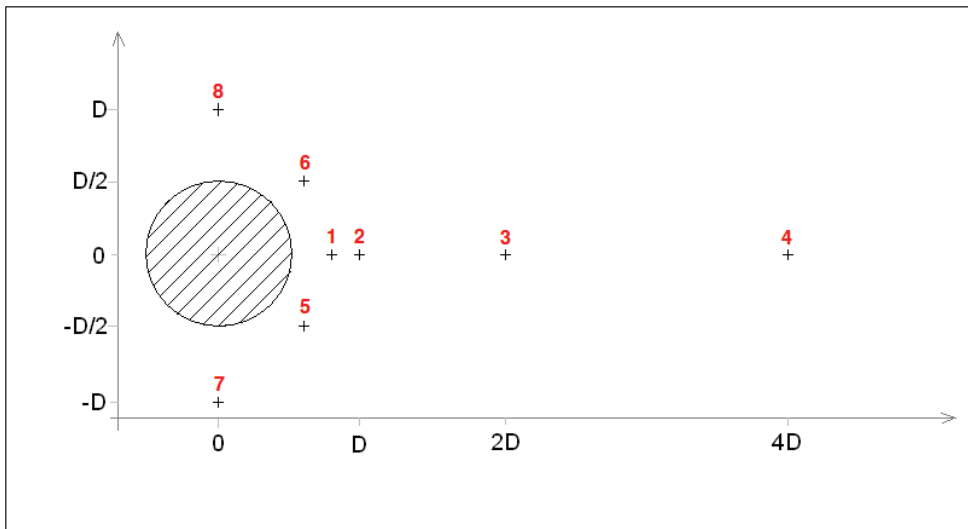


FIGURE 4.7 – Points de suivi pour l’affichage du champ de vitesse à l’arrière du cylindre

Lorsque l'on fait la comparaison de cette méthode avec la méthode POD-Galerkin habituelle, c'est-à-dire la méthode pour laquelle on effectue la projection de Galerkin dans une routine externe avec projection des équations de Navier-Stokes (ces résultats sont également présentés sur les figures 4.8 et 4.9), on remarque que les champs de vitesse ne sont pas améliorés par la projection de l'opérateur interne au code, sauf, légèrement, pour les points numéro 5, 6, 7 et 8 pour la vitesse selon x et les points numéro 7 et 8 pour la vitesse selon y . La méthode POD-Galerkin est effectuée sur le champ instantané également. Cette dernière donnant des résultats déjà corrects, il n'est pas surprenant de ne pas observer d'amélioration forte par la méthode de projection matricielle. La figure 4.10 représente la comparaison du champ global reconstruit par projection matricielle avec le champ complet à une date donnée. L'ensemble est correct, sauf dans les zones éloignées du cylindre, vers la sortie où l'on observe de légères différences.

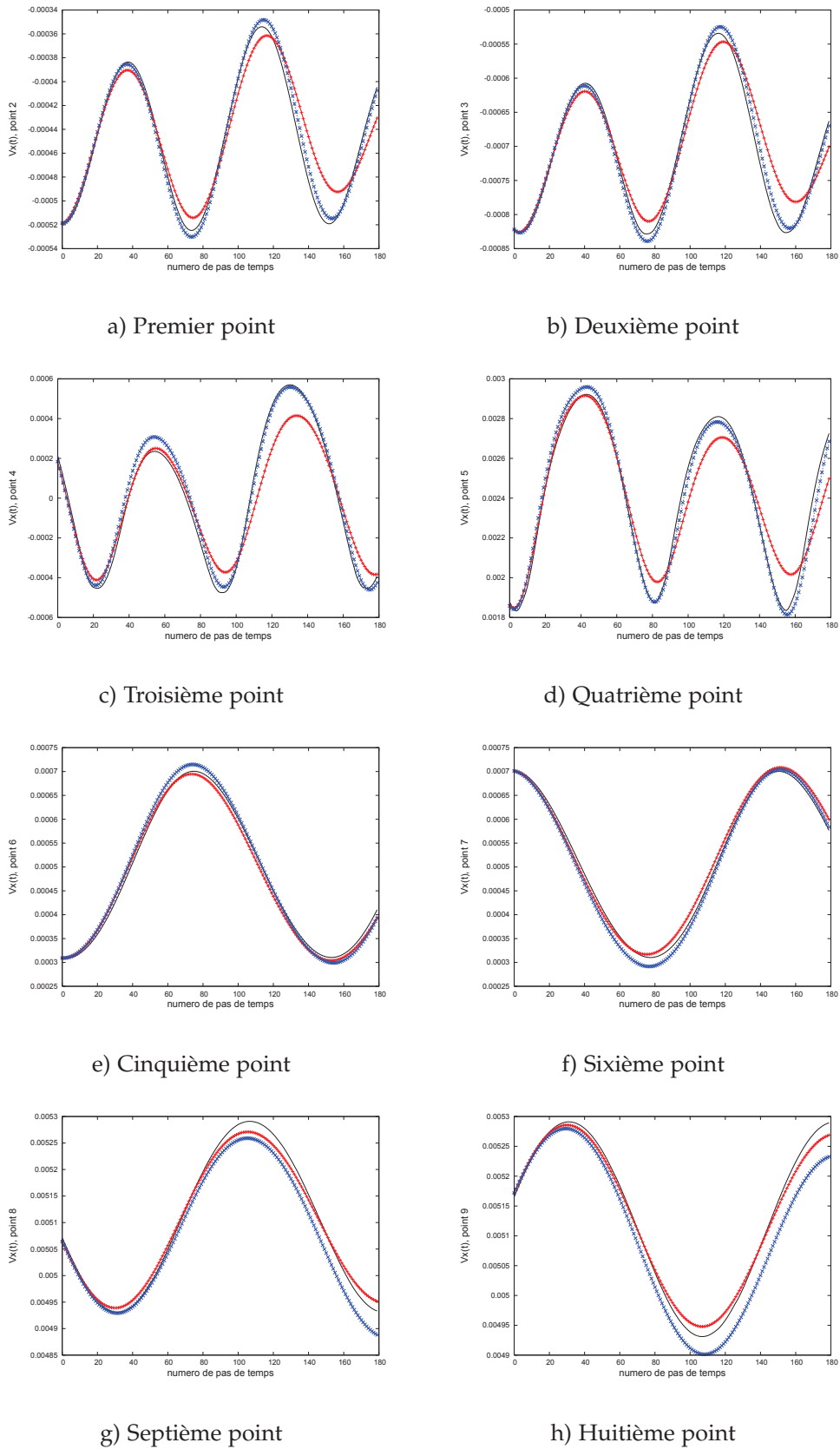
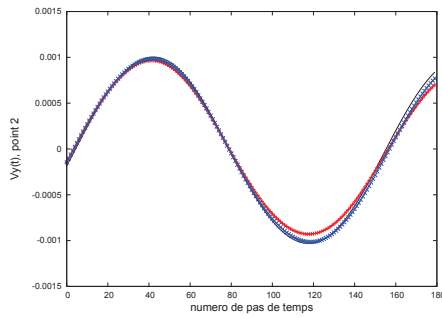
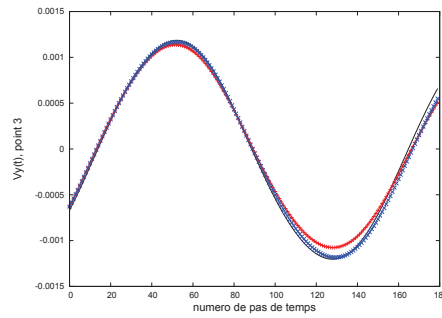


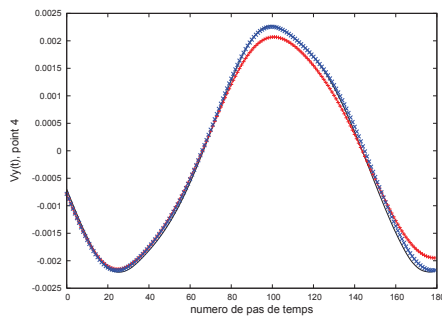
FIGURE 4.8 – Comparaison entre la vitesse selon x en 8 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du tube seul fixe et la vitesse selon x reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet; +++ Vitesse reconstruite, projection matricielle; $\times\times\times$ Vitesse reconstruite, POD-Galerkin



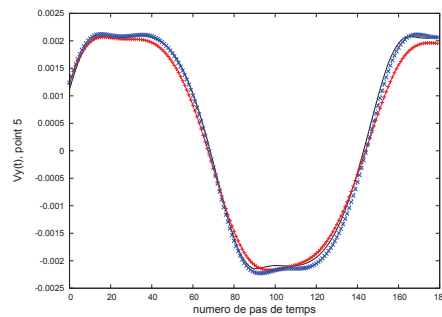
a) Premier point



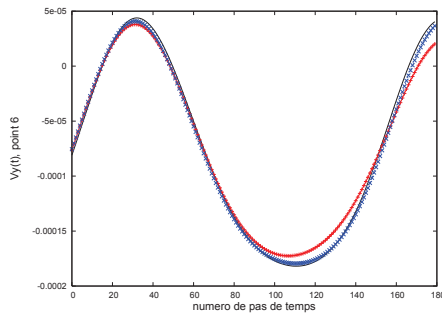
b) Deuxième point



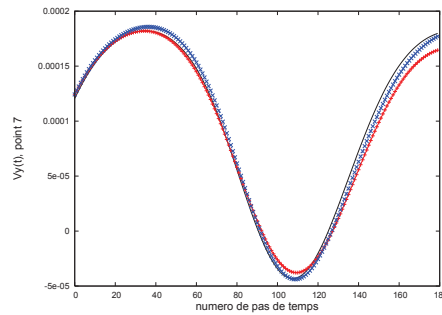
c) Troisième point



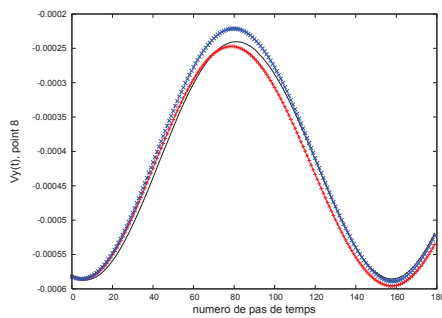
d) Quatrième point



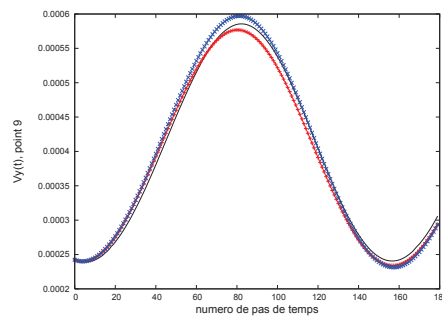
e) Cinquième point



f) Sixième point



g) Septième point



h) Huitième point

FIGURE 4.9 – Comparaison entre la vitesse selon y en 8 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du tube seul fixe et la vitesse selon y reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet ; +++ Vitesse reconstruite, projection matricielle; $\times\times\times$ Vitesse reconstruite, POD-Galerkin

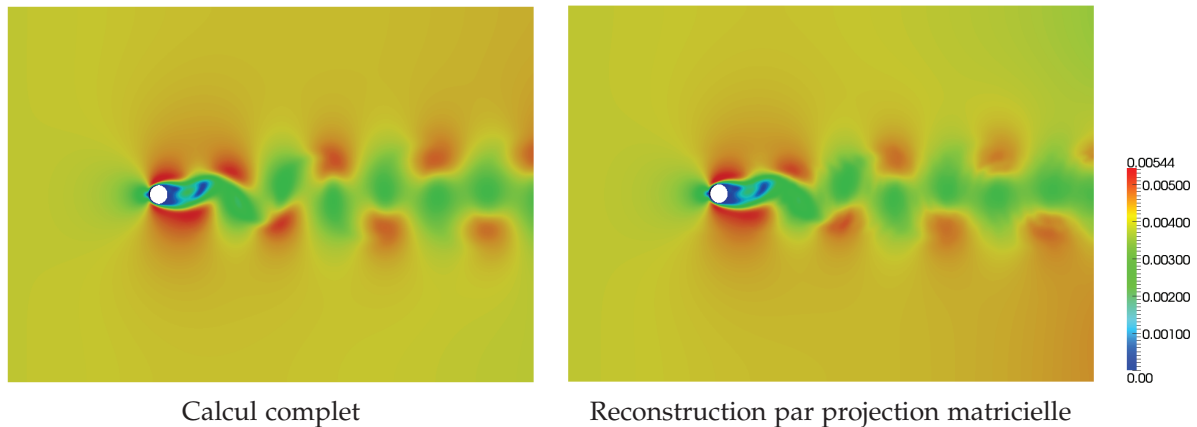


FIGURE 4.10 – Comparaison entre le champ de vitesse complet et le calcul du modèle réduit par projection matricielle

4.1.3.2 Faisceau tubulaire fixe sous écoulement transversal

Projection de l'écoulement sur la base POD

Nous partons du calcul complet effectué dans la partie 2.2.3.3 et, de la même façon que pour le cas du tube seul, une fois que le régime d'écoulement est établi, nous procédons à l'échantillonnage. Le champ des vitesses présente des pseudo-périodes et non des périodes claires. C'est pourquoi, dans un premier temps, le choix a été fait d'extraire des snapshots sur un laps de temps comportant trois pseudo-périodes. L'argument pour ce choix était de constituer une base de données comportant un grand nombre d'informations, afin d'avoir la base POD la plus riche possible. Puis, au vu des résultats obtenus par la reconstruction du champ des vitesses sur cet intervalle de temps, il s'est avéré qu'il est nécessaire de se concentrer sur une seule pseudo-période, afin déjà d'obtenir de bons résultats de reconstruction.

C'est pourquoi le choix final est de capturer un grand nombre de clichés sur une seule pseudo-période. Une pseudo-période se déroule sur 2 secondes de temps réel, et le pas de temps du calcul est fixé à $\Delta t = 1.10^{-3} s$. On capture 1000 clichés sur cette pseudo-période, soit un cliché tous les 2 pas de temps, afin d'avoir tout de même à disposition une base très riche. Le calcul complet pour cette pseudo-période prend 2 heures et 40 minutes sur un seul processeur.

La figure 4.11 présente les premiers modes POD sous la forme de "magnitude" : pour chaque mode Φ on représente $|\Phi| = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}$.

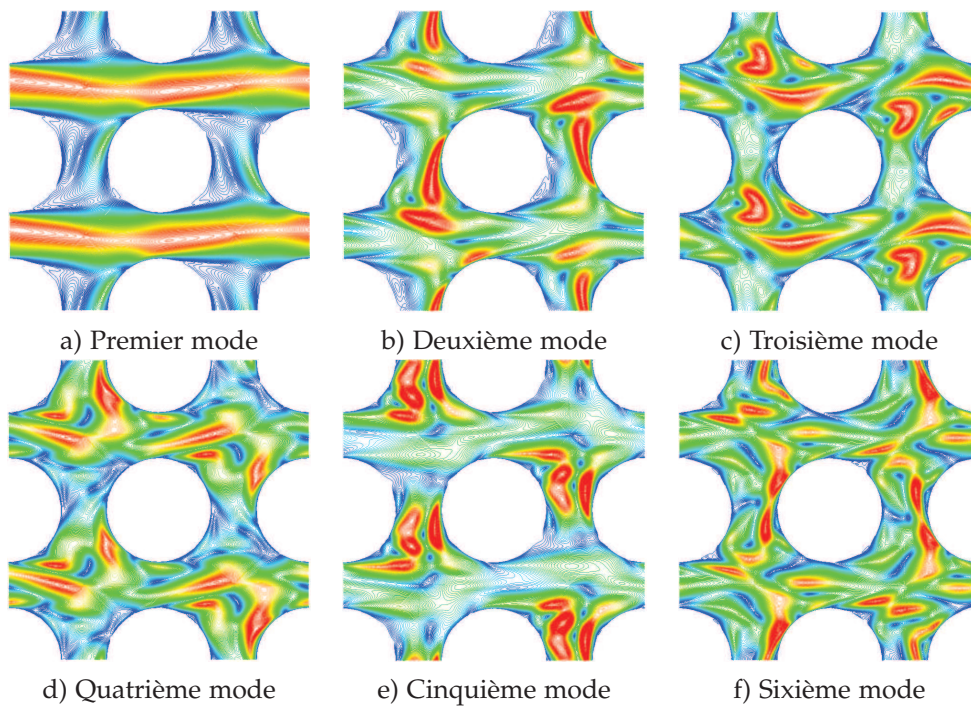


FIGURE 4.11 – Premiers modes POD pour le champ instantané du fluide au sein du faisceau fixe

Ces modes sont obtenus à partir de clichés sur le champ instantané, ce qui est visible puisque le premier mode représente clairement le champ moyen de l'écoulement. Les modes suivants contiennent les fluctuations de l'énergie de l'écoulement. Dans le cadre de la construction du système dynamique, le travail à partir du champ fluctuant est préféré. Il suffit de rajouter la valeur du champ moyen à la vitesse reconstruite pour obtenir une expression du champ de vitesse équivalente à celui dont on a extrait les clichés.

Les coefficients temporels correspondants aux 6 premiers modes pour le champ fluctuant (c'est-à-dire aux modes 2 à 7 pour le champ instantané) sont représentés en figure 4.12.

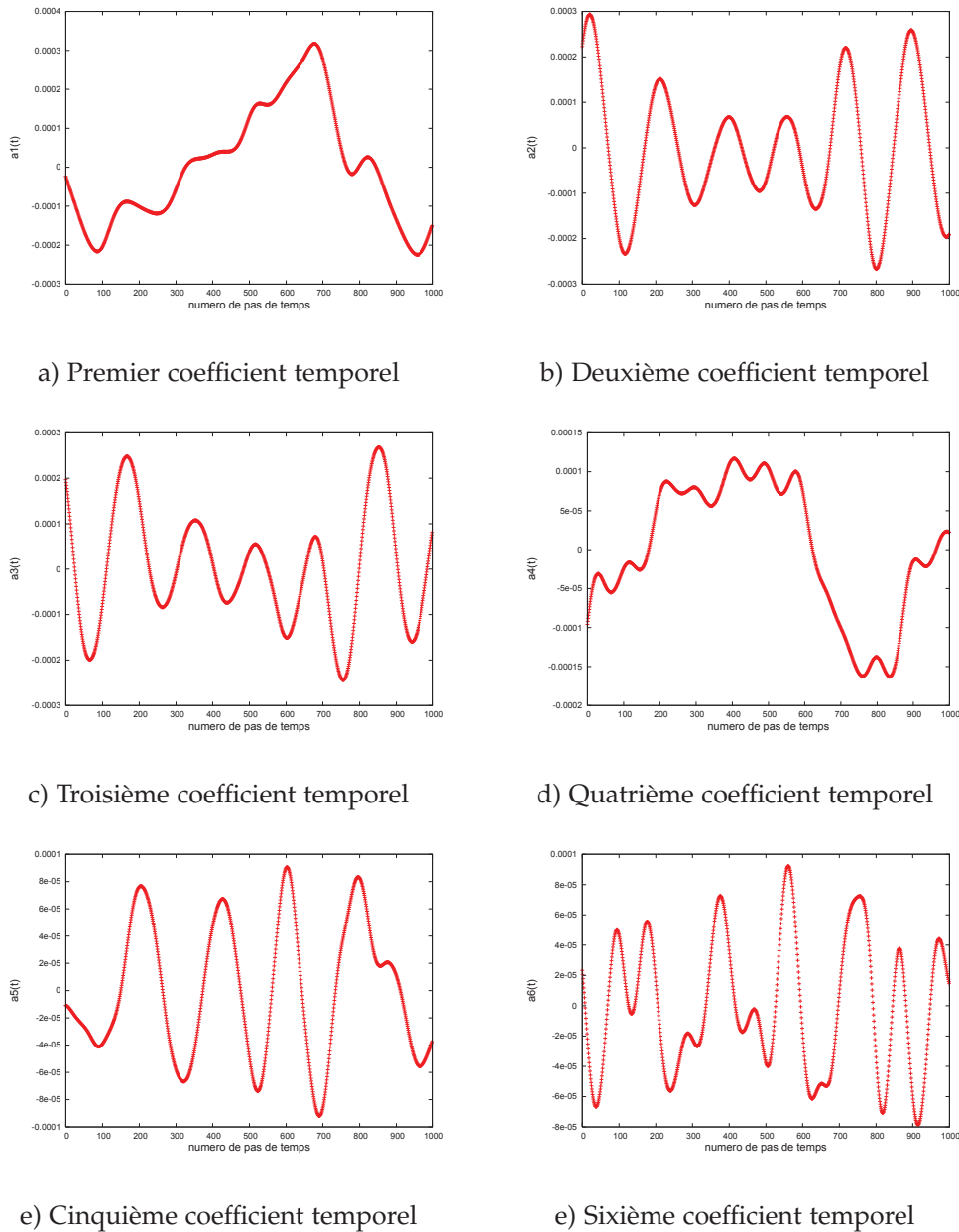


FIGURE 4.12 – Premiers coefficients temporels pour le champ fluctuant du fluide au sein du faisceau fixe

Remarque 4.1 On remarque l'aspect très chahuté de ces coefficients. Cette caractéristique rend plus difficile la reconstruction du champ de vitesse par la méthode POD, notamment dans le cas où le faisceau est mobile. Il est possible que la non régularité observée du champ de vitesse (et donc des coefficients temporels) qui en découle ne soit pas physique, du fait du choix des hypothèses de calcul. Cependant, le système dynamique construit doit être capable de fournir une approximation valable des clichés fournis et c'est sur ce point que nous décidons de nous concentrer.

Si l'on choisit de travailler avec les critères de troncature habituels, le tableau 4.2 rassemble le nombre de modes nécessaires pour capturer divers pourcentages de l'énergie.

| Pourcentage de l'énergie | Nombre de modes nécessaires |
|--------------------------|-----------------------------|
| 90 | 7 |
| 99 | 18 |
| 99.99 | 50 |

TABLE 4.2 – Évolution du nombre de modes nécessaires selon la quantité d'énergie capturée pour le cas de l'écoulement en faisceau de tubes fixe

Construction du système dynamique d'ordre réduit

Dans le cas de l'étude du faisceau tubulaire fixe, les équations à résoudre sont les mêmes que dans le cas du tube seul. Comme les conditions aux limites sont périodiques sur tous les bords du domaine fluide, les termes de pression sur ces bords s'annulent. Ainsi, le seul terme de pression qui subsistait dans la formulation variationnelle (4.34) n'est plus à prendre en compte dans ce cas.

Comme dans le cas du tube seul, on procède à l'application de la méthode POD-Galerkin pour la construction du système dynamique, et l'on observe les résultats obtenus en fonction du nombre de modes POD retenus. On travaille sur le cas complet préparé, 1000 clichés de l'écoulement sur une pseudo-période de l'écoulement ont été retenus. Le pas de temps séparant deux clichés est de $2 \cdot 10^{-3}$ s. Cette fois, le calcul sur un seul processeur dure 12 minutes seulement.

À l'observation de la figure 4.13 qui représente les premiers coefficients temporels reconstruits par le système dynamique pour différentes valeurs du nombre de modes retenus, il est évident que le système dynamique reconstruit mal le champ des vitesses. Il est donc nécessaire de recourir à une technique de stabilisation du système dynamique, afin d'améliorer la reconstruction de chaque coefficient temporel. Nous ne présentons pas ici le cas comportant 50 modes comme cela semble être suggéré par l'évolution des valeurs propres associées aux modes propres, car la qualité des résultats n'en est pas améliorée. De plus, l'utilisation d'une cinquantaine de modes pour une telle étude n'est pas pertinente.

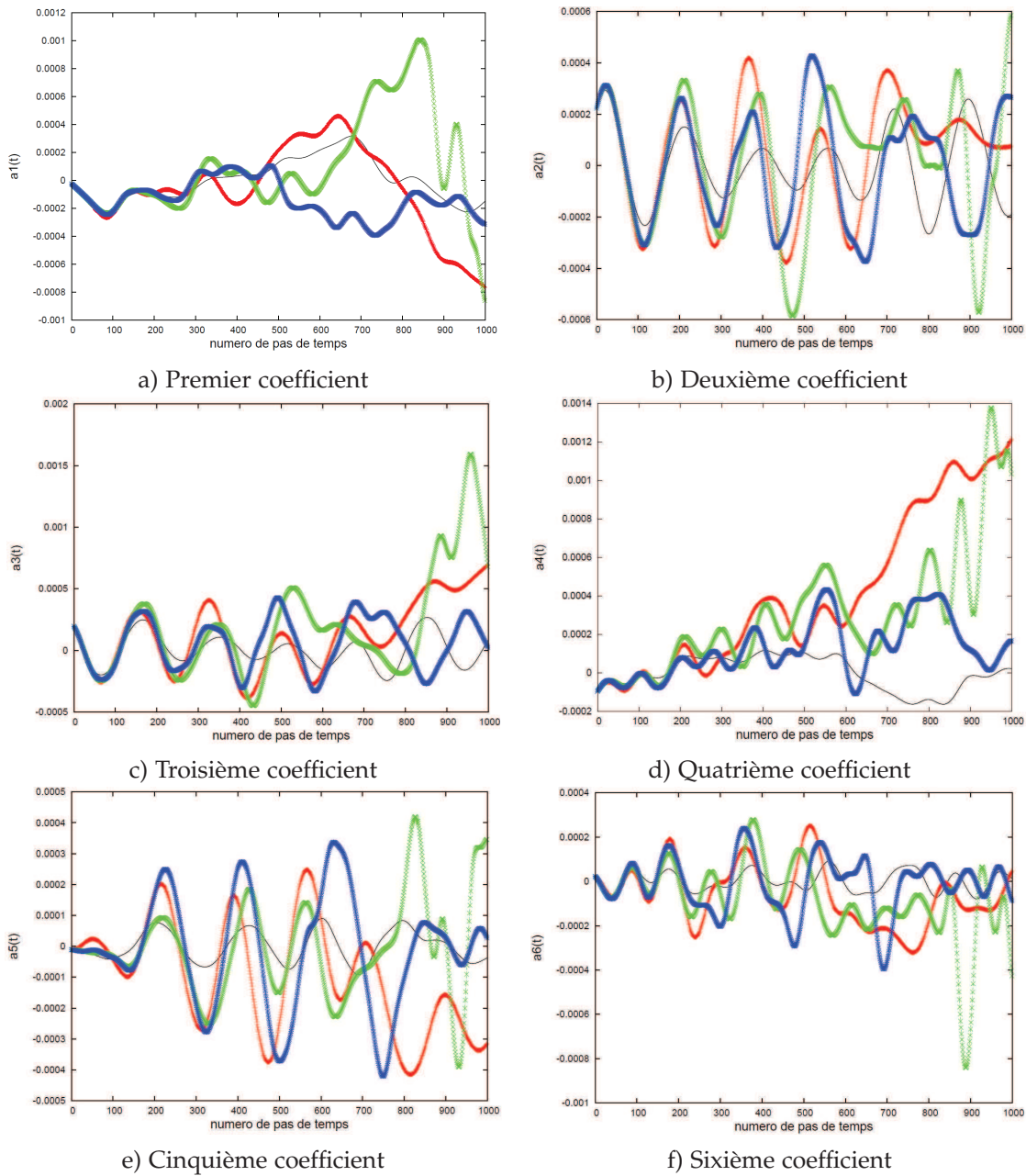


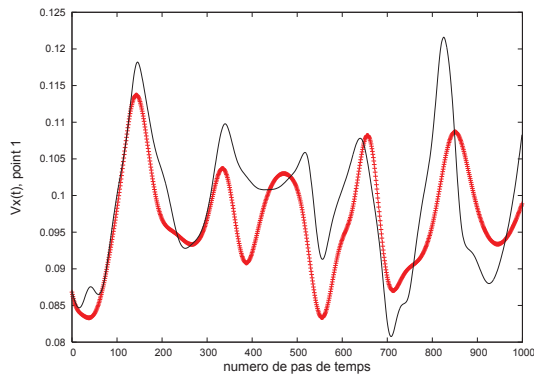
FIGURE 4.13 – Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit en fonction du nombre de modes POD pour le champ fluctuant du fluide autour d'un faisceau tubulaire fixe ; — calcul direct ; +++ reconstruction avec 10 modes ; xxx reconstruction avec 15 modes ; *x*x reconstruction avec 20 modes

L'application de méthodes de stabilisation du système dynamique permettra d'obtenir des résultats beaucoup plus satisfaisants.

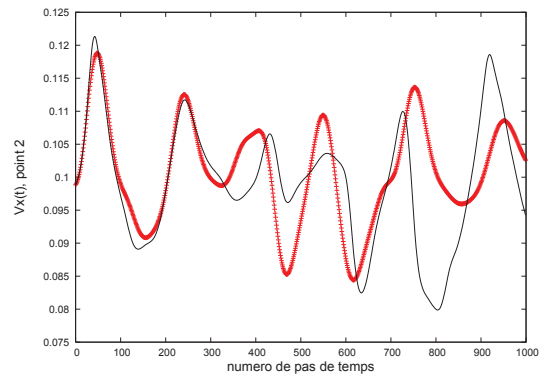
Modèle réduit par projection matricielle

Ici aussi, la méthode de projection matricielle est appliquée au cas de l'écoulement transversal au sein d'un faisceau tubulaire fixe. Les résultats sont présentés en figures 4.14 et 4.15, les points auxquels la vitesse est évaluée sont les mêmes

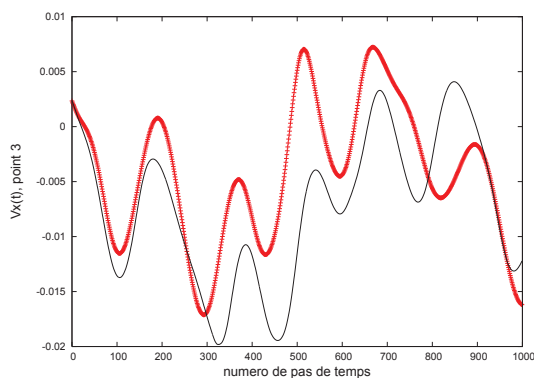
que pour les études précédentes sur le faisceau de tube (voir figure 2.15). Cette fois, il semble que l'application de la méthode de projection matricielle soit bien plus efficace que la méthode de POD Galerkin classique qui ne peut pas reconstruire correctement le champ de vitesse. Pour la projection matricielle, 20 modes POD sont conservés.



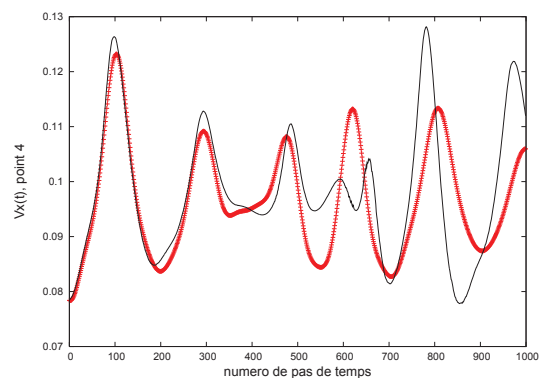
a) Premier point



b) Deuxième point



c) Troisième point



d) Quatrième point

FIGURE 4.14 – Comparaison entre la vitesse selon x en 4 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du faisceau tubulaire fixe et la vitesse selon x reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet; $\times\times\times$ Vitesse reconstruite, projection matricielle

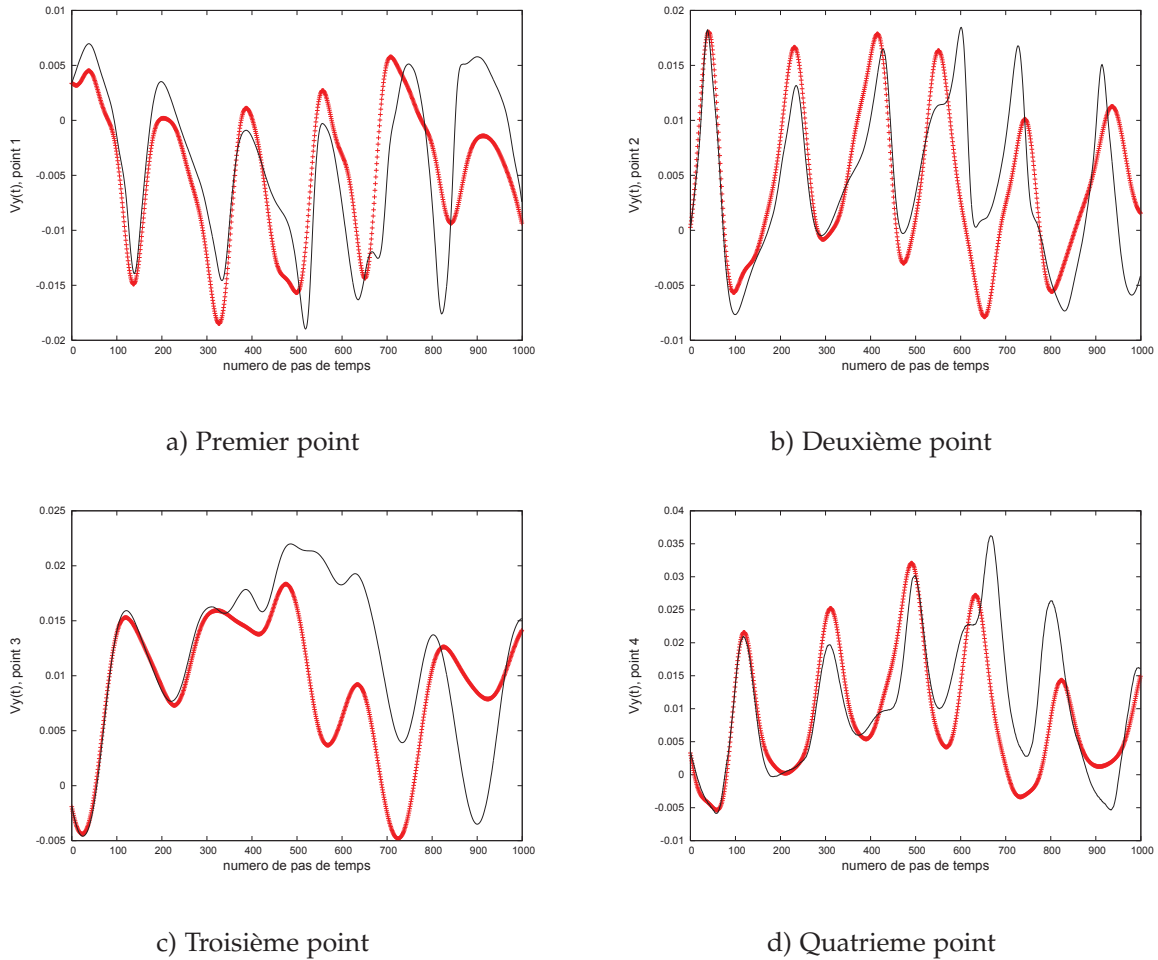


FIGURE 4.15 – Comparaison entre la vitesse selon y en 4 points prédéfinis du domaine fluide pour le calcul complet du faisceau tubulaire fixe et la vitesse selon y reconstruite en ces points avec la méthode de projection matricielle, champ instantané; — calcul complet; $\times\times\times$ Vitesse reconstruite, POD-Galerkin interne

L'ordre de grandeur de la vitesse, dans les deux directions, est bien conservé par la projection matricielle et les résultats sont bien meilleurs que ceux obtenus pour la POD Galerkin classique avec le champ fluctuant. Ce que l'on peut remarquer également, c'est le décalage temporel qui existe pour les signaux reconstruits par les deux méthodes : cela signifie que la reconstruction d'un tel champ de vitesse serait certainement moins bonne sur un intervalle de temps long.

Il est à noter que l'utilisation de la méthode de projection matricielle n'est pas optimisée en termes de temps de calcul pour le moment, donc son utilisation reste plus coûteuse que la projection de Galerkin avec construction du système dynamique.

4.1.4 Conclusion

Nous avons ici présenté l'application de la méthode POD pour des cas d'écoulements instationnaires. La méthode fournit d'excellents résultats pour le cas du tube seul; concernant le faisceau de tubes, on voit que le système dynamique ré-

duit n'est pas assez robuste pour reproduire correctement le champ de vitesse dans le fluide. Une proposition consiste à écrire le système sous forme matricielle, de façon à se rapprocher de l'écriture du modèle complet. Cette méthode, cependant, présente deux inconvénients : d'abord, elle nécessite la possibilité de connaître et de pouvoir interférer dans le code de calcul complet ; d'autre part, elle reste longue à mettre en œuvre car certaines boucles du code ne peuvent être évitées. Une alternative consiste à s'intéresser aux techniques de stabilisation du système dynamique, afin de le rendre plus robuste. Un certain nombre de ces méthodes est présenté dans la partie suivante.

4.2 STABILISATION DU SYSTÈME DYNAMIQUE

4.2.1 Stabilisations en première approximation

Quelle que soit la méthode d'ordre réduit utilisée, le fait même d'effectuer une réduction de modèle peut intrinsèquement amener à une déstabilisation du système dynamique. En effet, si l'on considère par exemple la technique POD-Galerkin, la déstabilisation intervient dans le fait de tronquer la base à partir de laquelle sera construit le système dynamique ; or c'est cette troncature qui fait l'efficacité du modèle puisque de ce fait, la base est constituée de peu d'éléments. La méthode POD permet de conserver les modes les plus énergétiques, c'est-à-dire ceux qui permettent de capturer la plus grande partie de l'énergie du système. Ainsi, lorsque les équations considérées sont projetées sur la base de ces modes les plus énergétiques, ce sont les structures principales de l'écoulement qui seront reconstruites. Cependant, comme seuls les modes contenant le plus d'énergie sont conservés, ceux qui contiennent peu d'énergie sont négligés. Or, le mécanisme de dissipation d'énergie se situe à l'échelle de ces modes. Donc, en tronquant la base des modes POD, on empêche le système de dissiper l'énergie nécessaire. On comprend alors que le système dynamique, privé de ces modes POD de faible contribution énergétique, peut se déstabiliser.

Il existe plusieurs façons de stabiliser le système dynamique en POD sans être obligé de recourir à la projection sur l'ensemble des modes de la base, ce qui ferait perdre la notion de réduction du système. Ces techniques se divisent en deux parties : les méthodes empiriques et les méthodes qui ont recours à l'optimisation. Parmi les méthodes empiriques, deux d'entre elles sont souvent utilisées, pour la facilité de leur mise en œuvre. La première a été proposée par Rempfer (1996) et utilisée pour diverses applications, comme l'étude de l'effet Coanda (Allery 2002) ou encore l'étude de la dispersion de particules dans une cavité entraînée (Verdon 2007). Cette méthode consiste à corriger la viscosité du fluide étudié, de façon similaire à ce qui est proposé lors de la mise en place d'un calcul *Large Eddy Simulation* (LES). En effet, pour un calcul LES, seules les grandes échelles de l'écoulement sont résolues, les petites échelles étant modélisées. Pour cela, une viscosité appelée "viscosité turbulente" ou "viscosité de sous-maille" est introduite afin de modéliser les échanges d'énergie entre les grandes et les petites échelles. Cette viscosité artificielle est utilisée pour corriger la viscosité du fluide, qui, si elle n'est pas modifiée, ne permet pas d'observer la dissipation de l'énergie. C'est la même idée qui est appliquée dans la technique de Rempfer. La viscosité cinématique ν est corrigée de la façon suivante :

$$\nu_{\text{corr}} = \nu + \nu_{\text{artif}} \quad (4.45)$$

où ν_{corr} est la valeur finale de la viscosité, ν la viscosité réelle du fluide, ν_{artif} la valeur de la viscosité artificielle qui est rajoutée. C'est une constante, qui est déterminée de façon empirique, par exemple en utilisant la dichotomie sur des expérimentations numériques. Cette technique impose de rajouter une valeur constante, quel que soit le mode considéré. Une amélioration de cette méthode est proposée par Cazemier (1997) puis Rempfer (2000). À partir de considérations énergétiques (en effectuant le bilan énergétique du système dynamique pour chaque mode POD), Cazemier propose une formulation donnant la valeur de la viscosité artificielle à rajouter selon le mode POD considéré. Ainsi, selon la contribution énergétique du mode, la calibration de la viscosité corrigée n'est pas la même.

Cazemier remarque que la viscosité artificielle à rajouter prend des valeurs quasiment linéaires par rapport au numéro d'indice du mode considéré.

Si l'on considère simplement une loi linéaire pour la viscosité artificielle en fonction du numéro du mode, il ainsi est possible d'écrire plus simplement la viscosité corrigée de la façon suivante pour chaque mode :

$$\nu_{\text{corr}} = \nu(1 + i \nu_{\text{artif}}) \quad (4.46)$$

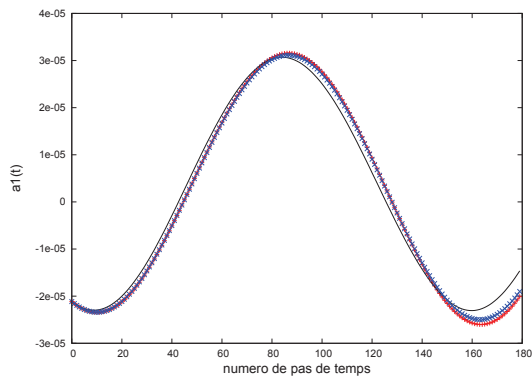
où i est le numéro d'indice du mode considéré. La constante ν_{artif} est ajustée de façon empirique.

4.2.1.1 Application au cas du tube seul

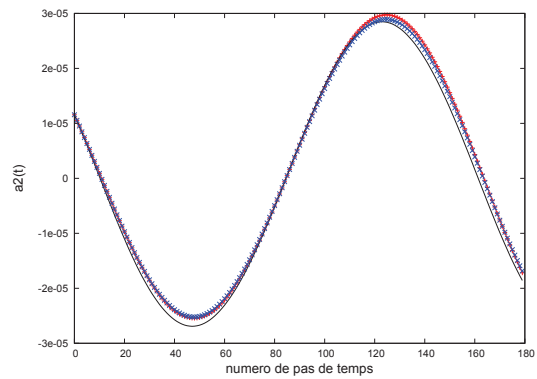
La configuration étudiée est celle de la partie 4.1.3.1. Le système dynamique d'ordre réduit est le système (4.41).

Pour améliorer les résultats obtenus, la stabilisation du système est proposée avec la méthode qui consiste à introduire une viscosité artificielle proportionnelle à l'indice du mode (Cazemier 1997). Dans le cadre de cette étude pour le cylindre fixe seul, les tests effectués sont sommaires et l'optimisation des résultats n'a pas été recherchée, étant donné que ce travail a pour but d'étudier de l'écoulement autour du faisceau tubulaire. Cette technique, pourtant simple, fournit les meilleurs résultats dans les travaux de Placzek (2010), même en comparaison avec d'autres méthodes plus avancées.

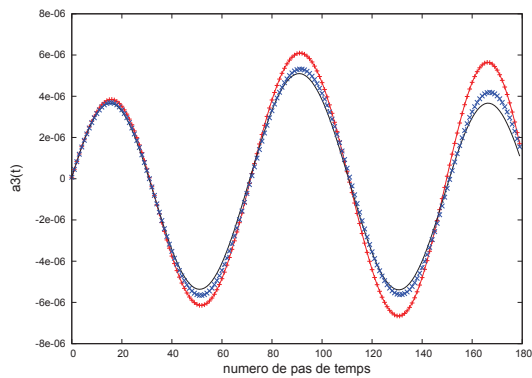
La technique de Cazemier a été implémentée pour le cas du calcul avec 15 modes POD retenus. Après une brève étude de sensibilité, la viscosité artificielle est fixée à $\nu_{\text{artif}} = 0,5$. On observe alors la comparaison entre la reconstruction des coefficients temporels pour le système non stabilisé avec 15 modes POD retenus, et le système stabilisé par cette technique avec $\nu_{\text{artif}} = 0,5$. Les résultats sur les coefficients temporels sont observables en figure 4.16. La stabilisation de type Cazemier, même simple, a donc un effet bénéfique au vu de la reconstruction des coefficients temporels par le système dynamique.



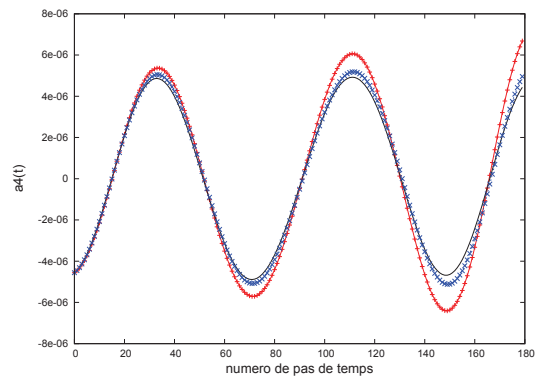
a) Premier coefficient



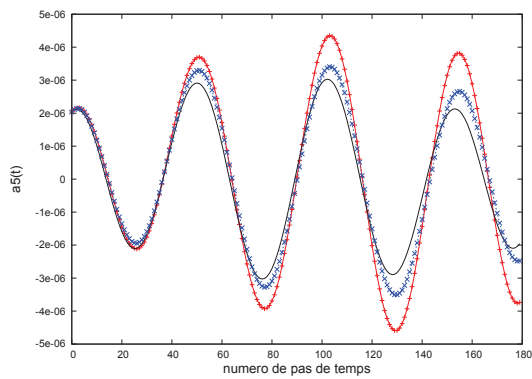
b) Deuxième coefficient



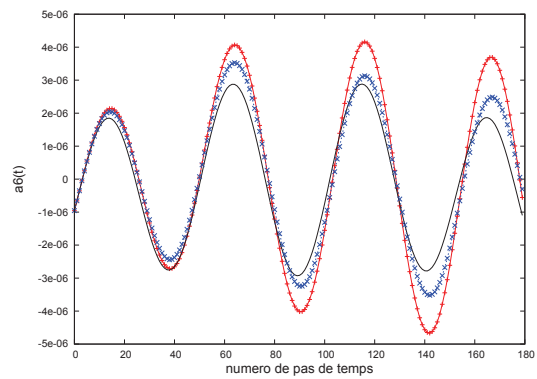
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient



e) Cinquième coefficient



f) Sixième coefficient

FIGURE 4.16 – Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non à 15 modes POD pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe ; — coefficient temporel direct ; +++ coefficient temporel reconstruit sans stabilisation ; $\times\times\times$ coefficient temporel reconstruit avec stabilisation

Enfin, à l'observation du champ de vitesse global, on constate que les niveaux de vitesse ainsi que les structures de l'écoulement sont bien reproduits par

le système dynamique d'ordre réduit (voir figure 4.17), même si déjà les niveaux de vitesse étaient très corrects avec le système dynamique non stabilisé. C'est surtout au niveau des coefficients temporels que l'on observe une amélioration, qui peut avoir son importance pour des temps de calcul plus longs.

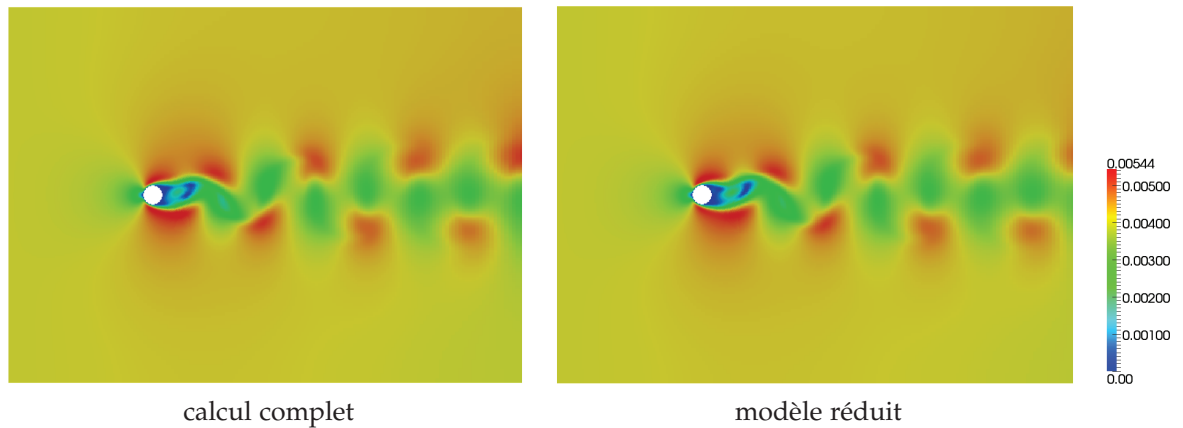


FIGURE 4.17 – Comparaison du champ de vitesse global pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé

Influence du type d'écriture des opérateurs

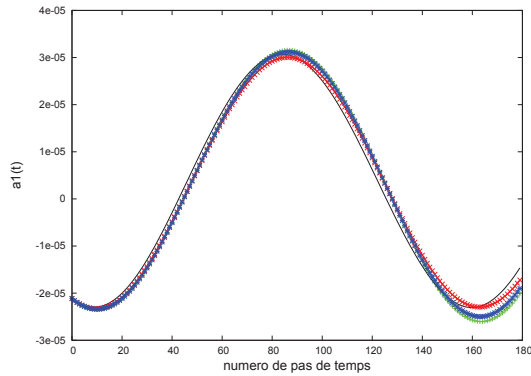
Dans l'étude ci-dessus, afin d'effectuer la projection de Galerkin, nous suivons scrupuleusement la modélisation du système dynamique telle qu'elle est écrite dans la formulation (4.34), excepté pour le terme de pression et les termes de bord qui ne sont pas pris en compte. Il est possible que ces derniers aient à être considérés et qu'il soit donc plus commode de conserver l'écriture des termes en laplacien sous leur forme non symétrique, c'est-à-dire avant d'effectuer l'intégration par partie généralisée qui permet d'obtenir des opérateurs symétriques du premier ordre. Nous effectuons donc le test qui consiste à réécrire le système dynamique sous la forme (4.47) et (4.48).

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a'_n a'_m C_{nmi} + \sum_{n=1}^N a'_n B_{ni} + D_i + E_i \quad (4.47)$$

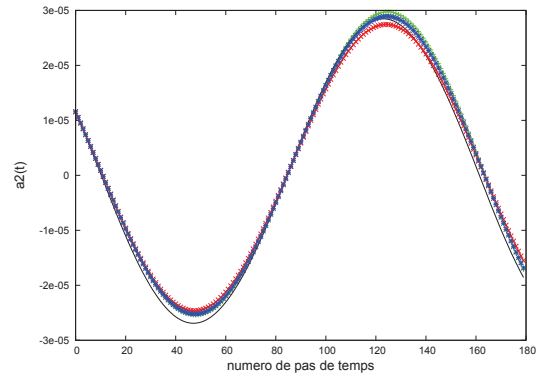
avec

$$\begin{aligned} C_{nmi} &= - \int_{\Omega} [\Phi'_n(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi'_m(\mathbf{x})] \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx \\ B_{ni} &= \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} \Delta \Phi'_n(\mathbf{x}) \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx - \\ &\quad \int_{\Omega} [\Phi'_n(\mathbf{x}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}] \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx - \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi'_n(\mathbf{x})] \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx \quad (4.48) \\ D_i &= - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) d\gamma \\ E_i &= \frac{2}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} \Delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx - \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}] \cdot \Phi'_i(\mathbf{x}) dx \end{aligned}$$

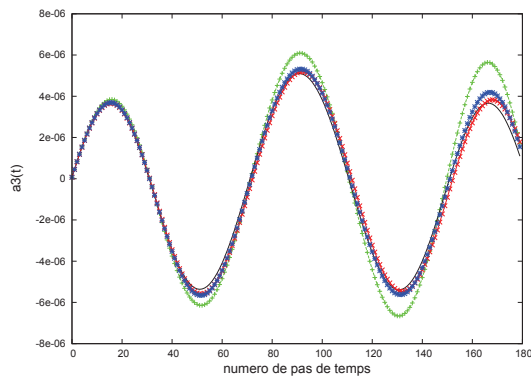
L'application de cette écriture au cas d'étude précédent du cylindre fixe seul sous écoulement transversal à Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$ fournit de meilleurs résultats en comparaison avec la formulation (4.34) sans termes de bord, en ce qui concerne la projection de Galerkin sans stabilisation. À l'observation de la figure 4.18, on constate que ce choix d'écriture en conservant les opérateurs laplacien fournit des résultats très proches de ceux obtenus avec stabilisation du système dynamique, ce qui donne à penser que la contribution des termes de bord n'est pas nulle. C'est la formulation en laplacien qui est conservée pour les configurations étudiées dans la suite de ce travail.



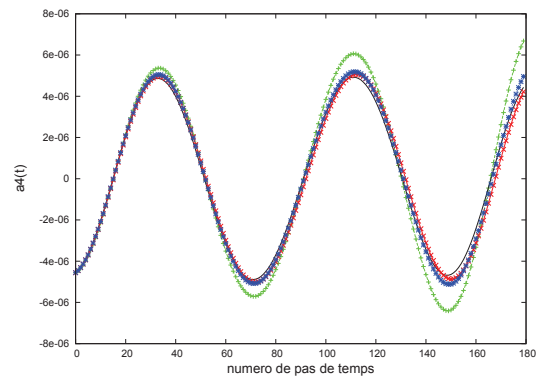
a) Premier coefficient



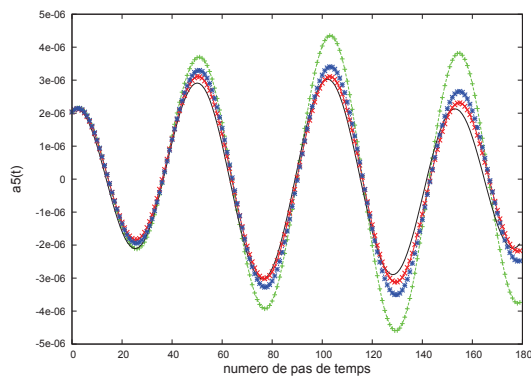
b) Deuxième coefficient



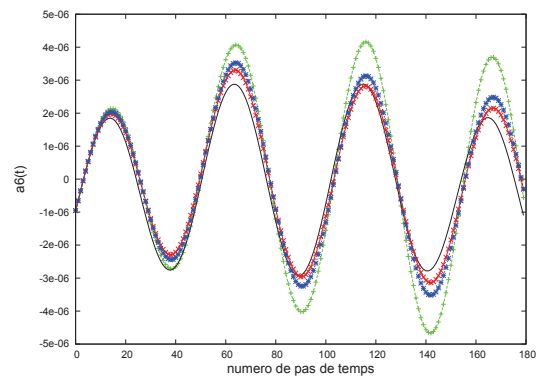
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient



e) Cinquième coefficient



f) Sixième coefficient

FIGURE 4.18 – Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non avec opérateurs du premier ordre à 15 modes POD et des coefficients obtenus avec une formulation sans stabilisation avec les opérateurs de deuxième ordre, pour le champ fluctuant de la vitesse du fluide autour d'un tube fixe ; — coefficient temporel direct ; — coefficient temporel reconstruit sans stabilisation et opérateurs du premier ordre ; $\times\times\times$ coefficient temporel reconstruit avec stabilisation et opérateurs du premier ordre ; +++ coefficient temporel reconstruit sans stabilisation avec opérateurs du second ordre

4.2.1.2 Application au cas du faisceau tubulaire

Formulation du système dynamique

On a vu dans la partie 4.1.3.2 que la reconstruction du champ de vitesse par le système dynamique d'ordre réduit fourni par la formulation (4.34) n'est pas satisfaisante. C'est pourquoi nous proposons également une stabilisation du système dynamique afin d'améliorer ces résultats. La loi (4.46) est donc utilisée, avec 20 modes POD retenus pour la reconstruction. La valeur de la viscosité artificielle est fixée à $\nu_{\text{artif}} = 0.65$ et elle est multipliée par l'indice du mode considéré. Les résultats en terme de coefficients temporels sont comparés avec ceux du cas sans stabilisation. L'amélioration des résultats est notable et ce, sur l'ensemble des coefficients temporels (voir figure 4.19 qui représente les six premiers coefficients).

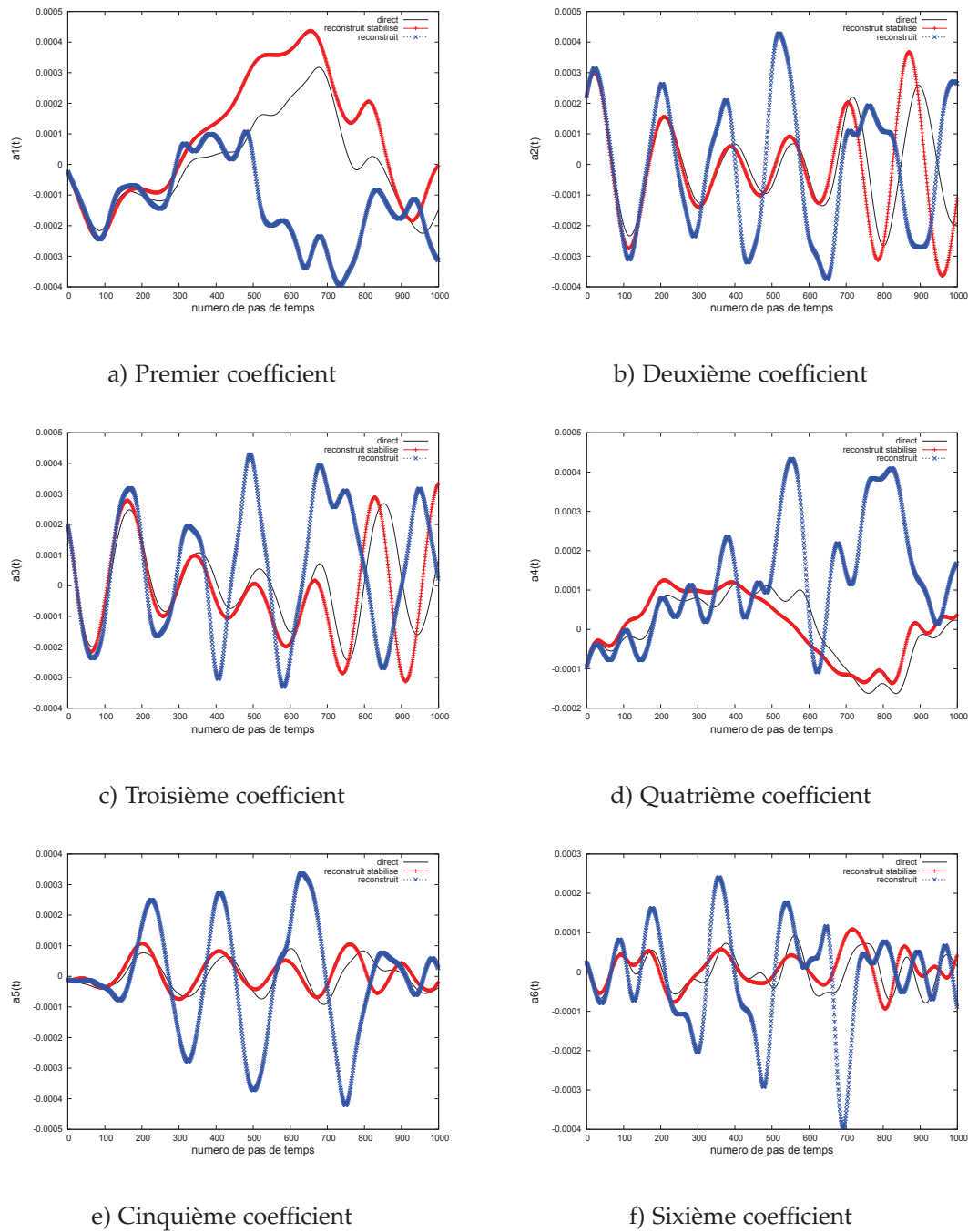


FIGURE 4.19 – Comparaison des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit stabilisé ou non à 20 modes POD pour le champ fluctuant du fluide autour d'un faisceau tubulaire fixe; — calcul direct; $\times\times\times$ calcul du modèle réduit sans stabilisation; $+++$ calcul du modèle réduit avec stabilisation

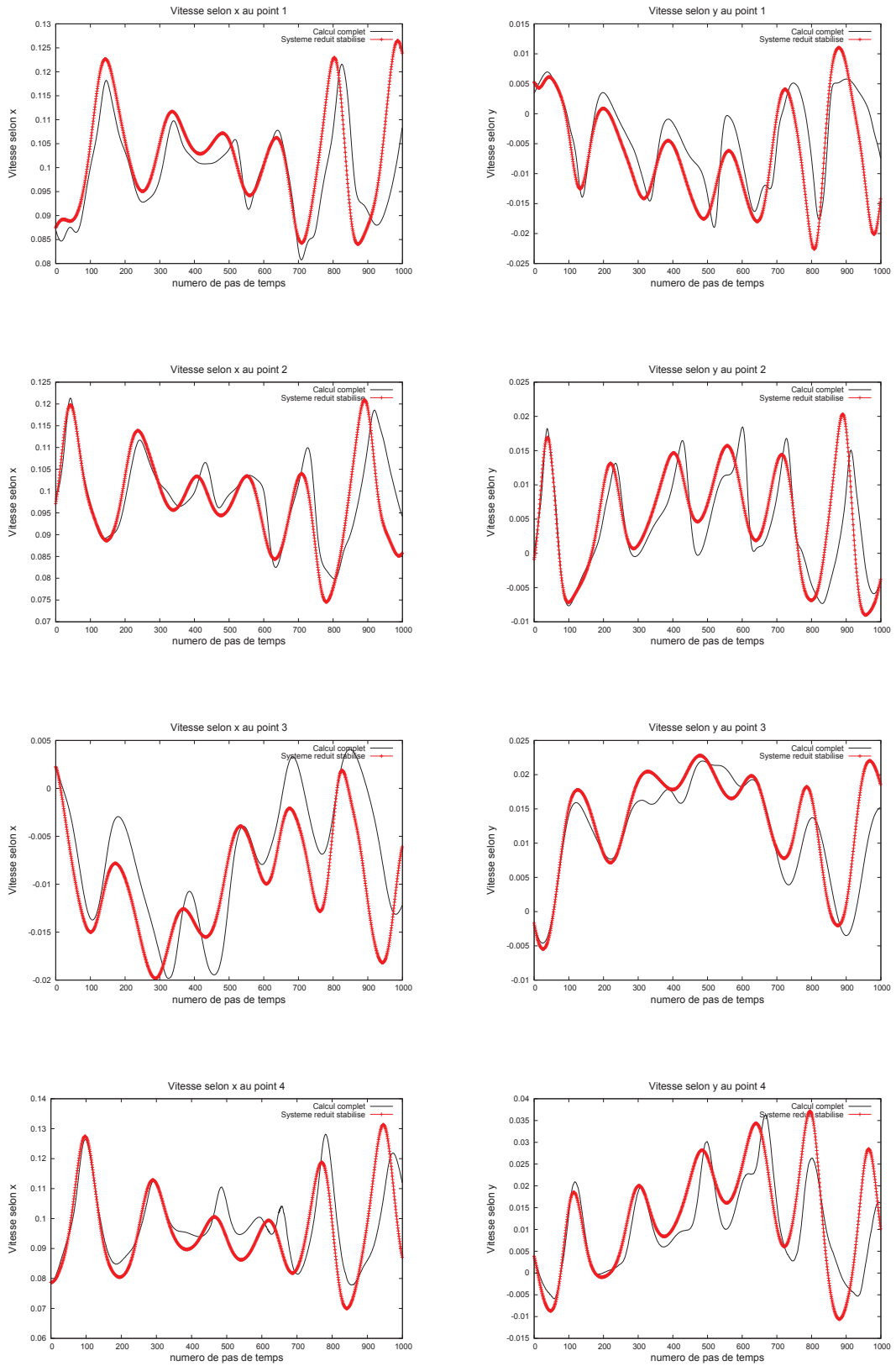
Pour le premier coefficient temporel, on remarque une surestimation des valeurs prises par le coefficient. Les coefficients 2 et 3 présentent une légère augmentation de l'amplitude sur la fin de l'intervalle de temps. Les coefficients temporels d'ordre plus élevé possèdent un ordre de grandeur correct; cependant, les nombreuses fluctuations qui les caractérisent ne sont pas toujours bien capturées

par les coefficients temporels reconstruits. Ceci est dû au fait que la loi de stabilisation entraîne une plus grande dissipation pour les modes d'indice élevé, puisque la viscosité artificielle est une constante multipliée par l'indice du mode.

La vitesse du fluide en quatre points dans le domaine a été relevée, afin que l'on puisse observer la qualité de la reconstruction du champ de vitesse. Ces points sont représentés sur la figure 2.15. Pour ces quatre points, le champ de vitesse reconstruit a été relevé et est comparé à celui du calcul complet.

La figure 4.20 présente l'évolution du champ de vitesse aux points respectifs 1, 2, 3 et 4, d'une part pour le calcul complet, d'autre part par le système dynamique stabilisé par la méthode de Cazemier. La reconstruction du champ de vitesse en ces points semble relativement correcte sur une pseudo-période ; les niveaux étant globalement respectés, on remarque tout de même un déphasage sur la fin de l'intervalle de temps.

Enfin, à l'observation des champs de vitesse sur l'ensemble du domaine fluide (figure 4.21), on constate que la forme de l'écoulement est globalement respectée, même si les niveaux de vitesse sont légèrement différents selon les zones considérées (surestimation des maxima en figure 4.21 b).



a) Vitesse selon x

b) Vitesse selon y

FIGURE 4.20 – Comparaison du champ de vitesse selon x et selon y en quatre points choisis dans le domaine fluide pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé ; — calcul direct ; - - - calcul du modèle réduit avec stabilisation

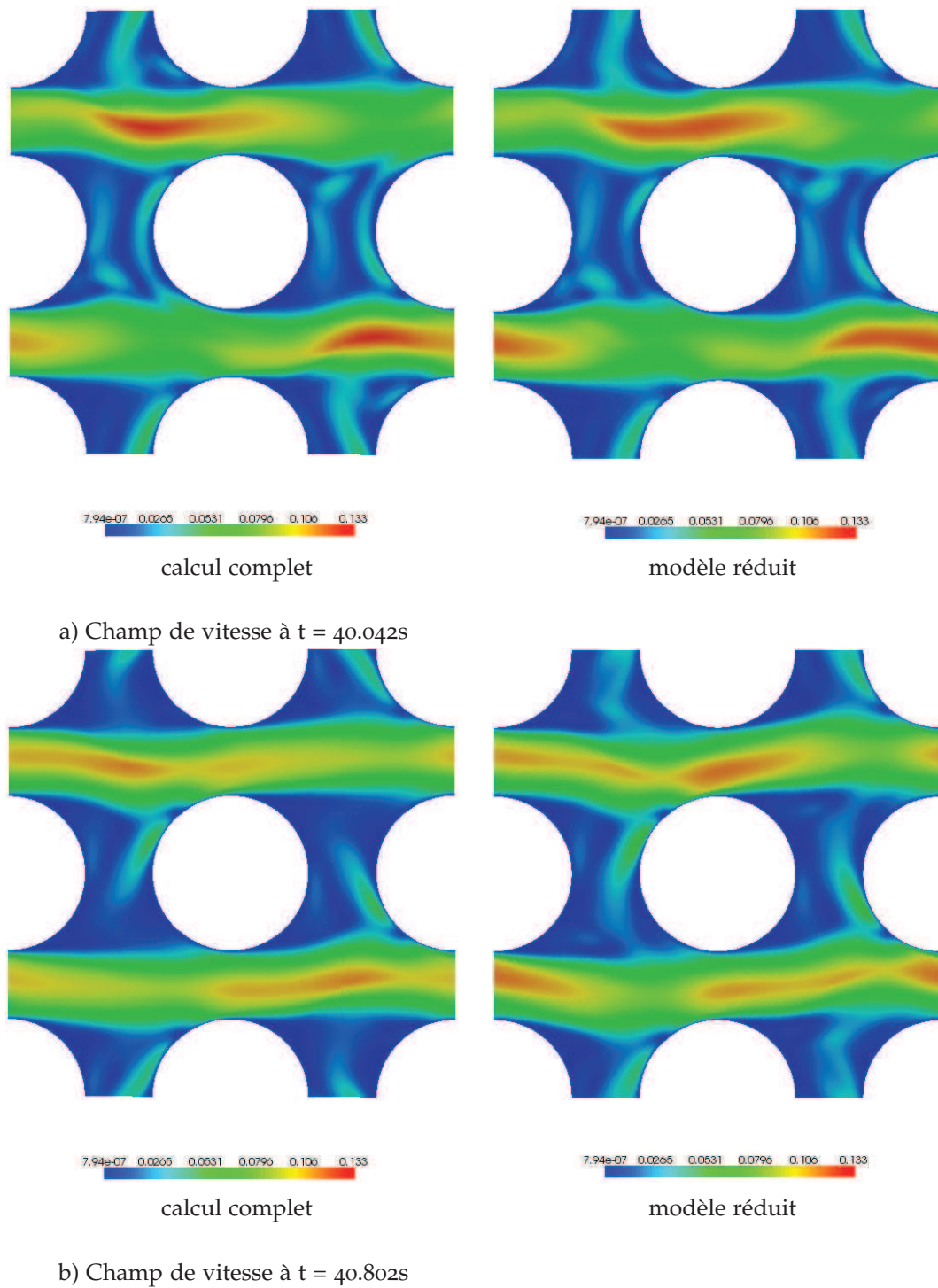


FIGURE 4.21 – Comparaison du champ de vitesse global pour le calcul complet et le modèle réduit stabilisé

Des calibrages mode par mode permettraient d'obtenir des résultats encore meilleurs : par exemple, si l'on fixe une valeur plus grande de la viscosité artificielle pour le premier mode uniquement, en laissant la valeur initialement choisie pour les modes suivants, cela permet d'obtenir une meilleure reconstruction du premier coefficient temporel. Or, celui-ci représente le premier mode, qui

contient une grande quantité d'énergie (pour le champ fluctuant). Donc, l'amélioration sur ce coefficient peut entraîner une meilleure reconstruction du champ de vitesse. Cependant, un calibrage manuel n'est pas envisageable : il serait nécessaire de mettre en œuvre un trop grand nombre de tests afin de parvenir au calibrage optimal.

Une alternative à ces études paramétriques empiriques est de faire une recherche d'optimum grâce à un algorithme basé sur l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, ce qui permet de s'assurer du meilleur choix de stabilisation pour chaque mode.

4.2.2 Modification du système dynamique

Dans de cette partie, nous allons considérer quelques éléments de la famille des méthodes de stabilisation du système dynamique où ce dernier est modifié. Ces techniques sont donc intrusives mais elles permettent d'améliorer la projection de Galerkin telle qu'elle est classiquement définie.

4.2.2.1 Modification du choix de la norme

Dans les paragraphes qui précèdent, nous avons fait le choix d'utiliser la norme des fonctions de carré intégrable pour la définition des quantités POD (construction de la matrice de corrélation, normalisation des modes POD). Or, il est possible de choisir d'autres normes, comme par exemple la norme sur l'espace H^1 . Ce choix peut avoir son importance sur la stabilisation du système, comme le montrent Iollo et al. (2000). L'idée est de considérer le produit scalaire à poids ε défini pour u et v dans l'espace $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (4.49)$$

ε est un nombre réel que l'on choisit en fonction des choix de dimensionnement. Par exemple, si l'on choisit $\varepsilon \propto \frac{\tau}{\mathcal{R}_e}$ avec τ une échelle de temps caractéristique, on peut avoir des résultats intéressants. Le problème aux valeurs propres ainsi associé est le problème (4.10), l'opérateur de corrélation temporelle contient donc les clichés de l'écoulement ainsi que les gradients des clichés. L'orthonormalisation de la base se fait également avec la norme H^1 .

Nous effectuons le test de cette technique sur un cas simple : l'équation de Burgers unidimensionnelle. On considère le champ $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Omega =]0, 1[$ et une viscosité cinématique ν . On résout numériquement :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(\pi x) \end{cases} \quad (4.50)$$

On compare alors la reconstruction par POD sur un intervalle de temps de 1 seconde avec la norme L^2 et avec la norme H^1 , pour de faibles valeurs de la viscosité pour lesquelles la reconstruction peut donner de moins bons résultats. Le calcul complet est effectué avec un schéma de Crank-Nicolson. Pour la norme H^1 , le paramètre ε est choisi égal à $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$. D'abord, pour une viscosité $\nu = 0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, les résultats pour la reconstruction de la vitesse à différents instants pour différents

nombre de modes dans la base POD sont représentés sur la figure 4.22. Les résultats pour une viscosité encore plus faible ($\nu = 0.02 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$) sont visibles en figure 4.23. La diminution de la viscosité à de plus faibles valeurs n'a pas permis d'obtenir de résultats probants, que ce soit pour la norme L^2 ou la norme H^1 . Dans ce cas, la stabilisation induite par le changement de la norme n'est plus visible.

À l'observation des figures 4.22 et 4.23, on remarque que le choix de la norme H^1 permet de tronquer la base un mode "plus tôt" qu'avec la norme L^2 : le système dynamique pour N modes avec la norme L^2 fournit des résultats équivalents à ceux obtenus par le système dynamique construit avec $N - 1$ modes avec la norme H^1 .

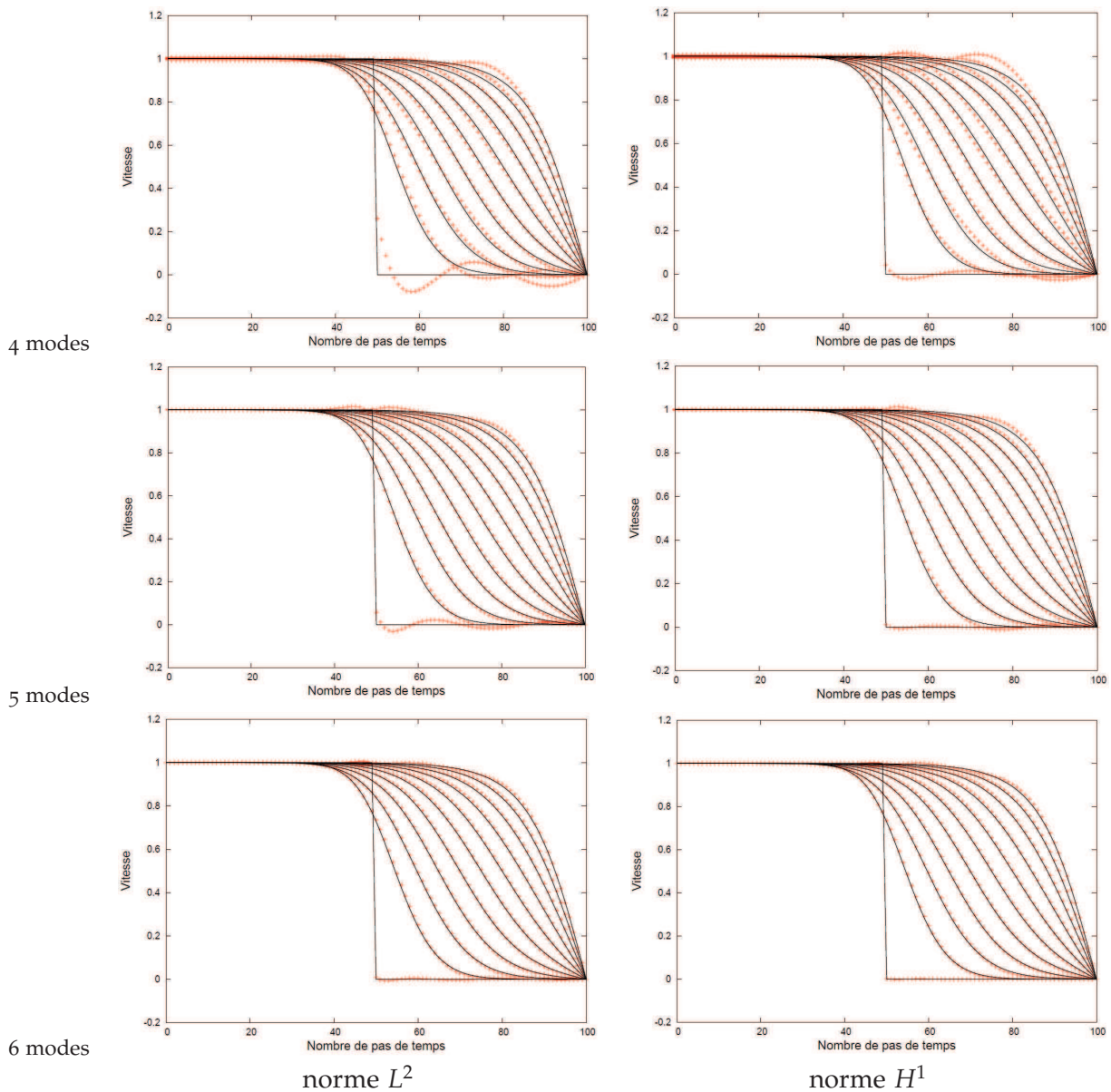


FIGURE 4.22 – Comparaison entre les reconstructions en norme L^2 et H^1 du champ u pour l'équation de Burgers avec $\nu = 0.05$. — calcul complet ; +++ modèle réduit

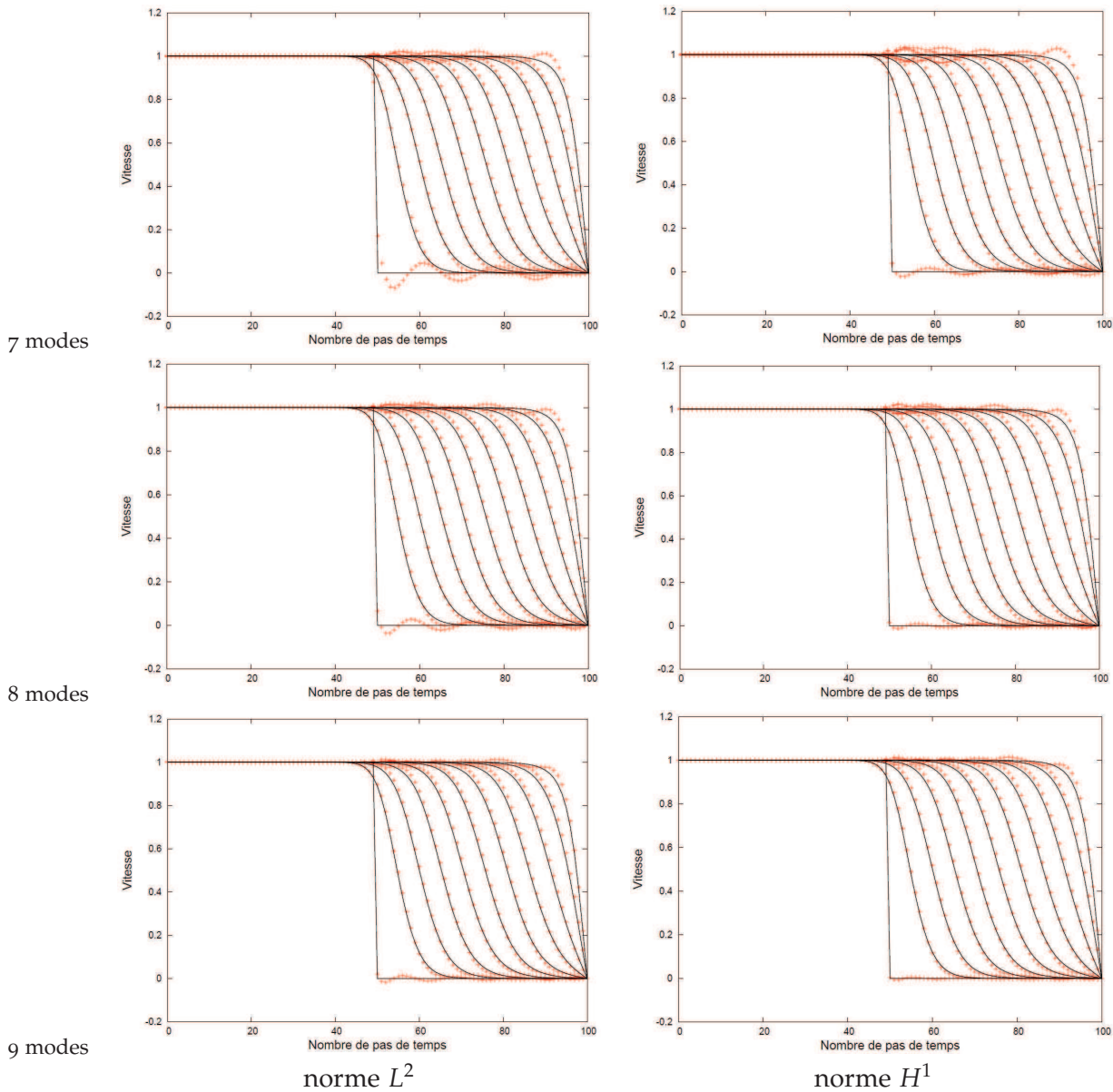


FIGURE 4.23 – Comparaison entre les reconstructions en norme L^2 et H^1 du champ u pour l'équation de Burgers avec $\nu = 0.02$. — calcul complet ; +++ modèle réduit

4.2.2.2 Méthode de viscosité spectrale évanescente (SVVM)

Sirisup et Karniadakis (2004) travaillent sur l'étude de l'écoulement à l'arrière d'un cylindre fixe en milieu infini, dans une configuration bidimensionnelle pour des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$ et $\mathcal{R}_e = 500$. Leur but est de mener des simulations de longue durée. Ils constatent que, pour une période de temps relativement courte, la reconstruction du champ de vitesse fluide sur tout le domaine par l'utilisation du modèle d'ordre réduit POD-Galerkin donne des résultats satisfaisants. Cependant, pour un intervalle de temps long, arrive une date à partir de laquelle le modèle diverge. Pour le plus grand nombre de Reynolds, cette divergence arrive plus tôt. Pour améliorer leurs résultats, ils proposent la stabilisation du système dynamique par l'utilisation de la méthode appelée *Spectral Vanishing Viscosity method* (méthode de viscosité spectrale évanescente). Cette méthode con-

siste à ajouter un terme de dissipation dont la valeur dépend de l'indice du mode considéré, qui permette de conserver l'entropie du système. Ceci se rapproche de l'idée de rajouter une régularisation par la viscosité ; la méthode a d'ailleurs été utilisée pour des besoins de calculs LES (Séverac et al. 2005). L'idée est de travailler avec une méthode spectrale et de rajouter un terme de viscosité uniquement pour les grands nombres d'onde.

Cette technique a montré des résultats très intéressants par rapport à l'utilisation de systèmes non stabilisés. Elle requiert le calcul empirique de l'amplitude de la viscosité, de la même façon qu'il faut déterminer la bonne constante avec la méthode de Cazemier et l'ajustement de ces paramètres peut dépendre fortement du nombre de modes utilisés (Placzek 2010). C'est pourquoi, la seconde catégorie de méthodes de stabilisation, qui consiste à la recherche d'un optimum pour définir les termes du système à ajuster, a vu le jour. Plusieurs méthodes ont été développées dans ce sens, elles reviennent à la résolution d'un problème d'optimisation pour la définition des coefficients du système dynamique d'ordre réduit et sont généralement plus robustes (Gloerfelt 2006).

4.2.2.3 Optimisation de la recherche de constante de stabilisation

Bergmann (2004), dans sa thèse, propose l'application d'une de ces méthodes d'optimisation à l'application de la méthode POD-Galerkin pour le contrôle d'écoulements compressibles. Il se base sur l'idée de Rempfer (2000) et Cazemier (1997), en supposant que l'on peut rajouter une "viscosité tourbillonnaire" adaptée à chaque mode POD. Si l'on se place dans le contexte de la construction d'un système dynamique POD d'ordre réduit pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (équation (4.34)) pour le champ de vitesse fluctuant, en notant, pour des raisons de clarté, a_i les coefficients temporels à déterminer, pour $i = 1, \dots, N$ où N est le nombre de modes POD retenus, on a, en séparant les termes visqueux des termes non visqueux :

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \mathcal{A}_i + \sum_{j=1}^N \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \quad (4.51)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= A_i + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \tilde{A}_i \\ \mathcal{B}_{ij} &= B_{ij} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \tilde{B}_{ij} \\ \mathcal{C}_{ijk} &= C_{ijk} \end{aligned}$$

où l'on a rassemblé les coefficients du système dynamique ne dépendant que du mode projeté Φ_i dans le coefficient \mathcal{A}_i et sachant que dans le cas traité par Bergmann, le terme de pression normalement inclus dans le coefficient \mathcal{A}_i est négligé. Bergmann, de plus, rajoute des termes spécifiques au contrôle de l'écoulement, que nous ne faisons pas apparaître ici.

La stabilisation du système (4.51) consiste donc à rajouter une "viscosité tourbillonnaire" notée $\frac{\alpha_i}{\mathcal{R}_e}$ au $i^{\text{ème}}$ mode POD. Ce qui conduit au système dynamique suivant :

$$\frac{da_i(t)}{dt} = A_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_j(t) a_k(t) + \frac{1 + \alpha_i}{\mathcal{R}_e} (\tilde{A}_i + \sum_{j=1}^N \tilde{B}_{ij} a_j(t)) \quad (4.52)$$

système qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \quad (4.53)$$

où \mathbf{a} représente le vecteur dont les composantes sont les coefficients temporels a_i et α est le vecteur dont les composantes sont les viscosités artificielles correspondant à chaque mode POD. L'ensemble des viscosités artificielles peut être constitué de coefficients dépendant du temps ou non, le but étant qu'elles minimisent les erreurs de reconstruction du système dynamique d'ordre réduit. L'erreur de reconstruction est évaluée comme étant la norme L^2 de la différence entre les coefficients temporels a_i calculés par le système dynamique et les coefficients temporels a_i^* calculés directement par projection du champ de vitesse discret issu des clichés sur la base POD construite. On cherche donc à approcher ces derniers au sens des moindres carrés.

Une fonctionnelle "objectif" est ainsi définie (Bergmann 2004) et notée :

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \alpha) \quad (4.54)$$

où les calculs sont effectués sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Cela nous ramène à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes, puisque l'on cherche à minimiser la fonctionnelle \mathcal{J} sous la contrainte du système à résoudre (4.53). Ce problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \alpha) \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

Afin de passer à un problème d'optimisation sans contrainte, on introduit autant de multiplicateurs de Lagrange qu'il y a de degrés de liberté sur α , c'est-à-dire que l'on introduit les multiplicateurs ζ_i , $i = 1, \dots, N$. La nouvelle fonctionnelle (fonctionnelle de Lagrange) \mathcal{L} à minimiser est la suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \bar{\zeta}) = \mathcal{J}(\mathbf{a}, \alpha) - \left(\sum_{i=1}^N \zeta_i \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) \right) \quad (4.56)$$

où (\cdot, \cdot) est un produit scalaire choisi et $\bar{\zeta}$ contient l'ensemble des ζ_i , $i = 1, \dots, N$. On cherche un extremum de cette fonctionnelle, on cherche donc à obtenir :

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad (4.57)$$

en supposant les variables \mathbf{a} , α , $\bar{\zeta}$ indépendantes, cela revient à déterminer, pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta a_i = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta_i} \delta \zeta_i = 0 \quad (4.58)$$

Ces résolutions (4.58), associées au problème (4.53), constituent un "problème optimal".

Que les viscosités artificielles α_i dépendent ou non du temps, Bergmann constate une nette amélioration dans la prédiction de son système, le cas où les viscosités dépendent du temps donnant tout de même des résultats clairement meilleurs. Cela dit, cette contrainte rajoute des calculs à chaque pas de temps, il est donc nécessaire de vérifier le coût d'une telle technique en fonction de l'amélioration qu'apporte cette dépendance en temps par rapport à des valeurs constantes dans le temps. Placzek (2010) a testé différentes formes de stabilisation du système dynamique pour reproduire le champ aérodynamique autour d'un profil

NACA0012 ; les résultats qu'il obtient montrent l'équivalence en termes d'erreur commise entre une technique d'optimisation et la méthode de Cazemier (1997). Par ailleurs, un défaut de l'approche est qu'il est nécessaire de connaître la solution du problème avant d'écrire la stabilisation.

Bourguet (2008) propose une technique de stabilisation se basant sur la calibration du système dynamique d'ordre réduit *a posteriori*. Pour cela, des coefficients supplémentaires sont ajoutés au système dynamique obtenu après projection de Galerkin du système d'équations aux dérivées partielles sur les modes POD. Ces coefficients sont choisis de telle sorte qu'ils minimisent l'erreur de prédiction des coefficients temporels avec le même type de calcul d'erreur que celui présenté par Bergmann (2004) (erreur en norme L^2). Le calcul de ces coefficients dits de calibration revient ainsi à la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes. Pour simplifier cette résolution, le problème est linéarisé ; il permet cependant de traiter des cas d'écoulements turbulents : le cas du régime transsonique pour un écoulement est traité par Bourguet et donne des résultats satisfaisants, même si Bourguet remarque que l'erreur de prédiction augmente avec l'indice du mode.

4.2.2.4 Méthode de projection optimale

Leblond et al. (2010) proposent une amélioration de la méthode POD (qui se base traditionnellement sur la technique de projection de Galerkin), en s'inspirant de techniques de stabilisation de problèmes mixtes en éléments finis. La projection permettant de construire le système dynamique d'ordre réduit s'effectue en minimisant le résidu. Cette technique appelée *projection optimale* est adaptée à la projection des équations de Navier-Stokes.

Principe de la méthode

On se place dans le cadre d'un écoulement incompressible, et l'on considère un espace Ω dans lequel la variable est notée x , et un intervalle de temps $[0, T]$ où la variable est notée t . $\mathbf{u}(x, t)$ est le champ de vitesse sur $\Omega \times [0, T]$ et $p(x, t)$ est le champ de pression. Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont rappelées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.59)$$

où u_0 est une condition initiale donnée. L'idée est, tout comme dans le cadre de la méthode POD, d'écrire d'abord une discrétisation temporelle de ces équations. Le choix est fait de les traiter avec un schéma numérique d'Euler semi-implicite ; c'est-à-dire que dans le schéma d'Euler classique, les termes de diffusion et de pression sont traités de façon implicite (au temps $n + 1$), et le reste de façon explicite (au temps n) :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Les champs de vitesse et de pression sont découplés grâce à une équation de Poisson pour la pression : il suffit d'appliquer l'opérateur de divergence à l'équation (4.60) et d'utiliser la propriété de divergence nulle du champ de vitesse ; on obtient alors le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n &= -\nabla p^{n+1} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ \Delta p^{n+1} &= \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \end{cases} \quad (4.61)$$

Les champs de vitesse et de pression sont vus comme étant la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante ; on les distingue de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^n(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}) \\ p^n(\mathbf{x}) &= \bar{p}(\mathbf{x}) + \tilde{p}^n(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.62)$$

où la notation $\bar{\cdot}$ représente une moyenne en temps et $\tilde{\cdot}$ représente une fluctuation temporelle. Toujours en se basant sur les techniques utilisées pour la méthode POD, ici ce sont à la fois le champ de vitesse et le champ de pression fluctuants qui sont décomposés selon des modes spatiaux, respectivement Φ^u et Φ^p , supposés connus :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^n \simeq \sum_{i=1}^N a_i^n \Phi_i^u(x) \\ \tilde{p}^n \simeq \sum_{i=1}^{N_p} b_i^n \Phi_i^p(x) \end{cases} \quad (4.63)$$

Pour la suite, sans perte de généralité, on supposera $N_p < N$; le cas contraire se traite de la même manière. Les modes Φ^u et Φ^p sont les modes POD des champs respectifs, ce qui permet de s'assurer que les modes de la vitesse sont à divergence nulle et vérifient les conditions aux limites du modèle complet.

Par l'introduction de (4.62) dans (4.61), on obtient le système suivant, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (1 - \frac{\delta t}{\mathcal{R}_e} \Delta) & \delta t \nabla \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \\ \tilde{p}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\tilde{\mathbf{u}}^n) \\ h(\tilde{p}^n) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Avec

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{u}}^n) &= \tilde{\mathbf{u}}^n - \delta t [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^n + (\tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^n] - \delta t \nabla \bar{p} + \frac{\delta t}{\mathcal{R}_e} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ h(\tilde{\mathbf{u}}^n) &= -\Delta \bar{p} - \nabla \cdot [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^n + (\tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^n] \end{aligned} \quad (4.65)$$

Puis, on exprime $\tilde{\mathbf{u}}$ et \tilde{p} selon leurs définitions respectives, et on les injecte dans (4.64), supposant $N_p \leq N$. On obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_p} \begin{bmatrix} (1 - \frac{\delta t}{\mathcal{R}_e} \Delta \Phi_i^u) & \delta t \nabla \Phi_i^p \\ 0 & \Delta \Phi_i^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{n+1} \\ \mathbf{b}_i^{n+1} \end{bmatrix} &+ \\ \sum_{i=N_p+1}^N \begin{bmatrix} (1 - \frac{\delta t}{\mathcal{R}_e} \Delta \Phi_i^u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g(\mathbf{a}^n) \\ h(\mathbf{a}^n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{\mathbf{u}}^{n+1} \\ R_p^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.66)$$

avec $\mathbf{a}^n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_N^n\}^T$ et $\mathbf{b}^n = \{b_1^n, b_2^n, \dots, b_N^n\}^T$. Les fonctions $g(\mathbf{a}^n)$ et $h(\mathbf{a}^n)$ sont définies à partir des fonctions $g(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ et $h(\tilde{\mathbf{u}}^n)$ avec introduction de la décomposition (4.62) du champ $\tilde{\mathbf{u}}$.

$R_{\mathbf{u}}^{n+1}$ et R_p^{n+1} correspondent aux résidus créés par l'approximation de la décomposition selon les modes $\Phi^{\mathbf{u}}$ et Φ^p . Ainsi, les équations de Navier-Stokes ne sont pas exactement satisfaites. On cherche donc à minimiser l'erreur commise, c'est-à-dire les résidus. Pour cela, Leblond et al. (2010) utilisent la méthode de minimisation classique définie ci-après.

Généralement, si le résidu du système à résoudre s'écrit sous la forme (supposons que le système s'écrive avec une seule matrice dont les blocs sont de taille N et que les inconnues sont notées x_i et y_i pour tout i) :

$$R = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i \begin{bmatrix} A_i \\ 0 \end{bmatrix} + y_i \begin{bmatrix} B_i \\ C_i \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

On note la fonctionnelle :

$$\mathcal{L} = \|R\|^2 = \langle R, R \rangle \quad (4.68)$$

dont on calcule la variation, en cherchant à l'annuler :

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \langle R, \delta R \rangle = 0 \quad (4.69)$$

Ce qui revient à :

$$\langle R, \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i \\ 0 \end{bmatrix} \delta x_i + \begin{bmatrix} B_i \\ C_i \end{bmatrix} \delta y_i \rangle = 0 \quad (4.70)$$

Ceci quelles que soient les variations δx_i et δy_i . Donc les deux équations à résoudre sont :

$$\langle R, \begin{bmatrix} A_i \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle R, \begin{bmatrix} B_i \\ C_i \end{bmatrix} \rangle = 0 \quad (4.71)$$

Ces équations sont donc à calculer selon le système à résoudre. Ici, le système a été écrit de façon générique, mais il est nécessaire de l'adapter non seulement au fait qu'il est constitué de plusieurs matrices - puisque selon le champ de vitesse ou de pression, le nombre de degrés de liberté diffère (N pour la vitesse, N_p pour la pression) - mais aussi au schéma temporel choisi.

Grâce à cette méthode, Leblond et al. (2010) montrent que, pour minimiser les résidus, le modèle d'ordre réduit doit être projeté non pas sur les modes POD (comme cela est fait, classiquement, pour la méthode de Galerkin), mais sur les "modes" modifiés suivants, pour le champ de vitesse :

$$\Psi_i^{\mathbf{u}} = \left[1 - \frac{\delta t}{\mathcal{R}_e} \Delta\right] \Phi_i^{\mathbf{u}} \quad (4.72)$$

la projection étant effectuée avec le produit scalaire L^2 .

Le problème de minimisation donne donc à résoudre :

$$\begin{cases} (\Psi_i^{\mathbf{u}}, R_{\mathbf{u}}^{n+1})_{L^2} = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, N \\ \delta t (\nabla \Phi_i^p, R_{\mathbf{u}}^{n+1})_{L^2} + (\Delta \Phi_i^p, R_p^{n+1})_{L^2} = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, N_p \end{cases} \quad (4.73)$$

Cette méthode se rapproche d'une projection de Galerkin, exception faite que les modes sur lesquels sont projetés les résidus ne sont pas les modes spatiaux Φ_i^u , mais les quantités Ψ_i^u .

L'autre distinction à faire se trouve dans la présence des termes de pression dans les résidus R_u^{n+1} et R_p^{n+1} : ils ne sont ni négligés, ni modélisés comme cela peut être le cas avec la méthode de Galerkin.

Ainsi, finalement, le système réduit peut s'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \delta t \mathbf{M}^c \\ \delta t \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{M}^p + \delta t^2 \tilde{\mathbf{M}}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{n+1} \\ \mathbf{b}_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(\mathbf{a}^n) \\ H(\mathbf{a}^n) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Ceci en projetant le système (4.66) sur les modes adaptés de la façon suivante : la première ligne du système est projetée sur Ψ_i^u , la deuxième ligne est projetée sur $\Delta\Phi_i^p$. Les éléments de ce système sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= (\Psi_i^u, \Psi_j^u)_{L^2} & \text{avec } i, j = 1, \dots, N \\ \mathbf{M}_{ij}^c &= (\Psi_i^u, \nabla\Phi_j^p)_{L^2} & \text{avec } i = 1, \dots, N \text{ et } j = 1, \dots, N_p \\ \tilde{\mathbf{M}}_{ij} &= (\nabla\Phi_i^p, \Psi_j^u)_{L^2} & \text{avec } i = 1, \dots, N_p \text{ et } j = 1, \dots, N \\ \tilde{\mathbf{M}}_{ij}^c &= (\nabla\Phi_i^p, \nabla\Phi_j^p)_{L^2} & \text{avec } i = 1, \dots, N_p \text{ et } j = 1, \dots, N_p \\ \mathbf{M}_{ij}^p &= (\Delta\Phi_i^p, \Delta\Phi_j^p)_{L^2} & \text{avec } i = 1, \dots, N_p \text{ et } j = 1, \dots, N_p \end{aligned} \quad (4.75)$$

avec $G(\mathbf{a}^n)$ et $H(\mathbf{a}^n)$ définis comme :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{a}^n) &= (g(\mathbf{a}^n), \Psi_j^u)_{L^2} \\ H(\mathbf{a}^n) &= (h(\mathbf{a}^n), \Delta\Phi_j^p)_{L^2} + (g(\mathbf{a}^n), \delta t \nabla\Phi_j^p)_{L^2} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Les coefficients polynomiaux ne sont évalués qu'une fois pour toutes, puisqu'ils ne dépendent pas du temps. La matrice du membre de gauche est inversée une seule fois elle aussi, c'est une procédure très rapide du fait de sa petite taille. Enfin, les coefficients \mathbf{a}^n et \mathbf{b}^n sont déterminés de façon itérative. Afin de s'affranchir du problème de l'écriture des laplaciens décrit dans le paragraphe 4.2.1.1, il serait possible d'écrire la méthode de projection optimale au premier ordre. Ceci aurait en effet un intérêt pour l'implémentation dans *Code_Saturne* afin de diminuer les effets difficiles à contrôler des opérateurs au second ordre. Cette méthode est décrite en annexe A.9.

Méthode de projection optimale pour l'écoulement au sein d'une cavité ventilée

Nous proposons l'application de la méthode de projection optimale au cas de l'écoulement d'un fluide au sein d'une cavité ventilée, afin de se référer au cas étudié par Leblond et al. (2010). L'avantage, pour nous, de ce cas d'étude est qu'il nous permet de rester dans une configuration dont les conditions aux limites sont simples. Leblond et al. (2010) souhaitent pouvoir, à terme, effectuer du contrôle actif dans cette configuration.

Le cas étudié est présenté en figure 4.24. La cavité est bidimensionnelle, de côté 1 et comporte une zone d'entrée d'air et une zone de sortie sur la frontière.

Ces deux zones sont d'épaisseur $e = 0,1$. Le reste de la frontière est composé de parois. L'air qui s'écoule est de viscosité dynamique égale à $1.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et de masse volumique 1 kg.m^{-3} . Comme la vitesse d'écoulement en entrée est imposée à 1 m.s^{-1} , le nombre de Reynolds est fixé à $\mathcal{R}_e = 1000$.

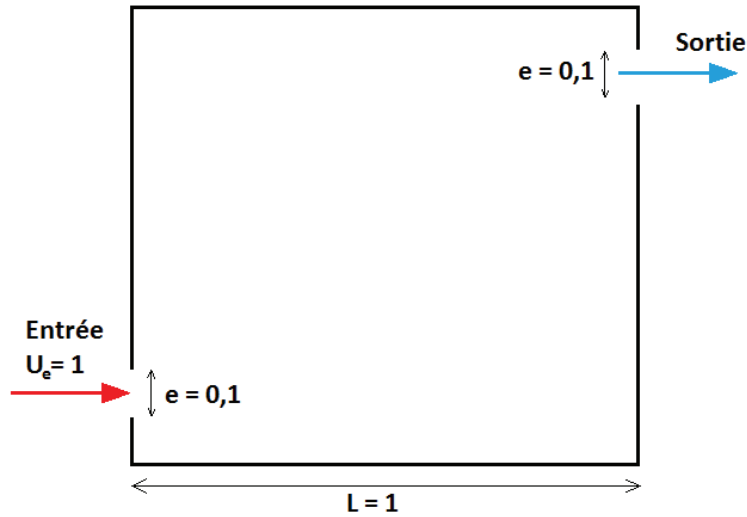


FIGURE 4.24 – Cavité ventilée étudiée pour l'application de la méthode de projection optimale

Avant de présenter les résultats obtenus avec la méthode de projection optimale, il est intéressant de faire quelques remarques préalables sur l'écriture des différents coefficients.

L'application de la méthode de projection optimale avec le code de calcul *Code_Saturne* nécessite en effet une adaptation à ses spécificités de formulation. Plusieurs étapes ont ainsi été nécessaires afin de parvenir à une écriture respectant au mieux l'architecture du code.

D'abord, *Code_Saturne* est dimensionnel, ce qui signifie que nous devons considérer l'écriture pour un système dynamique qui n'est pas formulé de façon adimensionnelle.

Par ailleurs, l'écriture des différents opérateurs d'ordre 1 (gradient, divergence) et d'ordre 2 (laplacien) doit être effectuée avec attention. Afin de calculer le laplacien, nous choisissons de travailler avec le même opérateur que celui qui est utilisé pour traiter le terme de diffusion. En effet, ce terme étant sous la forme :

$$\nabla \cdot (\beta \nabla A) \tag{4.77}$$

il est possible, en plaçant artificiellement la variable β à 1, d'obtenir vraiment l'approximation d'ordre deux du laplacien puisque pour cet opérateur, on se place sur les faces. Pour décrire son fonctionnement avec un cas unidimensionnel simple, on obtient, pour le champ u dépendant de la variable d'espace x , avec Ω_I le volume de la cellule numérotée I considérée et $h_{I+1/2}$ le pas d'espace pour la cellule $[I, I + 1]$

(voir figure 4.25) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2u}{dx^2} &\simeq \frac{1}{|\Omega_I|} \int_{\Omega_I} \frac{d^2u}{dx^2} dx \\
 &\simeq \frac{1}{|\Omega_I|} \left[\frac{du}{dx} \right]_{I-1/2}^{I+1/2} \\
 &\simeq \frac{1}{|\Omega_I|} \left[\frac{du}{dx} \Big|_{I+1/2} - \frac{du}{dx} \Big|_{I-1/2} \right] \\
 &\simeq \frac{1}{|\Omega_I|} \left[\frac{u_{I+1} - u_I}{h_{I+1/2}} - \frac{u_I - u_{I-1}}{h_{I-1/2}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

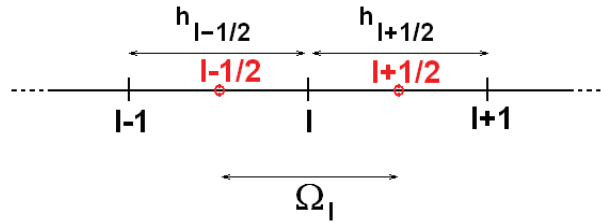


FIGURE 4.25 – Notations du calcul du laplacien pour un cas unidimensionnel

Donc l'opérateur calculé est bien un laplacien. Dans *Code_Saturne*, les calculs de tous les opérateurs aux bords du domaine nécessitent l'introduction de coefficients spécifiques. Pour plus de précision, on se réfèrera à l'annexe A.8 décrivant la méthode utilisée.

Par ailleurs, on remarque que, dans l'écriture de $h(\mathbf{u}^n)$ (4.65), après remplacement de la vitesse par sa décomposition (4.62), le terme

$$\nabla \cdot [(\Phi_i \cdot \nabla) \Phi_j] \tag{4.79}$$

peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

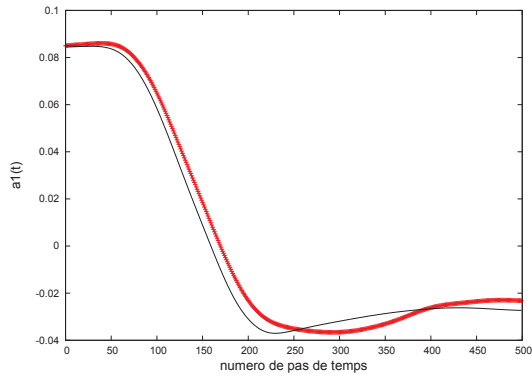
$$\nabla \cdot [(\Phi_i \cdot \nabla) \Phi_j] = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \tag{4.80}$$

puisque le champ de vitesse est à divergence nulle et que les modes POD qui y sont associés vérifient également cette condition.

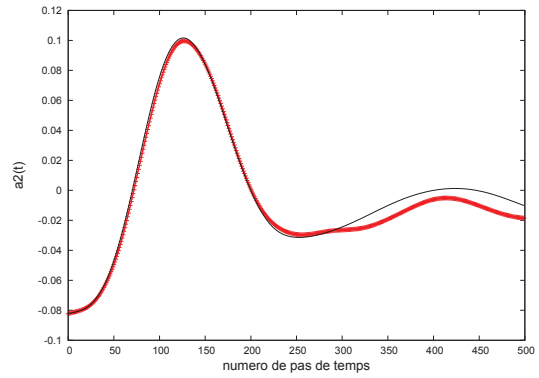
Dans un premier temps, un calcul complet est effectué afin de constituer l'échantillon de snapshots. 500 snapshots sur 5000 pas de temps ont été rassemblés à partir d'un calcul mené par Tallet (2010) avec *Code_Saturne* sur un intervalle de temps de 10 secondes.

Le pas de temps entre deux snapshots est donc de $\Delta t = 0,02$ s.

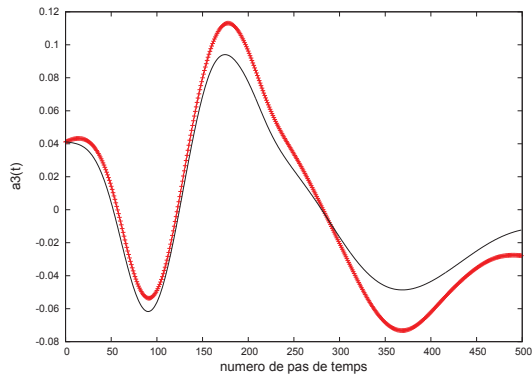
La méthode POD habituelle avec projection de Galerkin pour la construction du système dynamique est effectuée sur ce cas. Dans un premier temps, aucune stabilisation du système dynamique n'est proposée et 15 modes POD sont retenus. Les résultats en termes de coefficients temporels et de champ de vitesse dans le domaine sont rassemblés en figures 4.26 et 4.27.



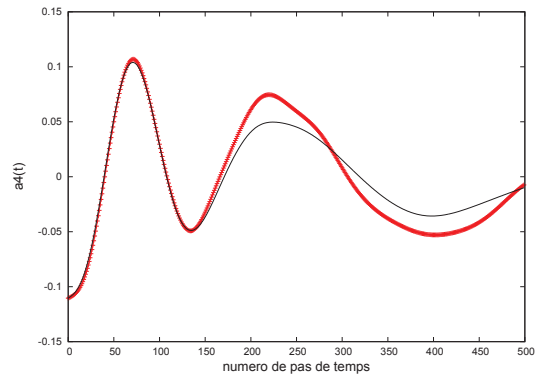
a) Premier coefficient



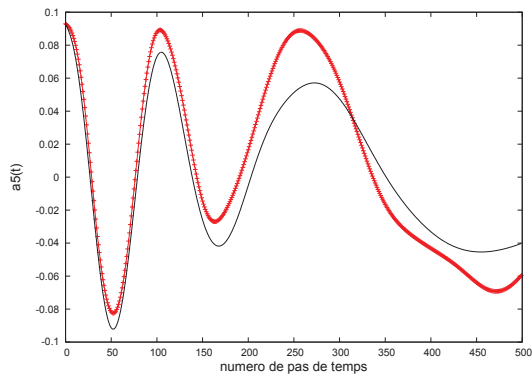
b) Deuxième coefficient



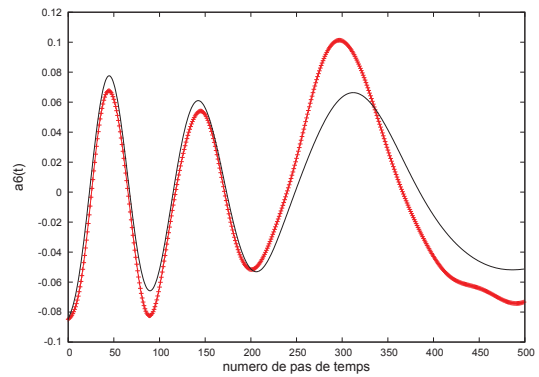
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient



e) Cinquième coefficient



f) Sixième coefficient

FIGURE 4.26 – Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant du fluide au sein d'une cavité ventilée ; — calcul direct ; +++ reconstruction avec 15 modes sans stabilisation

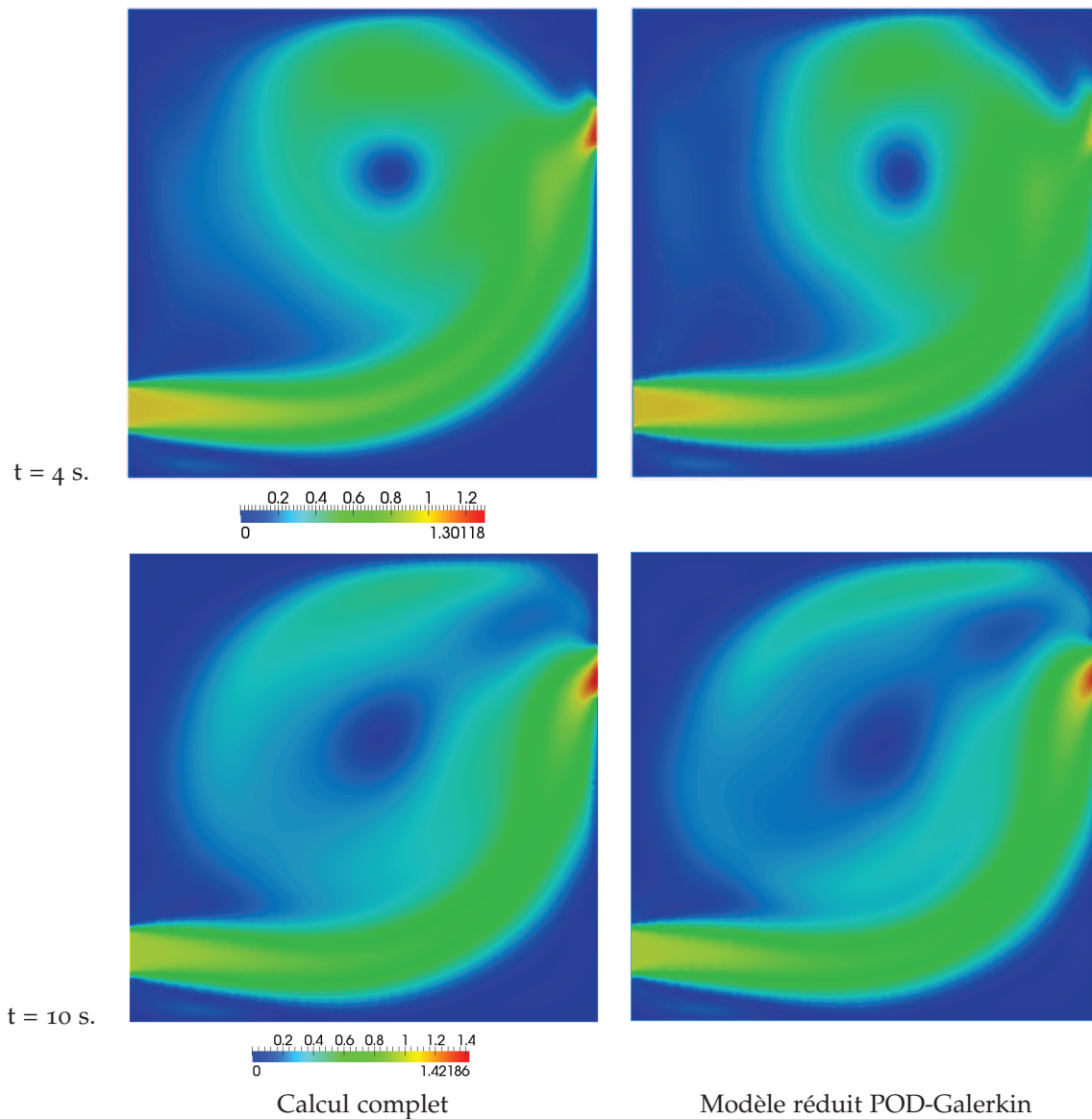


FIGURE 4.27 – Captures du champ de vitesse globale dans le domaine de la cavité à deux dates différentes, colonne de gauche : calcul complet ; colonne de droite : modèle réduit POD-Galerkin

Le champ de vitesse globale est donc correctement reconstruit sur tout l'intervalle de temps. La méthode de projection optimale peut avoir un effet stabilisateur sur les résultats, même si ces derniers sont déjà corrects. Les résultats de l'application de la méthode POD-Galerkin par Leblond et al. (2010) sont moins proches du calcul complet ; c'est pourquoi leur recours à l'utilisation de la méthode de projection optimale est plus justifiée que dans le cas présent.

Cependant, nous appliquons tout de même la méthode de projection optimale pour le cas de la cavité ventilée. Pour cela, nous avons développé un module spécifique dans *Code_Saturne*, ainsi que nous l'avons fait pour la méthode POD. Le calcul est mené avec 15 modes POD pour la vitesse et 8 modes POD pour la pression. Leblond et al. (2010) conservent 15 modes en vitesse et 12 en pression ; ici le résultat n'est pas modifié en augmentant le nombre de modes en pression au-delà

de 8. Les modes modifiés notés Ψ et définis par (4.72) sont normés, de la même façon que cela est fait dans la méthode POD avec projection de Galerkin.

La figure 4.28 présente les résultats obtenus en termes de coefficients temporels de vitesse, en comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode de projection de Galerkin. On remarque que la méthode de projection optimale a un léger effet stabilisateur comme cela était attendu, surtout sur les deux premiers coefficients ; cependant, celui-ci n'est pas très marqué du fait des résultats déjà très corrects obtenus avec la méthode de Galerkin.

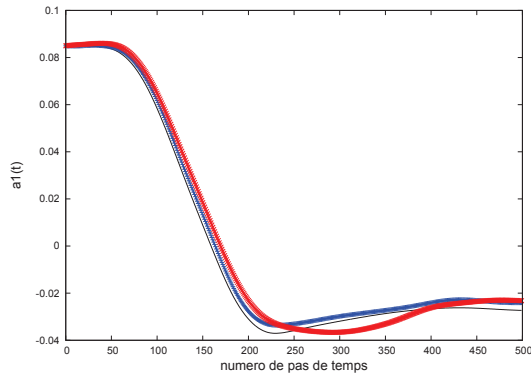
Cependant, un problème persiste dans la reconstruction des coefficients temporels de pression. En effet, comme on peut le voir sur la figure 4.29, ces derniers sont mal reconstruits par l'algorithme actuel. L'allure générale du coefficient est bien reconstruite ; par contre, il existe un décalage qui semble être une valeur constante pour chaque mode mais différente d'un mode à l'autre, puisque pour les modes d'indices élevés, l'écart entre le coefficient POD et sa reconstruction semble s'atténuer. Nous n'avons pas pu donner de conclusion satisfaisante à cette observation ; cependant, une piste proposée est celle qui consiste à rappeler que la pression est définie à une constante près et que cette dernière n'est pas accessible lors de la reconstruction des champs par modèle réduit, puisque par définition, les champs ne sont pas connus au-delà des clichés conservés. La reconstruction globale du champ de pression n'est pas présentée ici car elle fournit des résultats aberrants.

Remarque 4.2 *Ces résultats sont similaires dans le cas de l'étude de l'écoulement autour du tube seul. En effet, les résultats obtenus avec la méthode de projection de Galerkin sont déjà très satisfaisants (si l'on conserve la formulation du système dynamique contenant les opérateurs du second ordre sans faire d'intégration par partie) pour ne pas avoir recours à l'utilisation de la méthode de projection optimale.*

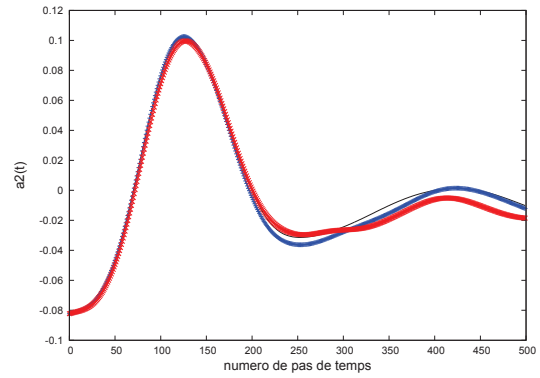
Nous avons procédé à la vérification de cette affirmation et la différence entre les deux types de projection (Galerkin ou optimale) reste effectivement très faible en ce qui concerne la reconstruction des coefficients temporels du champ de vitesse ; la reconstruction des coefficients temporels de pression étant tout aussi mauvaise.

Quant à l'application de la méthode de projection optimale au cas du faisceau de tubes fixes, nous avons rencontré un problème dans le calcul des opérateurs liés au champ de pression : en effet, les champs étant déjà très agités, leur reproduction est délicate lorsque l'on augmente l'ordre de dérivation (les dispersions sont plus importantes). Ainsi, pour des géométries plus complexes, les résultats semblent se dégrader.

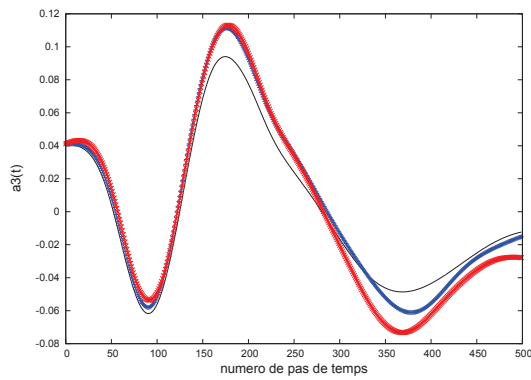
En conclusion, la méthode de projection optimale peut avoir un fort intérêt dans le cas où la méthode de projection de Galerkin échoue et pour des géométries relativement simples ; par contre, lorsque cette dernière fournit déjà des résultats corrects, l'amélioration par la modification de la projection reste faible et n'a donc pas d'intérêt particulier, puisqu'elle nécessite la création de snapshots pour la pression ainsi que la construction d'un système dynamique plus lourd, comportant les termes de pression.



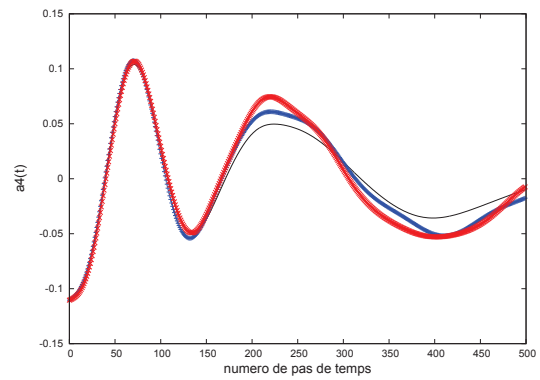
a) Premier coefficient



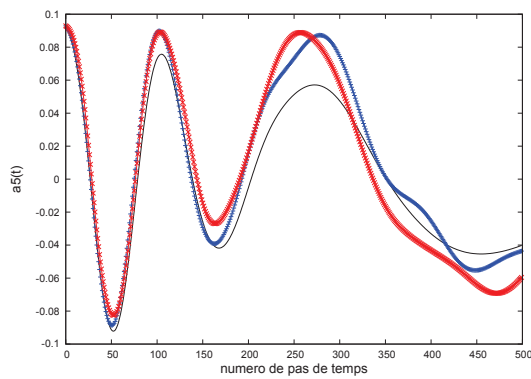
b) Deuxième coefficient



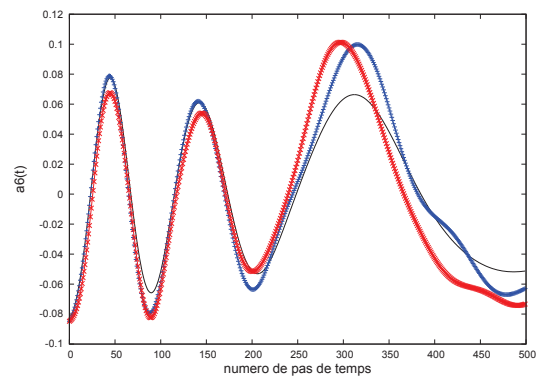
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient

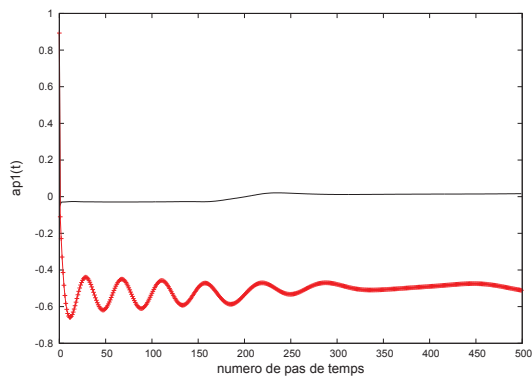


e) Cinquième coefficient

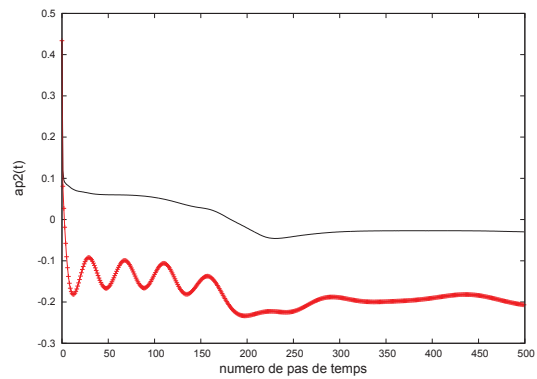


f) Sixième coefficient

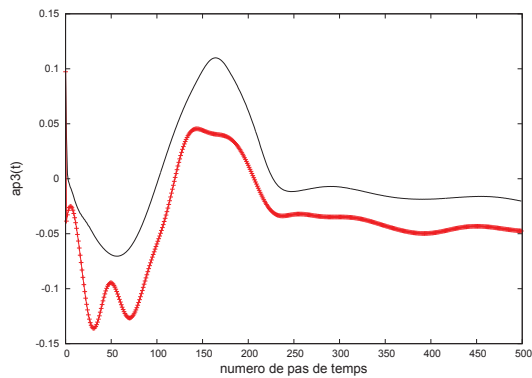
FIGURE 4.28 – Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de vitesse du fluide au sein d'une cavité ventilée ; — calcul direct ; $\times\times\times$ reconstruction avec 15 modes par projection de Galerkin sans stabilisation ; $++$ reconstruction avec 15 modes de vitesse et 8 modes de pression par projection optimale sans stabilisation



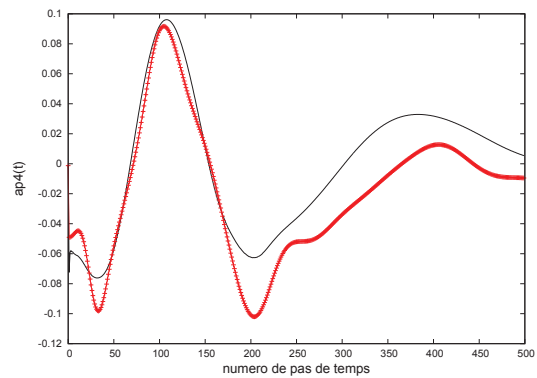
a) Premier coefficient



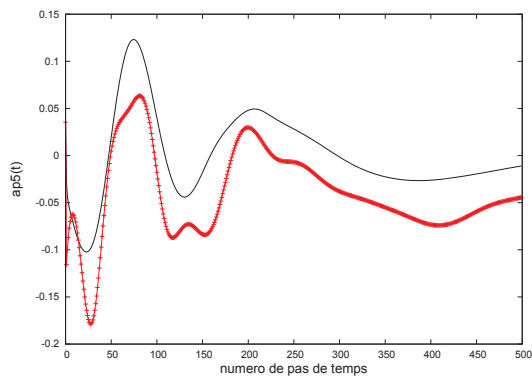
b) Deuxième coefficient



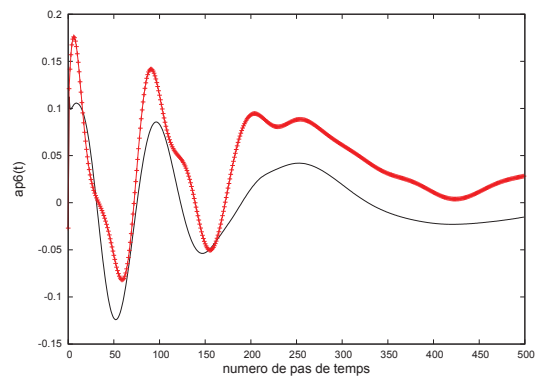
c) Troisième coefficient



d) Quatrième coefficient



e) Cinquième coefficient



f) Sixième coefficient

FIGURE 4.29 – Observation des coefficients temporels pour le système dynamique d'ordre réduit pour le champ fluctuant de pression du fluide au sein d'une cavité ventilée; — calcul direct; +++ reconstruction avec 15 modes de vitesse et 8 modes de pression par projection optimale sans stabilisation

Pour le moment, le schéma temporel choisi par Leblond et al. (2010) et reproduit jusqu'ici pour la construction du système dynamique par projec-

tion optimale est d'ordre 1, puisque c'est un schéma d'Euler semi-implicite. Étant donné que les calculs complets obtenus avec *Code_Saturne* peuvent être effectués à partir d'un schéma d'ordre deux en temps, il serait intéressant de travailler avec un schéma du même ordre pour la construction du système dynamique. L'écriture de la méthode est proposée en annexe A.10.

4.2.3 Conclusion

La méthode POD présente des avantages indéniables pour réduire les temps de calcul des écoulements. Ici, nous avons toujours comparé nos modèles réduits aux modèles complets. Ceci a peu d'intérêt pour l'ingénieur qui cherche à étudier un problème non connu *a priori*. Cependant, le fait d'éprouver la méthode d'ordre réduit sur des cas connus et/ou complexes permet de la calibrer pour une utilisation plus avancée (par les méthodes *a priori* par exemple). Ainsi, nous avons pu constater la nécessité de mettre en place une méthode de stabilisation pour le cas du faisceau de tubes.

Les avantages et inconvénients de différentes techniques ont été explorés. La méthode de projection optimale, dans notre cas du moins, n'apporte pas d'amélioration notable. La technique de modification de la norme en passant dans l'espace H^1 permet, pour l'équation de Burgers, de réduire d'un mode la base POD. Cela étant, le gain est faible par rapport à la lourdeur des calculs dès lors que les coefficients du système dynamique sont conséquents. Les méthodes d'optimisation de la constante à rajouter à la viscosité peuvent devenir également coûteuses et de plus, elles ne permettent pas toujours de s'affranchir de la connaissance de la solution. Par sa simplicité et la qualité des résultats fournis, nous avons fait le choix de conserver la méthode proposée par Cazemier (1997).

Le prochain chapitre est consacré à la description détaillée de la méthode appelée POD multiphasique adaptée à l'interaction fluide-structure et introduite par Liberge (2008), technique que nous appliquerons au cas des vibrations d'un tube en milieu semi-infini, puis confiné dans un faisceau de tubes.

UNE TECHNIQUE PRIVILÉGIÉE POUR L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE : L'APPROCHE MULTIPHASIQUE

5

5.1 PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Nous nous intéressons plus particulièrement à la méthode POD multiphasique pour l'étude de vibrations de structures sous écoulement à plus ou moins grande amplitude. De plus, l'universalité de la méthode concernant la provenance des données échantillonnées est un atout primordial pour une utilisation industrielle. Cette présentation s'inspire des travaux de Liberge (2008).

5.1.1 Première approche

Soit Ω un espace de \mathbb{R}^3 tel que l'on ait $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f \cup \Gamma_i$ avec Ω_s le domaine occupé par la structure, Ω_f le domaine occupé par le fluide et Γ_i l'interface entre ces deux domaines. On vérifie $\Omega_s \cap \Omega_f = \emptyset$. Les domaines Ω_s et Ω_f sont dépendants du temps, on écrit donc $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$. L'interface entre ces deux domaines qui dépend elle aussi du temps est notée $\Gamma_i(t)$. On note également $\Gamma_f = \partial\Omega \setminus \Gamma_i$. Par convention, on choisira toujours la normale \mathbf{n} extérieure au domaine solide.

Comme l'on choisit de travailler avec un champ de vitesse \mathbf{u} global sur le domaine Ω , ce champ s'écrit grâce à des fonctions caractéristiques selon qu'il est calculé dans $\Omega_s(t)$ ou $\Omega_f(t)$:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_s(x, t)\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) + \mathbf{u}_f(x, t)\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{u}_s(x, t)$ le champ de vitesse de la structure sur l'espace Ω_s et $\mathbf{u}_f(x, t)$ le champ de vitesse du fluide sur l'espace $\Omega_f(t)$. Les fonctions caractéristiques sont respectivement notées \mathbb{I}_{Ω_s} et \mathbb{I}_{Ω_f} et l'on a $\mathbb{I}_{\Omega_s} = 1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}$. La fonction \mathbb{I}_{Ω_f} est définie comme :

$$\mathbb{I}_{\Omega_f} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{\Omega_f}(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La structure est considérée comme rigide. En utilisant le champ de vitesse défini par (5.1), il est possible d'étendre les équations de Navier-Stokes, initialement variables uniquement sur l'espace $\Omega_f(t)$ à tout le domaine Ω , en considérant le solide comme un fluide particulier. Pour cela, les grandeurs physiques de ce fluide particulier seront définies comme différentes de celle du fluide présent dans $\Omega_f(t)$, et la contrainte de rigidité du domaine $\Omega_s(t)$ est prise en compte dans les équations. Les

grandeurs physiques seront notées avec un indice s si ce sont celles de la structure et un indice f pour le fluide. La masse volumique est notée ρ .

5.1.1.1 Domaine fluide

Dans un premier temps, on considère les équations sur le domaine fluide $\Omega_f(t)$, c'est-à-dire les équations de Navier-Stokes incompressibles pour le domaine $\Omega_f(t)$:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}_f$ le tenseur des contraintes de Cauchy dans le fluide. Ce tenseur s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = -pI + 2\mu\mathbf{D} \quad (5.3)$$

avec I l'identité, μ respectivement coefficient de viscosité dynamique et \mathbf{D} le tenseur des taux de déformations.

5.1.1.2 Domaine solide

Les équations pour la structure, considérée comme un système rigide, s'écrivent :

$$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{u}_G}{dt} = \mathcal{F}_f + \mathcal{F}_s \\ J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathcal{M}_f + \mathcal{M}_s \end{cases} \quad (5.4)$$

où m est la masse de la structure, \mathbf{u}_G est la vitesse du centre de gravité de la structure, $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur instantané de rotation de la structure, J est l'opérateur d'inertie de la structure par rapport à son centre de gravité. \mathcal{F}_f représente la résultante des forces dues à l'action du fluide sur la structure et \mathcal{F}_s la résultante des autres forces extérieures solides ; \mathcal{M}_f représente le moment dû à l'action du fluide sur la structure en son centre de gravité et \mathcal{M}_s le moment des autres forces extérieures. On a sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f &= \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} dx \\ \mathcal{F}_s &= \int_{\Omega_s} f_s dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec \mathbf{n} la normale à l'interface fluide-structure, choisie comme étant positive à l'extérieur du solide. Et également :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f &= \int_{\Gamma_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \times \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} dx \\ \mathcal{M}_s &= \int_{\Omega_s} \mathbf{x} \times f_s dx \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec \mathbf{x} un point du domaine considéré. La condition de solide rigide s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_G(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \quad (5.7)$$

Condition qui, localement, est équivalente à définir un tenseur des vitesses de déformations nul, soit :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_s(x, t)) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_s(x, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}_s(x, t)) = 0 \quad \forall x \in \Omega_s \quad (5.8)$$

Enfin, à l'interface fluide-structure on a les conditions :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s|_{\Gamma_i} = \mathbf{u}_f|_{\Gamma_i} \\ \boldsymbol{\sigma}_s|_{\Gamma_i} = \boldsymbol{\sigma}_f|_{\Gamma_i} \end{cases} \quad (5.9)$$

L'objectif, ici, est d'écrire une équation dans le domaine global Ω , celle-ci est présentée ci-dessous.

5.1.1.3 Formulation variationnelle globale

Sous forme variationnelle on peut écrire, sur l'espace Ω tout entier :
Pour tout \mathbf{u}^* tel que $\mathbf{u}^* \in \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in H(\Omega), \mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega_s\}$ et pour $q \in L_0^2(\Omega) = \{r \in L^2(\Omega) | \int_{\Omega} r dx = 0\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{u}^* dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \mathbf{u}^* dx &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{u}^* dx + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} f_s \mathbf{u}^* dx \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q dx &= 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{u}_s(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) + \mathbf{u}_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \\ \rho(x, t) &= \rho_s \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) + \rho_f \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(x, t) &= \boldsymbol{\sigma}_s(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) + \boldsymbol{\sigma}_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \end{aligned}$$

Ainsi, ce sont les fonctions caractéristiques \mathbb{I}_{Ω_s} et \mathbb{I}_{Ω_f} qui permettront de définir si l'on résout cette formulation avec les grandeurs fluides ou solides.

À cette formulation variationnelle, il est nécessaire de rajouter la condition de solide rigide (5.8) qui n'a pas encore été prise en compte. Pour cela, en pratique, on définit la forme du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_s$ avec un multiplicateur de Lagrange \mathcal{L} . On inclut ce multiplicateur de Lagrange sous la forme d'un tenseur des déformations, c'est-à-dire que l'on écrit : $\mathcal{L} = \mathbf{D}(\Lambda)$. La stabilisation de ce multiplicateur peut se faire par l'ajout d'un terme de pénalisation qui est en fait une augmentation artificielle du coefficient de viscosité de dilatation μ_s . Ainsi, le tenseur des contraintes pour le solide en tant que fluide particulier s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = -pI + D(\Lambda) + 2\mu_s \mathbf{D}(\mathbf{u}_s) \quad (5.11)$$

5.1.1.4 Formulation variationnelle développée

En développant le tenseur des contraintes, on obtient :
 $\forall \mathbf{u}^* \in \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in H(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $q \in L_0^2(\Omega)$, champ permettant d'introduire la divergence de la vitesse dans la formulation faible (divergence qui s'annule dans le cas d'un fluide incompressible), déterminer $\mathbf{u} \in H(\Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$ et $\Lambda \in H(\Omega_s)$ tels que :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \mathbf{u}^* dx &= \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u}^* dx - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} dx - 2 \int_{\Omega} \mu \text{Tr}[\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{D}(\mathbf{u}^*)] dx \\
 &- \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} \text{Tr}[\mathbf{D}(\Lambda)\mathbf{D}(\mathbf{u}^*)] dx + \int_{\Omega} f_s \cdot \mathbf{u}^* dx - 2 \int_{\Gamma_f} \mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\gamma \\
 &- \int_{\Gamma_i} \mathbb{I}_{\Omega_s} [\mathbf{D}(\Lambda)\mathbf{n}] \cdot \mathbf{u}^* d\gamma - \int_{\Gamma_f} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\gamma
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Avec $d\gamma$ une mesure de la frontière considérée.

$$\mu(x, t) = \mu_s(x, t)\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) + \mu_f(x, t)\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \tag{5.13}$$

Liberge (2008) et Liberge et Hamdouni (2010) exploitent cette formulation en effectuant la décomposition orthogonale aux valeurs propres de différents champs de vitesse globaux définis pour un domaine Ω contenant une partie fluide et une partie solide.

Maintenant que le cadre de l'étude est fixé et que la formulation variationnelle pour l'ensemble du domaine Ω est écrite, il est possible de définir un système dynamique pour tout le domaine d'étude. Cette écriture permettra ensuite de définir un modèle d'ordre réduit, ce qui est l'objectif de cette approche multiphasique.

5.1.2 Écriture du système dynamique

Grâce à la formulation variationnelle (5.12), il est possible d'écrire un système dynamique associé au problème global sur le domaine Ω , pour un champ de vitesse $\mathbf{u}(x, t)$ à divergence nulle que l'on décompose de telle sorte que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$, avec $\bar{\mathbf{u}}$ le champ moyen et \mathbf{u}' le champ fluctuant.

En tenant compte des conditions aux limites à l'interface et en rappelant que le champ de vitesse fluctuant \mathbf{u}' s'écrit de façon approchée sur la base des modes POD $\{\Phi'\}_{n,n=1,\dots,N}$:

$$\mathbf{u}'(x, t) \simeq \sum_{n=1}^N a^n(t) \Phi'_n(x) \tag{5.14}$$

où la base des modes propres POD fluctuants est $\{\Phi'\}_{n,n=1,\dots,N}$, la projection de la formulation variationnelle (5.12) sur les modes POD fluctuants fournit le système dynamique suivant pour tout $n = 1, \dots, N$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \frac{da^i}{dt} A_{in} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_{ijn} a^i a^j + \sum_{i=1}^N C_{in} a^i + D_n + E_n \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \Omega_s \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_s}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_s} = 0 \end{array} \right. \tag{5.15}$$

avec, puisque l'on teste sur les fonctions propres POD :

$$\begin{aligned}
A_{in} &= \int_{\Omega} \rho(x, t) \Phi'_i(x) \cdot \Phi'_n(x) dx \\
B_{ijn} &= - \int_{\Omega} \rho(x, t) (\Phi'_i(x) \cdot \nabla) \Phi'_j(x) \cdot \Phi'_n(x) dx \\
C_{in} &= - \int_{\Omega} \rho(x, t) [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \Phi'_i(x) + (\Phi'_i(x) \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}] \cdot \Phi'_n(x) dx \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} \mu(x, t) \mathbf{Tr}[\mathbf{D}(\Phi'_i) \mathbf{D}(\Phi'_n(x))] dx \\
&\quad - 2 \int_{\Gamma_f} \mu(x, t) \mathbf{D}(\Phi'_i) \Phi'_n(x) \mathbf{n} d\gamma \\
D_n &= - \int_{\Omega} \rho(x, t) (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \cdot \Phi'_n(x) dx - 2 \int_{\Omega} \mu(x, t) \mathbf{Tr}[\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{D}(\Phi'_n(x))] dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} \mathbf{Tr}[\mathbf{D}(\Lambda) \mathbf{D}(\Phi'_n(x))] dx \\
E_n &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s} f_s \Phi'_n dx - \int_{\Gamma_i} \mathbb{I}_{\Omega_s} \mathbf{D}(\Lambda) \mathbf{n} \cdot \Phi'_n(x) d\gamma - 2 \int_{\Gamma_f} \mu(x, t) \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n} \cdot \Phi'_n d\gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_f} p \mathbf{n} \cdot \Phi'_n d\gamma
\end{aligned}$$

La fonction caractéristique suit classiquement la loi d'une équation de transport. Les modes POD $\{\Phi'_n\}_{n=1, \dots, N}$ sont orthonormés et de plus, étant à divergence nulle, ils vérifient $\nabla \cdot \Phi'_n = 0$ pour tout $n = 1, \dots, N$.

Il est possible (Allery 2002) de modéliser le terme de pression qui apparaît sur le bord du domaine fluide en dehors de l'interface, de la même façon que dans le paragraphe 4.1.2. Le terme de pression à l'interface, lui, disparaît puisque l'on teste la formulation sur les modes POD selon le domaine considéré et c'est notamment ce qui fait l'intérêt de cette approche POD-multiphasique.

On remarque, dans cette formulation, des modifications majeures par rapport au système dynamique classique écrit pour le cas d'un écoulement en présence d'une structure fixe. Notamment, comme les coefficients du système dynamique contiennent les grandeurs physiques ρ et ν , qui elles-mêmes sont des fonctions de l'espace et du temps, il devient nécessaire de recalculer les coefficients à chaque nouveau pas de temps. Ceci alourdit considérablement les calculs par rapport à la résolution du système dynamique classique où les coefficients du système sont spatiaux et sont donc calculés une fois pour toutes.

C'est pourquoi, Liberge et al. (2009) ont proposé une seconde approche qui permet de ne calculer les coefficients du système dynamique qu'une seule fois au début du calcul. Pour cela, la fonction caractéristique contenant l'information sur la position de la structure est elle aussi décomposée selon les modes POD de la base. Cette seconde approche est présentée dans le paragraphe suivant.

5.1.3 Seconde approche

Une seconde approche est proposée par Liberge et al. (2009) afin d'éviter le calcul des coefficients du système dynamique à chaque pas de temps, ils proposent de décomposer la fonction caractéristique \mathbb{I}_{Ω_s} sur une base POD $\{\Phi_i^{fc}\}_{i=1, \dots, N_c}$ et de

décomposer aussi le multiplicateur de Lagrange sur la base POD utilisée pour le champ de vitesse. Ainsi, on écrit les décompositions suivantes :

$$\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_c} b_i(t) \Phi_i^{\text{fc}}(x) \quad (5.16)$$

$$\Lambda(x, t) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i(t) \Phi_i(x) \quad (5.17)$$

où N_c et N_l sont respectivement le nombre de modes POD retenus pour la base décrivant la fonction caractéristique et le nombre de modes POD retenus pour la base du champ de vitesse pour décrire le multiplicateur de Lagrange. Par la suite, on imposera $N_l = N$.

Le système dynamique s'écrit alors, pour le champ fluctuant, pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout $p = 1, \dots, N_c$:

$$\begin{aligned} & \rho_f \frac{da_n}{dt} + (\rho_s - \rho_f) \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{N_f} \frac{da_k}{dt} b_p A_{pkn} + \rho_f \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a_k a_j B_{kjn}^{(1)} + \\ & (\rho_s - \rho_f) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^{N_f} a_k a_j b_p B_{kjp}^{(2)} + 2\mu_f \sum_{k=1}^N a_k C_{kn}^{(1)} + 2(\mu_s - \mu_f) \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{N_f} a_k b_p C_{kpn}^{(2)} + \\ & \rho_f \sum_{k=1}^N a_k C_{kn}^{(3)} + (\rho_s - \rho_f) \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{N_f} a_k b_p C_{kpn}^{(4)} + D_n^{(1)} + \sum_{p=1}^{N_f} b_p D_{pn}^{(2)} = \\ & \sum_{r=1}^N \sum_{p=1}^{N_f} b_p c_r F_{prn} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Système qui est associé aux deux équations suivantes, la première régissant l'évolution de la fonction caractéristique, la seconde la condition d'indéformabilité du solide :

$$\frac{db_q}{dt} + \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^{N_c} a_k b_p E_{kpq} = 0 \quad (5.19)$$

$$\sum_{p=1}^{N_c} \sum_{k=1}^N b_p a_k G_{kpq} = 0 \quad (5.20)$$

Les coefficients du système précédent sont décrits comme suit ; ils ne sont calculés qu'une seule fois pour toutes :

$$\begin{aligned}
A_{pkn} &= (\Phi_p^{\text{fc}} \Phi_k, \Phi_n) & C_{kpn}^{(4)} &= (\Phi_p^{\text{fc}} (\nabla \bar{\mathbf{u}} \Phi_k + \bar{\mathbf{u}} \nabla \Phi_k), \Phi_n) \\
B_{kjn}^{(1)} &= ((\Phi_k \cdot \nabla) \Phi_j, \Phi_n) & D_n^{(1)} &= (f, \Phi_n) \\
B_{kjp}^{(2)} &= ((\Phi_p^{\text{fc}} \Phi_k \cdot \nabla) \Phi_j, \Phi_n) & D_{pn}^{(2)} &= (f \Phi_p^{\text{fc}}, \Phi_n) \\
C_{kn}^{(1)} &= \int_{\Omega} \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_k) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx & F_{prn} &= \int_{\Omega} \Phi_p^{\text{fc}} \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_r) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx \\
C_{kpn}^{(2)} &= \int_{\Omega} \Phi_p^{\text{fc}} \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_k) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx & E_{kpq} &= ((\Phi_k \cdot \nabla) \Phi_p^{\text{fc}}, \Phi_q^{\text{fc}}) \\
C_{kn}^{(3)} &= (\nabla \bar{\mathbf{u}} \Phi_k + \bar{\mathbf{u}} \nabla \Phi_k, \Phi_n) & G_{kpq} &= \int_{\Omega} \Phi_p^{\text{fc}} \text{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_k) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx
\end{aligned}$$

Remarque 5.1 *Liberge (2008) fait remarquer que la décomposition de la fonction caractéristique sur la base POD associée peut faire apparaître des oscillations (phénomène de Gibbs). Il propose alors la décomposition de la fonction Level-Set pour déterminer la fonction caractéristique.*

5.1.4 Mise en œuvre des calculs pour la méthode POD-multiphasique

En résumé, les étapes du calcul sont les suivantes :

- ▷ Un calcul complet est effectué grâce à la méthode ALE par exemple, permettant de prendre en compte les déplacements de la structure
- ▷ Un nombre suffisant de clichés temporels du calcul complet est extrait
- ▷ Un maillage cartésien, fixe au cours du temps, est créé afin d'y interpoler chaque cliché mobile
- ▷ Les clichés du calcul complet sont interpolés sur la grille fixe, ce qui génère de nouveau "clichés fixes" à partir desquels sera construite la matrice de corrélation
- ▷ La méthode "snapshot POD" est appliquée à ces nouveaux clichés :
 - La matrice de corrélation est construite
 - La base des vecteurs propres de la matrice de corrélation et leurs valeurs propres associées sont extraites
 - Ces vecteurs propres (modes POD) sont orthonormés
 - La condition initiale des coefficients temporels est déduite des modes POD
- ▷ Le système dynamique est construit selon la formulation (5.15) ou (5.18), en projetant les équations du problème sur les modes POD. Le calcul du multiplicateur de Lagrange permettant d'assurer la contrainte d'indéformabilité du cylindre se fait grâce à l'implémentation d'un algorithme d'Uzawa :
 - Pour l'itération k , on connaît le multiplicateur Λ_k .
 - Sa valeur à la date suivante est $\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \alpha \mathbf{u}$ avec α un réel fixé et \mathbf{u} le champ de vitesse à l'itération temporelle courante.
 - On écrit ensuite :

$$\mathbf{D}(\Lambda_{k+1}) = \mathbf{D}(\Lambda_k) + \alpha \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (5.21)$$

- On itère tant que $\|\mathbf{D}(\mathbf{u})\| > \varepsilon$.

5.1.5 Intérêt industriel de la méthode

L'approche POD-multiphasique, on l'a vu, permet de traiter les systèmes d'interaction fluide-structure sans avoir à effectuer de couplage de code de calcul tout en offrant, *a priori*, la possibilité de traiter des grands déplacements de la structure au sein du fluide.

De plus, elle présente un intérêt majeur pour l'utilisateur : il suffit de posséder une grille de lecture des données à traiter pour pouvoir l'appliquer, sans avoir à connaître leur origine. Ainsi, l'opérateur de la méthode POD-multiphasique peut recevoir les données d'un calculateur, quel que soit le code de calcul que ce dernier utilise, ou encore les données d'un opérateur, quel que soit le mode opératoire de sa campagne d'essais, pourvu qu'il sache comment lire les données. Ainsi, il est possible d'appliquer la méthode POD-multiphasique en considérant les données d'entrée comme provenant d'une "boîte noire".

5.2 EXEMPLE SIMPLE D'APPLICATION

5.2.1 Tube mobile en grands déplacements

Dans un premier temps, afin d'appliquer la méthode POD multiphasique, nous nous intéressons au cas simple de l'écoulement transversal autour d'un tube seul soumis aux efforts du fluide. Nous nous plaçons dans la même configuration géométrique que dans le cas de l'étude POD pour le cylindre fixe (voir figure 5.1 pour rappel). Le cylindre est libre d'osciller dans la direction y transverse à celle de l'écoulement moyen, de la même façon que dans la partie 2.2 où nous étudions le phénomène d'accrochage en fréquence. L'effort solide volumique équivalent est simplement défini par :

$$f_s = k_s(y(t) - y_0) \tag{5.22}$$

avec $y(t)$ la position à l'instant t du centre de gravité du solide et y_0 sa position initiale.

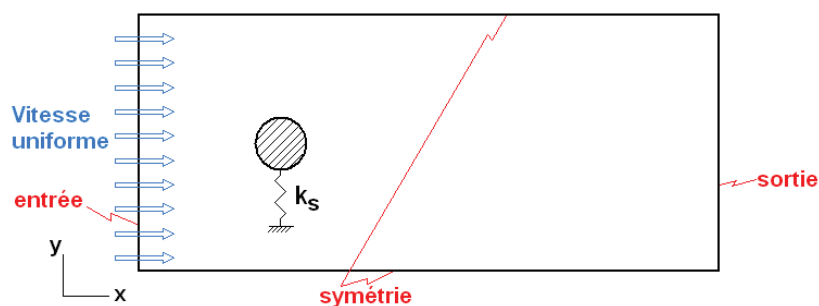


FIGURE 5.1 – Conditions imposées au cas du tube seul mobile en milieu infini

Nous nous intéressons au cas des vibrations de grande amplitude du cylindre, qui est le cas le plus difficile à gérer avec les méthodes de réduction de modèle actuelles. Le cas des petits déplacements dans une configuration similaire a été proposé et validé par Liberge (2008). Les résultats obtenus sont encourageants et nous permettront de nous intéresser au cas du faisceau de tubes. Nous présentons maintenant les différentes étapes du calcul.

5.2.1.1 Echantillonnage

Dans un premier temps, nous procédons à l'échantillonnage des données. Le calcul complet est toujours effectué avec *Code_Saturne* (avec la méthode ALE) permettant de traiter les déplacements du maillage, tandis que la suite de la méthode sera effectuée à part, dans un code rédigé en Fortran 90.

Nous nous plaçons dans la configuration où le cylindre subit l'accrochage fréquentiel. Cette configuration présente un intérêt à plusieurs titres : d'une part, l'étude de ce phénomène est une des références pour l'ingénieur car l'amplification du déplacement d'une structure a des conséquences fortes en termes d'usure et même de rupture par choc sur les supports des tubes. D'autre part, la capacité du système dynamique réduit à reproduire de grands déplacements pour un couplage fluide-structure représenterait une avancée dans bien des domaines, car ces déplacements sont souvent très coûteux dans le cadre de calculs complets. Enfin, se situer dans le cadre de l'accrochage permet d'étudier la capacité de prédiction du système. En effet, il serait intéressant d'observer si la construction de la base POD pour une configuration proche de l'accrochage permet de prédire ce dernier par un changement de paramètre dans le système.

On se place donc dans le cas d'un écoulement à Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$, avec un déplacement d'amplitude maximale atteignant $0,58D$. Cela signifie que le centre de gravité du cylindre dépasse la zone solide initiale lorsqu'il atteint son maximum, puisque l'amplitude du déplacement est supérieure à la valeur du rayon. Si l'on se réfère à la figure 2.8, le couple {vitesse réduite ; amplitude des déplacements} considéré correspond au point rouge triangulaire, obtenu avec *Code_Saturne* pour le cas de l'accrochage à $k_{\text{eff}} = 2,44$. 250 clichés sont retenus pour cette configuration.

De la même façon que lors de l'étude du système dynamique pour l'écoulement seul, on travaille sur une seule période ; ici les clichés sont extraits sur une période du déplacement du cylindre. Tous les calculs ont été effectués à partir du champ de vitesse fluctuant. L'interpolation est effectuée sur une grille fixe contenant 200×250 nœuds.

5.2.1.2 Construction de la base POD

À partir des nouveaux clichés obtenus grâce à l'interpolation, nous procédons de façon classique à la construction de la base POD. 6 modes POD sont nécessaires pour reconstruire correctement le champ de vitesse et le déplacement du cylindre.

5.2.1.3 Résultats

La figure 5.2 montre la reconstruction des coefficients temporels avec une base POD contenant 6 modes POD et 250 clichés. Un très léger décalage est observé pour les premiers coefficients temporels même si leur reconstruction est globalement correcte, ce que confirme leur portrait de phase (figure 5.3) qui montre une bonne conservation de l'énergie. La reconstruction des coefficients d'indices plus élevés est délicate car ils sont souvent d'amplitude moindre et contiennent de petites fluctuations. Mais leur faible contribution énergétique implique une influence négligeable de la qualité de leur reconstruction dans le cas où l'on observe les principales caractéristiques du système. Le déplacement du centre de gravité du cylindre reconstruit (figure 5.5) reste ainsi très proche du déplacement originel,

car les deux premiers modes sont dominants par rapport aux autres et capturent l'essentiel de l'énergie comme le montre la figure 5.4.

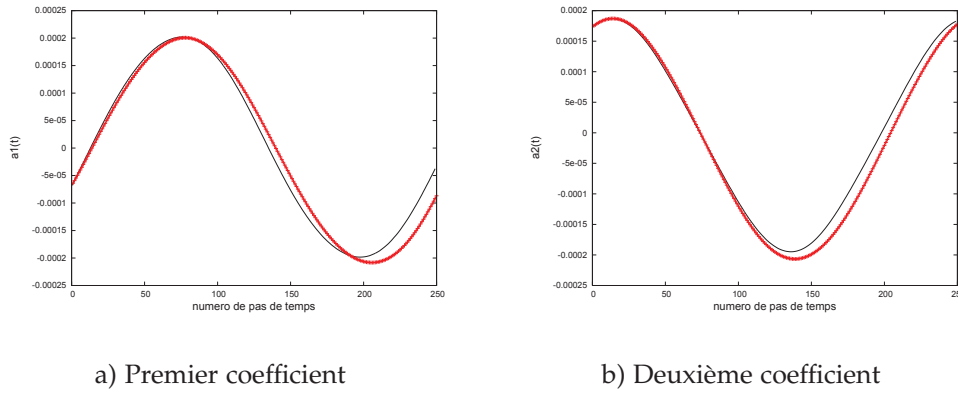


FIGURE 5.2 – Comparaison entre les deux premiers coefficients temporels issus du calcul direct et les coefficients reconstruits par le système dynamique construit avec l'approche multiphasique pour de grands déplacements d'un cylindre en milieu semi-infini ; — coefficient temporel direct ; +++ Coefficient temporel reconstruit

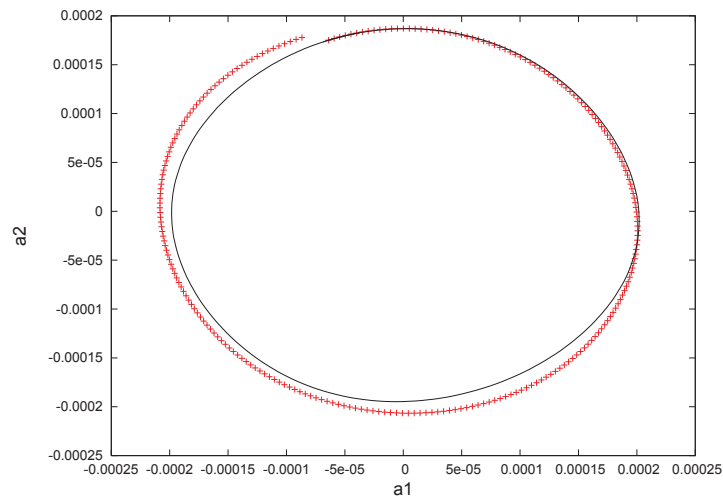


FIGURE 5.3 – Portrait de phase pour les deux premiers coefficients ; — coefficient temporel direct ; +++ Coefficient temporel reconstruit

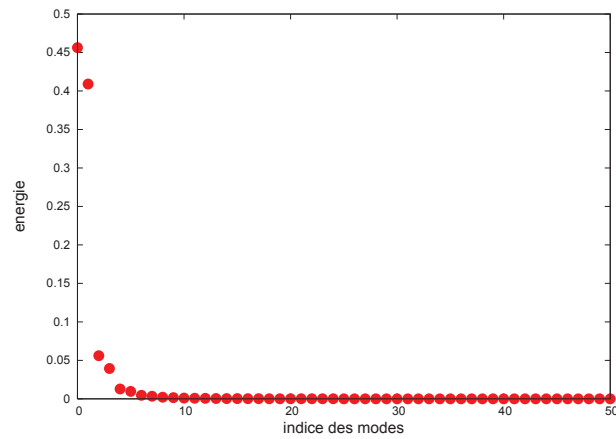


FIGURE 5.4 – Pourcentage d'énergie de chaque mode POD pour le cas du tube seul en grands déplacements, 50 premiers modes

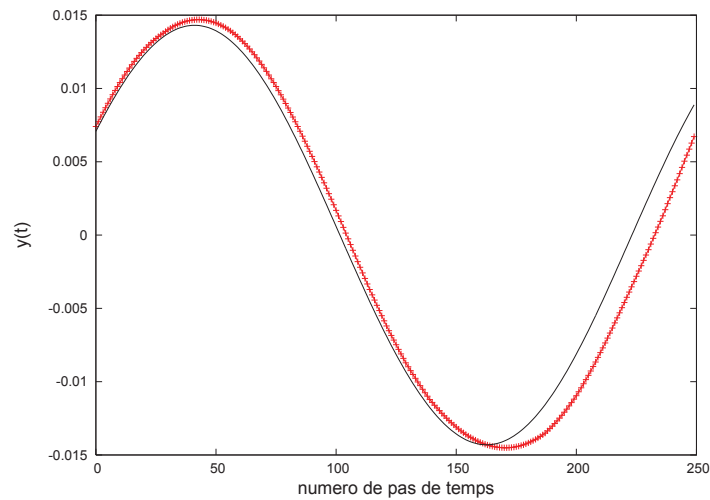


FIGURE 5.5 – Reconstruction du déplacement selon la direction y du cylindre par le système dynamique réduit en formulation multiphasique; — Déplacement du centre de gravité (calcul complet); +++ Déplacement reconstruit

Le principal avantage de cette méthode est sa capacité à reproduire de grands déplacements d'une structure soumise à un écoulement. Nous proposons par la suite l'application de l'étude des vibrations d'un tube confiné dans un réseau de tubes, soumis à un écoulement transverse.

5.3 APPLICATION DE LA POD MULTIPHASIQUE À L'ÉTUDE DES VIBRATIONS D'UN FAISCEAU TUBULAIRE SOUS ÉCOULEMENT

5.3.1 Hypothèses et conditions du calcul

Nous proposons maintenant l'application de la méthode POD multiphasique au cas du faisceau de tubes, avec le tube central mobile. Les clichés sont issus du calcul détaillé dans la partie 2.2.3.4. Dans un premier temps, le modèle utilisé est exactement le même, c'est-à-dire que les conditions aux limites sont périodiques et le nombre de Reynolds est $\mathcal{R}_e = 2600$. Par la suite, pour l'étude de plus grands déplacements, nous effectuerons un test avec des conditions d'entrée et sortie libres et à plus faible nombre de Reynolds.

Comme pour le cas du tube seul, nous construisons ensuite un système dynamique : les clichés échantillonnés issus du calcul effectué avec *Code_Saturne* et la méthode ALE sont interpolés sur une grille cartésienne. Puis, les modes POD sont construits pour les nouveaux clichés et enfin, nous effectuons la résolution en temps décrite selon la formulation (5.15).

5.3.2 Cas des petits déplacements du cylindre central

Considérant le cas des petits déplacements avec conditions aux limites périodiques, nous effectuons un échantillonnage sur un peu plus d'une pseudo-période du déplacement du tube central. Cette pseudo-période dure 2,5 secondes et l'on extrait 100 clichés deux à deux séparés de 0,25 secondes. Dans ce cas, les déplacements du cylindre sont de faible amplitude, ne dépassant pas $0,01D$. Le maillage fixe de référence est constitué de 200×200 points.

La figure 5.6 permet de vérifier la bonne qualité de la base POD (reconstruction directe du champ à partir de la formule (4.16)), ce qui est important pour l'application, par la suite, de la méthode multiphasique par construction du système dynamique associé.

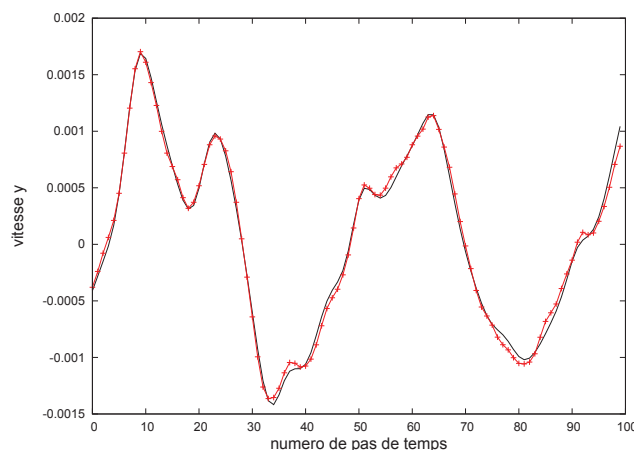


FIGURE 5.6 – Comparaison entre la vitesse du cylindre par calcul complet et la vitesse reconstruite par POD directe (petits déplacements); — calcul direct; +++ reconstruction par POD directe

5.3.2.1 Résolution du système dynamique

Pour 100 snapshots, nous conservons 19 modes POD. Le système dynamique est stabilisé avec la technique de Cazemier (1997) (4.46), l'indice de stabilisation est $\nu_{\text{artif}} = 0,01$. La reproduction du déplacement du cylindre central est présentée en figure 5.7 et les quatre premiers coefficients temporels issus de la reconstruction par POD-multiphasique du champ de vitesse sont visibles sur la figure 5.8. Ici, comme les conditions aux limites sont périodiques, nous sommes assurés que l'intégrale du champ de pression s'annule globalement sur le bord du domaine. Ainsi, le terme de modélisation de la pression dans le système (5.15) n'est pas considéré.

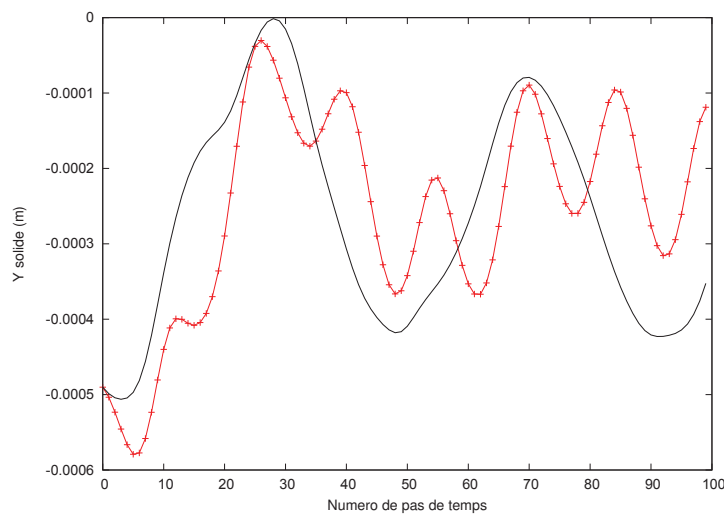


FIGURE 5.7 – Représentation du déplacement du centre de gravité du cylindre central au cours du temps (CL périodiques); — calcul direct; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (19 modes) avec stabilisation ($\nu_{\text{artif}} = 0,01$)

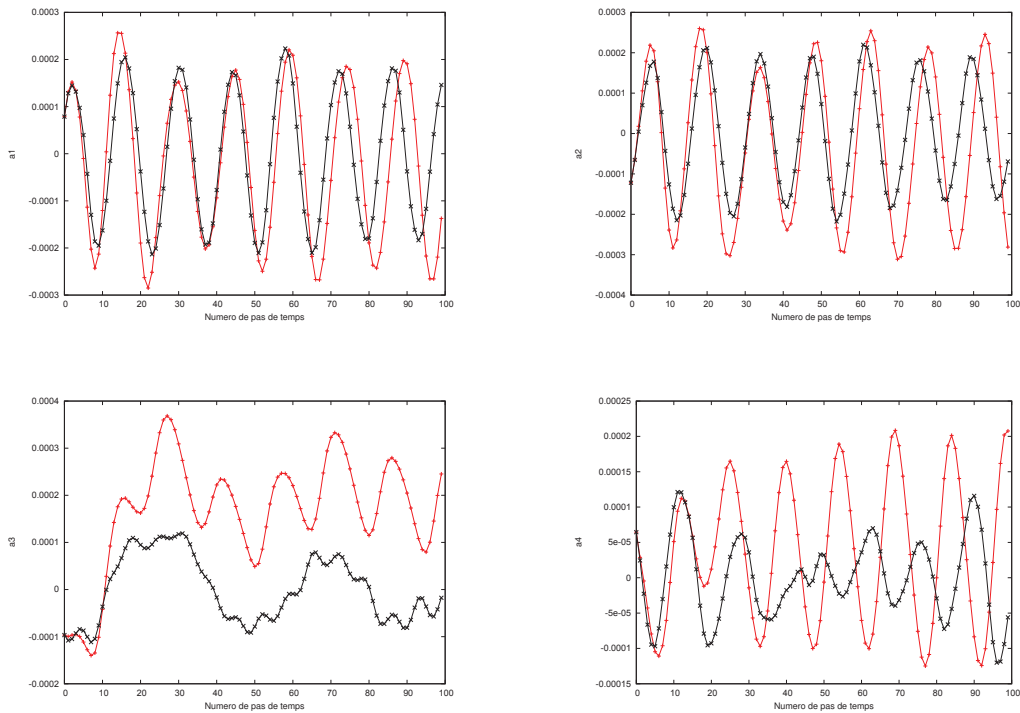


FIGURE 5.8 – 4 premiers coefficients temporels, petits déplacements et CL périodiques ; — calcul direct ; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (19 modes) avec stabilisation ($v_{artif} = 0,01$)

On constate une mauvaise reconstruction du déplacement du solide : même si les niveaux sont respectés, de fortes fluctuations inexistantes dans le déplacement initial viennent polluer le signal reconstruit. À l'observation de la reconstruction des coefficients temporels, on remarque que les deux premiers sont bien reconstruits ; par contre, les suivants montrent un fort décalage en terme d'amplitude. Or, comme le montre la figure 5.9, il n'est cette fois pas possible de négliger l'influence des modes d'indice supérieur à 2, puisque la contribution énergétique des modes au moins d'indices 3 et 4 ont une contribution énergétique quasiment du même ordre de grandeur que celle des deux premiers modes.

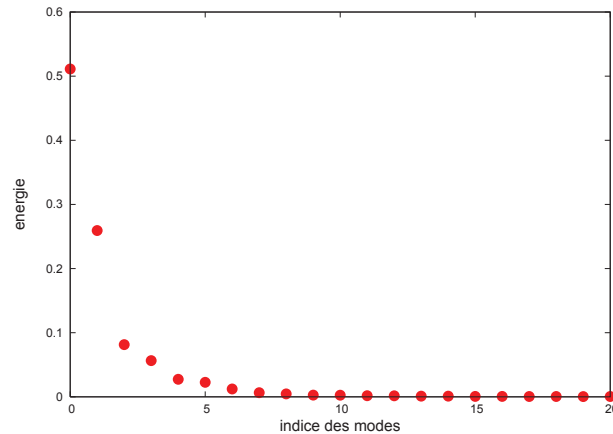


FIGURE 5.9 – Pourcentage d'énergie de chaque mode POD pour le cas du faisceau de tubes en grands déplacements, 20 premiers modes

L'augmentation du nombre de snapshots dans l'échantillon permettant de construire la base POD ne fournit pas d'amélioration à ces résultats : avec 500 snapshots, nous observons exactement le même comportement des champs (vitesse dans le domaine et déplacement du centre de gravité du cylindre central).

Les résultats dans le cas des petits déplacements du cylindre central avec des conditions aux limites périodiques ne sont donc pas satisfaisants. Dans le paragraphe suivant, nous proposons l'application de la méthode à des conditions aux limites mieux maîtrisées d'entrée/sortie, avec de grands déplacements du cylindre : cette configuration a l'avantage de fournir un signal en vitesse (fluide et solide) plus lisse.

5.3.3 Cas des grands déplacements du cylindre central

Pour cette étude, nous faisons le choix de considérer des conditions aux limites d'entrée en amont du faisceau (frontière de gauche) et de sortie libre en aval (frontière de droite). Les frontières situées en haut et en bas du faisceau sont considérées comme symétriques. Cette modélisation modifie le confinement du faisceau, puisque l'on ne considère plus le nombre de tubes comme infini dans toutes les directions mais seulement selon l'axe y transversal à l'orientation de l'écoulement. Le nombre de Reynolds est cette fois égal à $\mathcal{R}_e = 2000$. Le déplacement est relativement important puisqu'il atteint presque la distance inter-tube d_{it} . En effet, on a $d_{it} = 0,44D$ et le déplacement maximal du cylindre central est de $Y_{max} \sim 0,35D$. Le maillage fixe de référence est toujours constitué de 200×200 points.

La figure 5.10 représente la comparaison entre le champ de vitesse interpolée et le champ de vitesse issue du calcul complet à deux dates du calcul. On remarque la très bonne corrélation entre les deux champs. La différence au niveau du cylindre central est évidemment due au fait que, dans le cas interpolé, la zone du cylindre est vue comme un "fluide particulier" qui a sa propre vitesse ; la vitesse est donc non nulle et égale à la vitesse du déplacement du centre de gravité du cylindre. On remarque la bonne corrélation entre la vitesse du cylindre au cours du

temps issue du calcul complet et sa reproduction par l'application de la méthode POD sur la figure 5.11.

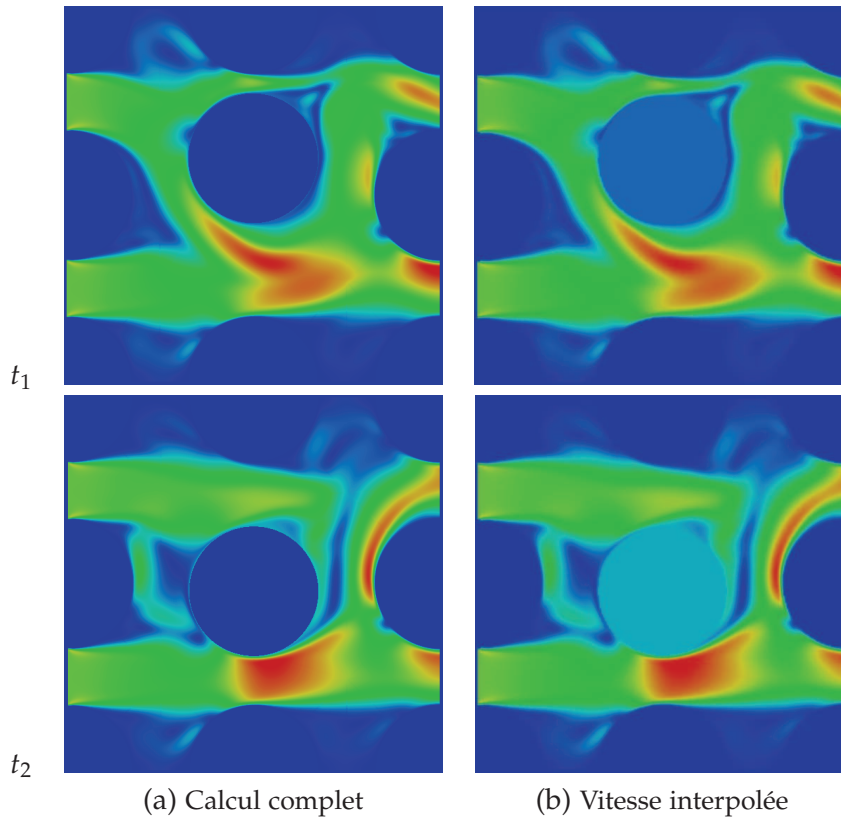


FIGURE 5.10 – Comparaison entre le champ de vitesse complet et le champ interpolé pour le cas des grands déplacements du cylindre à deux dates t_1 et t_2 , $\mathcal{R}_e = 2000$.

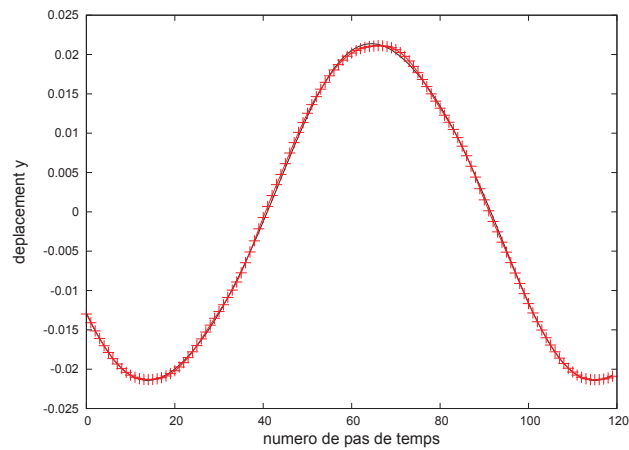


FIGURE 5.11 – Comparaison entre la vitesse du cylindre par calcul complet et la vitesse reconstruite par POD directe (grands déplacements); — calcul direct; +++ reconstruction par POD directe

5.3.3.1 Résolution du système dynamique

Dans le cas des grands déplacements avec conditions d'entrée/sortie, cette fois nous conservons 120 snapshots et 7 modes POD; aucune stabilisation du système dynamique n'est nécessaire. Dans un premier temps, le système résolu est, comme pour le cas des petits déplacements, le système (5.15) sans modélisation du terme de pression. Les résultats en termes de déplacement du tube central et de coefficients temporels du champ de vitesse sont représentés sur les figures 5.12 et 5.13 (coefficients temporels) et 5.14 (portrait de phase) respectivement. Les coefficients temporels sont bien reconstruits et le portrait de phase pour les deux premiers coefficients montre que si le cycle limite n'est pas parfaitement conservé, il n'y a pas d'instabilité.

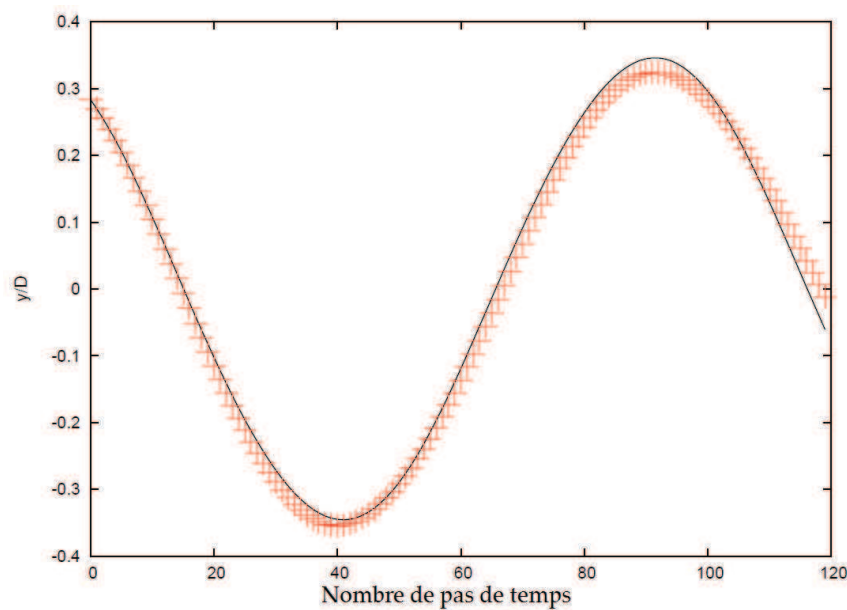


FIGURE 5.12 – Représentation du déplacement du centre de gravité du cylindre central au cours du temps (CL entrée/sortie); — calcul direct; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (7 modes) sans stabilisation

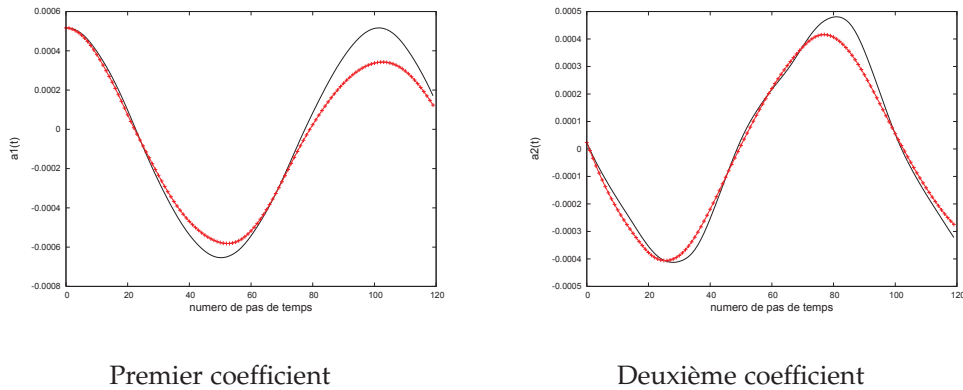


FIGURE 5.13 – Deux premiers coefficients temporels, grands déplacements et CL entrée/sortie; — calcul direct; +++ calcul du modèle réduit POD multiphasique (7 modes) sans stabilisation

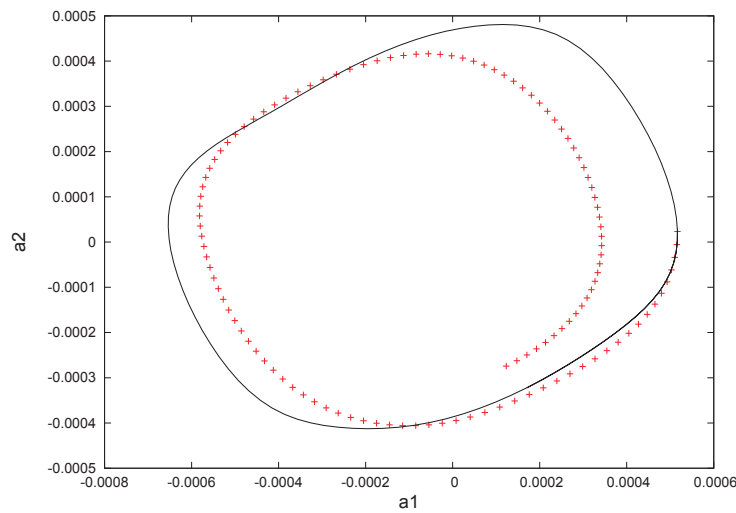


FIGURE 5.14 – Portrait de phase pour les deux premiers coefficients; — coefficient temporel direct; +++ Coefficient temporel reconstruit

Cette fois, la méthode POD multiphasique fournit des résultats très intéressants, puisque les grands déplacements du cylindre sont bien reconstruits.

5.3.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté l'application de la méthode POD multiphasique à des cas de vibrations sous écoulement de structures tubulaires. Pour le cas du tube seul en milieu infini, les résultats obtenus sont très encourageants. Dans le cadre des vibrations d'un tube confiné, les résultats de la configuration avec conditions aux limites périodiques ne sont pas satisfaisants pour le moment. La problème semble provenir de la présence de conditions aux limites périodiques, qu'il serait certainement plus pertinent de traiter par une décomposi-

tion de Fourier. Nous proposons ensuite l'usage de conditions aux limites mieux maîtrisées. Dans un premier temps, le cas d'un seul tube confiné avec conditions d'entrée-sortie apporte une bonne reconstruction du déplacement du cylindre en grands déplacements. L'application de cette méthode de réduction de modèle à de grands déplacements d'une structure permet d'envisager son implémentation à un grand nombre de problèmes avec un couplage fluide-structure fort et pouvant présenter des instabilités. Un travail à effectuer dans la continuité de celui qui est le nôtre consiste à prendre en compte un plus grand nombre de tubes afin de se rapprocher de la configuration réelle, par exemple en s'appuyant sur le modèle AMOVI étudié notamment par Huvelin (2008) et Marcel et al. (2011).

RÉDUCTION DE MODÈLE ET ÉTUDES PARAMÉTRIQUES

6

DANS CE CHAPITRE, nous proposons une introduction aux études paramétriques par les méthodes d'ordre réduit. En effet, c'est dans ce domaine que les modèles réduits prennent tout leur sens : le besoin est de construire des modèles prédictifs pour des cas où l'on ne connaît pas de solutions du problème complet. La prédictivité est ainsi nécessaire dans les études paramétriques où l'on souhaite effectuer plusieurs calculs répétitifs.

Le traitement numérique par réduction de modèle des études paramétriques peut se faire selon plusieurs stratégies :

- ▷ Une première technique simple et intuitive consiste, avec la connaissance d'une base de projection donnée, à projeter l'équation étudiée pour différentes valeurs du paramètre sur cette base unique obtenue pour une certaine valeur du paramètre. On étudie alors la capacité de prédiction du modèle réduit obtenu.
- ▷ La deuxième stratégie consiste à construire un modèle réduit adaptatif par rapport au paramètre que l'on souhaite modifier. Cette option regroupe des techniques telles que l'APR-POD, la PGD (séparation des paramètres) ou encore la MAN (*méthode asymptotique numérique*).
- ▷ Enfin, il est possible de constituer, grâce à des calculs complets, une base de données fournissant la connaissance d'un ensemble fini de solutions. On suppose alors que cette famille de solutions nous permettra de calculer la solution pour n'importe quelle valeur du paramètre étudié. Parmi ces approches, on considère notamment les méthodes de bases réduites et les méthodes d'interpolation.

Dans un premier temps, quelques-uns des approches et résultats avancés permettant la mise en place des études paramétriques sont brièvement présentés et l'une de ces méthodes est appliquée au cas de l'équation de Burgers. Puis, une mise en application qualitative d'une méthode élémentaire pour les deux cas d'écoulements autour de structures fixes (cylindre seul et faisceau de tubes) étudiés plus tôt est proposée.

6.1 REVUE RAPIDE DE QUELQUES TECHNIQUES DE RÉDUCTION DE MODÈLE POUR L'ÉVOLUTION PARAMÉTRIQUE

6.1.1 Méthode élémentaire : une base POD unique

Cette première méthode élémentaire et intuitive est simple : la base POD calculée pour un paramètre donné λ_0 est une base hilbertienne de l'espace H considéré. Lorsque le paramètre λ change, il est donc légitime de projeter le problème étudié sur cette même base. Bien entendu, l'optimalité de la base n'est alors pas garantie : c'est pourquoi il peut être nécessaire d'augmenter le nombre de modes de la base, afin de compenser l'erreur obtenue sur l'évolution du problème. Tant que le nombre de modes n'est pas trop élevé, c'est-à-dire que tant que l'on reste vraiment dans le cadre d'un modèle réduit, le modèle ainsi construit reste valable.

Nous présentons ici un résultat qualitatif, provenant des travaux en cours de Akkari et al. (2011), permettant de cadrer la gamme de valeurs du paramètre que l'on peut balayer, en fonction du nombre de modes de la base POD. Supposons le problème (\mathcal{P}_λ) suivant à résoudre dans l'espace H pour le paramètre λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}, \lambda) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Soit $\mathbf{u}_{\lambda_0}(t) \in H$ solution du problème (\mathcal{P}_λ) pour $\lambda = \lambda_0$ et soit $\{\Phi^{\lambda_0}\}_n$ la base POD associée. Considérons alors le problème :

$$\begin{cases} \frac{da_n^{\lambda, \lambda_0}}{dt} + B_r(a_n^{\lambda, \lambda_0}, \lambda) = f_r \\ a_n^{\lambda, \lambda_0}(0) = (\mathbf{u}_0, \Phi_n^{\lambda_0}) \end{cases} \quad (6.2)$$

obtenu par projection de Galerkin de (\mathcal{P}_λ) sur $\{\Phi^{\lambda_0}\}_n$. Alors, sous un certain nombre de conditions, on peut montrer que :

$$\|\mathbf{u}_\lambda - \hat{\mathbf{u}}\| \leq f(N) + |\lambda - \lambda_0|^\gamma g(N) \quad (6.3)$$

avec $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^N a_n^{\lambda, \lambda_0} \Phi_n^{\lambda_0}$ et où l'on a :

$$f(N) \leq K \sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma_i \quad (6.4)$$

avec K une constante à définir et σ_i les valeurs propres associées au problème résolu pour la base $\{\Phi^{\lambda_0}\}_n$; $g(N)$ est le reste d'une série convergente :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g(N) = 0 \quad (6.5)$$

Enfin, γ est un exposant qui dépend de l'opérateur du problème ; par exemple on a $\gamma = 1/2$ pour l'équation de Burgers.

6.1.2 Les méthodes de bases réduites

La réduction de modèle par l'utilisation des méthodes de bases réduites, mises en œuvre dans les années 1980 et 1990 (Noor et Peters 1980), (Barrett et Reddien 1995), présente un intérêt pour les études paramétriques. Le principe de ces méthodes (dont l'objectif reste de diminuer fortement le nombre de degrés de liberté pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles) est présenté par exemple dans les travaux de Maday et Rønquist (2002). L'idée est de construire des fonctions de base contenant une grande partie de l'information sur le système étudié.

Si l'on cherche à résoudre un problème dépendant d'un paramètre λ , du type :

$$\mathcal{F}(u(\lambda); \lambda) = 0 \quad (6.6)$$

Dans un premier temps, ce problème complet est discrétisé puis résolu pour un ensemble de N valeurs prédéfinies $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ du paramètre. Ensuite, pour une valeur de λ n'appartenant pas à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, on recherche une approximation de $u(\lambda)$ dans l'espace engendré par les solutions particulières calculées avec précision. Cette approximation peut se faire par interpolation ou extrapolation. Généralement, une méthode de Galerkin est utilisée pour obtenir la meilleure combinaison des solutions particulières. Pour les problèmes d'évolution, le paramètre λ est généralement le temps, ce qui fournit des solutions qui sont des combinaisons linéaires des clichés temporels de l'évolution du système.

Maday et Rønquist (2002) ont proposé l'utilisation de cette approche avec la géométrie du domaine comme paramètre de la base réduite, technique qui peut s'appliquer pour la recherche d'optimisation de forme. Rozza (2005) lui, évoque les possibles applications de cette méthode pour le design et plus généralement l'optimisation ou encore le contrôle en temps réel. Il l'applique dans le cas d'un problème de transfert de chaleur en se basant lui aussi sur une géométrie paramétrée, pour des applications biomécaniques. Il présente la méthode de base réduite comme un problème d'entrées - sorties, où les entrées sont les paramètres à considérer, comme justement la géométrie d'un système, et les sorties sont les variables d'intérêt pour l'ingénieur, comme des efforts par exemple. On fait l'hypothèse que la variable d'entrée que l'on considèrera se situe et varie dans un espace de plus faible dimension que celui dans lequel se trouve la solution de l'équation aux dérivées partielles considérée.

Il est très important de coupler ce genre de méthode à des techniques de détermination d'erreur *a posteriori*, afin de s'assurer de la validité de la méthode et de l'utiliser en toute confiance. Pour cela, comme le présente Rozza (2005), l'erreur $e(\lambda)$ est définie, pour un paramètre λ donné, comme suit :

$$e(\lambda) = \tilde{u}(\lambda) - \hat{u}(\lambda) \quad (6.7)$$

où $\tilde{u}(\lambda)$ est la solution du problème complet discrétisé sur un espace de dimension finie. On a ainsi calculé N solutions discrètes $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, que l'on suppose indépendantes entre elles ; si elles ne le sont pas, il est nécessaire de construire la famille libre maximale correspondante, c'est-à-dire la base $\{\phi_n\}_{n=1, \dots, N}$. $\hat{u}(\lambda)$ est un élément de l'espace engendré par $\{\phi_n\}_{n=1, \dots, N}$.

Rozza (2005) présente l'avantage de la procédure au niveau du temps de calcul numérique : l'étape de construction de la base $\{\phi_n\}_{n=1, \dots, N}$ se fait une fois pour toutes, avant le début du calcul. Puis, seulement, la procédure débute pour

une nouvelle valeur du paramètre λ afin de déterminer $\hat{u}(\lambda)$. Ainsi, la réduction de modèle se trouve dans le fait que la détermination de ce champ ne dépend pas de la (grande) dimension de l'espace sur lequel ont été approchées les solutions particulières précises; d'autant qu'il suffit généralement d'un petit nombre N de ces solutions particulières pour obtenir une valeur correcte de $\hat{u}(\lambda)$. De même, certaines étapes du calcul des bornes de la solution se font une fois pour toutes, ce qui permet d'alléger les calculs.

Lassila et Rozza (2010), récemment, se sont intéressés à la problématique d'optimisation de forme pour le design de structures sous écoulement, traitée par la méthode de base réduite. Cette approche peut avoir un intérêt certain pour le traitement des problématiques d'interaction fluide-structure, puisque dans ce cas, on a affaire au déplacement d'une interface qui, de plus, peut être déformable si le solide n'est pas rigide. Pour traiter les déformations de la structure, Lassila et Rozza se basent sur la méthode de déformation de forme libre (ou FFD pour *Free-Form Deformation*), qui a l'avantage, si elles ne sont pas brutales, de traiter des déformations indépendantes des domaine et maillage de référence. L'idée de cette méthode FFD est de considérer un volume de Bézier régulier, défini par une matrice de points de contrôle, dans lequel on plonge le maillage de référence de l'objet à déformer. La transformation appliquée au maillage par déplacement de ses points de contrôle se répercute ensuite sur l'objet à déformer (Bechmann et al. 1995).

L'objectif de Lassila et Rozza est de paramétrer la forme d'un solide de telle sorte que cette paramétrisation soit indépendante du maillage et de la géométrie initiale, ainsi que de la discrétisation du modèle d'équations aux dérivées partielles qui est choisie. Pour cela, ils procèdent de la façon suivante :

- ▷ Utilisation de la méthode FFD pour définir la paramétrisation de la géométrie, cette paramétrisation est notée μ ,
- ▷ Écriture des équations aux dérivées partielles à paramètres μ approchées sur un sous-espace $X^{\mathcal{N}}$ de grande dimension \mathcal{N} :

$$a(u^{\mathcal{N}}(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \quad \forall v \in X^{\mathcal{N}} \quad (6.8)$$

où a est une forme bilinéaire coercive symétrique et f une fonctionnelle linéaire bornée.

- ▷ Construction d'une base réduite à partir des paramètres définis précédemment, en utilisant un algorithme glouton. Des estimations d'erreur *a posteriori* sont prévues.
- ▷ La forme bilinéaire a et la fonctionnelle f sont paramétrées de façon *affine* si on peut les écrire sous la forme de sommes de fonctions dont les variables sont séparées, soit :

$$a(w, v; \mu) = \sum_{m=1}^{M_a} \Theta_a^m(\mu) a^m(w, v) \quad (6.9)$$

$$f(v; \mu) = \sum_{m=1}^{M_f} \Theta_f^m(\mu) f^m(v)$$

où M_a, M_f sont des entiers à définir et Θ_a, Θ_f des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Cette hypothèse permettra de séparer les calculs en différentes étapes (une étape avec dépendance en μ et l'autre indépendante du paramètre, à n'effectuer qu'une seule fois) et de gagner du temps de calcul.

- ▷ Si la paramétrisation n'est pas affine, il est possible d'utiliser une technique d'interpolation empirique permettant d'approcher la paramétrisation non affine par une paramétrisation affine.

Lassila et Rozza appliquent cette méthode à l'étude d'un écoulement potentiel autour d'un profil portant faiblement incliné.

Ainsi, cette technique de réduction de modèle qui utilise les bases réduites a pour intérêt de permettre la mise en place de calculs paramétriques. La réduction du coût de ces derniers peut être capitale dans les problématiques de design ou d'optimisation de forme, mais aussi pour les études de fatigue ou encore pour la recherche de branches d'instabilité pour certains systèmes. Ce dernier point peut être intéressant pour l'étude des vibrations sous écoulement des faisceaux de tubes.

6.1.3 Utilisation de la géométrie Grassmannienne

Amsallem et Farhat (2008) ont proposé une technique originale pour traiter le problème des évolutions paramétriques pour des calculs d'écoulements. En effet, l'étude d'un écoulement pour lequel le système à traiter est complexe (géométrie complexe, écoulements pour lesquels les conditions sont extrêmes, comme par exemple fortes pressions, etc.) est très lourde à mettre en œuvre, ce qui implique des temps de calculs très longs. La mise en place d'études paramétriques systématiques pour de telles configurations est donc limitée, voire impossible.

Il semble ainsi intéressant d'utiliser les techniques de réduction de modèle afin de procéder à ces études paramétriques qui permettent l'étude de l'ensemble des réponses du système à différentes sollicitations et donc, de cartographier les mécanismes potentiels. Considérons la méthode POD, par exemple. La construction d'un système dynamique d'ordre réduit avec cette technique est basée d'abord sur l'échantillonnage de clichés sur un intervalle de temps donné, puis sur la construction d'une base dont on ne conserve que les éléments les plus représentatifs de l'écoulement étudié, et enfin, les équations du problème complet sont projetées sur cette base.

Lors de la constitution de l'échantillonnage permettant la construction de la base, les clichés sont extraits d'un calcul complet de l'écoulement pour un paramètre à étudier s donné, soit s_1 . Et, il a été montré que, lorsque l'on souhaite effectuer la projection des équations du problème complet écrites pour une autre valeur du paramètre $s_2 \neq s_1$ sur la base POD construite à partir des données collectées pour le paramètre s_1 , la réponse du système peut être mauvaise si les deux paramètres sont trop éloignés ou si les problèmes associés à s_1 et s_2 ne peuvent pas être considérés comme similaires. C'est pourquoi, il est nécessaire de construire une autre base POD adaptée à la valeur du paramètre pour lequel on souhaite observer le comportement du système.

Cependant, la construction d'une telle base est la phase la plus coûteuse de la réduction par méthode POD. En effet, une fois la base construite, seulement quelques modes POD sont nécessaires à la reconstruction d'un champ de vitesses fluides, ce qui rend cette dernière très rapide, parfois quasi-instantanée. Par contre, la construction de la base elle-même peut prendre un certain temps. D'abord, il faut effectuer un calcul complet sur un certain intervalle de temps pour extraire les clichés, ce qui est intrinsèquement coûteux ; puis, il faut construire la matrice de corrélation temporelle des clichés, rechercher les valeurs et vecteurs propres de cette matrice et enfin normer ces derniers. Cette phase est donc à prendre en

compte dans le coût total du calcul. Ceci explique la volonté de mettre en place des méthodes permettant de construire des bases adaptées aux paramètres étudiés sans avoir à effectuer de nouveaux calculs complets.

Amsallem et Farhat (2008), ainsi, ont proposé une technique permettant de construire cette nouvelle base d'ordre réduit adaptée au paramètre d'étude. Cette technique s'appuie sur des résultats du domaine de la géométrie grassmannienne et propose une interpolation sur un sous-espace vectoriel, basée sur l'existence préalable d'une famille de bases d'ordre réduit pré-calculées correspondant chacune à une valeur du ou des paramètre(s) à étudier.

Concrètement, le problème à résoudre est le suivant : on suppose que l'on a déjà calculé N_R systèmes d'ordre réduit, tous de la même dimension, et que leurs bases orthogonales respectives ont été calculées pour N_R ensembles de valeurs des paramètres à considérer (ces paramètres peuvent être physiques [nombre de Reynolds, etc.] ou de modélisation [géométrie, maillage, etc.]). Ces ensembles de valeurs seront appelés "points d'exploitation", et seront notés λ_i , pour $i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket$. L'ensemble des points d'exploitation pour lesquels les bases réduites ont été calculées est noté Λ et défini comme suit :

$$\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_R-1}\} \quad (6.10)$$

L'objectif est alors d'effectuer une interpolation pertinente des bases d'ordre réduit existantes pour construire rapidement un modèle d'ordre réduit adapté à un nouveau point d'exploitation $\lambda_{N_R} \notin \Lambda$.

Le problème réside donc dans cette étape d'interpolation. Lorsque l'on effectue une interpolation habituelle de bases d'ordre réduit orthonormées, rien ne garantit que la nouvelle base construite à partir de ces dernières soit elle-même orthonormée. Cela implique, ensuite, une difficulté supplémentaire pour la construction du modèle réduit. C'est pourquoi Amsallem et Farhat (2008) ont proposé une interpolation sur l'espace tangent en un point d'une variété de Grassmann adaptée au problème considéré.

Remarque 6.1 *Quelques rappels :*

Si les N_R bases réduites qui ont été pré-calculées sont rassemblées dans N_R matrices Φ , où $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times n}$ avec $N \ll n$, N étant la dimension de la base et n la dimension du problème complet, on considère la variété de Grassmann correspondant à l'ensemble des sous-espaces de dimension N de \mathbb{R}^n . C'est une variété différentielle et on peut donc y effectuer des calculs différentiels. On note $\mathcal{G}(N, n)$ cette variété. Tout sous-espace S de \mathbb{R}^n de dimension N peut être vu comme un point de $\mathcal{G}(N, n)$ et être représenté de façon non unique par une matrice de $\mathbb{R}^{N \times n}$ dont les colonnes forment une base génératrice du sous-espace S considéré. Cette matrice appartient à la famille des variétés de Stiefel que l'on note $\mathcal{ST}(N, n)$, famille des matrices de $\mathbb{R}^{N \times n}$ et de rang maximal (égal à N).

De plus, pour chaque point S de $\mathcal{G}(N, n)$, on peut construire un espace tangent à la variété de Grassmann en ce point, et cet espace est de même dimension que la variété. Cet espace tangent est noté \mathcal{T}_S , c'est un espace vectoriel et chacun de ses points peut être représenté par une matrice Γ de $\mathbb{R}^{M \times n}$. On munit donc $\mathcal{G}(N, n)$ d'une structure riemannienne, le calcul des géodésiques y est possible. C'est cet espace qui sera utilisé pour procéder à l'interpolation. La figure 6.1 illustre ces différents ensembles.

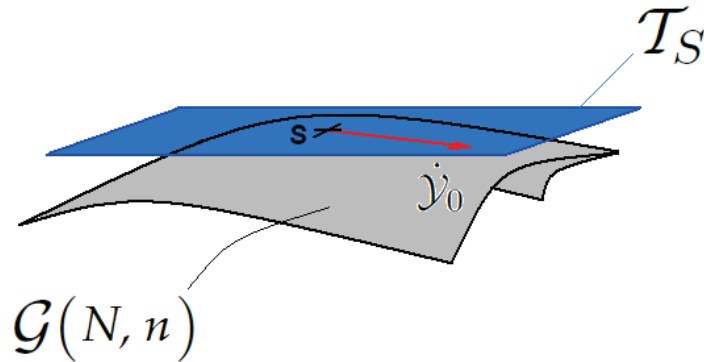


FIGURE 6.1 – Illustration de l'espace tangent \mathcal{T}_S en un point S de la variété de Grassmann $\mathcal{G}(N, n)$

Il est nécessaire maintenant de définir une géodésique pour $\mathcal{G}(N, n)$: c'est le chemin le plus court existant entre deux points de cette variété. Elle est caractérisée par deux conditions initiales : la position initiale de la trajectoire, ainsi que la dérivée initiale. On notera cette géodésique $\mathcal{Y}(t)$, avec t le paramètre scalaire qui permet de la définir, variant entre 0 et 1. On note \mathcal{Y}_0 la position initiale, et $\dot{\mathcal{Y}}_0$ la dérivée initiale.

Si le point S est le point initial de la géodésique, c'est-à-dire que $\mathcal{Y}(0) = \mathcal{Y}_0 = S$, alors la dérivée initiale $\dot{\mathcal{Y}}_0$, par définition, appartient à l'espace tangent \mathcal{T}_S au point S (voir figure 6.1).

6.1.3.1 Méthode d'adaptation de modèle d'ordre réduit basée sur l'interpolation dans un espace vectoriel

Grâce à plusieurs résultats utiles permettant de donner le lien existant entre la géodésique en un point d'une variété de Grassmann et la projection d'un espace tangent en ce point sur la variété, il est possible d'exprimer la paramétrisation explicite d'un chemin géodésique dont les conditions initiales sont connues. À partir de ce résultat, Amsallem et Farhat proposent un algorithme permettant de fournir un nouveau système d'ordre réduit adapté au(x) paramètre(s) que l'on souhaite étudier, basé sur l'interpolation sur un espace vectoriel. C'est le fait de se placer dans les variétés de Stiefel qui nous permet de construire les bases POD.

Formellement, la méthode est la suivante : on se donne une famille de N_R bases déjà calculées, toutes de dimension N , chacune étant associée à un point d'exploitation $\lambda_i, i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket$, les matrices qui leur correspondent étant des éléments de $\{\Phi_i \in \mathbb{R}^{N \times n}\}_{i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket}$. L'objectif est de construire une nouvelle base d'ordre réduit pour un nouveau point d'exploitation λ_{N_R} et sa matrice correspondante Φ_{N_R} , puis de construire le modèle d'ordre réduit adapté à ce point d'exploitation, à partir de la connaissance des données initiales et de la nouvelle base.

Algorithme

Cette méthode peut être appliquée au cas d'un nombre de bases pré-calculées N_R supérieur ou égal à deux, et pour lesquelles les points d'exploitation contiennent plusieurs paramètres à évaluer. La différence avec le cas d'un seul paramètre se trouve dans la définition des géodésiques. En effet, étant donné que deux points de la variété de Grassmann (associés à des bases pré-calculées) ne diffèrent pas forcément que par un seul paramètre, la géodésique qui les relie ne représente pas toujours la variation d'une base d'ordre réduit associée à un paramètre s . L'algorithme proposé par Amsallem et Farhat est le suivant :

1. \triangleright *Choix du point de référence*

Lorsque l'on considère plusieurs points $\{S_i\}_{i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket}$, l'un d'entre eux, noté S_0 , est choisi comme étant la référence (tous les points devant être situés à des positions relatives assez proches), et c'est le plan tangent à la variété de Grassmann en ce point, noté \mathcal{T}_{S_0} , qui servira d'espace de projection. Toutes les géodésiques partent donc de S_0 , mais ont chacune leur propre dérivée initiale ; ces dernières appartiennent toutes à l'espace tangent choisi \mathcal{T}_{S_0} .

2. \triangleright *Projection des points $\{S_i\}_{i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket}$*

Chacun des points S_i , $i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket$ assez proches de S_0 est projeté sur \mathcal{T}_{S_0} en utilisant l'application logarithme (Amsallem et Farhat 2008), dont l'expression est donnée grâce à une SVD, et une matrice Γ_i , génératrice du point projeté, est construite pour chacun des points. Cette matrice est définie par :

$$\begin{cases} (\mathbb{I} - \Phi_{i0} \Phi_{i0}^T) \Phi_i (\Phi_{i0}^T \Phi_i)^{-1} = \mathbf{U}_i \boldsymbol{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^T \\ \Gamma_i = \mathbf{U}_i \tan^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_i) \mathbf{V}_i^T \end{cases} \quad (6.11)$$

Les Φ_i représentent les matrices orthogonales décrivant une base de S_i et Φ_{i0} la matrice orthogonale associée au point S_0 .

3. \triangleright *Interpolation*

Par la suite, une nouvelle matrice Γ_{N_R} est construite par interpolation de toutes les matrices Γ_i , $i \in \llbracket 0, N_R - 1 \rrbracket$. L'interpolation peut prendre différentes formes selon le nombre de paramètres existants dans un point d'exploitation.

4. \triangleright *Projection sur la variété de Grassmann*

La matrice Γ_{N_R} est ensuite projetée sur un sous-espace de la variété $\mathcal{G}(N, n)$, représenté par le point S_{N_R} , lui-même engendré par une matrice Φ_{N_R} , constituant la base adaptée au point d'exploitation λ_{N_R} . Pour revenir à la variété de Grassmann, on passe cette fois par l'application exponentielle. Concrètement, on résout :

$$\begin{cases} \Gamma_{N_R} = \mathbf{U}_{N_R} \boldsymbol{\Sigma}_{N_R} \mathbf{V}_{N_R}^T \\ \Phi_{N_R} = \Phi_{i0} \mathbf{V}_{N_R} \cos(\boldsymbol{\Sigma}_{N_R}) + \mathbf{U}_{N_R} \sin(\boldsymbol{\Sigma}_{N_R}) \end{cases} \quad (6.12)$$

Pour résumer, l'idée de cette méthode est de passer dans l'espace vectoriel qu'est l'espace tangent en S_0 afin d'effectuer une interpolation classique, plus aisée que sur la variété de Grassmann $\mathcal{G}(N, n)$, et de se ramener finalement à cette dernière par ré-interpolation afin de construire la base réduite recherchée.

Cette méthode est testée par Amsallem et Farhat (2008), sur des cas de couplage fluide/structure d'écoulements autour d'aéronefs militaires. Dans un article précédent, Lieu et al. (2006) avaient testé le cas d'une interpolation des angles de sous-espace (cas particulier contenant deux bases) pour une configuration similaire. Ici, cette configuration est reprise et comparée avec l'application de l'interpolation sur l'espace tangent à la variété de Grassmann en un point ; les résultats obtenus par Amsallem et Farhat sont bien meilleurs avec cette méthode : ils sont plus proches de la solution, et surtout, permettent de traiter en une seule fois le problème, sans recalculer de base réduite par l'utilisation d'un calcul complet.

D'autre part, Amsallem et Farhat (2008) montrent la supériorité de cette méthode d'interpolation face à l'utilisation d'une interpolation directe des vecteurs de base. Ils montrent aussi l'amélioration du résultat avec l'augmentation du nombre de bases réduites pré-calculées utilisé pour l'interpolation. Enfin, la méthode ne dépend pas du point choisi comme point de référence pour lequel est construit l'espace tangent à la variété de Grassmann, si tant est que toutes les bases considérées se trouvent assez proches du point de référence.

Cette technique présente un intérêt non seulement pour la paramétrisation de forme lors d'études de déformations et d'optimisation de forme, mais également pour l'interaction fluide-structure : on peut ainsi envisager une paramétrisation du déplacement de la structure, par exemple, pour plusieurs configurations d'étude.

6.2 APPLICATIONS D'ÉTUDES PARAMÉTRIQUES

Dans cette partie, nous proposons d'abord deux études paramétriques simples, basées sur le cas du cylindre seul sous écoulement transversal et sur le cas du faisceau de tubes. La méthode appliquée consiste simplement à observer la capacité de la méthode réduite de projection choisie à reproduire un champ pour plusieurs valeurs d'un paramètre, à partir d'une base calculée pour une valeur donnée de ce paramètre. C'est une méthode simple et peu coûteuse à mettre en œuvre qui permet déjà d'obtenir des résultats intéressants. Le paramètre suivi est le nombre de Reynolds ; nous étudions la capacité d'une base POD à reproduire un écoulement à d'autres nombres de Reynolds que celui à partir duquel la base a été construite.

Dans un second paragraphe, nous nous intéressons à une application basique de la méthode Grassmannienne, pour le cas de l'équation de Burgers unidimensionnelle.

6.2.1 Première méthode : utilisation d'une base unique

Dans le seul but de vérifier nos résultats, il nous est nécessaire de mettre en place des calculs complets pour les différents paramètres étudiés. Dans un premier temps, nous considérerons donc le cas du cylindre fixe seul sous écoulement transversal étudié dans la partie 4.1.3.1. Le nombre de Reynolds varie de 100 (valeur pour laquelle nous possédons une base POD) à 500. Puis dans un second temps, nous nous intéresserons au cas du faisceau de tubes, fixe également, étudié selon la configuration de la partie 4.1.3.2. Le nombre de Reynolds sera modifié de $\mathcal{R}_e = 2600$ (valeur pour laquelle nous possédons une base POD) à la valeur $\mathcal{R}_e = 2700$.

Même si nous mettons en place les calculs complets qui correspondent aux valeurs du paramètre étudié, le calcul du système dynamique réduit pour les valeurs modifiées doit bien sûr être totalement indépendant des calculs complets. De ce fait, nous résolvons le système dynamique (4.34) pour lequel le nombre de Reynolds prend la valeur choisie. Par exemple, supposons que le système dynamique résolu initialement (pour le paramètre λ_0 , ici le nombre de Reynolds) s'écrit :

$$\frac{da'_i}{dt} = \mathcal{G}(\lambda_0, a'_n, a'_m) \quad (6.13)$$

en reprenant les notations du système (4.34) et avec \mathcal{G} la fonction contenant les différents coefficients du système dynamique. Ce système est obtenu par projection sur les modes contenus dans la base $\{\Phi\}$. Nous proposons alors de résoudre le système pour une autre valeur du paramètre étudié, notée λ .

$$\frac{da'_i}{dt} = \mathcal{G}(\lambda, a'_n, a'_m) \quad (6.14)$$

en projetant toujours les équations sur la base $\{\Phi\}$.

Comme le paramètre ici est le nombre de Reynolds, le seul élément connu de la nouvelle configuration est la valeur de la vitesse moyenne à imposer pour obtenir le nouveau nombre de Reynolds. Si l'on note x_Γ les points de la frontière, on peut définir l'initialisation à donner à $t = 0$ aux coefficients temporels du nouveau système dynamique :

$$a'_i(\lambda, t = 0) = \frac{u_0(\lambda, x_\Gamma)}{u_0(\lambda_0, x_\Gamma)} a'_i(\lambda_0, t = 0) \quad (6.15)$$

On notera $\alpha = \frac{u_0(\lambda, x_\Gamma)}{u_0(\lambda_0, x_\Gamma)}$. Ce coefficient est également appliqué à la vitesse moyenne de l'écoulement dans le domaine entier :

$$\bar{\mathbf{u}}(\lambda) = \frac{u_0(\lambda, x_\Gamma)}{u_0(\lambda_0, x_\Gamma)} \bar{\mathbf{u}}(\lambda_0) \quad (6.16)$$

Nous travaillons toujours dans le code de calcul *Code_Saturne*. Comme ce dernier est dimensionnel, nous agissons non pas sur le nombre de Reynolds mais sur la viscosité du fluide pour modifier les équations projetées.

6.2.2 Cas du tube seul fixe sous écoulement transversal

Pour le cas du tube seul, l'écoulement dont est extrait la base POD est à Reynolds $\mathcal{R}_e = 100$. Nous balayons les valeurs $\mathcal{R}_e = 110, 120, 130, 140$ et 150 . La figure 6.2 représente les résultats obtenus en termes de vitesse globale dans l'écoulement pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds. On remarque un bon respect des niveaux de vitesse pour l'ensemble des valeurs, sauf pour le cas $\mathcal{R}_e = 140$, pour lequel on a une surestimation du champ par la reconstruction POD. D'autre part, la fréquence d'émission des tourbillons est plus faible dans la reconstruction que pour les champs complets, comme on peut le voir sur la figure 6.3. Étant donné que dans la gamme de nombres de Reynolds entre 50 et 300, un grand nombre de régimes divers est observé (Chen 1987), la seule base POD pour le nombre de Reynolds 100 ne saurait suffire pour décrire l'ensemble des mécanismes qui commencent la transition vers la turbulence dès $\mathcal{R}_e \sim 150$. Cependant, la capacité de la méthode à reproduire globalement l'écoulement reste tout à fait correcte et est suffisante pour l'ingénieur qui souhaite mener plusieurs calculs avec de faibles modifications d'un paramètre. Bien entendu, le suivi paramétrique pour déceler des instabilités ou des bifurcations demande une attention particulière lors de la construction de la base.

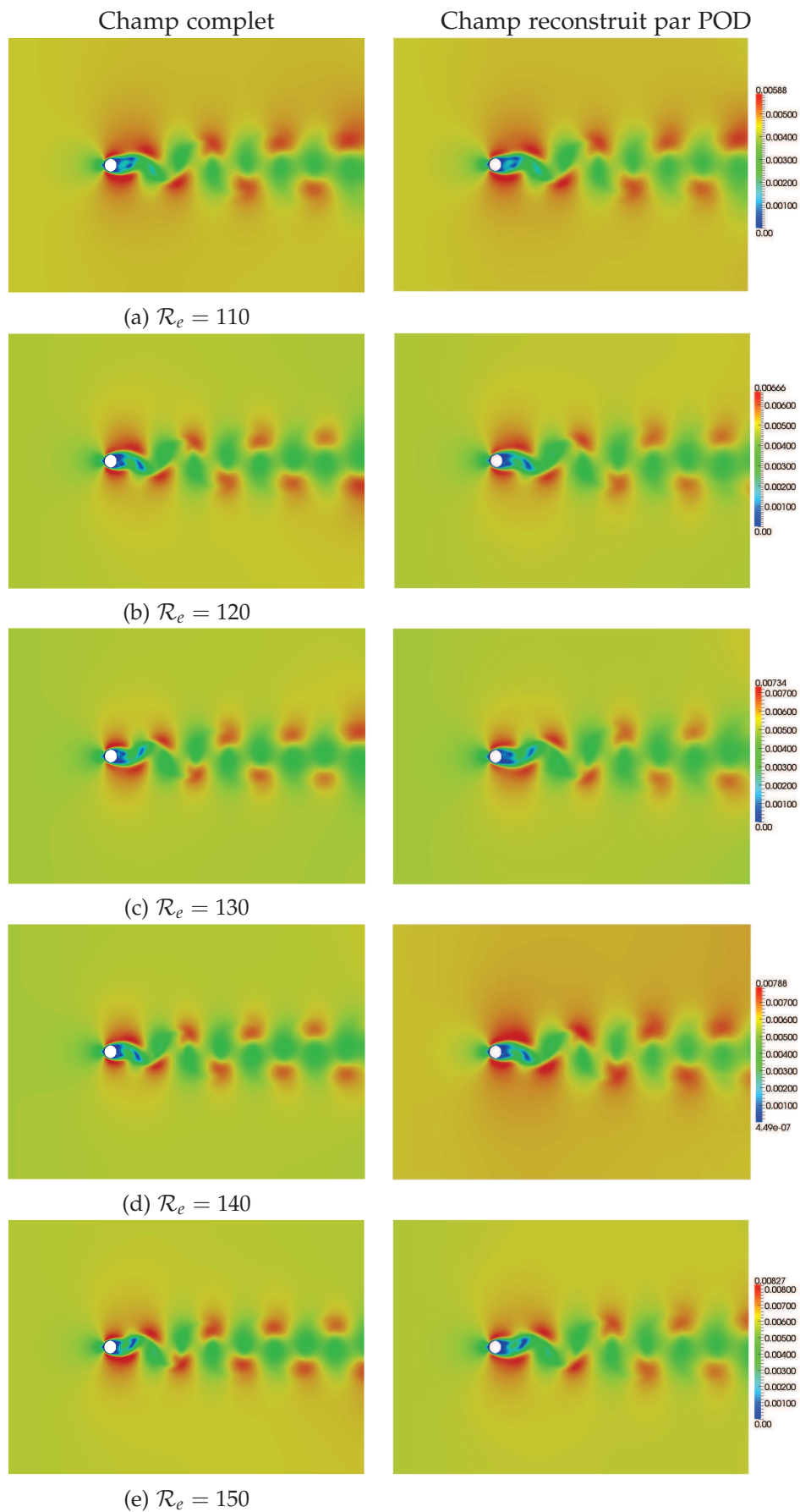


FIGURE 6.2 – Comparaison entre les champs de vitesse complet et reconstruit par la POD pour le tube seul, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 100$

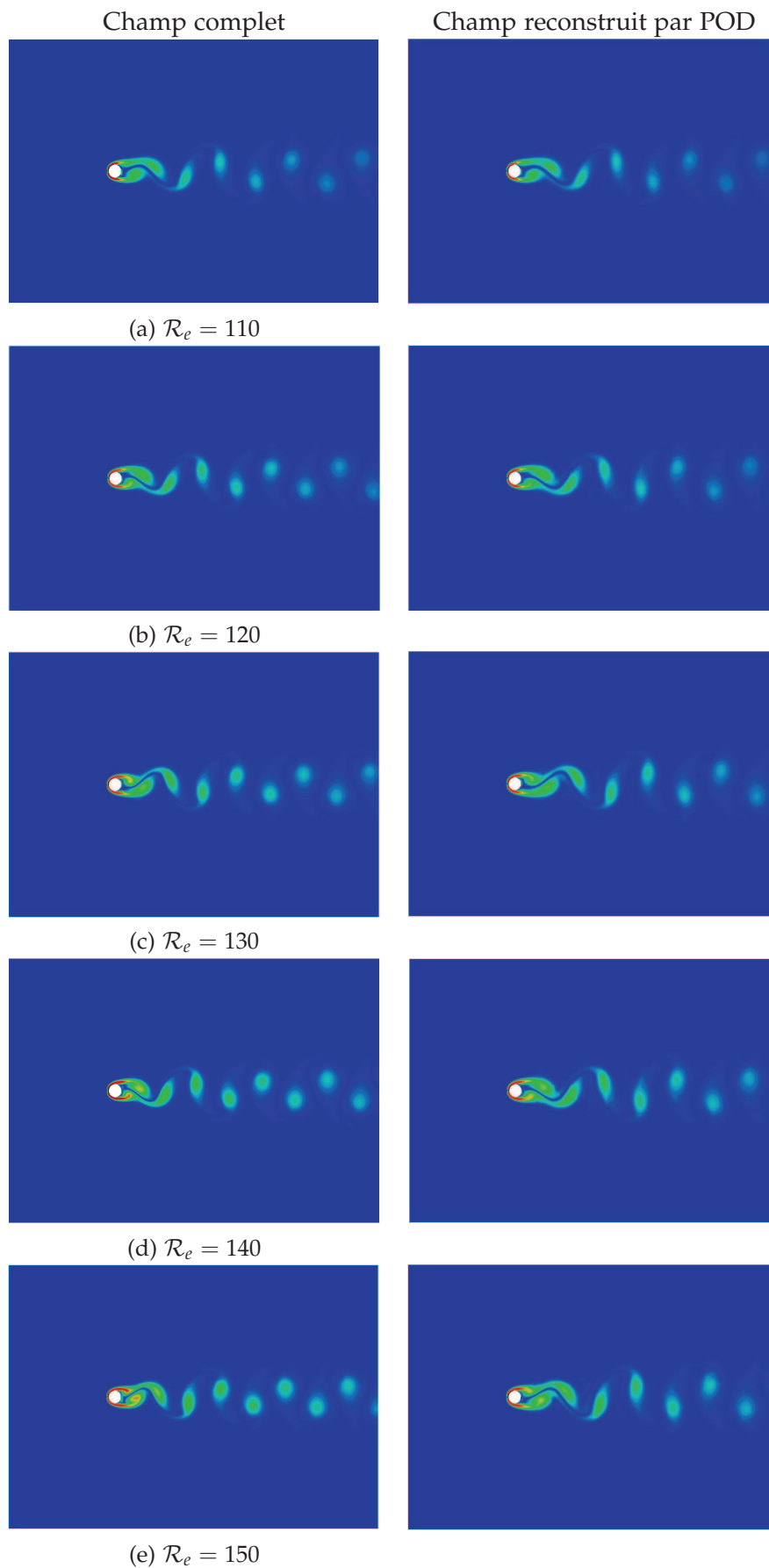


FIGURE 6.3 – Comparaison entre les champs de vorticité complet et reconstruit par la POD, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 100$

6.2.3 Cas du faisceau fixe sous écoulement transversal

Pour le cas du faisceau fixe, l'écoulement dont est extrait la base POD est à Reynolds $\mathcal{R}_e = 2600$. Nous effectuons les reconstructions de champs de vitesse pour les nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e = 2650$ et 2700 .

Le calcul est mené avec la même stabilisation du système dynamique que pour le cas avec $\mathcal{R}_e = 2600$, c'est-à-dire une stabilisation du type de celle de Cazemier (1997) avec $v_{\text{artif}} = 0,65$. La figure 6.4 représente les résultats obtenus en termes de vitesse globale dans l'écoulement pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds. Qualitativement, les niveaux de vitesse sont respectés. Par contre, en ce qui concerne les fluctuations du champ, on observe des différences non négligeables. L'aspect chahuté de l'écoulement déjà observé dans le cas du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = 2600$ peut avoir une influence notable sur ces résultats.

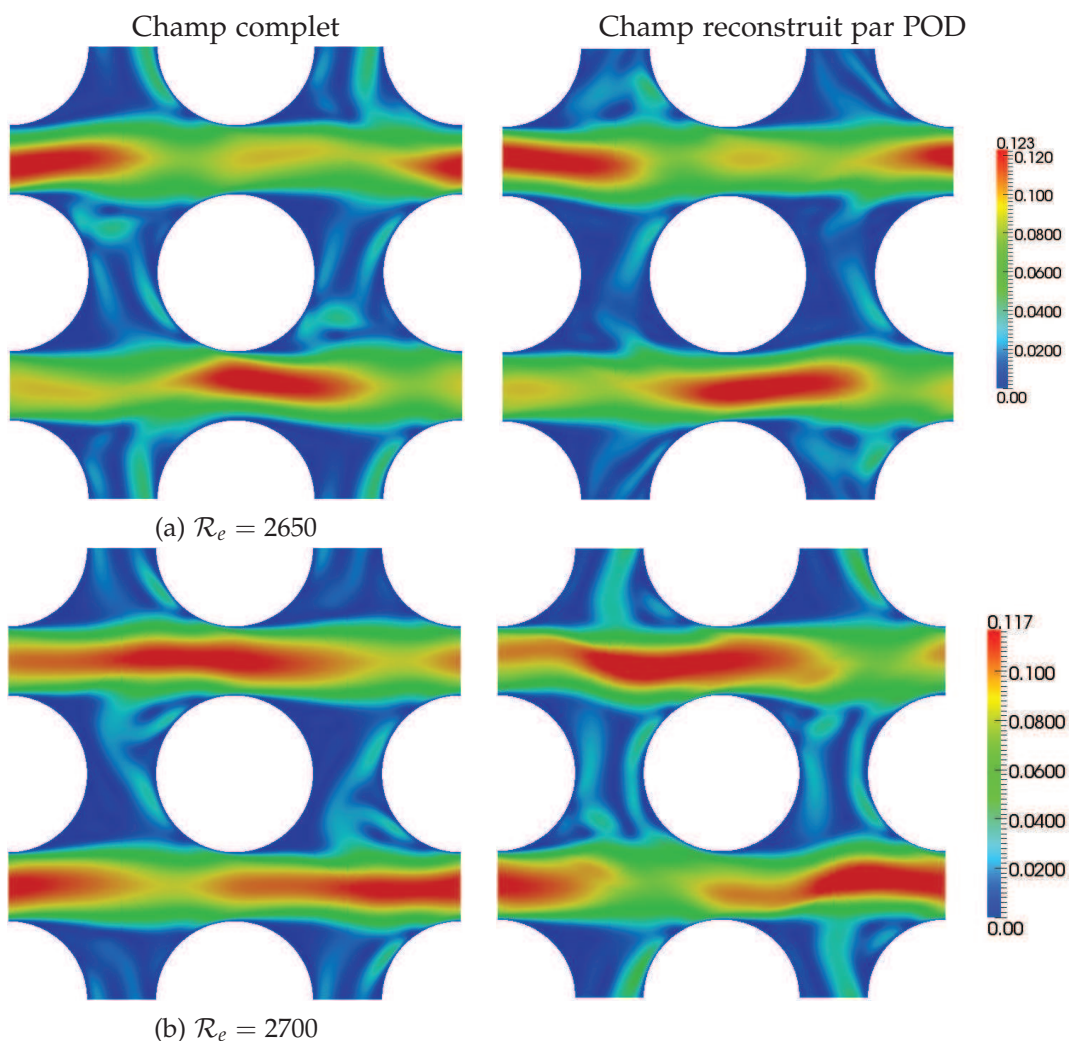


FIGURE 6.4 – Comparaison entre les champs de vitesse complet et reconstruit par la POD pour le faisceau de tubes, base correspondant à $\mathcal{R}_e = 2600$

Akkari et al. (2011) montrent qu'en augmentant le nombre de modes POD dans la base sur laquelle on projette les équations pour le nouveau paramètre, il est possible d'améliorer le résultat. Ici, nous n'avons pas observé de modifica-

tion de l'écoulement par une augmentation du nombre de modes, mais le champ de vitesse reste bien reconstruit ; la méthode permet donc, pour ces cas stables, de s'affranchir de calculer le champ de vitesse complet pour chaque valeur du nombre de Reynolds.

6.3 APPLICATION SIMPLE DE LA MÉTHODE GRASSMANNIENNE

Nous proposons l'application de la technique présentée dans la partie 6.1 utilisant la géométrie grassmannienne au cas de l'équation de Burgers, afin de comparer les résultats obtenus avec ceux de la technique proposée au paragraphe précédent. Pour cela, nous considérons l'équation de Burgers (4.50) pour différentes valeurs de la viscosité (notre paramètre d'étude).

D'abord, nous construisons la base POD $\{\Phi\}_{0.01}$ pour la valeur $\nu = 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. En appliquant la technique présentée en partie 6.2.1 consistant à conserver une base unique et à projeter les équations pour d'autres valeurs du paramètre d'étude sur cette base, nous obtenons les résultats présentés en figure 6.5. L'équation de Burgers pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ est projetée sur la base $\{\Phi\}_{0.01}$ avec 3 modes.

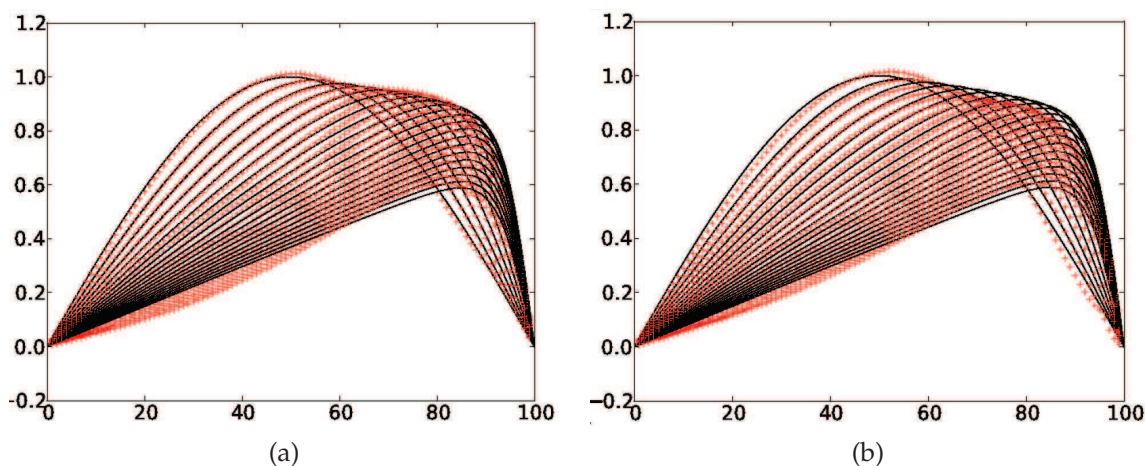


FIGURE 6.5 – Reconstruction du champ de l'équation de Burgers pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (a) avec la base POD construite pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ avec 3 modes (b) avec la base POD construite pour $\nu = 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ avec 3 modes ; — calcul complet ; ++ reconstruction

L'application de la méthode de Grassmann est effectuée comme suit, avec deux bases connues : les bases POD $\{\Phi\}_{0.01}$ et $\{\Phi\}_{0.05}$ sont constituées et interpolées pour construire la base $\{\Phi\}_{0.03}$. Cette base est comparée avec la base POD directement calculée pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ sur la figure 6.6.

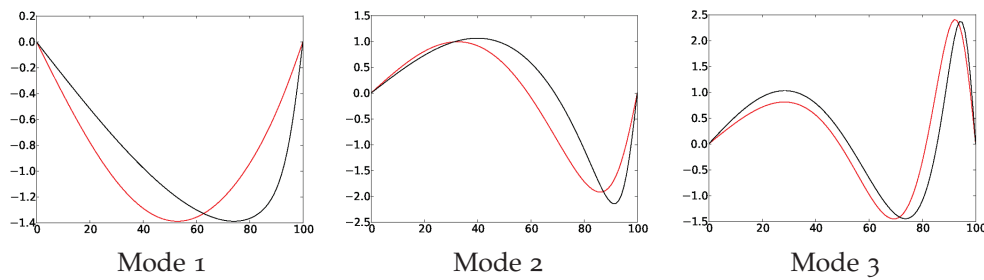


FIGURE 6.6 – Comparaison entre la base POD pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ calculée directement et la même base calculée par interpolation des bases POD pour $\nu = 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et $\nu = 0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; — base directe ; — base interpolée

Les résultats en termes de reconstruction du champ par cette base interpolées sont bien meilleurs que ceux pour la base directe ou par la méthode avec une base unique, comme on peut le voir sur la figure 6.7.

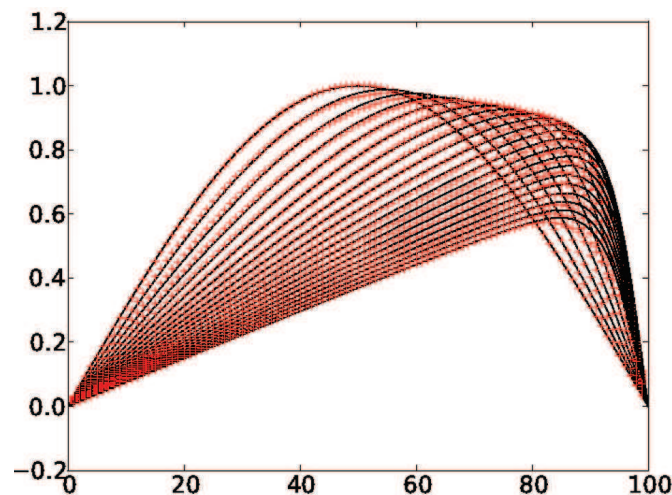


FIGURE 6.7 – Reconstruction du champ de l'équation de Burgers pour la base interpolée pour $\nu = 0.03 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$; — calcul complet ; +++ reconstruction avec base interpolée

6.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, l'application de la réduction de modèles aux études paramétriques a été envisagée. Un premier cas consistant à projeter les équations de Navier-Stokes sur une base POD unique calculée pour un paramètre donné à l'écoulement autour d'un tube seul soumis à un écoulement a été proposé. L'écoulement est globalement bien reconstruit pour des cas d'étude similaires et sans bifurcation attendue. Il est possible d'aller plus loin en utilisant la méthode POD pour l'étude paramétrique, plusieurs techniques de la littérature sont décrites. La méthode utilisant la géométrie grassmannienne est appliquée au cas de l'équation de Burgers. Le cas du problème complet d'un écoulement, voire d'un phénomène d'interaction fluide-structure reste à mettre en œuvre ; il sera alors nécessaire d'adapter la formulation proposée au cas de l'écoulement incompressible.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Grâce à l'observation du nombre de questions ouvertes à propos de la modélisation des mécanismes vibratoires au sein de réseaux de cylindres équipant les générateurs de vapeur, on réalise la nécessité de proposer un moyen d'effectuer des études à moindre coût, permettant d'explorer le panel le plus large possible de paramètres et de grandeurs pour appréhender les phénomènes.

La réduction de modèle a été adoptée dans un grand nombre de disciplines où l'on est également confronté à des situations de nécessité de réduction des temps de calcul ou de besoin d'un nombre élevé de calculs.

Afin d'évaluer la possibilité d'écrire un modèle d'ordre réduit pour l'étude des vibrations sous écoulement d'un faisceau de tubes, plusieurs étapes successives ont été effectuées. D'abord il est nécessaire de faire le choix du code pour mener l'ensemble des calculs, afin que son utilisation future pour l'ingénieur souhaitant effectuer des calculs par modèle réduit soit possible et facilitée. *Code_Saturne* a ainsi été choisi et adapté à nos besoins. Il a d'abord été utilisé tel quel pour mener plusieurs calculs d'écoulement puis des calculs couplés fluide/structure (accrochage en fréquence d'un tube en milieu infini et vibrations d'un tube confiné dans un faisceau). Ces premiers calculs ont été menés dans le but de construire par la suite des modèles d'ordre réduit, ce qui explique les choix de simplification des modèles. En effet, l'objectif était de se concentrer sur les techniques de réduction, leur capacité à reproduire un champ de vitesse quel qu'il soit, et les améliorations possibles (stabilisation du système dynamique, adaptation au cas mobile) en travaillant avec des données nécessitant une allocation de mémoire restant acceptable.

Puis, la méthode POD classique a été implémentée dans *Code_Saturne* pour l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre fixe puis d'un faisceau de cylindres fixes. Diverses techniques de stabilisation du système dynamique ont été testées; les résultats finalement obtenus par l'application de la méthode POD sont très corrects, ce qui nous a permis de proposer le passage à l'étude des vibrations sous écoulement par modèle réduit.

Pour cela, nous nous sommes basés sur les travaux de Liberge (2008) proposant l'adaptation de la méthode POD au cas de l'interaction fluide-structure avec l'approche POD-multiphasique. Dans un premier temps, le cas de l'accrochage en fréquence du tube seul sous écoulement où les amplitudes de vibration sont élevées a été testé. Les résultats obtenus sont satisfaisants; l'écoulement ainsi que le déplacement de la structure sont bien reconstruits dans l'ensemble.

Ces résultats obtenus pour les grands déplacements du cylindre sont particulièrement encourageants, car les méthodes alternatives existantes de réduction de modèle pour l'interaction fluide-structure ne sont utilisées que pour de petits déplacements.

L'étape suivante a consisté en l'application de la méthode POD multiphasique au cas d'un tube mobile confiné dans un réseau de tubes. Le tube est soumis d'abord à des petits déplacements avec des conditions aux limites périodiques, puis à de grands déplacements avec des conditions plus simples d'entrée/sortie. Le cas des petits déplacements, du fait des conditions aux limites périodiques, génère dès le calcul complet un signal très chahuté, ce qui complique sa reconstruction par réduction de modèle. Par contre, les grands déplacements du cylindre dans le faisceau avec des conditions aux limites d'entrée/sortie fournissent un signal plus simple à traiter. On observe ainsi une très bonne reconstruction du déplacement du cylindre central.

Ainsi, cette première étape dans l'application d'un modèle d'ordre réduit au cas des vibrations sous écoulement des faisceaux tubulaires permet d'envisager, en guise de perspective de travail, l'extension au cas tridimensionnel à plus haut nombre de Reynolds, afin de pouvoir d'une part comparer les résultats à ceux de la littérature (résultats expérimentaux ou numériques classiques), d'autre part d'étudier des conditions se rapprochant des conditions d'exploitation des échangeurs de chaleur de centrales et chaufferies nucléaires, en termes de régime d'écoulement et de taille de domaine (nombre de cylindres) notamment.

L'application de la méthode POD à l'étude paramétrique pour le cas des écoulements autour d'un tube et d'un faisceau fixe a montré la capacité de la méthode POD avec une base unique à reproduire des écoulements similaires à celui grâce auquel la base a été construite, si l'on s'intéresse aux caractéristiques principales de l'écoulement. L'utilisation de la géométrie grassmannienne sur une première étude a fourni des résultats satisfaisants et allant dans le sens des observations faites par Amsallem et Farhat (2008), il est envisagé de l'appliquer au cas d'un problème complet d'écoulement et de l'interaction fluide-structure, moyennant une adaptation de la formulation au caractère incompressible du fluide.

En ce qui concerne l'observation des fluctuations et des structures fines de l'écoulement, il est nécessaire d'avoir une base assez riche. Pour cela, nous pourrions envisager par exemple l'utilisation de l'APR-POD ou encore le couplage de la PGD avec la méthode POD-multiphasique et la méthode grassmannienne. Cela permettrait une ouverture vers des études paramétriques pour déceler des modifications majeures du comportement du système couplé fluide-structure, comme l'accrochage en fréquence ou encore des instabilités et des bifurcations comme le départ en instabilité fluide-élastique.

ANNEXES

A

A.1 UN MODÈLE DE DESCRIPTION DES GRANDEURS AU SEIN D'UN FAISCEAU DE TUBES SOUS ÉCOULEMENT

Dans cette annexe, nous présentons un modèle permettant de décrire les différents paramètres entrant en jeu dans les écoulements et vibrations sous écoulement d'un faisceau tubulaire. Ce modèle, relativement complet, a pu servir lors de la conception d'échangeurs de chaleur dans l'industrie. Il en existe bien évidemment d'autres, notre propos ne se veut pas exhaustif mais propose un exemple d'établissement du cadre pour ce type d'étude.

A.1.0.1 Cadre monophasique

Masse linéique

La masse linéique du système est définie comme la somme de la masse linéique du tube seul m_t et la masse linéique du fluide contenu dans le tube (eau du circuit primaire) m_i .

De Langre (2002) rappelle que la masse ajoutée n'est pas la masse d'un système physique, mais qu'elle est *un coefficient inertiel qui donne l'amplitude de la force résultante du fluide sur la structure en fonction de l'accélération de celle-ci*. De ce fait, la masse ajoutée peut donc être supérieure ou inférieure à la masse du fluide étudié.

Amortissement

Si l'on considère la présence du support des tubes, plusieurs mécanismes de dissipation d'énergie contribuent à l'amortissement du mouvement des tubes (Pettigrew et al. 1986b) :

- ζ_V l'amortissement réduit par dissipation visqueuse dans le liquide,
- ζ_L l'amortissement dû à l'effet de lame fluide dans la zone de jeu libre entre le tube et son support,
- ζ_F l'amortissement par frottement entre le tube et son support.

Ainsi, l'amortissement total d'un tube dans un écoulement monophasique liquide transverse s'écrit sous la forme :

$$\zeta_{\text{tot monophasique}} = \zeta_V + \zeta_L + \zeta_F \quad (\text{A.1})$$

Il a été précisé plus haut que la longueur et la proximité des tubes entre eux impliquent l'insertion de grilles de maintien le long des tubes. De ce fait, la longueur représentative du système n'est pas la longueur totale du tube, mais une longueur "inter-grilles", c'est-à-dire la longueur d'un tronçon de tube entre deux grilles. Cette longueur, notée l_m , est définie de la façon suivante par Pettigrew et Taylor (2003a) : c'est la moyenne des trois plus longs tronçons d'un tube dans le cas où ce sont les modes de vibration les plus faibles (et donc les fréquences les plus basses) qui dominent la réponse vibratoire : c'est le cas la plupart du temps. Dans le cas contraire, où les plus hauts modes sont excités de façon prioritaire (par exemple dans le cas où les vitesses de l'écoulement sont très élevées, comme dans les zones d'entrée ou sortie du faisceau), l_m est alors la moyenne des trois tronçons les plus courts. Le nombre total de tronçons d'un tube est noté N_t , et donc $(N_t - 1)$ est le nombre d'appuis pour un tube.

La prise en compte des paramètres l_m et N_t a permis à Pettigrew et al. (1986b) de formuler les amortissement de lame fluide et de frottement en écoulement liquide. Pour cela, ils se sont basés sur les données expérimentales fournissant l'amortissement total des tubes (voir figure A.1), ce qui leur a permis de proposer des formules semi-empiriques :

$$\zeta_L = \left(\frac{N_t - 1}{N_t} \right) \left[\frac{1460}{f} \left(\frac{\rho D^2}{m} \right) \left(\frac{e}{l_m} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\zeta_F = \left(\frac{N - 1}{N} \right) \left[0,5 \left(\frac{e}{l_m} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{A.3})$$

où f est la fréquence propre du mode considéré, e est l'épaisseur de la grille supportant le tube, et m la masse linéique totale d'un tube. Le coefficient 1460 choisi par Pettigrew et al. correspond grossièrement à la valeur la plus faible des valeurs obtenues lors de la comparaison de données expérimentales et de leur modèle d'amortissement par effet de lame fluide. Cette comparaison est visible en figure A.1. Pettigrew et Taylor (2003a) assurent que c'est un modèle réaliste ; cependant, le modèle reste conservatif, c'est-à-dire qu'il assure un amortissement avec une grande marge d'erreur, pour être le plus restrictif possible afin de conserver un régime de fonctionnement sans endommagement. C'est intéressant du point de vue de la durée de vie du système, mais plus délicat du point de vue de l'ingénieur qui souhaite exploiter ce dernier dans la plus grande gamme possible de paramètres, notamment pour avoir une certaine souplesse lors de la conception. L'amortissement par effet de lame fluide dépend d'un grand nombre de paramètres d'assemblage (alignement des tubes, position relative des tubes, position des tubes par rapport au support, etc.), ce qui implique une assez grande disparité des données de mesures, comme l'ont montré Pettigrew et Taylor (2003a).

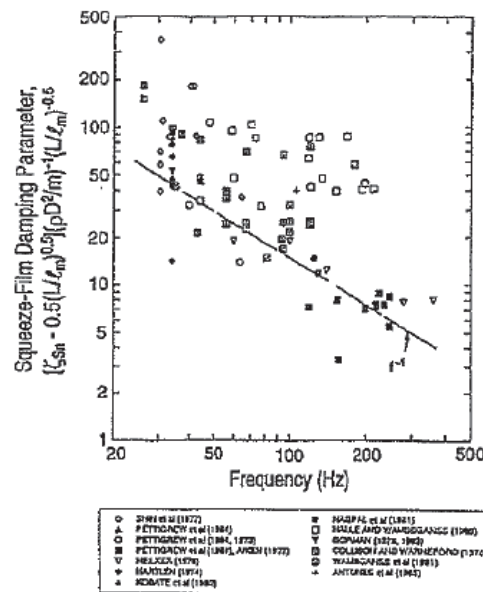


FIGURE A.1 – Comparaison entre le modèle d'amortissement de lame fluide (A.2) pour un écoulement monophasique liquide et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a).

Rogers et al. (1984) ont développé une formule fournissant l'amortissement visqueux en écoulement fluide. Comme ce dernier dépend du nombre de Stokes que l'on notera ici S_{to} :

$$S_{to} = \frac{\pi f D^2}{2\nu} \quad (\text{A.4})$$

avec ν la viscosité cinématique de l'écoulement et du confinement d'un tube dans le faisceau, cette formule est valable pour une gamme de paramètres qui couvre la majeure partie des échangeurs : un confinement de $D/D' < 0,5$ et un nombre de Stokes $S_t > 3300$. Sa forme simplifiée est donnée par :

$$\zeta_V = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \frac{\rho D^2}{m} \left(\frac{2\nu}{\pi f D^2} \right)^{1/2} \left[\frac{1 + (D/D')^3}{(1 - (D/D')^2)^2} \right] \quad (\text{A.5})$$

La figure A.2 présente une comparaison entre cette formule de l'amortissement par dissipation visqueuse et l'expérience, menée par Pettigrew et Taylor (2003a).

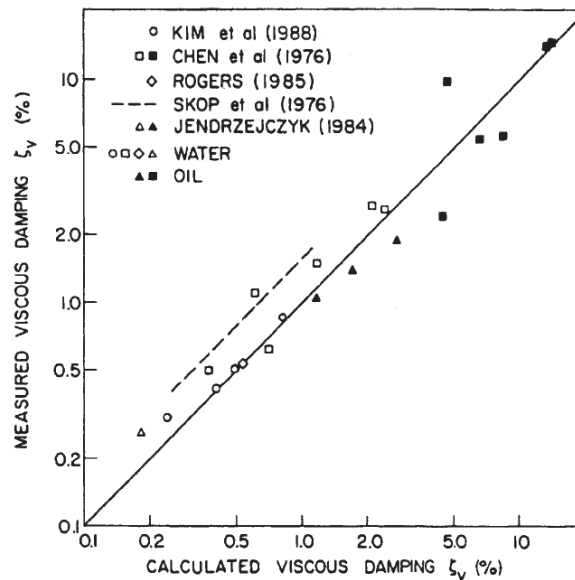


FIGURE A.2 – Comparaison entre la formule théorique de l'amortissement visqueux pour un écoulement monophasique liquide et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a).

Dans le cas d'un écoulement monophasique gazeux, le mécanisme d'amortissement dominant est celui entraînant le frottement entre les tubes et leurs supports. Une estimation fournie par Pettigrew et Taylor (2003a) donne :

$$\zeta_F = 5 \left(\frac{N_t - 1}{N_t} \right) \left(\frac{e}{l_m} \right)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Il est intéressant de noter la remarque de Pettigrew et Taylor sur l'ordre de grandeur de ζ_F : dans le cas d'un écoulement monophasique gazeux, ce coefficient est environ 10 fois plus grand que pour un écoulement monophasique liquide. Ceci peut s'expliquer par la lubrification, presque inexistante dans le cas gazeux et non négligeable pour un liquide : la lubrification diminue les forces de frottement. D'autre part, il est possible qu'une certaine partie du coefficient de frottement soit incluse

dans le terme d'amortissement de film mince dans le cas liquide. En effet, Pettigrew et al. (1986b) expliquent la difficulté à séparer le terme d'amortissement par frottement du terme d'amortissement par film mince.

Ainsi, en fonction des critères de l'écoulement (phase considérée, nombre de Stokes, confinement), l'amortissement du système peut être décrit grâce à la formule (A.1), en y substituant (A.2), (A.3) et (A.5). Cependant, si le résultat de ce calcul analytique prédit un amortissement inférieur à 0,6%, Pettigrew et Taylor (2003b) recommandent de garder $\zeta_{tot} = 0,6\%$ comme valeur seuil, comme le montre la figure A.3, afin de rester conservatif.

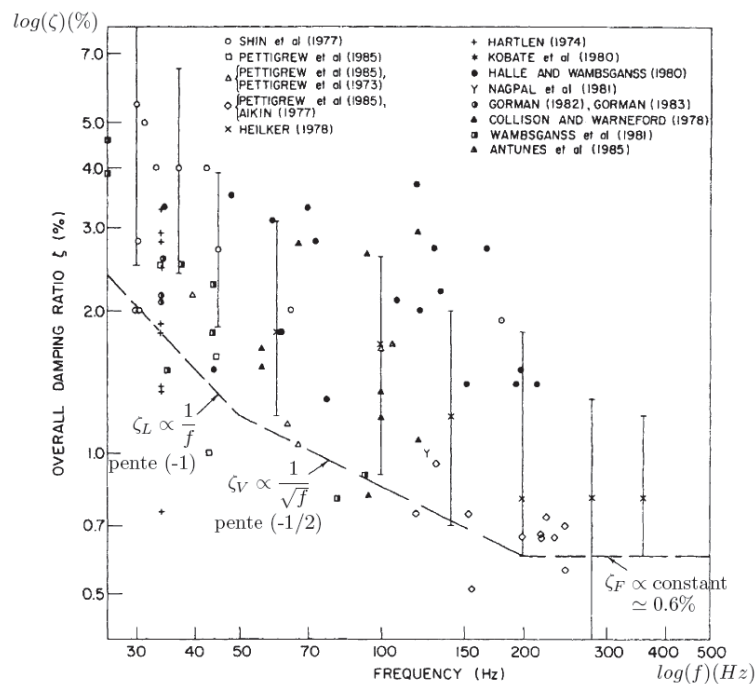


FIGURE A.3 – Comparaison entre le calcul de l'amortissement total pour un écoulement monophasique liquide par la formule A.2 et l'expérience, Pettigrew et Taylor (2003a).

Bien sûr, lorsque les tubes sont munis d'ailettes, ces formules sont à reconsidérer. D'après Pettigrew et Taylor (2003a), Hartlen et Barnstaple, en 1971, dans un rapport non publié ont proposé un récapitulatif des données pertinentes pour l'amortissement des tubes à ailettes.

A.1.0.2 Cadre diphasique

Fraction de vide

Pour un fluide diphasique, il est nécessaire de quantifier la proportion de chacune des deux phases au sein du mélange. Pour cela, une grandeur appelée *fraction de vide* est introduite. La fraction de vide ε_g est un rapport des débits volumiques, notés \dot{V}_g pour la phase gazeuse et \dot{V}_l pour la phase liquide :

$$\varepsilon_g = \frac{\dot{V}_g}{\dot{V}_g + \dot{V}_l} \quad (\text{A.7})$$

Le problème d'un mélange diphasique est, entre autres, que ce mélange est rarement homogène ou uniforme le long d'une ligne de courant. Quelques auteurs, comme Feenstra et al. (2003), considèrent que l'explication de certains phénomènes (comme l'effet de la gravité pour un écoulement vertical autour des tubes du générateur de vapeur) provient justement de la différence entre les densités des fluides du mélange, et qu'il ne faut pas négliger le fait que chaque phase a sa propre vitesse. Cependant, un grand nombre d'auteurs a choisi de travailler en considérant un écoulement parfaitement homogène, en supposant que les deux phases ont la même vitesse. De cette hypothèse, on extrait la forme de la densité homogénéisée $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = \rho_g \varepsilon_g + (1 - \varepsilon_g) \rho_l \quad (\text{A.8})$$

où ρ_l et ρ_g sont respectivement les masses volumiques de la phase fluide et de la phase gazeuse. Il est aussi possible de travailler avec le titre de gaz (de vapeur dans le cas du mélange eau-vapeur), qui est un rapport des masses de chaque phase.

Vitesse caractéristique

La vitesse moyenne de l'écoulement pour un écoulement diphasique reste la même que la vitesse de pas définie pour un écoulement monophasique, soit U_p , mais avec une vitesse à l'infini définie de la façon suivante :

$$U_\infty = \frac{\rho_l \dot{V}_l + \rho_g \dot{V}_g}{\tilde{\rho} A} \quad (\text{A.9})$$

où A est l'aire de la zone d'écoulement libre considérée.

Amortissement

Dans le cas d'un fluide diphasique, l'amortissement n'est pas exactement régi par les mêmes mécanismes que pour un écoulement monophasique. En effet, les mécanismes apparents sont cette fois (toujours en considérant le support des tubes) :

- ζ_S l'amortissement dû à la présence du support,
- ζ_V l'amortissement visqueux du mélange diphasique,
- ζ_D l'amortissement intrinsèque au caractère diphasique du mélange.

Selon les conditions thermohydrauliques (la fraction de vide, le régime de l'écoulement, le flux de chaleur, etc.), il faut distinguer les cas où le support du tube est sec ou humide. Pour un support sec, ce qui est généralement le cas pour les mélanges à grande fraction de vide, seul l'amortissement par frottement prédomine. Dans ce cas, l'amortissement du support présente des caractéristiques analogues au cas de l'amortissement du système pour un écoulement monophasique gazeux, d'après Pettigrew et al. (1986a), donc l'amortissement dû au support suit alors la loi (A.3). Mais, généralement, c'est le cas des supports humides qui est le plus courant dans les générateurs de vapeurs actuels. Et, dans ce cas, il faut de nouveau considérer un amortissement dû à l'effet de lame fluide entre le tube et le support, qui se rajoute au coefficient d'amortissement par frottement. Les formules (A.2) et (A.3) restent valables dans le cas diphasique, mais cette fois il faut remplacer la masse volumique ρ dans (A.2) par la masse volumique ρ_l de la phase fluide uniquement, puisque c'est

de cette phase que provient l'apparition de l'amortissement par présence du film mince.

D'autre part, en ce qui concerne l'amortissement visqueux, la formule (A.5) est reprise elle aussi, avec les propriétés physiques du mélange diphasique supposé parfaitement homogène, c'est-à-dire la masse volumique $\tilde{\rho}$ et la viscosité cinématique $\tilde{\nu}$ homogénéisées, avec

$$\tilde{\nu} = \nu_l / [1 + \varepsilon_g(\nu_l/\nu_g - 1)] \quad (\text{A.10})$$

où ν_l et ν_g sont respectivement les viscosités cinématiques de la phase liquide et de la phase gazeuse. Pettigrew et Taylor (2003a) précisent que pour une fraction de vide dépassant 40%, l'amortissement visqueux peut être négligé dans la région coudée des tubes.

Enfin, un dernier mécanisme d'amortissement est relevé et vient s'ajouter aux autres dans le cas d'un mélange diphasique. Weaver et al. (2000) rappellent la forte dépendance de l'amortissement du mélange diphasique à la fraction de vide, au régime de l'écoulement (lui-même lié au confinement et au rapport des masses du fluide et du tube) et aux propriétés du fluide. Pettigrew et Taylor ont ainsi développé une formule semi-empirique de cette composante diphasique de l'amortissement :

$$\zeta_D = 4 \left(\frac{\rho_l D^2}{m} \right) f(\varepsilon_g) \left[\frac{1 + (D/D')^3}{(1 - (D/D')^2)^2} \right] \quad (\text{A.11})$$

Et on a donc la formule de l'amortissement total en écoulement diphasique suivante :

$$\zeta_{\text{tot diphasique}} = \zeta_S + \zeta_V + \zeta_D \quad (\text{A.12})$$

La fonction $f(\varepsilon_g)$ dans (A.11) est la fonction de fraction de vide, approchée grâce aux données rassemblées sur la figure A.4 par Pettigrew et Taylor (2003a).

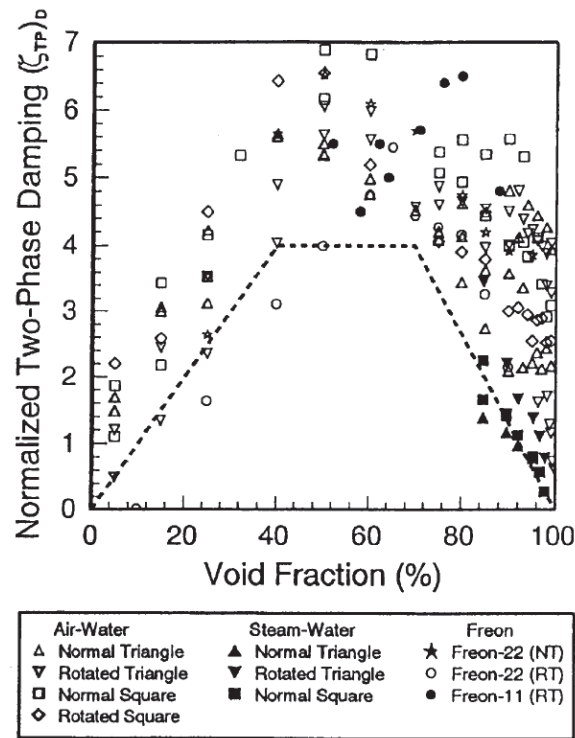


FIGURE A.4 – Comparaison entre les préconisations données par la formule (A.12) et les données d'amortissement en fluide diphasique, en fonction de la fraction de vide. ζ_{TP} correspond à ζ_D normalisé.

La loi d'approximation de $f(\varepsilon_g)$ est la suivante :

$$\begin{cases} f(\varepsilon_g) = \varepsilon_g/40 & \text{pour } \varepsilon_g < 40\% \\ f(\varepsilon_g) = 1 & \text{pour } 40\% \leq \varepsilon_g < 70\% \\ f(\varepsilon_g) = 1 - (\varepsilon_g - 70)/30 & \text{pour } \varepsilon_g > 70\% \end{cases}$$

L'encrassement des tubes n'est pas susceptible de modifier de façon radicale l'amortissement du système. Cependant, l'encrassement du support peut, lui, réduire considérablement l'amortissement du tube par le support. Le cas limite apparaît lorsque l'on considère que le dépôt sur le support est tel que le tube y est coincé. Dans ce cas, Pettigrew et Taylor (2003a) préconisent une valeur de l'amortissement du support de $\zeta_S = 0.2\%$ pour l'analyse vibratoire.

A.2 L'ANALYSE VIBRATOIRE AU SEIN DES FAISCEAUX TUBULAIRES

Dans cette annexe, nous nous intéressons aux modèles qui ont été mis en place pour l'étude des vibrations sous écoulement au sein d'un faisceau de tubes.

A.2.1 Modèles pour l'excitation turbulente

En vue de dimensionner correctement le faisceau de tubes, afin de pouvoir comparer les données expérimentales existantes et déterminer une limite supérieure acceptable des amplitudes du mouvement d'excitation turbulente, les forces linéiques responsables de cette excitation doivent être normalisées sous la forme d'un spectre. Le problème d'un faisceau de tubes, en comparaison avec une structure isolée dans un écoulement, est que l'on est obligé de tenir compte du couplage inertiel entre les tubes, surtout si la densité du fluide est élevée. Ainsi, le spectre tracé est le résultat des pics fréquentiels de plusieurs tubes, il faut donc utiliser des méthodes permettant d'identifier les pics de chaque tube.

La méthode de normalisation des résultats retenue par Pettigrew et Taylor (2003b) est appelée "densité spectrale de puissance équivalente", décrite pour la première fois par Axisa et al. (1990). La densité spectrale de puissance est adimensionnée grâce à une pression et une fréquence de référence, respectivement $p_0 = \rho U_p^2 / 2$ et $f_0 = U_p / D$, de la façon suivante :

$$\tilde{S}_F(f_R) = \frac{S_F(f)}{(p_0 D)^2} f_0 \quad (\text{A.13})$$

où $S_F(f)$ est la densité spectrale de puissance du signal de réponse, f_R est la fréquence réduite définie comme $f_R = f / f_0$. Le calcul de la densité spectrale de puissance pose un problème car cette dernière s'écrit en fonction de la longueur de corrélation λ_c , que l'on ne connaît que rarement. La densité spectrale de puissance équivalente s'écrit, d'après Axisa et al. (1990), sous la forme :

$$\tilde{S}_F(f_R)_e = \frac{\lambda_c}{L_e} \tilde{S}_F(f_R) \quad (\text{A.14})$$

où L_e est la longueur excitée du tube. À partir de cette définition, la densité spectrale de puissance équivalente pour le premier mode peut être définie en fonction du déplacement du tube $y(x)$:

$$\tilde{S}_F(f_R)_e = \frac{\overline{y^2(x)}_1 64 \pi^3 f_1^3 m^2 \zeta_1}{\Phi_1^2 a_1} \frac{f_0}{(p_0 D)^2} \quad (\text{A.15})$$

avec $\Phi_1(x)$ la forme modale normalisée pour le premier mode, a_1 est le facteur modal, f_1 la fréquence propre du tube associée au premier mode et ζ_1 est le coefficient d'amortissement pour le premier mode.

L'équation (A.15) suppose les hypothèses suivantes : il existe un mode dominant avec un coefficient d'amortissement faible, les modes sont séparés de façon distincte et enfin, la longueur de corrélation est très petite devant l'unité. Cette équation fournit alors le déplacement du tube en moyenne quadratique au carré, sans avoir à connaître la longueur de corrélation.

Enfin, pour une comparaison correcte du spectre obtenu par des études expérimentales avec différentes géométries de faisceau, une densité spectrale de puissance équivalente de référence est définie, à partir d'une longueur de référence du tube excité L_0 :

$$\tilde{S}_F(f_R)_e^0 = \tilde{S}_F(f_R)_e \frac{L_e}{L_0} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi, dans le cas d'un écoulement monophasique, Taylor et Pettigrew (2000) déterminent des valeurs bornes à partir d'un ensemble de données expérimentales. Ces résultats sont visibles en figure A.5. Les bornes extraites de cette compilation de données sont les suivantes, avec $f_0 = U_p/D$:

- pour un écoulement au cœur du faisceau ("*interior flows*"), c'est-à-dire dans le cas où le niveau de turbulence à l'intérieur du faisceau est supérieur ou égal au niveau de turbulence à l'entrée du faisceau :

$$\tilde{S}_F(f_R)_e^0 = \begin{cases} 4.10^{-4}(f/f_0)^{-0,5} & \text{pour } 0,01 < f/f_0 < 0,5 \\ 5.10^{-5}(f/f_0)^{-3,5} & \text{pour } 0,5 < f/f_0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

- pour un écoulement en entrée du faisceau ("*inlet flows*"), c'est-à-dire si le niveau de turbulence en amont du faisceau est prédominant (ce qui représente la majorité des cas) :

$$\tilde{S}_F(f_R)_e^0 = \begin{cases} 1.10^{-2}(f/f_0)^{-0,5} & \text{pour } 0,01 < f/f_0 < 0,5 \\ 1,25.10^{-5}(f/f_0)^{-3,5} & \text{pour } 0,5 < f/f_0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

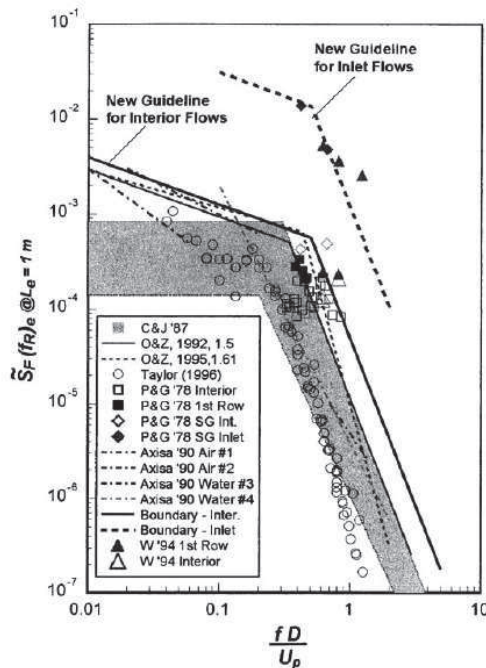


FIGURE A.5 – Données expérimentales et valeurs limites de la densité spectrale de puissance équivalente en fonction du nombre de Strouhal pour un faisceau de tubes soumis à des excitations turbulentes en écoulement monophasique (Taylor et Pettigrew 2000).

Dans le cas d'un écoulement diphasique, la pression et la longueur de référence sont évaluées d'une autre façon, proposée par De Langre et Villard (1998) : $p_0 = \bar{\rho}gD_w$ où $\bar{\rho}$ est la masse volumique du mélange diphasique supposé homogène, g est l'accélération de la pesanteur, et D_w est justement la longueur de référence, définie par : $D_w = 0,1D/\sqrt{1-\varepsilon_g}$ avec ε_g la fraction de vide. Cette

longueur de référence prend en compte les effets du mélange diphasique sur les caractéristiques fréquentielles des signaux des forces aléatoires.

Pettigrew et Taylor (2003b) ont rassemblé des données de densité spectrale de puissance équivalente pour différentes expériences en écoulement diphasique ; ils ont ainsi pu déterminer une valeur limite pour le dimensionnement. La figure A.6 est issue des travaux de Pettigrew et Taylor (2003b) :

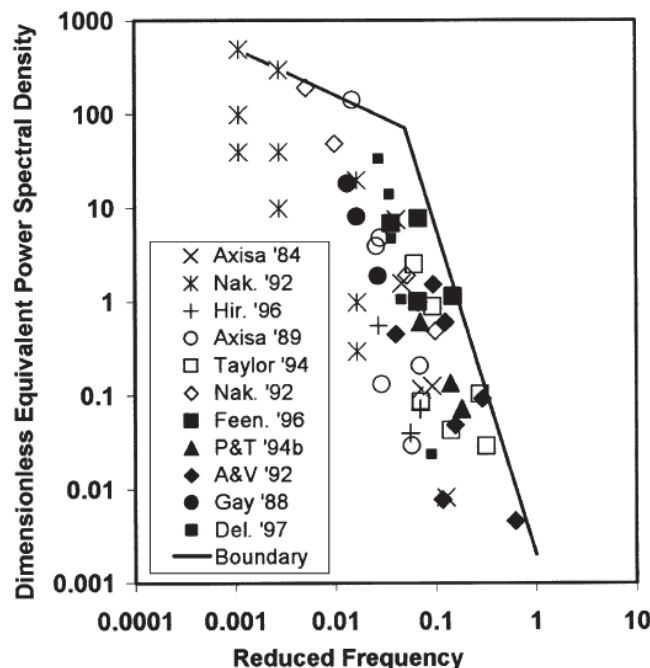


FIGURE A.6 – Données expérimentales et valeurs limites de la densité spectrale de puissance équivalente en fonction de la fréquence réduite pour un faisceau de tubes soumis à des excitations turbulentes pour divers écoulements diphasiques (Pettigrew et Taylor 2003b).

La valeur limite adoptée est alors :

$$\tilde{S}_F(f_R)_e^0 = \begin{cases} 16(f/f_0)^{-0,5} & \text{pour } 0,001 \leq f/f_0 \leq 0,05 \\ 2.10^{-3}(f/f_0)^{-3,5} & \text{pour } 0,05 \leq f/f_0 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Weaver et al. (2000) notent que l'amplitude des vibrations des tubes du faisceau sous un écoulement diphasique turbulent peut être assez importante. Les forces exercées dépendent fortement de la fraction de vide et de la vitesse de l'écoulement, et de plus, les densités spectrales de puissance dépendent fortement des propriétés fluides du mélange diphasique. Les résultats obtenus en fonction du mélange (air-eau, vapeur-eau, Freon, etc.) sont différents. Les disparités s'expliquent par le régime de l'écoulement diphasique (à bulles, à gouttelettes, intermittent, tourbillonnant, etc.), voir par exemple les travaux de Pettigrew et Taylor (1994) cités dans ceux de Weaver et al. (2000).

L'équation (A.15) avec les hypothèses nécessaires est souvent utilisée, les auteurs Weaver et al. (2000) donnent sa version sommée sur tous les modes considérés :

$$\overline{y(x)^2} = \sum_{\alpha} \frac{AS_F(f_{\alpha})\phi_{\alpha}^2(x)J_{\alpha\alpha}(f_{\alpha})}{64\pi^3 m^2 f_{\alpha}^3 \zeta_{\alpha}} \quad (\text{A.20})$$

où A est l'aire de la surface considérée. Cette formule se base sur la fonction $J_{\alpha\alpha}(f_\alpha)$ dite "d'acceptation multi-directionnelle", ou *joint acceptance function* en anglais. Cette fonction est une double intégrale de surface prenant en compte le produit des formes modales considérées dans le calcul, et la fonction de corrélation spatiale. D'autre part, la force exercée par l'écoulement turbulent sur le tube est déterminée par un test de modèle et une analyse dimensionnelle. Cependant, cette analyse (détermination de la force fluide et de la réponse du tube) est effectuée avec les hypothèses fortes suivantes : les contributions modales transversales sont supposées négligeables, et les forces turbulentes sont considérées comme homogènes, isentropiques et stationnaires.

Ce modèle est utilisable dans la plupart des cas de structures mono-dimensionnelles ou bi-dimensionnelles, et pour des écoulements aussi bien transversaux que longitudinaux. Dans le cadre présent, l'attention est portée sur les écoulements transversaux. Dans ce cas, lorsque l'écoulement arrive de façon transversale sur les tubes du faisceau, le front d'onde arrive exactement au même moment en tout point de la structure. Alors, il n'existe pas de déphasage entre deux points de la structure, donc l'angle de phase dans le tenseur de corrélation spatiale est nul, ce qui simplifie l'expression de la moyenne quadratique de la réponse des structures excitées. Weaver et al. (2000) proposent des évaluations de $J_{\alpha\alpha}(f_\alpha)$ et de la longueur de corrélation pour des tubes en faisceau. Ils en déduisent des bornes raisonnables pour le coefficient de portance aléatoire C_R proposé par Pettigrew et Gorman (1981) :

$$S_F(f) = \left(C_R(0,5\rho U_p^2) \right)^2 \quad (\text{A.21})$$

et Weaver et al. (2000) obtiennent :

$$C_R = \begin{cases} 0,025 & \text{pour } 0 < f < 40 \text{ Hz} \\ 0,108 \cdot 10^{-0,0159f} & \text{pour } f \geq 40 \text{ Hz} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Comme Pettigrew et Taylor (2003b), beaucoup d'auteurs ont choisi de tracer la densité spectrale de puissance sans dimension en fonction du nombre de Strouhal. Mais, comme le précisent Weaver et al. (2000), les incertitudes liées aux approximations et conditions opératoires des analyses vibratoires mènent à s'assurer que les bornes englobent les différents résultats rassemblés. C'est pourquoi Weaver et al. suggèrent les limites suivantes, qui prennent en compte toutes les configurations de faisceau (différents motifs et différents confinements) :

$$\tilde{S}_F(f_R) = \begin{cases} 0,01 & \text{pour } f/f_0 < 0,1 \\ 0,2 & \text{pour } 0,1 \leq f/f_0 \leq 0,4 \\ 5,3 \cdot 10^{-4(f_0/f)^{7/2}} & \text{pour } f > 0,4 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

avec $f_0 = U_p/D$. La figure A.7 rassemble les limites précédentes de densité spectrale de puissance avec, en toile de fond, des données expérimentales provenant de plusieurs expériences. Les calculs effectués avec les équations (A.21) et (A.22) sont aussi tracés.

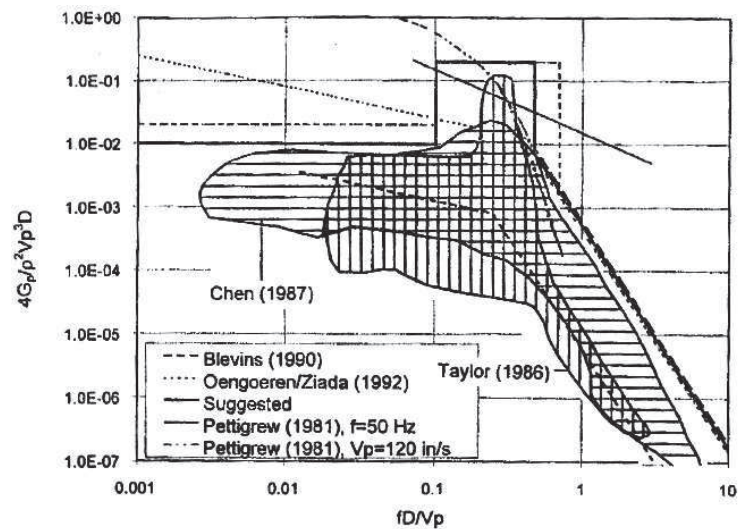


FIGURE A.7 – Densités spectrales de puissance adimensionnées en fonction de la fréquence réduite pour différents auteurs (Weaver et al. 2000)

Weaver et al. (2000) font remarquer le manque cruel de données expérimentales disponibles sur la force fluide turbulente. De plus, pour les rares données existantes, le relevé a été effectué de façon indirecte, soit à partir de la mesure de la force totale de pression aléatoire exercée sur le tube, soit par récupération des mesures de la réponse du tube en déplacement. Ceci est essentiellement dû à la grande difficulté de placer des capteurs de pression dynamique dans le faisceau. Weaver et al. (2000) proposent alors une astuce de réalisation : ayant remarqué que les valeurs en pression mesurées sur un modèle de petite taille sont inférieures aux valeurs des modèles de taille réelle, ils proposent d'effectuer des mesures sur un modèle à grande échelle (afin de faciliter la pose des capteurs), en se souvenant que les données en pressions prendront des valeurs supérieures à celles d'un modèle à l'échelle 1.

A.2.2 Modèles pour les vibrations induites par détaché tourbillonnaire

Pettigrew et Gorman (1981) donnent des valeurs du nombre de Strouhal mesuré sur des échangeurs dans différentes configurations de faisceaux. Ces différentes valeurs sont réunies sur la figure A.8.

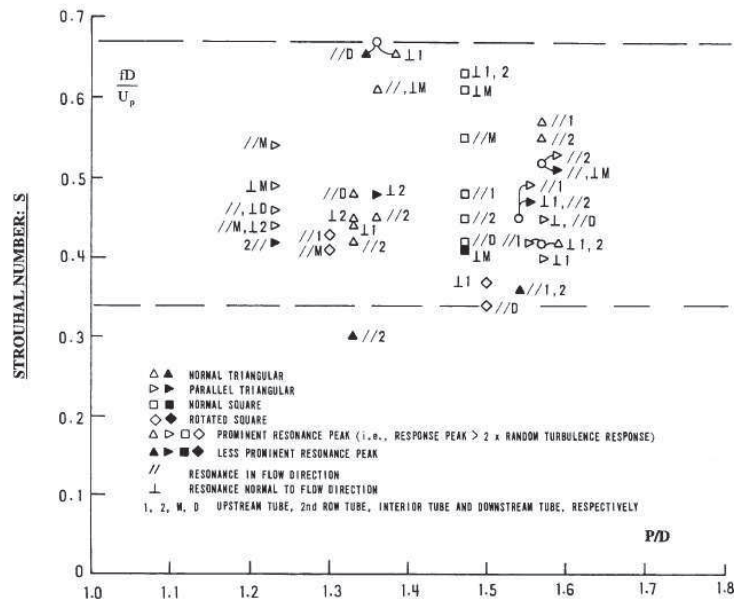


FIGURE A.8 – Nombre de Strouhal en fonction du rapport P/D pour différentes configurations de faisceaux de tubes, d'après Pettigrew et Gorman (1981)

On note une dispersion assez importante des données expérimentales relatives à l'estimation du nombre de Strouhal en fonction de la configuration étudiée. Pettigrew et Taylor (2003b) proposent néanmoins les corrélations suivantes pour calculer le nombre de Strouhal :

– pour un faisceau à pas triangulaire normal :

$$S_t = (1/1,73)(D/P) \tag{A.24}$$

– pour un faisceau à pas triangulaire parallèle :

$$S_t = (1/1,16)(D/P) \tag{A.25}$$

– pour un faisceau à pas carré (en ligne ou en quinconce) :

$$S_t = (1/2)(D/P) \tag{A.26}$$

Ces corrélations donnent un nombre de Strouhal $S_t \in [0,32 - 0,70]$, pour des rapports P/D correspondant à des configurations industrielles concrètes, c'est-à-dire situés dans la gamme $[1,23 - 1,57]$. Ceci correspond à des vitesses réduites $\frac{U_p}{fD} \in [1,5 - 3,0]$. Il existe donc un risque vibratoire pour la gamme de vitesse définie ci-dessus. Dans le cas où la vitesse n'est pas uniforme, seules les forces fluctuantes correspondant aux zones où l'on a $1,5fD < U_p < 3,0fD$ seront considérées.

Les forces fluctuantes dues à l'émission d'un sillage périodique dépendent d'un grand nombre de paramètres, comme la configuration du faisceau, la localisation du tube au sein du faisceau, le nombre de Reynolds, le niveau de turbulence, la densité du fluide et le rapport P/D .

Une estimation du niveau vibratoire du tube peut se faire à partir de la connaissance du coefficient de portance C_L . Pettigrew et Taylor (2003b) donnent une

synthèse des résultats de mesure de ce coefficient pour différentes configurations de faisceau en fonction du rapport P/D ; elle est présentée sur la figure A.9.

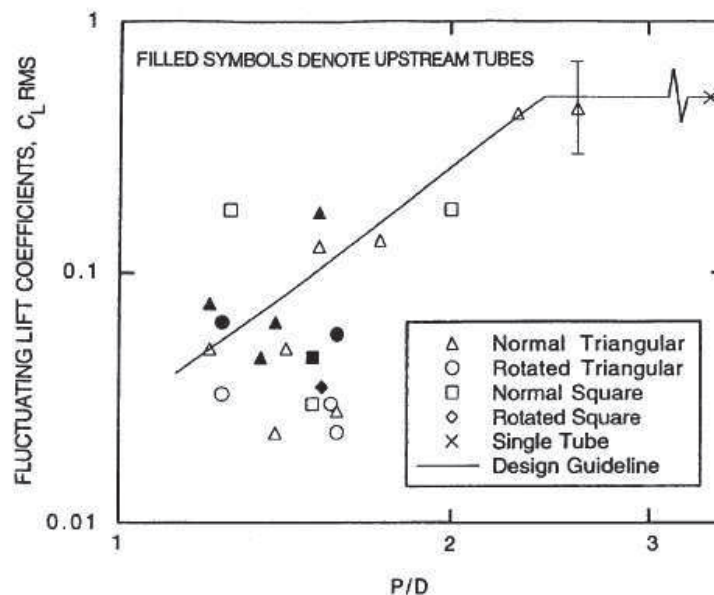


FIGURE A.9 – Coefficient de portance en fonction du rapport P/D pour différentes configurations de faisceau (Pettigrew et Taylor 2003b)

Pour un nombre de Strouhal supérieur à 2,5, le coefficient de portance est quasiment constant et égal au coefficient de portance d'un tube isolé dans un écoulement. En-dessous de 2,5, le coefficient de portance est très dépendant du rapport P/D et il est d'autant plus faible que le rapport P/D est petit : dans un faisceau confiné, l'apparition de structures tourbillonnaires pleinement développées n'est quasiment jamais observée et l'effort fluctuant qui en résulte est ainsi plus faible. Pour la plupart des échangeurs, $P/D < 1,6$ et Pettigrew et Taylor (2003b) recommandent dans ce cas d'utiliser la valeur $C_L = 0,075$ pour estimer le coefficient de portance en moyenne quadratique s'exerçant sur le tube.

Le dimensionnement de l'échangeur doit éviter la coïncidence entre une fréquence propre du tube et une fréquence de détaché tourbillonnaire dans la configuration concernée. Lorsque cela n'est pas respecté, Pettigrew et Taylor (2003b) recommandent alors de vérifier par calcul que l'amplitude vibratoire en moyenne quadratique $Y_{r.m.s}$ qui résulte de la synchronisation n'excède par 2% du diamètre, soit le critère :

$$Y_{r.m.s} < 0,02D \quad (\text{A.27})$$

dans les conditions de résonance. En effet, dans ce cas, l'amplitude des vibrations n'est pas suffisante pour entrer en corrélation avec l'émission des tourbillons le long du tube, et la réponse vibratoire reste peu importante.

Les suggestions de limite en densité spectrale de puissance de Weaver et al. (2000) formulées au paragraphe précédent donnent la valeur $\tilde{S}_F(f_R) = 0,2$ pour $0,1 < fD/U_p < 0,4$: cette plage de vitesses réduites correspond à la présence d'activité tourbillonnaire dans le faisceau de tubes. Dans ce cas, le mécanisme d'accrochage est possible, et le champ de pression aléatoire devient cohérent sur toute la longueur du tube.

Feenstra et al. (2003) ont montré, grâce à des essais expérimentaux, que la simple introduction de gaz dans un écoulement monophasique liquide pour lequel des structures tourbillonnaires étaient observées a suffi à désamorcer le processus de vibrations des tubes induites par les tourbillons : ceci conforte l'idée qu'il est justifié de négliger le phénomène de détachement tourbillonnaire pour les écoulements diphasiques.

A.2.3 Modèles pour la résonance acoustique

Comme cela a été présenté au paragraphe 1.2.5, la coïncidence entre la fréquence acoustique et la fréquence de détachement tourbillonnaire ne suffit pas pour déclencher une résonance acoustique, il faut aussi considérer l'énergie et l'amortissement. Des critères ont été mis en place pour évaluer la susceptibilité du faisceau de tubes à résonner. Il est montré par Blevins et Bressler (1987), que le faisceau est moins propice à la résonance si le faisceau de tubes est très dense, ce qui est probablement dû à l'augmentation de l'amortissement acoustique, et au fait que la forte densité de tubes empêche la formation de grandes structures tourbillonnaires qui, elles, sont associées à une grande quantité d'énergie acoustique.

À partir de données expérimentales sur le premier mode, Blevins et Bressler (1987) ont ainsi montré qu'avec P le pas inter-tubes transverse et L le pas inter-tubes longitudinal (dans le sens de l'écoulement), pour un rapport $P/D < 1,6$ et $L/D < 3,0$ dans le cas d'une maille de faisceau triangulaire ou pour $L/D < 1,4$ dans le cas de la maille carrée, la probabilité pour que le système rentre en résonance acoustique est très faible. Mais ce critère n'est pas confirmé pour les modes d'ordre plus élevé. Pettigrew et Taylor (2003b) reportent que Ziada et al. (1989) proposent un paramètre de résonance permettant d'évaluer la susceptibilité du système à rentrer en résonance :

- pour un faisceau à maille triangulaire, ce paramètre G_t prend la forme :

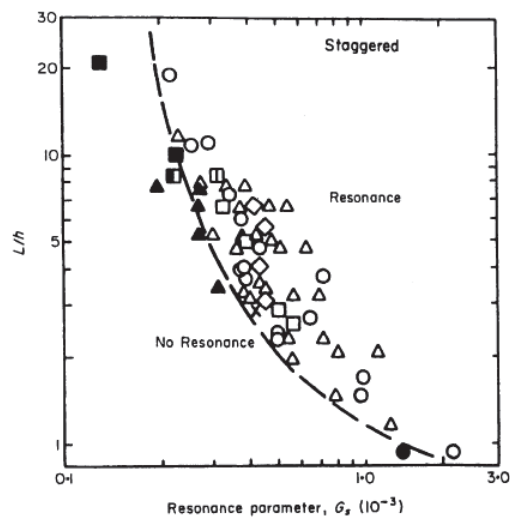
$$G_t = \sqrt{\mathcal{R}_{cr}} \left(\frac{\nu}{CD} \right) \frac{\sqrt{(L/D)(P/D - 1)}}{(L/D) - 1} \quad (\text{A.28})$$

- pour un faisceau à maille carrée, le paramètre de résonance G_c est :

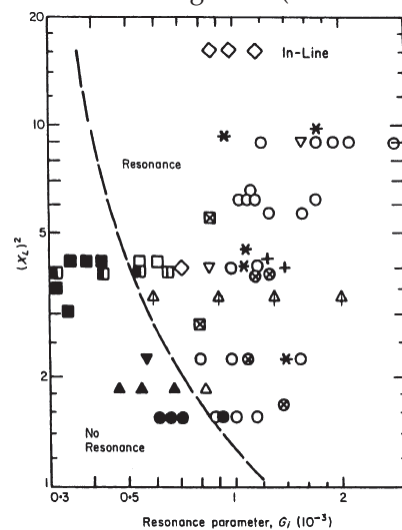
$$G_c = \sqrt{\mathcal{R}_{cr}} \left(\frac{P}{D} \right) \left(\frac{\nu}{CD} \right) \quad (\text{A.29})$$

\mathcal{R}_{cr} représente le nombre de Reynolds basé sur la vitesse critique de départ en résonance, ν est la viscosité cinématique.

Ziada et al. (1989) définissent encore un ratio L_j/h qui correspond au rapport entre la longueur du jet sortant d'entre les tubes et l'épaisseur minimale de ce jet. Ce coefficient permet d'évaluer la stabilité de l'écoulement, et aide donc à la détermination de la propension du système à entrer en résonance acoustique. Les figures A.10(a) et A.10(b), issues des travaux de Ziada et al. (1989) donnent une carte des zones de propension à la résonance, respectivement dans le cas d'un faisceau à maille triangulaire et d'un faisceau à maille carrée.



(a) Paramètre de résonance G_t en fonction du rapport L_j/h donnant une zone délimitée de non-résonance pour une maille triangulaire (Ziada et al. 1989)



(b) Paramètre de résonance G_c en fonction du rapport L_j/D donnant une zone délimitée de non-résonance pour une maille carrée (Ziada et al. 1989)

FIGURE A.10 – Paramètres de résonance selon les arrangements de faisceau

Pettigrew et Taylor (2003b) ne donnent pas de méthode de prédiction de la susceptibilité du système à la résonance acoustique par le calcul de la réponse du tube, ils y préfèrent l'utilisation des paramètres G_t et G_c .

Païdoussis (1982) rappelle les propositions d'indications empiriques de plusieurs auteurs, en fonction de l'arrangement des tubes : par exemple, le critère de départ en résonance suivant :

$$\frac{U_p}{f_a D} > 2\left(\frac{L}{D} - 0,5\right) \quad (\text{A.30})$$

où f_a est la fréquence propre acoustique de la structure, L est le pas longitudinal du faisceau. Mais les critères ne sont pas universels, et peu de comparaisons croisées

ont été effectuées pour éprouver leur efficacité. Païdoussis conclut que dans le cas d'une résonance acoustique inévitable, l'installation de déflecteurs est nécessaire pour désaccorder acoustiquement le système. Il est aussi possible de casser la périodicité de l'arrangement des tubes (en enlevant par exemple, ou en utilisant un pas longitudinal non uniforme).

A.2.4 Modèles pour l'instabilité fluide-élastique

L'instabilité fluide-élastique faisant partie des phénomènes les plus destructeurs pour un faisceau de tubes, un grand nombre d'études a été mené dans le but de développer des modèles se rapprochant au mieux des conditions d'exploitation des générateurs de vapeur, et de prédire la réponse des tubes du faisceau. Cependant, les modèles développés, si nombreux soient-ils, ne semblent pas laisser émerger un seul et unique modèle fiable pour la prédiction.

Pettigrew et Taylor (1991) distinguent deux manières d'aborder le problème. D'abord, certains auteurs cherchent à mieux comprendre le mécanisme d'instabilité fluide-élastique. Pour cela, ils travaillent sur des faisceaux de tubes très bien définis, le plus souvent en écoulement d'air pour des raisons de simplicité, avec un seul tube flexible au sein d'un faisceau de tubes rigides, un amortissement ajouté de façon artificielle, et avec des conditions de support bien définies. La seconde approche consiste à chercher à fournir des indications claires de dimensionnement pour l'application industrielle. Dans ce cas, les études sont menées sur des échangeurs réalistes, c'est-à-dire en écoulement liquide ou diphasique, avec des conditions de support multiples, et une installation à grande échelle. Un problème émerge de ces deux visions : la première fournira des résultats parfois éloignés de la réalité, donc non applicables au niveau industriel, tandis que la seconde, si ses données permettent de dimensionner les échangeurs en évitant les instabilités, ne permettra pas de fournir un modèle précis du système.

Tous les auteurs s'accordent aujourd'hui pour affirmer l'importance primordiale d'un paramètre masse-amortissement dans le mécanisme d'instabilité fluide-élastique. Ce paramètre n'est rien d'autre que le nombre de Scruton. Nous rappelons qu'il est défini comme :

$$\frac{2\pi\zeta m}{\rho D^2} \quad (\text{A.31})$$

avec les notations de Pettigrew et Taylor (2003a), ou $\frac{\delta m}{\rho D^2}$ par Païdoussis (1982) et Price (1995) par exemple, où δ est le décrément logarithmique de l'amortissement, avec $\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$. En plus de ce paramètre masse-amortissement, beaucoup d'autres paramètres entrent en jeu, comme la masse réduite, le confinement des tubes, le nombre de Reynolds, les effets de turbulence en amont (Feenstra et al. 2003, Païdoussis 1982, Pettigrew et Taylor 1991) ... Depuis les années 1960, les auteurs ont cherché à déterminer tous les paramètres intervenant et à les quantifier.

Trois grandes tendances ressortent des campagnes expérimentales menées : premièrement, selon que les mesures sont effectuées avec un seul tube flexible au sein d'un faisceau de tubes fixes ou avec tous les tubes flexibles, la vitesse de départ en instabilité diffère. Toutes les études ont montré que la vitesse critique est plus faible pour un faisceau entièrement flexible que pour un seul tube flexible. Païdoussis (1982), rassemblant des études fondamentales de Zdravkovich (1981), relève en effet que l'amplitude d'un tube est moindre s'il est le seul à être flexi-

ble, et très importante si tous les tubes de son faisceau sont laissés flexibles aussi. De plus, les tubes des premiers rangs sont moins susceptibles de vibrer que ceux des rangs suivants. Pettigrew et Taylor (1991) évoquent une grande différence entre les vitesses critiques des deux cas (un seul tube flexible / tous les tubes flexibles) dans le cas d'un écoulement diphasique, ce qui est dû au fait que le comportement de la vitesse réduite en fonction du coefficient masse-amortissement est différent. Globalement, Pettigrew et Taylor constatent qu'il est plus "conservatif" (c'est-à-dire plus sûr en terme de dimensionnement) de considérer que tous les tubes sont flexibles, puisque le départ en instabilité fluide-élastique est, dans ce cas, observé pour des vitesses plus faibles.

D'autre part, augmenter la turbulence en amont permet aussi d'augmenter la valeur de la vitesse critique, par exemple par la mise en place de turbulateurs dont les axes sont perpendiculaires aux axes des tubes en amont du faisceau (Païdoussis 1982).

Enfin, comme l'ont montré nombre d'auteurs, citons par exemple Chen et Jendrzejczyk (1981), le fait de "désaccorder" progressivement les tubes (du premier rang jusqu'au dernier) permet de stabiliser le système et de retarder le départ en instabilité, même si cette pratique semble plus efficace en théorie qu'en pratique.

Les modèles existants pour traiter le départ en instabilité fluide-élastique, dont la finalité est l'évaluation de la vitesse critique de départ en instabilité, sont très nombreux et divergent parfois, mais Price (1995), en proposant une revue très fournie des différents modèles existants, note les points de convergence entre eux.

Un premier modèle semi-analytique a été développé par Roberts en 1962 (Roberts 1962) pour les faisceaux de tubes sujets à des écoulements transversaux. Ce modèle est dénommé modèle de changement alternatif de jet : il suppose qu'un écoulement de jet est présent entre deux tubes adjacents du faisceau, et qu'à l'arrière de l'un des tubes, la longueur de recirculation est courte, tandis qu'à l'arrière de l'autre tube, la longueur de recirculation est longue. Cette configuration a mené Roberts à expliquer le caractère hystérétique de l'évolution du coefficient de pression, et donc le changement brutal mais non instantané, de la direction du jet interstitiel. Roberts donna une première estimation de la valeur de la vitesse seuil à partir de laquelle ce mécanisme se mettait en place. Cependant, différentes approches sont maintenant préférées à celle de Roberts, elles sont détaillées par Price (1995) et nous en reprenons l'essentiel ci-après.

A.2.4.1 Approches quasi-statiques

Cas d'un écoulement monophasique

Une étude quasi-statique signifie qu'à n'importe quel instant, les caractéristiques dynamiques d'une structure dans un écoulement sont considérées être celles de la même structure stationnaire dont la configuration est égale à la configuration actuelle instantanée. Les forces fluides dépendent d'une déviation par rapport à un état de référence de l'écoulement stationnaire. Ainsi, un nouveau type de modèle a vu le jour avec l'analyse de Connors (1970) : ce dernier a développé un modèle quasi-statique semi-empirique en étudiant une rangée de tubes avec un rapport $P/D = 1,41$, et en déplaçant les tubes voisins d'un tube sur lequel les forces étaient relevées. Connors obtint la relation suivante, donnant la vitesse critique U_c de départ en instabilité :

$$U_c / fD = 9,9 \left(\frac{m\delta}{\rho D^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.32})$$

Cette équation a été par la suite utilisée par de nombreux auteurs, et même, comme le fait remarquer Païdoussis (1982), pour des configurations qui ne correspondaient pas du tout à celle dont est issue cette formule (par exemple, des faisceaux comprenant plusieurs rangées de tubes). Blevins (1974) a ensuite formulé mathématiquement le modèle de Connors, en l'améliorant et en tenant compte des effets dus à l'amortissement. Cependant la formule de Connors a subsisté, avec la généralisation suivante :

$$U_c / fD = K \left(\frac{m\delta}{\rho D^2} \right)^b \quad (\text{A.33})$$

où $b = 0,5$ et K est la constante de Connors : maintes études ont été menées afin de déterminer sa valeur optimale. Par exemple, Pettigrew et Taylor (2003b) ont choisi cette formulation pour prévenir les instabilités. Leur critère de dimensionnement est donc :

$$\begin{cases} U_p / U_c < 1,0 \\ K = 3,0 \end{cases}$$

Pettigrew et Taylor (2003a; 1991) ont validé leur choix de $K = 3,0$ par la réunion de diverses études rassemblant un grand nombre de configurations de faisceaux. Pettigrew et Taylor proposent une approche pragmatique permettant de clarifier la situation en confrontant environ 300 points issus d'études différentes. La difficulté a résidé dans l'adaptation de ces données entre elles. La définition de la vitesse critique a déjà été discutée ; viennent s'y ajouter la définition de l'amortissement et de la fréquence propre d'un cylindre : selon qu'ils ont été définis en air, en fluide stagnant, ou en écoulement, la formule de la vitesse critique est modifiée. La volonté n'étant pas d'être trop conservatif et de choisir une borne inférieure absolue, et comme les données rassemblées sont assez dispersées (voir figure A.11), le choix effectué par Pettigrew et Taylor a été de garder au moins 90% des points au-dessus de la valeur choisie de K . La validité de ce choix de paramètre est confortée par la large échelle de valeurs du paramètre masse-amortissement, ainsi que la variété des études couvertes : certaines sont menées avec des cylindres très amortis, ou très peu, en écoulements liquides ou gazeux, à faible ou haute pression. Par ailleurs, Pettigrew et Taylor (1991) n'ont pas fait le choix de retenir le rapport P/D comme paramètre significatif du départ en instabilité, puisque son influence n'est pas systématique.

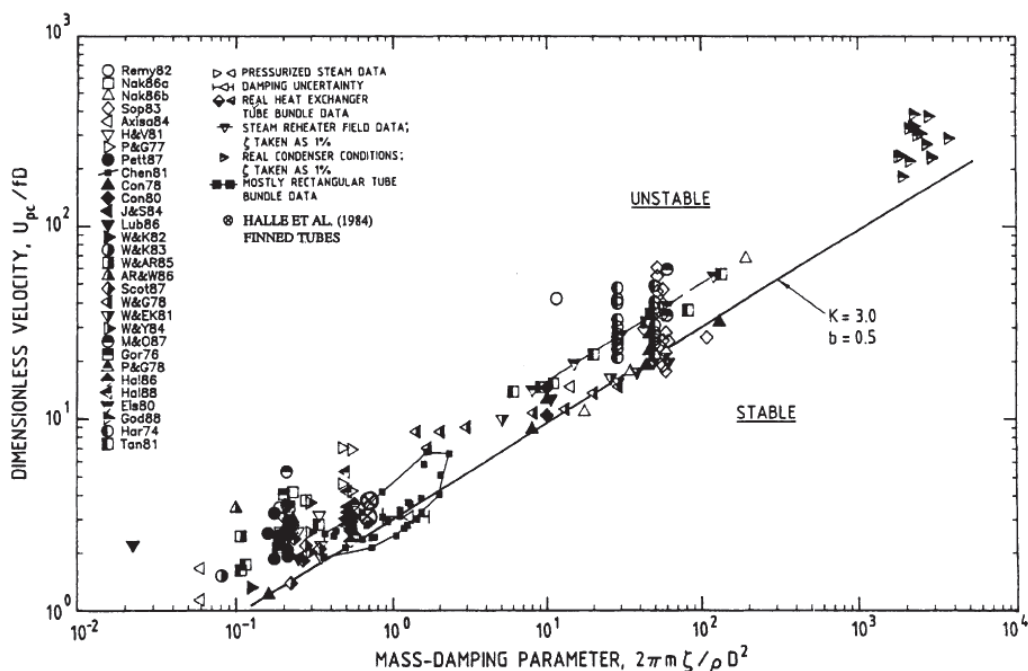


FIGURE A.11 – Calcul de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique en fonction du paramètre masse-amortissement (Pettigrew et Taylor 1991)

Deux ans plus tard, Pettigrew et Taylor (2003b) proposent un paramètre plus conservatif, correspondant au choix effectué dans l'industrie nucléaire : ils préconisent un rapport $U_p/U_c < 0,75$. Ils rappellent aussi l'importance de la prise en compte de l'amortissement fluide dans le cas d'un écoulement liquide (Pettigrew et Taylor 1991). Pour eux, il tient une part importante dans la garantie de la stabilité du système pour les vitesses sous-critiques.

D'autres variantes de la formule (A.33) ont été proposées, notamment avec un exposant b différent de 0,5. Dans ce cas, le couple (K, b) varie en fonction de la configuration du faisceau. D'autres variantes encore plus sophistiquées existent, détaillées par exemple dans les travaux de Pettigrew et Taylor (1991). Lever et Weaver (1986a) ont notamment proposé l'introduction d'une fonction F de plusieurs paramètres comme le nombre de Reynolds, le rapport P/D , la configuration du faisceau, le niveau de turbulence, etc. :

$$U_c/fD = F\left(\frac{2\pi\zeta m}{\rho D^2}\right)^b \quad (\text{A.34})$$

F peut être obtenue de façon expérimentale ou analytique.

Cas d'un écoulement diphasique

Dans le cas d'un écoulement diphasique, un certain nombre de paramètres diffèrent, comme l'amortissement (Pettigrew et Taylor 1991, Païdoussis 1982), la densité et la vitesse (Feenstra et al. 2003). Feenstra et al. (2003) ont effectué des essais pour un écoulement diphasique sur un faisceau de tubes. Pour cet écoulement, ils ont choisi de calculer la vitesse selon deux méthodes différentes, qui prennent toutes les deux en compte le caractère diphasique de l'écoulement. La première

fournit une vitesse équivalente V_{EQ} basée sur le calcul des énergies cinétiques des deux phases, et la seconde donne une vitesse interfaciale V_i qui suit les caractéristiques physiques de l'interface liquide/solide.

$$V_{EQ} = \sqrt{(\varepsilon_g \rho_g U_g^2 + (1 - \varepsilon_g) \rho_l U_l^2) / \bar{\rho}} \quad (A.35)$$

où ε_g est la fraction de vide qui pondère les énergies cinétiques de la phase gazeuse (indices $_g$) et de la phase liquide (indices $_l$), et $\bar{\rho}$ est la masse volumique du mélange supposé homogène.

$$V_i = 0,73(U_{gS} + U_{lS}) + \sqrt{gD_e(\rho_l - \rho_g) / \rho_l} \quad (A.36)$$

où U_{gS} et U_{lS} sont les vitesses interfaciales du gaz et du liquide, et $D_e = 2(P - D)$ est un diamètre équivalent. Avec ces deux méthodes, Feenstra et al. obtiennent une très bonne corrélation avec la formule de Connors prise pour $K = 3,0$. D'autre part, ils montrent de façon intéressante que, contrairement à la méthode consistant à utiliser une vitesse d'écoulement homogène, lors du passage d'un régime à bulles à un régime intermittent, aucun changement notable de la stabilité du système n'est observé.

Pettigrew et Taylor (2003a) restent plus prudents et préconisent d'éviter tout régime intermittent en écoulement diphasique. Dans ce cas, ces auteurs valident eux aussi la formule de Connors avec $K = 3,0$ pour le cas diphasique, pour des échangeurs dont le pas du faisceau est $P/D > 1,47$, ce qui est généralement le cas pour des échangeurs utilisés dans les milieux industriels. Cette validation est illustrée par la figure A.12.

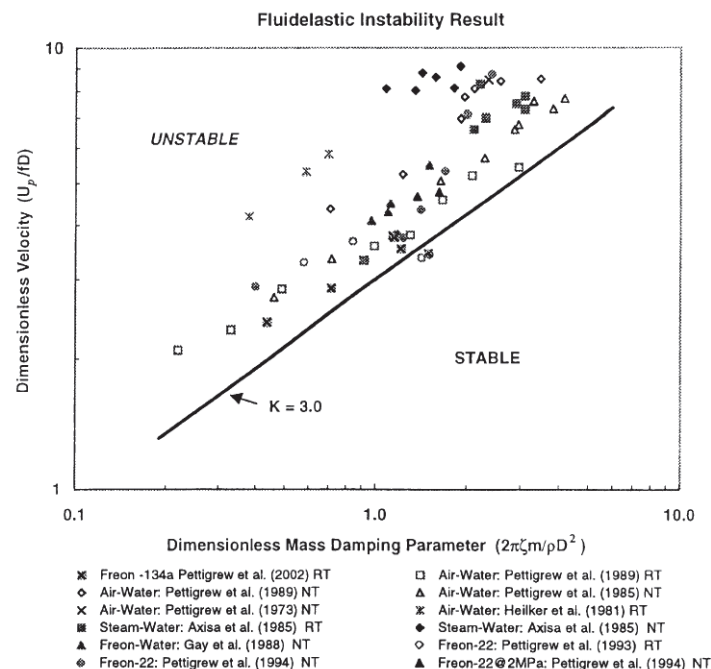


FIGURE A.12 – Calcul de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique en fonction du paramètre masse-amortissement pour un écoulement diphasique (Pettigrew et Taylor 2003a)

Dans le cas d'un faisceau où le pas est $P/D < 1,47$, Pettigrew et Taylor (2003a) recommandent de rabaisser la valeur K en suivant la corrélation suivante :

$$K = 4,76(P/D - 1) + 0,76 \quad (\text{A.37})$$

A.2.4.2 Approches quasi-stationnaires

Une autre approche est la théorie quasi-stationnaire : dans ce cas, quelle que soit la date, les caractéristiques dynamiques d'une structure en mouvement dans un écoulement sont supposées égales aux caractéristiques de la même structure en mouvement à vitesse constante, où cette vitesse est égale à la vitesse actuelle instantanée. Les forces fluides dépendent de la configuration de la structure et sont proportionnelles à son mouvement. Price et Païdoussis ont développé cette méthode tout au long des années 1980.

Il est nécessaire, dans ce cas, de redéfinir les coefficients des forces fluides, en fonction des déplacements apparents des tubes voisins (Price 1995). Au cours de leurs études, Price et Païdoussis ont déterminé une formule donnant la vitesse critique de départ en instabilité. L'intérêt ici n'étant pas de détailler toutes les formules existantes, mais de faire apparaître les éléments déterminants dans la définition de cette vitesse, et on note que ces études ont révélé l'importance cruciale du retard de l'écoulement à l'approche des tubes. Comme l'écoulement ralentit à l'approche d'un obstacle, il arrive avec un certain retard par rapport à la date prévue en cas d'écoulement à vitesse constante. Cet effet a son importance dans un faisceau de tubes où de faibles déplacements des tubes engendrent un grand changement dans les forces fluides.

A.2.4.3 Approches instationnaires

Cette méthode consiste, elle, à considérer que les forces fluides instationnaires s'exerçant sur une structure sont les mêmes que celles s'exerçant sur la même structure en mouvement oscillatoire périodique. Dans ce cas, les composantes des forces fluides sont fonction du déplacement de la structure, des vitesses et des accélérations. Comme le souligne Price (1995), l'espoir d'une approche instationnaire réside dans le fait que *"la clef de l'obtention de bonnes simulations du comportement vibratoire des faisceaux de tubes réside dans la capacité à la prédiction des forces fluides instationnaires"*. Cependant, la nature visqueuse de l'écoulement ainsi que l'interaction complexe entre les cylindres du faisceau, l'obtention de ces forces instationnaires pour un cylindre au sein du faisceau reste très difficile. L'expression de la vitesse critique montre alors une dépendance de cette vitesse aux coefficients des forces fluides (Chen 1983a).

Chen (1983a) montre aussi que même si le mécanisme d'instabilité dépend d'une combinaison des phénomènes de contrôle par l'amortissement et par la raideur, pour une grande vitesse de pas inter-tubes, la vitesse de vibration du cylindre est négligeable face à U_p , et donc l'amortissement dépendant de la vitesse est lui aussi négligeable. De même, pour une faible vitesse d'écoulement, la vitesse de vibration du cylindre est du même ordre de grandeur que U_p et le terme d'amortissement dépendant de la vitesse est dominant. Cette affirmation est cependant dépendante de la configuration du faisceau, car dans certains cas, ce peuvent être les effets de la raideur qui sont la cause de l'instabilité, ceci pour toute la gamme de vitesses U_p considérée.

Tanaka et Takahara (1980; 1981) ont mesuré les forces fluides exercées sur un faisceau de tubes rangés en blocs de 3 lignes et 4 colonnes, en tenant compte,

pour un tube donné, des effets des forces subies par les tubes qui lui sont directement voisins. Ainsi, ils ont proposé un modèle d'étude de la stabilité de ce bloc de tubes grâce à un problème aux valeurs propres classique qui peut être résolu par méthode itérative. La figure A.13 indique la limite de stabilité obtenue, en présentant la grandeur $\frac{Uc}{fD}$ en fonction de $\frac{m\delta}{\rho D^2}$. Cette limite de stabilité contient une discontinuité, qui délimite deux comportements différents. En-deçà de la limite, l'écoulement est purement transversal. Au-delà, par contre, la composante longitudinale de la vitesse de l'écoulement est significative : ceci montre une fois de plus que les instabilités peuvent avoir différentes causes.

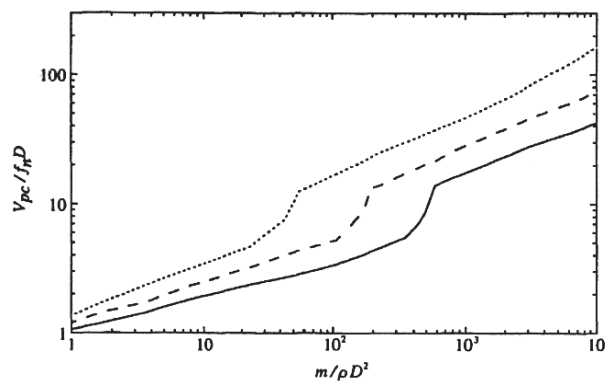


FIGURE A.13 – Limite de stabilité théorique pour l'instabilité fluide-élastique d'un faisceau de tubes en arrangement carré en ligne, avec $P/D = 1.33$: résultats de Tanaka et Takahara (1980; 1981) avec — $\delta = 0.01$, - - $\delta = 0.03$, . . . $\delta = 0.1$

Par ailleurs, comme d'autres auteurs par la suite avec d'autres méthodes (Lever et Weaver 1986b), Chen (1983b) a montré l'existence théorique de plusieurs bornes d'instabilité pour de faibles valeurs du coefficient de masse-amortissement. Dans la pratique, une limite de stabilité est dessinée. Les exemples de la prédiction de Chen (1983b) et des résultats de Lever et Weaver (1986b) sont présentés en figure A.14(a) et A.14(b) respectivement.

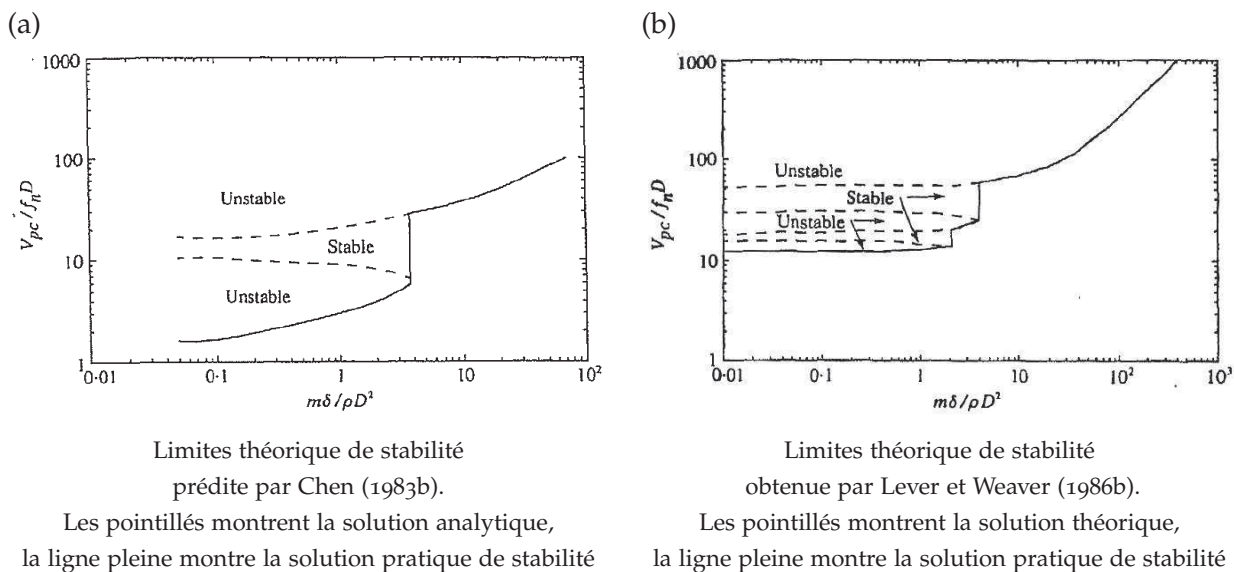


FIGURE A.14 – Existence théorique de plusieurs bornes d'instabilité (a) selon Chen (1983b), (b) selon Lever et Weaver (1986b) : vitesse réduite en fonction du paramètre masse-amortissement

Chen a déterminé différentes formules de la vitesse critique en fonction du paramètre masse-amortissement, dans le cas d'un faisceau à pas régulier de $P/D = 1,33$:

$$\begin{cases} \frac{U_c}{fD} = 3,4 \left(\frac{m\delta}{\rho D^2} \right)^{0,18} & \text{pour } 0,01 < m\delta/\rho D^2 < 0,5 \\ \frac{U_c}{fD} = 4,0 \left(\frac{m\delta}{\rho D^2} \right)^{0,41} & \text{pour } 0,5 < m\delta/\rho D^2 < 3,5 \\ \frac{U_c}{fD} = 7,6 \left(\frac{m\delta}{\rho D^2} \right)^{0,42} & \text{pour } 3,5 < m\delta/\rho D^2 \end{cases}$$

où m , f et δ sont définis dans le vide.

Pour les modèles instationnaires où les forces fluides sont mesurées directement (comme dans les modèles proposés par Chen (1983b) et Tanaka et Takahara (1980) par exemple) les résultats obtenus sont très proches des résultats expérimentaux. Cependant, Price (1995) rappelle le coût colossal que représente le dispositif expérimental requis pour obtenir les coefficients des forces fluides instationnaires. C'est la raison pour laquelle un grand nombre de résultats sont obtenus pour seulement une ou deux rangées de tubes, ce qui n'est pas forcément représentatif des cas réels. Il reste que ces modèles auront permis d'accéder à des informations essentielles sur la mise en place d'instabilités au sein des faisceaux tubulaires.

A.2.4.4 Modèles de fluide parfait

Certains auteurs ont proposé, étonnamment, de travailler en modèle de fluide parfait. En effet, comme l'évoque Price (1995), certains assemblages de faisceaux de tubes sont très denses et la compacité est donc élevée. Ceci est vrai notamment dans le cas des faisceaux en arrangement triangulaire normal. Dans ce cas, le sillage est très réduit et, si il a lieu, le détachement tourbillonnaire est restreint à une

zone d'épaisseur de taille négligeable. C'est pourquoi l'idée a été émise de traiter l'écoulement comme celui d'un fluide non visqueux. Price rappelle les différents travaux qui se sont basés sur cette méthode. L'idée est d'approcher le potentiel de vitesse par un développement en série dont tous les coefficients sont obtenus par la connaissance des conditions aux limites (notamment la condition d'imperméabilité à la surface du cylindre). Une fois le potentiel de vitesse connu, on résout l'équation de Bernoulli dans sa forme instationnaire pour obtenir la distribution de pression. Ainsi, il est possible d'accéder aux forces fluides exercées sur la paroi des tubes.

Price (1995) conclut que, quel que soit le choix de la méthode et notamment le choix de la série employée, les résultats prêtent à penser que les modèles de fluide parfait ne conviennent pas à l'étude de la mise en place d'instabilités vibratoires sous écoulement transversal.

A.2.4.5 Modèles semi-analytiques instationnaires

Le modèle choisi par Lever et Weaver (1986a;b) est un modèle semi-analytique. En effet, il se base sur des observations expérimentales puis, grâce à des hypothèses sur l'écoulement, une équation du mouvement d'un cylindre est obtenue :

$$lm\ddot{y} + \left[\zeta + \frac{1}{2}C_D\rho DU_g - F_0\sin\theta_0/(\omega y_0) \right] \dot{y} + (k - F_0\cos\theta_0/y_0)y = 0 \quad (\text{A.38})$$

où l est la longueur du cylindre, m et ζ la masse et l'amortissement linéiques mesurés en fluide stagnant, $F_0\sin\theta_0/(\omega y_0)$ et $F_0\cos\theta_0/y_0$ sont respectivement les termes d'amortissement et de raideur fluides.

Dans leur modèle, la condition de stabilité est perdue lorsque l'amortissement total est nul. Une formule donnant la vitesse critique de départ en instabilité est établie, prenant en compte le coefficient de résistance fluide dans le faisceau, le coefficient de traînée, les positions d'attachement et de séparation des lignes de courant, et le retard de phase entre le mouvement du cylindre et les forces fluides. La courbe de limite en stabilité est disponible en figure A.14(b).

La principale difficulté de ce modèle (développé et modifié par bien d'autres auteurs, par exemple Price (1995) ou Price et Païdoussis (1984)) réside dans la détermination de la fonction de retard entre les forces fluides et le mouvement du cylindre.

Pour que la prédiction de la réponse vibratoire d'un faisceau de tubes soit relativement représentative du mouvement complexe que représente ce système, Pettigrew et Taylor (2003b) recommandent un calcul des formes modales et des fréquences propres pour un nombre de modes au moins égal au nombre de tronçons d'un tube. Ils proposent ainsi une autre approche semi-analytique, pour un écoulement non uniforme le long du tube. Le calcul s'effectue en deux temps :

- dans un premier temps, les caractéristiques en vibrations libres du tube sont calculées (formes modales et fréquences propres) ;
- dans un second temps, une analyse en vibrations forcées est menée, afin de prédire les réponses du faisceau aux excitations turbulentes, au phénomène de détachement tourbillonnaire, et les grandeurs critiques de départ en instabilité fluide-élastique. Pour cette seconde partie en vibrations forcées, l'opérateur se base sur les grandeurs (vitesse, densité, etc.) adaptées au calcul d'écoulement dans un faisceau de tubes.

Afin de prédire la réponse d'un tube, l'hypothèse est faite que les grilles intermédiaires sont articulées avec les tubes, ce qui permet d'effectuer une analyse vibratoire linéaire. Les conditions de contact diffèrent selon les générateurs de vapeur, mais on peut généralement considérer que le contact est constitué d'une liaison rotule au niveau de ces grilles, même si, en réalité, il existe toujours un jeu entre le tube et la grille. En effet, ce jeu permet d'une part de faciliter l'assemblage du faisceau, et d'autre part, d'autoriser la dilatation thermique du tube. Le diamètre du jeu entre le tube et le support est fixé, dans le cas d'échangeurs nucléaires, à 0.38 mm, ce qui est largement supérieur à l'amplitude du mouvement du tube observé à ce niveau, pour un générateur bien dimensionné.

Cependant, il est très difficile de réunir les conditions pour qu'aucun choc entre le tube et son support ne soit relevé : très souvent, les tubes, à cause de leur longueur et de leur nombre, sont décentrés. Pettigrew et Taylor (2003a) montrent que la probabilité pour qu'il n'y ait aucun point de contact entre le tube et son support est inférieure à 1%! Il est donc raisonnable de considérer des conditions de type appui ponctuel ou rotule au niveau des grilles de maintien.

Si l'espace entre les tubes et les grilles est trop important, cette hypothèse n'est plus vérifiée, et les supports ne sont plus considérés comme efficaces. Cette inefficacité apparaît lorsque les tubes sont sujets à la corrosion, ou à un procédé chimique de nettoyage d'une partie encrassée. Si ces événements sont prévisibles, ils sont à prendre en considération lors de l'analyse de la réponse vibratoire du faisceau.

Pettigrew et Taylor (2003b) expriment la réponse vibratoire d'un tube $y(x, t)$ à une distribution de force $g(x, t)$ pour tout point situé à l'abscisse x le long du tube et quel que soit le temps t en fonction des coordonnées généralisées $q_i(t)$:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (\text{A.39})$$

avec $\phi_i(x)$ la forme modale du $i^{\text{ème}}$ mode, et n le nombre de modes utilisés dans cette analyse. Les hypothèses sur le système mécanique sont les suivantes : l'amortissement est supposé faible, ce qui permet de considérer que les modes sont découplés, même lorsque l'amortissement est pris en compte. À partir des équations de Lagrange, l'équation du mouvement pour le $i^{\text{ème}}$ mode d'un tube est définie comme :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\omega_i \zeta_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_0^l g(x, t) \phi_i(x) dx \quad (\text{A.40})$$

où ζ_i est le coefficient d'amortissement, l est la longueur du tube et ω_i est la pulsation du $i^{\text{ème}}$ mode propre. Les modes propres sont normalisés selon la formule :

$$\int_0^l m \phi_i^2(x) dx = 1 \quad (\text{A.41})$$

m est la masse linéique totale. Ayant connaissance de la masse, de l'amortissement, des abscisses des supports et de la rigidité en flexion du tube, le système d'équations de type (A.40) permet de déterminer la réponse du système à différentes formes de distributions de forces. Des hypothèses supplémentaires comme l'uniformité de la distribution de masse, des conditions aux limites homogènes, continuité au passage des grilles intermédiaires, etc. peuvent être formulées.

Un critère de stabilité fluide-élastique est alors déterminé par le calcul, pour le $i^{\text{ème}}$ mode, d'une vitesse critique effective à laquelle apparaît l'instabilité. Pettigrew et Taylor (2003b) donnent une expression de la vitesse critique U_{ci} de chaque mode :

$$U_{ci} = K \left[\frac{2\pi\zeta_i}{D^2 \rho \int_0^l u^2(x)r(x)\phi_i^2(x)} \right]^{1/2} \quad (\text{A.42})$$

La vitesse non uniforme est représentée par $U_{ci}(x) = U_{ci}u(x)$, de même que la densité dépendante de x : $\rho(x) = \rho r(x)$.

Un modèle du même type est défini dans l'article de Price (1995), pour le cas des écoulements tridimensionnels. L'expression de la vitesse critique de départ en instabilité est de la même forme que (A.42). D'autres auteurs ont poussé l'étude en prenant en compte l'existence de différents modes de vibrations pour un faisceau dont les tubes sont maintenus par des grilles (présence de tronçons de tubes).

Païdoussis (1982) s'intéresse lui aussi au cas des tubes d'un générateur de vapeur comprenant plusieurs grilles-supports, et dont les tubes sont très confinés. Dans ce cas, Païdoussis rappelle qu'au lieu du premier mode d'excitation vibratoire, cela peut être un des modes suivants qui se voit être excité en priorité. Il est donc nécessaire de considérer les fréquences propres de tout le système. Pour un fluide dense, le couplage hydrodynamique entre les tubes est indéniable. Alors, le mouvement d'un cylindre va accélérer le fluide, qui va créer un champ de pression autour des cylindres adjacents, qui vont se mettre à vibrer eux aussi. Une conséquence importante de ce phénomène est que si la structure est un cylindre seul sous écoulement, on comptera une fréquence propre associée au premier mode, une fréquence propre associée au second mode, et ainsi de suite. Par contre, pour un système de N_t cylindres dans un écoulement de fluide dense, on comptera N_t fréquences propres associées au premier mode, dont les valeurs seront situées aux alentours de la valeur unique pour le cylindre seul. Il en est de même pour les modes propres suivants.

Si le nombre de tubes N_t est grand, il est nécessaire d'avoir recours à une méthode dite d'"homogénéisation" pour déterminer les fréquences propres (Broc et Sigrist 2006). Enfin, Païdoussis (1982) mentionne la difficulté encore actuelle de compréhension du mécanisme de couplage hydrodynamique dans le cas d'un écoulement diphasique.

A.2.5 Conclusion

Ainsi, nous avons pu constater la multitude de modèles utilisés pour tenter de prévoir les situations à risques, sur le court ou le long terme, de vibrations de tubes sous l'effet de l'écoulement. De même, on remarque la présence quasi-intrinsèque de valeurs empiriques dans la construction de ces modèles, qui ont fait leurs preuves en termes de robustesse et d'efficacité. Aujourd'hui encore, des études expérimentales en laboratoire ou dans l'industrie sont menées afin de toujours mieux comprendre ces mécanismes (Khalifa et al. 2010, Mahon et Cheeran 2010, Ricciardi et al. 2010, Wang J. 2010) Il apparaît maintenant essentiel, en plus de la poursuite de ces études expérimentales, de s'intéresser à la modélisation numérique des mécanismes de vibrations sous écoulement.

A.3 DESCRIPTION DES CALCULS EFFECTUÉS PAR *Code_Saturne* DANS LA PHASE DE PRÉDICTION

Chaque terme est intégré sur chaque volume de contrôle Ω_i défini par la méthode des Volumes Finis, avec $i = 1, \dots, n$ où n est le nombre de volumes de contrôle. On note $S_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ l'interface entre deux volumes voisins et $S_{b_{ik}}$ la $i^{\text{ème}}$ face de bord de $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$, c'est-à-dire la face de bord du domaine Ω_i qui coïncide avec le bord du domaine fluide Ω (voir figure A.16).

A.3.1 Le terme de convection

Dans l'équation (2.8), le terme de convection discrétisé sur toutes les faces de bord des volumes de contrôle devient :

$$\sum_{j \in \text{Vois}(i)} \left[(\rho \mathbf{u}_{ij})^n \cdot S_{ij} \right] \mathbf{u}_{fac,ij}^{n+1} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \left[(\rho \mathbf{u}_{b_{ik}})^n \cdot S_{b_{ik}} \right] \mathbf{u}_{facb,ik}^{n+1} \quad (\text{A.43})$$

avec :

- ▷ $\text{Vois}(i)$ est l'ensemble des cellules voisines du volume de contrôle i ; $\gamma_b(i)$ est l'ensemble des faces de bord voisines de Ω_i .
- ▷ $(\rho \mathbf{u}_{ij})^n \cdot S_{ij}$ et $(\rho \mathbf{u}_{b_{ik}})^n \cdot S_{b_{ik}}$ sont les flux de masse sur les faces internes et les faces de bord.
- ▷ $\mathbf{u}_{fac,ij}^{n+1}$ et $\mathbf{u}_{facb,ik}^{n+1}$ représentent les valeurs de la vitesse aux faces (internes et de bord, respectivement). Ces valeurs sont inconnues et doivent être évaluées en fonction des inconnues calculées aux centres des cellules. Pour cela, trois schémas sont disponibles : un schéma décentré amont d'ordre 1 (upwind) ou deux schémas d'ordre deux (centré et décentré amont). La gestion des non orthogonalités du maillage pour le calcul des gradients se fait avec une méthode itérative de reconstruction des gradients.

A.3.2 La partie diffusive

Dans l'équation (2.8), le terme contenant la diffusion défini sous sa formulation continue sur un volume de contrôle par

$$\int_{\partial\Omega_i} \nabla \mathbf{u}_f^{n+1} \cdot \mathbf{n} dx \quad (\text{A.44})$$

est également discrétisé à partir des valeurs sur les faces, comme suit :

$$\sum_{j \in \text{Vois}(i)} \mu \frac{\mathbf{u}_{fJ'}^{n+1} - \mathbf{u}_{I'}^{n+1}}{I'J'} S_{ij} + \sum_{k \in \gamma_b(i)} \frac{\mathbf{u}_{facb,ik}^{n+1} - \mathbf{u}_{I'}^{n+1}}{I'J'} S_{b_{ij}} I'F \quad (\text{A.45})$$

avec $I'J'$ et $I'F$ les segments définis sur la figure A.16. Dès que le maillage n'est pas orthogonal, il est nécessaire d'avoir recours à une technique de reconstruction pour définir ce terme.

A.4 ACTUALISATION DU MAILLAGE DANS *Code_Saturne*

L'article de Huvelin et al. (2006) reprend la méthode d'actualisation du maillage de *Code_Saturne* : considérant un domaine dont les bords sont mobiles, chaque noeud de la grille est relié linéairement à deux noeuds situés sur les bords du domaine, dont le déplacement est connu (voir figure A.15), grâce à la relation :

$$X_{\text{noeud}} = \alpha X_{\text{limite 1}} + (1 - \alpha) X_{\text{limite 2}} \quad (\text{A.46})$$

où X est une position de noeud et α la coordonnée paramétrique.

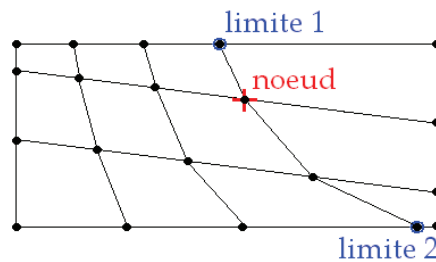


FIGURE A.15 – Schématisation de la méthode d'actualisation du maillage

Ainsi, un noeud situé dans le voisinage du bord du domaine a un déplacement dont la valeur est proche de celle du point situé exactement sur le bord, et, dans cette zone mobile, les propriétés du maillage sont respectées.

A.5 EXTRACTION DU TERME DE RIGIDITÉ EFFECTIVE POUR UN CYLINDRE EN OSCILLATIONS LIBRES

Cette annexe reprend la description de Shiels et al. (2001).

Les oscillations d'un cylindre amorti libre de se déplacer dans la seule direction y sont gouvernées par l'équation suivante :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_y \quad (\text{A.47})$$

avec m la masse du cylindre, c l'amortissement structurel, k la rigidité du ressort et F_y les efforts de portance. On rappelle maintenant différentes expressions, respectivement la fréquence propre du cylindre dans le vide, puis en eau, et enfin la masse d'eau déplacée par le cylindre :

$$f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f_N = \sqrt{\frac{k}{m + m_d}} \quad m_d = \rho\pi\frac{D^2}{4}L$$

Afin de pouvoir décrire l'évolution du système de façon à la comparer avec d'autres résultats de la littérature, il est nécessaire de rendre les équations adimensionnelles. C'est pourquoi nous cherchons à adimensionner l'équation A.47. On introduit alors les grandeurs adimensionnelles suivantes, basées sur la fréquence propre dans le vide du cylindre :

$$y^* = \frac{y}{D} \quad \tau = \omega_0 t \quad C_L = \frac{F_y}{1/2 \rho U_\infty^2 d} \quad U_r = \frac{U_\infty}{\omega_0 D} \quad \eta = \frac{\rho D^2 L}{2m} \quad \beta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

où y^* est le déplacement adimensionnel, τ le temps adimensionnel, C_L le coefficient de portance, U_r une vitesse réduite définie à partir de la pulsation propre dans le vide ω_0 , η un nombre de masse et β l'amortissement réduit.

On arrive alors à l'équation sans dimensions suivante :

$$\frac{dy^{*2}}{d\tau^2} + 2\beta\frac{dy^*}{d\tau} + y^* = C_L\eta U_r^2 \quad (\text{A.48})$$

Un autre choix est de travailler avec les fréquences propres plutôt qu'avec les pulsations, ce qui entraîne la définition d'une nouvelle vitesse réduite $U'_r = 2\pi U_r$ et d'un nouveau temps adimensionnel $\tau' = \frac{\tau}{2\pi}$. D'autre part, on peut choisir de faire apparaître la masse d'eau déplacée au numérateur du nombre de masse η , ce qui permet d'introduire le rapport de masse $m^{*'} = \frac{m}{m_d}$: $\eta = \frac{2}{\pi m^{*'}}$. On obtient alors :

$$\frac{dy^{*2}}{d\tau'^2} + 4\pi\beta\frac{dy^*}{d\tau'} + 4\pi^2 y^* = \frac{2C_L}{\pi m^{*'}} U_r'^2 \quad (\text{A.49})$$

Il est à noter que toutes les grandeurs sans dimensions introduites ci-dessus sont essentielles à la compréhension du phénomène bien précis des vibrations induites par l'écoulement. Cependant, nous adopterons ici des grandeurs adimensionnelles légèrement différentes, puisqu'elles seront basées sur la fréquence propre en eau du cylindre. En effet, Khalak et Williamson (1999) préconisent ce choix dès lors que l'on travaille avec une masse du système assez faible. Ils définissent alors les "vraies" grandeurs réduites suivantes, respectivement la vitesse et l'amortissement :

$$U^* = \frac{U_\infty}{f_N D} \quad \zeta = \frac{c}{\sqrt{k(m + m_d)}}$$

Shiels et al. (2001), eux, proposent un autre panel de nombres adimensionnels qui ont comme particularité de permettre de s'affranchir des problèmes de domaine de définition des paramètres précédents dans les cas extrêmes où l'on choisit de travailler avec une masse et/ou une rigidité nulle :

$$t^* = t \frac{U_\infty}{D} \quad m^* = \frac{m}{1/2 \rho D^2 L} \quad c^* = \frac{c}{1/2 \rho U_\infty D L} \quad k^* = \frac{k}{1/2 \rho U_\infty^2 L}$$

Ainsi, on obtient finalement l'équation sans dimensions suivante, ne faisant pas intervenir la pulsation de l'oscillateur, et à partir de laquelle on pourra définir la rigidité effective utilisée par Shiels et al. :

$$\boxed{m^* \frac{dy^{*2}}{dt^{*2}} + c^* \frac{dy^*}{dt^*} + k^* y^* = C_L(t^*)} \quad (\text{A.50})$$

Nous travaillons avec un système mécanique non amorti, donc nous pouvons négliger le terme en amortissement. Shiels et al. ont, eux, travaillé avec une structure non amortie, c'est pourquoi ils ont aussi négligé ce terme. Ceci permet de supposer que la réponse du système sera purement sinusoïdale, avec une certaine amplitude maximale que l'on notera A^* . De même, la réponse des efforts est supposée purement sinusoïdale, et la grandeur C_L désigne la valeur maximale du coefficient de portance. Ainsi, on peut exprimer y^* et C_L comme :

$$\begin{cases} y^*(t^*) = A^* \sin(\omega^* t^*) \\ C_L(t^*) = C_L \sin(\omega^* t^*) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(-m^* \omega^{*2} + k^*)}_{k_{\text{eff}}} A^* \sin(\omega^* t^*) = C_L \sin(\omega^* t^*)$$

Ainsi, on retrouve bien le terme de rigidité effective défini par Shiels et al. : $k_{\text{eff}}^* = -4\pi^{*2} f^{*2} m^* + k^*$, puisque l'on a la relation $\omega^* = 2\pi f^*$. Il faut cependant être très attentif et utiliser cette grandeur uniquement dans les cas où l'on a une réponse parfaitement sinusoïdale, c'est-à-dire des cas où l'amortissement structurel est négligeable.

A.6 DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE L'UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES PÉRIODIQUES AU SEIN DE *Code_Saturne*

Code_Saturne propose l'utilisation de conditions aux limites périodiques afin d'éviter de travailler sur un domaine maillé trop important, si celui-ci comporte un motif répété. Dans le cas de l'étude d'un écoulement autour d'un faisceau tubulaire de générateur de vapeur, cette option semble être très intéressante, d'autant plus lorsque l'on sait que le nombre de tubes comportant un faisceau peut être très important.

Il est possible de définir des conditions de périodicité de deux types : la rotation ou la translation. Il suffit, dans le premier cas, de fournir l'angle de rotation, la direction et le point invariant, et dans le second cas, les coordonnées du vecteur de translation. Il est aussi possible de combiner les deux conditions, dans ce cas, la translation sera appliquée en premier. Le sens de la transformation n'est pas important puisque les deux sens opposés seront utilisés afin de reconnecter les faces périodiques. Il est recommandé de spécifier la famille (par une condition géométrique par exemple) des faces que l'on souhaite rendre périodiques.

La périodicité est compatible avec le parallélisme, ainsi qu'avec des zones maillées de façon différente (sauf rotation de 180 degrés).

Variable de présence de périodicité : $IPERIO = 1$. Si $IPERIO = 1$, les cellules de bord des cellules adjacentes à une face périodique sont distantes. C'est pourquoi, lorsque l'on cherche à récolter des informations sur les cellules de bord, il faut d'abord les chercher sur toutes les cellules n'appartenant pas à la symétrie. Ces cellules voisines de la périodicité sont stockées dans le "halo". C'est le cas, par exemple, lorsque l'on souhaite calculer le gradient d'un champ, ou lorsque l'on souhaite calculer la valeur d'un champ sur une face interne à partir des valeurs de ce champ sur les cellules de bord. Dans le cas d'un calcul parallèle, il faut donc d'abord échanger les données entre processus.

Recollement périodique : on choisit un ensemble Σ de faces de bord, que l'on duplique (ainsi que les arêtes et sommets associés). Cette copie Σ^* est déplacée selon le pas de périodicité imposé par l'utilisateur. On garde un lien d'historique entre Σ^* et Σ .

On construit ensuite un recollement conforme entre Σ et Σ^* . Ce recollement déformera légèrement le maillage localement de manière à pouvoir fusionner des sommets très proches les uns des autres et découpera les faces en vis-à-vis de Σ^* en sous-faces conformes, dans le cas où les faces périodiques ne le sont pas.

Si nécessaire, on applique ce découpage des faces de Σ^* à celles de Σ dont elles sont la copie.

On supprime les entités dupliquées qui n'ont pas participé au recollement.

A.7 ALGORITHME UTILISÉ POUR METTRE EN PLACE LE DÉBIT COMME TERME SOURCE

Ici est décrit l'algorithme mis en place pour traiter les conditions aux limites périodiques au sein de *Code_Saturne*. En effet, comme le domaine pour l'étude de l'écoulement au sein du faisceau de tube comporte des conditions aux limites périodiques sur l'ensemble de la frontière fluide (exceptée la frontière commune avec les solides), il n'y a pas d'entrée ou de sortie de fluide. Il est donc nécessaire d'imposer un terme source aux équations de Navier-Stokes qui permettra d'imposer un débit dans le domaine fluide.

Le terme source que l'on impose correspond à un débit massique que l'on notera D_{cible} .

Pour ajouter ce terme source noté T_S et permettre au système de converger vers la valeur imposée, on procède de la façon suivante :

1. \triangleright À l'initialisation, ce terme source est nul. Le débit cible est calculé en fonction du nombre de Reynolds \mathcal{R}_e que l'on souhaite imposer à l'écoulement, de la surface d'entrée $S_{\text{entrée}}$ et de la masse volumique du fluide ρ_f :

$$D_{\text{cible}} = \rho_f S_{\text{entrée}} U_p$$

où U_p est la vitesse de pas de référence issue du nombre de Reynolds que l'on souhaite imposer dans le faisceau de tubes.

2. \triangleright Pour les itérations suivantes, le terme source T_S est calculé de la façon suivante à l'itération $n + 1$:

$$\begin{cases} T_S = T_S + \alpha \frac{2(D_{\text{calc}}^{n+1} - D_{\text{cible}}) - (D_{\text{calc}}^n - D_{\text{cible}})}{2\Delta t} \\ T_S = V_{\text{cellule}} T_S \end{cases}$$

où α est un coefficient de relaxation permettant d'accélérer la convergence, D_{calc}^{n+1} est le débit calculé à la date courante et D_{calc}^n le débit calculé au pas de temps précédent. D_{calc} est calculé en faisant la somme des flux de masse pour chaque cellule de la frontière sur laquelle on souhaite imposer un écoulement axial ascendant. V_{cellule} est le volume d'une cellule de cette frontière ; le terme source est calculé pour chacune d'entre elles.

3. \triangleright Une fois le calcul convergé, c'est-à-dire lorsque le débit imposé et le débit calculé sont égaux, il est possible d'entamer réellement le calcul de l'écoulement au sein du faisceau. De cette façon, afin d'introduire des instabilités dans l'écoulement, une première convergence sur la valeur du débit cible est complétée, puis une fois ce débit atteint, le débit cible est doublé sur un certain laps de temps (créneau imposé), puis on impose à nouveau la valeur du débit voulu.

A.8 CALCUL DES TERMES DE BORDS DES OPÉRATEURS D'ORDRE 1 ET 2 DANS *Code_Saturne*

Lors du calcul des opérateurs d'ordre 1 et 2 des champs étudiés, des coefficients permettant de traiter les termes de bords doivent être spécifiés dans les routines de calcul de gradients de *Code_Saturne*. Ces coefficients doivent être ajustés en fonction de la condition aux limites imposées aux bords concernés.

Le calcul des valeurs aux bords se fait de la façon suivante : si l'on considère une cellule de bord dont le centre de gravité est I, le centre de la face de bord considérée est F, et I' le projeté orthogonal de I par rapport à F (voir figure A.16).

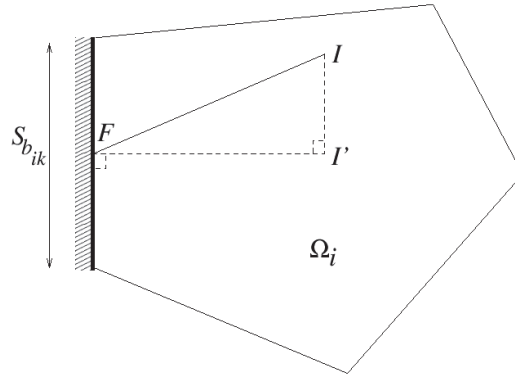


FIGURE A.16 – Cellule de bord (EDF 2008)

La valeur d'une grandeur sur la face de bord (au point F) est donc évaluée comme :

$$u_F = A + Bu_{I'} \quad (\text{A.51})$$

avec A et B les coefficients à déterminer. Donc, le calcul d'un gradient pour une **condition aux limites de Neumann** donne, au bord :

$$\frac{u_F - u_{I'}}{I'F} = \frac{A + (B - 1)u_{I'}}{I'F} = f_b \quad (\text{A.52})$$

avec f_b le flux imposé au bord. Ce qui permet de définir u_F tel que

$$u_F = I'Ff_b + u_{I'} \quad (\text{A.53})$$

Ce qui donne $B = 1$ et $A = I'Ff_b$. Donc, finalement, les conditions aux limites de Neumann sont traitées comme des conditions de Dirichlet. Ceci est dû, historiquement, au choix qui a été fait lors de l'écriture du calcul du gradient.

Pour des **conditions aux limites de Dirichlet**, c'est plus simple, on a directement : $B = 0$ et $A = u_b$, avec u_b la valeur imposée au bord. Concernant les conditions aux limites de symétrie, celles-ci sont partiellement implicites pour la vitesse, ce qui amène à écrire les termes de bord de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{F_x}^{(n+1)} &= (1 - \tilde{n}_x^2)u_{I',x}^{(n+1)} - \tilde{n}_x\tilde{n}_y u_{I',y}^{(n)} - \tilde{n}_x\tilde{n}_z u_{I',z}^{(n)} \\ u_{F_y}^{(n+1)} &= (1 - \tilde{n}_y^2)u_{I',y}^{(n+1)} - \tilde{n}_x\tilde{n}_y u_{I',y}^{(n)} - \tilde{n}_y\tilde{n}_z u_{I',z}^{(n)} \\ u_{F_z}^{(n+1)} &= (1 - \tilde{n}_z^2)u_{I',z}^{(n+1)} - \tilde{n}_x\tilde{n}_z u_{I',y}^{(n)} - \tilde{n}_y\tilde{n}_z u_{I',z}^{(n)} \end{aligned}$$

Et on a des conditions de Neumann homogènes pour la pression sur ces zones.

Ainsi, on calculera les coefficients A et B de la façon suivante (pour le cas du tube seul) :

| Condition aux limites | Φ_u, \bar{u} | Φ_p, \bar{p} |
|-----------------------|---|----------------------------------|
| mur | A = B = 0 (vitesse nulle à la paroi) | A = 0 ; B = 1 (Neumann homogène) |
| entrée | A = 0 ; B = 1 (Dirichlet) | A = 0 ; B = 1 (Neumann homogène) |
| sortie | A = 0 ; B = 1 (flux nul) | A = 0 ; B = 1 (Neumann homogène) |
| symétrie | valeurs selon la direction : $A_x = A_y = A_z = 0 ; B_x = 1, B_y = 0, B_z = 1$ | A = 0 ; B = 1 (Neumann homogène) |

A.9 MÉTHODE DE PROJECTION OPTIMALE AVEC OPÉRATEURS AU PREMIER ORDRE

Considérons l'équation suivante :

$$\Delta \mathbf{u} = f \quad (\text{A.54})$$

On peut poser :

$$\begin{cases} \nabla \Phi = f \\ \Phi - \nabla \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

Comme pour la formulation éléments finis, on introduit le résidu :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \Phi - f)(\nabla \Phi - f) + (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T (\Phi - \nabla \mathbf{u}) dx \quad (\text{A.56})$$

Dont la variation est :

$$\delta J = \int_{\Omega} (\nabla \Phi - f)(\nabla \delta \Phi) + (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T (\delta \Phi - \nabla \delta \mathbf{u}) dx \quad (\text{A.57})$$

Ceci peut se réécrire sous la forme :

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi) \nabla \delta \Phi + (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \delta \Phi - (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \nabla \delta \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} f \nabla \delta \Phi dx \quad (\text{A.58})$$

Si l'on définit alors les éléments Φ et \mathbf{u} comme :

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^N b_n \phi_n & \delta \Phi &= \sum_{n=1}^N \delta b_n \phi_n \\ \mathbf{u} &= \sum_{m=1}^M a_m \Psi_m & \delta \mathbf{u} &= \sum_{m=1}^M \delta a_m \Psi_m \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \Phi) \sum_{n=1}^N \delta b_n \nabla \phi_n + (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \sum_{n=1}^N \delta b_n \phi_n - \\ (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \sum_{m=1}^M \delta a_m \nabla \Psi_m dx = \int_{\Omega} f \sum_{n=1}^N \delta b_n \nabla \phi_n dx \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Omega} (\nabla \Phi) \nabla \phi_n + (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \phi_n dx \right] \delta b_n - \\ \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} (\Phi - \nabla \mathbf{u})^T \nabla \Psi_m dx \right] \delta a_m = \sum_{n=1}^N \left[\int_{\Omega} f \nabla \phi_n dx \right] \delta b_n \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Puis, en remplaçant les quantités \mathbf{u} et Φ par leurs décompositions respectives (A.59), on obtient un système classique à résoudre pour ces deux grandeurs. Il est donc possible d'adapter cette formulation au cas des équations de Navier-Stokes discrétisées. Le principal avantage de cette écriture est que l'on travaille exclusivement avec des opérateurs du premier ordre en dérivation. Par contre, un léger inconvénient apparaît : le nombre d'équations est multiplié par deux. Cependant, comme ce nombre reste faible et que l'erreur de calcul peut être diminuée par cette méthode, celle-ci peut être parfois plus avantageuse.

A.10 MÉTHODE DE PROJECTION OPTIMALE À L'ORDRE DEUX EN TEMPS

Pour écrire la méthode de projection optimale à l'ordre deux, on se base sur la méthode de Crank-Nicolson. Ainsi, on se place au temps $t + \frac{\delta t}{2}$, indicé $n + \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \quad (\text{A.62})$$

avec n le numéro de pas de temps. Ainsi, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = -\nabla p^{n+\frac{1}{2}} + \mu \Delta \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

C'est-à-dire qu'il faut résoudre :

$$\begin{cases} 2\rho \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t [(\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta \mathbf{u}^{n+1})] = \\ \quad 2\rho \mathbf{u}^n - \Delta t [\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \nabla p^n - \mu \Delta \mathbf{u}^n] \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation ci-dessus, afin d'obtenir l'équation pour la pression, on arrive à :

$$\begin{cases} 2\rho \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t [(\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta \mathbf{u}^{n+1})] = \\ \quad 2\rho \mathbf{u}^n - \Delta t [\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \nabla p^n - \mu \Delta \mathbf{u}^n] \\ \Delta p^{n+1} + \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} = -\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \Delta p^n \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

C'est l'équation (A.65) que l'on résout avec la méthode de projection optimale. Matriciellement, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \rho(2 + \mathbf{u}^n \nabla) - \Delta t \mu \Delta & \delta t \nabla \\ \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{u}^n) \\ h(\mathbf{u}^n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.66})$$

Avec

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}^n) &= 2\rho \mathbf{u}^n - \Delta t [\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \nabla p^n - \mu \Delta \mathbf{u}^n] \\ h(\mathbf{u}^n) &= -\rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \Delta p^n \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

en supposant que l'on ne décompose pas le champ instantané en un champ moyen et un champ fluctuant, afin de simplifier l'écriture. Si l'on décompose les champs de vitesse et de pression comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^n \simeq \sum_{i=1}^N a_i^n \Phi_i^u(x) \\ p^n \simeq \sum_{i=1}^{N_p} b_i^n \Phi_i^p(x) \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

avec Φ^u et Φ^p respectivement les modes connus de vitesse et de pression au nombre de N_p et N , on peut écrire, en supposant que $N_p < N$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_p} \begin{bmatrix} ((\rho(2 + \mathbf{u}^n \nabla) - \Delta t \mu \Delta), \Phi_i^u) & \delta t \nabla \Phi_i^p \\ \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \Phi_i^u) & \Delta \Phi_i^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{n+1} \\ \mathbf{b}_i^{n+1} \end{bmatrix} + \\ & \sum_{i=N_p+1}^N \begin{bmatrix} ((\rho(2 + \mathbf{u}^n \nabla) - \Delta t \mu \Delta), \Phi_i^u) & 0 \\ \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla \Phi_i^u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\mathbf{a}^n) \\ h(\mathbf{a}^n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{\mathbf{u}}^{n+1} \\ R_p^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

avec $\mathbf{a}^n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_N^n\}^T$ et $\mathbf{b}^n = \{b_1^n, b_2^n, \dots, b_N^n\}^T$. Les fonctions $g(\mathbf{a}^n)$ et $h(\mathbf{a}^n)$ sont définies à partir des fonctions $g(\mathbf{u}^n)$ et $h(\mathbf{u}^n)$.

En considérant les résidus $R_{\mathbf{u}}^{n+1}$ et R_p^{n+1} , on définit les deux équations à résoudre, qui permettent de définir les quantités sur lesquelles on projettera le système (A.65) :

$$\begin{cases} (\Psi_i^u, R_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (\rho \mathbf{u}^n \cdot \nabla \Phi_i^u, R_p^{n+1}) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N \\ \Delta t (\nabla \Phi_i^p, R_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (\Delta \Phi_i^p, R_p^{n+1}) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N_p \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

Avec $\Psi_i^u = [\rho(2 + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)) - \Delta t \mu \Delta] \Phi_i^u$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Cette écriture pourrait éventuellement améliorer encore la reconstruction de champs de vitesse calculés avec un code de calcul à l'ordre deux, comme cela peut être mis en place au sein de *Code_Saturne*.

BIBLIOGRAPHIE

- D. Abouri, A. Parry, et A. Hamdouni. Fluid-rigid body dynamic interaction in complex industrial flow. *Chapter advanced in fluid mechanics : Fluid Structure interaction II*, Wit Press, pages 295 – 305, 2003. (Cité page 39.)
- A. Adobès, A. Gosse, et C. Baratte. Qualification of motion dependant fluid forces coefficients. Dans *ASME PVP Conference, Atlanta*, 2006. (Cité page 59.)
- N. Akkari, A. Hamdouni, et M. Jazar. Analyse mathématique de la réduction de modèles par pod. Communication personnelle, Université de La Rochelle, 2011. (Cité pages 173 et 185.)
- C. Allery. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (P.O.D)*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2002. (Cité pages 103, 122 et 155.)
- C. Allery, A. Hamdouni, D. Ryckelynck, et N. Verdon. A priori reduction method for solving the two-dimensional burger's equation. *Applied Mechanics and Computation*, 217 :6671 – 6679, 2011. (Cité page 82.)
- D. Amsallem et C. Farhat. An interpolation method for the adaptation of reduced-order models to parameter changes and its application to aeroelasticity. *AIAA Journal*, 46 :1803 – 1813, 2008. (Cité pages 176, 177, 178, 179, 180 et 190.)
- J.S.R. Anttonen, P.I. King, et P.S. Beran. Pod-based reduced-order models with deforming grids. *Mathematical and Computer Modelling*, 38 :41 – 62, 2003. (Cité pages 89 et 92.)
- J.S.R. Anttonen, P.I. King, et P.S. Beran. Application of multi-pod to a pitching and plunging airfoil. *Mathematical and Computer Modelling*, 42 :245 – 259, 2005. (Cité page 90.)
- F. Archambeau, N. Mechtoua, et M. Sakiz. *Code_Saturne : a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows - industrial applications*. *International Journal of Finite Volumes* [www.latp.univ-mrs.fr/IJFV/IMG/pdf/saturne.pdf], 1, 2004. (Cité pages 49 et 50.)
- F. Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques*, volume 4, Vibrations sous écoulement. Hermes, 2001. (Cité pages 14, 22 et 24.)
- F. Axisa, J. Antunes, et B. Villard. Random excitation of heat exchanger tubes by cross-flows. *Journal of Fluids and Structures*, 1 :321 – 341, 1990. (Cité page 200.)
- Z. Bai et R.W. Freund. A partial padé-via-lanczos method for reduced-order modeling. *Numerical Analysis Manuscript*, <http://cm.bell-labs.com/cs/doc/99,99-3-20>, 1999. (Cité page 77.)

- M.F. Barone, I. Kalashnikova, M.R. Brake, et D.J. Segalman. Reduced order modeling of fluid/structure interaction. Sandia report - sand2009-7189, Sandia National Laboratories, 2009. (Cité page 86.)
- A. Barrett et G. Reddien. On the reduced-basis method. *Z. Angew. Math. Mech.*, 75 (7) :543 – 549, 1995. (Cité page 174.)
- J.L. Batoz et G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1. 1990. (Cité page 103.)
- D. Bechmann, Y. Bertrand, et S. Thery. Déformation continue libre. Rapport technique, Université Louis Pasteur, 1995. (Cité page 175.)
- S. Benhamadouche et D. Laurence. Les, coarse les, and transient rans comparisons on the flow across a tube bundle. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24 : 470 – 479, 2003. (Cité pages xiii et 59.)
- M. Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004. (Cité pages 136, 137 et 138.)
- M. Bergmann et L. Cordier. Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and pod reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 227 :7813 – 7840, 2008. (Cité page 95.)
- R.D. Blevins. Fluidelastic whirling of a tube row. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 96 :263 – 267, 1974. (Cité pages 24, 25 et 211.)
- R.D. Blevins et M.M. Bressler. Acoustic resonances in heat exchangers, part ii : Prediction and suppression of resonance. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 109 :282 – 288, 1987. (Cité page 207.)
- J. Blom. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 :369 – 391, 1998. (Cité page 29.)
- A.E.J. Bogaers. *Reduced Order Modeling Techniques for Mesh Movement Strategies as Applied to Fluid Structure Interactions*. Master of engineering, University of Pretoria, 2010. (Cité pages 36, 37, 90 et 91.)
- R. Bourguet. *Analyse physique et modélisation d'écoulements turbulents instationnaires compressibles autour de surfaces portantes par approches statistiques haute-fidélité et de dimension réduite dans le contexte de l'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2008. (Cité pages 88, 95 et 138.)
- D. Broc et J.-F. Sigrist. Une méthode d'homogénéisation pour l'analyse modale d'un problème d'interaction fluide-structure. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15 :867 – 889, 2006. (Cité page 219.)
- W. Cazemier. *Proper Orthogonal Decomposition and low dimensional models for turbulent flows*. Thèse de doctorat, Université de Groningen, Hollande, 1997. (Cité pages 122, 123, 130, 136, 138, 149, 163 et 185.)
- S.S. Chen. instability mechanisms and stability criteria of a group of circular cylinders sujet to cross-flow. part i : Theory. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 105 :51 – 58, 1983a. (Cité page 214.)

- S.S. Chen. instability mechanisms and stability criteria of a group of circular cylinders subject to cross-flow. part ii : Numerical results and discussion. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 105 :253 – 260, 1983b. (Cité pages xvii, 215 et 216.)
- S.S. Chen. *Flow-Induced Vibration of Cylindrical Structures*. Springer-Verlag, 1987. (Cité pages 15 et 182.)
- S.S. Chen et J.A. Jendrzejczyk. Experiments on fluid elastic instability in tube banks subjected to liquid cross flow. *Journal of Sound and Vibration*, 78 :355 – 381, 1981. (Cité page 210.)
- Y.N. Chen. Flow-induced vibration and noise in tube bank heat exchangers due to von karman streets. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 90 :134 – 146, 1968. (Cité page 21.)
- F. Chinesta. Modèles réduits et interfaces. Dans *GDR CNRS sur l'Interaction Fluide-Structure. Traitement numérique des interfaces.*, volume 2909, 2009. (Cité page 80.)
- R. Codina, G. Houzeaux, H. Coppola-Owen, et J. Baiges. The fixed-mesh ale approach for the numerical approximation of flows in moving domains. *Journal of Computational Physics*, 228 :1591 – 1611, 2009. (Cité page 38.)
- Jr. H.J. Connors. *Fluidelastic vibration of tube arrays excited by cross-flow.*, volume Flow Induced Vibration in Heat Exchangers. New York : ASME. D.D. Reiff, 1970. (Cité pages 24 et 210.)
- M. Couplet, C. Basdevant, et P. Sagaut. Calibrated reduced-order pod-galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207 :192– 220, 2005. (Cité page 80.)
- E. De Langre. *Fluides et Solides*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2002. (Cité pages 19, 20 et 193.)
- E. De Langre et B. Villard. An upper bound on random buffeting forces caused by two-phase flows across tubes. *Journal of Fluids and Structures*, 12 :1005 – 1023, 1998. (Cité page 201.)
- M.V. de Morais. *Qualification numérique des méthodes de modélisation des forces fluide-élastiques s'exerçant dans un faisceau de tubes en écoulement transversal*. Thèse de doctorat, Université d'Évry val d'Essonne, 2006. (Cité page 59.)
- T. Deloze. *Couplage fluide-solide appliqué à l'étude de mouvement d'une sphère libre dans un tube vertical*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2011. (Cité page 38.)
- J. Donea, A. Huerta, J.P. Ponthot, et A. Rodriguez-Ferran. Arbitrary lagrangian-eulerian methods. Dans *Encyclopedia of Computational Mechanics Vol. 1 : Fundamentals.*, Chapitre 14. John Wiley & Sons, Ltd, ch., 2004. (Cité pages 32 et 33.)
- E.H. Dowell et K.C. Hall. Modeling of fluid-structure interaction. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 33 :445 – 491, 2001. (Cité page 85.)
- A. Ducoin. *Etude expérimentale et numérique du chargement hydrodynamique des corps portants en régime transitoire avec prise en compte du couplage fluide structure*. Thèse de doctorat, Institut de Recherche de l'École Navale, 2008. (Cité page 85.)

- A. Dumon, C. Allery, et A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4) : 1387 – 1407, 2011. (Cité page 83.)
- EDF. *Code_Saturne 1.3.2 theory and programmer's guide*. *Code_Saturne documentation*, EDF R&D, 2008. (Cité pages xvii et 226.)
- S. Etienne et D. Pelletier. A general approach to sensitivity analysis of fluid-structure interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 21 :169 – 186, 2005. (Cité page 29.)
- C. Farhat et M. Lesoinne. Improved staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional non-linear transient aeroelastic problems. *Aiaa journal* 36(9), pp.1774-1757,(1996), Report 97-11 Centre Aerospace Structures - University of Colorado, Boulder, Colorado, 1997. (Cité page 39.)
- C. Farhat, M. Lesoinne, et P. LeTallec. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157 :95 – 114, 1998. (Cité pages 31 et 39.)
- P.A. Feenstra, D.S. Weaver, et T. Nakamura. Vortex shedding and fluidelastic instability in a normal square tube array excited by two-phase cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :793 – 811, 2003. (Cité pages 197, 207, 209, 212 et 213.)
- M.Á. Fernández-Varela. *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 2001. (Cité pages xiii, 34, 35 et 36.)
- J.H. Gerrard. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 13 :25 – 401, 1966. (Cité page 12.)
- C.G. Giannopapa et G. Papadakis. Toward a new fluid-structure interaction formulation : a pressure-velocity method for solids. 2004. (Cité page 30.)
- X. Gloerfelt. Compressible pod-galerkin reduced-order model of self-sustained oscillations in a cavity. 2006. (Cité page 136.)
- R. Glowinski, T.-W. Pan, et J. Periaux. Fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Computer Methods in APplied Mechanics and Engineering*, 112 (1-4) :133 – 148, 1994. (Cité pages 37, 92 et 93.)
- R. Govardhan et C.H.K. Williamson. Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 420 :85 – 130, 2000. (Cité page 18.)
- L.K. Grover et D.S. Weaver. Cross-flow induced vibrations in a tube bank-vortex shedding. *Journal of Sound and Vibration*, 59 :263 – 276, 1978. (Cité page 21.)
- M.S. Guerouache. *Etude numérique de l'instabilité de Bernard-Karman derrière un cylindre fixe ou en mouvement périodique*. *Dynamique de l'écoulement en advection chaotique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de l'Université de Nantes, 2000. (Cité pages 51, 53 et 54.)

- E. Guilmineau et P. Queutey. Numerical simulation of vortex-induced vibration of a circular cylinder with low mass-damping in a turbulent flow. *Journal of Fluids and Structures*, 19 :449 – 466, 2004. (Cité page 19.)
- E. Hachem, H. Digonnet, et T. Coupez. Stabilized finite element method for heat transfer and fluid flow inside industrial furnaces. Dans *GDR-IFS, Journée traitement numérique des interfaces, École Centrale de Nantes*, 2009. (Cité page 30.)
- G.M. Hermann et J. Steindorf. Efficient partitioned procedures for computation of fluid-structure interaction on parallel computers. *Developments in Computational Mechanics with High Performance Computing*. B.H.V. Civil-Comp Press, Edinburgh, S., pages 127 – 136, 1999. (Cité page 39.)
- P. Holmes, J.L. Lumley, et G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, 1996. (Cité page 80.)
- M.S. Howe. Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluids Mechanics*, 71 :625 – 673, 1975. (Cité page 22.)
- B. Hübner, E. Walhorn, et D. Dinkler. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193 :2087 – 2104, 2004. (Cité page 29.)
- F. Huvelin. *Couplage de codes en interaction fluide-structure et applications aux instabilités fluide-élastiques*. Thèse de doctorat, École doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur de Lille, 2008. (Cité pages xiii, 31, 32, 39, 41, 59, 60, 61, 62, 64 et 169.)
- F. Huvelin, M.V. Girao de Moraes, F. Baj, J.P. Magnaud, E. Longatte, et M. Souli. Numerical simulation of tube bundle vibrations under cross flow. Dans *ASME PVP Conference, San Antonio, USA*, 2007. (Cité page 59.)
- F. Huvelin, F. Longatte, et V. Verreman. Numerical simulation of a dynamic instability for a pipe conveying fluid. Dans *ASME PVP Conference, Vancouver, BC, Canada*, 2006. (Cité pages 41 et 221.)
- A. Iollo, S. Lantéri, et J.A. Désidéri. Stability properties of pod-galerkin approximations for the compressible navier-stokes equations. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, 13 :377 – 396, 2000. (Cité pages 80 et 133.)
- Y. Jus. *Modélisation et simulation numérique de vibrations induites par écoulement autour d'obstacles cylindriques seuls ou en réseaux*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2011. (Cité page 24.)
- A. Khalak et H. K. Williamson. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures*, 13 :813 – 851, 1999. (Cité pages 14, 16, 18, 19, 27 et 222.)
- A. Khalifa, D. Weaver, et S. Ziada. Experimental study of fluidelastic instability in a parallel triangular tube array. Dans *ASME PVP Conference, Montréal, Canada*, 2010. (Cité page 219.)
- G.H. Koopman. The vortex wakes of vibrating cylinders at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 12 :28 – 501, 1967. (Cité page 12.)

- P. Ladevèze, J.-C. Passieux, et D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computational Methods for Applied Mechanical Engineering*, 199 :1287 – 1296, 2010. (Cité page 82.)
- T. Lassila et G Rozza. Parametric free-form shape design with pde models and reduced basis method. *Computational Methods for Applied Mechanical Engineering*, 199 :1583 – 1592, 2010. (Cité page 175.)
- C. Leblond, C. Allery, et C. Inard. An optimal projection method for the reduced-order modeling of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010. (Cité pages 138, 140, 141, 145 et 148.)
- A. Leonard et A. Roshko. Aspects of flow-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 15 :415 – 425, 2001. (Cité page 18.)
- M. Lesoinne et C. Farhat. A geometric conservation for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 134 :71 – 90, 1996. (Cité page 33.)
- J.H. Lever et D.S. Weaver. On the stability of heat exchanger tube bundles, part i : Modified theoretical model. *Journal of Sound and Vibration*, 107(3) :375 – 392, 1986a. (Cité pages 212 et 217.)
- J.H. Lever et D.S. Weaver. On the stability of heat exchanger tube bundles, part ii : Numerical results and comparison with experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 107(3) :393 – 410, 1986b. (Cité pages xvii, 215, 216 et 217.)
- C. Liang et G. Papadakis. Large eddy simulation of cross-flow through a staggered tube bundle at subcritical reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 23 : 1215 – 1230, 2007. (Cité page 43.)
- E. Liberge. *Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2008. (Cité pages 92, 101, 105, 149, 151, 154, 157, 158 et 189.)
- E. Liberge et A. Hamdouni. Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (pod) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 26(2) :292 – 311, 2010. (Cité page 154.)
- E. Liberge, M. Pomarède, et A. Hamdouni. Reduced-order modeling by pod-multiphase approach for fluid-structure interaction. *European Journal of Computational Mechanics*, 19 :41 – 52, 2009. (Cité page 155.)
- T. Lieu, C. Farhat, et M. Lesoinne. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :5730 – 5742, 2006. (Cité pages 85, 86 et 180.)
- L.J. Lighthill. On displacement thickness. *Journal of Fluid Mechanics*, 4 :383 – 392, 1958. (Cité page 34.)
- E. Longatte, Z. Bendjeddou, et M. Souli. Methods for numerical study of tube bundle vibrations in cross-flows. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :513 – 528, 2003. (Cité pages xiii, 27, 32 et 59.)

- E. Longatte, Z. Bendjeddou, V. Verreman, et M. Souli. Explicit and implicit code coupling schemes in fluid structure interaction. Dans *Proceeding of ASME : 2005 ASME Pressure Vessels & Piping, Division Conference, Denver, Colorado, USA, July 17-21 2005.*, 2005. (Cité page 39.)
- E. Longatte, V. Verreman, et M. Souli. Time marching for simulation of fluid-structure interaction problems. *Journal of Fluids and Structures*, page doi :10.1016/j.jfluidstructs.2008.03.009, 2008. (Cité pages 39 et 41.)
- J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulence. Dans A.M. Yaglom et V. I. Tatarski, éditeurs, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pages 166 – 178. 1967. (Cité page 95.)
- Y. Maday et E.M. Rønquist. A reduced-basis element method. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, I* 335 :195 – 200, 2002. (Cité page 174.)
- J. Mahon et C. Cheeran, P.and Meskell. Spanwise correlation of surface pressure fluctuations in heat exchanger tube arrays. Dans *ASME PVP Conference, Montréal, Canada.*, 2010. (Cité page 219.)
- N. Maman et C. Farhat. Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations : a parallel approach. *Computers and Structures*, 54 :779 – 785, 1995. (Cité page 31.)
- T. Marcel, M. Braza, Y. Hoarau, G. Harran, F. Baj, J.P. Magnaud, et E. Longatte. Modélisation de l'interaction fluide structure dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse. Dans *20^{ème} Congrès Français de Mécanique. 29 août - 2 septembre - Besançon (France)*, 2011. (Cité page 169.)
- O. Marsden, C. Bogey, et C. Bailly. Calcul direct du bruit aérodynamique rayonné par des géométries complexes. Dans *17^{ème} Congrès Français de Mécanique. 29 août - 2 septembre - Troyes (France)*, 2007. (Cité page 85.)
- B. Maurel. *Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide.* Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008. (Cité page 38.)
- B. Maurel, A. Combescure, et S. Potapov. Modélisation sph de l'interaction fluide-structure dans le cas d'un réservoir sous impact. Dans *8^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, 2007. (Cité page 38.)
- B.C. Moore. Principal component analysis in linear systems - controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-26, 1 :17 – 32, 1981. (Cité page 78.)
- D. Newman et G.E. Karniadakis. Simulations of flow over a flexible cable : a comparison of forced and flow-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 10 : 439 – 453, 1996. (Cité page 32.)
- D. Newman et G.E. Karniadakis. A direct numerical simulation of flow past a freely vibrating cable. *Journal of Fluids Mechanics*, 344 :95 – 136, 1997. (Cité page 32.)
- M.R.H. Nobari et H. Naderan. A numerical study of flow past a cylinder with cross flow and inline oscillation. *Computers & Fluids*, 35 :393 – 415, 2006. (Cité page 18.)
- A.K. Noor et J.M. Peters. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *Aiaa journal* 18(4), pp.455-462, 1980. (Cité page 174.)

- C. Norberg. Flow around a circular cylinder : aspect of fluctuating lift. *Journal of Fluids and Structures*, 15 :459 – 469, 2001. (Cité pages 15, 53 et 54.)
- A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computational Methods for Applied Mechanical Engineering*, 199(23-24) :1603 – 1626, 2010. (Cité page 82.)
- A.M. Obukhov. Statistical description of continuous fields. *Trudy Geophys. Int. Aked. Nauk. SSSR*, 24 :3 – 42, 1954. (Cité page 95.)
- P.R. Owen. Buffeting excitation of boiler tube vibration. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 7 :431 – 439, 1965. (Cité page 21.)
- M.P. Païdoussis. A review of flow-induced vibrations in reactors and reactor components. *Nuclear Engineering and Design*, 74 :31 – 60, 1982. (Cité pages 21, 208, 209, 210, 211, 212 et 219.)
- R. Perrin, M. Braza, E. Cid, S. Cazin, P. Chassaing, C. Mockett, T. Reimann, et F. Thiele. Coherent and turbulent process analysis in the flow past a circular cylinder at high reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 24 :1313 – 1325, 2008. (Cité page 27.)
- C. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numer*, 11 :1 – 39, 2002. (Cité page 37.)
- M.J. Pettigrew et D.J. Gorman. Vibration of heat exchanger tube bundles in liquid and two-phase cross flow. *Flow-Induced Vibration Design Guidelines P.Y. Chen edition, ASME PVP*, 52 :89 – 110, 1981. (Cité pages xvii, 20, 203, 204 et 205.)
- M.J. Pettigrew, H.G.D. Goyder, Z.L. Qiao, et F. Axisa. Damping of multispan heat exchanger tubes - part 1 : in gases. Dans *Symposium on Special Topics of Structural Vibration, ASME PVP Conference, Chicago*, 1986a. (Cité page 197.)
- M.J. Pettigrew, R.J. Rogers, et F. Axisa. Damping of multispan heat exchanger tubes - part 2 : in liquids. Dans *Proceedings of the ASME Pressure and Vessel Piping Conference, Chicago, IL, July, ASME Publication PVP*, 1986b. (Cité pages 193, 194 et 196.)
- M.J. Pettigrew, Y. Sylvestre, et A.O. Campagna. Vibration analysis of heat exchanger and steam generator designs. *Nuclear Engineering Design*, 48 :97 – 115, 1978. (Cité page 21.)
- M.J. Pettigrew et C.E. Taylor. Fluidelastic instability of heat exchanger tube bundles : Review and design recommendations. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 113 :242 – 256, 1991. (Cité pages xvii, 209, 210, 211 et 212.)
- M.J. Pettigrew et C.E. Taylor. Two-phase flow-induced vibration : an overview. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 116 :233 – 253, 1994. (Cité pages 21 et 202.)
- M.J. Pettigrew et C.E. Taylor. Vibration analysis of shell-and-tube heat exchangers : an overview - part 1 : flow, damping, fluidelastic instability. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :469 – 483, 2003a. (Cité pages xvii, 11, 20, 21, 193, 194, 195, 196, 198, 199, 209, 211, 213 et 218.)

- M.J. Pettigrew et C.E. Taylor. Vibration analysis of shell-and-tube heat exchangers : an overview - part 2 : vibration response, fretting-wear, guidelines. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :485 – 500, 2003b. (Cité pages xvii, 11, 13, 14, 21, 22, 196, 200, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 211, 212, 217, 218 et 219.)
- S. Piperno. Interaction fluide-structure. Cours de mastère de mécanique, ENSM Paris, 2005. (Cité pages 29 et 30.)
- S. Piperno et C. Farhat. Partitioned procedures for transient solution of coupled aeroelastic problems - part II : Energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3147 – 3170, 2001. (Cité pages 39 et 41.)
- A. Placzek. *Construction de modèles d'ordre réduit non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l'aéroélasticité*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2010. (Cité pages 85, 86, 87, 123, 136 et 137.)
- A. Placzek, J.-F. J.F. Sigrist, et A. Hamdouni. Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low reynolds number : Forced and free oscillations. *Comput Fluids doi :10.1016/j.compfluid.2008.01.007*, 2008. (Cité page 19.)
- S.J. Price. A review of theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 9 :463 – 518, 1995. (Cité pages 24, 25, 43, 209, 210, 214, 216, 217 et 219.)
- S.J. Price et M.P. Païdoussis. An improved mathematical model for the stability of cylinder rows subject to cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, 97 :615 – 640, 1984. (Cité page 217.)
- E. Pruliere, F. Chinesta, et A. Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791 – 810, 2010. (Cité page 82.)
- D. Rempfer. Investigations of boundary layer transition via galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Physics of Fluids*, 8 :175 – 188, 1996. (Cité page 122.)
- D. Rempfer. On low-dimensional galerkin models for fluid flow. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, 14 :75 – 88, 2000. (Cité pages 122 et 136.)
- G. Ricciardi, M.J. Pettigrew, et N.W. Mureithi. Fluidelastic instability and periodic fluid forces in a normal triangular tube bundle subjected to air-water flow. Dans *ASME PVP Conference, Montréal, Canada.*, 2010. (Cité page 219.)
- B.W. Roberts. *Low frequency, self-excited vibrations in a row of circular cylinders mounted in an airstream*. Phd thesis, University of Cambridge, 1962. (Cité page 210.)
- R.J. Rogers, C. Taylor, et M.J. Pettigrew. Fluid effects on multispan heat exchanger tube vibration. Dans *Pressure Vessels & Piping, San Antonio.*, 1984. (Cité page 194.)
- G. Rozza. Reduced-basis methods for elliptic equations in sub-domains with a posteriori error bounds and adaptivity. *Applied Numerical Mathematics*, 55 :403 – 424, 2005. (Cité page 174.)
- D. Ryckelynck. Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus de Mécanique*, 330 :499 – 505, 2002. (Cité page 80.)

- D. Ryckelynck et D. Missoum Benziane. Multi-level a priori hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1134 – 1142, 2010. (Cité page 82.)
- D. Shiels, A. Leonard, et A. Roshko. Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters. *Journal of Fluids and Structures*, 15 :3 – 21, 2001. (Cité pages xiii, 14, 17, 27, 54, 56, 57, 58, 222 et 223.)
- J.-F. Sigrist. *Modélisation et simulation numérique d'un problème couplé fluide/structure non linéaire. Application au dimensionnement de structures nucléaires de propulsion navale*. Phd thesis, École Centrale de Nantes, 2004. (Cité pages 30 et 47.)
- J.F. Sigrist et D. Abouri. Numerical simulation of a non-linear coupled fluid-structure problem with implicit and explicit coupling procedures. Dans *Pressure Vessel and Piping Conference, Vancouver, 25 - 28 July*, 2006. (Cité page 39.)
- S.P. Singh et S. Mittal. Vortex-induced oscillations at low reynolds numbers : Hysteresis and vortex-shedding modes. *Journal of Fluids and Structures*, 20 :1085 – 1104, 2005. (Cité page 19.)
- S. Sirisup et G.E. Karniadakis. A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of pod models. *Journal of Computational Physics*, 194 :92 – 116, 2004. (Cité page 135.)
- L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, parts I-III. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3) :561 – 590, 1987. (Cité pages 95 et 99.)
- M. Souli, A. Ouahsine, et L. Lewin. Ale formulation for fluid-structure interaction problems. *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :659 – 675, 1999. (Cité page 32.)
- M. Souli et J.P. Zolesio. Arbitrary lagrangian-eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Journal of Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :451 – 466, 2001. (Cité page 32.)
- E. Séverac, E. Serre, P. Bontoux, R. Pasquetti, et M. Schaefer. Une méthode de viscosité spectrale évanescence pour l'étude des écoulements turbulents en rotation avec parois. Dans *Congrès Français de Mécanique, Troyes*, 2005. (Cité page 136.)
- A. Tallet. *Etude du contrôle de l'écoulement au sein d'une cavité ventilée par POD et projection optimale*. Communication personnelle, Université de La Rochelle, 2010. (Cité page 143.)
- H. Tanaka et S. Takahara. Unsteady fluid dynamic force on tube bundle and its dynamic effect on vibration. Dans *Flow-Induced Vibration of Power Plant Components*, volume PVP-Vol.41 New York : ASME, pages 77 – 92. M.K. Au-Yang, 1980. (Cité pages xvii, 214, 215 et 216.)
- H. Tanaka et S. Takahara. Fluid elastic vibration of tube array in cross flow. *Journal of Sound and Vibration*, 77 :19 – 37, 1981. (Cité pages xvii, 214 et 215.)
- C.E. Taylor et M.J. Pettigrew. Random excitation forces in heat exchangertube bundles. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 122 :509 – 514, 2000. (Cité pages xvii et 201.)

- Y. Utturkar, B. Zhang, et W. Shyy. Reduced-order description of fluid flow with moving boundaries by proper orthogonal decomposition. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 26(2) :276 – 288, 2005. (Cité page 93.)
- N. Verdon. *Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2007. (Cité pages 80, 81, 82 et 122.)
- G. Vigo. *Méthodes de décomposition orthogonale aux valeurs propres appliquées aux écoulements instationnaires compressibles complexes*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 2000. (Cité page 87.)
- Weaver D.S. Wang J. Fluidelastic instability in normal and parallel triangular arrays of finned tubes. Dans *ASME PVP Conference, Montréal, Canada.*, 2010. (Cité page 219.)
- D.S. Weaver et L.K. Grover. Cross-flow induced vibrations in a tube bank - turbulent buffeting and fluidelastic instability. *Journal of Sound and Vibration*, 59 :277 – 294, 1978. (Cité page 26.)
- D.S. Weaver, H.Y. Lian, et X.Y. Huang. Vortex shedding in rotated square arrays. *Journal of Fluids and Structures*, 7 :107 – 121, 1993. (Cité pages xiii et 20.)
- D.S. Weaver, S. Ziada, M.K. Au-Yang, S.S. Chen, M.P. Païdoussis, et M.J. Pettigrew. Flow-induced vibrations in power and process plant components - progress and prospects. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 122 :339 – 348, 2000. (Cité pages xiii, xvii, 21, 23, 25, 27, 198, 202, 203, 204 et 206.)
- M.M. Zdravkovich. Review and classification of various aerodynamic and hydrodynamic means for suppressing vortex shedding. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 7 :145 – 189, 1981. (Cité page 209.)
- S. Ziada, A. Öngören, et E.T. Bühlmann. On acoustical resonances in tube arrays. part ii : Damping criteria. *Journal of Fluids and Structures*, 3 :315 – 324, 1989. (Cité pages 22, 207 et 208.)

