



HAL
open science

Traitements de réception mono et multi-antennes de signaux rectilignes ou quasi-rectilignes en présence de multitrajets de propagation

Soumaya Sallem

► **To cite this version:**

Soumaya Sallem. Traitements de réception mono et multi-antennes de signaux rectilignes ou quasi-rectilignes en présence de multitrajets de propagation. Mathématiques générales [math.GM]. Institut National des Télécommunications, 2012. Français. NNT : 2012TELE0054 . tel-00814611

HAL Id: tel-00814611

<https://theses.hal.science/tel-00814611>

Submitted on 17 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE DE DOCTORAT CONJOINT TELECOM SUDPARIS ET UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mathématiques appliquées et traitement du signal

École Doctorale : Informatique, Télécommunication et Électronique - EDITE

Présentée par

Soumaya SALLEM

Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE TELECOM SUDPARIS

Traitements de réception mono et multi-antennes de
signaux rectilignes ou quasi-rectilignes en présence
de multitrajets de propagation

Soutenue le : 17/12/2012

Devant le jury composé de :

Directeurs de thèse	Jean Pierre DELMAS Pascal CHEVALIER
Rapporteurs	Yide WANG Pascal LARZABAL
Examineurs	Sylvie MARCOS Jean Luc ZARADER

Thèse n° 2012TELE0054

Avant-propos

Ce manuscrit récapitule les travaux entrepris par son auteur dans le cadre de sa préparation du Doctorat de Télécom Sudparis et Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, commencé en décembre 2008 au sein du Département Communication, Image et Traitement de l'Information (CITI), financé par Thalès Communication dans le cadre d'un contrat CDD (bourse CIFRE), sous la direction de M. Jean Pierre DELMAS (Telecom SudParis) et M. Pascal CHEVALIER (CNAM, THALES Communications).

Soumaya SALLEM

Évry, 4 octobre 2012

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier les personnes qui ont accepté de prendre part du jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, en commençant par Madame Sylvie MARCOS, directrice de recherche CNRS à LSS-SUPELEC, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je suis également très reconnaissante envers Monsieur Yide WANG, professeur à Polytech'Nantes, et Monsieur Pascal LARZABAL, Professeur à l'ENS Cachan, qui ont accepté de rapporter cette thèse et pour le temps qu'il ont consacré à ce travail. Enfin, je remercie Monsieur Jean Luc ZARADER, professeur à l'université de ParisVI, d'avoir accepté d'être membre du jury. J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Pascal CHEVALIER, professeur au CNAM et Expert à THALES communications, d'avoir codirigé cette thèse et pour son aide compétente qu'il m'a apportée et ses conseils pertinents.

Je remercie particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur Jean Pierre DELMAS, Professeur à Telecom SudParis pour la qualité de son encadrement, son exigence et ses conseils. Jean-Pierre a toujours su m'indiquer les bonnes directions de recherche quand il le fallait, me laisser chercher seule quand il le fallait, et a le talent de savoir expliquer les concepts techniques.

Ma gratitude s'adresse aussi à mes collègues dont la compagnie a contribué à rendre ces années de travail agréables, particulièrement à Noufel Abbassi, Mohamed Ben Mabrouk, Fathi Lahouari, Abdelkader Oukaci, Yoann Petitin, Sameh Hamrouni, Mariem derbel... et aux membres du département CITI, particulièrement à Mme Julie Bonnet et M. Wojciech PIECZYNSKI pour leur serviabilité et gentillesse.

Je remercie profondément ma famille qui m'a soutenu moralement et financièrement et qui m'a apporté le bonheur et la joie de vivre ; mes grand parents, mes oncles, mes tantes, mes cousins, mes cousines et particulièrement mon frère et ma soeur avec qui je partage la passion pour arts plastiques. Un grand merci à mon mari pour son amour, compagnie et encouragement. Finalement, je remercie mes chers parents, merci pour tout. Je ne trouve pas les mots pour remercier ma mère pour tout ce qu'elle m'a apporté durant ma vie et tout ce qu'elle continue à m'apporter. Merci de fond de mon coeur pour ton affection, tes conseils, ta patience, ta générosité... J'espère que tu

trouve dans ce travail la réalisation de ton rêve de voir ta fille enfin docteur.

Résumé

Le récepteur SAIC/MAIC (Single Antenna Interference Cancellation et Multiple Antenna Interference Cancellation), introduit récemment, est capable de séparer jusqu'à $2N$ utilisateurs synchronisés avec N antennes pour les réseaux de radiocommunications utilisant des modulations rectilignes ou quasi-rectilignes. Un tel récepteur, opérationnel dans les téléphones GSM depuis 2006, exploite la non-circularité du second ordre des signaux et met en oeuvre un filtre optimal linéaire au sens large ou widely linéaire (WL). Ce récepteur s'est montré performant pour les utilisateurs synchrones en absence de résidu de porteuse (l'effet doppler par exemple), mais son comportement en présence d'utilisateurs asynchrones ayant des résidus de porteuse potentiellement non nuls, omniprésents dans de nombreuses applications radio, n'a pas encore fait l'objet d'études théoriques, ce qui ne permet pas d'en connaître les dégradations. Pour cette raison, le but de la première partie de ce travail consiste à présenter une analyse des performances du récepteur SAIC/MAIC, implanté via une approche MMSE avec séquence d'apprentissage, en présence de deux utilisateurs (considérés comme respectivement un signal utile et un brouilleur) non nécessairement synchronisés et ayant des dérives de fréquence. Pour simplifier les développements analytiques, nous avons limité l'analyse théorique à quelques cas particuliers avec des modulations rectilignes. Ainsi des expressions analytiques simples et interprétables ont été données et analysées. Nous avons prouvé en particulier que les performances sont moins dégradées dans le cas d'une dérive sur l'utile et plus dégradées en présence d'une dérive sur le brouilleur. En outre, la dégradation augmente avec la désynchronisation des deux signaux. Afin de préciser le domaine de validité des approximations analytiques, des illustrations numériques ont été réalisées en prenant comme paramètres ceux du standard GSM dans le but d'appliquer cette étude à ce standard en particulier et aux réseaux cellulaires en général. L'extension de l'analyse aux modulations quasi-rectilignes a nécessité la mise en oeuvre d'un filtrage spatio-temporel. Nous avons ainsi étudié l'impact de la taille du filtre spatio-temporel sur les performances du récepteur MMSE SAIC/MAIC pour des modulations quasi-rectilignes (MSK et GMSK) en présence de résidus de porteuse. L'étude révèle qu'avec des résidus de porteuse standards (associés à des Dopplers de quelques centaines de Hz), le récepteur SAIC/MAIC reste relativement robuste et ne nécessite pas de compensation.

La deuxième partie de ce travail considère des canaux sélectifs en fréquence et consiste à développer un récepteur SIMO MLSE pour un signal utile à modulation linéaire quelconque

en présence de bruit additif gaussien centré stationnaire coloré temporellement et spatialement et potentiellement non circulaire, en partant d'un problème général de détection d'une forme d'onde. Nous avons démontré que le récepteur SIMO MLSE est constitué d'un filtre WL, d'un échantillonneur au rythme symbole et d'une minimisation récursive d'une métrique qui peut se mettre en oeuvre par l'algorithme de Viterbi. Le cas des modulations quasi rectilignes a aussi été considéré. Dans ce cadre, nous avons démontré que le récepteur SIMO MLSE a la même structure moyennant un prétraitement de dérotation. Tous ces filtres WL sont interprétés comme des filtres WL adaptés multidimensionnels (WL MMF) au sens où ils maximisent le rapport SNR sur le symbole courant en sortie. Nous avons ensuite étendu la structure du récepteur MLSE développée au cas d'un bruit gaussien non circulaire mais cette fois-ci cyclo-stationnaire, de manière à se rapprocher des applications cellulaires. Nous appelons ce nouveau récepteur "pseudo-MLSE" car sa structure a été imposée. En conjecturant que les performances en probabilité d'erreur par symbole sont directement relié au SNR sur le symbole courant, des expressions générales de celui-ci ont été données pour des récepteurs MLSE et pseudo-MLSE dans le cadre d'interférences stationnaires et cyclostionnaires potentiellement non circulaires. Des formules interprétables de ces SNR ont été données dans des cas particuliers et des simulations numériques ont été présentées pour montrer les gains en performance des récepteurs que nous avons introduits par rapport aux récepteurs MLSE classiques dérivés sous hypothèse de bruit stationnaire circulaire.

Les suites directes de cette thèse concerneront les mises en oeuvre des récepteurs développés dans le contexte des réseaux cellulaires utilisant des modulations rectilignes ou quasi-rectilignes en perspective d'applications dans la cadre, par exemple, du nouveau standard VAMOS en cours de standardisation.

Abstract

The SAIC/MAIC (Single Antenna Interference Cancellation and Multiple Antenna Interference Cancellation) receiver, recently introduced, is able to separate up to $2N$ synchronous users with N antennas for the radiocommunications networks using rectilinear or quasi-rectilinear modulations. A such receiver, operational in GSM handsets since 2006, exploits the second order non-circularity of signals and gives rise to an optimal widely linear (WL) filter. This receiver has been shown to be powerful for synchronous users without any frequency offsets (for example Doppler shift), but its behaviour in the presence of asynchronous users having potentially non zero carrier residues, omnipresent in many radio applications, has not yet been the subject of theoretical studies, which doesn't allow us to know their damage. For this reason, the purpose of the first part of this work is to present an analysis of SAIC / MAIC receiver performances, implemented via an MMSE approach with training sequence, with two users (considered as a useful signal and a jammer respectively) not necessarily synchronized with frequency shifts. To simplify the analytical developments, we limited the theoretical analysis to some particular cases with rectilinear modulations. Hence, simple and interpretable analytical expressions were given and analyzed. We proved in particular that the performance is less degraded in the case of a shift on the useful and more degraded in the presence of a drift on the jammer. Furthermore, the degradation increases with desynchronization of the two signals. To precise the range of validity of analytical approximations, numerical illustrations were made using as parameters those of the GSM standard in order to apply this study to this standard in particular and cellular networks in general. Extending the analysis to quasi-rectilinear modulations had required the implementation of a spatio-temporal filtering. We have studied the impact of the size of the spatio-temporal filter on the performance of MMSE SAIC / MAIC receiver for quasi-rectilinear modulations (GMSK and MSK) in the presence of residual frequencies. The study reveals that with standard carrier residues (associated with Dopplers of some hundreds of Hz), the receiver SAIC / MAIC remains relatively robust and doesn't require a compensation.

The second part of this work considers frequency-selective channels and is developing a SIMO MLSE receiver for a useful signal with any linear modulation in the presence of an additive gaussian centered stationary temporally and spatially colored and potentially non-circular noise, starting from a general problem of detection of a waveform. We have shown that SIMO MLSE receiver consists of a WL filter, a sampler at the symbol rate and a recursive minimization of a metric that

can be solved by the Viterbi algorithm. The case of quasi-rectilinear modulations is also considered. Within this framework, we had proved that the SIMO MLSE receiver has the same structure through a posttreatment derotation. All these filters are interpreted as WL multidimensional matched filters (WL MMF) in the sense that they maximize the SNR of the current symbol at output. Then, we extended the MLSE receiver structure developed in case of a non-circular gaussian noise but this time cyclo-stationary, so as to approximate radio cellular applications. We call this new receiver "pseudo-MLSE" because its structure was imposed. By conjecturing that the performances by per symbol error probability are directly related to the SNR of the current symbol, general expressions of this SNR are given for MLSE and pseudo MLSE receivers with stationary and cyclo-stationary potentially non-circular interferences. Interpretable formulas of these SNR were given in special cases and numerical simulations were presented to show performance gains of the receivers we have introduced relative to conventional MLSE receivers derived under the assumption of circular stationary noise.

The direct continuations of this thesis concern the implementations of receivers developed in the context of cellular networks using rectilinear or quasi-rectilinear modulations in perspective of applications in the context, for example, the new standard VAMOS being standardized.

Table des matières

Résumé	4
Abstract	6
Table des matières	8
Table des figures	15
Liste des tableaux	18
Liste des abréviations	21
Liste des notations	22
Liste des publications	25
Introduction générale	27
I Sensibilité des récepteurs SAIC et MAIC aux résidus de porteuse	33
1 Sensibilité des récepteurs SAIC et MAIC aux résidus de porteuse pour des modulations linéaires rectilignes	35
1.1 Introduction	35
1.2 Hypothèses et formulation de problème	36
1.3 Récepteurs SAIC et MAIC	38
1.3.1 Récepteur optimal	38
1.3.2 Mise en oeuvre	38
1.4 Analyse théorique de performance	39
1.4.1 Hypothèses simplificatrices	39
1.4.2 SINR théorique	40
1.4.3 Taux d'erreur binaire théorique	40

1.4.4	Filtre NRZ	41
1.4.5	SAIC	43
1.4.6	La désynchronisation entre signal utile et brouilleur ($t_j \neq 0$)	56
1.5	Applications pratiques	58
1.5.1	Absence de synchronisation entre signal utile et brouilleur	59
1.5.2	Récepteur MAIC	61
1.5.3	Récepteur SAIC	63
1.6	Conclusion	68
2	Sensibilité des récepteurs SAIC et MAIC aux résidus de porteuse pour des modulations linéaires quasi-rectilignes (MSK, GMSK) avec filtrage spatio-temporel	71
2.1	Introduction	71
2.2	Modèle d'observation et statistiques	72
2.2.1	Récepteur WL	73
2.2.2	Analyse théorique de performance	75
2.2.3	Filtrage adapté ($f(t) = v_d^*(-t)$)	76
2.3	Illustrations numériques	77
2.3.1	Modulation MSK	77
2.3.2	Modulation GMSK	79
2.4	Conclusion	82
II	Récepteurs MLSE	83
3	Récepteurs à maximum de vraisemblance de séquence mono entrée multi sortie (SIMO-MLSE) sous hypothèse d'un bruit stationnaire gaussien éventuellement noncirculaire	85
3.1	Introduction	85
3.2	Problème de détection	87
3.2.1	Problématique	87
3.2.2	Modèle général à bruit stationnaire multidimensionnel gaussien non circulaire coloré spatialement et temporellement	88
3.3	Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire	89
3.3.1	Récepteur MLSE stationnaire circulaire	90
3.3.2	Récepteur MLSE stationnaire non circulaire	93
3.4	Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne	96
3.4.1	Récepteur MLSE stationnaire circulaire	96
3.4.2	Récepteur MLSE stationnaire non circulaire	98

3.5	Conclusion	103
4	Récepteurs pseudo-MLSE sous hypothèse d'un bruit cyclo-stationnaire gaussien éventuellement non circulaire	105
4.1	Introduction	105
4.2	Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire	106
4.2.1	Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire	107
4.2.2	Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire	109
4.3	Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne	111
4.3.1	Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire	111
4.3.2	Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire	112
4.4	Conclusion	113
5	Etude de performances des Récepteurs MLSE et pseudo-MLSE pour des signaux stationnaires et cyclo-stationnaires du second ordre	115
5.1	Introduction	116
5.2	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit stationnaire	116
5.2.1	Récepteur MLSE circulaire	117
5.2.2	Récepteur MLSE non circulaire	118
5.3	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne utilisé en présence d'un bruit stationnaire	118
5.3.1	Récepteur MLSE circulaire	118
5.3.2	Récepteur MLSE non circulaire	119
5.4	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	120
5.4.1	Récepteur MLSE circulaire	120
5.4.2	Récepteur MLSE non circulaire	121
5.5	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	123
5.5.1	Récepteur MLSE circulaire	123
5.5.2	Récepteur MLSE non circulaire	123
5.6	Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	124
5.6.1	Récepteur pseudo-MLSE circulaire	124
5.6.2	Récepteur pseudo-MLSE non circulaire	126

5.7	Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	127
5.7.1	Récepteur pseudo-MLSE circulaire	127
5.7.2	Récepteur pseudo-MLSE non circulaire	128
5.8	Etude de cas particuliers de récepteurs MLSE	128
5.8.1	Canal utile monotrajet	129
5.8.2	Canal utile multitrajet	134
5.9	Illustrations numériques	135
5.9.1	Cas de bruit stationnaire du second ordre	135
5.9.2	Cas de bruit cyclo-stationnaire du second ordre	144
5.10	Conclusion	148
Conclusions et perspectives		148
Annexes		155
A	Preuve de (1.4.55), (1.4.56) et (1.4.57)	155
B	Linéarisation de la modulation GMSK	157
C	Extension de (3.2.2) au cas d'un bruit multidimensionnel circulaire blanc spatialement et temporellement	159
D	Extension du théorème de factorisation spectrale	161
E	Autre démonstration de (3.2.12)	163
F	Le filtre du récepteur MLSE est un filtre adapté	167
F.1	Cas classique	167
F.2	Cas cyclostationnaire	168
G	Preuve de (3.3.39) et (3.3.45)	171
H	Preuve de (3.4.70)	173
I	Cyclo-stationnarité au second ordre de signaux à temps continu	175
I.1	Définitions	175
I.2	Modulations numériques linéaires QAM	178
I.3	Modulations numériques linéaires quasi-rectilignes	181
I.4	Estimation des densités spectrales (et complémentaires) cycliques	186
I.5	Formule des interférences	187

Table des figures

1.1	Variation du SINR en fonction du numéro de symbole dans la trame.	46
1.2	Variation du BER en fonction du numéro de symbole dans la trame.	47
1.3	Comparaison entre le BER théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur.	48
1.4	Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur.	49
1.5	Variation du SINR en fonction du numéro de symbole dans la trame.	52
1.6	Variation du BER en fonction du numéro de symbole dans la trame.	52
1.7	Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.	53
1.8	Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.	54
1.9	Représentation symétrique du SINR théorique exacte et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.	55
1.10	Influence de décalage temporel sur la contribution de brouilleur en absence de dérives de fréquence.	57
1.11	Variation de BER en fonction de décalage temporel pour différentes valeurs des dérives de fréquence.	58
1.12	Influence de décalage temporel sur la puissance de brouilleur pour $\alpha_{ro} = 0.22$	60
1.13	Influence de décalage temporel sur la puissance de brouilleur pour différentes valeurs de roll off.	60
1.14	Variation de BER en fonction de décalage temporel pour différentes valeurs de dérives de fréquence.	61
1.15	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du SOI pour différentes valeurs de nombre de capteurs.	62
1.16	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs de nombre de capteurs.	63

1.17	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI dans le cas du récepteur SAIC.	64
1.18	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur dans le cas du récepteur SAIC.	64
1.19	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI pour différentes valeurs du SNR.	65
1.20	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs du SNR.	66
1.21	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI pour différentes valeurs de l'INR.	67
1.22	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs de l'INR.	67
2.1	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation MSK.	78
2.2	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation MSK.	78
2.3	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation GMSK sans filtrage adapté.	79
2.4	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation GMSK sans filtrage adapté.	80
2.5	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation GMSK avec filtrage adapté.	81
2.6	Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation GMSK avec filtrage adapté.	81
3.1	Structure du récepteur MLSE circulaire.	91
3.2	Structure du récepteur MLSE circulaire avec des symboles réels.	92
3.3	Structure du récepteur MLSE non circulaire.	94
3.4	Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.	96
3.5	Structure 1 du récepteur MLSE circulaire pour modulations quasi-rectilignes.	97
3.6	Structure 2 du récepteur MLSE circulaire pour modulations quasi-rectilignes.	98
3.7	Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.	99
3.8	Structure 2 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.	100
3.9	Structure 3 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.	102

4.1	Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire.	108
4.2	Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire avec des symboles réels.	109
4.3	Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire.	110
4.4	Structures du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire avec des symboles réels.	110
4.5	Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire avec postrotation pour modulations quasi-rectilignes.	111
4.6	Structure du récepteur pseudo-MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.	113
5.1	Structure du récepteur MLSE circulaire.	130
5.2	Structure du récepteur MLSE circulaire avec des symboles réels.	131
5.3	Structure du récepteur MLSE circulaire avec modulation quasi-rectiligne.	131
5.4	Structure du récepteur MLSE non circulaire.	132
5.5	Structure du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.	132
5.6	Structure du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.	133
5.7	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation BPSK.	137
5.8	Variation de SNR_y^{nc} et SNR_y^c en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation QPSK.	138
5.9	Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation OQPSK.	138
5.10	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit temporellement coloré.	139
5.11	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit temporellement coloré.	140
5.12	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.	141
5.13	Variation de SNR_y^{nc} et SNR_y^c en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.	142
5.14	Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.	142
5.15	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de la puissance π_j , SOI BPSK, bruit temporellement coloré.	143
5.16	Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de la puissance π_j , SOI OQPSK, bruit temporellement coloré.	144
5.17	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 1$	146

5.18	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur pseudo-MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 1$	146
5.19	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 2$	147
5.20	Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur pseudo-MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 2$	148
I.1	Impulsion $v(f)$ de MSK.	183
I.2	$r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k , modulation MSK.	184
I.3	Impulsion $v(t)$ de GMSK linéarisée.	185
I.4	Impulsion $v(f)$ de GMSK linéarisée.	185
I.5	$r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k , modulation GMSK.	186

Liste des tableaux

1.1	Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion NRZ avec $t_j = 0$	56
1.2	Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion NRZ avec t_j moyenné.	56
1.3	Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion en "racine de cosinus surrelevé" avec $t_j = 0$	68
1.4	Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion en "racine de cosinus surrelevé" moyennée sur le t_j	68

Liste des abréviations

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé, auquel cas nous présentons une traduction.

AM	Amplitude Modulation
ASK	Amplitude Shift Keying
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CPM	Continuous Phase Modulation
CSI	Conjugate Symbol Interference
CCI	Co Channel Interference
DOA	Direction Of Arrival
FAST	Filtre Adapté Spatio Temporel
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
GSM	Global System for Mobile communications
IID	Independent and Identically Distributed
INR	Interference to Noise Ratio
ISI	Inter Symbol Interference
MAIC	Multiple Antenna Interference Cancellation
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum Likelihood
MLSE	Maximum Likelihood Sequence Estimation
MMF	Multi-dimensional Matched Filter
MMSE	Minimum Mean Square Error
MSE	Mean Square Error
MSK	Minimum Shift Keying

OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OQPSK	Offset Quadrature Phase Shift Keying
PAM	Pulse Amplitude Modulation
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
SAIC	Single Antenna Interference Cancellation
SER	Symbol Error Rate
SIMO	Single Input Multiple Output
SINR	Signal to Interference Noise Ratio
SNR	Signal to Noise Ratio
SOI	Signal Of Interest
ST	Spatio Temporel
TI	Time Invariant
TV	Time Variant
ULA	Uniform Linear Array
WL	Widely Linear

Liste des notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre. Les matrices sont représentées par des majuscules grasses \mathbf{A} , les vecteurs par des minuscules grasses \mathbf{a} (par défaut, sont orientées "colonne") et les scalaires par des minuscules non grasses a .

$\Re(a)$	Partie réelle du nombre complexe a .
$\Im(a)$	Partie imaginaire du nombre complexe a .
$(a)^*$	Complexe conjugué du nombre complexe a .
$ a $	Valeur absolue d'un nombre réel a et module d'un nombre complexe a .
$\ \mathbf{A}\ $	Norme de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^T	Matrice transposée de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^*	Matrice conjuguée de \mathbf{A} .
\mathbf{A}^H	Matrice transposée-conjuguée de \mathbf{A} .
$\mathbf{a} * \mathbf{b}$	Produit de convolution.
$E[.]$	Espérance mathématique.
$p(a = b)$	Probabilité que a soit égal à b .
$\hat{\theta}$	Estimé de θ .
\triangleq	Par définition.
\propto	Proportionnel.

Publications de l'auteur

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a donné lieu aux contributions suivantes :

Articles de revue

J.P. Delmas, S. Sallem, and P. Chevalier, "Sensitivity of SAIC and MAIC concepts to asynchronism and residual carrier offsets for rectilinear modulations," soumis à *IEEE Transactions on aerospace and electronics systems*, Septembre 2012.

J.P. Delmas, P. Chevalier, et S. Sallem, "Récepteurs SIMO MLSE pour la détection d'une modulation linéaire en présence d'interférences non circulaires," soumis à *Traitement de signal*, Septembre 2012.

Articles de conférence

J.P. Delmas, S. Sallem, and P. Chevalier, "Sensitivity of SAIC and MAIC concepts with respect to residual frequency offsets ," *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Aalborg, Août 2010.

S. Sallem, J.P. Delmas, and P. Chevalier, "Optimal SIMO MLSE receivers for the detection of linear modulation corrupted by noncircular interference," *IEEE workshop on Statistical Signal Processing (SSP)*, Ann Arbor, Michigan, Août 2012.

J.P. Delmas, P. Chevalier, S. Sallem, and M. Sadok, "SIMO MLSE receiver for the detection of quasi rectilinear modulations corrupted by noncircular interference," soumis à *ICASSP 2013*.

Introduction générale

Le traitement d'antenne est un domaine du traitement du signal qui a suscité beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique au cours de ces trois dernières décennies. L'objectif principal du traitement d'antenne est d'extraire l'information utile contenue dans des observations bruitées à la sortie d'un réseau d'antennes en exploitant certaines caractéristiques statistiques et spatiales, en présence de brouilleurs ou interféreurs, de multi-trajets de propagation et des Dopplers. Les propriétés de non stationnarité et de non circularité en font partie. Ainsi, dans certains contextes, ces caractères de non circularité et/ou non stationnarité pourraient être pénalisants en termes de performances quand les récepteurs sont fondés sur l'hypothèse stationnaire et/ou circulaire. C'est la raison pour laquelle que dans cette thèse, nous nous intéressons à l'exploitation de ces propriétés de non circularité et de non stationnarité.

Parmi les signaux non circulaires à l'ordre 2, nous nous intéressons particulièrement aux signaux rectilignes ou quasi-rectilignes. Un signal rectiligne est un signal dont l'enveloppe complexe est réelle à une phase fixe près, c'est-à-dire dont la modulation est monodimensionnelle, comme c'est le cas pour les signaux AM, ASK ou BPSK [43]. Par ailleurs, dans le cadre des modulations numériques, un signal quasi-rectiligne est la filtrée d'un signal rectiligne par un filtre complexe. Parmi les signaux quasi-rectilignes on peut citer en particulier les signaux MSK, GMSK, SRC4, OQAM [43] ayant subi un prétraitement de dérotation. Ces signaux ont la particularité d'être non circulaires dès l'ordre 2 [14], [36], [39], ce qui se traduit par la présence d'informations dans la seconde fonction de corrélation $E[s(t)s(t-\tau)]$ en plus de celles contenues dans la première fonction de corrélation $E[s(t)s(t-\tau)^*]$, où $s(t)$ désigne l'enveloppe complexe du signal et $*$ signifie complexe conjugué. L'exploitation de cette information dans les traitements de réception des signaux rectilignes ou quasi-rectilignes permet l'obtention de gains en performances considérables pour de nombreuses applications telles que la lutte anti-interférences en radiocommunications [7].

Pour les applications de filtrage optimal, l'exploitation d'une telle information s'effectue par la mise en oeuvre, sur les observations spatio-temporelles (ST) $x(t)$, dans le cas d'une réception multi-capteurs, de filtres linéaires au sens large (ou Widely Linear (WL) en anglais) [40], de la forme $y(t) = w_1(t) * x(t) + w_2(t) * x^*(t)$ où $(w_1(t), w_2(t))$ est la réponse impulsionnelle du filtre

ST WL et $*$ est le produit de convolution. Pour cela, l'exploitation de la non circularité potentielle des sources dans les traitements de réception suscite un intérêt croissant dans la communauté scientifique depuis une quinzaine d'années aussi bien pour le filtrage mono ou multi-antennes, à travers l'optimisation et la mise en oeuvre de filtres WL optimaux. En particulier, l'exploitation des filtres WL optimaux pour la lutte anti-interférences en contexte rectiligne ou quasi-rectiligne permet la réjection d'une interférence à partir d'une seule antenne, par discrimination de phase [8], [9] [7], [10], d'où le concept SAIC (Single Antenna Interference Cancellation) [2] [7] d'ores et déjà opérationnel, depuis 2006, dans certains téléphones portables développés par Nokia pour le marché africain.

Les filtres WL ont été introduits pour la première fois en 1969 [5] dans le contexte du filtrage optimal en moyenne quadratique. Leur intérêt pour des signaux non stationnaires cyclostationnaires a été pointé plusieurs années plus tard par Gardner [19] mais sans aucune référence au concept de non circularité. Leur optimalité en contexte non circulaire n'a été montrée qu'en 1995 [11] [12] [41] par une équipe conjointe de Thalès-Communications et du laboratoire des Signaux et Systèmes à Supélec, pour des problèmes d'estimation en moyenne quadratique et leur grand intérêt pour des signaux rectilignes a été montré pour la première fois dans [11], [12] et plus tard dans [8], mettant en particulier en évidence la capacité de ces filtres optimaux à faire de la réjection d'interférences à partir d'une seule antenne (concept SAIC) [7].

Depuis 1995, ces travaux pionniers suscitent dans la communauté scientifique un intérêt croissant pour les filtres WL optimaux en contexte non circulaire pour des applications telles que la détection [1] [40] [44] [45], la synchronisation [13] [7], la prédiction [42], la modélisation [46], l'égalisation des systèmes SISO (Single Input Single Output) mono-porteuse [26] et multi-porteuses [15], les systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output) [16] [27] [33] [34], la réjection d'interférences co-canal [7] [8], la lutte contre les interférences à bande étroite ou dues aux autres utilisateurs dans les réseaux DS-CDMA employant des modulations rectilignes, et la modulation BPSK en particulier.

Dans ce contexte, l'objet de la première partie de la thèse est d'analyser les performances et la sensibilité des traitements WL-SAIC/MAIC pour la démodulation de signaux rectilignes ou quasi-rectilignes en fonction de la synchronisation temporelle et fréquentielle (l'effet Doppler) et d'optimiser la mise en oeuvre des corrections en présence d'interfereurs. Une première application visée dans le cadre de cette thèse correspond à la métrologie des réseaux GSM, c'est-à-dire à la détection et à l'analyse des interférences générées par le réseau lui-même après installation des stations de base.

Les récepteurs WL disponibles supposent généralement les canaux de propagation non étalés dans le temps, ce qui est en particulier le cas pour la propagation en espace libre (télécommunications spatiales) ou en présence de fading plat, contexte propre à certaines situations de propagation en zone urbaine. Toutefois, pour de nombreuses applications d'intérêt pratique (radiocommunications en zone urbaine, communications ionosphériques HF...), les canaux de propagation s'étalent dans le temps et les récepteurs WL disponibles s'avèrent sous-optimaux. Un autre axe de recherche de cette thèse portera donc sur le développement et l'analyse de performances de structures de réception optimales au sens du maximum de vraisemblance de séquence (MLSE), pour des sources et des interférences non circulaires rectilignes ou quasi-rectilignes stationnaires ou cyclostationnaires et des canaux de propagation quelconques. Ces récepteurs MLSE seront comparés aux récepteurs MLSE classiques n'exploitant pas la non circularité des signaux.

Ainsi, un second objet visé par la thèse concerne les récepteurs à maximum de vraisemblance de séquence (MLSE). L'estimateur du maximum de vraisemblance de séquence d'une modulation numérique linéaire d'amplitude en quadrature (QAM) est une technique d'égalisation optimale au sens de la minimisation de la probabilité d'erreur par symbole en présence d'une suite finie de symboles équiprobables et indépendants.

L'algorithme MLSE a été introduit dans le cadre monovoie d'une modulation d'amplitude bande de base sous l'hypothèse d'un bruit additif gaussien circulaire centré et blanc [17]. Puis différentes extensions ont été présentées dans le cadre multivoie d'une modulation QAM avec bruit additif Gaussien circulaire centré stationnaire coloré (voir par exemple : [49], [51], [32], [4]). Dans les systèmes de radio communications mobiles, le bruit additif est principalement dû à des interférences co-canal qui présentent les mêmes caractéristiques que le signal utile (SOI). Le récepteur MLSE utilisant les distributions de probabilité exactes des interférences exigerait une détection conjointe des symboles utiles et de ceux des interférences, ce qui conduirait à un récepteur de complexité trop grande. Nous allons ici dériver le récepteur MLSE sous l'hypothèse que l'amplitude complexe du bruit total constitué des interférences et d'un bruit de fond est potentiellement non circulaire, stationnaire blanc ou coloré et de distribution de probabilité gaussienne centré. Bien que ces hypothèses ne soient pas satisfaites dans le contexte de radio communications mobiles où les amplitudes complexes du SOI et des interférences sont en général cyclostationnaires et de distributions non gaussiennes, nous démontrerons que les récepteurs obtenus ont de meilleures performances que les récepteurs MLSE qui ne prennent pas la noncircularité en compte, quand ils sont en présence d'interférences stationnaires ou cyclostationnaires noncirculaires.

A notre connaissance, très peu de travaux concernant des récepteurs SIMO MLSE en présence

d'interférences noncirculaires ont été publiés dans la littérature. Parmi ceux-ci, [7] a dérivé le récepteur MLSE dans le contexte de symboles SOI réels en absence d'interférence intersymbole (ISI) et [18] a proposé un récepteur MLSE sous optimal sous l'hypothèse d'une interférence cyclostationnaire et rectiligne. Notons que quelques travaux ont pris en compte la noncircularité du second-ordre potentielle des interférences pour proposer des récepteurs sous optimaux (voir par exemple [37]). Par contre, à notre connaissance aucun travail n'a porté sur des récepteurs MLSE sous hypothèse de bruit cyclostationnaire potentiellement non circulaire et non nécessairement rectiligne.

Le plan de ce manuscrit est constitué de deux parties et est organisé comme suit. La première partie est consacrée à l'étude de la sensibilité des concepts SAIC/MAIC à la synchronisation temporelle et fréquentielle (Doppler). Cette partie est constituée de deux chapitres. Dans le premier, on étudie le récepteur WL optimal au sens MMSE avec séquence d'apprentissage pour la démodulation d'un signal BPSK en présence d'un interféreur modulé aussi en BPSK. Une analyse théorique de performances de ce récepteur WL en terme de SINR et SER en présence de dérives de fréquences sur le signal utile et le brouilleur sera présentée. Les domaines de validité de ces pertes de performances théoriques ont été validés par des simulations de Monte Carlo et ont permis de décrire la sensibilité de ce récepteur aux dérives de fréquences du signal utile et du brouilleur. Nous avons également étudié l'impact de la désynchronisation temporelle entre le signal utile et le brouilleur sur les performances.

Cette étude a été généralisée pour les modulations MSK and GMSK, dans le but de tester le concept SAIC pour la norme GSM et les réseaux cellulaires, ceci fera l'objet d'un deuxième chapitre. L'application du récepteur SAIC aux modulations MSK et GMSK s'est accompagnée de la mise en oeuvre de filtrage spatio-temporel. Nous avons étudié l'impact de la taille de filtre spatio-temporel sur les performances. L'étude de l'impact de choix de filtre de mise en forme (adapté ou de bande) a été analysée théoriquement et validée par simulations.

La deuxième partie est constituée de trois chapitres (chapitres 3, 4 et 5). Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la détermination de la structure de récepteur MLSE, en partant du cadre général de la détection d'une forme d'onde, pour des modulations linéaires à symboles complexes et à symboles réels puis pour des modulations linéaires quasi rectilignes dans un contexte multi-capteurs avec un bruit gaussien stationnaire coloré temporellement et spatialement et éventuellement non circulaire. Nous avons tenté d'étendre cette structure du récepteur MLSE pour le cas d'un bruit cyclostationnaire dans le chapitre 4. Nous avons proposé un récepteur dont la structure était celle du cas stationnaire. Celle ci étant sous optimale, a été dénommée pseudo MLSE.

Le dernier chapitre (chapitre 5) a été consacré à l'étude des performances des récepteurs MLSE

et pseudo-MLSE développés dans les deux chapitres précédents. Nous donnons des expressions générales des SNR sur symboles courants dans les situations où le bruit total est centré, stationnaire ou cyclostationnaire de circularité quelconque et cela pour chacun de nos récepteurs, introduits selon certaines hypothèses. Des expressions interprétables de ces SNR sont données dans le cas de canaux spéculaires. Enfin, des illustrations numériques illustreront les gains en SNR apportés par les récepteurs MLSE que nous avons introduits en bruit non circulaire par rapport aux récepteurs MLSE classiques.

Première partie

**Sensibilité des récepteurs SAIC et
MAIC aux résidus de porteuse**

Chapitre 1

Sensibilité des récepteurs SAIC et MAIC aux résidus de porteuse pour des modulations linéaires rectilignes

Sommaire

1.1	Introduction	35
1.2	Hypothèses et formulation de problème	36
1.3	Récepteurs SAIC et MAIC	38
1.4	Analyse théorique de performance	39
1.5	Applications pratiques	58
1.6	Conclusion	68

1.1 Introduction

Pour les observations non-stationnaires, omniprésentes dans le contexte des télécommunications, il a été montré que le filtre complexe optimal devient variant dans le temps (TV) [19], et sous certaines conditions de non circularité, linéaire au sens large (WL) [40] i.e, sa sortie prend la forme suivante :

$$y(t) = \boldsymbol{\omega}_1(t)^H \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\omega}_2(t)^H \boldsymbol{x}(t)^*$$

où $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ et $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ sont des filtres complexes TV et $\boldsymbol{x}(t)$ est le vecteur des envelopes complexes des observations spatio-temporelles (ST) à la sortie des capteurs. L'intérêt de ces filtres a été accru ces dernières années surtout pour leurs performances pour le SAIC (single antenna interference cancellation) et le MAIC (multiple antenna interference cancellation).

Néanmoins, malgré leur efficacité dans l'annulation de l'interférence, les récepteurs qui exploitent la non-circularité restent sensibles aux résidus de porteuse du signal utile et des interféreurs. Ces résidus sont omniprésents dans les liaisons de télécommunications. Parmi les travaux s'intéressant aux récepteurs WL optimaux avec le concept SAIC dans le domaine des télécommunications, tels que [6],[26],[30], rares sont ceux qui présentent des performances analytiques pour ces récepteurs surtout en présence de dérives de fréquence. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les performances des récepteurs WL optimaux appliqués aux SAIC et MAIC en terme de SINR (signal to noise and interference ratio) et de BER (binary error rate) en présence des résidus de porteuse et d'asynchronisation du brouilleur avec le signal utile.

Dans ce chapitre, nous introduisons le récepteur WL MMSE pour la démodulation d'un signal BPSK en présence d'un interféreur modulé aussi en BPSK. Une analyse théorique de comportement et performances en terme de SINR et SER de ce récepteur WL en présence des dérives de fréquences sur le signal utile et le brouilleur sera introduite. Par suite, des expressions analytiques simples et interprétables seront données. Une étude comparative entre les résultats de l'implémentation numérique des technologies MAIC et SAIC avec des récepteurs WL pour des signaux modulés en BPSK en présence de résidus de porteuse et ceux obtenus par analyse théorique est ainsi présentée.

1.2 Hypothèses et formulation de problème

On considère un réseau de N capteurs à bande étroite recevant la contribution d'un signal utile BPSK et d'un bruit total composé d'un brouilleur BPSK et d'un bruit de fond blanc temporellement et spatialement gaussien circulaire centré. Dans les radiocommunications, ce type d'interférence est généré par le réseau lui même (signaux reçus par les cellules voisines utilisant la même fréquence dans un réseau cellulaire). Ainsi, cette interférence possède la même forme d'onde et la même modulation que le signal utile. L'enveloppe complexe du signal utile et du brouilleur ont les formes suivantes respectivement :

$$s(t) = \sum_n a_n v(t - nT) \quad (1.2.1)$$

et

$$j(t) = \sum_n b_n v(t - nT - t_j), \quad (1.2.2)$$

où $a_n = \pm 1$ et $b_n = \pm 1$ correspondent respectivement aux symboles de signal utile et de brouilleur, qui sont indépendants, équiprobables, et statistiquement indépendants les uns des autres. T désigne la durée symbole, $v(t)$ est le filtre de mise en forme, t_j est la dérive de temps du brouilleur par rapport au signal utile. Notons $\mathbf{x}(t)$ le vecteur des amplitudes complexes des signaux à la sortie du réseau de capteurs après démodulation :

$$\mathbf{x}(t) = \mu_s s(t) e^{i2\pi\Delta f_s t} \mathbf{h}_s + \mu_j j(t) e^{i2\pi\Delta f_j t} \mathbf{h}_j + \mathbf{n}(t), \quad (1.2.3)$$

où \mathbf{h}_s et \mathbf{h}_j désignent respectivement les vecteurs des réponses impulsionnelles du canal, supposé sans étalement temporel, pour le signal utile et le brouilleur. C'est par exemple le cas de propagation libre de satellite de télécommunication ou de radiocommunication aéroportée, ou de canaux à fading plat comme dans certains contextes de radiocommunications urbaines. Δf_s and Δf_j sont respectivement les résidus de porteuses du signal utile et de l'interfèreux, et $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur bruit, supposé stationnaire, centré, blanc temporellement et spatialement et indépendant du signal utile et de l'interfèreux.

$$\mathbf{h}_s = e^{i\varphi_s} \mathbf{s} \text{ et } \mathbf{h}_j = e^{i\varphi_j} \mathbf{j},$$

où φ_s et φ_j , \mathbf{s} et \mathbf{j} correspondent respectivement aux phases et vecteurs directionnels, de gain unité sur le premier capteur, du signal utile et de l'interfèreux. Notons

$$\mathbf{x}_v(kT) \triangleq \mathbf{x}(t) * v(-t)^* /_{t=kT}$$

le vecteur d'observation échantillonnée obtenu après l'opération de filtrage adapté et de decimation au rythme symbole, donné par :

$$\mathbf{x}_v(kT) = [\mu_s a_k I_0 \mathbf{h}_s + \mu_s \sum_{n \neq k} a_n I_{k-n} \mathbf{h}_s] e^{i2\pi \Delta f_s kT} + \mu_j \sum_n b_n J_{k-n}(t_j) \mathbf{h}_j e^{i2\pi \Delta f_j kT} + \mathbf{n}_v(kT), \quad (1.2.4)$$

où :

$$I_n \triangleq \int v^*(-\tau) v(nT - \tau) e^{-i2\pi \Delta f_s \tau} d\tau \quad (1.2.5)$$

et

$$J_n(t_j) \triangleq \int v^*(-\tau) v(nT - \tau - t_j) e^{-i2\pi \Delta f_j \tau} d\tau \quad (1.2.6)$$

où $*$ est l'opération de convolution et $\mathbf{n}_v(kT)$ est le vecteur bruit échantillonné à la sortie du filtre adapté $v(-t)^*$. Le modèle étendu est donné par le vecteur de taille $2N$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) = [\mathbf{x}_v(kT)^T, \mathbf{x}_v(kT)^H]^T$$

défini par :

$$\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) = \mu_s a_k \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k) + \mu_s \sum_{n \neq k} a_n \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) + \mu_j \sum_n b_n \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) + \tilde{\mathbf{n}}_v(kT), \quad (1.2.7)$$

où :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) \triangleq [e^{i2\pi \Delta f_s kT} I_{k-n} \mathbf{h}_s^T, e^{-i2\pi \Delta f_s kT} I_{k-n}^* \mathbf{h}_s^H]^T \\ \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) \triangleq [e^{i2\pi \Delta f_j kT} J_{k-n}(t_j) \mathbf{h}_j^T, e^{-i2\pi \Delta f_j kT} J_{k-n}^*(t_j) \mathbf{h}_j^H]^T \\ \tilde{\mathbf{n}}_v(kT) \triangleq [\mathbf{n}_v(kT)^T, \mathbf{n}_v(kT)^H]^T. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Les statistiques des données de second ordre considérées dans la suite sont complètement définies par les deux matrices de corrélations de $\mathbf{x}(t)$ définies par :

$$\mathbf{R}_x(kT) \triangleq E[\mathbf{x}_v(kT) \mathbf{x}_v(kT)^H] \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{C}_x(kT) \triangleq E[\mathbf{x}_v(kT) \mathbf{x}_v(kT)^T]. \quad (1.2.10)$$

1.3 Récepteurs SAIC et MAIC

1.3.1 Récepteur optimal

En présence des symboles équiprobables, d'absence de dérive de fréquence du signal utile, avec un bruit total additif centré blanc gaussien non circulaire de matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$ indépendante du temps, le récepteur optimal selon le critère du maximum de vraisemblance de séquence MLSE (Maximum Likelihood Sequence Estimation) consiste (à l'issue du filtre adapté temporel et échantillonnage au rythme symbole) à un filtre WL spatial de type SMF (Spatial Matched Filter), suivi d'un comparateur à seuil.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{MLSE} \triangleq \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_s, \quad (1.3.11)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}} \triangleq E[\tilde{\mathbf{n}}(kT)\tilde{\mathbf{n}}^H(kT)]$ et $\tilde{\mathbf{h}}_s \triangleq [\mathbf{h}_s^T, \mathbf{h}_s^H]^T$. Ici, $\tilde{\mathbf{n}}(t)$ désigne le bruit total composé du brouilleur, interférences intersymboles et du bruit de fond. Notons que ce filtre est proportionnel au filtre WL $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{MMSE}$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre la sortie $y(kT) = 2\Re(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^H \tilde{\mathbf{x}}_v(kT))$ (avec $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \triangleq [\boldsymbol{\omega}_1^T, \boldsymbol{\omega}_2^T]^T$) et a_k . Celui ci est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{MMSE} &\triangleq \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \\ &= [\mu_s / (1 + \mu_s^2 \tilde{\mathbf{h}}_s^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_s)] \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_s \\ &\triangleq \beta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{MLSE}, \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT)\tilde{\mathbf{x}}_v^H(kT)]$, $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}a} \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT)a_k^*]$ et β est un réel positif. Ainsi, le récepteur MMSE est équivalent au récepteur MLSE en terme de maximisation de SINR.

En absence de connaissance sur le vecteur directionnel $\tilde{\mathbf{h}}_s$ et en présence d'une séquence d'apprentissage $(a_k)_{k=1, \dots, K}$, nous utilisons le récepteur MMSE (1.3.12). En présence d'interférences BPSK (donc non gaussien), ce récepteur n'est plus optimal au sens MLSE. De plus en présence de dérive de fréquence du signal utile BPSK ou du brouilleur BPSK, les différentes matrices de covariance $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}$, $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}a}$ dépendent du temps.

1.3.2 Mise en oeuvre

Le récepteur WL MMSE est mis en oeuvre à l'aide d'une séquence d'apprentissage $(a_k)_{k=1, \dots, K}$. Le filtre MMSE est estimé par :

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}(K) \triangleq \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1}(K) \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}a}(K), \quad (1.3.13)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_v(kT)\tilde{\mathbf{x}}_v^H(kT)$$

et

$$\widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}, a_k}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_v(kT)a_k.$$

Puis cette séquence d'apprentissage est suivie d'une phase de transmission ($k = K + 1, \dots, K + K'$) associée à K' symboles utiles pour lesquels le récepteur sera constitué du filtre WL $\tilde{\omega}(K)$ dont la sortie s'écrit sous la forme :

$$y(kT) = \tilde{\omega}(K)^H \tilde{\mathbf{x}}_v(kT); \quad k = K + 1, \dots, K + K', \quad (1.3.14)$$

où $\tilde{\mathbf{x}}_v(kT)$ est donné par (1.2.7), ce qui donne :

$$y(kT) = \mu_s a_k \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k) + \mu_s \sum_{n \neq k} a_n \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) + \mu_j \sum_n b_n \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) + \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{n}}_v(kT) \quad (1.3.15)$$

Notons que par la structure

$$\begin{bmatrix} \Delta & \square \\ \square^* & \Delta^* \end{bmatrix} \text{ de } \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K) \text{ et } \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta^* \end{bmatrix} \text{ de } \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}, a_k}(K) \text{ et } \tilde{\mathbf{x}}_v(kT),$$

$y(kT)$ est réel. Ce récepteur sera comme le récepteur WL MMSE de la section 1.3.1, constitué d'un détecteur à seuil ≥ 0 dont l'entrée est $y(kT)$.¹

1.4 Analyse théorique de performance

1.4.1 Hypothèses simplificatrices

L'analyse théorique de performances présente de grandes difficultés car l'expression de $y(kT)_{k=K+1, \dots, K+K'}$ donnée par (1.3.15) est une variable aléatoire dépendante de $(a_k, b_k, \tilde{\mathbf{n}}_v(kT))_{k=1, \dots, K}$ issue de la période d'apprentissage et de $(a_k, b_k, \tilde{\mathbf{n}}_v(kT))_{k=K+1, \dots, K+K'}$ issue de la période de transmission. Pour simplifier l'analyse de performance, nous faisons l'hypothèse que K est "suffisamment grand" pour supposer que $\tilde{\omega}(K)$ donné par (1.3.13) "a convergé" vers

$$\tilde{\omega}(K) \triangleq \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1}(K) \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}, a}(K),$$

avec :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) \tilde{\mathbf{x}}_v^H(kT)] \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) \tilde{\mathbf{x}}_v^H(kT)] \rangle_K,$$

et

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}, a}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) a_k^*] \triangleq \langle E[\tilde{\mathbf{x}}_v(kT) a_k^*] \rangle_K,$$

au sens où $\tilde{\omega}^H(K)$ et $\tilde{\omega}^H(K)$ produisent le même SINR. Notons que dans le cas stationnaire (c'est à dire sans dérives de fréquence), cette hypothèse est réalisée par des valeurs de K d'autant plus faibles que N est faible [35]. Précisément, il a été montré dans [35, Chap. 6.1.2] que pour obtenir

1. En pratique cette séquence d'apprentissage est suivie et précédée d'une séquence de K' symboles utiles; par exemple la trame GSM comprend $K = 26$ symboles d'apprentissage entourés de deux séquences de $K' = 57$ symboles utiles.

une perte de SINR inférieure à 3dB, il est nécessaire d'avoir $K \geq 2N$ pour un SINR d'entrée pas "trop faible".

Nous considérons dans la suite, pendant l'étude de performances, que le remplacement de $\tilde{\omega}(K)$ par $\hat{\omega}(K)$ n'influe pas sur le SINR à la sortie $y(kT)$.

1.4.2 SINR théorique

A l'entrée du détecteur à seuil, $y(kT)$ donnée par (1.3.15) se décompose en une partie utile :

$$s_k \triangleq \mu_s a_k \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k),$$

et une partie nuisible :

$$n_k \triangleq \mu_s \sum_{n \neq k} a_n \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) + \mu_j \sum_n b_n \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) + \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{n}}_v(kT).$$

Par hypothèse d'indépendance des symboles utiles, des symboles du brouilleur et du bruit de fond, nous obtenons l'expression suivante du SINR théorique à l'instant (kT) , $k = K + 1, \dots, K + K'$:

$$\text{SINR}(kT) = \frac{\mu_s^2 |\hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k)|^2}{\mu_s^2 \sum_{n \neq k} |\hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n)|^2 + \mu_j^2 \sum_n |\hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n)|^2 + \eta_2 \|\hat{\omega}(K)\|^2}. \quad (1.4.16)$$

Le développement de cette expression, dans le but d'obtenir une expression plus significative en fonction des paramètres du signal utile et de brouilleur, n'est pas possible dans ce cas général. Ainsi, un autre paragraphe sera consacré au développement de cette expression dans des cas plus particuliers.

1.4.3 Taux d'erreur binaire théorique

Le critère le plus significatif dans l'évaluation des performances d'un récepteur est le taux d'erreur binaire (BER) à sa sortie. L'expression (1.3.15) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y(kT) = a_k \alpha_k + \sum_{n \neq k} a_n \alpha_{n,k} + \sum_n b_n \beta_{n,k} + n_{wk}, \quad (1.4.17)$$

avec $\alpha_k \triangleq \mu_s \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k)$; $\alpha_{n,k} \triangleq \mu_s \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n)$; $\beta_{n,k} \triangleq \mu_j \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n)$ et $n_{wk} \triangleq \hat{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{n}}_v(kT)$. La probabilité d'erreur instantanée est définie par :

$$P_k \triangleq P(\text{sign}(y(kT)) \neq a_k)$$

est calculée grâce à la probabilité conditionnelle suivante :

$$P(y(kT) > 0 / a_k = -1; a_n(n \neq k) \text{ et } b_n \text{ fixes}) = P(-\alpha_k + \sum_{n \neq k} a_n \alpha_{n,k} + \sum_n b_n \beta_{n,k} + n_{wk} > 0) \quad (1.4.18)$$

$$\begin{aligned} &= P(n_{wk} > \alpha_k - \sum_{n \neq k} a_n \alpha_{n,k} - \sum_n b_n \beta_{n,k}) \\ &= Q\left(\frac{\alpha_k - \sum_{n \neq k} a_n \alpha_{n,k} - \sum_n b_n \beta_{n,k}}{\eta_2^{1/2} \|\hat{\omega}(K)\|}\right), \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

où Q est la fonction définie par : $Q(x) \triangleq \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Notons I le nombre des symboles interférants du signal utile et J ceux du brouilleur. Sous la condition de leur indépendance, l'expression de la probabilité d'erreur ou du BER relatif au k^{ieme} symbole est donnée grâce à la formule des probabilités totale par :

$$P_k = \frac{1}{2^{I+J}} \sum_{s=1}^{2^{I+J}} Q\left(\frac{\alpha_k - \sum_{i \neq k} a_i^s \alpha_{i,k} - \sum_j b_j^s \beta_{j,k}}{\eta_2^{1/2} \|\tilde{\omega}(K)\|}\right), \quad (1.4.20)$$

où s désigne l'indice de la réalisation courante. i, j désignent respectivement l'indice du symbole courant du signal utile formant l'interférence inter-symboles et le symbole courant du brouilleur. Et, $(\dots, a_{k-1}^s, a_{k+1}^s, \dots, b_{k-1}^s, b_k^s, b_{k+1}^s, \dots)$ désignent les 2^{I+J} différents $(I+J)$ uplets² des symboles binaires $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in J}$ où $(a_i)_{i \in I}$ sont les interférences inter symboles de signal utile et $(b_i)_{i \in J}$ sont les interférences inter symboles de brouilleur associés au symbole a_k .

Dans le but d'obtenir des expressions interprétables, nous considérons le cas particulier de filtre NRZ et du récepteur monocapteur (SAIC).

1.4.4 Filtre NRZ

Dans cette partie, on considère le cas particulier d'un filtre de mise en forme de type NRZ, i.e., sous la forme suivante :

$$v(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le brouilleur et le signal utile sont supposés être synchronisés, i.e., $t_j = 0$. Notons que ce filtre de mise en forme présente le gros inconvénient d'être à bande non limitée (à décroissance en $1/f^2$ en puissance) malgré qu'il ne présente pas d'interférence intersymboles en sortie de filtre adapté. Dans ce cas, les expressions (1.2.5) et (1.2.6) s'écrivent sous les formes suivantes :

$$I_n = \frac{\sin(\pi \Delta f_s T)}{\pi \Delta f_s T} \delta_{n,0} \quad (1.4.21)$$

$$J_n = \frac{\sin(\pi \Delta f_j T)}{\pi \Delta f_j T} \delta_{n,0}, \quad (1.4.22)$$

et le SINR (1.4.16) se réduit à la forme suivante :

$$\text{SINR}(kT) = \frac{\mu_s^2 |\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k)|^2}{\mu_j^2 |\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, k)|^2 + \eta_2 \|\tilde{\omega}(K)\|^2}. \quad (1.4.23)$$

Le BER donné par (1.4.20) se réduit, dans le cas NRZ, à l'expression suivante :

$$\text{BER}(kT) = 1/2[Q(\text{SNR}(kT)^{\frac{1}{2}} + \text{INR}(kT)^{\frac{1}{2}})] + 1/2[Q(\text{SNR}(kT)^{\frac{1}{2}} - \text{INR}(kT)^{\frac{1}{2}})], \quad (1.4.24)$$

2. où $I = J - 1$ et JT représente la longueur de la partie "significative" de $\int v(\tau)v^*(\tau-t)d\tau$.

Sous les mêmes conditions, la matrice de corrélation étendue $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K) = \mu_s^2 I_0^2 \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s(K) & \mathbf{C}_s(K) \\ \mathbf{C}_s^*(K) & \mathbf{R}_s^*(K) \end{pmatrix} + \mu_j^2 J_0^2 \begin{pmatrix} \mathbf{R}_j(K) & \mathbf{C}_j(K) \\ \mathbf{C}_j^*(K) & \mathbf{R}_j^*(K) \end{pmatrix} + \eta_2 \mathbf{I}, \quad (1.4.25)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s(K) &\triangleq \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |e^{i2\pi\Delta f_s kT}|^2 \right) \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^H = \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^H, \\ \mathbf{C}_s(K) &\triangleq \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (e^{i2\pi\Delta f_s kT})^2 \right) \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^T \triangleq \alpha_s(K) \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^T, \\ \mathbf{R}_j(K) &\triangleq \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |e^{i2\pi\Delta f_j kT}|^2 \right) \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^H = \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^H \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{C}_j(K) \triangleq \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (e^{i2\pi\Delta f_j kT})^2 \right) \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^T \triangleq \alpha_j(K) \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^T.$$

La matrice de corrélation entre la séquence d'apprentissage et le signal reçu pendant cette séquence d'apprentissage se réduit à la forme suivante :

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}a}(K) = \mu_s I_0 \begin{pmatrix} \alpha'_s(K) \mathbf{h}_s \\ \alpha'^*_s(K) \mathbf{h}_s^* \end{pmatrix}, \quad (1.4.26)$$

où $\alpha'_s(K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{i2\pi\Delta f_s kT}$. La matrice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K)$ a la structure suivante :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_K^* & \mathbf{R}_K^* \end{pmatrix} \quad (1.4.27)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_K \triangleq \mu_s^2 I_0 \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^H + \mu_j^2 J_0 \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^H + \eta_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_K \triangleq \mu_s^2 I_0 \alpha_s(K) \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^T + \mu_j^2 J_0 \alpha_j(K) \mathbf{h}_j \mathbf{h}_j^T. \end{cases} \quad (1.4.28)$$

Ainsi, l'inverse de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K)$ et par conséquent le filtre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_K$ ont respectivement les structures suivantes :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1}(K) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \mathbf{B}_K^* & \mathbf{A}_K^* \end{pmatrix} \quad (1.4.29)$$

et :

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_K = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}(K) \\ \boldsymbol{\omega}^*(K) \end{pmatrix}, \quad (1.4.30)$$

où :

$$\boldsymbol{\omega}(K) = \mu_s I_0 \left(\alpha'_s(K) \mathbf{A}_K \mathbf{h}_s + \alpha'^*_s(K) \mathbf{B}_K \mathbf{h}_s^* \right).$$

Le développement de cette expression montre que le filtre $\boldsymbol{\omega}(K)$ est une combinaison linéaire des vecteurs directionnels \mathbf{h}_s et \mathbf{h}_j .

1.4.5 SAIC

Cette partie développe l'étude présentée dans la partie précédente pour le cas mono-capteur ($N = 1$) ou SAIC. Dans ce cas, les vecteurs directionnels se réduisent à des scalaires complexes :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_s = e^{i\varphi_s} \\ \mathbf{h}_j = e^{i\varphi_j}. \end{cases} \quad (1.4.31)$$

Étant dans le cas d'un filtre NRZ (pas d'interférences intersymboles), les vecteurs $\tilde{\mathbf{h}}_s(k, n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_j(k, n)$ se réduisent aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) = I_0 \begin{pmatrix} e^{i2\pi\Delta f_s k T} \mathbf{h}_s \\ e^{-i2\pi\Delta f_s k T} \mathbf{h}_s^* \end{pmatrix} \delta_{k,n} = I_0 \begin{pmatrix} e^{i2\pi\Delta f_s k T} e^{i\varphi_s} \\ e^{-i2\pi\Delta f_s k T} e^{-i\varphi_s} \end{pmatrix} \delta_{k,n}, \\ \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) = I_0 \begin{pmatrix} e^{i2\pi\Delta f_j k T} \mathbf{h}_j \\ e^{-i2\pi\Delta f_j k T} \mathbf{h}_j^* \end{pmatrix} \delta_{k,n} = I_0 \begin{pmatrix} e^{i2\pi\Delta f_j k T} e^{i\varphi_j} \\ e^{-i2\pi\Delta f_j k T} e^{-i\varphi_j} \end{pmatrix} \delta_{k,n}, \end{cases} \quad (1.4.32)$$

et, les sous matrices constituant la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(K)$ de (1.4.25) se réduisent aux scalaires suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_s(K) = 1 \\ \mathbf{C}_s(K) = \alpha_s(K) e^{2i\varphi_s} \\ \mathbf{R}_j(K) = 1 \\ \mathbf{C}_j(K) = \alpha_j(K) e^{2i\varphi_j}, \end{cases} \quad (1.4.33)$$

où $\alpha_s(K)$ et $\alpha_j(K)$ sont complexes de modules inférieurs ou égaux à 1. Les scalaires I_0 et J_0 donnés par (1.4.21) et (1.4.22) seront approximés à 1 dans le cas de faibles valeurs pratiques des dérivées de fréquences³ : $\Delta f_s T \ll 1$ et $\Delta f_j T \ll 1$. Ainsi, les matrices de corrélation seront données par :

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{x}}a} = \mu_s \begin{pmatrix} \alpha_s(K)' e^{i\varphi_s} \\ \alpha_s(K)'^* e^{-i\varphi_s} \end{pmatrix}. \quad (1.4.34)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} = \frac{\eta_2}{\gamma_K} \begin{pmatrix} \varepsilon_s + \varepsilon_j + 1 & -(\varepsilon_s \alpha_s(K) e^{2i\varphi_s} + \varepsilon_j \alpha_j(K) e^{2i\varphi_j}) \\ -(\varepsilon_s \alpha_s^*(K) e^{-2i\varphi_s} + \varepsilon_j \alpha_j^*(K) e^{-2i\varphi_j}) & \varepsilon_s + \varepsilon_j + 1 \end{pmatrix}, \quad (1.4.35)$$

où : $\gamma_K = \det(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})$, $\varepsilon_s \triangleq \frac{\mu_s^2}{\eta_2}$ et $\varepsilon_j \triangleq \frac{\mu_j^2}{\eta_2}$. Ainsi le filtre WL MMSE aura pour expression :

$$\tilde{\omega}(K) = \begin{pmatrix} \omega(K) \\ \omega^*(K) \end{pmatrix}, \quad (1.4.36)$$

où :

$$\omega(K) \propto (\varepsilon_s + \varepsilon_j + 1) \alpha_s'(K) e^{i\varphi_s} - (\varepsilon_s \alpha_s(K) e^{2i\varphi_s} + \varepsilon_j \alpha_j(K) e^{2i\varphi_j}) \alpha_s'^*(K) e^{-i\varphi_s}. \quad (1.4.37)$$

3. Notons que quand $(K + K')|\Delta f_s|T \simeq 1$ ou $(K + K')|\Delta f_j|T \simeq 1$, le signal utile ou respectivement le brouilleur sont vus par le récepteur SAIC comme des signaux circulaires au second ordre et ainsi la rejection n'est pas possible.

Cas particulier : dérive de fréquence sur le brouilleur seul ($\Delta f_s = 0$) :

Afin d'obtenir des expressions interprétables, nous commençons par étudier le cas particulier d'une dérive de fréquence du signal utile nulle ($\Delta f_s = 0$). Dans ce cas, on a $\alpha_s = \alpha'_s = 1$ mais $\alpha_j \neq 1$, et (1.4.37) devient :

$$\omega(K) \propto (1 + \varepsilon_j - \varepsilon_j \alpha_j(K) e^{2i(\varphi_j - \varphi_s)}) e^{i\varphi_s}, \quad (1.4.38)$$

ainsi que $\tilde{\mathbf{h}}_s(k, k)$ se réduit à $\tilde{\mathbf{h}}_s$. $y(kT)$ devient, dans la phase de transmission, $k = K + 1, \dots, K + K'$ (1.3.15) :

$$y(kT) = \mu_s a_k \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s + \mu_j b_k \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, k) + \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{n}}_v(kT), \quad (1.4.39)$$

qui donne un SINR à l'instant kT , $k = K + 1, \dots, K + K'$:

$$\begin{aligned} \text{SINR}(kT) &= \frac{\varepsilon_s (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s)^2}{\varepsilon_j (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, k))^2 + \|\tilde{\omega}(K)\|^2}, \\ &= \frac{\varepsilon_s \mathfrak{R}^2(\omega^*(K) \mathbf{h}_s)}{\varepsilon_j \mathfrak{R}^2(\omega^*(K) \mathbf{h}_j(k, k)) + 2|\omega(K)|^2} \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

d'après (1.4.38) :

$$\begin{cases} (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s)^2 &= 4[1 + \varepsilon_j - \varepsilon_j |\alpha_j(K)| \cos(2\psi + \psi_j(K))]^2 \\ (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j(k, k))^2 &= 4[(1 + \varepsilon_j) \cos(\psi + \psi_{j,k}) - \varepsilon_j |\alpha_j(K)| \cos(\psi - \psi_{j,k} + \psi_j(K))]^2 \\ \|\tilde{\omega}(K)\|^2 &= 2[(1 + \varepsilon_j)^2 + \varepsilon_j^2 |\alpha_j^2(K)| - 2\varepsilon_j |\alpha_j(K)| (1 + \varepsilon_j) \cos(2\psi + \psi_j(K))] \end{cases} \quad (1.4.41)$$

où :

$$\psi \triangleq \varphi_j - \varphi_s, \quad \psi_{j,k} \triangleq 2\pi \Delta f_j kT \quad \text{et} \quad \alpha_j(K) \triangleq |\alpha_j(K)| e^{i\psi_j(K)}.$$

Nous obtenons :

$$\text{SINR}(kT) = \frac{2\varepsilon_s [1 + \varepsilon_j - \varepsilon_j |\alpha_j(K)| \cos(2\psi + \psi_j(K))]^2}{2\varepsilon_j [(1 + \varepsilon_j) \cos(\psi + \psi_{j,k}) - \varepsilon_j |\alpha_j(K)| \cos(\psi - \psi_{j,k} + \psi_j(K))]^2 + [(1 + \varepsilon_j)^2 + \varepsilon_j^2 |\alpha_j^2(K)| - 2\varepsilon_j |\alpha_j(K)| (1 + \varepsilon_j) \cos(2\psi + \psi_j(K))]}.$$

Sous l'hypothèse d'une faible dérive de fréquence du brouilleur, i.e., $\Delta f_j T \ll 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_j(K) &\triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{j4\pi \Delta f_j kT} \\ &= \frac{1}{K} e^{j2\pi \Delta f_j (K+1)T} \frac{\sin(2\pi \Delta f_j K T)}{\sin(2\pi \Delta f_j T)} \\ &\approx e^{j2\pi \Delta f_j (K+1)T} \end{aligned} \quad (1.4.42)$$

Dans le but de rendre interprétable l'expression du SINR, nous nous plaçons dans le cas particulier fréquent d'un fort brouilleur : $\varepsilon_j \gg 1$. Et, en supposant que $(K + K') \Delta f_j T \ll 1$, nous avons : $\psi_j(K) \ll 1$ et $\psi_{j,k} \ll 1$. Ceci permet de réduire l'expression du SINR (voir Annexe A) à :

$$\text{SINR}(kT) \approx \frac{\varepsilon_s (1 - \cos 2\psi)}{1 + 2\varepsilon_j [\pi(2k - K - 1) \Delta f_j T]^2}; \quad k = K + 1, \dots, K + K' \quad (1.4.43)$$

Dans le cas où les dérivées des porteuses sont nulles, on retrouve bien l'expression du SINR donnée dans [7] :

$$\begin{aligned}\text{SINR} &= 2\varepsilon_s \frac{1 + 2\varepsilon_j - 2\varepsilon_j \cos^2 \psi}{1 + 2\varepsilon_j} \\ &\approx 2\varepsilon_s(1 - \cos^2 \psi) = \varepsilon_s(1 - \cos 2\psi); \quad \text{pour } \varepsilon_j \gg 1,\end{aligned}$$

et par suite :

$$\text{SINR}(kT) \approx \frac{\text{SINR}}{1 + 2\varepsilon_j[\pi(2k - K - 1)\Delta f_j T]^2}; \quad k = K + 1, \dots, K + K'. \quad (1.4.44)$$

A partir de (1.4.43), nous constatons une croissance du SINR(kT) en fonction de la puissance du signal utile et une décroissance en fonction de $|\Delta f_j|T$ et de la puissance du brouilleur. En écrivant $(2k - K)$ sous la forme $2(k - K) + K$, on voit que le SINR(kT) décroît en fonction de la taille de la séquence d'apprentissage K et en fonction de l'ordre de symbole dans la trame $k - K$. (1.4.44) montre que le SINR est supérieur à celui obtenu en présence de la dérive de fréquence SINR(kT). Ces résultats seront validés par simulations dans une section ultérieure.

Le SNR (Signal-to Noise Ratio) et le INR (Interference-to-Noise Ratio) sont calculés à la sortie de récepteur et donnés par :

$$\begin{aligned}\text{SNR}(kT) &\triangleq \varepsilon_s \frac{(\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_s)^2}{\|\tilde{\omega}(K)\|^2} = \varepsilon_s \frac{4\Re^2(\omega^*(K)\mathbf{h}_s)^2}{2|\omega(K)|^2} \\ &= \varepsilon_s \frac{4[1 + \varepsilon_j - \varepsilon_j|\alpha_j(K)|\cos(2\psi + \psi_j(K))]}{2[(1 + \varepsilon_j)^2 + \varepsilon_j^2|\alpha_j^2(K)| - 2\varepsilon_j|\alpha_j(K)|(1 + \varepsilon_j)\cos(2\psi + \psi_j(K))]} \quad (1.4.45)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{INR}(kT) &\triangleq \varepsilon_j \frac{(\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_j(k, k))^2}{\|\tilde{\omega}(K)\|^2} = \varepsilon_j \frac{4\Re^2(\omega^*(K)\mathbf{h}_j(k, k))^2}{2|\omega(K)|^2} \\ &= \varepsilon_j \frac{4[(1 + \varepsilon_j)\cos(\psi + \psi_{j,k}) - \varepsilon_j|\alpha_j(K)|\cos(\psi - \psi_{j,k} + \psi_j(K))]^2}{2[(1 + \varepsilon_j)^2 + \varepsilon_j^2|\alpha_j^2(K)| - 2\varepsilon_j|\alpha_j(K)|(1 + \varepsilon_j)\cos(2\psi + \psi_j(K))]} \quad (1.4.46)\end{aligned}$$

Tout en restant sous les mêmes hypothèses précédentes : ($\varepsilon_j \gg 1$ et $(K + K')|\Delta f_j| \ll 1$), les expressions du SNR et INR se simplifient :

$$\begin{aligned}\text{SNR}(kT) &\approx 2\varepsilon_s \sin^2 \psi \\ \text{INR}(kT) &\approx 2\varepsilon_j[\pi(2k - K - 1)\Delta f_j T]^2,\end{aligned} \quad (1.4.47)$$

ainsi, le BER(kT) (1.4.24) aura pour expression :

$$\begin{aligned}\text{BER}(kT) &\approx \frac{1}{2}Q[\sqrt{2\varepsilon_s}|\sin \psi| + \sqrt{2\varepsilon_j}[\pi(2k - K - 1)\Delta f_j T]] \\ &+ \frac{1}{2}Q[\sqrt{2\varepsilon_s}|\sin \psi| - \sqrt{2\varepsilon_j}[\pi(2k - K - 1)\Delta f_j T]]; \quad k = K + 1, \dots, K + K' \quad (1.4.48)\end{aligned}$$

En pratique, le SNR est de même ordre de grandeur que le INR, ainsi nous pouvons négliger la différence $\text{SNR}^{\frac{1}{2}}(kT) - \text{INR}^{\frac{1}{2}}(kT)$ devant $\text{SNR}^{\frac{1}{2}}(kT) + \text{INR}^{\frac{1}{2}}(kT)$. Ainsi

$$Q[\text{SNR}^{\frac{1}{2}}(kT) - \text{INR}^{\frac{1}{2}}(kT)] \gg Q[\text{SNR}^{\frac{1}{2}}(kT) + \text{INR}^{\frac{1}{2}}(kT)].$$

D'où le BER se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{BER}(kT) &\approx \frac{1}{2}Q[\text{SNR}^{\frac{1}{2}}(kT) - \text{INR}^{\frac{1}{2}}(kT)] \\ &= \frac{1}{2}Q[\sqrt{2\varepsilon_s}|\sin \psi| - \sqrt{2\varepsilon_j}[\pi(2k - K)\Delta f_j T]]; k = K + 1, \dots, K + K' \quad (1.4.49) \end{aligned}$$

A partir de (1.4.49), nous constatons une décroissance de BER en fonction de la puissance du signal utile et une croissance en fonction de la dérive de fréquence et de la puissance du brouilleur. Le BER(kT) croît en fonction de la taille de la séquence d'apprentissage et de l'ordre de symbole dans la trame ($k - K$).

Afin de valider les résultats approchés dérivés précédemment par calcul théorique, une illustration numérique a été réalisée. Il s'agit de l'implémentation des formules théoriques avant simplifications, celles approchés et les résultats de 20000 tirages Monte Carlo (MC). La simulation est réalisée pour : $K = 26$, $K' = 57$, $\Delta f_j T = 5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta f_s T = 0$, $\varepsilon_s = 10(10\text{dB})$ et $\varepsilon_j = 100(20\text{dB})$, $\psi = \frac{\pi}{3}$. Les figures 1.1 et 1.2 montrent respectivement l'évolution du SINR et celle de BER en fonction du temps sur la partie utile de la trame. On remarque une décroissance de SINR accompagnée d'une croissance de BER au cours du temps, ce qui confirme les résultats trouvés par les approximations théoriques. En plus, dans les deux figures 1.1 et 1.2 les trois courbes (théorique exacte, approché et Monte Carlo) sont très proches.

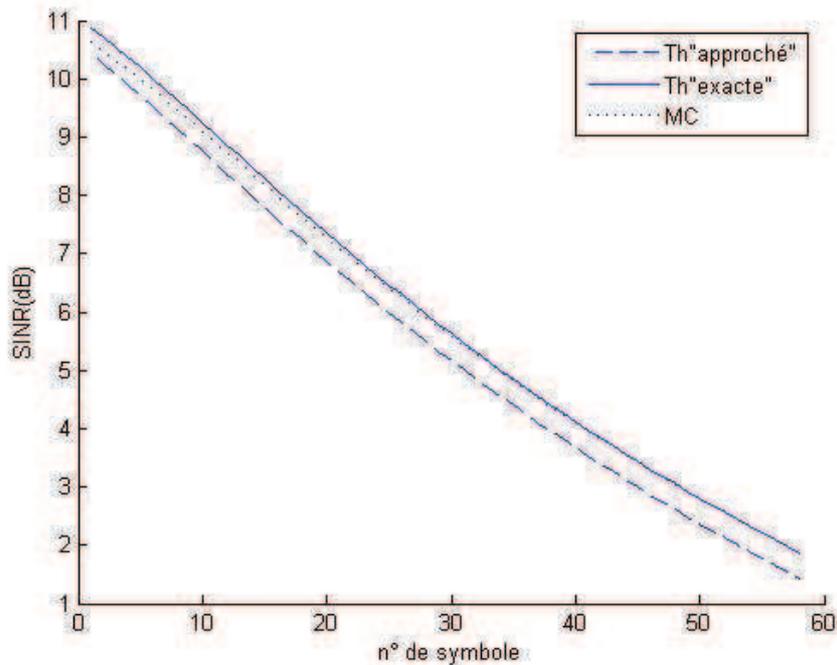


FIGURE 1.1 – Variation du SINR en fonction du numéro de symbole dans la trame.

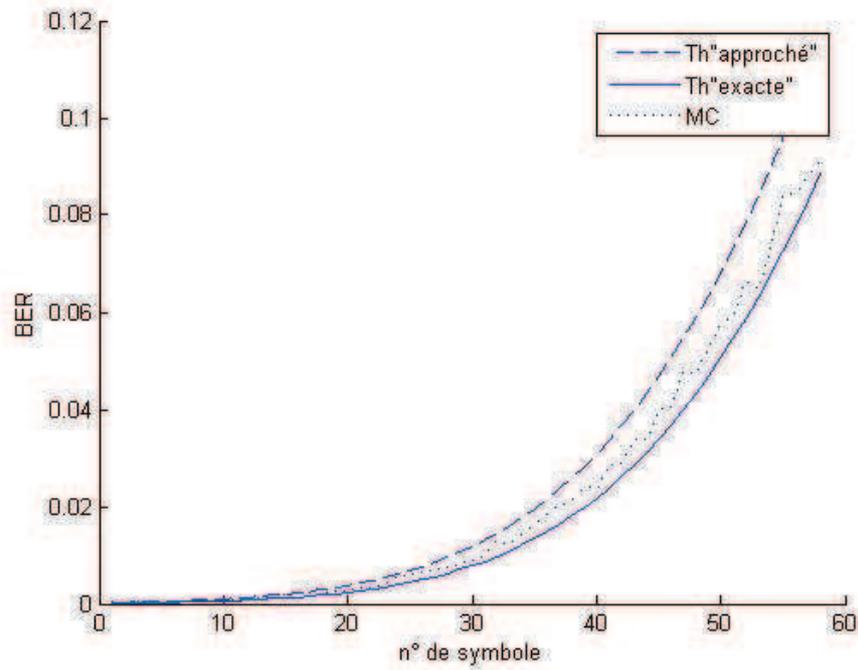


FIGURE 1.2 – Variation du BER en fonction du numéro de symbole dans la trame.

Cette dernière étude a été réalisée pour une valeur fixée de la dérive de fréquence de $5 \cdot 10^{-4}$. Pour étudier la variation de BER et SINR en fonction de la dérive de fréquence afin de déterminer le domaine de validité de notre étude théorique, nous avons calculé la moyenne de ces métriques sur les symboles de la trame en faisant varier la dérive de fréquence. Les courbes présentées par la figure suivante montrent une comparaison entre le BER théorique exact et celui obtenu après les simplifications, en fonction du résidu de porteuse du brouilleur. Cette étude a été réalisée pour le cas NRZ SAIC avec une différence des phases initiales fixée à $\psi = \pi/3$ avec les mêmes valeurs des puissances et la même composition de la trame utilisés précédemment. La figure 1.6 montre une bonne conformité entre le modèle théorique exact et approché.

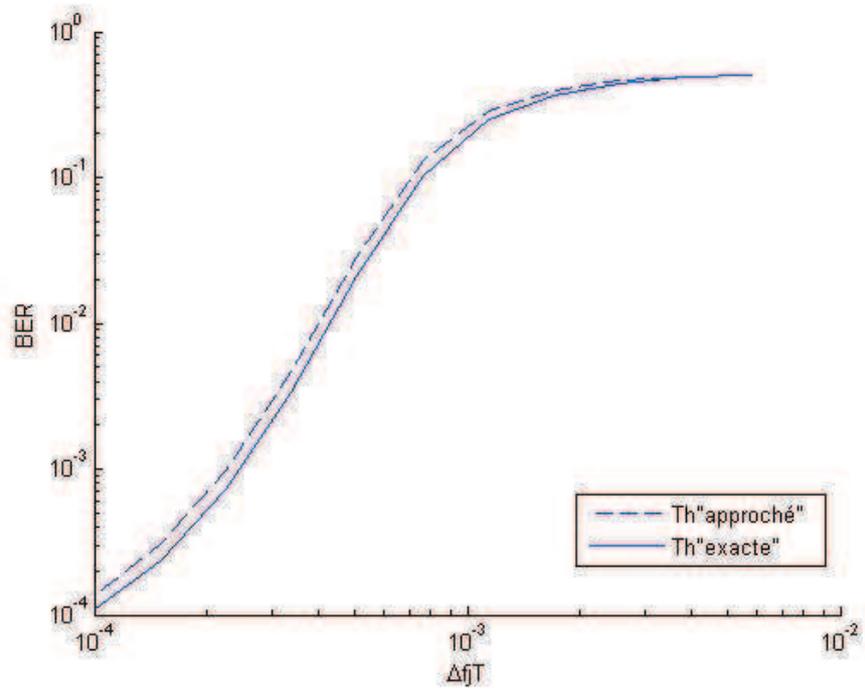


FIGURE 1.3 – Comparaison entre le BER théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur.

Une étude similaire considérant le SINR comme métrique montre aussi une bonne conformité entre les résultats théoriques exacts et approchés. Les courbes présentées dans la figure 1.4 montrent une comparaison entre le SINR théorique exacte et approché, en fonction du résidu de porteuse du brouilleur.

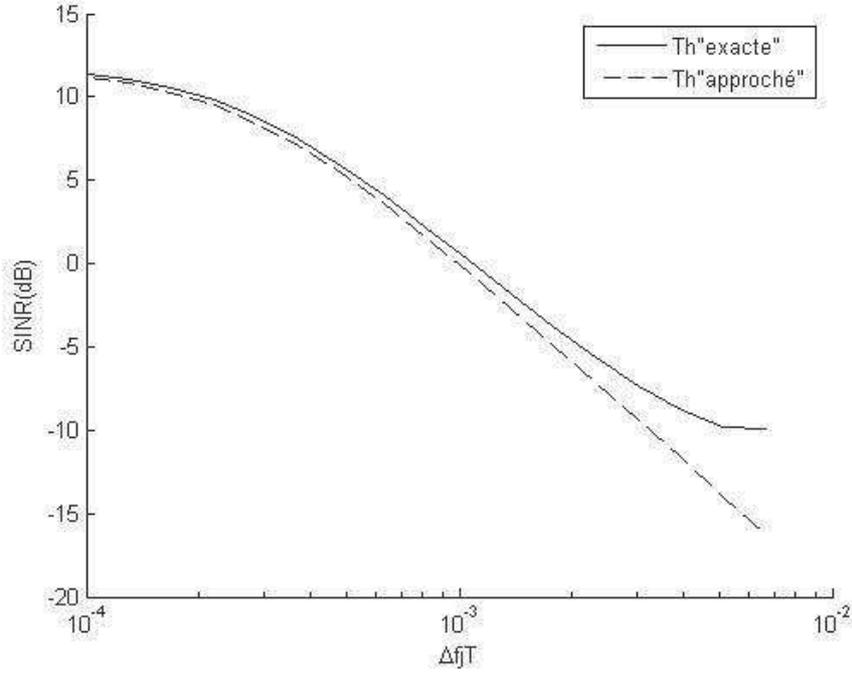


FIGURE 1.4 – Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur.

Il est à noter, ainsi, que cette étude théorique reste valable uniquement pour des faibles valeurs de la dérive de fréquence du brouilleur. Au delà de la valeur $\Delta f_j T = 10^{-3}$, la différence entre les deux modèles diverge.

Cas particulier : dérive de fréquence sur le signal utile seul ($\Delta f_j = 0$) :

Dans cette partie, nous étudions le cas d'une dérive de fréquence du brouilleur nulle ($\Delta f_j = 0$). Dans ce cas, on a $\alpha_j = 1$ mais $\alpha_s \neq 1$ et $\alpha'_s \neq 1$, (1.4.37) devient :

$$\omega(K) \propto ((1 + \varepsilon_j + \varepsilon_s)\alpha'_s - \varepsilon_s \alpha_s \alpha'_s - \varepsilon_j \alpha'_s e^{2i(\varphi_j - \varphi_s)})e^{i\varphi_s}, \quad (1.4.50)$$

et $\tilde{\mathbf{h}}_j(k, k)$ se réduit à $\tilde{\mathbf{h}}_j$. $y(kT)$ devient, dans la phase de transmission, $k = K + 1, \dots, K + K'$ (1.3.15) :

$$y(kT) = \mu_s a_k \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k) + \mu_j b_k \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j + \tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{n}}_v(kT), \quad (1.4.51)$$

qui donne un SINR à l'instant kT , $k = K + 1, \dots, K + K'$:

$$\text{SINR}(kT) = \frac{\varepsilon_s (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k))^2}{\varepsilon_j (\tilde{\omega}^H(K) \tilde{\mathbf{h}}_j)^2 + \|\tilde{\omega}(K)\|^2}, \quad (1.4.52)$$

Sous l'hypothèse d'une faible dérive de fréquence du signal utile, i.e., $|\Delta f_s|T \ll 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_s(K) &\approx e^{j2\pi\Delta f_s(K+1)T} \\ \alpha'_s(K) &\approx e^{j\pi\Delta f_s(K+1)T}, \end{aligned} \quad (1.4.53)$$

ce qui donne les expressions simplifiées suivantes :

$$\begin{cases} (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_s(k,k))^2 &= 4[(1 + \varepsilon_j) \cos(\psi'_s(K) - \psi_{s,k}) - \varepsilon_j \cos(2\psi - \psi_{s,k} - \psi'_s(K))]^2 \\ (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_j)^2 &= 4 \cos^2(\psi'_s(K) - \psi) \\ \|\tilde{\omega}(K)\|^2 &= 2[(1 + \varepsilon_j)^2 + \varepsilon_j^2 - 2\varepsilon_j(1 + \varepsilon_j) \cos(2\psi - \psi_s)], \end{cases} \quad (1.4.54)$$

où : $\psi \triangleq \varphi_j - \varphi_s$, $\psi_{s,k} \triangleq 2\pi\Delta f_s kT$.

Dans le but de rendre interpretable l'expression du SINR, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un fort brouilleur ($\varepsilon_j \gg 1$), et en supposant que $|\psi'_s(K)| \ll |\psi|$ et $|\psi_{s,k}| \ll |\psi|$, l'expression du SINR se réduit à (voir Annexe A) :

$$\text{SINR}(kT) \approx 2\varepsilon_s \sin^2(\psi - \psi_{s,k}). \quad (1.4.55)$$

Dans le cas où la dérive de la porteuse du signal utile est nulle, on retrouve bien l'expression du SINR donnée dans [7] :

$$\text{SINR} = 2\varepsilon_s \sin^2 \psi$$

Ainsi, le $\text{SINR}(kT)$ décroît en fonction de l'ordre k de symbole dans la trame et en fonction de la dérive de fréquence du signal utile et croît en fonction de la puissance du signal utile.

Le $\text{SNR}(kT)$ et le $\text{INR}(kT)$ se réduisent à :

$$\begin{aligned} \text{SNR}(kT) &\triangleq \varepsilon_s \frac{(\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_s(k,k))^2}{\|\tilde{\omega}(K)\|^2} \\ &\approx 2\varepsilon_s \sin^2(\psi - \psi_{s,k}(K)). \end{aligned} \quad (1.4.56)$$

$$\begin{aligned} \text{INR}(kT) &\triangleq \varepsilon_j \frac{(\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_j)^2}{\|\tilde{\omega}(K)\|^2} \\ &\approx \frac{1}{2\varepsilon_j \tan^2(\psi - \psi'_s(K))} \end{aligned} \quad (1.4.57)$$

Dans le but d'exprimer le $\text{SINR}(kT)$ en fonction de SINR, nous sommes dans l'obligation de distinguer deux cas de figure ($\psi \neq \frac{\pi}{2}$ et $\psi = \frac{\pi}{2}$). Dans le cas où $\psi \neq \frac{\pi}{2}$, nous avons démontré dans l'Annexe A que :

$$\text{SINR}(kT) \approx \text{SINR} \left(1 - \frac{4\pi k \Delta f_s T}{\tan \psi}\right); k = K + 1, \dots, K + K' \quad (1.4.58)$$

En développant de la même manière les expressions (1.4.54), nous pouvons écrire le $\text{SNR}(kT)$ et le $\text{INR}(kT)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \text{SNR}(kT) &\approx \text{SNR} \left(1 - \frac{4\pi k \Delta f_s T}{\tan \psi}\right); k = K + 1, \dots, K + K', \\ \text{INR}(kT) &\approx \text{INR} \left(1 - \frac{4\pi(K+1)\Delta f_s T}{\sin 2\psi}\right); k = K + 1, \dots, K + K', \end{aligned} \quad (1.4.59)$$

avec $\text{SNR} = 2\varepsilon_s \sin^2 \psi$ et $\text{INR} = \frac{1}{2\varepsilon_j \tan^2 \psi} \ll 1$ obtenus sans dérive de fréquence.

Dans le cas où $\psi = \frac{\pi}{2}$, le SINR(kT) est donné par :

$$\text{SINR}(kT) \approx \text{SINR}(1 - (2\pi\Delta f_s T)^2 \frac{(K+1)^2 + 4k^2}{8}); k = K+1, \dots, K+K' \quad (1.4.60)$$

et les expressions du SNR(kT) et INR(kT) par :

$$\text{SNR}(kT) \approx \text{SNR}(1 - (2\pi k\Delta f_s T)^2); k = K+1, \dots, K+K', \quad (1.4.61)$$

$$\text{INR}(kT) \approx \frac{1}{2\varepsilon_j} (\pi(K+1)\Delta f_s T)^2; k = K+1, \dots, K+K', \quad (1.4.62)$$

avec ici $\text{SNR} = 2\varepsilon_s$ et $\text{INR} = 0$. Dans les deux cas, nous remarquons que le SINR(kT) est inférieur au SINR et que la différence entre les deux augmente en fonction de l'ordre du symbole k dans la trame.

Dans le cas où ψ est un voisinage de $\pm\pi/2$, la dégradation des performances augmente avec $|\Delta f_s|T$, la position de symbole $k - K$, et la taille de la séquence d'apprentissage K , mais n'est plus en dépendance avec ε_j . Pour le cas où ψ n'est pas un voisinage de $\pm\pi/2$, indépendamment de signe de $\Delta f_s T / \tan \psi$, le SINR peut augmenter ou diminuer pour $(K+K')|\Delta f_s|T \ll 1$, indépendamment de ε_j .

D'après (1.4.61) et (1.4.62), le BER(kT) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{BER}(kT) \approx & \frac{1}{2} Q[\sqrt{2\varepsilon_s} |\sin(\psi - \psi_{s,k})| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_j} |\tan(\psi - \psi'_s(K))|}] \\ & + \frac{1}{2} Q[\sqrt{2\varepsilon_s} |\sin(\psi - \psi_{s,k})| - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_j} |\tan(\psi - \psi'_s(K))|}]. \end{aligned} \quad (1.4.63)$$

Afin de valider les résultats approchés trouvés précédemment par le calcul théorique, une illustration numérique a été réalisée. Il s'agit de l'implémentation des formules théoriques avant et après les simplifications et des tirages Monte Carlo (20000 itérations). Les simulations prennent comme entrées : $K = 26$, $K' = 57$, $\Delta f_s T = 5.10^{-4}$, $\Delta f_j T = 0$, $\varepsilon_s = 10(10dB)$ et $\varepsilon_j = 100(20dB)$, $\psi = \frac{\pi}{3}$. Les figures 1.5 et 1.6 montrent respectivement l'évolution de SINR et celle de BER en fonction du temps sur la partie utile de la trame. On remarque une décroissance de SINR accompagnée d'une croissance de BER au cours de temps, ce qui confirme les résultats trouvés par les approximations théoriques. Les résultats du modèle approché sont très proches du modèle théorique exact. La différence entre les modèles théoriques et les tirages Monte Carlo est plus importante dans le cas de présence de la dérive sur le signal utile en comparaison avec le cas où la dérive est sur le brouilleur. Ceci peut être expliqué par le fait que le filtre $\omega(K)$ (1.4.37) est plus perturbé par Δf_s que par Δf_j .

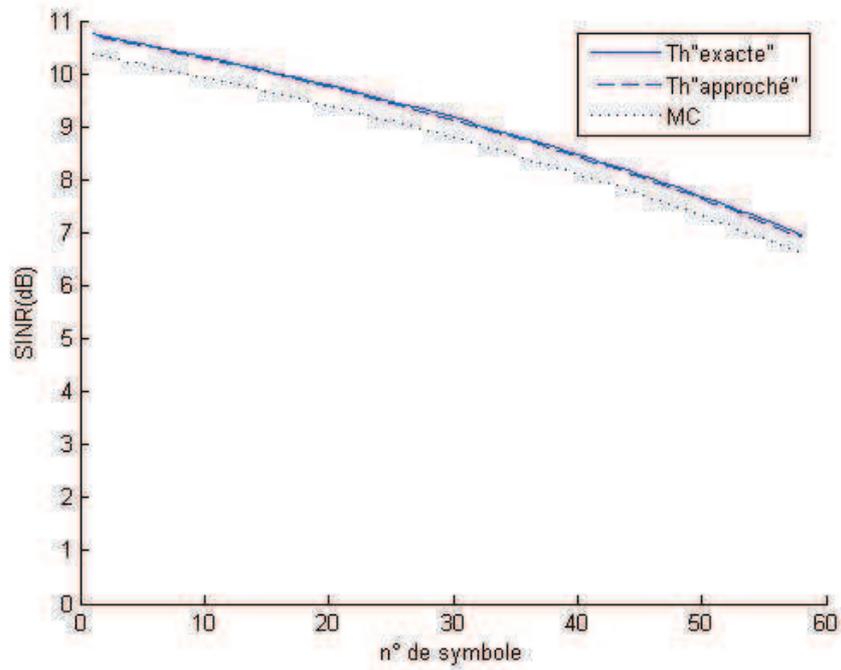


FIGURE 1.5 – Variation du SINR en fonction du numéro de symbole dans la trame.

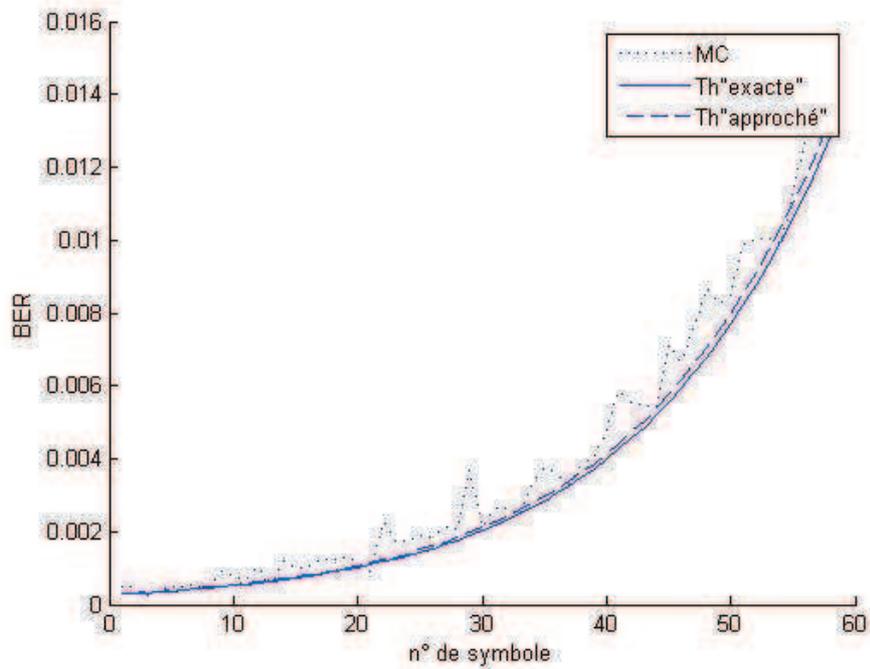


FIGURE 1.6 – Variation du BER en fonction du numéro de symbole dans la trame.

Afin de déterminer le domaine de validité de notre étude théorique sur l'échelle de fréquence,

nous calculons le BER et le SINR moyennés sur les symboles de la trame en fonction de la dérive de fréquence. Les courbes présentées sur la figure 1.7 montrent une comparaison entre le BER théorique exact et celui obtenu après les simplifications, en fonction du résidu de porteuse du signal utile. Cette étude a été réalisée pour le cas NRZ SAIC avec une différence entre les phases initiales fixés à $\psi = \pi/3$ avec les mêmes valeurs des puissances et la même composition de la trame utilisés précédemment. La figure montre une bonne conformité entre le modèle théorique exact et approché.

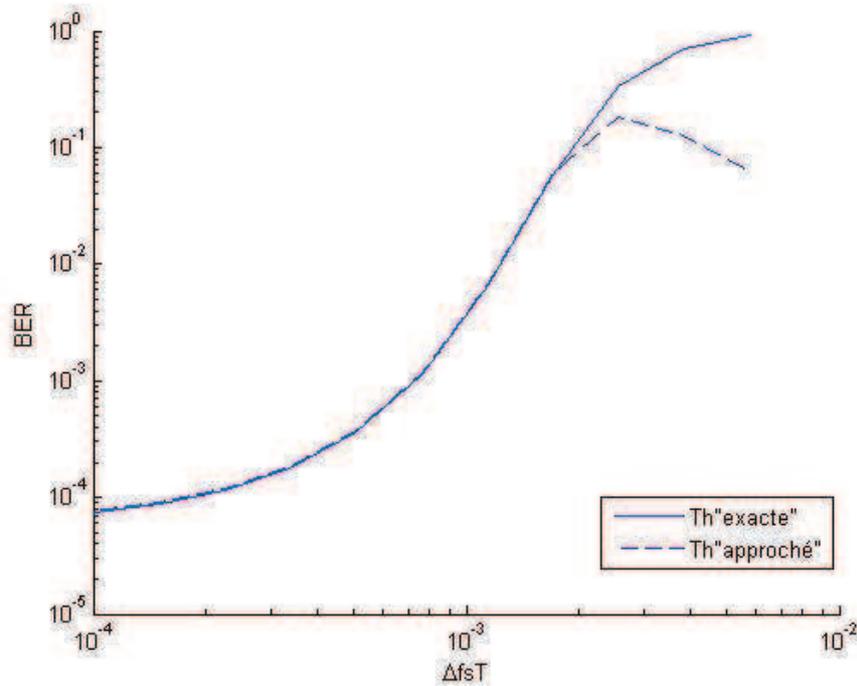


FIGURE 1.7 – Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.

Une étude similaire considérant le SINR comme métrique présentée dans la figure 1.8 montre une comparaison entre le SINR théorique exact et simplifié, en fonction du résidu de porteuse du signal utile.

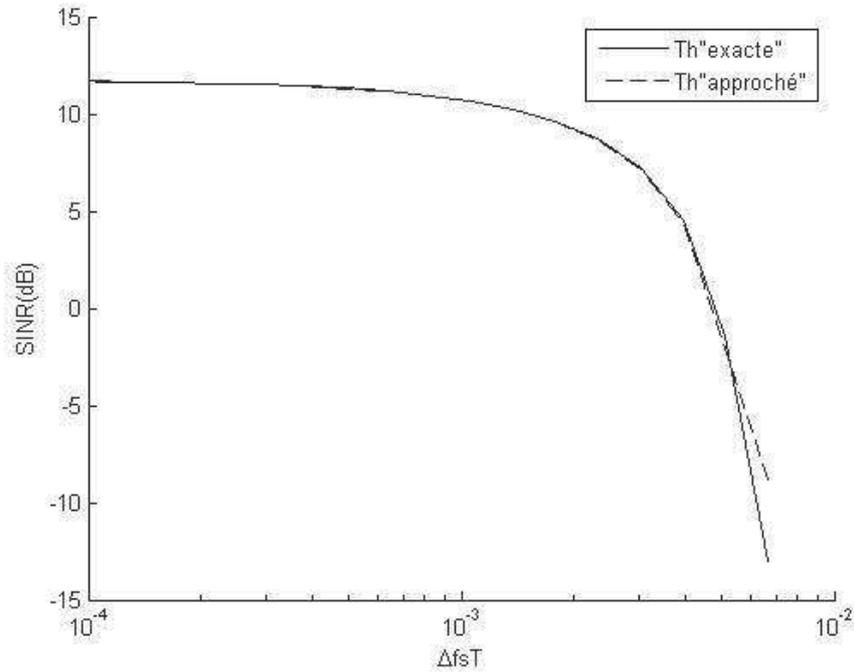


FIGURE 1.8 – Comparaison entre le SINR théorique exact et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.

La dernière figure montre une bonne conformité entre le modèle théorique exact et simplifié jusqu'à la valeur $\Delta f_s T = 10^{-3}$. Il est à noter que l'étude théorique simplifiée reste valable uniquement pour des faibles valeurs de la dérive de fréquence de signal utile $\Delta f_s T < 10^{-3}$.

Enfin, nous montrons que le comportement du SINR en fonction de la dérive de fréquence $\Delta f_s T$, contrairement à celui en fonction de $\Delta f_j T$, n'est pas symétrique. Nous avons montré analytiquement que le comportement du SINR est invariant en remplaçant le couple $(\psi, \Delta f_s)$ par $(-\psi, -\Delta f_s)$. Ceci permet de réduire d'étude en fonction de $(\psi, \Delta f_s)$ à une étude en fonction de Δf_s en considérant les valeurs négatives. La figure 1.9 présente le SINR exact et approché relatif au 30^{ème} symbole de la trame pour $\psi = \pi/3$ et $\psi = \pi/6$.

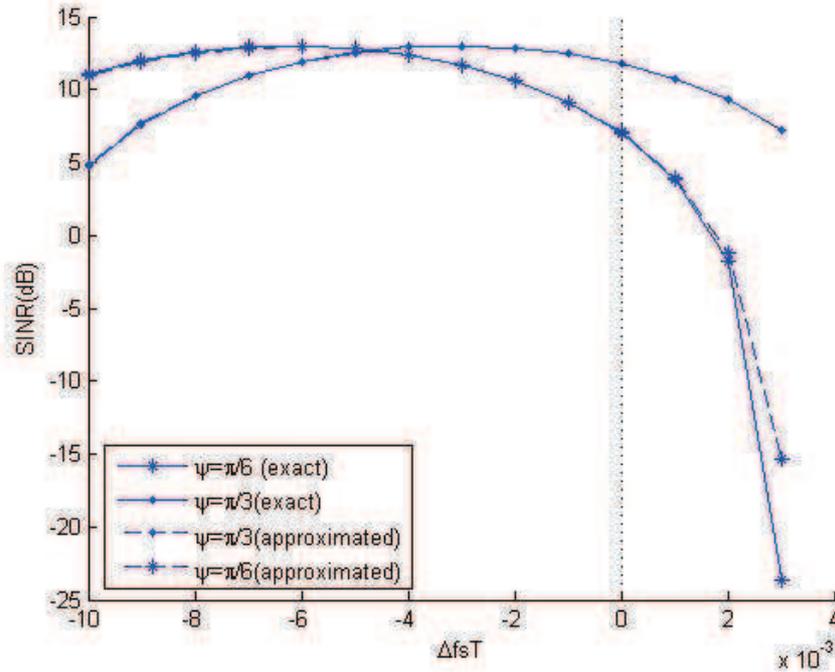


FIGURE 1.9 – Représentation symétrique du SINR théorique exacte et approché en fonction de la dérive de fréquence du signal utile.

La figure 1.9 confirme l'analyse théorique. On voit ainsi que dépendant du signe de $\Delta f_s T / \tan \psi$, le SINR peut augmenter ou diminuer pour $(K + L)|\Delta f_s|T \ll 1$ et que cette croissance ou décroissance est d'autant plus rapide que $|\psi|$ est plus faible.

Comparaisons :

La comparaison de la dégradation des performances due au résidu de porteuse du signal utile et de celle due au résidu de brouilleur en utilisant les formules théoriques exactes n'est pas facile. Cependant la comparaison des formules approchées (1.4.44), (1.4.58) et (1.4.60) avec la supposition que $\varepsilon_j \gg 1$ montre qu'une dégradation de SINR (par exemple de $3dB$) est obtenue pour une valeur plus grande de $|\Delta f_s|T$ que de $|\Delta f_j|T$, cette dégradation augmente avec ε_j et avec le rapport $|\Delta f_j|/|\Delta f_s|$.

Par conséquent, sous l'hypothèse de $\varepsilon_j \gg 1$, le SAIC est plus sensible au résidu de porteuse de brouilleur qu'au celui de l'utile. Il est à noter que cette propriété est similaire au cas de beamforming spatial pour lequel la perte en terme de SINR est plus sensible aux erreurs de direction relatifs au brouilleur qu'aux erreurs de direction du signal utile.

Les tables 1.1 et 1.2 montrent pour une impulsion NRZ, un SNR de $\varepsilon_s = 10dB$ et pour plusieurs valeurs de INR (ε_j), les valeurs de $\Delta f_s T$ et $\Delta f_j T$ correspondantes à une augmentation de BER de dix pour cent à partir des valeurs $\Delta f_s T = 10^{-4}$ et $\Delta f_j T = 10^{-4}$ respectivement. La première table a été réalisée pour $t_j = 0$ et les valeurs de la deuxième ont été moyennées sur différentes valeurs

de $t_j \in [0 T)$. Les valeurs des vitesses $v_{s,j}$ de l'émetteur ou de récepteur associées à ces dérives de porteuse par effet Doppler sont données pour le standard GSM ($T = 1/270\text{ms}$, $f_0 = 900\text{MHz}$ or $f_0 = 1800\text{MHz}$).

Plus précisément, pour $t_j = 0$, on note une augmentation de BER de 10% pour une variation de $\Delta f_j T = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ou pour une variation de $\Delta f_s T = 5 \cdot 10^{-4}$, i.e., 40Hz ou 135Hz respectivement pour le standard GSM ($T = 1/270 \text{ ms}$). On note que pour $\varepsilon_j = 0\text{dB}$ et $\varepsilon_j = 30\text{dB}$ la variation $\Delta f_j T$ devient $5 \cdot 10^{-4}$ et $1.2 \cdot 10^{-4}$ respectivement, tandis que celle de la dérive du signal utile devient $1.5 \cdot 10^{-4}$ pour la première valeur et reste inchangée pour la deuxième (pour $\varepsilon_j \gg 1$). Ceci a été prédit par nos approximations théoriques (1.4.58) et (1.4.60).

$\varepsilon_j \text{ (dB)}$	$\Delta f_s T$	$v_s \text{ (km/h)}$		$\Delta f_j T$	$v_j \text{ (km/h)}$	
		900	1800		900	1800
0	10^{-4}	16	8	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40
10	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$4 \cdot 10^{-4}$	65	32
20	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$1.5 \cdot 10^{-4}$	25	12
30	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$1.2 \cdot 10^{-4}$	20	10

TABLE 1.1 – Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion NRZ avec $t_j = 0$.

$\varepsilon_j \text{ (dB)}$	$\Delta f_s T$	$v_s \text{ (km/h)}$		$\Delta f_j T$	$v_j \text{ (km/h)}$	
		900	1800		900	1800
0	10^{-4}	16	8	$6 \cdot 10^{-4}$	97	48
10	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$4.5 \cdot 10^{-4}$	73	36
20	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$2 \cdot 10^{-4}$	32	16
30	$5 \cdot 10^{-4}$	80	40	$1.2 \cdot 10^{-4}$	20	10

TABLE 1.2 – Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion NRZ avec t_j moyenné.

A partir de ces tables, on remarque que la désynchronisation entre le signal utile et le brouilleur a un effet négligeable sur l'accroissement de BER pour des faibles valeurs des dérives de porteuse.

1.4.6 La désynchronisation entre signal utile et brouilleur ($t_j \neq 0$)

Dans les sections précédentes, nous avons limité notre étude au cas particulier où le signal utile et le brouilleur sont synchronisés temporellement. En pratique, ce cas n'est pas toujours vrai. Dans cette section, nous nous intéressons au comportement du récepteur SAIC dans le cas d'un filtre NRZ en fonction de décalage temporel entre le signal utile et le brouilleur.

En absence de synchronisation temporelle entre le signal utile et le brouilleur, tout en étant dans le cas NRZ, le signal reçu définit par (1.2.4) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}_v(kT) = \mu_s a_k I_0 \mathbf{h}_s e^{i2\pi \Delta f_s kT} + \mu_j (b_k J_0(t_j) + b_{k-1} J_1(t_j)) \mathbf{h}_j e^{i2\pi \Delta f_j kT} + \mathbf{n}_v(kT),$$

où les valeurs de I_n et $J_n(t_j)$ définis par (1.2.5) et (1.2.6) sont données pour $t_j \in [0, T[$ par :

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi\Delta f_s \tau} d\tau = \frac{\sin(\pi\Delta f_s T)}{\pi\Delta f_s T},$$

et

$$I_n = 0 \text{ pour } n \neq 0.$$

$$J_0(t_j) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}-t_j}^{\frac{T}{2}} e^{-i2\pi\Delta f_j \tau} d\tau = \frac{\sin(\pi\Delta f_j (T-t_j))}{\pi\Delta f_j T} e^{i2\pi\Delta f_j t_j}$$

$$J_1(t_j) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-t_j} e^{-i2\pi\Delta f_j \tau} d\tau = \frac{\sin(\pi\Delta f_j t_j)}{\pi\Delta f_j T} e^{i2\pi\Delta f_j (T-t_j)},$$

et

$$J_n(t_j) = 0 \text{ pour } n \neq 0, 1.$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'interférence inter-symbole du signal utile et l'unique interférence inter-symbole provient de brouilleur. Nous pouvons préciser que

$$|(b_k J_0(t_j) + b_{k-1} J_1(t_j))| \leq J_0(0).$$

La démonstration analytique de cette propriété est triviale en absence de dérive de fréquence du brouilleur. Une illustration numérique de ce cas est présentée par la figure 1.10. Par contre, en sa présence, cette propriété n'a pas pu être vérifiée que numériquement en fonction de son influence sur le BER (figure 1.11).

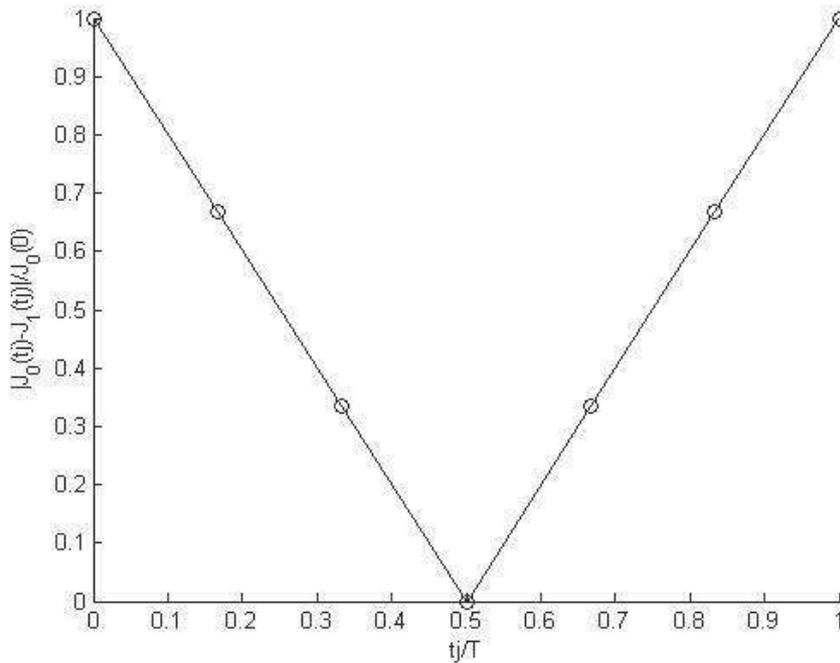


FIGURE 1.10 – Influence de décalage temporel sur la contribution de brouilleur en absence de dérives de fréquence.

Ainsi, la puissance du brouilleur $|(b_k J_0(t_j) + b_{k-1} J_1(t_j))|^2$ en sortie de filtre de mise en forme dans le cas d'absence de synchronisation ($t_j \neq 0$) est inférieure à sa puissance $J_0^2(0)$ quand le signal utile et le brouilleur sont synchronisés.

Par conséquent, les performances s'améliorent en présence d'une interférence inter-symboles de brouilleur, i.e. en absence de synchronisation entre le signal utile et le brouilleur. La figure suivante montre la variation de BER en fonction de décalage temporel pour différentes valeurs des dérivées de fréquence : $(\Delta f_s T, \Delta f_j T) = (0, 0)$, $(5 \cdot 10^{-4}, 0)$ et $(0, 5 \cdot 10^{-4})$. Nous constatons que pour les trois cas (absence des résidus, résidu sur le signal utile seul, résidu sur le brouilleur seul) les performances se dégradent avec la synchronisation.

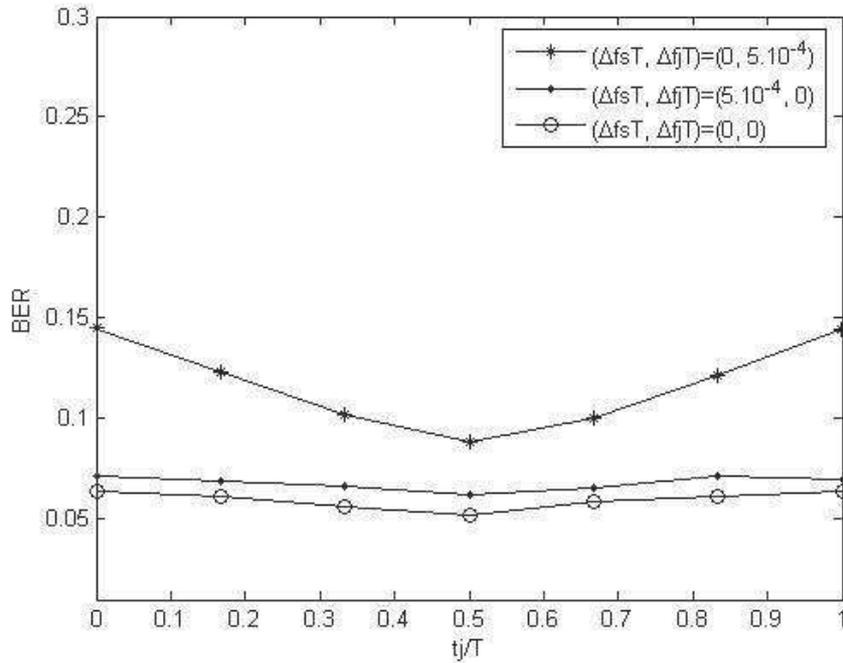


FIGURE 1.11 – Variation de BER en fonction de décalage temporel pour différentes valeurs des dérivées de fréquence.

1.5 Applications pratiques

Cette partie s'intéresse à l'étude de comportement pratique des techniques SAIC et MAIC, quand les différents paramètres varient. La trame utilisée est de structure semblable à la structure de la trame GSM. Le filtrage de mise en forme est de la forme de "racine de cosinus surélevé" ayant pour expression temporelle :

$$v(t) = 4\alpha \frac{\cos(\pi \frac{t}{T}(1 + \alpha_{ro})) + (4\alpha_{ro} \frac{t}{T})^{-1} \sin(\pi \frac{t}{T}(1 - \alpha_{ro}))}{\pi \sqrt{T}(1 - (4\alpha_{ro} \frac{t}{T})^2)},$$

où t désigne le temps, T est la durée symbole, α_{ro} est le roll off. Afin de rester proche de la pratique, le roll off utilisé est de 0.22 qui est la valeur utilisée dans de nombreux systèmes de télécommunication.

En dehors de l'intervalle $[-5T \ 5T]$ la valeur de la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme s'atténue d'une façon significative ($< 10^{-3}$ par rapport à la valeur maximale). Ainsi, dans nos simulations numériques nous utilisons la troncature de ce filtre sur $11T$. Cette largeur temporelle du filtre laisse "passer" 10 interférences intersymboles du signal utile et 11 symboles de brouilleur, rendant ainsi l'expression de BER théorique (1.4.20) inexploitable ($2^{I+J} = 2^{21} \simeq 2.10^6$). D'où le recours aux tirages Monte Carlo devient nécessaire.

Dans le cadre de ce travail, on considère une trame de longueur utile 58×2 symboles, au milieu de laquelle est insérée une séquence d'apprentissage de taille 26 symboles (structure GSM). La trame est modulée en BPSK, échantillonnée au rythme symbole après l'opération de filtrage adapté. Une propagation en espace libre étant supposée, un brouilleur co-canal modulé également en BPSK est supposé perturber le signal utile. Le réseau de capteurs est un ULA de N capteurs omnidirectionnels espacés d'une demi longueur d'onde, chacun de l'autre. Les DOA (Direction Of Arrival) du signal utile et du brouilleur sont fixés aléatoirement dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le SNR et le INR à l'entrée du récepteur sont fixés aux valeurs suivantes : SNR= 10dB et INR= 20dB (considérés comme valeurs par défaut). Le SER à la sortie de la chaîne de réception est calculé comme la moyenne de 20000 tirages Monte Carlo. Les symboles du signal utile et du brouilleur sont tirés aléatoirement à chaque itération. Les phases initiales du signal utile et du brouilleur changent également d'une façon aléatoire à chaque tirage tout en étant identiquement distribuées sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Cette partie est consacrée à l'étude des performances de récepteur MMSE WL en présence des résidus de porteuse et de décalage temporel entre le signal utile et le brouilleur sous l'influence d'autres paramètres tels que le nombre de capteurs et les puissances des signaux (utile et brouilleur).

1.5.1 Absence de synchronisation entre signal utile et brouilleur

Nous étudions d'abord l'influence de la non synchronisation sur le INR pour le récepteur SAIC en absence des dérives de fréquence. La figure 1.12 présente le rapport du minimum, de la moyenne et du maximum de puissance du brouilleur non synchronisé par la puissance du brouilleur synchronisé pour le SAIC avec un filtre $v(t)$ de type "racine en cosinus surrelevé" avec un roll off de 0.22 en fonction de t_j/T .

La figure 1.13 présente ce rapport de la puissance moyenne pour trois valeurs de roll off. A partir de ces figures, on conclut que la puissance moyenne de brouilleur, et par la suite le INR, se dégrade quand le signal utile et le brouilleur sont désynchronisés et atteint son minimum pour $t_j/T = 1/2$.

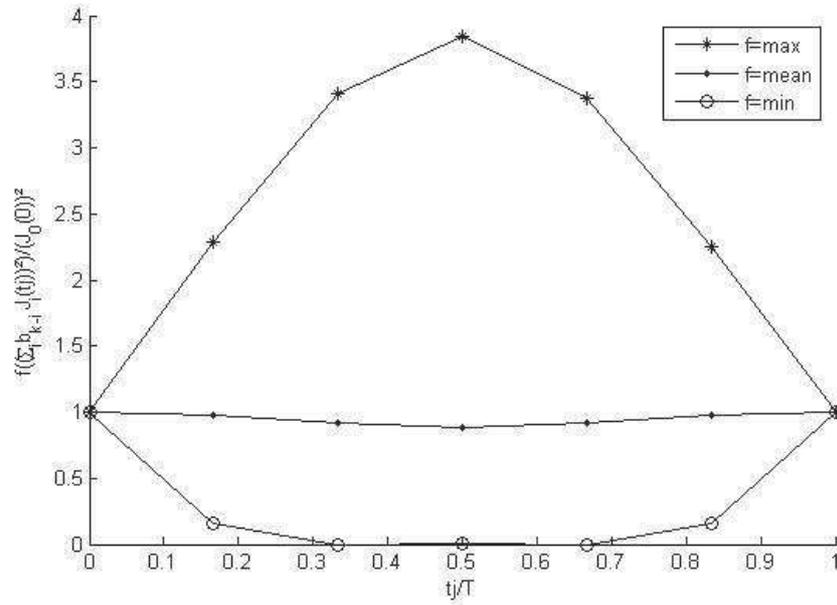


FIGURE 1.12 – Influence de décalage temporel sur la puissance de brouilleur pour $\alpha_{ro} = 0.22$.

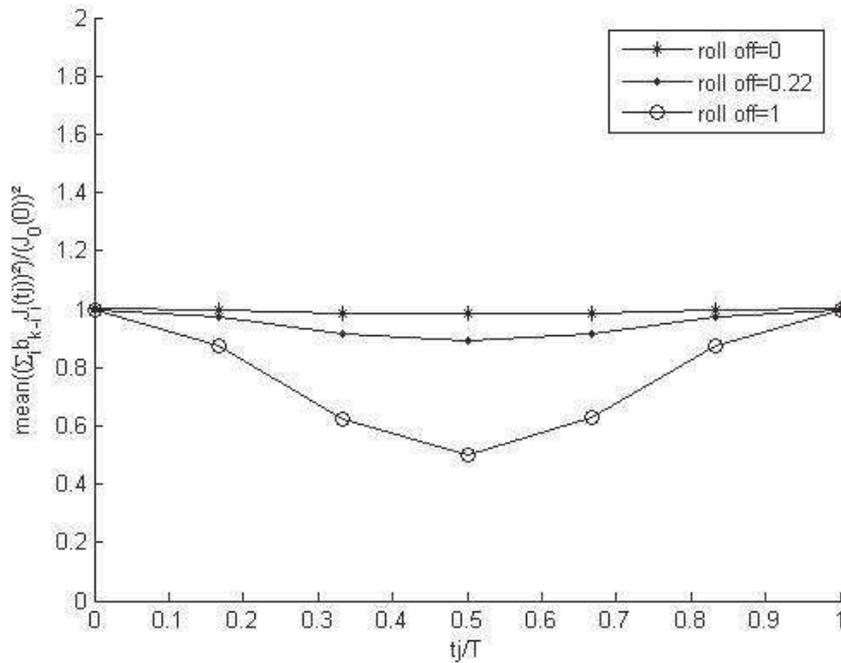


FIGURE 1.13 – Influence de décalage temporel sur la puissance de brouilleur pour différentes valeurs de roll off.

Afin de montrer l'influence du décalage temporel t_j entre le brouilleur et le signal utile sur les performances de récepteur, nous avons calculé le BER (Monte Carlo avec 100000 tirages pour plus de précision) moyenné sur les phases et les K' symboles avec $\alpha = 0.22$ comme il a été décrit au

début de cette partie.

La figure 1.14 montre, comme il a été prévu par les deux figures précédentes, que le BER est maximal quand le brouilleur et le signal utile sont synchronisés. En plus, on remarque que pour des faibles valeurs de dérive de fréquence ($\Delta f_s T = 5 \cdot 10^{-4}$ ou $\Delta f_j T = 5 \cdot 10^{-4}$), la dégradation de BER est faible et plus importante dans le cas d'une dérive sur le brouilleur.

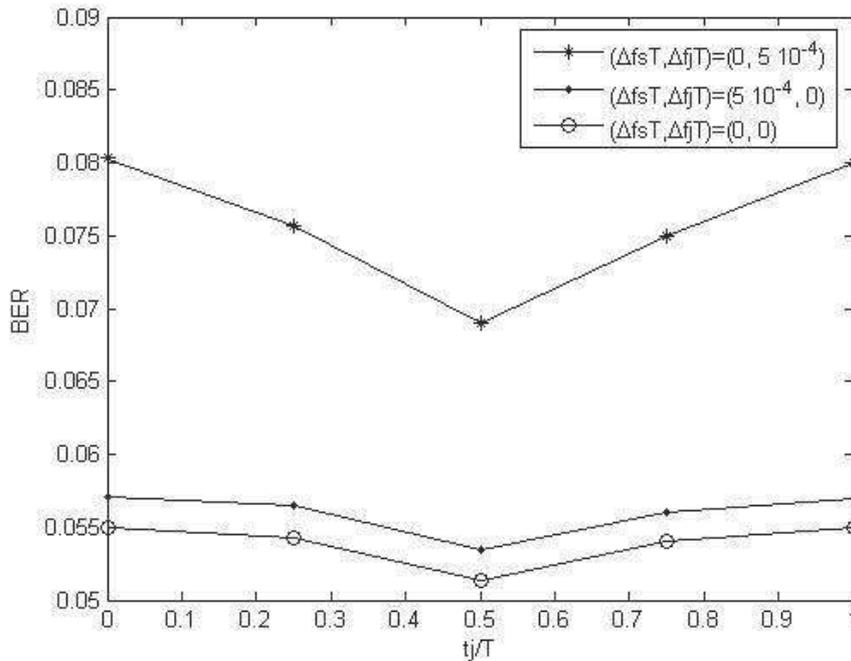


FIGURE 1.14 – Variation de BER en fonction de décalage temporel pour différentes valeurs de dérives de fréquence.

1.5.2 Récepteur MAIC

Ce paragraphe présente une étude de la sensibilité du récepteur MAIC à la présence de résidus de porteuse en fonction de nombre de capteurs constituant le réseau.

La figure 1.15 montre la variation de BER à la sortie de récepteur en fonction de la dérive de la porteuse normalisée de signal utile pour différents nombres de capteurs (1, 2, 4), la dérive de brouilleur étant nulle. Naturellement, les performances s'améliorent quand le nombre de capteurs augmente. Par contre, nous constatons que la sensibilité à la présence de dérive de fréquence du signal utile augmente avec l'augmentation du nombre de capteurs. L'allure des courbes montre également une croissance de BER en augmentant la valeur de résidu de fréquence du SOI. Le BER atteint la valeur de saturation (0, 5) à partir d'une valeur de résidu de fréquence normalisée égale à $6 \cdot 10^{-3}$.

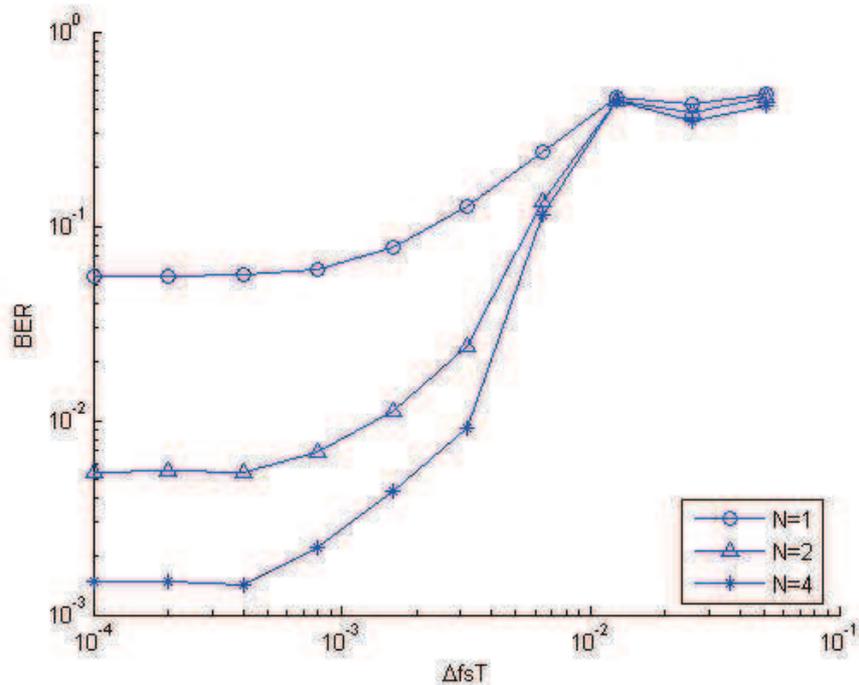


FIGURE 1.15 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du SOI pour différentes valeurs de nombre de capteurs.

La figure 1.16 montre la variation du BER en fonction de la dérive de la porteuse normalisée de brouilleur simulé pour différents nombres de capteurs (1, 2, 4) avec une dérive de signal utile nulle. Les performances du récepteur s’améliorent aussi naturellement en augmentant le nombre de capteurs. Nous constatons que la sensibilité à la présence de dérive de fréquence du brouilleur se détériore aussi avec l’augmentation du nombre de capteurs. Cette figure montre également une croissance de BER en augmentant la valeur de résidu de fréquence de brouilleur jusqu’au $3 \cdot 10^{-3}$ environ. A partir de cette valeur le récepteur rejette le brouilleur. En effet, contrairement au cas de présence de dérive de fréquence du SOI, les courbes présentées dans la figure 1.16 n’atteignent pas la valeur 0,5. En plus, leurs valeurs de saturations sont inférieures à 0,5 et la valeur de saturation diminue en augmentant le nombre de capteurs. Ainsi, que plus le nombre de capteurs est important plus la rejection de brouilleur est rapide.

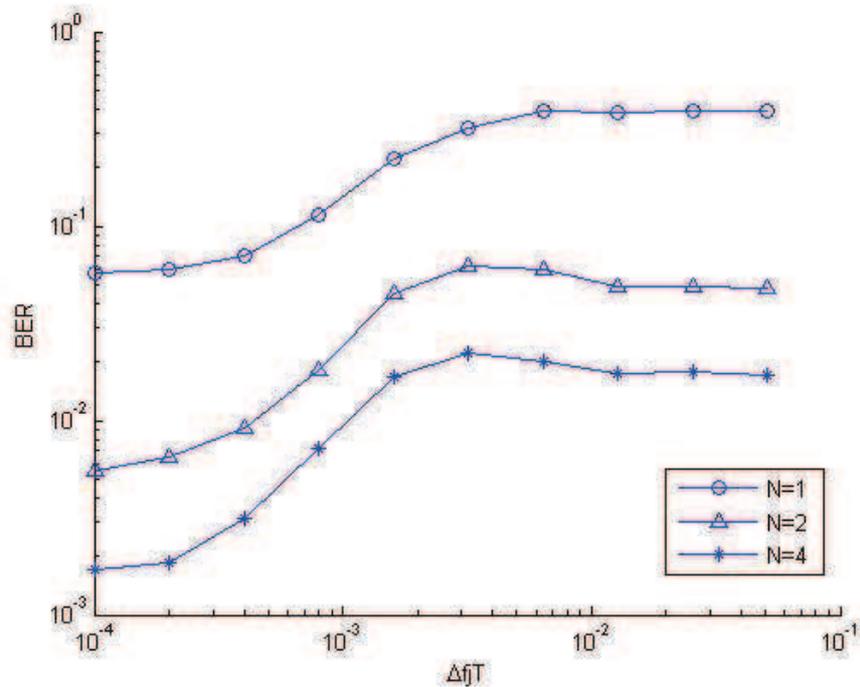


FIGURE 1.16 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs de nombre de capteurs.

1.5.3 Récepteur SAIC

Cette partie est consacrée à l'étude du cas mono-capteur (SAIC). On commence par présenter les performances du récepteur SAIC pour les valeurs de puissance par défaut (SNR= 10dB et INR= 20dB). Les figures 1.17 et 1.18 montrent les variations du BER à la sortie de récepteur en fonction des résidus de porteuse respectivement de l'utile et de brouilleur.

La comparaison entre les deux figures montre que les performances se dégradent plus vite dans le cas d'une augmentation de la dérive de brouilleur que de celui de SOI. Ceci permet de conclure que la correction de la fréquence de brouilleur s'avère plus efficace que celle de l'utile.

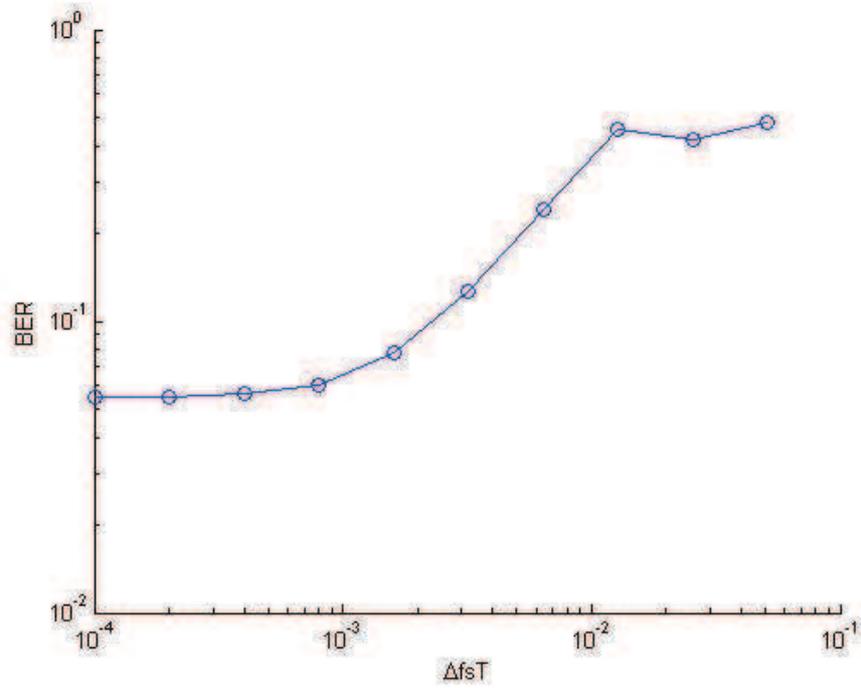


FIGURE 1.17 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI dans le cas du récepteur SAIC.

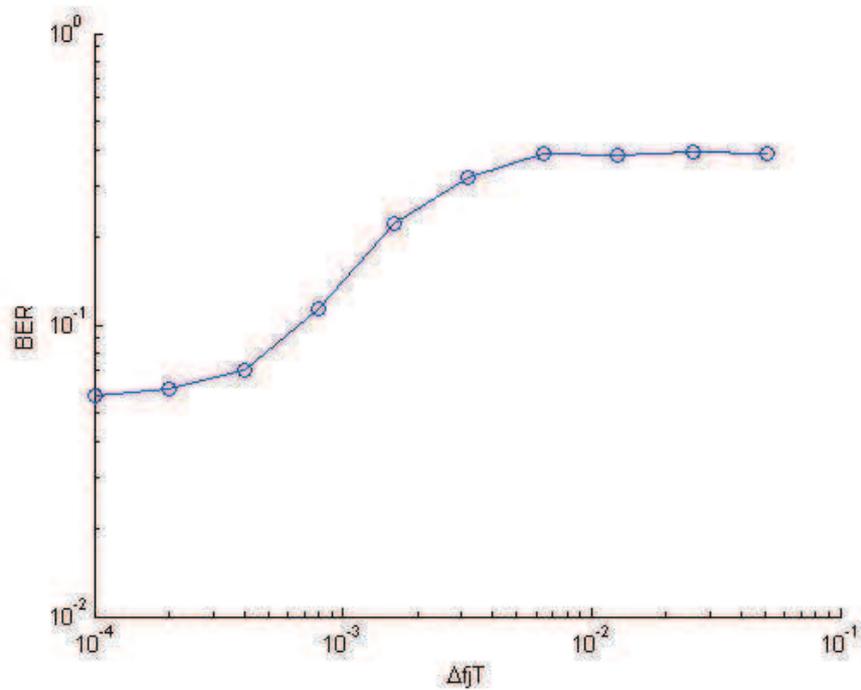


FIGURE 1.18 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur dans le cas du récepteur SAIC.

Il est à mentionner que ces courbes sont comparables à celles obtenues dans le cas d'un filtrage

de mise en forme de type NRZ.

Une étude de l'influence de la puissance du signal utile sur les performance est présentée par les figures 1.19 et 1.20. Les performances s'améliorent aussi naturellement en fonction de la puissance du signal utile. Mais nous constatons que la sensibilité augmente quand la puissance du signal utile augmente. En effet, nous remarquons des grandes différences de sensibilité entre les différentes valeurs de SNR d'entrée.

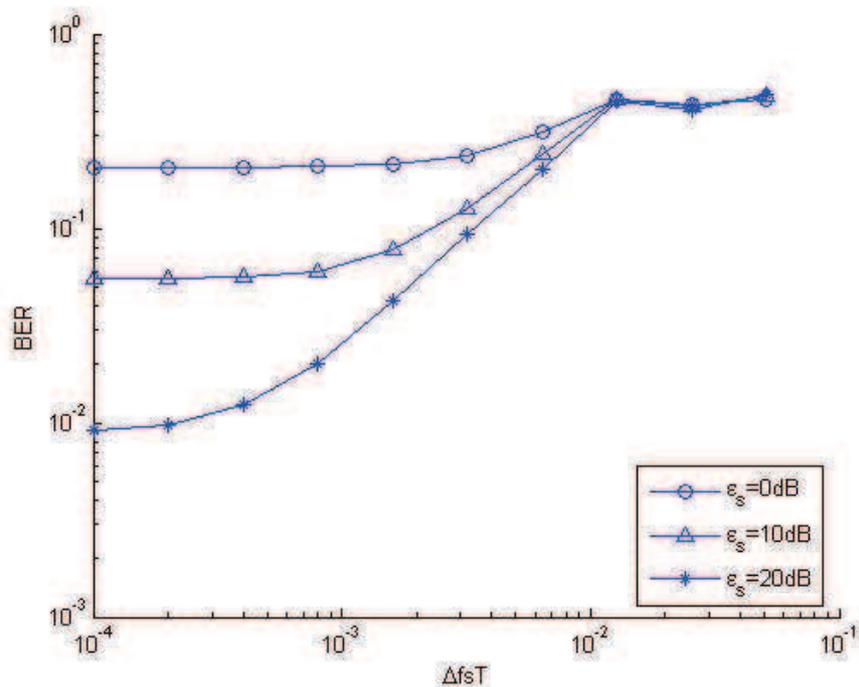


FIGURE 1.19 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI pour différentes valeurs du SNR.

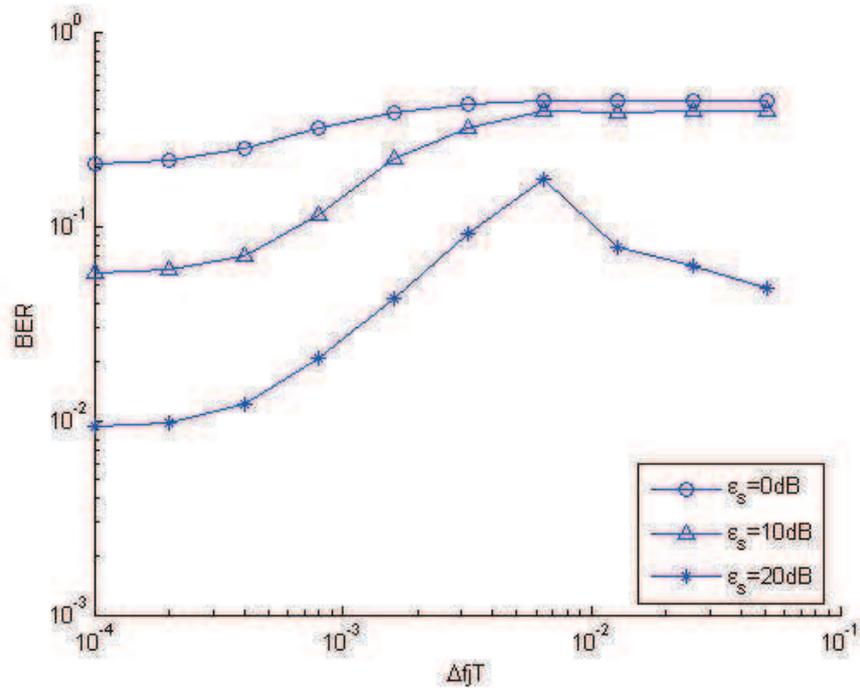


FIGURE 1.20 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs du SNR.

Une étude similaire sur l'influence de la puissance du brouilleur est présentée par les figures 1.21 et 1.22. Les performances se dégradent naturellement en fonction de la puissance du brouilleur. Cependant, la sensibilité augmente quand la puissance du brouilleur croît.

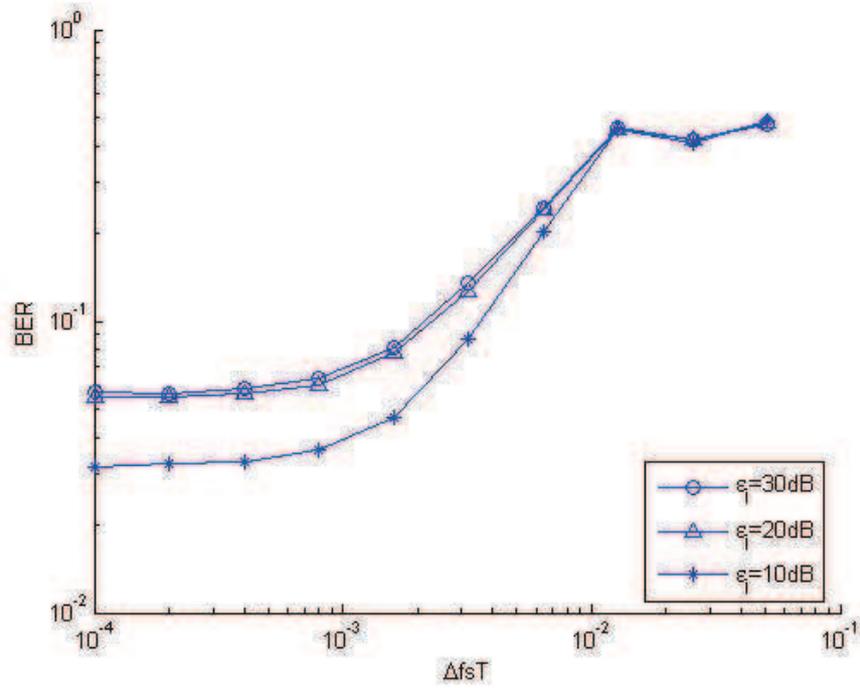


FIGURE 1.21 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de SOI pour différentes valeurs de l'INR.

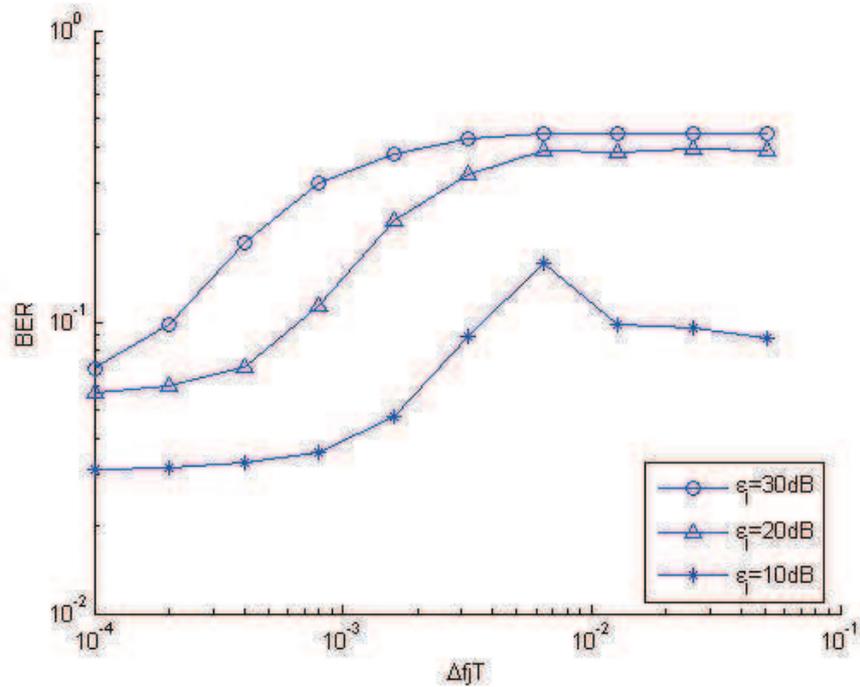


FIGURE 1.22 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de brouilleur pour différentes valeurs de l'INR.

On constate que le récepteur SAIC est plus sensible à la variation de la dérive de fréquence du

brouilleur qu'à celle du signal utile pour $\varepsilon_j \geq \varepsilon_s$. Ceci privilégie la correction de résidu de porteuse du brouilleur avant celui du signal utile. Contrairement à la sensibilité par rapport au résidu de porteuse du signal utile, la sensibilité par rapport au résidu de porteuse du brouilleur est fortement liée à ε_j . Ceci est similaire au cas NRZ.

Plus précisément, on note une augmentation de BER de 10% pour une variation de $\Delta f_j T = 3 \cdot 10^{-4}$ ou pour une variation de $\Delta f_s T = 8 \cdot 10^{-4}$, i.e., 80Hz ou 215Hz respectivement pour le standard GSM ($T = 1/270 \text{ ms}$). On note que pour $\varepsilon_j = 0\text{dB}$ et $\varepsilon_j = 30\text{dB}$ la variation $\Delta f_j T$ devient $5 \cdot 10^{-4}$ et $1.2 \cdot 10^{-4}$ respectivement, tandis que celle de la dérive du signal utile devient $1.5 \cdot 10^{-4}$ pour la première valeur et reste inchangée pour la deuxième (pour $\varepsilon_j \gg 1$), comme pour le cas NRZ.

Pour plus de précision, les tables 1.3 et 1.4 ont été réalisées dans les mêmes conditions que les tables 1a et 1b mais pour une impulsion de type racine de cosinus surrelevé avec des tirages Monte Carlo (100000 tirages).

$\varepsilon_j(\text{dB})$	$\Delta f_s T$	$v_s(\text{km/H})$		$\Delta f_j T$	$v_j(\text{km/H})$	
		900	1800		900	1800
0	$4 \cdot 10^{-4}$	65	32	$1.2 \cdot 10^{-3}$	194	98
10	$8 \cdot 10^{-4}$	130	75	$7.5 \cdot 10^{-4}$	120	60
20	$8 \cdot 10^{-4}$	130	75	$3 \cdot 10^{-4}$	50	25
30	$8 \cdot 10^{-4}$	130	75	$1.5 \cdot 10^{-4}$	24	12

TABLE 1.3 – Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion en "racine de cosinus surrelevé" avec $t_j = 0$.

$\varepsilon_j(\text{dB})$	$\Delta f_s T$	$v_s(\text{km/H})$		$\Delta f_j T$	$v_j(\text{km/H})$	
		900	1800		900	1800
0	$7 \cdot 10^{-4}$	114	57	$1.4 \cdot 10^{-3}$	226	113
10	$1.2 \cdot 10^{-3}$	194	98	10^{-3}	162	81
20	$1.2 \cdot 10^{-3}$	194	98	$4 \cdot 10^{-4}$	65	32
30	$1.2 \cdot 10^{-3}$	194	98	$1.5 \cdot 10^{-4}$	24	12

TABLE 1.4 – Sensibilité (accroissement de BER de 10%) de récepteur SAIC pour une impulsion en "racine de cosinus surrelevé" moyennée sur le t_j .

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats concernant le comportement et la sensibilité de récepteur WL MMSE avec séquence d'apprentissage pour la démodulation d'un signal utile sous la forme d'un burst GSM (où la modulation GMSK a été remplacée par la modulation BPSK) corrompu par des interférences inter-symboles et un brouilleur co-canal, en présence de résidus de porteuse, ont été présentés. Face à l'absence d'études s'intéressant aux performances analytiques des récepteurs WL MMSE dans ces conditions dans la littérature, l'étude présentée dans ce chapitre permet de préciser

le comportement et les performances de la technologie prometteuse de SAIC/MAIC en présence des résidus de porteuse sur le signal utile et le brouilleur.

Nous avons particulièrement effectué une analyse de performance des techniques SAIC et MAIC en présence des résidus de porteuse sur le signal utile et le brouilleur, en fonction du SINR et du BER pour des signaux rectiligne (utile et brouilleur) modulés en BPSK. Cette analyse a abouti à l'obtention d'expressions analytiques interprétables pour le cas de SAIC avec un filtrage de mise en forme de type NRZ. Ainsi des expressions analytiques simples ont été obtenues et analysées. Nous avons prouvé en particulier que dans le cas d'un fort brouilleur les performances sont meilleures dans le cas d'absence d'un résidu de porteuse sur le brouilleur que dans le cas d'absence de résidus de porteuse sur l'utile, ce qui privilégie la correction de résidus de porteuse sur du brouilleur en priorité. Des illustrations numériques ont été réalisées en prenant comme paramètres ceux du standard GSM, mais avec des modulations BPSK.

Cette étude sera généralisée pour les modulations MSK and GMSK dans le chapitre 2, vu que le SAIC est en voie de standardisation pour le GSM et les réseaux cellulaires.

Chapitre 2

Sensibilité des récepteurs SAIC et MAIC aux résidus de porteuse pour des modulations linéaires quasi-rectilignes (MSK, GMSK) avec filtrage spatio-temporel

Sommaire

2.1	Introduction	71
2.2	Modèle d'observation et statistiques	72
2.3	Illustrations numériques	77
2.4	Conclusion	82

2.1 Introduction

La modulation Minimum-shift keying (MSK) est une modulation numérique par déplacement de fréquence à phase continue d'indice $1/2$. Avec le principe du OQPSK, la MSK est encodée par des bits alternant entre des composantes en quadrature. La modulation MSK encode chaque bit sur une demi sinusoïde. On obtient ainsi un signal de module constant, ce qui diminue les problèmes de distorsions non linéaires. La MSK est intéressante surtout dans le cas des canaux qui agissent sur l'amplitude.

En télécommunications numériques, la Gaussian minimum shift keying (GMSK) est une forme de modulation FSK à phase continue. Elle est similaire au MSK standard, cependant le flux de données numériques est tout d'abord mis en forme par un filtre gaussien avant d'être appliqué au modulateur

de fréquence. Cette étape a l'avantage de réduire la puissance de la bande latérale, qui à son tour réduit les interférences hors bande avec les canaux de fréquences adjacentes. Hélas, le filtre gaussien augmente également la mémoire de modulation dans le système et entraîne des interférences inter-symboles, rendant plus difficile encore le décodage des différentes données transmises et nécessitant des algorithmes d'égalisation des canaux plus complexes au niveau du récepteur.

La modulation MSK est une modulation linéaire, la modulation GMSK peut être approximée par une modulation linéaire [31]. Dans ces conditions, l'enveloppe complexe d'un signal modulé en MSK ou GMSK a la forme :

$$s(t) \approx \sum_n a_n i^n v(t - nT) \quad (2.1.1)$$

Cette approximation devient une égalité dans le cas MSK. Les $a_n \in \{-1, 1\}$ correspondent aux symboles transmis, T est la durée d'un symbole et $v(t)$ correspond au filtre de mise en forme ayant pour expression dans le cas MSK :

$$v(t) = \begin{cases} \cos(\pi t/2T) & \text{si } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Une approximation de la modulation GMSK est calculée dans [47], il s'agit de la meilleure approximation linéaire de GMSK au sens du moindre carré (voir Annexe B). L'opération de dérotation présentée dans [31] consiste à multiplier le signal $s(t)$ par $i^{-t/T}$. L'enveloppe complexe de signal MSK déroté ou de GMSK linéarisée prend ainsi la forme suivante :

$$s_d(t) \triangleq i^{-t/T} s(t) \approx \sum_n a_n v_d(t - nT), \quad (2.1.3)$$

avec $v_d(t) \triangleq i^{-t/T} v(t)$ est le filtre de mise en forme correspondant au signal MSK déroté ou de GMSK linéarisée. D'après (2.1.3), on déduit que l'enveloppe complexe d'un signal linéarisé prend la forme de celui d'une modulation BPSK mais avec quelques différences. En effet, $v_d(t)$ n'est pas un filtre en demi-Nyquist ce qui fait apparaître des interférences inter-symboles après l'opération de filtrage adapté. En plus, $v_d(t)$ n'est pas une fonction réelle. Ainsi le signal MSK déroté peut être considéré comme un signal BPSK filtré par un filtre complexe non adapté. Ceci doit avoir des conséquences sur les performances de récepteur WL et la qualité de la réception. Ainsi la structure de récepteur doit être adaptée à ces nouvelles conditions, ceci sera discuté dans la sous-section suivante.

2.2 Modèle d'observation et statistiques

Considérons la réception d'un signal utile avec un interféreur ayant la même modulation (MSK ou GMSK linéarisée). Après l'opération de dérotation, le vecteur des amplitudes complexes des signaux à la sortie du réseau de capteurs après démodulation définit par (1.2.3) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}_d(t) = \mu_s s_d(t) e^{i2\pi\Delta f_s t} \mathbf{h}_s + \mu_j j_d(t) e^{i2\pi\Delta f_j t} \mathbf{h}_j + \mathbf{n}_d(t) \quad (2.2.4)$$

avec $\mathbf{n}_d(t) = i^{-t/T} \mathbf{n}(t)$. L'enveloppe complexe du signal utile et du brouilleur ont les formes suivantes respectivement :

$$s_d(t) \triangleq i^{-t/T} s(t) = \sum_n a_n v_d(t - nT), \quad (2.2.5)$$

et

$$j_d(t) \triangleq i^{-t/T} j(t) = \sum_n b_n i^{-t_j/T} v_d(t - nT - t_j), \quad (2.2.6)$$

avec $\mathbf{v}_d(t) = i^{-t/T} \mathbf{v}(t)$. Le vecteur d'observation échantillonné $\mathbf{x}_{df}(kT) \triangleq \mathbf{x}_d(t) * f(t)/_{t=kT}$ obtenu soit après un filtrage adapté ($f(t) = v_d^*(-t)$) soit par un simple filtrage de bande ($f(t) = \delta(t)$), est encore défini par (1.2.4) où :

$$I_n \triangleq \int f(\tau) v_d(nT - \tau) e^{-i2\pi\Delta f_s \tau} d\tau, \quad (2.2.7)$$

$$J_n(t_j) \triangleq i^{-t_j/T} \int f(\tau) v_d(nT - \tau - t_j) e^{i2\pi\Delta f_j \tau} d\tau, \quad (2.2.8)$$

et $\mathbf{n}_v(kT)$ est remplacé dans cette partie par $\mathbf{n}_{df}(kT) \triangleq \mathbf{n}_d(t) * f(t)/_{t=kT}$. Le modèle étendu est donné par le vecteur :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{df}(kT) = \mu_s a_k \tilde{\mathbf{h}}_s(k, k) + \mu_s \sum_{n \neq k} a_n \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) + \mu_j \sum_n b_n \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) + \tilde{\mathbf{n}}_{df}(kT), \quad (2.2.9)$$

où :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{h}}_s(k, n) \triangleq [e^{i2\pi\Delta f_s kT} I_{k-n} \mathbf{h}_s^T, e^{-i2\pi\Delta f_s kT} I_{k-n}^* \mathbf{h}_s^H]^T \\ \tilde{\mathbf{h}}_j(k, n) \triangleq [e^{i2\pi\Delta f_j kT} J_{k-n}(t_j) \mathbf{h}_j^T, e^{-i2\pi\Delta f_j kT} J_{k-n}^*(t_j) \mathbf{h}_j^H]^T \\ \tilde{\mathbf{n}}_{df}(kT) \triangleq [\mathbf{n}_{df}(kT)^T, \mathbf{n}_{df}(kT)^H]^T. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

2.2.1 Récepteur WL

Le filtre WL qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre la sortie $y(kT) = \tilde{\omega}^H \tilde{\mathbf{x}}_{df}(kT)$ et le symbole a_k défini par (1.3.13) est maintenant donné par :

$$\tilde{\omega}_{MMSE} \triangleq \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df}}^{-1}(K) \hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df} a}(K), \quad (2.2.11)$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df}}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_{df}(kT) \tilde{\mathbf{x}}_{df}^H(kT),$$

et

$$\hat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df}, a_k}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_{df}(kT) a_k.$$

Les modulations MSK et GMSK peuvent être considérées comme des modulations BPSK [47],[48], avec un filtre de mise en forme différent. Le support temporel de ce dernier est de deux durées symboles pour la MSK et approximativement de quatre durées symbole pour la GMSK.

Il a été montré dans [7] qu'une interférence dérotée (MSK ou GMSK) génère deux interférences statistiquement indépendantes dans le vecteur d'observation étendu. Il faut ainsi deux degrés de liberté pour pouvoir traiter chaque interférence. Le nombre de capteurs dans le réseau doit être

ainsi, strictement supérieur au nombre d'interféreurs. Ceci empêche l'utilisation de la technologie SAIC avec les modulations MSK et GMSK et cela même avec un seul interféreur. [7] propose l'utilisation des filtres WL ST (spatio-temporel) pour dépasser les limites des filtres WL spatiaux. La sortie d'un filtre WL ST $\widehat{\omega}_{st}$ de longueur l a la forme suivante :

$$y(kT) \triangleq \sum_i \widehat{\omega}_i^H \tilde{\mathbf{x}}_{df}((k-i)T') \triangleq \widehat{\omega}_{st}^H \tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT'), \quad (2.2.12)$$

avec $T' = \frac{av}{l+1}T$, où l est la taille du filtre ST, vT désigne le support temporel de signal MSK ou GMSK et où avT est l'étalement temporel de la réponse impulsionnelle après le filtrage réception. a prend alors la valeur 2 dans le cas d'un filtrage adapté et 1 pour le filtrage de bande.

Les vecteurs $\widehat{\omega}_{st}^H$ et $\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT')$ de taille $(2Nl \times 1)$ sont définis par

$$\widehat{\omega}_{st} = [\widehat{\omega}_{-(l-1)/2}^T, \dots, \widehat{\omega}_{(l-1)/2}^T]^T$$

et

$$\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT') = [\tilde{\mathbf{x}}_{df}((k + (l-1)/2)T'), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{df}((k - (l-1)/2)T')]^T$$

pour l impair et par

$$\widehat{\omega}_{st} = [\widehat{\omega}_{-l/2}^T, \dots, \widehat{\omega}_{l/2-1}^T]^T$$

et

$$\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT') = [\tilde{\mathbf{x}}_{df}(k + l/2)T'), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{df}((k - l/2 + 1)T')]^T$$

pour l pair.

Un estimé de ce filtre est obtenu à l'aide de la séquence d'apprentissage $(a_k)_{1,\dots,K}$

$$\widehat{\omega}_{st} \triangleq \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}}^{-1}(K) \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}a}(K), \quad (2.2.13)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df,st}}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT') \tilde{\mathbf{x}}_{df,st}^H(kT')$$

et

$$\widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{df,st},a_k}(K) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}_{df,st}(kT') a_k.$$

Il a été montré dans [7] (avec une démarche de degrés de liberté) qu'une condition suffisante permettant l'implémentation de SAIC pour la GMSK ou la MSK dérotée consiste à utiliser un récepteur WL de taille l vérifiant la condition $l > 2v - 1$. Ainsi, il faut au moins une taille de 3 pour la réception les signaux MSK et 7 la GMSK. Nous allons vérifier analytiquement cette proposition dans la section suivante.

2.2.2 Analyse théorique de performance

2.2.2.1 Filtrage de bande de largeur importante ($f(t) \simeq \delta(t)$)

Dans le cas d'utilisation d'un filtrage reception adapté, l'étalement temporel d'une impulsion $v_d(t) * v_d^*(t)$ symbole est de 4 pour la MSK et de 8 pour la GMSK. La taille de cette impulsion a un impact direct sur la taille du filtre ST et par conséquent sur la complexité de calcul. Afin de réduire cette complexité, nous avons pensé à réduire la taille de cette impulsion en remplaçant le filtre adapté par un filtre de bande. Deux cas sont à distinguer : en présence et en absence de synchronisation temporelle entre le brouilleur et le signal utile.

Cas particulier : synchronisation entre le brouilleur et le signal utile ($t_j = 0$) :

Dans le cas MSK, I_n et $J_n(t_j)$ définis par (2.2.7) et (2.2.8) seront donnés par :

$$\begin{aligned} I_0 &= v_d(0) = v(0) = 1 \\ I_n &= v_d(nT)e^{-i2\pi\Delta f_s nT} = 0, \text{ pour } n \neq 0 \\ J_0(t_j) &= v_d(0) = v(0) = 1 \\ J_n(t_j) &= v_d(nT)e^{-i2\pi\Delta f_j nT} = 0, \text{ pour } n \neq 0. \end{aligned}$$

Le signal en sortie de filtre de bande s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{x}_{df}(kT) = \mu_s a_k I_0 e^{i2\pi\Delta f_s kT} \mathbf{h}_s + \mu_j b_k J_0(t_j) e^{i2\pi\Delta f_j kT} \mathbf{h}_j + \mathbf{n}_{df}(kT),$$

Ainsi, dans ce cas il n'a pas d'interférence inter-symboles. On retrouve la même situation correspondante au cas d'une modulation BPSK avec filtrage NRZ. Dans ce cas le récepteur SAIC spatial s'avère suffisant.

Cas particulier : absence de synchronisation entre le brouilleur et le signal utile ($t_j \in]0 T[$) :

Dans le cas MSK, I_n et $J_n(t_j)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} I_0 &= v_d(0) = v(0) = 1 \\ I_n &= v_d(nT) = 0, \text{ pour } n \neq 0 \\ J_0(t_j) &= i^{-t_j/T} v_d(-t_j) \neq 0 \\ J_n(t_j) &= i^{-t_j/T} v_d(nT - t_j) = 0, \text{ pour } n \neq 0, 1. \end{aligned}$$

Ainsi, le signal en sortie de filtre de bande s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}_{df}(kT) = \mu_s a_k I_0 e^{i2\pi\Delta f_s kT} \mathbf{h}_s + \mu_j (b_k J_0(t_j) + b_{k-1} J_1(t_j)) e^{i2\pi\Delta f_j kT} \mathbf{h}_j + \mathbf{n}_{df}(kT),$$

Nous constatons la présence d'interférences inter-symboles brouilleurs, d'où la nécessité de filtrage spatio-temporel.

Dans le cas de la modulation GMSK, les deux cas (synchronisation et absence de synchronisation) se résument en :

$$\begin{aligned} I_n &= 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1 \\ J_n(0) &= 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1 \\ J_n(t_j \neq 0) &= 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Ainsi, dans ces deux cas nous avons des interférences inter-symboles du signal utile et du brouilleur. D'où la nécessité de filtrage spatio-temporel.

2.2.3 Filtrage adapté ($f(t) = v_d^*(-t)$)

Aussi, deux cas sont à distinguer : en présence et en absence de synchronisation temporelle entre le brouilleur et le signal utile.

Cas particulier : absence de synchronisation entre le brouilleur et le signal utile ($t_j \neq 0 \in [0 T[)$:

Dans le cas MSK, I_n et $J_n(t_j)$ seront donnés par :

$$\begin{aligned} I_n &= \int v_d^*(-\tau)v_d(nT - \tau)e^{-i2\pi\Delta f_s\tau} d\tau = 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1 \\ J_n(t_j) &= i^{-t_j/T} \int v_d^*(-\tau)v_d(nT - \tau - t_j)e^{i2\pi\Delta f_j\tau} d\tau = 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Cas particulier : synchronisation entre le brouilleur et le signal utile ($t_j = 0$) :

Dans le cas MSK, I_n et $J_n(t_j)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} I_n &= 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1 \\ J_n(0) &= 0, \text{ sauf pour } n = -1, 0, 1. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas, le SAIC spatio-temporel s'avère nécessaire. Dans le cas GMSK, les deux cas (synchronisation et absence de synchronisation) se résument comme suit :

$$\begin{aligned} I_n &= 0, \text{ sauf pour } n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ J_n(0) &= 0, \text{ sauf pour } n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ J_n(t_j \neq 0) &= 0, \text{ sauf pour } n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Dans les deux cas nous avons des interférences inter-symboles du signal utile et du brouilleur. D'où la nécessité de filtrage spatio-temporel. Cette étude sera confirmée par des illustrations numériques dans le paragraphe qui suit.

2.3 Illustrations numériques

La trame utilisée est de longueur utile $K = 57$ symboles précédée par une séquence d'apprentissage de taille $K' = 26$ symboles (structure GSM). La trame est modulée en MSK et GMSK respectivement, échantillonnée au rythme symbole après l'opération de filtrage adapté. Une propagation en espace libre étant supposée, un brouilleur co-canal modulé également en MSK et GMSK respectivement est supposé perturber le signal utile. Le réseau de capteurs est un ULA de N omnidirectionnels capteurs espacés d'une demi longueur d'onde, chacun de l'autre. Les DOA (Direction Of Arrival) de SOI et de brouilleur sont fixés aléatoirement dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le SNR et le INR à l'entrée de récepteur sont fixés aux valeurs suivantes : $SNR = 10dB$ et $INR = 20dB$. Le SER à la sortie de la chaîne de réception est calculé comme la moyenne de 20000 tirages Monte Carlo. Les symboles de SOI et de brouilleur sont tirés aléatoirement à chaque itération. Les phases initiales du SOI et du brouilleur changent également d'une façon aléatoire à chaque tirage tout en étant identiquement distribuées sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2.3.1 Modulation MSK

Nous avons distingué deux cas différents pour le filtrage de mise en forme (filtrage adapté et filtrage de bande). Ce dernier filtre a été introduit à la place du filtre adapté dans le but de réduire l'étalement temporel de l'impulsion symbole et réduire par suite la taille du filtre ST. Les figures 2.1 et 2.2 montrent la variation de BER en fonction de la dérive de fréquence de signal utile et de brouilleur respectivement pour la modulation MSK en utilisant deux types de filtrage (filtrage adapté et filtrage de bande), et pour le filtrage adapté deux tailles différentes ($l = 1$ et $l = 3$) du filtre ST.

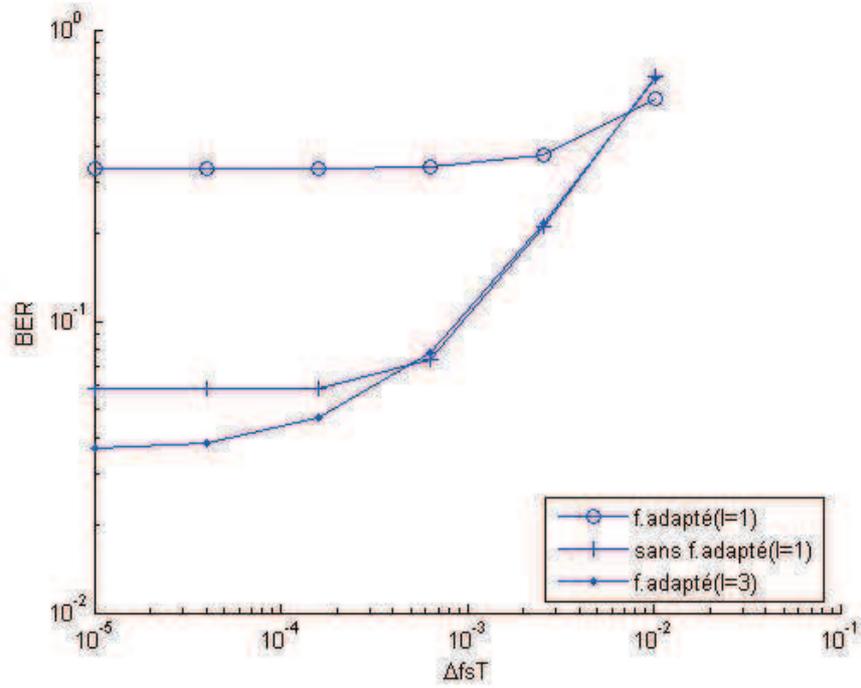


FIGURE 2.1 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation MSK.

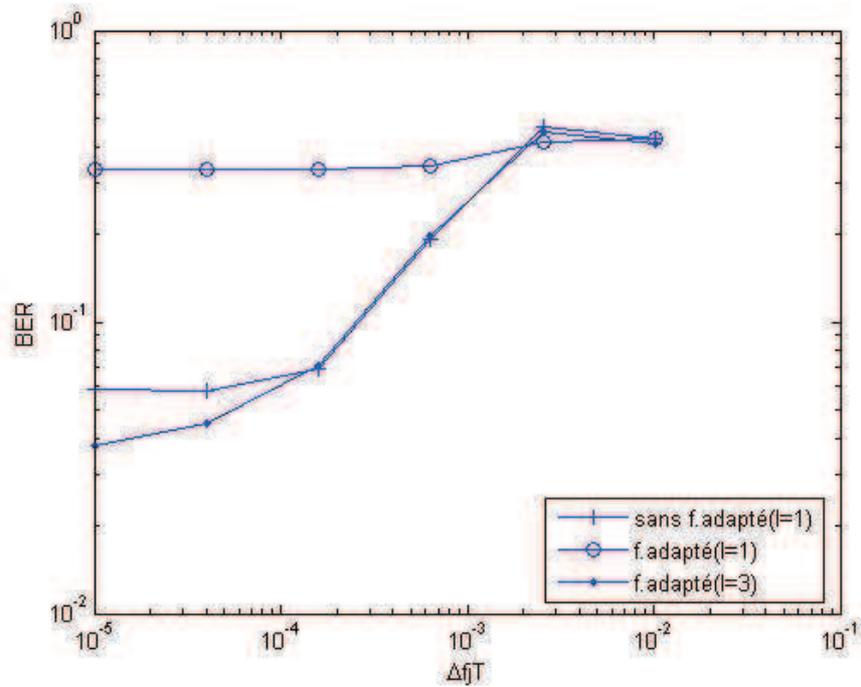


FIGURE 2.2 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation MSK.

Ces figures montre que la taille minimale de filtre ST qui permet de réaliser le SAIC pour une

modulation MSK avec filtrage adapté est de 3. Ceci est en accord avec l'étude théorique proposée dans [7]. Dans le cas de filtrage de bande, nous remarquons que la taille $l = 1$ est suffisante. La comparaison des deux figures 2.1 et 2.2 montre que les conclusions du chapitre 1 concernant le BPSK restent valables pour le cas de la modulation MSK. En effet, le récepteur SAIC est plus sensible au résidu de fréquence du brouilleur qu'au résidu de fréquence du signal utile.

2.3.2 Modulation GMSK

Les figures 2.3 et 2.4 montrent la variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile et du brouilleur respectivement pour la modulation GMSK sans filtrage adapté en utilisant deux tailles différentes ($l = 1$ et $l = 3$) de filtre ST.

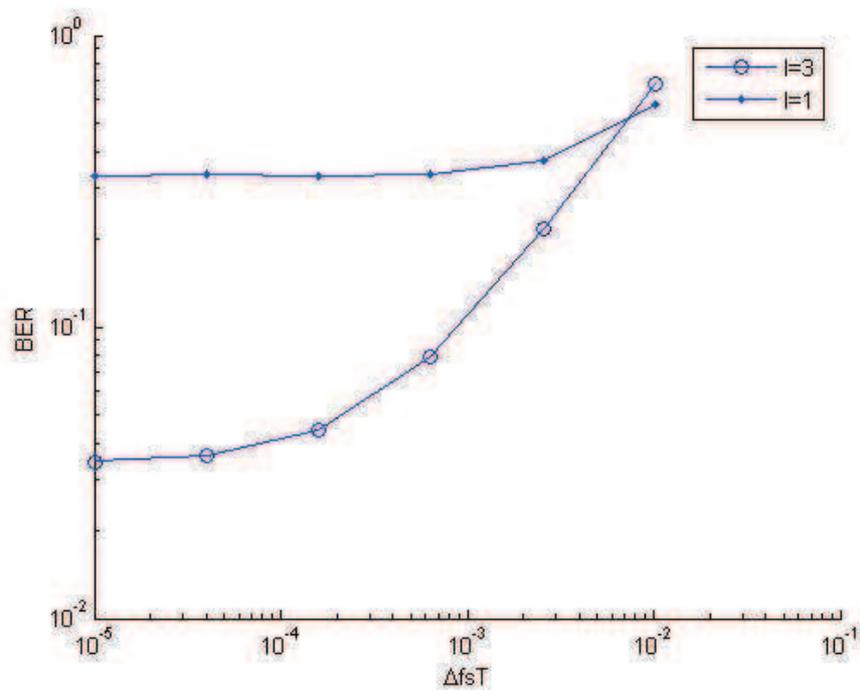


FIGURE 2.3 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation GMSK sans filtrage adapté.

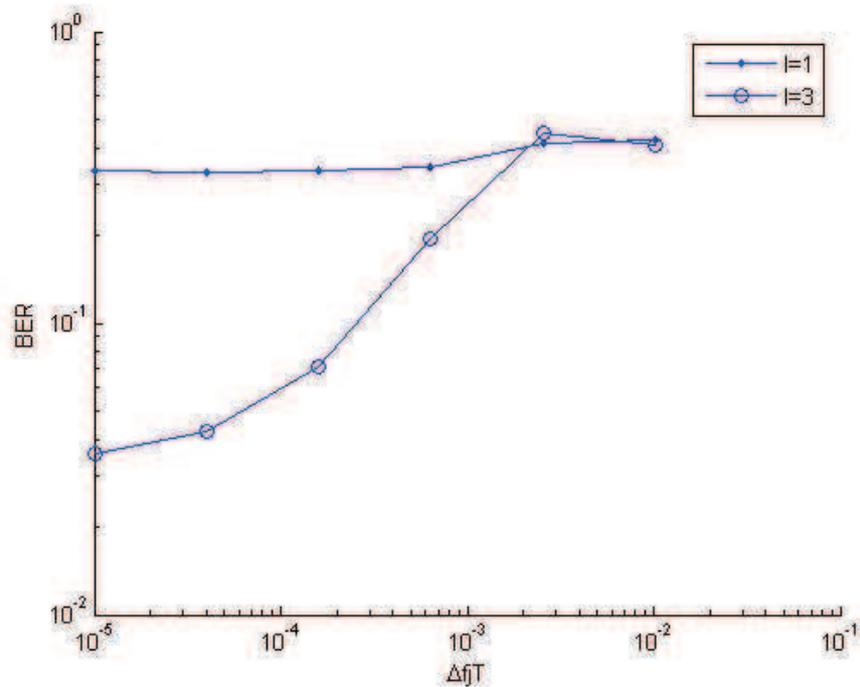


FIGURE 2.4 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation GMSK sans filtrage adapté.

Ces figures montrent que la taille minimale de filtre ST qui permet de réaliser le SAIC pour une modulation GMSK sans filtrage adapté est de 3. La comparaison des deux figures 2.3 et 2.4 montre que, comme pour le cas des modulations BPSK et MSK, le récepteur SAIC est plus sensible au résidu de fréquence du brouilleur qu'au résidu de fréquence du signal utile. Les figures 2.5 et 2.6 montrent la variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile et du brouilleur respectivement pour la modulation GMSK avec filtrage adapté en utilisant deux tailles différentes ($l = 3, 5, 7$) pour le filtre ST.

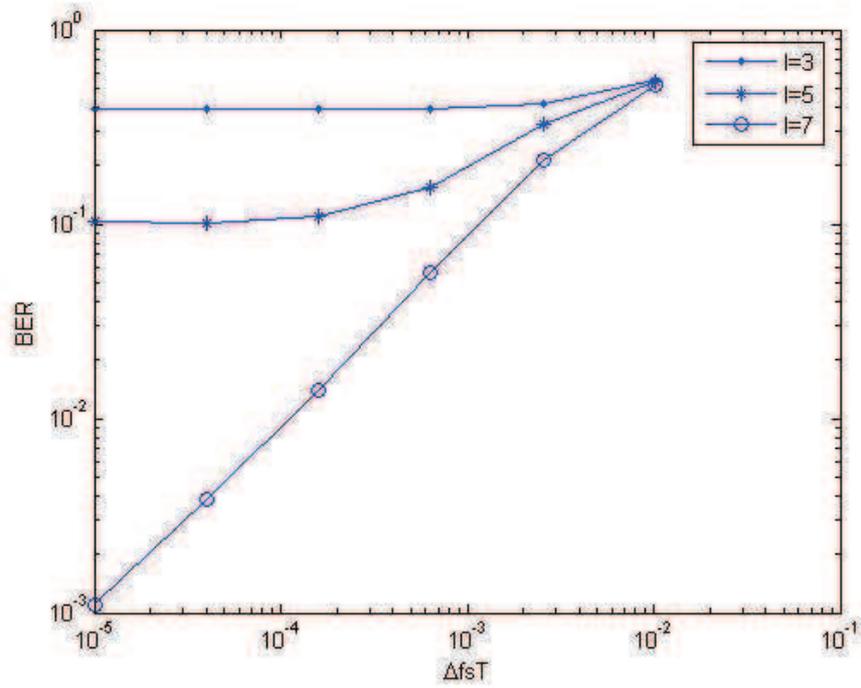


FIGURE 2.5 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du signal utile pour la modulation GMSK avec filtrage adapté.

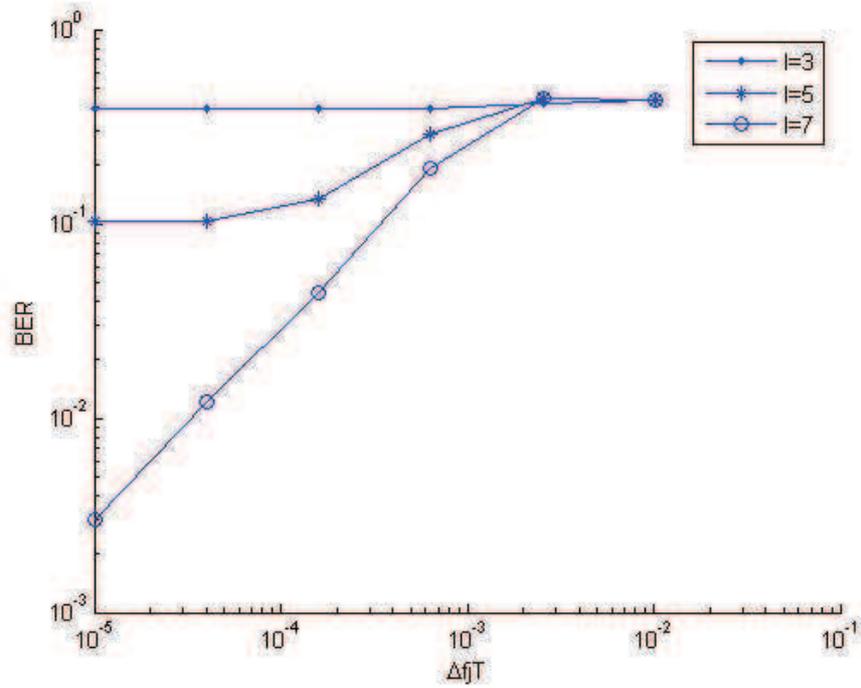


FIGURE 2.6 – Variation de BER en fonction de la dérive de fréquence du brouilleur pour la modulation GMSK avec filtrage adapté.

Ces figures montrent que la taille minimale de filtre ST qui permet de réaliser le récepteur SAIC pour une modulation GMSK avec filtrage adapté est de 7. La comparaison de ces figures avec 2.3 et 2.4 montre que l'utilisation d'un filtre de mise en forme de bande permet d'améliorer les performances de récepteur SAIC pour une modulation GMSK, permettant ainsi de réduire la taille de filtre ST de 7 à 3 ce qui présente un gain important en complexité. Comme pour le cas sans filtrage adapté, le récepteur SAIC est plus sensible au résidu de fréquence du brouilleur qu'au résidu de fréquence du signal utile. Les figures relatives aux modulations MSK et GMSK montrent que cette différence de sensibilité devient plus importante en augmentant la taille l du filtre ST.

2.4 Conclusion

L'application du récepteur SAIC aux modulations MSK et GMSK s'est accompagnée de la mise en oeuvre de filtrage spatio-temporel. Nous avons étudié l'impact de la taille de filtre spatio-temporel sur les performances. L'étude de l'impact de choix de filtre de mise en forme (adapté ou de bande) a été analysée théoriquement et validée par simulations.

Les conclusions à tirer de cette partie est que le récepteur SAIC reste plus sensible au résidu de fréquence du brouilleur qu'au résidu de fréquence du signal utile pour les modulation MSK et GMSK et que cette différence de sensibilité devient plus importante en augmentant la taille de filtre ST. Aussi, l'utilisation d'un filtre de mise en forme de bande permet d'améliorer les performances du récepteur SAIC par rapport au filtrage adapté, permettant ainsi de réduire la taille de récepteur ST de 7 à 3 pour la modulation GMSK et de 3 à 1 pour la modulation MSK.

Deuxième partie

Récepteurs MLSE

Chapitre 3

Récepteurs à maximum de vraisemblance de séquence mono entrée multi sortie (SIMO-MLSE) sous hypothèse d'un bruit stationnaire gaussien éventuellement noncirculaire

Sommaire

3.1	Introduction	85
3.2	Problème de détection	87
3.3	Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire	89
3.4	Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne	96
3.5	Conclusion	103

3.1 Introduction

Les communications radio-mobiles telles que le GSM sont sensibles aux interférences co-canal. Ces brouillages sont dus aux utilisateurs dans les autres cellules et aux autres utilisateurs dans la cellule elle-même dans certains contextes particuliers. L'utilisation des antennes multi-capteurs constitue une méthode efficace pour combattre ce type d'interférences. Un autre type d'interférence qui a mérité beaucoup d'attention est l'interférence inter-symboles. La présence d'interférences entre symboles est caractéristique d'une mémoire dans le signal. L'interférence inter-symboles caractérise surtout les modulations de type PAM (pulse amplitude modulation) et QAM

(quadrature amplitude modulation).

On se propose, dans ce chapitre, de développer le récepteur spatio-temporel qui permet de traiter les deux types d'interférences précédemment évoquées (les interférences inter-symboles et le brouillage). Le meilleur récepteur pour la minimisation de BER est le MLSE (maximum likelihood sequence estimation). Ce récepteur a été appliqué aux modulations PAM dans le contexte d'un bruit gaussien stationnaire blanc [17]. Il a été analysé ensuite dans un cadre plus étendu de multi-voie avec bruit gaussien, stationnaire et circulaire (voir par exemple [49], [32], [4] et [51]). A notre connaissance, très peu de travaux concernant des récepteurs SIMO MLSE en présence d'interférences non circulaires ont été publiés dans la littérature. Parmi ceux-ci, [7] a dérivé le récepteur MLSE dans le contexte de symboles SOI réels en absence d'interférence intersymbole (ISI). Notons que quelques travaux ont pris en compte la noncircularité du second-ordre potentielle des interférences pour proposer des récepteurs sous optimaux (voir par exemple [37]. D'autres extensions aux signaux cyclo-stationnaires sont apparues plus tard telles que [18] qui a proposé un récepteur MLSE sous optimal sous l'hypothèse d'une interférence cyclostationnaire et rectiligne.

Le but de ce chapitre est d'établir la structure du récepteur SIMO MLSE dans le cadre plus général de bruit gaussien stationnaire coloré non nécessairement circulaire. Pour cela, nous nous placerons dans le cadre général de la détection d'une forme d'onde déterministe bruitée par un bruit gaussien centré. Grâce à une extension au cas non circulaire du théorème de factorisation spectrale que nous avons démontrée, nous dériverons le détecteur ML dans ce cadre. Appliqué à la détection d'une suite fini de symboles de modulations QAM, PAM et quasi rectilignes, nous établirons la structure du récepteur SIMO MLSE. Tous ces récepteurs seront constitués d'un filtre multidimensionnel widely linear (WL) adapté (dans un sens que nous préciserons), d'un échantillonneur au rythme symbole et d'une minimisation d'une métrique qui peut être mise en oeuvre par l'algorithme de Viterbi.

Notons que cette hypothèse de gaussianité n'est pas satisfaite dans les applications de radio communications mais nous montrerons au chapitre 5 que les récepteurs MLSE obtenus sous cette hypothèse auront de meilleures performances que ceux dérivés sous l'hypothèse classique de bruit gaussien circulaire, lorsque le bruit est non circulaire.

Notons également qu'en radio communications, les interféreurs sont cyclo-stationnaires et donc non stationnaires. Cette hypothèse sera étudiée dans le chapitre 4.

Le problème d'intérêt dans ce chapitre peut se diviser en trois parties : nous nous intéressons d'abord au problème de détection dans le cadre général de la détection d'une forme d'onde, ensuite

à la détermination de la structure de récepteur pour des modulations linéaires à symboles complexes et à symboles réels puis pour des modulations linéaires quasi rectilignes dans un contexte multi-capteurs avec un bruit gaussien stationnaire coloré éventuellement non circulaire.

3.2 Problème de détection

3.2.1 Problématique

Nous allons ici nous placer dans le cadre général de la détection optimale d'un signal $\mathbf{s}^{(m)}(t) \in \mathbb{C}^N$ appartenant à une famille de M signaux équiprobables observé à travers un bruit additif $\mathbf{n}(t)$ gaussien, centré, stationnaire non nécessairement circulaire et coloré ou non nécessairement blanc.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{n}(t), \quad m = 1..M. \quad (3.2.1)$$

Dans ce cadre, les critères de détection optimaux de minimisation de la probabilité d'erreur, maximum à posteriori (MAP) et maximum de vraisemblance (MV) sont équivalents. Avec ce dernier critère, le récepteur optimal a été dérivé dans [54, chap.4] dans le cadre scalaire réel, à bruit gaussien temporellement blanc et dans [50, chap.4] dans un cadre plus général de bruit gaussien stationnaire coloré.

Dans le cas temporellement blanc, on obtient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - s^{(m)}(t)]^2 dt, \quad (3.2.2)$$

et dans le cas stationnaire coloré où la densité spectrale de puissance $r_n(f)$ de $n(t)$ ne s'annule en aucune valeur de fréquence (ce qui le cas cas lorsque le bruit $n(t)$ est composé d'interférence et de bruit thermique de fond temporellement blanc).

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} r_n^{-1}(f) |x(f) - s^{(m)}(f)|^2 df, \quad (3.2.3)$$

Par facilité de notation, les transformées de Fourier de toutes les fonctions temporelles scalaires, vectorielles ou matricielles, définies dans les chapitres 3, 4 et 5 utiliseront la même lettre. Par exemple, ici $x(f)$ et $s^{(m)}(f)$ désignent les transformées de Fourier de $x(t)$ et $s^{(m)}(t)$ respectivement. Cette relation (3.2.3) est équivalente à la relation (3.2.2) après blanchiment temporel :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} [x_b(t) - s_b^{(m)}(t)]^2 dt, \quad (3.2.4)$$

où $x_b(t) \triangleq x(t) * b(t)$ et $s_b^{(m)}(t) \triangleq s^{(m)}(t) * b(t)$ où $b(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $r_n^{-\frac{1}{2}}(f)$ et est obtenu par le théorème de factorisation spectrale est un filtre causal.

Le but de cette partie est d'étendre ces résultats aux cas complexe multidimensionnel et non circulaire. Dans le cas de bruit multidimensionnel complexe circulaire blanc spatialement et

temporellement, l'extension de (3.2.2) est immédiate en reprenant l'espace des signaux développé dans [50, chap.4] (voir Annexe C). On obtient similairement à (3.2.2) :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)\|^2 dt, \quad (3.2.5)$$

où de façon équivalente par le théorème de Parseval :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}(f) - \mathbf{s}^{(m)}(f)\|^2 df. \quad (3.2.6)$$

3.2.2 Modèle général à bruit stationnaire multidimensionnel gaussien non circulaire coloré spatialement et temporellement

Considérons l'écriture étendue du modèle d'observation associée à (3.2.1)

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad m = 1..M \quad (3.2.7)$$

où $\tilde{\mathbf{n}}(t)$ est un bruit gaussien, centré, stationnaire, non circulaire et coloré, de matrice de covariance temporelle

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\tau) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{R}_n(\tau) & \mathbf{C}_n(\tau) \\ \mathbf{C}_n^*(\tau) & \mathbf{R}_n^*(\tau) \end{pmatrix}$$

supposée inversible car le bruit est en général une somme d'interfereurs et de bruit de fond blanc et circulaire non corrélés entre eux. $\mathbf{R}_n(\tau)$ et $\mathbf{C}_n(\tau)$ sont les matrices de covariance et de covariance complémentaire temporelle de $\mathbf{n}(t)$. Soit $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)$ la transformée de Fourier de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(\tau)$ qui s'écrit sous la forme $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\frac{H}{2}}(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\frac{1}{2}}(f)$. Nous supposons là aussi que $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f)$ est inversible $\forall f$. Notons $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ la transformée de Fourier inverse de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\frac{-H}{2}}(f)$.

Procédons au blanchiment au moyen de filtre $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ causal :

$$\tilde{\mathbf{x}}_B(t) = \tilde{\mathbf{s}}_B^{(m)}(t) + \tilde{\mathbf{n}}_B(t), \quad m = 1..M \quad (3.2.8)$$

avec $\tilde{\mathbf{x}}_B(t) \triangleq \tilde{\mathbf{B}}(t) * \tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{s}}_B^{(m)}(t) \triangleq \tilde{\mathbf{B}}(t) * \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t)$ et $\tilde{\mathbf{n}}_B(t) \triangleq \tilde{\mathbf{B}}(t) * \tilde{\mathbf{n}}(t)$ en désignant par $*$ le produit de convolution¹. Nous avons démontré dans l'Annexe D que le célèbre théorème de factorisation spectrale sous forme réelle ou complexe circulaire peut s'étendre au cas non circulaire. Par suite il existe une racine carrée $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\frac{H}{2}}(f)$ telle que $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ est causale et structurée

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1(t) & \mathbf{B}_2(t) \\ \mathbf{B}_2^*(t) & \mathbf{B}_1^*(t) \end{pmatrix}.$$

$\tilde{\mathbf{n}}_B(t)$ a ainsi comme matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}_B}(\tau) = E[\tilde{\mathbf{n}}_B(t) \tilde{\mathbf{n}}_B^H(t - \tau)] = \mathbf{I}_{2N} \delta(\tau),$$

1. Ici le produit de convolution $*$ entre matrices, vecteurs ou scalaires est défini en remplaçant les produits de scalaires par des produits de convolution.

ceci signifie que $\mathbf{n}_B(t)$ a comme matrice de covariance $\mathbf{R}_{n_B}(\tau) = \mathbf{I}_N \delta(\tau)$ et comme matrice de covariance complémentaire $\mathbf{C}_{n_B}(\tau) = \mathbf{0}_N$. Il est donc blanc temporellement et spatialement et de plus circulaire, ainsi la forme d'onde détectée, à partir de l'observation non étendue équivalente à (3.2.8), s'écrit sous la forme (3.2.5)

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{s}_B^{(m)}(t)\|^2 dt, \\ &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{\mathbf{x}}_B(t) - \tilde{\mathbf{s}}_B^{(m)}(t)\|^2 dt, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{\mathbf{x}}_B(f) - \tilde{\mathbf{s}}_B^{(m)}(f)\|^2 df, \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right)^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-H}(f) \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right) df, \\ &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right)^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right) df, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

car $\tilde{\mathbf{x}}_B(f) = \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-H}(f) \tilde{\mathbf{x}}(f)$ et $\tilde{\mathbf{s}}_B^{(m)}(f) = \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-H}(f) \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f)$.

Dans le cas d'un bruit stationnaire multidimensionnel complexe non circulaire coloré spatialement et temporellement blanc, (3.2.11) devient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right)^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{x}}(f) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) \right) df. \quad (3.2.12)$$

Notons qu'une démonstration directe permet de dériver (3.2.12) sans passer par le blanchiment spatial étendu (voir Annexe E) dans le cas particulier de bruit temporellement blanc.

Dans le cas particulier où le bruit est circulaire, nous avons :

$$\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_n(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^*(-f) \end{pmatrix}$$

et (3.2.11) devient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{x}(f) - \mathbf{s}^{(m)}(f) \right)^H \mathbf{R}_n^{-1}(f) \left(\mathbf{x}(f) - \mathbf{s}^{(m)}(f) \right) df. \quad (3.2.13)$$

Dans le cas d'un bruit stationnaire multidimensionnel complexe circulaire coloré spatialement et temporellement blanc, (3.2.13) devient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{x}(f) - \mathbf{s}^{(m)}(f) \right)^H \mathbf{R}_n^{-1} \left(\mathbf{x}(f) - \mathbf{s}^{(m)}(f) \right) df. \quad (3.2.14)$$

3.3 Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire

La structure de récepteur MLSE a été étudiée dans plusieurs références. Et, il a été démontré, dans un contexte circulaire blanc [17] et circulaire coloré [32], que ce récepteur est constitué de trois parties : la première partie est linéaire et est constituée par le filtre adapté. La seconde est constituée

par une prise d'échantillons aux instants kT en sortie de ce filtre adapté. La troisième est non linéaire et peut être réalisée par l'algorithme de Viterbi. L'objectif de ce paragraphe est d'examiner si cette structure s'étend au cas de bruit non circulaire coloré spatialement et temporellement. L'enveloppe complexe du signal utile est de la forme :

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} a_k^{(m)} \mathbf{g}(t - kT) \quad (3.3.15)$$

où les $\{a_k\}_{k=0..K-1}$ correspondent aux symboles du signal utile, qui sont équiprobables et statistiquement indépendants. Si a_k appartient à un alphabet A de taille S , on a $M = S^K$ messages équiprobables. T désigne la durée symbole, $\mathbf{g}(t) \triangleq v(t) * \mathbf{h}(t)$ est le filtre de mise en forme qui intègre l'impulsion de la modulation linéaire $v(t)$ et la réponse impulsionnelle du canal de communication $\mathbf{h}(t)$. $\sqrt{\pi_s}$ est un gain car $v(t)$ et $\mathbf{h}(t)$ seront normalisés (voir chapitre 5). K désigne le nombre de symboles de la séquence étudiée où KT est supposée grande devant le support de $v(t)$. Dans ce paragraphe, nous distinguons deux types de récepteur MLSE : MLSE sous hypothèse d'un bruit stationnaire circulaire qu'on note "MLSE stationnaire circulaire" et MLSE sous hypothèse d'un bruit stationnaire non circulaire qu'on note "MLSE stationnaire non circulaire". Il est à préciser que dans les deux cas le bruit est supposé gaussien stationnaire et potentiellement non circulaire.

3.3.1 Récepteur MLSE stationnaire circulaire

Dans ce cas l'équation de vraisemblance correspondante (3.2.13) s'écrit sous la forme :

$$(\hat{a}_0.. \hat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0..a_{K-1})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{x}(f) - \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} a_k \mathbf{g}(f) e^{-i2\pi f k T} \right)^H \mathbf{R}_n^{-1}(f) \left(\mathbf{x}(f) - \sqrt{\pi_s} \sum_{k'=0}^{K-1} a_{k'} \mathbf{g}(f) e^{-i2\pi f k' T} \right) df, \quad (3.3.16)$$

avec $\mathbf{g}(f) \triangleq v(f)\mathbf{h}(f)$, qui se développe :

$$(\hat{a}_0.. \hat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0..a_{K-1})} \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k^* a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f(k-k')T} df - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df \right] \right). \quad (3.3.17)$$

Ainsi le récepteur est constitué d'un filtre de mise en forme

$$\mathbf{w}^H(f) \triangleq \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f), \quad (3.3.18)$$

qui est un filtre linéaire spatio-temporel, suivi d'un échantillonneur au rythme symbole. Nous avons démontré dans l'annexe F qu'il s'agit d'un filtre linéaire adapté c'est à dire un filtre linéaire qui maximise à chaque instant kT le rapport de la puissance du signal utile sur celle du bruit. A la sortie de ce bloc de filtre adapté spatio temporel (FAST) on obtient :

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df = \mathbf{w}^H(-t) * \mathbf{x}(t)|_{t=kT} = y(t)|_{t=kT}.$$

Ce bloc FAST sera suivi d'un bloc non linéaire qui a pour rôle de trouver la séquence de symboles $(\widehat{a}_0.. \widehat{a}_{K-1})$ qui minimise la métrique suivante :

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) \triangleq \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k^* a_{k'} r_{k-k'} - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* y_k \right], \quad (3.3.19)$$

avec

$$r_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f k T} df$$

qui en pratique est supposé de support borné ($r_k = 0$ pour $|k| > L$). Puisque en négligeant les effets de bord :

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sqrt{\pi_s} \left(|a_k|^2 r_0 + 2\Re \left[a_k \sum_{l=1}^L a_{k-l}^* r_l \right] \right) - 2\Re \left[a_k^* y_k \right] \right\}, \quad (3.3.20)$$

la métrique Λ satisfait la relation

$$\Lambda(a_0..a_k) = \Lambda(a_0..a_{k-1}) + \lambda(y_k, a_k, a_{k-1}, ..a_{k-L}). \quad (3.3.21)$$

$\Lambda(a_0..a_k)$ peut donc être minimisée par l'algorithme de programmation dynamique de Viterbi. Par suite, le récepteur MLSE circulaire a la structure suivante :

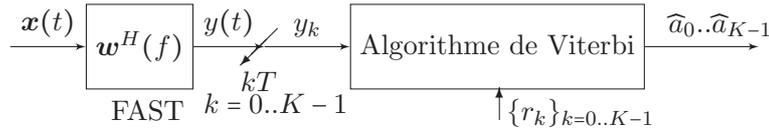


FIGURE 3.1 – Structure du récepteur MLSE circulaire.

La sortie échantillonnée de filtre FAST y_k s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df \\ &= \sum_{k'=0}^{K-1} a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f (k-k') T} df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{n}(f) e^{i2\pi f k T} df. \end{aligned}$$

Ainsi

$$y_k = \sqrt{\pi_s} (a_k r_0 + \sum_{k' \neq k} a_{k'} r_{k-k'}) + n_k, \quad (3.3.22)$$

avec

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f k T} df \text{ où } r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df \in \mathbb{R}$$

et

$$n_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{n}(f) e^{i2\pi f k T} df.$$

Remarque : Toutes les expressions précédentes peuvent s'exprimer temporellement. Ainsi $y(t) = \mathbf{w}^H(-t) * \mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(\tau - t) \mathbf{x}(\tau) d\tau$ avec $\mathbf{w}^H(-t) = \mathbf{g}^H(-t) * \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t)$ où $\mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t)$ désigne la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{R}_n^{-1}(f)$. Ainsi

$$y(t) = \mathbf{g}^H(-t) * \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t) * \mathbf{x}(t),$$

qui donne

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-t) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{x}(v) dudv. \quad (3.3.23)$$

De même on définit

$$r(t) = \mathbf{w}^H(-t) * \mathbf{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(\tau-t) \mathbf{g}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-t) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v) dudv.$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$r(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-t_1) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v-t_2) dudv.$$

Ceci donne

$$r_{k-k'} \triangleq r((k-k')T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v-k'T) dudv. \quad (3.3.24)$$

Ainsi l'équation de vraisemblance (3.3.17) peut s'écrire autrement, dans le domaine temporel, de la façon suivante

$$\begin{aligned} (\hat{a}_0 \dots \hat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0 \dots a_{K-1})} & \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k^* a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v-k'T) dudv \right. \\ & \left. - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(v-u) \mathbf{x}(v) dudv \right] \right). \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Cas particulier : symboles a_k réel

La métrique (3.3.19) s'écrit alors sous la forme

$$\Lambda(a_0 \dots a_{K-1}) \triangleq \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} r_{k-k'} - \sum_{k=0}^{K-1} a_k^* z_k, \quad (3.3.26)$$

avec $z_k = 2\Re(y_k)$ qui est donnée par

$$z_k = 2\sqrt{\pi_s} (a_k r_0 + \sum_{k' \neq k} a_{k'} \Re(r_{k-k'})) + \Re(n_k), \quad (3.3.27)$$

et la structure de récepteur de la figure 3.1 devient :

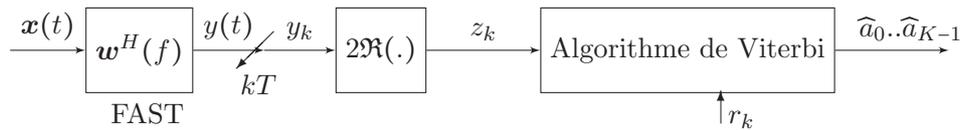


FIGURE 3.2 – Structure du récepteur MLSE circulaire avec des symboles réels.

3.3.2 Récepteur MLSE stationnaire non circulaire

Dans ce cas l'équation de vraisemblance associée à (3.2.11), s'écrit sous la forme :

$$(\widehat{a}_0.. \widehat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0..a_{K-1})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widetilde{\mathbf{x}}(f) - \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} (a_k \mathbf{g}(f) e^{-i2\pi f k T}) \right)^H \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \left(\widetilde{\mathbf{x}}(f) - \sqrt{\pi_s} \sum_{k'=0}^{K-1} (a_{k'} \mathbf{g}(f) e^{-i2\pi f k' T}) \right) df, \quad (3.3.28)$$

avec $\widetilde{\mathbf{x}}(f) \triangleq [\mathbf{x}^T(f), \mathbf{x}^H(-f)]^T$. L'idée est de partitionner $\widetilde{\mathbf{g}}(f)$ comme suit $\widetilde{\mathbf{g}}(f) = \mathbf{g}_1(f) + \mathbf{g}_2(f)$ avec $\mathbf{g}_1(f) \triangleq [\mathbf{g}^T(f), \mathbf{0}^T]^T$ et $\mathbf{g}_2(f) \triangleq [\mathbf{0}^T, \mathbf{g}^H(-f)]^T$. Par conséquent, (3.3.28) devient

$$\begin{aligned} (\widehat{a}_0.. \widehat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0..a_{K-1})} & \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k^* a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi f(k-k')T} df \right] \right. \\ & + \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi f(k-k')T} df \right] \\ & - \Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df \right] \\ & \left. - \Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df \right] \right). \quad (3.3.29) \end{aligned}$$

En remarquons que les deux termes $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df$ sont conjugués, (3.3.29) devient

$$\begin{aligned} (\widehat{a}_0.. \widehat{a}_{K-1}) = \text{Arg Min}_{(a_0..a_{K-1})} & \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k^* a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi f(k-k')T} df \right] \right. \\ & + \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi f(k-k')T} df \right] \\ & \left. - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df \right] \right), \quad (3.3.30) \end{aligned}$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re [a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r'_{k-k'}] - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* y_k \right], \quad (3.3.31)$$

avec

$$r_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi f k T} df, \quad r'_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_2(f) e^{i2\pi f k T} df \quad (3.3.32)$$

et

$$y_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df,$$

qui est la sortie à l'instant kT du filtre WL de fonction de transfert

$$\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f),$$

et d'entrée $\tilde{\mathbf{x}}(f)$. La métrique Λ peut donc aussi être minimisée par l'algorithme de programmation dynamique de Viterbi et le récepteur MLSE non circulaire a la structure suivante :

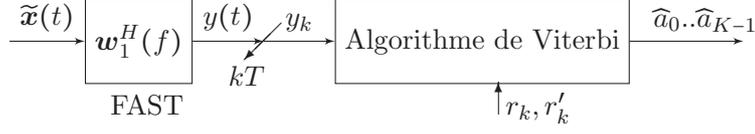


FIGURE 3.3 – Structure du récepteur MLSE non circulaire.

Puisque

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_k a_k \mathbf{g}_1(t - kT) + \sum_k a_k^* \mathbf{g}_2(t - kT) \right) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (3.3.33)$$

$\mathbf{w}_1^H(f)$ est le filtre WL qui maximise le SNR sur le symbole courant a_k aux instants kT au sens de la famille des filtres WL invariants dans le temps.

Écriture temporelle

De façon similaire au récepteur MLSE circulaire, les expressions de $r_{k-k'}$, $r'_{k-k'}$ et y_k peuvent s'écrire en notation temporelle sous les formes

$$r_{k-k'} \triangleq r(t)|_{t=(k-k')T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \mathbf{g}_1(v - k'T) dudv \quad (3.3.34)$$

$$r'_{k-k'} \triangleq r'(t)|_{t=(k-k')T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \mathbf{g}_2(v - k'T) dudv \quad (3.3.35)$$

$$y_k \triangleq y(t)|_{t=kT} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \tilde{\mathbf{x}}(v) dudv. \quad (3.3.36)$$

Ceci donne la métrique temporelle suivante :

$$\begin{aligned} (\hat{a}_0 \dots \hat{a}_{K-1}) &= \text{Arg Min}_{(a_0 \dots a_{K-1})} \\ &\left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k^* a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \mathbf{g}_1(v - k'T) dudv \right] \right. \\ &+ \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re \left[a_k a_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \mathbf{g}_1(v - k'T) dudv \right] \\ &\left. - 2 \Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u - kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u - v) \tilde{\mathbf{x}}(v) dudv \right] \right), \quad (3.3.37) \end{aligned}$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f)$. $y(t) \triangleq \mathbf{w}_1^H(-t) * \tilde{\mathbf{x}}(t)$, $r(t) \triangleq \mathbf{w}_1^H(-t) * \mathbf{g}_1(t)$ et $r'(t) \triangleq \mathbf{w}_1^H(-t) * \mathbf{g}_2(t)$ où $\mathbf{w}_2^H(f) \triangleq \mathbf{g}_2(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f)$. Ceci donne en remplaçant $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ par son expression (3.3.33),

$$y(t) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_k a_k r(t - kT) + \sum_k a_k^* r'(t - kT) \right) + n_{w_1}(t)$$

avec $n_{w_1}(t) \triangleq \mathbf{w}_1^H(-t) * \tilde{\mathbf{n}}(t)$. En notant par $n_{w_1,k} \triangleq n_{w_1}(t)|_{t=kT}$, nous avons

$$y_k = a_k r_0 + a_k^* r'_0 + \sum_{k' \neq k} (a_{k'} r_{k-k'} + a_{k'}^* r'_{k-k'}) + n_{w_1,k}. \quad (3.3.38)$$

Ici le terme $a_k^* r'_0$ représente l'interférence du symbole conjugué (CSI), le terme $\sum_{k' \neq k} (a_k^* r'_{k-k'} + a_{k'} r_{k-k'})$ représente l'interférence inter-symboles (ISI) et $n_{w_1, k}$ est l'interférence co-canal (CCI). De plus, nous avons démontré en Annexe G à partir de la formule des interférences (I.5.29) et (I.5.30) de l'Annexe I que

$$E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}^*] = r_k \text{ et } E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}] = r'_k. \quad (3.3.39)$$

Ces relations étendent la relation classique $E[n_l n_{l-k}^*] = r_k$ du récepteur MLSE circulaire.

Cas particulier : symboles a_k réel

Dans le cas où les symboles a_k sont réels, la métrique (3.3.31) s'écrit sous la forme

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} \Re[r_{k-k'} + r'_{k-k'}] - 2 \sum_{k=0}^{K-1} a_k \Re[y_k], \quad (3.3.40)$$

où $z_k \triangleq 2\Re[y_k] = 2\Re[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df]$. Soit :

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} \Re[r_{k-k'} + r'_{k-k'}] - \sum_{k=0}^{K-1} a_k z_k. \quad (3.3.41)$$

Puisque

$$\begin{aligned} z_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df = \tilde{\mathbf{w}}^H(-t) * \tilde{\mathbf{x}}(t)|_{t=kT}, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mathbf{w}}^H(f) \triangleq \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f), \quad (3.3.42)$$

et

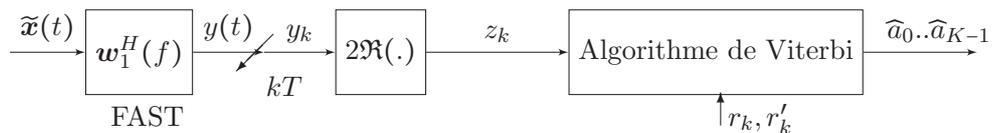
$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_k a_k \tilde{\mathbf{g}}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (3.3.43)$$

$$z_k \triangleq z(t)|_{t=kT} = \sqrt{\pi_s} (a_k r_{r,0} + \sum_{k' \neq k} a_{k'} r_{r,k-k'}) + n_{\tilde{\mathbf{w}},k}, \quad (3.3.44)$$

avec $n_{\tilde{\mathbf{w}},k} \triangleq n_{\tilde{\mathbf{w}}}(t)|_{t=kT}$ où $n_{\tilde{\mathbf{w}}}(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}^H(-t) * \tilde{\mathbf{n}}(t)$ et $r_{r,k} \triangleq r_r(t)|_{t=kT}$ où $r_r(t) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}^H(-t) * \tilde{\mathbf{g}}(t)$. Nous avons démontré en Annexe G que :

$$E[n_{\tilde{\mathbf{w}}, l} n_{\tilde{\mathbf{w}}, l-k}] = r_{r,k}. \quad (3.3.45)$$

Par la suite, le récepteur MLSE non circulaire a l'une des deux structures équivalentes suivantes :



ou

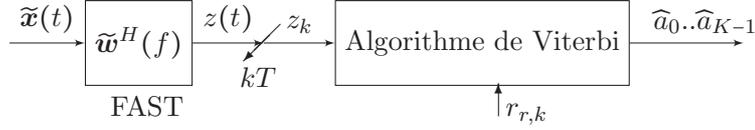


FIGURE 3.4 – Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.

Puisque $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_k a_k \tilde{\mathbf{g}}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t)$, le filtre $\tilde{\mathbf{w}}^H(f)$ donné par (3.3.42) est le filtre WL qui maximise le SNR sur le symbole courant dans z_k (3.3.44) parmi la famille des filtres WL invariants dans le temps. C'est donc aussi un filtre adapté.

3.4 Récepteur MLSE à bruit stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne

3.4.1 Récepteur MLSE stationnaire circulaire

On appelle modulation quasi rectiligne une modulation linéaire dans laquelle les symboles $a_k = i^k b_k$ où b_k sont des symboles réels et où $v(t)$ est une impulsion réelle. Alors

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} i^k b_k^{(m)} \mathbf{g}(t - kT)$$

et (3.2.1) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} i^k b_k^{(m)} \mathbf{g}(t - kT) + \mathbf{n}(t), \quad (3.4.46)$$

où $\mathbf{g}(t) = v(t) * \mathbf{h}(t)$. Les modulations MSK et GMSK en sont des exemples respectivement exacts et approchés (voir Chapitre 2).

En remplaçant a_k par $i^k b_k$ dans (3.3.19), la métrique Λ à minimiser devient

$$\Lambda(b_0 \dots b_{K-1}) \triangleq \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} r_{d,k-k'} - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (3.4.47)$$

avec

$$r_{d,k} \triangleq (-i)^k r_k = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f k T} df$$

et

$$z_{d,k} \triangleq 2\Re[(-i)^k y_k] = 2\Re \left[(-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df \right].$$

Ce récepteur MLSE se compose donc d'un filtre linéaire $\mathbf{w}^H(f)$, d'une prise d'échantillons aux instants kT , d'une post-rotation de $\pi/2$ (introduite par [48] sous forme d'une prérotation) et d'une minimisation d'une métrique qui peut être réalisée par l'algorithme de Viterbi dont la métrique de branche dépend ici de la parité de k , avec la structure suivante :

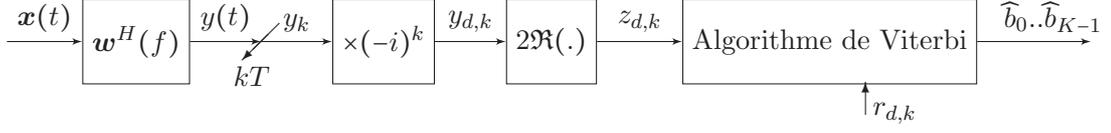


FIGURE 3.5 – Structure 1 du récepteur MLSE circulaire pour modulations quasi-rectilignes.

Ce qui donne un récepteur MLSE identique au cas de symboles réels en y incluant un terme de post-rotation.

Remarque : Notons que cette structure aurait pu être aussi obtenue par un traitement de prérotation classique moyennant un développement plus long.

En effet, en remplaçant a_k par $i^k b_k$ dans (3.3.25), la métrique Λ à minimiser devient

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} i^{k'-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v-k'T) dudv - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k \Re \left[i^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{x}(v) dudv \right] \right). \quad (3.4.48)$$

En multipliant les deux expressions $\mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}(v-k'T)$ et $\mathbf{g}^H(u-kT) \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{x}(v)$ par $i^{\frac{u}{T}} (i^{\frac{v}{T}} i^{-\frac{u}{T}}) i^{-\frac{v}{T}}$, nous obtenons

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(u-kT) \mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_d(v-k'T) dudv - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(u-kT) \mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{x}_d(v) dudv \right] \right), \quad (3.4.49)$$

où $\mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t)$, $\mathbf{x}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{g}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{g}(t)$ sont des opérations de dérotations introduites par [48]. La métrique (3.4.49) a alors une structure identique à celle des modulations PAM :

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} r_{d,k-k'} - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (3.4.50)$$

avec $r_{d,k-k'} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(u-kT) \mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_d(v-k'T) dudv$, $z_{d,k} = \Re[y_{d,k}]$ et

$$y_{d,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(u-kT) \mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{x}_d(v) dudv.$$

Puisque $\mathbf{R}_{n,d}^{\text{inv}}(t) = i^{\frac{t}{T}} \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t) = e^{-i2\pi \frac{t}{4T}} \mathbf{R}_n^{\text{inv}}(t)$, sa transformée de Fourier est $\delta(f + \frac{1}{4T}) * \mathbf{R}_n^{-1}(f) = \mathbf{R}_n^{-1}(f + \frac{1}{4T})$. Par suite $y_{d,k}$ s'écrit sous la forme fréquentielle suivante :

$$y_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f + \frac{1}{4T}) \mathbf{x}_d(f) e^{i2\pi f k T} df.$$

Comme $\mathbf{g}_d(t) = i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{g}(t) = e^{-i2\pi \frac{t}{4T}} \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{g}_d(f) = \mathbf{g}(f + \frac{1}{4T})$ et $\mathbf{x}_d(f) = \mathbf{x}(f + \frac{1}{4T})$

$$y_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_d^H(f) \mathbf{x}_d(f) e^{i2\pi f k T} df = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df = (-i)^k y_k,$$

où l'on retrouve le filtre $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)$ du récepteur MLSE stationnaire circulaire pour modulation QAM et avec

$$\mathbf{w}_d^H(f) = \mathbf{g}^H\left(f + \frac{1}{4T}\right)\mathbf{R}_n^{-1}\left(f + \frac{1}{4T}\right). \quad (3.4.51)$$

Nous trouvons alors une structure de récepteur MLSE similaire à celles des modulations rectilignes avec une dérotation près car $\mathbf{x}_d(f) = \mathbf{x}\left(f + \frac{1}{4T}\right)$. Nous avons alors :

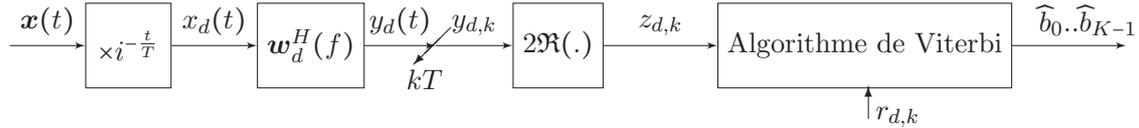


FIGURE 3.6 – Structure 2 du récepteur MLSE circulaire pour modulations quasi-rectilignes.

Puisque

$$\mathbf{x}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}}\mathbf{x}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} b_k \mathbf{g}_d(t - kT) + \mathbf{n}_d(t),$$

avec $\mathbf{n}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}}\mathbf{n}(t)$, $y_{d,k}$ s'écrit sous la forme :

$$y_{d,k} = \sqrt{\pi_s} b_k r_{d,0} + \sqrt{\pi_s} \sum_{k' \neq k} b_{k'} r_{d,k'-k} + n_{d,k}, \quad (3.4.52)$$

avec

$$\begin{aligned} r_{d,k'-k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_d^H(f) \mathbf{g}_d(f) e^{i2\pi f(k'-k)T} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}\left(f + \frac{1}{4T}\right) \mathbf{g}_d(f) e^{i2\pi f(k'-k)T} df \\ &= (-i)^{k-k'} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) e^{i2\pi f(k'-k)T} df = (-i)^{k-k'} r_{k'-k}, \end{aligned}$$

et

$$n_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_d^H(f) \mathbf{n}_d(f) e^{i2\pi f k T} df = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{n}(f) e^{i2\pi f k T} df.$$

Ainsi $r_{d,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}\left(f + \frac{1}{4T}\right) \mathbf{g}_d(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df$ est un réel positif et

$$z_{d,k} \triangleq 2\Re[y_{d,k}] = 2\sqrt{\pi_s} b_k r_{d,0} + 2\sqrt{\pi_s} \sum_{k' \neq k} b_{k'} \Re[r_{d,k'-k}] + 2\Re[n_{d,k}]. \quad (3.4.53)$$

3.4.2 Récepteur MLSE stationnaire non circulaire

En remplaçant a_k par $i^k b_k$ dans la métrique temporelle (3.3.31), la métrique à minimiser devient

$$\Lambda(b_0 \dots b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[r_{d,k-k'} + (-1)^k r'_{d,k-k'}] - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (3.4.54)$$

avec

$$r_{d,k} \triangleq (-i)^k r_k \text{ et } r'_{d,k} \triangleq i^k r'_k, \quad (3.4.55)$$

où r_k et r'_k sont donnés en (3.3.32), et

$$\begin{aligned} z_{d,k} &\triangleq 2\Re[(-i)^k y_k] = (-i)^k y_k + i^k y_k^* \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df + i^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{w}_2^H(f) \triangleq \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f)$.

Ainsi, le récepteur MLSE relatif à ce cas se compose de deux filtres WL, d'une prise d'échantillons aux instants kT , de deux post-rotations de $\pi/2$ et d'une minimisation de la métrique qui peut être réalisée par l'algorithme de Viterbi dont la métrique de branche dépend ici de la parité de k , avec la structure suivante :

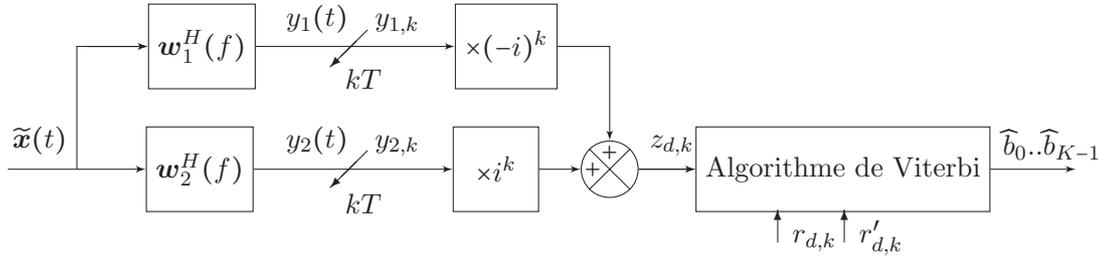


FIGURE 3.7 – Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

Notons que le résumé exhaustif de $z_{d,k}$ s'écrit sous la forme

$$z_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df, \quad (3.4.56)$$

$$= \sqrt{\pi_s} \left(b_k r_{0,k} + \sum_{k' \neq k} b_{k'} r_{k',k} \right) + n_{d,k}, \quad (3.4.57)$$

avec $n_{d,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df$ où

$$\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \text{ et } \mathbf{g}_{(k)}^H(f) = [(-i)^k \mathbf{g}_1^H(f) + i^k \mathbf{g}_2^H(f)], \quad (3.4.58)$$

avec

$$r_{0,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k)}(f) df \quad (3.4.59)$$

$$r_{k',k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k')}(f) e^{i2\pi(k-k')fT} df, \quad (3.4.60)$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} b_k \mathbf{g}_{(k)}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t). \quad (3.4.61)$$

Ainsi, le filtre WL $\mathbf{w}_{(k)}^H(f)$ (3.4.58) peut donc aussi s'interpréter comme un filtre WL adapté à l'instant kT , ou peut aussi s'interpréter comme une famille de quatre filtres associés aux instants kT avec k modulo 4.

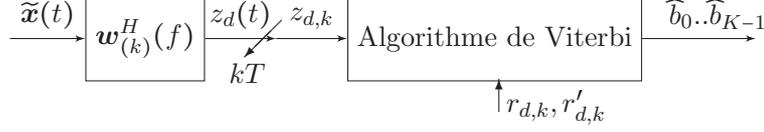


FIGURE 3.8 – Structure 2 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

En remplaçant $\mathbf{g}_{(k)}(t)$ par son expression (3.4.58) dans (3.4.61) et en utilisant (3.4.56), nous obtenons l'expression de $z_{d,k}$ donnée par :

$$z_{d,k} = 2\sqrt{\pi_s} \left(b_k(r_0 + (-1)^k \Re[r'_0]) + \sum_{k' \neq k} b_{k'} \Re[(-i)^{k-k'} r_{k-k'} + i^{k+k'} r'_{k-k'}] \right) + n_{1,d,k} + (-1)^k n_{2,d,k}, \quad (3.4.62)$$

où r_k et r'_k sont définis en (3.3.32) et où $n_{1,d,k}$ et $n_{2,d,k}$ sont définis par :

$$n_{1,d,k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df \quad (3.4.63)$$

$$n_{2,d,k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df. \quad (3.4.64)$$

Remarque : Notons que, comme pour le cas circulaire, cette structure aurait pu être obtenue autrement par le traitement de prérotation introduit par [48] mais avec un développement plus long. En effet, en remplaçant a_k par $i^k b_k$ dans la métrique temporelle (3.3.37), la métrique à minimiser devient

$$\begin{aligned} \Lambda(b_0 \dots b_{K-1}) = & \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[i^{-k} i^{k'}] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_1(v-k'T) dudv \right. \\ & + \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[i^k i^{k'}] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_2^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_1(v-k'T) dudv \\ & \left. - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k \Re[i^{-k}] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \tilde{\mathbf{x}}(v) dudv \right). \quad (3.4.65) \end{aligned}$$

En appliquant la même approche que pour le cas du récepteur circulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda(b_0 \dots b_{K-1}) = & \left(\sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n},d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_{1,d}(v-k'T) dudv \right. \right. \\ & + \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} (-1)^k \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{2,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n},d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_{1,d}(v-k'T) dudv \right] \\ & \left. - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n},d}^{\text{inv}}(u-v) \bar{\mathbf{x}}_d(v) dudv \right] \right), \quad (3.4.66) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{g}_{1,d}(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{g}_1(t)$, $\mathbf{g}_{2,d}(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{g}_2(t)$, $\mathbf{R}_{\tilde{n},d}^{\text{inv}}(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(t)$ et

$$\bar{\mathbf{x}}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_k b_k [\mathbf{g}_{1,d}(t-kT) + (-1)^k \mathbf{g}_{2,d}(t-kT)] + \tilde{\mathbf{n}}_d(t), \quad (3.4.67)$$

avec $\bar{\mathbf{n}}_d(t) \triangleq i^{-\frac{t}{T}} \tilde{\mathbf{n}}(t)$, (3.4.66) s'écrit ainsi

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[r_{d,k-k'} + (-1)^k r'_{d,k-k'}] - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k \Re[y_{1,d,k}], \quad (3.4.68)$$

avec

$$\begin{aligned} r_{d,k-k'} &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}},d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_{1,d}(v-k'T) dudv, \\ r'_{d,k-k'} &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{2,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}},d}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_{1,d}(v-k'T) dudv, \end{aligned}$$

et

$$y_{1,d,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}},d}^{\text{inv}}(u-v) \bar{\mathbf{x}}_d(v) dudv. \quad (3.4.69)$$

Puisque la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}},d}^{\text{inv}}(t)$ est aussi $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f + \frac{1}{4T})$, (3.4.69) s'écrit fréquemment :

$$\begin{aligned} y_{1,d,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f + \frac{1}{4T}) \bar{\mathbf{x}}_d(f) e^{i2\pi f k T} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{1,d}^H(f) \bar{\mathbf{x}}_d(f) e^{i2\pi f k T} df = \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{x}}_d(t)|_{t=kT} \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{w}_{1,d}^H(f) \triangleq \mathbf{g}_1^H(f + \frac{1}{4T}) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f + \frac{1}{4T}) \text{ et } \mathbf{w}_1^H(f) \triangleq \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f).$$

En remarquant (démontré dans l'Annexe H) que

$$y_{1,d,k}^* = (-1)^k y_{2,d,k}, \quad (3.4.70)$$

avec

$$\begin{aligned} y_{2,d,k} &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{2,d}^H(f) \bar{\mathbf{x}}_d(f) e^{i2\pi f k T} df = \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{x}}_d(t)|_{t=kT} \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df, \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{w}_{2,d}^H(f) \triangleq \mathbf{g}_2^H(f + \frac{1}{4T}) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f + \frac{1}{4T}) \text{ et } \mathbf{w}_2^H(f) \triangleq \mathbf{g}_2^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f),$$

le critère (3.4.68) s'écrit sous la forme :

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[r_{d,k-k'} + (-1)^k r'_{d,k-k'}] \right) - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (3.4.71)$$

avec

$$z_{d,k} \triangleq 2\Re[y_{1,d,k}] = y_{1,d,k} + (-1)^k y_{2,d,k},$$

et le récepteur MLSE présente la structure suivante :

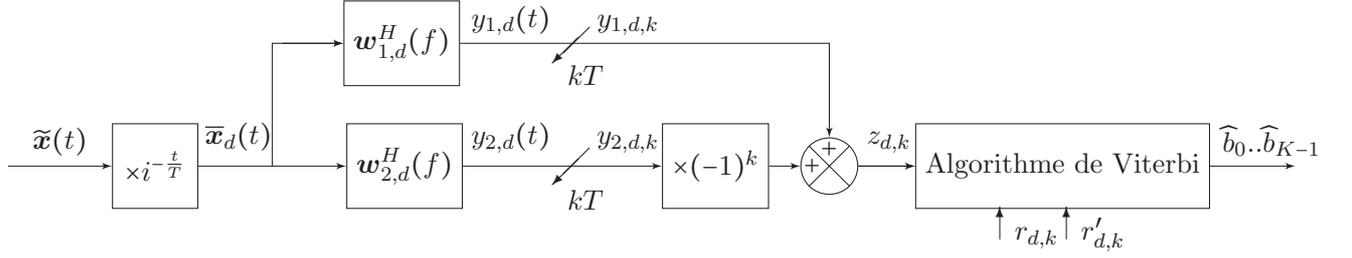


FIGURE 3.9 – Structure 3 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

Par suite :

$$\begin{aligned}
 y_{1,d}(t) &= \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{x}}_d(t) \\
 &= \sqrt{\pi_s} \sum_{k'} b_{k'} [\mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{1,d}(t - k'T) + (-1)^k \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{2,d}(t - k'T)] + \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{n}}_d(t),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 y_{2,d}(t) &= \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{x}}_d(t) \\
 &= \sqrt{\pi_s} \sum_{k'} b_{k'} [\mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{1,d}(t - k'T) + (-1)^k \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{2,d}(t - k'T)] + \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{n}}_d(t),
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 y_{1,d,k} &= \sqrt{\pi_s} b_k [r_{d,0} + (-1)^k r'_{2,d,0}] + \sqrt{\pi_s} \sum_{k' \neq k} b_{k'} [r_{d,k-k'} + (-1)^k r'_{2,d,k-k'}] + n_{1,d,k} \\
 y_{2,d,k} &= \sqrt{\pi_s} b_k [r'_{d,0} + (-1)^k r_{2,d,0}] + \sqrt{\pi_s} \sum_{k' \neq k} b_{k'} [r'_{d,k-k'} + (-1)^k r_{2,d,k-k'}] + n_{2,d,k},
 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
 z_{d,k} &= \sqrt{\pi_s} b_k [r_{d,0} + (-1)^k r'_{2,d,0} + r_{2,d,0} + (-1)^k r'_{d,0}] \\
 &+ \sqrt{\pi_s} \sum_{k' \neq k} b_{k'} [r_{d,k-k'} + (-1)^k r'_{2,d,k-k'} + r_{2,d,k-k'} + (-1)^k r'_{d,k-k'}] \\
 &+ n_{1,d,k} + (-1)^k n_{2,d,k},
 \end{aligned} \tag{3.4.72}$$

avec

$$\begin{aligned}
 r_{d,k} &= \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{1,d}(t)|_{t=kT} \\
 r'_{d,k} &= \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{1,d}(t)|_{t=kT} \\
 r_{2,d,k} &= \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{2,d}(t)|_{t=kT} \\
 r'_{2,d,k} &= \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \mathbf{g}_{2,d}(t)|_{t=kT} \\
 n_{1,d,k} &= \mathbf{w}_{1,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{n}}(t)|_{t=kT} \\
 n_{2,d,k} &= \mathbf{w}_{2,d}^H(-t) * \bar{\mathbf{n}}(t)|_{t=kT}.
 \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} r_{d,k} &= (-i)^k \mathbf{w}_1^H(-t) * \mathbf{g}_1(t)|_{t=kT} = (-i)^k r_k \\ r'_{2,d,k} &= (-i)^k \mathbf{w}_1^H(-t) * \mathbf{g}_2(t)|_{t=kT} = (-i)^k r'_k, \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $z_{d,k} = 2\Re[y_{d,k}]$, l'expression de $z_{d,k}$ (3.4.72) devient

$$z_{d,k} = 2\sqrt{\pi_s} \left(b_k(r_0 + (-1)^k \Re[r'_0]) + \sum_{k' \neq k} b_{k'} \Re[(-i)^{k-k'} r_{k-k'} + i^{k+k'} r'^*_{k-k'}] \right) + n_{1,d,k} + (-1)^k n_{2,d,k}.$$

On retrouve ainsi l'expression (3.4.62) de $z_{d,k}$ obtenue par l'approche de prérotation.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la structure de récepteur MLSE pour des modulations linéaires à symboles complexes et à symboles réels, puis pour des modulations linéaires quasi rectilignes dans un contexte multi-capteurs avec un bruit gaussien stationnaire non circulaire coloré. Nous avons noté que tous les filtres WL adaptés obtenus sont structurés comme sous l'hypothèse de bruit circulaire. Ils se composent ici d'un filtrage WL de blanchiment spatio-temporel qui circularise le bruit au second-ordre, d'un filtrage adapté au canal global sur chaque capteur et d'un filtrage adapté au filtre de mise en forme. Cette structure sera adaptée à un contexte plus général (bruit cyclo-stationnaire) dans le prochain chapitre. Ensuite, l'étude des performances de ces récepteurs sera présentée dans le chapitre 5 où nous démontrerons que les récepteurs obtenus ont de meilleures performances que les récepteurs MLSE classiques qui ne prennent pas la non-circularité en compte, quand ils sont en présence d'interférences non circulaires.

Chapitre 4

Récepteurs pseudo-MLSE sous hypothèse d'un bruit cyclo-stationnaire gaussien éventuellement non circulaire

Sommaire

4.1	Introduction	105
4.2	Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire	106
4.3	Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne	111
4.4	Conclusion	113

4.1 Introduction

Les premières études sur la cyclostationarité datent des années 1950 avec les travaux de Bennett [3] et Gladyshev [28],[29]. En 1959, Bennett a introduit les processus cyclostationnaires dans le contexte de la théorie des communications. Quelques années plus tard, Gladyshev a publié les premières analyses sur les séquences périodiquement corrélées. Depuis, de nombreuses contributions ont enrichi cette théorie, parmi lesquelles celles de Gardner [20] qui a développé plusieurs représentations des processus cyclostationnaires à temps continu [21] et les a utilisées dans la résolution des problèmes d'estimation (voir par exemple [22],[23]).

Cependant, la notion de cyclostationarité n'a commencé à susciter un intérêt pratique qu'à

partir des années 1980 avec le développement du domaine des télécommunications. Par exemple, elle a été utilisée dans les problèmes d'identification et d'estimation, de séparation de sources, de séparation de signaux se recouvrant spectralement, etc (voir le livre [24] et le papier tutorial [25]).

Les signaux cyclostationnaires, ou signaux périodiquement stationnaires, sont des cas particuliers des processus non stationnaires dans le sens que leurs propriétés statistiques varient dans le temps, mais d'une manière périodique¹. Ces signaux cyclostationnaires sont généralement générés par des systèmes à sortie aléatoire et perturbée périodiquement dans le temps. Comme exemples de systèmes physiques, on trouve les processus météorologiques ou les bruits produits par les machines tournantes ...

Dans le cas des systèmes de télécommunications, les messages d'information de nature aléatoire se conjuguent avec la périodicité introduite par les modulations, le codage, etc. pour acquérir de la cyclostationnarité.

Dans ce chapitre, nous étendrons la structure du récepteur MLSE développée dans le chapitre 3 dans le cas d'un bruit gaussien non circulaire stationnaire au cas d'un bruit gaussien non circulaire mais cette fois-ci cyclo-stationnaire. Nous considérons ici le cas d'interférences co-canal de modulations linéaires QAM/PAM ou de modulations linéaires quasi-rectilignes de période symbole T , toutes deux cyclo stationnaires de périodes respectives T et $2T$. Comme nous ne disposons pas d'un théorème de factorisation spectrale dans le cadre cyclo-stationnaire qui permet l'existence d'un filtre causal et causalement inversible widely linéaire variable dans le temps $\mathbf{B}_1(t, \tau)$, $\mathbf{B}_2(t, \tau)$ périodiques en t de période T tel que

$$\mathbf{n}_B(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_1(t, \tau) \mathbf{n}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_2(t, \tau) \mathbf{n}^*(\tau) d\tau,$$

soit circulaire, blanc spatialement et temporellement, nous n'avons pas pu dériver de récepteur MLSE. Pour cette raison, nous imposerons des récepteurs structurés comme dans le cas stationnaire. On l'appelle ainsi récepteur pseudo-MLSE. Dans la première partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la structure de récepteur pseudo-MLSE dans le cadre d'une modulation linéaire. Cette structure sera étendue aux modulations linéaires quasi-rectilignes dans la deuxième partie.

4.2 Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire

Ne pouvant dériver le récepteur MLSE, nous adopterons un récepteur structuré sous la forme d'un filtre linéaire (dans le cas de bruit circulaire) ou WL (dans le cas de bruit non circulaire) qui

1. Un rappel des principales définitions et propriétés des signaux cyclostationnaires du second ordre sera exposé en Annexe I.

tentera de maximiser le SNR sur le symbole courant, un échantillonneur aux instants kT , et une minimisation d'une métrique de Viterbi.

Nous distinguons le récepteur "pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire" construit sous hypothèse d'un bruit cyclo-stationnaire circulaire et le récepteur "pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire" construit sous hypothèse d'un bruit cyclo-stationnaire non circulaire.

4.2.1 Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire

Après avoir exprimé le SNR en sortie y_k d'un filtre linéaire $\mathbf{w}^H(f)$ sur le symbole courant à l'instant kT .

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi k f T} df,$$

grâce à l'expression de la puissance du bruit filtré cyclostationnaire donnée par (I.1.9) et (I.5.36).

$$P_n = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df,$$

sous la forme

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E(a_k^2) |\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) df|^2}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df}, \quad (4.2.1)$$

nous avons montré en Annexe F que le filtre linéaire $\mathbf{w}^H(f)$ qui maximise (4.2.1) est donné par la solution de l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{g}(f) \propto \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{w}(f + \alpha). \quad (4.2.2)$$

Malheureusement ne pouvant résoudre cette équation (4.2.2), nous proposons de choisir simplement le filtre :

$$\mathbf{w}_p(f) \propto [\mathbf{R}'_n(kT, f)]^{-1} \mathbf{g}(f), \quad (4.2.3)$$

extension naturelle du filtre linéaire $[\mathbf{R}_n(f)]^{-1} \mathbf{g}(f)$ du cas stationnaire, où $\mathbf{R}'_n(t, f)$ est la transformée de Fourier de

$$\mathbf{R}'_n(t, \tau) \triangleq E[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t - \tau)].$$

Puisque

$$\mathbf{R}'_n(kT, f) \triangleq \sum_{\alpha} \mathbf{R}'_n{}^{\alpha}(f) \text{ pour } \alpha = k'/T; k' \in \mathbb{Z}.$$

d'après (I.1.3) appliqué à $\mathbf{R}'_n(kT, f)$ et que $\mathbf{R}'_n{}^{\alpha}(f) = \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2})$ d'après (I.1.4), le filtre (4.2.3) est aussi donné par

$$\mathbf{w}_p(f) \propto \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}'_n{}^{\alpha}(f) \right]^{-1} \mathbf{g}(f) = \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f). \quad (4.2.4)$$

Dans le cas de bruit stationnaire $\mathbf{R}_n^{\alpha}(f) = \mathbf{0}$ sauf pour $\alpha = 0$, pour lequel $\mathbf{R}_n^0(f) = \mathbf{R}_n(f)$ et l'on retrouve le filtre adapté classique.

Notons ici que contrairement aux récepteurs MLSE, la matrice $\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2})$ n'est pas hermitienne,

par suite en prenant le filtre $\mathbf{w}_p(f) = \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f)$, nous avons en sortie y_k de ce filtre à l'instant kT :

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_p^H(f) \mathbf{x}(f) e^{i2\pi k f T} df \\ &= \sqrt{\pi_s} \left(a_k r_{p,0} + \sum_{k' \neq k} a_{k'} r_{p,k-k'} \right) + n_k, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

où le terme $r_{p,0}$ est ici complexe

$$r_{p,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) df.$$

Comme nous proposons de conserver la métrique de Viterbi (3.3.17) du récepteur MLSE stationnaire circulaire :

$$\Lambda(a_0 \dots a_{K-1}) \triangleq \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k^* a_{k'} r_{k-k'} \right) - 2\Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* y_k \right], \quad (4.2.6)$$

où ici la matrice $\mathbf{R}_n(f)$ utilisée pour définir r_k de (3.3.17) est remplacée par $\mathbf{R}_n^{(0)}(f)$, transformée de Fourier de la moyenne temporelle (par rapport à t) de la corrélation $E[\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t-\tau)]$, le coefficient $r_{p,0}$ du symbole a_k dans y_k (4.2.5) doit être réel positif. Nous choisissons donc parmi les filtres définis à une constante multiplicative près de (4.2.4), le filtre

$$\mathbf{w}_p(f) = e^{i\psi} \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f), \quad (4.2.7)$$

avec

$$\psi \triangleq \arg \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right]. \quad (4.2.8)$$

Nous avons toujours (4.2.5) où maintenant $r_{p,0}$ est donné par

$$r_{p,0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|, \quad (4.2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} r_{p,k} &= e^{-i\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) e^{i2\pi k f T} df \\ n_k &= e^{-i\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{n}(f) e^{i2\pi k f T} df. \end{aligned}$$

Par suite, le récepteur que nous proposons est constitué de ce filtre linéaire (4.2.7), dont la sortie est échantillonnée à l'instant kT , suivi d'une minimisation de la métrique de Viterbi du récepteur MLSE stationnaire circulaire adapté à un bruit cyclostationnaire.

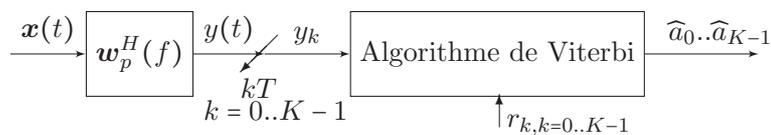


FIGURE 4.1 – Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire.

Cas particulier : a_k réel

Puisque la métrique de Viterbi est conservée, le résumé exhaustif de celle-ci est comme dans le cas circulaire avec $z_k = \Re(y_k)$,

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) \triangleq \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} r_{k-k'} \right) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} a_k z_k, \quad (4.2.10)$$

où z_k est donné par

$$z_k = \sqrt{\pi_s} \left(a_k r_{p,0} + \sum_{k' \neq k} a_{k'} \Re(r_{p,k-k'}) \right) + \Re(n_k), \quad (4.2.11)$$

et la structure de récepteur présentée par la figure 4.1 devient :

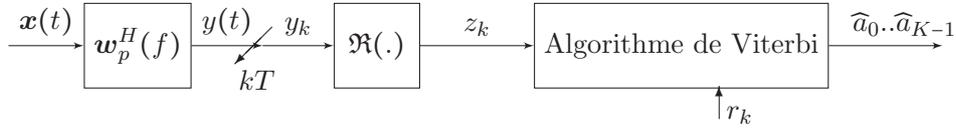


FIGURE 4.2 – Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire avec des symboles réels.

4.2.2 Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire

Nous reprenons ici la même approche structurée comme dans le cas circulaire dans laquelle le filtre linéaire (4.2.7) est remplacé par le filtre WL

$$\mathbf{w}_{p,1}(f) = e^{i\psi} \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(f), \quad (4.2.12)$$

où ψ est ici défini par

$$\psi \triangleq \arg \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \right].$$

La sortie y_k de ce filtre WL est échantillonnée à l'instant kT pour donner :

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,1}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df,$$

qui, comme dans le cas circulaire alimente la métrique de Viterbi (3.3.30)

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \Re[a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r'_{k-k'}] \right) - 2 \Re \left[\sum_{k=0}^{K-1} a_k^* y_k \right], \quad (4.2.13)$$

où ici les expressions r_k et r'_k de (3.3.32) sont conservées en remplaçant la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ par $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f)$, transformée de Fourier de la moyenne temporelle (par rapport à t) de la corrélation $E[\tilde{\mathbf{n}}(t) \tilde{\mathbf{n}}^H(t - \tau)]$ comme dans le cas circulaire, soit

$$r_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \left(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f) \right)^{-1} \mathbf{g}_1(f) e^{-i2\pi f k T} df, \quad r'_k \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \left(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f) \right)^{-1} \mathbf{g}_2(f) e^{-i2\pi f k T} df.$$

D'où, le récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire a la structure suivante :

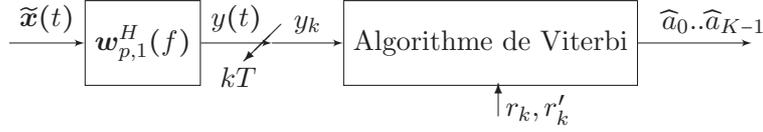


FIGURE 4.3 – Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire.

Cas particulier : a_k réel

Là aussi puisque la métrique de Viterbi est conservée, le résumé exhaustif de celle-ci est comme dans le cas circulaire $z_k = 2\Re[y_k]$. Soit d'après (4.2.13)

$$\Lambda(a_0 \dots a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} \Re[r_{k-k'} + r'_{k-k'}] \right) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k z_k, \quad (4.2.14)$$

avec

$$\begin{aligned} z_k &= 2\Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,1}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}_p^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi f k T} df, \end{aligned}$$

avec comme dans le cas circulaire (4.2.7)

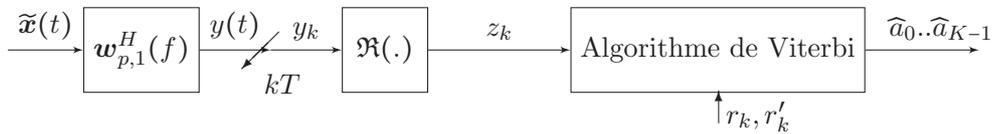
$$\tilde{\mathbf{w}}_p(f) = e^{i\psi} \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{\eta}}^{\alpha} \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f), \quad (4.2.15)$$

où ψ est ici défini par

$$\psi \triangleq \arg \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{\eta}}^{\alpha} \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-H} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \right].$$

Dans (4.2.14), les termes r_k et r'_k sont donnés par les expressions (3.3.32) où comme dans le cas circulaire, $\mathbf{R}_{\tilde{\eta}}(f)$ est remplacée par $\mathbf{R}_{\tilde{\eta}}^0(f)$.

Par la suite, le récepteur pseudo-MLSE non circulaire a l'une des deux structures équivalentes suivantes :



ou

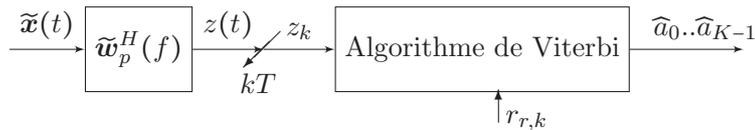


FIGURE 4.4 – Structures du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire avec des symboles réels.

4.3 Récepteur pseudo-MLSE à bruit cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne

Rappelons que les modulations quasi rectilignes sont cyclostationnaires du second ordre de période $2T$ quelque soit l'impulsion formante $v(t)$. Plus précisément, la fonction de corrélation $r_x(t, \tau)$ est périodique en t de période T et la fonction de corrélation complémentaire $c_x(t, \tau)$ est périodique de période $2T$ (voir Annexe I).

Nous proposons d'étendre ici les récepteurs circulaires et non circulaires en conservant là aussi les structures des récepteurs MLSE stationnaires et en particulier ses métriques de Viterbi. Nous présenterons ici les structures avec postrotation. Les structures avec prérotation s'étendraient de la même façon.

4.3.1 Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire

Nous reprenons la même forme de la métrique à minimiser correspondante au récepteur MLSE stationnaire circulaire pour modulation linéaire quasi rectiligne développée dans le chapitre 3 :

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} r_{d,k-k'} \right) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (4.3.16)$$

où

$$r_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) [\mathbf{R}_n^0(f)]^{-1} \mathbf{g}(f) e^{i2\pi kT} df,$$

et ici

$$z_{d,k} = 2\Re \left[(-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{x}(f) e^{i2\pi f k T} df \right],$$

où $\alpha = \frac{k'}{T}$, $k' \in \mathbb{Z}$ pour un bruit cyclostationnaire de période T et où $\alpha = \frac{k'}{2T}$, $k' \in \mathbb{Z}$ pour un bruit cyclostationnaire de période $2T$.

Et la structure du récepteur pseudo-MLSE est donnée par :

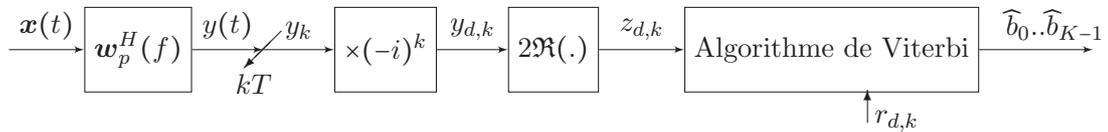


FIGURE 4.5 – Structure du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire avec postrotation pour modulations quasi-rectilignes.

Avec :

$$\mathbf{w}_p(f) = e^{i\psi} \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f), \quad (4.3.17)$$

où ψ est défini par (4.2.8) et

$$y_{d,k} = \sqrt{\pi_s} \left(b_k r_{p,d,0} + \sum_{k' \neq k} b_{k'} r_{p,d,k'-k} \right) + n_{d,k}, \quad (4.3.18)$$

où

$$r_{p,d,k} = e^{-i\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) e^{i2\pi kT} df,$$

et

$$n_{d,k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_p^H(f) \mathbf{n}(f) e^{i2\pi f k T} df.$$

Ainsi

$$z_{d,k} = \sqrt{\pi_s} \left(b_k r_{p,d,0} + \sum_{k' \neq k} b_{k'} \Re[r_{p,d,k'-k}] \right) + \Re[n_{d,k}]. \quad (4.3.19)$$

4.3.2 Récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire non circulaire

La métrique à minimiser a la même forme que celle correspondante au récepteur MLSE stationnaire non circulaire pour modulation linéaire quasi rectiligne développée dans le chapitre 3 :

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \Re[r_{d,k-k'} + (-1)^k r_{d,k-k'}^*] \right) - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \quad (4.3.20)$$

où

$$r_{d,k} = (-i)^k r_k \text{ et } r'_{d,k} = i^k r'_k,$$

où ici r_k et r'_k sont définis comme en (3.3.32) où $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ est ici remplacée par $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{(0)}(f)$, transformée de Fourier de la moyenne temporelle (par rapport à t) de la corrélation $E[\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}^H(t-\tau)]$.

Ici le résumé exhaustif de $z_{d,k}$ sera défini par

$$z_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}_d(f) e^{i2\pi f k T} df,$$

avec le nouveau filtre défini par

$$\mathbf{w}_{p,(k)}(f) = \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_{(k)}(f),$$

où ici $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ est remplacée par la transformée de Fourier $\mathbf{R}'_{\tilde{n}}(kT, f)$ à l'instant kT de la matrice de corrélation

$$E[\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}^H(t-\tau)].$$

Remarquons que d'après (I.1.3) et (I.1.4) appliqué à $\tilde{\mathbf{n}}(t)$

$$\mathbf{R}'_{\tilde{n}}(kT, f) = \sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f) = \sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}),$$

où ici les fréquences cycliques α sont données par $\alpha = k'/T$; $k' \in \mathbb{Z}$ pour des interférences QAM ou PAM et par $\alpha = k'/2T$; $k' \in \mathbb{Z}$ pour des modulations linéaires quasi-rectilignes (voir I.3 de l'Annexe I). Soit d'après l'expression (3.4.58) de $\tilde{\mathbf{g}}_{(k)}(f)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{p,(k)}(f) &= \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}_{(k)}(f) \\ &= (-i)^k \mathbf{w}_{p,1}(f) + i^k \mathbf{w}_{p,2}(f), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{p,1}(f) &= \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(f) \\ \mathbf{w}_{p,2}(f) &= \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}_2(f).\end{aligned}$$

d'où la structure du récepteur pseudo-MLSE non circulaire :

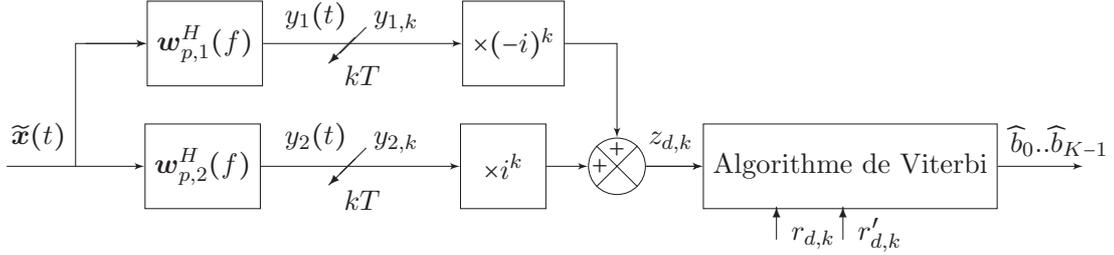


FIGURE 4.6 – Structure du récepteur pseudo-MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

où

$$\begin{aligned}z_{d,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} dt, \\ &= \sqrt{\pi_s} \left(b_k r_{p,0,k} + \sum_{k' \neq k} b_{k'} r_{p,k',k} \right) + n_{d,k},\end{aligned}$$

avec $n_{d,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,(k)}^H(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} dt$,

$$\begin{aligned}r_{p,0,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}_{(k)}(f) df \\ r_{p,k',k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}_{(k')}(f) e^{i2\pi(k-k')fT} df,\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} b_k \mathbf{g}_{(k)}(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t),$$

avec $\mathbf{g}_{(k)}(f) = (-i)^k \mathbf{g}_1(f) + i^k \mathbf{g}_2(f)$.

4.4 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre des récepteurs pseudo-MLSE sous hypothèse de bruit cyclostationnaire potentiellement non circulaire dans le cas de signaux utiles QAM, PAM et modulations linéaires quasi rectilignes.

La structure de ces récepteurs a été imposée sous forme d'un filtre spatio-temporel, d'un échantillonneur au débit symbole et de la minimisation d'une métrique de Viterbi dans laquelle le filtre spatio-temporel ne maximise plus le SNR sur le symbole courant aux instants kT .

Les performances de ces récepteurs seront étudiées dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Etude de performances des Récepteurs MLSE et pseudo-MLSE pour des signaux stationnaires et cyclo-stationnaires du second ordre

Sommaire

5.1	Introduction	116
5.2	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit stationnaire	116
5.3	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne utilisé en présence d'un bruit stationnaire . .	118
5.4	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	120
5.5	Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	123
5.6	Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire .	124
5.7	Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire	127
5.8	Etude de cas particuliers de récepteurs MLSE	128
5.9	Illustrations numériques	135
5.10	Conclusion	148

5.1 Introduction

Nous avons introduit dans les chapitres 3 et 4 différents récepteurs MLSE et pseudo MLSE selon les hypothèses faites sur le bruit total gaussien : circulaire ou non circulaire, stationnaire ou cyclo-stationnaire de fréquence cyclique $\frac{1}{T}$ pour la réception d'une modulation QAM, PAM et des modulations quasi-rectilignes.

Tous ces récepteurs ont une structure identique, un filtre linéaire ou widely linéaire, d'un échantillonneur au rythme symbole kT suivi d'un algorithme de Viterbi. Dans le cas classique d'une modulation PAM, avec réception mono-voie et d'un bruit gaussien centré blanc temporellement et spatialement, il a été démontré que les performances en terme de BER était directement reliées au rapport signal à bruit sur le symbole courant en sortie de filtre adapté [43, chap.10]. En effet, les performances des récepteurs MLSE en termes de probabilité d'erreur par symbole n'ont été analysées à notre connaissance que dans le cas de modulations d'amplitude bande de base dans le contexte mono voie sous bruit additif gaussien blanc par [43, chap.10]. Dans ce cas particulier, une approximation de la probabilité d'erreur par symbole a été donnée sous la forme

$$P(\text{erreur}) \approx c_1 Q\left(c_2 \sqrt{\text{SNR}}\right) \quad \text{avec} \quad Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

où le terme SNR représente le rapport de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit en sortie du filtre adapté et où c_1 ne dépend que du nombre d'états de la modulation et de la mémoire L du canal global et où $c_2 \leq 1$ représente une perte de SNR due à l'interférence intersymbole ($c_2 = 1$ pour $L = 1$).

Nous conjecturons ici que les performances en termes de probabilité d'erreur par symbole des récepteurs MLSE que nous avons introduits sont toujours guidées par le SNR du symbole courant en sortie de filtre adapté aux instants kT . Et, nous allons dans ce chapitre donner des expressions de ces SNR sur symboles courants dans les situations où le bruit total est centré, stationnaire ou cyclostationnaire de circularité quelconque et cela pour chacun de nos récepteurs, introduits selon certaines hypothèses.

5.2 Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit stationnaire

Dans ce paragraphe, nous considérons les récepteurs MLSE introduits sous hypothèse de bruit stationnaire coloré temporellement et spatialement, circulaire ou non circulaire (dit récepteur MLSE

circulaire et récepteur MLSE non circulaire) pour des modulations QAM et PAM, tous deux utilisés dans le cas d'un bruit stationnaire, potentiellement non circulaire et de distribution quelconque.

5.2.1 Récepteur MLSE circulaire

A partir de l'expression du signal y_k à la sortie de filtre multi-dimensionnel adapté $\mathbf{w}^H(f)$ (3.3.22), le SNR à l'instant kT s'écrit

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E|a_k^2| r_0^2}{E|n_k^2|}, \quad (5.2.1)$$

avec

$$r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df,$$

et d'après la formule des interférences du filtrage linéaire (voir Annexe I)

$$E|n_k^2| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df.$$

En remplaçant r_0^2 et $E|n_k^2|$ par leurs expressions dans (5.2.1), nous obtenons :

$$\text{SNR}_y^c = \pi_s E|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df. \quad (5.2.2)$$

Cas particulier de symboles réels

Dans ce cas le SNR à la sortie de filtre multi-dimensionnel adapté est donné par

$$\text{SNR}_z^c = \pi_s \frac{E(a_k^2) r_0^2}{E[(\Re[n_k])^2]}. \quad (5.2.3)$$

En remarquons que $\Re[n_k] = \frac{1}{2}(n_k + n_k^*)$, nous avons $E[(\Re[n_k])^2] = \frac{1}{2}(\Re(E[n_k^2]) + E|n_k^2|)$. D'après les formules des interférences (I.5.29) et (I.5.30), nous avons

$$\begin{aligned} E|n_k^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\begin{aligned} E(n_k^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{w}^*(-f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \mathbf{g}^*(-f) df. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

L'expression du SNR devient ainsi

$$\text{SNR}_z^c = \frac{2\pi_s E(a_k^2) [\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df]}{1 + \frac{\Re[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \mathbf{g}^*(-f) df]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}}. \quad (5.2.6)$$

5.2.2 Récepteur MLSE non circulaire

A partir de l'expression du signal à la sortie de filtre multi-dimensionnel adapté $\mathbf{w}_1^H(f)$ après échantillonnage au rythme symbole (3.3.38), le SNR sur le symbole courant à l'instant kT s'écrit

$$\text{SNR}_y^{nc} = \frac{\pi_s E|a_k^2| r_0^2}{E|n_{w_1,k}^2|}, \quad (5.2.7)$$

avec, cette fois-ci $r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) df$ et d'après la formule des interférences du filtrage linéaire (I.5.29) appliquée au bruit étendu $\tilde{\mathbf{n}}(t)$, $E|n_{w_1,k}^2| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}(f) \mathbf{w}_1(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) df$. Nous obtenons ainsi :

$$\text{SNR}_y^{nc} = \pi_s E|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) df. \quad (5.2.8)$$

Cas particulier de symboles réels

Dans ce cas, (5.2.7) devient

$$\text{SNR}_z^{nc} = \frac{\pi_s E(a_k^2) r_{r,0}^2}{E[n_{\tilde{w},k}^2]}. \quad (5.2.9)$$

Avec ici

$$r_{r,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}^H(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df$$

et

$$E[n_{\tilde{w},k}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\text{SNR}_z^{nc} = \pi_s E[a_k^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df. \quad (5.2.10)$$

5.3 Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi-rectiligne utilisé en présence d'un bruit stationnaire

Ce paragraphe étend les résultats de paragraphe 5.2 au cas des modulations quasi-rectilignes.

5.3.1 Récepteur MLSE circulaire

L'expression du SNR sur le symbole courant obtenue à partir de l'expression de $z_{d,k}$ (3.4.53), est donnée par :

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{\pi_s E(b_k^2) r_{d,0}^2}{E[(\Re[n_{d,k}])^2]}, \quad (5.3.11)$$

avec

$$r_{d,0}^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_d^H(f) \mathbf{R}_n^{-1} \left(f + \frac{1}{4T} \right) \mathbf{g}_d(f) df \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df \right]^2.$$

Cependant, dans ce cas où $\mathbf{n}_d(t)$ n'est plus stationnaire la formule des interférences n'est plus applicable. En développant l'expression de $n_{d,k}$

$$\begin{aligned} n_{d,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H \left(f + \frac{1}{4T} \right) \mathbf{n} \left(f + \frac{1}{4T} \right) e^{i2\pi f k T} df \\ &= e^{-i2\pi k/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{n}(f) e^{i2\pi f k T} df \\ &= (-i)^k n_k, \end{aligned}$$

nous avons $E|n_{d,k}^2| = E|n_k^2|$ et $E(n_{d,k}^2) = (-1)^k E(n_k^2)$. Et d'après les expressions (5.2.4) et (5.2.5), l'expression du SNR devient ainsi

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{2\pi_s E(b_k^2) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df \right]}{1 + (-1)^k \frac{\Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{C}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \mathbf{g}^*(-f) df \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df}}. \quad (5.3.12)$$

5.3.2 Récepteur MLSE non circulaire

En utilisant l'expression de z_k (3.4.72), le SNR sur le symbole courant dans ce cas s'écrit

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = \frac{\pi_s E(b_k^2) r_{0,k}^2}{E[n_{d,k}^2]}, \quad (5.3.13)$$

avec

$$r_{0,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k)}(f) df,$$

et où $E[n_{d,k}^2] = E|n_{d,k}^2|$ est obtenu par la formule des interférences (I.5.29) appliquée à $\tilde{\mathbf{n}}(t)$.

$$\begin{aligned} E[n_{d,k}^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}(f) \mathbf{w}_{(k)}(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k)}(f) df. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{z,k}^{nc} &= \pi_s E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_{(k)}(f) df \\ &= \pi_s E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Comme les filtres adaptés des récepteurs MLSE obtenus sous l'hypothèse de bruit circulaire sont sous optimaux (vis à vis du SNR) sous l'hypothèse de bruit noncirculaire, nous avons par le principe d'inclusion

$$\text{SNR}_y^{nc} \geq \text{SNR}_y^c, \quad \text{SNR}_z^{nc} \geq \text{SNR}_z^c \quad \text{et} \quad \text{SNR}_{z,k}^{nc} \geq \text{SNR}_{z,k}^c. \quad (5.3.15)$$

Des illustrations numériques seront présentées dans la section 5.9 pour illustrer le gain en SNR apporté par les récepteurs MLSE construits sous hypothèse noncirculaire par rapport aux récepteurs MLSE classiques construits sous hypothèse circulaire, utilisés en environnement non circulaire.

5.4 Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire

Dans ce paragraphe, nous étendrons les résultats du paragraphe 5.2 au cas de bruit cyclo-stationnaire de même période T que le signal utile, puis de période quelconque T' non nécessairement égale à T . Comme les filtres adaptés linéaires et WL des récepteurs MLSE que nous avons introduits ont été dérivés sous hypothèse de stationnarité du bruit, nous remplacerons les matrices de densité spectrale $\mathbf{R}_n(f)$ et de densité spectrale complémentaire $\mathbf{C}_n(f)$ de ces filtres par la densité spectrale cyclique et la densité spectrale cyclique complémentaire de puissance à la fréquence cyclique 0, notées $\mathbf{R}_n^0(f)$ et $\mathbf{C}_n^0(f)$, transformées de Fourier des moyennes temporelles des corrélations et corrélations complémentaires.

5.4.1 Récepteur MLSE circulaire

A la sortie y_k du filtre $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1}$, le SNR à l'instant kT s'écrit

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E|a_k^2| r_0^2}{E|n_k^2|},$$

avec $r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df$ et d'après la formule des interférences du filtrage linéaire pour des signaux cyclo-stationnaires (I.1.9) et (I.5.36)

$$\begin{aligned} E|n_k^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df, \end{aligned}$$

où $\{\mathbf{R}_n^{\alpha}(f)\}_{\alpha=\frac{k}{T}; k \in \mathbb{Z}}$ désignent les matrices de corrélation cyclique du bruit. Ainsi :

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E|a_k^2| |\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df}. \quad (5.4.16)$$

Cas particulier de symboles réels

Dans ce cas le SNR à la sortie de filtre multi-dimensionnel adapté est donné par

$$\text{SNR}_z^c = \pi_s \frac{E(a_k^2) r_0^2}{E[(\Re[n_k])^2]}. \quad (5.4.17)$$

Puisque $\Re[n_k] = \frac{1}{2}(n_k + n_k^*)$, nous avons $E[(\Re[n_k])^2] = \frac{1}{2}(\Re(E[n_k^2]) + E|n_k^2|)$. D'après la formule

des interférences (I.1.9), (I.5.36) et (I.1.10), (I.5.37) nous avons

$$\begin{aligned}
E|n_k^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\
E(n_k^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}^*(\frac{\alpha}{2} - f) df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(\frac{\alpha}{2} - f) \right)^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f) df.
\end{aligned}$$

où $\{\mathbf{R}_n^{\alpha}(f)\}_{\alpha=\frac{k}{T}; k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\mathbf{C}_n^{\alpha}(f)\}_{\alpha=\frac{k}{T}; k \in \mathbb{Z}}$ désignent les coefficients de corrélation cyclique et les matrices de corrélation cyclique complémentaire du bruit. L'expression du SNR devient ainsi

$$\text{SNR}_z^c = \frac{2\pi_s E(a_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f) \right)^{-1} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) + \Re[\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(\frac{\alpha}{2} - f) \right)^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f)] \right) df} \quad (5.4.18)$$

5.4.2 Récepteur MLSE non circulaire

Considérons l'expression du signal à la sortie échantillonnée à l'instant kT du filtre multidimensionnel du récepteur MLSE stationnaire non circulaire

$$\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f) \left(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f) \right)^{-1},$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f)$ désigne la matrice de la corrélation cyclique du vecteur étendu du bruit cyclo-stationnaire $\tilde{\mathbf{n}}(t)$ à la fréquence cyclique 0 :

$$y_k = \sqrt{\pi_s} \left[a_k r_0 + a_k^* r_0' + \sum_{k' \neq k} (a_{k'} r_{k-k'} + a_{k'}^* r_{k-k'}') \right] + n_{w_1, k}.$$

Le SNR sur le symbole courant à l'instant kT s'écrit

$$\text{SNR}_y^{nc} = \frac{\pi_s E|a_k^2| r_0^2}{E|n_{w_1, k}^2|}, \quad (5.4.19)$$

avec, cette fois-ci,

$$r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f)^{-1} \mathbf{g}_1(f) df,$$

et d'après la formule des interférences du filtrage linéaire des signaux cyclo-stationnaires (I.1.9) et (I.5.36) appliquée au bruit étendu $\tilde{\mathbf{n}}(t)$

$$\begin{aligned}
E|n_{w_1, k}^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_1^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f) \mathbf{w}_1(f - \frac{\alpha}{2}) df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}_1^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{g}_1(f - \frac{\alpha}{2}) df,
\end{aligned}$$

où $\{\mathbf{R}_{\tilde{n}}^\alpha(f)\}_{\alpha=\frac{k}{T}; k \in \mathbb{Z}}$ désignent les matrices de corrélation cyclique du bruit $\tilde{\mathbf{n}}(t)$.

Nous obtenons ainsi :

$$\text{SNR}_y^{nc} = \frac{\pi_s E|a_k^2| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f))^{-1} \mathbf{g}_1(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}_1^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^\alpha(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}_1(f - \frac{\alpha}{2}) df}. \quad (5.4.20)$$

Cas particulier de symboles réels

Dans ce cas, (5.4.19) devient

$$\text{SNR}_z^{nc} = \frac{\pi_s E(a_k^2) r_{r,0}^2}{E[n_{\tilde{w},k}^2]}. \quad (5.4.21)$$

Avec ici

$$r_{r,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}^H(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df$$

où $\tilde{\mathbf{w}}(f) \triangleq (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f))^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f)$ et d'après la formule des interférences (I.1.9) et (I.5.36) appliquée au bruit étendu $\tilde{\mathbf{n}}(t)$

$$E[n_{\tilde{w},k}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{g}}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^\alpha(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f - \frac{\alpha}{2}) df.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\text{SNR}_z^{nc} = \frac{\pi_s E(a_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f))^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \right|^2}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^\alpha(f) (\mathbf{R}_{\tilde{n}}^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f - \frac{\alpha}{2}) df}. \quad (5.4.22)$$

Remarque 1 : Les SNR (5.4.16), (5.4.18), (5.4.20), et (5.4.22) obtenus dans ce paragraphe s'étendent au cas de bruit cyclo-stationnaire de période T' non nécessairement égale à T par simple application de (I.5.31) et (I.5.32) où $t = kT$ et T est remplacé par T' et des formules d'interférences (I.5.36) et (I.5.37) où T est remplacée par T' . Ceci peut en particulier se produire quand le brouilleur a la même période symbole T que le signal utile mais avec une modulation quasi rectiligne. Dans ce cas la période cyclique de bruit n'est plus égale à T mais plutôt $2T$ (voir I.3 de l'Annexe I). Les nouvelles expressions du SNR sont simplement obtenues en ajoutant le terme multiplicatif $e^{i2\pi\alpha'kT}$ dans les intégrales des dénominateurs où ici α est remplacé par $\alpha' = \frac{k'}{T'}$, $k' \in \mathbb{Z}$. Ainsi, par exemple (5.4.16) devient maintenant fonction de l'instant kT

$$\text{SNR}_{y,k}^c = \frac{\pi_s E|a_k^2| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha'} e^{i2\pi\alpha'kT} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha'}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha'}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha'}{2}) df}, \quad (5.4.23)$$

avec $\alpha' = \frac{k'}{T'}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

5.5 Performances du récepteur MLSE stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire

5.5.1 Récepteur MLSE circulaire

Le SNR sur le symbole courant de $z_{d,k}$ est toujours donné par (5.3.11) où $r_{d,0}$ est donné ici par :

$$r_{d,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df.$$

On a toujours $E[\Re[n_{d,k}]^2] = \frac{1}{2}(E|n_{d,k}^2| + \Re[E[n_{d,k}^2]])$ et $n_{d,k} = (-i)^k n_k$ où ici $E|n_k^2|$ et $E[n_k^2]$ sont donnés par (I.1.9), (I.5.36) et (I.1.10), (I.5.37) respectivement

$$\begin{aligned} E|n_k^2| &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ E[n_k^2] &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f) df, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{2\pi_s E(b_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) \right. \\ &\left. + (-1)^k \Re[\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}))^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f)] \right) df \end{aligned} \right\}}, \quad (5.5.24)$$

où $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, pour des interférences cyclostationnaires de période T .

5.5.2 Récepteur MLSE non circulaire

Le SNR sur le symbole courant $z_{d,k}$ est toujours donné par (5.3.11) où ici

$$r_{0,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}_{(k)}(f) df,$$

et $E[n_{d,k}^2]$ donné par (I.1.9) et (I.5.36)

$$\begin{aligned} E[n_{d,k}^2] &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^0(f) \mathbf{w}_{(k)}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ &= \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f + \frac{\alpha}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f + \frac{\alpha}{2})]^H \left(\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} \\ &\quad \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} [\mathbf{g}_1(f - \frac{\alpha}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f - \frac{\alpha}{2})] df. \end{aligned}$$

Ainsi (5.3.11) devient

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = \frac{\pi_s E(b_k^2) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df \right)^2}{\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f + \frac{\alpha}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f + \frac{\alpha}{2})]^H (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \\ &\left(\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha}{2}) \right)^{-1} [\mathbf{g}_1(f - \frac{\alpha}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f - \frac{\alpha}{2})] df \end{aligned} \right\}}, \quad (5.5.25)$$

où $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, pour des interférences cyclostationnaires de période T .

Remarque 2 : Les SNR (5.5.24) et (5.5.25) peuvent aussi s'étendre au cas de bruit cyclostationnaire de période T' quelconque. Il suffit là aussi d'introduire le terme multiplicatif $e^{i2\pi\alpha'kT}$ dans les intégrales des dénominateurs de (5.5.24) et (5.5.25) et de remplacer α par $\alpha' = \frac{k'}{T'}$, $k' \in \mathbb{Z}$. Ainsi par exemple pour des interférences de type modulations quasi rectilignes cyclostationnaires de période $2T$, (5.5.24) et (5.5.25) deviennent

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{2\pi_s E(b_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi k k'} \left(\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha'}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha'}(f) (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha'}{2}) \right. \\ \left. + (-1)^k \Re[\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha'}{2}) (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{C}_n^{\alpha'}(f) (\mathbf{R}_n^0(\frac{\alpha'}{2} - f))^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha'}{2} - f)] \right) df \end{array} \right.},$$

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = \frac{\pi_s E(b_k^2) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H (\mathbf{R}_n^0(f))^{-1} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df \right)^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi k k'} [\mathbf{g}_1(f + \frac{\alpha'}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f + \frac{\alpha'}{2})]^H (\mathbf{R}_n^0(f + \frac{\alpha'}{2}))^{-1} \mathbf{R}_n^{\alpha'}(f) \\ (\mathbf{R}_n^0(f - \frac{\alpha'}{2}))^{-1} [\mathbf{g}_1(f - \frac{\alpha'}{2}) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f - \frac{\alpha'}{2})] df \end{array} \right.},$$

avec $\alpha' = \frac{k'}{2T}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

5.6 Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire utilisé en présence d'un bruit cyclostationnaire

Dans cette section, nous étudions les performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour un signal utile de type modulation linéaire mis en oeuvre dans le cas d'un bruit coloré spatialement et temporellement. Nous supposons ici que le bruit est cyclo-stationnaire de période T . L'extension à des bruits cyclostationnaires de période quelconque par exemple $2T$ comme pour les modulations linéaires quasi rectilignes se ferait comme dans la partie 5.5.

5.6.1 Récepteur pseudo-MLSE circulaire

L'expression du signal y_k à la sortie de filtre multi-dimensionnel (4.2.7) correspondant au récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire

$$\mathbf{w}_p(f) = e^{i\psi} \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f),$$

où $\{\mathbf{R}_n^{\alpha}(f)\}_{\alpha}$ désignent les matrices de corrélation cyclique du bruit cyclo-stationnaire $\mathbf{n}(t)$, est donnée par (4.2.5) :

$$y_k = \sqrt{\pi_s} \left[a_k r_{p,0} + \sum_{k' \neq k} a_{k'} r_{p,k-k'} \right] + n_k. \quad (5.6.26)$$

Le SNR sur le signal utile à l'instant kT s'écrit

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E |a_k^2| r_{p,0}^2}{E |n_k^2|},$$

avec

$$r_{p,0}^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|^2$$

et où $E |n_k^2|$ est donné à l'aide de (I.1.9) et la formule des interférences (I.5.36).

$$\begin{aligned} E |n_k^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_p^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}_p(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\text{SNR}_y^c = \frac{\pi_s E |a_k^2| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2})]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2})]^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df}, \quad (5.6.27)$$

avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{T}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cas particulier de symboles réels

Le SNR sur le symbole courant à l'instant kT à la sortie de filtre multi-dimensionnel (4.2.7) devient :

$$\text{SNR}_z^c = \frac{\pi_s E (a_k^2) r_0^2}{E [(\mathfrak{R}[n_k])^2]}.$$

Puisque $\mathfrak{R}[n_k] = \frac{1}{2}(n_k + n_k^*)$, nous avons $E[(\mathfrak{R}[n_k])^2] = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}[E |n_k^2| + E |n_k^2|])$. D'après les formules des interférences (I.5.36) et (I.5.37), nous avons

$$\begin{aligned} E |n_k^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_p^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}_p(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) df \\ E(n_k^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_p^H(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \mathbf{w}_p^*(\frac{\alpha}{2} - f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha_1}{2} - f) \right]^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f) df. \end{aligned}$$

où $\{\mathbf{C}_n^{\alpha}(f)\}_{\alpha=\frac{k}{T}; k \in \mathbb{Z}}$ désignent les matrices de corrélation cyclique complémentaire du bruit.

L'expression du SNR devient ainsi

$$\text{SNR}_z^c = \frac{2\pi_s E (a_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2})]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\alpha} \mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2})]^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) \right. \\ \left. + \mathfrak{R}[\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha_1}{2} - f)]^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f)] \right) df}, \quad (5.6.28)$$

avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{T}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.6.2 Récepteur pseudo-MLSE non circulaire

La sortie y_k du filtre $\mathbf{w}_{p,1}(f)$ (4.2.12) est donné par où

$$y_k = \sqrt{\pi_s} \left[a_k r_{p,0} + a_k^* r'_{p,0} + \sum_{k' \neq k} (a_{k'} r_{p,k-k'} + a_{k'}^* r'_{p,k-k'}) \right] + n_{w_{p,1,k}}, \quad (5.6.29)$$

avec ici puisque

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_k a_k \mathbf{g}_1(t - kT) + \sum_k a_k^* \mathbf{g}_2(t - kT) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (5.6.30)$$

avec

$$n_{w_{p,1,k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,1}^H(f) \tilde{\mathbf{n}}(f) e^{i2\pi k f T} df.$$

Les expressions de $r_{p,k}$ et $r'_{p,k}$ s'obtiennent comme dans le cas stationnaire non circulaire (3.3.32).

Le SNR sur le symbole courant a_k l'instant kT en sortie y_k (5.6.29) du filtre WL $\mathbf{w}_{p,1}(f)$ s'écrit

$$\text{SNR}_y^{nc} = \frac{\pi_s E |a_k^2| r_{p,0}^2}{E |n_{w_{p,1,k}}^2|}. \quad (5.6.31)$$

Cette fois-ci

$$r_{p,0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha} \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(f) df \right|,$$

et d'après (I.1.9) et la formule des interférences des signaux cyclo-stationnaires (I.5.36) appliqué au filtrage WL.

$$\begin{aligned} E |n_{w_{p,1,k}}^2| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{w}_{p,1}^H \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha}(f) \mathbf{w}_{p,1} \left(f - \frac{\alpha}{2} \right) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}_1^H \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha_1} \left(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-H} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha_1} \left(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \mathbf{g}_1 \left(f - \frac{\alpha}{2} \right) df. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\text{SNR}_y^{nc} = \frac{\pi_s E |a_k^2| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha} \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \mathbf{g}_1^H \left(f + \frac{\alpha}{2} \right) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha_1} \left(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-H} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\alpha_1} \left(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1} \mathbf{g}_1 \left(f - \frac{\alpha}{2} \right) df}. \quad (5.6.32)$$

avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{T}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cas particulier de symboles réels

Dans ce cas, d'après (5.6.29) $z_k = \Re[y_k]$

$$z_k = \sqrt{\pi_s} \left[a_k r_{p,r,0} + \sum_{k' \neq k} (a_{k'} r_{p,r,k-k'} + a_{k'}^* r'_{p,r,k-k'}) \right] + n_{\tilde{w}_p,k},$$

et donc le SNR sur le symbole courant à l'instant kT en sortie du filtre $\tilde{\mathbf{w}}_p(f)$ (4.2.15) est donné par

$$\text{SNR}_z^{nc} = \frac{\pi_s E (a_k^2) r_{p,r,0}^2}{E [n_{\tilde{w}_p,k}^2]}, \quad (5.6.33)$$

avec ici

$$\begin{aligned}
r_{p,r,0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}_p^H(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) df \\
&= e^{-i\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \right|
\end{aligned}$$

et d'après (I.1.9) et la formule des interférences (I.5.36) :

$$E[n_{\tilde{\mathbf{w}}_p, k}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{g}}^H(f + \frac{\alpha}{2}) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) \left[\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2}) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f - \frac{\alpha}{2}) df.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\text{SNR}_z^{nc} = \frac{\pi_s E(a_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2})]^{-H} \tilde{\mathbf{g}}(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{g}}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2})]^{-1} \tilde{\mathbf{g}}(f - \frac{\alpha}{2}) df}, \quad (5.6.34)$$

avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{T}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.7 Performances du récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire pour modulation linéaire quasi rectiligne utilisé en présence d'un bruit cyclo-stationnaire

5.7.1 Récepteur pseudo-MLSE circulaire

A la sortie de filtre multi-dimensionnel correspondant au récepteur pseudo-MLSE cyclo-stationnaire circulaire (4.3.17), le SNR a la forme suivante :

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{\pi_s E(b_k^2) r_{p,d,0}^2}{E[(\Re[n_{d,k}])^2]}, \quad (5.7.35)$$

avec

$$r_{p,d,0}^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|^2,$$

et

$$n_{d,k} = (-i)^k n_k,$$

avec n_k désigne le bruit à l'instant kT la sortie du filtre pseudo-MLSE circulaire. Ainsi nous avons $E[n_{d,k}^2] = E[n_k^2]$ et $E(n_{d,k}^2) = (-1)^k E(n_k^2)$ où $E|n_k^2|$ et $E(n_k^2)$ ont été calculés dans le paragraphe

5.6.1. L'expression du SNR devient ainsi

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{2\pi_s E(b_k^2) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f) [\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha_1}{2})]^{-H} \mathbf{g}(f) df \right|^2}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha}{2})]^{-1} \mathbf{g}(f - \frac{\alpha}{2}) \right. \\ \left. + (-1)^k \Re[\mathbf{g}^H(f + \frac{\alpha}{2}) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(f + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha}{2})]^{-H} \mathbf{C}_n^{\alpha}(f) [\sum_{\alpha_1} \mathbf{R}_n^{\alpha_1}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha_1}{2} - f)]^{-1*} \mathbf{g}^*(\frac{\alpha}{2} - f)] \right) df} \quad (5.7.36)$$

avec $\alpha_1 = \frac{k_1}{T}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.7.2 Récepteur pseudo-MLSE non circulaire

L'expression du SNR sur le symbole courant dans ce cas a la même forme que celle du récepteur MLSE non circulaire dans le cas stationnaire avec une modulation quasi rectiligne (donné dans le paragraphe 5.3.2) en remplaçant $r_{0,k}$ par $r_{p,0,k}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ par $\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2})$ dans la définition de $n_{d,k}$, ainsi

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = \frac{\pi_s E(b_k^2) r_{p,0,k}^2}{E[n_{d,k}^2]} \quad (5.7.37)$$

avec

$$r_{p,0,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}_{(k)}(f) df,$$

et où $E[n_{d,k}^2] = E|n_{d,k}^2|$ est obtenu par la formule des interférences (I.5.29) appliquée à $\tilde{\mathbf{n}}(t)$.

$$\begin{aligned} E[n_{d,k}^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{p,(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right] \mathbf{w}_{p,(k)}(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}_{(k)}(f) df. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{z,k}^{nc} &= \pi_s E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} \mathbf{g}_{(k)}(f) df \\ &= \pi_s E(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)]^H \left[\sum_{\alpha} \mathbf{R}_n^{\alpha}(f + \frac{\alpha}{2}) \right]^{-H} [\mathbf{g}_1(f) + (-1)^k \mathbf{g}_2(f)] df \quad (5.7.38) \end{aligned}$$

Des illustrations numériques seront présentées dans la section 5.9 pour illustrer le gain en SNR apporté par les récepteurs pseudo MLSE.

5.8 Etude de cas particuliers de récepteurs MLSE

Afin d'avoir des expressions du SNR interprétables, nous considérons dans ce paragraphe le cas particulier où le bruit (composé en pratique d'interférences et de bruit thermique gaussien temporellement et spatialement blanc) est blanc temporellement. Ceci est en particulier le cas d'interférences QAM et PAM où l'impulsion formante est identique à celle du signal utile $v(t)$ réelle

de type "racine carrée" de Nyquist et de roll off égal à zéro (pour avoir un bruit total stationnaire du second ordre¹) et où le canal interférences/récepteurs est spéculaire à un seul trajet.

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^I \sqrt{\pi_j} \left(\sum_k c_{k,i} \mathbf{g}_{j,i}(t - kT) \right) + \mathbf{n}_G(t)$$

avec $\mathbf{g}_{j,i}(t) = v(t) * \mathbf{h}_{j,i}(t)$ où $\mathbf{h}_{j,i}(t) = \alpha_{j,i} \delta(t - \tau_{j,i}) \mathbf{j}_i$ pour I brouilleurs de vecteurs directionnels $\{\mathbf{j}_i\}_{i=1..I}$ d'affaiblissement $\{\alpha_{j,i}\}_{i=1..I}$ et de retard $\{\tau_{j,i}\}_{i=1..I}$. Les séquences de symboles $\{c_{k,i}\}_{i=1..I}$ sont supposés indépendantes entre elles. Ces hypothèses nous permettent non seulement d'affirmer que $\mathbf{n}(t)$ est stationnaire du second ordre mais aussi que

$$\mathbf{R}_n(\tau) = \mathbf{R}_n \delta(\tau) \Leftrightarrow \mathbf{R}_n(f) = \mathbf{R}_n.$$

Nous devons avoir $\tau_{j,i} = 0$ (synchronisé sur le signal utile) pour avoir aussi

$$\mathbf{C}_n(\tau) = \mathbf{C}_n \delta(\tau) \Leftrightarrow \mathbf{C}_n(f) = \mathbf{C}_n$$

et par suite le bruit total est blanc temporellement

$$\mathbf{R}_{\tilde{n}}(\tau) = \mathbf{R}_{\tilde{n}} \delta(\tau) \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\tilde{n}}(f) = \mathbf{R}_{\tilde{n}}.$$

Pour le signal utile, nous considérons deux situations. Dans la première, le canal est supposé spéculaire à un seul trajet et dans la deuxième, le canal est supposé spéculaire à plusieurs trajets. Soit respectivement

$$\mathbf{h}(t) = \beta_1 \delta(t - \tau_1) \mathbf{h} \text{ et } \mathbf{h}(t) = \sum_{m=1}^M \beta_m \delta(t - \tau_m) \mathbf{h}^{(m)}, \quad (5.8.39)$$

$\{\beta_m\}_{m=1..M}$, $\{\tau_m\}_{m=1..M}$ et $\{\mathbf{h}^{(m)}\}_{m=1..M}$ représentent respectivement l'affaiblissement, retard et vecteur directionnel du trajet m ($\mathbf{h}^{(1)} \triangleq \mathbf{h}$). Nous supposons que le récepteur est synchronisé sur le premier trajet du signal utile, i.e., $\tau_1 = 0$ et β_1 réel. Pour assurer l'unicité de notre modélisation, nous supposons :

- (i) les premières composantes des vecteurs directionnels \mathbf{j}_i , $\mathbf{h}^{(m)}$ sont égales à 1
- (ii) $\alpha_{j,i} = |\alpha_{j,i}| e^{i\phi_{j,i}}$, $|\alpha_{j,i}| = 1$ et $\beta_1 = 1$
- (iii) $v(t)$ est d'énergie unité, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} |v^2(t)| dt = 1$, soit $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t - kT) v^*(t - k'T) dt = \delta_{k,k'}$. De plus, nous supposons que $v(t)$ est réelle.

5.8.1 Canal utile monotrajet

Avec les hypothèses précédentes

$$\mathbf{g}(t) = v(t) \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{g}(f) = v(f) \mathbf{h}.$$

1. Notons que les interférences sous forme de modulations quasi rectilignes ne sont jamais stationnaires y compris pour un roll off égal à zéro (voir annexe I.3).

Ce qui implique

$$\mathbf{g}_1(f) = v(f)\mathbf{h}_1 \triangleq v(f) \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{g}_2(f) = v^*(-f)\mathbf{h}_2 \triangleq v^*(-f) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix}$$

et pour $v(t)$ réel.

$$\tilde{\mathbf{g}}(f) = \mathbf{g}_1(f) + \mathbf{g}_2(f) = v(f)\tilde{\mathbf{h}} \text{ avec } \tilde{\mathbf{h}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix}.$$

5.8.1.1 Récepteurs MLSE circulaires

Modulations linéaires :

Pour des symboles complexes, nous avons $r_k = \delta_{k,0}r_0$ d'après (3.3.19). La métrique à minimiser (3.3.19) devient :

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} |a_k|^2 r_0 - 2 \sum_{k=0}^{K-1} \Re[a_k^* y_k], \quad (5.8.40)$$

qui, en multipliant $\sqrt{\pi_s}r_0$ et en ajoutant $\sum_{k=0}^{K-1} |y_k|^2$ est équivalent à

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sum_k |\sqrt{\pi_s}a_k r_0 - y_k|^2. \quad (5.8.41)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, le récepteur optimal se simplifie et se ramène à une décision symbole par symbole et l'expression du SNR (5.2.2) se simplifie comme suit

$$\begin{aligned} \text{SNR}_y^c &= \pi_s E |a_k|^2 \mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h} \int_{-\infty}^{+\infty} |v^2(f)| df \\ &= \pi_s E |a_k|^2 \mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h} \\ &\triangleq E_s \mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (5.8.42)$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} |v^2(f)| df = \int_{-\infty}^{+\infty} |v^2(t)| dt$ où $E_s = \pi_s E |a_k|^2$ désigne l'énergie du symbole mis en forme pour un canal idéal sans atténuation. Ainsi, la structure de récepteur donnée par la figure 3.1 devient :

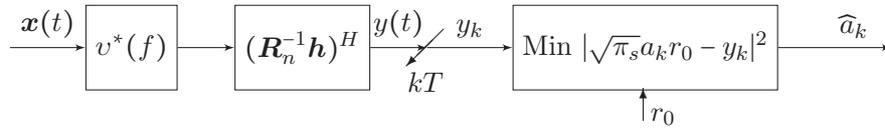


FIGURE 5.1 – Structure du récepteur MLSE circulaire.

Dans le cas particulier où les symboles sont réels, la métrique (5.8.40) devient

$$\Lambda(a_0..a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_k a_k^2 r_0 - 2 \sum_k a_k \Re[y_k]. \quad (5.8.43)$$

Ceci revient à minimiser $(\sqrt{\pi_s}a_k r_0 - z'_k)^2$ avec $z'_k \triangleq \Re[y_k]$ pour chaque symbole a_k . Le SNR (5.2.6) se simplifie

$$\text{SNR}_z^c = 2E_s \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}}{1 + \frac{\Re[\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^*]}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}}}, \quad (5.8.44)$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f)v^*(-f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |v^2(f)|df$ car $v(t)$ est supposée réelle. Ainsi, la structure de récepteur donnée par la figure 3.2 devient :

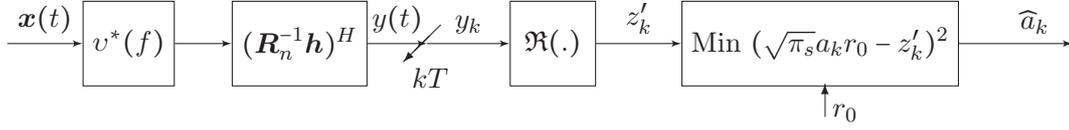


FIGURE 5.2 – Structure du récepteur MLSE circulaire avec des symboles réels.

Modulations linéaires quasi-rectilignes :

Puisque $v(t)$ est supposée réelle en "racine carrée" de Nyquist, on considère ici des modulations linéaires décalées à impulsion $v(t)$ non MSK ou GMSK.

$$\sum_k i^k b_k v(t - kT) = \left(\sum_k (-1)^k b_{2k} v(t - 2kT) \right) + i \left(\sum_k (-1)^k b_{2k+1} v(t - (2k+1)T) \right).$$

Dans ce cas comme $r_{d,k} = i^k r_k$, $r_{d,k} = \delta_{k,0} r_0$ et la métrique (3.4.47) se simplifie comme suit

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} b_k^2 r_0 - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k z'_{d,k}. \quad (5.8.45)$$

$z'_{d,k} \triangleq \Re[y_{d,k}]$. Ceci revient à minimiser $(\sqrt{\pi_s} b_k r_0 - z'_{d,k})^2$ pour chaque symbole b_k . Comme pour les symboles réels, l'expression du SNR (5.3.11) devient

$$\text{SNR}_{z,k}^c = 2E_s \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}}{1 + \frac{(-1)^k \Re[\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{-1*} \mathbf{h}^*]}{\mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}}}, \quad (5.8.46)$$

et la structure de récepteur donnée par la figure 3.9 devient :

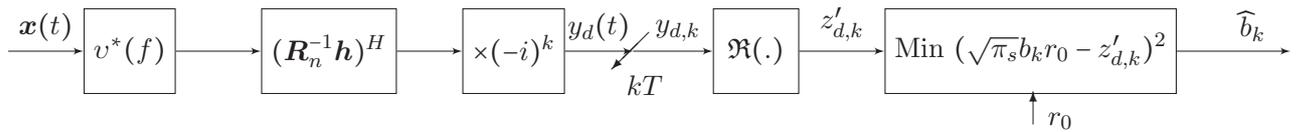


FIGURE 5.3 – Structure du récepteur MLSE circulaire avec modulation quasi-rectiligne.

5.8.1.2 Récepteurs MLSE non circulaires

Modulations linéaires :

Dans ce cas d'après (3.3.34)

$$\begin{aligned} r_k &= \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f)v(f)e^{i2\pi f kT} df \\ &= \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t)v(t - kT) dt \\ &= (\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_1) \delta_{k,0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r'_k &= \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{h}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f) v^*(-f) e^{i2\pi f k T} df \\
&= \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{h}_2 \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f) v(f) e^{i2\pi f k T} df \text{ car } v(t) \text{ est réel} \\
&= (\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{h}_2) \delta_{k,0}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc en particulier $r_k = \delta_{k,0} r_0$ et $r'_k = \delta_{k,0} r'_0$ et la métrique à minimiser (3.3.31) devient :

$$\Lambda(a_0 \dots a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} (\sqrt{\pi_s} (|a_k|^2 r_0 + \Re[a_k^2 r'_0]) - 2\Re(a_k^* y_k)). \quad (5.8.47)$$

Aussi, dans ce cas particulier, le récepteur optimal se simplifie et se ramène à une décision symbole par symbole et l'expression du SNR (5.2.8) se simplifie comme suit

$$\text{SNR}_y^{nc} = E_s \mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \mathbf{h}_1, \quad (5.8.48)$$

Dans ce cas, la structure de récepteur donnée par la figure 3.3 devient :

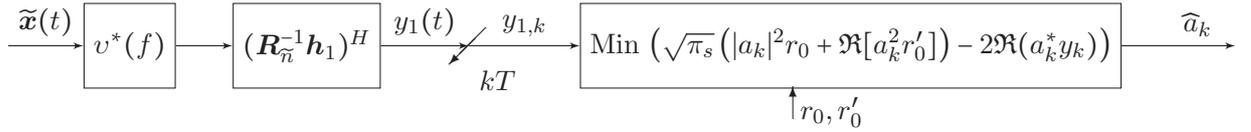


FIGURE 5.4 – Structure du récepteur MLSE non circulaire.

Dans le cas particulier où les symboles sont réels, (5.8.47) devient

$$\Lambda(a_0 \dots a_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} a_k^2 (r_0 + \Re[r'_0]) - 2a_k \Re[y_k]. \quad (5.8.49)$$

Ceci revient à minimiser $(\sqrt{\pi_s} a_k (r_0 + \Re[r'_0]) - z'_k)^2$ avec $z'_k = \Re[y_k]$ pour chaque symbole a_k . Le SNR (5.2.10) se simplifie ainsi

$$\text{SNR}_z^{nc} = E_s \tilde{\mathbf{h}}^H \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}, \quad (5.8.50)$$

et la structure de récepteur donnée par la figure 3.4 devient :

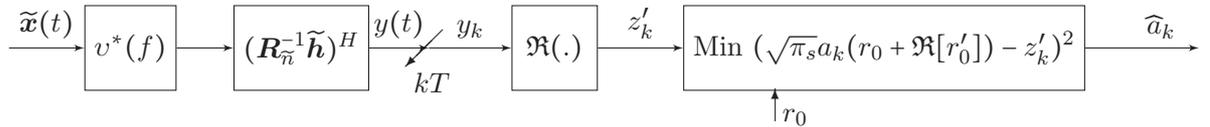


FIGURE 5.5 – Structure du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.

Modulations linéaires quasi-rectilignes :

Puisque $r_{d,k} = (-i)^k r_k$ et $r'_{d,k} = i^k r'_k$ (d'après (3.4.55)), nous avons ici

$$r_{d,k} = r_0 \delta_{k,0} \text{ et } r'_{d,k} = r'_0 \delta_{k,0},$$

et la métrique à minimiser (3.4.54) devient

$$\Lambda(b_0..b_{K-1}) = \sqrt{\pi_s} \sum_{k=0}^{K-1} b_k^2 (r_0 + (-1)^k \Re[r'_0]) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} b_k z'_{d,k}. \quad (5.8.51)$$

avec $z'_{d,k} = z_{d,k}/2$. Ceci revient à minimiser $(\sqrt{\pi_s} b_k (r_0 + (-1)^k \Re[r'_0]) - z'_{d,k})^2$. L'expression du SNR (5.3.14) se simplifie et donne de la même façon

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = E_s [\mathbf{h}_1 + (-1)^k \mathbf{h}_2]^H \mathbf{R}_n^{-1} [\mathbf{h}_1 + (-1)^k \mathbf{h}_2]. \quad (5.8.52)$$

et la structure de récepteur donnée par la figure 3.9 devient :

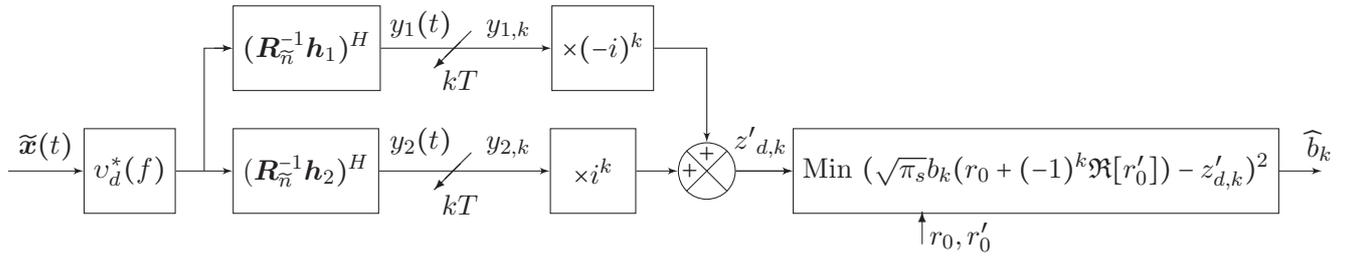


FIGURE 5.6 – Structure du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

5.8.1.3 Comparaisons des performances

D'après (5.3.15), les récepteurs MLSE prenant en compte la noncircularité du bruit ont de meilleures performances que ceux dérivés sous l'hypothèse circulaire. Qualifions ici ce gain en SNR lorsque le bruit est non circulaire.

Dans le cas de symboles complexes, en comparant (5.8.42) et (5.8.48), nous obtenons avec

$$\mathbf{R}_n^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{D}_n \\ \mathbf{D}_n^* & \mathbf{A}_n^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{SNR}_y^{nc} - \text{SNR}_y^c &= E_s (\mathbf{h}_1^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}) \\ &= E_s \mathbf{h}^H (\mathbf{A}_n - \mathbf{R}_n^{-1}) \mathbf{h} \\ &= E_s \mathbf{h}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n (\mathbf{R}_n^* - \mathbf{C}_n^* \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n)^{-1} \mathbf{C}_n^* \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h} \geq 0, \end{aligned}$$

d'après la formule d'inverse partitionné de matrice définie positive, avec égalité si et seulement si $\mathbf{C}_n = \mathbf{0}$ (bruit circulaire).

Dans le cas de symboles réels et de modulation linéaire quasi-rectiligne, nous vérifions d'après (5.8.44), (5.8.46) et (5.8.50), (5.8.52) que dans le cas de bruit circulaire

$$\text{SNR}_y^{nc} = \text{SNR}_y^c \text{ et } \text{SNR}_{z,k}^{nc} = \text{SNR}_{z,k}^c.$$

Mais dans le cas de bruit non circulaire, nous n'avons pas réussi à donner une expression simple des gains $\text{SNR}_z^{nc} - \text{SNR}_z^c$ et $\text{SNR}_{z,k}^{nc} - \text{SNR}_{z,k}^c$.

5.8.2 Canal utile multitrajet

Dans ce cas

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{m=1}^M \beta_m v(t - \tau_m) \mathbf{h}^{(m)} \Leftrightarrow \mathbf{g}(f) = \sum_{m=1}^M \beta_m v(f) e^{-i2\pi f \tau_m} \mathbf{h}^{(m)}. \quad (5.8.53)$$

Nous allons démontrer que des expressions simples interprétables sont aussi possibles dans le cas où les retards τ_m sont multiples de la période symbole, i.e. $\tau_m/T \in \mathbb{Z}$.

En effet, dans ce cas nous avons par exemple dans le cas du récepteur MLSE circulaire pour symboles complexes

$$\text{SNR}_y^c = E_s \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \beta_m^* \beta_{m'} \left(\mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m')} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f) v(f) e^{-i2\pi f (\tau_m - \tau_{m'})} df, \quad (5.8.54)$$

dans lequel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^*(f) v(f) e^{-i2\pi f (\tau_m - \tau_{m'})} df = \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t) v(t - \tau_m + \tau_{m'}) dt = \delta_{m-m'}.$$

D'où (5.8.54) devient simplement

$$\text{SNR}_y^c = E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m)}, \quad (5.8.55)$$

qui est la somme des SNR de chaque trajet pondéré par le carré du module du gain de chaque canal. Notons que ce découplage entre canaux est perdu pour des retards τ_m quelconques.

Pour des symboles réels et des modulations linéaires quasi-rectilignes, les SNR_z^c (5.8.44) et $\text{SNR}_{z,k}^c$ (5.8.46) des récepteurs MLSE circulaires deviennent simplement égaux à

$$\text{SNR}_z^c = \frac{2E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m)}}{1 + \frac{\sum_{m=1}^M \Re[\beta_m^{*2} (\mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{-1*} \mathbf{h}^{(m)*})]}{\sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m)}}}, \quad (5.8.56)$$

et

$$\text{SNR}_{z,k}^c = \frac{2E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m)}}{1 + (-1)^k \frac{\sum_{m=1}^M \Re[\beta_m^{*2} (\mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n^{-1*} \mathbf{h}^{(m)*})]}{\sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}^{(m)H} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}^{(m)}}}, \quad (5.8.57)$$

Cette fois-ci les SNR ne peuvent plus s'interpréter comme les sommes des SNR obtenus à partir des différents trajets. Cela est dû au fait que les filtres adaptés des récepteurs MLSE circulaires ne sont plus adaptés en présence de bruit non circulaire. Mais dans le cas de symboles complexes, puisque le SNR obtenu par le récepteur MLSE circulaire en présence de signaux non circulaires ne dépend pas de la noncircularité du bruit, la désadaptation du filtre adapté conserve l'additivité des SNR des différents trajets.

Pour les récepteurs MLSE non circulaires : nous obtenons directement dans le cas de symboles complexes, avec

$$\mathbf{h}_1^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(m)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}:$$

$$\text{SNR}_y^{nc} = E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \mathbf{h}_1^{(m)H} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \mathbf{h}_1^{(m)}. \quad (5.8.58)$$

Dans le cas de symboles réels où :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(f) &= v(f) \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} \beta_m e^{-i2\pi f \tau_m} \mathbf{h}^{(m)} \\ \beta_m^* e^{-i2\pi f \tau_m} \mathbf{h}^{(m)*} \end{bmatrix} \\ &= v(f) \left[\sum_{m=1}^M \beta_m e^{-i2\pi f \tau_m} \mathbf{h}_1^{(m)} + \beta_m^* e^{i2\pi f \tau_m} \mathbf{h}_2^{(m)} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{h}_2^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^{(m)*} \end{bmatrix},$$

l'expression (5.2.10) devient également

$$\text{SNR}_z^{nc} = E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \tilde{\mathbf{h}}^{(m)H} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}^{(m)}, \quad (5.8.59)$$

de même pour les modulations linéaires quasi-rectilignes où (5.3.14) devient

$$\text{SNR}_{z,k}^{nc} = E_s \sum_{m=1}^M |\beta_m|^2 \left((\mathbf{h}_1^{(m)H} + (-1)^k \mathbf{h}_2^{(m)H}) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} (\mathbf{h}_1^{(m)} + (-1)^k \mathbf{h}_2^{(m)}) \right). \quad (5.8.60)$$

Nous voyons donc que dans le cas des récepteurs MLSE non circulaires, les 3 SNR (5.8.58), (5.8.59) et (5.8.60) s'interprètent comme celui du récepteur MLSE à symboles complexes.

5.9 Illustrations numériques

Le but de cette partie est de quantifier les gains de performances en SNR apportés par les récepteurs MLSE non circulaires et pseudo MLSE par rapport aux récepteurs MLSE circulaires classiques dans divers scénarios en présence de bruit total non circulaire stationnaire ou cyclo-stationnaire.

Dans toutes nos illustrations, nous considérons le cas de $N = 2$ capteurs (sauf dans le paragraphe 5.9.2), avec un bruit total constitué d'un seul brouilleur constitué d'une modulation linéaire BPSK de symboles c_k indépendants de même débit symbole $1/T$ indépendant du signal utile et de même impulsion $v(t)$ (de type "racine carrée de cosinus surelevé") que le signal utile et d'un bruit de fond gaussien centré circulaire temporellement et spatialement blanc ($\mathbf{R}_{n_G} = \eta_2 \mathbf{I}_2$ et $\mathbf{C}_{n_G} = \mathbf{0}$). Nous considérons des canaux spéculaires pour les canaux signal utile et brouilleur.

5.9.1 Cas de bruit stationnaire du second ordre

Pour assurer la stationnarité du second ordre, on imposera ici le roll off de $v(t)$ à zéro. Pour le signal utile, nous considérons un trajet principal sur lequel le récepteur est synchronisé et un seul trajet secondaire, soit

$$\mathbf{h}(t) = \delta(t) \mathbf{h}^{(1)} + \beta_2 \delta(t - \tau_2) \mathbf{h}^{(2)}, \quad (5.9.61)$$

avec $\beta_2 = |\beta_2|e^{i\varphi_2}$. Le signal utile avec symboles complexes, réels, ou quasi-rectiligne sera respectivement une modulation QPSK, BPSK, ou une modulation QPSK décalée (OQPSK).

Pour le brouilleur, nous considérons, un seul trajet synchronisé ou non sur le signal utile. Soit

$$\mathbf{n}(t) = \sqrt{\pi_j} \sum_k c_k \mathbf{g}_j(t - kT) + \mathbf{n}_G(t), \quad (5.9.62)$$

avec $\mathbf{g}_j(t) = \alpha_j v(t - \tau_j) \mathbf{j}$ où $\alpha_j = |\alpha_j|e^{i\phi}$.

Dans toutes les illustrations des 3 premiers scénarios, nous choisirons $\pi_s/\eta_2 = 10$ et $\pi_j/\eta_2 = 10$. Nous calculerons des SNR moyennés (50000 tirages Monte Carlo) sur les canaux de la façon suivante : les directions d'arrivées du signal utile (à travers $\mathbf{h}^{(1)}$ et $\mathbf{h}^{(2)}$) et du brouilleur (à travers \mathbf{j}) seront indépendantes et de loi de probabilité uniforme. Les paramètres d'atténuation $|\beta_2|$ et φ_2 sont indépendants et de loi de probabilité uniforme respectivement dans $[0, 1]$ et $[0, 2\pi]$. Ces paramètres sont indépendants des paramètres de direction d'arrivée.

Dans le premier scénario, on choisit $\tau_j = 0$. Le bruit total est alors blanc temporellement avec

$$\mathbf{R}_n = \pi_j E[|c_k^2|] |\alpha_j|^2 \mathbf{j} \mathbf{j}^H + \eta_2 \mathbf{I}_N$$

et

$$\mathbf{C}_n = \pi_j E[c_k^2] \alpha_j^2 e^{2i\phi} \mathbf{j} \mathbf{j}^T.$$

On choisit également $\tau_2 = T$ (ou de façon équivalente $\tau_2/T \in \mathbb{Z}$). Concernant le brouilleur, nous avons imposé $|\alpha_j| = 1$. Nous allons calculer numériquement les valeurs moyennes des SNR (5.8.55) et (5.8.58), (5.8.56) et (5.8.59), (5.8.57) et (5.8.60) de la partie 5.8 en fonction du déphasage entre le signal utile et le brouilleur ϕ pour les 3 couples de récepteurs MLSE associés à des modulations QPSK/BPSK/OQPSK.

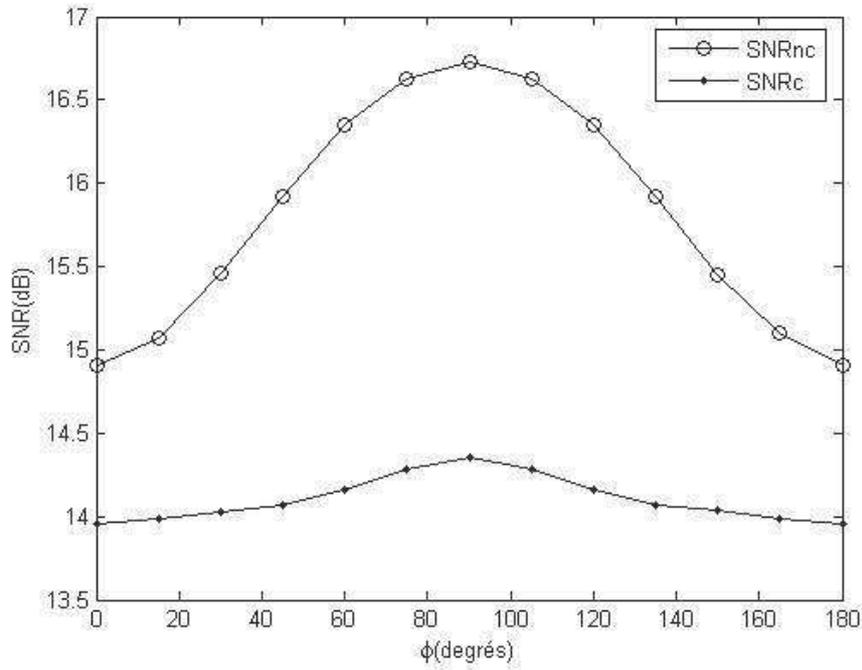


FIGURE 5.7 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation BPSK.

La figure 5.7, compare SNR_z^{nc} à SNR_z^c dans le cas des symboles BPSK en fonction du déphasage entre le brouilleur et le signal utile ϕ . Nous remarquons que ces SNR atteignent leurs maximums quand le signal utile et le brouilleur sont en quadrature de phase ($\phi = \pi/2$) où le gain en SNR apporté par le récepteur MLSE dérivé sous l'hypothèse de bruit non circulaire atteint un maximum d'environ $2.5dB$.

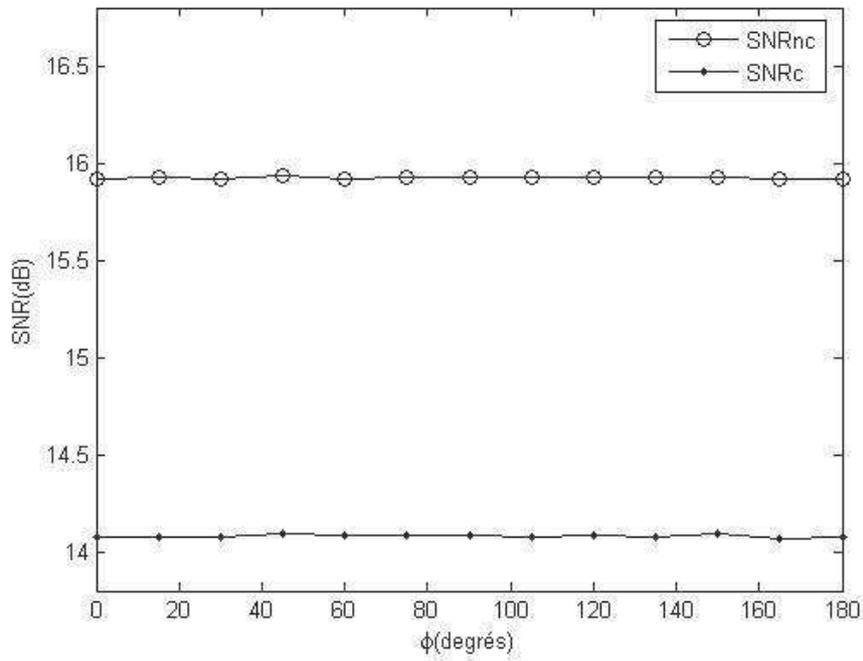


FIGURE 5.8 – Variation de SNR_y^{nc} et SNR_y^c en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation QPSK.

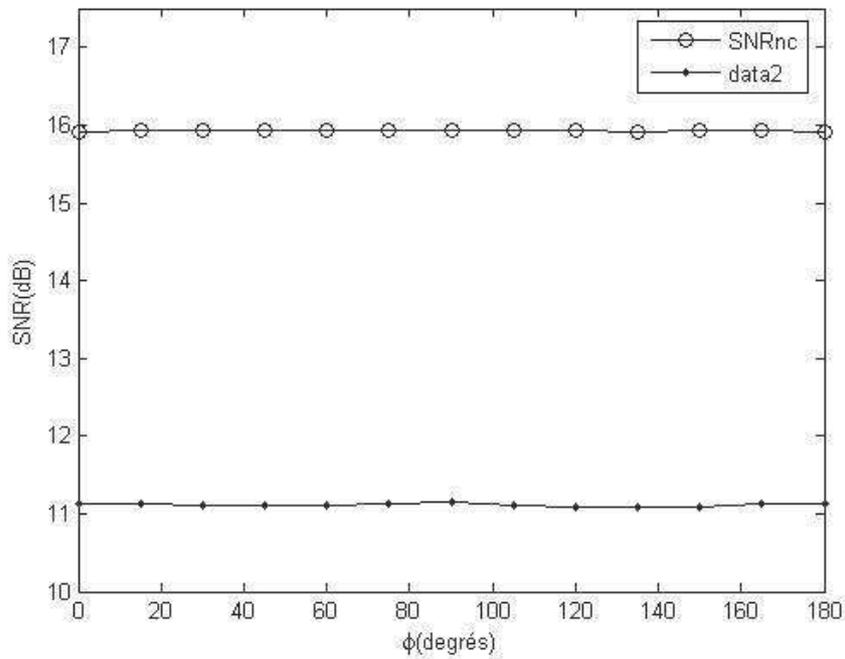


FIGURE 5.9 – Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de déphasage ϕ , bruit blanc temporellement, modulation OQPSK.

Les figures 5.8 et 5.9 comparent respectivement SNR_y^{nc} à SNR_y^c dans le cas des symboles

complexes (modulation QPSK) et $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ à $\text{SNR}_{z,k}^c$ dans le cas d'une modulation quasi-rectiligne (OQPSK). Elles montent des gains en SNR apporté par le récepteur MLSE dérivé sous la bonne hypothèse de bruit non circulaire de respectivement $1.8dB$ et $4.7dB$. Remarquons que nous avons ici une invariance de SNR vis à vis de la variation de déphasage entre l'interfèreux et le signal utile. Ainsi, les 3 figures 5.7, 5.8 et 5.9 montrent que le récepteur MLSE dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total non-circulaire est plus performant que celui construit sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire, en présence d'un brouilleur BPSK.

Dans un deuxième scénario, on choisit τ_j suivant une loi uniforme ($\tau_j \in [0, T]$) en conservant $\tau_2 = T$. Dans ce cas le bruit total n'est plus blanc temporellement. Nous devons alors utiliser les valeurs numériques issues des expressions (5.2.2) et (5.2.8), (5.2.6) et (5.2.10), (5.3.12) et (5.3.14). En effet, dans le cas où le bruit n'est plus blanc temporellement, les expressions analytiques de la section 5.8 ne seront plus valables car nous nous plaçons ainsi dans le cas où le brouilleur (mono-trajet) n'est pas synchronisé avec le signal utile ($\tau_j \neq 0$).

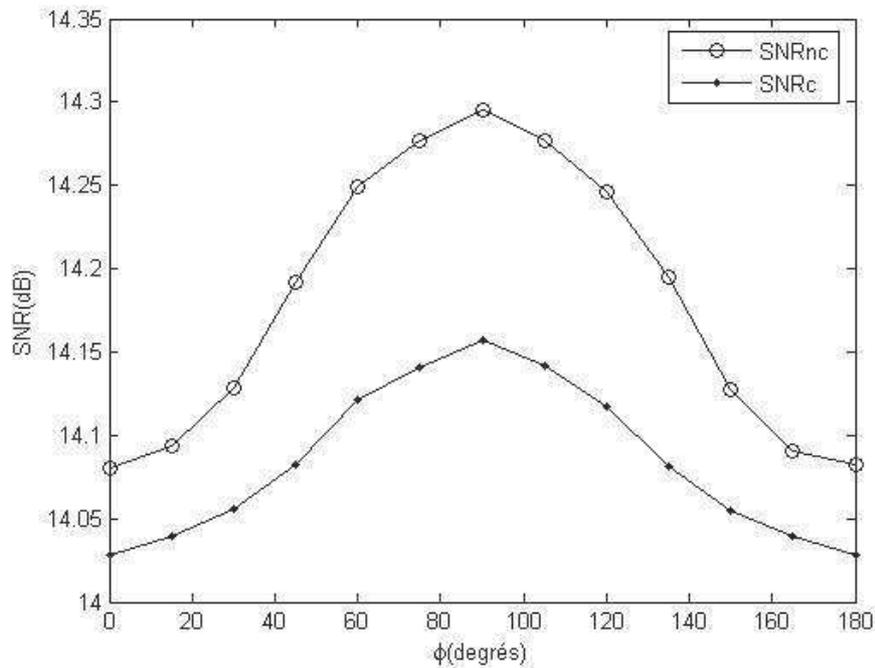


FIGURE 5.10 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit temporellement coloré.

La figure 5.10 trace des valeurs de SNR_z^{nc} et SNR_z^c pour des symboles réels BPSK correspondants aux expressions (5.2.10) et (5.2.6) moyennées sur 50000 canaux aléatoires. Cette figure montre aussi que le récepteur MLSE dérivé sous la bonne hypothèse d'un bruit total non-circulaire est plus performant que celui dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire. Ce

gain atteint une valeur maximale de $0.14dB$.

Pour les modulations QPSK et OQPSK, nous avons remarqué un gain en SNR apporté par l'utilisation de MLSE dérivé sous la bonne hypothèse d'un bruit non circulaire et une invariance de SNR vis à vis de la variation de déphasage entre l'interfèreux et le signal utile, comme dans le cas d'un bruit temporellement blanc.

Dans un troisième scénario on choisit $\tau_j \in [0, T]$ et $\tau_2 \in [0, T]$ suivant deux lois uniformes indépendantes. Dans ce cas aussi le bruit total n'est pas blanc temporellement et nous devons alors utiliser les expressions (5.2.2) et (5.2.8), (5.2.6) et (5.2.10), (5.3.12) et (5.3.14).

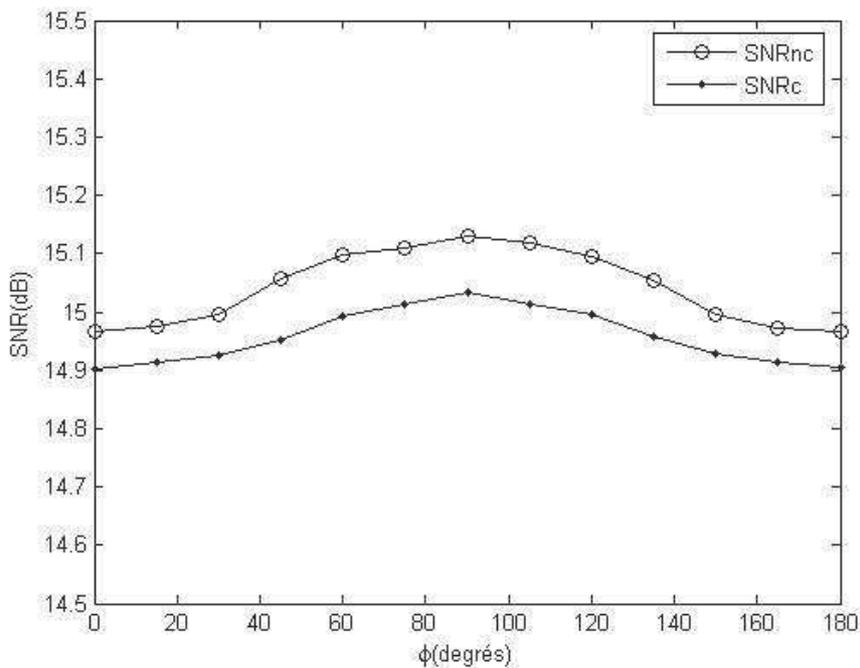


FIGURE 5.11 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de déphasage ϕ , bruit temporellement coloré.

La figure 5.11 montre aussi que le récepteur MLSE avec des symboles réels BPSK, dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total non-circulaire est plus performant que celui dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire et apporte un gain maximal d'environ $0.1dB$.

Pour les modulations QPSK et OQPSK, nous avons remarqué dans ce scénario aussi, des gains apportés par les récepteurs MLSE dérivés sous l'hypothèse d'un bruit total non-circulaire et une invariance des SNR vis à vis de la variation de déphasage entre l'interfèreux et le signal utile.

En comparant les deux figures 5.7 et 5.10, nous constatons que la synchronisation entre le signal utile et le brouilleur a amélioré les performances des récepteurs MLSE circulaire et MLSE

non circulaire. Cependant, la "coloration" temporelle de bruit a réduit le gain réalisé en remplaçant le récepteur MLSE circulaire par le récepteur MLSE non circulaire.

Dans un quatrième scénario, on choisit $\tau_j = 0$. Le bruit total est alors blanc temporellement (avec $\eta_2 = 0dB$). On choisit également $\tau_2 = T$ (ou de façon équivalente $\tau_2/T \in \mathbb{Z}$) et $\phi = \pi/2$. Nous calculons numériquement les valeurs moyennes des SNR (5.8.55) et (5.8.58), (5.8.56) et (5.8.59), (5.8.57) et (5.8.60) de la partie 5.8 en fonction de l'INR ou la puissance π_j du brouilleur en entrée de récepteur pour les 3 couples de récepteurs MLSE associés à des modulations QPSK/BPSK/OQPSK.

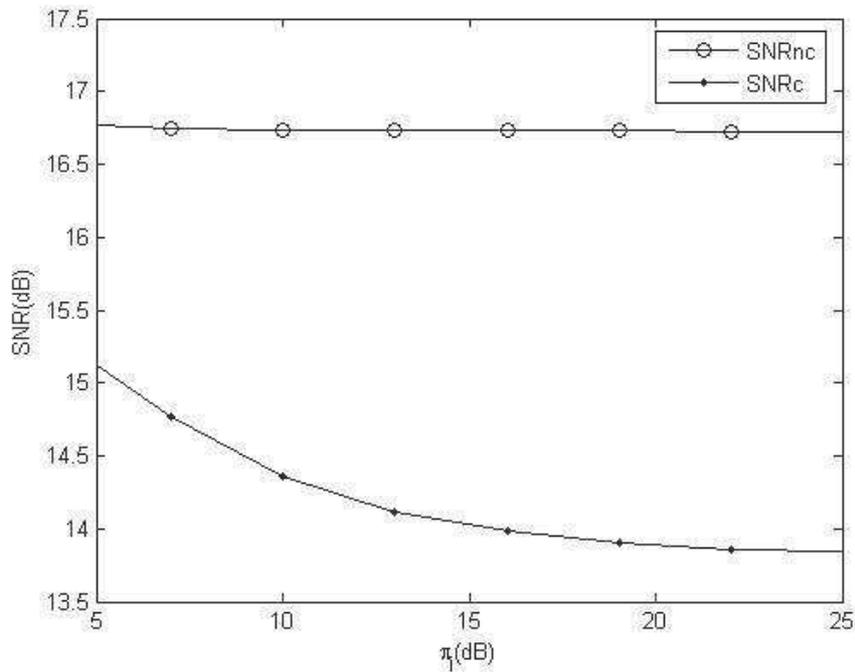


FIGURE 5.12 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.

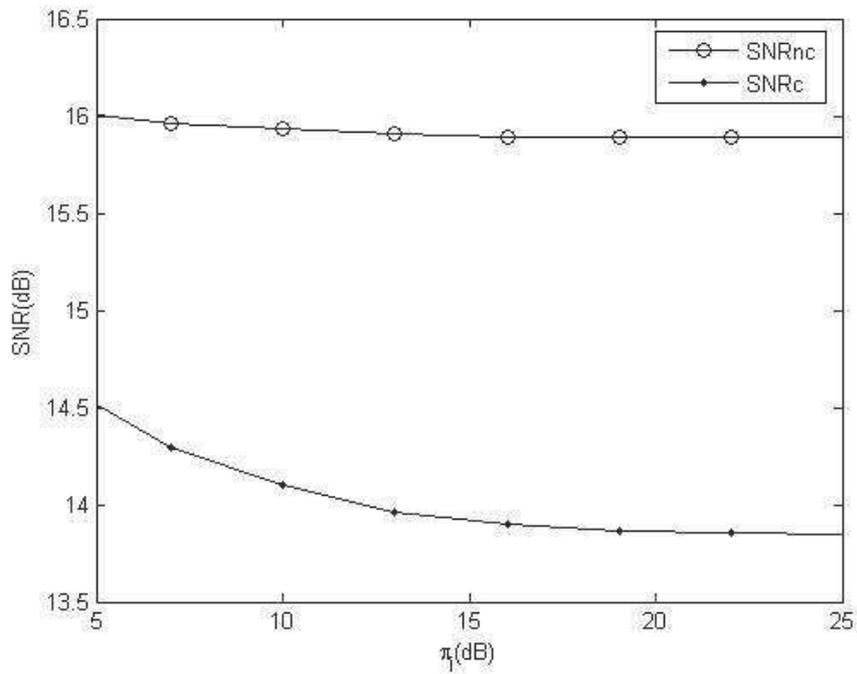


FIGURE 5.13 – Variation de SNR_y^{nc} et SNR_y^c en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.

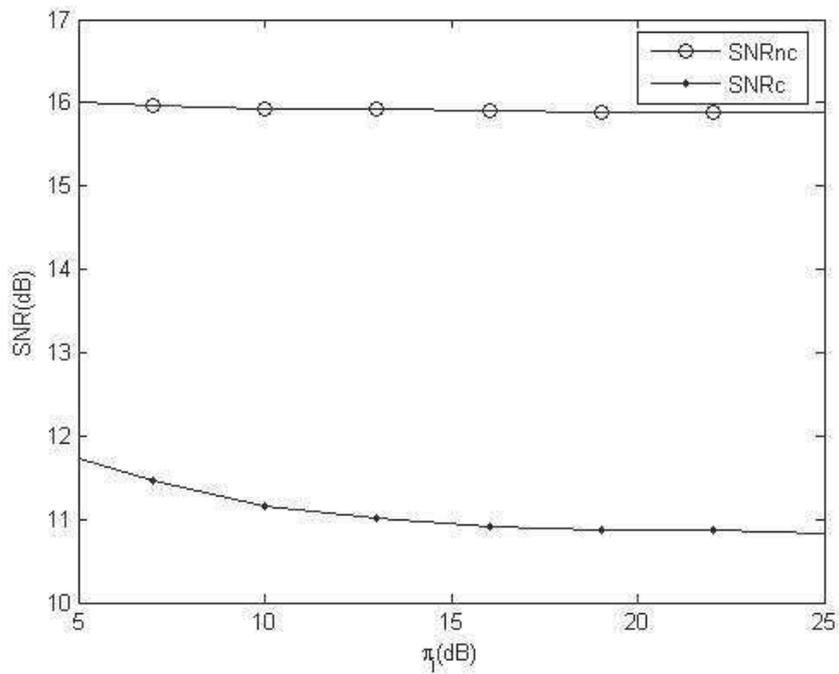


FIGURE 5.14 – Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de la puissance π_j , bruit temporellement blanc.

Pour les différentes valeurs de π_j , pour les différentes modulations du signal utile, nous

remarquons un gain en SNR apporté par le récepteur MLSE dérivé sous hypothèse de bruit non circulaire. Ce gain augmente en fonction de π_j . Nous remarquons aussi qu'à partir de certaines valeurs de π_j les récepteurs MLSE circulaires et non circulaires deviennent robustes à la variation de la puissance de brouilleur. Cette robustesse est plus importante chez les récepteurs non circulaires.

Remarque :

Nous avons étudié également le cas où le bruit total est coloré temporellement (on choisit $\tau_j \in [0, T]$). Nous choisissons le reste des paramètres comme dans le quatrième scénario ($\tau_2 = T$ et $\phi = \pi/2$) sauf cette fois-ci $N = 1$. Rappelons que le brouilleur est toujours modulé en BPSK. Nous calculons numériquement les valeurs moyennes des SNR (5.8.58), (5.8.56), (5.8.57) et (5.8.60) de la partie 5.8 en fonction de la puissance π_j du brouilleur en entrée de récepteur pour les 2 couples de récepteurs MLSE associés à des modulations rectilignes et quasi-rectilignes (signal utile BPSK/OQPSK).

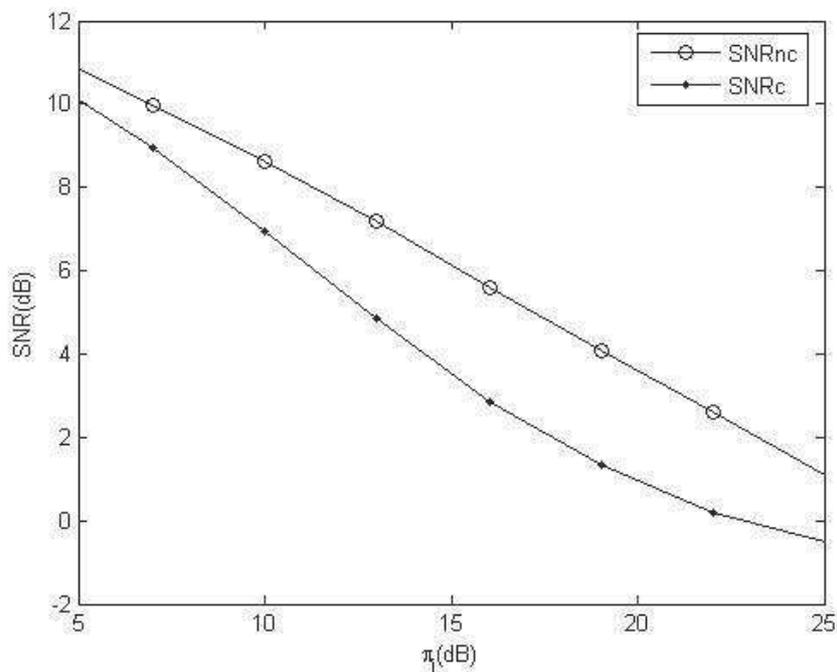


FIGURE 5.15 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de la puissance π_j , SOI BPSK, bruit temporellement coloré.

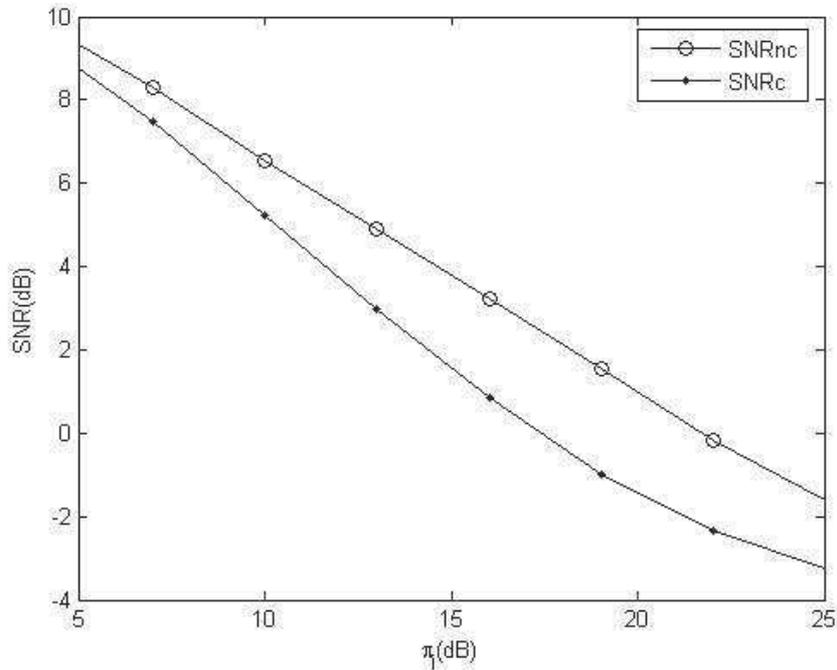


FIGURE 5.16 – Variation de $\text{SNR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SNR}_{z,k}^c$ en fonction de la puissance π_j , SOI OQPSK, bruit temporellement coloré.

Les deux figures 5.15 et 5.16 montrent que pour les différentes valeurs de π_j et pour les différentes modulations du signal utile (BPSK/OQPSK), nous remarquons un gain en SNR apporté par le récepteur MLSE non circulaire par rapport au récepteur MLSE circulaire. Par exemple pour un signal utile BPSK, et pour $\pi_j = 20\text{dB}$ nous avons un gain d'environ 2.5dB . Ce gain devient plus important pour les grandes valeurs de π_j et est légèrement plus important dans le cas d'un signal utile BPSK que pour un signal utile OQPSK.

Nous remarquons que contrairement au cas du bruit blanc (scénario 4), les récepteurs MLSE circulaires et non circulaires ne sont plus robustes à la puissance de brouilleur.

Une autre étude nous a permis de constater que le gain apporté par les récepteurs MLSE non circulaires s'affaiblit en passant de $N = 1$ à $N = 2$.

5.9.2 Cas de bruit cyclo-stationnaire du second ordre

Nous considérons dans ce paragraphe le cas particulier où le bruit (composé d'un brouilleur cyclo-stationnaire et d'un bruit thermique gaussien temporellement et spatialement blanc) est cyclo-stationnaire. Ceci est en particulier le cas pratique d'interférences QAM, PAM, modulation quasi rectiligne où l'impulsion formante est réelle de type "racine carrée de cosinus surelevé" et de roll off différent de zéro. En se plaçant dans les conditions d'un canal mono-trajet pour le signal utile et le brouilleur, avec toujours une synchronisation du récepteur sur le signal utile, nous avons pour le

signal utile :

$$\mathbf{h}(t) = \delta(t)\mathbf{h}. \quad (5.9.63)$$

Soit

$$\mathbf{g}(t) = v(t) * \mathbf{h}(t) = v(t)\mathbf{h}.$$

Ce qui implique

$$\tilde{\mathbf{g}}(f) = v(f)\tilde{\mathbf{h}},$$

car l'impulsion $v(t)$ de type "racine carrée de cosinus surelevé" est réelle.

Pour le bruit total

$$\mathbf{n}(t) = \sqrt{\pi_j} \sum_k c_k \mathbf{g}_j(t - kT) + \mathbf{n}_G(t),$$

où

$$\mathbf{g}_j(t) = v(t) * \mathbf{h}_j(t) \text{ avec } \mathbf{h}_j(t) = \alpha_j \delta(t - \tau_j) \mathbf{j}.$$

avec $\alpha_j = |\alpha_j|e^{i\phi}$ où $|\alpha_j| = 1$. Pour les illustrations nous considérons cette fois-ci ($N = 1$) avec : $\pi_s/\eta_2 = 10$, $\pi_j/\eta_2 = 10$, le déphasage ϕ suit une loi de probabilité uniforme dans $[0, 2\pi]$.

Nous considérons en particulier le cas de signal utile et d'un brouilleur BPSK. L'impulsion $v(t)$ est de type racine carrée de cosinus surelevé de roll off $\alpha_{ro} \in [0, 1]$. Ainsi, $v(f)$ est de support $[-\frac{1}{2T}(1 + \alpha_{ro}), \frac{1}{2T}(1 + \alpha_{ro})]$. Le signal utile et le brouilleur sont ainsi cyclo-stationnaires de même période T . Le bruit a pour densité spectrale de puissance et densité spectrale de puissance complémentaire d'après (I.2.19) et (I.2.20) appliqué à l'impulsion $v(t - \tau_j)$ de transformé de Fourier $v(f)e^{-i2\pi f\tau_j}$:

$$\mathbf{R}_n^{\frac{k}{T}}(f) = \begin{cases} \frac{\pi_j}{T} E[c_k^2] v(f + \frac{k}{2T}) v^*(f - \frac{k}{2T}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} \tau_j} \mathbf{j} \mathbf{j}^H + \eta_2 \mathbf{I}_N & \text{pour } k = 0 \\ \frac{\pi_j}{T} E[c_k^2] v(f + \frac{k}{2T}) v^*(f - \frac{k}{2T}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} \tau_j} \mathbf{j} \mathbf{j}^H & \text{pour } k = -1, 1 \\ \mathbf{0} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\mathbf{C}_n^{\frac{k}{T}}(f) = \begin{cases} \frac{\pi_j}{T} E[c_k^2] e^{2i\phi} v(f + \frac{k}{2T}) v(-f + \frac{k}{2T}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} \tau_j} \mathbf{j} \mathbf{j}^T & \text{pour } k = -1, 0, 1 \\ \mathbf{0} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous calculons les SNR_z^{nc} et SNR_z^c pour le récepteur MLSE ((5.4.18) et (5.4.22)) puis pour le récepteur pseudo MLSE ((5.6.28) et (5.6.34)) avec $\tau_j = 0$.

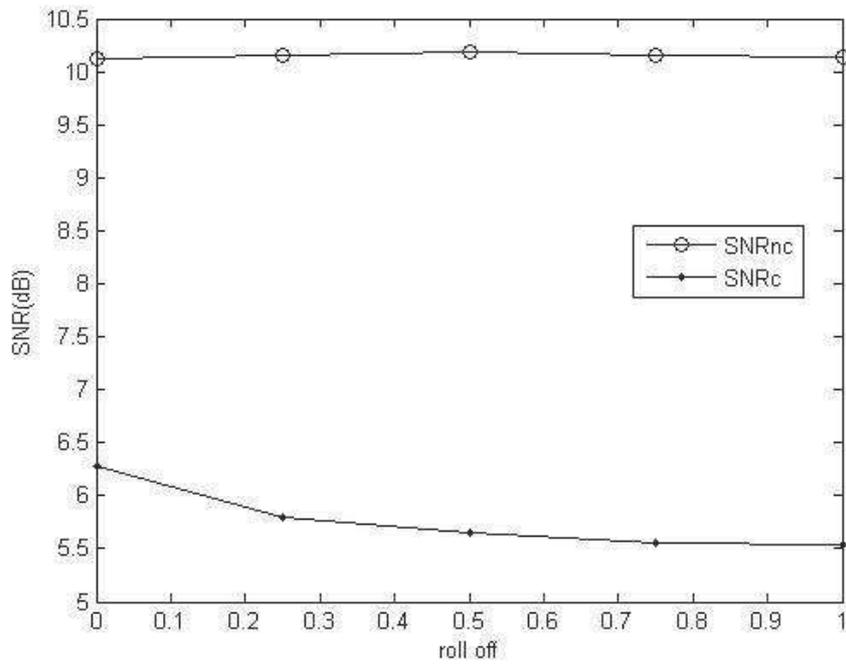


FIGURE 5.17 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 1$.

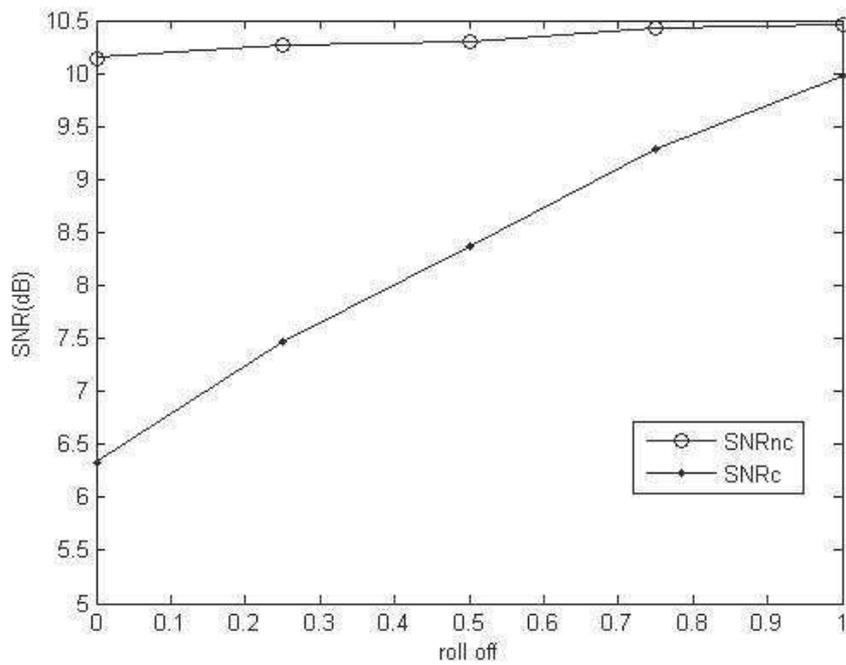


FIGURE 5.18 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur pseudo-MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 1$.

A partir des figures 5.17 et 5.18, nous remarquons que dans le cas d'une réception de type SAIC où le signal utile et le brouilleur sont synchronisés et pour les différentes valeurs de roll off $\alpha_{ro} \in]0, 1]$. Nous avons des gains en SNR apportés par les récepteurs MLSE (stationnaire) et pseudo MLSE (cyclostationnaire) non circulaires par rapport respectivement aux récepteurs MLSE (stationnaire) et pseudo MLSE (cyclostationnaire) circulaires. De plus, nous constatons des gains en SNR apportés par le récepteur pseudo MLSE dérivé sous hypothèse de bruit non circulaire et celui dérivé sous hypothèse de bruit circulaire par rapport au récepteur MLSE dérivé respectivement sous hypothèse de bruit non circulaire et circulaire. Ces gains augmentent en fonction de α_{ro} . Pour $\alpha_{ro} = 0$, les deux récepteurs MLSE et pseudo MLSE sont identiques d'où les mêmes valeurs du SNR.

Ces gains diminuent en passant de $N = 1$ à $N = 2$ capteurs en prenant des DOA indépendantes et de lois uniformes dans $[0, 2\pi]$ (voir figures 5.19 et 5.20).

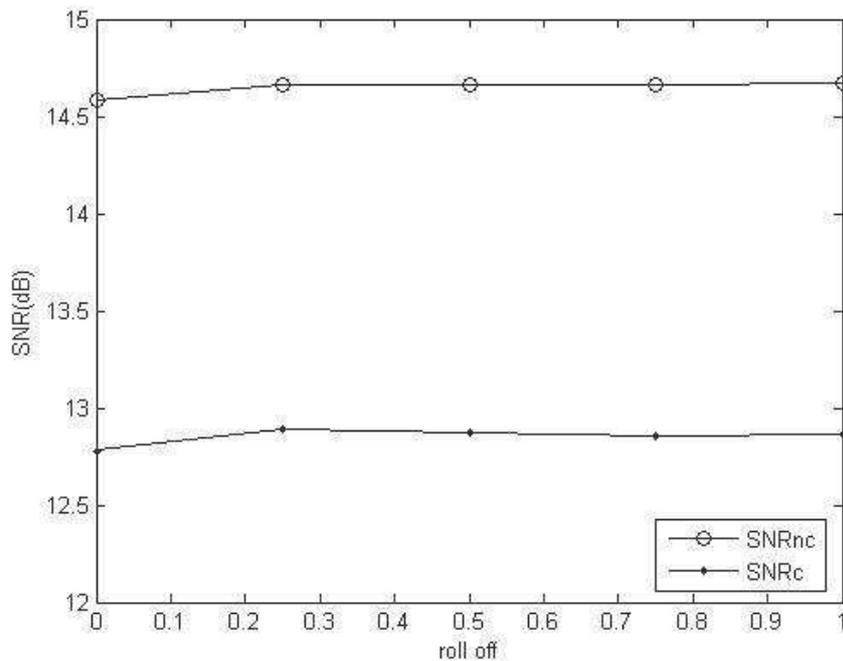


FIGURE 5.19 – Variation de SNR_z^{nc} et SNR_z^c en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 2$.

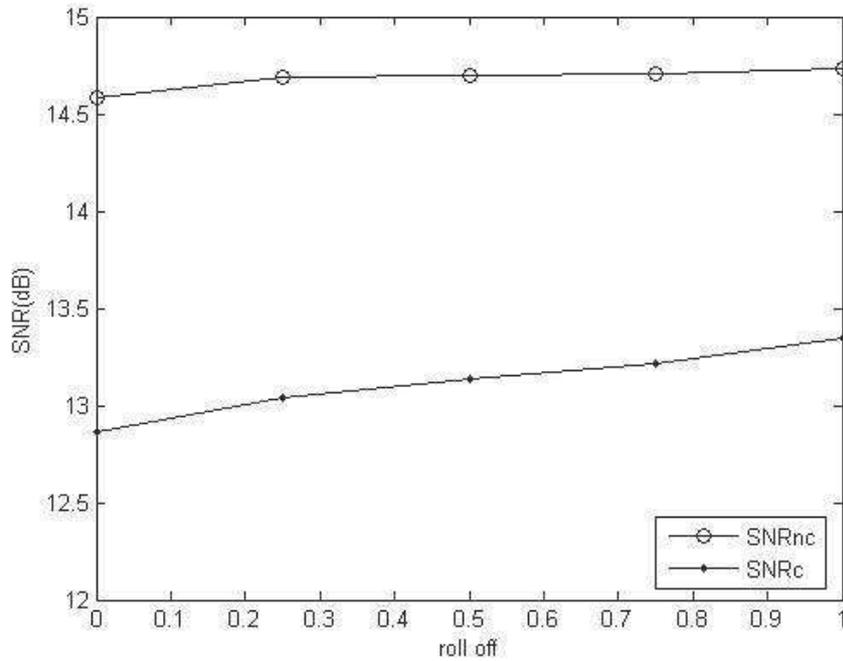


FIGURE 5.20 – Variation de $\text{SNR}_{\frac{z}{2}}^{nc}$ et $\text{SNR}_{\frac{z}{2}}^c$ en fonction de roll off α_{ro} en sortie du récepteur pseudo-MLSE, bruit cyclo-stationnaire, $N = 2$.

Malheureusement, dans le cas d'une désynchronisation entre le brouilleur et le signal utile, nous n'observons pas de gain apporté par le récepteur pseudo MLSE, mais plutôt une détérioration.

5.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude des performances des récepteurs MLSE stationnaires (développés dans le chapitre 3) et des récepteurs pseudo MLSE cyclo-stationnaires (développés dans le chapitre 4).

Des expressions analytiques des SNR en sortie des filtrages adaptés ont été données pour tous ces récepteurs en présence de bruit stationnaire ou cyclo-stationnaire éventuellement non circulaires. Des expressions interprétables de ces SNR ont été données pour des canaux spéculaires sous l'hypothèse que le bruit total est blanc temporellement. Enfin, des illustrations numériques de ces SNR confirment les gains obtenus en utilisant les récepteurs MLSE sous hypothèse non circulaire en présence de brouilleur BPSK.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce manuscrit a présenté des résultats concernant le comportement et la sensibilité de récepteur WL MMSE avec séquence d'apprentissage utilisé pour un signal utile ayant une modulation linéaire rectiligne ou quasi rectiligne corrompu par des interférences inter-symboles, un bruit de fond et un brouilleur ayant la même modulation, en présence des résidus de porteuse et de désynchronisation. Face à l'absence d'études théoriques s'intéressant aux performances analytiques des récepteurs WL optimaux dans la littérature, l'étude présentée dans ce rapport a permis d'évaluer et de quantifier les performances des concepts SAIC et MAIC en présence des résidus de porteuse sur le signal utile et le brouilleur et de désynchronisation.

En particulier, l'analyse théorique de performance concernant ces techniques en présence de résidus de porteuse sur le signal utile et le brouilleur, en fonction du SINR et du BER pour des signaux rectiligne (utile et brouilleur), a abouti à l'obtention d'expressions analytiques interprétables pour le cas du récepteur SAIC avec un filtrage de mise en forme de type NRZ. Ainsi des expressions analytiques simples ont été obtenues et analysées. Nous avons montré en particulier que dans le cas où la puissance du brouilleur est supérieure ou égale à celle du signal utile les performances sont meilleures dans le cas d'absence d'un résidu de porteuse sur le brouilleur que dans le cas d'absence de résidus de porteuse sur l'utile, ce qui rend la correction du résidu de porteuse sur du brouilleur prioritaire sur celui de l'utile. Ces résultats théoriques ont été comparés à des illustrations numériques qui ont été réalisées en prenant comme paramètres ceux du standard GSM, mais avec des modulations BPSK.

Cette étude a été étendue pour les modulations MSK and GMSK, vu que le concept SAIC est en voie de standardisation pour le GSM et les réseaux cellulaires.

L'application du concept SAIC aux modulations MSK et GMSK s'est accompagnée de la mise en oeuvre de filtrage Spatio-temporel. Nous avons étudié l'impact de la taille de filtre spatio-temporel sur les performances. L'étude de l'impact de choix de filtre de mise en forme (adapté ou de bande) a été analysée théoriquement et validée par simulations.

Les conclusions à tirer de cette partie est que le récepteur SAIC reste plus sensible au résidu de fréquence du brouilleur qu'au résidu de fréquence du signal utile pour les modulation MSK et GMSK et que cette différence de sensibilité devient plus importante en augmentant la taille de filtre spatio-temporel. Aussi, l'utilisation d'un filtre de mise en forme de bande permet d'améliorer les performances de récepteur SAIC par rapport au filtrage adapté permettant ainsi de réduire la taille du filtre spatio-temporel.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, grâce à une extension au cas complexe non circulaire du célèbre théorème de factorisation spectrale que nous avons démontré, nous avons déterminé la structure du récepteur MLSE pour des modulations linéaires à symboles complexes et à symboles réels, puis pour des modulations linéaires quasi rectilignes dans un contexte multi-capteurs avec un bruit gaussien stationnaire non circulaire coloré. Tous ces récepteurs se composent d'un filtre adapté, d'un échantillonneur au rythme symbole et de la minimisation d'une métrique qui peut se mettre en oeuvre par un algorithme de Viterbi.

Nous avons noté que tous les filtres WL adaptés obtenus sont structurés comme sous l'hypothèse de bruit circulaire. Ils se composent ici d'un filtrage WL de blanchiment spatio-temporel qui circularise le bruit au second-ordre, d'un filtrage adapté au canal global sur chaque capteur et d'un filtrage adapté au filtre de mise en forme. Nous avons tenté d'étendre cette structure de récepteur MLSE dans le cas de bruit cyclostationnaire où nous avons proposé une structure sous optimale appelée pseudo MLSE.

Nous avons donné des expressions analytiques des SNR en sortie de filtre adapté de tous nos récepteurs développés dans les chapitres 3 et 4 sous divers hypothèses de bruit, c'est à dire de brouilleurs stationnaires ou cyclostationnaires potentiellement non circulaires. Notons que le cas de brouilleur cyclostationnaire a nécessité une étude originale des spectres cycliques et complémentaires cycliques des modulations quasi-rectilignes. Elles nous ont permis de montrer que les récepteurs MLSE prenant en compte la non circularité du bruit total ont de meilleures performances que les récepteurs MLSE classiques dérivés sous l'hypothèse circulaire, quand ils sont en présence d'interférences non circulaires.

Nous avons fait une étude détaillée de la cyclostationnarité du second ordre des modulations linéaires (QAM ou PAM) et linéaires quasi-rectilignes ce qui nous a permis d'en préciser les fréquences cycliques des densités spectrales de puissance cycliques et densités spectrales de puissance cycliques complémentaires.

Perspectives

Perspectives de la première partie

- L'étude des récepteurs SAIC/MAIC de type MMSE pour des modulations MSK et GMSK aux séquence d'apprentissage devrait être approfondie, en particulier en étudiant plus finement l'effet du suréchantillonnage et nombre de coefficients du filtre spatio-temporel.
- L'étude de récepteurs robustes à la présence de décalage de fréquence connu ou estimé devrait être menée en fonction de l'ordre de grandeur de Δf de celui ci. Nous avons dans cette thèse précisé le domaine de Δf où le récepteur classique SAIC/MAIC de type MLSE avec séquence d'apprentissage donne des performances acceptables. Celui est $\Delta f T \lesssim 10^{-3}$. Nous savons que pour $\Delta f T > \frac{1}{2}$ un simple filtrage temporel peut être mis en oeuvre. Pour $10^{-3} < \Delta f T < \frac{1}{2}$ de solutions de type frequency shift (FRESH filtering) [38] peuvent être proposées. Quelques structures sous formes de filtrage RIF tronqué et RII ont été étudiées chez Thalès communication sans avoir fait l'objet de publications. Par contre ces solutions ne semblent pas couvrir le domaine $10^{-3} < \Delta f T < 3 \cdot 10^{-2}$ où donc des travaux restent à faire.

Perspectives de la deuxième partie

- Nous avons conjecturé que les performances en terme de SNR et de probabilité d'erreur symbole étaient directement reliées. Cette hypothèse reste à valider à l'aide de simulation de Monte Carlo en sortie de l'algorithme de Viterbi. En pratique celui ci devrait tronquer la taille de la mémoire L de l'état du canal global (incluant le filtre WL adapté). Donc une étude de pertes de performances dûes à cette troncature devra être menée.
- Les récepteurs MLSE proposés supposent que la réponse impulsionnelle du canal $\mathbf{g}(f)$ et la densité spectrale de puissance $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$ du bruit total sont connues. Des mises en oeuvre de ces récepteurs exigent des estimations de $\mathbf{g}(f)$ et $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$. Donc différentes techniques d'estimations par exemple par séquence d'apprentissage devront être étudiées.
- Nous avons vu dans nos simulations numériques que le récepteur pseudo MLSE que nous avons proposé en bruit cyclostationnaire ne permettait pas d'améliorer les performances en SNR par rapport au récepteur sous hypothèse stationnaire que dans le cas de canaux spéculaires avec un seul trajet principal du signal brouilleur synchronisé sur le signal utile, ce qui est un cas très spécifique et donc d'un intérêt limité. Il convient donc de proposer d'autres extensions structurées du récepteur MLSE stationnaire.
- Une perspective plus ambitieuse serait de démontrer un théorème de type factorisation spectrale sous forme de filtres linéaires variables dans le temps $\mathbf{h}(t, \tau)$ périodiques de période T , nous permettant de construire le récepteur MLSE sous bruit gaussien centré cyclostationnaire.

Autres contextes d'application de signaux/brouilleurs rectilignes ou quasi-rectilignes

En outre cette thèse présente plusieurs axes d'application. Un des axes d'application de cette thèse porte sur l'analyse de l'intérêt, le développement et l'évaluation des performances des récepteurs optimaux WL pour les liaisons OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) à modulation rectilignes ou quasi-rectilignes. L'étude sera étendue aux formes d'onde OFDM pour lesquelles seules les porteuses de référence sont modulées de manière rectiligne comme cela est le cas pour le DVB-T dont les porteuses de références sont en BPSK. En effet, les liaisons OFDM sont d'intérêt croissant pour de nombreuses applications, dont la quatrième génération des radiocommunications cellulaires (WIMAX), la diffusion de télévision numérique (DVB) ou des standards militaires HF et VUHF en assurant des liaisons multi-porteuses permettant de transmettre des débits élevés d'information à travers des canaux très sélectifs en fréquence sans avoir besoin d'égaliser.

D'autres axes d'application de cette thèse sont relatifs au contrôle du spectre pour des sources rectilignes ou quasi-rectilignes et plus particulièrement l'écoute et la localisation d'émetteurs modulés rectilignement ou quasi-rectilignement de la gamme HF à la gamme EHF. Trois axes d'investigation peuvent être privilégiés et correspondent à la séparation autodidacte de sources, à l'identification autodidacte de signatures et à la goniométrie.

Les séparateurs autodidactes de sources sont des techniques de filtrage linéaire d'antenne permettant de séparer P sources, supposées statistiquement indépendantes, à partir d'un réseau de N antennes, sans information a priori sur ces sources. De tels séparateurs sont d'un intérêt considérable pour l'écoute passive de signaux par exemple. L'identification autodidacte de signatures consiste à estimer de manière autodidacte, c'est-à-dire sans information a priori forte sur les sources, les vecteurs directeurs de celles-ci à des fins aussi bien de filtrage ou d'analyse de canal...

La majorité des ces techniques autodidactes actuellement disponibles, n'exploitent pas la propriété de non circularité potentielle des sources et ne peuvent séparer qu'un nombre de sources P au plus égal au nombre d'antennes N . Ainsi ils ne permettent de traiter que des scénarios très spécifiques en termes de nombre de sources et de modulations. Dans ce contexte, une application à cette thèse serait de développer, d'analyser les performances et d'optimiser la mise en oeuvre de séparateurs et identificateurs de signatures de mélanges instantanés de sources (c.à.d. pour des canaux non étalés dans le temps) prenant en compte les propriétés de non circularité, de rectilinéarité ou de quasi-rectilinéarité potentielle des sources, en particulier dans le but de séparer un nombre de sources supérieur au nombre de capteurs, par filtrage WL. Les techniques développées seront comparées aux techniques existantes.

La goniométrie est la détermination de la direction d'arrivée d'un signal. Les techniques de goniométrie à haute résolution au second ordre, du type MUSIC2, sont maintenant bien connues et validées expérimentalement pour de nombreuses applications. Ces techniques permettent de traiter les situations multi-sources mais elles sont peu robustes aux erreurs de modèle et ne peuvent traiter que $P = N - 1$ sources à partir de N antennes.

Pour pallier les limitations précédentes, d'autres techniques de goniométrie à haute résolution aux ordres supérieurs à 2 ont été introduites dans les années 90, parmi lesquelles la technique MUSIC4 est la plus populaire. Ces techniques s'avèrent plus robustes aux erreurs de modèles que MUSIC2. Toutefois, ces techniques n'exploitent pas le caractère non circulaire, rectiligne ou quasi-rectiligne des sources et s'avèrent donc sous-optimales pour ces contextes. Dans ce contexte, un autre axe d'investigation de ce travail sera de développer, d'analyser les performances et d'optimiser la mise en oeuvre de techniques de goniométrie prenant en compte les propriétés de rectilinéarité ou de quasi-rectilinéarité potentielle des sources, en particulier dans le but de traiter un nombre maximal de sources à partir de N antennes ou de réduire au maximum la taille des réseaux à performances constantes.

Annexe A

Preuve de (1.4.55), (1.4.56) et (1.4.57)

Preuve de (1.4.55) :

Sous les hypothèses suivantes :

$$\varepsilon_j \gg 1, \psi'_s(K) \ll \psi \text{ et } \psi_{s,k} \ll \psi,$$

nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$\sin((2\psi_{j,k} - \psi_j(K))/2) \approx \psi_{j,k} - \psi_j(K)/2 \quad (\text{A.0.1})$$

et alors les expressions (1.4.41) se réduisent à :

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_s)^2 &\approx 4\varepsilon_j^2 [1 - \cos(2\psi + \psi_j(K))]^2 \\ &= 4\varepsilon_j^2 [\sin^2((2\psi + \psi_j(K))/2)]^2 \\ (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_j(k, k))^2 &\approx 4\varepsilon_j^2 [\cos(\psi + \psi_{j,k}) - \cos(\psi - \psi_{j,k} + \psi_j(K))]^2 \\ &= 4\varepsilon_j^2 [2 \sin((2\psi + \psi_j(K))/2) \sin((2\psi_{j,k} - \psi_j(K))/2)]^2 \\ \|\tilde{\omega}(K)\|^2 &\approx 4\varepsilon_j^2 [1 - \cos(2\psi + \psi_j(K))] \\ &= 8\varepsilon_j^2 \sin^2((2\psi + \psi_j(K))/2). \end{aligned}$$

Preuve de (1.4.56) :

Avec les hypothèses : $\varepsilon_j \gg 1, \psi'_s(K) \ll \psi$ et $\psi_{s,k} \ll \psi$, les expressions (1.4.54) se réduisent à :

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_s(k, k))^2 &\approx 16\varepsilon_j^2 \sin^2(\psi - \psi_{s,k}) \sin^2(\psi - \psi_{s,k})^2 \\ (\tilde{\omega}^H(K)\tilde{\mathbf{h}}_j)^2 &\approx 4 \cos^2(\psi'_s(K) - \psi) \\ \|\tilde{\omega}(K)\|^2 &\approx 8\varepsilon_j^2 \sin^2(\psi - \psi'_s(K)), \end{aligned}$$

ainsi le SINR se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}
\text{SINR}(kT) &\approx \frac{4\varepsilon_s \varepsilon_j^2 (\cos(\psi'_s(K) - \psi_{s,k}) - \cos(\psi'_s(K) + \psi_{s,k} - 2\psi))^2}{4\varepsilon_j \cos^2(\psi - \psi'_s(K)) + 8\varepsilon_j^2 \sin(\psi - \psi'_s(K))} \\
&\approx \frac{16\varepsilon_s \varepsilon_j^2 \sin^2(\psi - \psi_{s,k}(K)) \sin^2(\psi - \psi'_s(K))}{8\varepsilon_j^2 \sin^2(\psi - \psi'_s(K))} \\
&= 2\varepsilon_s \sin^2(\psi - \psi_{s,k}(K)).
\end{aligned}$$

Preuve de (1.4.58) :

$$\begin{aligned}
\text{SINR} &= 2\varepsilon_s \sin^2(\psi - \psi_{s,k}) = \varepsilon_s (1 - \cos(2\psi - 2\psi_{s,k})) \\
&\approx \varepsilon_s (1 - \cos(2\psi) - 2\psi_{s,k} \sin(2\psi)) = \varepsilon_s (1 - \cos(2\psi)) - 2\varepsilon_s \psi_{s,k} \sin(2\psi) \\
&= \varepsilon_s (1 - \cos(2\psi)) \left(1 - 2 \frac{\psi_{s,k}}{\tan \psi}\right).
\end{aligned}$$

■

Annexe B

Linéarisation de la modulation GMSK

Pour les modulations de fréquence à enveloppe constante et phase continue CPM, dont la GMSK fait partie, la phase instantannée du signal d'enveloppe complexe $s(t) = e^{i\phi(t)}$ a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i g(\tau - iT) d\tau \\ &\triangleq 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i q(t - iT)\end{aligned}$$

avec h est l'indice de modulation (égale à 0.5 pour la GMSK), $g(t)$ et $q(t) \triangleq \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$ sont respectivement les filtres de mise en forme de la fréquence et de la phase. Pour la GMSK le filtre de mise en forme de la fréquence a l'expression suivante :

$$g(t) \triangleq \frac{1}{2T} \left(Q\left(\gamma\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) - Q\left(\gamma\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) \right),$$

avec $\gamma \triangleq \frac{2\pi B}{\sqrt{\ln(2)}}$ et B est la largeur de bande du filtre gaussien. Ainsi le filtre de mise en forme de la phase du signal a la forme suivante :

$$\begin{aligned}q(t) &\triangleq \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \left(\left(t - \frac{(l+1)T}{2}\right) Q\left(\gamma\left(t - \frac{(l+1)T}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(t - \frac{(l-1)T}{2}\right) Q\left(\gamma\left(t - \frac{(l-1)T}{2}\right)\right) - \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{\gamma^2}{2}\left(t - \frac{(l+1)T}{2}\right)^2} - e^{-\frac{\gamma^2}{2}\left(t - \frac{(l-1)T}{2}\right)^2} \right) \right),\end{aligned}$$

avec l est le support temporel du $g(t)$ et est égale à 3 pour GMSK de $BT = 0.3$ (valeur utilisée pour le GSM). En échantillonnant au rythme de $\frac{\eta}{T}$, avec η est le nombre d'échantillons par bit, l'expression de filtre de mise en forme de la phase $q(t)$ devient :

$$\begin{aligned}q\left(\frac{nT}{\eta}\right) \triangleq q_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{n}{\eta} - 2\right) Q\left(\gamma T \left(\frac{n}{\eta} - 2\right)\right) - \left(\frac{n}{\eta} - 1\right) Q\left(\gamma T \left(\frac{n}{\eta} - 1\right)\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma T \sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{\eta} - 2\right)\gamma T\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma T \left(\frac{n}{\eta} - 1\right)\right)^2} \right),\end{aligned}$$

qui est indépendante de T et dépend uniquement de la valeur de BT et n . Il a été montré dans [31] que tout signal modulé à phase continue (CPM) de longueur de filtre $g(t)$ égal à l peut être écrit comme la somme de 2^{l-1} signaux PAM. En appliquant ceci à un signal GMSK avec $BT = 0.3$, il s'écrit comme la somme de 4 signaux PAM comme suit :

$$s(t) = \sum_{k=0}^3 \left(\sum_n i^n a_{k,n} h_k(t - nT) \right),$$

où $a_{k,n} = \pm 1$ et :

$$\begin{aligned} h_0(t) &= C(t-T)C(t)C(t+T) \\ h_1(t) &= C(t-T)C(t+3T)C(t+T) \\ h_2(t) &= C(t-T)C(t+4T)C(t) \\ h_3(t) &= C(t-T)C(t+4T)C(t+3T), \end{aligned}$$

la fonction $C(t)$ a la forme suivante [31] :

$$C(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2q(t))\right) & : 0 \leq t \leq 3T \\ C(-t) & : -3T \leq t \leq 0 \\ 0 & : \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le tracé des fonctions $(h_k(t))_{k=0,1,2,3}$ montre que la fonction $h_0(t)$ contient la quasi totalité d'énergie de l'impulsion GMSK. Ainsi, pour des raisons de simplifications, nous faisons l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} s(t) &\approx \sum_n i^n a_{0,n} h_0(t - nT) \\ &\approx \sum_n b_n h_0(t - nT), \end{aligned}$$

avec $b_n = i^n a_{0,n} \in \{\pm 1, \pm i\}$, les symboles $a_{0,n}$ sont liés au symboles transmis par $a_{0,n} = \alpha_n a_{0,n-1}$. Les symboles b_n sont donnés par [31] :

$$\begin{aligned} b_n &= i^{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \\ &= i^{\alpha_n} b_{n-1} \\ &= i \alpha_n b_{n-1} \end{aligned}$$

Chacun de ces pseudo-symboles dépend des symboles passés. Afin d'éviter la propagation d'erreurs, il faut utiliser un précodage différentiel à l'émission : $a_n = \alpha_n \alpha_{n-1}$, avec $\alpha_{-1} = 1$. Ainsi les symboles a_n et α_n ont les mêmes statistiques ce qui permet pour le calcul de BER, d'éliminer le décodeur différentiel à la réception. ■

Annexe C

Extension de (3.2.2) au cas d'un bruit multidimensionnel circulaire blanc spatialement et temporellement

Dans le cas multi-capteurs, nous obtenons le modèle d'observation suivant :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^N, \quad m = 1..M \quad (\text{C.0.1})$$

où $\mathbf{x}(t)$ est un signal multidimensionnel et $\mathbf{n}(t)$ est un bruit complexe gaussien, centré, stationnaire, blanc temporellement et spatialement, de matrice de covariance spatiale $\mathbf{R}_n = \mathbf{I}_N$ et de matrice de covariance complémentaire spatiale $\mathbf{C}_n = \mathbf{0}$.

Considérons l'espace complexe des signaux engendré par les composantes de $s^{(1)}(t), \dots, s^{(M)}(t)$ de base orthonormée complexe scalaire $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_K(t)\}$ dont l'expression de $\{\varphi_k(t)\}_{k=1..K}$ et K est inutile de préciser. La décomposition orthogonale de $\mathbf{s}^{(m)}(t)$ dans cette base complexe s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K s_{1,k}^{(m)} \varphi_k(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^K s_{N,k}^{(m)} \varphi_k(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.2})$$

Ainsi $\mathbf{x}(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} x_1(t) & = s_1^{(m)}(t) + n_1(t) = \sum_{k=1}^K (s_{1,k}^{(m)} + n_{1,k}) \varphi_k(t) + n'_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N(t) & = s_N^{(m)}(t) + n_N(t) = \sum_{k=1}^K (s_{N,k}^{(m)} + n_{N,k}) \varphi_k(t) + n'_N(t) \end{cases} \quad (\text{C.0.3})$$

où $(n'_1(t), \dots, n'_N(t))$ sont orthogonaux à la base $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_K(t)\}$. Considérons les vecteurs :

$$\mathbf{x} \triangleq \mathbf{s}^{(m)} + \mathbf{n} = (x_{1,1} \dots x_{N,1} \dots x_{1,K} \dots x_{N,K})^T \in \mathbb{C}^{NK}$$

où $\mathbf{s}^{(m)} \triangleq (s_{1,1}^{(m)} \dots s_{N,1}^{(m)} \dots s_{1,K}^{(m)} \dots s_{N,K}^{(m)})^T$ et $\mathbf{n} \triangleq (n_{1,1} \dots n_{N,1} \dots n_{1,K} \dots n_{N,K})^T \in \mathbb{C}^N$, avec $n_{l,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} n_l(t) \varphi_k(t) dt$ et $x_{l,k} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_l(t) \varphi_k(t) dt$.

Calculons les statistiques du deuxième ordre des composantes du vecteur bruit \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} E[n_{l,k} n_{l',k'}^*] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} E[n_l(t) n_{l'}(\tau)] \varphi_k(t) \varphi_{k'}^*(\tau) dt d\tau \\ &= E[n_l(t) n_{l'}(t)] \delta_{k,k'} \\ &= \delta_{l,l'} \delta_{k,k'}, \end{aligned}$$

ainsi \mathbf{n} est gaussien, centré, circulaire, blanc temporellement et spatialement, de matrice de covariance \mathbf{I}_{KN} . Par conséquent, l'équation de maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \text{Arg Min}_m \|\mathbf{x} - \mathbf{s}^{(m)}\|^2 \\ &= \text{Arg Min}_m \sum_{l=1}^N \left(\sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K (x_{l,k} - s_{l,k}^{(m)}) (x_{l,k'}^* - s_{l,k'}^{(m)*}) \delta_{k,k'} \right) \\ &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^N \left(\left| \sum_{k=1}^K (x_{l,k} - s_{l,k}^{(m)}) \varphi_k(t) \right|^2 \right) dt \text{ en substituant } \delta_{k,k'} \text{ par } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t) \varphi_{k'}^*(t) dt \\ &= \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^N \left(\left| x_l(t) - n_l'(t) - \sum_{k=1}^K s_{l,k}^{(m)} \varphi_k(t) \right|^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

or $n_l'(t) \perp \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_K(t)\}$ donc (C.0.4) devient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)\|^2 dt.$$

■

Annexe D

Extension du théorème de factorisation spectrale

Le problème de factorisation spectrale de signaux aléatoires réels stationnaires au second ordre à temps continu ou discret, scalaire ou multidimensionnel a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature, par exemple [52], [53]. Mais à notre connaissance aucune adaptation au cas de signaux aléatoires complexes, à temps continu ou discret, scalaires ou multidimensionnel stationnaires au second ordre non nécessairement circulaires n'a fait l'objet de publications.

Considérons ici un signal aléatoire centré $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^N$ stationnaire au second ordre (au sens WL). Nous supposons que le spectre $\mathbf{R}_x(f)$ transformée de Fourier de

$$\mathbf{R}_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t-\tau)]$$

et le spectre complémentaire $\mathbf{C}_x(f)$ transformée de Fourier de

$$\mathbf{C}_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t-\tau)]$$

existent.

Puisque $\mathbf{R}_x(-\tau) = \mathbf{R}_x^H(\tau)$ et $\mathbf{C}_x(-\tau) = \mathbf{C}_x^T(\tau)$ nous avons $\mathbf{R}_x(f) = \mathbf{R}_x^H(f)$ et $\mathbf{C}_x(-f) = \mathbf{C}_x^T(f)$.

Considérons le signal étendu :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^*(t) \end{pmatrix},$$

et le signal réel associé

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \Re(\mathbf{x}(t)) \\ \Im(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix},$$

reliés par $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t)$ avec $\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^H$. Alors $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau) = E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^H(t-\tau)]$ et $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = E[\bar{\mathbf{x}}(t)\bar{\mathbf{x}}^T(t-\tau)]$ sont reliés par $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau) = \mathbf{T}\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}}(\tau)\mathbf{T}^H$ et $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \frac{1}{4}\mathbf{T}^H\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau)\mathbf{T}$ et par suite la transformée de

Fourier $\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)$ et $\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)$ de respectivement $\mathbf{R}_{\bar{x}}(\tau)$ et $\mathbf{R}_{\bar{x}}(\tau)$ sont reliées par :

$$\mathbf{R}_{\bar{x}}(f) = \mathbf{T}\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)\mathbf{T}^H \text{ et } \mathbf{R}_{\bar{x}}(f) = \frac{1}{4}\mathbf{T}^H\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)\mathbf{T}. \quad (\text{D.0.1})$$

Dans l'hypothèse où la factorisation spectrale du signal réel $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ centré stationnaire du second ordre existe sous forme de densité spectrale de puissance $\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)$, il existe une fonction de transfert $\mathbf{G}(f) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ causale et causalement inversible [55]¹ telle que :

$$\mathbf{R}_{\bar{x}}(f) = \mathbf{G}_{\bar{x}}(f)\mathbf{G}_{\bar{x}}^H(f) = \mathbf{G}_{\bar{x}}(f)\mathbf{G}_{\bar{x}}^T(-f).$$

Par suite, il existe un filtre blanchisseur causal $\mathbf{B}_{\bar{x}}(f) \triangleq \mathbf{G}_{\bar{x}}^{-1}(f)$ satisfaisant :

$$\mathbf{B}_{\bar{x}}(-f) = \mathbf{B}_{\bar{x}}^*(f), \quad (\text{D.0.2})$$

tel que $\mathbf{B}_{\bar{x}}(f)\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)\mathbf{B}_{\bar{x}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N}$. Par suite d'après (D.0.1) $\mathbf{B}_{\bar{x}}(f)\mathbf{R}_{\bar{x}}(f)\mathbf{B}_{\bar{x}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N}$, avec :

$$\mathbf{B}_{\bar{x}}(f) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{T}\mathbf{B}_{\bar{x}}(f)\mathbf{T}^H. \quad (\text{D.0.3})$$

Puisque le filtre blanchisseur $\mathbf{B}_{\bar{x}}(f) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ satisfait (D.0.2), nous avons démontré que $\mathbf{B}_{\bar{x}}(f)$ donné par (D.0.3) est structuré sous la forme :

$$\mathbf{B}_{\bar{x}}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1(f) & \mathbf{B}_2(f) \\ \mathbf{B}_2^*(-f) & \mathbf{B}_1^*(-f) \end{pmatrix}.$$

Par suite sa transformée de Fourier inverse notée $\mathbf{B}_{\bar{x}}(t)$ réponse impulsionnelle causale matricielle est structurée sous la forme :

$$\mathbf{B}_{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1(t) & \mathbf{B}_2(t) \\ \mathbf{B}_2^*(t) & \mathbf{B}_1^*(t) \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc démontré qu'il existe un filtre WL blanchisseur $\mathbf{B}_1(f), \mathbf{B}_2(f)$ causal et causalement réversible de taille $N \times 2N$ tel que

$$\mathbf{n}_B(t) = \mathbf{B}_1(t) * \mathbf{n}(t) + \mathbf{B}_2(t) * \mathbf{n}^*(t),$$

est à la fois circulaire, spatialement et temporellement blanc, c'est à dire :

$$E[\mathbf{n}_B(t)\mathbf{n}_B^H(t-\tau)] = \delta(\tau)\mathbf{I}_N$$

et

$$E[\mathbf{n}_B(t)\mathbf{n}_B^T(t-\tau)] = \mathbf{0}_N.$$

■

1. Le cas le plus traité dans la littérature est celui où la matrice de densité spectrale de puissance s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle en $e^{i2\pi f}$.

Annexe E

Autre démonstration de (3.2.12)

Dans le cas où $\mathbf{n}(t)$ est non circulaire, blanc temporellement et coloré spatialement, nous considérons la base orthonormée réelle $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_K(t)\}$ de l'espace des signaux engendré par $\{\mathbf{s}^{(m),r}(t), \mathbf{s}^{(m),i}(t)\}_{m=1..M}$ où

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \mathbf{s}^{(m),r}(t) + i\mathbf{s}^{(m),i}(t) \in \mathbb{C}^N.$$

Par projection orthogonale, on obtient :

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^K (\mathbf{s}_k^{(m),r} + i\mathbf{s}_k^{(m),i}) \varphi_k(t) \quad (\text{E.0.1})$$

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{k=1}^K (\mathbf{n}_k^r + i\mathbf{n}_k^i) \varphi_k(t) + \mathbf{n}^{rr}(t) + i\mathbf{n}^{ri}(t), \quad (\text{E.0.2})$$

avec pour les parties réelles et imaginaires des N composantes des parties réelles et imaginaires de \mathbf{n}_k et $\mathbf{s}_k^{(m)}$:

$$\mathbf{n}_k^{(r;i)} = \begin{pmatrix} n_{1,k}^{(r;i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ n_{N,k}^{(r;i)} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.0.3})$$

et

$$\mathbf{s}_k^{(m)(r;i)} = \begin{pmatrix} s_{1,k}^{(m),(r;i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{N,k}^{(m)(r;i)} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.0.4})$$

où $n_{l,k}^{(r;i)} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} n_l^{r;i}(t) \varphi_k(t) dt$, $s_{l,k}^{(m),(r;i)} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} s_l^{(m),r;i}(t) \varphi_k(t) dt$ et $n_l^{(r;i)}(t) \perp \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_K(t)\}$ et donc $n_l^{(r;i)}(t) \perp \{\mathbf{s}^{(1),r}(t), \dots, \mathbf{s}^{(M),r}(t), \mathbf{s}^{(1),i}(t), \dots, \mathbf{s}^{(M),i}(t)\}$. Considérons alors le vecteur :

$$\bar{\mathbf{x}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^r = \begin{pmatrix} x_{1,1}^r \\ \cdot \\ x_{N,1}^r \end{pmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_K^r = \begin{pmatrix} x_{1,K}^r \\ \cdot \\ x_{N,K}^r \end{pmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_1^i = \begin{pmatrix} x_{1,1}^i \\ \cdot \\ x_{N,1}^i \end{pmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}_K^i = \begin{pmatrix} x_{1,K}^i \\ \cdot \\ x_{N,K}^i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2KN} \quad (\text{E.0.5})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{x}^r = \mathbf{s}^{(m),r} + \mathbf{n}^r \\ \mathbf{x}^i = \mathbf{s}^{(m),i} + \mathbf{n}^i \end{pmatrix} \quad (\text{E.0.6})$$

$$\triangleq \bar{\mathbf{s}}^{(m)} + \bar{\mathbf{n}}, \quad (\text{E.0.7})$$

avec $x_{l,k}^{(r;i)} = (s_{l,k}^{(m)})^{(r;i)} + n_{l,k}^{(r;i)}$. Les statistiques du second ordre des $\{n_{l,k}^{(r;i)}\}_{l=1..N, k=1..K}$ sont données par :

$$\begin{aligned} E[n_{l,k}^r n_{l',k'}^r] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} E[n_l^r(t) n_{l'}^r(\tau)] \varphi_k(t) \varphi_{k'}(\tau) dt d\tau \\ &= E[n_l^r(t) n_{l'}^r(t)] \int \int_{\mathbb{R}^2} \delta(t-\tau) \varphi_k(t) \varphi_{k'}(\tau) dt d\tau \\ &= E[n_l^r(t) n_{l'}^r(t)] \delta_{k,k'} \triangleq \delta_{k,k'} \sigma_{ll'}^r \\ E[n_{l,k}^i n_{l',k'}^i] &= E[n_l^i(t) n_{l'}^i(t)] \delta_{k,k'} \triangleq \delta_{k,k'} \sigma_{ll'}^i \\ E[n_{l,k}^r n_{l',k'}^i] &= E[n_l^r(t) n_{l'}^i(t)] \delta_{k,k'} \triangleq \delta_{k,k'} \sigma_{ll'}^{ri} \end{aligned}$$

Ainsi, $\bar{\mathbf{n}}$ est gaussien, centré, non circulaire, blanc temporellement et de matrice de covariance Σ structurée comme suit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & \Sigma_{ri} \\ \Sigma_{ir} & \Sigma_i \end{pmatrix},$$

de taille $2KN \times 2KN$ et $\Sigma_{ir} = \Sigma_{ri}^T$. Avec :

$$\begin{aligned} \Sigma_r &= \text{diag}(\Sigma^r, \dots, \Sigma^r) \\ \Sigma_i &= \text{diag}(\Sigma^i, \dots, \Sigma^i) \\ \Sigma_{ri} &= \text{diag}(\Sigma^{ri}, \dots, \Sigma^{ri}), \end{aligned} \quad (\text{E.0.8})$$

Σ^r , Σ^i et Σ^{ri} sont de matrices de taille $N \times N$.

Par conséquent, l'équation de maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \left((\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{s}}^{(m)})^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{s}}^{(m)}) \right), \quad (\text{E.0.9})$$

avec $\bar{\mathbf{s}}^{(m)} = [\mathbf{s}^{(m),r T}, \mathbf{s}^{(m),i T}]^T$ et Σ^{-1} est de même structure que Σ :

$$\begin{pmatrix} \Sigma'_r & \Sigma'_{ri} \\ \Sigma'_{ir} & \Sigma'_i \end{pmatrix}, \text{ avec } \Sigma'_{r;i;ri} = \text{diag}(\Sigma^{r;i;ri}, \dots, \Sigma^{r;i;ri})$$

Ainsi, (E.0.9) se développe comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \text{Arg Min}_m \left((\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r})^T \Sigma'_r (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r}) + (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i})^T \Sigma'_i (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i}) \right. \\ &\quad \left. + 2(\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r})^T \Sigma'_{ri} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i}) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.0.10})$$

sachant que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r})^T \Sigma'_r (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r}) &= \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}_k^r - \mathbf{s}_k^{(m),r})^T \Sigma'^r (\mathbf{x}_k^r - \mathbf{s}_k^{(m),r}) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K (\mathbf{x}_k^r - \mathbf{s}_k^{(m),r})^T \Sigma'^r (\mathbf{x}_{k'}^r - \mathbf{s}_{k'}^{(m),r}) \delta_{k,k'}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\delta_{k,k'}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t) \varphi_{k'}(t) dt$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r})^T \Sigma'_r (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_{k=1}^K (\mathbf{x}_k^r \varphi_k(t) - \mathbf{s}_k^{(m),r} \varphi_k(t))]^T \Sigma'^r [\sum_{k'=1}^K (\mathbf{x}_{k'}^r \varphi_{k'}(t) - \mathbf{s}_{k'}^{(m),r} \varphi_{k'}(t))] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}^r(t) - \mathbf{s}^{(m)r}(t)]^T \Sigma'^r [\mathbf{x}^r(t) - \mathbf{s}^{(m)r}(t)] dt \end{aligned} \quad (\text{E.0.11})$$

car $n^r(t) \perp (\varphi_k(t))_{k=1..K}$. De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i})^T \Sigma'_i (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{s}^{(m)i}(t)]^T \Sigma'^i [\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{s}^{(m)i}(t)] dt \\ (\mathbf{x}^r - \mathbf{s}^{(m),r})^T \Sigma'_{ri} (\mathbf{x}^i - \mathbf{s}^{(m),i}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}^r(t) - \mathbf{s}^{(m)r}(t)]^T \Sigma'^{ir} [\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{s}^{(m)i}(t)] dt. \end{aligned} \quad (\text{E.0.12})$$

Par conséquent, (E.0.10) devient :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)]^T \begin{pmatrix} \Sigma'^r & \Sigma'^{ir} \\ \Sigma'^{ri} & \Sigma'^i \end{pmatrix} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)] dt \right). \quad (\text{E.0.13})$$

Dans le but d'exprimer (E.0.13) en fonction de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{s}^{(m)}(t)$, nous utilisons la transformation :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t)^* \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t)^r \\ \mathbf{x}(t)^i \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{T} \overline{\mathbf{x}(t)}, \quad (\text{E.0.14})$$

avec $\mathbf{T} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & i\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & -i\mathbf{I}_N \end{pmatrix}$ vérifiant : $\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{T}^H$. Ainsi, (E.0.13) est équivalente à :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t)]^H \mathbf{T} \begin{pmatrix} \Sigma^r & \Sigma^{ri} \\ \Sigma^{ir} & \Sigma^i \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{T}^H [\tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t)] dt \right). \quad (\text{E.0.15})$$

Sachant que

$$\Sigma_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1} = (E[\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}^H(t)])^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{T} (E[\bar{\mathbf{n}}(t)\bar{\mathbf{n}}^H(t)])^{-1} \mathbf{T}^H,$$

l'équation de maximum de vraisemblance dans le cas non circulaire blanc et multi-dimensionnel s'écrit sous la forme :

$$\hat{m} = \text{Arg Min}_m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}^H(t) - \mathbf{s}^{(m)H}(t), \mathbf{x}^T(t) - \mathbf{s}^{(m)T}(t)] \begin{pmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{C}_n \\ \mathbf{C}_n^* & \mathbf{R}_n^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t) \\ \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{s}^{(m)*}(t) \end{bmatrix} dt \right), \quad (\text{E.0.16})$$

$$\text{où } \Sigma_{\tilde{\mathbf{n}}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{C}_n \\ \mathbf{C}_n^* & \mathbf{R}_n^* \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Annexe F

Le filtre du récepteur MLSE est un filtre adapté

F.1 Cas classique

Considérons le produit scalaire

$$\langle \mathbf{u}(f), \mathbf{v}(f) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{v}(f) df,$$

et la norme associée

$$\|\mathbf{u}(f)\| \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{u}(f) df,$$

où $\mathbf{R}_n(f)$ désigne la transformée de Fourier de la matrice de corrélation $E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t-\tau)]$ du bruit $\mathbf{n}(t)$ stationnaire et circulaire. Le SNR à la sortie aux instants kT d'un filtre linéaire multidimensionnel quelconque $\mathbf{w}^H(f)$ d'entrée $\mathbf{x}(t) = \sqrt{\pi_s} \sum_k a_k \mathbf{g}(t - kT) + \mathbf{n}(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\text{SNR} = \frac{\pi_s E|a_k|^2 r_0^2}{E|n_k^2|},$$

où n_k est le bruit filtré par $\mathbf{w}^H(f)$ à l'instant kT . Nous avons $r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) df$ et d'après la formule des interférences (I.5.29) du filtrage linéaire

$$E|n_k^2| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df.$$

Ainsi

$$\text{SNR} = \frac{\pi_s E|a_k|^2 (\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) df)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{w}(f) df}, \quad (\text{F.1.1})$$

En écrivant r_0 sous la forme

$$r_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{R}_n(f) \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) df = \langle \mathbf{w}(f), \mathbf{R}_n^{-1}(f) \mathbf{g}(f) \rangle$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} r_0^2 &\leq \|\mathbf{w}(f)\|^2 \|\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)\|^2 \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{R}_n(f)\mathbf{w}(f)df \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{R}_n(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df \right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{SNR} \leq \pi_s E|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{w}(f)df.$$

Cette inégalité devient une égalité en prenant

$$\mathbf{w}(f) \propto \mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f). \quad (\text{F.1.2})$$

C'est ainsi le filtre qui maximise le SNR à sa sortie aux instants kT . Par conséquent, le filtre MLSE circulaire et un filtre adapté.

Dans le cas d'un bruit non circulaire, la démonstration se fait de la même manière à l'aide du modèle étendu $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Remarque 1 : Ce filtre linéaire (F.1.2) solution de la maximisation du SNR (F.1.1) pourrait être dérivé sans faire appel à l'inégalité de Cauchy Schwarz.

En effet, puisque le support fréquentiel de $\mathbf{R}_n(f)$ est limité, les deux intégrales du SNR (F.1.1) peuvent s'écrire comme les limites de sommes discrètes de Riemann et

$$\text{SNR} = \pi_s E|a_k^2| \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{|\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{g}(f_k)|^2}{\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{R}_n(f_k)\mathbf{w}(f_k)} \right),$$

et la maximisation fonctionnelle du SNR (F.1.1) par rapport à $\mathbf{w}(f)$ est équivalente à une maximisation par rapport au vecteur $[\mathbf{w}^T(f_1), \dots, \mathbf{w}^T(f_k), \dots, \mathbf{w}^T(f_K)]^T$. Celle ci peut donc s'effectuer à l'aide de dérivation au sens de Wirtinger. L'annulation de cette dérivée par rapport à $\mathbf{w}(f_k)$ donne

$$\left[\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{g}(f_k) \right] \mathbf{g}^*(f_k) \left[\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{R}_n(f_k)\mathbf{w}(f_k) \right] - \left| \sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{g}(f_k) \right|^2 \mathbf{R}_n^T(f_k)\mathbf{w}^*(f_k) = 0. \quad (\text{F.1.3})$$

Soit une solution

$$\mathbf{w}(f_k) = \left(\frac{\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{R}_n(f_k)\mathbf{w}(f_k)}{\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{g}(f_k)} \right) \mathbf{R}_n^{-1}(f_k)\mathbf{g}(f_k),$$

et par passage à la limite de sommes de Riemann vers l'intégrale de Riemann à support borné, on obtient une solution parmi celles de (F.1.2).

F.2 Cas cyclostationnaire

Dans le cas de bruit cyclostationnaire circulaire, le SNR à la sortie d'un filtre linéaire $\mathbf{w}(f)$ sur le symbole courant est donné aux instants kT par l'expression suivante grâce à (I.1.9) et (I.5.36)

$$\text{SNR} = \frac{\pi_s E|a_k^2| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{g}(f)df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \alpha/2)\mathbf{R}_n^\alpha(f)\mathbf{w}(f - \alpha/2)df}, \quad (\text{F.2.4})$$

avec $\alpha = k/T$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notons que (F.2.4) ne peut plus être maximisée à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwarz avec un produit scalaire approprié. Si nous appliquons la méthode décrite dans la remarque 1

$$\text{SNR} = \pi_s E |a_k^2| \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{|\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k) \mathbf{g}(f_k)|^2}{\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k + \alpha/2) \mathbf{R}_n^\alpha(f_k) \mathbf{w}(f_k - \alpha/2)} \right),$$

l'annulation de la dérivée au sens de Wirtinger donne de façon similaire à (F.1.3)

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k) \mathbf{g}(f_k) \right] \mathbf{g}^*(f_k) \left[\sum_{\alpha} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k + \alpha) \mathbf{R}_n^\alpha(f_k + \alpha/2) \mathbf{w}(f_k) \right] \\ & - \left[\sum_{k=1}^K |\mathbf{w}^H(f_k) \mathbf{g}(f_k)|^2 \right] \left[\sum_{\alpha} [\mathbf{R}_n^\alpha(f_k + \alpha/2)]^T \mathbf{w}^*(f_k + \alpha) \right] = 0. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathbf{g}(f_k) = \left(\frac{\sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k) \mathbf{g}(f_k)}{\sum_{\alpha} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H(f_k + \alpha) \mathbf{R}_n^\alpha(f_k + \alpha/2) \mathbf{w}(f_k)} \right) \sum_{\alpha} [\mathbf{R}_n^\alpha(f_k + \alpha/2)]^H \mathbf{w}(f_k + \alpha),$$

et par passage à la limite on obtient l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{g}(f) = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f) \mathbf{g}(f) df}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f + \alpha) \mathbf{R}_n^\alpha(f + \alpha/2) \mathbf{w}(f) df} \right) \sum_{\alpha} [\mathbf{R}_n^\alpha(f + \alpha/2)]^H \mathbf{w}(f + \alpha),$$

soit puisque (F.2.4) est invariant pour tout filtre linéaire proportionnel, nous obtenons comme solution les filtres linéaires $\mathbf{w}(f)$ solution de

$$\mathbf{g}(f) \propto \sum_{\alpha} [\mathbf{R}_n^\alpha(f + \alpha/2)]^H \mathbf{w}(f + \alpha). \quad (\text{F.2.5})$$

Malheureusement nous ne savons pas résoudre cette équation fonctionnelle.

Annexe G

Preuve de (3.3.39) et (3.3.45)

Preuve de (3.3.39)

A partir de la formule des interférences (I.5.29) de l'Annexe I :

$$\begin{aligned}
 E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}^*] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{w}_1(f) e^{-i2\pi f k T} df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{-i2\pi f k T} df \\
 &= r_k.
 \end{aligned}$$

De même, à partir de la formule des interférences (I.5.30) de l'Annexe I nous obtenons $E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}] = r'_k$.

Preuve de (3.3.45)

De même

$$\begin{aligned}
 E[n_{\tilde{w}, l} n_{\tilde{w}, l-k}^*] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{w}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{w}}(f) e^{-i2\pi f k T} df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}^H(f) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{-1}(f) \tilde{\mathbf{g}}(f) e^{-i2\pi f k T} df \\
 &= r_{r, k}.
 \end{aligned}$$

Remarque : Ces expressions ((3.3.39) et (3.3.45)) auraient pu être obtenues autrement (par une approche temporelle) sans utiliser les formules des interférences moyennant un calcul beaucoup plus long. En effet, nous avons :

$$n_{w_1, l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-lT) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u-v) \tilde{\mathbf{n}}(v) du dv,$$

ainsi :

$$n_{w_1, l-k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u'-(l-k)T) \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{n}}}^{\text{inv}}(u'-v') \tilde{\mathbf{n}}(v') du' dv'.$$

D'où

$$\begin{aligned}
E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}^*] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-lT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \right. \\
&\quad \left. \tilde{\mathbf{n}}(v) \tilde{\mathbf{n}}^H(v') \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{g}_1(u'-(l-k)T) dudvdu' dv'\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-lT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \\
&\quad \mathbf{R}_{\tilde{n}}(v-v') \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u'-v') \mathbf{g}_1(u'-(l-k)T) dudvdu' dv'.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-v) \mathbf{R}_{\tilde{n}}(v-v') \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u'-v') du' dv' &= \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}} * \mathbf{R}_{\tilde{n}} * \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-u') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f) e^{-j2\pi f(u-u')} df \\
&= \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-u').
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}^*] &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-lT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-u') \mathbf{g}_1(u'-(l-k)T) dud u'\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(u-kT) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{\text{inv}}(u-u') \mathbf{g}_1(u') dud u'\right] \\
&= \mathbf{w}_1(-t) * \mathbf{g}_1(t)|_{t=kT} \\
&= r_k.
\end{aligned}$$

De même $E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}] = r'_k$ et $E[n_{\tilde{w}, l} n_{\tilde{w}, l-k}^*] = r_{r,k}$. Ainsi nous avons démontré que

$$E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}^*] = r_k \text{ et } E[n_{w_1, l} n_{w_1, l-k}] = r'_k$$

et

$$E[n_{\tilde{w}, l} n_{\tilde{w}, l-k}^*] = r_{r,k}.$$

■

Annexe H

Preuve de (3.4.70)

Nous avons

$$\mathbf{g}_{1,d}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_d(f) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(f + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{g}_{2,d}(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_d(-f) * \delta(f + \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(-f - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\mathbf{x}}_d(f) \triangleq i^{\frac{-t}{T}} \tilde{\mathbf{x}}_d(f) = \begin{pmatrix} i^{\frac{-t}{T}} \mathbf{x}(t) \\ i^{\frac{-t}{T}} \mathbf{x}^*(t) \end{pmatrix}$$

ayant pour transformée de Fourier $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(f + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{x}^*(-f - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix}$.

$$y_{1,d,k}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{1,d}^T(f) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1*}(f + \frac{1}{4T}) \bar{\mathbf{x}}_d^*(f) e^{-i2\pi k f T} df.$$

Puisque $\mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(f + \frac{1}{4T})$ est structuré sous la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(f + \frac{1}{4T}) & \mathbf{D}_n(f + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{D}_n^*(-f - \frac{1}{4T}) & \mathbf{A}_n^*(-f - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_{1,d,k}^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{g}^T(f + \frac{1}{4T}), \mathbf{0}^T \right] \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n^*(f + \frac{1}{4T}) & \mathbf{D}_n^*(f + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{D}_n(-f - \frac{1}{4T}) & \mathbf{A}_n(-f - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(f + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{x}(-f - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} e^{-i2\pi k f T} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{0}^T, \mathbf{g}^T(f + \frac{1}{4T}) \right] \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(-f - \frac{1}{4T}) & \mathbf{D}_n(-f - \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{D}_n^*(f + \frac{1}{4T}) & \mathbf{A}_n^*(f + \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(-f - \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{x}^*(f + \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} e^{-i2\pi k f T} df \\ &= e^{i\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{0}^T, \mathbf{g}^T(-\nu - \frac{1}{4T}) \right] \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(\nu + \frac{1}{4T}) d\nu \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\nu + \frac{1}{4T}) \\ \mathbf{x}^*(-\nu - \frac{1}{4T}) \end{pmatrix} e^{i2\pi k \nu T} \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{2,d}^H(\nu) \mathbf{R}_{\tilde{n}}^{-1}(\nu + \frac{1}{4T}) \bar{\mathbf{x}}_d^*(\nu) e^{i2\pi k \nu T} d\nu \\ &= (-1)^k y_{2,d,k}. \end{aligned}$$

■

Annexe I

Cyclo-stationnarité au second ordre de signaux à temps continu

I.1 Définitions

Soit $x(t)$ un signal à temps continu centré et à valeurs complexes. $x(t)$ est dit cyclo-stationnaire à l'ordre n_0 quelconque si et seulement si ses statistiques jusqu'à l'ordre n_0 varient d'une manière périodique dans le temps. Dans le cas particulier de $n_0 = 2$, les signaux sont dits cyclo-stationnaires du second ordre. La fonction de corrélation¹

$$r_x(t, \tau) \triangleq E[x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)]$$

et la fonction de corrélation complémentaire

$$c_x(t, \tau) \triangleq E[x(t + \tau/2)x(t - \tau/2)]$$

de $x(t)$ sont périodiques en t et de période T appelé période cyclique. Ainsi, ils sont développables en séries de Fourier

$$r_x(t, \tau) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{i2\pi \frac{k}{T} t} \quad (\text{I.1.1})$$

$$c_x(t, \tau) = \sum_k c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{i2\pi \frac{k}{T} t}, \quad (\text{I.1.2})$$

avec

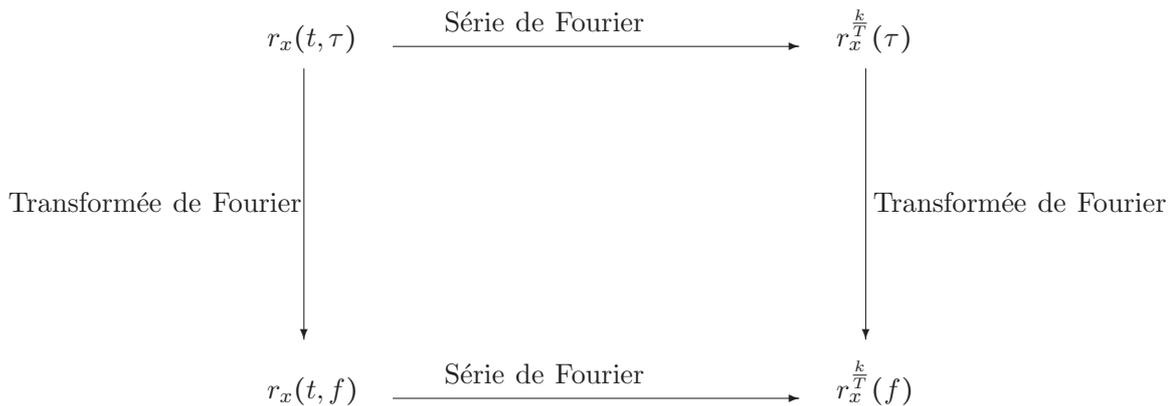
$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T r_x(t, \tau) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T c_x(t, \tau) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \end{aligned}$$

1. Nous choisissons cette définition symétrique plutôt que la définition classique $r'_x(t, \tau) \triangleq E[x(t)x^*(t - \tau)]$ et $c'_x(t, \tau) \triangleq E[x(t)x(t - \tau)]$, car elle a été jugée plus pratique dans la littérature cyclo-stationnaire. Notons que ces deux définitions sont équivalentes car $r'_x(t, \tau) = r_x(t - \frac{\tau}{2}, \tau)$ et $c'_x(t, \tau) = c_x(t - \frac{\tau}{2}, \tau)$.

représentent respectivement les coefficients de corrélation cyclique et les coefficients de corrélation cyclique complémentaire. Les transformées de Fourier² des expressions (I.1.2) et (I.1.2) constituent la densité spectrale cyclique de puissance et la densité spectrale cyclique de puissance complémentaire, respectivement

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ c_x^{\frac{k}{T}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 1 : De façon équivalente les densités spectrales de puissance cycliques $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ peuvent s'obtenir comme les coefficients de série de Fourier des transformées de Fourier (par rapport à τ) $r_x(t, f)$ et $c_x(t, f)$ de respectivement $r_x(t, \tau)$ et $c_x(t, \tau)$.



Donc, nous avons en particulier

$$r_x(t, f) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(f) e^{i2\pi \frac{k}{T} t}$$

et

$$r_x(nT, f) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(f). \quad (\text{I.1.3})$$

De plus, les relations entre les deux définitions des fonctions de corrélations et corrélations complémentaires données dans la note de bas de page 1 impliquent par série de Fourier que

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi \frac{\tau}{2T}} \text{ et } c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi \frac{\tau}{2T}}$$

2. Avec notre convention de représenter les transformées de Fourier avec la même lettre.

qui par transformée de Fourier donnent

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = r_x^{\frac{k}{T}}\left(f + \frac{1}{2T}\right) \text{ et } c_x^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}\left(f + \frac{1}{2T}\right). \quad (\text{I.1.4})$$

Par ailleurs, nous avons en particulier

$$r_x^0(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \text{ et } c_x^0(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T E|x^2(t)|dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \\ \frac{1}{T} \int_0^T E(x^2(t))dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df, \end{aligned}$$

qui pour les signaux cyclo-stationnaires ergodiques représentent la moyenne temporelle de $|x^2(t)|$ et $x^2(t)$. Soit :

$$\langle |x^2(t)| \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \quad (\text{I.1.5})$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df, \quad (\text{I.1.6})$$

avec

$$\langle g(t) \rangle \triangleq \lim_{T' \rightarrow +\infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} g(t)dt.$$

De même :

$$\begin{aligned} E|x^2(t)| &= r_x(t, 0) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(\tau)|_{\tau=0} e^{i2\pi \frac{k}{T}t} \\ &= \sum_k e^{i2\pi \frac{k}{T}t} \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(f)df \end{aligned} \quad (\text{I.1.7})$$

$$\begin{aligned} E(x^2(t)) &= c_x(t, 0) = \sum_k c_x^{\frac{k}{T}}(\tau)|_{\tau=0} e^{i2\pi \frac{k}{T}t} \\ &= \sum_k e^{i2\pi \frac{k}{T}t} \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(f)df. \end{aligned} \quad (\text{I.1.8})$$

En particulier,

$$E|x^2(nT)| = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(f)df \quad (\text{I.1.9})$$

$$E(x^2(nT)) = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(f)df. \quad (\text{I.1.10})$$

Notons que ces puissances et puissances complémentaires ne dépendent pas de n . Cette simplification est valable dans le cas où le brouilleur et le signal utile ont la même période cyclique

T . Dans le cas contraire, les formules (I.1.7) et (I.1.8) ne se simplifient pas.

Remarque 2 : Dans le cas où $x(t)$ est stationnaire du second ordre $r_x(t, \tau) = r_x(\tau)$ et $c_x(t, \tau) = c_x(\tau)$; soit

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = 0 \text{ pour } k \neq 0, r_x^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

et

$$r_x^0(f) = r_x(f) \text{ et } c_x^0(f) = c_x(f)$$

où $r_x(\tau)$ et $c_x(\tau)$ désignent la fonction de corrélation et la fonction de corrélation complémentaire et $r_x(f)$ et $c_x(f)$ la densité spectrale et la densité spectrale complémentaire de $x(t)$.

Dans la suite de cette annexe, nous allons illustrer ces définitions générales par des modulations QAM.

I.2 Modulations numériques linéaires QAM

Pour une modulation linéaire de type QAM, l'enveloppe complexe de signal modulé associé à la suite des symboles $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ s'écrit sous la forme :

$$x(t) = \sum_k a_k v(t - kT), \quad (\text{I.2.11})$$

avec $v(t)$ est la fonction de mise en forme, T est la période symbole et la suite des symboles a_n est supposée centrée et stationnaire au sens large de statistiques au second ordre $r_a(n) = E[a_k a_{k-n}^*]$ et $c_a(n) = E[a_k a_{k-n}]$.

La fonction d'autocorrélation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} r_x(t, \tau) &= \sum_k \sum_l E[a_k a_l^*] v(t + \frac{\tau}{2} - kT) v^*(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n r_a(n) \sum_l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v^*(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

De même

$$c_x(t, \tau) = \sum_n c_a(n) \sum_l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT).$$

On peut constater que $r_x(t, \tau)$ et $c_x(t, \tau)$ sont périodiques de période T , par conséquent le signal $x(t)$ est cyclostationnaire au second ordre de fréquence cyclique fondamentale $1/T$. Les coefficients de corrélation cyclique s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n r_a(n) \left[\sum_l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v^*(t - \frac{\tau}{2} - lT) \right] e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_n r_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT) v^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt. \end{aligned}$$

De même

$$c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_n c_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT) v(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Notons que $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT) v^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt = e^{-i\pi \frac{k\tau}{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \tau - nT) v^*(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt$. Par suite, avec la notation $\phi(\frac{k}{T}, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \tau) v^*(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt$ et $\psi(\frac{k}{T}, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \tau) v(t) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt$, nous avons

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_n r_a(n) e^{-i2\pi \frac{k}{2T} \tau} \phi(\frac{k}{T}, \tau - nT) \quad (\text{I.2.12})$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_n c_a(n) e^{-i2\pi \frac{k}{2T} \tau} \psi(\frac{k}{T}, \tau - nT). \quad (\text{I.2.13})$$

En remarquons que :

$$\begin{aligned} \phi(\frac{k}{T}, \tau) &= v(\tau) * [v^*(-\tau) e^{i2\pi \frac{k}{T} \tau}] \\ \psi(\frac{k}{T}, \tau) &= v(\tau) * [v(-\tau) e^{i2\pi \frac{k}{T} \tau}], \end{aligned}$$

de transformée de Fourier respectives $v(f)v^*(f - \frac{k}{T})$ et $v(f)v(-f + \frac{k}{T})$. Par suite, la densité spectrale de puissance cyclique et la densité spectrale de puissance cyclique complémentaire (les transformées de Fourier des expressions (I.2.12) et (I.2.13)) sont ainsi données par

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_n r_a(n) v(f + \frac{k}{2T}) v^*(f - \frac{k}{2T}) e^{-i2\pi n(f + \frac{k}{2T})T} \quad (\text{I.2.14})$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_n c_a(n) v(f + \frac{k}{2T}) v(-f + \frac{k}{2T}) e^{-i2\pi n(f + \frac{k}{2T})T}. \quad (\text{I.2.15})$$

Soient

$$r_a(f) \triangleq \sum_n r_a(n) e^{-i2\pi n f T} \quad \text{et} \quad c_a(f) \triangleq \sum_n c_a(n) e^{-i2\pi n f T}, \quad (\text{I.2.16})$$

le spectre et le spectre complémentaire de la suite a_k , ainsi (I.2.14) et (I.2.15) s'écrivent sous la forme

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} r_a(f + \frac{k}{2T}) v(f + \frac{k}{2T}) v^*(f - \frac{k}{2T}) \quad (\text{I.2.17})$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} c_a(f + \frac{k}{2T}) v(f + \frac{k}{2T}) v(-f + \frac{k}{2T}). \quad (\text{I.2.18})$$

En particulier d'après (I.1.5) et (I.1.6)

$$\begin{aligned} \langle |x^2(t)| \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} r_a(f + \frac{k}{2T}) |v(f)|^2 df \\ \langle x^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} c_a(f + \frac{k}{2T}) v(f) v(-f) df, \end{aligned}$$

et d'après (I.1.7) et (I.1.8)

$$\begin{aligned} E|x^2(t)| &= \frac{1}{T} \sum_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t} \int_{-\infty}^{+\infty} r_a(f + \frac{k}{2T}) v(f + \frac{k}{2T}) v^*(f - \frac{k}{2T}) df \\ E(x^2(t)) &= \frac{1}{T} \sum_k e^{i2\pi \frac{k}{T} t} \int_{-\infty}^{+\infty} c_a(f + \frac{k}{2T}) v(f + \frac{k}{2T}) v(-f + \frac{k}{2T}) df, \end{aligned}$$

qui deviennent pour $t = nT$ et une suite a_k i.i.d. centrée :

$$\begin{aligned} E|x^2(nT)| &= \frac{E|a_k^2|}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} v(f + \frac{k}{2T})v^*(f - \frac{k}{2T})df \\ E(x^2(nT)) &= \frac{E(a_k^2)}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} v(f + \frac{k}{2T})v(-f + \frac{k}{2T})df. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les symboles a_k sont non corrélés (au sens réel) i.e., $r_a(k) = E|a_k^2|\delta_{k,0}$ et $c_a(k) = E(a_k^2)\delta_{k,0}$, (I.2.14) et (I.2.15) deviennent

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}E|a_k^2|v(f + \frac{k}{2T})v^*(f - \frac{k}{2T}) \quad (\text{I.2.19})$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}E(a_k^2)v(f + \frac{k}{2T})v(-f + \frac{k}{2T}). \quad (\text{I.2.20})$$

(I.2.17), (I.2.18), (I.2.19) et (I.2.20) représentent des extensions de la formule de Benett classique du cas stationnaire circulaire dans le cas de symboles a_k respectivement corrélés ou non corrélés.

Remarque 3 : Considérons l'enveloppe complexe d'un signal QAM issue d'une $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ stationnaire :

$$y(t) = \sum_k a_k v(t - kT - t_0),$$

avec t_0 est une variable aléatoire de loi de probabilité uniforme dans $[0, T]$ et indépendant de la séquence a_k . Alors

$$\begin{aligned} r_y(t, \tau) &= \frac{1}{T} \sum_k \sum_l E[a_k a_l^*] \int_0^T v(u + \frac{\tau}{2} - kT - t_0)v^*(u - \frac{\tau}{2} - lT - t_0)du. \\ &= \frac{1}{T} \sum_n r_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(u - nT)v^*(u - \tau)du, \end{aligned}$$

de même

$$c_y(t, \tau) = \frac{1}{T} \sum_n c_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(u - nT)v(u - \tau)du,$$

et donc $y(t)$ est stationnaire du second ordre car $r_y(t, \tau)$ et $c_y(t, \tau)$ ne dépendent pas de t . Leurs transformées de Fourier s'écrivent ainsi

$$\begin{aligned} r_y(f) &= \frac{1}{T}r_a(f)|v(f)|^2 \\ c_y(f) &= \frac{1}{T}c_a(f)v(f)v(-f). \end{aligned} \quad (\text{I.2.21})$$

D'après (I.2.17) et (I.2.18) $r_x^0(f) = r_y(f)$ et $c_x^0(f) = c_y(f)$. La densité spectrale cyclique et la densité spectrale cyclique complémentaire à la fréquence 0 représentent respectivement la densité spectrale et la densité spectrale complémentaire du signal stationnaire associé.

Cas particulier : Dans le cas où $v(t)$ est une impulsion de Nyquist de transformée de Fourier en cosinus surrelevé (de roll off α_{ro}) nous distinguons les cas :

- Pour $\alpha_{ro} = 0$, $v(f)$ est de support $[\frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}]$, $r_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0$ et $c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0$ sauf pour $k = 0$ d'après (I.2.17) et (I.2.18). Ainsi $r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = 0$ pour $k \neq 0$. Dans ce cas particulier $x(t)$ est stationnaire du second ordre et

$$r_x(t, \tau) = r_x^0(\tau) \text{ et } c_x(t, \tau) = c_x^0(\tau). \quad (\text{I.2.22})$$

- Pour $\alpha_{ro} \in]0, 1]$, $v(f)$ est de support $[-\frac{1}{2T}(1 + \alpha_{ro}), \frac{1}{2T}(1 + \alpha_{ro})]$

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ et } c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ sauf pour } k = 0, -1, 1$$

d'après (I.2.17) et (I.2.18) $x(t)$ n'aura que 3 fréquences cycliques $0, \frac{1}{T}$ et $-\frac{1}{T}$.

I.3 Modulations numériques linéaires quasi-rectilignes

Comme il a été expliqué dans les chapitres 2 et 3, les enveloppes complexes de ces modulations sont données par

$$x(t) = \sum_k i^k b_k v(t - kT),$$

où la suite des symboles $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et l'impulsion $v(t)$ sont réels. Dans le cas où la suite b_k est centrée et stationnaire du second ordre et de statistiques du second ordre $r_b(n) = E[b_k b_{k-n}]$, la fonction d'autocorrélation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} r_x(t, \tau) &= \sum_k \sum_l i^{k-l} E[b_k b_l] v(t + \frac{\tau}{2} - kT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n i^n r_b(n) \sum_l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} c_x(t, \tau) &= \sum_k \sum_l i^{k+l} E[b_k b_l] v(t + \frac{\tau}{2} - kT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n i^n r_b(n) \sum_l (-1)^l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

Par suite, $r_x(t, \tau)$ est toujours périodique en t de période T , mais $c_x(t, \tau)$ est périodique de période $2T$. Par conséquent le signal $x(t)$ est cyclostationnaire au second ordre de période $2T$. Le calcul des coefficients de corrélation cyclique et de corrélation complémentaire cyclique aux fréquences $k/2T$ peut être mené en suivant la même démarche que pour les modulations linéaires. On obtient

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \sum_n i^n r_b(n) \left[\sum_l v(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) v(t - \frac{\tau}{2} - lT) \right] e^{-i2\pi \frac{k}{2T} t} dt \\ &= \frac{1 + (-1)^k}{2T} \sum_n i^n r_b(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT) v(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{2T} t} dt. \end{aligned}$$

De même

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1 - (-1)^k}{2T} \sum_n i^n r_b(n) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT) v(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{2T} t} dt.$$

Or puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \frac{\tau}{2} - nT)v(t - \frac{\tau}{2})e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt = e^{-i\pi\frac{k\tau}{2T}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \tau - nT)v(t)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt,$$

nous avons

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1 + (-1)^k}{2T} \sum_n i^n r_b(n) e^{-i\pi\frac{k}{2T}\tau} \psi(\frac{k}{2T}, \tau - nT) \quad (I.3.23)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1 - (-1)^k}{2T} \sum_n i^n r_b(n) e^{-i\pi\frac{k}{2T}\tau} \psi(\frac{k}{2T}, \tau - nT), \quad (I.3.24)$$

avec ici :

$$\psi(\frac{k}{2T}, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v(t + \tau)v(t)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt = v(\tau) * [v(-\tau)e^{i2\pi\frac{k}{2T}\tau}],$$

de transformée de Fourier $v(f)v(-f + \frac{k}{2T})$. Par suite, la transformée de Fourier de $\psi(\frac{k}{2T}, \tau - nT)$ est $v(f)v(-f + \frac{k}{2T})e^{-i2\pi n f T}$ et celle de $e^{-i\frac{k\pi}{2T}\tau} \psi(\frac{k}{2T}, \tau - nT)$ est $v(f + \frac{k}{4T})v(-f + \frac{k}{4T})e^{-i2\pi n(f + \frac{k}{4T})T}$. Par suite, la densité spectrale de puissance cyclique et la densité spectrale de puissance cyclique complémentaire sont données par :

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1 + (-1)^k}{2T} \sum_n r_b(n) e^{-i2\pi n(f + \frac{k}{4T} - \frac{1}{4T})T} v(f + \frac{k}{4T})v(-f + \frac{k}{4T})$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1 - (-1)^k}{2T} \sum_n r_b(n) e^{-i2\pi n(f + \frac{k}{4T} - \frac{1}{4T})T} v(f + \frac{k}{4T})v(-f + \frac{k}{4T}).$$

Ainsi :

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} r_b(f + \frac{k}{4T} - \frac{1}{4T}) v(f + \frac{k}{4T}) v(-f + \frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ pair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases} \quad (I.3.25)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} r_b(f + \frac{k}{4T} - \frac{1}{4T}) v(f + \frac{k}{4T}) v(-f + \frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \quad (I.3.26)$$

où

$$r_b(f) \triangleq \sum_n r_b(n) e^{-i2\pi n f T}.$$

Pour une suite b_k i.i.d. centrée

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} E[b_k^2] v(f + \frac{k}{4T}) v(-f + \frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ pair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases} \quad (I.3.27)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} E[b_k^2] v(f + \frac{k}{4T}) v(-f + \frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \quad (I.3.28)$$

Ainsi nous retrouvons des fréquences cycliques $\frac{k}{T}$ pour la densité spectrale cyclique et $\frac{2k+1}{2T}$ pour la densité spectrale cyclique complémentaire.

Cas particulier 1 : Dans le cas où $v(t)$ est une impulsion de Nyquist de transformée de Fourier en cosinus surélevé de roll off α_{ro} , notons que contrairement au cas de la modulation linéaire QAM, $x(t)$ n'est stationnaire du second ordre pour aucune valeur de α_{ro} . Puisque $v(t)$ est de support $[\frac{-1}{2T}(1 + \alpha_{ro}), \frac{1}{2T}(1 + \alpha_{ro})]$, distinguons les cas :

- Pour $\alpha_{ro} = 0$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1, +1$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$.
Donc $x(t)$ a 3 fréquences cycliques $0, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}$.
- Pour $\alpha_{ro} \in]0, \frac{1}{2}[$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0, -2, +2$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1, +1$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$. Donc $x(t)$ a 5 fréquences cycliques $0, \frac{-1}{T}, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{T}, \frac{1}{2T}$.
- Pour $\alpha_{ro} \in [\frac{1}{2}, 1[$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0, -2, +2$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1, +1, -3, +3$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$. Donc $x(t)$ a 7 fréquences cycliques $0, \frac{-3}{2T}, \frac{-1}{T}, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}, \frac{1}{T}, \frac{3}{2T}$.

Cas particulier 2 : Pour la modulation MSK, la transformée de Fourier de l'impulsion

$$v(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{2T}) & \text{pour } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est

$$v(f) = \frac{4T \cos(2\pi fT)}{\pi(1 - 16T^2 f^2)},$$

présentée par la figure I.1.

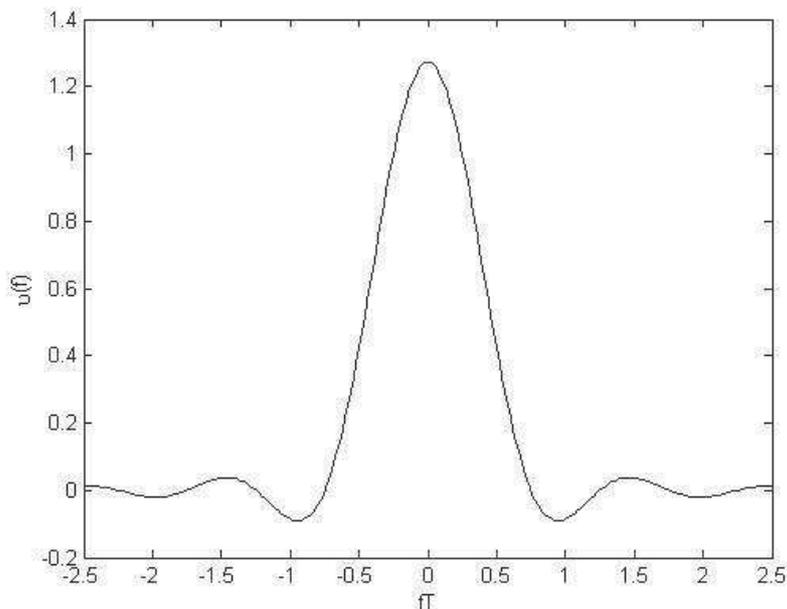


FIGURE I.1 – Impulsion $v(f)$ de MSK.

Par suite, il y a théoriquement une infinité de fréquences cycliques. En pratique, vu la décroissance de $v(f)$ en $1/f^2$, nous pouvons considérer qu'il n'y a principalement que 7 fréquences

cycliques en raisonnant sur le lobe principal $[\frac{-3}{4T}, \frac{3}{4T}]$ de $v(f)$.

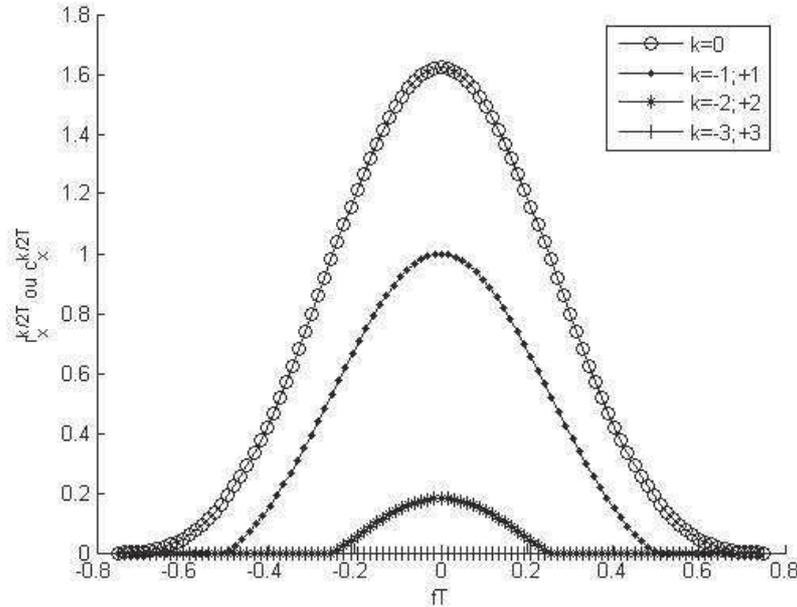


FIGURE I.2 – $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k , modulation MSK.

La figure I.2 présente $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs pairs de k) et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs impairs de k). Naturellement, nous constatons une décroissance des amplitudes de $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ en augmentant la valeur de k .

Cas particulier 3 : Pour la modulation GMSK nous ne disposons que de valeur analytique exacte ni de $v(t)$, ni de sa transformée de Fourier $v(f)$ qui a aussi un support théorique infini, donc théoriquement une infinité de fréquences cycliques. De plus, cette modulation dépend du paramètre BT . A notre connaissance le nombre approximatif de fréquences cycliques n'a pas été étudié dans la littérature.

Cependant, nous avons présenté numériquement (figure I.4) la transformée de Fourier de l'approximation de Laurent [31] de $v(t)$ correspondante à $BT = 0.3$ (calculée dans l'Annexe B). Ceci nous a permis de constater que le support de cette transformée de Fourier $v(f)$ s'étend approximativement à l'intervalle $[\frac{-3}{4T}, \frac{3}{4T}]$ et nous avons ainsi 7 fréquences cycliques comme pour la modulation MSK.

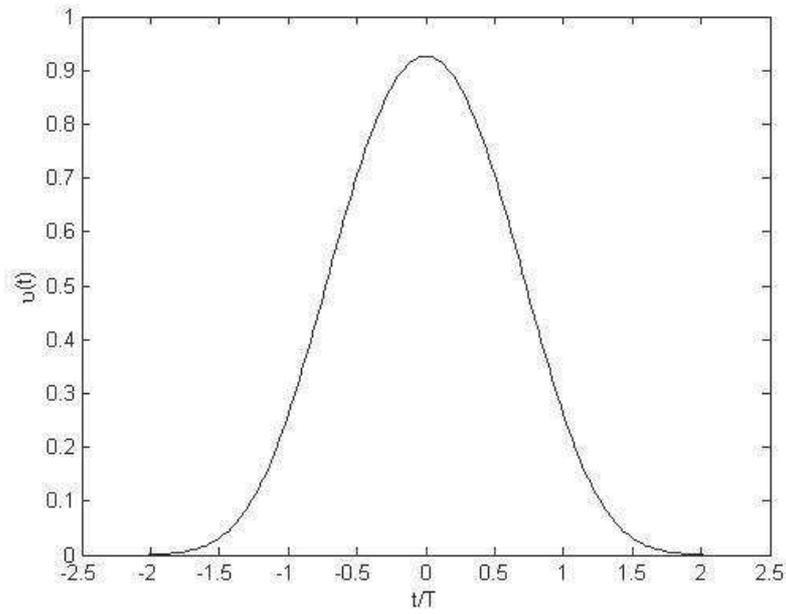


FIGURE I.3 – Impulsion $v(t)$ de GMSK linéarisée.

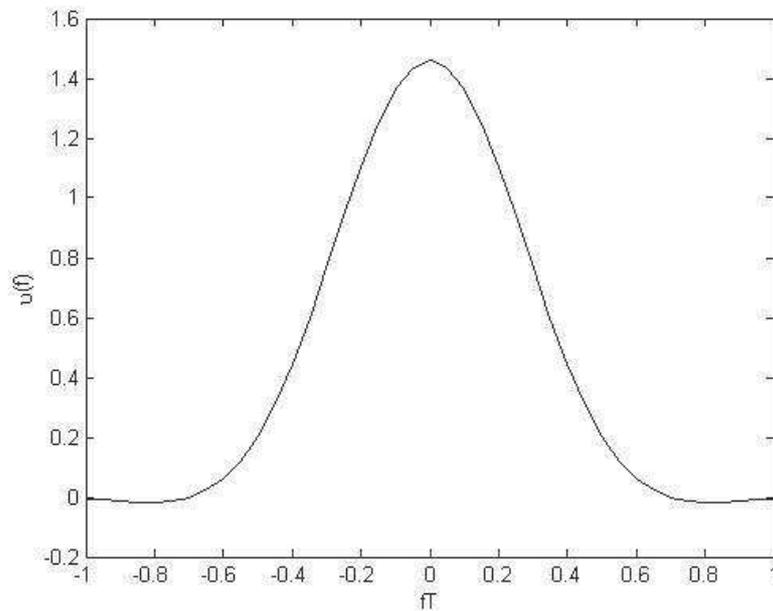


FIGURE I.4 – Impulsion $v(f)$ de GMSK linéarisée.

La figure I.5 présente $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs pairs de k) et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs impairs de k). Naturellement, les amplitudes de $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ décroissent en augmentant la valeur de k .

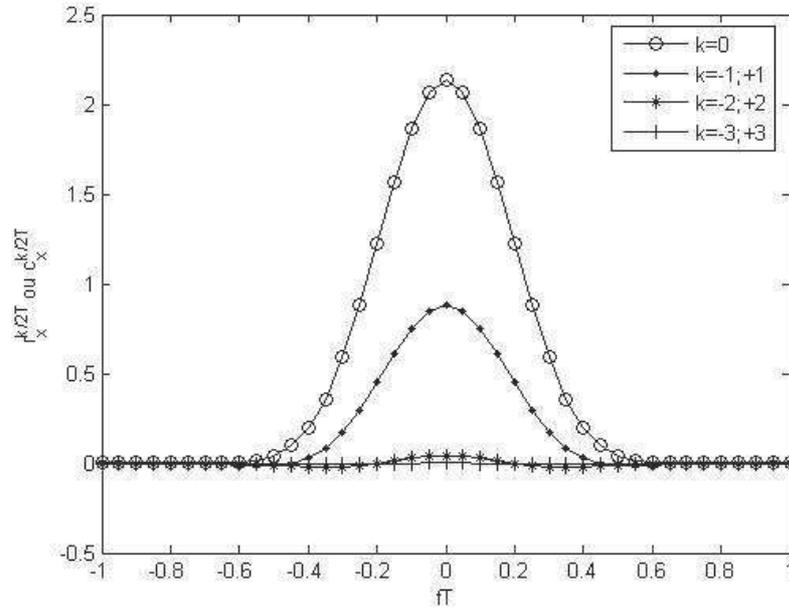


FIGURE 1.5 – $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k , modulation GMSK.

I.4 Estimation des densités spectrales (et complémentaires) cycliques

Certains signaux cyclo-stationnaires sont ergodiques, i.e., les coefficients de corrélations cycliques et de corrélations complémentaires cycliques peuvent être obtenus par une seule réalisation par moyenne temporelle, par exemple

$$r_x(t, \tau) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{l=-K}^K x(t + \tau/2 + lT) x^*(t - \tau/2 + lT).$$

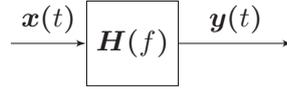
Ainsi

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T r_x(t, \tau) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \langle x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} \rangle, \\ c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \langle x(t + \tau/2) x(t - \tau/2) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} \rangle, \end{aligned}$$

d'où des estimés par troncature. Pour les densités spectrales cycliques et densités spectrales complémentaires cycliques, leurs estimations à partir d'une seule réalisation temporelle sont beaucoup plus délicates (voir par exemple [25]).

I.5 Formule des interférences

Dans le cas de signaux centrés stationnaires de second ordre multidimensionnel $\mathbf{x}(t)$ filtrés par un filtre linéaire de fonction de transfert multidimensionnelle $\mathbf{H}(f)$ ayant pour sortie $\mathbf{y}(t)$,



$\mathbf{y}(t)$ est aussi centré stationnaire du second ordre. Les densités spectrales de puissance et densité spectrale de puissance complémentaire de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ sont reliés par les relations classiques suivantes :

$$\mathbf{R}_y(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{R}_x(f)\mathbf{H}^H(f) \quad (\text{I.5.29})$$

$$\mathbf{C}_y(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{C}_x(f)\mathbf{H}^T(-f). \quad (\text{I.5.30})$$

Les notions de signal cyclo-stationnaire au second ordre de période cyclique T s'étendent aux signaux multidimensionnels $\mathbf{x}(t)$. On définit alors une matrice spectrale de puissance cyclique $\mathbf{R}_x^{\frac{k}{T}}(f)$ et une matrice de puissance cyclique complémentaire $\mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(f)$.

Filtré par un filtre linéaire multi-dimensionnel $\mathbf{H}(f)$, la sortie est alors aussi cyclostationnaire de même période cyclique. Les matrices spectrales de puissance cycliques et les matrices spectrales de puissance cycliques complémentaires de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathbf{R}_y^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{H}(f + \frac{k}{2T})\mathbf{R}_x^{\frac{k}{T}}(f)\mathbf{H}^H(f - \frac{k}{2T}) \quad (\text{I.5.31})$$

$$\mathbf{C}_y^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{H}(f + \frac{k}{2T})\mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(f)\mathbf{H}^T(-f + \frac{k}{2T}). \quad (\text{I.5.32})$$

Démonstration :

Nous avons

$$\mathbf{R}_x(t, \tau) \triangleq E[\mathbf{x}(t + \tau/2)\mathbf{x}^H(t - \tau/2)] = \sum_{\alpha} \mathbf{R}_x^{\alpha}(\tau)e^{i2\pi\alpha t}, \text{ avec } \alpha = \frac{k}{T} |_{k \in \mathbb{Z}}$$

et

$$\mathbf{R}_y(t, \tau) \triangleq E[\mathbf{y}(t + \tau/2)\mathbf{y}^*(t - \tau/2)],$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t + \tau/2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_1)\mathbf{x}(t + \tau/2 - \theta_1)d\theta_1 \\ \mathbf{y}(t - \tau/2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_2)\mathbf{x}(t - \tau/2 - \theta_2)d\theta_2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_y(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_1) E[\mathbf{x}(t + \tau/2 - \theta_1) \mathbf{x}^H(t - \tau/2 - \theta_2)] \mathbf{H}^H(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}^H(\theta_1) \mathbf{R}_x(t - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \tau + \theta_2 - \theta_1) \mathbf{H}^H(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2.\end{aligned}$$

Nous voyons clairement que $\mathbf{R}_y(t + T, \tau) = \mathbf{R}_y(t, \tau)$ et donc $\mathbf{y}(t)$ est aussi cyclostationnaire du second ordre de période T . En écrivant

$$\mathbf{R}_x(t - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \tau + \theta_2 - \theta_1) = \sum_{\alpha} \mathbf{R}_x^{\alpha}(\tau + \theta_2 - \theta_1) e^{i2\pi\alpha t} e^{-i2\pi\alpha \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}},$$

nous obtenons

$$\mathbf{R}_y(t, \tau) = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_1) \mathbf{R}_x^{\alpha}(\tau + \theta_2 - \theta_1) \mathbf{H}^H(\theta_2) e^{i2\pi\alpha t} e^{-i2\pi\alpha \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} d\theta_1 d\theta_2,$$

ayant pour transformée de Fourier (par rapport à τ)

$$\mathbf{R}_y(t, f) = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_1) \mathbf{R}_x^{\alpha}(\tau + \theta_2 - \theta_1) \mathbf{H}^H(\theta_2) e^{i2\pi\alpha t} e^{-i2\pi\alpha \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} e^{-i2\pi f \tau} d\theta_1 d\theta_2 d\tau. \quad (\text{I.5.33})$$

En remarquant que $e^{-i2\pi f \tau} = e^{-i2\pi f(\tau + \theta_2 - \theta_1)} e^{-i2\pi f \theta_1} e^{i2\pi f \theta_2}$ et qu'avec les changements de variable adéquats, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\theta_1) e^{-i2\pi f \theta_1} e^{-i2\pi \frac{\alpha}{2} \theta_1} d\theta_1 &= \mathbf{H}(f + \frac{\alpha}{2}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}^H(\theta_2) e^{i2\pi f \theta_2} e^{-i2\pi \frac{\alpha}{2} \theta_2} d\theta_2 &= \mathbf{H}^H(f - \frac{\alpha}{2}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_x^{\alpha}(\tau + \theta_2 - \theta_1) e^{-i2\pi f(\tau + \theta_2 - \theta_1)} d\tau &= \mathbf{R}_x^{\alpha}(f),\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\mathbf{R}_y(t, f) = \sum_{\alpha} \mathbf{H}(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_x^{\alpha}(f) \mathbf{H}^H(f - \frac{\alpha}{2}) e^{i2\pi\alpha t}.$$

Par conséquent, d'après la remarque 1

$$\mathbf{R}_y^{\alpha}(f) = \mathbf{H}(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{R}_x^{\alpha}(f) \mathbf{H}^H(f - \frac{\alpha}{2}),$$

de même nous obtenons

$$\mathbf{C}_y^{\alpha}(f) = \mathbf{H}(f + \frac{\alpha}{2}) \mathbf{C}_x^{\alpha}(f) \mathbf{H}^T(-f + \frac{\alpha}{2}).$$

■

Remarque 4 : Dans le cas où $\mathbf{x}(t)$ est stationnaire au second ordre $\mathbf{R}_x^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{0}$ pour $k \neq 0$ et $\mathbf{R}_x^0(f) = \mathbf{R}_x(f)$, $\mathbf{C}_x^0(f) = \mathbf{C}_x(f)$ et (I.5.31) et (I.5.32) se réduisent à (I.5.29) et (I.5.30).

Remarque 5 : Dans le cas particulier où $x(t)$ est une modulation QAM (I.2.11) filtrée par un filtre linéaire de fonction de transfert $\mathbf{h}(t)$, alors $\mathbf{y}(t) = \sum_k a_k \mathbf{g}(t - kT)$ avec $\mathbf{g}(t) = v(t) * \mathbf{h}(t)$, (I.5.31) et (I.5.32) et (I.2.18) permettent de conclure que

$$\mathbf{R}_y^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} r_a(f) \mathbf{g}(f + \frac{k}{2T}) \mathbf{g}^H(f - \frac{k}{2T}) \quad (\text{I.5.34})$$

$$\mathbf{C}_y^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T} c_a(f) \mathbf{g}(f + \frac{k}{2T}) \mathbf{g}^T(-f + \frac{k}{2T}). \quad (\text{I.5.35})$$

Remarque 6 : Dans le cas particulier d'un filtre linéaire de type MISO (où la fonction de transfert $\mathbf{H}(f)$ est un vecteur ligne noté $\mathbf{h}^H(f)$), les matrices spectrales de puissance cycliques et les matrices spectrales de puissance cycliques complémentaires de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ donnés par (I.5.31) et (I.5.32) sont reliées par les relations suivantes :

$$r_y^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{h}^H(f + \frac{k}{2T}) \mathbf{R}_x^{\frac{k}{T}}(f) \mathbf{h}(f - \frac{k}{2T}) \quad (\text{I.5.36})$$

$$c_y^{\frac{k}{T}}(f) = \mathbf{h}^H(f + \frac{k}{2T}) \mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(f) \mathbf{h}^*(-f + \frac{k}{2T}). \quad (\text{I.5.37})$$

Bibliographie

- [1] P. O. Amblard and P. Duvaut, "Filtrage adapté dans le cas gaussien complexe non circulaire," *Proc. GRETSI*, pp. 141-144, Juan-Les-Pins (France), Sept. 1995.
- [2] M. Austin, "SAIC and synchronised networks for increased GSM capacity," *3G Americas' SAIC Working group*, Sept. 2003.
- [3] W. R. Bennett, "Statistics of regenerative digital transmission", *Bell System Technical Journal*, vol. 37, pp. 1501-1542, November 1958.
- [4] G. Bottomley and S. Chennakeshu, "Unification of MLSE receivers and extension to time-varying channels," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 46, no. 4, pp. 464-472, April 1998.
- [5] W. M. Brown and R.B. Crane, "Conjugate linear filtering," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 462-465, Jul. 1969.
- [6] S. Buzzi and M. Lops, "Performance analysis for the improved linear multiuser detectors in BPSK-modulated DS-CDMA systems," *IEEE Trans. Communications*, vol. 51, pp. 37-42, Jan. 2003.
- [7] P. Chevalier and F. Pipon, "New Insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by noncircular interferences - Application to SAIC," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 870-883, March 2006.
- [8] P. Chevalier, "Optimal time invariant and widely linear spatial filtering for radiocommunications," *Proc. EUSIPCO*, pp. 559-562, Trieste (Italy), Sept. 1996.
- [9] P. Chevalier, A. Blin, F. Pipon, and F. Delaveau, "GLRT-Based array receivers to detect a known signal corrupted by noncircular interferences," *Proc. EUSIPCO*, Poznan (Poland), Sept. 2007.
- [10] P. Chevalier, A. Blin, F. Pipon, and F. Delaveau, "Second order optimal array receiver for synchronization of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by noncircular interferences," *Hindawi Publishing Corporation, Eurasip Journal on Advances in Signal Processing*, Article ID45605, 2007.
- [11] P. Chevalier, "Filtrage d'antenne optimal pour signaux non stationnaires - concepts, performances," *Proc. GRETSI*, pp. 233-236, Juan-Les-Pins (France), Sept. 1995.

- [12] P. Chevalier, "Optimal array processing for non stationary signals," *Proc. ICASSP*, pp. 2868-2871, Atlanta (USA), May 1996.
- [13] P. Chevalier, A. Blin, F. Pipon, and F. Delaveau, "Procédé et dispositif de synchronisation de liaisons rectilignes ou quasi-rectilignes en présence d'interférences de même nature," *brevet FR 05.01784*, Feb. 2005.
- [14] P. Comon, "Circularité et signaux aléatoires à temps discret," *Traitement de Signal*, vol. 11, no. 5, pp. 417-420, 1994.
- [15] D. Darsena, G. Gelli, L. Paura, and F. Verde, "Widely linear equalization and blind channel identification for interference-contaminated multicarrier systems," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, No. 3, pp. 1163-1177, March 2005.
- [16] R. F. H. Fisher and C. Windpassinger, "Real versus complex-valued equalisation in V-BLAST systems," *Electronics Letters*, vol. 39, no. 5, pp. 470-471, March 2003.
- [17] G. Forney, "Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interferences," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363-378, May 1972.
- [18] P. Forster, T. Asté, and L. Fety, "Multisensors receivers using a filtered reference : application to GSM," *In Proc. of IEEE international conference on universal personal communications*. Florence, Italy, 1998.
- [19] W. A. Gardner, "Cyclic Wiener filtering : theory and method," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 41, no. 1, pp. 151-163, Jan. 1993.
- [20] W. A. Gardner, "Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 8, pp. 14-36, April 1991.
- [21] W. A. Gardner and L. E. Francks, "Charaterization of cyclostationary random signal processing", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 21, pp. 4-14, Jan. 1975.
- [22] W. A. Gardner and C. K. Chen, "Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments : theory and method", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1168-1184, May 1992.
- [23] W. A. Gardner and C. K. Chen, "Interference-tolerant time-difference-of-arrival estimation for modulated signals", *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 36, pp. 1385-1395, Sep. 1988.
- [24] *Cyclostationarity in Communication and Signal Processing*, edited by W.A. Gardner, IEEE Press, 1994.
- [25] W.A. Gardner, A. Napolitano, and L. Paura, "Cyclostationarity : Half a century of research," *Signal Processing*, vol. 86, pp. 641-697, September 2006.

- [26] W. H. Gerstacker, R. Schober, and A. Lampe, "Receivers with widely linear processing for frequency-selective channels," *IEEE Trans. On Communications*, vol. 51, no. 9, pp. 1512-1523, Sept. 2003.
- [27] W. H. Gerstacker, F. Obernosterer, R. Schober, A. T. Lehmann, A. Lampe, and P. Gunreben, "Equalization concepts for Alamouti's space-time block code," *IEEE Trans. On Communications*, vol. 52, no. 7, pp. 1178-1190, Jul. 2004
- [28] E. G. Gladyshev, "Periodically correlated random sequences", *Sov. Math*, vol. 2, pp. 385-388, 1961.
- [29] E. G. Gladyshev, "Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter", *Theory of Probability and its Applications*, vol. 8, pp. 173-177, 1963.
- [30] A. Lampe, R. Schober, W. Gerstacker, and J. Huber, "A novel iterative multiuser detector for complex modulation schemes," *IEEE J. Sel. Areas Communications*, vol. 20, pp. 339-350, Feb. 2002.
- [31] P. A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (AMP)," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-34, pp. 150-160, Feb. 1986.
- [32] E. Lindskog, "Multi-channel maximum likelihood sequence estimation," *In Proc. of IEEE vehicular technology conference*, vol. 2, Phoenix, Arizona, USA, pp. 715-719, May 5-7 1997.
- [33] D. Mattera, L. Paura, and F. Sterle, "Widely Linear MMSE equaliser for MIMO linear time-dispersive channel," *Electronics Letters*, vol. 39, no. 20, pp. 1481-1482, Oct. 2003.
- [34] D. Mattera, L. Paura, and F. Sterle, "Widely Linear Decision-Feedback Equalizer for Time-Dispersive linear MIMO channels," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 53, No. 7, pp. 2525-2536, Jul. 2005.
- [35] R. A. Monzingo and T. W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*, Second Editon, Scitech Publishing, Inc. USA, 2004.
- [36] F. D. Neeser and L. Massey, "Proper Complex random processes with applications to information theory," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 39, no. 4, pp. 1293-1302, Jul. 1993.
- [37] J. C. Olivier and W. Kleyhans, "Single antenna interference cancellation for synchronized GSM networks using widely linear receiver," *IET Communications*, Vol. 1, No. 1, pp. 131- 136, 2007.
- [38] A. Omar, O. Yeste, and J. Grajal, "Adaptive-FRESH filters for compensation of cycle-frequency errors," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 58, No. 1, Jan. 2010.
- [39] B. Picinbono, "On Circularity," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3473-3482, Dec. 1994.

- [40] B. Picinbono and P. Chevalier, "Widely linear estimation with complex data," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 8, pp. 2030-2033, August. 1995.
- [41] B. Picinbono and P. Chevalier, "Extensions of the minimum variance method," *Signal Processing Elsevier*, vol. 49, pp. 1-9, 1996.
- [42] B. Picinbono and P. Bondon, "Second order statistics of complex signals," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 411-420, Feb. 1997.
- [43] J. G. Proakis, "*Digital Communications*," McGraw-Hill, Third Edition, 1995.
- [44] P. J. Schreier, L. L. Scharf, and A. Hanssen, "A Generalized likelihood ratio test for impropriety of complex signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, no.7, pp. 433-436, Jul. 2006.
- [45] P. J. Schreier, L. L. Scharf, and C. T. Mullis, "Detection and Estimation of improper complex random signals," *IEEE Trans on Info Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 306-312, Jan. 2005.
- [46] P. J. Schreier and L. L. Scharf, "Second order analysis of improper complex random vectors and processes," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 3, pp. 714-725, March 2003.
- [47] H. Trigui and D. Slock, "Performance bounds for cochannel interference cancellation within the current GSM standard," *Signal Processing*, vol. 80, pp. 1335-1346, 2000.
- [48] H. Trigui and D. Slock, "Cochannel interference cancellation within the current GSM standard," *In proc. of int. conf. universal personal communications*, pp. 511-515, Florence (Italy), 1998.
- [49] G. Ungerboeck, "Adaptive maximum likelihood receiver for carrier-modulated data transmission systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 22, no. 5, pp. 624-636, May 1974.
- [50] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part 1*. New York : Wiley, 1968.
- [51] P. Vila, F. Pipon, D. Pirez, and L. Fety, "MLSE antenna diversity equalization of a jammed frequency selective fading channel," *In European signal processing conference (EUSIPCO)*. Edinburgh, Scotland, pp. 1516-1519, 1994.
- [52] N. Wiener and P. Masani, "The prediction theory of multivariate stochastic processes I," *Cambridge, Mass., U.S.A. and Bombay, India*, 1955-1956.
- [53] N. Wiener and P. Masani, "The prediction theory of multivariate stochastic processes II," *Cambridge, Mass., U.S.A. and Bombay, India*, 1955-1956.
- [54] J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*. New York : Wiley, 1965.
- [55] D. C. Youla, "On the factorization of rational matrices," *IRE Trans. Inform. Theory*, pp. 172-189, 1961.