



**HAL**  
open science

# Simulations numériques de perturbations d'un tourbillon de Lamb-Oseen : application à l'éclatement tourbillonnaire dans les sillages des avions de transport

Olivier Thomas

## ► To cite this version:

Olivier Thomas. Simulations numériques de perturbations d'un tourbillon de Lamb-Oseen : application à l'éclatement tourbillonnaire dans les sillages des avions de transport. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : 2009PA066565 . tel-00814536

**HAL Id: tel-00814536**

**<https://theses.hal.science/tel-00814536>**

Submitted on 17 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

présentée pour obtenir  
le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

Spécialité : Mécanique

par

**Olivier THOMAS**

Sujet de la thèse :

**Simulations numériques de perturbations d'un tourbillon de  
Lamb-Oseen :**  
**Application à l'éclatement tourbillonnaire dans les sillages des  
avions de transport**

soutenue publiquement à MEUDON le 7 juillet 2009

devant le jury composé de :

Pr. CLAUDE CAMBON (LMFA, ECL)	<i>Rapporteur</i>
Pr. MICHEL DEVILLE (SGM-ENS, EPFL)	<i>Rapporteur</i>
Pr. RENÉE GATIGNOL (UPMC, IJRDA)	<i>Examineur</i>
Dr. LAURENT JACQUIN (ONERA, DAFE)	<i>Encadrant ONERA &amp; Directeur du DAFE</i>
Pr. PIERRE SAGAUT (UPMC, IJRDA-LMM)	<i>Directeur de thèse</i>

## Résumé

Ce mémoire synthétise les travaux réalisés sur le thème des instabilités propagatives et l'éclatement tourbillonnaire observé dans des installations expérimentales telles que les souffleries à catapulte ou les bassins hydrodynamiques, dont le but est de caractériser le sillage tourbillonnaire d'avions de transport. Il comprend une synthèse bibliographique, une exploitation des campagnes d'essais réalisées dans la soufflerie B20 à Lille, une présentation du code FLUDILES de Simulation Numérique Directe, une modélisation des perturbations d'un tourbillon de Lamb-Oseen et la validation des calculs DNS, une étude numérique de la dynamique non linéaire d'un tourbillon de Lamb-Oseen par la DNS.

**Mots-clefs : tourbillon de sillage ; sillage d'avion ; ondes inertielles ; éclatement tourbillonnaire ; propagation d'ondes ; Simulation Numérique Directe.**

## Abstract

This report synthesizes the works performed on the theme of end effects and vortex bursting observed in experimental facilities such as catapult wind tunnels or towing tanks, whose aim it is to characterize the wake vortices of civil aircraft. It includes a bibliographical synthesis, the post-processing of experimental campaigns performed in the B20 wind tunnel in Lille, the presentation of the Direct Numerical Simulation FLUDILES code, the modelling of the disturbances of a Lamb-Oseen vortex and the confirmation of DNS calculations, the numerical study of the nonlinear dynamics of a Lamb-Oseen vortex by means of DNS.

**Keywords : wake vortex ; airplane trailing vortices ; inertial waves ; vortex bursting ; end-effects ; Direct Numerical Simulation.**

# Remerciements

En cours de rédaction ...

---

De l'impérieuse nécessité du doute et de la perpétuelle remise en question dans toute activité de recherche ...

”Qui ne doute pas acquiert peu.”

Léonard DE VINCI

”Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.”

Henri POINCARÉ, *La Science et l'hypothèse*, introduction.

”Le savant doit ordonner ; on fait la Science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.”

Ibid., chapitre 9.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Tourbillons et sillages des avions de transport . . . . .	1
1.2	Incidences des sillages tourbillonnaires . . . . .	2
1.3	Les recherches sur les sillages tourbillonnaires . . . . .	4
1.4	Point de départ de cette étude . . . . .	6
1.5	Objectifs et organisation de la thèse . . . . .	7
<b>I</b>	<b>Caractérisation du phénomène d'éclatement tourbillonnaire</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Etude bibliographique</b>	<b>9</b>
2.1	End-effects (effets de bord) et éclatement tourbillonnaire . . . . .	9
2.1.1	End-effects . . . . .	9
2.1.1.1	Introduction . . . . .	9
2.1.1.2	Les solutions mises en pratique . . . . .	11
2.1.2	Eclatement tourbillonnaire . . . . .	11
2.1.2.1	Quelques points de terminologie . . . . .	12
2.1.2.2	Etudes expérimentales de l'éclatement tourbillonnaire . . . . .	13
2.1.2.3	Etudes théoriques de l'éclatement tourbillonnaire . . . . .	17
2.1.2.4	Etudes numériques de l'éclatement tourbillonnaire . . . . .	22
2.2	Dynamique linéaire de modèles analytiques de tourbillon . . . . .	22
2.2.1	Dynamique linéaire du tourbillon de Rankine . . . . .	23
2.2.2	Dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	23
2.2.3	Physique des mécanismes linéaires de propagation dans un tourbillon . . . . .	24
2.2.3.1	Mécanismes axisymétriques . . . . .	24
2.2.3.2	Mécanismes hélicoïdaux . . . . .	25
2.2.3.3	Mécanismes en double hélice . . . . .	26
2.2.3.4	Bilan des mécanismes linéaires de la dynamique tourbillonnaire . . . . .	28
2.3	Effets des non-linéarités sur la dynamique tourbillonnaire . . . . .	28
2.3.1	Les non-linéarités, moteur des instationnarités dans la dynamique tourbillonnaire et de la transition vers la turbulence . . . . .	30
2.3.2	Amortissement des instabilités hydrodynamiques par saturation non-linéaire . . . . .	30
2.3.3	Non-linéarités et singularités des couches critiques . . . . .	31
2.3.4	Couches critiques et éclatement tourbillonnaire . . . . .	31
2.4	Conclusions de l'étude bibliographique . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Etude expérimentale</b>	<b>35</b>
3.1	Présentation de l'installation . . . . .	35
3.1.1	Description du montage expérimental et des moyens de mesure . . . . .	35
3.1.2	Etude des sillages tourbillonnaires au B20 et position du problème . . . . .	37

3.2	Dépouillement des données PIV . . . . .	39
3.2.1	Outils de diagnostic . . . . .	40
3.2.1.1	critères locaux . . . . .	40
3.2.1.2	critères globaux . . . . .	78
3.2.1.3	Développement en série de Fourier des champs expérimentaux . . . . .	82
3.2.2	Déduction pratique des caractéristiques du tourbillon . . . . .	83
3.2.2.1	Centre du tourbillon . . . . .	83
3.2.2.2	Géométrie azimutale de la perturbation . . . . .	83
3.2.3	Caractérisation des instabilités . . . . .	83
3.3	Conclusions de l'étude expérimentale . . . . .	85
 <b>II Modélisation numérique du phénomène</b>		<b>87</b>
 <b>4 Modélisation des end-effects et de l'éclatement tourbillonnaire</b>		<b>88</b>
4.1	Démarche de modélisation . . . . .	88
4.1.1	Observations expérimentales et études théoriques . . . . .	89
4.1.2	Hypothèses et procédure de notre modélisation . . . . .	92
4.2	Les modèles classiques de tourbillons sans écoulement axial . . . . .	94
4.2.1	Le tourbillon de Rankine . . . . .	94
4.2.2	Le tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	94
4.2.3	Les tourbillons à deux échelles . . . . .	95
4.3	Les perturbations du champ de base . . . . .	95
4.3.1	Une perturbation axisymétrique : $m=0$ . . . . .	95
4.3.2	Une perturbation hélicoïdale : $m=1$ . . . . .	95
4.3.3	Une perturbation elliptique : $m=2$ . . . . .	96
4.4	Choix de l'outil numérique . . . . .	96
4.5	Conclusions de la modélisation . . . . .	97
 <b>5 Méthodes numériques</b>		<b>98</b>
5.1	Présentation du code FLUDILES . . . . .	98
5.1.1	Equations résolues . . . . .	98
5.1.2	Paramètres adimensionnels . . . . .	100
5.2	Méthodes numériques . . . . .	101
5.2.1	Discrétisation spatiale . . . . .	101
5.2.1.1	Discrétisation des termes convectifs . . . . .	101
5.2.1.2	Discrétisation des termes diffusifs . . . . .	103
5.2.2	Intégration temporelle . . . . .	104
5.2.3	Conditions aux limites . . . . .	105
5.2.3.1	Frontière longitudinale (direction $y$ ) . . . . .	105
5.2.3.2	Frontières transverses (directions $x$ & $z$ ) . . . . .	106
5.3	Développements spécifiques dans le code FLUDILES . . . . .	108
5.3.1	Filtrage en espace . . . . .	108
5.3.1.1	Caractéristique du filtrage spatial . . . . .	108
5.3.1.2	Expressions analytiques des filtres classiques . . . . .	109
5.3.2	Anti-diffusion du champ de base . . . . .	111

<b>III</b>	<b>Résultats numériques et analyse physique</b>	<b>114</b>
<b>6</b>	<b>Dynamique linéaire d'un tourbillon de Lamb-Oseen</b>	<b>115</b>
6.1	Cadre de l'étude . . . . .	115
6.2	Les ondes de Kelvin et les modes singuliers du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	116
6.2.1	Quelques points de terminologie pour la classification des ondes de Kelvin	116
6.2.2	Equations de la stabilité linéaire . . . . .	118
6.2.3	Les ondes de Kelvin axisymétriques du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	119
6.2.4	Les ondes de Kelvin hélicoïdales du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	120
6.2.4.1	L'onde de déplacement (le mode "D") . . . . .	120
6.2.4.2	Les ondes de coeur (famille "C") . . . . .	123
6.2.4.3	Les modes purement visqueux (famille "V") . . . . .	126
6.2.4.4	Les branches de Landau (famille "L") . . . . .	128
6.2.5	Les ondes de Kelvin elliptiques du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	137
6.2.5.1	Les ondes de coeur (famille "C") . . . . .	138
6.2.5.2	Les modes purement visqueux (famille "V") . . . . .	140
6.2.5.3	Les branches de Landau (famille "L") . . . . .	141
6.2.5.4	Le mode d'aplatissement (la branche "F") . . . . .	143
6.2.6	Bilan de l'étude des modes normaux du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	143
6.3	Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à des perturbations localisées infinitésimales	144
6.3.1	Paramètres physiques et numériques de nos calculs DNS . . . . .	145
6.3.2	Validation de notre code DNS sur la théorie de stabilité linéaire . . . . .	147
6.3.2.1	Validation du code DNS sur la perturbation axisymétrique ( $m=0$ )	148
6.3.2.2	Validation du code DNS sur la perturbation hélicoïdale ( $m=1$ ) .	149
6.3.2.3	Validation du code DNS sur la perturbation elliptique ( $m=2$ ) . .	151
6.3.3	Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation hélicoïdale ( $m=1$ ) en régime visqueux ( $Re=1000$ ) . . . . .	152
6.3.4	Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation elliptique ( $m=2$ ) en régime visqueux ( $Re=1000$ ) . . . . .	156
6.4	Conclusions de la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen</b>	<b>161</b>
7.1	Etude paramétrique sur l'amplitude $\varepsilon$ des perturbations initiales à $Re = 1000$ . .	162
7.2	Réponse non linéaire à une perturbation axisymétrique de grande amplitude à $Re = 1000$ . . . . .	163
7.2.1	Description de la dynamique non linéaire de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude à $Re = 1000$ . . . . .	164
7.2.2	Effets des non-linéarités sur la propagation de la perturbation axisymétrique de grande amplitude . . . . .	168
7.2.3	Contenu spectral de la perturbation axisymétrique non linéaire . . . . .	169
7.2.4	Bilan de la dynamique axisymétrique non linéaire . . . . .	176
7.3	Réponse non linéaire à une perturbation hélicoïdale de grande amplitude à $Re =$ $1000$ . . . . .	177
7.3.1	Description de la dynamique non linéaire de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude à $Re = 1000$ et comparaison avec la dynamique linéaire de la perturbation infinitésimale . . . . .	177
7.3.2	Contenu spectral de la perturbation hélicoïdale non linéaire . . . . .	184
7.4	Retour à la modélisation de l'éclatement tourbillonnaire au banc B20 . . . . .	196
7.4.1	Estimation du nombre de Mach . . . . .	196
7.4.2	Estimation du nombre de Reynolds . . . . .	198

7.4.3	Estimation de la durée physique à simuler numériquement . . . . .	199
7.5	Réponse non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen à une perturbation hélicoïdale infinitésimale à haut nombre de Reynolds . . . . .	201
7.5.1	Comparaison des dynamiques à $Re = 1000$ et $Re = 100000$ de la perturbation hélicoïdale infinitésimale . . . . .	202
7.5.2	Contenu spectral de la perturbation hélicoïdale infinitésimale à bas et haut nombres de Reynolds . . . . .	207
7.6	Discussions et interprétations physiques des calculs DNS de la perturbation hélicoïdale	213
7.6.1	Résumé des principaux résultats obtenus avec le code DNS sur la perturbation $m = 1$ . . . . .	213
7.6.2	Effets du nombre de Reynolds : comparaison entre la DNS et la théorie de stabilité linéaire . . . . .	213
7.6.3	Interprétation des couches critiques 3D à l'aide de nombres adimensionnels	218
7.6.3.1	Nombre d'Haberman-Morton . . . . .	218
7.6.3.2	Construction d'un nouveau nombre adimensionnel . . . . .	219
7.6.3.3	Eléments de conclusion sur les couches critiques 3D . . . . .	221
7.7	Conclusions de la dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen . . . . .	223
<b>8</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>227</b>
8.1	Synthèse des principaux résultats obtenus . . . . .	227
8.2	Perspectives de prolongation de ces travaux . . . . .	230
8.2.1	Exploitation des données expérimentales . . . . .	230
8.2.2	Développements informatiques dans le code de calcul FLUDILES . . . . .	231
8.2.3	Les outils de post-traitement et d'analyse physique . . . . .	232
8.2.4	Quelques perspectives de calculs DNS pour l'avenir . . . . .	233

# Table des figures

1.1	Sillage d'un avion de transport biréacteur en phase d'atterrissage. . . . .	1
1.2	Sillage tourbillonnaire en régime de croisière d'un quadriréacteur, matérialisé par les traînées de condensation. . . . .	1
1.3	Les différentes phases du développement d'un sillage tourbillonnaire derrière un avion de transport. . . . .	2
1.4	Accident du vol AA 587 le 12/11/2001, survenu 103 s après le décollage de JFK International Airport et faisant 265 victimes. . . . .	2
1.5	Règlementation des distances de séparation en fonction de la masse des avions par l'OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale). . . . .	3
1.6	Historique et organisation des différents programmes internationaux de recherche sur les sillages tourbillonnaires depuis le début des années 90 jusqu'à aujourd'hui (ATM : Air Traffic Management). Interactions et échanges d'informations entre les projets européens AWIATOR et FAR-Wake. . . . .	3
1.7	Calcul du sillage proche par la simulation numérique, à partir de données expérimentales, dans le cadre du programme Eurowake. . . . .	4
1.8	Mise en évidence sur une même expérience des instabilités de grande longueur d'onde (Crow) et de courte longueur d'onde (Widnall) en bassin d'eau (d'après Leweke et Williamson [181]). . . . .	5
1.9	Caractérisation des sillages tourbillonnaires par de grands moyens expérimentaux et la simulation numérique, dans le programme européen AWIATOR. . . . .	5
1.10	Eclatement tourbillonnaire ("vortex bursting") observé au bout de 18 envergures à la soufflerie à catapulte B20 de l'ONERA Lille (norme du champ de vitesse). . . . .	6
1.11	Propagation d'ondes ("end-effects") dans le sillage tourbillonnaire d'une maquette tractée en bassin hydrodynamique (WSG du DLR à Göttingen). . . . .	6
2.1	Montage expérimental d'Olsen [210], pour étudier les end-effects (Boeing, 1970). Essais réalisés en bassin hydrodynamique avec un profil NACA 0012, relié par un dard vertical au système de traction. Les effets de la surface libre du liquide sont réduits en utilisant des faibles vitesses de tractage. Le dispositif de visualisation est très similaire à la technique décrite par Baker [9]. . . . .	10
2.2	Le mécanisme de propagation en forme de "crêpes", introduit par Spalart [249]. . . . .	12
2.3	Deux types d'éclatement tourbillonnaire (bulle axisymétrique et spirale) sur une aile delta (Lambourne et Bryer [159], 1961). . . . .	13
2.4	Deux éclatements tourbillonnaires de type spirale sur une aile delta (Werle [267], 1971). . . . .	13
2.5	Eclatement tourbillonnaire axisymétrique en forme de bulbe (d'après Sarpkaya [232]). . . . .	14
2.6	Eclatement tourbillonnaire spiral (d'après Sarpkaya [232]). . . . .	14
2.7	Eclatement tourbillonnaire en structure de double hélice (d'après Sarpkaya [232]). . . . .	14
2.8	Abscisse de l'éclatement tourbillonnaire en fonction des nombres de Reynolds $Re$ et de swirl de l'écoulement pour chaque type rencontré par Faler et Leibovich [101, 102]. . . . .	15
2.9	Eclatements tourbillonnaires de types bulbe et spiral en régime laminaire (d'après Faler et Leibovich [101, 102]). . . . .	16
2.10	Evolution de l'amplitude d'une perturbation et propagation d'ondes pour plusieurs nombres de Froude autour du régime transcritique (d'après Hanazaki [128]). . . . .	21

2.11	Mécanisme axisymétrique de propagation d'ondes le long du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [98]). . . . .	25
2.12	Mécanisme hélicoïdal de propagation d'ondes le long du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [98]). . . . .	25
2.13	Mécanisme de propagation d'ondes en double hélice le long du tourbillon de Rankine (d'après Arendt & al. [8]). . . . .	27
2.14	Représentation schématique de perturbations localisées en forme de paquets d'ondes de Kelvin : ondes axisymétriques $m = 0$ , ondes hélicoïdales $m = 1$ et ondes elliptiques $m = 2$ . . . . .	29
2.15	Effets d'une tuyère convergente sur un écoulement tournant (d'après Leclaire [167]). . . . .	30
3.1	Catapultage d'une maquette d'avion de transport au banc B20 . . . . .	36
3.2	Dimensions de l'installation au B20 . . . . .	36
3.3	Dimensions de la zone d'observation au B20 . . . . .	36
3.4	Principe de la catapulte B20 (configuration L55-R73) . . . . .	36
3.5	Maquette d'Airbus A340 disposée sur la rampe de catapultage . . . . .	36
3.6	Bac de récupération . . . . .	37
3.7	Maquette VLTA de référence (Airbus A380) utilisée dans le programme AWIATOR . . . . .	38
3.8	Caractéristiques techniques de la maquette du programme AWIATOR . . . . .	38
3.9	Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage, $\sigma = 3$ noeuds de maillage). Champ de vitesse, Phase IV, X=17.5. . . . .	41
3.10	Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage, $\sigma = 3$ noeuds de maillage). Champ de vortacité, Phase IV, X=17.5. . . . .	42
3.11	Comparaison en gros plan entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage, $\sigma = 3$ noeuds de maillage). Champ de vortacité, Phase IV, X=17.5. . . . .	43
3.12	Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage, $\sigma = 3$ noeuds de maillage). Critère Q (gros plan sur le tourbillon), Phase IV, X=17.5. . . . .	44
3.13	Valeurs de $\Gamma_2$ , Phase IV, X=17.5. Tailles des fenêtres d'interrogation $r_w = 0.01$ et $r_w = 0.02$ . . . . .	45
3.14	Valeurs de $\Gamma_2$ , Phase IV, X=17.5. Tailles des fenêtres d'interrogation $r_w = 0.03$ et $r_w = 0.04$ . . . . .	46
3.15	Phase III. Champs de vortacité (données filtrées) X=14.3 à X=24.2. . . . .	47
3.16	Phase III. Champs de vortacité (données filtrées) X=27.5 à X=37.4. . . . .	48
3.17	Champs de vortacité (données filtrées) X=40.7 à X=44. . . . .	49
3.18	Phase III. X=14.3 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	50
3.19	Phase III. X=17.6 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	51
3.20	Phase III. X=20.9 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	52
3.21	Phase III. X=24.2 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	53
3.22	Phase III. X=27.5 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	54
3.23	Phase III. X=30.8 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	55
3.24	Phase III. X=34.1 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	56
3.25	Phase III. X=37.4 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	57
3.26	Phase III. X=40.7 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	58
3.27	Phase III. X=44.0 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	59
3.28	Phase IV. Champs de vortacité (données filtrées) X=14.2 à X=23.9. . . . .	60
3.29	Phase IV. Champs de vortacité (données filtrées) X=27.2 à X=36.7. . . . .	61
3.30	Phase IV. Champs de vortacité (données filtrées) X=40.1 à X=43.3. . . . .	62
3.31	Phase IV. X=14.2 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	63
3.32	Phase IV. X=17.5 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	64
3.33	Phase IV. X=20.7 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	65
3.34	Phase IV. X=23.9 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	66
3.35	Phase IV. X=27.2 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	67
3.36	Phase IV. X=30.4 Champ de vortacité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	68

TABLE DES FIGURES

3.37	Phase IV. X=33.6 Champ de vorticité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	69
3.38	Phase IV. X=36.7 Champ de vorticité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	70
3.39	Phase IV. X=40.1 Champ de vorticité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	71
3.40	Phase IV. X=43.3 Champ de vorticité (données filtrées) et critère $\Gamma_2$ . . . . .	72
3.41	Position du centre du tourbillon, X=14.3 (14.2) � X=34.1 (33.6). Comparaison entre les phases III et IV. . . . .	73
3.42	Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=14.3 et X=17.6. . . . .	74
3.43	Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=20.9 et X=24.2. . . . .	75
3.44	Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=27.5 et X=30.8. . . . .	76
3.45	Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=34.1. . . . .	77
3.46	Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=14.2 et X=17.5. . . . .	78
3.47	Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=20.7 et X=23.9. . . . .	79
3.48	Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=27.2 et X=30.4. . . . .	80
3.49	Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon r autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour X=33.6. . . . .	81
3.50	Calcul du critère $\Gamma_2$ (d'après Graftieux & al. [113] et Michard & al. [199]). . . . .	82
4.1	Influence de la distance entre le plan d'observation et le point de largage de la maquette (instrumentation Lidar, projet AWIATOR). . . . .	89
4.2	Influence de la distance entre le bac de récupération de la maquette et le plan d'observation (instrumentation Lidar, projet AWIATOR). . . . .	90
4.3	Positions du profil NACA 0012 et de la perturbation (end-effects) en fonction du temps (essais expérimentaux au bassin hydrodynamique de Boeing Seattle). . . . .	90
4.4	Vitesse de la perturbation (end-effects) en fonction de la vitesse de tractage de la maquette (essais expérimentaux au bassin hydrodynamique WSG du DLR Göttingen). . . . .	90
4.5	Vitesse de la perturbation (onde de pression par un calcul numérique du CERFACS) normalisée par la vitesse tangentielle maximale du tourbillon, en fonction du rapport des rayons du vortex dans les �tats d'équilibre et perturbé (�largissement axisymétrique - cf. Moet & al. [204]). . . . .	91
4.6	Phénomène de "vortex meandering" (flottement du tourbillon, projet FAR-Wake). . . . .	92
4.7	Eclatement tourbillonnaire dans le sillage d'un gros avion de transport en vol libre (expérimentation réalisée au NLR). . . . .	93
4.8	Mécanisme de propagation de perturbations en forme de crêpes, pouvant conduire au vortex bursting (d'après Spalart [249], cf. chapitre 2). . . . .	93
5.1	Fonctions de transfert des filtres spatiaux à différents ordres. . . . .	109
5.2	Champ de vitesse axiale de notre perturbation m=1 � Re=10000 - T=4 sans filtrage spatial. . . . .	111
5.3	Champ de vitesse axiale de notre perturbation m=1 � Re=10000 - T=4 avec filtrage spatial. . . . .	111

5.4	Calcul de l'énergie cinétique de notre perturbation $m=1$ à $Re=1000$ et $\epsilon = 0.01$ intégrée sur tout le domaine de calcul. Effets de la technique d'antidiffusion du champ de base et comparaison aux résultats de la stabilité linéaire. . . . .	113
6.1	Diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=0$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre [93]). . . . .	119
6.2	Diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=1$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	121
6.3	Le mode "D" (Déplacement) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique en forme de dipôle (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	122
6.4	Le mode "D" (Déplacement) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	122
6.5	Topologie de l'onde de déplacement hélicoïdale (mode "D" - $m=1$ ) à $Re = 1000$ pour deux nombres d'onde axiaux. (a) $k = 0.1$ , $\omega = -0.012 - 4.7 \cdot 10^{-5} i$ . (b) $k = 3$ , $\omega = -0.5602 - 0.0124 i$ . Isocontours de la perturbation de vorticité axiale dans un plan perpendiculaire à l'axe du vortex, donnant la structure des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres. Le cercle en pointillé représente le lieu du maximum de vitesse azimutale pour le tourbillon de Lamb-Oseen, matérialisant la zone fortement rotationnelle dans le coeur du vortex (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	122
6.6	Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	123
6.7	Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	123
6.8	Un mode singulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique de mode central en forme de dipôle (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	124
6.9	Un mode singulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	124
6.10	Topologies de deux ondes hélicoïdales de coeur (modes "C" - $m=1$ ) à $k = 5$ pour $Re = 1000$ . (a) $\omega = 1.9920 - 0.0625 i$ . (b) $\omega = 1.7031 - 0.1114 i$ . Illustration, à des nombres donnés de $k$ et $Re$ , des changements de structure des modes propres, correspondants à deux branches de la famille "C" sur le diagramme 6.2, en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	125
6.11	Topologie du mode propre sur la première branche hélicoïdale de la famille "C" ( $m=1$ ) à $Re = 100000$ pour trois nombres d'onde axiaux. (a) $k = 1$ , $\omega = 1.2099 - 4.01 \cdot 10^{-4} i$ . (b) $k = 0.5$ , $\omega = 1.0708 - 8.05 \cdot 10^{-4} i$ . (c) $k = 0.1$ , $\omega = 1.0003 - 5.212 \cdot 10^{-3} i$ . Illustration du comportement en "modes centraux" (singuliers) dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ), en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	125
6.12	Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	127
6.13	Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	127
6.14	Topologies de deux ondes hélicoïdales purement visqueuses (modes "V" - $m=1$ ) à $Re = 1000$ . (a) $k = 0.1$ , $\omega = 0.8664 - 0.1223 i$ . (b) $k = 1$ , $\omega = 0.7023 - 0.1881 i$ . Illustration, sur deux longueurs d'onde, des changements de la structure du mode propre correspondant à la branche de la famille "V" la moins amortie sur le diagramme 6.2, en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	127
6.15	Gros plan sur les ondes "L" dans le diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=1$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	128
6.16	Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	129

6.17	Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	129
6.18	Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : structure géométrique de couche critique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	130
6.19	Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=1$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	130
6.20	Un mode singulier de Landau de première espèce (perturbation $m=1$ à $Re=1000$ ) : structure géométrique de couche critique enlacée à proximité du coeur tourbillonnaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	131
6.21	Un mode singulier de Landau de première espèce (perturbation $m=1$ à $Re=1000$ ) : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	131
6.22	Un mode singulier de Landau de seconde espèce (perturbation $m=1$ à $Re=1000$ ) : structure géométrique de couche critique enlacée très loin du noyau tourbillonnaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	131
6.23	Un mode singulier de Landau de seconde espèce (perturbation $m=1$ à $Re=1000$ ) : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	131
6.24	Topologie du mode propre sur la première branche hélicoïdale de la famille "L1" ( $m=1$ ) à $Re = 1000$ pour quatre nombres d'onde axiaux. (a) $k = 2.262$ , $\omega = -0.0119 i$ . (b) $k = 1$ , $\omega = 0.1480 - 0.0216 i$ . (c) $k = 0.8$ , $\omega = 0.1560 - 0.0433 i$ . (d) $k = 0.5$ , $\omega = 0.1439 - 0.0900 i$ . Illustration du comportement en "modes centraux" (singuliers) dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ), en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	132
6.25	Topologie des deux espèces de modes propres hélicoïdaux de Landau ( $m=1$ ) à $Re = 1000$ . (a) $k = 3.975$ , $\omega = -0.0368 i$ . (b) $k = 5$ , $\omega = 0.04602 - 0.07861 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	133
6.26	Effet du nombre de Reynolds sur la topologie des modes propres hélicoïdaux de Landau : évolution d'une onde donnée de type "L" ( $m = 1$ à $k = 1$ ) en augmentant $Re$ . (a) $Re = 3000$ , $\omega = 0.1515 - 0.0219 i$ . (b) $Re = 5000$ , $\omega = 0.1522 - 0.0220 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	136
6.27	Diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=2$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	137
6.28	Diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=2$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	138
6.29	Structure de différents modes propres en double hélice ( $m = 2$ ) à $Re = 1000$ . (a) mode "C" avec $k = 5$ , $\omega = 2.703 - 0.0996 i$ . (b) mode "C" avec $k = 0.1$ , $\omega = 1.8702 - 0.1305 i$ . (c) mode "V" avec $k = 1$ , $\omega = 1.6648 - 0.2339 i$ . (d) mode "L" avec $k = 5$ , $\omega = 0.4077 - 0.0730 i$ . (e) mode "F" avec $k = 3.45$ , $\omega = 0.3608 - 0.0173 i$ . (f) mode "F" avec $k = 1$ , $\omega = 0.4203 - 0.0921 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]). . . . .	139
6.30	Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	140
6.31	Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	140
6.32	Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	141
6.33	Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	141
6.34	Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	142

6.35	Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	142
6.36	Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : structure géométrique de couche critique (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	142
6.37	Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation $m=2$ à $Re=1000$ : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	142
6.38	Diagramme de stabilité linéaire des perturbations $m=3$ du tourbillon de Lamb-Oseen à $Re=1000$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	144
6.39	Vitesses de groupe maximales des ondes de Kelvin $\omega_{m,n}$ du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [99]). . . . .	147
6.40	Maillages des calculs DNS en régime linéaire ( $r_c$ représente la taille du coeur tourbillonnaire et $T_0$ la période de retournement du vortex). . . . .	148
6.41	validation du code DNS sur la perturbation $m=0$ en régime linéaire (maillage à 16 M points) . . . . .	149
6.42	validation du code DNS sur la perturbation $m=1$ en régime linéaire (maillage à 8 M points) . . . . .	150
6.43	Maillage du calcul DNS CALC132 sur la perturbation $m = 1$ à $Re = 1000$ avec $\varepsilon = 0.01$ ( $r_c$ représente la taille du coeur tourbillonnaire et $T_0$ la période de retournement du vortex). . . . .	150
6.44	Calcul DNS de la perturbation $m = 1$ avec $\varepsilon = 0.01$ à $Re = 1000$ sur une durée de $20 T_0$ (maillage à 15,9 M points) . . . . .	151
6.45	validation du code DNS sur la perturbation $m=2$ en régime linéaire (maillage à 5 M points) . . . . .	152
6.46	Calcul par la théorie de stabilité linéaire à $Re=1000$ de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation $m=1$ en régime linéaire à l'instant $T=6$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	153
6.47	isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à $\pm 10\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	154
6.48	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = -9$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	154
6.49	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = 0$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	154
6.50	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = +9$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	154
6.51	Calcul par la théorie de stabilité linéaire à $Re=1000$ de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation $m=2$ en régime linéaire à l'instant $T=4$ (d'après Fabre et Jacquin [93]). . . . .	156
6.52	isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à $\pm 10\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	157
6.53	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = -6$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	157
6.54	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = 0$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	157
6.55	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = +6$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	157
7.1	Etude paramétrique de l'amplitude initiale de la perturbation $m=0$ (calculs DNS). . . . .	162
7.2	Etude paramétrique de l'amplitude initiale de la perturbation $m=1$ (calculs DNS). . . . .	162
7.3	Etude paramétrique de l'amplitude initiale de la perturbation $m=2$ (calculs DNS). . . . .	163
7.4	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=0$ . . . . .	164
7.5	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=1$ . . . . .	165
7.6	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=2$ . . . . .	165
7.7	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=3$ . . . . .	165
7.8	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=4$ . . . . .	165
7.9	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=5$ . . . . .	166
7.10	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ à $Re=1000$ à $T=6$ . . . . .	166

TABLE DES FIGURES

7.11	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ � $Re=1000$ � $T=7$ .	167
7.12	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ � $Re=1000$ � $T=8$ .	167
7.13	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ � $Re=1000$ � $T=9$ .	167
7.14	Perturbation de vorticité axiale : $m=0$ � $Re=1000$ � $T=10$ .	167
7.15	Perturbation $m = 0$ � $Re = 1000$ de grande amplitude à $T=2-4-6$ périodes de retournement du tourbillon.	168
7.16	Perturbation $m = 0$ � $Re = 1000$ de grande amplitude à $T=7-8-9$ périodes de retournement du tourbillon.	168
7.17	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 0$ .	170
7.18	Profil de la perturbation initiale $m = 0$ de vorticité axiale de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - y = 0$ ).	170
7.19	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 1$ .	171
7.20	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 2$ .	171
7.21	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 3$ .	172
7.22	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 4$ .	172
7.23	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 5$ .	172
7.24	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 6$ .	172
7.25	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 7$ .	173
7.26	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 8$ .	173
7.27	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 9$ .	173
7.28	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en $y = 0$ � $T = 10$ .	173
7.29	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 2$ dans le plan $\frac{y}{a} = 0.5$ .	174
7.30	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 2$ dans le plan $\frac{y}{a} = 3.5$ .	174
7.31	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 2$ dans le plan $\frac{y}{a} = 5.75$ .	174
7.32	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 4$ dans le plan $\frac{y}{a} = 0.5$ .	175
7.33	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 4$ dans le plan $\frac{y}{a} = 9.5$ .	175
7.34	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 4$ dans le plan $\frac{y}{a} = 12.75$ .	175
7.35	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 6$ dans le plan $\frac{y}{a} = 0.5$ .	175
7.36	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 6$ dans le plan $\frac{y}{a} = 11.25$ .	175
7.37	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) � $T = 6$ dans le plan $\frac{y}{a} = 20$ .	175

7.38	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 1$ dans le plan $y = 0$ . . . . .	176
7.39	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 4$ dans le plan $y = 0$ . . . . .	176
7.40	Contenu spectral de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 7$ dans le plan $y = 0$ . . . . .	176
7.41	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 0$ (maillage à 8 M points). . . . .	178
7.42	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 0$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	178
7.43	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 1$ (maillage à 8 M points). . . . .	178
7.44	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 1$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	178
7.45	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 2$ (maillage à 8 M points). . . . .	179
7.46	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 2$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	179
7.47	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 3$ (maillage à 8 M points). . . . .	180
7.48	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 3$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	180
7.49	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 4$ (maillage à 8 M points). . . . .	180
7.50	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 4$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	180
7.51	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 5$ (maillage à 8 M points). . . . .	181
7.52	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 5$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	181
7.53	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 6$ (maillage à 8 M points). . . . .	182
7.54	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 6$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	182
7.55	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 7$ (maillage à 8 M points). . . . .	182
7.56	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 7$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	182
7.57	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 8$ (maillage à 8 M points). . . . .	183
7.58	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 8$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	183
7.59	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 9$ (maillage à 8 M points). . . . .	183
7.60	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 9$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	183
7.61	Perturbation infinitésimale $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime linéaire : $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 10$ (maillage à 8 M points). . . . .	184
7.62	Perturbation de grande amplitude $m = 1$ à $Re = 1000$ (régime non linéaire : $\varepsilon = 0.5$ ) à $T = 10$ (maillage à 15.9 M points). . . . .	184

TABLE DES FIGURES

7.63	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 0$ . . . .	185
7.64	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 0$ . . . .	185
7.65	Profil de la perturbation initiale $m = 1$ de vorticité axiale ( $\theta = \pi/2 - \varepsilon = 0.5 - y = 0$ ). . . . .	185
7.66	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 1$ . . . .	186
7.67	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 1$ . . . .	186
7.68	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 2$ . . . .	187
7.69	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 2$ . . . .	187
7.70	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 3$ . . . .	188
7.71	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 3$ . . . .	188
7.72	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 4$ . . . .	189
7.73	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 4$ . . . .	189
7.74	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 5$ . . . .	190
7.75	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 5$ . . . .	190
7.76	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 6$ . . . .	191
7.77	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 6$ . . . .	191
7.78	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 7$ . . . .	192
7.79	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 7$ . . . .	192
7.80	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 8$ . . . .	193
7.81	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 8$ . . . .	193
7.82	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 9$ . . . .	194
7.83	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 9$ . . . .	194
7.84	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à $T = 10$ . . . .	195
7.85	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à $T = 10$ . . . .	195
7.86	Schéma du sillage tourbillonnaire d’un avion de transport, après fusion des tourbillons corotatifs de volet et bout d’aile, et principaux paramètres de modélisation des deux tourbillons contrarotatifs en champs étendu et lointain. . . . .	196
7.87	Raffinement de maillage des calculs DNS pour l’augmentation du nombre de Reynolds jusqu’à $Re = 100000$ sur la perturbation $m = 1$ ( $r_c$ représente la taille du coeur tourbillonnaire et $T_0$ la période de retournement du vortex). . . . .	202
7.88	Test de convergence pour $Re=100000$ : comparaison entre le maillage standard et le maillage raffiné. . . . .	203
7.89	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=1$ (maillage à 8 M points) . . . . .	203
7.90	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=1$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	203
7.91	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=2$ (maillage à 8 M points) . . . . .	204
7.92	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=2$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	204
7.93	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=3$ (maillage à 8 M points) . . . . .	204
7.94	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=3$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	204
7.95	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=4$ (maillage à 8 M points) . . . . .	205
7.96	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=4$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	205
7.97	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=5$ (maillage à 8 M points) . . . . .	206
7.98	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=5$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	206
7.99	Perturbation $m=1$ � $Re=1000$ en régime linéaire $T=6$ (maillage à 8 M points) . . . . .	207
7.100	Perturbation $m=1$ � $Re=100000$ en régime linéaire $T=6$ (maillage à 13.4 M points) . . . . .	207
7.101	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) � $T = 0$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	208
7.102	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) � $T = 0$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	208
7.103	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) � $T = 1$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	208
7.104	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) � $T = 1$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	208
7.105	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) � $T = 2$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	209

7.106	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 2$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	209
7.107	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 3$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	210
7.108	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 3$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	210
7.109	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 4$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	211
7.110	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 4$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	211
7.111	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 5$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	211
7.112	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 5$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	211
7.113	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 6$ dans le cas $Re = 1000$ . . . . .	212
7.114	Contenu spectral de la perturbation $m = 1$ infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à $T = 6$ dans le cas $Re = 100000$ . . . . .	212
7.115	isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à $\pm 10\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	215
7.116	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = -12$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	215
7.117	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = 0$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	215
7.118	isosurfaces dans le plan $\frac{y}{a} = +12$ de la perturbation de vorticité correspondant à $\pm 5\%$ du maximum de la perturbation initiale . . . . .	215
7.119	Calcul par la théorie de stabilité linéaire de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen en régime non visqueux à notre perturbation $m = 1$ en régime linéaire à l'instant $T = 6$ (d'après Fabre [99]). . . . .	216
7.120	Estimations de maillages pour un calcul DNS dédié aux couches critiques 3D non linéaires, sur la perturbation $m = 1$ avec $\varepsilon = 0.5$ et $Re = 100000$ ( $r_c$ représente la taille du coeur tourbillonnaire et $T_0$ la période de retournement du vortex). . . . .	223
8.1	DNS de notre perturbation $m=0$ de grande amplitude à $Re=1000 - T=6$ . . . . .	230
8.2	DNS de notre perturbation $m=1$ infinitésimale à $Re=100000 - T=6$ . . . . .	230

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Tourbillons et sillages des avions de transport

Les tourbillons sont des structures hydrodynamiques engendrées par le décollement et l'enroulement des couches limites qui se développent sur des surfaces solides. Ainsi, les sillages tourbillonnaires sont présents dans de nombreuses applications industrielles (ailes d'avion, rotors d'hélicoptère, aubes de compresseur, hélices de navire ou de sous-marin etc.) et ont dans certains cas des effets indésirables sur le plan technologique. En outre, sur un plan plus académique, la dynamique des tourbillons revêt un intérêt fondamental pour la compréhension physique de mécanismes génériques rencontrés en mécanique des fluides, notamment en aérodynamique et dans le développement de la turbulence (Jacquin [141], Hulin & al. [138]). Le double intérêt scientifique et technique du problème explique le très grand nombre d'études sur les tourbillons : plus d'une centaine de publications par an sur le sujet dans les années 1990, selon Green [114].



FIG. 1.1 – Sillage d'un avion de transport biréacteur en phase d'atterrissage.



FIG. 1.2 – Sillage tourbillonnaire en régime de croisière d'un quadriréacteur, matérialisé par les traînées de condensation.

Plus particulièrement, dans le domaine de l'aviation civile, les tourbillons de sillage sont une conséquence directe de l'écoulement de contournement de l'air autour d'une aile, à l'origine de la portance d'un avion. Ces structures tourbillonnaires sont connues pour être persistantes, c'est-à-dire avoir une durée de vie très longue (cf. Zeman [270], Jacquin & Pantano [145], Jacquin & al. [144], Crouch & Jacquin [62]), qui en général dépend fortement de l'état - calme ou turbulent - de l'atmosphère. Par temps clair, ces tourbillons de sillage sont observables dans le ciel, matérialisés par les traînées de condensation des réacteurs ("contrails" : figures 1.1 et 1.2). La figure 1.3 illustre schématiquement comment le sillage tourbillonnaire d'un avion résulte en un système de deux tourbillons principaux contra-rotatifs après appariement ("vortex merging") entre les tourbillons co-rotatifs de bout d'aile et de volet.

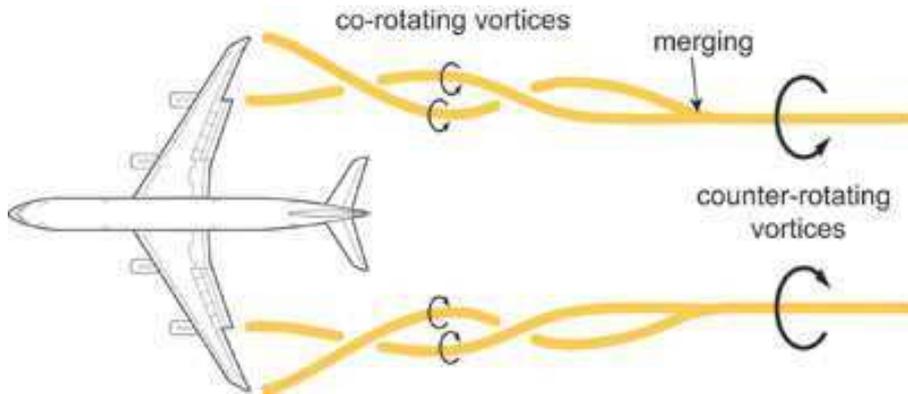


FIG. 1.3 – Les différentes phases du développement d'un sillage tourbillonnaire derrière un avion de transport.

## 1.2 Incidences des sillages tourbillonnaires

Ces sillages tourbillonnaires sont potentiellement très dangereux pour un avion suiveur qui peut subir un fort moment de roulis, comme l'a montré la catastrophe aérienne du vol AA 587 le 12 novembre 2001 (figure 1.4). L'enquête avait conclu que l'Airbus A300-600 d'American Airlines, pris dans les turbulences du sillage d'un Boeing 747, s'était écrasé en raison d'une sollicitation excessive de la gouverne verticale, bien supérieure à la tenue structurale de l'appareil.



FIG. 1.4 – Accident du vol AA 587 le 12/11/2001, survenu 103 s après le décollage de JFK International Airport et faisant 265 victimes.

La durée de vie des tourbillons de sillage pose un problème majeur de sécurité avec d'importants enjeux socio-économiques car la réglementation actuelle de l'OACI fixant les distances de séparation entre deux avions successifs, en fonction de leurs masses respectives, au décollage et à l'atterrissage (figure 1.5) est parfois jugée trop restrictive, provoquant l'engorgement dans de nombreux grands aéroports (ou "hubs") tels qu'Atlanta, Chicago, Los Angeles, Londres, Dallas, Paris, Milan ou Francfort. Ces règles d'espacement sont toujours en vigueur de nos jours, sans toutefois garantir la disparition absolue du danger et on répertorie encore chaque année de multiples incidents liés aux tourbillons de sillage. Malgré la volonté de concilier sécurité et

accélération des cadences, la saturation des aéroports est appelée à s'accroître à l'avenir car selon les prévisions actuelles, le trafic aérien mondial devrait au moins doubler dans les quinze prochaines années.

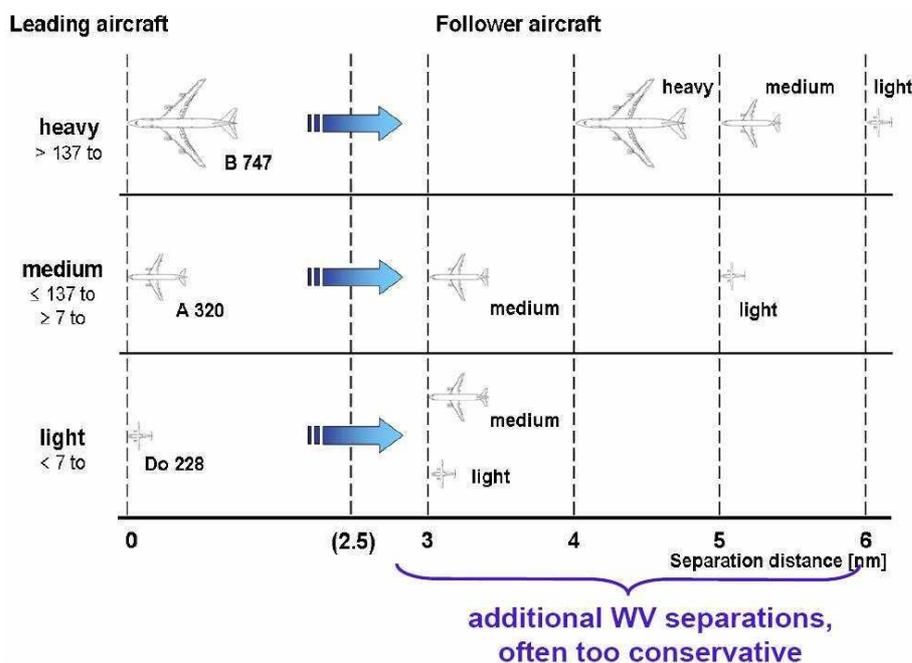


FIG. 1.5 – Règlementation des distances de séparation en fonction de la masse des avions par l'OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale).

Les sillages tourbillonnaires ont suscité un grand nombre de recherches dans les années 70 avec la commercialisation du Boeing 747. Après un relatif désintérêt dans la décennie suivante, les années 90 ont vu une recrudescence des études et publications scientifiques sur ce sujet, notamment en Europe avec le projet de l'Airbus A380. L'organigramme de la figure 1.6 illustre l'intensification des collaborations internationales pour les recherches sur les sillages tourbillonnaires.

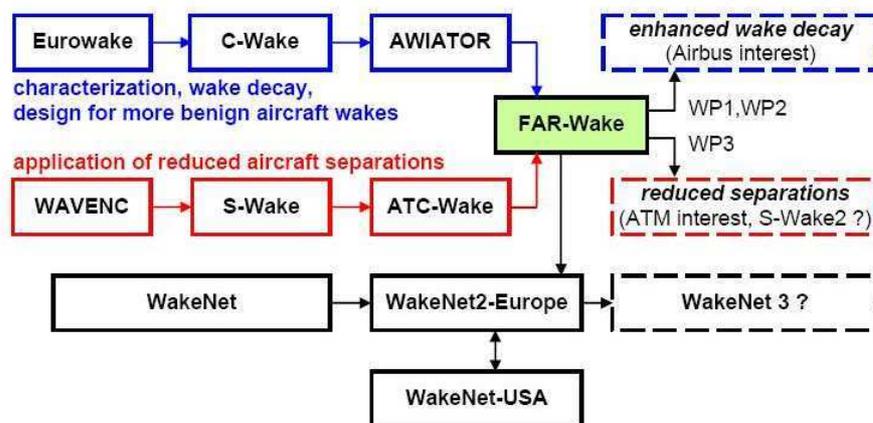


FIG. 1.6 – Historique et organisation des différents programmes internationaux de recherche sur les sillages tourbillonnaires depuis le début des années 90 jusqu'à aujourd'hui (ATM : Air Traffic Management). Interactions et échanges d'informations entre les projets européens AWIATOR et FAR-Wake.

### 1.3 Les recherches sur les sillages tourbillonnaires

De manière schématique, les études sur les tourbillons de sillage peuvent être classées en trois grandes catégories, selon le régime que l'on cherche à caractériser (sillage proche, intermédiaire ou lointain) :

- Les campagnes d'essais expérimentaux sur des maquettes réduites visent une caractérisation fine de la signature tourbillonnaire pour une aile et un chargement donnés. Par exemple, des dispositifs passifs placés sur une aile - afin de modifier son chargement aérodynamique et tenter de réduire l'intensité du sillage tourbillonnaire - ont été testés dans des installations expérimentales, dont la soufflerie B20 de l'ONERA Lille.
- Les études théoriques permettent de caractériser la stabilité de systèmes tourbillonnaires, (c'est-à-dire comportant un ou plusieurs tourbillons), afin de détecter par le calcul si une configuration particulière de tourbillon(s) peut effectivement développer une instabilité hydrodynamique, intrinsèque à la physique de l'écoulement et ainsi accélérer la dispersion du sillage tourbillonnaire.
- La simulation numérique des sillages tourbillonnaires s'est considérablement développée avec les moyens de calcul modernes. Elle permet de calculer l'écoulement aussi bien sur des configurations très fondamentales visant une certaine "généricité" ou plus complexes et réalistes (par exemple les systèmes multipolaires, i.e. composés de plusieurs paires de tourbillons), que sur des configurations industrielles telle qu'une aile complète d'un vrai avion. La figure 1.7 illustre comment la simulation numérique a permis de caractériser le sillage proche d'une maquette d'avion.

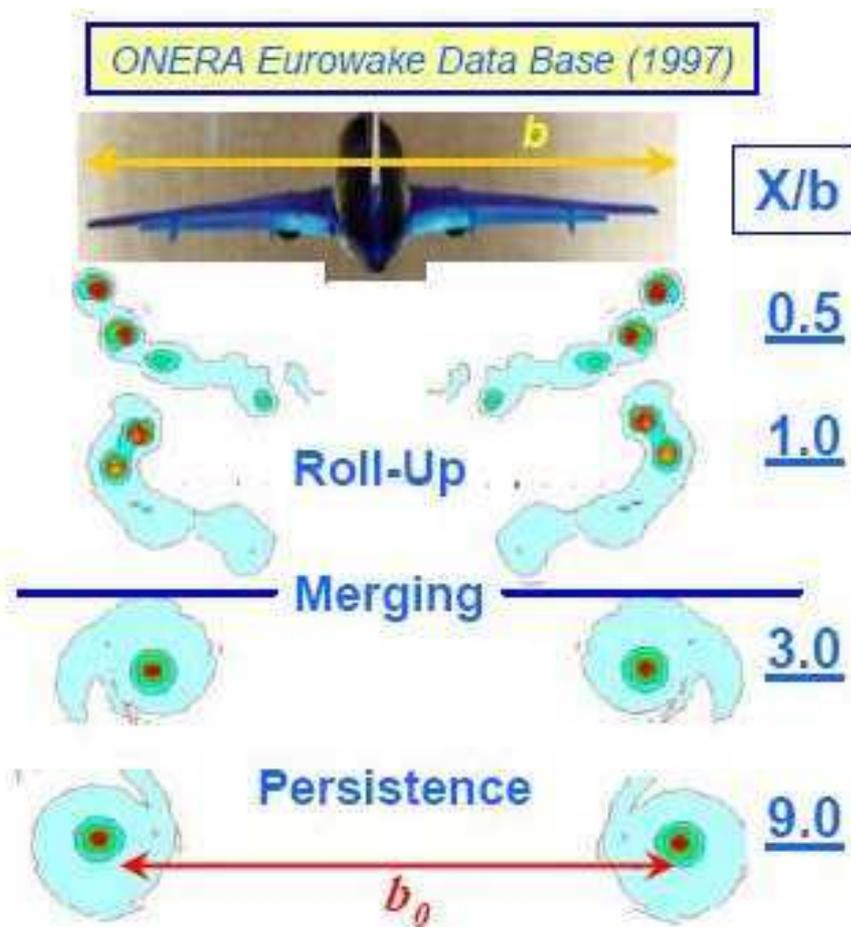


FIG. 1.7 – Calcul du sillage proche par la simulation numérique, à partir de données expérimentales, dans le cadre du programme Eurowake.

Ainsi, de nombreuses études portant sur les mécanismes instationnaires et les instabilités des tourbillons de sillages (figure 1.8) cherchent à comprendre de manière plus fine ces effets dynamiques, notamment via la simulation numérique, et tenter de réutiliser ces instabilités hydrodynamiques dans le but d'accélérer la dispersion des sillages tourbillonnaires.

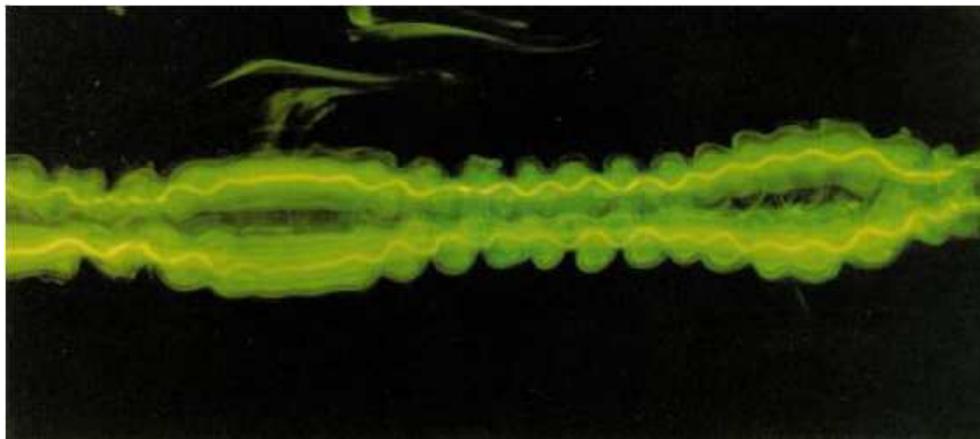


FIG. 1.8 – Mise en évidence sur une même expérience des instabilités de grande longueur d’onde (Crow) et de courte longueur d’onde (Widnall) en bassin d’eau (d’après Leweke et Williamson [181]).

Avec l’évolution des méthodes et des moyens techniques, les différentes approches, expérimentales théoriques et numériques, deviennent aujourd’hui de plus en plus complémentaires dans la compréhension des sillages tourbillonnaires, comme l’illustre l’organisation pluridisciplinaire du programme AWIATOR présentée sur la figure 1.9.

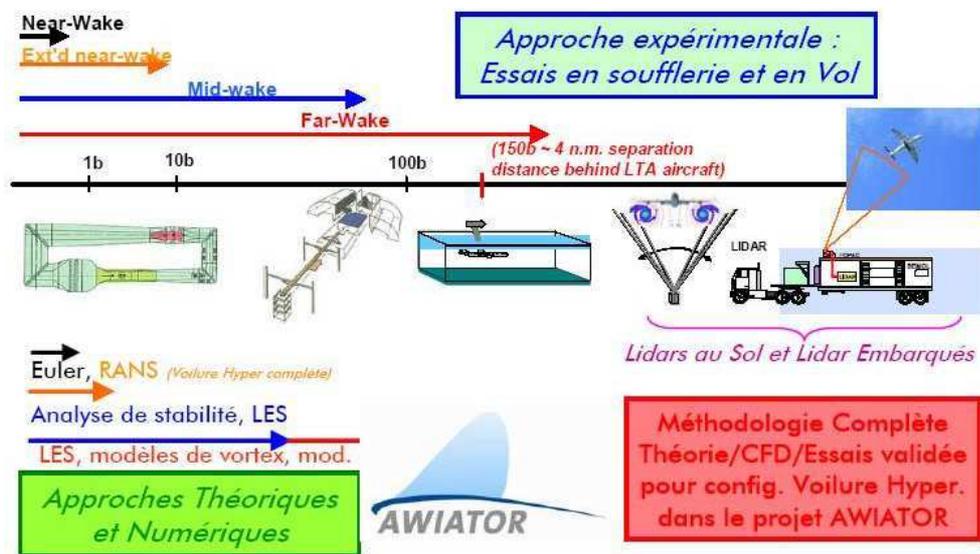


FIG. 1.9 – Caractérisation des sillages tourbillonnaires par de grands moyens expérimentaux et la simulation numérique, dans le programme européen AWIATOR.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons de quelle façon notre étude est une contribution, parmi d’autres, aux différentes stratégies de recherche visant à réduire la durée de vie de ces sillages tourbillonnaires.

## 1.4 Point de départ de cette étude

Un phénomène de type éclatement tourbillonnaire ("vortex bursting") a été observé de manière très reproductible dans certaines installations expérimentales telles que les souffleries à catapulte ou les bassins hydrodynamiques, moyens d'essais utilisés précisément pour la caractérisation physique des sillages tourbillonnaires étendu et lointain d'avions de transport. Ces deux dispositifs ont pour points communs d'être équipés d'un système de traction de la maquette et de se dérouler en milieu confiné, représentant deux sources de perturbations pour l'écoulement.

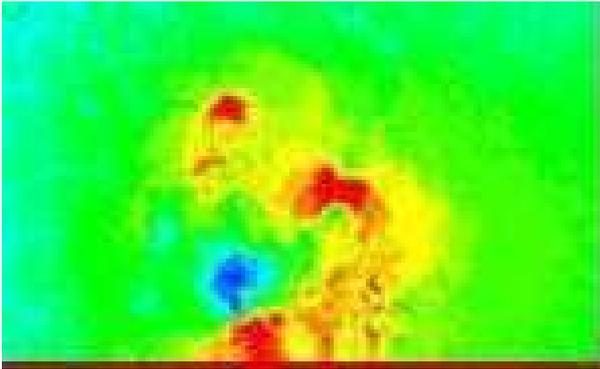


FIG. 1.10 – Eclatement tourbillonnaire ("vortex bursting") observé au bout de 18 envergures à la soufflerie à catapulte B20 de l'ONERA Lille (norme du champ de vitesse).

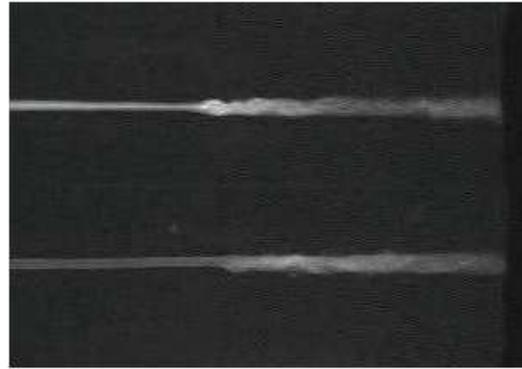


FIG. 1.11 – Propagation d'ondes ("end-effects") dans le sillage tourbillonnaire d'une maquette tractée en bassin hydrodynamique (WSG du DLR à Göttingen).

Ce phénomène pathologique a des répercussions importantes sur le plan technologique car il réduit considérablement l'étendue spatiale du sillage tourbillonnaire accessible aux mesures in situ alors que le but de ces campagnes d'essais est précisément d'étudier le sillage tourbillonnaire en champ lointain. D'autre part, ce phénomène présente en soi un intérêt fondamental et potentiellement applicatif car sa compréhension physique pourrait s'avérer très utile pour proposer de nouveaux dispositifs de réduction des sillages tourbillonnaires en cherchant à les faire "éclater" prématurément. A ce jour, les mécanismes physiques responsables de cet éclatement tourbillonnaire sont encore mal compris, soulevant de nombreuses interrogations :

- est-ce que cet éclatement tourbillonnaire pourrait être un pur effet d'installation, dû au confinement et aux effets de bord de l'expérimentation ?
- est-ce que ce phénomène est représentatif d'une dynamique inhérente à un tourbillon de sillage en écoulement libre, tel que celui se développant derrière une aile d'avion ?
- est-ce que ce type d'éclatement tourbillonnaire observé expérimentalement peut être reproduit par la simulation numérique, voire appréhendé de manière prédictive par des calculs théoriques et CFD ?

Fort de son expérience sur les thèmes de l'éclatement tourbillonnaire (Pagan [213], Déleroy [81], Mitchell [200], Renac [220], Leclaire [167]) et des tourbillons de sillage (Coppens [51], Sipp [247], Fabre [99]), le Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale a entrepris de réaliser cette étude de nature fondamentale et numérique, en collaboration avec d'autres départements de l'ONERA (DAAP, DMAE et DOTA). Celle-ci s'inscrit dans le cadre du Projet de Recherche Fédérateur "Dynamique des Sillages Tourbillonnaires" à l'ONERA et du programme européen FAR-Wake.

## 1.5 Objectifs et organisation de la thèse

La question initiale ayant motivé cette étude est donc la suivante : quelles peuvent être les origines de l'éclatement tourbillonnaire survenant au banc d'essai B20 ?

La première partie de ce mémoire est consacrée à la caractérisation des phénomènes de propagation d'ondes et d'éclatement dans les écoulements tourbillonnaires, d'une part avec une synthèse bibliographique (chapitre 2), d'autre part en analysant les données de mesures réalisées au banc d'essai B20 à l'ONERA Lille (chapitre 3).

A partir de ces informations et conclusions, la deuxième partie présente notre démarche pour tenter de modéliser ces phénomènes complexes. Le chapitre 4 passe en revue nos hypothèses simplificatrices et notre stratégie de modélisation pour poser le problème mathématique et sa résolution. Dans ce chapitre, nous précisons notre choix de modèle de tourbillon de sillage (i.e. le champ porteur), la construction des perturbations et des paramètres adimensionnels déterminants, enfin le choix de l'outil CFD. Le chapitre 5 est dédié au code de calcul (FLU-DILES) employé dans nos simulations numériques et aux développements informatiques que nous y avons faits pour les besoins spécifiques de notre étude.

La troisième et dernière partie expose les résultats de nos calculs CFD et leurs interprétations physiques. Le chapitre 6 revient sur les ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen et développe l'étude des perturbations du chapitre 4 dans le régime linéaire, c'est-à-dire pour des perturbations dont l'amplitude est infinitésimale par rapport au champ de base, afin de vérifier que notre code de calcul ainsi adapté retrouve bien les résultats numériques et la dynamique physique obtenus par Fabre [98, 99] à l'aide de la théorie de stabilité linéaire (cf. Drazin & Reid [82, 83], Saffman [227] et Huerre & Rossi [137]). Le chapitre 7 propose une investigation de la dynamique tourbillonnaire dans le régime non linéaire en simulant des perturbations de grande amplitude, afin de mettre en lumière les différences avec la dynamique linéaire et de rechercher une éventuelle instabilité qui pourrait être à l'origine de l'éclatement tourbillonnaire observé à la soufflerie B20.

Première partie

Caractérisation du phénomène  
d'éclatement tourbillonnaire

# Chapitre 2

## Etude bibliographique

### 2.1 End-effects (effets de bord) et éclatement tourbillonnaire

#### 2.1.1 End-effects

##### 2.1.1.1 Introduction

Le phénomène d'end-effects, i.e. les effets de propagation de perturbations le long d'un tourbillon de sillage dans des installations expérimentales, a été décrit pour la première fois au début des années 1970 par J. H. Olsen [210], dans le cadre d'études réalisées en "towing tank" (bassin hydrodynamique). Ces expérimentations, dont le montage est illustré sur la figure 2.1 ont été réalisées à des nombres de Reynolds (basé sur la corde du profil) de l'ordre de  $10^4$ , bien inférieurs aux valeurs réalistes d'un avion ( $10^7$ ). L'auteur indique que ces essais ont fourni des résultats qualitativement similaires à ceux de tests en vol, ce qui pourrait suggérer un faible effet du nombre de Reynolds dans le domaine de fonctionnement  $10^4 \leq Re \leq 10^7$ .

Deux types d'instabilités ont été identifiés dans cette installation :

- le premier type d'instabilité a été clairement observé et associé à la vitesse axiale de l'écoulement. Cette instabilité s'est avérée capable de détruire un tourbillon de sillage au voisinage de son coeur sans modifier la dynamique de l'écoulement loin du coeur du tourbillon
- le second type d'instabilité, qui s'explique par l'interaction mutuelle des deux tourbillons principaux, a été plus difficilement observé car en grande partie "masqué" par la première instabilité.

Nous verrons au chapitre 4 que la démarche de notre étude est guidée par le premier type d'instabilité décrit par Olsen et intrinsèque d'un seul tourbillon, tandis que le second type (caractéristique d'une paire de tourbillons) procède de l'instabilité coopérative de Crow [64].

Benjamin & Ellis en 1990 [27] montrent, par une étude théorique, comment une structure de type bulbe (donc axisymétrique) en interaction avec une vitesse axiale, peut générer des structures propagatives de géométries plus complexes, i.e. non axisymétriques de nombres d'ondes azimuthaux  $|m| = 1, 2, 3, \dots$

Plus récemment, des études menées au bassin hydrodynamique du DLR Göttingen (WSG) par Bao & al. [12] ont fourni, en particulier, des informations complémentaires sur les end effects :

- une instabilité en forme de bulbe se propage dans le coeur des tourbillons avec une vitesse pilotée par la vitesse de traction de la maquette.
- la même maquette a été utilisée dans un bassin hydrodynamique de bien plus grandes dimensions (le HSVA d'Hambourg). Les mesures PIV 2D ont montré que les end-effects apparaissent

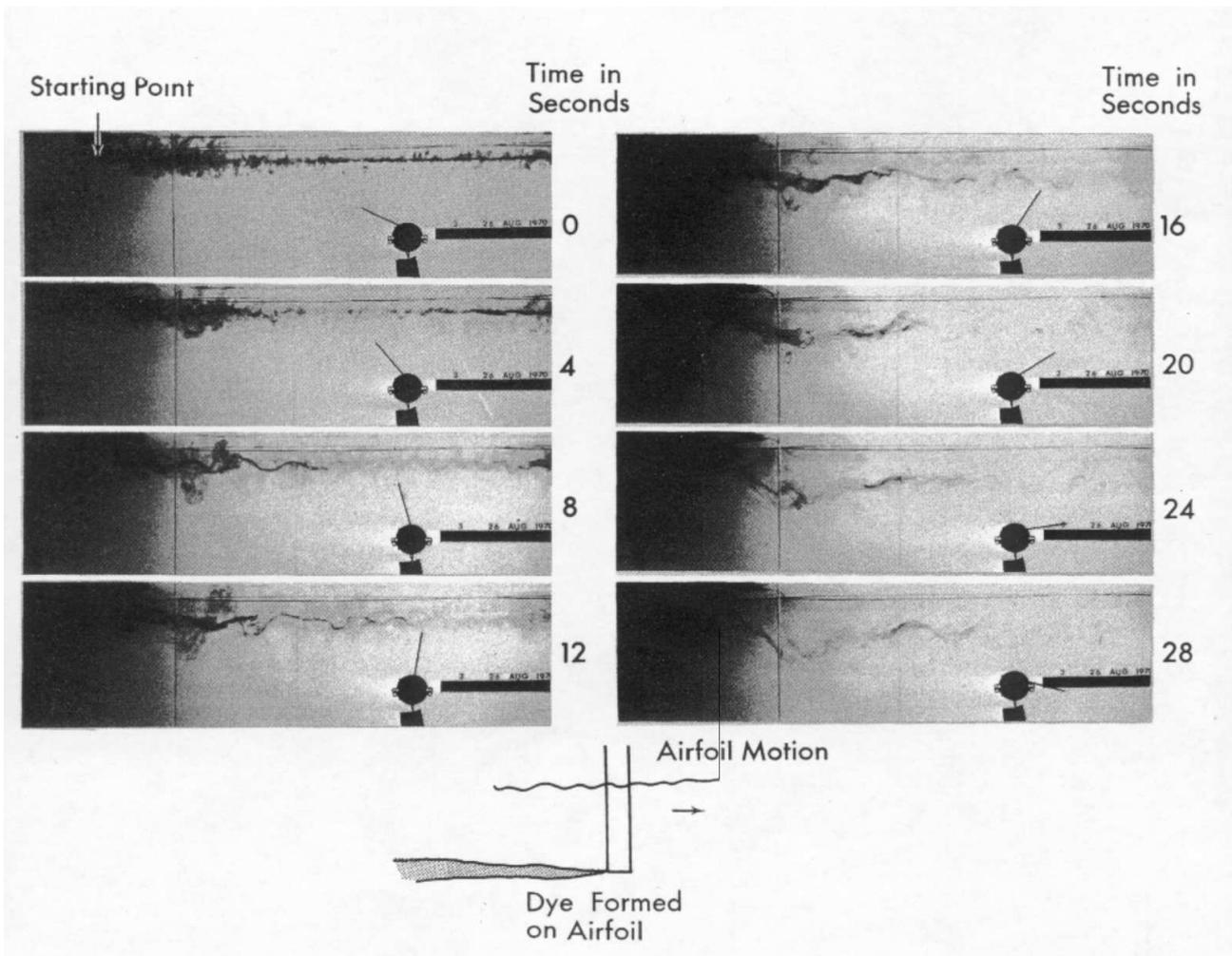


FIG. 2.1 – Montage expérimental d’Olsen [210], pour étudier les end-effects (Boeing, 1970). Essais réalisés en bassin hydrodynamique avec un profil NACA 0012, relié par un dard vertical au système de traction. Les effets de la surface libre du liquide sont réduits en utilisant des faibles vitesses de tractage. Le dispositif de visualisation est très similaire à la technique décrite par Baker [9].

approximativement au bout du même nombre d'envergures.

Ces observations suggèrent donc que les end effects sont un phénomène générique et que cette instabilité n'est pas liée à un effet de confinement dû aux tailles limitées des installations.

Par voie expérimentale et au moyen de la PIV, Meunier [197] a caractérisé en bassin d'eau les perturbations d'un tourbillon derrière une plaque. Ses observations ont mis en évidence que seules deux familles de perturbations peuvent effectivement se propager le long d'un tourbillon :

- un premier type de perturbation est caractérisé par la création de vitesse axiale, qui est relié aux ondes de Kelvin de nombre d'onde azimutal  $m=0$
- un second type de perturbation est caractérisé par l'ondulation de l'axe du tourbillon, qui est relié aux ondes de Kelvin de nombre d'onde azimutal  $m=1$ , plus communément désignées par le terme de "bending waves" (ondes hélicoïdales de torsion).

### 2.1.1.2 Les solutions mises en pratique

Une trentaine d'années après les observations d'Olsen, les origines du phénomène ne sont pas encore clairement identifiées et certains expérimentateurs ont proposé des astuces empiriques pour pallier le problème. Ainsi, Crouch & al. [63] puis Ortega & al. [212] ont spécifié des précautions dans le but précisément d'éviter ou de limiter ces perturbations d'end-effects, particulièrement préjudiciables à la caractérisation des sillages tourbillonnaires dans leurs installations respectives :

- Crouch & al. ont choisi l'échelle de leur maquette de façon, entre autres, à éviter les end-effects : "The model scale was chosen to permit the vortices to descend ... before entering ground effect and also to avoid end effects due to perturbations generated during the acceleration and deceleration of the model" [Crouch & al. [63]].

- Ortega & al. ont également observé qu'un éclatement tourbillonnaire se produit dans leur installation, avec une propagation lente en aval du sillage tourbillonnaire : "The reason for towing the carriage to the end of the towing tank is that previous experiments have demonstrated that stopping the carriage causes the wake vortices to burst prematurely. This bursting phenomenon slowly propagates downstream along the vortices. Therefore, if the carriage is stopped too close to the test section, the data collected there soon become contaminated by this effect..." [Ortega & al. [212]].

Suite à leurs études menées au WSG (DLR Göttingen), Bao & al. [11] sont parvenus à réduire les effets des end effects en isolant la zone d'accélération de la maquette de la zone de mesure PIV à l'aide d'une plaque séparatrice, recouverte de mousse et percée afin de laisser passer la maquette.

D'une certaine manière, cette solution de contournement du problème a été reprise à la Catapulte B20 de l'ONERA. En effet, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, un simple décalage du plan de mesure le long de l'axe du vol permet de retarder l'apparition des end-effects au niveau de la PIV et ainsi de caractériser le sillage tourbillonnaire sur un intervalle de temps plus long.

### 2.1.2 Eclatement tourbillonnaire

Dans cette partie, nous faisons un bref passage en revue des travaux sur l'éclatement tourbillonnaire. L'éclatement tourbillonnaire est un sujet d'étude à part entière, qui fait depuis une cinquantaine d'années l'objet de très nombreuses publications, aussi bien théoriques, expérimentales que numériques. L'objet de cette section n'est pas de faire un inventaire exhaustif de tous ces travaux mais plus modestement de synthétiser les principaux éléments sur lesquels nous nous

sommes appuyés pour réaliser notre étude. Pour plus de détails sur l'éclatement tourbillonnaire, le lecteur pourra se référer aux synthèses de Hall [125], de Leibovich [169], de Lucca-Neggro et O'Doherty [186] ainsi qu'aux revues de thèse de Pagan [213], Mitchell [200], Renac [220] et Leclaire [167].

### 2.1.2.1 Quelques points de terminologie

Au préalable, une remarque de terminologie s'impose puisque le terme français "éclatement tourbillonnaire" recouvre en fait deux expressions différentes en anglais : "vortex bursting" et "vortex breakdown". Dans une moindre mesure, une troisième locution existe en anglais avec l'expression de "nonlinear instability burst" employée en 1972 par Hocking & al. [132]. Enfin, il existe aussi le terme "vortex break-up" employée par Crouch [63], que l'on pourrait traduire en français par "dispersion" du sillage tourbillonnaire. Selon les auteurs, la différence entre "vortex bursting" et "vortex breakdown" est tranchée ou pas. Hall en 1985 ne fait visiblement pas de distinction : "the phenomenon of vortex breakdown, also known as vortex core bursting". A l'inverse, dans sa revue de 1998 sur les tourbillons de bout d'aile, Spalart [249] souligne très clairement qu'il faut bien distinguer les deux notions, le vortex bursting se différenciant du vortex breakdown par son aspect propagatif. En effet, selon les termes de Spalart, "vortex bursting is an apparently spontaneous crisis of the vortex core, which often travels. Although both are dramatic events affecting a vortex, the identification with vortex breakdown must be avoided". Le mécanisme proposé par Spalart est celui de la propagation de perturbations dans la direction de l'axe du tourbillon combinée à un effet de compression/étirement le long du vortex. Pour illustrer ce mécanisme, il utilise l'image des "pancakes", représentée sur la figure 2.2, et qui peut être mise en parallèle avec les "Kelvin's cat's eyes" introduits par Schecter & al. [238], à proximité du rayon critique pour des perturbations non axisymétriques (cf. paragraphes 2.3.3 et 2.3.4).

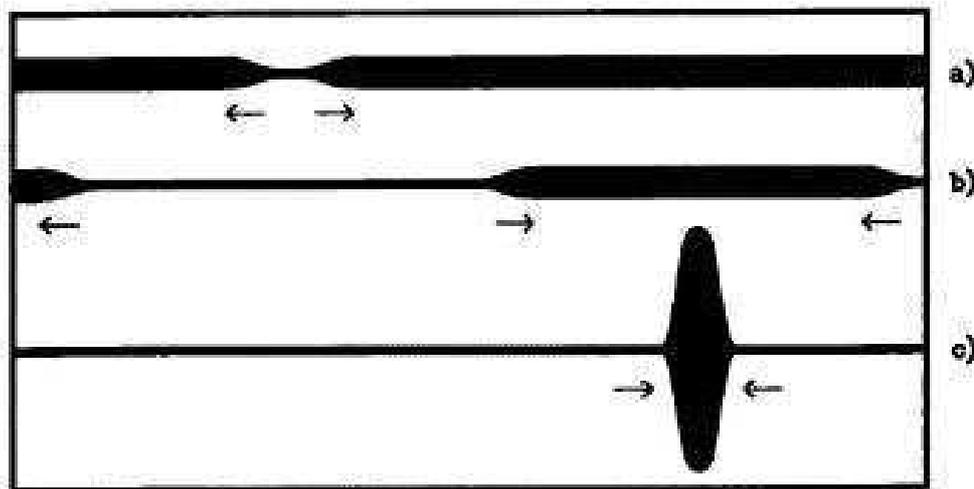


FIG. 2.2 – Le mécanisme de propagation en forme de "crêpes", introduit par Spalart [249].

Nous verrons plus loin que le mécanisme de Spalart, de nature purement axisymétrique, est repris par Moet & al. [204] pour leurs études numériques. Il est également à noter que cette image des "crêpes" qui se propagent, rejoint l'idée des "chapelets" d'éclatements tourbillonnaires en forme de bulbes, intuitée dès 1962 par Harvey [129] dans ses observations expérimentales et mise en évidence numériquement par Beran [30] ainsi que par Hafez et Ahmad [124] en 1988.

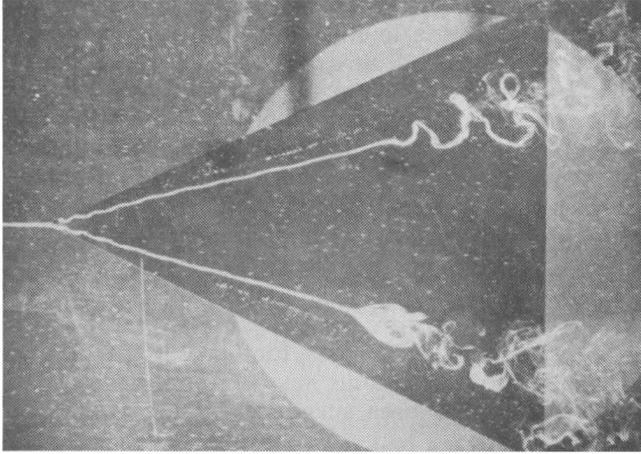


FIG. 2.3 – Deux types d'éclatement tourbillonnaire (bulbe axisymétrique et spirale) sur une aile delta (Lambourne et Bryer [159], 1961).

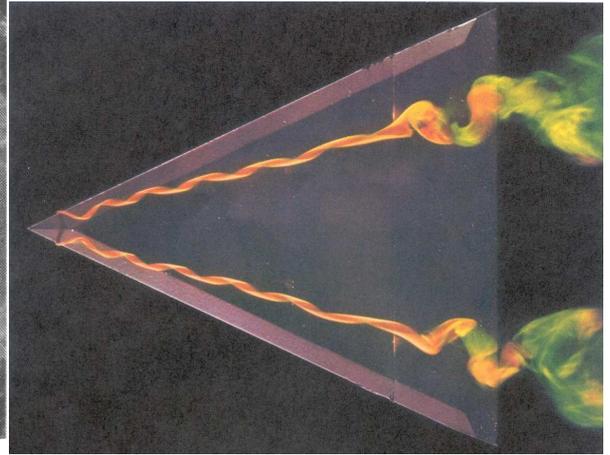


FIG. 2.4 – Deux éclatements tourbillonnaires de type spirale sur une aile delta (Werle [267], 1971).

### 2.1.2.2 Etudes expérimentales de l'éclatement tourbillonnaire

Historiquement, ce sont des études expérimentales d'aérodynamique externe menées au début des années 1950 par Werlé [265, 266] sur la formation des nappes tourbillonnaires à l'extrados d'une aile delta qui ont fourni les premières observations d'éclatements tourbillonnaires.

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement aux différents types de géométrie azimutale identifiés dans les études sur l'éclatement tourbillonnaire. Ce point est déterminant pour la propagation des ondes dans un tube de vorticité, dont nous rappelons les principaux mécanismes physiques aux paragraphes 2.2 et 2.2.3, et la modélisation par la simulation numérique des perturbations susceptibles de provoquer un éclatement tourbillonnaire (cf. chapitre 4).

Lambourne et Bryer [159] ont été parmi les premiers à étudier finement la topologie à proprement parler de l'éclatement tourbillonnaire sur aile delta. En particulier, ils ont montré la possibilité de l'occurrence de deux types d'éclatement tourbillonnaire dans le même écoulement, comme illustré sur la figure 2.3.

Harvey [129] a le premier utilisé un dispositif de "vortex tube" avec de l'air, système qui sera ensuite repris en bassin d'eau, notamment par Leibovich et Sarpkaya. Dans son expérience, Harvey observe un éclatement en forme de bulbe dont les principales caractéristiques sont les suivantes :

- le bulbe éclaté est constitué d'un fluide stagnant, sans zone d'écoulement à contre-courant
- en aval d'un éclatement en forme de bulbe, l'écoulement peut redevenir similaire à celui existant en amont de l'éclatement
- l'éclatement remonte vers l'amont quand augmente la circulation du tourbillon

Les travaux de Sarpkaya [232] ont porté sur des tourbillons confinés ("vortex tube"). Ses visualisations ont mis en évidence que l'éclatement tourbillonnaire peut prendre plusieurs formes topologiques et sa classification fait toujours référence :

- bulbe axisymétrique (figure 2.5)
-  clatement spiral (figure 2.6)

- structure en double hélice (figure 2.7)

La visualisation de la structure en double hélice a été obtenue dans des conditions exceptionnelles, ne présentant ni bulbe ni point d'arrêt, ce qui fait penser à cet auteur que cette configuration ne constitue pas un véritable éclatement tourbillonnaire.

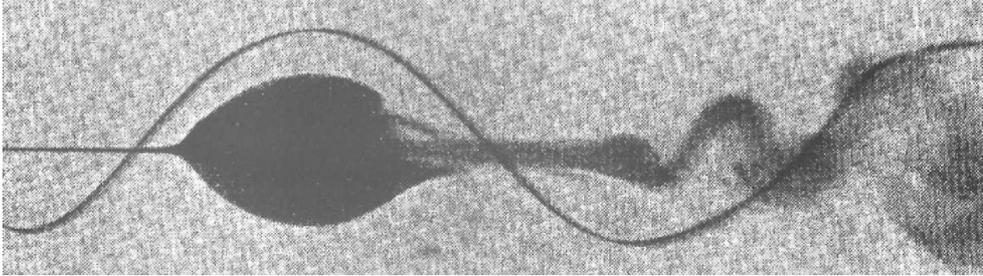


FIG. 2.5 – Eclatement tourbillonnaire axisymétrique en forme de bulbe (d'après Sarpkaya [232]).

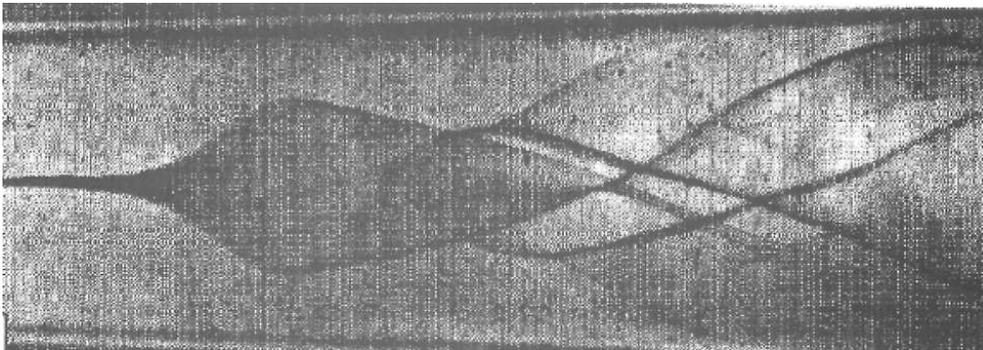


FIG. 2.6 – Eclatement tourbillonnaire spiral (d'après Sarpkaya [232]).



FIG. 2.7 – Eclatement tourbillonnaire en structure de double hélice (d'après Sarpkaya [232]).

Ultérieurement, Sarpkaya et Daly [237] puis Sarpkaya [235, 236] ont concentré leurs études sur les liens (voire les fortes interactions) entre éclatement tourbillonnaire et turbulence. D'une part, l'éclatement tourbillonnaire se caractérise par le développement d'une forte turbulence en aval, d'autre part le niveau de turbulence ambiante dans l'expérimentation peut favoriser l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire.

Quelques années plus tard, suite à une étude préliminaire de Faler [100] à la NASA, Faler et Leibovich [101,102] proposent une classification des différents types d'éclatement tourbillonnaire plus complète que celle de Sarpkaya. La figure 2.8 illustre cette classification plus exhaustive qui dénombre sept types d'éclatement, en fonction de l'aspect que prend le filet coloré émis en amont sur l'axe du tourbillon :

- le type 0 est un bulbe axisymétrique, produisant en aval un écoulement spiral qui se dégrade en turbulence
- le type 1 ressemble au type 0, mais produit en aval de la turbulence à grande échelle
- le type 2 est une spirale de même sens d'enroulement que l'écoulement de base (contrairement à ce qui est observé sur les ailes delta)
- le type 3 commence par une spirale mais se désorganise très rapidement
- le type 4 est un bulbe aplati, ouvert vers l'aval
- le type 5 est une double hélice
- enfin, dans le type 6, le filament coloré s'écarte de l'axe du tourbillon en restant dans le même plan méridien.

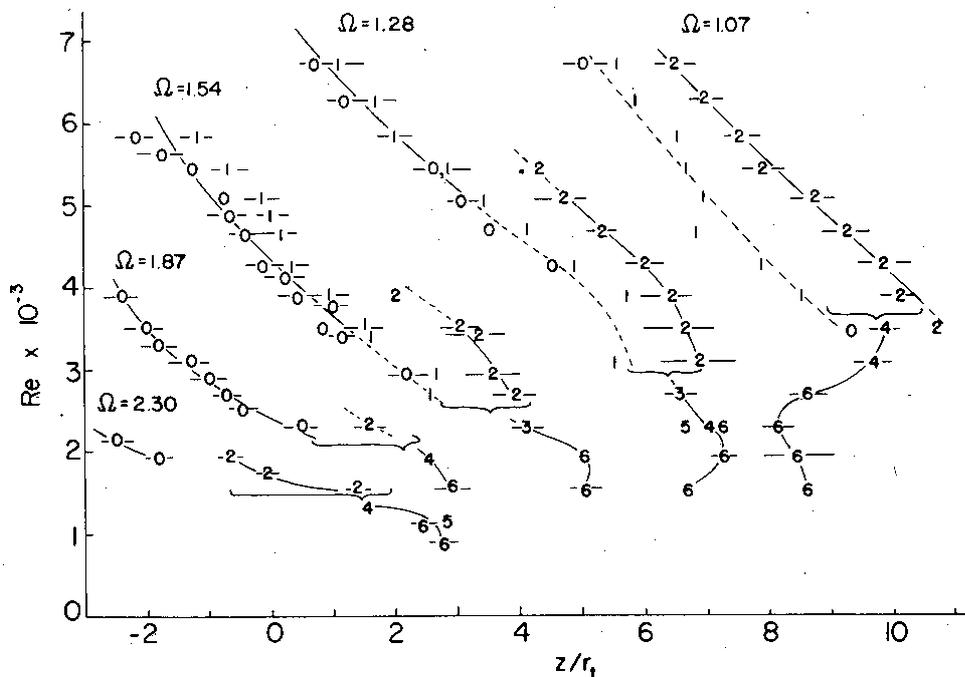


FIG. 2.8 – Abscisse de l'éclatement tourbillonnaire en fonction des nombres de Reynolds  $Re$  et de swirl de l'écoulement pour chaque type rencontré par Faler et Leibovich [101,102].

Les mesures de vitesse réalisées par Leibovich permettent de réaliser une description schématique d'un écoulement présentant un éclatement tourbillonnaire. Leibovich propose une décomposition en trois régimes spatiaux :

- (1) L'écoulement d'approche consiste en un coeur tourbillonnaire compact, entouré d'un écoulement dont on peut souvent rendre compte approximativement comme irrotationnel. Les profils de vitesse axiale sont de type jet. Globalement, l'écoulement est caractérisé par de faibles gradients axiaux.
- (2) La zone d'éclatement suit. Elle est caractérisée par de rapides variations dans la direction axiale, accompagnée d'une décélération de l'écoulement d'approche, de la formation d'un point de stagnation sur l'axe du tourbillon d'une recirculation de l'écoulement près de l'axe et finalement de la restauration de la direction originale de l'écoulement axial.

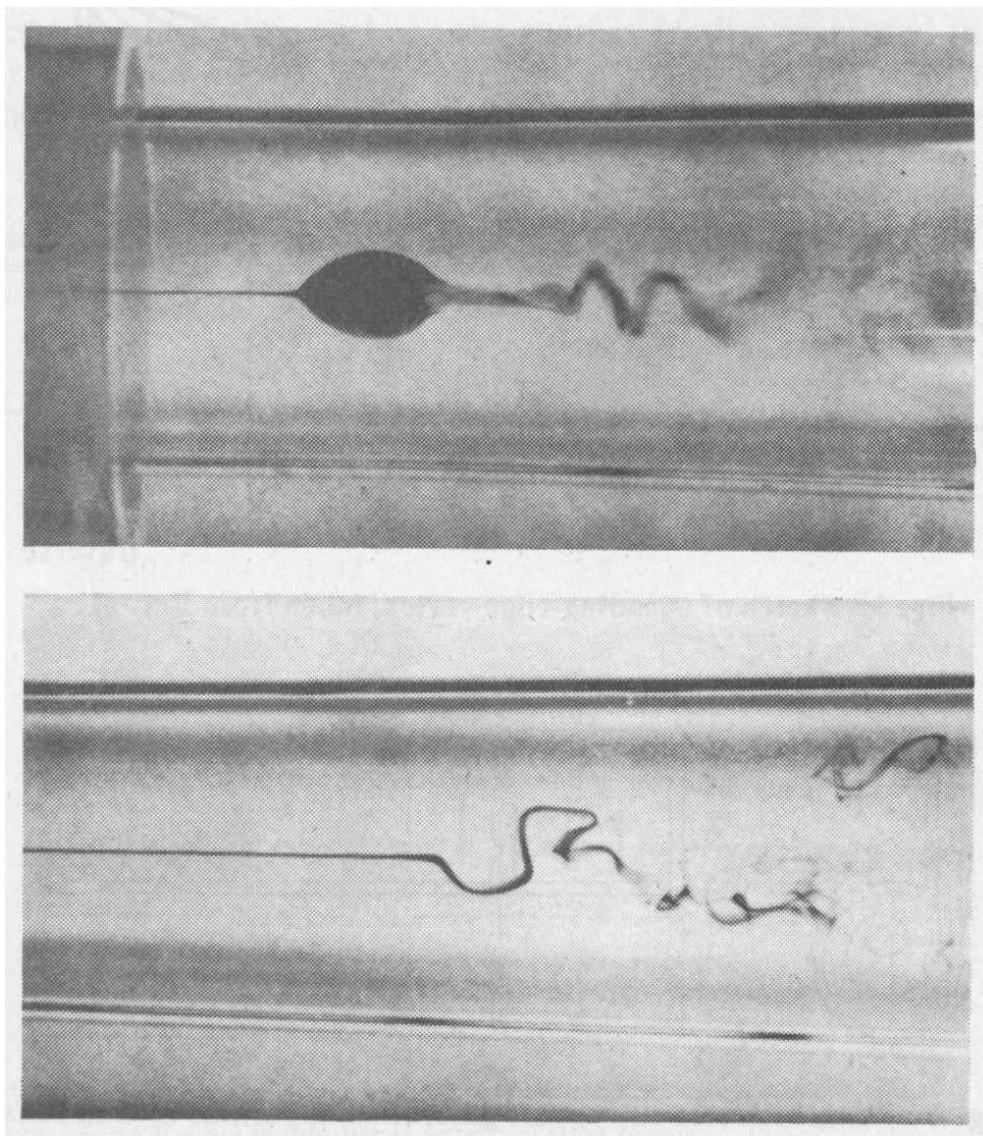


FIG. 2.9 – Eclatements tourbillonnaires de types bulbe et spiral en régime laminaire (d'après Faler et Leibovich [101, 102]).

(3) Une nouvelle structure d'écoulement avec un coeur tourbillonnaire élargi s'établit en aval de la zone d'éclatement. Les profils de vitesse axiale ressemblent de très près à un sillage classique derrière un obstacle solide, avec des vitesses sur l'axe du vortex inférieures à celles extérieures au coeur du tourbillon.

Selon Maxworthy & al. [194], des ondes solitaires axisymétriques peuvent devenir instables à des perturbations spirales à condition que le front d'onde présente une déformation d'amplitude suffisamment importante. Hall [125] insiste également sur les mécanismes axisymétriques, car le coeur d'un tube de vorticité est très réactif aux perturbations qui font varier son diamètre.

Spall & al. [251] ont également émis un critère pour observer un éclatement tourbillonnaire.

Suite aux travaux de Ruith & al [223], l'étude complémentaire de Gallaire & al [108] suggère que l'éclatement tourbillonnaire spiral est bien un mode global non linéaire "vivant" sur l'écoulement axisymétrique sous-jacent et sa fréquence est conforme au critère de sélection théorique.

### 2.1.2.3 Etudes théoriques de l'éclatement tourbillonnaire

#### Théorie des bifurcations et criticité

Historiquement, Squire [252] a été le premier en 1960 à mener des études théoriques sur l'éclatement tourbillonnaire. D s 1962, Benjamin [20] propose un mécanisme de bifurcation pour l'éclatement tourbillonnaire. Pour résumer l'idée principale de Benjamin, l'éclatement tourbillonnaire consiste en une transition de l'écoulement, d'un état super-critique (" tat colonne" dans lequel les perturbations axisymétriques se propagent exclusivement vers l'aval) vers un état sous-critique (" tat éclaté" dans lequel les perturbations axisymétriques se propagent aussi bien vers l'amont que vers l'aval). Le modèle de Benjamin est très général et fournit une théorie unifiée pour expliquer des phénomènes aussi divers que l'éclatement tourbillonnaire, le ressaut hydraulique ou les ondes de choc dans les écoulements compressibles.

Squire [252] a suggéré que si des ondes stationnaires pouvaient exister sur un noyau tourbillonnaire, alors de petites perturbations, venant de l'aval, pourraient se propager vers l'amont et ainsi provoquer l'éclatement du tourbillon. La condition d'existence d'ondes axisymétriques stationnaires a été déterminée dans le cas d'un écoulement de base non visqueux et axisymétrique. Elle marque le passage d'un écoulement supercritique, où de telles ondes ne peuvent exister, à un écoulement subcritique, où de telles ondes existent. Pour un tourbillon très simple (rotation solide à l'intérieur d'un coeur visqueux de rayon  $a$ , fluide potentiel à l'extérieur, vitesse axiale constante), la condition d'existence d'ondes stationnaires est :

$$\frac{V_\theta}{V_z} \geq 1.20 \quad (2.1)$$

Pour un deuxième écoulement caractérisé par une vitesse axiale constante et une vitesse tangentielle donnée par la loi du q-vortex de Batchelor, Squire montre que la condition d'existence d'ondes stationnaires est :

$$\frac{V_\theta}{V_z} \geq 1.0 \quad (2.2)$$

La théorie de la conjugaison introduite en 1962 par Benjamin [20] et développée dans les années suivantes (1964 [21], 1967 [25]) est une des premières à donner une interprétation de

l'éclatement tourbillonnaire et se révèle en fait très riche en suggestions sur la nature physique du phénomène. Cette théorie repose sur la notion d'états conjugués et nous la décrivons ici brièvement car elle fait encore référence de nos jours et a inspiré de nombreuses études sur l'éclatement tourbillonnaire.

L'écoulement considéré par Benjamin est axisymétrique, incompressible, permanent et non-visqueux. Par conséquent, l'équation du mouvement est régi par la loi de Bernoulli et peut s'écrire :

$$\vec{V} \wedge \vec{\Omega} = \vec{\nabla} H \quad \text{avec} \quad H = \frac{1}{2} \vec{V}^2 + \frac{P}{\rho} \quad (2.3)$$

où  $\vec{V}$  désigne le vecteur vitesse et  $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$  représente la vorticité de l'écoulement. On peut alors introduire les deux grandeurs suivantes,  $\Gamma$  et  $\psi$ , définies telles que :

$$\Gamma = r V_\theta \quad (2.4)$$

$$V_r = \frac{-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.5)$$

Physiquement,  $\psi$  s'interprète comme une fonction de courant et  $\Gamma$  représente la circulation du tourbillon, à un facteur multiplicatif près ( $2\pi$ ).

A ce stade du raisonnement, le formalisme est tout à fait général. L'idée de Benjamin consiste alors à faire deux hypothèses supplémentaires, puis à réaliser astucieusement des changements isomorphiques de variable et de fonctions inconnues.

Dans un premier temps, Benjamin suppose que l'écoulement est parfaitement cylindrique (i.e.  $V_r \equiv 0$ ) et qu'il est homogène selon l'axe du tourbillon (i.e.  $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ ).

Dans un second temps, Benjamin pose les changements de variables suivants :

$$\xi = \frac{r^2}{2} \quad (2.6)$$

$$I = \frac{\Gamma^2}{2} \quad (2.7)$$

On passe ainsi du système  $\left[ r, V_\theta(r) = \frac{\Gamma(r)}{r}, V_z(r), P(r) = \rho \left( H(r) - \frac{V_\theta^2(r) + V_z^2(r)}{2} \right) \right]$  au système  $[\xi, \psi(\xi), H(\psi), I(\psi)]$  et Benjamin obtient l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = H'(\psi) - \frac{1}{2\xi} I'(\psi) \quad (2.8)$$

avec comme conditions aux limites  $\psi(0) = 0$  et  $\psi\left(\frac{a^2}{2}\right) = cste$ , par conservation du débit entre l'axe et le rayon  $a$ .

Benjamin établit que les fonctions  $H(\psi)$  et  $I(\psi)$  sont arbitraires (résultat non trivial). De plus, il démontre surtout que pour des fonctions  $H(\psi)$  et  $I(\psi)$  fixées, la solution  $\psi(\xi)$  n'est pas

*nécessairement unique* (à ce sujet, on peut mentionner la méthode de suivi de branche développée par Beran et Culick [31]).

Par ailleurs, dans le cas où on souhaite étudier les effets parallèles d'une perturbation en prenant en compte l'évolution avec  $z$ , il est nécessaire de supprimer la condition d'écoulement cylindrique ( $V_r \neq 0$ ) afin de respecter la conservation de la masse ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ). Benjamin obtient alors une nouvelle équation différentielle ordinaire :

$$\frac{1}{2\xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = H'(\psi) - \frac{1}{2\xi} I'(\psi) \quad (2.9)$$

A l'aide de cette dernière équation, Benjamin montre que l'on peut classer les écoulements en deux catégories :

- les écoulements *supercritiques*, qui ne supportent que des perturbations dont l'amplitude croît ou décroît exponentiellement avec  $z$  (perturbations de la forme  $\psi'(\xi) \exp(\alpha z)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- les écoulements *subcritiques*, qui, outre les perturbations précédentes, peuvent supporter des perturbations dont l'amplitude est modulée par une fonction circulaire (perturbations de la forme  $\psi'(\xi) \exp(i\alpha z)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) et que l'on peut appeler "ondes stationnaires".

Pour distinguer ces deux types d'écoulement, Benjamin introduit alors le paramètre  $N$ , construit sur le rapport entre les vitesses de phase absolues d'ondes se propageant sur le tourbillon :

$$N = \frac{C_+ + C_-}{C_+ - C_-} \quad (2.10)$$

où  $C_+$  désigne la vitesse des ondes se propageant dans le sens général de l'écoulement et  $C_-$  celle des ondes se propageant en sens contraire.

Le paramètre  $N$  permet de déterminer si l'écoulement est supercritique ( $N > 1$ ) ou subcritique ( $N < 1$ ).

Après avoir constaté la possibilité de solutions multiples et avoir classé ces solutions en subcritiques ou supercritiques, Benjamin introduit une fonctionnelle  $\tilde{S}(\psi)$ , définie à partir de  $S$ , qui est à une constante multiplicative près le flux de quantité de mouvement :

$$S = \int_0^a \left( V_z^2(r) + \frac{P(r)}{\rho} \right) r dr \quad (2.11)$$

$$\tilde{S}(\psi) = \int_0^{a^2/2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + H(\psi) - \frac{I(\psi)}{2\xi} \right) d\xi \quad (2.12)$$

En étudiant le comportement de cette fonctionnelle, Benjamin montre qu'il existe deux fonctions  $\psi^+$  et  $\psi^-$  (correspondant à deux écoulements possibles), ayant la même valeur en  $\xi = \frac{a^2}{2}$  (même débit) et donnant la même valeur à  $H(\psi)$  et  $I(\psi)$ , fixés a priori. En outre,  $\psi^+$  correspond à un écoulement subcritique et  $\psi^-$  à un écoulement supercritique. Enfin  $\tilde{S}(\psi^-) < \tilde{S}(\psi^+)$ , ce qui signifie que l'écoulement  $\psi^-$  a un flux de quantité de mouvement plus faible que l'écoulement  $\psi^+$ .

La théorie de Benjamin permet en particulier de réaliser une analogie entre le phénomène d'éclatement tourbillonnaire au sein d'un écoulement supercritique avec le phénomène du resaut hydraulique dans les écoulement peu profonds ou encore l'apparition d'une onde de choc

dans un écoulement supersonique : le paramètre déterminant la criticité de l'écoulement est respectivement le nombre  $N$  (équation 2.10), le nombre de Froude et le nombre de Mach.

La figure 2.10 illustre un exemple d'application par Hanazaki [128] de la théorie de Benjamin pour avec le nombre de Froude comme paramètre déterminant la criticité de l'écoulement.

Enfin, dans la lignée des études de Benjamin visant à mieux comprendre le phénomène d'éclatement tourbillonnaire, il est également important de mentionner les travaux de Rusak & al. [224,264], qui ont poursuivi l'examen des équations de Squire-Long et l'étude de l'éclatement tourbillonnaire en régime non visqueux.

Pour finir ,il existe de nombreuses études, en particulier dans la communauté des mathématiques appliquées, sur les bifurcations de champs vectoriels régis par des systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles, dont les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides ou de Schrödinger en mécanique quantique sont deux exemples parmi tant d'autres. Parmi les ouvrages traitant des bifurcations de systèmes d'EDP non linéaires et des systèmes dynamiques en mécanique des fluides, nous pouvons par exemple citer les livres de Ioss & Joseph [140] ainsi que celui de Guckenheimer & Holmes [117].

### **Théorie de stabilité linéaire et critères d'instabilité**

Dans le contexte général des écoulements tournants possédant une vitesse axiale, c'est à dire celui des jets et sillages tourbillonnaires, il existe deux critères pour déceler des instabilités dues aux effets combinés de la force centrifuge et du flux axial.

Dans un premier temps, Howard & Gupta [136] ont énoncé en 1962 une condition nécessaire d'instabilité non visqueuse pour les perturbations axisymétriques ( $m = 0$ ) :

$$\exists r_0 \geq 0 \mid J(r_0) < \frac{1}{4} \quad (2.13)$$

La quantité  $J(r)$  désigne un nombre de Richardson local spécifiquement introduit par Howard & Gupta et défini par la relation suivante :

$$J(r) = \frac{\phi(r)}{\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2} \quad \text{où} \quad \phi(r) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^2 V_\theta^2)}{\partial r} \quad (2.14)$$

En d'autres termes, Howard & Gupta [136] démontrent une condition suffisante de stabilité pour les jets et sillages tourbillonnaires non visqueux soumis à des perturbations axisymétriques :

$$\forall r \geq 0, J(r_0) \geq \frac{1}{4} \quad (2.15)$$

Il est important de comprendre qu'un écoulement satisfaisant cette dernière condition peut très bien devenir instable pour des perturbations non axisymétriques. De plus, Howard & Gupta ont également étudié le cas des perturbations non axisymétriques, sans toutefois pouvoir obtenir

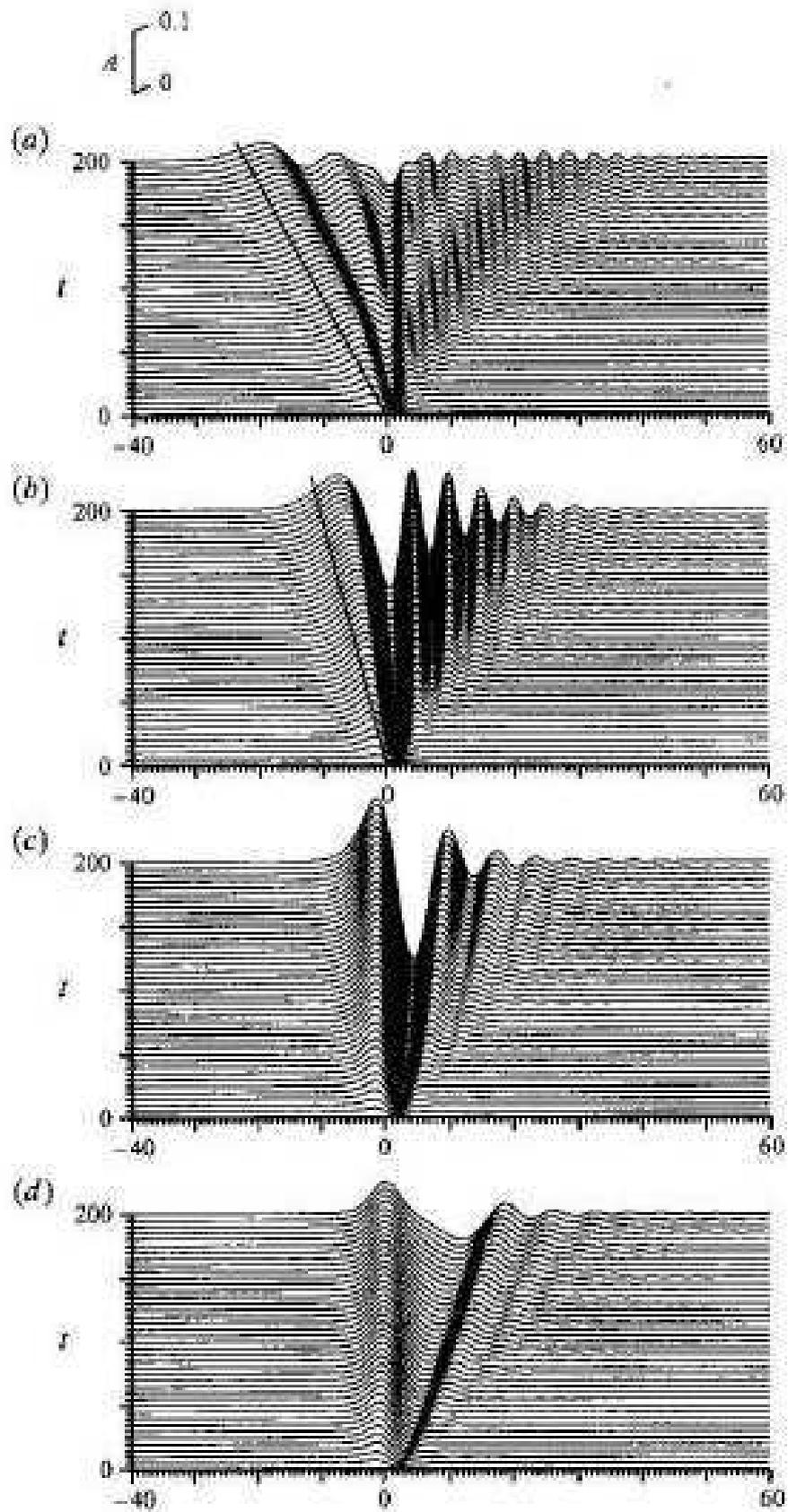


FIG. 2.10 – Evolution de l'amplitude d'une perturbation et propagation d'ondes pour plusieurs nombres de Froude autour du régime transcritique (d'après Hanazaki [128]).

de critère satisfaisant.

Pour finir, la principale limitation de cette étude est de ne pas prendre en compte les effets de la viscosité, ce qui en pratique rend ce critère difficilement applicable à un écoulement réel.

Dans un second temps, Leibovich & Stewartson [175] ont donné un autre critère en 1983 qui constitue probablement le résultat le plus utilisable de la stabilité linéaire. Dans cette étude, l'écoulement de base est un tourbillon en atmosphère infinie (donc sans aucun effet de confinement), dont les profils de vitesse axiale  $V_z(r)$  et tangentielle sont donnés par deux fonctions quelconques du rayon  $r$ . Ces auteurs examinent le comportement des perturbations tridimensionnelles pour des grandes valeurs du nombre d'onde azimutal  $m$ , en les décomposant classiquement sous forme de modes propres. A l'aide d'un développement asymptotique, Leibovich & Stewartson démontrent une condition suffisante d'instabilité :

$$\exists r_0 \geq 0 \mid V_\theta(r_0) \frac{\partial \Omega}{\partial r}(r_0) \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial r}(r_0) \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(r_0) + \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 (r_0) \right] < 0 \quad (2.16)$$

où  $\Omega(r)$  et  $\Gamma(r)$  désignent respectivement le taux de rotation et la circulation du tourbillon, définis par :

$$\Omega(r) = \frac{V_\theta(r)}{r} \quad \text{et} \quad \Gamma(r) = r V_\theta(r) \quad (2.17)$$

Néanmoins, il semble avec le recul que cette condition suffisante de Leibovich & Stewartson soit extrêmement contraignante car en pratique, un grand nombre d'écoulements tournants donnant lieu à des éclatements tourbillonnaires ne satisfont pas ce critère.

#### 2.1.2.4 Etudes numériques de l'éclatement tourbillonnaire

Les progrès des méthodes numériques et des moyens de calcul ont permis dès la fin des années 1970 d'étudier l'éclatement tourbillonnaire par la résolution des équations d'Euler puis plus récemment par la simulation directe des équations de Navier-Stokes. Parmi les études "pionnières" figurent les travaux de Leibovich, notamment son article de 1984 [170]. Beaucoup plus récemment, de fameuses études numériques ont abouti à des résultats très précis, spectaculaires et utiles pour la compréhension de la dynamique tourbillonnaire : c'est le cas par exemple des travaux de Delbende & al. [67], Ruith & al. [223] ou encore Moet & al. [204].

## 2.2 Dynamique linéaire de modèles analytiques de tourbillon

Les expressions mathématiques des modèles classiques de tourbillon seront rappelées et discutées au chapitre 4 dédié à la modélisation numérique. Nous récapitulons ici les principaux résultats de la littérature concernant la dynamique des perturbations infinitésimales d'un tube de vorticité, notamment leur propagation. En effet, on sait depuis les travaux de Lord Kelvin [258]

(1880) qu'un tube de vorticit   peut   tre le support d'ondes propagatives (appel  es ondes inertielles ou "ondes de Kelvin"), convect  es le long du tourbillon dans son coeur rotationnel,    la mani  re d'un "guide d'ondes".

### 2.2.1 Dynamique lin  aire du tourbillon de Rankine

Le tourbillon de Rankine est un mod  le d'usage courant car tr  s   l  mentaire : il est constitu   d'un coeur rotationnel anim   d'un mouvement de rotation solide et entour   d'un   coulement externe potentiel. Par la simplicit   de sa description, ce mod  le permet des d  veloppements math  matiques exacts en th  orie lin  aire [227]. Ainsi, Arendt & al. [8] ont examin   de mani  re formelle la r  ponse du tourbillon de Rankine    une perturbation infinit  simale localis  e. En r  solvant les   quations instationnaires d'Euler lin  aris  es, ils ont d  montr   par le calcul analytique que toute perturbation initiale du coeur tourbillonnaire   volue exclusivement comme une collection d'ondes de Kelvin. En d'autres termes, les modes propres du tourbillon de Rankine constituent une base compl  te sur laquelle une perturbation quelconque peut   tre d  compos  e. Connaissant ces modes propres, on peut donc calculer de mani  re exacte la propagation d'une quelconque perturbation localis  e, qui s'interpr  te alors comme la propagation d'un paquet d'ondes de Kelvin : "any initial perturbation of such a [Rankine] tube can be written as a sum of Kelvin waves, so that any localized disturbance propagates away from its original location as a wave packet". En toute rigueur, ce r  sultat remarquable est valide uniquement pour des perturbations infinit  simales du tourbillon de Rankine et il n'est pas trivial pour d'autres mod  les plus   volu  s de vortex. Cependant, Arendt & al. insistent sur la robustesse des m  canismes propagatifs illustr  s sur le tourbillon de Rankine et ils formulent la conjecture que leurs conclusions ont une port  e plus g  n  rale : "Although the results of the present paper have been derived for the special case of small perturbations on a straight vortex tube of constant vorticity, the physical mechanisms providing for the propagation of the disturbances do not depend on the particular distribution of vorticity within the tube or the assumption of linearity."

Du point de vue d'Arendt & al, les "ondes de Kelvin" constituent une terminologie sp  cifique du tourbillon de Rankine et sont en fait un cas particulier du concept plus g  n  ral de "twist waves". Ces "ondes de torsion" sont responsables de la d  formation des lignes de vorticit   (par cr  ation de vorticit   azimutale et rotation diff  rentielle) et jouent un r  le d  terminant dans la propagation des perturbations. Selon ces auteurs, ce m  canisme est tr  s robuste et g  n  rique pour d'autres mod  les de tourbillon.

### 2.2.2 Dynamique lin  aire du tourbillon de Lamb-Oseen

La dynamique lin  aire du tourbillon de Lamb-Oseen a   t   abondamment   tudi  e, notamment par Sipp, Fabre et Le Diz  s. Dans un premier temps, Fabre & al. [98] ont propos   une cartographie compl  te des modes normaux du mod  le de Lamb-Oseen (profil gaussien de vitesse azimutale, plus "r  aliste" que le mod  le de Rankine). Par la suite, Fabre [99] a repris la d  marche d'Arendt & al. (r  solution d'un probl  me aux valeurs initiales) afin d'  tudier les m  canismes de propagation sp  cifiques du tourbillon de Lamb-Oseen, ainsi que les effets visqueux. Il a ainsi montr   que les ondes de Kelvin axisym  triques du Lamb-Oseen sont similaires    celles du tourbillon de Rankine alors que des diff  rences importantes interviennent sur les ondes non axisym  triques, confirmant les observations de Sipp [244, 247] dans le cas non visqueux (notamment l'apparition d'ondes singuli  res amorties). En particulier, le Lamb-Oseen se distingue par l'existence de deux types de modes purement visqueux :

- la premi  re famille concerne des modes de couche critique, caract  ris  s par de fortes oscillations dans une couche critique (singularit   de type r  sonance avec le champ de base)
- la seconde classe correspond    des modes centraux (dont la structure se concentre au voisinage

de l'axe du tourbillon), fortement amortis.

Dans le chapitre 6, nous reviendrons plus en détail sur ces modes centraux et de couches critiques, en les illustrant sur nos simulations numériques directes.

Pour plus de détails mathématiques, le lecteur pourra se référer à la revue de Fabre [99]. En résumé, les modes propres du modèle de tourbillon (i.e. les modes de Kelvin, calculés par l'analyse de stabilité linéaire) interviennent explicitement dans la solution formelle de la réponse du tourbillon à une perturbation initiale. Cependant, ce n'est pas suffisant car dans le cas général, l'ensemble des modes propres (le spectre discret) constitue une base incomplète pour représenter une condition initiale arbitraire et il faut tenir compte de la contribution du spectre continu. Ce dernier point reste un problème ouvert [98], faute de théorème mathématique.

Les résultats de Fabre incitent à nuancer les conclusions d'Arendt & al. quant à la dépendance au modèle de tourbillon de la réponse d'un tube de vorticité à une perturbation donnée. Lorsque la distribution de vorticité du champ porteur n'est pas compacte (ce qui est le cas de la majorité des modèles "réalistes" de tourbillon), la résolution d'un problème aux valeurs initiales fait intervenir un spectre continu, rendant le formalisme de transformée de Laplace en temps inadapté. Le modèle de Rankine est une exception où le spectre discret permet de décrire complètement une quelconque perturbation initiale.

### 2.2.3 Physique des mécanismes linéaires de propagation dans un tourbillon

Nous récapitulons ici les principaux mécanismes physiques de propagation de structures cohérentes qui ressortent des nombreuses études traitant de la dynamique tourbillonnaire en régime linéaire.

#### 2.2.3.1 Mécanismes axisymétriques

La figure 2.11 illustre le mécanisme proposé par Fabre & al [98] pour la propagation d'ondes axisymétriques le long d'un tourbillon perturbé par une onde stagnante ("standing wave"). Une onde stagnante est une perturbation purement oscillante restant localisée sur place (i.e. sans aucune propagation). Une telle onde peut être construite par superposition de deux ondes se propageant en sens opposés.

Un tourbillon perturbé par une onde stagnante prend alors une forme "variqueuse" (a), composée de régions alternées de haute et basse vorticité. Par conservation de la circulation, le rayon du tourbillon est plus petit dans les régions de haute vorticité et plus grand dans les régions de basse vorticité. Plus le coeur tourbillonnaire est fin, plus la dépression au centre du vortex est forte. La structure variqueuse s'accompagne donc d'une alternance de surpressions et dépressions, par rapport à l'état non perturbé du vortex. Il en résulte un gradient axial de pression dans le coeur tourbillonnaire, créant un écoulement axial, matérialisé par des flèches en (b). Finalement, cet écoulement axial a pour effet de modifier la distribution de vorticité axiale par un mécanisme d'étirement-compression (c). Dans les régions de divergence axiale, le champ de vorticité se retrouve étiré et le rayon du coeur tourbillonnaire diminue. A l'inverse, dans les régions de convergence axiale, le champ de vorticité se retrouve comprimé et le rayon du coeur tourbillonnaire augmente. Au final, le mécanisme axisymétrique a pour effet de s'opposer aux causes qui le créent puisqu'il résorbe les perturbations en forme de varices.

En toute rigueur, le mécanisme de Fabre ne s'applique qu'aux ondes stagnantes axisymétriques et infinitésimales d'un tourbillon. Ses apports majeurs sont de préciser le scénario évoqué par Spalart [249], de mettre en évidence et quantifier différentes vitesses de propagation à l'aide des résultats de la théorie de stabilité linéaire, ainsi que de prendre en compte les effets de la viscosité (cf. chapitre 6). Malgré un autre scénario proposé par Melander & al. [196] et Arendt & al. [8]

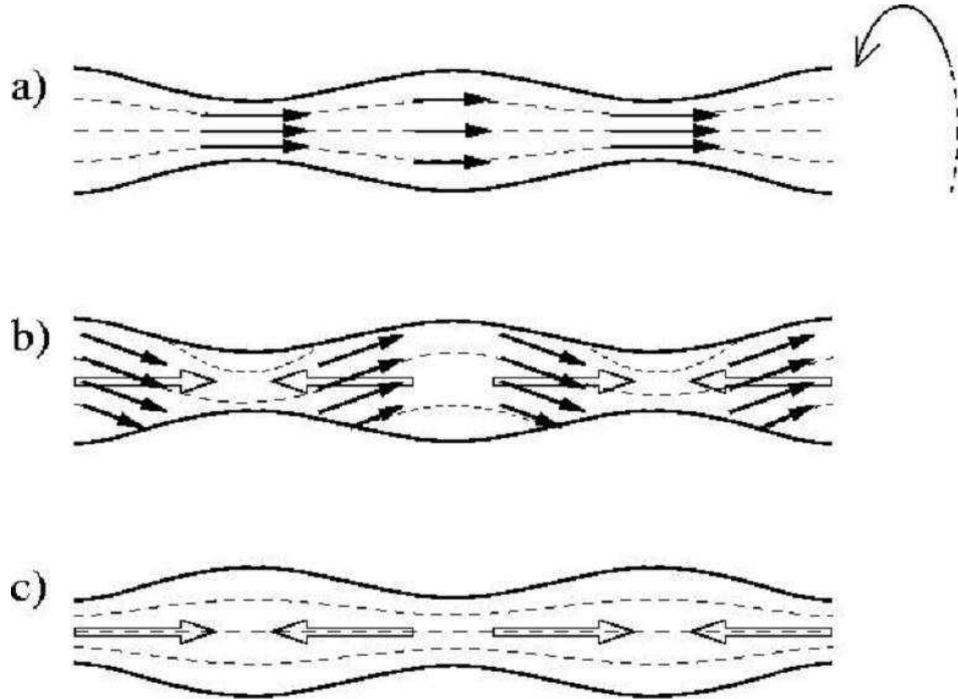


FIG. 2.11 – Mécanisme axisymétrique de propagation d'ondes le long du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [98]).

fondé sur la torsion des lignes de vorticité, le mécanisme axisymétrique décrit par Spalart et Fabre fait référence et a été repris notamment par Moet & al. [204] et Nybelen & al. [207, 208]. Ces auteurs ont reproduit numériquement un éclatement tourbillonnaire (vortex bursting)   l'aide de perturbations axisymétriques, en jouant sur la taille du coeur tourbillonnaire le long d'un vortex de Lamb-Oseen. Selon ces études, le mécanisme axisymétrique est capable de générer des ondes de pression et des vitesses axiales suffisantes pour entrer dans un régime instable du nombre de swirl décrit par Mayer & Powell [195].

### 2.2.3.2 Mécanismes hélicoïdaux

La figure 2.12 illustre le mécanisme proposé par Fabre & al [98] pour la propagation d'ondes en forme d'hélice ("bending waves") le long d'un tourbillon de Lamb-Oseen.

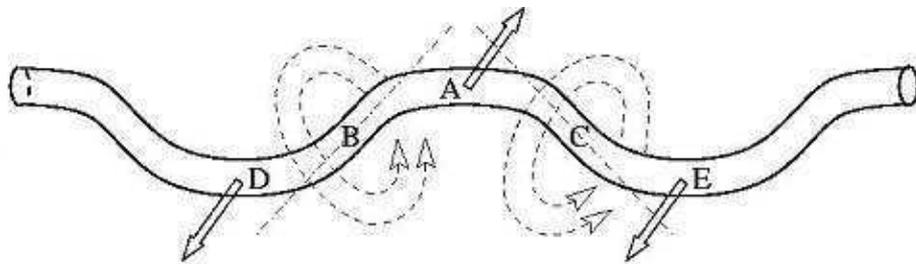


FIG. 2.12 – Mécanisme hélicoïdal de propagation d'ondes le long du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [98]).

Dans le cas bidimensionnel (i.e. pour  $k = 0$ ), le déplacement de l'onde se limite à une pure

translation, stationnaire et neutre ( $\omega = 0$ ). Bernoff et Lingevidh [32] expliquent que cette propriété découle de la conservation de la quantité de mouvement. Fabre & al [98] montrent que pour  $k \neq 0$ , la tridimensionnalité de l'écoulement conduit à une rotation de l'onde dans la direction opposée à celle du tourbillon. La figure 2.12 représente une onde plane qui prend la forme d'un filament tourbillonnaire déplacé sinusoïdalement dans le plan transverse. Une telle onde plane peut être construite par superposition de deux ondes hélicoïdales de nombre d'onde azimutal  $m = \pm 1$  et le mécanisme physique reste le même pour des ondes planes ou hélicoïdales. En appliquant la loi de Biot-Savart dans le cadre de l'approximation de l'induction locale (cf. Saffman [227]), Fabre & al [98] expliquent que l'intégralité du filament tend vers un mouvement de précession autour de l'axe  $z$  mais dans la direction opposée à celle de la circulation du tourbillon porteur. Sur la figure 2.12, le champ de vitesse induit dans la section A (où le déplacement du vortex dans la direction  $x$  est maximal) par la section B conduit à un mouvement dans la direction  $y < 0$ . De même, la section C induit dans la section A un champ élémentaire de vitesse orienté selon  $y < 0$ .

De plus, Fabre & al [98] ont étudié les effets de la viscosité sur les ondes hélicoïdales, en complément des résultats obtenus par Leibovich & al [171] en théorie non visqueuse. Les résultats de stabilité linéaire de Fabre & al montrent que l'onde responsable du déplacement "en bloc" du tourbillon est de loin l'onde hélicoïdale la moins affectée par l'amortissement visqueux. A ce titre, le mécanisme de propagation des bending waves décrit ci-dessus apparaît comme robuste et une piste réaliste pour appréhender les phénomènes d'end-effects et d'éclatement tourbillonnaire.

### 2.2.3.3 Mécanismes en double hélice

La figure 2.13 illustre le mécanisme proposé par Arendt & al. [8] pour la propagation d'ondes en forme de double hélice que l'on peut qualifier d'aplatissement elliptique ("flattening waves") le long d'un tourbillon de Rankine. Ce type de perturbations s'apparente à la catégorie de la "branche F" dans la classification des ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen proposée par Fabre & al [98].

La branche "F" décrite ici a un équivalent dans le tourbillon Rankine, qui est appelé la 'branche isolée' par Eloy et Le Dizès (2001) et Fukumoto (2003), et dont la vitesse angulaire  $\omega/m$  varie entre  $1/2$  (pour  $k = 0$ ) et  $0$  (pour  $k \rightarrow \infty$ ). Un argument physique a été proposé par Arendt et al. (1997) pour expliquer les propriétés de cette onde. Cet argument est présenté à la figure 2.13. Considérons un tourbillon de Rankine, avec un rayon  $a$ , un taux de rotation  $\Omega_0$  et une circulation  $\Gamma_0 = 2\Pi\Omega_0 a^2$  déformée par une "onde d'aplatissement" de nombre d'onde  $k$ , comme le montre la figure 2.13 (a). Arendt et al. (1997) ont soutenu que ce tourbillon déformé peut être modélisé comme une paire de filaments de tourbillon enroulés l'un autour de l'autre de façon hélicoïdale, localisés à une distance  $a$  l'un de l'autre, chacun portant une circulation  $\Gamma' = \Gamma_0/2$  (figure 2.13 (b)). Considérons d'abord la situation bidimensionnelle (figure 2.13 (c)). Dans ce cas, chaque filament est convecté par une vitesse induite par l'autre, d'amplitude  $\Gamma'/(2\Pi a) = \Omega_0 a/2$ . Par exemple, le tracé montre avec des flèches la vitesse induite par le filament sombre sur le clair. Donc, la paire tourne dans la direction positive avec une fréquence angulaire  $\Omega_0/2$ , qui est précisément la fréquence angulaire attendue pour l'onde. Dans le cas tridimensionnel, en plus de la vitesse induite par l'autre, chaque filament est convecté par sa propre vitesse auto-induite. Ce second effet est représenté par la figure 2.13 (d). Chaque filament est déplacé de façon hélicoïdale et nous reconnaissons dans cette forme la présence d'une onde de déplacement. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la vitesse induite par ces ondes de déplacement ferait, à elle seule, tourner les filaments dans la direction négative. Par exemple, le tracé 2.13 (c) montre

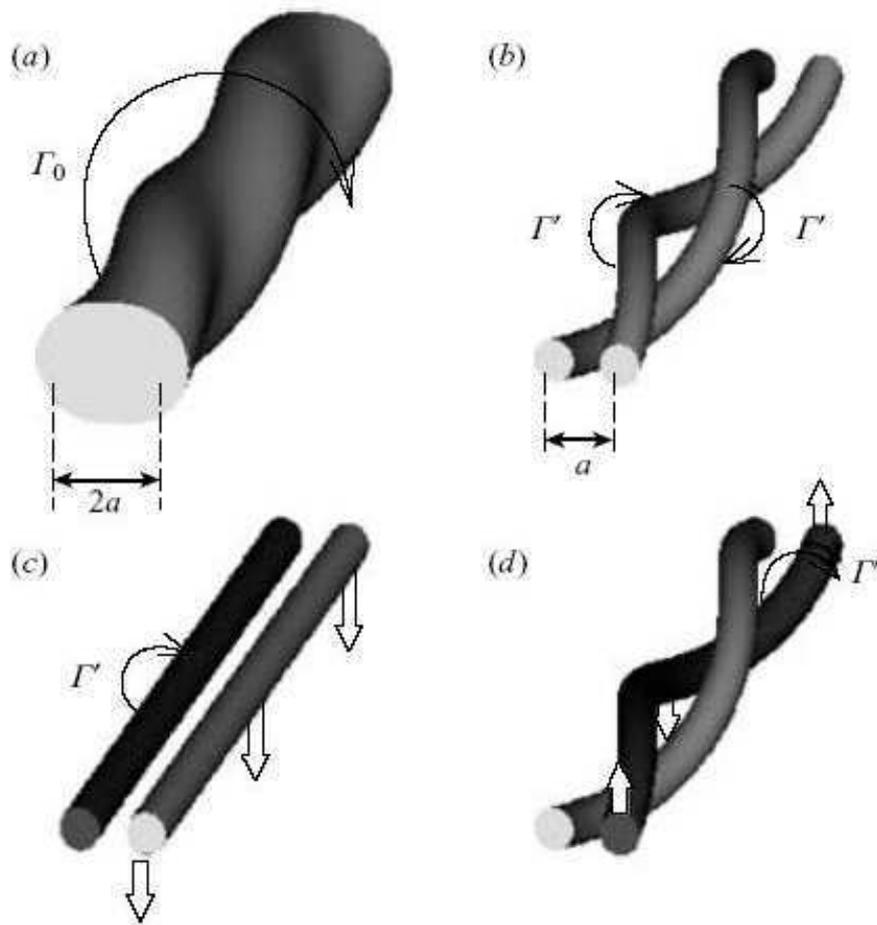


FIG. 2.13 – Mécanisme de propagation d'ondes en double hélice le long du tourbillon de Rankine (d'après Arendt & al. [8]).

avec des flèches blanches la vitesse induite par le filament sombre sur lui-même. Donc, l'auto-induction s'oppose à l'effet de l'induction mutuelle. Résultat, dans le cas tridimensionnel, la fréquence angulaire de l'onde est inférieure à  $\Omega_0/2$ . De plus, dans la limite des courtes longueurs d'onde, les deux effets s'annulent et la fréquence angulaire tend vers zéro. Si l'on a à l'esprit les résultats présentés dans la section précédente, il nous faut admettre que le scénario présenté ci-dessus, bien que très séduisant et tout à fait exact pour le tourbillon Rankine, n'est que partiellement valable pour des tourbillons plus réalistes tels que le tourbillon Lamb-Oseen. Ce scénario ne reste exact que dans l'intervalle des courtes longueurs d'onde, où l'onde F se réduit effectivement à un aplatissement simple du tourbillon. D'autre part, dans l'intervalle de grandes longueurs d'onde, le mode F ne peut plus être identifié comme une onde d'aplatissement. Par exemple, dans la limite bidimensionnelle, il s'agit d'un mode fortement amorti avec une fréquence  $\omega = 0.4402 - 0.1588i$ , valeur calculée par Fabre qui diffère sensiblement de la valeur  $\omega = 1$  prédite ci-dessus. Dans ce cas, le mécanisme physique sous-jacent est complètement différent, et doit inclure le couplage entre les dynamiques intrinsèques du cœur du tourbillon et l'enroulement des perturbations localisées dans sa périphérie. A cause de ces différences, on peut s'attendre à ce que pour un tourbillon du type Lamb-Oseen l'évolution d'une déformation elliptique de faible amplitude initialement localisée soit complètement différente de celle d'un tourbillon du type Rankine considéré par Arendt & al. [8]. Ce point est pleinement confirmé par Fabre [99] en résolvant le problème aux valeurs initiales dans le cadre de la théorie linéaire. Il est à noter, cependant, que ces conclusions ne tiennent que dans le régime linéaire. Pour des perturbations d'une amplitude suffisamment large, des non linéarités pourraient changer les propriétés de la couche critique et mener à l'existence d'une "véritable" onde d'aplatissement pour tous les nombres d'onde.

#### 2.2.3.4 Bilan des mécanismes linéaires de la dynamique tourbillonnaire

De nombreux auteurs ont étudié les différentes géométries azimutales des perturbations d'un tourbillon isolé et il ressort de la littérature la terminologie suivante :

- les ondes  $m = 0$  sont appelées "standing waves", à la manière de Benjamin [26] et Fabre [98]
- les ondes  $m = 1$  sont appelées "bending waves", terminologie utilisée par Leibovich & al. [171]
- les ondes  $m = 2$  sont appelées "flattening waves", expression employée par Arendt & al. [8] et Fabre [98].

L'allure de ces différentes perturbations est représentée de manière très schématique sur la figure 2.14. Nous aurons l'occasion d'y revenir plus en détails dans le paragraphe 4.3.

### 2.3 Effets des non-linéarités sur la dynamique tourbillonnaire

Des travaux théoriques visant à évaluer précisément les effets des non linéarités sur les instabilités des écoulements tournants et en particulier sur l'éclatement tourbillonnaire ont été réalisées par le passé, même s'ils sont en moins grande quantité que les pléthoriques analyses linéarisées :

- Leibovich et Randall dès 1973 [174]
- Leibovich et Kribus en 1990 [172]
- Kribus et Leibovich en 1994 [152]

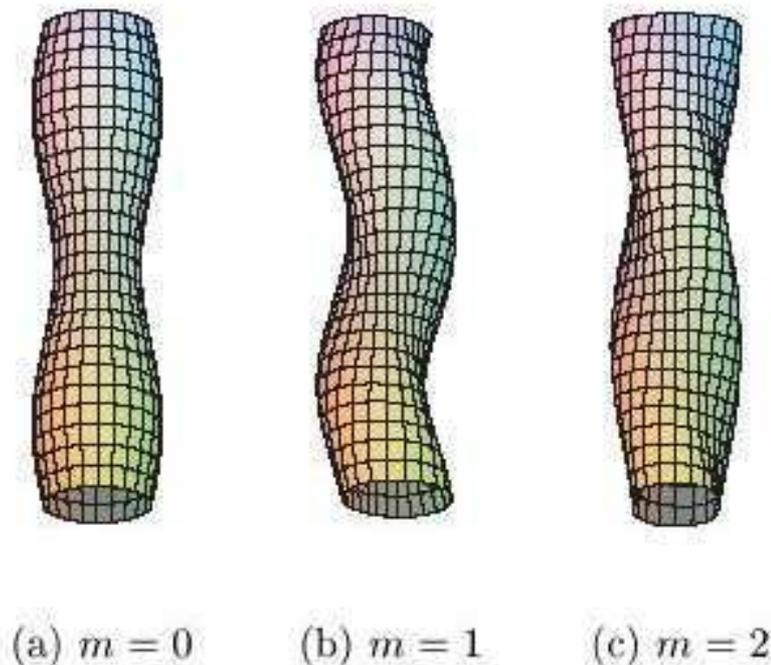


FIG. 2.14 – Représentation schématique de perturbations localisées en forme de paquets d'ondes de Kelvin : ondes axisymétriques  $m = 0$ , ondes hélicoïdales  $m = 1$  et ondes elliptiques  $m = 2$ .

En ce qui concerne les modèles classiques de tourbillon, les études de Fabre [98,99] ont fourni une description complète des modes normaux du tourbillon de Lamb-Oseen et une comparaison avec les résultats du modèle plus académique mais moins réaliste de Rankine. Les hypothèses et limitations de ce travail mettent en évidence un certain nombre de questions ouvertes, nécessitant des études complémentaires. Parmi les nombreuses pistes à explorer pour compléter ce travail, nous pouvons mentionner au moins quatre axes de recherche :

- L'étude de Fabre [98] se restreint aux grandes et moyennes longueurs d'onde. La prise en compte des courtes longueurs d'onde a été partiellement traitée, notamment par Le Dizès et Lacaze [78] à l'aide de méthodes asymptotiques, mais uniquement dans le cas non visqueux. La description des effets de la viscosité sur la dynamique des courtes longueurs d'onde demeure une question ouverte et importante.

- Une autre restriction de l'étude de Fabre [98] tient à la théorie modale. Cette approche fournit une cartographie instantanée des différents modes mais elle ne permet pas de décrire les perturbations localisées en espace, ni les effets transitoires. La première limitation a été traitée dans le régime linéaire par une étude complémentaire de Fabre [99], en résolvant le problème linéarisé des valeurs initiales pour des perturbations infinitésimales du tourbillon de Lamb-Oseen. La seconde limitation a été explorée par Antkowiak et Brancher [5] à l'aide d'une analyse en perturbations optimales du modèle de Lamb-Oseen. Par la suite, Brion & al. [41] ont appliqué cette approche à l'instabilité de Crow sur un dipôle de tourbillons contrarotatifs de Lamb-Oseen. De manière plus générale, les croissances transitoires sont largement examinées dans les études portant sur les non normalités des équations de Navier-Stokes, par exemple dans la revue de Chomaz [49].

- L'étude de Fabre [98] se restreint aux modes propres discrets. Cependant, l'ensemble de ces modes discrets ne constituent pas une base complète pour représenter une perturbation quelconque. Dans le cas général, il faut introduire une classe supplémentaire, regroupant les modes continus et les pseudo-modes. Le spectre continu reste un problème mathématique ouvert, ainsi

que son interprétation physique car les modes continus pourraient jouer un rôle fondamental dans les phénomènes transitoires des tourbillons de sillage.

- Enfin, les effets des non linéarités sur les ondes de Kelvin ne peuvent être appréhendés par l'étude linéarisée de Fabre [98]. Cet aspect paraît crucial, en particulier dans le cas des ondes de couche critique. Dans le prolongement des études de Fabre [98] et Le Dizès [72], la prise en compte des effets tridimensionnels non linéaires pourrait révéler une nouvelle famille d'ondes rétrogrades non amorties (couches critiques non linéaires). Comme nous l'avons indiqué en introduction, l'étude des non linéarités, des effets transitoires, tridimensionnels et de leur lien éventuel avec l'éclatement tourbillonnaire observé en soufflerie est précisément le point de départ de cette présente thèse.

### 2.3.1 Les non-linéarités, moteur des instationnarités dans la dynamique tourbillonnaire et de la transition vers la turbulence

L'éclatement tourbillonnaire est un phénomène non linéaire. Leibovich [168] a montré par des développements faiblement non linéaires en théorie non visqueuse que des ondes faiblement non linéaires dans un tube de vorticit   peuvent donner lieu    une dynamique de type soliton, r  gie par les   quations de Korteweg de Vries.

R  cemment, Leclaire [164, 165, 167] a propos   une approche originale de l'  clatement tourbillonnaire, d'un point de vue exp  rimental et th  orique. Ses   tudes visaient    comprendre l'origine de la turbulence d'un   coulement de jet tournant, observ  e dans le plan de sortie d'une tuy  re convergente plac  e en aval d'une conduite cylindrique (cf. figure ). Il a expliqu   ce ph  nom  ne comme le r  sultat d'une interaction d'ondes de Kelvin axisym  triques stationnaires de grande amplitude, qui peuvent "stagner" dans certaines configurations (plus pr  cis  ment, dans le cas o   l'  coulement entre dans le r  gime transcritique) et provoquer une recirculation pari  tale dans la tuy  re.



FIG. 2.15 – Effets d'une tuy  re convergente sur un   coulement tournant (d'apr  s Leclaire [167]).

### 2.3.2 Amortissement des instabilit  s hydrodynamiques par saturation non-lin  aire

R  cemment, des   tudes ont permis d'investiguer les effets des non lin  arit  s sur des configurations tr  s contr  l  es, g  n  rant une instabilit   hydrodynamique et dont les caract  ristiques ont   t   bien identifi  es d'un point de vue th  orique. C'est le cas en particulier de l'instabilit   de courte longueur d'onde, mise en   vidence par Leweke et Williamson [181].

Sipp [241] a calculé la saturation des instabilités de courtes longueurs d’onde sur une paire de tourbillons contra-rotatifs et ses conclusions concordent avec les résultats expérimentaux de Leweke et Williamson [181] sur une configuration où le rapport d’aspect vaut  $a/b = 0.2$ .

Les travaux de Coquart [52] sont un exemple qui démontre clairement l’effet de saturation linéaire, qui a pour effet d’amortir une instabilité hydrodynamique d’origine barocline, détectée lors de l’analyse de stabilité linéaire.

### 2.3.3 Non-linéarités et singularités des couches critiques

Dés 1960, Case [44] avait étudié la stabilité d’un écoulement de Couette plan dans le cas non visqueux, mais les premières études sur les non linéarités et singularités des couches critiques datent véritablement de la fin des années 60, notamment avec l’article de Benney et Bergeron [28].

Au début des années 1970, le mathématicien Haberman [119–121] a approfondi ces études, ce qui lui a valu de donner son nom à ces couches critiques.

Plus précisément, Haberman a réalisé une première étude [119] sur les couches critiques dans les écoulements parallèles. Par la suite [120], cet auteur a fait un développement asymptotique pour calculer la solution faiblement non linéaire du problème aux valeurs initiales, afin de pouvoir examiner son comportement en temps long, dans une configuration où le problème linéarisé exhibe de légères instabilités, i.e. à taux d’accroissement faible. La solution linéarisée est valide jusqu’à ce que son faible taux de croissance exponentielle surmonte le déclin algébrique dû à la dispersion de l’énergie initiale. Cette étude montre que pour les temps plus longs, les effets des termes non linéaires deviennent importants mais il n’y a pas d’effet supplémentaire radicalement nouveau, ni sur les aspects dispersifs ni sur les aspects diffusifs. Dans le cas non visqueux, Haberman a pu calculer une solution exacte qui apporte une vérification remarquable de la méthode asymptotique par le calcul analytique, dans le régime des temps longs. A ce jour, nous ne connaissons pas de validation de cette approche asymptotique dans le cas visqueux.

Les études sur les singularités de point critique ont connu un regain d’intérêt au début des années 2000. Dans la communauté de la mécanique des fluides, Le Dizès a proposé une extension des travaux d’Haberman sur les couches critiques. D’une part, Le Dizès [72] a étudié, dans un cadre bidimensionnel, les effets des non linéarités et tout particulièrement leur capacité à auto-entretenir des perturbations non axisymétriques d’un tourbillon porteur présentant un profil gaussien de vorticité (modèle de Lamb-Oseen).

### 2.3.4 Couches critiques et éclatement tourbillonnaire

Les perturbations non axisymétriques ( $m \neq 0$ ) présentent un intérêt certain pour notre étude car elles pourraient bien être à l’origine d’un phénomène de type éclatement tourbillonnaire ou du moins, d’une dispersion brutale du coeur tourbillonnaire. Rappelons que selon les écoles, certains auteurs ne font pas de réelle différence entre ces deux concepts.

L’idée physique sous-jacente est que certaines perturbations non axisymétriques pourraient conduire à un mécanisme de résonance, c’est à dire que les fréquences des perturbations non axisymétriques physiquement admissibles (notamment au sens de la théorie de la stabilité linéaire) peuvent exhiber des fréquences de vibrations se trouvant précisément dans l’intervalle de celles du champ de base et ainsi ”exciter” des fréquences propres du tourbillon porteur, en particulier

la fréquence donnée par le taux de rotation au centre du vortex  $\Omega_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{V_\theta(r)}{r} \right)$ . Signalons tout de suite que l'idée n'est pas nouvelle : d'autres auteurs se sont déjà penché sur cette question, mais toutes ces études s'appuient sur des hypothèses simplificatrices et clairement édictées (approches 2D ou non visqueuses, équations volontairement simplifiées pour pouvoir calculer des solutions analytiques, faciliter les développements asymptotiques ou réaliser une analogie parfaite avec l'électro-magnétisme etc.), qui ne sont pas sans conséquences sur les conclusions tirées.

Mathématiquement, il s'agit d'une singularité de type point critique, qui est introduite par le formalisme même de la théorie de stabilité linéaire. Ce point est discuté dans les chapitres 5 et 6. Cette singularité critique mise en évidence sur l'équation 5.53 est physiquement non admissible et dans la réalité, elle peut être "relaxée" par deux mécanismes : l'effet de l'augmentation du nombre de Reynolds (développement de la turbulence : création de petites structures et transferts d'énergie via une cascade inertielle), ou les interactions d'ordres supérieurs au premier ordre entre champ de base et perturbation (les termes non linéaires), naturellement présentes dans les équations de Navier-Stokes mais non résolues en théorie linéaire, et qui induisent des termes sources supplémentaires (cf. équation 5.55). Pour aller au delà du domaine de validité de la théorie de stabilité linéaire et explorer le régime faiblement non linéaire de la dynamique, une solution consiste à résoudre une équation d'amplitude, propre au système étudié. Le prototype d'équation d'amplitude a été conjecturé dès 1940 par Landau et a fait l'objet par la suite de nombreux développements et recherches.

Physiquement, la topologie des modes de couches critiques est très complexe. Elle se caractérise par un fort enroulement de la perturbation et une filamentation en spirales très fines de la vorticité, phénomènes d'autant plus amplifiés que le nombre de Reynolds est plus élevé, comme nous le verrons aux chapitres 6 et 7.

## 2.4 Conclusions de l'étude bibliographique

Dans ce chapitre, nous avons fait une brève revue des perturbations susceptibles de se propager le long de l'axe d'un vortex afin d'appréhender les end-effects, ainsi qu'une rapide synthèse de l'éclatement tourbillonnaire. Nous en récapitulons ici les principaux résultats.

En ce qui concerne les aspects propagatifs, retenons les points suivants :

- Les effets du choix du modèle de vortex et, plus encore, de la géométrie azimutale de la perturbation jouent un rôle déterminant dans la dynamique tourbillonnaire.
- Les "ondes de Kelvin" sont les *modes normaux réguliers* issus d'une analyse de stabilité linéaire, dans l'acception retenue par Fabre & al. et Le Dizès & al., c'est-à-dire respectant un développement asymptotique régulier en fonction du nombre de Reynolds, pour la valeur propre et le vecteur propre (cf. définitions 6.1 et 6.2 dans le chapitre 6). Ces ondes de Kelvin, fonctions de la géométrie azimutale de la perturbation, façonnent en grande partie la réponse du tourbillon porteur.

De l'abondante littérature sur l'éclatement tourbillonnaire, il nous semble important de souligner certains éléments dans la perspective de notre démarche de modélisation numérique (cf. chapitre 4) :

- Plusieurs formes d'éclatement tourbillonnaire ont été mises en évidence (notamment axi-symétrique, spirale et en double hélice), qui conduisent généralement le coeur tourbillonnaire à s'élargir entre l'amont et l'aval. L'amplitude de cette expansion dépend précisément de la

géométrie azimutale de l'éclatement qui survient.

- Dans certaines configurations expérimentales, il s'est avéré que la forme géométrique même de l'éclatement tourbillonnaire peut changer, simplement en faisant varier le nombre de Reynolds.
- Le champ de vitesse axiale (et par conséquent le gradient de pression axial) constitue un autre paramètre déterminant pour l'éclatement tourbillonnaire et on représente ses effets par le nombre de Swirl  $S$ , rapport entre les vitesses tangentielle et axiale, à quelques variations de définition près selon les auteurs. L'origine de cet écoulement axial se trouve soit dans le champ de base (on parle alors de jet ou sillage tourbillonnaires), soit comme une conséquence de l'évolution instationnaire de la perturbation. Dans le premier cas de figure, le modèle de Batchelor (ou q-vortex) a fait l'objet de nombreux travaux théoriques car il fournit une solution analytique commode pour étudier les tourbillons de sillage en faisant varier le nombre  $S$ . La présente thèse s'intéresse au second cas de figure dans les chapitres 6 et 7.
- L'annulation de la vitesse axiale sur l'axe (point de stagnation) et l'existence de valeurs négatives dans le champ axial de vitesse sont des caractéristiques couramment observées dans un éclatement tourbillonnaire, mais elles ne sont pas systématiques.
- De récentes études par Fabre & al. [96] sur le tourbillon de Batchelor ont montré que des configurations à hauts nombres de Swirl que l'on croyait stables (Khorrami [149], Mayer et Powell [195]), peuvent en fait être sujettes à des instabilités hydrodynamiques de nature visqueuse.

Bien que plusieurs phénomènes physiques prépondérants aient été clairement identifiés dans l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire, ceux-ci ont été le plus souvent étudiés de manière isolée, par souci de rigueur scientifique. Ainsi, les nombres de Reynolds et de Swirl sont des paramètres de contrôle déterminants, mais il n'existe pas encore de théorie globale et unifiée permettant d'expliquer l'intégralité des caractéristiques physiques et des aspects dynamiques de l'éclatement tourbillonnaire.

Par ailleurs, l'axisymétrisation des perturbations d'un tourbillon reste une question ouverte, y compris dans le cas bidimensionnel. En 2D précisément, certains auteurs montrent que cette axisymétrisation est inéluctable et rapide par rapport à la fréquence de rotation du tourbillon porteur (Schechter & al. [238]). Au contraire, Dritschel [85] indique que des tourbillons non axisymétriques peuvent persister, dans le cas d'une étude 2D non visqueuse. De plus, d'autres études viennent conforter l'idée que des perturbations non axisymétriques peuvent subsister durablement, voire s'amplifier et même de manière spectaculaire (Antkowiak & al. [5] ou Brion & al. [41]). Par ailleurs, des résultats issus d'analyses asymptotiques 2D à hauts nombres de Reynolds (Le Dizès [72]) ou de travaux plus réalistes prenant en compte la tridimensionnalité de la dynamique tourbillonnaire (Fabre [99] ou Ruith & al. [223]) établissent également que des perturbations non axisymétriques peuvent s'autoentretenir en temps longs. Ces études font souvent appel à des concepts mathématiquement pointus : la contribution difficilement quantifiable du spectre continu dans la dynamique globale, les singularités de couches critiques (relativement peu étudiées et très délicates dans le cadre des écoulements tourbillonnaires) et la possible entrée en résonance avec le vortex, la non normalité de l'opérateur convectif de Navier-Stokes dans le cas des écoulements tournants pouvant conduire à des croissances transitoires.

- Pour finir, il nous semble nécessaire de mentionner brièvement d'autres éléments conclusifs :
- Les effets de la viscosité ne se bornent pas uniquement à l'amortissement des perturbations, selon l'intuition générale. Ils peuvent également conduire à l'apparition de *modes singuliers*, comme l'ont montré par exemple les travaux de Goodman et Haberman et ceux de Fabre et Le Dizès sur le tourbillon de Lamb-Oseen (les modes centraux visqueux et les modes de couche critique, étudiés aux chapitres 6 et 7).
  - Une attention toute particulière a été portée à la contribution des ondes de Kelvin dans

de nombreux phénomènes de la dynamique tourbillonnaire, avec succès sur les instabilités coopératives de grandes longueurs d'onde (Crow) et de petites longueurs d'onde (Widnall). La classification des ondes de Kelvin fournit donc un important et puissant outil d'interprétation des mécanismes physiques, comme nous le verrons aux chapitres 6 et 7. Plus spécifiquement, les ondes de Kelvin axisymétriques ont apporté un éclairage intéressant dans le cas particulier de l'étude de l'éclatement tourbillonnaire axisymétrique, notamment en terme de "saut" transcritique entre deux solutions stationnaires (cf. le chapitre 5 de la thèse de Leclaire [167]). Cependant, les approches classiques de type stabilité linéaire locale n'ont pas permis d'expliquer certains phénomènes comme le flottement aérodynamique et l'éclatement tourbillonnaire, ce qui a mené à revisiter le concept de stabilité par d'autres approches, parmi lesquelles la stabilité globale (cf. Chomaz [49] pour une revue) et la théorie des perturbations optimales. Cette dernière a permis récemment d'expliquer le mécanisme de formation des anneaux tourbillonnaires, par les travaux d'Antkowiak et Brancher [6] et l'étude des croissances transitoires constitue une piste de recherche prometteuse.

- Les effets du choix du tourbillon porteur ne sont pas négligeables sur les résultats dynamiques. A l'évidence, le modèle du champ de base n'est pas sans conséquences sur les conclusions physiques, comme le montre la comparaison par Fabre [98, 99] des dynamiques linéaires des tourbillons de Rankine et de Lamb-Oseen.

- Les analogies entre les bassins hydrodynamiques et les souffleries, en ce qui concerne l'éclatement tourbillonnaire, sont très délicates et limitées par le fait même de sources d'erreurs diverses. En effet, les fluides sont différents (eau/air) et les effets de confinement semblent généralement plus prononcés dans les dispositifs de type "vortex tube".

Ces différents éléments seront discutés et pris en compte dans notre démarche de modélisation au chapitre 4.

# Chapitre 3

## Etude expérimentale

Dans ce chapitre, nous présentons le banc d'essai B20 situé à l'ONERA Lille et ses moyens de mesure ainsi que les résultats du dépouillement de certaines données collectées dans le cadre du programme européen AWIATOR <sup>1</sup>. Le but de ce chapitre est d'illustrer l'éclatement tourbillonnaire observé dans cette installation expérimentale et d'extraire des données expérimentales quelques caractéristiques utiles afin de nous guider dans la modélisation numérique du phénomène, traitée au chapitre suivant.

Ces travaux ont fait l'objet d'un stage de Master au DAFE [29] et d'un rapport technique pour le projet européen FAR-Wake [166].

### 3.1 Présentation de l'installation

Avec le banc catapulte B20, l'ONERA dispose d'un vaste laboratoire de vol libre de maquettes, où peuvent être conduites des recherches sur la modélisation du vol et la mécanique du vol des aéronefs.

Ce laboratoire offre aussi la possibilité de réaliser des démonstrations en vol pour valider un concept et en évaluer les performances. Les expérimentations envisagées concernent l'évaluation de concepts de véhicules, de concepts de gouvernes nouvelles, de lois de commande, mais aussi des méthodes d'identification ou d'exploitation d'essais en vol.

Le B20 est également un lieu privilégié pour le développement de méthodes de mesures en aérodynamique et pour leur application aux problématiques des programmes aéronautiques, notamment les techniques LIDAR et PIV pour la caractérisation de sillages.

#### 3.1.1 Description du montage expérimental et des moyens de mesure

La figure ?? représente le schéma de principe de la catapulte B20, qui est constituée d'une rampe d'accélération (représentée en bleu et illustrée sur la figure 3.5), d'une zone de vol libre et d'un bac de récupération (représenté en gris et illustré sur la figure 3.6).

Pour la caractérisation des tourbillons de sillage, la catapulte B20 est équipée des instruments de mesure suivants :

- PIV
- mini Lidar

---

<sup>1</sup>Advanced WIng with Advanced Technology Operation - <http://www.AWIATOR.net/>



FIG. 3.1 – Catapultage d’une maquette d’avion de transport au banc B20

hauteur	20 m
largeur	20 m
longueur	90 m

hauteur	15 m
largeur	15 m
longueur	60 m

FIG. 3.2 – Dimensions de l’installation au B20

FIG. 3.3 – Dimensions de la zone d’observation au B20

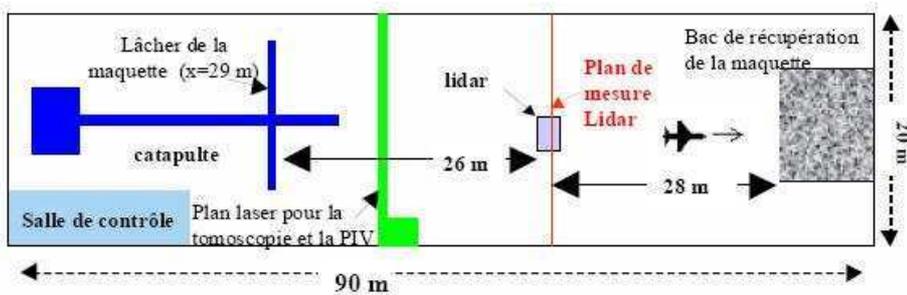


FIG. 3.4 – Principe de la catapulte B20 (configuration L55-R73)



FIG. 3.5 – Maquette d’Airbus A340 disposée sur la rampe de catapultage



FIG. 3.6 – Bac de récupération

- tomoscopie

La PIV est assurée par un dispositif comprenant douze caméras, assemblées sur un support mobile dans la direction verticale. Ce système permet de "suivre" l'un des deux tourbillons principaux dans son mouvement de descente par interaction avec l'autre tourbillon contrarotatif.

Le mini-lidar "SYLVA" [111] est le vélocimètre laser développé par le DOTA (Département d'Optique Théorique et Appliquée) pour les essais au B20 dans le cadre du programme AWIA-TOR. Ce dispositif à base de triangulation angulaire [150] permet de calculer la position des coeurs tourbillonnaires et leurs trajectoires au cours du temps avec une précision de l'ordre d'une dizaine de centimètres.

#### 3.1.2 Etude des sillages tourbillonnaires au B20 et position du problème

Dans le cadre d'un programme pluriannuel de recherches sur les sillages tourbillonnaires défini en 1999 par l'ONERA, plusieurs campagnes d'essais ont été organisées à l'installation B20 de vol libre de l'ONERA de Lille pour la caractérisation des évolutions de tourbillons de sillages derrière différentes configurations de maquettes représentant des avions de transport moderne de type long courrier comme l'Airbus A340 (figure 3.5) ou gros porteur, désigné sous l'acronyme "VLTA" pour "Very Large Transport Aircraft" (il s'agit en fait de la géométrie de la forme générique d'Airbus A380 sur la figure 3.7).



FIG. 3.7 – Maquette VLTA de référence (Airbus A380) utilisée dans le programme AWIATOR

En particulier, deux campagnes d’essais ont été consacrées aux mesures PIV en collaboration avec le DLR, sur une maquette d’Airbus A340 lors du programme européen AWIATOR (figure 3.8). Dans la première campagne [262], les essais ont été menés à bien grâce au système de caméra mobile, mais sans parvenir à des mesures de sillage proche. Une seconde campagne d’essais a été organisée dans le but d’obtenir des données dans le sillage proche.

type de maquette	Airbus A340
échelle	1/27
envergure	$b_0 = 2.148 \text{ m}$
surface alaire	$S_0 = 0.496 \text{ m}^2$
vitesses de catapultage	[23.15 m/s; 23.70 m/s]
coefficient de portance	$C_L = 1.4$

FIG. 3.8 – Caractéristiques techniques de la maquette du programme AWIATOR

Dans les deux campagnes, on a remarqué que le tourbillon de sillage laissé par la maquette de l’A340 ”éclatait” très rapidement d’une distance derrière la maquette de l’ordre d’une vingtaine d’envergures [58]. A ce jour, ce phénomène est encore très mal compris et les ingénieurs ont tendance à l’attribuer à des effets de bord présents dans l’organisation du test.

## 3.2 Dépouillement des données PIV

Les campagnes d'essais réalisées au banc B20 de Lille ont permis d'extraire pour chaque point de mesure, sur le maillage composé par les douze caméras PIV, les vitesses cartésiennes  $V$  et  $W$  adimensionnées par la vitesse de catapultage  $V_0$  de la maquette, situées dans le plan de mesure  $(Y, Z)$ ,  $Y$  et  $Z$  étant adimensionnés par l'envergure  $b$  de la maquette.

Chaque essai est constitué d'une quarantaine de mesures prises à des instants successifs, en rapportant le temps à l'envergure de la maquette. En effet, la grandeur  $X/b$  (la distance axiale parcourue par la maquette normalisée par l'envergure) est une quantité très commode en aérodynamique pour caractériser le régime de vol (sillage proche, étendu ou lointain).

A partir des douze fenêtres initiales de mesure, ces données sont dans un premier temps interpolées sur une fenêtre unique et homogène, à l'aide du logiciel Tecplot. Un lissage de chaque grandeur est ensuite effectué sous Tecplot avec la méthode de la distance inverse (cf. Moens [203]), puis le calcul du module de la vitesse et de la vorticité axiale  $\omega$  est effectué à l'aide des équations suivantes (ici le facteur multiplicatif de  $1/2$  a été conservé afin de rester cohérent avec Coustols & al. [58]) :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{V^2 + W^2} \quad (3.1)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \quad (3.2)$$

Dans ce chapitre, on effectue un post-traitement et une analyse d'une partie des résultats PIV afin de caractériser l'éclatement, en particulier la structure de la perturbation à laquelle a été soumis le tourbillon de sillage, pour tenter de mieux comprendre l'origine du phénomène.

Nous détaillons ici les résultats obtenus après avoir analysé spécifiquement deux configurations tests :

- l'essai n 78 extrait de la campagne de la phase III
- l'essai n 16 extrait de la campagne de la phase IV

Ces deux essais correspondent à la configuration de base du programme AWIATOR (figure 3.8), c'est-à-dire la maquette d'A340 avec le braquage de volets 26-26 (en abrégé DFS, pour Differential Flap Setting).

Dans tout ce chapitre, la direction  $X$  désigne l'axe du vol, l'envergure  $b$  de la maquette et la vitesse de catapultage  $V_0$  sont prises respectivement comme longueur et vitesse de référence. Pour plus de simplicité, on se réfère à chaque variable sous son nom réel, bien qu'on ait fait un adimensionnement systématique de toutes les grandeurs en utilisant les deux quantités mentionnées ci-dessus (i.e.  $X$  pour  $X/b$ ,  $V$  pour  $V/V_0$ , et ainsi de suite).

Pour chaque phase et à chaque point de mesure, le même processus d'interpolation distance inverse est réalisé comme par Coustols & al. [58]. On utilise les tailles de maillage suivantes :

- Phase III :  $\Delta Y = 0.6$ ,  $\Delta Z = 0.4$ , grille 200x200. Taille de cellule correspondante :  $dY \approx 0.003$ ,  $dZ \approx 0.002$
- Phase IV :  $\Delta Y = 0.6$ ,  $\Delta Z = 0.4$ , grille 200x200. Taille de cellule correspondante :  $dY \approx 0.002$ ,  $dZ \approx 0.002$

Contrairement à Coustols & al. [58], nous n'avons pas lissé systématiquement les données interpolées avant exploitation ultérieure. Afin d'obtenir une visualisation commode des champs de vorticité (en particulier, dans les représentations des figures 3.15 à 3.40 traçant la vorticité), nous avons procédé à un filtrage gaussien. Un tel filtre est utilisé de façon classique en PIV (voir par exemple Agrawal et Prasad [3]) et, considérant une quantité  $u$ , est mis en oeuvre sous la forme

$$u(m, n) = \frac{\sum_{j=-k}^k \sum_{i=-k}^k g(i, j) u(m - i, n - j)}{\sum_{j=-k}^k \sum_{i=-k}^k g(i, j)}$$

(3.3)

où

$$g(i, j) = \exp \left[ -\frac{(i \, dY)^2 + (j \, dZ)^2}{2 \, \sigma^2} \right]$$

Ici,  $(i, j)$  et  $(m, n)$  spécifient la localisation d'un point sur le maillage. Tout au long de ce chapitre, le filtre gaussien est réglé avec une largeur  $2k + 1 = 5$  cellules de maillage et un paramètre  $\sigma = 3$  cellules de maillage. Cependant, nous précisons qu'il n'a été utilisé que pour tracer le champ de vorticité. D'autres quantités telles que le critère  $\Gamma_2$  ou les coefficients Fourier azimutaux de la vorticité (présentées dans ce qui suit) ont été calculées directement à partir des données interpolées, sans aucun lissage ni filtrage.

En illustration de l'effet de ce filtre, la figure 3.9 présente l'amplitude du vecteur de vitesse pour la phase IV,  $X = 17.5$ . Elle compare les données " brutes " (i.e. les données obtenues directement à partir de l'interpolation), les mêmes données après lissage par le logiciel Tecplot, et les mêmes données traitées par filtre gaussien décrit ci-dessus. Dans le même esprit, les figures 3.10, 3.11 et 3.12 montrent respectivement des tracés semblables de la vorticité, d'un gros plan de la vorticité dans le voisinage du tourbillon et du critère  $Q$  (voir le paragraphe 3.2.1.1 ci-dessous). Alors qu'on constate que le lissage n'affecte que légèrement les quantités tracées, le filtrage gaussien mène à des champs bien plus réguliers, bien que les maxima correspondants apparaissent logiquement plus larges et avec une valeur plus basse.

## 3.2.1 Outils de diagnostic

### 3.2.1.1 critères locaux

Comme on le verra, "l'éclatement tourbillonnaire" apparaît comme l'élargissement soudain et la destruction subséquente du tourbillon marginal. Afin d'avoir un meilleur aperçu de la nature de la perturbation impliquée, un critère de déduction robuste s'avère nécessaire. Une rapide revue de la littérature montre l'existence de divers critères, qui diff rent principalement par leur nature locale ou globale.

Les critères locaux incluent le calcul de la vorticité  $\omega$  :

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \tag{3.4}$$

où les composants du vecteur de vitesse dans le plan de mesure PIV sont dénotées  $(V, W)$ , ou du critère  $Q$  (Hunt & al. [139]) :

$$Q = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial Z} \right)^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Z} \right] \tag{3.5}$$

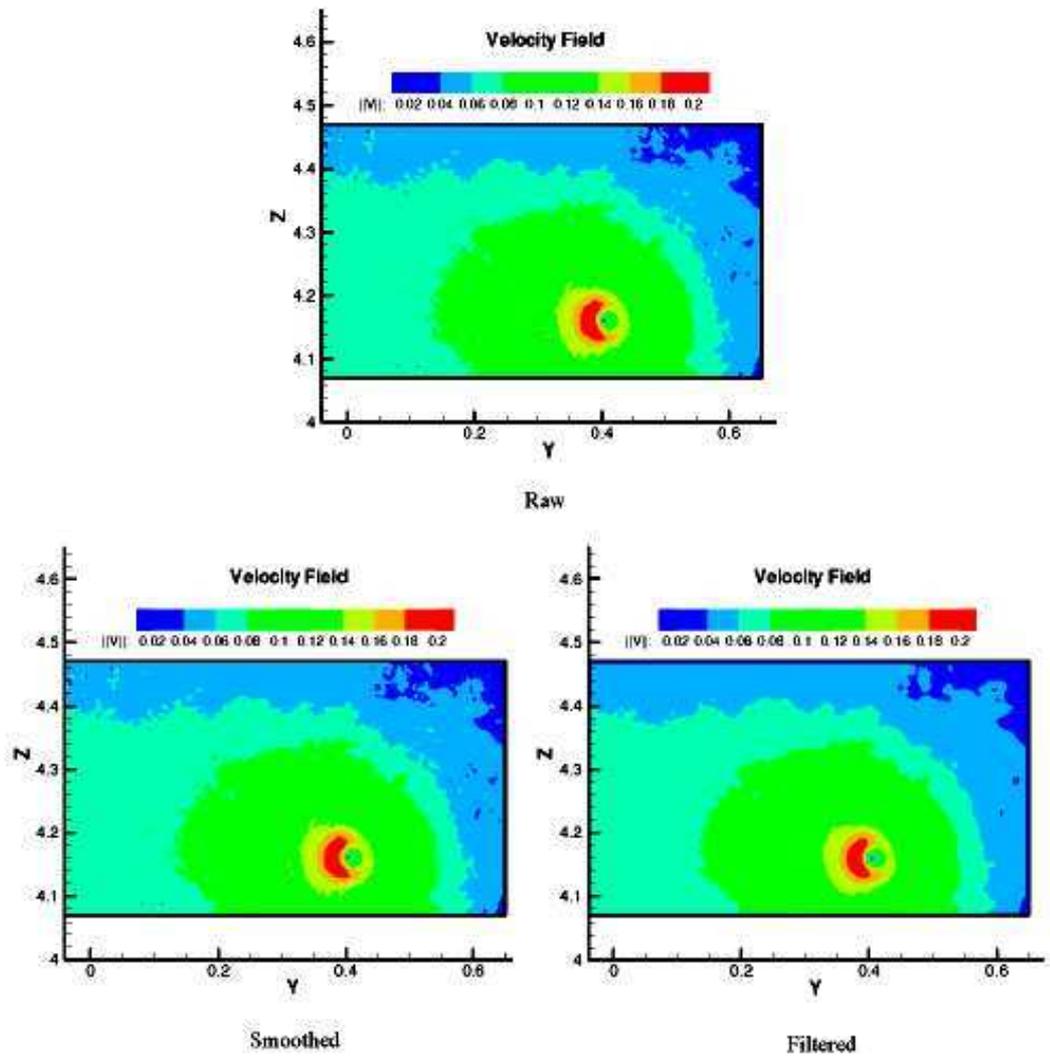


FIG. 3.9 – Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage,  $\sigma = 3$  noeuds de maillage). Champ de vitesse, Phase IV,  $X=17.5$ .

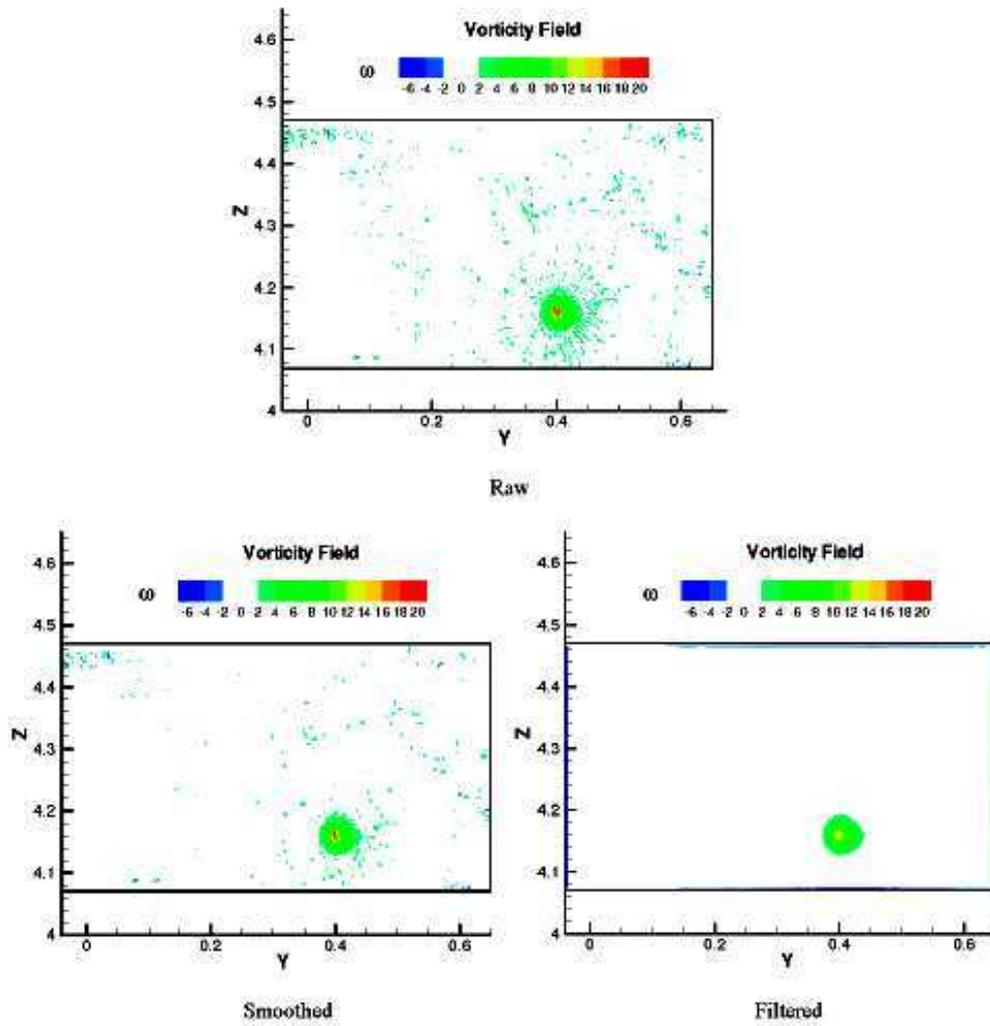


FIG. 3.10 – Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage,  $\sigma = 3$  noeuds de maillage). Champ de vorticité, Phase IV,  $X=17.5$ .

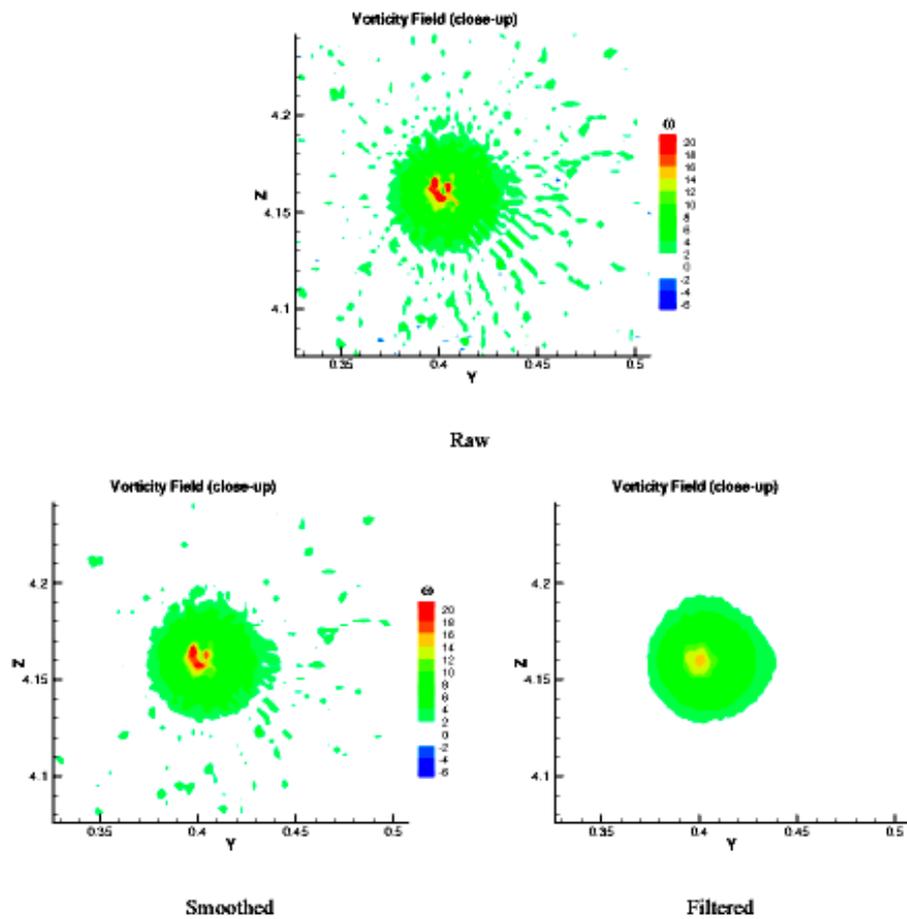


FIG. 3.11 – Comparaison en gros plan entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage,  $\sigma = 3$  noeuds de maillage). Champ de vorticité, Phase IV,  $X=17.5$ .

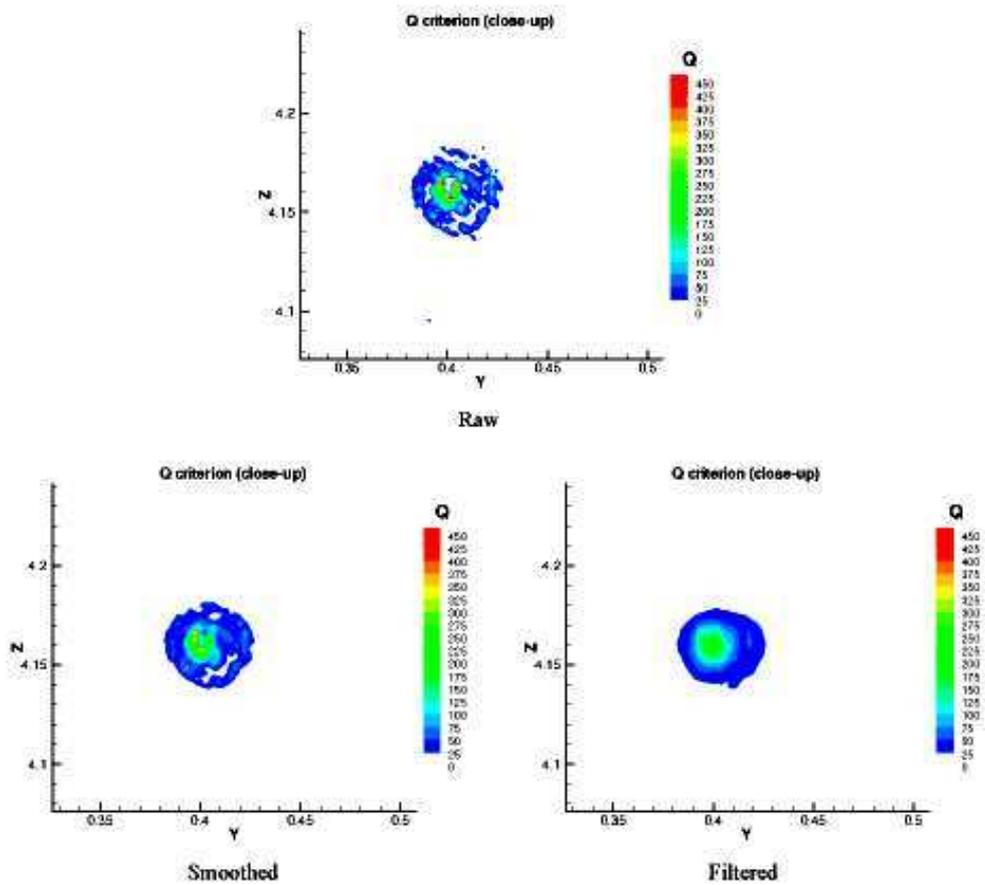


FIG. 3.12 – Comparaison entre les données brutes, lissées et filtrées (filtre gaussien, largeur de cinq noeuds de maillage,  $\sigma = 3$  noeuds de maillage). Critère Q (gros plan sur le tourbillon), Phase IV, X=17.5.

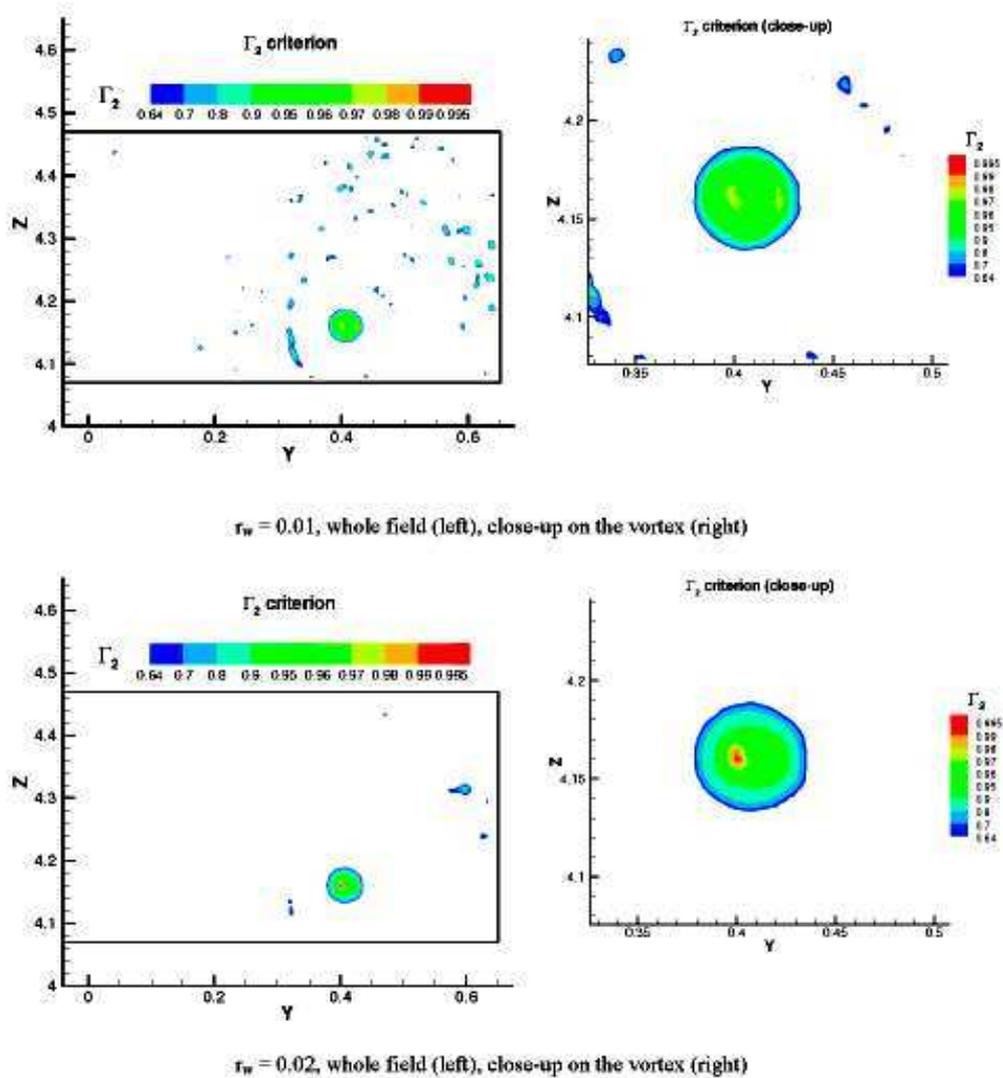


FIG. 3.13 – Valeurs de  $\Gamma_2$ , Phase IV,  $X=17.5$ . Tailles des fenêtres d'interrogation  $r_w = 0.01$  et  $r_w = 0.02$ .

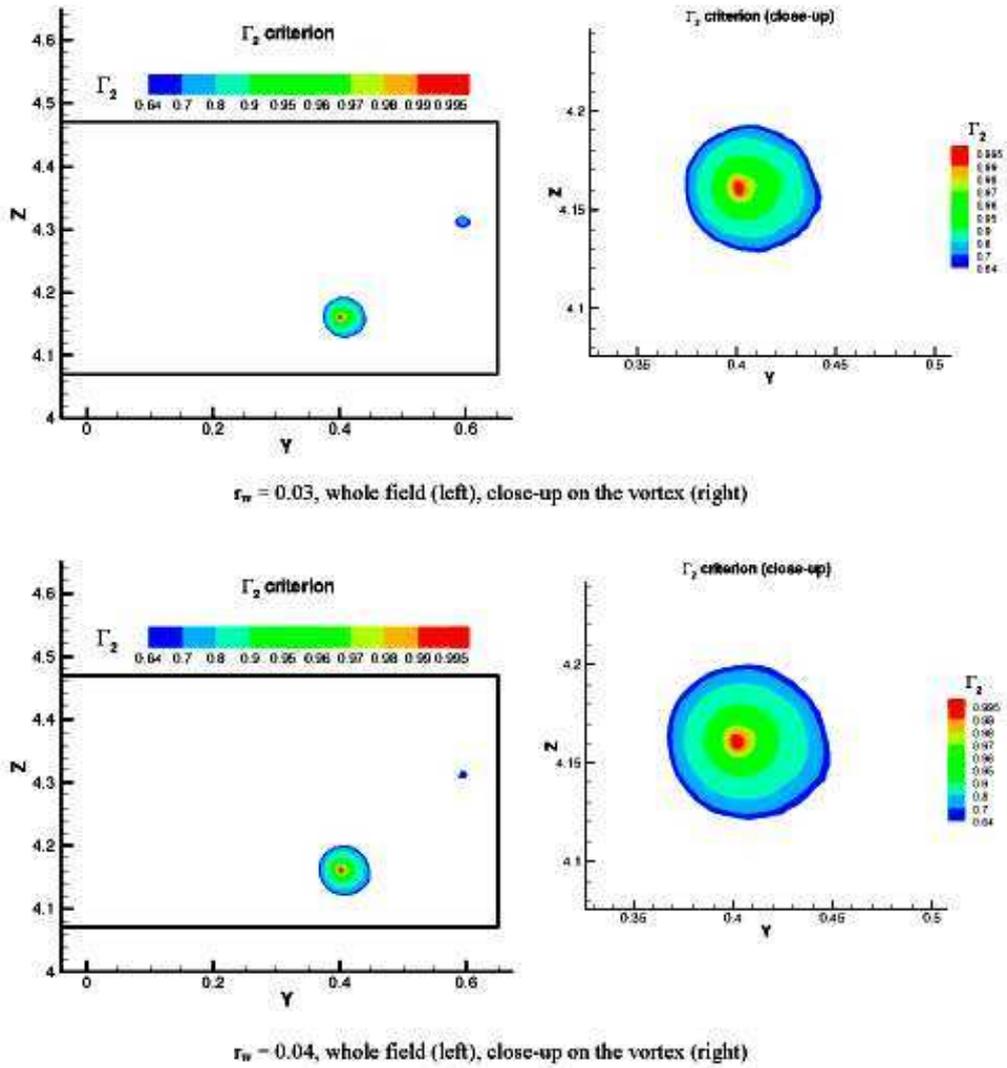


FIG. 3.14 – Valeurs de  $\Gamma_2$ , Phase IV,  $X=17.5$ . Tailles des fenêtres d'interrogation  $r_w = 0.03$  et  $r_w = 0.04$ .

En utilisant de telles quantités, un tourbillon correspond alors à une zone de vorticité  $\omega$  non nulle ou à une zone pour laquelle  $Q > 0$ . Les figures 3.11 et 3.12 présentent des exemples d'extraction du tourbillon en calculant la vorticité  $\omega$  ou le critère  $Q$ . Il existe des améliorations à ces critères qui sont aussi largement utilisées dans la littérature, par exemple le critère  $\lambda_2$  de Jeong et Hussain [147]. Dans le cadre présent d'un écoulement plan incompressible, c'est l'équivalent du critère  $Q$ .

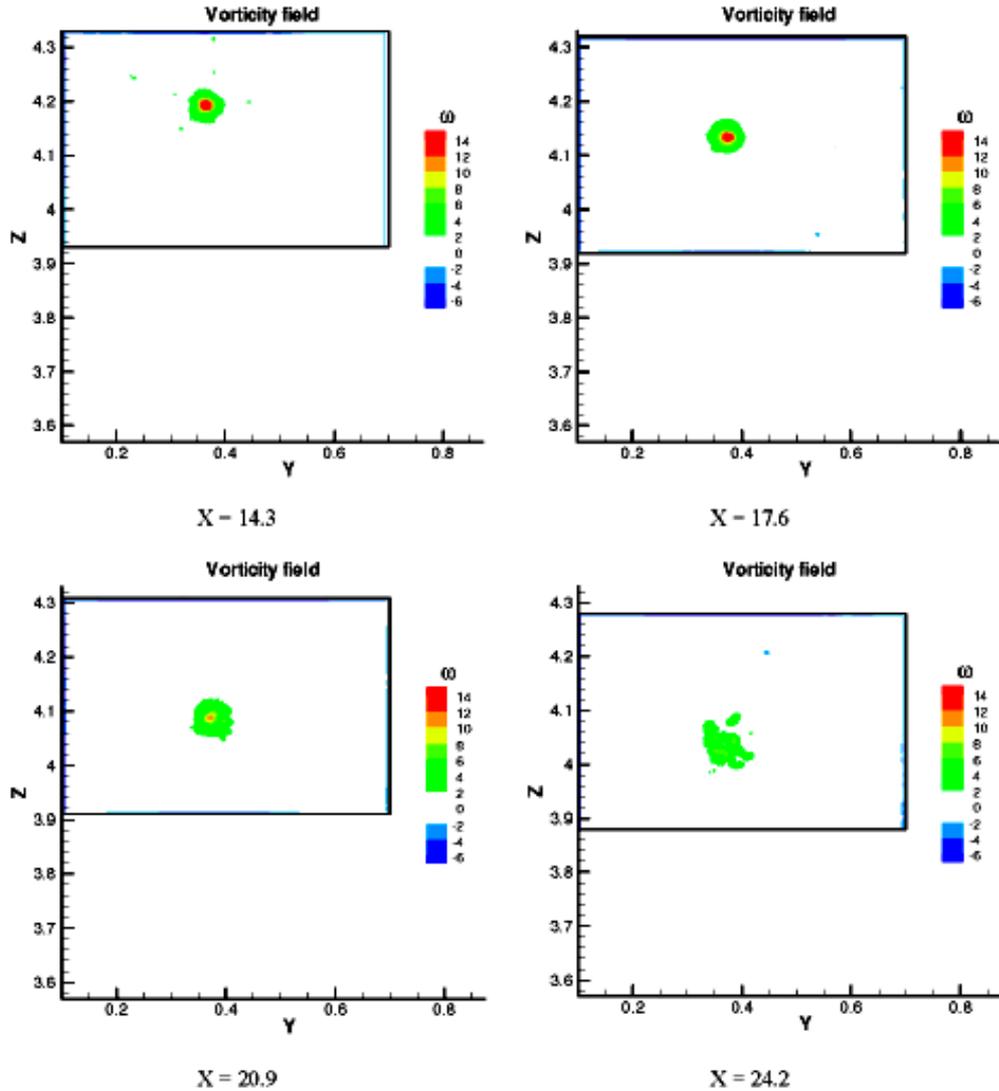


FIG. 3.15 – Phase III. Champs de vorticité (données filtrées) X=14.3 à X=24.2.

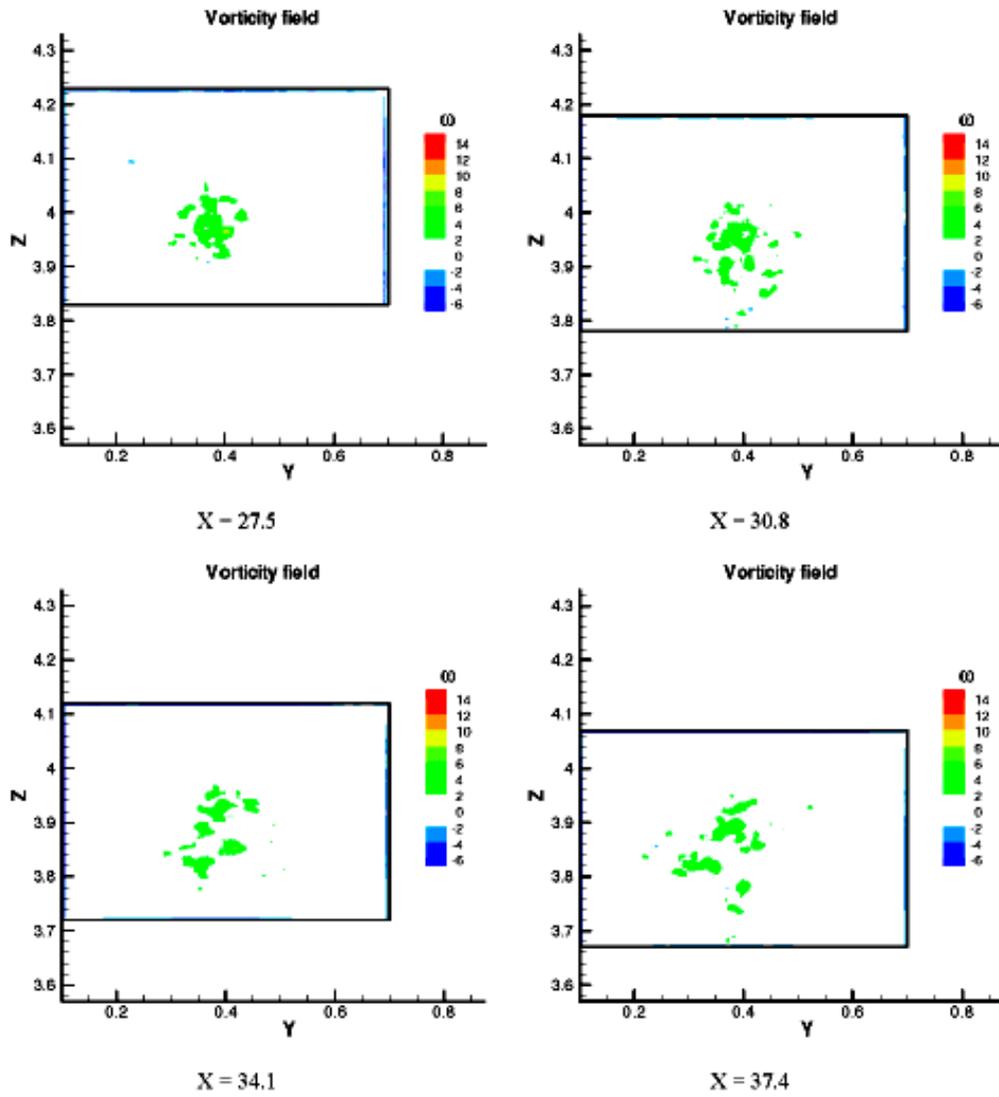


FIG. 3.16 – Phase III. Champs de vorticité (données filtrées) X=27.5 à X=37.4.

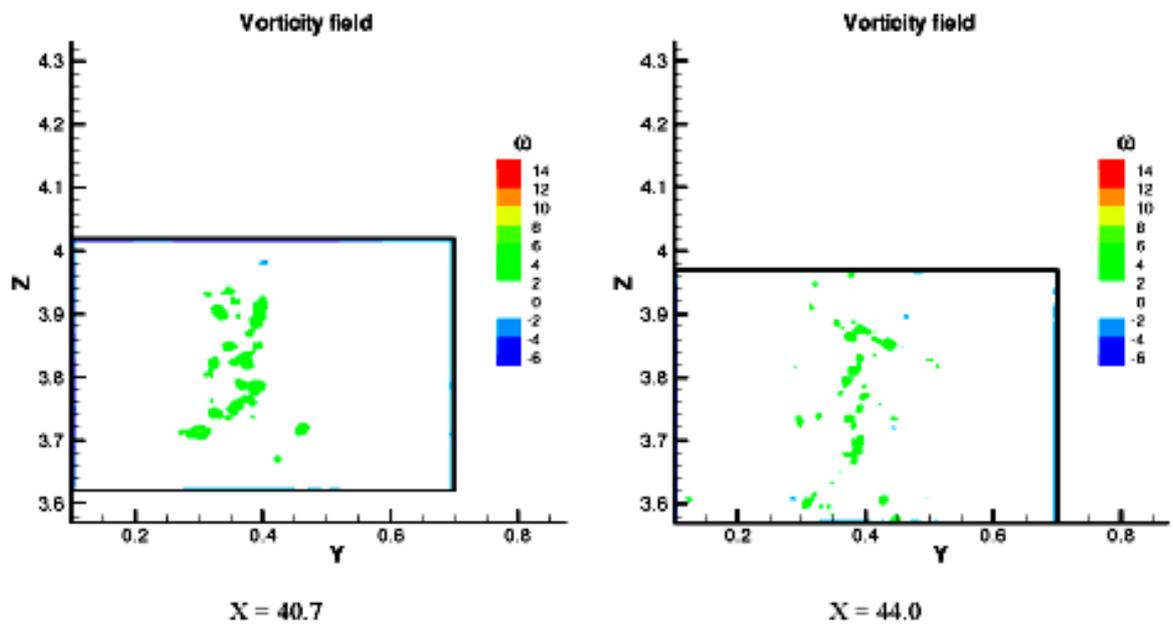


FIG. 3.17 – Champs de vorticité (données filtrées) X=40.7 à X=44.

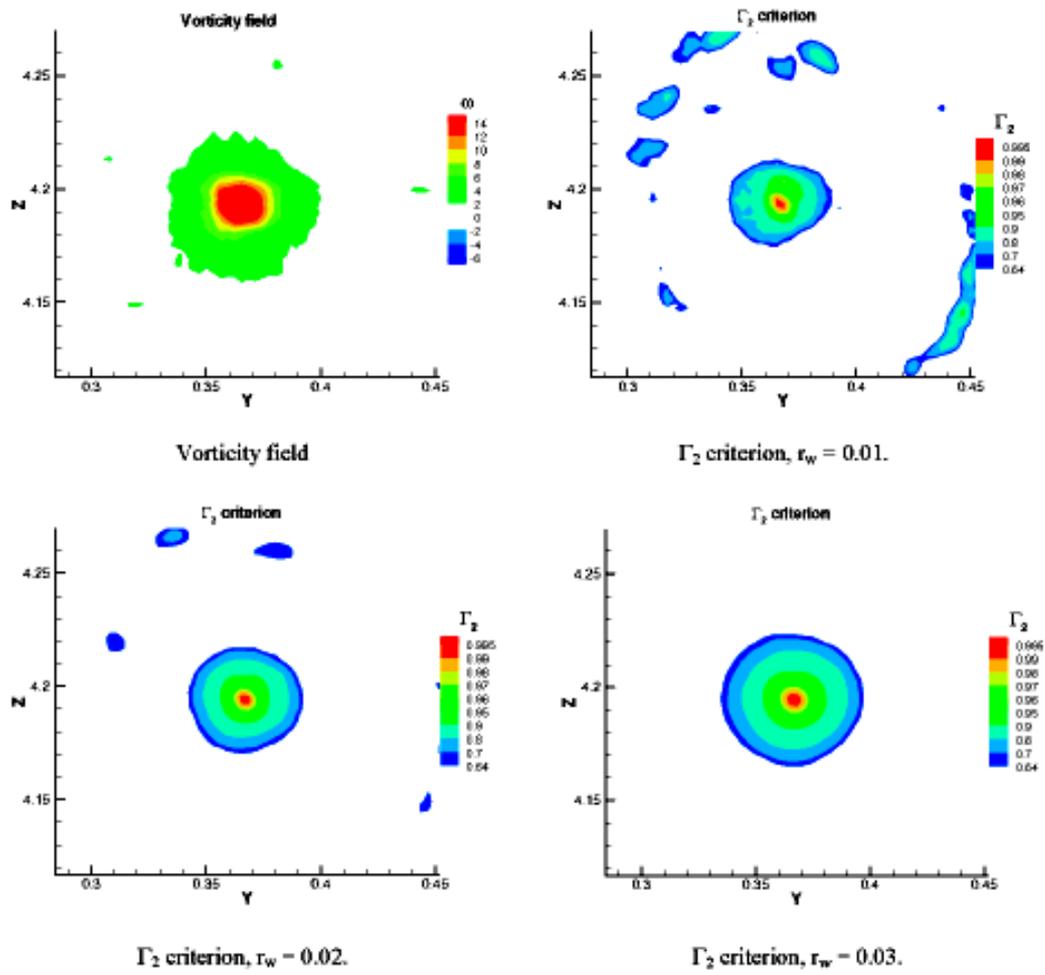


FIG. 3.18 – Phase III.  $X=14.3$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

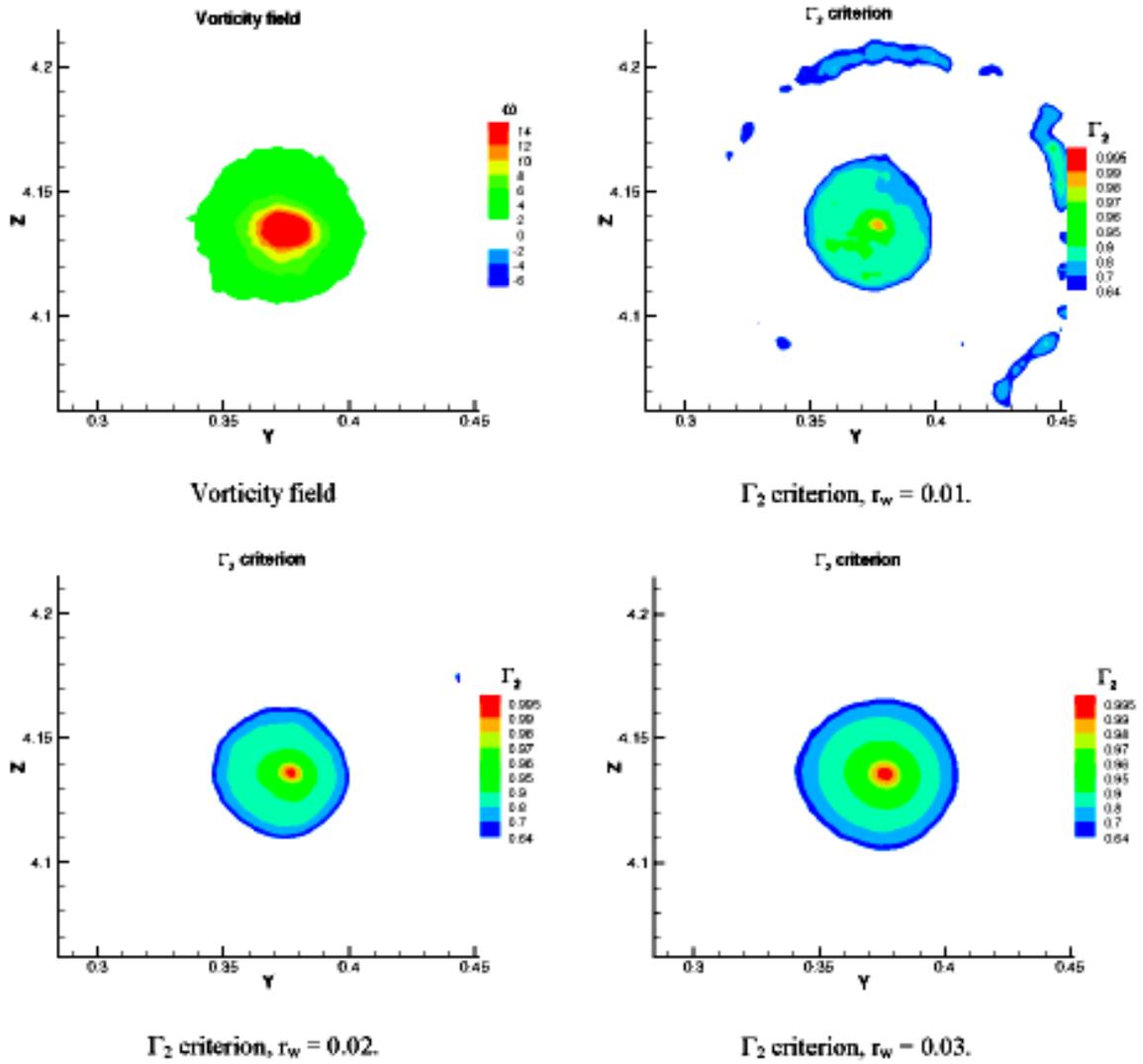


FIG. 3.19 – Phase III.  $X=17.6$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

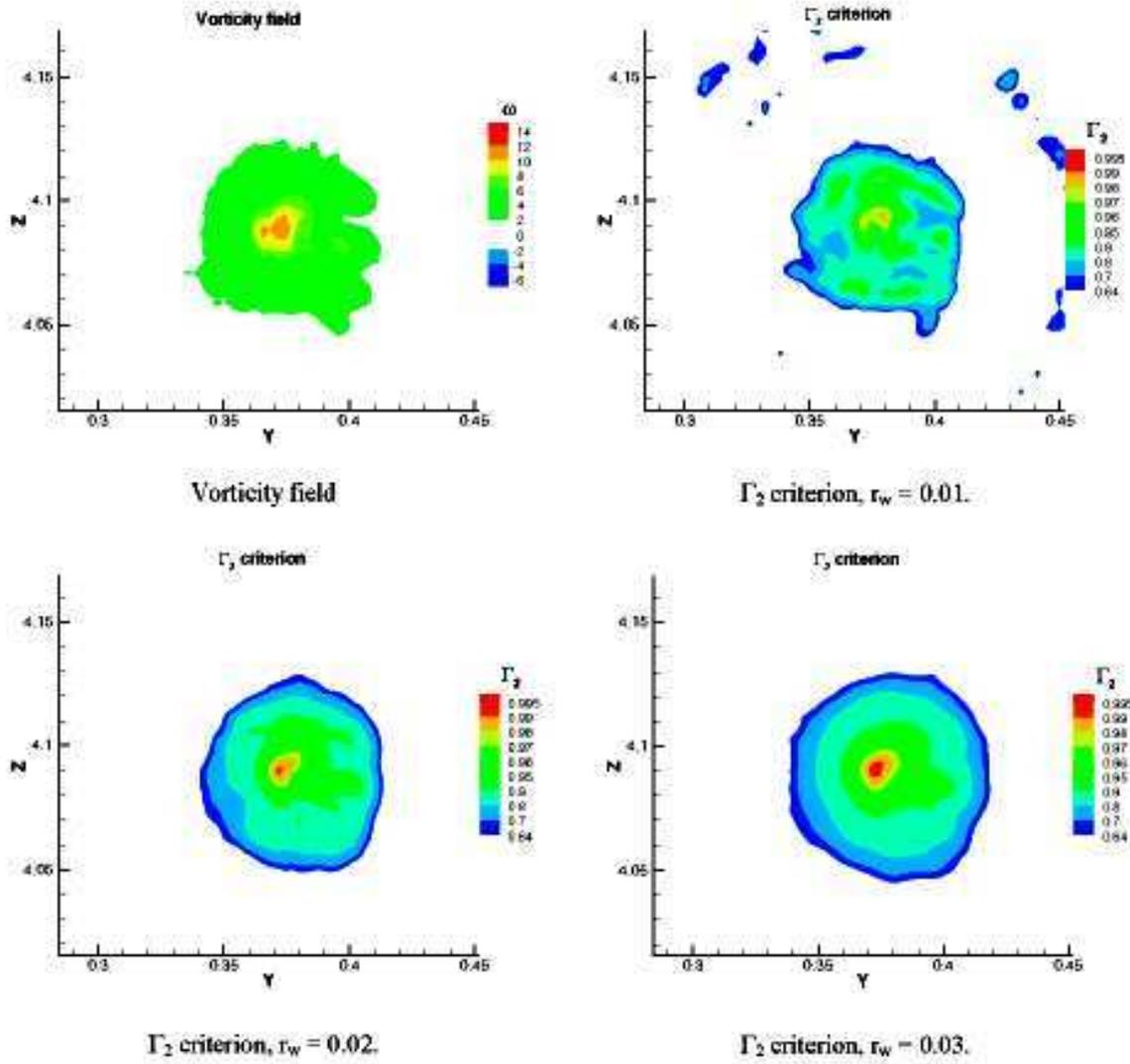
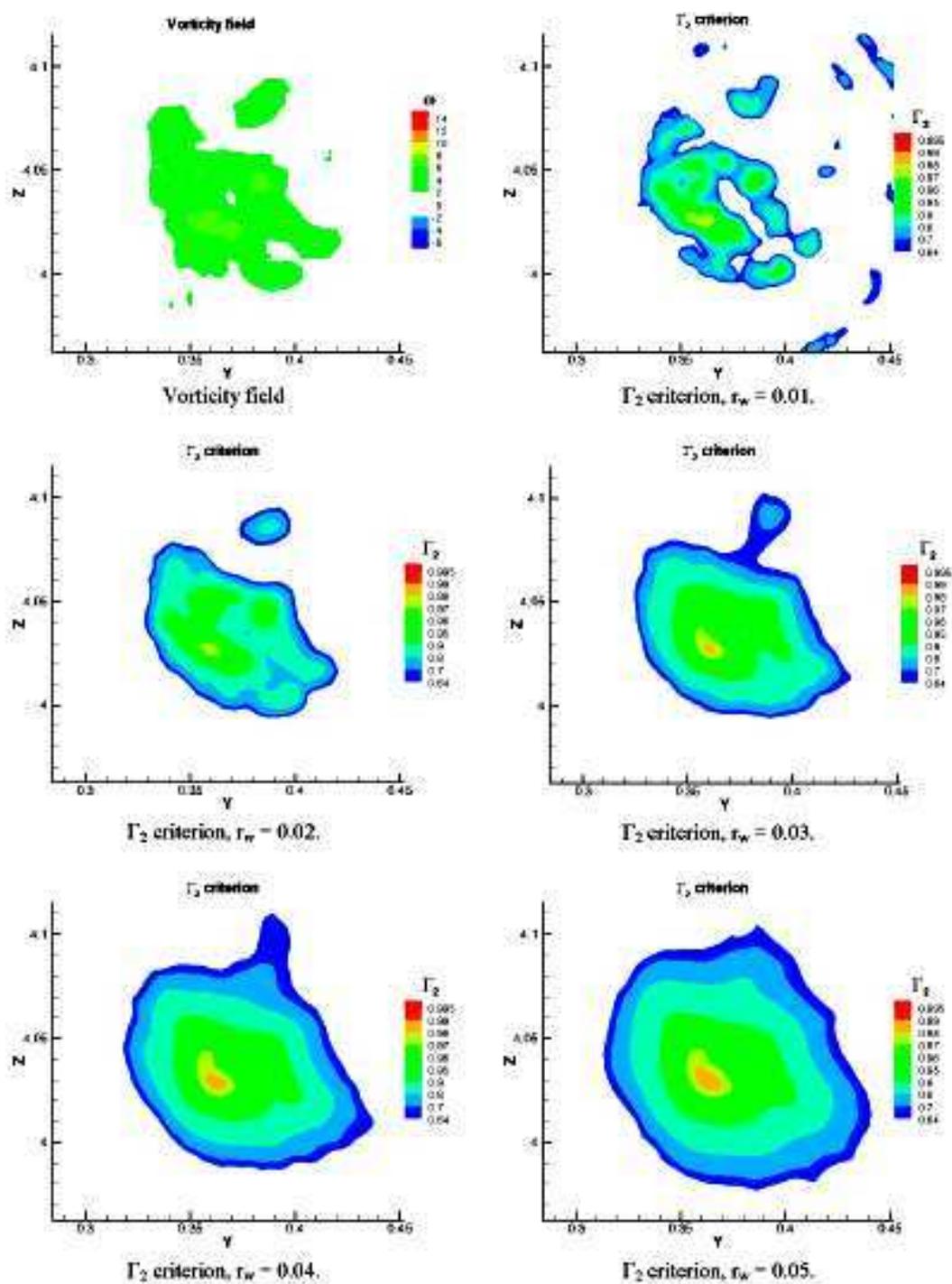


FIG. 3.20 – Phase III. X=20.9 Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.21 – Phase III.  $X=24.2$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

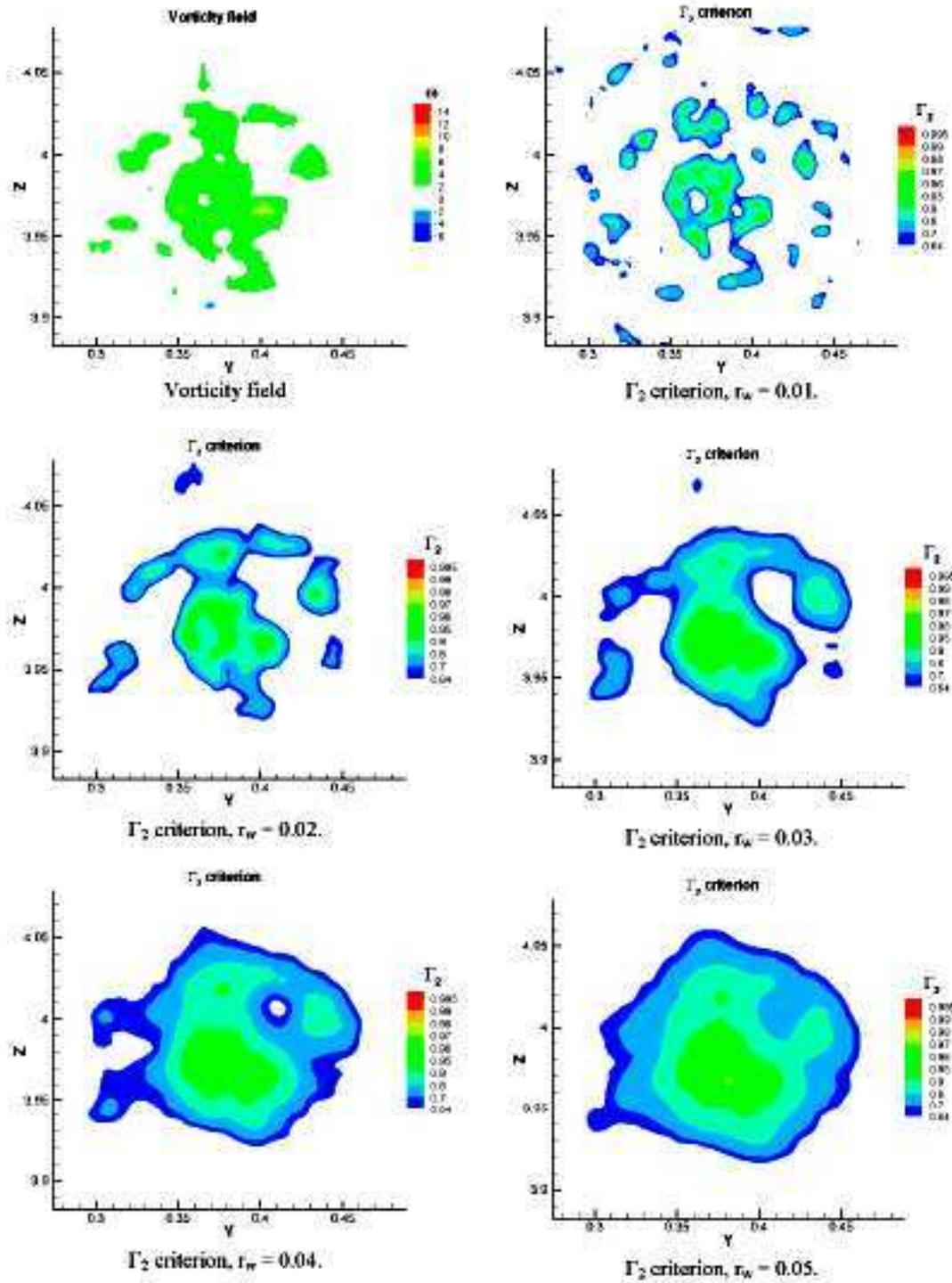
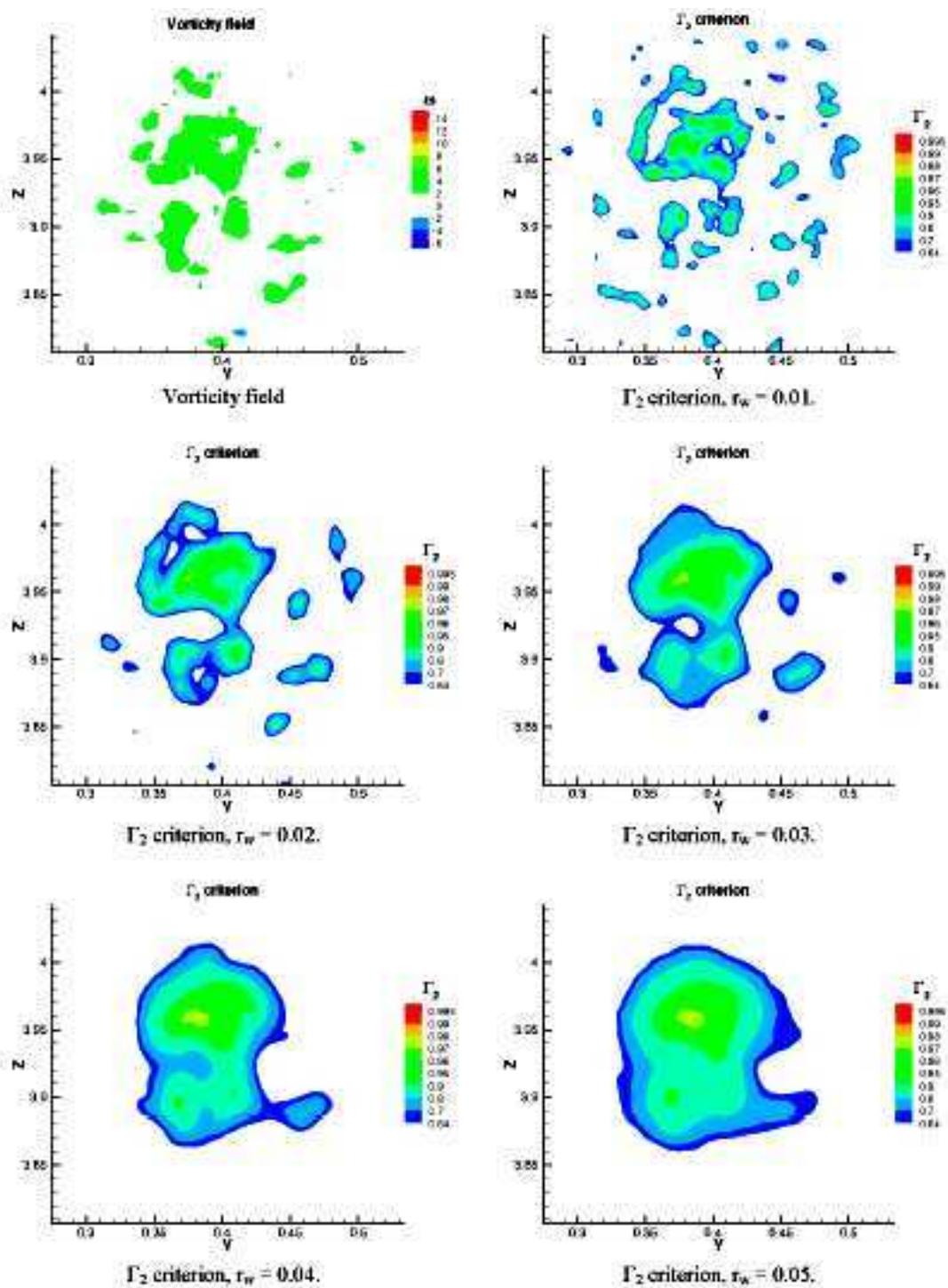


FIG. 3.22 – Phase III.  $X=27.5$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.23 – Phase III.  $X=30.8$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

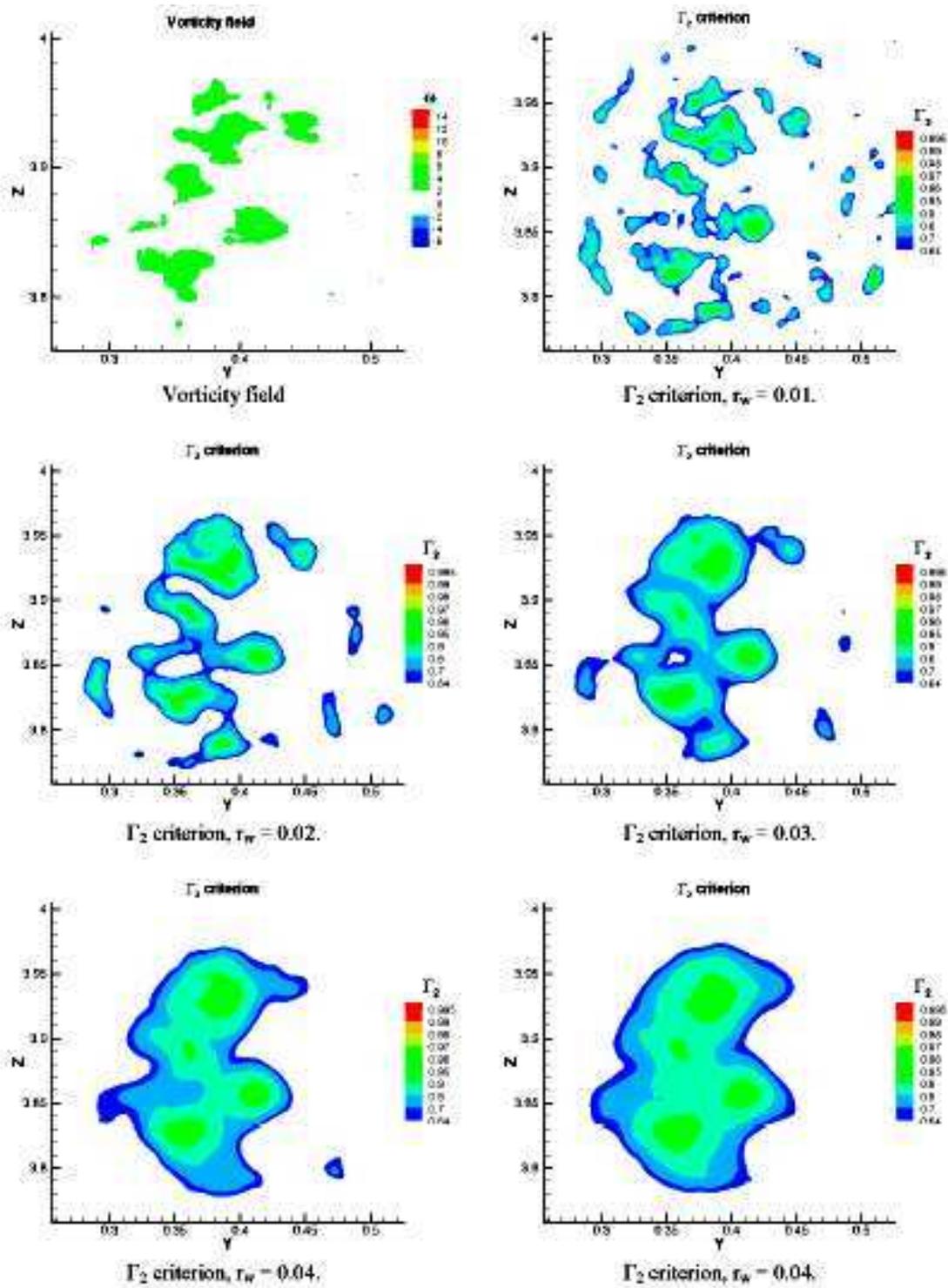
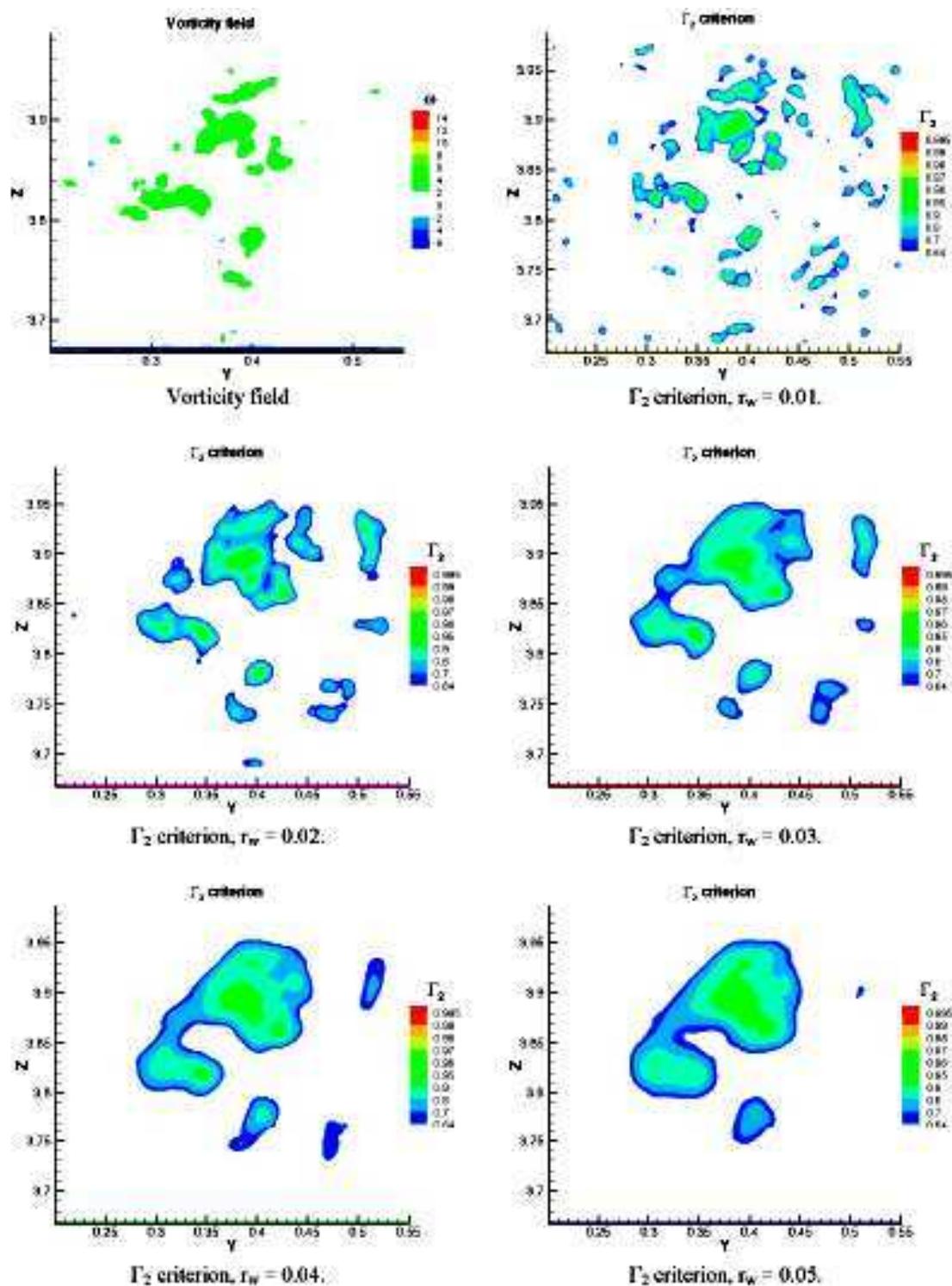


FIG. 3.24 – Phase III. X=34.1 Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.25 – Phase III. X=37.4 Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

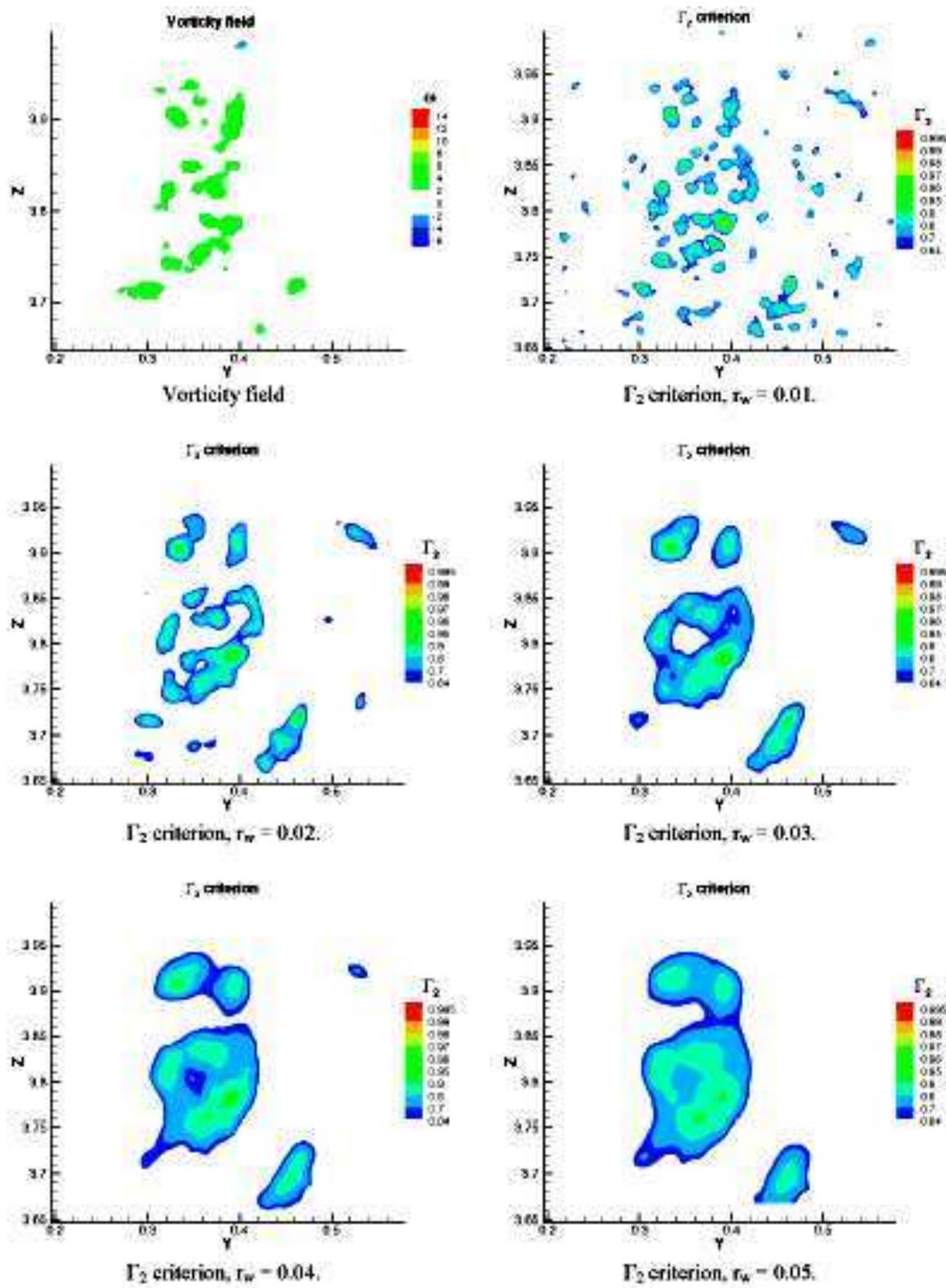
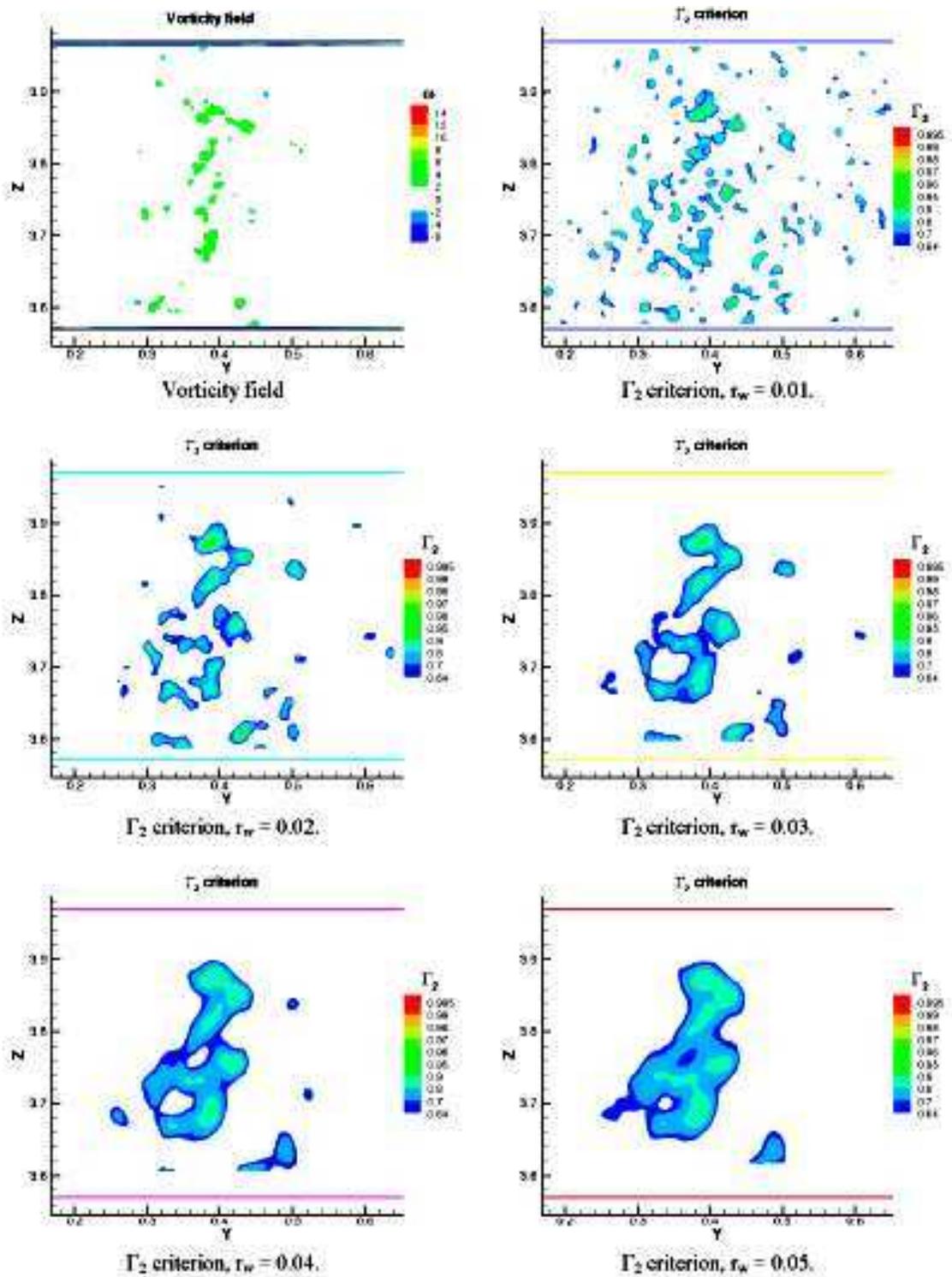


FIG. 3.26 – Phase III.  $X=40.7$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.27 – Phase III.  $X=44.0$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

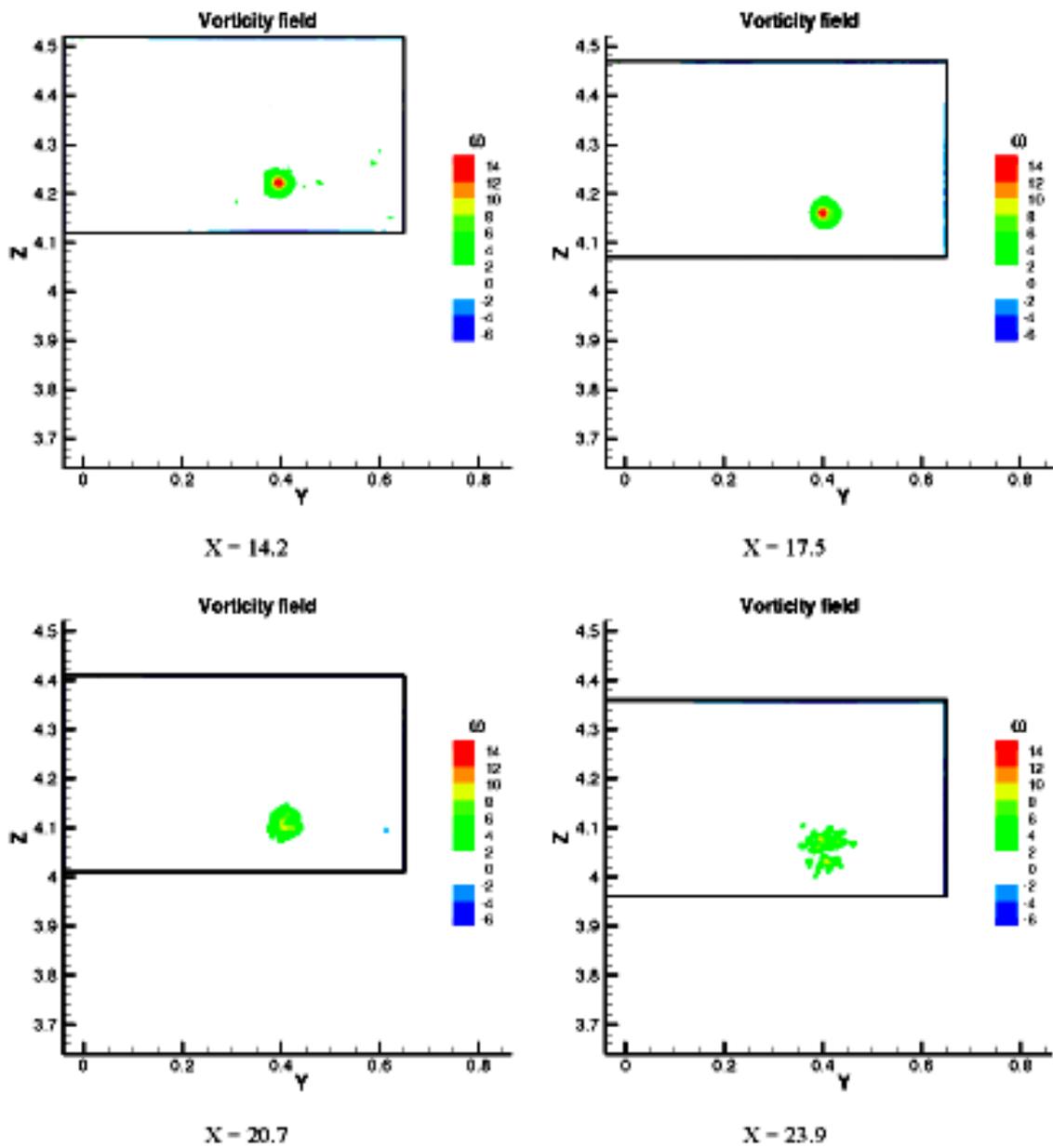
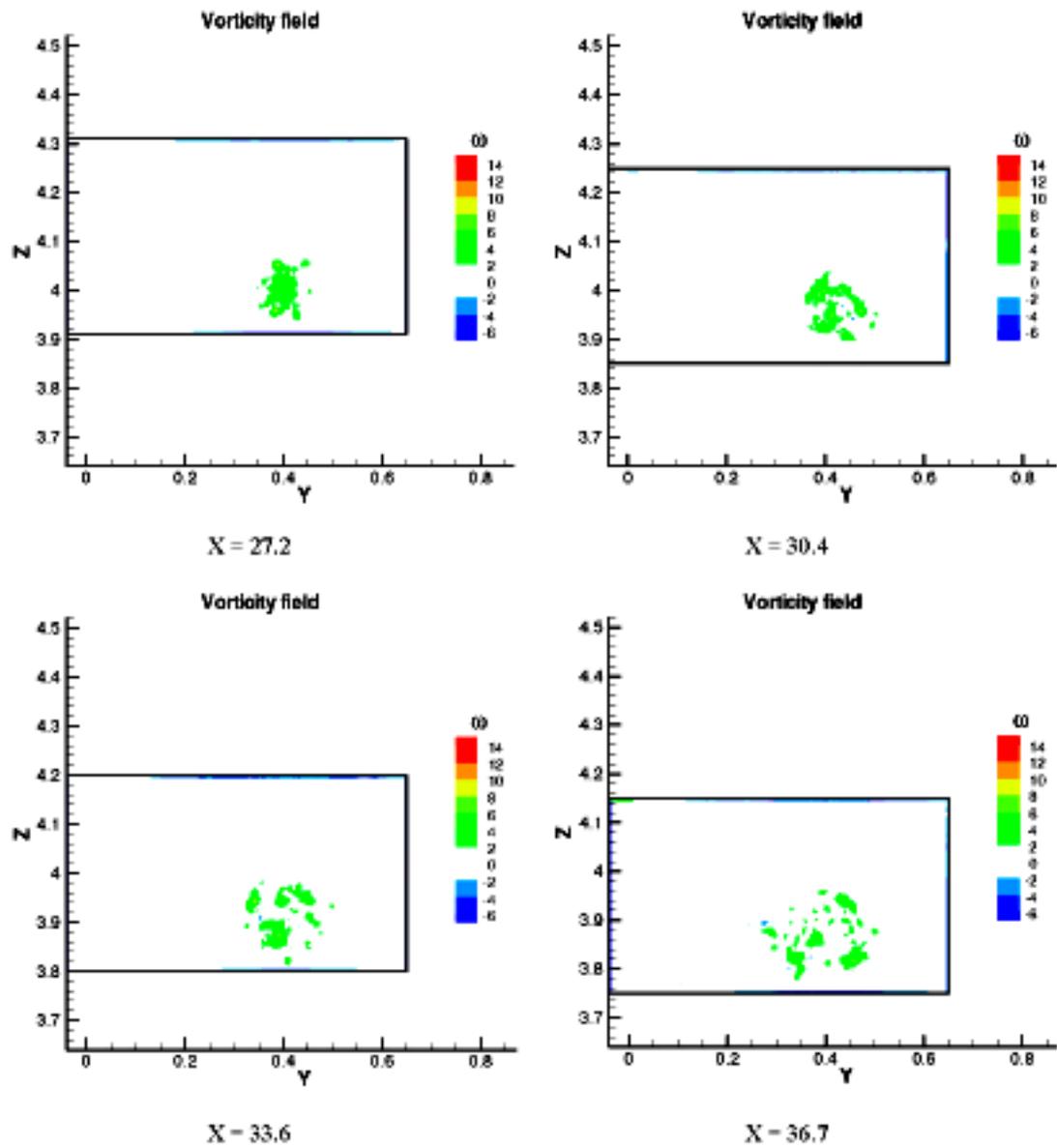


FIG. 3.28 – Phase IV. Champs de vorticité (données filtrées)  $X=14.2$  à  $X=23.9$ .

FIG. 3.29 – Phase IV. Champs de vorticité (données filtrées)  $X=27.2$  à  $X=36.7$ .

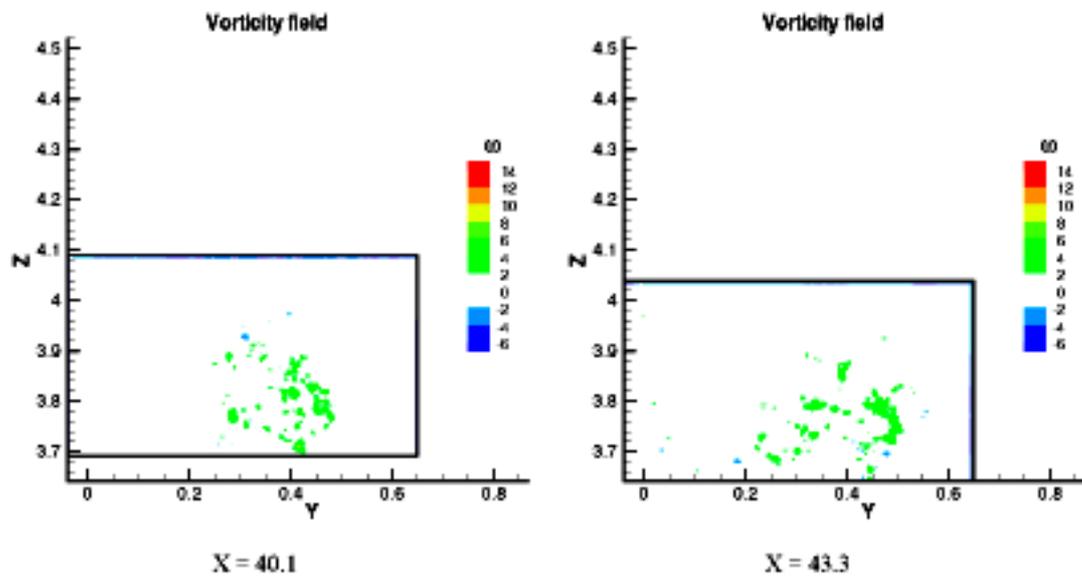
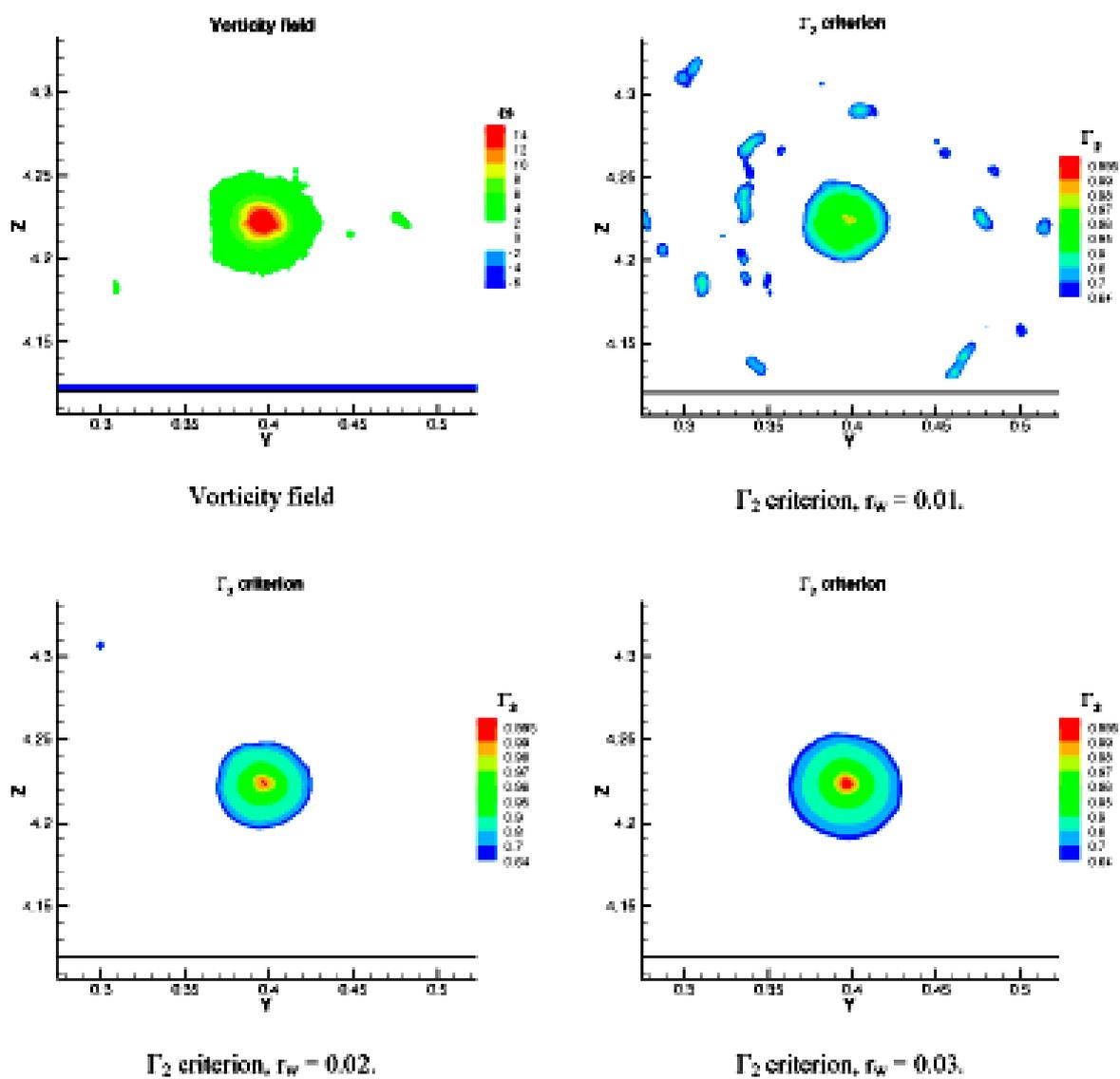


FIG. 3.30 – Phase IV. Champs de vorticité (données filtrées)  $X=40.1$  à  $X=43.3$ .

FIG. 3.31 – Phase IV. X=14.2 Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

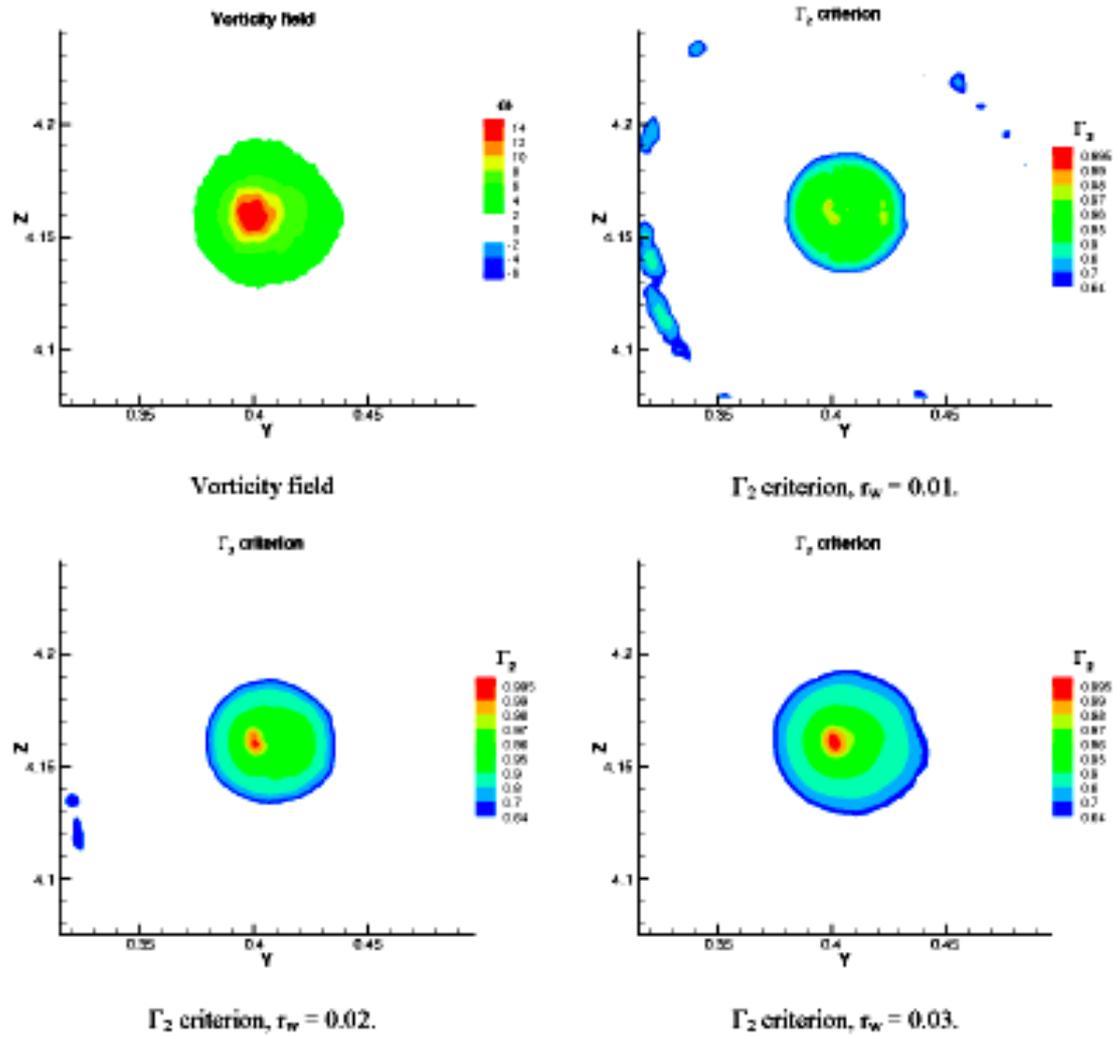
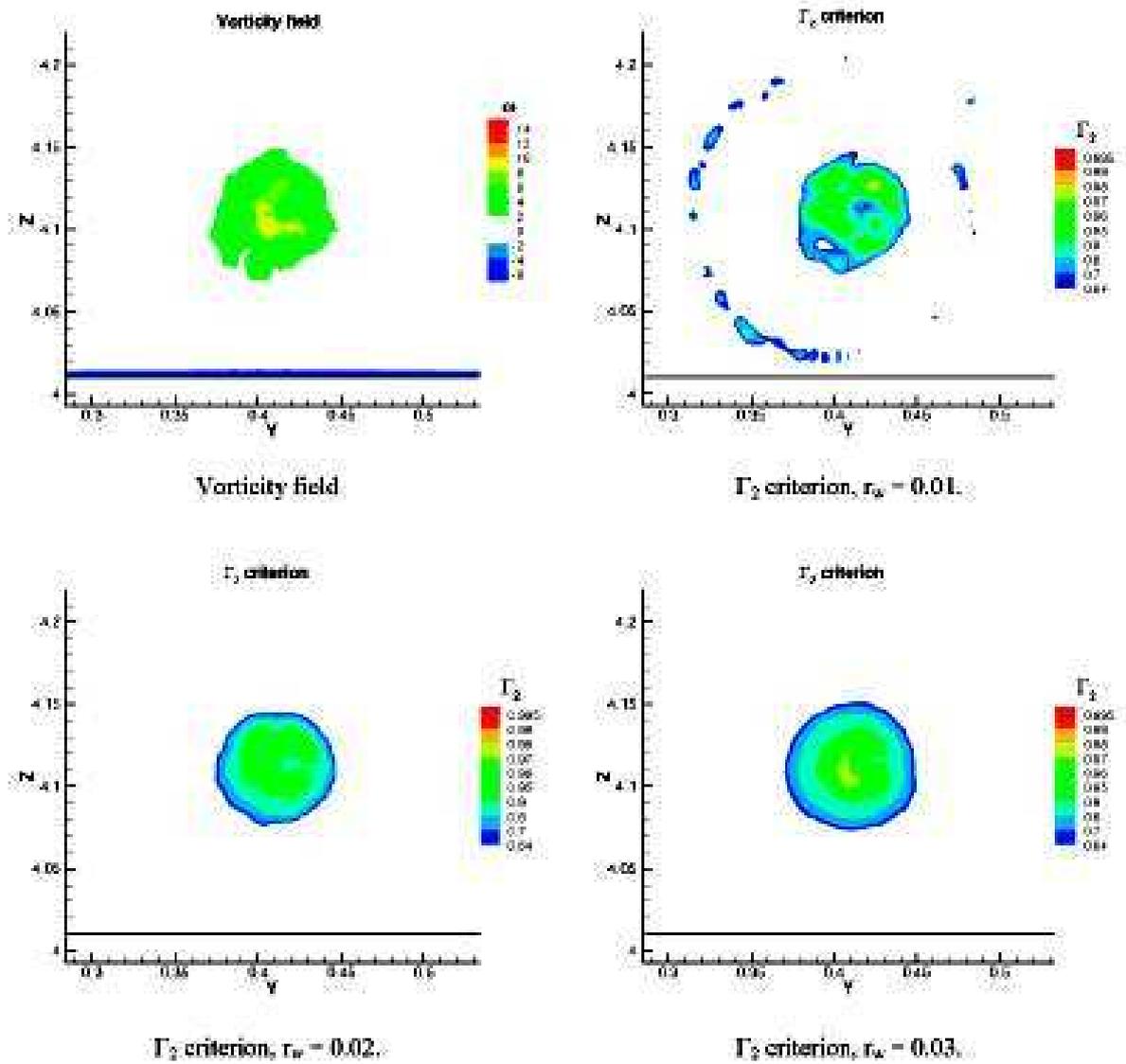


FIG. 3.32 – Phase IV.  $X=17.5$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.33 – Phase IV.  $X=20.7$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

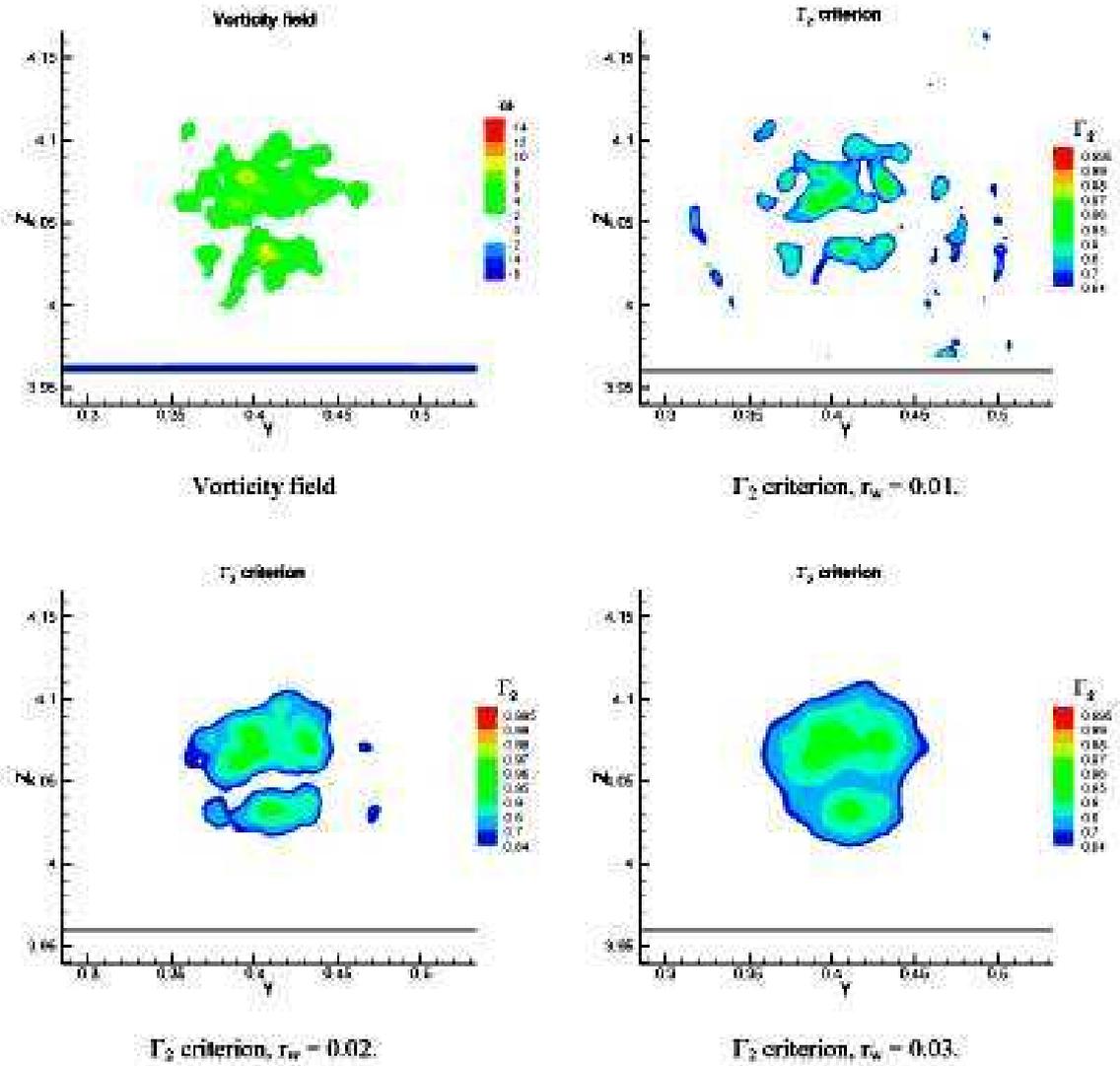
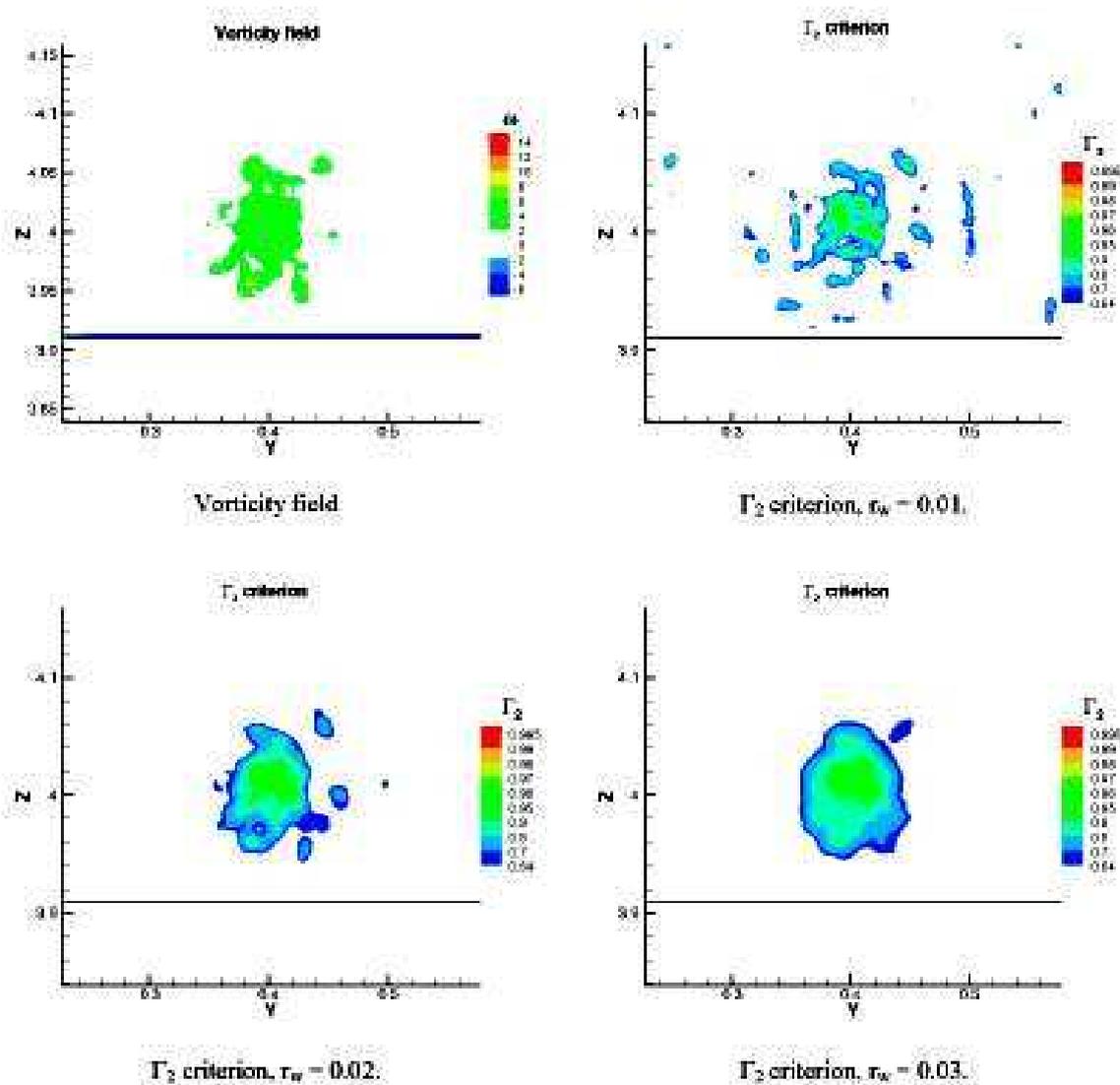


FIG. 3.34 – Phase IV.  $X=23.9$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.35 – Phase IV.  $X=27.2$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

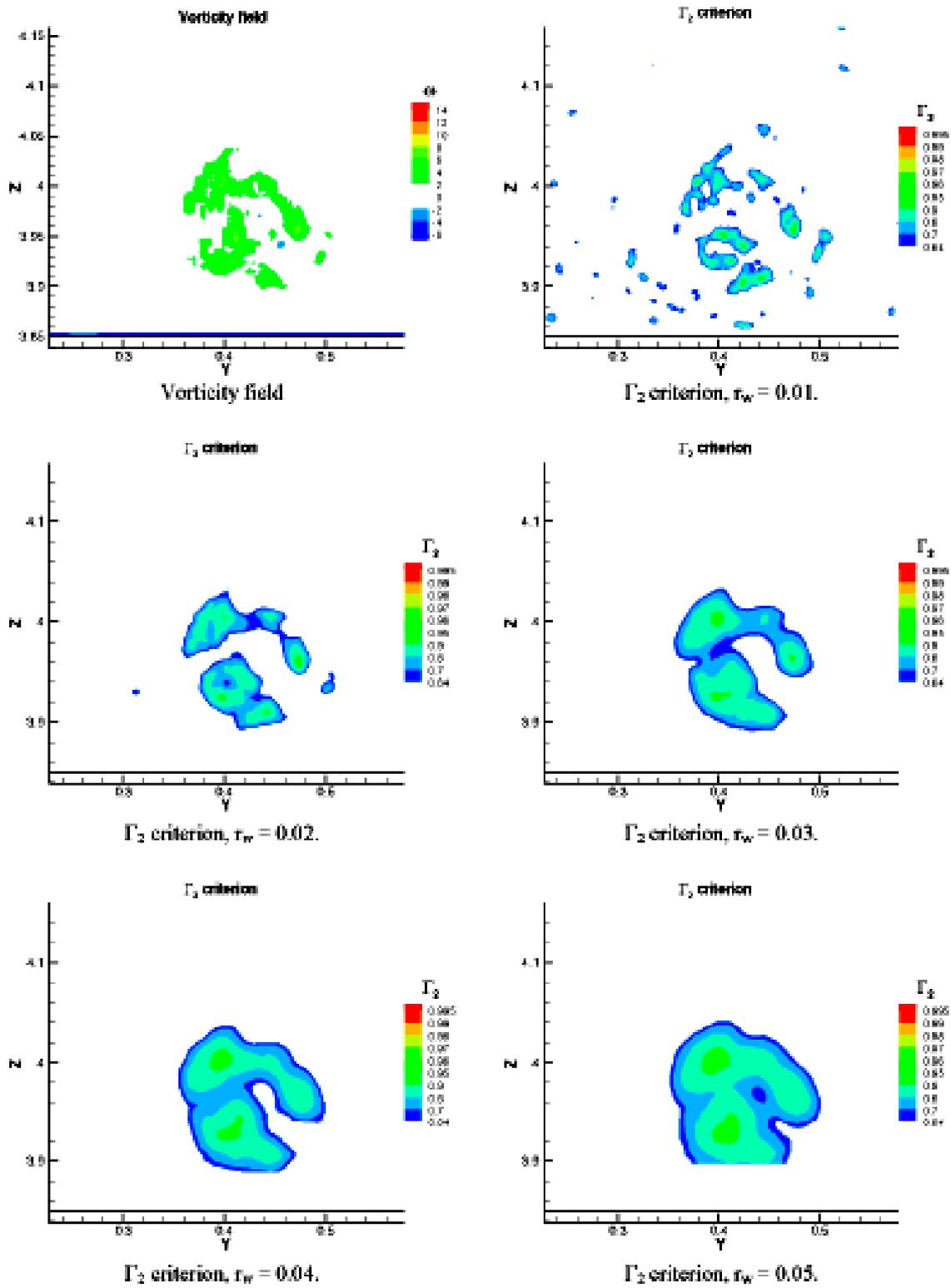
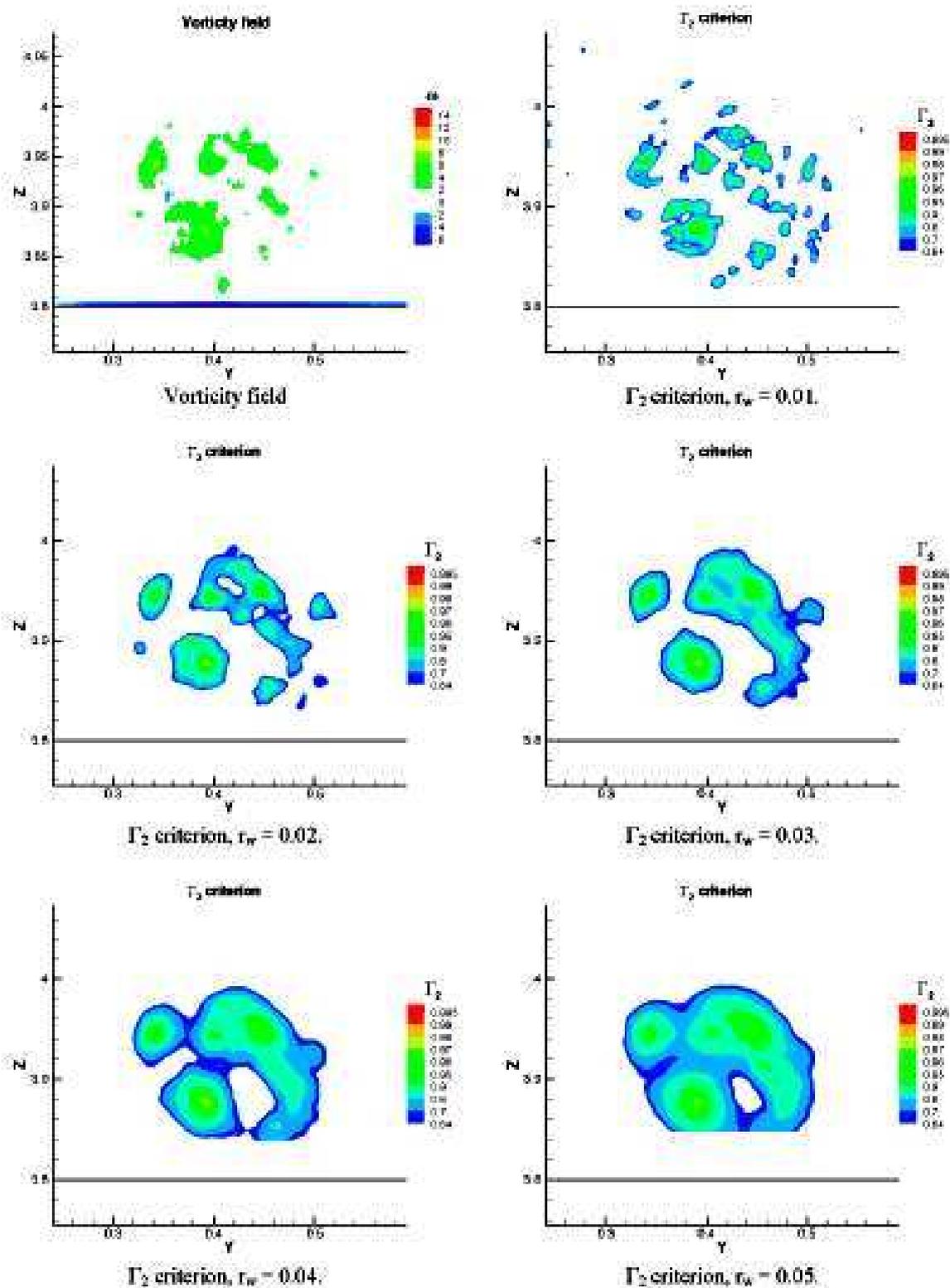


FIG. 3.36 – Phase IV. X=30.4 Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.37 – Phase IV.  $X=33.6$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

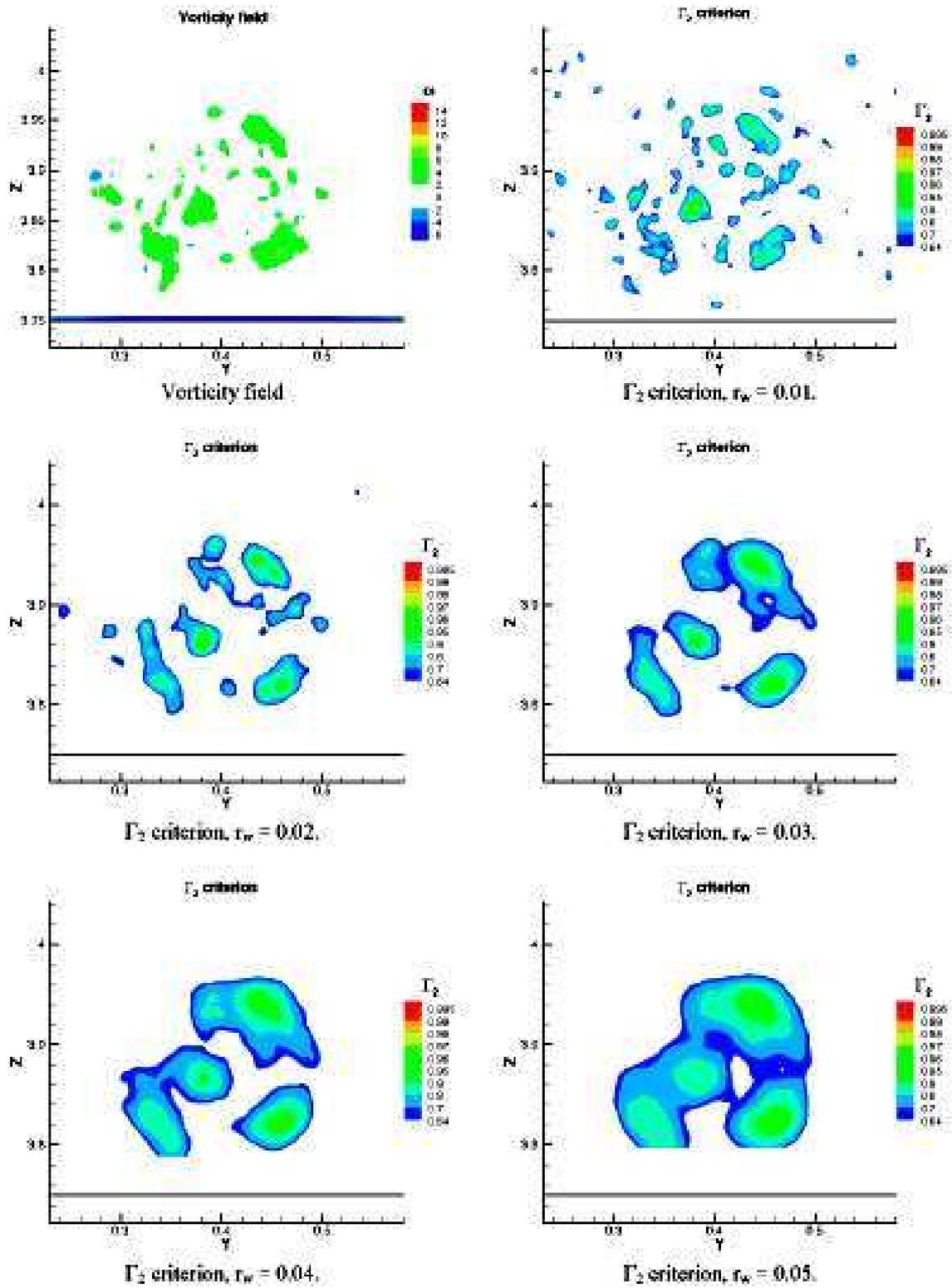
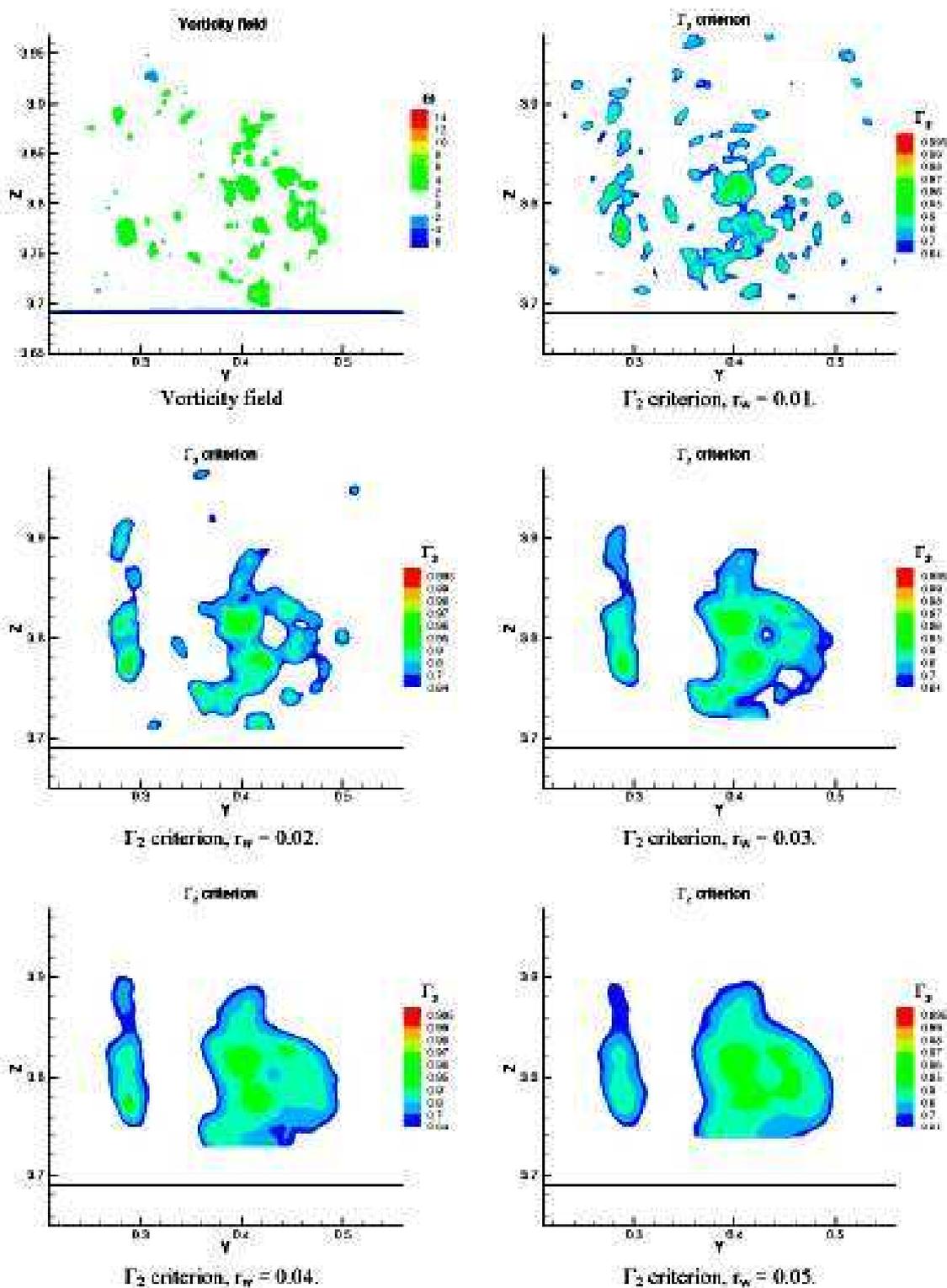


FIG. 3.38 – Phase IV.  $X=36.7$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

FIG. 3.39 – Phase IV.  $X=40.1$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

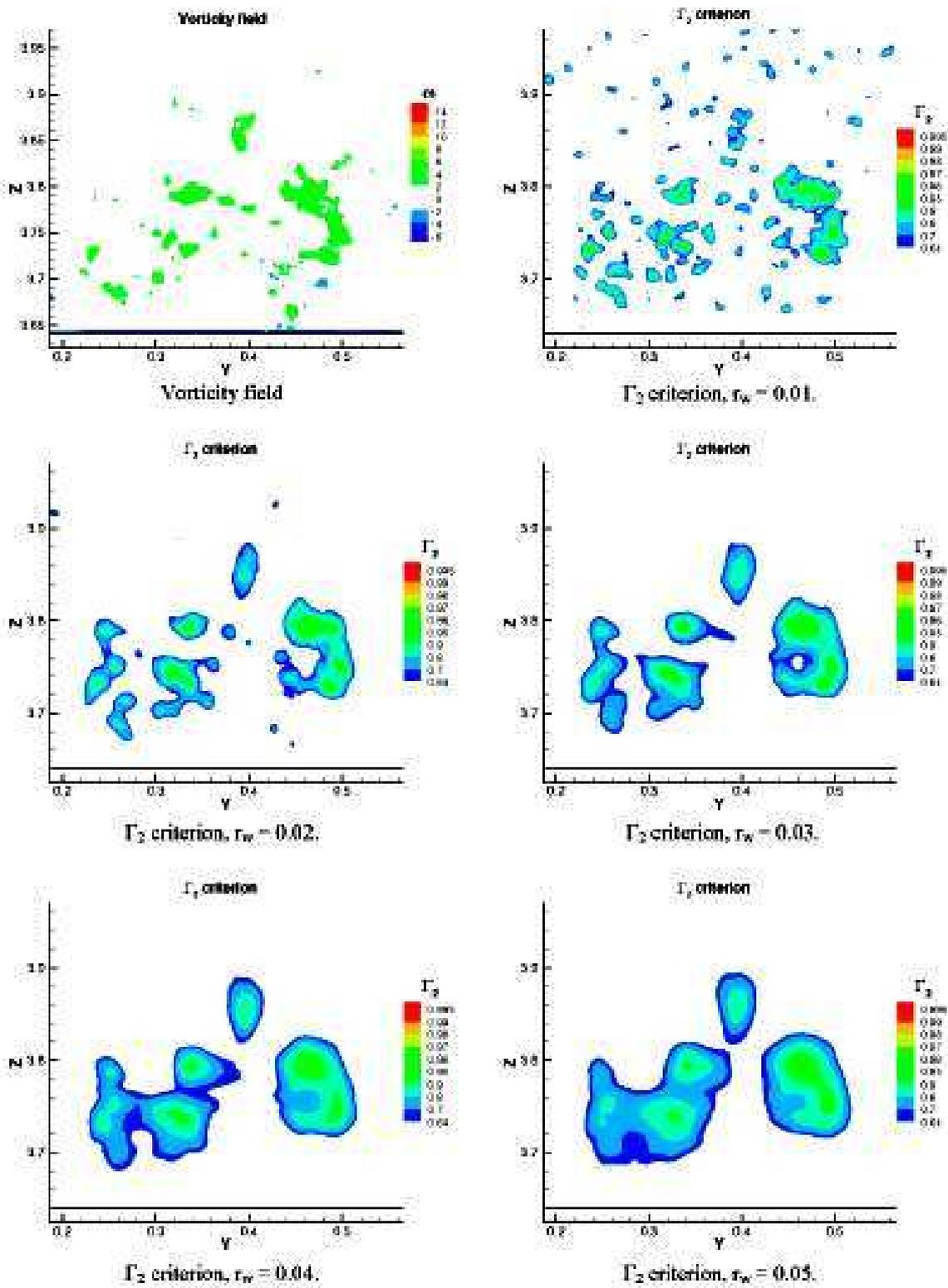


FIG. 3.40 – Phase IV.  $X=43.3$  Champ de vorticité (données filtrées) et critère  $\Gamma_2$ .

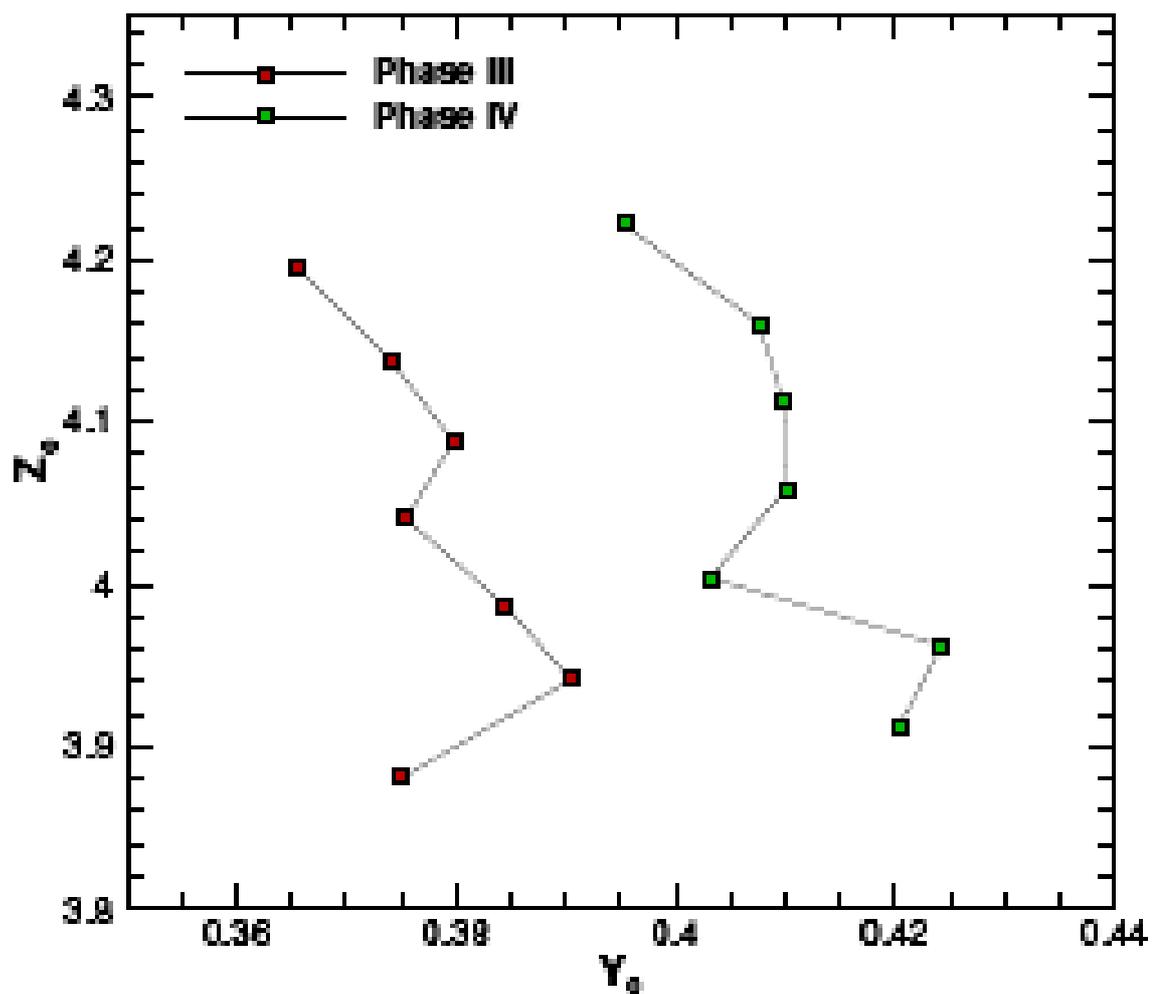


FIG. 3.41 – Position du centre du tourbillon,  $X=14.3$  (14.2) à  $X=34.1$  (33.6). Comparaison entre les phases III et IV.

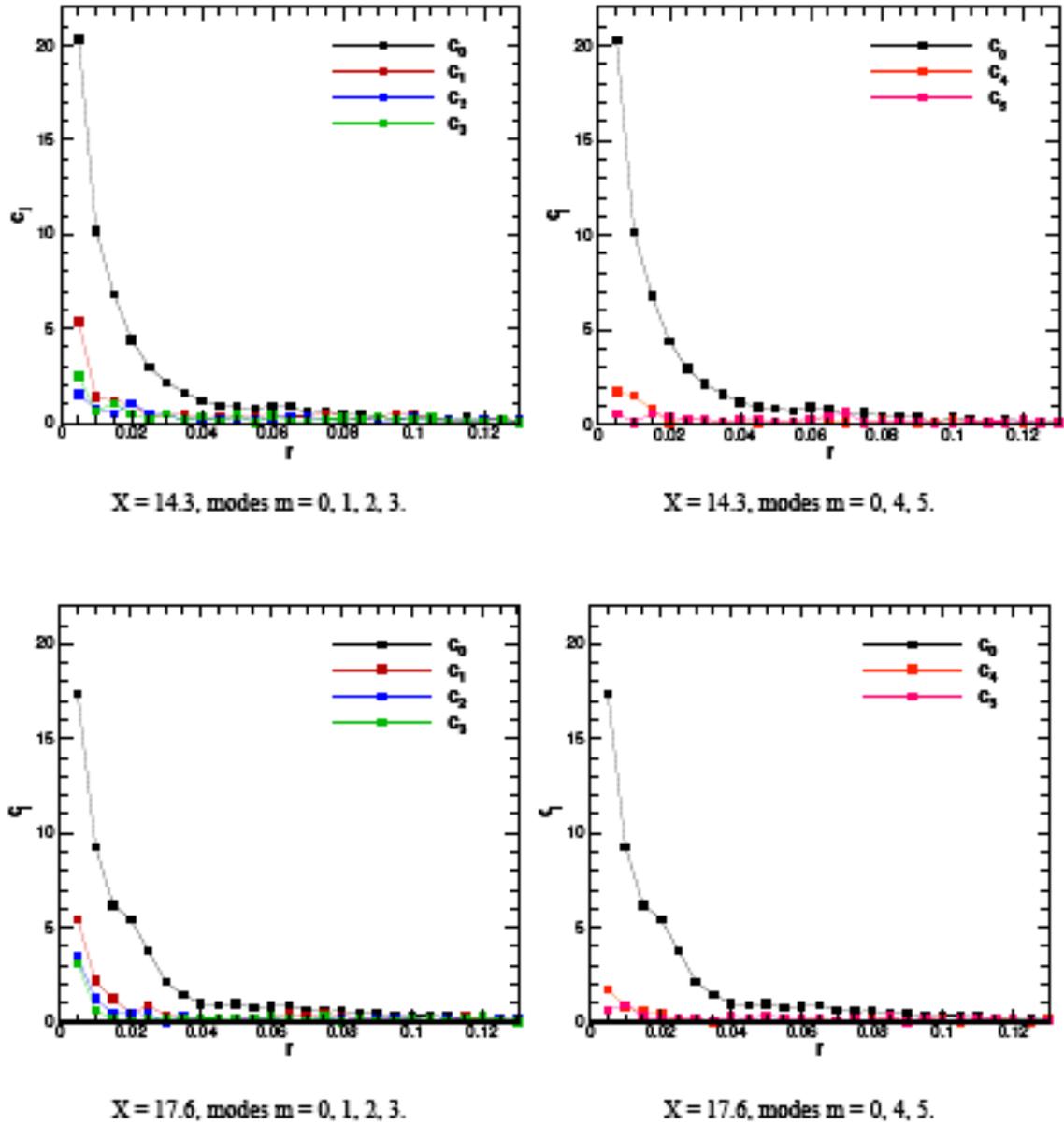


FIG. 3.42 – Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vortacité) pour  $X=14.3$  et  $X=17.6$ .

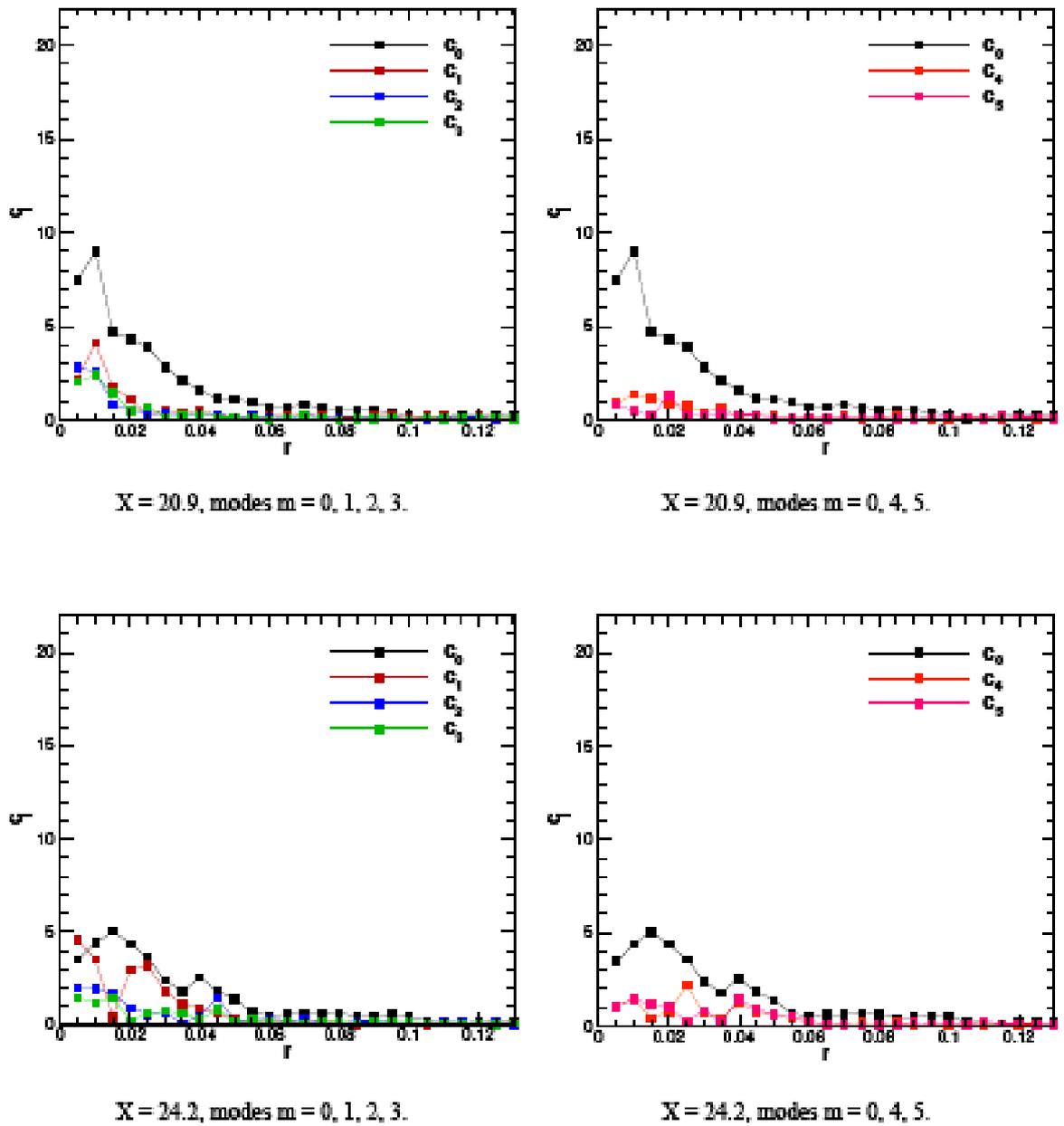


FIG. 3.43 – Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=20.9$  et  $X=24.2$ .

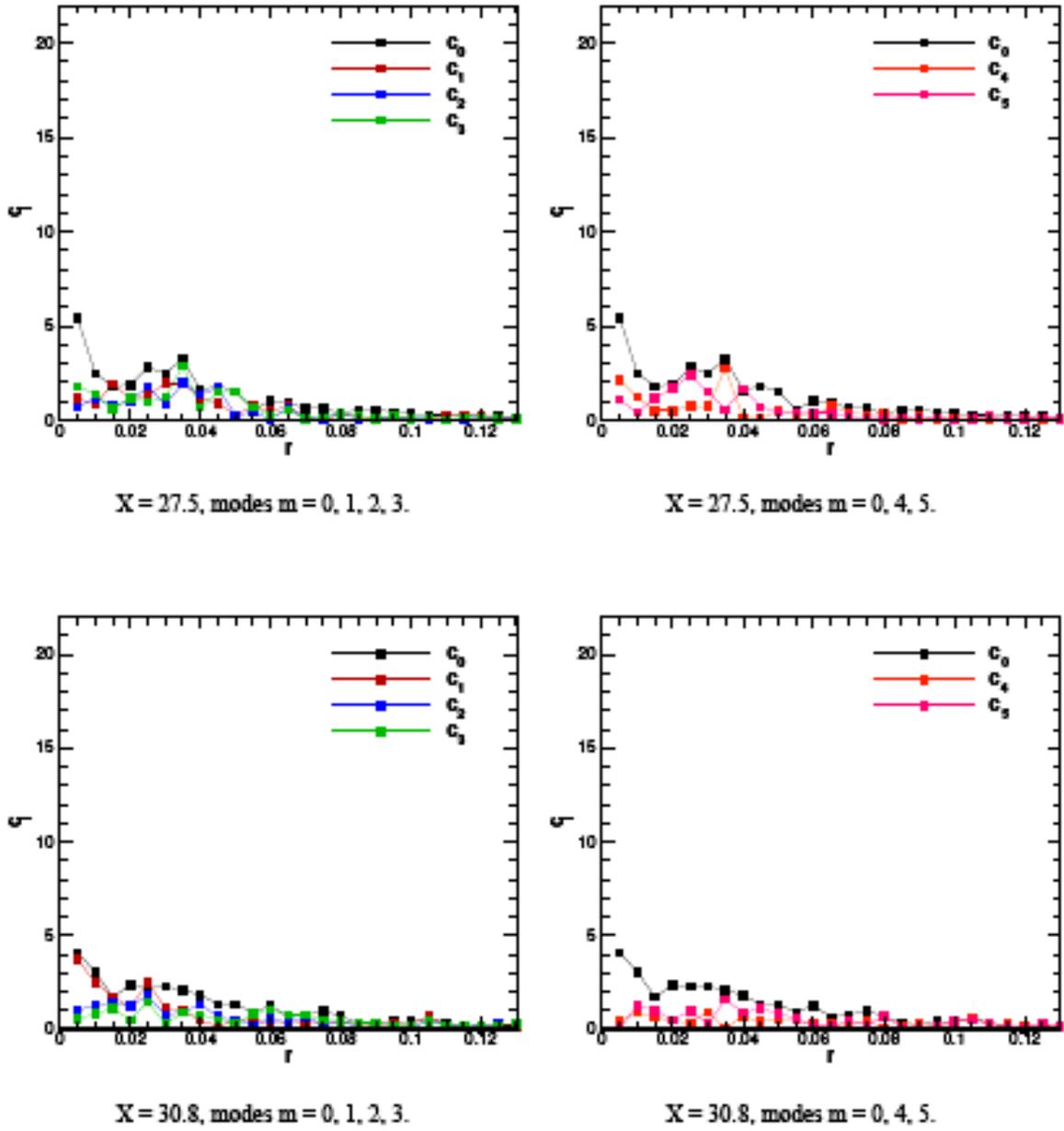


FIG. 3.44 – Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=27.5$  et  $X=30.8$ .

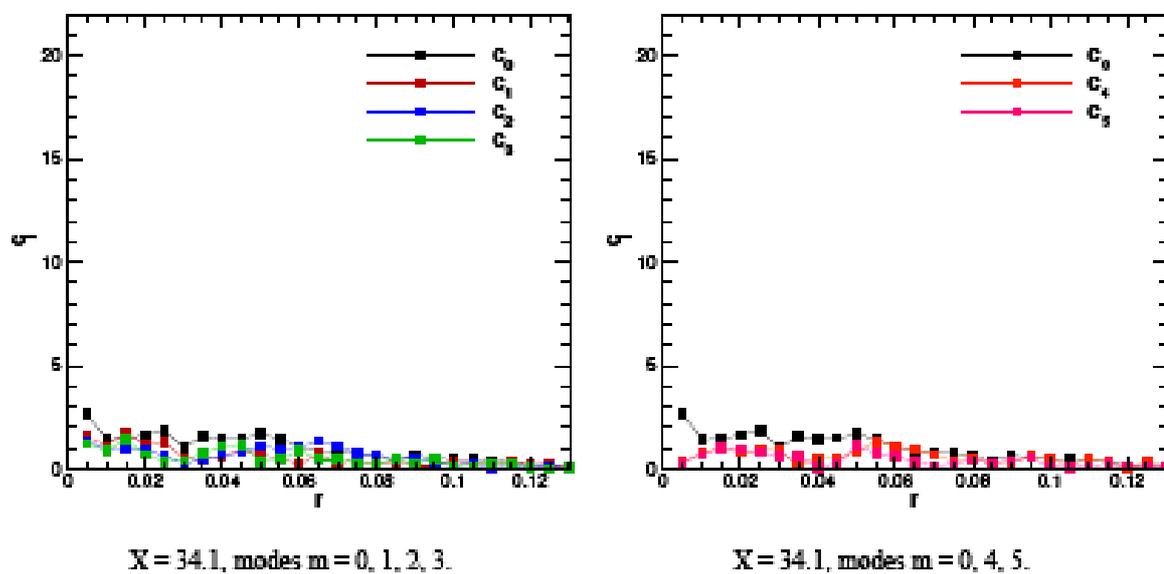


FIG. 3.45 – Phase III. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=34.1$ .

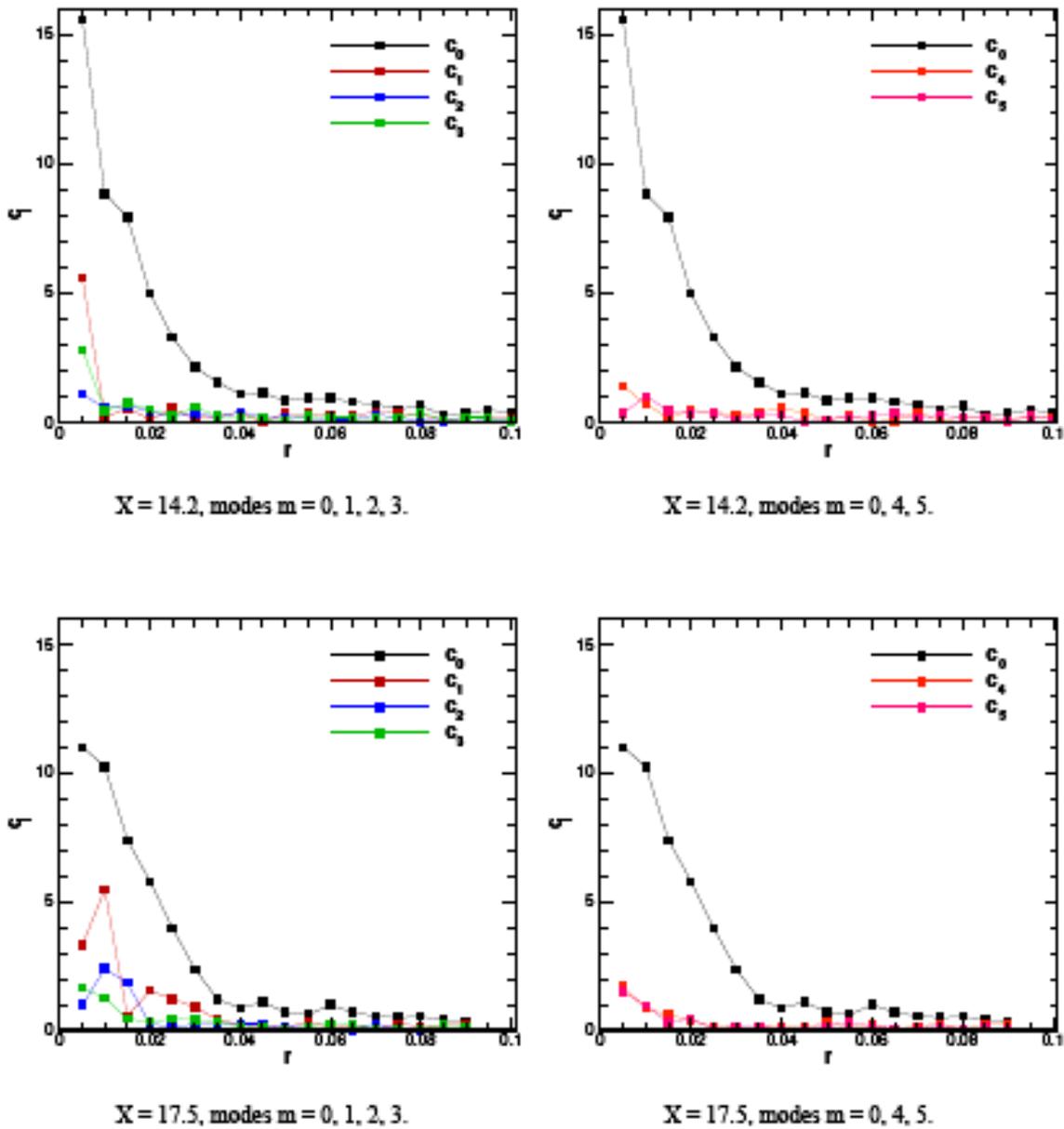


FIG. 3.46 – Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=14.2$  et  $X=17.5$ .

### 3.2.1.2 critères globaux

Les critères locaux tels qu'on les a montrés ci-dessus s'avèrent par exemple très efficaces pour l'extraction de structures cohérentes dans les champs de vitesse obtenus par CFD. Cependant leur utilisation dans un contexte expérimental est bien plus délicate puisqu'ils nécessitent l'évaluation de gradients de vitesse. De toute évidence, ces critères ne peuvent être exploités de façon réaliste sans un filtrage préliminaire du champ de vitesse expérimental. Néanmoins le choix de ce filtre est une affaire très délicate car sa calibration induit un choix préliminaire sur la taille des structures tourbillonnaires à extraire. En conséquence, nous avons préféré utiliser un critère global, à savoir le critère introduit par Graftieaux & al. [113]. En un point de maillage  $P$ , la quantité  $\Gamma_2(P)$  est calculée comme suit :

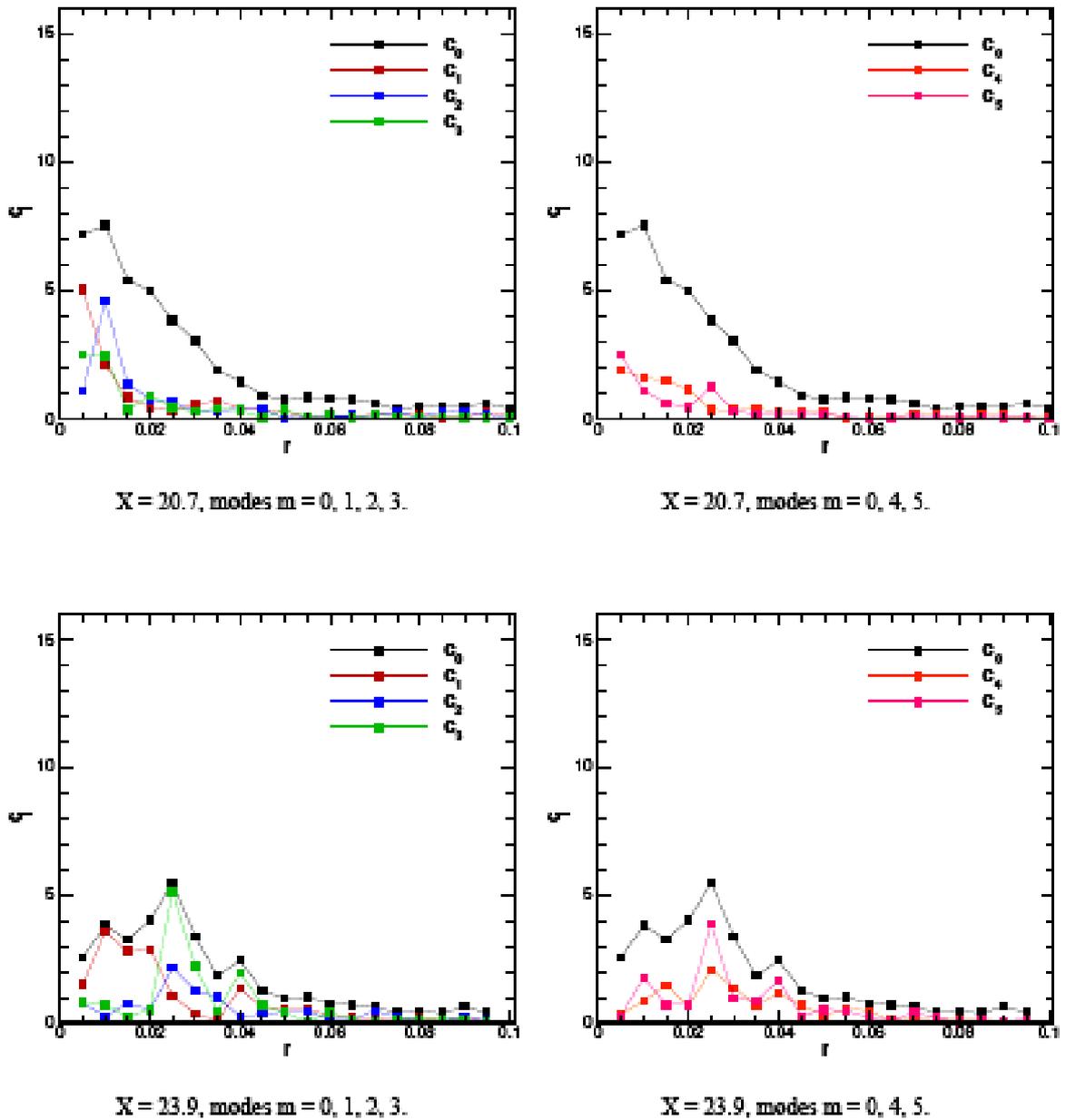


FIG. 3.47 – Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=20.7$  et  $X=23.9$ .

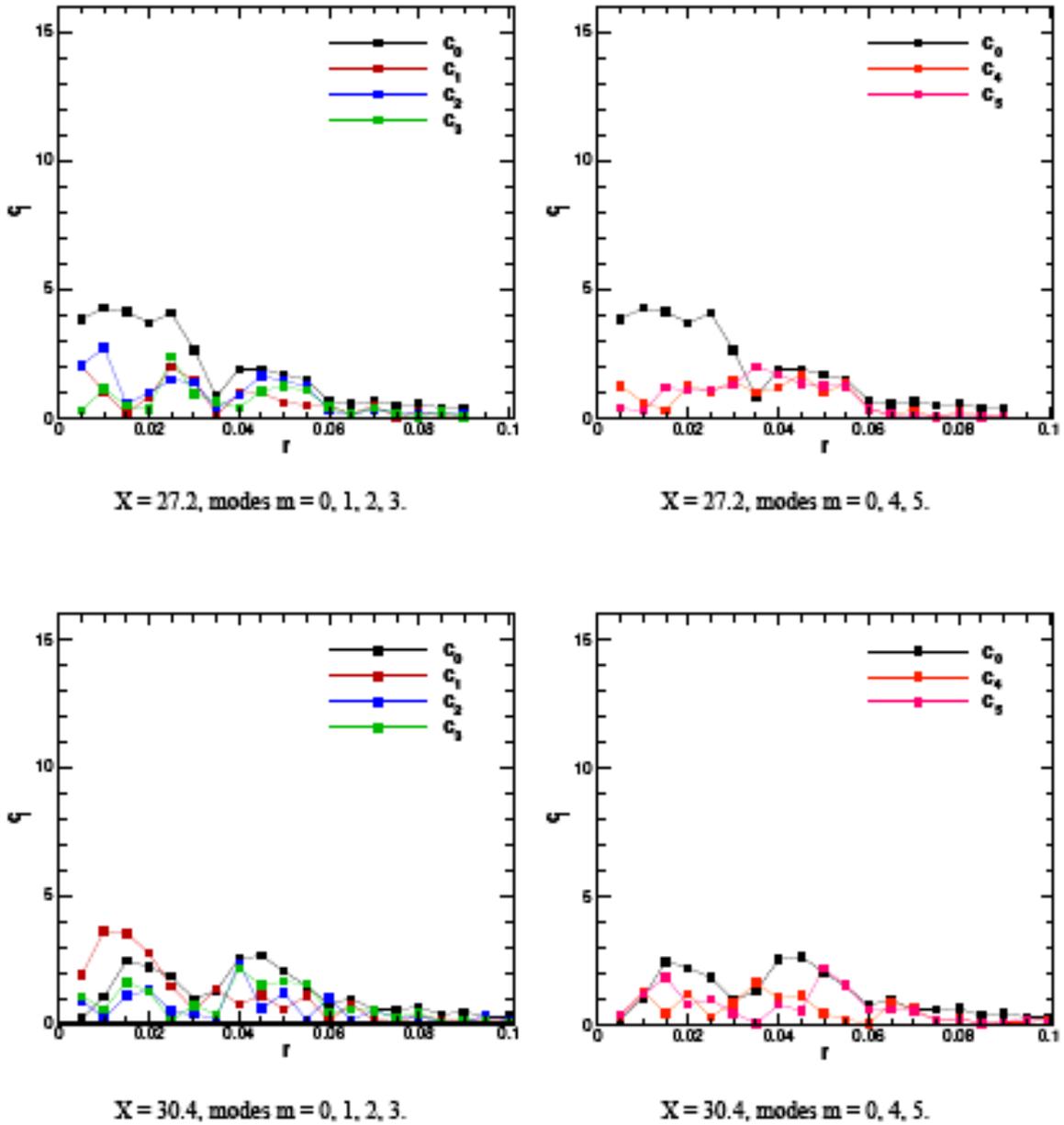


FIG. 3.48 – Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=27.2$  et  $X=30.4$ .

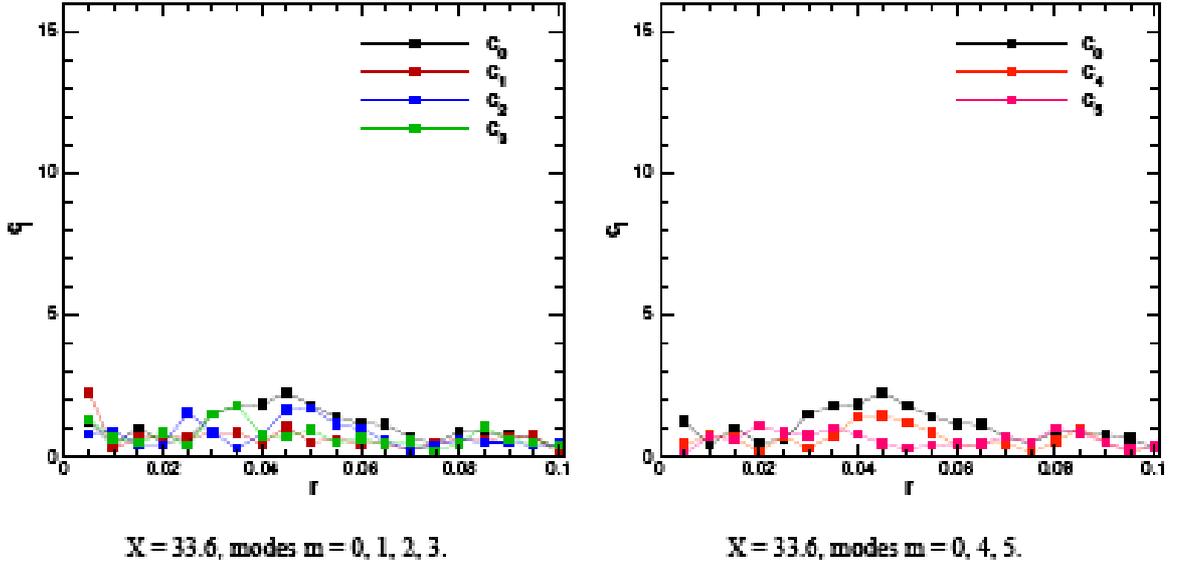


FIG. 3.49 – Phase IV. Tracés des cinq premiers coefficients de la transformée de Fourier discrète azimutale calculée sur des cercles de rayon  $r$  autour du centre du tourbillon (champ de vorticité) pour  $X=33.6$ .

$$\Gamma_2(P) = \frac{1}{N} \sum_{M \in S} \frac{[\overrightarrow{PM} \wedge (\overrightarrow{U}_M - \overrightarrow{U}_{P,moy})] \cdot \overrightarrow{e}_X}{\|\overrightarrow{PM}\| \cdot \|\overrightarrow{U}_M - \overrightarrow{U}_{P,moy}\|}$$

avec

$$\overrightarrow{U}_{P,moy} = \frac{1}{N} \sum_{M \in S} \overrightarrow{U}_M \quad (3.6)$$

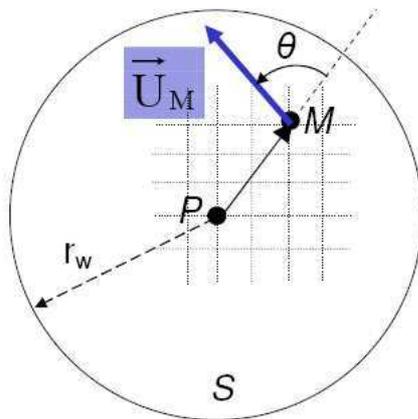
Ici,  $\overrightarrow{e}_X$  dénote le vecteur unitaire le long de l'axe du tourbillon, et  $S$  est une fenêtre d'interrogation centrée autour d'un point  $P$  courant, contenant  $N$  points de maillage. Ainsi  $\overrightarrow{U}_{P,moy}$  représente le vecteur de vitesse moyenne calculé sur la fenêtre d'interrogation  $S$ . En pratique, Michard et Favelier [199] recommandent d'utiliser une fenêtre circulaire pour  $S$ . Leur critère peut être interprété comme suit. Considérant par exemple le cas où  $\overrightarrow{U}_{P,moy} = 0$  pour plus de simplicité, i.e. quand la fenêtre  $S$  n'a pas de vitesse moyenne,  $\Gamma_2(P)$  se réduit à

$$\Gamma_2(P) = \frac{1}{N} \sum_{M \in S} \sin(\theta_M)$$

où  $\theta_M$  dénote l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{PM}$  et  $\overrightarrow{U}_M$  (voir le schéma de la figure 3.50). Dans ce cas, il est pratique de constater que si  $P$  est le centre d'un tourbillon axisymétrique, alors  $\Gamma_2(P)$  atteint sa valeur maximale  $\Gamma_2(P) = 1$ . N'importe où ailleurs dans l'écoulement, on a  $\Gamma_2(P) < 1$ .

Graftieaux & al. et Michard & al. expliquent dans quelle mesure on peut étendre l'interprétation du critère  $\Gamma_2$ . En effet, il peut être utilisé non seulement pour détecter le centre d'un tourbillon, mais aussi pour estimer la taille de son coeur tourbillonnaire. Selon leurs études, le coeur d'un tourbillon peut être déduit par le critère :

$$\Gamma_2 > \frac{2}{\Pi} \approx 0.64$$


 FIG. 3.50 – Calcul du critère  $\Gamma_2$  (d'après Graftieaux & al. [113] et Michard & al. [199]).

Michard & al. montrent aussi que ce critère ne dépend que légèrement du rayon  $r_w$  de la fenêtre  $S$ , pourvu qu'il reste inférieur à  $r_0/2$  où  $r_0$  dénote le rayon du coeur rotationnel du tourbillon. En pratique, nous avons observé que l'utilisation successive de plus grandes valeurs de  $r_w$  mène logiquement à un lissage dans l'identification du rayon du tourbillon, les plus petites valeurs de  $r_w$  permettant de déduire les structures tourbillonnaires plus petites et les plus grandes valeurs de  $r_w$  fournissant une visualisation des structures tourbillonnaires de grandes échelles. Cette utilisation du critère  $\Gamma_2$  est illustrée dans les figures 3.13 et 3.14 qui représentent l'extraction du tourbillon à  $X = 17.5$  (toujours pour le cas de la phase IV), avec les tailles de fenêtre  $r_w$  allant de 0.01 à 0.04. Tandis que  $r_w = 0.01$  donne une information détaillée sur la distribution de vortacité proche du centre tourbillonnaire (à comparer avec les figures 3.11 et 3.12), l'accroissement en  $r_w$  mène progressivement à un lissage de  $\Gamma_2$  et à un élargissement du coeur rotationnel déduit. Il convient également de souligner que sur certaines des figures, les motifs obtenus de  $\Gamma_2 > 0.64$  sont incomplets. En fait, pour un rayon de fenêtre donné  $r_w$ , il est impossible de calculer  $\Gamma_2$  pour des points de maillage plus proches de la limite que  $r_w$ , puisque la fenêtre d'interrogation doit être un disque complet : en résumé, on ne peut pas calculer la limite  $\lim_{r \rightarrow r_w^-} \Gamma_2(r)$ , sous réserve d'existence mathématique.

### 3.2.1.3 Développement en série de Fourier des champs expérimentaux

Dans les mesures PIV réalisées au B20, l'écoulement de contournement autour des ailes et la présence d'une perturbation (dont on cherche à caractériser l'origine) modifient le développement radial des deux tourbillons principaux, qui perdent leur caractère axisymétrique. Reprenant la démarche de Renac [220], nous quantifions cet écart à l'axisymétrie par un développement en série de Fourier des champs de vitesse par rapport à la coordonnée azimutale  $\theta$ .

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(r) e^{im\theta} + c_{-m}(r) e^{-im\theta}$$

où (3.7)

$$\forall m \in \mathbb{Z}, c_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-im\theta} d\theta$$

Dans la pratique, nous interpolons les données sur  $N$  points régulièrement espacés sur des cercles de rayon  $r$  autour de l'axe du tourbillon. Nous utilisons ensuite la transformée de Fourier

discrète sur cet échantillon de  $N$  valeurs  $[u(1), \dots, u(N)]$  du champ de vitesse expérimental. Les coefficients  $c_m$  de cette transformation ainsi que le signal reconstitué à partir de ces coefficients sont calculés à partir des relations suivantes :

### 3.2.2 Dédution pratique des caractéristiques du tourbillon

#### 3.2.2.1 Centre du tourbillon

Un de nos buts dans la présente étude est d'investiguer les propriétés géométriques du tourbillon perturbé. En particulier, nous nous intéressons à sa structure azimutale, ce qui implique de détecter le centre du tourbillon et de réaliser alors une transformée de Fourier sur des cercles centrés autour de ce centre.

Pour ce faire, nous avons choisi de ne pas utiliser de critères locaux tels que le maximum de  $\omega$  ou du critère  $Q$ , ni le maximum de  $\Gamma_2$  puisque dans de nombreux cas cela mènerait à négliger les perturbations avec une géométrie hélicoïdale de nombre d'onde azimutale  $|m| = 1$ . Au lieu de cela, nous avons choisi de déduire le centre du tourbillon du contour de son coeur rotationnel donné par le critère  $\Gamma_2$ . En pratique, nous avons défini le centre du tourbillon comme le centre géométrique approximatif du motif de vorticit   donn   par le contour  $\Gamma_2 = 0.64$ . Nous voudrions souligner qu'une telle m  thode a une pr  cision tout    fait limit  e puisque les motifs correspondants de vorticit   peuvent pr  senter des formes tr  s irr  guli  res (voir les figures 3.18    3.27 pour l'exemple de phase III). Cependant, nous avons trouv   cette m  thode plus appropri  e que celle choisie dans Coustols & al. [58], ce qui peut mener    un changement de position du centre lorsque le tourbillon principal est entour   de motifs de vorticit   secondaire.

#### 3.2.2.2 G  om  trie azimutale de la perturbation

Pour un champ PIV donn  , une fois que le centre  $C$  a   t   d  duit, nous d  veloppons la vorticit    $\omega$  en s  ries de Fourier par rapport    la variable azimutale  $\theta$ , selon des cercles de rayons croissants centr  s autour de  $C$ . Sur un cercle de rayon donn  , nous   chantillonons la vorticit    $\omega$  en  $N = 128$  points distribu  s avec un espacement azimutal r  gulier sur le cercle, en utilisant une interpolation lin  aire dans les deux directions  $Y$  et  $Z$ , puisque les points d'  chantillonnage en g  om  trie cylindrique ne correspondent pas aux points du maillage cart  sien des mesures PIV. Pour un point donn   d'indice  $k$  situ      une distance  $r$  de  $C$ , l'  chantillon  $\omega_k = \omega(\theta_k)$  est alors d  velopp   sous la forme (synth  se harmonique) :

$$\omega_k(r) = c_0(r) + \sum_{p=1}^{N/2-1} c_p(r) \cos\left(\frac{2 \Pi p (k-1)}{N}\right) \quad (3.8)$$

Les coefficients  $(c_p(r))_{p=0\dots N/2-1}$  calcul  s lors de l'analyse harmonique (cf. paragraphe 3.2.1.3) repr  sentent alors les contributions    la vorticit    $\omega$  de sym  trie azimutale  $m = 0\dots N/2 - 1$ . En particulier, le coefficient  $c_0(r)$  repr  sente la moyenne de  $\omega$  sur le cercle consid  r   de rayon  $r$ . Par la suite, on fait r  f  rence    ces coefficients comme    des " modes ", comme dans le cadre d'une analyse de stabilit   lin  aire. Quant au calcul de  $\Gamma_2$ , on explore les cercles autour du centre  $C$  jusqu'   ce qu'une limite de la fen  tre PIV soit atteinte. Ceci explique pourquoi les rayons maxima sont diff  rents pour les deux phases.

### 3.2.3 Caract  risation des instabilit  s

Pour chaque phase, nous avons choisi de limiter la caract  risation fine    des mesures de stations  $X = 14.3$     34.1 (phase III) et  $X = 14.2$     33.6 (phase IV). La valeur la plus basse

de  $X$  correspond à un tourbillon bien formé, sans trop de motifs tourbillonnaires externes, et la plus haute a été vue comme la limite de la caractérisation présente. En fait, depuis  $X \geq 33$  la destruction du tourbillon a atteint un niveau critique, mettant en question la pertinence de l'application des critères d'extraction du tourbillon sur les champs correspondants. Cependant, les visualisations qualitatives (vorticité et  $\Gamma_2$ ) sont aussi démontrées ici jusqu'à ce que  $X = 37.4$  à 44.0 (phase III) et 36.9 à 43.3 (phase IV).

Les résultats sont présentés dans les figures 3.15 à 3.49 :

- les figures 3.15 à 3.17 montrent les champs de vorticité pour la phase III
- les figures 3.18 à 3.27 montrent les champs de  $\Gamma_2$  pour la phase III
- les figures 3.28 à 3.30 montrent les champs de vorticité pour la phase IV
- les figures 3.31 à 3.40 montrent les champs de  $\Gamma_2$  pour la phase IV
- la figure 3.41 compare les trajectoires des centres tourbillonnaires pour les deux phases
- les figures 3.42 à 3.45 explorent la géométrie azimutale du tourbillon en phase III
- les figures 3.46 à 3.49 explorent la géométrie azimutale du tourbillon en phase IV.

D'abord, on peut observer que tandis qu'il se déplace vers le bas, le tourbillon semble aussi connaître un flottement (Jacquin & al. [142]), avec des amplitudes comparables pour les phases III et IV (figure 3.41). Cette observation est importante pour l'analyse suivante de la structure géométrique du tourbillon. En fait, le flottement consiste en un mouvement aléatoire du coeur du tourbillon, qui, dans le champ de stabilité, serait assimilé à une perturbation du nombre d'onde azimutal  $|m| = 1$ . En conséquence, puisque nous avons choisi d'extraire le centre du tourbillon comme le centre géométrique du chemin tourbillonnaire observé, la composante  $|m| = 1$  du flottement sera éliminée de notre analyse. Il est aussi à noter que les résultats appartenant à un tel mode doivent être considérés avec une attention extrême puisqu'ils dépendent hautement du centre d'extraction, car toute erreur dans la localisation du centre du tourbillon changerait la composante  $|m| = 1$  de la géométrie du tourbillon (ceci est particulièrement évident si le tourbillon est purement axisymétrique).

Pour une phase donnée, on remarque que les deux techniques de caractérisation, le critère  $\Gamma_2$  et la décomposition en séries de Fourier sur des cercles centrés autour du centre du tourbillon, montrent des tendances similaires. En fait, dans les cas d'éclatement significatif du tourbillon, les maxima et minima de  $\Gamma_2$  peuvent effectivement être interprétés comme des maxima et minima de la vorticité. Les figures 3.34 et 3.47 (phase IV,  $X = 23.9$ ) sont une illustration particulièrement claire de cette remarque. Dans la figure 3.34, on observe trois maxima locaux de à une distance d'environ 0.03 du centre. Logiquement, la figure 3.47 montre clairement un pic pour le coefficient avec un maximum pour 0.025. Donc, le critère  $\Gamma_2$  fournit une illustration graphique efficace de la structure géométrique du tourbillon perturbé.

Somme toute, les phases III et IV montrent des conduites relativement similaires dans la destruction du tourbillon. Les deux principales divergences sont la valeur initiale de la vorticité maximale, qui est légèrement plus élevée pour la phase III que pour la phase IV (voir les figures 3.42 et 3.46, respectivement à  $X = 14.3$  et 14.2), et un départ moins prononcé de la symétrie rotationnelle dans les résultats PIV de la phase III.

Pour les deux campagnes, les phases dans la destruction du tourbillon, telles qu'on les observe dans la distribution de  $\Gamma_2$  et dans les composantes azimutales de Fourier, peuvent se résumer comme suit :

- Aux états initiaux ( $X = 14.2$  à 17.5), les seuls modes significatifs autres qu'axisymétriques sont  $|m| = 1$ , et à un moindre degré,  $|m| = 2$  et  $|m| = 3$ , et se limitent au centre du tourbillon.
- Dans les phases suivantes, la vorticité moyenne (coefficient  $c_0$ ) diffuse considérablement. Sa

valeur maxima près du centre est à peu près divisée par deux entre  $X = 17.5$  et  $X = 20.7$  et les gradients radiaux tendent à décliner sensiblement depuis  $X = 27.5$ , manifestant un élargissement très important du coeur du tourbillon. La composante axisymétrique de la perturbation responsable de la destruction du tourbillon semble donc être particulièrement importante.

- Il nous paraît plus délicat de tirer des conclusions en ce qui concerne les modes  $|m| > 0$ . Cependant il semble qu'au cours des premiers stades de l'élargissement du coeur, le tourbillon est aussi soumis à une perturbation  $|m| = 1$ . On peut le constater sur la figure 3.43 ( $X = 20.9$  et 24.2 pour la phase III) sur la figure 3.46 ( $X = 17.5$  pour la phase IV). Les tracés correspondants du critère  $\Gamma_2$  montrent aussi une telle perturbation.

- Un autre trait caractéristique de la destruction du tourbillon, à des stades postérieurs à la composante précédente  $|m| = 1$ , est l'apparition d'une structure tripolaire comme l'indique un pic dans la composante  $|m| = 3$  à  $X = 27.5$  pour la phase III (figure 3.44) et  $X = 23.59$  pour la phase IV (figure 3.47). Cette observation est bien plus caractéristique dans le cas de la phase IV et trouve sa confirmation graphique dans les tracés du critère  $\Gamma_2$  pour  $X = 23.9$  (figure 3.34). Il est à noter que dans ces deux derniers cas (observations de composantes  $|m| = 1$  et  $|m| = 3$ ), les conclusions pour les coefficients de Fourier résultent plus de la comparaison de  $c_1$  et de  $c_3$  avec la valeur locale de  $c_0$  que de l'observation de la valeur absolue de ces coefficients, qui peuvent être très bas en raison de l'échelle de longueur choisie le long de l'axe Y. En fait, seule cette comparaison nous permet de caractériser l'écart relatif du tourbillon (dans les premières phases de sa dispersion ou de son éclatement) à son état d'axisymétrie (avant la perturbation).

La caractérisation de la géométrie azimutale du tourbillon pendant le processus d'éclatement a ainsi permis de saisir des tendances générales. Le trait le plus significatif est l'élargissement spectaculaire du coeur du tourbillon. Au cours des premiers stades de cet élargissement, on observe une déformation hélicoïdale  $|m| = 1$  du tourbillon, et à des stades ultérieurs, le tourbillon tend à se désintégrer en une structure tripolaire  $|m| = 3$ . Néanmoins, nous voudrions souligner une fois de plus le fait que ces résultats reposent sur un choix de l'extraction du centre du tourbillon, ce qui s'est avéré délicat en raison du degré de déstructuration du tourbillon. Il faudrait procéder à d'autres investigations afin de confirmer ou d'infirmer nos observations. Nous avons aussi la conviction qu'une campagne expérimentale plus poussée devrait investiguer la composante de vitesse axiale, ce qui est crucial lorsqu'on étudie l'éclatement tourbillonnaire sous sa forme canonique, i.e. le "vortex breakdown" dans l'acception de Benjamin [20] (voir le paragraphe 2.1.2.1), puisque la distribution de vitesse axiale impose le régime "supercritique" ou "sous-critique" de l'écoulement. D'autres conclusions très intéressantes peuvent aussi naître de l'investigation de l'écoulement avec des PIV résolues en temps, dans des plans à la fois longitudinaux et transversaux.

### 3.3 Conclusions de l'étude expérimentale

L'examen des données PIV a montré qu'une première difficulté réside dans le choix des critères utilisés pour la caractérisation du tourbillon de sillage (localisation du centre, calcul du rayon et de la trajectoire suivie par le centre). En effet, les résultats obtenus (et donc leur interprétation) peuvent sensiblement dépendre du critère retenu. Les critères locaux semblent souffrir d'un manque de précision pour des images perturbées, et sont trop sensibles aux conditions expérimentales. Les critères globaux s'affranchissent de ces problèmes. C'est pourquoi in fine notre choix s'est porté sur ceux-ci, et plus particulièrement sur le critère  $\Gamma_2$ , plus adapté à l'étude d'un grand nombre de données, comme on peut en avoir avec la PIV. De plus, ce critère donne une bonne estimation de la taille du coeur rotationnel, grandeur particulièrement importante pour interpréter l'éclatement du tourbillon.

Muni de ce critère, on a effectué l'analyse spectrale à partir des coordonnées du centre et du rayon caractéristique ainsi calculés, ce qui conduit à des résultats cohérents avec un scénario axisymétrique de l'éclatement du tourbillon. En effet, on observe la correspondance entre la diffusion de l'éclatement, la diminution du maximum de la vitesse azimutale et l'augmentation de la taille du coeur rotationnel, en similitude avec l'évolution de la composante axisymétrique de la perturbation.

En ce qui concerne les orientations à suivre pour la modélisation numérique de cet éclatement tourbillonnaire, traitée dans la partie suivante de cette thèse, le dépouillement de ces données expérimentales PIV nous incite a priori à mettre de préférence l'accent sur les perturbations de géométrie axisymétrique ( $|m| = 0$ ), sans négliger pour autant le rôle des ondes hélicoïdales ( $|m| = 1$ ) et tripolaires ( $|m| = 3$ ).

Deuxième partie

Modélisation numérique du  
phénomène

## Chapitre 4

# Modélisation des end-effects et de l'éclatement tourbillonnaire

Le but de ce chapitre est de présenter notre démarche générale pour modéliser les end-effects et l'éclatement tourbillonnaire observés à la catapulte B20, afin de préparer l'étude par la simulation numérique des propagations de perturbations le long d'un tourbillon de sillage et de son éventuel éclatement.

Pour reproduire les phénomènes se produisant à la soufflerie B20, nous nous appuyons sur des constatations expérimentales, numériques et théoriques de la littérature (cf. revue du chapitre 2), en complément de nos propres conclusions du chapitre 3, pour faire un certain nombre d'hypothèses et aboutir à une procédure de simulation. Dans notre approche, nous cherchons à fixer des configurations génériques sur lesquelles on peut réaliser des expérimentations numériques de manière bien contrôlée. C'est pourquoi nous rappelons brièvement les modèles classiques de tourbillon sans vitesse axiale avant de construire trois types de perturbations du champ de base et de donner leurs interprétations physiques. Pour finir, nous exposons les motivations qui nous ont conduits à choisir notre outil numérique et nous récapitulons les paramètres clés de nos simulations.

### 4.1 Démarche de modélisation

Comme nous l'avons présenté dans les deux précédents chapitres, des observations expérimentales ont montré que des tourbillons de sillage peuvent "éclater" dans certaines conditions de vol. Ce phénomène d'instabilité reste encore mal compris. Les difficultés rencontrées aujourd'hui dans la catapulte B20 de l'ONERA Lille et présentées au chapitre 3 ont redonné de l'actualité à ce sujet car les études menées dans cette installation expérimentale montrent de manière très reproductible que le tourbillon généré par la maquette volante éclate soudainement. Dans ce contexte, notre objectif est la modélisation du mécanisme observé à la catapulte B20 pour une meilleure compréhension physique des end-effects et de l'éclatement tourbillonnaire.

A court terme, sur les plans expérimental et métrologique, ce phénomène est problématique pour les mesures in situ puisqu'il est pathologique pour la caractérisation des sillages tourbillonnaires en champ lointain, qui est le principal objectif des essais réalisés au B20 pour les avions de transport. En revanche, à plus long terme, sur les plans théorique et applicatif, l'éclatement tourbillonnaire est une piste de recherche prometteuse pour accélérer "l'extinction" des tourbillons de sillage, ce qui justifie la présence de ce thème dans les études du Work Package 1 du

programme européen FAR-Wake <sup>1</sup>.

#### 4.1.1 Observations expérimentales et études théoriques

Actuellement, on ne connaît pas les causes exactes des end-effects et de l'éclatement tourbillonnaire observés au banc B20. En l'état des données recueillies sur place (cf. chapitre 3 pour le traitement des données PIV), on ne peut affirmer avec certitude que l'origine du phénomène soit liée au confinement de l'installation.

Des investigations complémentaires sur financement d'Airbus ont permis de réaliser quelques essais supplémentaires pour faire des études paramétriques au banc B20 (cf. figure 3.4), en jouant tantôt sur la position du plan de mesure (figure 4.1 - "L" pour Lidar), tantôt sur la position du bac de récupération (figure 4.2 - "R" pour Recovery box).

Ces essais spécifiques avaient plusieurs buts :

- identifier les échelles caractéristiques qui pilotent la vitesse de propagation de cette onde.
- déterminer si la perturbation à l'origine de cet éclatement provient de la rampe de catapultage ou du bac de récupération

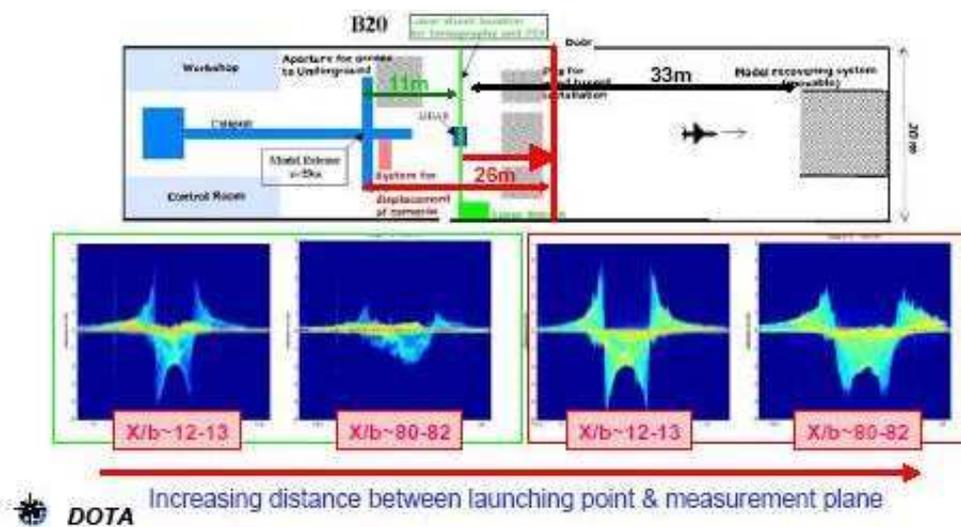


FIG. 4.1 – Influence de la distance entre le plan d'observation et le point de largage de la maquette (instrumentation Lidar, projet AWIATOR).

Les conclusions de ces différents travaux menés par le DLR et les départements DAAP - DMAE - DOTA de l'ONERA complètent les informations (figure 4.3) que l'on peut extraire de l'étude pionnière d'Olsen [210]. Ces résultats récents (figure 4.4) indiquent en particulier que la vitesse de propagation de la perturbation est directement liée à la circulation du tourbillon de sillage, plutôt qu'à la loi d'accélération du catapultage de la maquette. Ce résultat est capital dans notre démarche de modélisation car il nous conduit à choisir la vitesse azimutale du tourbillon comme échelle caractéristique de vitesse  $V_{ref}$ , au lieu de la vitesse de catapultage de la maquette :

$$V_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi r_c} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup><http://www.FAR-Wake.org/>

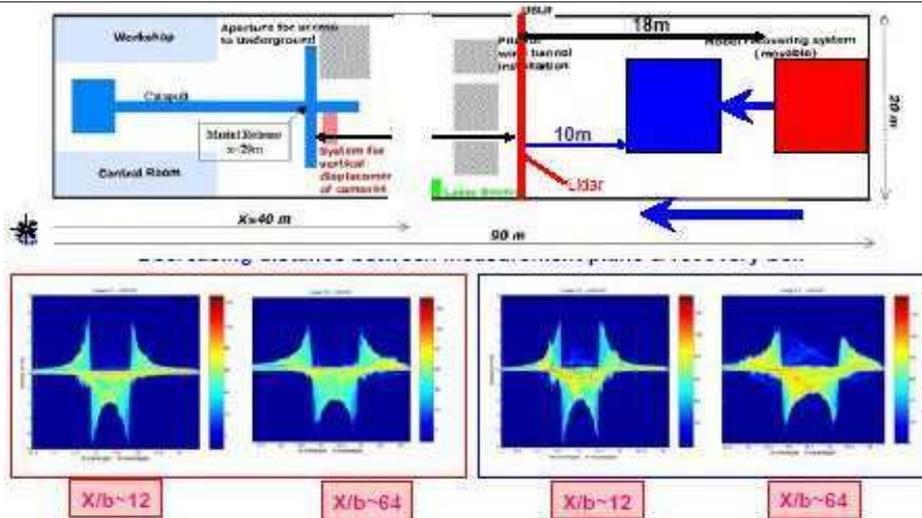


FIG. 4.2 – Influence de la distance entre le bac de récupération de la maquette et le plan d'observation (instrumentation Lidar, projet AWIATOR).

où  $\Gamma$  désigne la circulation du tourbillon et  $r_c$  est le rayon du coeur tourbillonnaire.

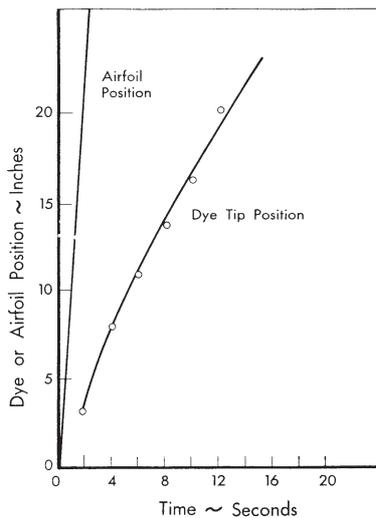


FIG. 4.3 – Positions du profil NACA 0012 et de la perturbation (end-effects) en fonction du temps (essais expérimentaux au bassin hydrodynamique de Boeing Seattle).

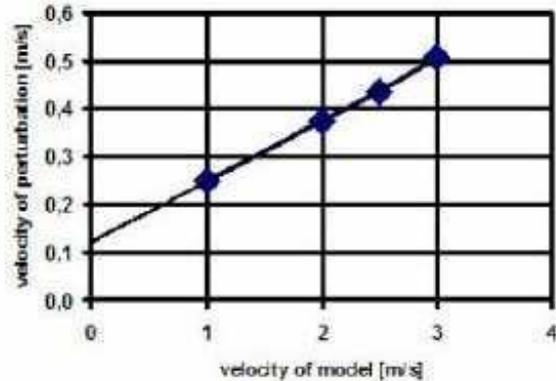


FIG. 4.4 – Vitesse de la perturbation (end-effects) en fonction de la vitesse de tractage de la maquette (essais expérimentaux au bassin hydrodynamique WSG du DLR Göttingen).

D'autre part, les comparaisons entre les calculs numériques du CERFACS (figure 4.5) et les dépouillements réalisés par le DAAP des données du B20 suggèrent que la perturbation est vraisemblablement une onde initiée au point de catapultage, qui se propage derrière la maquette en la suivant dans le même sens que la direction du vol.

D'un point de vue théorique, il semblerait donc que l'éclatement observé au B20 soit un phénomène d'instabilité de nature fortement non-linéaire, intimement lié à la propagation le long du tourbillon et la focalisation en un certain point d'ondes d'inertie de grande amplitude, sans préjuger de l'importance des effets éventuels du nombre de Reynolds. En effet, la propagation de perturbations de faible amplitude le long d'un tourbillon est un phénomène bien documenté

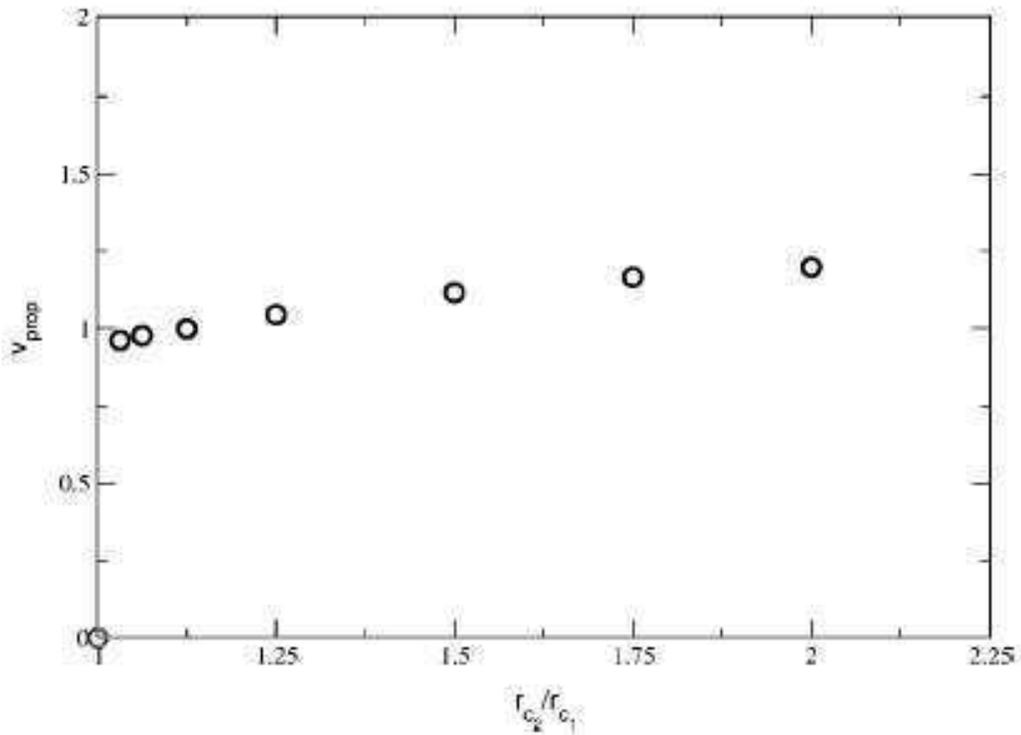


FIG. 4.5 – Vitesse de la perturbation (onde de pression par un calcul numérique du CERFACS) normalisée par la vitesse tangentielle maximale du tourbillon, en fonction du rapport des rayons du vortex dans les états d'équilibre et perturbé (élargissement axisymétrique - cf. Moet & al. [204]).

que l'on peut appréhender par une approche linéarisée des équations de Navier-Stokes. Sipp et Fabre ont abondamment étudié la dynamique linéaire de tourbillons de sillage. Par la théorie de la stabilité linéaire (cf. chapitres 2 et 6), on sait que les modes de vibration (aussi appelés ondes d'inertie ou ondes de Kelvin) du tourbillon de Lamb-Oseen sont stables ou amortis et ne font que se propager le long du tourbillon sans le déstructurer. De plus, Fabre & al. ont proposé une classification de ces ondes de Kelvin de manière exhaustive. En revanche, comme l'ont montré Moet & al. [204], des perturbations de grande amplitude peuvent effectivement se propager le long du tourbillon et la rencontre de deux ondes de pression se propageant en sens opposés provoque un éclatement tourbillonnaire qui déstructure fortement le champ moyen. Ce phénomène a été mis en évidence à l'aide de calculs numériques (LES) sur des perturbations purement axisymétriques du tourbillon de sillage. Est-ce que le mécanisme physique (directement inspiré de l'idée de Spalart) et les explications proposés par Moet & al. (fondé sur l'instabilité hélicoïdale décrite par Mayer et Powell) sont représentatifs de ce qui se passe effectivement au banc B20 ? Est-ce que des perturbations de géométries autres qu'axisymétrique (i.e. de nombre d'onde azimutale  $m \neq 0$ ) sont susceptibles d'être à l'origine de l'éclatement tourbillonnaire du B20 ? Nous avons vu dans le chapitre 3 dédié à l'analyse des données PIV dans les premiers instants de l'éclatement, que le centre du tourbillon ne suit pas une trajectoire rectiligne (figure 3.41), ce qui est plus caractéristique d'une perturbation hélicoïdale que d'une perturbation axisymétrique, ou d'un éventuel phénomène de flottement du tourbillon (le "vortex meandering" est également étudié dans le WP1 de FAR-Wake et illustré sur la figure 4.6).

Est-il possible d'interpréter l'éclatement (phénomène non linéaire) du B20 en terme d'ondes de Kelvin (obtenues par la théorie de stabilité linéaire), ou du moins de faire un quelconque lien entre les deux approches ? A titre d'exemple, il est maintenant acquis dans la communauté scientifique que l'instabilité de grande longueur d'onde décrite par Crow résulte de l'interaction



FIG. 4.6 – Phénomène de "vortex meandering" (flottement du tourbillon, projet FAR-Wake).

entre deux ondes de Kelvin  $m=1$  et  $m=-1$  des deux tourbillons contra-rotatifs.

En conclusion, une meilleure compréhension des mécanismes physiques nous paraît nécessaire pour une expertise approfondie des essais au banc B20. De plus, une explication de nature plus fondamentale pourrait être recherchée avec des modèles de bifurcation conduisant à l'éclatement tourbillonnaire, au sens du "vortex breakdown", notamment par la théorie des états conjugués introduite dès 1962 par Benjamin [20,21,25], poursuivie par les travaux de Rusak & al. [224,264] et récemment complétés par des études menées au LadHyX (Gallaire & al. [107–109] et au DAFE (Renac [220] et Leclaire [167]).

#### 4.1.2 Hypothèses et procédure de notre modélisation

La figure 4.7 est extraite d'essais réalisés au NLR en conditions réelles sur un gros avion de transport, dans le cadre du programme FAR-Wake. Cette visualisation montre qu'il est effectivement possible d'observer dans un sillage en vol libre (donc sans effet de confinement) l'éclatement d'un seul des deux tourbillons principaux, sans reconnexion apparente des deux tubes de vortacité, ce qui exclut a priori l'instabilité de grande longueur d'onde décrite par Crow. Ces observations récentes du NLR confortent celles de Chevalier [47] à la NASA et vont dans le sens du mécanisme proposé par Spalart [249], rappelé sur la figure 4.8. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 2, Spalart fait une distinction très nette entre "vortex breakdown" et "vortex bursting", précisant que "vortex bursting is rarely simultaneous on the two vortices, indicating that it involves only one vortex".

Nous nous sommes fondés sur ces diverses constatations pour formuler des conjectures mathématiques et des hypothèses simplificatrices dans notre modélisation de l'éclatement ob-



FIG. 4.7 – Eclatement tourbillonnaire dans le sillage d'un gros avion de transport en vol libre (expérimentation réalisée au NLR).

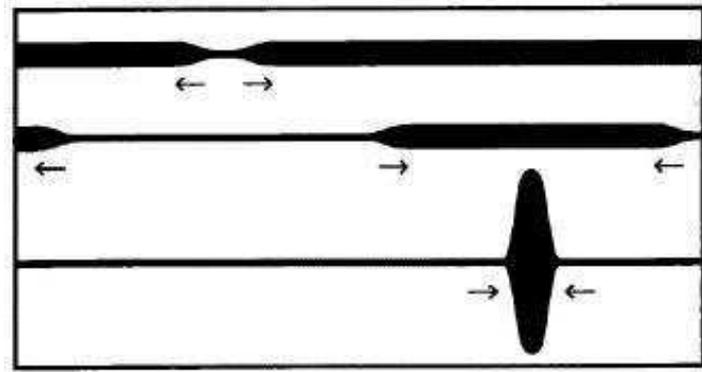


FIG. 4.8 – Mécanisme de propagation de perturbations en forme de crêpes, pouvant conduire au vortex bursting (d'après Spalart [249], cf. chapitre 2).

servé au banc B20 :

Postulat (1) : l'éclatement tourbillonnaire observé au banc B20 est un phénomène qui a un sens physique, i.e. il n'est pas l'apanage des écoulements confinés et peut exister sur un tourbillon en écoulement ouvert.

La figure 4.7 montre qu'on peut réellement observer un éclatement tourbillonnaire derrière un avion de transport et il est pertinent de l'étudier en tant que tel, en vue de réduire les distances de séparation entre les avions de ligne.

Postulat (2) : l'éclatement du B20 est un phénomène de type "vortex bursting" (implosion du tourbillon) plutôt que "vortex breakdown" (panne du tourbillon).

Dans ces conditions, on décide d'étudier le comportement d'un seul tourbillon et on cherche à savoir si la dynamique intrinsèque d'un tourbillon isolé, i.e. soumis à une perturbation localisée indépendamment de toute interaction avec aucun autre tourbillon, peut exhiber un éclatement ou une brutale déstructuration du champ moyen, analogue au banc B20. Pour les systèmes de tourbillons et les effets d'un champ d'étirement externe, le lecteur pourra se référer, entre autres, aux études de Crow [64], Crouch [63] ou de Fabre & al. [91,94].

Pour répondre à cette question, on résout un problème aux valeurs initiales, en reprenant une idée mise en pratique par Arendt & al. [8], Delbende & al. [67], Fabre [99], Moet & al. [204], en faisant des choix différents sur le champ porteur, les perturbations ou et la méthode numérique :

- pour le modèle de tourbillon, on s'efforce de choisir un profil de vitesse d'une part suffisamment "réaliste" pour capturer les principaux phénomènes expérimentaux et d'autre part suffisamment "académique" pour assurer une certaine généralité et faciliter l'interprétation des résultats
- pour construire une perturbation judicieuse, celle-ci doit être représentative d'un mécanisme physique bien ciblé que l'on souhaite éprouver par notre expérimentation numérique et conçue de sorte à préparer l'interprétation, notamment en termes d'ondes de Kelvin (cf. chapitre 2)
- le choix de la méthode numérique est guidé par les deux précédents points, le régime de l'écoulement à caractériser et le degré de précision requis, pour obtenir si possible des résultats très bien convergés ou a minima suffisamment robustes et fiables pour la physique.

## 4.2 Les modèles classiques de tourbillons sans écoulement axial

Nous rappelons ici les expressions mathématiques en coordonnées cylindriques des modèles de tourbillon auxquels nous avons fait référence au chapitre 2. Nous les passons brièvement en revue avant de choisir le modèle utilisé dans les simulations numériques de cette étude.

### 4.2.1 Le tourbillon de Rankine

$$V_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma r}{2\Pi a^2} & r < a \\ \frac{\Gamma}{2\Pi r} & r > a \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\Theta(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{\Pi a^2} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (4.3)$$

$$P(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma^2}{8\Pi^2 a^4} \left( \frac{r^2}{a^2} - 2 \right) & r < a \\ -\frac{\Gamma^2}{8\Pi^2 r^4} & r > a \end{cases} \quad (4.4)$$

Les intérêts de ce modèle résident dans la simplicité de son champ de vitesse et la possibilité de développer totalement les calculs de manière analytique. Son principal inconvénient est d'être par construction un modèle non visqueux (il introduit une discontinuité par morceau du profil de vorticité), donc peu réaliste.

### 4.2.2 Le tourbillon de Lamb-Oseen

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\Pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \right] \quad (4.5)$$

$$\Theta(r) = \frac{\Gamma}{\Pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \quad (4.6)$$

$$P(r) = -\frac{\Gamma^2}{8\Pi^2 a_0^4} \left[ \frac{(1 - \exp(-\eta))^2}{\eta} + 2e_{int}(\eta) - 2e_{int}(2\eta) \right] \quad (4.7)$$

où  $\eta = \frac{r^2}{a_0^2}$  et  $e_{int}$  représente la fonction exponentielle intégrale définie par  $e_{int}(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} e^{-t}/t dt$

Les intérêts de ce modèle sont sa régularité mathématique (profil  $C^{\infty}$ , très appréciable en calcul CFD) et le fait d'être une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles avec un rayon du tourbillon qui se diffuse au cours du temps selon la loi  $a_0(t)^2 = a_0(0)^2 + 4\nu t$ .

### 4.2.3 Les tourbillons à deux échelles

Fabre [99] a proposé deux modèles analytiques (que nous noterons VM1 et VM2) dans le but de mieux représenter les profils expérimentaux mesurés en soufflerie. Signalons que cette famille de modèles à deux échelles (plus "réalistes" que les modèles de Rankine et Lamb-Oseen pour représenter les tourbillons d'avions), a été validée par la communauté scientifique et a notamment permis à Fabre et Jacquin [95] de mettre en évidence des différences importantes sur le comportement des instabilités à courtes longueurs d'onde. De plus, les conclusions tirées de ces modèles multi-échelles se rapprochent des observations expérimentales et mesures réalisées sur des tourbillons de bout d'aile, en particulier en termes de spectre large bande. Enfin, cette étude [95] a démontré que les propriétés des instabilités dépendent fortement de la zone intermédiaire du modèle.

$$V_{\theta}(r) = \begin{cases} \Omega_0 r & 0 < r < a_1 \\ \Omega_0 a_1 \left(\frac{r}{a_1}\right)^{-\alpha} & a_1 < r < a_2 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r} & r > a_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

## 4.3 Les perturbations du champ de base

Dans ce paragraphe, nous présentons les expressions analytiques que nous utiliserons dans les simulations numériques pour modéliser les perturbations du B20. Ces expressions sont issues de la thèse de Fabre [99], qui a lui-même repris et légèrement modifié des formes de perturbations étudiées par Arendt & al [8].

### 4.3.1 Une perturbation axisymétrique : $m=0$

$$\begin{cases} v_r' = 0. \\ v_{\theta}'(r, z) = 2 \varepsilon r \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \\ v_z' = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette perturbation s'interprète physiquement comme un pincement axisymétrique ( $m = 0$ ), d'amplitude  $\varepsilon$  et appliqué sur une longueur caractéristique  $\sigma$ .

L'expression analytique de la perturbation initiale de vorticité axiale s'écrit alors :

$$\omega_z'(r, z) = 4 \varepsilon \left(1 - \frac{r^2}{a_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.10)$$

### 4.3.2 Une perturbation hélicoïdale : $m=1$

$$\begin{cases} v_r'(r, \theta, z) = 2 \varepsilon \frac{1 - \exp(-r^2)}{r^2} \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \cos \theta - \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \sin \theta \right) \\ v_{\theta}'(r, z) = 2 \varepsilon \frac{1 - (1 + 2r^2) \exp(-r^2)}{r^2} \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \sin \theta + \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \cos \theta \right) \\ v_z' = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $F$  représente la fonction de Dawson définie par  $F(z) = \exp(-z^2) \int_0^z e^{t^2} dt$ .

Cette perturbation s'interprète physiquement comme un déplacement hélicoïdal du centre du tourbillon ( $m = 1$ ), d'amplitude  $\varepsilon$  par rapport au coeur du vortex, et appliqué sur une longueur caractéristique  $\sigma$ .

L'expression analytique de la perturbation initiale de vorticité axiale s'écrit alors :

$$\omega'_z(r, \theta, z) = 8 \varepsilon \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \sin \theta + \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \cos \theta \right) \quad (4.12)$$

### 4.3.3 Une perturbation elliptique : m=2

$$\begin{cases} v'_r(r, \theta, z) = \varepsilon \frac{(1+r^2) \exp(-r^2)-1}{r^3} \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \cos(2\theta) - \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \sin(2\theta) \right) \\ v'_\theta(r, z) = \varepsilon \frac{(1+r^2+r^4) \exp(-r^2)-1}{r^3} \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \sin(2\theta) + \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \cos(2\theta) \right) \\ v'_z = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Cette perturbation s'interprète physiquement comme un aplatissement elliptique du tourbillon ( $m = 2$ ), d'amplitude  $\varepsilon$  par rapport au coeur du vortex, et appliqué sur une longueur caractéristique  $\sigma$ .

L'expression analytique de la perturbation initiale de vorticité axiale s'écrit alors :

$$\omega'_z(r, \theta, z) = -2 \varepsilon \frac{r^2}{a_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \left( \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) \sin(2\theta) + \frac{2}{\sqrt{\Pi}} F\left(\frac{z}{\sigma}\right) \cos(2\theta) \right) \quad (4.14)$$

## 4.4 Choix de l'outil numérique

De manière générale, la complexité et la grande variété des phénomènes dans les écoulements tournants représentent une réelle difficulté pour la simulation numérique.

Dans notre étude, notre objectif est de faire des simulations numériques pouvant reproduire le phénomène d'éclatement tourbillonnaire observé à la soufflerie B20. Pour ce faire, nous devons choisir un outil CFD qui nous permette de prendre en charge simultanément les multiples facteurs susceptibles de participer au vortex bursting décrit par Spalart. Pour restituer un phénomène aussi complexe par la simulation, nous devons donc prendre en compte :

- les effets de la viscosité, contrairement à de nombreuses études réalisées par le passé en théorie de fluide parfait
- les effets tridimensionnels de la dynamique tourbillonnaire, inaccessibles aux études 2D
- les effets non linéaires (en complément des études de stabilité linéaire), par résolution des équations complètes de Navier-Stokes, sans aucune approximation ni simplification
- les effets transitoires par la simulation instationnaire, notamment les non normalités des modes azimutaux non axisymétriques (perturbations  $m=1$  et  $m=2$ ) et les éventuelles croissances transitoires qui peuvent en résulter.

Pour toutes ces raisons, notre choix de l'outil numérique s'est porté sur un code DNS avec des schémas de discrétisation spatiale d'ordre élevé. Un tel outil nous paraît bien adapté pour des études fondamentales sur la dynamique d'un tourbillon [145, 204, 214, 228], car la précision de ce type de méthode numérique s'approche de celle des méthodes spectrales [96, 98, 99] ou

pseudo-spectrales [67]. En particulier, la simulation numérique directe des tourbillons de sillage [105, 154, 221] s'est considérablement développée dans la dernière décennie avec les progrès des méthodes numériques et l'avènement de super-calculateurs de plus en plus puissants.

A priori, plusieurs codes de recherche développés à l'ONERA sont en mesure de répondre aux exigences de notre modélisation. Des calculs comparatifs de précision ont été réalisés au DSNA<sup>2</sup> sur les problématiques de sillage tourbillonnaire, notamment entre les codes PEGASE, SABRINA et FLUDILES. En ce qui concerne les simulations d'écoulements de jets et de jets tourbillonnaires, le code FLUDILES avec son schéma d'ordre le plus élevé (le schéma hermitien d'ordre six, décrit au chapitre 5) donne les résultats les plus proches de données issues de l'expérience en particulier au niveau de la restitution du cône potentiel. L'ajout d'un tourbillon à un écoulement de jet complique sensiblement la résolution numérique du problème et le code FLUDILES a permis de simuler avec succès plusieurs configurations d'interaction jet-tourbillon (thèses de Brunet [43], Ferreira-Gago [106] et Maglaras [188]). Pour cette étude, notre choix s'est donc porté naturellement sur le code de calcul FLUDILES.

## 4.5 Conclusions de la modélisation

Nous avons choisi le profil gaussien de Lamb-Oseen pour modéliser le champ de vitesse dans le tourbillon de sillage. En effet, la dynamique linéaire de ce modèle s'avère très riche et complexe, comme l'ont montré des études théoriques (Fabre & al. [96, 98, 99]).

De plus, des études de nature expérimentale, en particulier Meunier [197], ont montré que les fréquences mesurées par des essais expérimentaux en bassin d'eau sont en très bon accord avec celles prédites par les analyses linéaires du tourbillon de Lamb-Oseen (Fabre & al. [98, 99]). Selon les synthèses de Jacquin & al. [143, 144], le modèle de Lamb-Oseen est représentatif des mécanismes génériques d'instationnarité et d'instabilité dans les tourbillons de sillage.

Le tourbillon de Lamb-Oseen sans vitesse axiale nous paraît suffisamment réaliste pour notre étude et c'est pourquoi nous l'avons retenu comme modèle de champ porteur dans nos simulations numériques (cf. chapitres 6 et 7). Cependant, ce choix reste une hypothèse dans notre démarche de modélisation de l'éclatement tourbillonnaire observé au banc B20.

Muni du champ de base, nous avons construit nos perturbations initiales selon deux critères :  
 - une interprétation physique claire et simple : variation de la taille du coeur tourbillonnaire pour la perturbation  $m=0$ , déplacement hélicoïdal du centre du tourbillon pour la perturbation  $m=1$  et aplatissement elliptique du tourbillon pour la perturbation  $m=2$   
 - la perturbation initiale est construite de sorte à être décomposable sur la base constituée de l'ensemble des modes normaux d'un nombre d'onde azimutal  $m$  donné, en suivant l'idée de Arendt & al. [8]. Cela facilite l'interprétation physique des résultats numériques (chapitre 6).

Cette étude est donc de nature fondamentale et les calculs numériques sont effectués à l'aide d'un code de Simulation Numérique Directe (DNS) développé à l'ONERA pour les problématiques de sillage tourbillonnaire et d'interaction jet/tourbillon et le chapitre suivant est consacré à une présentation détaillée du code de calcul FLUDILES.

Au final, on réalise des DNS temporelles de trois différents types de perturbation sur un tourbillon de Lamb-Oseen.

---

<sup>2</sup>communications personnelles avec Odile LABBE (DSNA/ETRI)

# Chapitre 5

## Méthodes numériques

La simulation numérique est devenue l'un des principaux outils d'investigation de la mécanique des fluides et des transferts. Elle a permis, au fur et à mesure du développement des performances informatiques, de décrire des écoulements physiquement de plus en plus complexes. De nos jours, elle est un complément très précieux de l'étude expérimentale et permet, entre autres, d'effectuer des tests paramétriques complets sans influencer sur la dynamique de l'écoulement (méthode d'investigation non intrusive).

L'objet de ce chapitre est de présenter l'outil de calcul et les méthodes numériques utilisés. Ce chapitre est nécessaire et volontairement concis afin de faciliter sa lecture et de passer rapidement aux chapitres suivants, relatifs à la physique tourbillonnaire.

### 5.1 Présentation du code FLUDILES

Le code dénommé "FLUDILES" [104] a pour but de résoudre numériquement les équations de la mécanique des fluides. Deux approches sont proposées dans ce code : la simulation numérique directe (SND en français ou DNS en anglais, pour Direct Numerical Simulation) et la simulation des grandes échelles (SGE en français ou LES en anglais, pour Large Eddy Simulation). L'acronyme FLUDILES reprend donc les principales caractéristiques du code avec **FLU** pour **FLU**id, **DI** pour **DI**rect, **LE** pour **LE**gde **LE**ddy et enfin **S** pour **S**imulation. Ce code de calcul a été développé à l'ONERA sur la base d'une version compressible du code PEGASE [230], au cours des thèses successives de Brunet [43] et de Ferreira-Gago [106].

Nous précisons que toutes les simulations numériques présentées dans cette thèse ont été réalisées avec le code de calcul FLUDILES dans sa version DNS, afin d'obtenir la meilleure précision numérique (discrétisation à l'ordre six des termes convectifs et visqueux). De plus, pour résoudre numériquement nos configurations physiques, des adaptations se sont avérées nécessaires, ce qui nous amène à présenter les développements spécifiques apportés à ce code de recherche. Enfin, nous terminons ce chapitre par la présentation des outils de post-traitement mis en oeuvre pour l'exploitation de nos calculs DNS.

#### 5.1.1 Equations résolues

Le code FLUDILES est fondé sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires, dans le cas d'un écoulement compressible de fluide newtonien et formulées en variables conservatives (densité  $\rho$ , quantité de mouvement  $\rho u_i$  et énergie totale  $E$ ). Le système d'équations est adimensionné au moyen des grandeurs de référence  $L_{ref}$ ,  $u_{ref}$ ,  $\rho_{ref}$ ,  $T_{ref}$  et  $\mu_{ref}$  qui sont respectivement une longueur, une vitesse, une densité, une température et une viscosité dynamique. Les variables adimensionnées (utilisées dans le code) sont obtenues à partir des

variables dimensionnées, repérées par le symbole (\*) et normalisées par les grandeurs de référence de la façon suivante :

$$u = \frac{u^*}{u_{ref}}, \quad T = \frac{T^*}{T_{ref}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_{ref}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_{ref} u_{ref}^2}, \quad E = \frac{E^*}{\rho_{ref} u_{ref}^2}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_{ref}} \quad (5.1)$$

Le système formé par l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie totale, exprimé en fonction des variables adimensionnées, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((E+p)u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.4)$$

Ici  $t$  et  $x_i$  sont des variables indépendantes représentant respectivement le temps et les coordonnées spatiales. Les trois composantes de la vitesse sont notées  $u_i$  ( $i=1,2,3$ ) et nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés, dite d'Einstein.

Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par :

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu(T)}{\mathcal{R}e} S_{ij} \quad (5.5)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (5.6)$$

$S_{ij}$  est le tenseur des taux de déformation et  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

D'une manière générale, la viscosité dynamique  $\mu(T)$  du fluide dépend de la température. Plusieurs lois de variations sont possibles, notamment la loi de Sutherland [84] et les lois en puissance [239]. La loi de Sutherland s'exprime sous la forme :

$$\mu(T) = \frac{\mu^*(T^*)}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T^*}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_{ref} + T_0}{T^* + T_0} \right) \quad (5.7)$$

où  $\mu_{ref}$  désigne la viscosité à la température de référence  $T_{ref}$ , et  $T_0$  est une constante qui pour l'air prend la valeur  $T_0 = 110K$ .

Pour la résolution numérique, il est courant d'utiliser une loi en puissance, moins coûteuse d'un point de vue algorithmique :

$$\mu(T) = \frac{\mu^*(T^*)}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T^*}{T_{ref}} \right)^\alpha \quad \text{avec} \quad 0.5 < \alpha < 1 \quad (5.8)$$

Dans le code FLUDILES, cet exposant a été fixé à  $\alpha = 0.75$  car Schlichting [239] a montré que cette loi permet d'obtenir une assez bonne approximation de la formule de Sutherland sur une large gamme de températures.

L'énergie totale est définie par :

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u_i u_i \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

Le flux de chaleur est donné par la relation :

$$q_j = -\frac{\mu(T)}{(\gamma - 1)\mathcal{R}e\mathcal{P}r\mathcal{M}a^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (5.11)$$

La pression  $p$ , la température  $T$  et la densité  $\rho$  sont liées par la loi des gaz parfaits adimensionnée :

$$p = \frac{\rho T}{\gamma \mathcal{M}a^2} \quad (5.12)$$

La température  $T$  et la pression  $p$  sont obtenues au cours du calcul numérique par les relations de passage suivantes :

$$T = \gamma(\gamma - 1)\mathcal{M}a^2 \left( \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}u_i u_i \right) \quad (5.13)$$

$$p = (\gamma - 1)E - \rho(\gamma - 1)\frac{1}{2}u_i u_i \quad (5.14)$$

Cette forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes fait apparaître plusieurs nombres sans dimension, présentés ci-dessous. Ces paramètres de similitude interviennent directement dans la mise en données des simulations numériques.

### 5.1.2 Paramètres adimensionnels

Le nombre de Reynolds de référence  $\mathcal{R}e$  compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Il est défini à partir des grandeurs de référence introduites précédemment :

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho_{ref} U_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}} \quad (5.15)$$

Le coefficient  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants. Dans cette étude, afin de n'introduire aucune non-linéarité supplémentaire, on choisit de ne pas tenir compte des variations des chaleurs spécifiques avec la température et  $\gamma$  est fixé à 1.4 qui est la valeur communément admise pour l'air.

Le nombre de Prandtl de référence  $\mathcal{P}r$  est obtenu à partir de la viscosité dynamique de référence  $\mu_{ref}$ , de la chaleur spécifique à pression constante  $C_p$  et de la conductivité thermique  $k$ . Ce nombre sans dimension compare les transferts de quantité de mouvement associés aux forces visqueuses, aux transferts de chaleur par conduction. Dans notre étude, le nombre de Prandtl est choisi constant et égal à 0.7 (valeur représentative d'un écoulement d'air).

$$\mathcal{P}r = \frac{\mu_{ref} C_p}{k} \quad (5.16)$$

Le nombre de Mach de référence  $\mathcal{M}a$  est défini par :

$$\mathcal{M}a = \frac{U_{ref}}{c_{ref}} \quad (5.17)$$

où la vitesse du son de référence est donnée par la relation :

$$c_{ref} = \sqrt{\gamma r T_{ref}} \quad (5.18)$$

$r$  désigne le rapport  $r = R/M$

$R$  est la constante universelle des gaz parfaits, dite de Boltzmann :  $R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}$

$M$  est la masse molaire du gaz considéré, exprimée en  $kg mol^{-1}$

Pour l'air dans les CNTP, les valeurs communément admises sont  $M = 29 \cdot 10^{-3} kg mol^{-1}$  et  $r \approx 287 J kg^{-1} K^{-1}$ .

## 5.2 Méthodes numériques

On présente dans cette partie les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans la version DNS du code FLUDILES. Les variables de vitesse, pression, température et densité sont discrétisées sur un maillage cartésien de  $m$  noeuds avec :

$$m = m_1 \times m_2 \times m_3 \quad (5.19)$$

$$(x, y, z) = (x, y, z)(i, j, k) \quad (5.20)$$

$$i = 1, m_1 ; j = 1, m_2 ; k = 1, m_3 \quad (5.21)$$

Les sections suivantes décrivent les schémas de discrétisation et les conditions aux limites appliquées aux frontières du domaine de calcul.

### 5.2.1 Discrétisation spatiale

Cette partie traite des schémas de discrétisation spatiale utilisés dans le code DNS, en distinguant les termes convectifs et diffusifs. L'ensemble des schémas est de type différences finies.

#### 5.2.1.1 Discrétisation des termes convectifs

La principale difficulté d'une simulation numérique directe consiste à résoudre correctement toutes les échelles de l'écoulement. Les termes responsables du caractère turbulent d'un écoulement sont les termes non-linéaires de convection. Pour une DNS de qualité, il est donc nécessaire de les discrétiser correctement, en utilisant des algorithmes de résolution appropriés. Les schémas de discrétisation utilisés doivent être à la fois précis (erreur de troncature) et en mesure de conserver cette précision sur une large gamme d'échelles. Lele [177] a montré que les schémas compacts répondent à cette double exigence et sont donc particulièrement bien adaptés à la DNS. Ainsi, dans le code FLUDILES, un schéma compact précis à l'ordre six a été choisi pour la discrétisation des termes convectifs présents dans les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie.

Souvent qualifiée de méthode "pseudo-spectrale", la discrétisation à partir de schémas compacts tente de se rapprocher des méthodes spectrales, où les dérivées sont discrétisées en fonction de l'ensemble des points du maillage.

Afin de simplifier les explications, nous prenons la direction  $x$  comme référence et nous considérons le cas d'un maillage à pas constant, les expressions des dérivées restant les mêmes quelle que soit la direction considérée. Dans les schémas compacts, la valeur d'une dérivée calculée en un noeud donné dépend à la fois des valeurs du champ et des dérivées calculées aux noeuds voisins. Ainsi, à un noeud indexé  $i$  et en désignant par  $\phi'_i$  l'approximation numérique de la dérivée première, le schéma aux différences finies s'écrit sous la forme :

$$\alpha \phi'_{i-1} + \phi'_i + \alpha \phi'_{i+1} = a \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} + b \frac{\phi_{i+2} - \phi_{i-2}}{4h} \quad (5.22)$$

où  $h$  désigne le pas d'espace spatial défini par  $h = x_{i+1} - x_i$ .

Les coefficients  $\alpha$ ,  $a$  et  $b$  sont obtenus en égalant les coefficients des développements limités d'ordre successifs et il convient de considérer les quatre cas suivants.

*Premier cas* :  $3 \leq i \leq m_1 - 2$  :  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $a = \frac{14}{9}$  et  $b = \frac{1}{9}$ . Le schéma est d'ordre six et l'erreur de troncature est de  $\frac{4}{7!} \times h^6 \times \phi_i^{(7)}$ .

*Deuxième cas* :  $i = 2$  et  $i = m_1 - 1$  :  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $a = \frac{3}{2}$  et  $b = 0$ . Le schéma est d'ordre quatre et l'erreur de troncature est de  $\frac{1}{5!} \times h^4 \times \phi_i^{(5)}$ .

*Troisième et quatrième cas* :  $i = 1$  et  $i = m_1$

L'approximation de la dérivée première au noeud  $i = 1$  s'écrit

$$\phi'_1 + 2\phi'_2 = \frac{1}{h} \{2\phi_2 + 0.5\phi_3 - 2.5\phi_1\}$$

Le schéma est d'ordre trois et l'erreur de troncature est de  $\frac{1}{12} \times h^3 \times \phi_1^{(4)}$ .

L'approximation de la dérivée première au noeud  $i = m_1$  s'écrit

$$\phi'_{m_1} + 2\phi'_{m_1-1} = \frac{1}{h} \{2.5\phi_{m_1} - 2\phi_{m_1-1} - 0.5\phi_{m_1-2}\}$$

Le schéma est d'ordre trois et l'erreur de troncature est de  $\frac{1}{12} \times h^3 \times \phi_{m_1}^{(4)}$ .

Pour minimiser l'erreur de repliement spectral, plus connue sous le nom d'erreur "d'aliasing", une formulation semi-conservative des termes non-linéaires de convection est employée en suivant l'approche de Blaisdell & al [37], de sorte que :

$$\frac{\partial(\rho u_i q)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\rho u_i q)}{\partial x_j} + q \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} + \rho u_i \frac{\partial q}{\partial x_j} \right) \quad (5.23)$$

où  $q$  désigne une composante de vitesse ou un scalaire (énergie totale). Une formulation équivalente est utilisée pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \quad (5.24)$$

Comme l'ont signalé Ferreira-Gago [106] et Maglaras, cette procédure peut dans certains cas se révéler insuffisante, et l'introduction d'une source de dissipation supplémentaire est parfois

nécessaire à l'élimination des hautes fréquences [105, 131]. Nous reviendrons par la suite sur ce dernier point.

### 5.2.1.2 Discrétisation des termes diffusifs

Dans la version DNS du code FLUDILES, les termes diffusifs peuvent être discrétisés au choix à l'ordre six ou à l'ordre deux. Pour la LES, en revanche, les termes diffusifs sont exclusivement discrétisés à l'aide d'un schéma d'ordre deux.

#### • Discrétisation à l'ordre deux

Dans ce cas, les dérivées premières s'écrivent sous la forme :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 h_i} \quad \text{avec} \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad (5.25)$$

Cette expression permet de discrétiser les termes dissipatifs croisés tels que  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right)$  avec  $i \neq j$ . Cependant, il a été constaté [106] que l'utilisation de ce même schéma pour la discrétisation des termes dissipatifs tels que  $i = j$  donne lieu à l'apparition de fortes oscillations numériques. Dans ce dernier cas, on utilise plutôt les schémas suivants :

Si le maillage est constant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)\right)_i = \frac{1}{2 h_i^2} \left( (\mu_i + \mu_{i+1})\phi_{i+1} - 2 \left( \mu_i + \frac{\mu_{i-1} - \mu_{i+1}}{2} \right) \phi_i + (\mu_{i-1} + \mu_i)\phi_{i-1} \right) \quad (5.26)$$

Sinon :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)\right)_i = \frac{1}{h_{i-1} + h_i} \left( (\mu_i + \mu_{i+1}) \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_i} - (\mu_{i-1} + \mu_i) \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (5.27)$$

Les schémas 5.26 et 5.27 sont du second ordre sous la restriction que l'éirement du maillage reste faible entre deux mailles consécutives lorsqu'on utilise l'expression 5.27.

L'utilisation d'un schéma du second ordre pour la discrétisation des termes diffusifs peut être interprétée comme une source de dissipation numérique. Cette caractéristique a été exploitée dans les études de Ferreira-Gago pour éviter l'apparition d'éventuelles instabilités numériques, notamment celles dues au phénomène de repliement spectral. Cette dissipation agit essentiellement sur les hautes fréquences et n'affecte pas de manière significative les basses fréquences [103]. Nous reviendrons par la suite sur ces aspects numériques, notamment les instabilités qui peuvent se développer avec le schéma compact centré et une technique de stabilisation de la méthode numérique.

#### • Discrétisation à l'ordre six

Un schéma compact peut également être utilisé pour la discrétisation des termes diffusifs. Dans ce cas, les termes dissipatifs du type  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right)$  avec  $i \neq j$  sont discrétisés à l'aide des schémas explicités au § 2.2.1.1. En revanche, pour éviter les oscillations numériques, les termes dissipatifs tels que  $i = j$  sont décomposés de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (5.28)$$

Pour les dérivées secondes, le schéma prend une forme analogue à celle utilisée pour les dérivées premières. Le lecteur peut retrouver l'expression de la discrétisation des dérivées secondes à l'aide du schéma compact décrit par Lele [177].

### 5.2.2 Intégration temporelle

L'intégration temporelle est effectuée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta compact à trois pas. Ce schéma est précis au troisième ordre et ne nécessite que deux tableaux de stockage par variable.

Les schémas de Runge-Kutta sont couramment utilisés dans les codes de simulation numérique en raison de leur relative simplicité de mise en oeuvre, mais aussi et surtout parce qu'ils offrent un bon compromis entre précision, stabilité, coût de stockage et temps de calcul.

Par souci de lisibilité et en reprenant un formalisme classique, les équations sont présentées sous la forme symbolique suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = H(\phi) = -C(\phi) + D(\phi) - P(\phi) \quad (5.29)$$

$\phi$  représente les vecteurs formés par les variables conservatives  $[\rho, \rho u_i, E]^T$  et les opérateurs C, D et P regroupent respectivement les termes de convection, de diffusion et de pression. En désignant par n l'indice temporel (i.e. correspondant au numéro de l'itération de calcul), le schéma d'intégration en temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi^n \\ \phi_1 &= \phi_0 + \gamma_1 \Delta t H_0 & H_0 &= H(\phi_0) \\ \phi_2 &= \phi_1 + \gamma_2 \Delta t H_1 & H_1 &= H(\phi_1) + \epsilon_1 H_0 \\ \phi_3 &= \phi_2 + \gamma_3 \Delta t H_2 & H_2 &= H(\phi_2) + \epsilon_2 H_1 \\ \phi^{n+1} &= \phi_3 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Afin d'assurer une précision d'ordre trois, les coefficients  $\gamma_k$  et  $\epsilon_k$  doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2(1 + \epsilon_1) + \gamma_3\{1 + \epsilon_2(1 + \epsilon_1)\} &= 1 \\ \gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\{\gamma_1 + (1 + \epsilon_2) + \gamma_2(1 + \epsilon_1)\} &= \frac{1}{2} \\ \gamma_1^2\gamma_2 + \gamma_3\{\gamma_1 + \gamma_2(1 + \epsilon_1^2)\} + \gamma_1\gamma_3\epsilon_2 &= \frac{1}{3} \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 &= \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nous avons choisi d'utiliser les valeurs préconisées par Lowery et Reynolds [185] (méthode à faible encombrement en mémoire) :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2} \\
\gamma_2 &= 0.9106836025229591 \\
\gamma_3 &= 0.3660254037844387 \\
\epsilon_1 &= -0.6830127018922193 \\
\epsilon_2 &= -\frac{4}{3}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

La limite de stabilité des schémas explicite est donnée par la condition non-visqueuse de Courant-Friedrich-Levy (CFL) suivante :

$$\Delta t \leq \left( \frac{|u_1|}{\Delta x} + \frac{|u_2|}{\Delta y} + \frac{|u_3|}{\Delta z} + \frac{1}{\mathcal{M}a} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \right)^{-1} \tag{5.33}$$

Considérons l'équation de convection pure dans le cas particulier où les conditions aux limites sont périodiques :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{5.34}$$

La limite de stabilité non-visqueuse est alors donnée par la relation :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sigma_i}{\omega'_m} \tag{5.35}$$

où  $[-i\sigma_i, i\sigma_i]$  est le segment imaginaire de la région de stabilité du schéma en temps,  $\omega'_m$  la valeur maximale du nombre d'onde modifié pour le schéma d'espace et  $c$  la vitesse du son. Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre trois, et pour le schéma compact d'ordre six, . Dans ces conditions, la stabilité numérique du calcul est assurée pour des nombres de CFL inférieurs à 0.9, selon l'étude de Lele [177].

### 5.2.3 Conditions aux limites

Le code FLUDILES est initialement destiné à des simulations d'écoulements d'air avec des frontières libres (il n'existe actuellement aucun modèle de couche limite dans cet outil de calcul). Il s'agit dans cette section de définir des conditions sur les frontières du domaine de calcul aptes à traduire cette caractéristique, tout en restant en accord avec la physique de notre problème.

#### 5.2.3.1 Frontière longitudinale (direction $y$ )

Une simulation spatiale a pour but de connaître parfaitement l'état d'un écoulement à chaque position en espace. Cependant, lorsque l'on étudie des phénomènes pouvant se produire sur plusieurs centaines de mètres, le nombre de points de maillage nécessaire pour représenter fidèlement de telles distances dépasse rapidement le niveau de puissance actuel d'un grand nombre de supercalculateurs. Ainsi, ce type de calcul reste aujourd'hui encore peu répandu dans la communauté scientifique et inenvisageable à l'ONERA dans l'état actuel de FLUDILES (code de calcul non-parallélisé).

Une simulation temporelle permet de contourner cet obstacle en faisant appel à l'hypothèse selon laquelle la variable de temps  $t$  et la position  $y$  peuvent être considérées comme équivalentes. Ces deux dernières sont alors liées par la relation  $t = y/V_0$ , où  $V_0$  désigne la vitesse de l'écoulement libre. Autrement dit, le calcul est réalisé dans un repère se déplaçant à la vitesse  $V_0$  et l'écoulement est supposé périodique dans la direction  $y$ . Cette méthode permet donc, a priori, de représenter un domaine infini en espace.

Signalons que certains auteurs comme Pradeep et Hussain [217] ont émis des réserves quant aux effets des conditions périodiques sur les simulations numériques de la dynamique tourbillonnaire.

Une formulation simple de périodicité à deux points est utilisée dans le code FLUDILES. On rappelle que, dans l'axe de l'écoulement, le domaine de calcul s'étend des points indicés de 1 à  $m_2$  et on désigne par  $\phi$  toute variable conservative du calcul. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned}\phi(1) &= \phi(m_2 - 1) \\ \phi(m_2) &= \phi(2)\end{aligned}\tag{5.36}$$

### 5.2.3.2 Frontières transverses (directions $x$ & $z$ )

La formulation des conditions aux limites retenue est celle des conditions de non-réflexion, encore appelées conditions de Thompson [257], et dont l'objectif est de recréer avec des frontières artificielles le comportement libre non-confiné. L'approche consiste à linéariser, à chaque pas de temps, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, et à étudier les variables caractéristiques monodimensionnelles normales à la frontière considérée. La résolution numérique est fondée sur une approche non-visqueuse. Le système global regroupant les équations de Navier-Stokes peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad p]^T \tag{5.37}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -c^2 u & c^2 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 & 0 & 2v & 0 & 1 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -c^2 v & 0 & c^2 & 0 & v \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 & 0 & 0 & 2w & 1 \\ -c^2 w & 0 & 0 & c^2 & w \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

où  $c$  désigne la vitesse du son.

Les trois matrices  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ , et  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  sont diagonalisables, ce qui permet de faire apparaître une forme caractéristique du problème. Lorsque l'on s'intéresse à la propagation de l'information dans une direction  $x_i$ , on considère uniquement une équation du type :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \underline{\underline{\mathbf{M}}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0 \tag{5.39}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  désigne la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  ou  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  suivant la direction  $x_i$  considérée.

La diagonalisation de la matrice  $\underline{\mathbf{M}}$  donne des valeurs propres  $\lambda_i$  et des vecteurs propres  $\underline{\psi}_i$ . En multipliant l'équation 5.37 par  $\underline{\psi}_i$ , on peut définir une nouvelle fonction  $W_i$ , telle que pour tout  $i$  :

$$dW_i = \underline{\psi}_i d\underline{\mathbf{U}} \quad (5.40)$$

Les fonctions  $W_i$  sont appelées variables caractéristiques et on peut écrire pour toutes les frontières :

$$\begin{aligned} dW_1 &= dp - \tilde{c}^2 d\rho \\ dW_2 &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_1 \\ dW_3 &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}}_2 \\ dW_4 &= dp + \tilde{\rho} \tilde{c} d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \\ dW_5 &= dp - \tilde{\rho} \tilde{c} d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \\ \lambda_4 &= \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} + c \\ \lambda_5 &= \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - c \end{aligned} \quad (5.42)$$

$\underline{\mathbf{U}}$  désigne le champ de vitesse dans le repère cartésien  $(x, y, z)$  et  $\underline{\mathbf{n}}$  la normale extérieure à la frontière. Le trièdre formé par les vecteurs  $(\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)$  est direct et la base des vecteurs  $(\underline{\mathbf{n}}_1, \underline{\mathbf{n}}_2)$  est une base du plan tangentiel à la frontière considérée. Les variables surmontées du symbole  $\sim$  désignent une approximation de la valeur des variables correspondantes au pas de temps précédent.

Le calcul des conditions aux limites s'opère en trois temps, et ceci pour chaque passe directionnelle non-visqueuse dans une direction  $x_i$ . Dans une première étape, on impose des conditions aux limites de type Von Neumann (pente nulle) et on détermine ainsi les variations temporelles  $dW_i$  de chaque variable caractéristique sur les frontières. Dans une seconde étape, on utilise une procédure de correction de ces conditions aux limites. Ce traitement non-réfléchissant consiste à annuler les variations temporelles de chaque variable caractéristique entrante, ce qui se traduit par :

$$\forall \lambda_i < 0, dW_i = 0 \quad (5.43)$$

Enfin, une fois que les variations temporelles des variables caractéristiques sont obtenues aux points frontières, il suffit de résoudre le système 5.41, en cherchant des solutions en terme d'incrémentes :

$$\begin{aligned} dp &= p^{n+1} - p^n \\ du &= u^{n+1} - u^n \\ dv &= v^{n+1} - v^n \\ dw &= w^{n+1} - w^n \\ d\rho &= \rho^{n+1} - \rho^n \end{aligned} \quad (5.44)$$

et de déterminer ainsi toutes les variables au pas de temps  $n + 1$  sur les frontières.

### 5.3 Développements spécifiques dans le code FLUDILES

Nous présentons ici les développements informatiques que nous avons adjoints au code FLUDILES pour les besoins spécifiques de notre étude. Il s'agit d'une part d'une technique de stabilisation de la méthode numérique (filtrage en espace), et d'autre part d'un procédé particulier pour affiner le calcul des perturbations du tourbillon de sillage (anti-diffusion du champ de base).

#### 5.3.1 Filtrage en espace

En fonction de la complexité physique du problème à résoudre (en particulier les simulations directes à hauts nombres de Reynolds) et des méthodes numériques employées (schémas de discrétisation d'ordre élevé), des perturbations numériques peuvent se développer dans la solution du calcul CFD. Dans ce cas, le filtrage spatial est une étape nécessaire à la suppression des ondes dites "parasites", qui trouvent leur origine dans les artefacts de haute fréquence spatiale découlant des irrégularités du problème discret, telles qu'échelles non résolues, non uniformités de maillage ou discontinuités de frontières. Ces ondes parasites n'ont aucun sens physique et peuvent mener à des instabilités numériques remettant en cause la qualité de la solution, voire le bon déroulement du calcul numérique. Il est alors nécessaire de procéder en cours de résolution à leur élimination à l'aide d'un filtrage spatial.

Dans le cas de nos calculs DNS 3D instationnaires sur un tourbillon de Lamb-Oseen avec perturbation, les ondes parasites générées par le schéma compact centré apparaissent à des nombres de Reynolds faiblement turbulents (entre  $10^3$  et  $10^4$ ). La technique de filtrage spatial s'avère donc indispensable et nous avons choisi d'appliquer une méthode de filtrage d'usage courant en aéroacoustique.

##### 5.3.1.1 Caractéristique du filtrage spatial

Relativement à chaque direction spatiale, uniformément discrétisée par un pas constant  $\Delta$ , on considère un opérateur explicite de filtrage  $\Pi[\cdot]$ . Celui-ci est défini à l'aide d'une suite finie, et pondérée par un jeu de coefficients  $f_j$  restant à déterminer, d'opérateurs de translation  $\tau$  agissant selon la direction considérée :

$$\Pi[\cdot] = \sum_{j=-L}^L f_j \tau_{(j\Delta)} [\cdot] \quad (5.45)$$

Ce filtre peut être vu comme l'expression discrète d'une convolution mono-dimensionnelle par une fonction de support borné  $[-L\Delta, L\Delta]$ . On se restreint ici aux schémas centrés et symétriques, c'est à dire tels que  $f_{-j} = f_j$ .

Dans le cas général d'une fonction quelconque, le filtre altère la solution qui lui est soumise et en améliore la régularité, à condition qu'il soit judicieusement "calibré".

Les techniques mathématiques de construction d'un filtre sont présentées en détails dans le chapitre 5 de la thèse de Redonnet [219], notamment pour assurer le bon calibrage de l'opérateur de filtrage par ses caractéristiques en espace d'une part et en fréquence d'autre part.

La caractérisation en espace vise à minimiser l'erreur de troncature  $\epsilon_t$  qui est une mesure directe de l'altération occasionnée par le filtre.

$$\epsilon_t = [\cdot] - \Pi[\cdot] \quad (5.46)$$

A l'aide de développements en séries de Taylor, on détermine l'ordre P du filtre tel que  $\epsilon_t \underset{\Delta \rightarrow 0}{\approx} O(\Delta^p)$ .

La figure 5.1 présente les courbes de fonctions de transfert associées à chacun des filtres classiques, dont les expressions sont rappelées au paragraphe suivant. On constate que plus l'ordre de l'opérateur est élevé, plus le filtre est sélectif et donc meilleur car il élimine seulement les hautes fréquences spatiales (celles des parasites numériques), sans grande altération du contenu en basses et moyennes fréquences du reste du spectre.

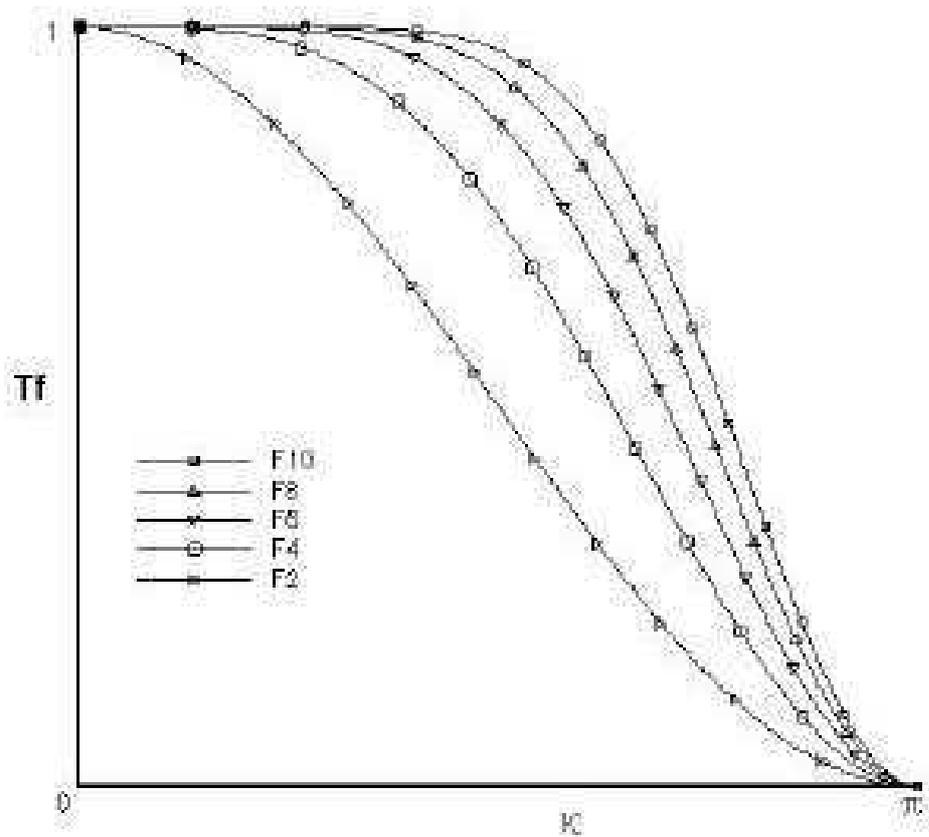


FIG. 5.1 – Fonctions de transfert des filtres spatiaux à différents ordres.

### 5.3.1.2 Expressions analytiques des filtres classiques

Dans un but pratique et de lisibilité, nous rappelons au préalable les valeurs des coefficients et les ordres associés aux différents schémas de filtrage, obtenus par Redonnet.

Filtre à 3 points d'ordre 2 (F2) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Filtre à 5 points d'ordre 4 (F4) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \\ f_2 = f_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/16 \\ 4/16 \\ -1/16 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Filtre à 7 points d'ordre 6 (F6) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \\ f_2 = f_{-2} \\ f_3 = f_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44/64 \\ 15/64 \\ -6/64 \\ 1/64 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

Filtre à 9 points d'ordre 8 (F8) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \\ f_2 = f_{-2} \\ f_3 = f_{-3} \\ f_4 = f_{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186/256 \\ 56/256 \\ -28/256 \\ 8/256 \\ -1/256 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Filtre à 11 points d'ordre 10 (F10) :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 = f_{-1} \\ f_2 = f_{-2} \\ f_3 = f_{-3} \\ f_4 = f_{-4} \\ f_5 = f_{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772/1024 \\ 210/1024 \\ -120/1024 \\ 45/1024 \\ -10/1024 \\ 1/1024 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

A partir de ces filtres classiques, nous avons d'abord programmé un filtre monodimensionnel dans un module spécifique, en appliquant le filtre d'ordre maximal (F10) sur tous les points discrétisés qui le permettent (i.e. disposant de 5 points de part et d'autre du point courant) et en utilisant les filtres d'ordres inférieurs pour traiter spécifiquement les points à proximité des frontières de l'intervalle. Nous avons ensuite testé séparément ce module de filtrage en le validant sur plusieurs fonctions analytiques. Enfin, nous l'avons implémenté dans FLUDILES, avec les autres modules sources du code de calcul.

Cette méthode de filtrage spatial a été utilisée systématiquement dans toutes les simulations numériques présentées dans la suite de ce mémoire. Après plusieurs tests réalisés sur des calculs DNS de nos propres perturbations présentées au chapitre 4 et avec l'expérience du département DSNA<sup>1</sup> sur cette technique numérique appliquée en LES, nous nous sommes finalement fixé la stratégie de filtrage suivante :

- le filtre est appliqué après chaque itération du calcul instationnaire, selon chacune des trois directions spatiales de la DNS
- la correction est effectuée à hauteur de 15% du vecteur solution préalablement calculé par la DNS, ce qui permet de réduire l'altération de la solution numérique.

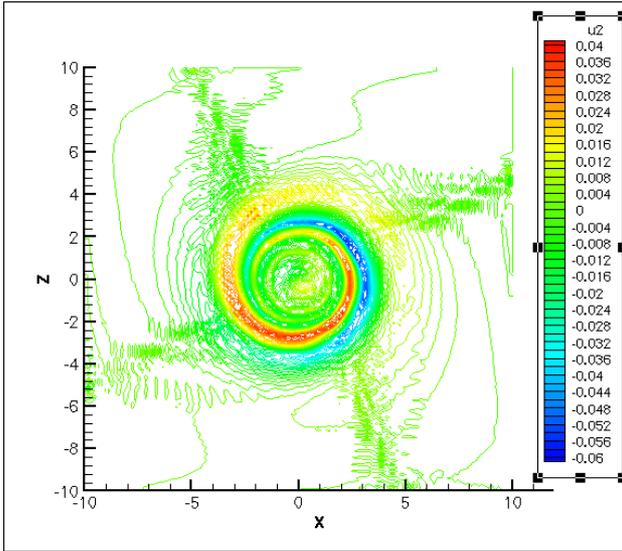


FIG. 5.2 – Champ de vitesse axiale de notre perturbation  $m=1$  à  $Re=10000$  -  $T=4$  sans filtrage spatial.

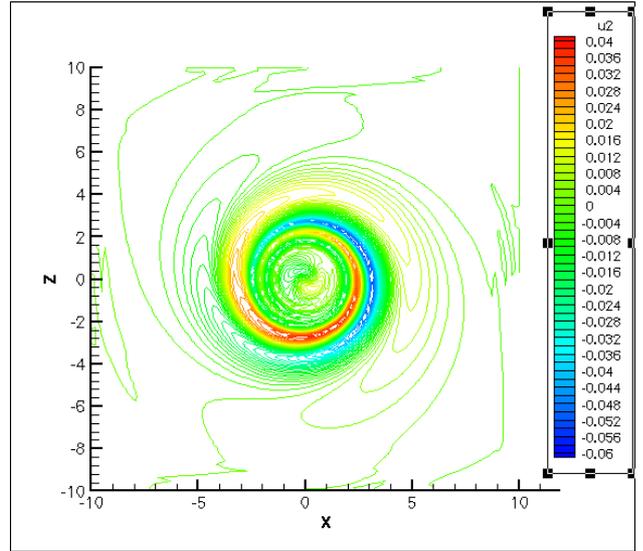


FIG. 5.3 – Champ de vitesse axiale de notre perturbation  $m=1$  à  $Re=10000$  -  $T=4$  avec filtrage spatial.

Comme le montre la comparaison des figures 5.2 et 5.3 à  $Re=10000$  de notre perturbation hélicoïdale sans et avec filtre, ce compromis entre la fréquence de filtrage et le facteur de pondération nous a permis de juguler les oscillations numériques de type pair-impair liées aux échelles non résolues par le maillage, sans déteriorer la qualité de la solution DNS dans le cas de nos configurations de calcul.

Pour finir, signalons que d'autres auteurs préfèrent appliquer cette technique de stabilisation du schéma numérique de manière moins fréquente dans le calcul instationnaire mais avec une pondération plus forte de la correction (par exemple 50% d'altération de la solution toutes les 10 itérations). Le compromis entre la fréquence de filtrage et le facteur de pondération dépend au cas par cas de la difficulté du problème physique à résoudre numériquement.

### 5.3.2 Anti-diffusion du champ de base

Cette technique numérique a pour but de "figer" le champ de base au cours du temps, tout en laissant les perturbations évoluer dans la simulation instationnaire. Dans notre démarche de modélisation, l'intérêt de cette méthode est double d'un point de vue physique :

- Elle permet dans les calculs DNS de nous placer rigoureusement dans les mêmes conditions

<sup>1</sup>communications personnelles avec Marc TERRACOL (DSNA/ETRI)

que la théorie de stabilité linéaire, qui suppose par construction un champ de base fixe. Comme nous le verrons au chapitre suivant, le respect de cette hypothèse a permis de valider finement le code DNS dans le régime linéaire, par comparaison avec les calculs de Fabre [99].

- Elle permet d'isoler proprement les perturbations, sans avoir à réaliser une seconde DNS. Calculées de cette manière, les perturbations ne sont pas "polluées" par la diffusion du champ de base (importante à bas nombre de Reynolds).

Pour une présentation détaillée des techniques de reconstruction des fluctuations turbulentes, le lecteur pourra se référer aux nombreuses études du DSNA sur les méthodes de type NLDE (Non Linear Disturbance Equation), qui sont d'une grande utilité pour étudier les phénomènes propagatifs, notamment les ondes de pression en aéroacoustique. On peut mentionner en particulier les travaux de Labourasse & al [155,156] et de Terracol & al [254] pour les développements théoriques et techniques de ces méthodes. Sur un plan plus physique, on peut citer par exemple les travaux de Lesshafft & al [180], qui ont utilisé avec succès cette technique numérique pour étudier les modes globaux d'un jet chaud.

En ce qui concerne la mise en oeuvre pratique dans notre code de calcul FLUDILES, l'anti-diffusion du champ de base prend la forme d'un terme de rappel appliqué au début de chaque itération instationnaire. En effet, on retranche aux différentes variables de calcul l'incrément dû à la diffusion du seul champ de base : cet incrément est obtenu (et stocké) lors d'un précalcul DNS sur deux itérations du champ de base seul. En procédant de cette manière, l'anti-diffusion présente notamment l'avantage de retrancher les mêmes erreurs de méthode (commise dans le calcul des flux numériques) sur l'écoulement de base et la perturbation initiale superposée au champ porteur. De plus, cette façon de procéder numériquement est peu intrusive puisqu'elle laisse inchangé le problème d'évolution résolu par le code DNS. Signalons que la mise en oeuvre d'une technique d'anti-diffusion du champ porteur est relativement répandue dans les codes de calcul incompressibles mais elle est moins triviale dans les codes compressibles. Au niveau mathématique, le figeage du champ porteur se traduit dans la terminologie de l'hydrodynamique incompressible par les équations 5.54 et 5.55. En effet, tous les calculs DNS présentés dans cette thèse ont été réalisés avec un code compressible à  $Ma = 0.1$  (cf. paragraphe 7.4.1), ce qui légitime une présentation formelle des équations dans le cadre incompressible.

Les équations de la stabilité linéaire incompressible s'écrivent classiquement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (5.52)$$

$$\partial_t \vec{u}' + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{U} = -\vec{\nabla} p' + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}' \quad (5.53)$$

Les équations résolues par notre code DNS à bas nombre de  $Ma$  avec la méthode d'anti-diffusion du champ de base deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}' = 0 \quad (5.54)$$

$$\partial_t \vec{u}' + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{U} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}' = -\vec{\nabla} p' + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}' \quad (5.55)$$

A titre d'illustration, la figure 5.4 présente deux calculs DNS avec et sans figeage du champ de base, avec comparaison aux résultats de la stabilité linéaire, pour matérialiser les effets de la technique d'antidiffusion dans le calcul de l'énergie de la perturbation au cours du temps.

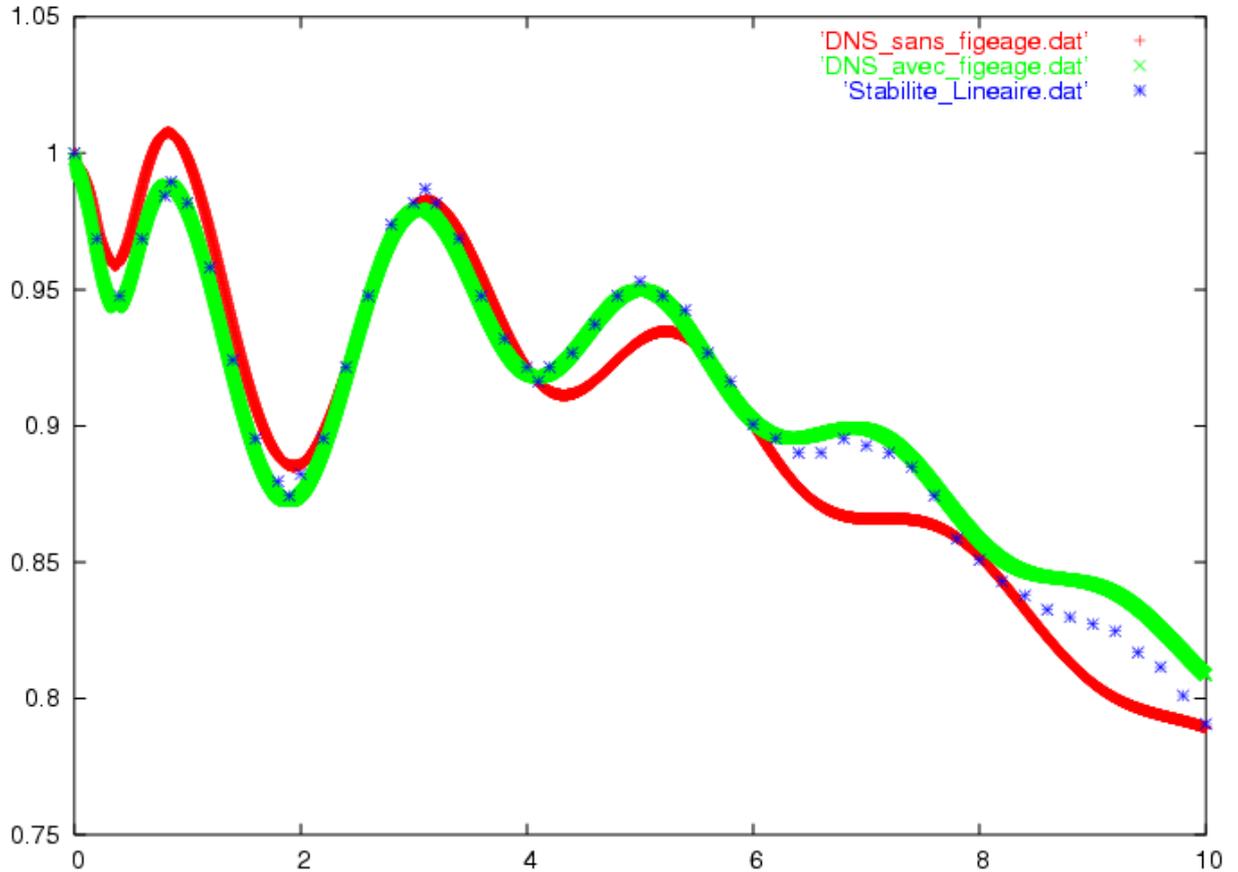


FIG. 5.4 – Calcul de l'énergie cinétique de notre perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  et  $\epsilon = 0.01$  intégrée sur tout le domaine de calcul. Effets de la technique d'antidiffusion du champ de base et comparaison aux résultats de la stabilité linéaire.

On constate sur la figure 5.4 que le figeage du champ porteur a pour effets d'améliorer sensiblement la précision du calcul de la perturbation, aussi bien en amplitude qu'en phase, par rapport aux valeurs de référence du calcul en théorie de stabilité linéaire (Fabre [99]).

Troisième partie

Résultats numériques et analyse  
physique

## Chapitre 6

# Dynamique linéaire d'un tourbillon de Lamb-Oseen

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher à l'étude du comportement instationnaire d'un tourbillon "isolé", c'est à dire que sa dynamique est indépendante de l'influence d'autre(s) tourbillon(s). Ce régime de fonctionnement correspond au sillage d'un avion après le vortex merging (cf. figure 1.3) et est caractérisé par un petit rapport d'aspect, i.e.  $r_c/b \ll 1$ ,  $r_c$  désignant le rayon visqueux et  $b$  la distance entre les deux tourbillons principaux. De plus, conformément à notre démarche de modélisation du chapitre 4, nous choisissons le modèle de Lamb-Oseen (profil gaussien de la vitesse azimutale), relativement "réaliste" pour représenter le champ porteur du tourbillon de sillage.

La dynamique linéaire du modèle de Lamb-Oseen a fait l'objet de nombreuses études, visant à caractériser sa stabilité et les mécanismes physiques participant de ses instationnarités. Le but de ce chapitre est, dans un premier temps, de rappeler les principaux résultats sur la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen et dans un second temps, d'utiliser ces résultats bien documentés comme des cas tests pour valider notre outil de simulation numérique directe et ses développements spécifiques, présentés dans le chapitre précédent.

Le problème de la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen est étudié par deux approches complémentaires, du point de vue des modes propres (ondes de Kelvin) et du point de vue du problème aux valeurs initiales.

Pour ce qui concerne la validation du code de simulation directe, nous avons choisi de comparer les résultats DNS aux calculs de la théorie linéarisée dans le cadre de la résolution numérique d'un problème aux valeurs initiales, afin de faciliter notre modélisation des end-effects qui repose sur la résolution numérique par la DNS d'un problème aux valeurs initiales en régime non linéaire.

### 6.1 Cadre de l'étude

Comme nous l'avons montré au chapitre 2, il est reconnu que les tourbillons peuvent servir de support à la propagation d'ondes dues à la rotation, traditionnellement appelées ondes de Kelvin, en hommage au premier savant qui les a étudiées. Le cas initialement considéré par Lord Kelvin - et repris dans la plupart des études (notamment Saffman [227] et Rossi [222]) - est celui du tourbillon de Rankine. Ce modèle se caractérise par une vorticité constante à l'intérieur du coeur et nulle à l'extérieur. Dans cette configuration, les ondes peuvent être calculées de

manière analytique. On montre notamment que pour chaque combinaison des nombres d'onde axiaux  $k$  et azimutaux  $m$ , il existe une famille infinie de telles ondes qui sont toutes purement oscillantes (de fréquence  $\omega$  réelle). En 1997, Arendt & al. [8] ont montré que ces ondes forment une base complète vis-à-vis des perturbations du coeur du tourbillon (pour le modèle de Rankine), c'est à dire qu'une perturbation arbitraire peut toujours être décomposée exclusivement en une somme de telles ondes. En étudiant la réponse du tourbillon de Rankine à des perturbations initialement localisées, Arendt & al. ont également illustré de quelle manière ces ondes de Kelvin interviennent dans la dynamique linéaire du tourbillon : quelle que soit la forme de la perturbation initialement imposée, celle-ci se décompose en différents paquets d'ondes qui se propagent le long du coeur et l'énergie est globalement conservée.

On s'intéresse ici au cas d'un tourbillon plus "réaliste" que le modèle de Rankine. Le modèle retenu est le tourbillon de Lamb-Oseen, dont la vitesse azimutale présente un profil gaussien donc  $C^\infty$ . Les ondes de Kelvin de ce modèle de tourbillon ont été étudiées par Sipp [247] dans le cas non visqueux et par Fabre [99] dans le cas visqueux. Des différences importantes avec le cas du tourbillon de Rankine ont été mises en évidence. En particulier, Fabre a montré qu'une partie importante de ces ondes ont une structure singulière associée à la présence d'une couche critique et sont fortement amorties sous l'effet de la filamentation et de la viscosité.

Dans ce qui suit, on rappelle les principaux résultats obtenus par la théorie linéarisée et on étudie par la simulation numérique directe le devenir de trois types de perturbations tridimensionnelles localisées, construites de manière à pouvoir être comparées à celles utilisées par Arendt & al. [8] pour le tourbillon de Rankine. Comme nous le verrons, certaines de ces perturbations se propagent sous forme de paquets d'ondes comme dans le cas du tourbillon de Rankine. D'autres, en revanche, sont rapidement amorties par un mécanisme de filamentation similaire à celui qui affecte les perturbations bidimensionnelles.

## 6.2 Les ondes de Kelvin et les modes singuliers du tourbillon de Lamb-Oseen

Comme nous l'avons rappelé précédemment, la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen a été abondamment étudiée, notamment par Sipp [247] (équations d'Euler linéarisées en fluide parfait) puis a été généralisée par Fabre [99], en résolvant les équations de Navier-Stokes linéarisées en théorie de fluide visqueux.

Par la suite, Fabre [98] a proposé une classification exhaustive des ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen, en fonction de la géométrie de la perturbation (le nombre d'onde azimutal  $m$ ). Nous verrons dans les paragraphes suivants que cette classification constitue un précieux moyen d'analyse pour interpréter physiquement la résolution numérique du problème aux valeurs initiales.

### 6.2.1 Quelques points de terminologie pour la classification des ondes de Kelvin

Cette section présente plusieurs définitions introduites par Fabre & al. [98] et utiles pour classer les modes propres d'un point de vue physique. Le nombre d'onde azimutal  $m$  permet la classification des modes selon leur géométrie. La valeur  $m=0$  correspond à des modes axi-symétriques ou, si l'on suit Saffman [227], des modes de torsion "en saucisse". Les modes propres avec  $m = \pm 1$  sont des "modes hélicoïdaux", appelés aussi "modes de torsion". Les modes propres

avec  $|m| > 1$  sont des hélices multiples et Saffman [227] a proposé l'expression "modes crénelés" ("fluted modes"). La quantité  $-m/k$  correspond au pas de l'hélice et le signe de cette quantité donne le sens de propagation le long de l'axe du tourbillon. On distingue les hélices partant vers la gauche ( $m/k > 0$ ) des hélices se propageant vers la droite ( $m/k < 0$ ). En raison des symétries du problème, on a  $\omega(m, k) = \omega(m, -k) = -\omega^*(-m, k)$ , l'astérisque désignant le complexe conjugué. Ainsi, les modes hélicoïdaux de gauche et de droite ont des propriétés symétriques et dans cette analyse nous nous limiterons aux cas  $m \geq 0, k \geq 0$  sans aucune perte de généralité.

Pour  $m \neq 0$ , la quantité  $\omega_r/m$  correspond à la fréquence angulaire du mode. On observe que des modes tels que  $\omega_r/m \geq 1$  tournent plus vite que le coeur du tourbillon et on les appellera "modes corotatifs". Les modes tels que  $0 \leq \omega_r/m \leq 1$  tournent dans le même sens de rotation que le tourbillon, mais lorsqu'on les observe dans le référentiel tournant à vitesse de rotation constante fixée par la fréquence du taux de rotation au centre du vortex  $\Omega_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{V_\theta(r)}{r} \right)$ , il apparaît qu'ils tournent dans le sens opposé. On y fera référence sous la dénomination de "modes rétrogrades". On observe également des modes tels que  $\omega_r/m \leq 0$  qui tournent dans le sens opposé à celui du coeur tourbillonnaire et on les dénommera "modes contrarotatifs". Enfin, les modes tels que  $\omega_r/m = 0$  sont des "modes stationnaires". Les deux dernières catégories n'existent que dans le cas  $m = \pm 1$ .

Une autre notion particulièrement importante concerne la quantité  $\partial\omega_r/\partial k$ . En effet, cette grandeur correspond à la vitesse de groupe et évalue la vitesse de propagation des paquets d'onde dans la direction axiale. En accord avec notre convention d'un tourbillon tournant dans le sens trigonométrique (anti-horaire) autour de l'axe de révolution, on appellera les ondes telles que  $\partial\omega_r/\partial k < 0$  des "modes à propagation vers la gauche" et les ondes telles que  $\partial\omega_r/\partial k > 0$  des "modes à propagation vers la droite". Il est à noter que certains auteurs discriminent les "ondes lentes" des "ondes rapides" selon leur vitesse de phase  $\omega_r/k$  dans la limite des grandes longueurs d'ondes. Cependant, comme le soulignent Fabre & al. [98], ce choix peut conduire à des difficultés d'interprétation, voire même certaines incohérences. Précisément, la vitesse de phase peut tendre vers l'infini pour certaines ondes dans le cas limite des grandes longueurs d'ondes ( $k \rightarrow 0$ ), ce qui ne respecte pas l'invariance Galiléenne. En conséquence, pour la suite de notre étude, nous avons choisi de retenir la vitesse de groupe comme seul critère d'interprétation pour la propagation des ondes, à la manière des travaux de Fabre & al.

Pour finir, nous introduisons une dernière notion nécessaire pour la classification des ondes du tourbillon de Lamb-Oseen, fondée sur leur analyse asymptotique. En effet, les propriétés asymptotiques des modes propres dans la limite  $Re \rightarrow \infty$  permettent de les classer en "modes réguliers" et en "modes singuliers". Les modes propres sont considérés comme réguliers quand à la fois leur fréquence et la structure de leur mode propre admettent un développement régulier sous la forme suivante :

$$\omega = \omega^{(0)} + Re^{-1} \omega^{(1)} + O(Re^{-2}) \quad (6.1)$$

$$[u(r), v(r), w(r), p(r)] = \mathbf{u}^{(0)}(r) + Re^{-1} \mathbf{u}^{(1)}(r) + O(Re^{-2}) \quad (6.2)$$

Pour de tels modes réguliers, l'ordre dominant  $[\omega^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}(r)]$  peut être calculé en utilisant les équations non visqueuses, et la fréquence correspondante  $\omega^{(0)}$  est toujours un réel pur. Le terme  $\omega^{(1)}$  est un imaginaire pur et donne la contribution à l'ordre dominant du taux d'amortissement. Le terme  $\mathbf{u}^{(1)}(r)$  correspond à la correction visqueuse de la structure du mode propre.

En toute rigueur, les puristes (Fabre & al., Le Dizès & al.) restreignent la terminologie des "ondes de Kelvin" aux modes réguliers, en raison de leur relation directe avec les ondes découvertes à l'origine par Lord Kelvin [258] en 1880 pour le tourbillon Rankine. Par ailleurs et conformément à la classification proposée par Fabre & al. [98], nous appellerons les modes qui ne suivent pas ce développement "modes singuliers", bien que les deux catégories s'entremêlent, dans une certaine mesure, en particulier dans le cas des ondes de couches critiques comme nous le verrons au paragraphe 6.2.4.

### 6.2.2 Equations de la stabilité linéaire

La théorie de stabilité linéaire temporelle étudie des perturbations infinitésimales, caractérisées par un nombre d'onde axial  $k$ , un nombre d'onde azimutal  $m$  et une fréquence complexe  $\omega$ . Ces modes propres sont calculés sous la forme de modes normaux, dont la dépendance spatio-temporelle s'écrit :

$$\left(u'_r, u'_\theta, u'_z, p'\right) = [u(r), v(r), w(r), p(r)] \exp(ikz + im\theta - i\omega t) + c.c. \quad (6.3)$$

où l'abréviation c.c. désigne le complexe conjugué. La linéarisation des équations de Navier-Stokes conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{im}{r} v + ikw = 0 \quad (6.4)$$

$$i(m\Omega - \omega)u - 2\Omega v + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left[ \left( \Delta_{m, k} - \frac{1}{r^2} \right) u - \frac{2im}{r^2} v \right] \quad (6.5)$$

$$i(m\Omega - \omega)v + \Xi u + \frac{im}{r} p = \frac{1}{Re} \left[ \left( \Delta_{m, k} - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{2im}{r^2} u \right] \quad (6.6)$$

$$i(m\Omega - \omega)w + ikp = \frac{1}{Re} \Delta_{m, k} w \quad (6.7)$$

Dans ces équations,  $\Omega(r) = V_\theta(r)/r$  désigne le taux de rotation du tourbillon et  $\Xi(r) = V_\theta(r)/r + \partial V_\theta(r)/\partial r$  représente la vorticité axiale du champ de base. La notation  $\Delta_{m, k}$  correspond à l'opérateur Laplacien :

$$\Delta_{m, k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \quad (6.8)$$

Dans ce qui suit, on rappelle succinctement les principales propriétés des ondes de Kelvin d'un tourbillon de Lamb-Oseen, identifiées par Fabre & al. [98, 99]. Pour les aspects techniques de la résolution numérique de ces équations, le lecteur pourra trouver plus de détails sur leur méthode de collocation spectrale et les "bons" réglages des paramètres numériques pour limiter les solutions parasites ("spurious modes"), dans l'article de Fabre et Jacquin [96].

A ce niveau, soulignons simplement que cette approche permet de calculer de manière extrêmement précise les fréquences complexes  $\omega = \omega_r + i \omega_i$  des ondes de Kelvin en fonction des nombres d'onde azimutal et axial  $(m, k)$ , dans le cadre de la théorie locale temporelle de stabilité linéaire. Nous reviendrons ultérieurement sur la question cruciale de la précision numérique, inhérente à la méthode de résolution.

### 6.2.3 Les ondes de Kelvin axisymétriques du tourbillon de Lamb-Oseen

La figure 6.1 retrace les fréquences d'oscillation  $\omega_r$  des ondes (adimensionnées par le taux de rotation  $\Omega_0$  au centre du tourbillon), en fonction de leur nombre d'onde axial  $k$  (normalisé par le rayon  $a_0$  du tourbillon), pour les perturbations de géométrie  $m=0$ . De plus, cette représentation issue des calculs de Fabre [93,99] utilise une échelle de couleurs pour matérialiser le taux d'amortissement temporel  $-\omega_i$ , également adimensionné par la fréquence  $\Omega_0$  (cartouche à droite de la figure 6.1). Selon cette convention, les courbes bleues correspondent à des ondes quasiment neutres (i.e. marginalement stables), et les branches s'éclaircissent progressivement jusqu'à disparaître lorsque les ondes deviennent plus fortement amorties.

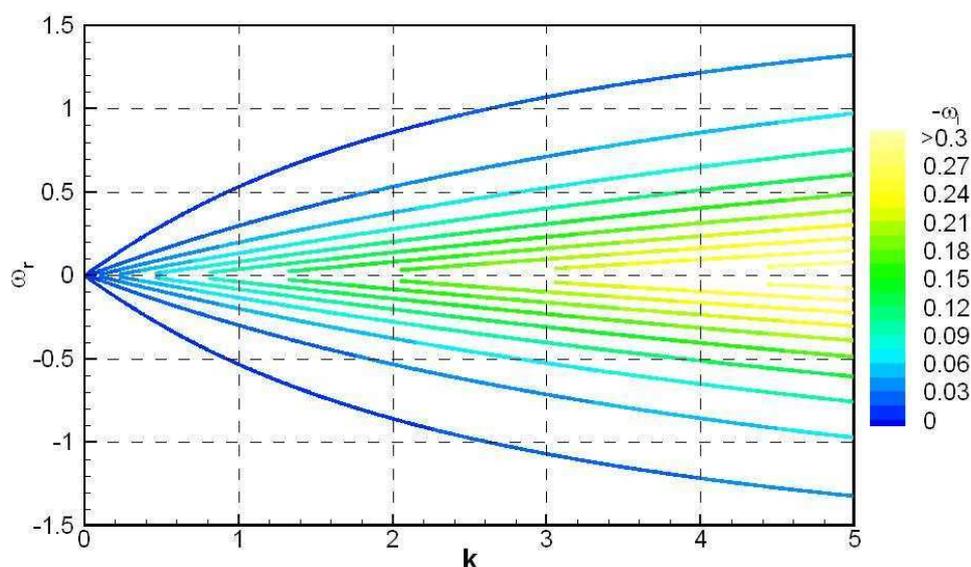


FIG. 6.1 – Diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=0$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre [93]).

La figure 6.1 met en évidence deux familles distinctes de modes, avec des fréquences d'oscillation symétriques par rapport à l'axe  $\omega_r = 0$ . La première famille correspond aux ondes  $\omega_r > 0$  qui se caractérisent par des vitesses de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} > 0$  et une propagation vers la droite. De manière symétrique, la seconde famille correspond aux ondes  $\omega_r < 0$  qui se caractérisent par des vitesses de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} < 0$  et une propagation vers la gauche. Comme le souligne Fabre [98], ces résultats sont très similaires à ceux obtenus dans le cas du tourbillon de Rankine par Saffman [227] et Arendt & al. [8], à l'exception des valeurs des taux d'amortissement dus à la diffusion visqueuse, le modèle de Rankine étant par définition non visqueux. La structure de ces modes se caractérise par des oscillations de plus en plus fortes de la perturbation au fur et à mesure que les branches s'éloignent de l'axe  $\omega_r = 0$ , avec l'apparition d'un nombre croissant de racines dans les profils des grandeurs cinématiques tracés en fonction du rayon (vitesse, vorticité et leurs perturbations).

Du point de vue plus physique de la dynamique tourbillonnaire, cette cartographie des modes de Kelvin axisymétriques permet de mieux comprendre le mécanisme de propagation en forme de varices, illustré sur la figure 2.11 au paragraphe 2.2.3, où les perturbations axisymétriques se propagent de manière parfaitement symétrique, aussi bien vers la gauche que vers la droite sur l'axe du tourbillon.

## Effet de la viscosité

Fabre & al. [98] ont investigué l'effet de la viscosité sur les ondes axisymétriques du tourbillon de Lamb-Oseen, en répétant leurs calculs avec d'autres valeurs sur le nombre de Reynolds et aussi par des analyses asymptotiques dans la limite  $Re \rightarrow \infty$  (Fabre et Le Dizès [77, 92, 99]). Selon Fabre & al. [98], cet effet est relativement trivial et ils n'en donnent qu'un bref compte rendu. En fait, on constate que toutes les ondes axisymétriques sont des "modes réguliers" selon la définition donnée aux équations 6.1 et 6.2 du paragraphe 6.2.1. Sur chaque branche, la fréquence à l'ordre dominant  $\omega^{(0)}$  est un réel pur et correspond à la fréquence non visqueuse calculée par Sipp et Jacquin [244]. Le terme suivant du développement  $\omega^{(1)}$  est un imaginaire pur et correspond au taux d'amortissement. Ce taux d'amortissement est une fonction croissante de  $k$  et pour un  $k$  fixé, il est plus grand pour les ondes se situant sur les branches supérieures. Ces caractéristiques sont en cohérence avec les échelles de couleurs de la figure 6.1. Les modes propres admettent un développement régulier sous la forme 6.2 et le terme  $\mathbf{u}^{(1)}$  est responsable de la dissymétrie de propagation entre les ondes partant vers la gauche et celles partant vers la droite. Ce dernier point sera illustré au paragraphe 6.3.3, en étudiant la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation hélicoïdale présentée au paragraphe 4.3.2.

Il est à noter, cependant, que le développement régulier 6.1 - 6.2 cesse d'être valide dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ). Un examen plus approfondi réalisé par Fabre & al. [98] montre que ceci se produit dès que  $k = O(Re^{-1})$ . A première vue, il semble que ce comportement limite présente peu d'intérêt pratique pour le contrôle des tourbillons de sillage, du moins en ce qui concerne le contrôle des ondes de courtes et moyennes longueurs d'onde (cf. les conclusions du WP1 du programme européen FAR-Wake). Cependant, ce dernier point a fait récemment l'objet d'études asymptotiques complémentaires par Le Dizès & al. [77] et Fabre & al. [92].

### 6.2.4 Les ondes de Kelvin hélicoïdales du tourbillon de Lamb-Oseen

La figure 6.2 représente les ondes de géométrie  $m=1$  et utilise la même convention que la figure 6.1 : plus les branches sont claires, plus les ondes sont fortement amorties.

Pour les perturbations hélicoïdales ( $m=1$ ), Fabre [98] a identifié quatre familles d'ondes :

- la branche "D" correspond au mode de "déplacement" (figures 6.3 à 6.5)
- la famille "C" comme "coeur" (figures 6.6 à 6.11)
- la famille "V" comme "viscosité" (figures 6.12 et 6.13)
- la famille "L" en référence aux pôles de Landau (figures 6.16 à 6.23)

#### 6.2.4.1 L'onde de déplacement (le mode "D")

Nous considérons tout d'abord la branche particulière notée "D" dans la figure 6.2. Cette onde a été particulièrement étudiée par Leibovich & al. [171], qui l'ont appelée "l'onde lente" parce que sa vitesse de phase tend vers zéro dans la limite  $k \rightarrow 0$ . Leurs résultats montrent que les propriétés de cette onde dépendent des détails du coeur du tourbillon et sont génériques de tous les modèles de tourbillon. En particulier, Fabre [99] a montré que c'est la seule onde hélicoïdale du tourbillon de Lamb-Oseen à avoir un plein équivalent dans le cas du modèle plus simple de Rankine.

La structure de cette onde est illustrée sur la figure 6.3. Comme on peut l'observer, le mode propre prend très distinctement la forme d'un dipôle de vorticité. De plus, Fabre & al. [98] ont

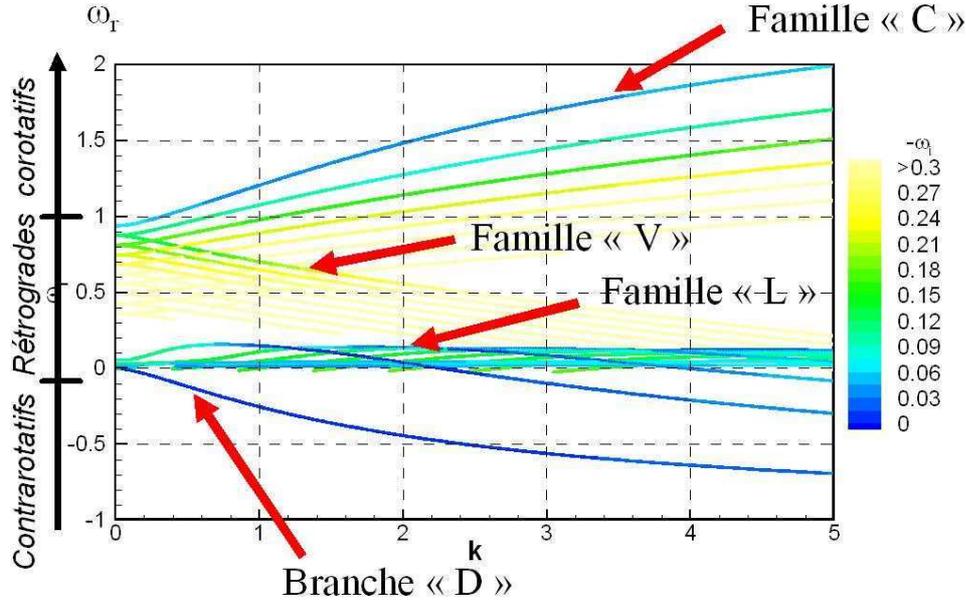


FIG. 6.2 – Diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=1$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

montré que la topologie du mode "D" est faiblement dépendante du nombre d'onde axial  $k$  (cf. figure 6.5), ce qui constitue un résultat important dans l'optique de déceler la contribution du mode "D" dans une dynamique globale et complexe. Lorsqu'on le superpose à l'écoulement de base, l'effet de ce dipôle est d'accroître la vorticité dans une moitié du coeur du tourbillon et de la décroître dans l'autre moitié. Donc l'effet net correspond à un moment de flexion et un déplacement du coeur du tourbillon tout entier d'une façon hélicoïdale. Ceci justifie la dénomination de cette onde comme mode de "déplacement".

Du point de vue plus physique de la dynamique tourbillonnaire, ces éléments très caractéristiques permettent de mieux comprendre le rôle du mode "D" dans le mécanisme de propagation en forme de déplacement hélicoïdal en bloc du tourbillon, illustré sur la figure 2.12 et discuté au paragraphe 2.2.3. En effet, une perturbation hélicoïdale localisée et composée d'un paquet d'ondes , incluant en particulier le mode de déplacement, se propage le long du tourbillon porteur, tout en provoquant son "incurvation", d'où le terme de "bending waves" de Leibovich & al. [171].

### Effet de la viscosité

Fabre & al. [98] ont montré sur le cas  $m = 1$     $Re = 1000$  que le mode de déplacement est de loin l'onde la moins affectée par la viscosité de toutes les ondes hélicoïdales, et même de toutes les ondes de Kelvin. En effet, leurs calculs indiquent que dans l'intervalle  $0 < k < 5$ , le taux d'amortissement satisfait toujours  $|\omega_i| < 0.03$ , ce qui fait du mode "D" une onde très peu amortie.

Par ailleurs, tout comme les ondes axisymétriques, la fréquence de l'onde de déplacement hélicoïdale admet un développement régulier sous la forme 6.1. D'une part, Leibovich & al. [171] ont examiné, dans le cas non visqueux, le comportement de la fréquence pour les grandes longueurs d'onde. Ils ont ainsi trouvé le développement  $\omega^{(0)} = -k^2 (\ln(1/|k|) + 0.0577) + O(k^4 \log|k|)$  lorsque  $k \rightarrow 0$ . D'autre part, Fabre & al. [98] ont étendu cette étude au cas visqueux et ils ont

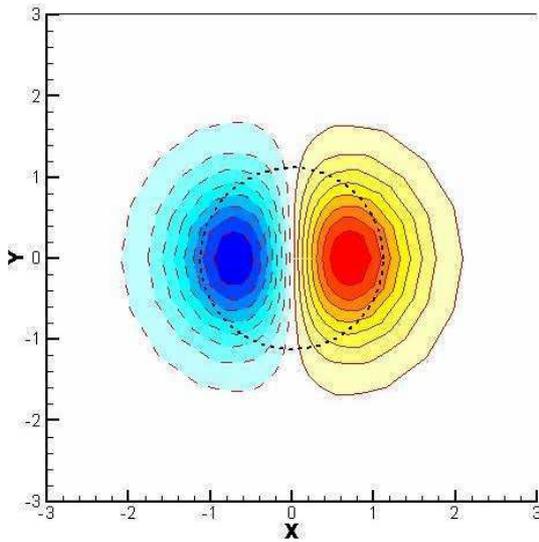


FIG. 6.3 – Le mode "D" (Déplacement) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique en forme de dipôle (d'après Fabre et Jacquin [93]).

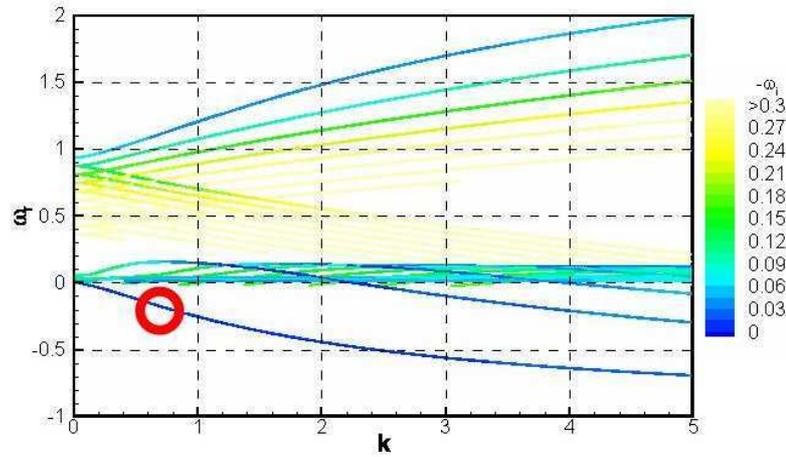


FIG. 6.4 – Le mode "D" (Déplacement) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

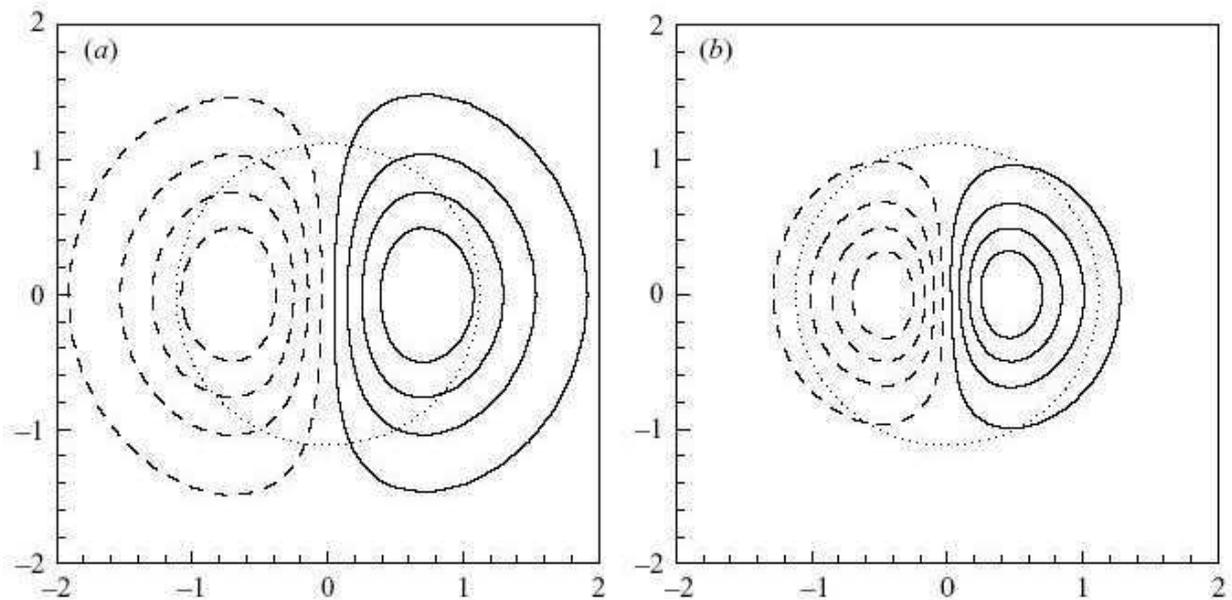


FIG. 6.5 – Topologie de l'onde de déplacement hélicoïdale (mode "D" -  $m=1$ ) à  $Re = 1000$  pour deux nombres d'onde axiaux. (a)  $k = 0.1$ ,  $\omega = -0.012 - 4.7 \cdot 10^{-5} i$ . (b)  $k = 3$ ,  $\omega = -0.5602 - 0.0124 i$ . Isocontours de la perturbation de vorticité axiale dans un plan perpendiculaire à l'axe du vortex, donnant la structure des vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres. Le cercle en pointillé représente le lieu du maximum de vitesse azimutale pour le tourbillon de Lamb-Oseen, matérialisant la zone fortement rotationnelle dans le coeur du vortex (d'après Fabre & al. [98]).

ainsi confirmé que dans le cas limite  $k \rightarrow 0$ , le développement régulier 6.1 persiste toujours et que le terme  $\omega^{(1)}$  est encore d'une forme similaire, en  $O(k^2 \log|k|)$ , mais ils n'ont pas été en mesure de calculer précisément le coefficient correspondant, dans le cadre de cette publication.

#### 6.2.4.2 Les ondes de coeur (famille "C")

Nous présentons maintenant la deuxième famille de modes hélicoïdaux, intitulés "C" sur la figure 6.2. La figure 6.6 illustre la structure d'un mode propre. Comme on peut le voir, la structure de ces modes est localisée entièrement à l'intérieur du coeur du tourbillon dont la taille caractéristique est représentée par un cercle tracé en pointillé (lieu géométrique du maximum de vitesse azimuthale du tourbillon de Lamb-Oseen). Le mode sur la première branche prend la forme d'un simple dipôle. Le mode sur la seconde branche est décrit comme deux dipôles qui se chevauchent. De même, les modes sur les branches supérieures sont des dipôles multicouches qui se chevauchent. La légère dissymétrie réflexionnelle observée dans la structure des modes est, de nouveau, un effet imputable à la viscosité. La localisation des modes propres à l'intérieur du coeur du tourbillon est l'une des propriétés tout à fait caractéristiques de la famille "C" et justifie la dénomination de ces ondes comme des "ondes de coeur". Une autre propriété distinctive est que, sauf dans le régime grandes longueurs d'onde, ces ondes sont essentiellement corotatives (cf. le cartouche gauche de la figure 6.2).

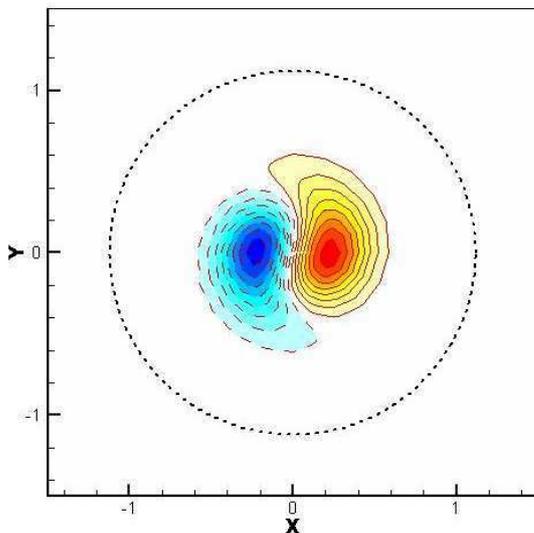


FIG. 6.6 – Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

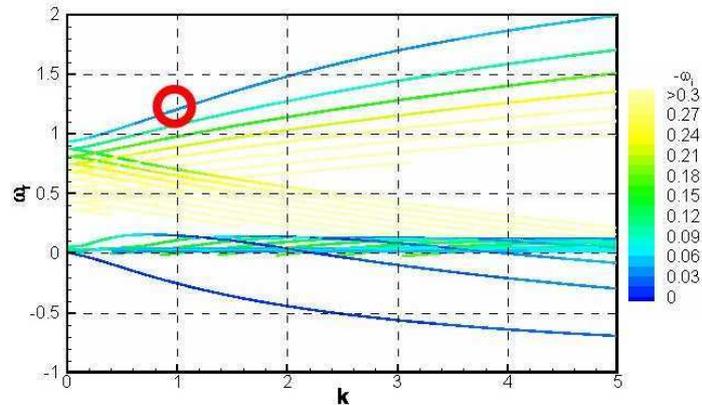


FIG. 6.7 – Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

La comparaison des figures 6.6 et 6.8 illustre la modification de la topologie d'un mode propre de coeur en le suivant sur une même branche du diagramme 6.2 lorsqu'on diminue progressivement la valeur du nombre d'onde axial en passant de  $k = 1$  à  $k = 0.2$ . Ce dernier point sera discuté ci-dessous, en examinant les effets de la viscosité sur les modes "C" ainsi que le comportement de ces modes de coeur dans le régime limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ).

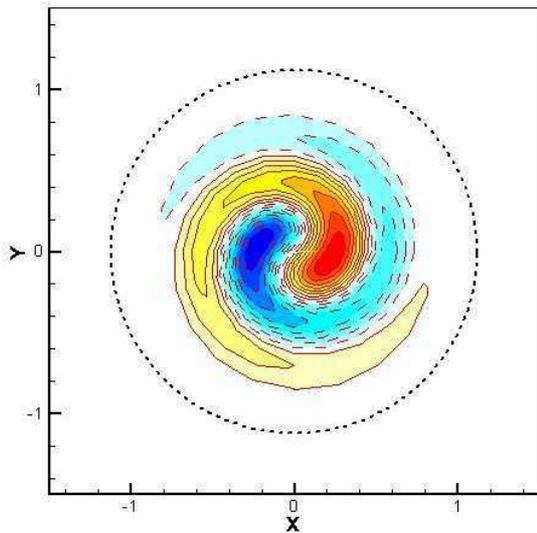


FIG. 6.8 – Un mode singulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique de mode central en forme de dipôle (d'après Fabre et Jacquin [93]).

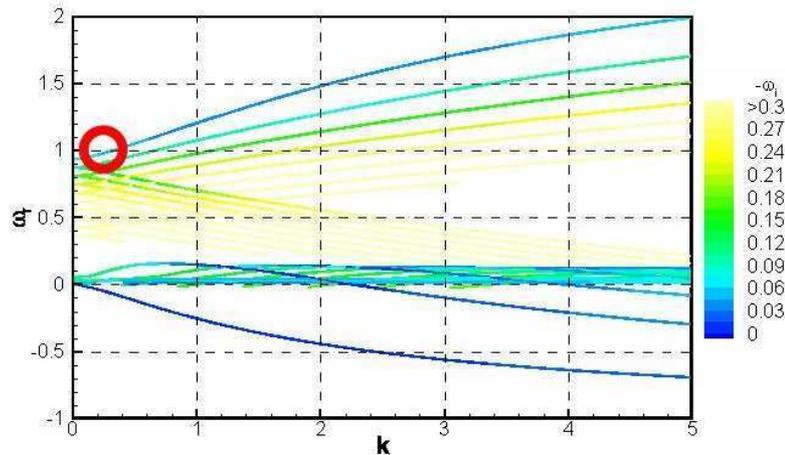


FIG. 6.9 – Un mode singulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

### Mécanisme physique

Fabre & al. [98] ont proposé un mécanisme physique spécifiquement dédié aux ondes de la famille "C", pour tenter d'expliquer l'évolution relativement surprenante et rapide de la topologie de ces modes propres, illustrée sur la figure 6.10. Nous résumons ici leur raisonnement relativement complexe et qui s'appuie en fait sur deux "ingrédients" essentiels : les effets tridimensionnels et les effets de rotation différentielle.

D'une part, la structure en forme de dipôle de la perturbation de vorticité axiale est soumise à des effets tridimensionnels, car enroulée de manière hélicoïdale autour du tourbillon porteur. Cela a pour conséquence de créer des zones de hautes et basses pressions, et ces gradients de pression dans le coeur tourbillonnaire seraient suffisamment intenses pour induire un écoulement axial, qui à son tour affecte la vorticité du champ de base par un mécanisme d'étirement-compression.

D'autre part, il existe simultanément un effet supplémentaire de rotation différentielle, propre au modèle de Lamb-Oseen qui ne suit pas un mouvement de pure rotation solide dans son coeur tourbillonnaire. Cet effet de rotation différentielle s'oppose au retour stationnaire de l'écoulement global.

La conjonction de ces deux phénomènes serait à l'origine du mouvement corotatif des ondes "C". De plus, ce mécanisme physique semble corroboré par les conclusions d'analyses asymptotiques réalisées par Le Dizès [77] et Fabre [92].

### Effet de la viscosité

Les effets de la viscosité sur les modes de la famille "C" sont mis en évidence en comparant les résultats visqueux de Fabre & al. [98] avec les résultats non visqueux de Sipp et Jacquin [244]. En premier lieu, comme on peut s'y attendre, la viscosité entraîne un amortissement de ces ondes. Pour  $Re = 1000$ , on trouve l'onde "C" la moins amortie sur la première branche pour  $k = 1.62$  qui correspond à  $\omega = 1.3821 - 0.0331 i$ . Fabre & al. [98] ont découvert un second effet

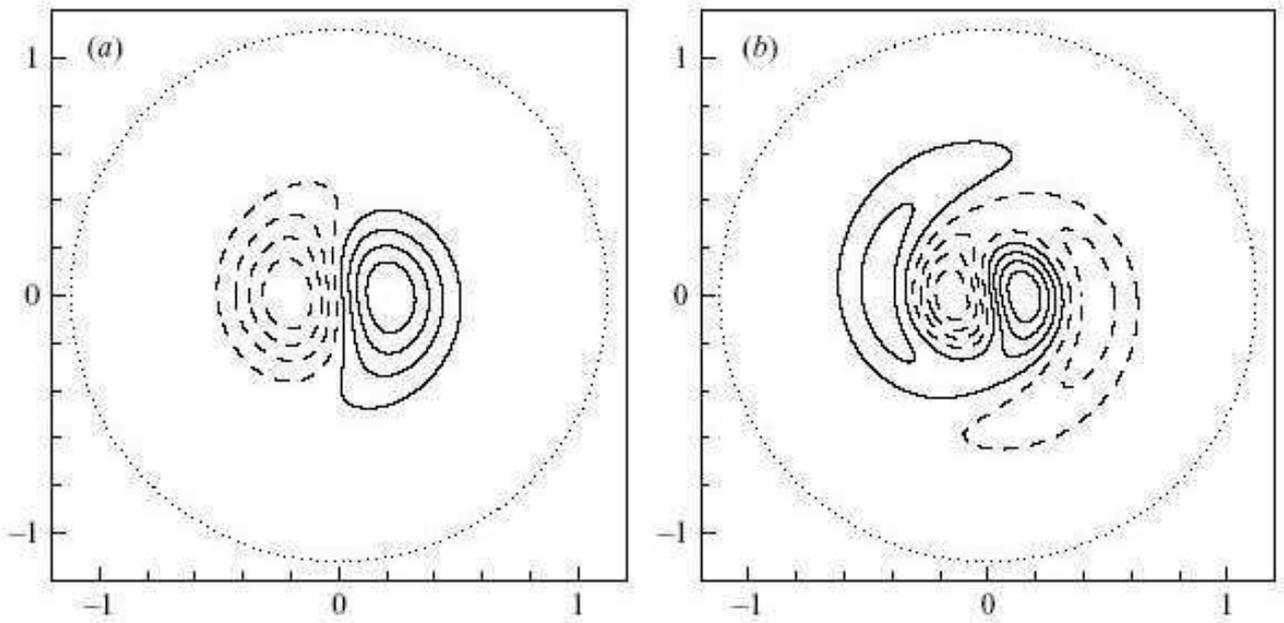


FIG. 6.10 – Topologies de deux ondes hélicoïdales de coeur (modes "C" -  $m=1$ ) à  $k = 5$  pour  $Re = 1000$ . (a)  $\omega = 1.9920 - 0.0625 i$ . (b)  $\omega = 1.7031 - 0.1114 i$ . Illustration, à des nombres donnés de  $k$  et  $Re$ , des changements de structure des modes propres, correspondants à deux branches de la famille "C" sur le diagramme 6.2, en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

de viscosité, beaucoup moins attendu, dans l'intervalle des grandes longueurs d'onde. Comme on peut le remarquer, lorsqu'on fait tendre le nombre d'onde vers zéro, toutes les branches de la famille "C" changent progressivement de corotatives à rétrogrades, ce qui est illustré de manière générale sur la figure 6.2. De plus, le taux d'amortissement des modes qui passe par un minimum pour une valeur finie de  $k$  croît à mesure que  $k \rightarrow 0$ . Comme le proposent Fabre & al. [98], ces tendances s'expliquent par le fait que dans cette limite, les modes "C" cessent de se comporter comme des ondes Kelvin régulières et deviennent une sorte de modes singuliers, appelés "modes centraux" ("centre modes" en anglais).

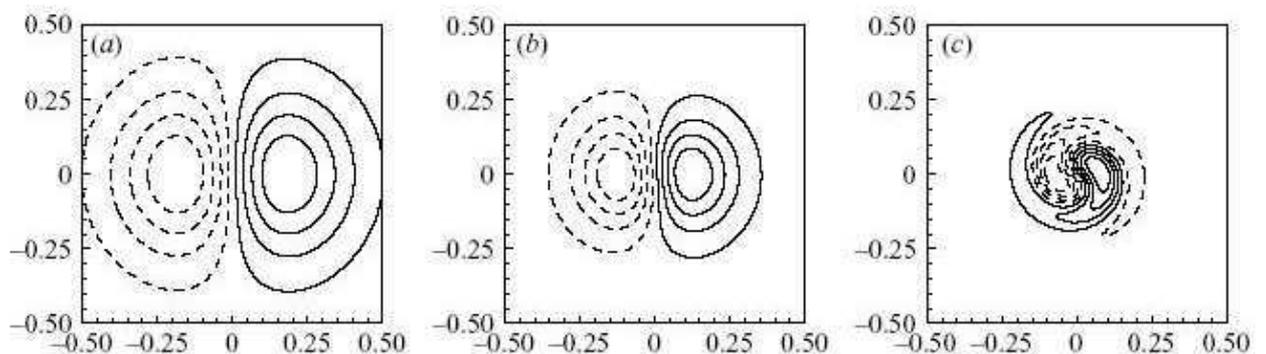


FIG. 6.11 – Topologie du mode propre sur la première branche hélicoïdale de la famille "C" ( $m=1$ ) à  $Re = 100000$  pour trois nombres d'onde axiaux. (a)  $k = 1$ ,  $\omega = 1.2099 - 4.01 \cdot 10^{-4} i$ . (b)  $k = 0.5$ ,  $\omega = 1.0708 - 8.05 \cdot 10^{-4} i$ . (c)  $k = 0.1$ ,  $\omega = 1.0003 - 5.212 \cdot 10^{-3} i$ . Illustration du comportement en "modes centraux" (singuliers) dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ), en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

Ce comportement en forme de modes centraux, dont on observe les prémices à  $Re = 1000$ , est

plus flagrant pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds. La figure 6.11 montre l'évolution du mode propre calculé sur la première branche d'une onde "C", pour  $Re = 10^5$ , à mesure que l'on fait décroître le nombre d'onde  $k$ . La figure 6.11(a) pour  $k = 1$ , montre la structure en dipôle typique déjà décrite. La figure 6.11(b) correspond à  $k = 0.5$ . Comme on peut le remarquer la structure du mode reste essentiellement la même, mais à une plus petite échelle. Ce rétrécissement de la structure du mode peut se comprendre dans le cadre du scénario physique résumé ci-dessus. Comme les gradients axiaux décroissent à cause de l'accroissement de la longueur d'onde, des niveaux de pression plus grands dans les zones cycloniques et anticycloniques sont nécessaires pour induire l'écoulement axial nécessaire pour soutenir l'onde. Un cyclone étroit (respectivement anticyclone) menant à une forte dépression (respectivement zone de haute pression) est réalisé avec une plus forte concentration du dipôle de vorticité. Il est à noter que lorsqu'on fait décroître  $k$  de 1   0,5, le taux d'amortissement des ondes s'accroît de près d'un facteur 2. Cette caractéristique se comprend assez bien et rappelle que des gradients radiaux plus forts ont pour résultat une dissipation plus forte. Dans ce régime, les ondes restent non visqueuses à l'ordre dominant et peuvent être identifiées comme des mode centraux non visqueux. La figure 6.11(c) correspond à  $k = 0.1$ . Or la structure du mode propre a changé de façon spectaculaire et a acquis une forme spirale caractéristique. Dans le même temps, le taux d'amortissement du mode s'est fortement accru et il est désormais plus de dix fois plus élevé que la valeur qu'il avait pour  $k = 1$ . Dans le cadre du scénario physique proposé par Fabre & al. [98] et résumé précédemment, ces changements spectaculaires peuvent se comprendre en supposant que la structure du mode soit devenue si étroite que l'effet de viscosité est maintenant comparable en magnitude aux mécanismes responsables de la création de vitesse axiale et de la propagation de l'onde. Dans ce régime, la structure des modes devient visqueuse à l'ordre dominant et à ce titre, ils peuvent être identifiés comme des "modes centraux visqueux". Toutes les tendances que nous venons de décrire sont bien retranscrites par une analyse asymptotique conduite par Fabre et Le Dizès [92]. En particulier, cette étude montre que la transition des "modes centraux non visqueux"   des "modes centraux visqueux" se produit dès que  $k = O(Re^{-1/4})$ , et que la fréquence suit alors une loi d'échelle de la forme  $\omega = m + O(Re^{-1/2})$ . D'autre part, on peut vérifier que pour  $k$  fixé et  $Re \rightarrow \infty$ , les fréquences des ondes de coeur admettent un développement régulier sous la forme 6.1.

### 6.2.4.3 Les modes purement visqueux (famille "V")

La troisième famille de modes, nommés "V" sur la figure 6.2, sont des ondes purement visqueuses, dont un mode régulier est illustré sur les figures 6.12 et 6.13. Ces ondes "V" n'ont aucun homologue dans les résultats non visqueux de Sipp et Jacquin [244]. A première vue, on pourrait être tenté de les identifier avec les modes réguliers non visqueux (i.e. les véritables "ondes de Kelvin", au sens historique du terme) qui existent dans le même intervalle de fréquences pour le tourbillon de Rankine. Cependant, l'examen minutieux réalisé par Fabre & al. [98] montre qu'il n'en est rien car la topologie de ces modes propres s'avère complètement différente.

Deux spécimens de modes propres, calculés sur la première branche de la famille (i.e. la moins amortie) sont représentés sur la figure 6.14. Pour  $k = 0.1$  (figure 6.14(a)), le mode propre est très semblable au mode "C" affiché à la figure 6.11(c) et est caractérisé par une structure spirale située dans le voisinage du centre tourbillonnaire. Comme on peut l'observer à la figure 6.14(b) correspondant à  $k = 1$ , accroître le nombre d'onde axial a pour résultat une extension spatiale de la structure spirale qui tend à occuper tout le coeur du tourbillon, un plus grand nombre de tours spiraux, et un accroissement du taux d'amortissement.

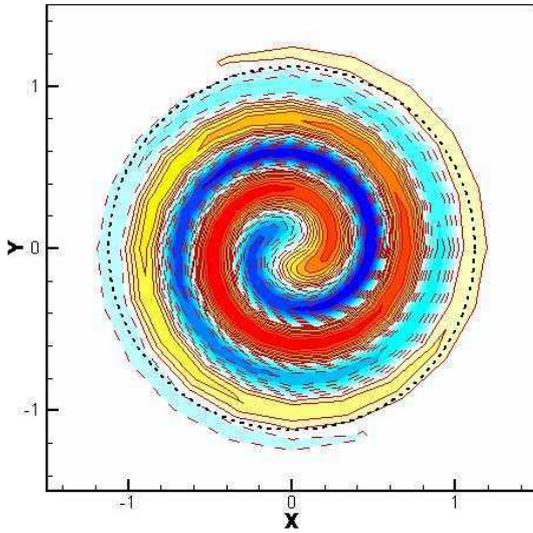


FIG. 6.12 – Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

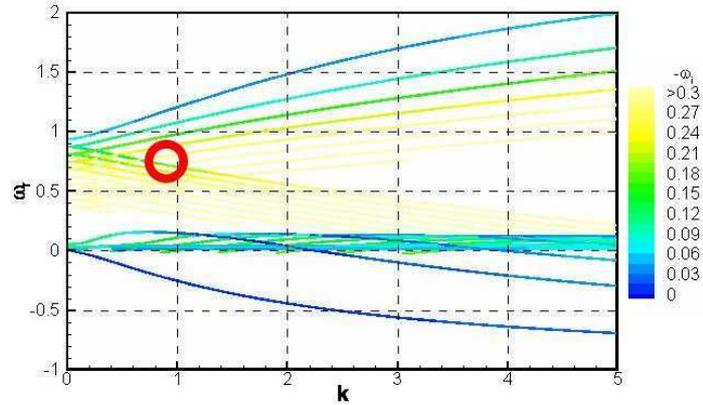


FIG. 6.13 – Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

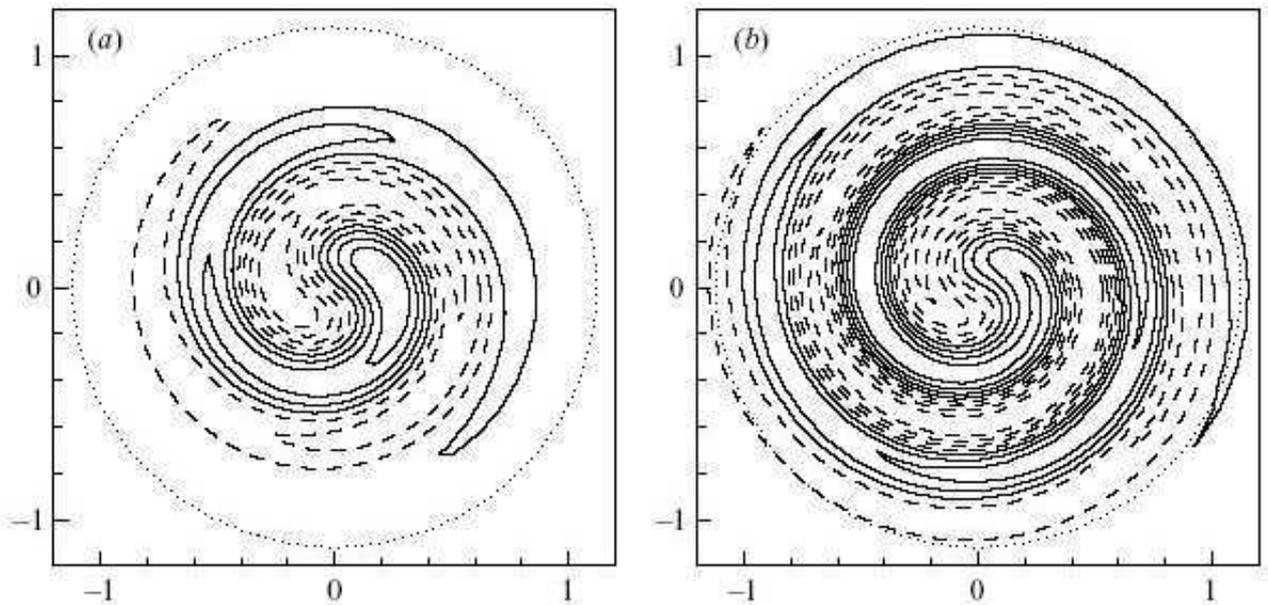


FIG. 6.14 – Topologies de deux ondes hélicoïdales purement visqueuses (modes "V" -  $m=1$ ) à  $Re = 1000$ . (a)  $k = 0.1$ ,  $\omega = 0.8664 - 0.1223 i$ . (b)  $k = 1$ ,  $\omega = 0.7023 - 0.1881 i$ . Illustration, sur deux longueurs d'onde, des changements de la structure du mode propre correspondant à la branche de la famille "V" la moins amortie sur le diagramme 6.2, en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

Dans la limite des grands nombres de Reynolds, ces modes "V" deviennent des modes centraux avec une structure très similaire aux modes instables existants dans les tourbillons de sillage à grand nombre de swirl et largement étudiés par Fabre et Jacquin [96]. Par la suite, Le Dizès et Fabre [77] ont réalisé une étude asymptotique qui prend en compte toutes les sortes de modes centraux visqueux à hauts nombres de Reynolds. Dans ce cadre plus général, les modes "V" à haut nombre de Reynolds calculés par Fabre & al. [98] correspondent aux modes centraux visqueux de type "C" dans la nomenclature utilisée par Le Dizès et Fabre [77]. La prédiction asymptotique des fréquences de ces modes centraux visqueux est un résultat remarquable, valide pour  $m > 0$ , et s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \omega_{m,n} \underset{Re \rightarrow \infty}{\approx} m + 3 e^{-5i\pi/6} k^{2/3} Re^{-1/3} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{6m} e^{-3i\pi/4} Re^{-1/2} \quad (6.9)$$

Les résultats numériques obtenus par Fabre & al. [98] sur le tourbillon de Lamb-Oseen sont en bon accord avec l'expression 6.9 à partir de  $Re \geq 10^6$  et le lecteur pourra se référer à l'étude de Le Dizès et Fabre [77] pour une comparaison quantitative plus détaillée.

#### 6.2.4.4 Les branches de Landau (famille "L")

Considérons maintenant la dernière famille d'ondes hélicoïdales, dénommées "L" (en référence aux pôles de Landau) dans la classification de Fabre & al. [98]. Une meilleure visualisation de ces modes "L" est proposée sur la figure 6.15, qui n'est qu'un agrandissement de la figure 6.2.

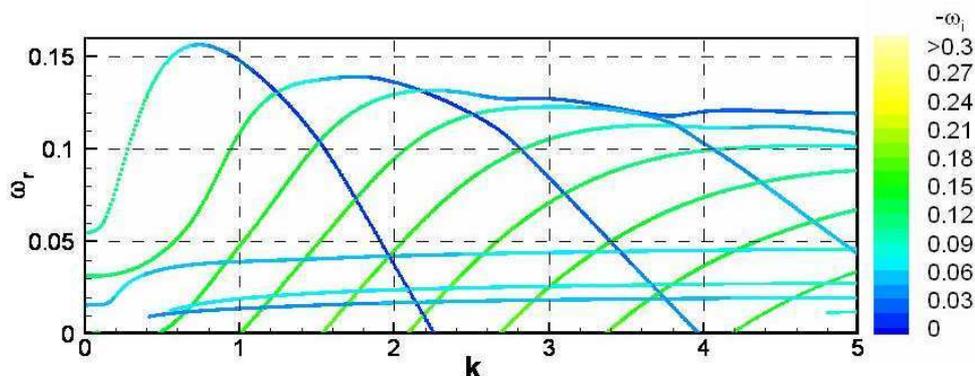


FIG. 6.15 – Gros plan sur les ondes "L" dans le diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=1$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

Avant de résumer les principales propriétés de ces ondes, il est important de souligner les difficultés techniques rencontrées par Fabre & al. [98] pour capturer par le calcul numérique des modes aussi complexes. Selon les propres termes de ces auteurs, la cartographie exhaustive des ondes "L" a été particulièrement "fastidieuse mais stimulante". Elle a requis comme subterfuge numérique l'usage extensif d'une fonction astucieuse de mappage dans le plan complexe, dont les détails techniques sont présentés dans l'annexe B de l'article de Fabre & al. [98], et qui a déjà fait ses preuves lors de la découverte par Fabre et Jacquin [96] de nouveaux modes visqueux instables dans les tourbillons de sillage à grands nombres de swirl.

### Introduction aux ondes de la famille "L"

Contrairement aux modes purement visqueux "V" et a posteriori des multiples études de stabilité linéaire réalisées sur le tourbillon de Lamb-Oseen, les ondes "L" obtenues par Fabre & al. [98] en théorie visqueuse (représentées sur la figure 6.15) connaissent des modes équivalents dans les résultats non visqueux de Sipp et Jacquin [244].

Selon la terminologie introduite par Fabre & al. [98] et rappelée au paragraphe 6.2.1, on constate que toutes les ondes "L" sans exception sont des modes rétrogrades puisqu'elles vérifient  $0 < \omega_r < 1$ . Concrètement, cette caractéristique signifie que les ondes "L" tournent dans le même sens de rotation que le tourbillon porteur, mais pas aussi rapidement que le coeur du vortex.

Une autre propriété remarquable des modes "L" concerne leur comportement dans la limite des grandes longueurs d'onde. Nous reviendrons précisément sur ce point plus loin, mais signalons dès à présent que dans la limite  $k \rightarrow 0$ , tous les modes "L" présentent une structure spirale à l'extérieur du coeur tourbillonnaire, sujette à de multiples interprétations physiques, notamment en termes de *croissances transitoires* (en faisant le lien avec l'étude d'Antkowiak et Brancher [5]) et de *mécanisme de résonance* (singularité de type "couche critique" proposée par Fabre & al. [98]).

Dans le cadre de notre étude sur l'éclatement tourbillonnaire à la catapulte B20 et suivant la terminologie du paragraphe 6.2.1, il est clair que la transition des ondes "L" d'un comportement *régulier* aux petites longueurs d'onde (figures 6.16 et 6.17) vers un comportement *singulier* aux grandes longueurs d'onde (figures 6.18 et 6.19), revêt une importance toute particulière pour rechercher une éventuelle instabilité dans la *dynamique globale* d'un tourbillon de sillage isolé, en tenant compte des effets des non-linéarités (cf. chapitre 7).

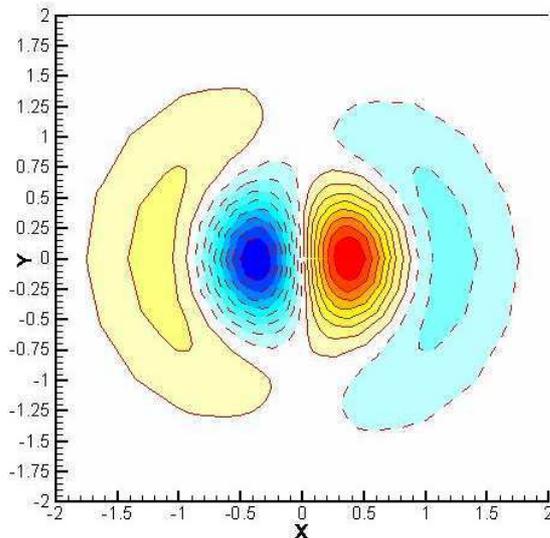


FIG. 6.16 – Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

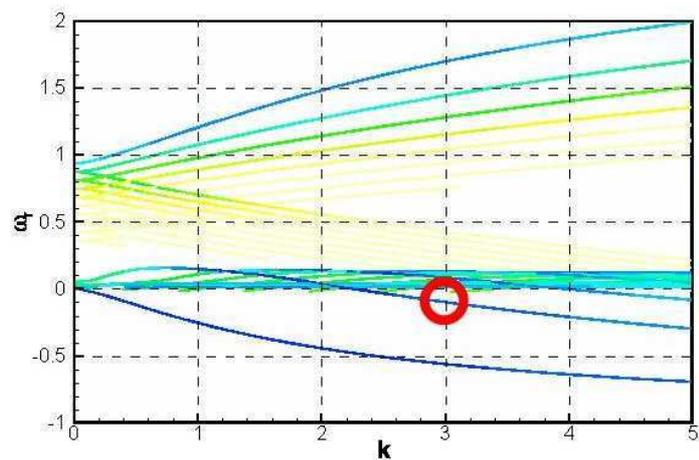


FIG. 6.17 – Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

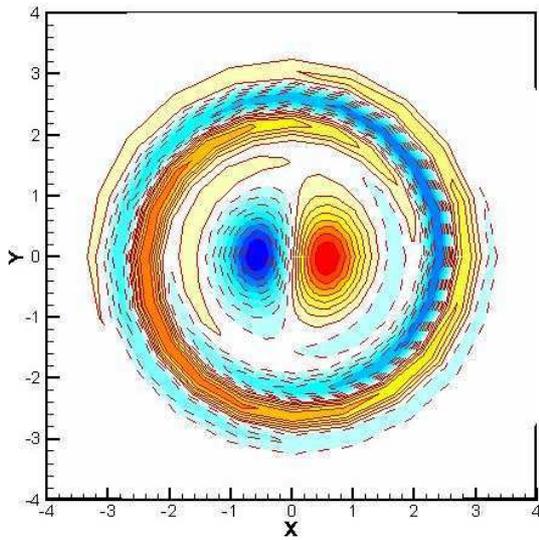


FIG. 6.18 – Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : structure géométrique de couche critique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

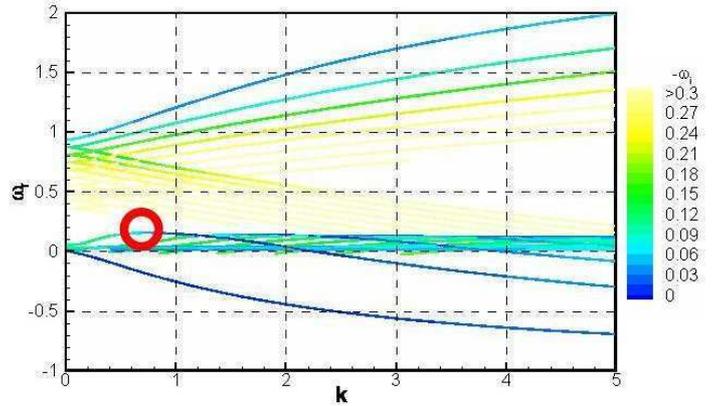


FIG. 6.19 – Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

Pour finir cette brève introduction des ondes de la famille "L", Fabre & al. [98] distinguent deux types de modes de Landau :

- les modes de première espèce (notés "L1"), dont un exemple est illustré sur les figures 6.20 et 6.21, correspondent à  $0.05 < \omega_r < 0.17$  et sont fortement amortis
- les modes de seconde espèce (notés "L2"), dont un exemple est illustré sur les figures 6.22 et 6.23, correspondent à  $0 < \omega_r < 0.05$  et sont amortis, mais nettement moins que les modes "L1".

### Description des ondes "L" à $Re = 1000$

La figure 6.24 représente la structure du mode propre appartenant à la première branche L1, pour plusieurs valeurs du nombre d'onde  $k$ . La figure 6.24(a) correspond à la valeur particulière  $k = 2.262$  pour laquelle le mode est une onde stationnaire. Comme on peut le voir, cette onde consiste en deux dipôles de vortécité qui se chevauchent. Cependant, à la différence du mode "C" affiché à la figure 6.10, le dipôle extérieur est situé sur les parties externes du vortex, et non pas entièrement à l'intérieur du coeur tourbillonnaire.

La nature stationnaire de cette onde particulière peut être comprise comme un conflit entre les dipôles interne et externe. Le dipôle externe engendre un déplacement moyen de la ligne de centre du tourbillon qui, tout seul, mènerait à une onde contrarotative par le truchement du mécanisme décrit au paragraphe 2.2.3.2. D'autre part, le dipôle interne mènerait à une onde contrarotative par le truchement du mécanisme proposé par Fabre & al. [98] et résumé au paragraphe 6.2.4.2. Un équilibre entre ces deux effets est atteint pour le nombre d'onde particulier  $k = 2.262$ . Pour des nombres d'onde plus grands, l'onde devient contrarotative en raison d'une influence plus grande du dipôle externe, tandis que pour des nombres d'onde plus petits l'onde devient rétrograde en raison d'une influence plus grande du dipôle interne.

L'évolution de la structure du mode propre quand le nombre d'onde décroît de  $k = 2.262$  à  $k = 0$  est très intéressante, et illustrée en détail sur les tracés de la figure 6.24. D'abord, dans l'intervalle  $1.2 \lesssim k < 2.262$ , le mode devient rétrograde mais sa structure reste celle d'une onde

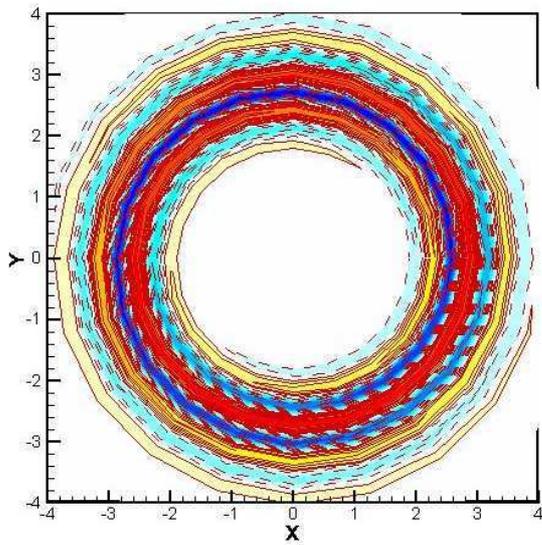


FIG. 6.20 – Un mode singulier de Landau de première espèce (perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$ ) : structure géométrique de couche critique enlacée à proximité du cœur tourbillonnaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

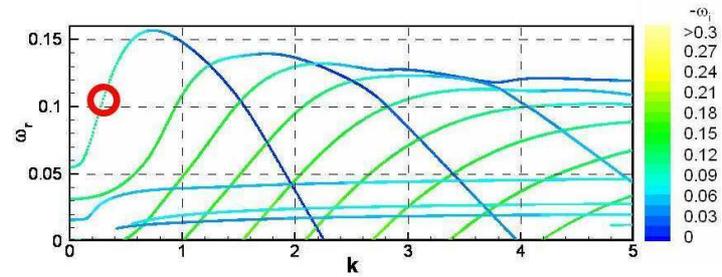


FIG. 6.21 – Un mode singulier de Landau de première espèce (perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$ ) : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

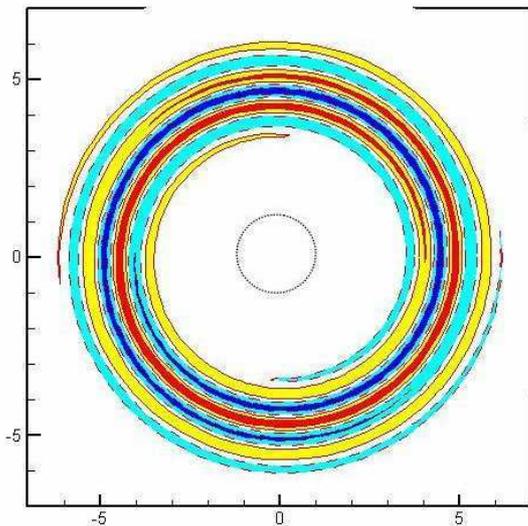


FIG. 6.22 – Un mode singulier de Landau de seconde espèce (perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$ ) : structure géométrique de couche critique enlacée très loin du noyau tourbillonnaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

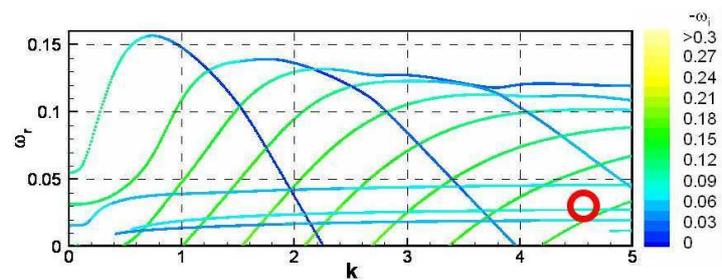


FIG. 6.23 – Un mode singulier de Landau de seconde espèce (perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$ ) : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

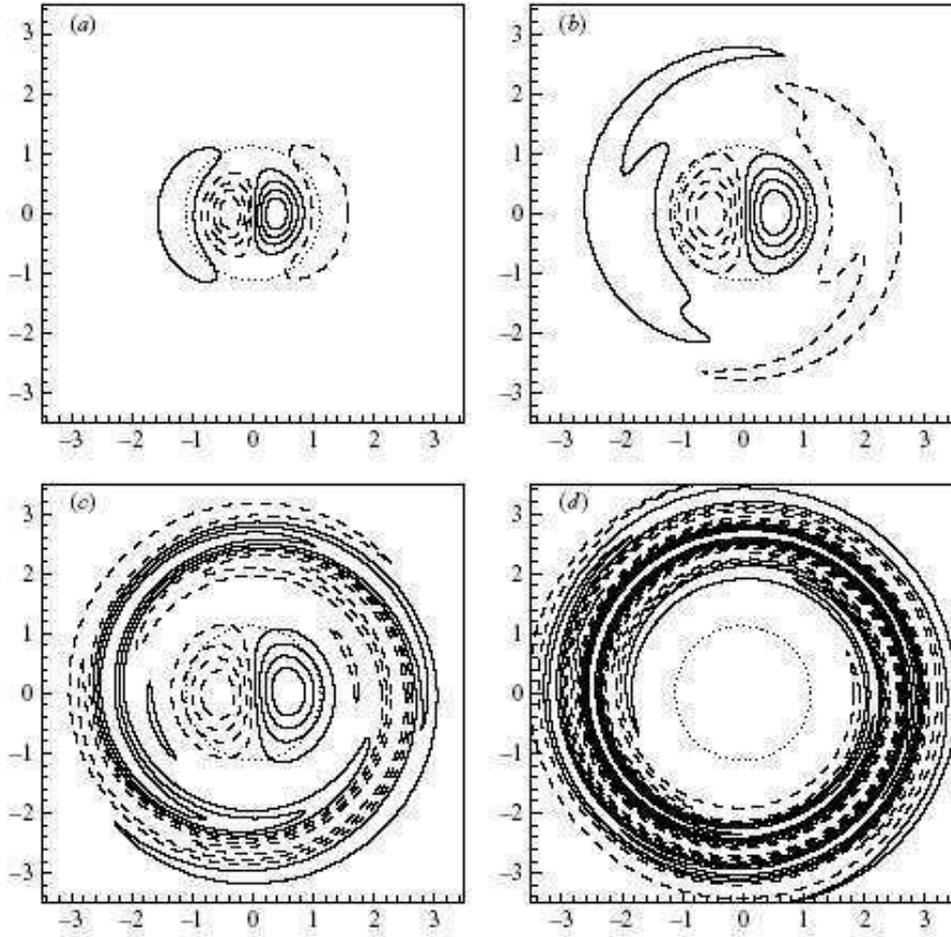


FIG. 6.24 – Topologie du mode propre sur la première branche hélicoïdale de la famille "L1" ( $m=1$ ) à  $Re = 1000$  pour quatre nombres d'onde axiaux. (a)  $k = 2.262$ ,  $\omega = -0.0119 i$ . (b)  $k = 1$ ,  $\omega = 0.1480 - 0.0216 i$ . (c)  $k = 0.8$ ,  $\omega = 0.1560 - 0.0433 i$ . (d)  $k = 0.5$ ,  $\omega = 0.1439 - 0.0900 i$ . Illustration du comportement en "modes centraux" (singuliers) dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k \rightarrow 0$ ), en utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

de Kelvin régulière, semblable à celle affichée à la figure 6.24(a). Ensuite, pour des valeurs plus basses du nombre d'onde, on observe des modifications spectaculaires de la structure du mode propre illustrées sur les tracés de la figure 6.24(b-d).

Pour  $k = 1$  (figure 6.24(b)), on observe l'apparition de deux bras spiraux situés dans une zone annulaire localisée en dehors du coeur tourbillonnaire, autour de  $r \approx 2.5$ . A mesure qu'on diminue graduellement le nombre d'onde, cette structure spirale acquiert progressivement une taille plus importante.

Pour  $k = 0.8$  (figure 6.24(c)), on observe que les bras spiraux s'enroulent sur une circonférence supérieure à un tour et le niveau de vorticité à l'intérieur de ces structures filamenteuses est comparable aux valeurs relevées dans le dipôle interne. Ce spécimen de perturbation caractérisé par la présence simultanée d'un composant de type onde (i.e. capable de se propager le long du vortex) et d'une composante en forme de spirale (qui au contraire reste sur place), est appelé "onde de couche critique" et fera l'objet d'une attention toute particulière dans ce qui suit.

Quand on fait décroître davantage le nombre d'onde, la composante spirale acquiert une importance plus grande et finit par dominer la composante ondulatoire. Par exemple, pour  $k = 0.5$  (figure 6.24(d)), on observe que les bras spiraux s'enroulent sur pratiquement trois tours et on constate la disparition de la composante ondulatoire pour ce bas nombre d'onde (i.e. dans le régime des grandes longueurs d'ondes). Dans ce cas précis, il devient inapproprié d'utiliser le terme d'onde de Kelvin pour qualifier un tel mode car celui-ci relève d'un mode franchement singulier.

Il est à noter que la valeur  $k = 0.8$  correspond approximativement au cas où le taux d'oscillation  $\omega_r$  est maximal. Ainsi, le changement de structure observé sur le mode propre est associé à un changement de comportement de la branche : d'une propagation vers la gauche (caractérisée par  $\partial\omega_r/\partial k < 0$ ) pour  $k > 0.8$ , la branche adopte soudainement une propagation vers la droite (caractérisée par  $\partial\omega_r/\partial k > 0$ ) pour  $k < 0.8$ .

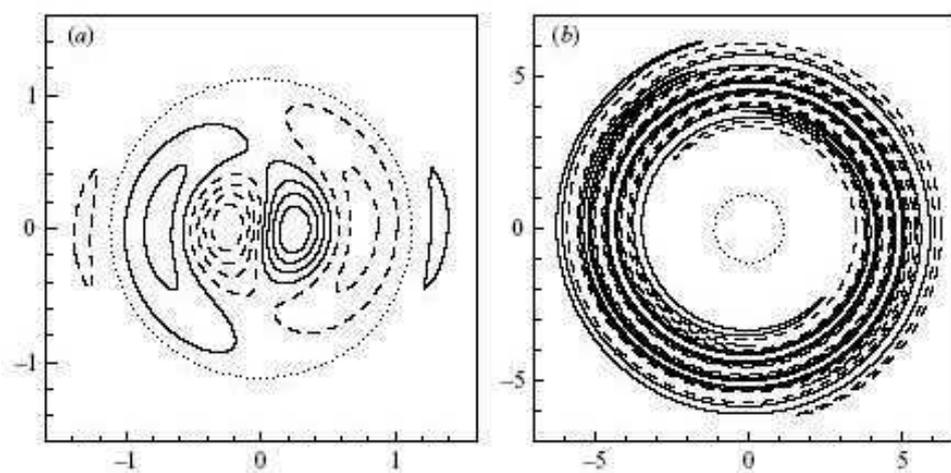


FIG. 6.25 – Topologie des deux espèces de modes propres hélicoïdaux de Landau ( $m=1$ ) à  $Re = 1000$ . (a)  $k = 3.975$ ,  $\omega = -0.0368 i$ . (b)  $k = 5$ ,  $\omega = 0.04602 - 0.07861 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

La figure 6.25 affiche deux autres exemples de la famille L. Le schéma 6.25(a) correspond à un mode propre appartenant à la seconde branche "L1", pour la valeur du nombre d'onde  $k = 3.975$  où cette onde est stationnaire. Comme on peut l'observer, la structure de ce mode consiste en trois dipôles qui se chevauchent. Comme pour la première branche de la famille "L1", quand on fait décroître le nombre d'onde, la structure reste d'abord essentiellement inchangée (en descendant jusqu'à  $k \approx 2.6$  environ). Puis, quand on continue de diminuer  $k$ , le mode devient

du type "onde de couche critique" avec la coexistence d'une composante ondulatoire et d'une structure spirale (en descendant jusqu'à  $k \approx 1.4$  environ), et finalement pour des nombres d'onde encore plus petits, le mode devient un vrai mode singulier en même temps que sa direction de propagation est inversée. Les modes propres calculés sur les branches supérieures des ondes de type "L1" suivent exactement les mêmes tendances.

Pour finir, le mode affiché à la figure 6.25(b) appartient à la famille des ondes identifiées comme de la seconde espèce de Landau ("L2") par Fabre & al. [98] et rappelées sur la figure 6.15. Ce genre de mode ressemble sensiblement aux modes singuliers trouvés sur les branches L1 aux grandes longueurs d'onde, comme illustrée sur le schéma 6.24(d). Cependant, la structure spirale est bien plus développée et se situe bien plus loin du coeur tourbillonnaire. De plus, contrairement à ceux du type "L1", les modes des branches "L2" restent toujours singuliers à tous les nombres d'onde.

### Interprétation physique des ondes hélicoïdales de couche critique et de leur contribution à la dynamique tourbillonnaire

La structure spirale décrite ci-dessus est la signature d'une *couche critique visqueuse*. Le phénomène de couche critique se produit dans le voisinage de *points critiques*  $r_{crit}$  (qui d'un point de vue mathématique peuvent être éventuellement complexes) où *l'onde entre en résonance avec l'écoulement moyen*, i.e. des valeurs du rayon qui dans le cas général ( $m$  quelconque) annulent le terme  $(m \Omega - \omega)$  dans les membres de gauche des équations linéarisées de la quantité de mouvement (équations 6.5 à 6.7) :

$$\exists r_{crit}(m, Re) \in \mathbb{C} \mid m \Omega(r_{crit}) = \omega(r_{crit}) \quad (6.10)$$

Dans le cas particulier des perturbations hélicoïdales ( $m = 1$ ), cette condition mathématique de résonance signifie que les points critiques sont les rayons où la vitesse de phase de l'onde coïncide exactement avec le taux de rotation de l'écoulement moyen. Cette interprétation physique n'est pas du tout évidente d'un point de vue intuitif et n'est valide que dans le cas très précis de la géométrie azimutale  $m = 1$  :

$$\text{pour } m = 1 : \quad \exists r_{crit}(Re) \in \mathbb{C} \mid V_{\varphi}(r_{crit}) = \Omega(r_{crit}) \quad (6.11)$$

Lorsque ce phénomène de résonance se produit, un échange d'énergie entre l'écoulement moyen et l'onde devient alors possible et mène généralement à un amortissement de l'onde.

Dans la littérature du tourbillon, le problème de couche critique a été principalement investigué dans le cas non visqueux et bidimensionnel, comme nous l'avons mentionné au paragraphe 2.3.3 du chapitre 2, notamment avec les études de Briggs, Daugherty et Levy [40] et Haberman [119–122] dans les années 1970, et plus récemment de Schechter & al. [238] ainsi que de Le Dizès [72] et Haberman [123].

Pour résumer brièvement les principaux résultats à retenir, ces études montrent que dans le cas 2D non visqueux, les couches critiques mènent à l'existence de perturbations analogues à des ondes amorties mais d'un type très particulier, appelées "quasi-modes". Selon la définition proposée par Schechter & al. [238], un quasi-mode est une perturbation de vorticité qui se comporte en apparence comme une sorte d'onde de Kelvin isolée, corotative et propagative située à l'intérieur du vortex, qui devient faiblement amortie via un mécanisme de résonance par interaction avec le tourbillon porteur qui tourne dans le même sens de rotation que la perturbation. Cependant,

plus tard, elle développe une sorte de "jupe" localisée dans la périphérie du tourbillon, où la vorticité est continuellement enveloppée en une spirale serrée, qui "pompe" de l'énergie à la perturbation et provoque ainsi l'amortissement de cette pseudo-onde. Ces résultats théoriques de Schecter & al. [238] sont étayés par leurs observations expérimentales sur un plasma d'électrons magnétisés. En effet, ces auteurs ont observé un écart spectaculaire en temps long par rapport aux prédictions de la théorie linéaire dans le cas de la réponse d'un tourbillon à une excitation impulsionnelle quadrupolaire (i.e.  $m = 2$ ). Schecter & al. [238] considèrent que ce phénomène est un effet manifeste des non-linéarités sur les couches critiques en temps long, qui se trouve être particulièrement net dans le cas  $m = 2$ .

En réalité, la nature d'un quasi-mode est beaucoup plus complexe d'un point de vue mathématique. Schecter & al. [238] expliquent qu'analytiquement, un quasi-mode est en fait un "paquet d'ondes" constitué de modes non amortis du spectre continu (propre au modèle de tourbillon retenu), caractérisé par un pic de fréquence et dont le comportement global s'amortit au cours du temps via une interférence dispersive entre ces modes.

Ainsi, cette jupe de vorticité autour du coeur tourbillonnaire décrite par Schecter & al. [238] en non visqueux correspond en réalité à la contribution du *spectre continu non visqueux*.

Les travaux de thèse de Fabre [99] rejoignent la description de Schecter & al. [238], selon laquelle un quasi-mode est une perturbation qui se comporte initialement comme une onde faiblement amortie située à l'intérieur du tourbillon. Cependant, comme le soulignent Fabre & al. [98], il est très important à ce stade de bien distinguer les effets du *spectre continu non visqueux* de ceux du *spectre continu visqueux*, ce qui est fait rigoureusement dans l'annexe A de leur article [98].

Au vu des études de Schecter & al. [238] et de Fabre & al. [98], il s'avère que les fréquences de ces *quasi-modes* correspondent à celles des *pôles de Landau*, dont le calcul nécessite une procédure astucieuse de déformation du contour d'intégration dans le plan complexe. Ces aspects très techniques sont décrits dans l'annexe B de l'étude de Schecter & al. [238] ainsi que dans l'annexe C de l'article de Fabre & al. [98].

Par ailleurs, Briggs & al. [40] ont trouvé une condition suffisante pour que des ondes critiques soient amorties. Ces auteurs ont démontré qu'il suffit pour cela que la partie réelle du gradient de la vorticité de base de l'écoulement au niveau critique soit négative, i.e.

$$\Re \left( \frac{\partial \Xi}{\partial r} (r_{crit}) \right) < 0 \tag{6.12}$$

Il est important de préciser que ce critère a été établi dans le cadre d'hypothèses très restrictives (l'écoulement de base doit être du modèle de Rankine et la perturbation bidimensionnelle). Cette condition n'est donc pas directement exploitable dans le cas qui nous préoccupe ici, d'un tourbillon de sillage "réaliste" (profil gaussien de Lamb-Oseen) pour une étude prenant en compte les effets tridimensionnels et visqueux.

Schecter & al. [238] ont donné une explication physique de la condition 6.12 fondée sur la conservation de la quantité de mouvement azimuthale totale et revisitée dans l'annexe A de l'article de Fabre & al. [98]. Dans un premier temps, Schecter & al. [238] décomposent la quantité de mouvement en une contribution (constante) de l'écoulement de base, une contribution de "l'onde" (proportionnelle au carré de son amplitude), et une contribution de la "jupe" de vorticité. Dans un second temps, ils sont en mesure de montrer que le mélange de phase de vorticité mène à un accroissement de la quantité de mouvement azimuthale contenue à l'intérieur de la

"jupe", dès que la condition 6.12 est remplie. Ainsi, la seule façon pour le système de conserver la quantité de mouvement azimutale totale est que l'amplitude de "l'onde" décline.

Malgré leur nature mathématique différente, les modes de couche critique visqueux et les quasi-modes non visqueux décrivent la même réalité physique : le couplage entre la dynamique intrinsèque d'un coeur de tourbillon et l'enroulement de perturbations localisées dans sa périphérie. La différence entre ces deux types de perturbations est que dans le cas non visqueux, l'enroulement n'atteint jamais un stade asymptotique et que le rétrécissement des bras spiraux de vorticité se produit indéfiniment. D'autre part, en présence de la viscosité, le rétrécissement des bras spiraux mène à un accroissement des gradients radiaux qui rehausse la dissipation par diffusion visqueuse. Ainsi, l'enroulement ne se produit pas à l'infini, mais jusqu'à un moment où la dissipation devient non négligeable. Selon cette explication, la "jupe" des bras spiraux des quasi-modes et la zone spirale des ondes de couche critique jouent le même rôle. La différence est que dans le premier cas, l'énergie perdue par l'onde est transférée dans l'espace de la "jupe" où il a pour résultat d'accroître la quantité de mouvement angulaire moyenne, alors que dans le second cas, elle est dissipée sous l'effet de la viscosité.

Si l'on suit cette explication proposée par Fabre & al. [98], on en conclut que pour un mode donné, plus le nombre de Reynolds est élevé, plus les bras spiraux doivent être étroits afin de fournir la juste quantité de dissipation. Le Dizès [72] a également formulé cette conjecture et cette prédiction est vérifiée sur la figure 6.26, qui montre l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur le mode propre déjà illustré sur le schéma 6.24(b). Comme on peut le voir en comparant ces tracés, lorsqu'on élève le nombre de Reynolds de  $Re = 1000$     $Re = 5000$ , le seul changement notable dans la structure du mode propre est le rétrécissement prédit des bras spiraux de vorticité.

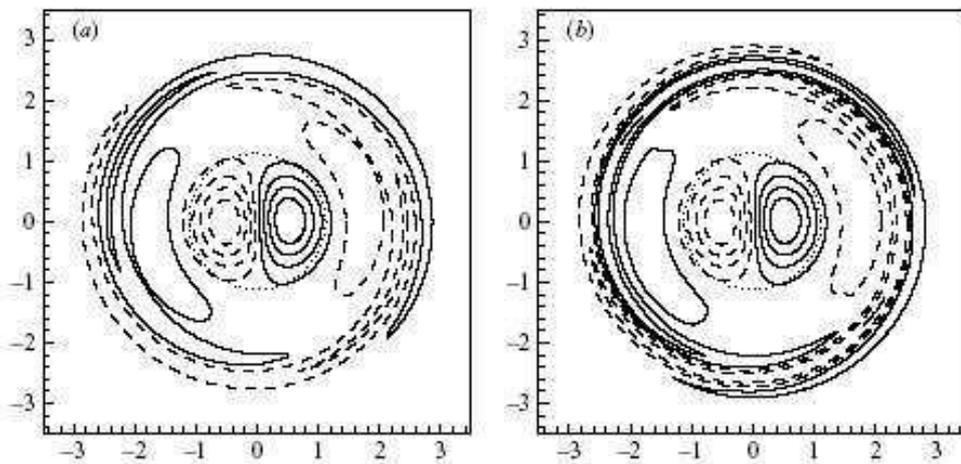


FIG. 6.26 – Effet du nombre de Reynolds sur la topologie des modes propres hélicoïdaux de Landau :  volution d'une onde donnée de type "L" ( $m = 1$  à  $k = 1$ ) en augmentant  $Re$ . (a)  $Re = 3000$ ,  $\omega = 0.1515 - 0.0219 i$ . (b)  $Re = 5000$ ,  $\omega = 0.1522 - 0.0220 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

Enfin, il est à noter que pour le tourbillon de Lamb-Oseen, tous les modes rétrogrades possèdent un point critique qui satisfait la condition 6.12 et pourraient donc être amortis par le mécanisme décrit ci-dessus. Cependant, comme on l'a signalé précédemment, les ondes de couche critique caractérisées par la coexistence d'une composante ondulatoire et d'une structure spirale, ne s'observent que sur chaque branche de type "L1" dans un intervalle étroit de

nombre d'onde  $k$ , dont la limite supérieure est donnée par le point où la fréquence d'oscillation est approximativement  $\omega_r \approx 0.12$  (i.e.  $k \approx 1.2$  pour la première branche "L1",  $k \approx 2.6$  pour la seconde branche, etc.), et dont la limite inférieure est donnée par le point où la direction de propagation du mode s'inverse (i.e.  $k \approx 0.8$  pour la première branche "L1",  $k \approx 1.4$  pour la seconde branche, etc.). Pour des valeurs de  $k$  supérieures à cet intervalle, les modes sont des ondes régulières, et pour des valeurs de  $k$  inférieures à cet intervalle, les modes ne possèdent que la composante spirale. Pour être complet, Fabre & al. [98] font remarquer que dans leur étude asymptotique non visqueuse, Le Dizès et Lacaze [78] rapportent le cas d'une bifurcation apparue dans la structure mathématique des modes pour  $\omega = 0.1267$ . Toutefois, un argument physique, qui expliquerait pourquoi cette transition a lieu pour cette valeur précise, fait encore défaut.

### 6.2.5 Les ondes de Kelvin elliptiques du tourbillon de Lamb-Oseen

La figure 6.27 représente les modes normaux du tourbillon de Lamb-Oseen pour la géométrie azimutale  $m = 2$  à  $Re = 1000$ , en utilisant rigoureusement les mêmes conventions d'adimensionnement et de codes de couleur que dans les figures 6.1 et 6.2 : plus les branches sont claires, plus les ondes sont fortement amorties.

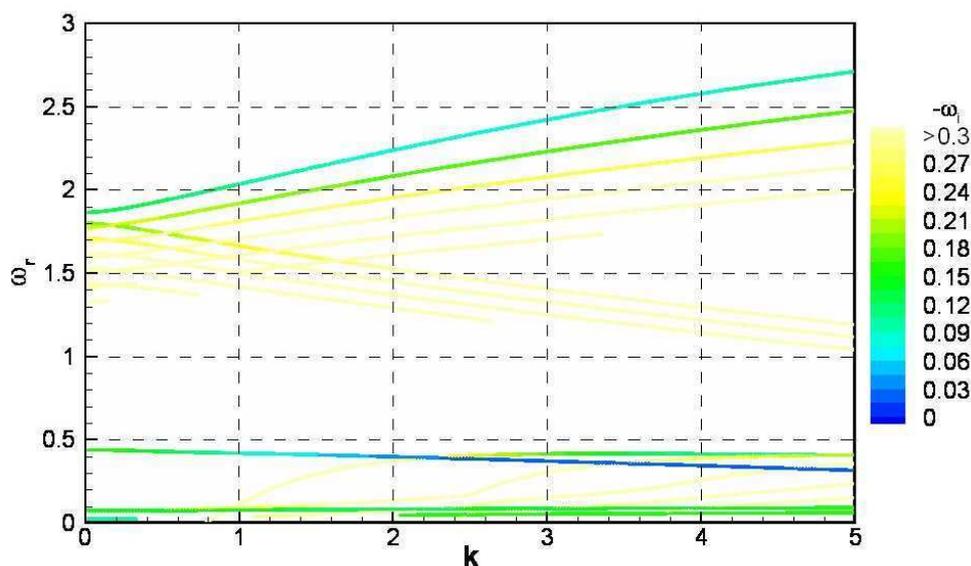


FIG. 6.27 – Diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=2$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

Pour les perturbations elliptiques ( $m=2$ ), Fabre & al. [98] ont identifié quatre familles d'ondes :

- la famille "C" comme "coeur"
- la famille "V" comme "viscosité"
- la famille "L" en référence aux pôles de Landau
- la branche "F" comme "Flattening" (aplatissement)

De manière générale, on reconnaît les trois familles de branches étiquetées "C", "V" et "L" en raison de leurs ressemblances avec les ondes correspondantes pour la géométrie  $m = 1$ . Il est à noter qu'une différence principale avec le cas  $m = 1$  est l'absence totale de modes contrarotatifs. En particulier, la branche "D" (l'onde héliçoïdale de "Déplacement") est absente des modes en double hélice, et les ondes "L" de  $m = 2$  restent rétrogrades pour toutes les valeurs du nombre

d'onde  $k$ . La figure 6.28 est un agrandissement de la figure 6.27 pour une meilleure visualisation des ondes de la famille "L" sur l'intervalle  $0 < \omega_r < 0.5$ . Comme dans le cas  $m = 1$ , cette famille peut être plus précisément décomposée en deux espèces, dénommées "L1" et "L2".

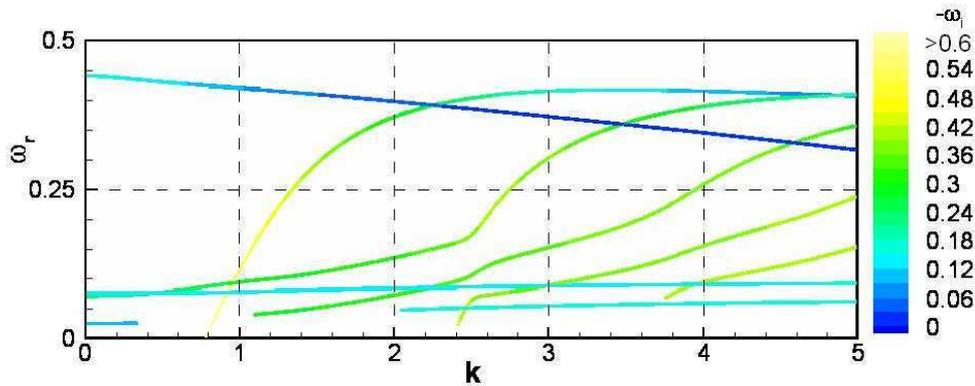


FIG. 6.28 – Diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=2$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

Une branche de la famille "L1" est étiquetée "F" et mérite une attention toute particulière. En effet, à la lumière de l'étude d'Arendt & al. [8] et de leurs propres calculs numériques, Fabre & al. [98] ont montré qu'une branche particulière de la famille "L1" est responsable à elle seule de la dynamique globale en forme "d'aplatissement" des perturbations en double hélice. Cette onde est dénommée "F" (pour "Flattening wave" en anglais) dans la terminologie de Fabre & al. [98] et a été brièvement évoquée au chapitre 2. En réalité, l'onde "F" est le moteur du mécanisme physique décrit au paragraphe 2.2.3.3 et l'aplatissement des perturbations infinitésimales de géométrie azimutale  $m = 2$  est visiblement un phénomène générique de la dynamique linéaire d'un tourbillon isolé car il a été observé aussi bien par Arendt & al. [8] sur le modèle non visqueux de Rankine que par Fabre & al. [98] avec le tourbillon plus "réaliste" de Lamb-Oseen qui permet de prendre en compte les effets de la diffusion visqueuse.

De manière générale, la comparaison des modes de Kelvin obtenus sur la géométrie  $m = 2$  entre le tourbillon de Rankine et celui du Lamb-Oseen menée par Fabre & al. [98] a conduit sensiblement aux mêmes conclusions que pour le cas  $m = 1$ . En particulier, on observe les plus grandes différences dans l'intervalle rétrograde, où tous les modes deviennent plus ou moins amortis. De plus, Arendt & al. [8] ont montré la possibilité de propagation d'ondes en double hélice le long du tourbillon de Rankine (ce qui n'est pas le cas sur le modèle de Lamb-Oseen), mais ce mécanisme semble anecdotique car spécifique du modèle de vortex et purement non visqueux.

### 6.2.5.1 Les ondes de coeur (famille "C")

Les branches de la famille "C" présentent les mêmes tendances que leurs homologues de la géométrie  $m = 1$  : elles se propagent à droite et sont généralement corotatives ( $\omega_r > 2$ ), excepté dans le domaine des grandes longueurs d'onde où elles deviennent rétrogrades ( $0 < \omega_r < 2$ ). Un exemple d'un mode propre appartenant à cette famille est représenté sur le schéma 6.29(a). Indubitablement, ce mode propre met en évidence une ressemblance certaine avec son homologue  $m = 1$  du schéma 6.11(a). On peut le décrire comme un quadripôle de vorticit e enti erement localisée à l'int erieur du coeur tourbillonnaire. Les ondes sur les autres branches "C" ont une

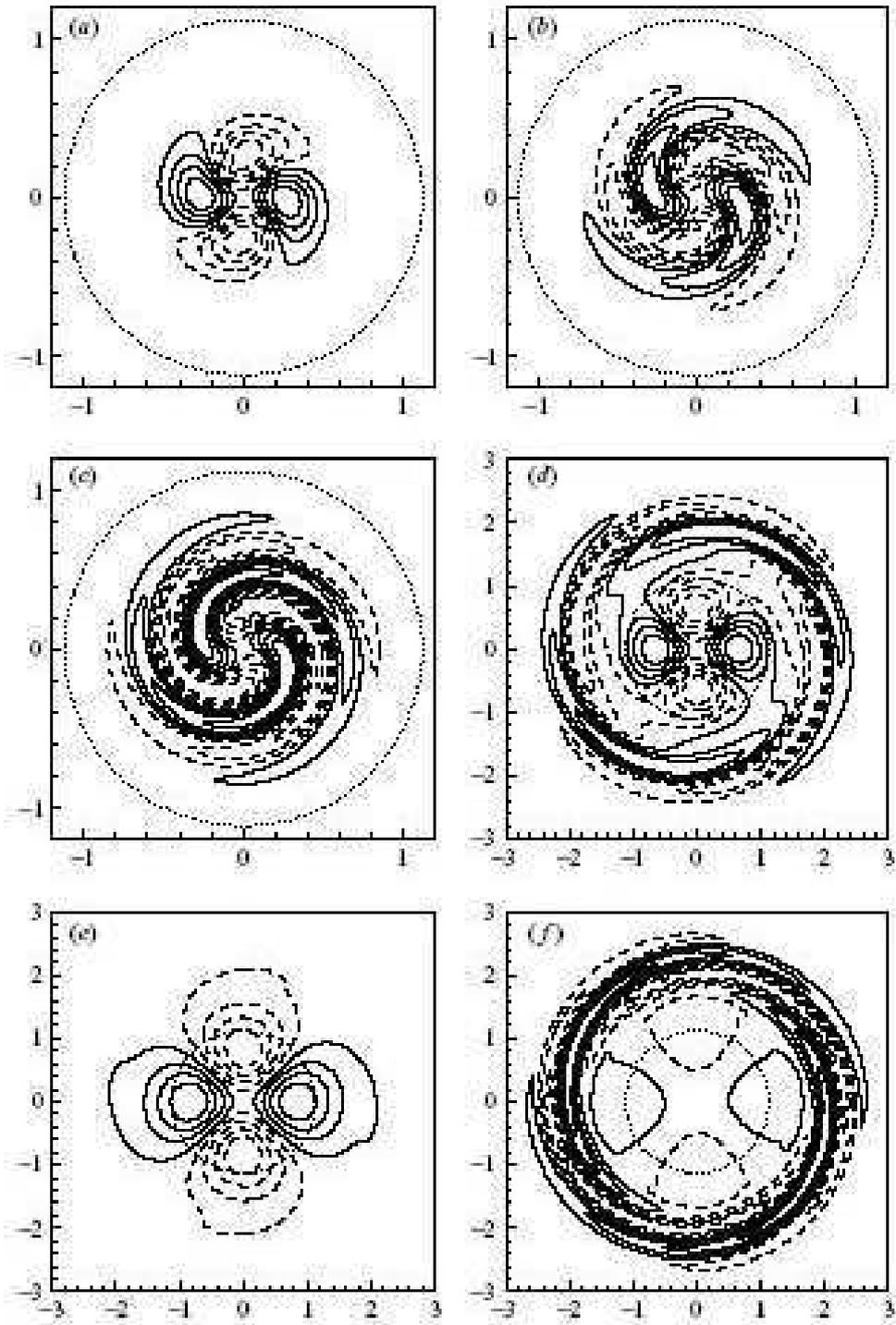


FIG. 6.29 – Structure de différents modes propres en double hélice ( $m = 2$ ) à  $Re = 1000$ . (a) mode "C" avec  $k = 5$ ,  $\omega = 2.703 - 0.0996 i$ . (b) mode "C" avec  $k = 0.1$ ,  $\omega = 1.8702 - 0.1305 i$ . (c) mode "V" avec  $k = 1$ ,  $\omega = 1.6648 - 0.2339 i$ . (d) mode "L" avec  $k = 5$ ,  $\omega = 0.4077 - 0.0730 i$ . (e) mode "F" avec  $k = 3.45$ ,  $\omega = 0.3608 - 0.0173 i$ . (f) mode "F" avec  $k = 1$ ,  $\omega = 0.4203 - 0.0921 i$ . Illustration utilisant les mêmes conventions que dans la figure 6.5 (d'après Fabre & al. [98]).

structure similaire, avec un nombre croissant de quadripôles qui se chevauchent, mais leur structure reste toujours concentrée à l'intérieur du coeur tourbillonnaire. En conséquence, exactement de la même manière que pour  $m = 1$ , ces ondes peuvent être identifiées comme des "ondes de coeur". La nature corotative de ces ondes peut s'expliquer avec les mêmes arguments physiques que ceux donnés pour  $m = 1$  sur la figure 6.11, excepté que la géométrie est légèrement différente.

L'inspection de l'effet de viscosité sur ces ondes "C" mène aux mêmes conclusions que pour  $m = 1$ . Sur chaque branche, le taux d'amortissement atteint un minimum pour une valeur finie du nombre d'onde. Par exemple, pour la première branche (et la moins amortie) le minimum se produit pour  $k = 2.7$ , et correspond à  $\omega = 2.3690 - 0.0822i$ . Comme l'ont souligné Fabre & al. [98], il est capital de remarquer que ces ondes sont toujours sensiblement plus amorties que leurs homologues  $m = 1$ . Pour illustrer cette constatation, il suffit de rappeler que le taux d'amortissement minimum pour des ondes hélicoïdales C est  $-0.0331$ .

Pour finir, les ondes "C" présentent également un comportement de "mode central" dans la limite des grandes longueurs d'onde. Par exemple, le schéma 6.29(b) représente le mode propre calculé sur la même branche que dans le cas 6.11(b), mais pour la valeur  $k = 0.1$ . On peut reconnaître la structure de mode central caractéristique que nous avons déjà décrite au paragraphe 6.2.4.2 sur le schéma 6.11(c) dans le cas  $m = 1$ .

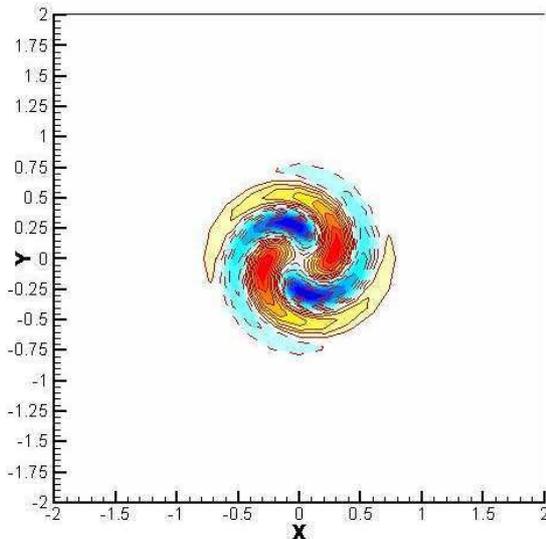


FIG. 6.30 – Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

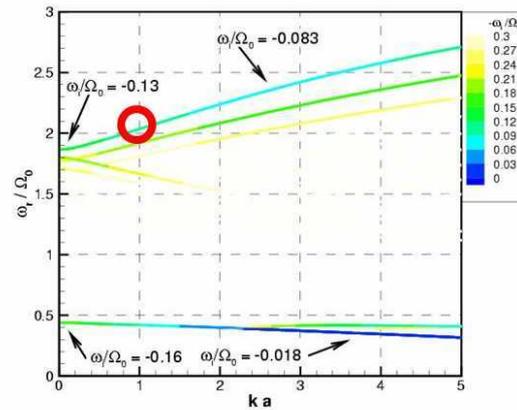


FIG. 6.31 – Un mode régulier de la famille "C" (Coeur) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

### 6.2.5.2 Les modes purement visqueux (famille "V")

On reconnaît une seconde famille comme l'équivalent des modes "V" décrits pour  $m = 1$ . Ces modes sont toujours contrarotatifs et deviennent fortement amortis à mesure que le nombre d'onde  $k$  est augmenté. Un exemple caractéristique de cette famille est présenté sur le schéma 6.29(c). On retrouve la structure spirale typique déjà décrite pour leurs homologues  $m = 1$ , par comparaison avec la figure 6.14(b). Là encore, la principale différence est que les modes présents pour  $m = 2$  consistent naturellement en quatre bras spiraux, au lieu de deux bras dans le cas

de la géométrie  $m = 1$ .

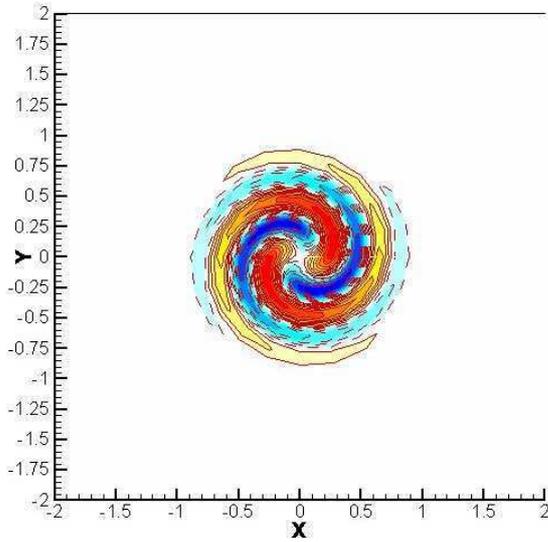


FIG. 6.32 – Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

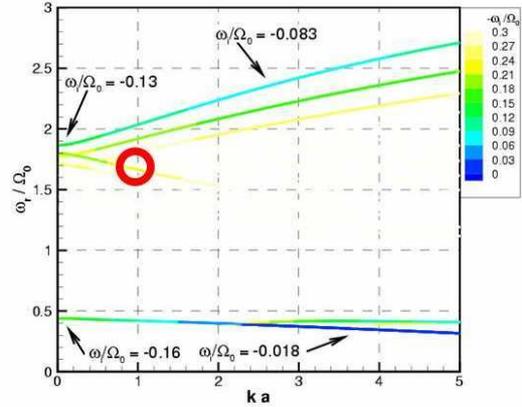


FIG. 6.33 – Un mode régulier de la famille "V" (Visqueux) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

### 6.2.5.3 Les branches de Landau (famille "L")

Une troisième famille d'ondes est directement reliée aux modes "L" décrits pour  $m = 1$ . Les fréquences de ces modes sont plus lisibles sur la vue en gros plan de la figure 6.28. Comme le soulignent Fabre & al. [98], la plupart de ces modes sont bien plus amortis que leurs homologues  $m = 1$ . La figure 6.29(d) donne un exemple d'un mode propre appartenant à cette famille. La structure de ce mode est clairement de type "onde de couche critique", avec la coexistence d'une composante ondulatoire quadripolaire à l'intérieur du coeur tourbillonnaire, et d'une structure spirale localisée à l'extérieur du noyau du tourbillon. Comme dans le cas  $m = 1$ , la coexistence à la fois d'une composante ondulatoire dans le coeur et de la couche critique ne se produit que dans un domaine limité de  $k$ . Le mode correspondant à la figure 6.29(d) perd la structure spirale et devient une onde régulière pour  $k \approx 8$ , qui correspond approximativement à  $\omega \approx 0.39$ . D'autre part, il perd la composante ondulatoire et devient un vrai mode singulier pour  $k \approx 3$ , qui correspond à la valeur maximale de  $\omega_r$  pour ce mode. Selon Fabre & al. [98], les modes sur les branches supérieures présentent les mêmes tendances et sont de type onde de couche critique pour  $\omega_r$  entre 0.39 et leur valeur maximale. A ce jour, il n'y a aucun argument physique expliquant ces limites, mais Fabre & al. [98] ont remarqué que, comme pour  $m = 1$ , la valeur  $\omega = 0.3871$  correspond à une bifurcation dans la structure mathématique des modes selon l'étude asymptotique non visqueuse de Le Dizès et Lacaze [78].

De la même manière que dans le cas  $m = 1$ , Fabre & al. [98] ont investigué le comportement des modes "L" pour  $m = 2$  dans la limite des grands nombres de Reynolds. Ici encore, on s'attend à ce que les fréquences cadrent, à l'ordre dominant, avec celles des "modes singuliers non visqueux" calculés en utilisant une procédure de déformation des contours d'intégration dans le plan complexe. Le détail technique du mappage de ces modes singuliers non visqueux est présenté dans l'annexe C de l'article de Fabre & al. [98] Comme pour  $m = 1$ , en plus de la

première sorte d'ondes déjà calculée par Sipp et Jacquin [244], certaines nouvelles sortes d'ondes ont été découvertes.

Il est à noter que les résultats non visqueux présentent un comportement compliqué qui a été partiellement expliqué par Le Dizès et Lacaze [78]. Les résultats visqueux semblent comparativement plus réguliers, et un certain type de bifurcation de mode semble se produire (i.e certaines branches visqueuses semblent "sauter" d'une limite non visqueuse à une autre).

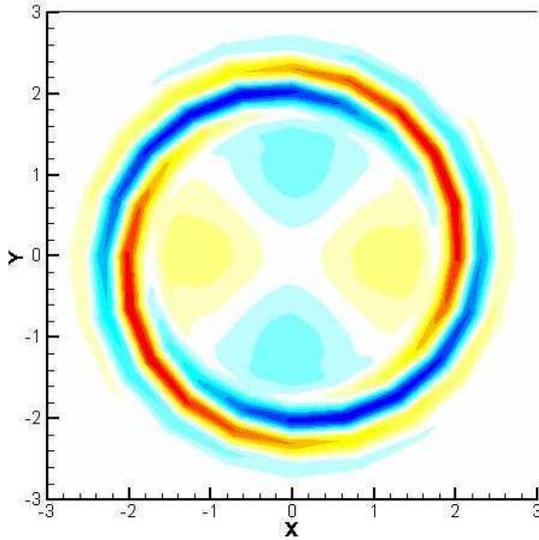


FIG. 6.34 – Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : structure géométrique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

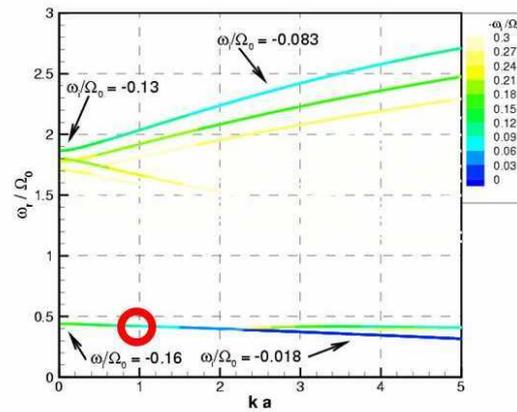


FIG. 6.35 – Un mode régulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

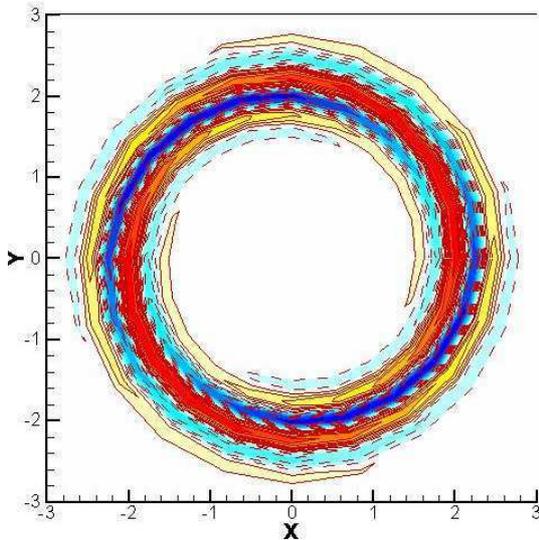


FIG. 6.36 – Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : structure géométrique de couche critique (d'après Fabre et Jacquin [93]).

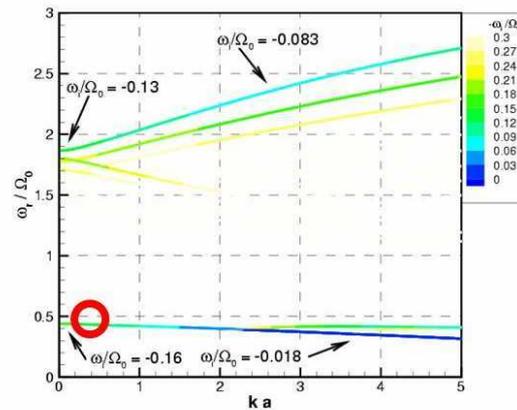


FIG. 6.37 – Un mode singulier de la famille "L" (Landau) de la perturbation  $m=2$  à  $Re=1000$  : point de fonctionnement sur le diagramme de stabilité linéaire (d'après Fabre et Jacquin [93]).

#### 6.2.5.4 Le mode d'aplatissement (la branche "F")

Nous avons laissé pour la fin la description de la branche particulière appelée "F" sur la figure 6.28. Pour  $Re = 1000$ , ce mode est le moins amorti de tous les modes  $m = 2$ . Le taux d'amortissement minimal se produit pour  $k = 3.45$ , et la fréquence correspondante est  $\omega = 0.3608 - 0.0173 i$ . Le mode propre correspondant est représenté à la figure 6.29(e). Ce mode propre prend la forme d'un quadripôle de vorticité qui n'est pas limité à l'intérieur du coeur du tourbillon mais s'étend aussi aux parties extérieures du tourbillon. Cette structure est la plus simple de tous les modes  $m = 2$  et a une interprétation géométrique claire. En effet, lorsqu'il est superposé à l'écoulement de base, l'effet de ce quadripôle est d'accroître la vorticité de l'écoulement de base le long d'une seule direction (la direction horizontale sur la figure 6.29(e)) et de la diminuer dans la direction perpendiculaire (la direction verticale sur la figure 6.29(e)). Donc, l'effet radical de cette onde est de déformer le coeur du tourbillon d'une façon elliptique. Cela justifie la description de cette onde comme une "onde aplatisante".

Pour les nombres d'onde plus grands que  $k = 3.45$ , ce mode reste une onde régulière faiblement amortie. D'autre part, pour des valeurs plus basses de  $k$ , la structure change de façon spectaculaire. Ceci est illustré sur la figure 6.29(f), pour  $k = 1$ . Dans ce cas, on reconnaît la structure maintenant familière d'une onde de "couche critique". Pour des nombres d'onde encore plus petits, le taux d'amortissement croît sensiblement, et pour  $k = 0$ , ce mode devient un mode fortement amorti, avec  $\omega = 0.4402 - 0.1588 i$ .

#### 6.2.6 Bilan de l'étude des modes normaux du tourbillon de Lamb-Oseen

Nous avons rappelé les principaux résultats concernant les ondes de Kelvin et les modes singuliers du tourbillon de Lamb-Oseen, modèle plus "réaliste" que celui de Rankine. Nous avons vu que les deux modèles conduisent à des physiques très similaires concernant les ondes axisymétriques. Par contre, des différences importantes apparaissent sur les modes propres des ondes en hélice ( $m = 1$ ) et en double hélice ( $m = 2$ ). En particulier, le modèle de Lamb-Oseen donne lieu à toute une "zoologie" de modes singuliers, soit localisés sur l'axe du tourbillon (*les modes centraux*), soit sujets à un très fort mécanisme d'enroulement et filamentation (*les modes de couches critiques*), responsables d'une dissipation plus rapide de l'énergie du tourbillon de sillage et totalement absents des études réalisées sur le tourbillon de Rankine.

A titre d'illustration, la figure 6.38 représente les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour la géométrie  $m = 3$  du tourbillon de Lamb-Oseen, en utilisant les mêmes conventions d'adimensionnement et de codes de couleur que dans les figures 6.1 et 6.2 (plus les branches sont claires, plus les ondes sont fortement amorties), mais en utilisant une échelle de valeurs deux fois plus large pour  $-\omega_i$  (cartouche de droite). Par conséquent, on vérifie sur le cas particulier de la figure 6.38 un résultat plus général et indépendant du modèle de tourbillon : les modes normaux de structures  $|m| \geq 3$  sont rapidement et très fortement amortis pour toutes les longueurs d'ondes.

D'un point de vue plus général, la classification exhaustive par Fabre & al. [98] des modes propres du tourbillon de Lamb-Oseen constitue un moyen d'analyse très efficace et précieux pour comprendre et interpréter physiquement les résultats de calculs CFD, en particulier lors de la résolution numérique d'un problème aux valeurs initiales, dans le cadre de la modélisation des phénomènes observés au banc B20 (cf. chapitres 3 et 4), traité au paragraphe suivant ainsi que dans le chapitre 7. En effet, nous rappelons que nous avons construit nos perturbations analytiques du chapitre 4, non pas comme des perturbations optimales, mais simplement comme des

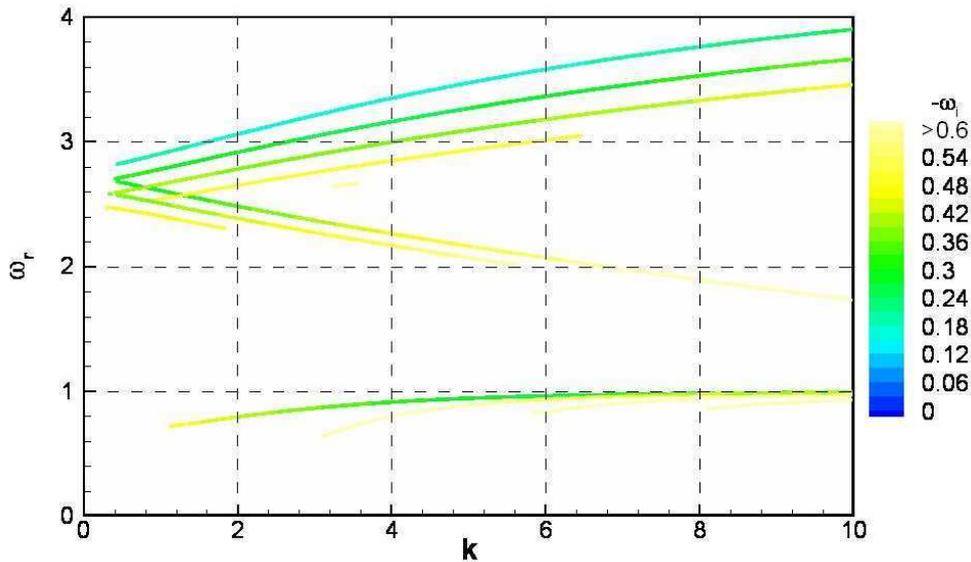


FIG. 6.38 – Diagramme de stabilité linéaire des perturbations  $m=3$  du tourbillon de Lamb-Oseen à  $Re=1000$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

”paquets d’ondes” composés des modes propres présentés aux paragraphes 6.2.3, 6.2.4 et 6.2.5. Les résultats de l’analyse de stabilité linéaire locale de tous ces modes normaux permettent de mieux suivre la contribution de ces différentes ondes dans la réponse globale et instationnaire du tourbillon de Lamb-Oseen à nos trois types de perturbations localisées.

### 6.3 Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à des perturbations localisées infinitésimales

Nous présentons ici la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à des perturbations localisées, dans le cadre de la résolution numérique d’un problème aux valeurs initiales. Cette approche est un moyen efficace de caractériser les instationnarités d’un écoulement et cette démarche a été appliquée avec succès par de précédents auteurs sur d’autres champs de base. Citons notamment les travaux d’Arendt & al. [8] sur le tourbillon de Rankine, Delbende & al. [67] sur le modèle de Batchelor et Fabre [99] sur le tourbillon de Lamb-Oseen.

Nous présentons une validation des résultats DNS par comparaison avec des calculs de la théorie linéarisée, avant d’interpréter ces résultats à l’aide de la physique des ondes de Kelvin rappelées dans la précédente partie.

Dans cette partie, nous tentons de répondre aux questions suivantes :

- Est-ce que les principales propriétés des ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen sont clairement identifiables sur le calcul DNS de la réponse à une perturbation localisée ?
- Quel est le rôle de ces ondes de Kelvin dans la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à une perturbation localisée ? Plus précisément, comment participent ces ondes inertielles à la propagation et aux instationnarités de perturbations le long d’un tourbillon ”réaliste”, en fonction de leurs géométries azimutales ?

### 6.3.1 Paramètres physiques et numériques de nos calculs DNS

Dans ce paragraphe, nous précisons les grandeurs de référence que nous avons utilisées et les paramètres adimensionnés que nous avons construits dans nos calculs DNS (cf. paragraphe 5.1.1). Le choix des grandeurs de référence a été complètement guidé par les échelles caractéristiques qui gouvernent la physique de nos écoulements tourbillonnaires à simuler. Ainsi, nous avons choisi le rayon du coeur tourbillonnaire (noté indifféremment  $r_c$  ou  $a$  dans cette thèse) comme longueur de référence :

$$L_{ref} = a \quad (6.13)$$

$$V_{ref} = \frac{\Gamma}{2 \pi a} \quad (6.14)$$

où  $\Gamma$  désigne la circulation du tourbillon porteur  $\Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} (2 \pi r V_\theta(r))$ .

Il résulte des équations 6.13 et 6.14 l'échelle caractéristique utilisée comme temps de référence pour adimensionner les équations normalisées de Navier-Stokes résolues par le code FLUDILES :

$$t_{ref} = \frac{L_{ref}}{V_{ref}} = \frac{2 \pi a^2}{\Gamma} \quad (6.15)$$

Le nombre de Reynolds employé dans nos simulations numériques devient alors :

$$Re = \frac{L_{ref} V_{ref}}{\nu_{ref}} = \frac{\Gamma}{2 \pi \nu} \quad (6.16)$$

Pour finir, nous avons besoin de deux nombres adimensionnels dans notre code de calcul compressible, à savoir le nombre de Mach  $Ma$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ . Nous avons vu au paragraphe 5.1.1 que ces paramètres de référence sont définis par :

$$Ma = \frac{U_{ref}}{c_{ref}} \quad (6.17)$$

où  $c_{ref}$  est la célérité du son de référence, donnée par  $c_{ref} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_{ref}}$  avec  $T_{ref}$  qui est la température de référence et  $\frac{R}{M} \approx 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  pour l'air.

$$Pr = \frac{\nu_{ref}}{\alpha_{ref}} \quad (6.18)$$

où  $\alpha_{ref} = \alpha(T_{ref})$  désigne la diffusivité thermique de référence.

Tout au long de notre étude, les nombres de Mach et de Prandtl sont choisis constants et égaux respectivement à  $Ma = 0.1$  et  $Pr = 0.7$ , cette dernière valeur étant d'usage très courant pour un écoulement d'air en CNTP (Conditions Normales de Température et de Pression), comme c'est le cas au banc d'essai B20.

Remarques sur les paramètres de nos calculs DNS :

(1) Avec les grandeurs de référence que nous avons choisies pour nos calculs DNS, il est important de souligner que le temps de référence  $t_{ref}$  utilisé pour adimensionner le temps n'est pas exactement égal à la période de retournement du tourbillon de sillage, noté  $T_0$  tout au long de cette thèse. En effet,  $T_0$  est défini par la relation  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  où  $\Omega_0$  désigne le taux de rotation du vortex en son centre, i.e.  $\Omega_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_\theta(r)}{r}$ . Dans le cas particulier du modèle de Lamb-Oseen (cf. paragraphe 4.2.2), on trouve  $\Omega_0 = \frac{\Gamma}{2\pi a^2}$ . Par conséquent,  $T_0$  et  $t_{ref}$  sont liés par la relation suivante :

$$T_0 = 2\pi t_{ref} \quad (6.19)$$

Dans les figures suivantes où le temps est adimensionné par  $T_0$  pour une interprétation plus physique des résultats, la correction par ce facteur multiplicatif  $2\pi$  a été systématiquement prise en compte, aussi bien au niveau du post-traitement que de la durée à simuler numériquement et du dimensionnement en conséquence du maillage à utiliser.

(2) Nous avons vu à l'équation 6.16 comment est construit notre nombre de Reynolds  $Re$  pour nos calculs DNS et les équations résolues par le code FLUDILES (paragraphe 5.1.1). Il se trouve que dans plusieurs études sur les tourbillons de sillage, certains auteurs préfèrent utiliser la définition  $Re_\nu = \frac{\Gamma}{\nu}$ . Dans la perspective d'un éventuel rapprochement entre les résultats numériques de cette thèse et d'autres études, le lecteur prêtera une attention toute particulière au fait que dans nos calculs DNS, on a :

$$Re = \frac{Re_\nu}{2\pi} \quad (6.20)$$

(3) Avec notre choix des grandeurs de référence présenté aux équations 6.13 et 6.14, on peut introduire de manière assez naturelle les échelles de temps caractéristiques de la convection  $\tau_c$  et de la diffusion visqueuse  $\tau_\nu$  déterminés par les relations :

$$\tau_c = \frac{L_{ref}}{V_{ref}} = \frac{2\pi a^2}{\Gamma} \quad (6.21)$$

$$\tau_\nu = \frac{L_{ref}^2}{\nu_{ref}} = \frac{a^2}{\nu} \quad (6.22)$$

Notre définition 6.16 du nombre de Reynolds vérifie ainsi effectivement :

$$Re = \frac{\tau_\nu}{\tau_c} \quad (6.23)$$

Nous reviendrons ultérieurement sur cette dernière relation, très utile pour interpréter les résultats numériques.

(4) En ce qui concerne la valeur de notre nombre de Mach, nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 7.4, où nous nous efforcerons de nous rapprocher dans nos simulations DNS d'un calcul CFD en similitude directe avec les caractéristiques du banc d'essais B20.

### 6.3.2 Validation de notre code DNS sur la théorie de stabilité linéaire

Dans un premier temps, nous avons fait plusieurs tests consacrés aux maillages, portant en particulier sur les extensions des domaines de calcul et les densités de points. L'objectif était de valider l'outil DNS avec tous les développements spécifiques apportés dans le code de calcul, notamment notre méthode de filtrage spatial (paragraphe 5.3.1) et notre technique d'anti-diffusion du champ de base (paragraphe 5.3.2). Cette validation du code DNS est réalisée en "régime linéaire", i.e. avec de petites amplitudes de perturbations ( $\varepsilon = 0.01$  soit un niveau de perturbation de 1% par rapport au champ de base, ce qui peut être considéré comme infinitésimal d'un point de vue CFD), par comparaison aux résultats des calculs de Fabre [99] avec sa méthode de collocation spectrale.

La figure 6.39 représente les vitesses de propagation maximales (vitesses de groupe  $\max_k \frac{\partial \omega_r}{\partial k}$ ), par calcul des pentes maximales sur les branches des diagrammes de stabilité linéaire représentés aux figures 6.1, 6.2 et 6.27. On constate que chaque géométrie azimutale de perturbation exhibe des maxima différents de vitesse de groupe et à des nombres d'onde axiaux différents, ce qui est totalement inhérent et caractéristique du nombre d'onde azimutal  $m$ .

	$(\Omega_0 a)^{-1} \frac{\partial \omega}{\partial k}$	$ka$
$\omega_{0,1}$	0.63	0
$\omega_{1,0}$	-0.29	0.45
$\omega_{1,1}$	0.29	1
$\omega_{1,-1}$	-0.14	2.26
$\omega_{1,-2}$	-0.08	3.96
$\omega_{2,1}$	0.18	2

FIG. 6.39 – Vitesses de groupe maximales des ondes de Kelvin  $\omega_{m,n}$  du tourbillon de Lamb-Oseen (d'après Fabre [99]).

Les dimensions des maillages dans la direction de l'axe du tourbillon doivent donc être adaptées à la géométrie azimutale de la perturbation (qui dicte la vitesse de propagation maximale) et à la durée physique simulée dans nos calculs instationnaires. La figure 6.40 récapitule les maillages finalement retenus pour la validation du code DNS sur nos trois types de perturbation pendant dix périodes de retournement du tourbillon de Lamb-Oseen. Nous avons prédimensionné a priori les longueurs de ces maillages en fonction des valeurs numériques de la figure 6.39 et nous les avons validés (ainsi que leur raffinement) a posteriori, à partir des résultats de convergence des DNS sur la méthode linéaire de Fabre [99], présentés sur les figures 6.41 à 6.45.

En ce qui concerne le raffinement de ces maillages, nous utilisons des tailles de maille constantes avec sept points dans le coeur du tourbillon  $r_c$  (selon les plans transverses) et huit points dans la taille caractéristique de la perturbation  $\sigma$  (selon l'axe du tourbillon). Contrai-

perturbation initiale	longueur (axe du vortex)	section transverse (perpendiculaire au vortex)	nombre total de points	dt adim	durée simulée
m = 0	$[-50 r_c; 50 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	15.9 M	6.8e-3	10 $T_0$
m = 1	$[-25 r_c; 25 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	8 M	6.8e-3	10 $T_0$
m = 2	$[-15 r_c; 15 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	4.8 M	6.8e-3	10 $T_0$

FIG. 6.40 – Maillages des calculs DNS en régime linéaire ( $r_c$  représente la taille du coeur tourbillonnaire et  $T_0$  la période de retournement du vortex).

rement à certaines études (Moet & al. [204] et Coquart & al. [52], par exemple), nous avons abandonné les maillages "stretched" (i.e. avec taille de maille constante au voisinage du coeur tourbillonnaire et étirement progressif des mailles vers les bords du domaine de calcul), car nous avons constaté sur nos calculs DNS des problèmes numériques récurrents aux points de raccordement.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons une validation quantitative de nos calculs DNS sur la théorie de stabilité linéaire, en considérant l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique de la perturbation intégrée sur tout le domaine 3D de simulation :

$$E(t) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left( u_x'^2(x, y, z, t) + u_y'^2(x, y, z, t) + u_z'^2(x, y, z, t) \right) dx dy dz \quad (6.24)$$

où  $u_x'$ ,  $u_y'$  et  $u_z'$  représentent les trois composantes de la perturbation de vitesse, calculées par la technique d'anti-diffusion du champ de base (méthode numérique développée au paragraphe 5.3.2).

En pratique, nous représenterons l'évolution temporelle du gain  $G(t)$ , d'usage commode pour caractériser les croissances transitoires des perturbations et défini par :

$$G(t) = \frac{E(t)}{E(0)} \quad (6.25)$$

Sur un plan plus applicatif, notamment pour l'aviation civile,  $G(t)$  est une grandeur pertinente pour évaluer la persistance ou le déclin du sillage tourbillonnaire.

### 6.3.2.1 Validation du code DNS sur la perturbation axisymétrique (m=0)

Sur le plan physique, les courbes de la figure 6.41 mettent clairement en évidence les effets du nombre de Reynolds, c'est-à-dire la compétition entre les effets convectifs et visqueux, avec un maximum global de l'énergie de la perturbation et un temps pour l'atteindre qui dépendent directement de  $Re$ , puisque c'est le seul paramètre que nous avons fait varier dans ces simulations numériques, les conditions aux limites et les paramètres caractéristiques de la physique de notre perturbation axisymétrique restant par ailleurs inchangés. En effet, le nombre de Reynolds quantifie l'importance relative des termes convectifs et des termes diffusifs dans les équations de Navier-Stokes :

$$Re = \frac{\| \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} \|}{\| \eta \nabla^2 \vec{V} \|} = \frac{1}{\nu} \frac{\| (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} \|}{\| \nabla^2 \vec{V} \|} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (6.26)$$

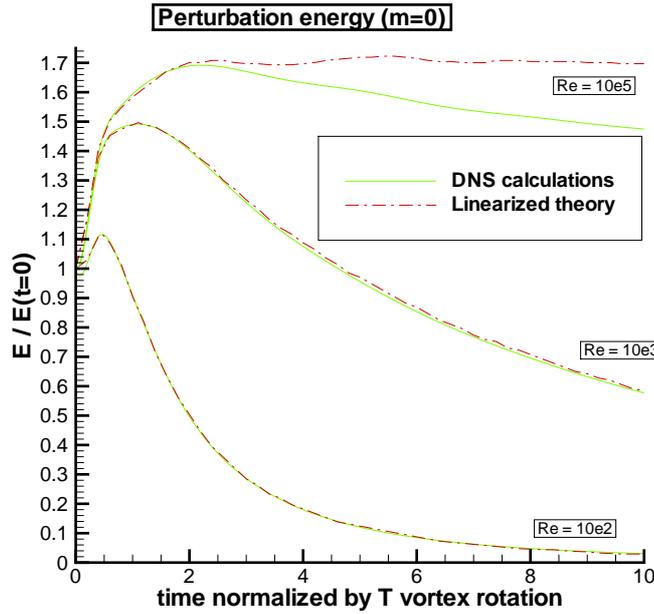


FIG. 6.41 – validation du code DNS sur la perturbation  $m=0$  en régime linéaire (maillage à 16 M points)

Un autre point de vue équivalent consiste à raisonner sur les échelles de temps caractéristiques de la convection  $\tau_c$  et de la diffusion visqueuse  $\tau_\nu$ , comme introduits précédemment. Le phénomène le plus rapide de propagation de la perturbation est celui qui impose la structure du champ de vitesse et la dynamique globale de l'écoulement, au moyen de l'équation 6.23 :  $Re = \frac{\tau_\nu}{\tau_c}$ .

Dans cette dernière approche, les courbes  $Re = 100$  (i.e.  $\tau_\nu = 100 \tau_c$ ) et  $Re = 1000$  (i.e.  $\tau_\nu = 1000 \tau_c$ ) de la figure 6.41 montrent que le temps de la diffusion visqueuse est dans ces deux cas suffisamment petit par rapport au temps convectif pour piloter l'évolution de la perturbation. Cette dissipation conduit à l'amortissement de la perturbation au bout d'un certain temps : notre paquet d'ondes axisymétriques vérifie  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c(t)}{E_c(0)} = 0$  pour  $Re = 100$  et  $Re = 1000$ .

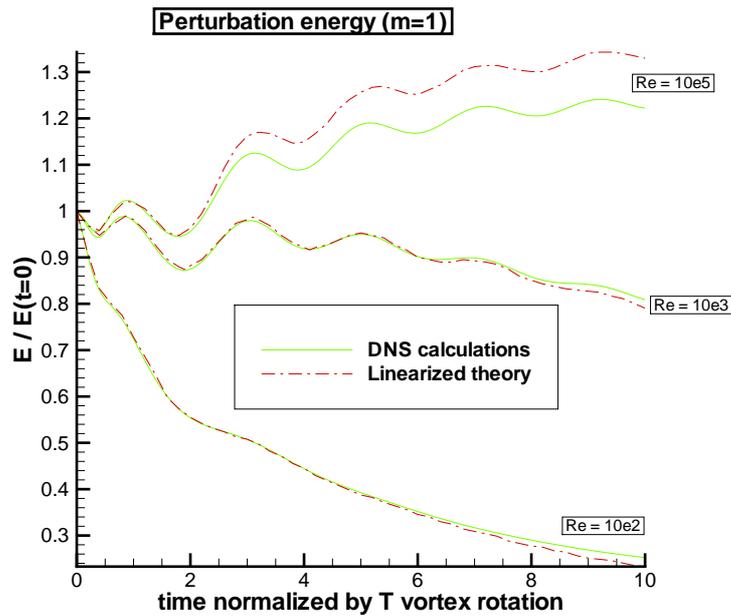
Par contre, la courbe  $Re = 100000$  exhibe une légère croissance transitoire de la perturbation axisymétrique puisque la théorie linéarisée (courbe en pointillé rouge, en faisant abstraction de la courbe verte correspondant au calcul DNS sous-maillé) montre que son énergie est pratiquement doublée en temps long par rapport à son niveau initial :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c(t)}{E_c(0)} \approx 1.7$  pour  $Re = 100000$ .

Cet effet du nombre de Reynolds est conforme à l'intuition que l'on peut avoir d'un écoulement ouvert cisailé, quasiment incompressible, avec une structure géométrique de perturbation relativement simple ( $m = 0$ ) : la forme des courbes de la figure 6.41 suggère une loi de similitude en  $Re$  pour le maximum de l'énergie de la perturbation.

### 6.3.2.2 Validation du code DNS sur la perturbation hélicoïdale ( $m=1$ )

Les courbes de la figure 6.42 montrent à nouveau les effets du nombre de Reynolds, comme présenté dans le précédent paragraphe en raisonnant sur les temps caractéristiques de la convection  $\tau_c$  et de la diffusion visqueuse  $\tau_\nu$ .

Par ailleurs, la principale différence avec les courbes de la figure 6.41 concerne l'apparition d'oscillations pour  $Re \geq 1000$ . La justification physique de ces fluctuations périodiques (de


 FIG. 6.42 – validation du code DNS sur la perturbation  $m=1$  en régime linéaire (maillage à 8 M points)

période  $T \approx 2 T_0$ ) ne nous semble pas triviale. Deux explications nous paraissent possible pour tenter de comprendre ce phénomène. La première explication possible pourrait être liée à la prédominance du mode "D" de déplacement discuté précédemment (cf. paragraphe 6.2.4.1), car nous avons vu que le mode "D" est l'onde hélicoïdale la moins affectée par la viscosité et cette onde dite "lente" joue un rôle prépondérant dans la dynamique globale de notre perturbation  $m = 1$  conçue sous la forme d'un paquet d'ondes hélicoïdales, comme nous le développerons au paragraphe 6.3.3 ainsi que sur les figures 6.46, 6.47 et 6.48. La seconde explication envisageable pour ces oscillations est liée aux non-normalités de l'opérateur de Navier-Stokes, dont les effets sont connus pour être plus prononcés dans le cas  $m = 1$  que dans le cas  $m = 0$ . En plus de ces oscillations, l'amortissement en temps long de la perturbation  $m = 1$  à  $Re = 1000$  est beaucoup moins évident que sur le cas  $m = 0$ . En effet, sur cette valeur de  $Re$ , on constate que  $\frac{E_c(10 T_0)}{E_c(0)} \approx 0.82$  pour  $m = 1$  au lieu de  $\frac{E_c(10 T_0)}{E_c(0)} \approx 0.60$  dans le cas de la perturbation  $m = 0$ . Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons refait un calcul DNS supplémentaire de notre perturbation  $m = 1$  à  $Re = 1000$ , en doublant l'extension du domaine de simulation selon l'axe du tourbillon tout en conservant le même raffinement de maillage que sur la figure 6.40, afin de pouvoir examiner le comportement de cette transitoire d'énergie sur une durée de vingt périodes de retournement du vortex (au lieu de  $10 T_0$  sur la figure 6.42). Ce résultat numérique est présenté sur la figure 6.44.

perturbation initiale	longueur (axe du vortex)	section transverse (perpendiculaire au vortex)	nombre total de points	dt adim	durée simulée
$m = 1$	$[-50 r_c; 50 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	15.9 M	6.8e-3	$20 T_0$

 FIG. 6.43 – Maillage du calcul DNS CALC132 sur la perturbation  $m = 1$  à  $Re = 1000$  avec  $\varepsilon = 0.01$  ( $r_c$  représente la taille du coeur tourbillonnaire et  $T_0$  la période de retournement du vortex).

La figure 6.44 confirme l'amortissement de la perturbation  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (même

### 6.3. RÉPONSE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À DES PERTURBATIONS LOCALISÉES INFINITÉSIMALES

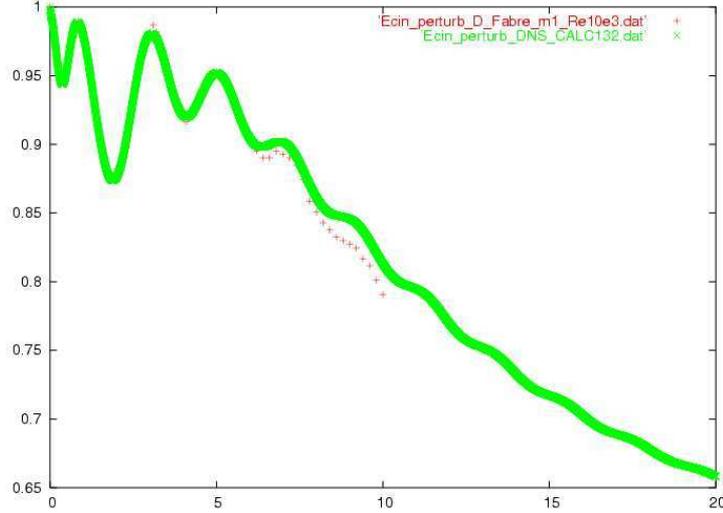


FIG. 6.44 – Calcul DNS de la perturbation  $m = 1$  avec  $\varepsilon = 0.01$  à  $Re = 1000$  sur une durée de  $20 T_0$  (maillage à 15,9 M points)

tendance que pour  $m = 0$ , mais plus lente) et montre par ailleurs que les oscillations de cette transitoire d'énergie sont très fortement atténuées dans l'intervalle  $10 T_0 < t < 20 T_0$ . On peut donc légitimement conjecturer que la diffusion visqueuse conduit à l'amortissement de la perturbation  $m = 1$  au bout d'un certain temps (certes plus long que pour  $m = 0$ ) : notre paquet d'ondes hélicoïdales vérifie bien  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c(t)}{E_c(0)} = 0$  pour  $Re = 100$  et  $Re = 1000$ , comme dans le cas axisymétrique.

Par contre, la courbe  $Re = 100000$  de la figure 6.42 exhibe une légère croissance transitoire, toujours oscillante, certes plus lente que dans le cas axisymétrique (sur cette valeur de  $Re$ , on constate que  $\frac{E_c(10 T_0)}{E_c(0)} \approx 1.32$  pour  $m = 1$  au lieu de  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c(t)}{E_c(0)} \approx 1.7$  pour  $m = 0$ ), mais avec un accroissement progressif de la perturbation hélicoïdale puisque la théorie linéarisée (courbe en pointillé rouge, en faisant abstraction de la courbe verte correspondant au calcul DNS sous-maillé) ne montre pas d'asymptote vers une constante en temps long, du moins sur une dizaine de périodes de retournement du vortex.

Par ailleurs, nous présenterons au paragraphe 7.5 un nouveau calcul DNS de la perturbation  $m = 1$  à  $Re = 100000$ , plus précis que celui de la figure 6.42, grâce à un raffinement du maillage (figure 7.87).

Pour résumer, on retrouve sur les transitoires d'énergie de la perturbation  $m = 1$  un effet indéniable du nombre de Reynolds (comme dans le cas  $m = 0$ ), mais avec un phénomène supplémentaire d'oscillations, d'autant plus important que le  $Re$  est plus élevé, effet clairement imputable à la structure géométrique plus complexe de la perturbation  $m = 1$ .

#### 6.3.2.3 Validation du code DNS sur la perturbation elliptique ( $m=2$ )

Les courbes de la figure 6.45 montrent à nouveau les effets du nombre de Reynolds, comme présenté dans les deux précédents paragraphes.

La différence la plus notable par rapport à  $m = 0$  et  $m = 1$ , et spécifique de la perturbation

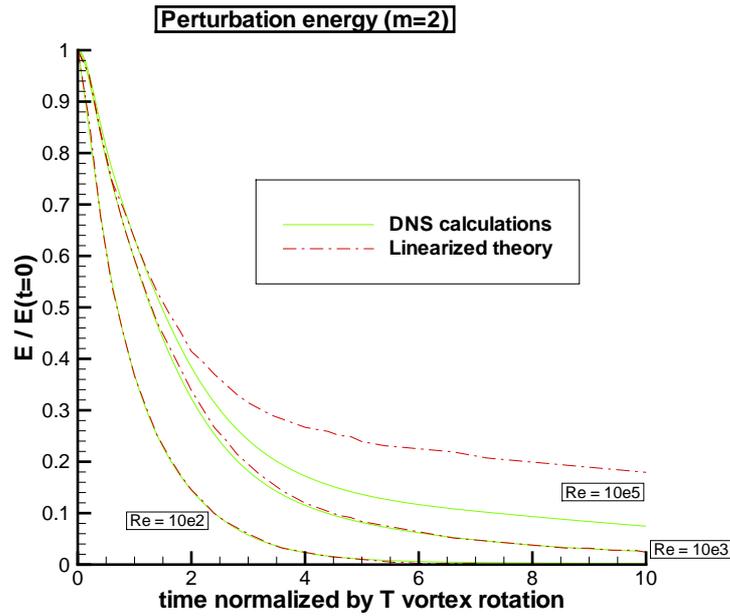


FIG. 6.45 – validation du code DNS sur la perturbation  $m=2$  en régime linéaire (maillage à 5 M points)

$m = 2$ , concerne son rapide et très fort amortissement à tous les nombres de Reynolds, y compris sur la courbe à  $Re = 100000$ . En effet, sur cette valeur de  $Re$ , on constate sur la théorie linéarisée (courbe en pointillé rouge, en négligeant la courbe verte correspondant au calcul DNS sous-maillé) que  $\frac{E_c(10 T_0)}{E_c(0)} \approx 0.08$  pour  $m = 2$ , alors que les perturbations  $m = 0$  et  $m = 1$  montrent de légères croissances transitoires  $\left(\frac{E_c(10 T_0)}{E_c(0)} > 1\right)$  à  $Re = 100000$ . Il est à noter que le sous-maillage du calcul DNS est patent à  $Re = 100000$  et cet écart important avec la courbe de la stabilité linéaire s'explique par la complexité de la structure géométrique de la perturbation  $m = 2$ , particulièrement difficile à capturer par le schéma numérique hermitien muni de la méthode de stabilisation, décrite au paragraphe 5.3.1 et qui absorbe artificiellement de l'énergie.

Nous pouvons résumer les résultats de la figure 6.45 par :

$$\forall Re, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_c(t)}{E_c(0)} = 0 \quad \text{pour } m = 2 \quad (6.27)$$

De plus, le caractère fortement amorti et sans oscillation des courbes de la figure 6.45 est un signe avant-coureur de l'amortissement sans propagation de la perturbation  $m = 2$  que nous verrons dans l'étude de la réponse globale du tourbillon de Lamb-Oseen à cette perturbation, au paragraphe 6.3.4.

### 6.3.3 Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation hélicoïdale ( $m=1$ ) en régime visqueux ( $Re=1000$ )

Après la validation quantitative de notre code DNS sur les résultats de la section 6.3.2, nous présentons dans cette partie la résolution numérique du problème aux valeurs initiales sur le cas  $m = 1$ , afin d'exposer la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation hélicoïdale et de proposer une description plus qualitative des phénomènes observés.

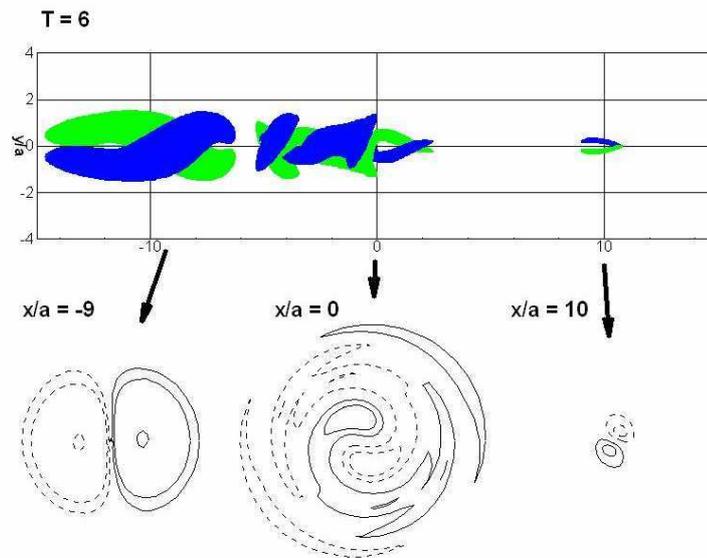


FIG. 6.46 – Calcul par la théorie de stabilité linéaire à  $Re=1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m=1$  en régime linéaire à l'instant  $T=6$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

La comparaison des résultats de la figure 6.46 obtenus en théorie de stabilité linéaire par Fabre & al. [93,99] avec les figures 6.47, 6.48, 6.49, 6.50 issues de nos calculs DNS à l'aide du code FLUDILES montre un remarquable accord entre les deux méthodes de résolution numérique, dans le calcul de l'évolution de la perturbation hélicoïdale au bout de six révolutions du coeur du tourbillon de Lamb-Oseen.

Les figures 6.46 et 6.47 montrent clairement que la perturbation peut être principalement décomposée en trois structures cohérentes :

- le premier élément est une structure vrillée qui se propage dans la direction axiale négative
- le deuxième élément est une perturbation de topologie complexe qui reste localisée sur la position de la perturbation initiale sans se propager, et qui s'enroule sur elle-même tout en étant amortie
- le troisième élément est une petite structure vrillée, située à proximité de l'axe du tourbillon et qui se propage dans la direction axiale positive.

Les figures 6.48 à 6.50 sont des coupes dans des plans perpendiculaires à l'axe du tourbillon de la perturbation de vorticité axiale représentée en 3D sur la figure 6.47. Ces visualisations 2D permettent de détailler les trois structures cohérentes mentionnées ci-dessus. En particulier, ces coupes illustrent comment les ondes de Kelvin décrites au paragraphe 6.2.4 sont mises en évidence sur nos calculs DNS et comment elles participent à la dynamique globale observée sur la figure 6.47. Le cercle tracé en pointillé indique la position du maximum de vitesse azimutale du tourbillon non perturbé et sert de repère pour distinguer les différentes familles d'ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen.

La figure 6.48 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de six périodes de retournement du tourbillon, dans un plan transverse éloigné de neuf rayons dans la direction négative de l'axe du vortex. Cette figure illustre la topologie du mode "D" de déplacement, caractérisé par une structure en dipôle qui enlace l'intégralité du coeur tourbillonnaire. De plus, le mode "D" est contrarotatif et crée une vitesse axiale négative dans l'écoulement, de par sa vitesse de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} < 0$ , d'où la présence de cette onde "D" sur la

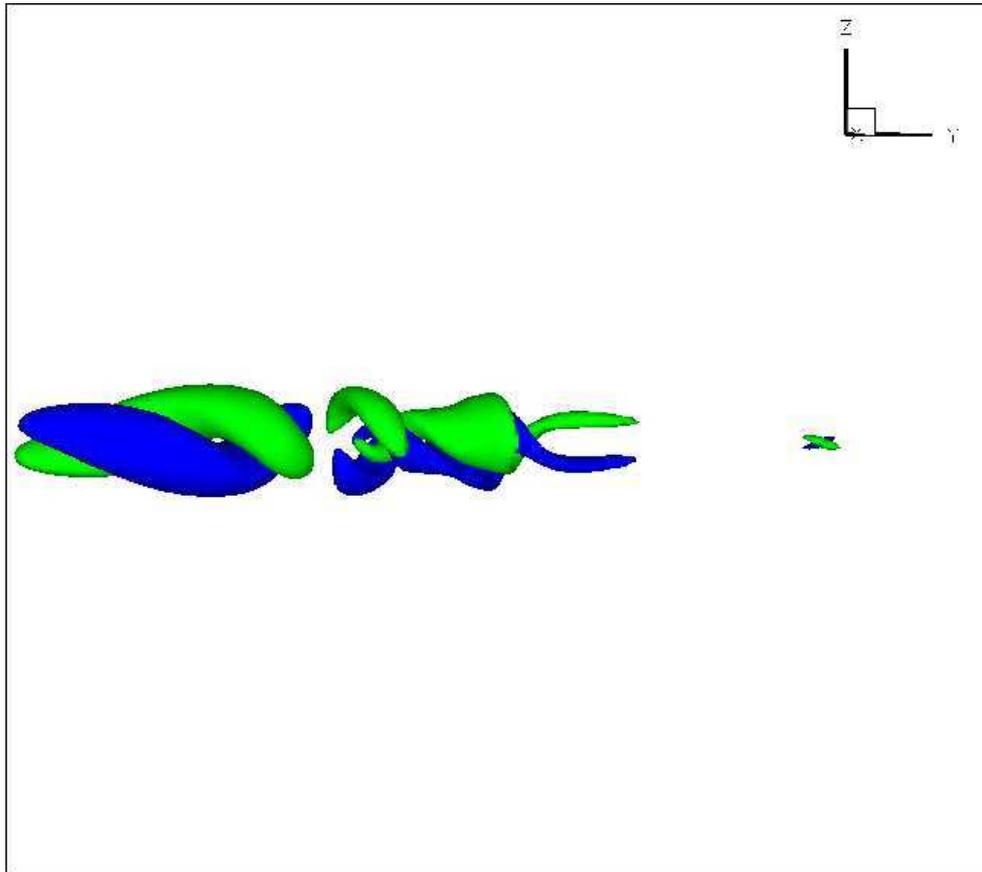


FIG. 6.47 – isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à  $\pm 10\%$  du maximum de la perturbation initiale

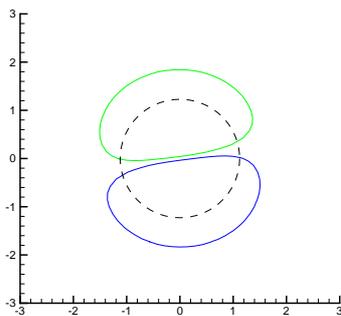


FIG. 6.48 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = -9$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

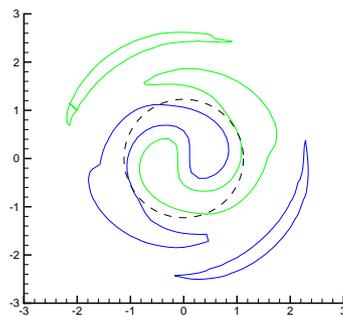


FIG. 6.49 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = 0$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

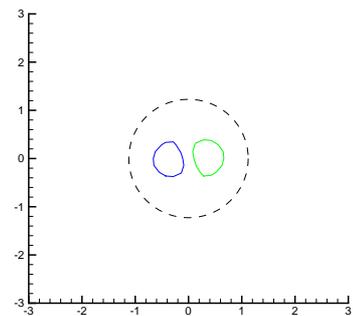


FIG. 6.50 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = +9$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

Calcul DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 1$  en régime linéaire ( $\varepsilon = 0.01$ ) à l'instant  $T = 6$  (maillage à 8 M points). Le cercle en pointillé noir représente le coeur tourbillonnaire (lieu du maximum de vitesse azimutale du tourbillon de Lamb-Oseen).

### 6.3. RÉPONSE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À DES PERTURBATIONS LOCALISÉES INFINITÉSIMALES

partie gauche du tourbillon. Enfin, il est important de rappeler que l'onde de déplacement est le mode hélicoïdal le moins affecté par la viscosité (cf. figure 6.2), ce qui explique que la structure lui correspondant est particulièrement développée sur les figures 6.46 et 6.47.

La figure 6.49 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de six périodes de retournement du tourbillon, dans le plan transverse centré sur l'origine de l'axe du vortex, c'est à dire là où est localisée la perturbation initiale. Sur cette figure, on observe une topologie complexe constituée par la persistance d'une structure dipolaire à l'intérieur du coeur tourbillonnaire, à laquelle s'ajoute des fragments de filaments spiraux dans la région extérieure. Cette structure complexe qui reste localisée à la position de la perturbation initiale sans se propager (i.e.  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \simeq 0$ ) et qui s'enroule sur elle-même tout en étant amortie par diffusion visqueuse, est délicate à expliquer. Fabre & al. [98] proposent de l'interpréter comme un paquet d'ondes de "couche critique", constitué d'ondes "L" et "V" interagissant entre elles et dont le comportement devient singulier dans la limite  $k \rightarrow 0$ . Le mécanisme physique sous-jacent serait celui d'une résonance entre la perturbation et le champ de base en un point critique  $R_{crit}$  tel que  $m\Omega(R_{crit}) - \omega = 0$ , créant de facto une singularité dans les équations 6.5 à 6.7. Pour lever cette singularité de type point critique, il n'existe à partir des équations de Navier-Stokes que deux explications possibles :

- l'effet du nombre de Reynolds ( $Re \rightarrow \infty$ )
- l'effet des non linéarités par le terme du second ordre  $(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}'$  dans l'équation 5.55, qui par définition est absent des équations de la stabilité linéaire.

Ces deux derniers points seront étudiés dans le chapitre 7.

La figure 6.50 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de six périodes de retournement du tourbillon, dans un plan transverse éloigné de neuf rayons dans la direction positive de l'axe du vortex. Cette figure illustre un front d'onde, composé d'un paquet de modes de la famille "C" de coeur, et plus précisément des premières branches d'ondes "C" qui sont corotatives. La catégorie d'ondes hélicoïdales "C" se distingue par une topologie très caractéristique, de structure dipolaire localisée à proximité de l'axe du tourbillon. De plus, les modes "C" créent une vitesse axiale positive dans l'écoulement, de par leur vitesse de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} > 0$ , d'où le positionnement de ce paquet d'ondes "C" sur la partie droite du tourbillon.

#### **Bilan de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation $m = 1$   $Re = 1000$**

Dans le cas d'une vrille  $m = 1$ , nous avons pu constater que toute l'énergie de la perturbation initiale se propage le long du tourbillon de Lamb-Oseen sous forme de paquets d'ondes hélicoïdales : pour  $Re = 1000$ , l'énergie diminue très faiblement sous l'effet de la viscosité puisqu'environ 90% de l'énergie initiale subsiste après six périodes de retournement du vortex.

La première structure cohérente est similaire aux observations d'Arendt & al. [8] sur le cas du tourbillon de Rankine. En revanche, les deux autres structures cohérentes n'ont pas de contrepartie dans le vortex de Rankine. Ceci est conforme avec notre interprétation physique en terme de paquets d'ondes : en effet, les familles d'ondes impliquées dans ces deux dernières structures cohérentes ont des propriétés fort différentes des ondes existantes sur le tourbillon de Rankine et déterminées par l'analyse de stabilité linéaire d'Arendt & al. [8] sur le modèle non visqueux de Rankine.

Dans notre cas du tourbillon de Lamb-Oseen, une grande partie de l'énergie initiale de la perturbation  $m = 1$  se propage avec le paquet d'ondes contrarotatives, c'est-à-dire le mode "D"

partant vers la gauche du vortex. Une énergie à peu près équivalente est associée à la structure spirale (paquet de modes singuliers de la famille "L", appelés *ondes de couche critique* et décrits au paragraphe 6.2.4.4), mais se trouve rapidement amortie au cours du temps par un fort processus de filamentation-enroulement et de diffusion visqueuse. Enfin, le paquet d'ondes corotatives (paquet de modes de la famille "C") contient une fraction négligeable de l'énergie totale.

### 6.3.4 Réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation elliptique ( $m=2$ ) en régime visqueux ( $Re=1000$ )

Après la validation quantitative de notre code DNS sur les résultats de la section 6.3.2 et l'étude de l'évolution de la perturbation  $m = 1$  de la section 6.3.3, nous présentons dans cette partie la résolution numérique du problème aux valeurs initiales sur le cas  $m = 2$ , afin d'exposer la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre aplatissement torsadé (i.e. une perturbation elliptique vrillée en forme de double hélice) et de proposer une description qualitative des phénomènes observés, comme dans le précédent paragraphe.

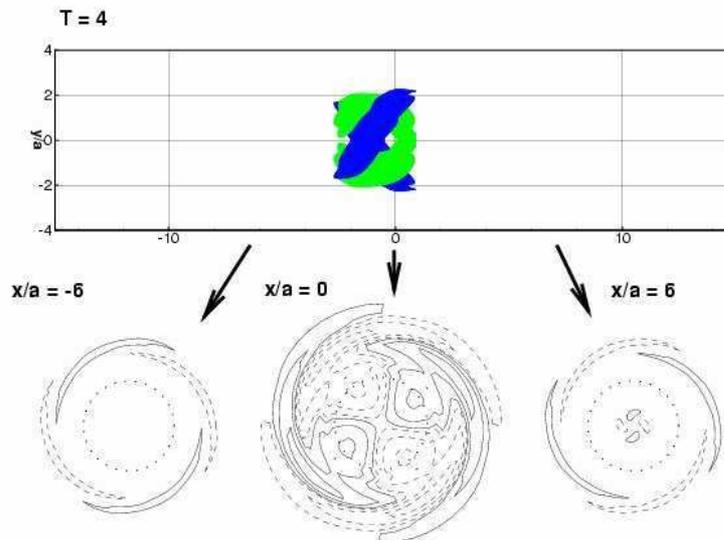


FIG. 6.51 – Calcul par la théorie de stabilité linéaire à  $Re=1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m=2$  en régime linéaire à l'instant  $T=4$  (d'après Fabre et Jacquin [93]).

La comparaison des résultats de la figure 6.51 obtenus en théorie de stabilité linéaire par Fabre & al. [93,99] avec les figures 6.52, 6.53, 6.54, 6.55 issues de nos calculs DNS à l'aide du code FLUDILES montre là-encore un remarquable accord entre les deux méthodes de résolution numérique, dans le calcul de l'évolution de la perturbation elliptique au bout de quatre révolutions du coeur du tourbillon de Lamb-Oseen.

Les figures 6.51 et 6.52 montrent très clairement qu'aucune structure cohérente ne se propage dans le cas  $m = 2$ , contrairement à la perturbation  $m = 1$ . La seule structure hydrodynamique subsistante est un résidu de la perturbation initiale qui s'amortit très rapidement, en s'enroulant autour de la localisation de la perturbation initiale.

Les figures 6.53 à 6.55 sont des coupes dans des plans perpendiculaires à l'axe du tourbillon de la perturbation de vorticité axiale représentée en 3D sur la figure 6.52. Ces visualisations 2D permettent de détailler la seule structure cohérentes mentionnée ci-dessus. En particulier,

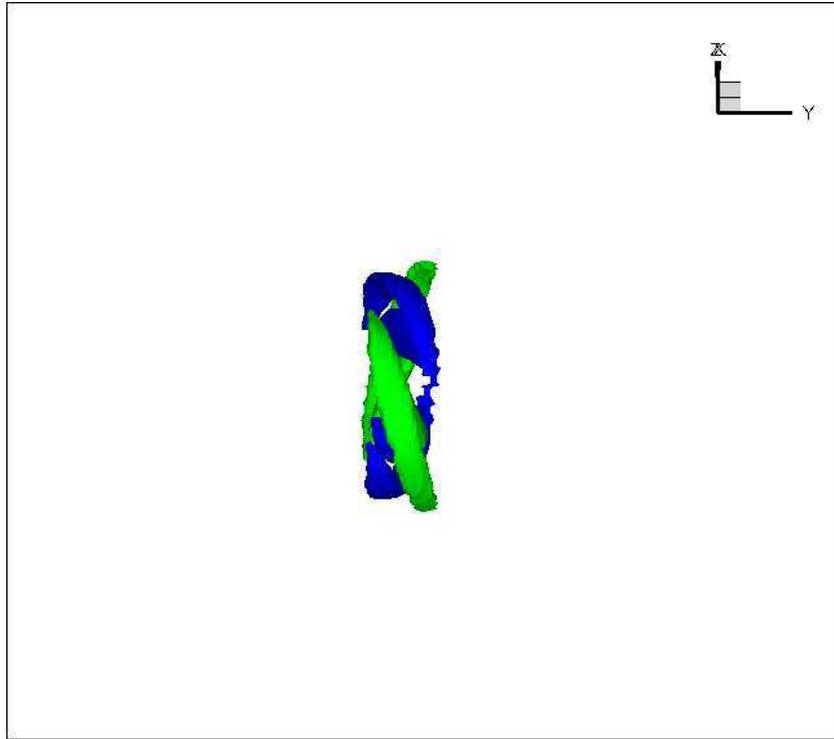


FIG. 6.52 – isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à  $\pm 10\%$  du maximum de la perturbation initiale

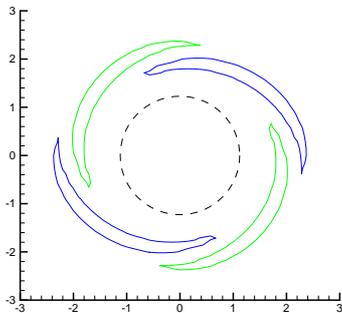


FIG. 6.53 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = -6$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

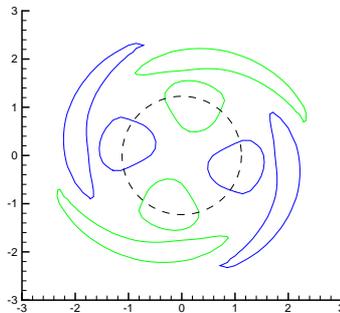


FIG. 6.54 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = 0$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

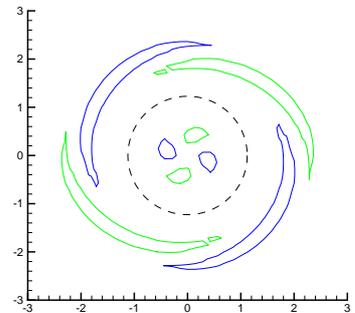


FIG. 6.55 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = +6$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

Calcul DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 2$  en régime linéaire ( $\varepsilon = 0.01$ ) à l'instant  $T = 4$  (maillage à 4,8 M points). Le cercle en pointillé noir représente le coeur tourbillonnaire (lieu du maximum de vitesse azimutale du tourbillon de Lamb-Oseen).

ces coupes illustrent comment les ondes de Kelvin décrites au paragraphe 6.2.5 sont mises en évidence sur nos calculs DNS et comment elles participent à la dynamique globale observée sur la figure 6.52. Le cercle tracé en pointillé indique la position du maximum de vitesse azimutale du tourbillon non perturbé et sert de repère pour distinguer les différentes familles d'ondes de Kelvin du tourbillon de Lamb-Oseen.

La figure 6.53 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de quatre périodes de retournement du tourbillon, dans un plan transverse éloigné de six rayons dans la direction négative de l'axe du vortex. Cette figure illustre la présence de bras spiraux de vorticité situés à l'extérieur du coeur tourbillonnaire. On reconnaît sur ce schéma la topologie des modes elliptiques réguliers de Landau, c'est-à-dire les modes elliptiques "L" de petites longueurs d'onde. En fait, la figure 6.53 permet d'interpréter la perturbation partant sur la gauche du tourbillon comme un complexe paquet d'ondes contrarotatives, constitué d'un mélange de modes elliptiques des familles "V" et "L" (cf. paragraphes 6.2.5.2 et 6.2.5.3), créant une vitesse axiale négative dans l'écoulement, de par les vitesses de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} < 0$  de ces ondes. Cependant, les forts niveaux d'amortissement de ces deux classes de modes expliquent l'absence de structure cohérente (comme observé sur les figures 6.51 et 6.52). De plus, il se trouve que cette collection d'ondes est dominée par les modes "L" réguliers (caractérisés par des bras spiraux de vorticité situés à l'extérieur du coeur tourbillonnaire : figures 6.34 et 6.35), car les modes "V" sont encore plus amortis que les ondes "L" (cf. figures 6.27 et 6.28).

La figure 6.54 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de quatre périodes de retournement du tourbillon, dans le plan transverse centré sur l'origine de l'axe du vortex, c'est à dire là où est localisée la perturbation initiale. Sur cette figure 6.54 et le schéma correspondant de la sous-figure 6.51, on observe une structure extrêmement complexe qui reste localisée sur la position de la perturbation initiale sans se propager (i.e.  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} \simeq 0$ ) et qui s'enroule sur elle-même tout en étant amortie par diffusion visqueuse, ce qui rend cette structure cohérente très délicate à expliquer d'un point de vue physique. En réalité, cette structure compliquée peut s'interpréter une nouvelle fois comme un "paquet d'ondes", constitué par la persistance d'une structure quadrupolaire de fragments de filaments spiraux dans la région extérieure du coeur tourbillonnaire (topologie caractéristique des modes elliptiques, réguliers et singuliers de la famille "L" aux petites et grandes longueurs d'ondes : figures 6.29(d), 6.34, 6.35, 6.36, 6.37), à laquelle s'ajoute très clairement une collection de modes d'aplatissement (ondes elliptiques de la famille "F", dont la structure géométrique très particulière est illustrée sur les schémas 6.29(e) et 6.29(f)).

La figure 6.55 représente deux isocontours de perturbation de vorticité axiale, au bout de quatre périodes de retournement du tourbillon, dans un plan transverse éloigné de six rayons dans la direction positive de l'axe du vortex. Cette figure illustre la présence de bras spiraux de vorticité situés à l'extérieur du coeur tourbillonnaire, auxquels s'ajoute une structure quadrupolaire de vorticité à l'intérieur du noyau du vortex. Une fois de plus, cette structure de la perturbation  $m = 2$  peut s'interpréter comme un "paquet d'ondes", constitué de certains modes elliptiques de Landau de la seconde espèce (précisément les branches "L2" du diagramme 6.28 qui créent une vitesse axiale positive dans l'écoulement, par leur vitesse de groupe  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} > 0$  et responsables des bras spiraux à l'extérieur du coeur tourbillonnaire), et d'ondes elliptiques de coeur de petites longueurs d'onde (les branches supérieures de la famille "C" sur le diagramme 6.27, ondes corotatives vérifiant  $\frac{\partial \omega_r}{\partial k} > 0$  et à l'origine du quadrupôle de vorticité sur la partie droite du tourbillon dans le noyau du vortex, comme illustré sur le schéma 6.29(a)). Cependant et de la même manière que pour la figure 6.53, les forts niveaux d'amortissement de ces deux classes de modes expliquent l'absence de structure cohérente (comme observé sur les figures 6.51

et 6.52).

### Bilan de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation $m = 2$ à $Re = 1000$

Dans le cas d'une torsade elliptique  $m = 2$ , nous avons pu constater que l'énergie de la perturbation initiale ne se propage pas du tout le long du tourbillon de Lamb-Oseen : pour  $Re = 1000$ , l'énergie reste in situ et diminue très fortement sous l'effet de la viscosité puisque seulement 12% de l'énergie initiale subsiste après quatre périodes de retournement du vortex. Par la suite, l'énergie de la perturbation  $m = 2$  disparaît très rapidement (cf. figure 6.45).

Malgré un comportement dynamique très différent de la perturbation  $m = 1$ , il n'en reste pas moins que l'évolution de la perturbation  $m = 2$  peut là encore s'interpréter comme un "paquet d'ondes", composé des modes singuliers elliptiques de la famille "L" et toujours dénommés sous la terminologie d' *ondes de couche critique* (ceux-ci sont décrits au paragraphe 6.2.5.3).

Pour finir, il est capital de souligner que la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à la perturbation  $m = 2$  est totalement différente de celle du tourbillon de Rankine étudiée par Arendt & al. [8], qui ont observé la propagation de perturbations en double hélice. Il est à noter que ce comportement sur le tourbillon de Lamb-Oseen (plus "réaliste" que celui de Rankine) est nettement plus proche de celui constaté dans le cas d'une déformation elliptique bidimensionnelle et mis en évidence par Bernoff & al. [32] ainsi que par Schecter & al. [238].

## 6.4 Conclusions de la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen

Dans ce chapitre, nous avons revisité la dynamique linéaire d'un tourbillon isolé de Lamb-Oseen sans vitesse axiale, étudiée notamment par Sipp, Le Dizès et Fabre. Nous avons validé notre code DNS pourvu des développements spécifiques présentés aux paragraphes 5.3.1 et 5.3.2, par comparaison avec les résultats instationnaire obtenus par Fabre [99] en théorie de stabilité linéaire. Cette confrontation de la simulation numérique directe à la théorie linéarisée montre un très remarquable accord, comme illustré sur les figures 6.41, 6.42, 6.45, 6.51, 6.52, 6.46, et 6.47.

L'analyse de la dynamique locale par la stabilité linéaire permet de conclure que le tourbillon de Lamb-Oseen sans vitesse axiale est linéairement stable aux perturbations infinitésimales, aussi bien en théorie non visqueuse (Sipp [247]) qu'en régime visqueux (Fabre [99]). De plus, nos résultats DNS corroborent la conjecture formulée par Fabre [99], selon laquelle tout tourbillon sans vitesse axiale et caractérisé par une loi de vorticité positive décroissante est stable au sens des modes propres. A ce jour, il n'existe pas de démonstration mathématique de ce résultat général et on peut seulement constater qu'on le vérifie dans de nombreux cas particuliers.

Sur le plan de la dynamique tourbillonnaire, les modes axisymétriques de la perturbation de géométrie  $m = 0$  et certaines ondes hélicoïdales de la perturbation de type  $m = 1$  sont les seuls à pouvoir effectivement se propager le long de l'axe du tourbillon de Lamb-Oseen. Ce résultat obtenu sur la résolution du problème aux valeurs initiales par la théorie linéaire (Fabre [99]) est confirmé par nos simulations numériques directes et il nous semble que cette information est d'une importance capitale pour comprendre les end-effects observés à la soufflerie B20, véritables prémices de l'éclatement tourbillonnaire qui s'y produit (cf. chapitres 3 et 4).

Par ailleurs, l'interprétation de l'évolution d'une perturbation localisée d'un tourbillon en terme de "paquets d'ondes" triées en différentes familles (ondes de Kelvin régulières et ou modes singuliers) s'avère particulièrement pertinente d'un point de vue physique. Cette idée initiée par Arendt & al. [8] sur le vortex de Rankine, puis par Delbende & al. [67] sur le tourbillon de Batchelor et finalisée par Fabre & al. [93, 99] sur le modèle de Lamb-Oseen, a été une nouvelle fois très fructueuse sur nos calculs DNS.

Le niveau de précision de la validation de notre code DNS *compressible* (à  $Ma = 0.1$ ) sur les résultats obtenus par Fabre [99] avec son code de stabilité linéaire *incompressible* justifie a posteriori une des hypothèses que nous avons faites au chapitre 4 : les effets acoustiques sont quasi-inexistants dans nos trois configurations d'étude, dans les domaines de Mach et de Reynolds explorés (résultat a priori non trivial). La résolution des équations complètes de Navier-Stokes compressibles et la comparaison avec la théorie linéarisée démontrent a posteriori que la théorie de stabilité linéaire compressible permet effectivement de capturer l'intégralité des multiples composantes de la dynamique tourbillonnaire, aussi bien d'un point de vue *local* (diagrammes de stabilité par résolution du problème aux valeurs propres) que *global* (réponses instationnaires du tourbillon à des perturbations localisées, par résolution du problème aux valeurs initiales). Nos calculs DNS montrent que les effets des non-linéarités n'affectent pas, ou très peu, la dynamique tourbillonnaire dans le domaine des perturbations de petite amplitude (régime linéaire).

La complexité et la très grande richesse des modes obtenus sur le modèle de Lamb-Oseen - plus "réaliste" que celui de Rankine - permet raisonnablement de penser que le tourbillon de Lamb-Oseen est largement représentatif des instationnarités et éventuelles instabilités dans un tourbillon de sillage, notamment de type éclatement tourbillonnaire. Cela conforte notre choix du modèle de champ de base (cf. chapitre 4) pour étudier la dynamique d'un tourbillon isolé de sillage de bout d'aile.

Conformément à la démarche de modélisation que nous nous sommes assignée au chapitre 4, cette validation fine du code DNS en régime linéaire nous permet désormais d'aller plus loin dans l'étude de la dynamique du tourbillon de Lamb-Oseen et d'envisager avec sérénité l'étude globale de la dynamique de ce vortex, en investiguant son comportement dans le régime pleinement non linéaire, ce qui fait précisément l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 7

# Dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen

Après avoir étudié la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen, le but de ce chapitre est d'investiguer le régime non linéaire de ce modèle de tourbillon de sillage, en nous efforçant de mettre en évidence et d'analyser d'un point de vue physique les différences avec la dynamique linéaire.

Pour examiner les effets des non linéarités sur la dynamique tourbillonnaire, il existe deux approches possibles :

- considérer le comportement instationnaire de perturbations de grande amplitude, comme par exemple dans les articles de Leibovich et Kribus [152, 172]
- traiter des configurations à hauts nombres de Reynolds pour évaluer les conséquences d'une contribution plus importante des termes convectifs par rapport aux termes visqueux, dont l'examen a été largement développé à  $Re = 1000$  dans le chapitre précédent, aussi bien par la théorie de stabilité linéaire que par la résolution complète des équations de Navier-Stokes avec la DNS.

Ces deux axes de recherche sont a priori susceptibles d'être beaucoup plus représentatifs des phénomènes d'end-effects et d'éclatement tourbillonnaire observés au banc d'essais B20. Dans cette perspective, nous nous proposons donc d'étudier, exclusivement par des calculs DNS à l'aide de notre code FLUDILES, la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à nos trois types de perturbations localisées, soit en leur attribuant de grandes amplitudes dans leur état initial, soit en augmentant sensiblement le nombre de Reynolds.

Plus précisément, les effets des non linéarités sur les ondes de Kelvin d'un tourbillon de sillage restent une question totalement ouverte et constitue un défi particulièrement stimulant. Ce point est spécifiquement intéressant dans le cas des ondes de couches critiques. Historiquement, les effets des non linéarités dans les couches critiques ont été essentiellement traités sur des écoulements parallèles, et beaucoup moins investigués sur les écoulements tourbillonnaires. Dans le cas des écoulements parallèles, il est bien connu que les effets des non linéarités dans une couche critique peuvent totalement modifier les propriétés des ondes qui s'y propagent et conduire à la formation d'ondes non linéaires et non amorties.

## 7.1 Etude paramétrique sur l'amplitude $\varepsilon$ des perturbations initiales à $Re = 1000$

Nous avons réalisé de brèves études paramétriques sur l'amplitude de perturbation initiale, afin de détecter un seuil au delà duquel la physique des perturbations s'écarte de la dynamique linéaire. Pour cela, nous avons choisi comme critère de réutiliser l'évolution temporelle du gain  $G(t)$ , défini dans l'équation 6.25. Les résultats des calculs sont présentés sur les figures 7.1 à 7.3.

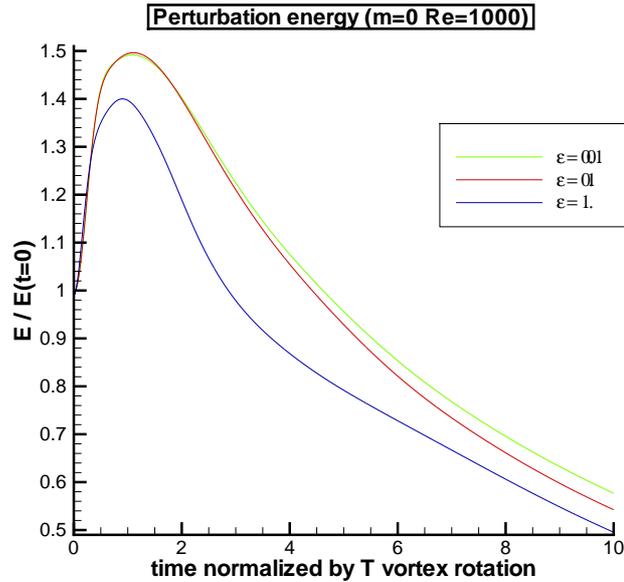


FIG. 7.1 – Etude paramétrique de l'amplitude initiale de la perturbation  $m=0$  (calculs DNS).

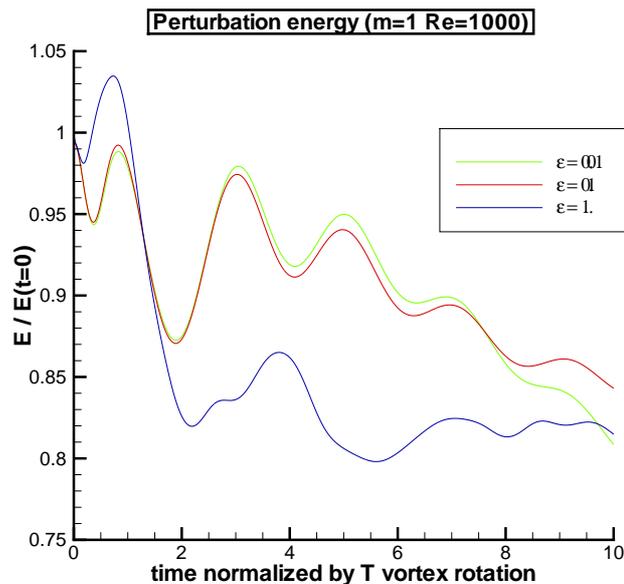


FIG. 7.2 – Etude paramétrique de l'amplitude initiale de la perturbation  $m=1$  (calculs DNS).

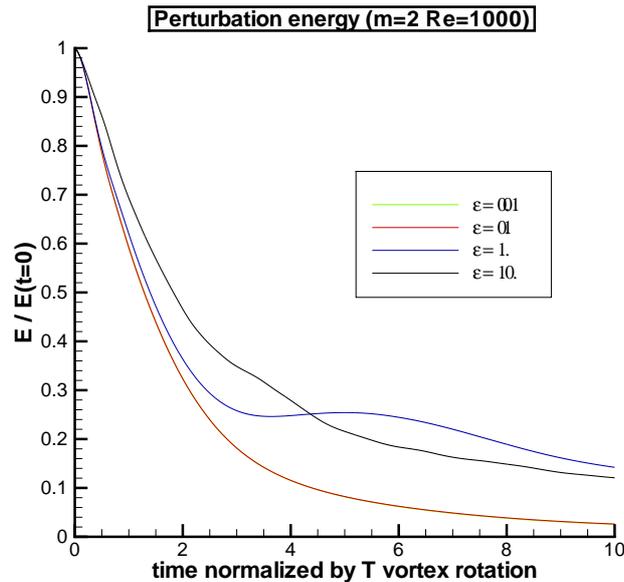


FIG. 7.3 – Etude paramétrique de l’amplitude initiale de la perturbation  $m=2$  (calculs DNS).

D’une manière générale, on observe des tendances extrêmement proches pour les trois types de géométrie azimutale de perturbation.

Plus particulièrement, on remarque que les courbes  $\epsilon = 0.01$  et  $\epsilon = 0.1$ , représentées respectivement par les tracés en vert et en rouge, correspondant respectivement à des amplitudes de perturbation de 1% et 10% par rapport au tourbillon porteur, sont très similaires, au point même d’être complètement confondues sur le cas de la perturbation elliptique  $m = 2$  (figure 7.3).

Par contre, on note un écart important entre les courbes  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 1.0$ , représentées respectivement par les tracés en rouge et en bleu, correspondant respectivement à des amplitudes de perturbation de 10% et 100% par rapport au tourbillon porteur.

Fort de ces constatations, nous nous sommes donc fixés un niveau de  $\epsilon = 0.5$  pour nos calculs DNS dans un premier type de régime non linéaire, en rapport avec des perturbations dites de grande amplitude. De plus, cette valeur est cohérente avec les études de Moet & al. [204] qui utilisent un tourbillon dont le coeur est diminué de moitié (soit une perturbation de 50%), pour initier leurs perturbations axisymétriques non linéaires. En outre, notre choix de travailler sur le niveau de perturbation de  $\epsilon = 0.5$  a été décidé en cohérence avec les travaux de Nybelen [207,208] menés au CERFACS dans le cadre du WP 1 du programme européen FAR-Wake.

## 7.2 Réponse non linéaire à une perturbation axisymétrique de grande amplitude à $Re = 1000$

Dans cette partie, nous étudions l’évolution de notre perturbation  $m = 0$  dotée d’une amplitude initiale importante  $\epsilon = 0.5$ . Ici, nous développons beaucoup plus en détails les résultats numériques du régime non linéaire que dans le chapitre 6 car la réponse à cette perturbation axisymétrique a été largement étudiée en théorie linéaire, d’une part par Arendt & al. [8] sur le

tourbillon de Rankine, d'autre part par Fabre [99] avec le modèle de Lamb-Oseen.

### 7.2.1 Description de la dynamique non linéaire de la perturbation $m = 0$ de grande amplitude à $Re = 1000$

La figure 7.4 illustre l'initialisation de notre perturbation axisymétrique de grande amplitude. Physiquement, elle représente un pincement localisé du coeur tourbillonnaire, de l'ordre de la moitié de la taille du noyau de vorticité, et la structure azimuthale de géométrie  $m = 0$  est clairement identifiable sur la visualisation du champ 3D de la perturbation initiale de vorticité axiale.

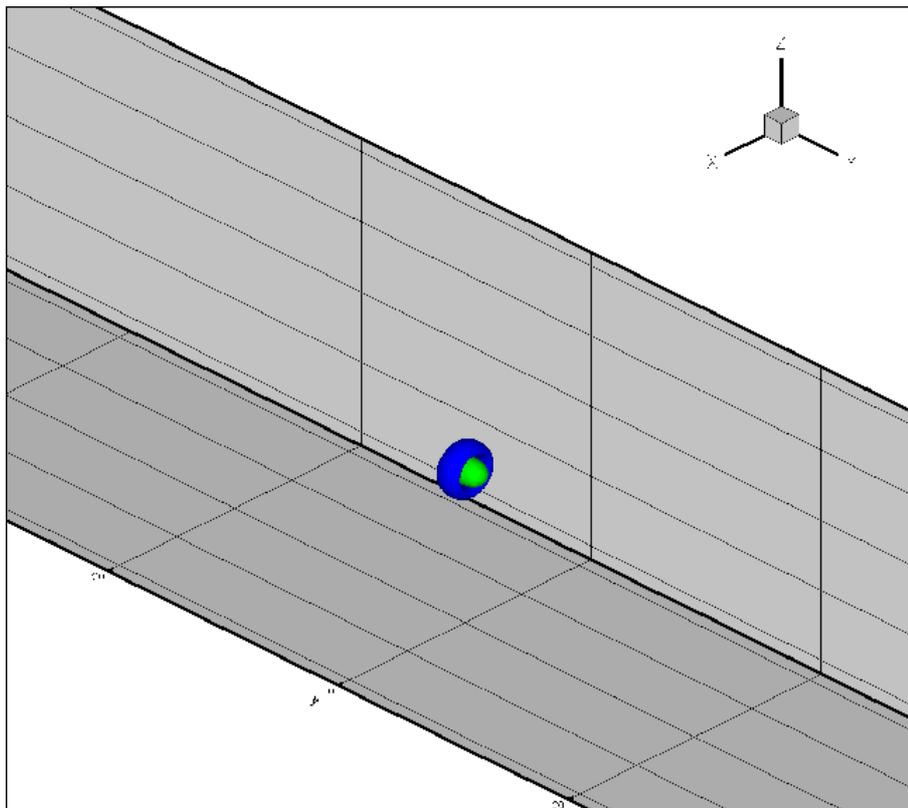


FIG. 7.4 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$     $Re=1000$     $T=0$ .

Les figures 7.5 à 7.14 présentent l'évolution au cours du temps de la perturbation en traçant deux isosurfaces 3D correspondant à  $\pm 10\%$  du niveau maximum de la perturbation initiale de vorticité axiale. Elles permettent d'observer comment se développent les instationnarités du paquet initial d'ondes axisymétriques et en particulier la propagation des structures cohérentes le long de l'axe du tourbillon.

Sur les figures 7.5 à 7.7, on observe que le paquet d'ondes reste encore compact pour  $1 \leq T \leq 3$ , malgré un très net étirement, parfaitement symétrique, le long de l'axe du tourbillon. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.2.3.1, cet effet de "stretching" est dû à la naissance d'ondes de pression et la création d'un écoulement axial, qui ont pour conséquence directe l'advection de la perturbation dans la colonne tourbillonnaire, à la manière d'un "guide d'onde".

On constate que sous l'effet de l'étirement axial, la perturbation se scinde au bout de quatre périodes de retournement du vortex (figure 7.8) en deux structures disjointes, qui se propagent

7.2. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION AXISYMETRIQUE DE GRANDE AMPLITUDE À  $Re = 1000$

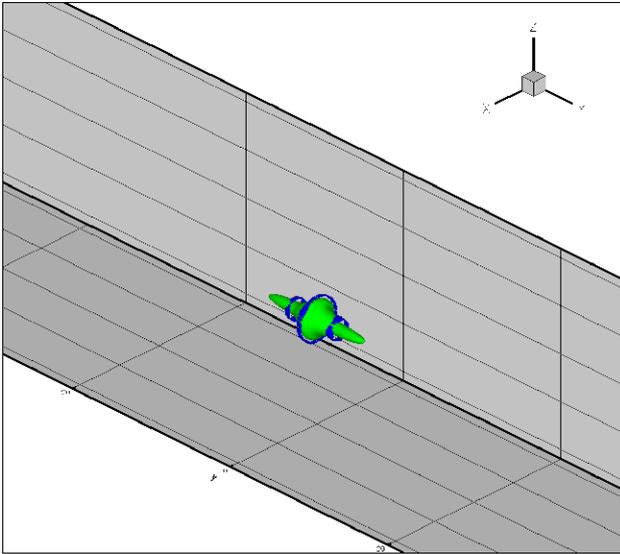


FIG. 7.5 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=1$ .

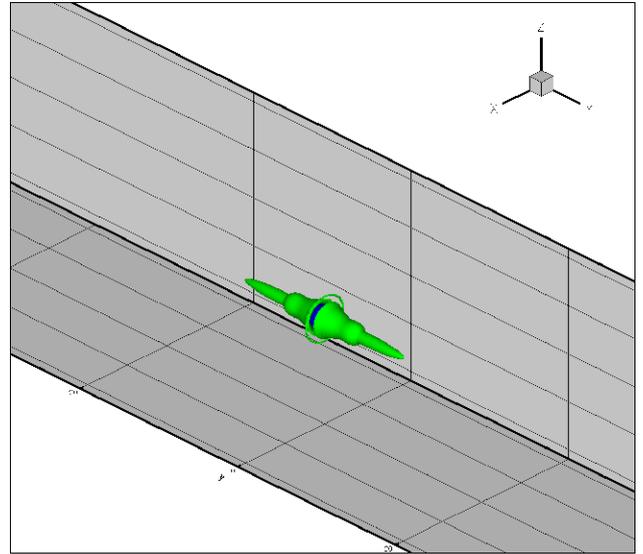


FIG. 7.6 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=2$ .

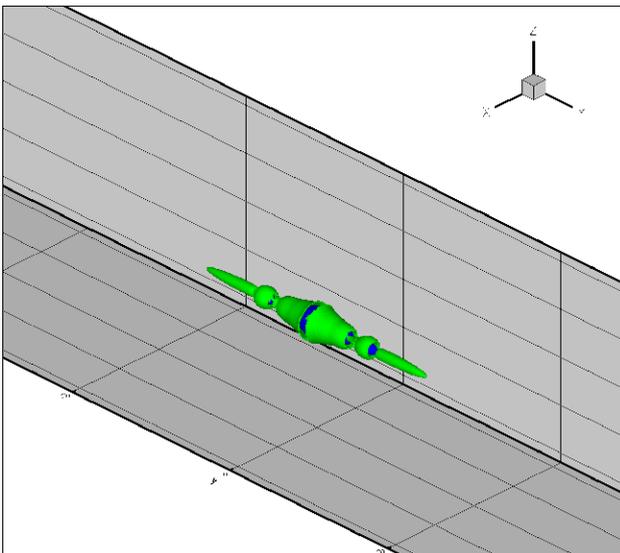


FIG. 7.7 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=3$ .

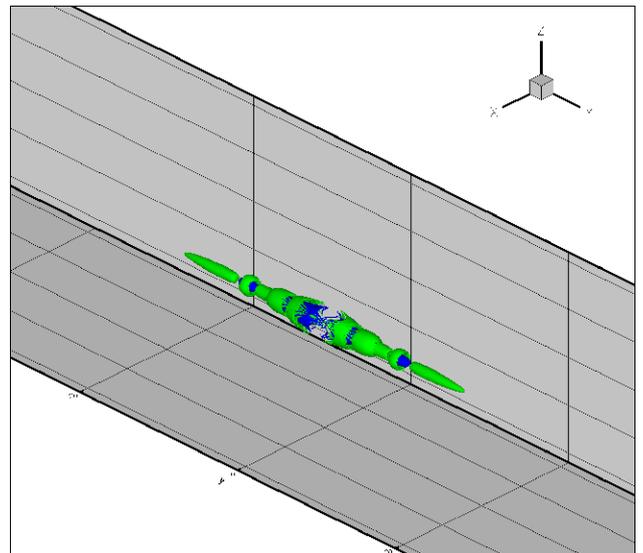


FIG. 7.8 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=4$ .

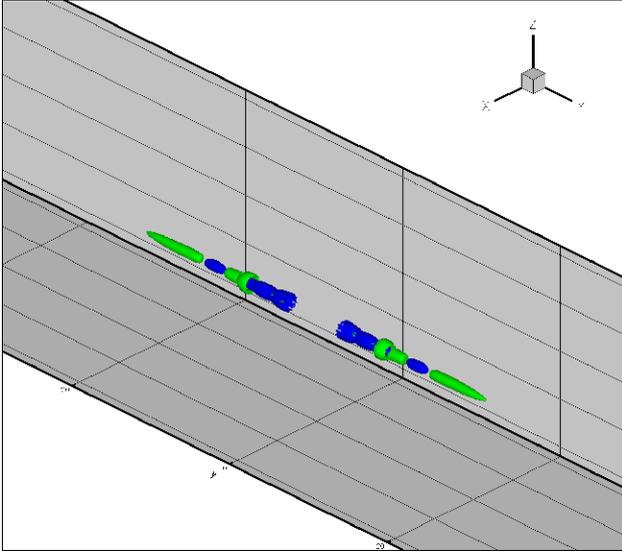


FIG. 7.9 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=5$ .

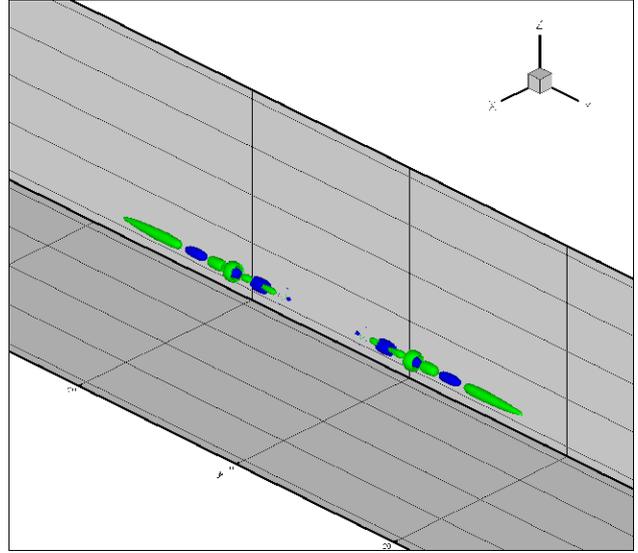


FIG. 7.10 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=6$ .

dans les deux sens de l'axe du tourbillon. On note également à  $T = 4$  que des "lobes" de vorticité axiale positive et négative se forment de plus en plus distinctement.

La figure 7.9 montre qu'au bout de cinq périodes de retournement du vortex, toutes les ondes de Kelvin axisymétriques ont eu suffisamment le temps de se propager pour avoir quitté définitivement la localisation de la perturbation initiale. De plus, on remarque un resserrement, selon la direction radiale, des lobes de vorticité alternativement positive et négative.

Sur les figures 7.10 et 7.11, on distingue une accentuation du resserrement des structures hydrodynamiques autour de l'axe du tourbillon, ainsi qu'une propagation des deux fronts d'onde qui se poursuit à une vitesse quasi constante.

Enfin, on observe sur les figures 7.12 à 7.14 que l'étirement sous l'impulsion des ondes de pression et de l'écoulement axial se poursuit. A partir de  $T = 8$ , cet effet de stretching a terminé de "démêler" les éléments de vorticité de signes opposés pour aboutir finalement à un véritable "chapelet" de structures de vorticité axiale alternativement positive et négative, qui n'est pas sans rappeler le mécanisme en "crêpes" de la figure 2.2, proposé par Spalart [249] et rappelé au paragraphe 2.1.2.1, ainsi que les résultats des simulations numériques de Moet & al. [204]. Par ailleurs, il nous semble sur ces visualisations 3D que la propagation des deux fronts d'onde s'accélère soudainement et fortement entre  $T = 8$  et  $T = 9$ .

Pour résumer, l'évolution instationnaire de notre perturbation  $m = 0$  de grande amplitude démontre que la dynamique non linéaire met en oeuvre des mécanismes très similaires à ceux de la dynamique linéaire. Ces phénomènes de traction-compression des structures cohérentes sont bien identifiés et caractéristiques des perturbations axisymétriques d'un tourbillon, comme nous les avons rappelés au chapitre 2.2.3.1. De plus, on remarque que les champs 3D de perturbation de vorticité axiale semblent rester bien axisymétriques tout au long des dix périodes de retournement du tourbillon, au sens où on ne note visuellement aucun enroulement de type  $m \neq 0$  : ce point sera développé plus en détails dans le paragraphe 7.2.3. Enfin, on observe, comme dans le cas de la dynamique linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen étudiée au chapitre

7.2. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION AXISYMETRIQUE DE GRANDE AMPLITUDE À  $Re = 1000$

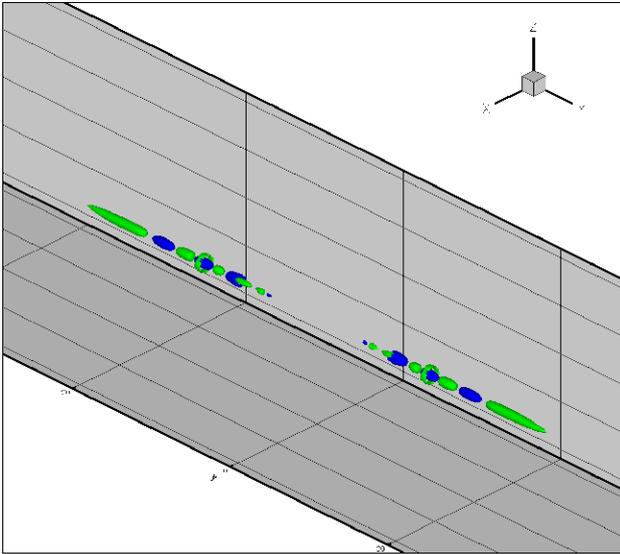


FIG. 7.11 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=7$ .

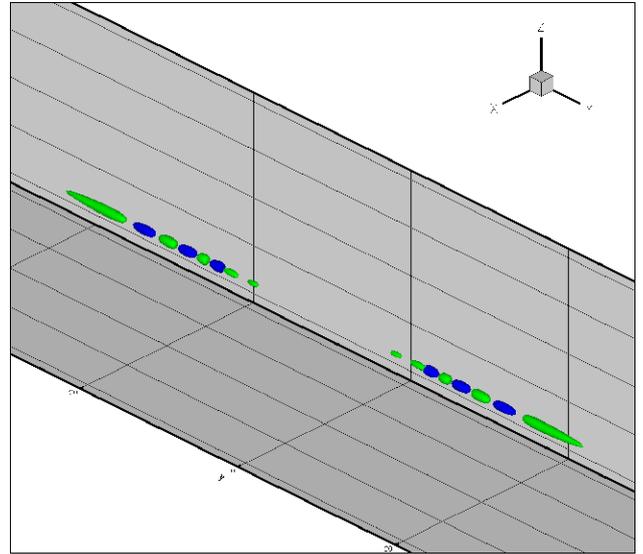


FIG. 7.12 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=8$ .

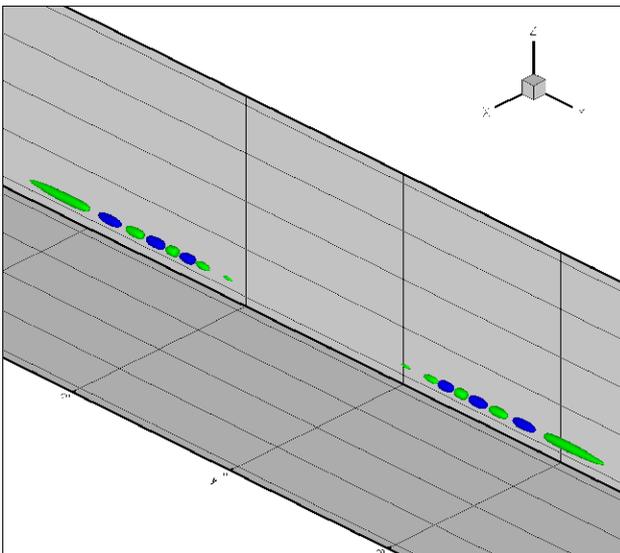


FIG. 7.13 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=9$ .

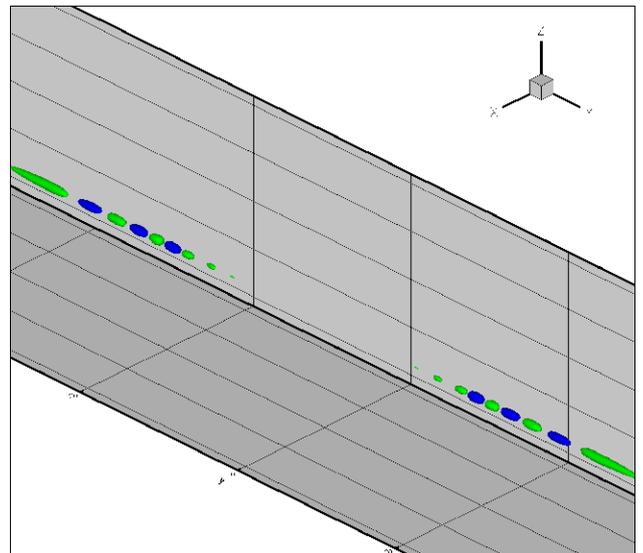


FIG. 7.14 – Perturbation de vorticité axiale :  $m=0$  à  $Re=1000$  à  $T=10$ .

6, que sa dynamique non linéaire est gouvernée par le même mode de fonctionnement que celui décrit par Arendt & al. [8] et Fabre & al. [98, 99], à savoir l'expansion spatiale le long de l'axe du vortex de structures hydrodynamiques en forme de "paquets de modes de Kelvin", avec une propagation à vitesse approximativement constante (au moins jusqu'à  $T = 8$ ) des fronts d'onde partant vers la gauche et la droite de la colonne tourbillonnaire.

### 7.2.2 Effets des non-linéarités sur la propagation de la perturbation axi-symétrique de grande amplitude

Les figures 7.15 et 7.16 décrivent l'évolution à différents instants de l'énergie cinétique de la perturbation intégrée dans des plans transverses, afin de matérialiser la propagation de la perturbation le long de l'axe du tourbillon. Ces signaux 1D fonctions du temps sont inspirés de l'équation 6.24 et sont adaptés selon la définition suivante :

$$E'(y, t) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left( u_x'^2(x, y, z, t) + u_z'^2(x, y, z, t) \right) dx dz \quad (7.1)$$

où  $u_x'$  et  $u_z'$  représentent les deux composantes transverses de la perturbation de vitesse, toujours calculées par la même technique d'anti-diffusion du champ de base (méthode numérique développée au paragraphe 5.3.2).

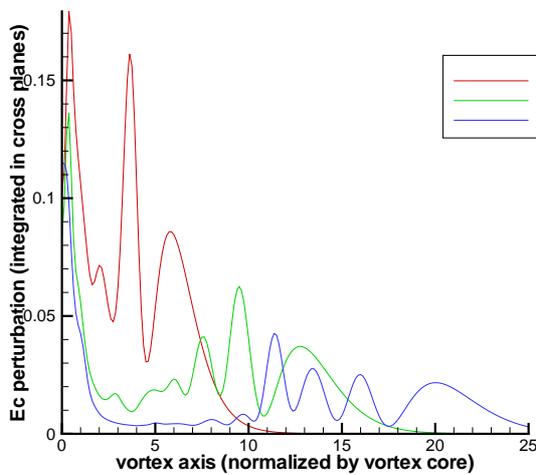


FIG. 7.15 – Perturbation  $m = 0$  à  $Re = 1000$  de grande amplitude à  $T=2-4-6$  périodes de retournement du tourbillon.

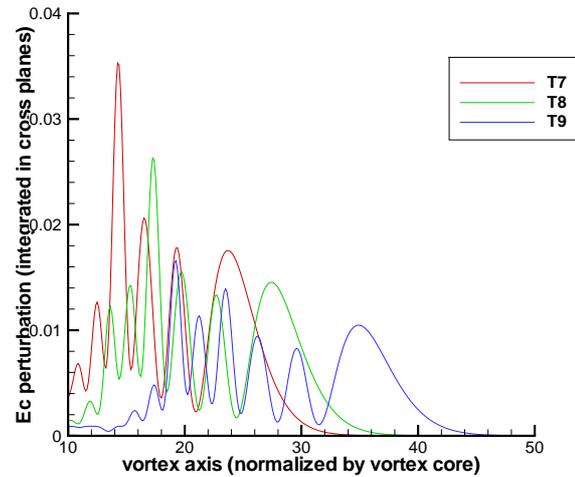


FIG. 7.16 – Perturbation  $m = 0$  à  $Re = 1000$  de grande amplitude à  $T=7-8-9$  périodes de retournement du tourbillon.

Ces courbes illustrent les effets des non linéarités sur la propagation de la perturbation. On peut constater sur ces tracés la complexité croissante de la grandeur  $E'(y, t)$  au cours du temps.

Par ailleurs, les figures 7.15 et 7.16 mettent en évidence, à chaque instant fixé, des maxima locaux et globaux de  $E'(y, t)$  pour certaines valeurs particulières de  $y$  le long de l'axe du vortex, qui dépendent clairement de l'instant choisi :

- pour  $T = 2$ ,  $y \approx 0.5$ ,  $y \approx 3.5$  et  $y \approx 5.75$
- pour  $T = 4$ ,  $y \approx 0.5$ ,  $y \approx 9.5$  et  $y \approx 12.75$

## 7.2. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION AXISYMETRIQUE DE GRANDE AMPLITUDE À $RE = 1000$

- 
- pour  $T = 6$ ,  $y \approx 0.5$ ,  $y \approx 11.25$ ,  $y \approx 13.375$ ,  $y \approx 16$  et  $y \approx 20$
  - pour  $T = 7$ ,  $y \approx 10.667$ ,  $y \approx 12.667$ ,  $y \approx 14$ ,  $y \approx 16.667$ ,  $y \approx 19.333$  et  $y \approx 23.667$
  - pour  $T = 8$ ,  $y \approx 12$ ,  $y \approx 14$ ,  $y \approx 15$ ,  $y \approx 17.167$ ,  $y \approx 19.333$ ,  $y \approx 22.667$  et  $y \approx 27.333$
  - pour  $T = 9$ ,  $y \approx 14$ ,  $y \approx 16$ ,  $y \approx 17.167$ ,  $y \approx 19$ ,  $y \approx 21$ ,  $y \approx 23.333$ ,  $y \approx 26$ ,  $y \approx 29.667$  et  $y \approx 34.667$

Ces localisations du front d'onde (correspondant au pic d'énergie le plus à droite) à différents instants nous permettent d'estimer, sur nos résultats DNS, des vitesses de propagation et de les comparer (en utilisant le même adimensionnement) à la vitesse de groupe axisymétrique maximale calculée en théorie linéaire par Fabre (cf. figure 6.39 : pour  $m = 0$ ,  $\max_k (\Omega_0 a)^{-1} \frac{\partial \omega_r}{\partial k} \approx 0.63$ ) :

- entre  $T = 2$  et  $T = 4$ ,  $V_{propag} \approx 0.56$
- entre  $T = 4$  et  $T = 6$ ,  $V_{propag} \approx 0.64$
- entre  $T = 6$  et  $T = 7$ ,  $V_{propag} \approx 0.58$
- entre  $T = 7$  et  $T = 8$ ,  $V_{propag} \approx 0.58$
- entre  $T = 8$  et  $T = 9$ ,  $V_{propag} \approx 1.17$

Cette dernière valeur semble confirmer notre observation d'une brusque accélération du front d'onde à  $T = 8$ , en comparant les champs 3D des figures 7.12 et 7.13.

Pour compléter nos interprétations, nous réalisons dans le paragraphe suivant l'analyse du contenu spectral en azimuth de notre perturbation axisymétrique de grande amplitude en certaines de ces positions de l'axe du tourbillon qui maximalisent la variable  $E'(y, t)$  et qui nous semblent des plus intéressants sur le plan de la physique, en terme de paquets d'ondes.

### 7.2.3 Contenu spectral de la perturbation axisymétrique non linéaire

Afin de caractériser les différentes composantes en nombre d'onde azimuthal présentes dans la perturbation, nous effectuons une analyse de type transformée de Fourier discrète (TFD) dans la direction de l'azimut et dont nous avons rappelé la méthode au paragraphe 3.2.1.3, lors du post-traitement des données expérimentales du banc B20 (chapitre 3).

Signalons cependant quelques différences notables par rapport à l'étude réalisée au paragraphe 3.2.2.2 :

- Les post-traitements TFD de nos calculs DNS ne souffrent aucunement d'un problème majeur rencontré dans le paragraphe 3.2.2.2, à savoir la localisation même du centre du vortex. En effet, celle-ci s'est avérée dépendante du critère (local ou global) employé, entraînant des incertitudes sur le calcul du centre tourbillonnaire, impliquant nécessairement en retour des erreurs sur l'analyse TFD des données expérimentales (les mesures PIV 2D du banc B20). Par construction, nos simulations numériques ne connaissent naturellement pas ce problème car le centre du vortex est une donnée d'entrée, parfaitement connue.
- Dans le même ordre d'idée, on est en droit de s'attendre à une meilleure précision numérique sur les résultats DNS (schéma spatial d'ordre 6 et schéma d'intégration temporelle d'ordre 3) que sur les données expérimentales (on rappelle que les mesures PIV 2D font l'objet d'une interpolation et d'un lissage préalables à leur post-traitement). Cette différence de précision numérique nous a ainsi conduit à augmenter le nombre de points de discrétisation dans la direction azimuthale : nous passons de  $N_\theta = 128$  sur les données expérimentales à  $N_\theta = 512$  (de la même manière que Renac [220]) pour l'analyse TFD des résultats DNS.
- Pour finir, notre traitement TFD des mesures PIV du paragraphe 3.2.2.2 s'applique directement au champ 2D de vitesse, alors que nous réalisons dans ce chapitre un post-traitement TFD

sur des coupes 2D de nos calculs DNS 3D du champ de perturbation de vorticité axiale. Le choix de cette grandeur physique est motivé par un double objectif, d'une part considérer une variable caractéristique de l'hydrodynamique (notamment pour tenter de s'affranchir d'éventuels effets acoustiques), d'autre part pour s'exempter des effets de la diffusion visqueuse du tourbillon porteur (cf. méthode d'anti-diffusion du paragraphe 5.3.2 pour calculer "proprement" l'évolution instationnaire de la perturbation).

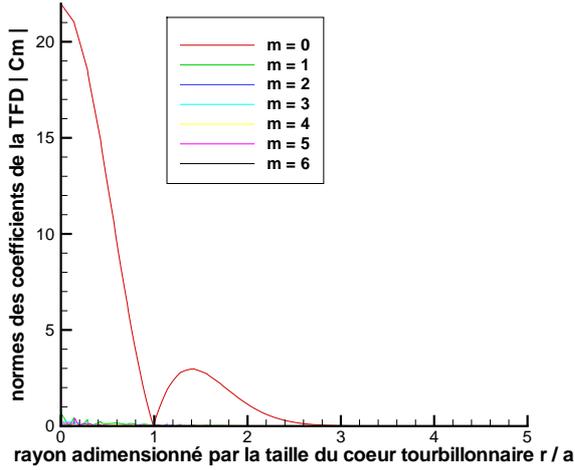


FIG. 7.17 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 0$ .

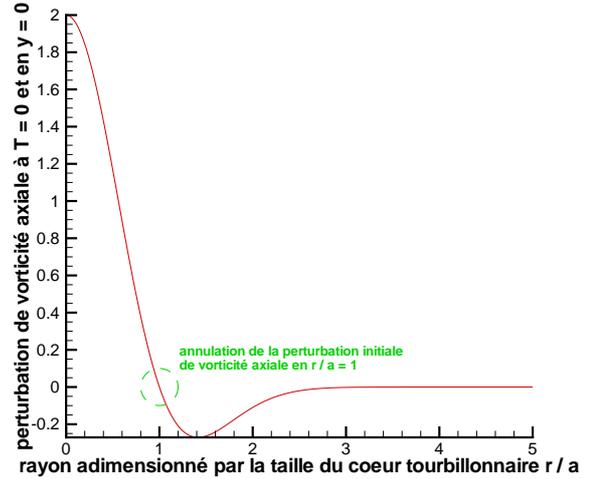


FIG. 7.18 – Profil de la perturbation initiale  $m = 0$  de vorticité axiale de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - y = 0$ ).

Sur la figure 7.17, on observe que la courbe  $|C_0(r)|$  est totalement dominante par rapport aux tracés des autres courbes correspondant aux composantes non axisymétriques, ce qui est tout à fait cohérent avec une perturbation initiale de géométrie purement  $m = 0$ . En outre, la courbe  $|C_0(r)|$  présente une seule racine, précisément en  $r/a = 1$ , ce qui se comprend par les expressions analytiques de la perturbation initiale axisymétrique données au paragraphe 4.3.1. En effet, en prenant l'expression de l'équation 4.10 dans le cas particulier de l'origine de l'axe du vortex, plan où est initialement localisée la perturbation, on obtient en coordonnées cylindriques le profil suivant de la perturbation initiale de vorticité axiale :

$$\omega'_{axiale}(r) = 4 \varepsilon \left(1 - \frac{r^2}{a_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \quad (7.2)$$

De plus, les signes de la courbe  $\omega'_{axiale}(r)$  observés sur le schéma 7.18 justifie également a posteriori l'allure de la figure 7.4 : la perturbation  $m = 0$  est initialement composée d'une structure de vorticité axiale positive dans le coeur tourbillonnaire (élément en vert sur la figure 7.4 pour  $0 < r/a < 1$ ), entourée d'une autre structure de vorticité axiale négative (élément en bleu sur la figure 7.4 pour  $1 < r/a < 2$ ).

Après une période de retournement du tourbillon, la composante  $m = 0$  est encore très largement dominante par rapport aux autres contributions azimutales. De plus, la figure 7.19 met en évidence un phénomène de "feuilletage" de la perturbation, c'est à dire l'apparition d'une valeur supplémentaire du rayon qui annule la courbe  $|C_0(r)|$  (et donc la composante dominante de la perturbation) : cette seconde racine se situe dans la zone potentielle en  $r/a \approx 2.1$ . Enfin,

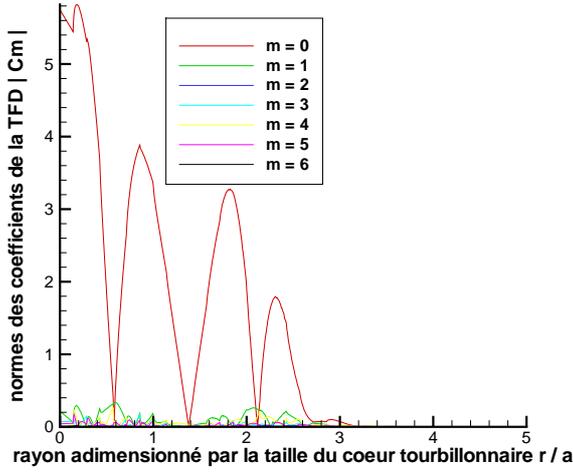


FIG. 7.19 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 1$ .

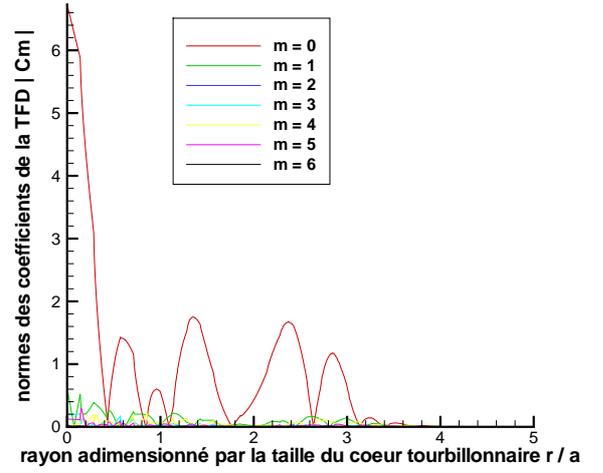


FIG. 7.20 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 2$ .

la figure 7.19 montre un glissement de la première racine, qui se positionne en  $r/a \approx 1.4$  à  $T = 1$  (au lieu de  $r/a = 1$  à  $T = 0$ ).

On constate sur la figure 7.20 qu'après deux rotations du vortex, la composante  $m = 0$  reste toujours nettement dominante par rapport à toutes les autres composantes non axisymétriques. De plus, on observe que l'effet de feuilletage de la perturbation s'accroît puisqu'on distingue cinq valeurs radiales qui annulent la courbe  $|C_0(r)|$ , localisées respectivement en  $r/a \approx 0.85$  (i.e. dans le coeur tourbillonnaire),  $r/a \approx 1.1$  (valeur très proche du rayon qui maximalise la vitesse tangentielle du tourbillon porteur),  $r/a \approx 1.76$ ,  $r/a \approx 3.4$  et  $r/a \approx 3.7$  (ces trois dernières racines se trouvant dans la zone irrotationnelle).

Au bout de trois périodes de retournement du tourbillon, on vérifie toujours sur la figure 7.21 la large prédominance de la composante  $m = 0$  sur les autres contributions azimutales. Par ailleurs, on remarque que la structure radiale de la perturbation se complexifie sensiblement. En effet, la figure 7.21 révèle une dizaine de rayons qui annulent la courbe  $|C_0(r)|$  :  $r/a \approx 0.4$ ,  $r/a \approx 0.85$ ,  $r/a \approx 1.3$ ,  $r/a \approx 1.8$ ,  $r/a \approx 2.2$ ,  $r/a \approx 2.4$ ,  $r/a \approx 3.0$ ,  $r/a \approx 3.8$ ,  $r/a \approx 4.1$  et  $r/a \approx 4.45$ .

Après quatre rotations du vortex, l'essentiel de la dynamique de la perturbation reste encore et toujours portée par la composante  $m = 0$ . De plus, on distingue sur la figure 7.22 onze racines de la courbe  $|C_0(r)|$ , situées en  $r/a \approx 0.37$ ,  $r/a \approx 0.9$ ,  $r/a \approx 1.39$ ,  $r/a \approx 1.93$ ,  $r/a \approx 2.44$ ,  $r/a \approx 2.78$ ,  $r/a \approx 3.31$ ,  $r/a \approx 3.78$ ,  $r/a \approx 4.11$ ,  $r/a \approx 4.45$  et  $r/a \approx 4.75$ .

Les figures 7.23 et 7.24 sont très semblables. Elles confirment à  $T = 5$  et  $T = 6$  la prédominance de la composante  $m = 0$  et le phénomène de feuilletage. De plus, elles suggèrent que l'énergie de la perturbation se déplace temporairement à l'extérieur du coeur tourbillonnaire.

Sur les figures 7.25 et 7.26, on observe toujours que la perturbation reste essentiellement axisymétrique dans son contenu spectral. De plus, on note un regain de l'énergie de la perturbation à l'intérieur du coeur tourbillonnaire, qui s'enclenche à  $T = 7$  et qui s'accompagne à  $T = 8$

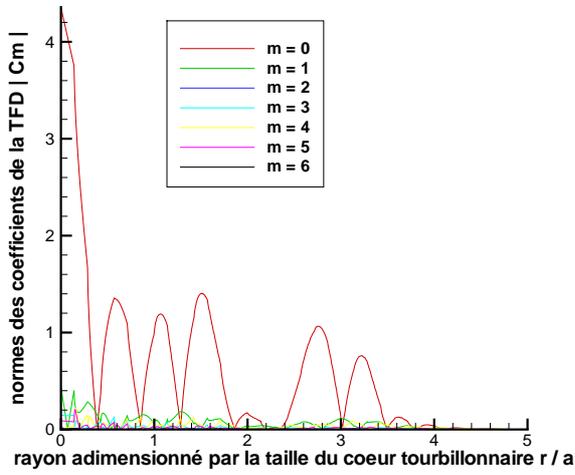


FIG. 7.21 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 3$ .

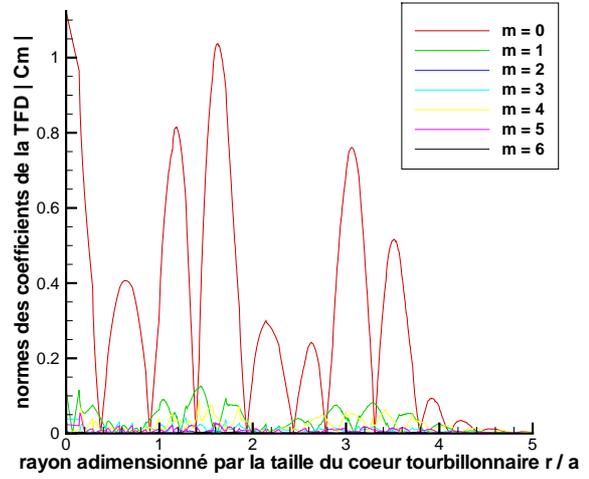


FIG. 7.22 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 4$ .

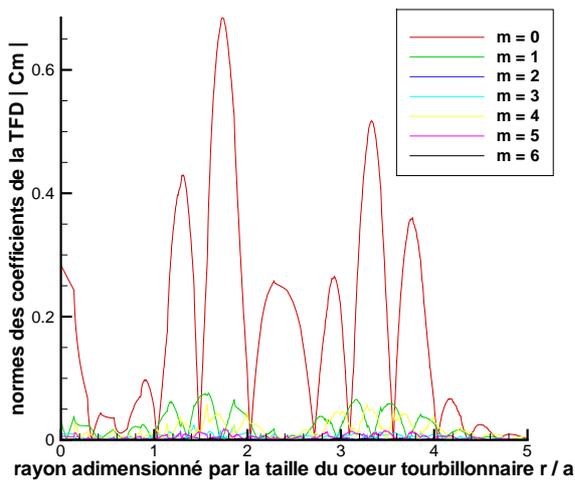


FIG. 7.23 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 5$ .

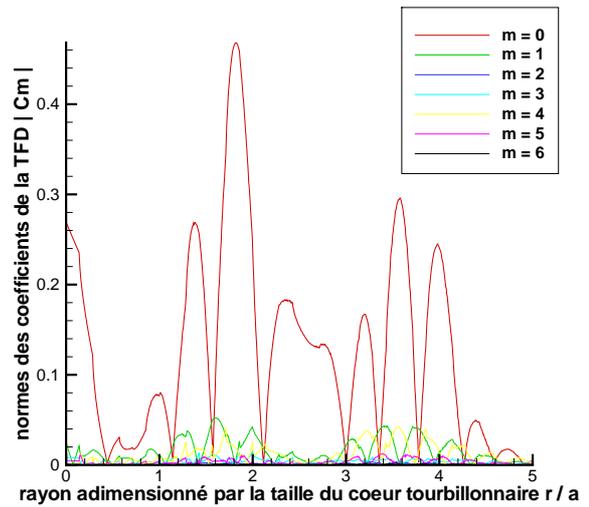


FIG. 7.24 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 6$ .

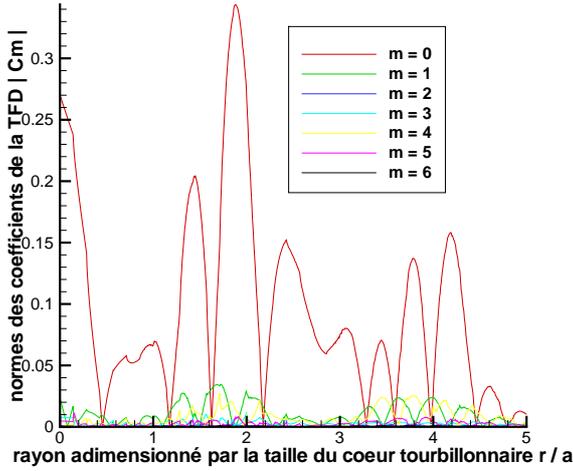


FIG. 7.25 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 7$ .

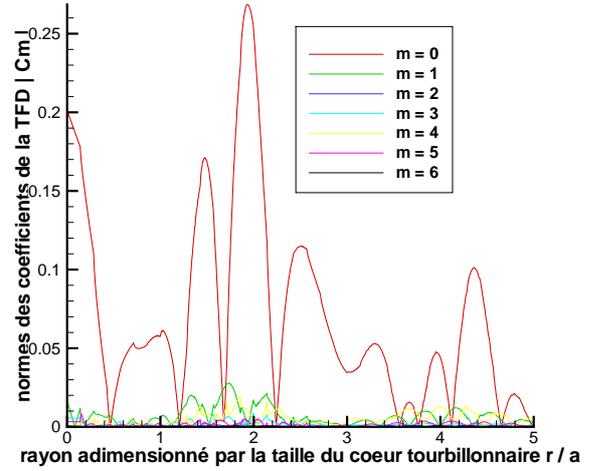


FIG. 7.26 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 8$ .

de la disparition d'une des racines de la courbe  $|C_0(r)|$ . D'une manière générale, la réduction du nombre de racines de la courbe  $|C_0(r)|$  indique un ralentissement de l'effet de feuilletage de la perturbation, qui s'opère ici à l'extérieur du coeur tourbillonnaire. En fait, on assiste visiblement à un "dépliement" des lobes de  $T = 7$  avec une propagation à  $T = 8$  des structures hydrodynamiques vers la région  $r/a \geq 5$ .

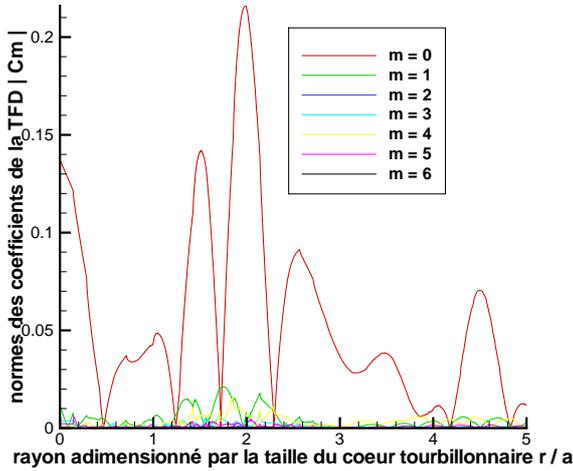


FIG. 7.27 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 9$ .

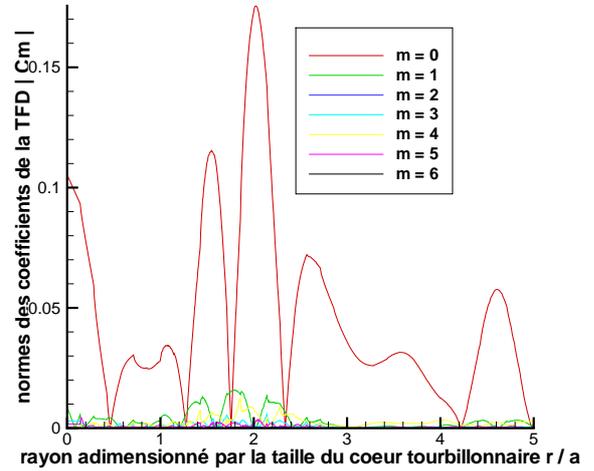


FIG. 7.28 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) en  $y = 0$  à  $T = 10$ .

Les figures 7.27 et 7.28 sont similaires. Elles mettent encore en évidence la prédominance de la composante axisymétrique de la perturbation et montrent une réduction des oscillations de la courbe  $|C_0(r)|$  dans la partie  $r/a \geq 2.3$  de la zone irrotationnelle. Cette simplification de la structure radiale de la perturbation en périphérie du vortex semble donc s'être amorcée à  $T = 7$

et se confirmer jusqu'à  $T = 10$ .

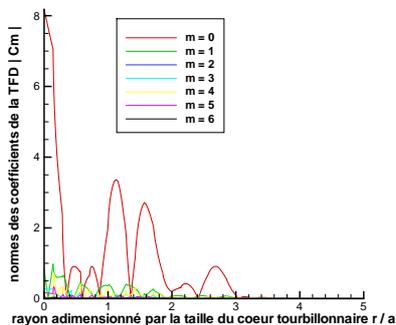


FIG. 7.29 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 2$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 0.5$ .

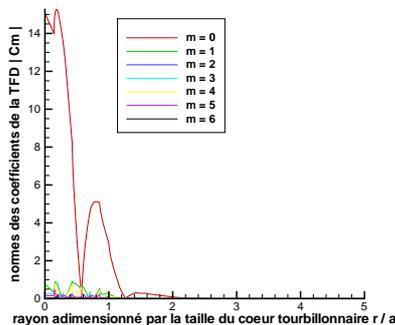


FIG. 7.30 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 2$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 3.5$ .

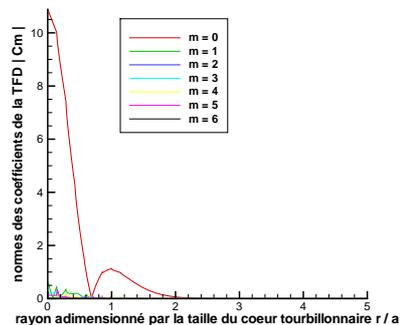


FIG. 7.31 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 2$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 5.75$ .

Calculs TFD sur la DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 0$  en régime non linéaire ( $\varepsilon = 0.5$ ) à l'instant  $T = 2$  et en différentes positions de l'axe du vortex qui maximisent l'énergie de la perturbation.

Les figures 7.29, 7.30 et 7.31 représentent les analyses TFD de la perturbation de vorticité axiale réalisées au bout de deux rotations du vortex dans les plans transverses qui maximisent l'énergie de la perturbation et que nous avons relevés sur la figure 7.15. On vérifie une nouvelle fois que le contenu spectral de la perturbation est dominée par la composante  $m = 0$ .

Dans le plan  $\frac{y}{a} = 0.5$  (celui le plus proche de la localisation du pincement initial), on observe un feuilletage de la perturbation situé sur approximativement trois fois la taille caractéristique du coeur tourbillonnaire.

Dans le plan  $\frac{y}{a} = 3.5$ , on remarque que l'énergie de la perturbation reste essentiellement concentrée dans le noyau du vortex, de même que pour les deux racines de la courbe  $|C_0(r)|$  (en  $r/a \approx 0.6$  et  $r/a \approx 1.2$ ) : cela signifie que malgré le pic d'énergie du paquet d'ondes dans ce plan, la perturbation n'a pas eu suffisamment de temps pour se propager dans la direction radiale et qu'elle n'a pas encore eu la possibilité de "contaminer" l'extérieur de la colonne tourbillonnaire.

Enfin, le plan  $\frac{y}{a} = 5.75$  est important car il donne le dernier maximum d'énergie de la perturbation, correspondant au pic ayant la position la plus avancée dans la direction positive du vortex et localisant ainsi le front d'onde sur la droite du tourbillon. Dans ce plan, on distingue une seule racine de la courbe  $|C_0(r)|$  en  $r/a \approx 0.7$  (ce qui s'interprète comme une simplification de la structure radiale au niveau du front d'onde), ainsi qu'une diffusion de l'énergie de la perturbation qui s'étale sur environ deux fois la taille du noyau tourbillonnaire.

La phénoménologie décrite à  $T = 2$  sur les figures 7.29, 7.30 et 7.31 se retrouve bien à  $T = 4$  sur les figures 7.32, 7.33 et 7.34, ainsi qu'à  $T = 6$  sur les figures 7.35, 7.36 et 7.37. En particulier, la description que nous avons faite du front d'onde à  $T = 2$  sur le schéma 7.31 est rigoureusement la même à  $T = 4$  sur le schéma 7.34 et à  $T = 6$  sur le schéma 7.37. Les seules variantes concernent les pics d'énergie dans le plan  $\frac{y}{a} = 0.5$  : on constate au cours du temps une complexification de la structure radiale de la perturbation (augmentation du nombre de racines de la courbe  $|C_0(r)|$ ), ainsi que la diffusion de la perturbation dans la direction radiale ("étalement" jusqu'à  $r/a \approx 5$  à  $T = 6$ ).

7.2. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION AXISYMMÉTRIQUE DE GRANDE AMPLITUDE À  $Re = 1000$

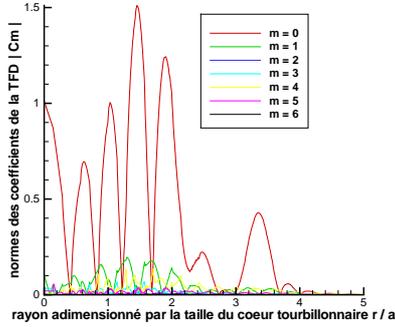


FIG. 7.32 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 0.5$ .

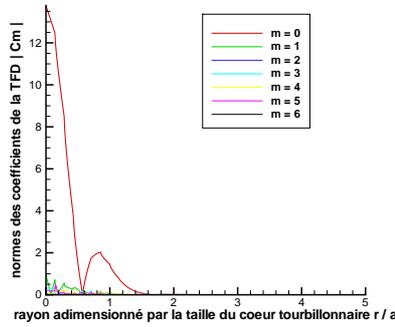


FIG. 7.33 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 9.5$ .

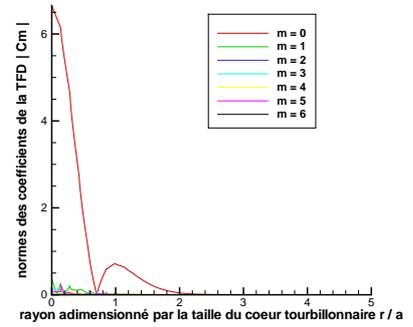


FIG. 7.34 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 12.75$ .

Calculs TFD sur la DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 0$  en régime non linéaire ( $\varepsilon = 0.5$ ) à l'instant  $T = 4$  et en différentes positions de l'axe du vortex qui maximalisent l'énergie de la perturbation.

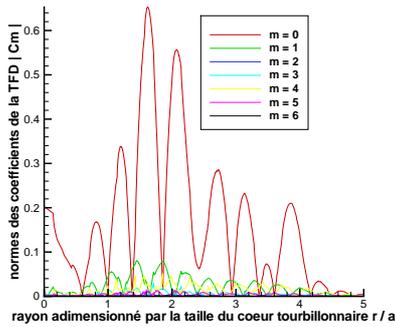


FIG. 7.35 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 6$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 0.5$ .

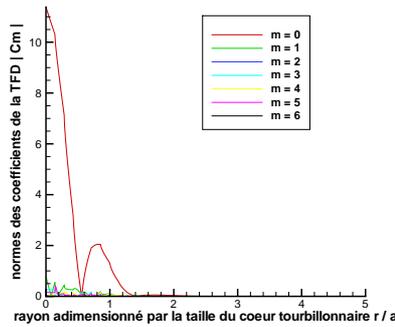


FIG. 7.36 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 6$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 11.25$ .

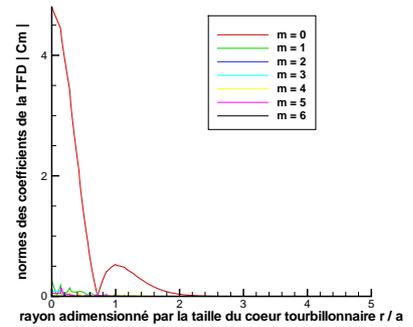


FIG. 7.37 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 6$  dans le plan  $\frac{y}{a} = 20$ .

Calculs TFD sur la DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 0$  en régime non linéaire ( $\varepsilon = 0.5$ ) à l'instant  $T = 6$  et en différentes positions de l'axe du vortex qui maximalisent l'énergie de la perturbation.

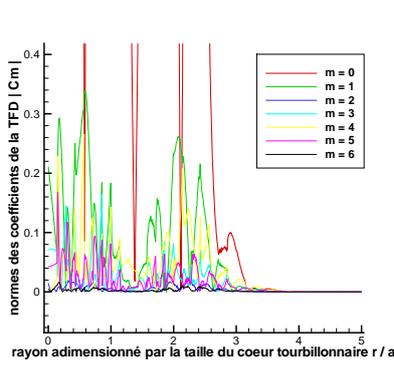


FIG. 7.38 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 1$  dans le plan  $y = 0$ .

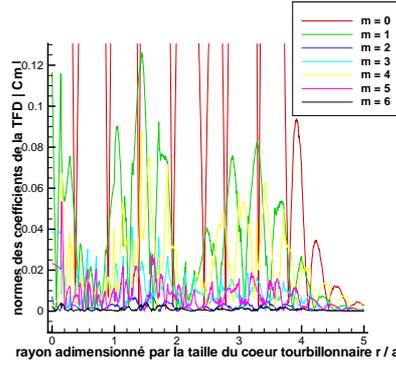


FIG. 7.39 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$  dans le plan  $y = 0$ .

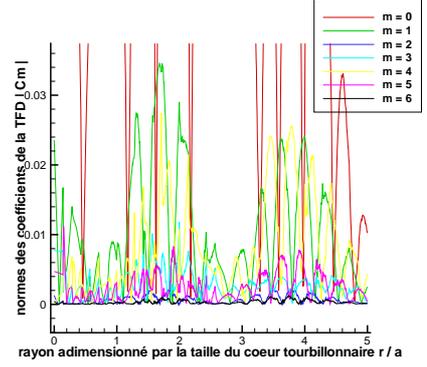


FIG. 7.40 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 0$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 7$  dans le plan  $y = 0$ .

Calculs TFD sur la DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 0$  en régime non linéaire ( $\varepsilon = 0.5$ ), dans la localisation de la perturbation initiale (plan  $y = 0$ ) et à différents instants.

Les figures 7.38, 7.39 et 7.40 sont des agrandissements sur les composantes non axisymétriques du contenu spectral calculé dans le plan du pincement initial, aux instants  $T = 1$ ,  $T = 4$  et  $T = 7$ . On constate sur ces schémas que les maxima des courbes  $|C_m(r)|$  pour  $m \neq 0$  sont un ordre de grandeur (voire même deux) inférieurs à ceux de la courbe  $|C_0(r)|$ . Cette observation se vérifie en d'autres plans transverses et aux différents instants calculés jusqu'à dix rotations du vortex, ce qui nous permet de conjecturer que :

$$\forall t > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \frac{\max_{m \neq 0, r > 0} |C_m(r)|}{\max_{r > 0} |C_0(r)|} < 0.1$$

Cela signifie que les composantes non axisymétriques relèvent en fait du bruit numérique et n'ont pas de signification physique (même pour la composante  $m = 1$  correspondant à la courbe verte).

## 7.2.4 Bilan de la dynamique axisymétrique non linéaire

L'étude de notre perturbation  $m = 0$  à grande amplitude d'un tourbillon de Lamb-Oseen démontre qu'elle reste axisymétrique tout au long de son développement instationnaire (les composantes azimutales  $m \neq 0$  restant du domaine du bruit numérique), du moins sur les dix premières périodes de retournement du vortex. Cette observation est tout à fait conforme aux équations de Navier-Stokes : le terme non linéaire du second ordre  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}$ , absent de la théorie de stabilité linéaire et pris en compte par la résolution DNS dans l'équation 5.55, n'a pour effet d'introduire aucune composante azimutale non axisymétrique dans les interactions non linéaires entre le tourbillon porteur (le modèle de Lamb-Oseen est par définition axisymétrique) et la perturbation, lorsque celle-ci est initialement de géométrie  $m = 0$ .

De plus, une caractéristique de la dynamique axisymétrique est le phénomène de "feuilletage" de la perturbation, particulièrement prononcé au niveau de la localisation du pincement initial. Cet effet a déjà été observé en théorie de stabilité linéaire, analytiquement par Arendt & al. [8]

sur le tourbillon de Rankine, puis numériquement par Fabre [99] sur le modèle de Lamb-Oseen. Ce fait remarquable nous semble encore plus accentué sur notre perturbation axisymétrique de grande amplitude, en particulier lors des cinq premières rotations du vortex de Lamb-Oseen, à en juger par le nombre important de racines de la courbe  $|C_0(r)|$  et leur augmentation au cours du temps.

Enfin, il nous semble qu'un autre élément intéressant de la dynamique axisymétrique non linéaire se produit à partir de  $T = 5$  et réside dans une sorte de balancement entre deux états mis en compétition : d'une part une diminution d'énergie de la perturbation dans le coeur tourbillonnaire qui "nourrit" une complexification de la structure radiale de la perturbation à l'extérieur du noyau de vorticité (cf. figure 7.23), d'autre part un regain d'énergie de la perturbation dans le coeur tourbillonnaire qui s'accompagne d'une régularisation de la structure radiale de la perturbation à l'extérieur du noyau de vorticité (cf. figure 7.28). Ces deux phénomènes sont à nuancer par le fait que la perturbation se propage à la fois dans la direction axiale et dans la direction radiale du tourbillon. Une simulation numérique sur une durée plus longue que dix rotations du vortex pourrait apporter des éléments de réponse à ces questions.

### 7.3 Réponse non linéaire à une perturbation hélicoïdale de grande amplitude à $Re = 1000$

Dans cette partie, nous étudions l'évolution de notre perturbation  $m = 1$  dotée d'une amplitude initiale importante. Pour mieux mettre en évidence les caractéristiques de la dynamique hélicoïdale non linéaire, nous proposons ici une comparaison à nombre de Reynolds donné ( $Re = 1000$ ) entre deux calculs DNS, d'une part sur une perturbation infinitésimale  $\varepsilon = 0.01$  (dynamique linéaire abordée au paragraphe 6.3.3), d'autre part sur une perturbation de grande amplitude  $\varepsilon = 0.5$ , où on s'attend à de fortes interactions non linéaires entre la perturbation et le tourbillon porteur.

#### 7.3.1 Description de la dynamique non linéaire de la perturbation $m = 1$ de grande amplitude à $Re = 1000$ et comparaison avec la dynamique linéaire de la perturbation infinitésimale

Les figures 7.41 et 7.42 illustrent l'initialisation de notre perturbation hélicoïdale, respectivement de petite amplitude et de grande amplitude. Physiquement, elles représentent un déplacement localisé du centre tourbillonnaire, et la structure azimutale de géométrie  $m = 1$  est clairement identifiable sur ces visualisations par l'allure vrillée des champs 3D de la perturbation initiale de vorticité axiale.   l'initialisation du calcul DNS, elles sont parfaitement similaires.

Les figures 7.43 à 7.62 présentent l'évolution au cours du temps de la perturbation en traçant deux isosurfaces 3D correspondant à  $\pm 10\%$  du niveau maximum de la perturbation initiale de vorticité axiale. Elles permettent d'observer comment se développent les instationnarités du paquet initial d'ondes hélicoïdales et en particulier la propagation des structures cohérentes le long de l'axe du tourbillon.

Sur les figures 7.43 et 7.44, on remarque déjà des différences dès la première période de retournement du vortex entre les dynamiques linéaire et non linéaire. Sur le schéma 7.43, on observe que le paquet d'ondes reste encore bien compact et régulier à  $T = 1$  pour la perturbation infinitésimale. Sur la figure 7.44, on note un début d'étirement le long de l'axe du tourbillon (aussi bien vers la gauche que la droite) et un enroulement plus prononcé de la perturbation

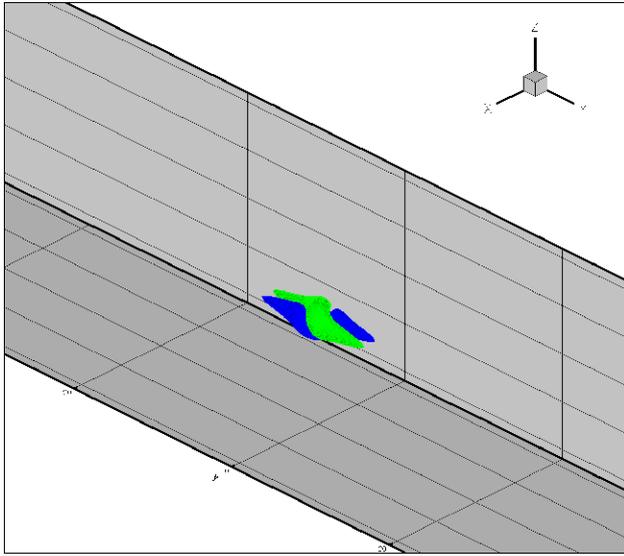


FIG. 7.41 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 0$  (maillage à 8 M points).

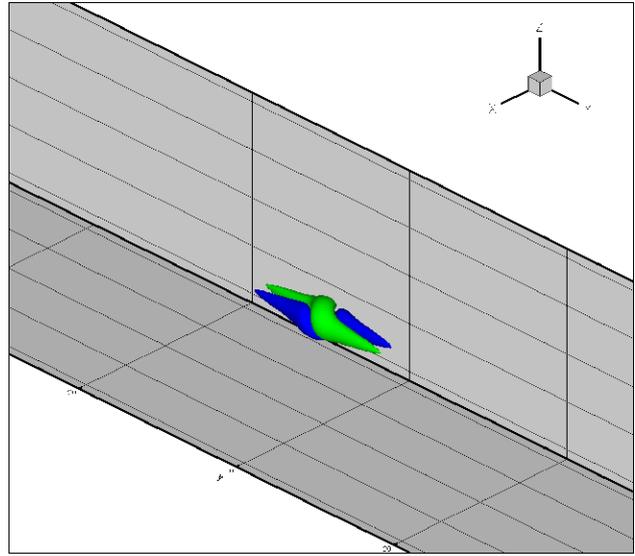


FIG. 7.42 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 0$  (maillage à 15.9 M points).

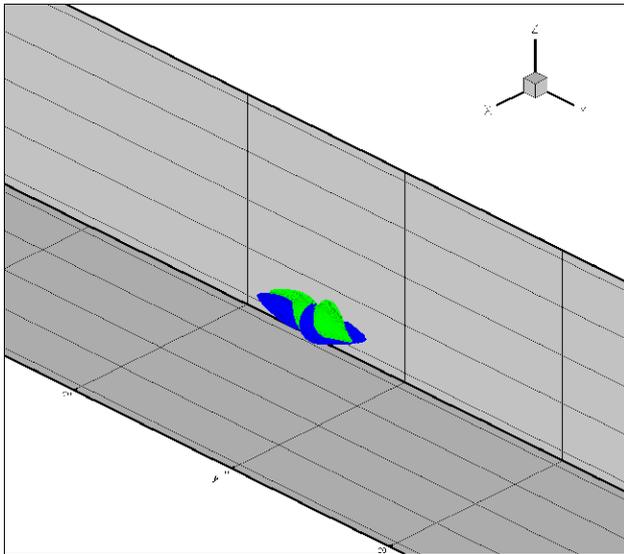


FIG. 7.43 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 1$  (maillage à 8 M points).

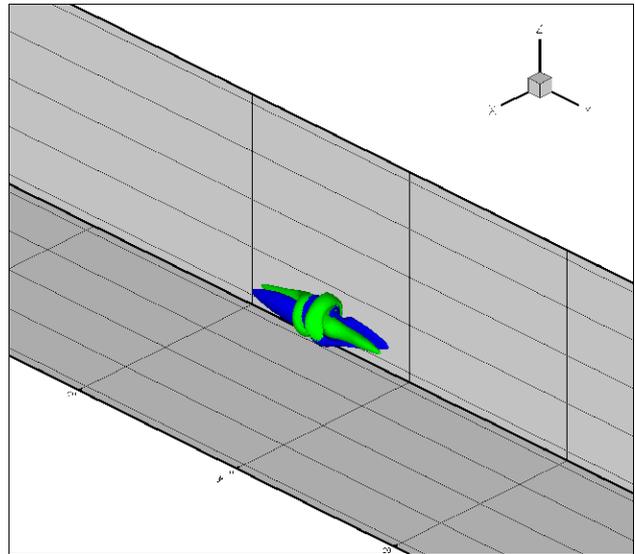


FIG. 7.44 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 1$  (maillage à 15.9 M points).

### 7.3. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE DE GRANDE AMPLITUDE À $Re = 1000$

à l'endroit même où elle a été initiée (plan  $y = 0$ ). Les figures 7.43 et 7.44 ont en commun de montrer que la perturbation reste encore "ramassée" selon la direction radiale à  $T = 1$ , i.e. concentrée dans le coeur tourbillonnaire.

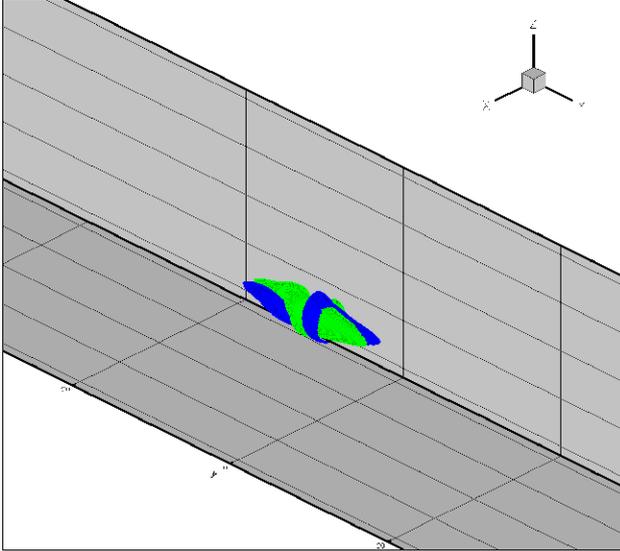


FIG. 7.45 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 2$  (maillage à 8 M points).

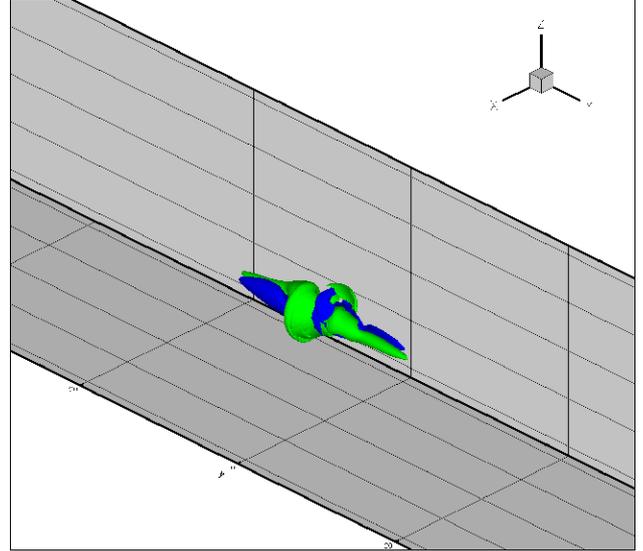


FIG. 7.46 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 2$  (maillage à 15.9 M points).

La comparaison des figures 7.45 et 7.46 après deux rotations du tourbillon confirme les distinctions relevées à  $T = 1$ . En effet, le schéma 7.45 traduit en dynamique linéaire un déroulement lent et régulier de la perturbation observée à  $T = 1$  sur la figure 7.43. Le schéma 7.46 assure un étirement dans la direction axiale plus net en dynamique non linéaire qu'en régime linéaire. De plus, on note au niveau de la localisation initiale de la perturbation que l'expansion du paquet d'ondes dans la direction radiale est un peu plus prononcée sur la figure 7.46.

Les figures 7.47 et 7.48 montrent d'importantes différences. Le schéma 7.47 corrobore le déroulement lent, compact et régulier des structures cohérentes, caractéristique de la dynamique linéaire. Dans le cas de la perturbation de grande amplitude, le fait le plus remarquable sur la figure 7.48 concerne un brusque déploiement selon la direction radiale - par élargissement et enroulement - du paquet d'ondes présent à l'origine de la perturbation, phénomène caractéristique des modes de couche critique. Par ailleurs, la dynamique non linéaire démontre encore à  $T = 3$  un effet d'étirement axial des structures hydrodynamiques plus important qu'en régime linéaire.

La comparaison des figures 7.49 et 7.50 après quatre rotations du vortex nous permet d'affirmer une différence capitale concernant les aspects propagatifs. En effet, on constate en dynamique linéaire (schéma 7.49) que le front d'onde de la perturbation sur la gauche du tourbillon est déterminé par l'extrémité du développement des deux ondes de déplacement (mode hélicoïdal "D", appelé aussi onde "lente"), alors qu'en dynamique non linéaire (figure 7.50) le front d'onde à gauche est défini par une structure de taille plus petite et centrée sur l'axe du vortex, qui a "double" l'ensemble plus massif et composé des deux ondes hélicoïdales de déplacement. On note également que la perturbation de grande amplitude exhibe un front d'onde à droite parfaitement symétrique de son front d'onde à gauche, ce qui est une conséquence de l'effet d'étirement précédemment signalé. En outre, on observe - dans la zone d'initialisation de la perturbation - la stagnation d'un paquet d'ondes beaucoup plus complexe et riche en dynamique non linéaire

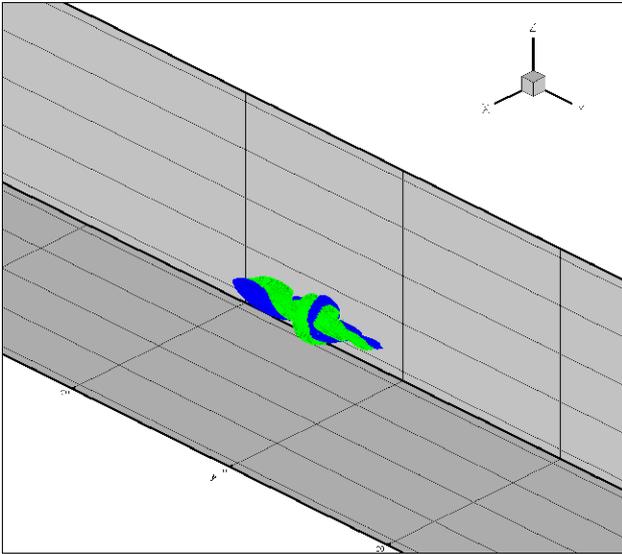


FIG. 7.47 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 3$  (maillage à 8 M points).

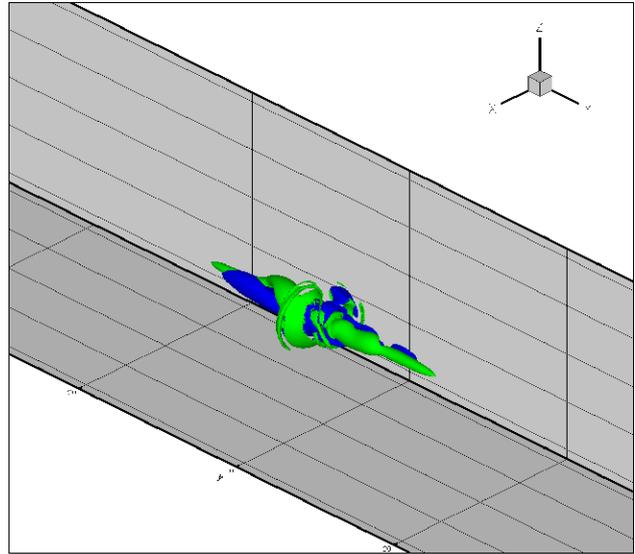


FIG. 7.48 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 3$  (maillage à 15.9 M points).

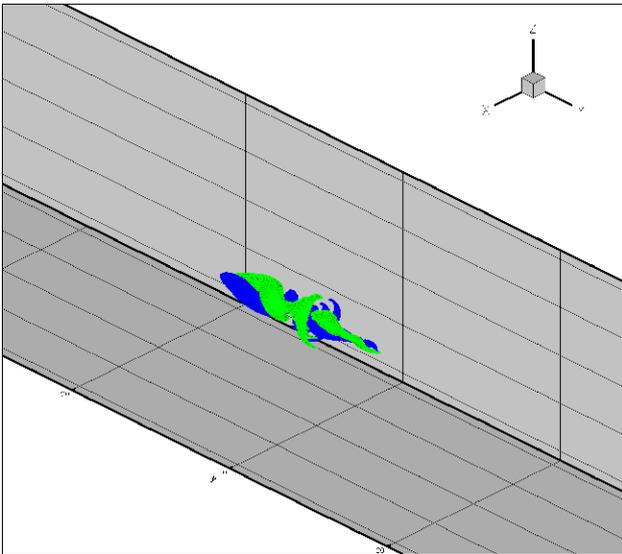


FIG. 7.49 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 4$  (maillage à 8 M points).

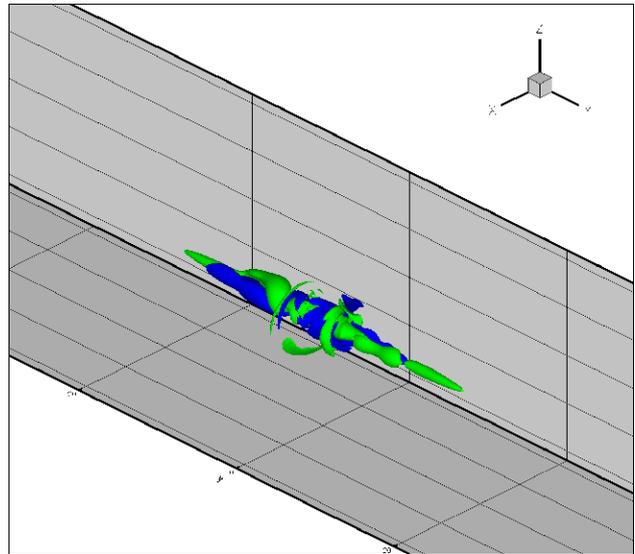


FIG. 7.50 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 4$  (maillage à 15.9 M points).

qu'en régime linéaire.

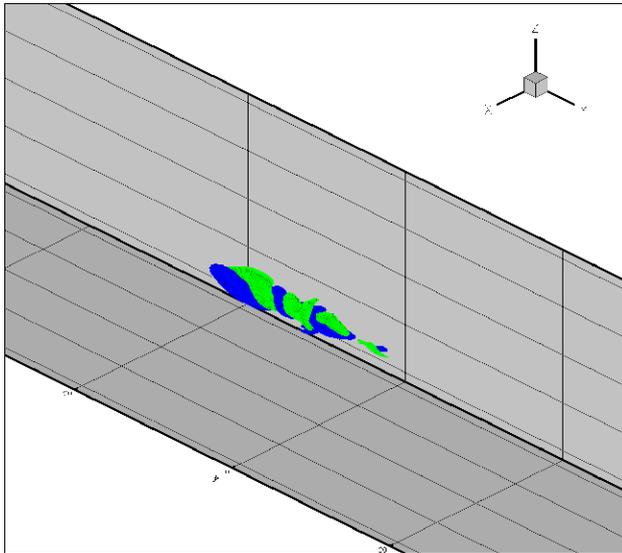


FIG. 7.51 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 5$  (maillage à 8 M points).

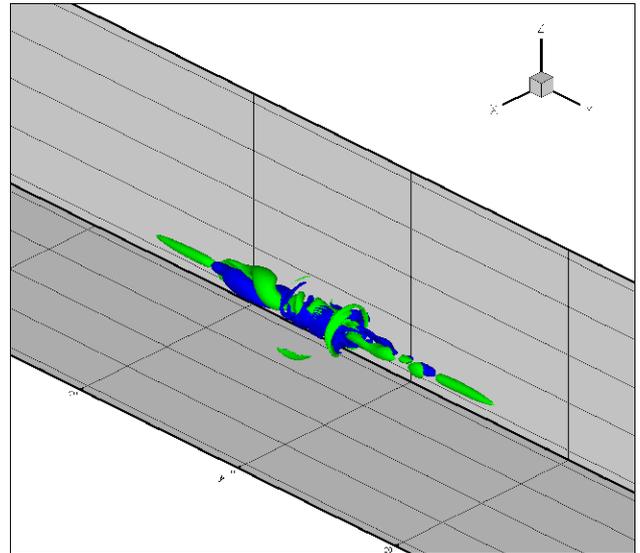


FIG. 7.52 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 5$  (maillage à 15.9 M points).

Sur les figures 7.51 et 7.52, on remarque des différences de plus en plus importantes entre les dynamiques linéaire et non linéaire après cinq périodes de retournement du vortex. Sur le schéma 7.51, on observe que la perturbation infinitésimale se scinde à  $T = 5$  en deux éléments hydrodynamiques bien distincts : une première structure compacte et massive, composée d'un paquet de modes de couche critique non propagatifs avec une double hélice régulière (constituée de modes hélicoïdaux "D" propagatifs et donnant le front d'onde à gauche), et une seconde structure cohérente beaucoup plus petite, composée de modes hélicoïdaux centraux (amas de dipôles de vorticité propagatifs, très resserrés sur l'axe du tourbillon et donnant le front d'onde à droite). Sur la figure 7.52, on constate que la perturbation de grande amplitude donne naissance à des lobes de vorticité de signes opposés, particulièrement nets à droite du vortex. Ceux-ci se propagent également vers la gauche, où ils se mélangent avec les paquets d'ondes hélicoïdales.

Pour comparer les figures 7.53 et 7.54 au bout de six rotations du tourbillon, nous pouvons nous référer aux résultats du paragraphe 6.3.3 en ce qui concerne la dynamique linéaire exposée au schéma 7.53. Pour résumer, la perturbation infinitésimale se décompose en trois structures hydrodynamiques : la double hélice se propageant vers la gauche, un paquet d'ondes de couche critique non propagatif et un ensemble de modes centraux se propageant vers la droite. Quant à la figure 7.54, elle confirme les tendances que nous avons décrites à  $T = 5$  sur le schéma 7.52 et montre par les lobes de vorticité de signes alternés (constituant le front d'onde de droite et absents de la figure 7.53) que ces éléments hydrodynamiques sont en fait caractéristiques d'une contribution axisymétrique (cf. la figure 7.10). L'interaction entre ces paquets de modes axisymétriques et l'amas d'ondes hélicoïdales conduit à une structure hydrodynamique particulièrement complexe et délicate d'interprétation dans la partie centrale de la colonne de vorticité (autour de  $y = 0$ ). Sur la visualisation 3D du schéma 7.54, on constate que cette structure est spatialement très étendue et "robuste". En effet, on distingue sur la figure 7.54 la présence en dynamique non linéaire de grosses structures d'enroulement et de bras spiraux de vorticité relativement loin à l'extérieur du coeur tourbillonnaire (phénoménologie habituellement caractéristique des modes hélicoïdaux des familles "V" et "L" de couche critique), éléments qui

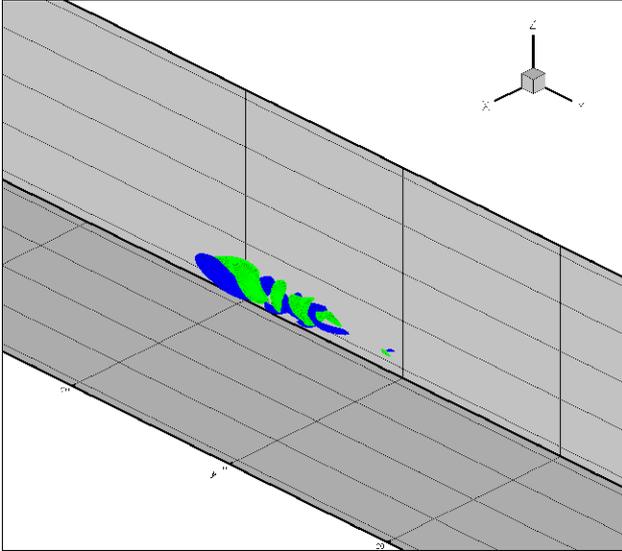


FIG. 7.53 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 6$  (maillage à 8 M points).

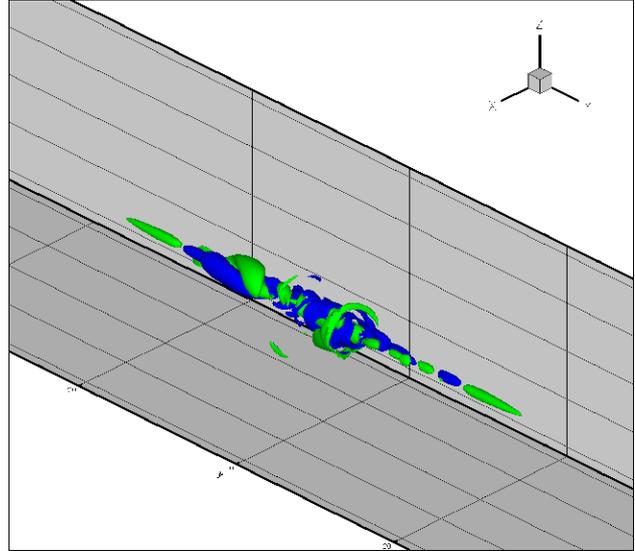


FIG. 7.54 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 6$  (maillage à 15.9 M points).

sont absents de la figure 7.53 car ces ondes sont fortement amorties à  $Re = 1000$  en dynamique purement linéaire (cf. paragraphes 6.2.4.3 et 6.2.4.4).

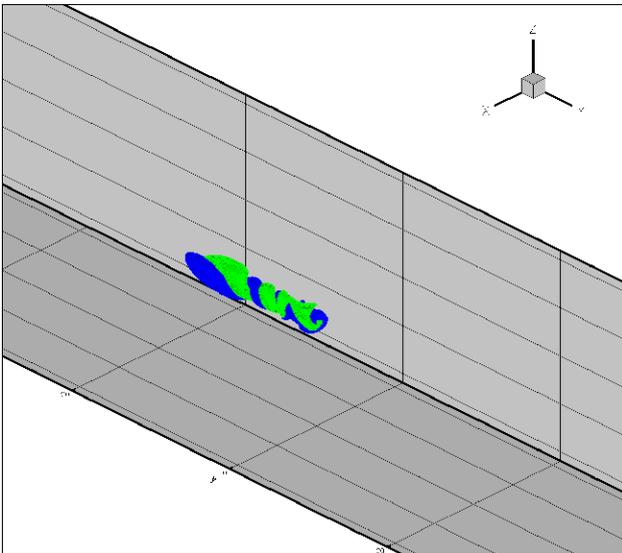


FIG. 7.55 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 7$  (maillage à 8 M points).

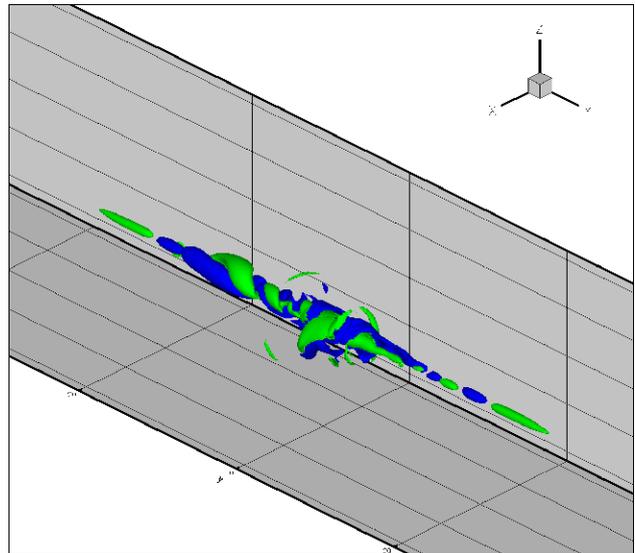


FIG. 7.56 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 7$  (maillage à 15.9 M points).

A partir de sept temps de retournement du vortex, on s'aperçoit sur la figure 7.55 que la perturbation infinitésimale s'est très nettement "décantée". En effet, la dynamique linéaire de notre perturbation  $m = 1$  montre à  $T = 7$  la disparition complète du paquet d'ondes hélicoïdales de la famille "C" qui constituait encore à  $T = 6$  le front d'onde à droite sur le schéma 7.53. Ceci s'explique non pas par les taux d'amortissement des ondes hélicoïdales de la famille "C" (qui figurent parmi les plus faibles de l'ensemble des modes normaux calculés par Fabre à  $Re = 1000$  : cf. figure 6.2), mais véritablement par la construction même de notre perturbation initiale  $m = 1$ ,

### 7.3. RÉPONSE NON LINÉAIRE À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE DE GRANDE AMPLITUDE À $Re = 1000$

conçue comme une "vrille de gaucher" (Fabre [99]), c'est à dire pour faire en sorte que cette perturbation se comporte finalement comme une double hélice de vorticité se propageant vers la gauche. On peut donc dire qu'en régime linéaire, l'étape transitoire pour atteindre cette dynamique bien établie et régulière dure environ sept rotations du tourbillon de Lamb-Oseen. En ce qui concerne la dynamique non linéaire, on constate sur le schéma 7.56 à  $T = 7$  que la perturbation s'est encore complexifiée autour de la position  $y = 0$ , par rapport à la figure 7.54 à  $T = 6$ . De plus, on constate l'apparition d'un lobe axisymétrique supplémentaire sur la droite du tourbillon et on a confirmation que les deux fronts d'onde de la perturbation non linéaire sont définis par des structures axisymétriques très étirées, aussi bien sur la gauche que sur la droite du vortex.

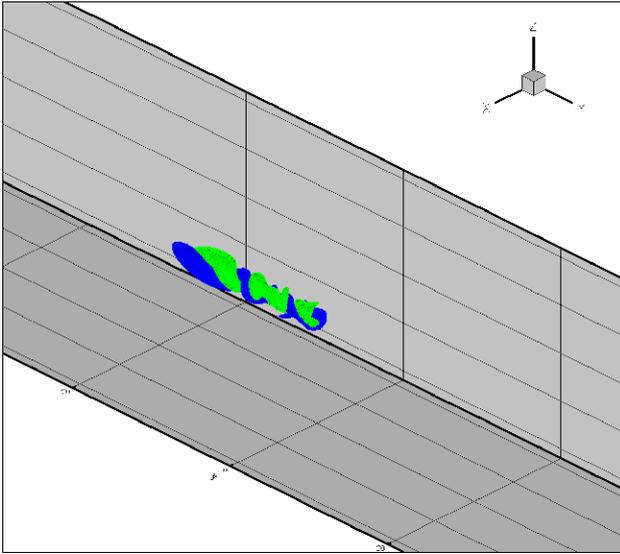


FIG. 7.57 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$     $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ )    $T = 8$  (maillage à 8 M points).

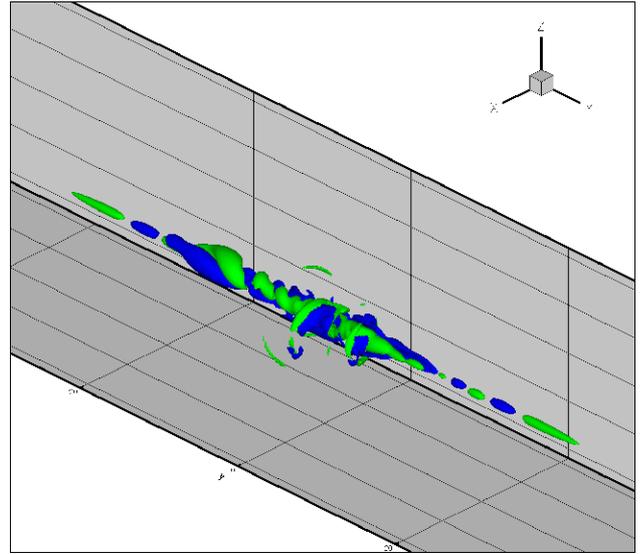


FIG. 7.58 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$     $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ )    $T = 8$  (maillage à 15.9 M points).

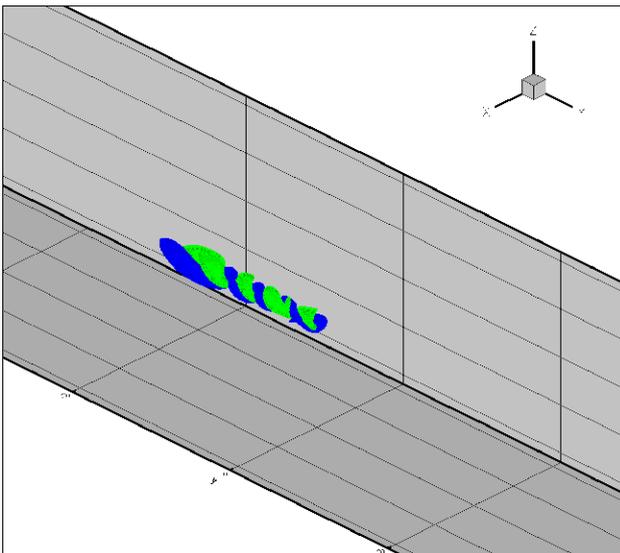


FIG. 7.59 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$     $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ )    $T = 9$  (maillage à 8 M points).

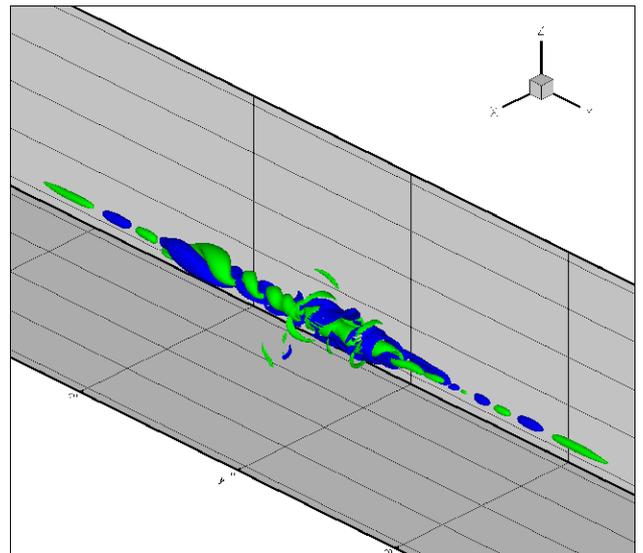


FIG. 7.60 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$     $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ )    $T = 9$  (maillage à 15.9 M points).

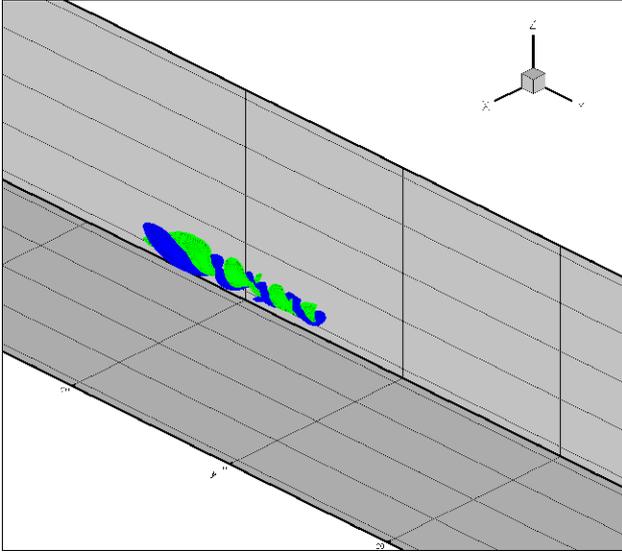


FIG. 7.61 – Perturbation infinitésimale  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime linéaire :  $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 10$  (maillage à 8 M points).

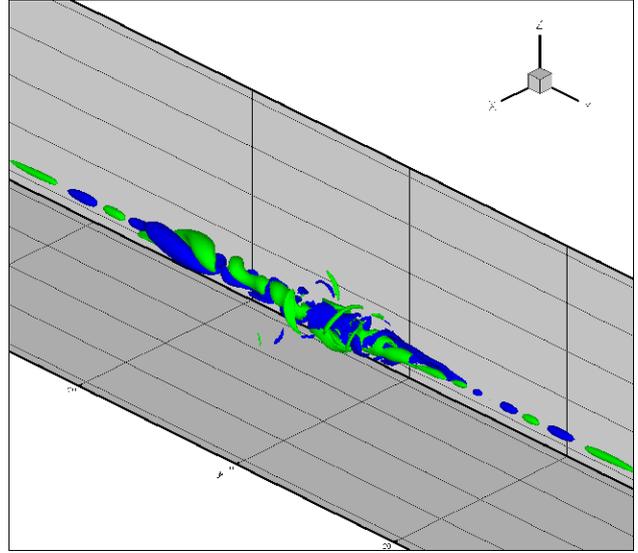


FIG. 7.62 – Perturbation de grande amplitude  $m = 1$  à  $Re = 1000$  (régime non linéaire :  $\varepsilon = 0.5$ ) à  $T = 10$  (maillage à 15.9 M points).

De  $T = 8$  à  $T = 10$ , la dynamique linéaire atteinte à  $T = 7$  se confirme et se poursuit avec seulement une propagation régulière vers la gauche du tourbillon d'un unique front d'onde en forme de dipôle de vorticité. Les figures 7.57, 7.59 et 7.61 illustrent cette évolution de la perturbation infinitésimale, qui se caractérise par une longue structure cohérente qui s'enrichit vers la gauche d'un pas d'hélice supplémentaire à chaque rotation du vortex.

Dans le cas de la dynamique non linéaire, on observe également des similarités de  $T = 8$     $T = 10$  entre les figures 7.58, 7.60 et 7.62, conformément à l'état atteint à  $T = 7$ . Les fronts d'onde à gauche et à droite de la perturbation de grande amplitude sont toujours déterminés par des structures axisymétriques étirées et resserrées sur l'axe du vortex (cf. les figures 7.12, 7.13 et 7.14). En plus de ces fronts d'onde axisymétriques et de la double hélice de vorticité observée en dynamique linéaire, on note pour  $T \geq 8$  une structure cohérente et étirée sous l'effet d'écoulement axial crée, particulièrement complexe dans sa composition (un paquet d'ondes visiblement constitué de modes de géométries  $m = 0$  et  $m = 1$ ) subsiste de manière persistante dans la partie centrale de la colonne tourbillonnaire en régime non linéaire, alors que cette structure hydrodynamique disparaît totalement en régime linéaire dès que  $T \geq 7$  (amortissement par diffusion visqueuse à  $Re = 1000$ ).

### 7.3.2 Contenu spectral de la perturbation hélicoïdale non linéaire

Afin de caractériser les différentes composantes en nombre d'onde azimutal présentes dans la perturbation, nous effectuons une analyse de type transformée de Fourier discrète (TFD) dans la direction de l'azimut, comme nous l'avons fait au paragraphe 7.2.3. De plus, nous concentrons ici notre analyse TFD exclusivement sur le plan  $y = 0$ , lieu où est initiée la perturbation, afin de mieux comprendre la structure cohérente, complexe et persistante qui s'y développe : nous avons vu au chapitre 6 qu'une des caractéristiques des couches critiques consiste précisément dans le fait qu'elles ne se propagent pas le long du vortex.

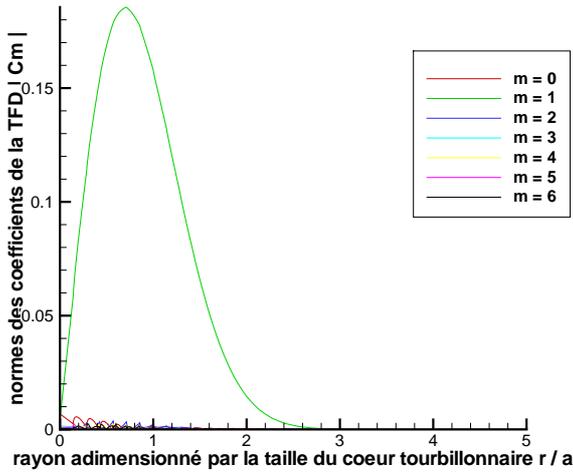


FIG. 7.63 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 0$ .

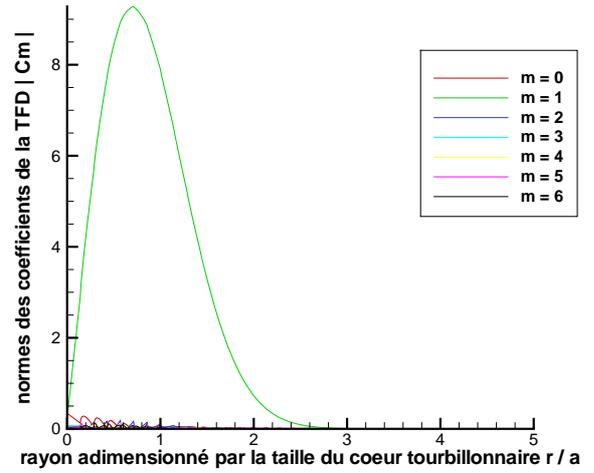


FIG. 7.64 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 0$ .

Les figures 7.63 et 7.64 montrent que l'initialisation de la perturbation hélicoïdale est totalement dominée par la composante  $m = 1$ , aussi bien pour une initialisation infinitésimale que de grande amplitude. Les courbes  $|C_1(r)|$  de ces deux graphiques sont en complète similitude avec l'allure en forme de cloche représentée sur la figure 7.65 et directement liée aux formules analytiques du paragraphe 4.3.2. En effet, en prenant l'expression de l'équation 4.12 dans le cas particulier de l'origine de l'axe du vortex, plan où est initialement localisée la perturbation, on obtient en coordonnées cylindriques le profil suivant de la perturbation initiale de vorticité axiale :

$$\omega'_{axiale}(r, \theta) = 8 \varepsilon \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right) \sin \theta \quad (7.3)$$

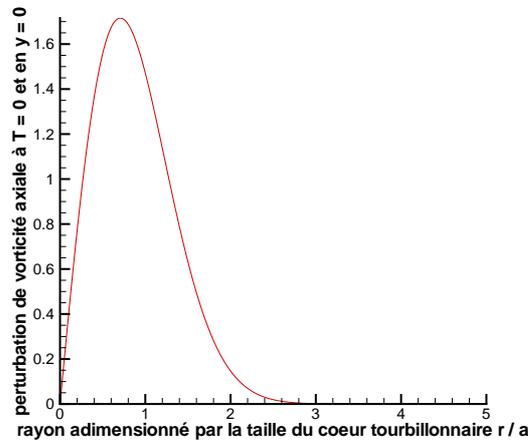


FIG. 7.65 – Profil de la perturbation initiale  $m = 1$  de vorticité axiale ( $\theta = \pi/2 - \varepsilon = 0.5 - y = 0$ ).

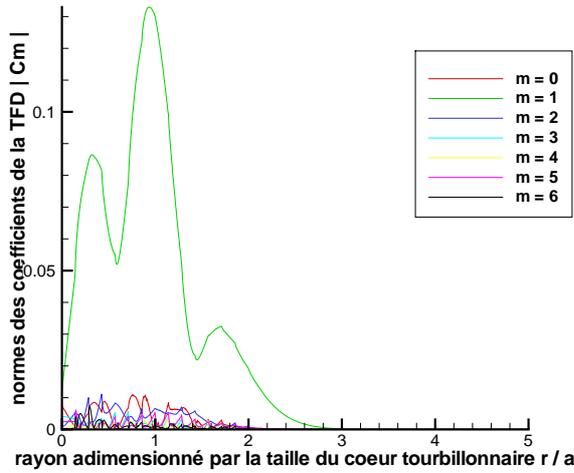


FIG. 7.66 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 1$ .

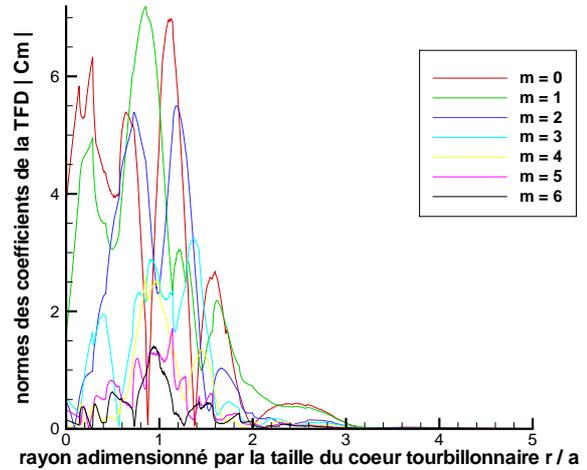


FIG. 7.67 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 1$ .

Les figures 7.66 et 7.67 mettent en évidence des différences remarquables et substantielles dans la composition azimutale de la perturbation dès la première période de retournement du vortex.

Dans le cas de la perturbation infinitésimale sur la figure 7.66, la composante  $m = 1$  reste prédominante partout, aussi bien dans le coeur tourbillonnaire que dans la zone potentielle : cela est conforme à une dynamique linéaire, où les termes du second ordre, bien que pris en compte dans notre résolution DNS, sont négligeables, rendant ainsi insignifiant tout échange d'énergie entre les différentes géométries azimutales. Les courbes  $|C_0(r)|$ ,  $|C_2(r)|$ ,  $|C_3(r)|$ ,  $|C_4(r)|$ ,  $|C_5(r)|$  et  $|C_6(r)|$  confirment cette idée car elles restent à des niveaux particulièrement bas par rapport à la courbe  $|C_1(r)|$ . De plus, ces harmoniques résiduelles  $m \neq 1$ , de l'ordre du bruit numérique, restent localisées radialement autour de deux fois la taille caractéristique du noyau de vorticit e.

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.67 l'apparition de fortes composantes  $m = 0$  et  $m = 2$  (ainsi que  $m = 3$ , dans une moindre mesure), avec des contributions aussi importantes que la composante  $m = 1$  initialement excit ee. On remarque que la courbe  $|C_2(r)|$  connaît deux maxima, respectivement en  $r/a \approx 0.7$  et  $r/a \approx 1.12$  (lieu du maximum de vitesse tangentielle du tourbillon de Lamb-Oseen), ce qui pourrait justifier le fort enroulement de la structure hydrodynamique d emontr e par la comparaison des figures 7.43 et 7.44. Dans le m eme esprit d'un  eventuel enroulement de la structure de la perturbation non lin eaire en double h elice, voire en triple h elice au niveau du coeur tourbillonnaire, on note le maximum global de la courbe  $|C_3(r)|$  atteint en  $r/a \approx 1.4$ . Au niveau de la r egion potentielle, les composantes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont pr edominantes avec des niveaux  equivalents dans l'intervalle  $2 \leq r/a \leq 3$ . Enfin, la contribution  $m = 1$  subsiste jusqu' a  $r/a \approx 3.2$  sur la perturbation de grande amplitude, au lieu de  $r/a \approx 2.8$  en perturbation infinit esimale.

De mani ere plus g en erale, on distingue que toutes les composantes  $m \neq 1$  ont des amplitudes nettement plus hautes relativement  a la composante h elico idale, et ce jusqu' a trois fois le coeur tourbillonnaire. Physiquement, cela atteste d'une dynamique fortement non lin eaire o u les termes du second ordre pris en compte dans la r esolution de la DNS sont  a l'origine de forts  echanges d' energie entre les diff erentes g eom etriess azimutales.

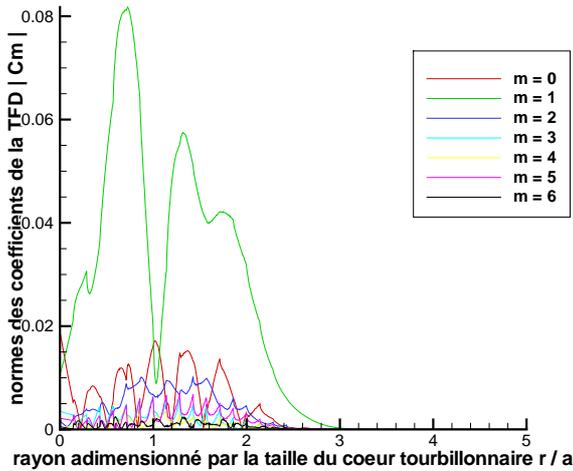


FIG. 7.68 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 2$ .

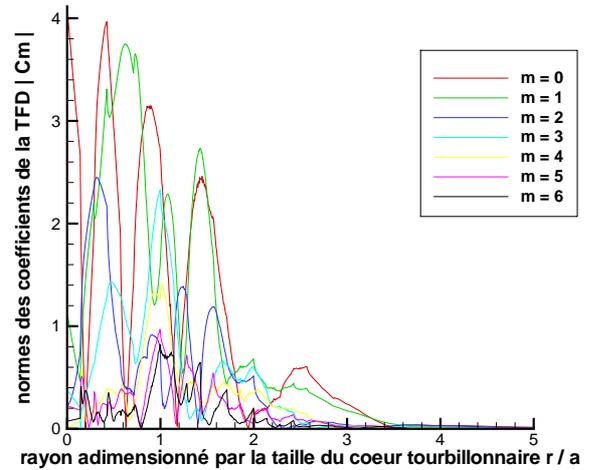


FIG. 7.69 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 2$ .

Après deux rotations du tourbillon, les figures 7.68 et 7.69 confirment à  $T = 2$  les très nettes différences de composition azimutale de la perturbation décrites à  $T = 1$ .

Sur la perturbation infinitésimale de la figure 7.68, la composante  $m = 1$  reste toujours prédominante, sauf dans deux zones radiales extrêmement étroites. De manière anecdotique, la composante axisymétrique prend très ponctuellement le dessus sur la contribution hélicoïdale au centre du vortex et à la frange du coeur tourbillonnaire ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.04$  et  $1.05 \leq r/a \leq 1.1$ ).

Dans le cas de la perturbation de grande amplitude, la courbe  $|C_0(r)|$  connaît quatre racines (en  $r/a \approx 0.2$ ,  $r/a \approx 0.63$ ,  $r/a \approx 1.2$  et  $r/a \approx 1.9$ ), mais on ne peut cependant plus parler de "feuilletage" de la perturbation car d'autres composantes  $m \neq 0$  sont alors dominantes. De plus, on observe que les courbes  $|C_0(r)|$ ,  $|C_1(r)|$  et  $|C_2(r)|$  sont au même niveau en  $r/a \approx 0.3$  : a priori, cela signifie que toutes les ondes des différentes familles de modes normaux de géométries  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$  (spécifiques du tourbillon de Lamb-Oseen et décrites au chapitre 6) peuvent être présentes simultanément autour du tiers du coeur tourbillonnaire. On peut résumer le contenu spectral de la perturbation de grande amplitude de la manière suivante :

- pour  $0.5 \leq r/a \leq 0.9$ , les composantes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont dominantes
- pour  $0.9 \leq r/a \leq 1.1$ , les composantes  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 3$  sont dominantes
- pour  $1.1 \leq r/a \leq 1.6$ , les composantes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont dominantes
- pour  $1.6 \leq r/a \leq 1.8$ , les composantes  $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$  sont dominantes
- pour  $1.8 \leq r/a \leq 2.2$ , les composantes  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$  et  $m = 4$  sont dominantes
- pour  $2.2 \leq r/a \leq 3.4$ , les composantes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont dominantes

Enfin, signalons que la comparaison des figures 7.68 et 7.69 montre une différence intéressante sur leurs courbes  $|C_1(r)|$  : la baisse de la composante  $m = 1$  dans l'intervalle  $0.8 \leq r/a \leq 1.1$  est beaucoup plus atténuée en dynamique non linéaire qu'en régime linéaire, ce qui est imputable aux fortes coopérations azimutales du terme du second ordre dans le cas de la perturbation de grande amplitude.

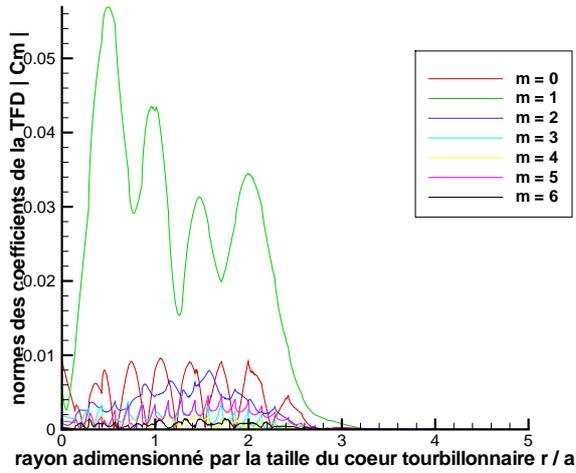


FIG. 7.70 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 3$ .

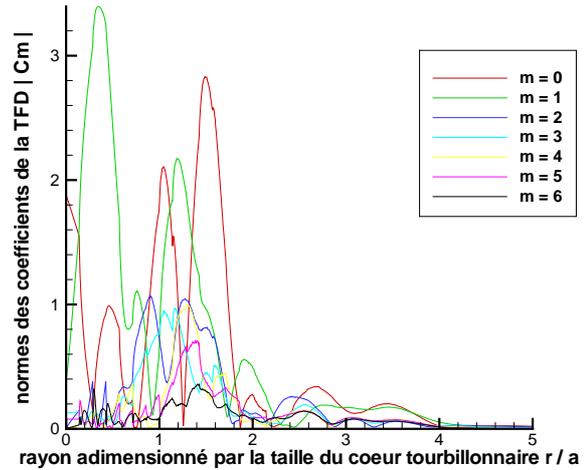


FIG. 7.71 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 3$ .

Au bout de trois temps de retournement du vortex, les figures 7.70 et 7.71 confortent à  $T = 3$  de fortes différences de composition azimutale de la perturbation entre le régime linéaire et la dynamique non linéaire.

La figure 7.70 illustre que dans la perturbation infinitésimale, la composante  $m = 1$  reste toujours prédominante, sauf très ponctuellement au centre du vortex ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.08$ ). Par ailleurs, on constate que pour  $0 \leq r/a \leq 2.7$ , les composantes  $m = 0$  et  $m = 2$  atteignent des niveaux non totalement négligeables par rapport à la contribution dominante  $m = 1$ .

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.71 les alternances suivantes de la composante azimutale dominante :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.13$
- $m = 1$  pour  $0.13 \leq r/a \leq 0.8$
- $m = 2$  pour  $0.8 \leq r/a \leq 0.9$
- $m = 0$  pour  $0.9 \leq r/a \leq 1.1$
- $m = 1$  pour  $1.1 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 0$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.8$
- $m = 1$  pour  $1.8 \leq r/a \leq 2.2$
- $m = 2$  pour  $2.2 \leq r/a \leq 2.5$
- $m = 0$  pour  $2.5 \leq r/a \leq 3$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3 \leq r/a \leq 4$

Pour finir, la comparaison des figures 7.70 et 7.71 montre une très forte chute de la courbe  $|C_1(r)|$  pour  $0.9 \leq r/a \leq 1$  dans le cas de la perturbation de grande amplitude, alors que cette baisse est nettement moins disproportionnée sur la perturbation infinitésimale. Cette constatation est exactement l'inverse de l'observation faite à  $T = 2$  dans la même région radiale (i.e. à la périphérie intérieure du coeur tourbillonnaire). La cause de cet écart est une nouvelle fois l'expression du terme du second ordre dans le cas de la perturbation de grande amplitude.

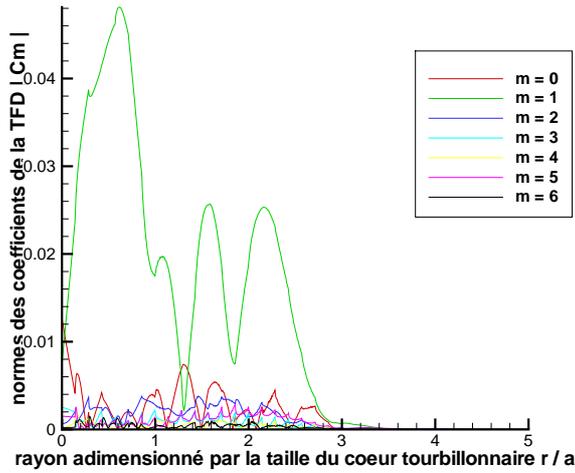


FIG. 7.72 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$ .

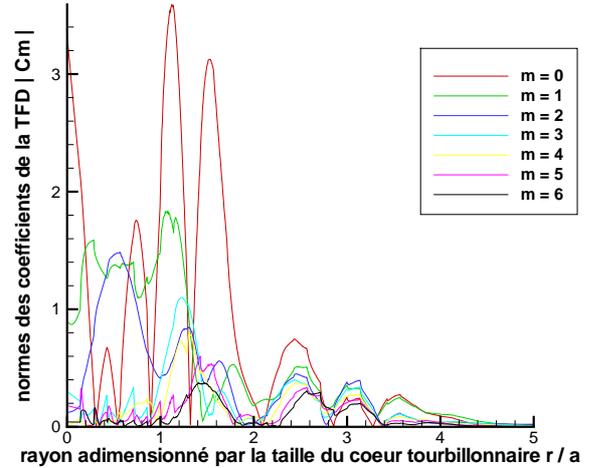


FIG. 7.73 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 4$ .

Une autre différence entre les figures 7.70 et 7.71 réside dans le fait que la composante  $m = 1$  subsiste jusqu'à  $r/a \approx 3.2$  en dynamique linéaire alors qu'elle persiste jusqu'à  $r/a \approx 4.2$  en régime non linéaire.

Après quatre rotations du tourbillon, les figures 7.72 et 7.73 retrouvent certaines des tendances mentionnées à  $T = 2$  et  $T = 3$ .

La figure 7.72 illustre que dans la perturbation infinitésimale, la composante  $m = 1$  reste toujours prépondérante, sauf très ponctuellement au centre du vortex et en périphérie du coeur tourbillonnaire ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.03$  et  $1.25 \leq r/a \leq 1.35$ ).

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.73 une atténuation sensible de la contribution  $m = 1$  dans le coeur tourbillonnaire, au profit des composantes  $m = 0$  et  $m = 2$ . Ainsi, le schéma 7.73 montre les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$ ,  $m = 1$  et  $m = 2$  pour  $0 \leq r/a \leq 1$
- $m = 0$  pour  $1 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 3$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.35$
- $m = 0$  pour  $1.35 \leq r/a \leq 2$
- $m = 1$  pour  $2 \leq r/a \leq 2.16$
- $m = 0$  (avec des niveaux très proches des différents  $m \neq 0$ ) pour  $2.16 \leq r/a \leq 2.7$
- tous les  $m$  pour  $2.7 \leq r/a \leq 3.3$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3.3 \leq r/a \leq 4.3$
- $m = 1$  pour  $4.3 \leq r/a \leq 4.6$

Par ailleurs, la comparaison des figures 7.72 et 7.73 indique qu'en dynamique non linéaire, le contenu spectral devient très dense, oscillant et étendu dans la direction radiale (en particulier dans la région irrotationnelle, pour  $2.16 \leq r/a \leq 4.6$ ), tandis que la composante dominante  $m = 1$  de la dynamique linéaire est encore cantonnée à  $0 \leq r/a \leq 3.4$ .

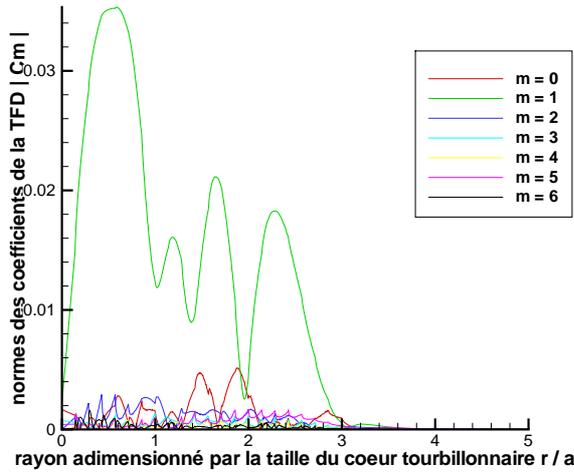


FIG. 7.74 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 5$ .

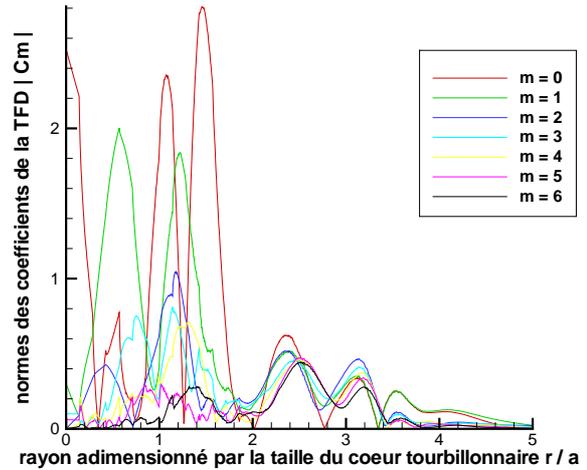


FIG. 7.75 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 5$ .

Au bout de cinq périodes de retournement du tourbillon, les figures 7.74 et 7.75 confirment à  $T = 5$  d'importantes différences de composition azimutale de la perturbation entre le régime linéaire et la dynamique non linéaire.

La figure 7.74 montre que la composante  $m = 1$  reste toujours prédominante dans la perturbation infinitésimale, sauf très localement et exclusivement à l'extérieur du coeur tourbillonnaire ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $1.9 \leq r/a \leq 2$  et  $2.9 \leq r/a \leq 3.1$ ).

Quant à la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.75 une recrudescence de la contribution  $m = 1$  dans le coeur tourbillonnaire et les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.3$
- $m = 1$  pour  $0.3 \leq r/a \leq 0.9$
- $m = 0$  pour  $0.9 \leq r/a \leq 1.15$
- $m = 1$  pour  $1.15 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 0$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.8$
- tous les  $m$  pour  $1.8 \leq r/a \leq 3.4$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3.4 \leq r/a \leq 4$
- $m = 1$  pour  $4 \leq r/a \leq 5$

De plus, la comparaison des figures 7.74 et 7.75 corrobore à  $T = 5$  le constat fait à  $T = 4$ , à savoir un contenu spectral de la dynamique non linéaire de plus en plus dense, oscillant et étendu dans la direction radiale (tout spécialement dans la zone potentielle, pour  $2 \leq r/a \leq 5$ ), alors que la composante dominante  $m = 1$  du régime linéaire reste toujours localisée à  $0 \leq r/a \leq 3.4$ .

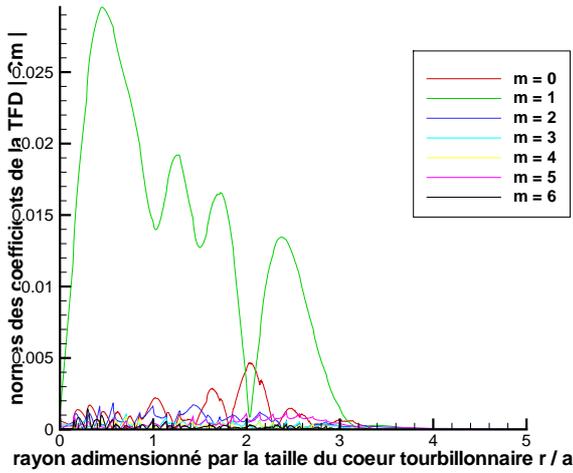


FIG. 7.76 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 6$ .

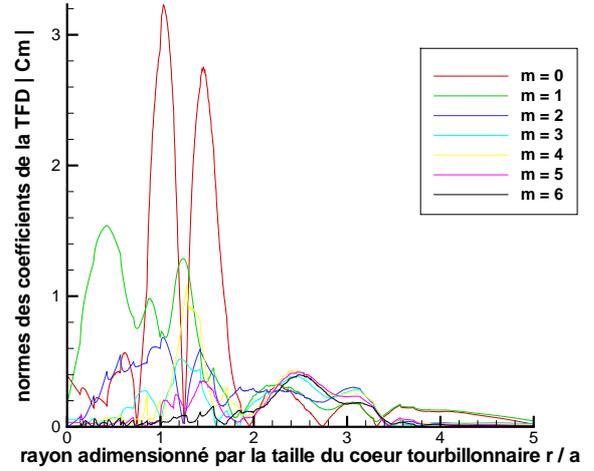


FIG. 7.77 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 6$ .

Après six rotations du vortex, les figures 7.76 et 7.77 nous permettent de reconnaître la plupart des tendances décrites à  $T = 4$  et  $T = 5$ .

La figure 7.76 montre que la composante  $m = 1$  reste toujours prépondérante dans la perturbation infinitésimale, sauf très ponctuellement ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $2 \leq r/a \leq 2.1$  et  $3.1 \leq r/a \leq 3.3$ ).

Pour ce qui est de la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.77 les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.05$
- $m = 1$  pour  $0.05 \leq r/a \leq 0.8$
- $m = 0$  pour  $0.8 \leq r/a \leq 1.2$
- $m = 1$  pour  $1.2 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 0$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.8$
- $m = 2$  pour  $1.8 \leq r/a \leq 2.05$
- tous les  $m$  pour  $2.05 \leq r/a \leq 3.4$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3.4 \leq r/a \leq 4.4$
- $m = 1$  pour  $4.4 \leq r/a \leq 5$

Par ailleurs, la comparaison des figures 7.76 et 7.77 indique que le contenu spectral de la dynamique non linéaire reste dense et étendu radialement (pour  $2 \leq r/a \leq 5$ ) mais moins oscillant qu'à  $T = 4$  et  $T = 5$ , tandis que la composante dominante  $m = 1$  de la dynamique linéaire est encore limitée à  $0 \leq r/a \leq 3.6$ .

Au bout de sept temps de retournement du tourbillon, les figures 7.78 et 7.79 confortent à  $T = 7$  de fortes différences de composition azimutale de la perturbation entre le régime linéaire et la dynamique non linéaire.

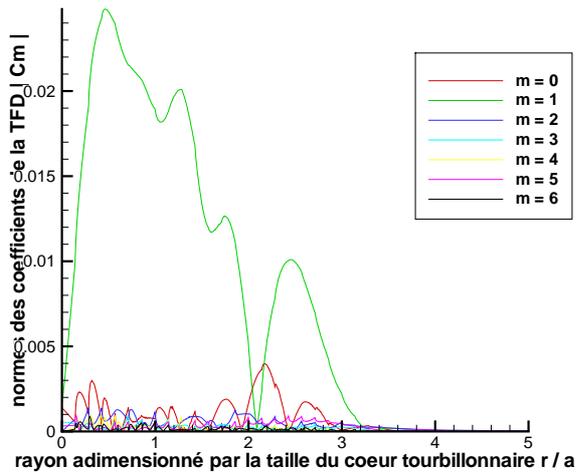


FIG. 7.78 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 7$ .

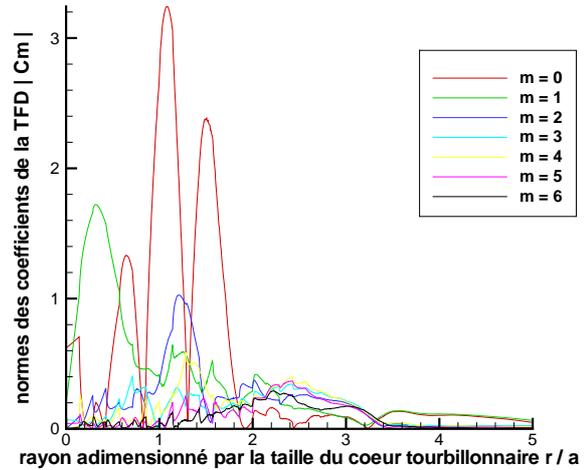


FIG. 7.79 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 7$ .

La figure 7.78 confirme que dans la perturbation infinitésimale, la composante  $m = 1$  reste toujours prédominante, sauf très localement ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $2 \leq r/a \leq 2.1$ ).

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.79 les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.08$
- $m = 1$  pour  $0.08 \leq r/a \leq 0.6$
- $m = 0$  pour  $0.6 \leq r/a \leq 0.8$
- $m = 1$  pour  $0.8 \leq r/a \leq 0.9$
- $m = 0$  pour  $0.9 \leq r/a \leq 1.25$
- $m = 2$  pour  $1.25 \leq r/a \leq 1.35$
- $m = 0$  pour  $1.35 \leq r/a \leq 1.8$
- tous les  $m$  pour  $1.8 \leq r/a \leq 3.3$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3.3 \leq r/a \leq 5$

En outre, la comparaison des figures 7.78 et 7.79 à  $T = 7$  confirme la tendance amorcée à  $T = 6$ , à savoir que l'aplatissement du contenu spectral de la dynamique non linéaire est toujours aussi dense et étendu radialement (pour  $2 \leq r/a \leq 5$ ) mais de moins en moins oscillant - notamment par rapport à  $T = 4$  et  $T = 5$  - tandis que la composante dominante  $m = 1$  de la dynamique linéaire reste encore délimitée à  $0 \leq r/a \leq 3.8$ .

Après huit rotations du vortex, les figures 7.80 et 7.81 nous ramènent à certaines des tendances mentionnées à  $T = 5$  et  $T = 7$ .

La figure 7.80 illustre que dans la perturbation infinitésimale, la composante  $m = 1$  reste toujours prépondérante, sauf très ponctuellement au centre du vortex et dans la région potentielle ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.03$  et  $2.1 \leq r/a \leq 2.2$ ).

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.81 les

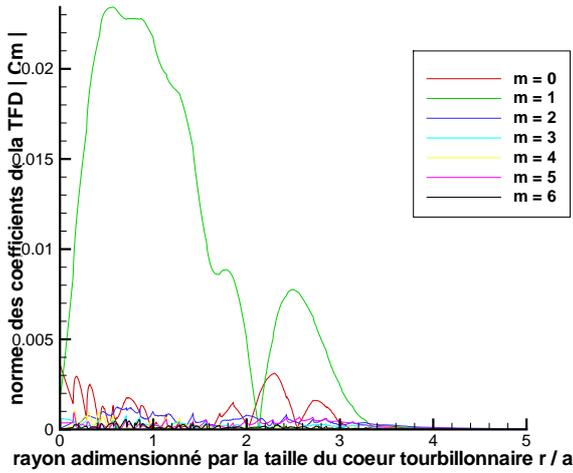


FIG. 7.80 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 8$ .

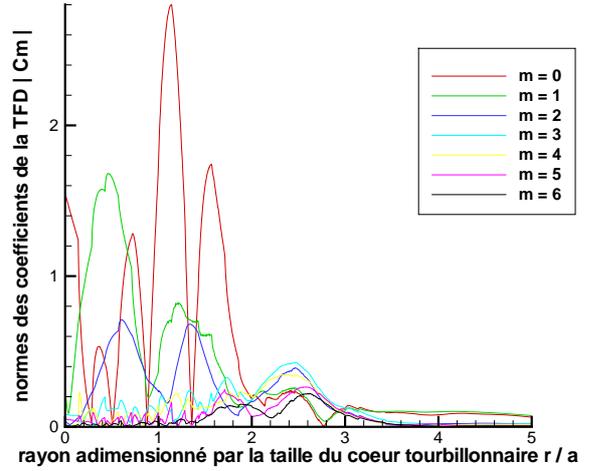


FIG. 7.81 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 8$ .

alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.16$
- $m = 1$  pour  $0.16 \leq r/a \leq 0.7$
- $m = 0$  pour  $0.7 \leq r/a \leq 0.88$
- $m = 2$  pour  $0.88 \leq r/a \leq 0.92$
- $m = 0$  pour  $0.92 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 1$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.4$
- $m = 0$  pour  $1.4 \leq r/a \leq 1.96$
- $m = 4$  pour  $1.96 \leq r/a \leq 2.04$
- $m = 3$  pour  $2.04 \leq r/a \leq 3$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3 \leq r/a \leq 5$

Par ailleurs, la comparaison des figures 7.80 et 7.81 indique qu'en dynamique non linéaire, le contenu spectral est très dense et étendu dans la direction radiale (en particulier dans la région irrotationnelle, pour  $2 \leq r/a \leq 5$ ) avec des oscillations très marquées sur  $0 \leq r/a \leq 3$ , tandis que la composante dominante  $m = 1$  de la dynamique linéaire est encore cantonnée à  $0 \leq r/a \leq 3.4$ .

Au bout de neuf périodes de retournement du tourbillon, les figures 7.82 et 7.83 confirment à  $T = 9$  d'importantes différences de composition azimutale de la perturbation entre le régime linéaire et la dynamique non linéaire.

La figure 7.82 montre que la composante  $m = 1$  reste toujours prédominante dans la perturbation infinitésimale, sauf très localement ( $|C_0(r)| > |C_1(r)|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.04$  et  $2.1 \leq r/a \leq 2.2$ ).

Quant à la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.83 les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

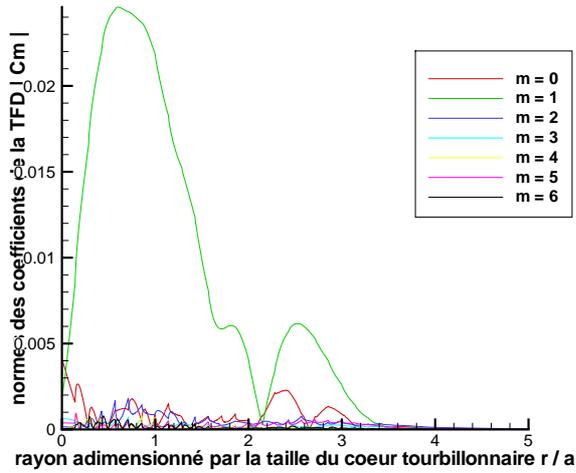


FIG. 7.82 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 9$ .

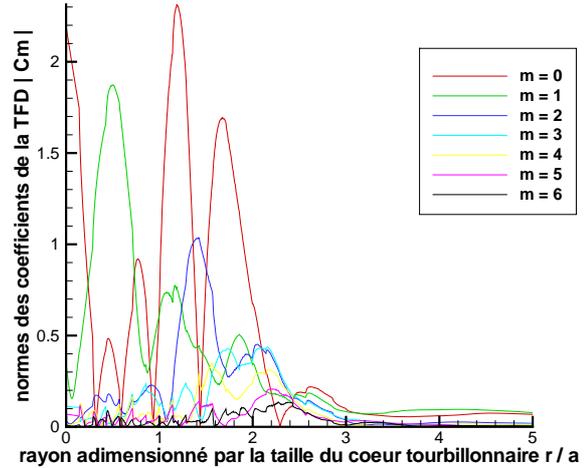


FIG. 7.83 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 9$ .

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.24$
- $m = 1$  pour  $0.24 \leq r/a \leq 0.72$
- $m = 0$  pour  $0.72 \leq r/a \leq 0.9$
- $m = 1$  pour  $0.9 \leq r/a \leq 1$
- $m = 0$  pour  $1 \leq r/a \leq 1.4$
- $m = 2$  pour  $1.4 \leq r/a \leq 1.5$
- $m = 0$  pour  $1.5 \leq r/a \leq 2.1$
- $m = 2$  et  $m = 3$  pour  $2.1 \leq r/a \leq 2.3$
- $m = 2, m = 3$  et  $m = 4$  pour  $2.3 \leq r/a \leq 2.4$
- $m = 0, m = 1, m = 2, m = 3$  et  $m = 4$  pour  $2.4 \leq r/a \leq 2.49$
- $m = 0$  pour  $2.49 \leq r/a \leq 3$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $3 \leq r/a \leq 3.3$
- $m = 1$  pour  $3.3 \leq r/a \leq 4.6$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $4.6 \leq r/a \leq 5$

De plus, la comparaison des figures 7.82 et 7.83 met en évidence un contenu spectral de la dynamique non linéaire de plus en plus dense, riche et oscillant dans la région  $1 \leq r/a \leq 3$  avec la confirmation que les composantes  $m = 0$  et  $m = 1$  s'étendent radialement de plus en plus loin dans la direction radiale (elles subsistent dans la zone potentielle jusqu'à  $3 \leq r/a \leq 5$ ). A l'inverse, la composante dominante  $m = 1$  du régime linéaire reste toujours localisée autour de  $0 \leq r/a \leq 3.4$ .

Après dix rotations du vortex, les figures 7.84 et 7.85 nous permettent raisonnablement de conclure sur la dynamique linéaire mais pas définitivement sur la dynamique non linéaire.

La figure 7.84 illustre que dans la perturbation infinitésimale, la composante  $m = 1$  est devenue prédominante à  $T = 10$  absolument partout, sans aucune exception. Ce fait confirme les

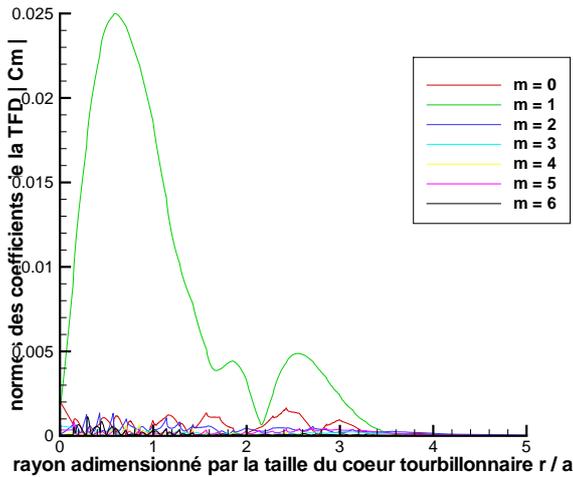


FIG. 7.84 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01 - Re = 1000$ ) à  $T = 10$ .

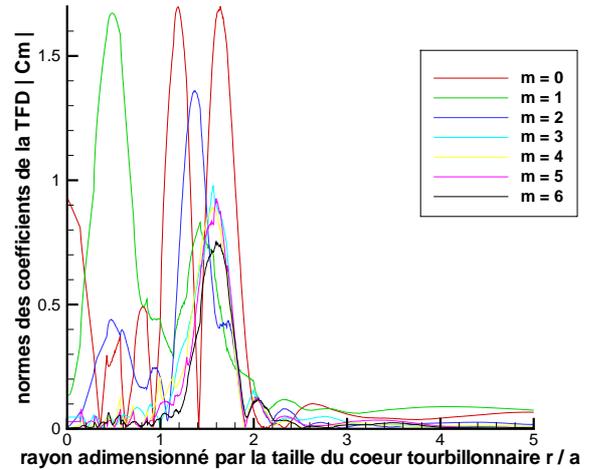


FIG. 7.85 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  de grande amplitude ( $\varepsilon = 0.5 - Re = 1000$ ) à  $T = 10$ .

observations faites sur les visualisations 3D des structures cohérentes aux figures 7.55, 7.57, 7.59 et 7.61, c'est à dire d'une dynamique linéaire déjà bien établie et régulière après un régime transitoire d'environ sept rotations du tourbillon et redevenue complètement "monochromatique" en terme de fréquence azimutale au bout de dix périodes de retournement du vortex : la perturbation est à nouveau exclusivement composée de modes hélicoïdaux, comme lors de l'initialisation sur la figure 7.63.

En ce qui concerne la perturbation de grande amplitude, on observe sur la figure 7.85 les alternances suivantes de composante(s) azimutale(s) dominante(s) :

- $m = 0$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.2$
- $m = 1$  pour  $0.2 \leq r/a \leq 1$
- $m = 0$  pour  $1 \leq r/a \leq 1.3$
- $m = 2$  pour  $1.3 \leq r/a \leq 1.5$
- $m = 0$  (avec des niveaux très substantiels et proches des différents  $m \neq 0$ ) pour  $1.5 \leq r/a \leq 1.96$
- $m = 1$  et  $m = 3$  pour  $1.96 \leq r/a \leq 2.04$
- $m = 1, m = 2, m = 3$  et  $m = 6$  pour  $2.04 \leq r/a \leq 2.16$
- $m = 1$  pour  $2.16 \leq r/a \leq 2.5$
- $m = 0$  pour  $2.5 \leq r/a \leq 2.8$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $2.8 \leq r/a \leq 3$
- $m = 1$  pour  $3 \leq r/a \leq 4.6$
- $m = 0$  et  $m = 1$  pour  $4.6 \leq r/a \leq 5$

Ainsi, la figure 7.85 rappelle à  $T = 10$  plusieurs des tendances notées sur les figures 7.81 à  $T = 8$  et 7.83 à  $T = 9$ , à savoir une très grande richesse dans la composition azimutale de la perturbation non linéaire, qui semble portée à s'amplifier encore au cours du temps. Il nous semble que la figure 7.85, en démontrant en particulier la présence de tous les  $m$  pour  $1.5 \leq r/a \leq 2$  (zone propice au développement de couches critiques), apporte un éclairage complémentaire sur la complexification radiale de la structure cohérente observée à la figure 7.62.

Par ailleurs, la comparaison des figures 7.84 et 7.85 indique qu'en dynamique non linéaire, le contenu spectral est encore très dense et étendu dans la direction radiale, mais avec un net

aplatissement des profils pour  $2 \leq r/a \leq 5$ ) par rapport aux oscillations remarquées sur les figures 7.81 à  $T = 8$  et 7.83 à  $T = 9$ . Quant à la dynamique linéaire, la composante dominante  $m = 1$  reste encore et toujours cantonnée à  $0 \leq r/a \leq 3.5$ .

## 7.4 Retour à la modélisation de l'éclatement tourbillonnaire au banc B20

Nous proposons ici des évaluations des paramètres déterminants pour nos calculs DNS dans notre modélisation des phénomènes du B20, en nous fondant sur des données issues des campagnes d'essais réalisés au banc B20. Nous passons brièvement en revue les différentes manières de quantifier ces grandeurs de référence, ainsi que les incertitudes et sources d'erreurs qui leur sont afférentes. En fonction de ces estimations, nous abordons les conséquences en terme de ressources de calcul avec notre code DNS et les nécessaires compromis pour les simulations numériques 3D instationnaires.

### 7.4.1 Estimation du nombre de Mach

Il existe au moins deux manières d'évaluer le nombre de Mach au banc d'essais B20, selon l'échelle de vitesse caractéristique utilisée. Pour celle-ci, nous avons le choix entre la vitesse de catapultage de la maquette  $U_0$  et le maximum de vitesse tangentielle  $V_{\theta}^{max}$ , à mesurer ou calculer sur l'un des deux tourbillons principaux contrarotatifs de sillage (cf. figure 7.86).

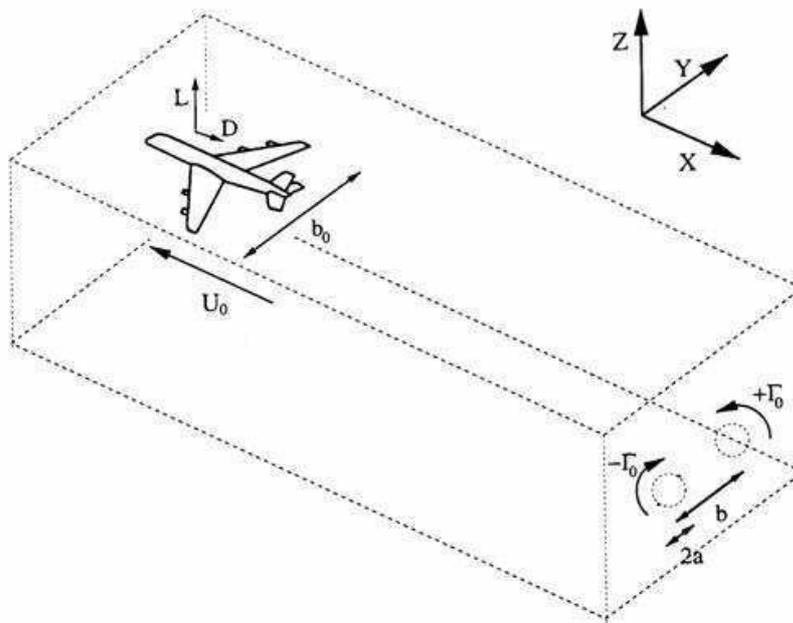


FIG. 7.86 – Schéma du sillage tourbillonnaire d'un avion de transport, après fusion des tourbillons corotatifs de volet et bout d'aile, et principaux paramètres de modélisation des deux tourbillons contrarotatifs en champs étendu et lointain.

La vitesse axiale de catapultage  $U_0$  est d'accès plus direct et simple dans les essais expérimentaux, alors que l'estimation de la vitesse azimutale  $V_{\theta_{max}}$  est nettement plus délicate mais aussi beaucoup plus pertinente pour la dynamique tourbillonnaire.

#### Estimation de $Ma$ à partir de $U_0$

Avec les valeurs nominales du programme AWIATOR de la figure 3.8 et en se fondant sur l'intervalle de vitesse de catapultage  $U_0$  ( $23.15 \text{ m/s} \leq U_0 \leq 23.70 \text{ m/s}$  avec  $c_{air} = 339.41 \text{ m/s}$  dans les CNTP), nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$0.068 \leq Ma(U_0) \leq 0.070 \quad (7.4)$$

#### Estimation de $Ma$ à partir de $V_{\theta_{max}}$

Nous évaluons la vitesse tangentielle maximale du tourbillon de sillage  $V_{\theta_{max}}$  par la relation :

$$V_{\theta_{max}} = \frac{\Gamma_0}{2 \pi a} \quad (7.5)$$

Ce calcul nécessite les valeurs de la circulation  $\Gamma_0$  et du rayon du coeur tourbillonnaire  $a$ , avec les notations de la figure 7.86.

Pour estimer  $\Gamma_0$  du tourbillon de bout d'aile se développant derrière une maquette d'avion de transport au banc B20, nous utilisons une équation de mécanique du vol employée par Coustols & al. [58], qui relie directement la circulation  $\Gamma_0$  à la vitesse de catapultage  $U_0$  :

$$\Gamma_0 = \frac{2 C_L S_0 U_0}{\pi b_0} \quad (7.6)$$

Enfin, on détermine approximativement la taille du coeur tourbillonnaire sur la figure 3.9, en se situant bien avant tout phénomène d'instabilité ou d'éclatement tourbillonnaire :

$$a \approx 0.0625 b_0 \quad (7.7)$$

Les équations 7.5, 7.6 et 7.7 conduisent finalement à :

$$V_{\theta_{max}} = \frac{C_L S_0 U_0}{0.0625 \pi^2 b_0^2} \quad (7.8)$$

Avec les valeurs nominales de la maquette A340 dans la configuration de référence du programme AWIATOR de la figure 3.8, nous prenons  $b_0 = 2.148 \text{ m}$  et  $S_0 = 0.496 \text{ m}^2$ . Les conditions de catapultage visent à réaliser un coefficient de portance  $C_L = 1.40$ , valeur qui est effectivement réalisée dans les essais retenus et présentés dans les campagnes III et IV du programme AWIATOR, dont les données PIV 2D sont analysées au chapitre 3.

Dans l'intervalle de vitesse de catapultage  $U_0$  du programme AWIATOR ( $23.15 \text{ m/s} \leq U_0 \leq 23.70 \text{ m/s}$ ) avec  $c_{air} = 339.41 \text{ m/s}$  dans les CNTP, et en gardant à l'esprit que la principale source d'incertitude repose sur l'évaluation du coeur tourbillonnaire (équation 7.7), nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$0.016 \leq Ma \left( V_{\theta_{max}} \right) \leq 0.018 \quad (7.9)$$

Le caractère fortement incompressible de l'écoulement réel est très pénalisant pour les calculs DNS 3D instationnaires avec notre code compressible FLUDILES en terme de temps de calcul car il rallonge les temps de restitution. En effet, pour assurer la stabilité de ce code qui utilise un schéma temporel explicite (Runge-Kutta d'ordre 3), le pas de temps adimensionnel  $dt$  de simulation doit respecter la condition

$$dt < 0.6 \frac{1}{1 + 1/Ma} dx \quad (7.10)$$

où  $dx$  désigne la plus petite taille de maille adimensionnelle utilisée dans la simulation. Cette dernière préconisation (inégalité 7.10) est issue des tests de stabilité du code FLUDILES réalisés pendant la thèse de Ferreira-Gago [106]. A maillage donné, on constate donc que le pas de temps doit être d'autant plus petit que le nombre de Mach à simuler est plus petit. Si on souhaite respecter la similitude en nombre de Mach dans un calcul DNS en passant de  $Ma = 0.1$  à  $Ma = 0.07$ , il faut diminuer le pas de temps de la simulation, ce qui conduit inévitablement à augmenter le nombre d'itérations instationnaires et rallonger le temps de restitution pour simuler la durée physique fixée au préalable (cf. paragraphe 7.4.3).

En raison de ces contingences numériques, tous les calculs DNS présentés dans cette thèse ont été réalisés à  $Ma = 0.1$ . Ce choix est un compromis visant à éviter d'éventuelles perturbations purement numériques (dues à l'utilisation d'un code de calcul compressible à trop bas nombre de Mach), tout en s'efforçant de rester "relativement proche" des valeurs réelles dans les conditions d'essais au banc B20 : nous avons conscience que  $Ma = 0.1$  retenu dans nos calculs DNS est certes avoisinant de l'estimation 7.4 ( $Ma(U_0) \approx 0.07$ ), mais tout de même éloigné d'un rapport cinq sur l'évaluation 7.9 ( $Ma(V_{\theta_{max}}) \approx 0.02$ ). Cette dernière valeur, très petite, est un inconvénient beaucoup trop désavantageux en terme de raccourcissement des pas de temps dans nos simulations instationnaires et physiquement, elle ne nous semble pas justifier un tel effort sur le plan numérique.

### 7.4.2 Estimation du nombre de Reynolds

Comme pour le calcul du nombre de Mach, nous disposons d'au moins deux façons d'estimer le nombre de Reynolds au banc d'essais B20, selon l'échelle de vitesse caractéristique utilisée, à savoir la vitesse de catapultage de la maquette  $U_0$  ou le maximum de vitesse tangentielle  $V_{\theta_{max}}$  des deux tourbillons contrarotatifs de sillage, ce qui revient à utiliser la circulation  $\Gamma_0$  (cf. figure 7.86).

#### Estimation de $Re$ à partir de $U_0$

En utilisant la taille du coeur tourbillonnaire  $a$  comme longueur de référence avec son estimation sur les données du B20 à l'équation 7.7, on obtient :

$$Re(U_0) = \frac{U_0 a}{\nu} \approx \frac{0.0625 U_0 b_0}{\nu_{air}} \quad (7.11)$$

Avec les valeurs nominales du programme AWIATOR de la figure 3.8 ( $b_0 = 2.148 \text{ m}$ ) et en se fondant sur l'intervalle de vitesse de catapultage  $U_0$  ( $23.15 \text{ m/s} \leq U_0 \leq 23.70 \text{ m/s}$  avec  $\nu_{air} = 1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  dans les CNTP), nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$199000 \leq Re(U_0) \leq 204000 \quad (7.12)$$

### Estimation de $Re$ à partir de $\Gamma_0$

A la manière de l'adimensionnement mis en oeuvre dans notre code DNS (cf. paragraphe 6.3.1), nous évaluons le nombre de Reynolds fondé sur la circulation du tourbillon de sillage par la relation :

$$Re(\Gamma_0) = \frac{\Gamma_0}{2 \pi \nu} \quad (7.13)$$

Pour calculer  $\Gamma_0$ , nous utilisons à nouveau la relation 7.6 employée par Coustols & al. [58], qui relie directement la circulation  $\Gamma_0$  à la vitesse de catapultage  $U_0$  et nous obtenons :

$$Re(\Gamma_0) = \frac{\Gamma_0}{2 \pi \nu} = \frac{2 C_L S_0 U_0}{\pi b_0} \frac{1}{2 \pi \nu} = \frac{C_L S_0 U_0}{\pi^2 b_0 \nu_{air}} \quad (7.14)$$

Avec les valeurs nominales de la maquette A340 dans la configuration de référence du programme AWIATOR de la figure 3.8, nous prenons  $b_0 = 2.148 \text{ m}$ ,  $S_0 = 0.496 \text{ m}^2$  et  $C_L = 1.40$ . Dans l'intervalle de vitesse de catapultage  $U_0$  du programme AWIATOR ( $23.15 \text{ m/s} \leq U_0 \leq 23.70 \text{ m/s}$ ) avec  $\nu_{air} = 1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  dans les CNTP, nous aboutissons à l'estimation suivante :

$$48000 \leq Re(\Gamma_0) \leq 50000 \quad (7.15)$$

#### 7.4.3 Estimation de la durée physique à simuler numériquement

La prévision a priori de la durée physique à simuler dans un calcul DNS est une question très délicate à plus d'un titre :

- mathématiquement, elle dépend essentiellement du rapport d'aspect  $a/b$ , comme nous allons le voir ci-dessous
- physiquement, elle est déterminée par la distance que le front d'onde de la perturbation doit parcourir le long du tourbillon (end-effects) pour dépasser un régime transitoire puis observer un phénomène de type éclatement tourbillonnaire (vortex bursting).
- numériquement, elle peut rapidement devenir très lourde de conséquences sur les ressources de calcul nécessaires, d'une part par les maillages à utiliser et par voie de conséquence la mémoire de calcul (nous avons vu aux figures 6.39 et 6.40 que les vitesses de propagation des ondes de Kelvin dimensionnent directement l'extension le long du vortex des domaines 3D de calcul), d'autre part par le temps de restitution du calcul car la durée physique à simuler impose de facto le nombre d'itérations instationnaires des simulations DNS).

D'un point de vue plus pratique, nous proposons ici quelques calculs à partir des données du banc B20, en faisant le lien entre le rapport d'aspect  $a/b$  et la distance parcourue par la maquette au moment de l'éclatement tourbillonnaire pour en déduire des estimations de la durée physique à simuler en nombre de temps de retournement du tourbillon de Lamb-Oseen. Dans cette démarche, nous avons également comparé nos évaluations issues du B20 aux résultats de l'étude phénoménologique et théorique du sillage d'un avion réalisée par Fabre [99] dans le premier chapitre de sa thèse.

Pour mesurer la distance  $b$  séparant les centres des deux tourbillons contrarotatifs, nous utilisons les deux points supérieurs de la figure 3.41, afin de se positionner bien avant l'éclatement tourbillonnaire. On trouve ainsi :

- pour la phase III (carré rouge) :  $b/b_0 \approx 2 \times 0.365 = 0.73$
- pour la phase IV (carré vert) :  $b/b_0 \approx 2 \times 0.395 = 0.79$

Ainsi, on constate sur la configuration de référence du programme AWIATOR, que les conditions d'équilibrage du vol ("trimmed conditions") de la maquette au B20 respectent avec une très bonne approximation - en particulier sur la phase IV - la relation suivante, synonyme d'une loi de chargement elliptique de l'aile :

$$\frac{b}{b_0} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \quad (7.16)$$

Nous retenons donc la relation 7.16 dans la suite de notre démonstration.

Par ailleurs, nous avons vu que les données du B20 nous ont conduit à l'approximation 7.7 sur la taille du coeur tourbillonnaire :  $a \approx 0.0625 b_0$ .

Nous obtenons finalement l'estimation suivante du rapport d'aspect  $\alpha = a/b$  sur la configuration de base des essais au B20 :

$$\alpha = \frac{a}{b} \approx \frac{0.0625 b_0}{\frac{\pi}{4} b_0} = \frac{1}{4 \pi} \approx 0.08 \quad (7.17)$$

Nous constatons que notre estimation 7.17 sur les données B20 conduit à une valeur légèrement inférieure à celle calculée par Fabre [99] ( $\alpha = \exp\left(\frac{1-\pi^2}{4}\right) \approx 0.1$ ), en s'appuyant sur la théorie de la ligne portante de Prandtl appliquée à une aile elliptique.

A ce stade de notre raisonnement, nous introduisons la période de retournement du vortex  $T_0 = 2 \pi / \Omega_0$  comme échelle de temps pour adimensionner le temps  $t$  correspondant à la distance  $X(t)$  parcourue par la maquette de la manière suivante :

$$t = T_0 \times t^* \quad (7.18)$$

Dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen, on a vu que  $T_0 = 4 \pi^2 a^2 / \Gamma_0$  et on peut alors exprimer  $T_0$  en fonction des paramètres des essais au B20 en remplaçant  $a = \alpha b$  par l'équation 7.16 et  $\Gamma_0$  à l'aide de la relation 7.6 :

$$T_0 = 4 \pi^2 \frac{a^2}{\Gamma_0} = 4 \pi^2 \frac{\left(\alpha \frac{\pi}{4} b_0\right)^2}{\frac{2 C_L S_0 U_0}{\pi b_0}} = \frac{\alpha^2 \pi^5 b_0^3}{8 C_L S_0 U_0} \quad (7.19)$$

La distance parcourue par la maquette, normalisée par son envergure  $b_0$ , devient dans ces conditions :

$$\frac{X(t)}{b_0} = \frac{U_0 t}{b_0} = \frac{U_0 T_0}{b_0} t^* = X^*(t^*) \quad (7.20)$$

En substituant  $T_0$  par l'expression 7.19 dans la relation 7.20, on obtient finalement l'équation suivante :

$$X^*(t^*) = \frac{U_0}{b_0} \frac{\alpha^2 \pi^5 b_0^3}{8 C_L S_0 U_0} t^* = \frac{\alpha^2 \pi^5 b_0^2}{8 C_L S_0} t^* \quad (7.21)$$

ou de manière équivalente :

$$t^*(X^*) = \frac{8 C_L S_0}{\alpha^2 \pi^5 b_0^2} X^* \quad (7.22)$$

La connaissance du  $X^*$  de l'éclatement tourbillonnaire au banc d'essais B20 permet, via l'équation 7.22, de déterminer le temps correspondant  $t^*$  en nombre de rotations du vortex,

## 7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS

c'est à dire une estimation de la durée physique à simuler dans le cadre de notre modélisation avec l'adimensionnement utilisé pour notre code DNS. Avec  $\alpha \approx 0.08$  (cf. évaluation 7.17) et les valeurs nominales de la maquette A340 dans la configuration de référence du programme AWIA-TOR (cf. figure 3.8 :  $b_0 = 2.148$  m et  $S_0 = 0.496$  m<sup>2</sup>), nous obtenons les résultats suivants :

- la figure 3.15, relative à la phase III, situe l'éclatement tourbillonnaire dans l'encadrement  $20.9 \leq X^* \leq 24.2$ , ce qui équivaut par la relation 7.22 à  $12.8 \leq t^* \leq 14.9$
- la figure 3.28, relative à la phase IV, situe l'éclatement tourbillonnaire dans l'encadrement  $20.7 \leq X^* \leq 23.9$ , ce qui équivaut par la relation 7.22 à  $12.7 \leq t^* \leq 14.7$ .

## 7.5 Réponse non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen à une perturbation hélicoïdale infinitésimale à haut nombre de Reynolds

Dans cette partie, nous présentons un nouveau calcul DNS fondé sur les principales conclusions que nous avons obtenues aux paragraphes 7.3 et 7.4. Nous avons décidé de faire une simulation DNS sur notre perturbation  $m = 1$  avec une amplitude initiale infinitésimale et à haut nombre de Reynolds. Les valeurs des paramètres répondent à plusieurs objectifs :

(1) Le choix de la géométrie azimutale de la perturbation initiale ( $m = 1$ ) est motivé par des observations expérimentales, d'une part réalisées en bassin hydrodynamique au DLR (WSG Göttingen) et d'autre part dans la soufflerie à catapulte B20 de l'ONERA Lille. Les visualisations d'end-effets réalisées par Bao & al. [11, 12] mettent en évidence un enroulement sur elle-même de la perturbation propagative, suggérant une géométrie azimutale  $m \neq 0$ <sup>1</sup>. De plus, le post-traitement des mesures PIV 2D au chapitre 3 laisse entrevoir dans l'analyse spectrale des données correspondant aux instants précédant l'éclatement tourbillonnaire des traces de perturbations non axisymétriques, en plus d'une composante axisymétrique dominante.

(2) L'amplitude initiale de perturbation ( $\varepsilon = 0.01$ ) a pour but de prémunir l'évolution instationnaire de notre perturbation hélicoïdale contre toute autre composante azimutale, en particulier axisymétrique (cf. paragraphe 7.3.2). En effet, il est plus facile d'interpréter physiquement une perturbation hélicoïdale infinitésimale à l'aide de la classification du paragraphe 6.2.4, car son comportement n'est pas "pollué" par les familles de modes provenant des autres géométries azimutales.

(3) Le choix du nombre de Reynolds ( $Re = 100000$ ) est piloté par nos estimations du paragraphe 7.4, dans le but d'être relativement représentatif du banc d'essai B20. Nous avons fait un compromis entre  $Re \approx 50000$  (équation 7.15) et  $Re \approx 200000$  (équation 7.12), en nous rapprochant de préférence de l'estimation fondée sur la circulation du vortex. Pour capter les phénomènes de la dynamique d'un tourbillon de sillage, il nous semble que le nombre de Reynolds est le premier des paramètres adimensionnels sur lequel on doit tendre vers la similitude entre l'expérience et la simulation numérique.

---

<sup>1</sup>communications personnelles avec Thomas GERZ (DLR Oberpfaffenhofen)

### 7.5.1 Comparaison des dynamiques à $Re = 1000$ et $Re = 100000$ de la perturbation hélicoïdale infinitésimale

Nous cherchons ici à comprendre quels sont les effets de la diffusion visqueuse sur les ondes de Kelvin hélicoïdales, en comparant deux résolutions DNS à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 1$ , pour une amplitude donnée et infinitésimale de la perturbation ( $\varepsilon = 0.01$ ).

perturbation initiale	longueur (axe du vortex)	section transverse (perpendiculaire au vortex)	nombre total de points	dt adim	durée simulée
$m = 1$	$[-25 r_c; 25 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	8 M	6.8e-3	10 $T_0$
$m = 1$	$[-15 r_c; 15 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	13.4 M	3.7e-3	6 $T_0$

FIG. 7.87 – Raffinement de maillage des calculs DNS pour l’augmentation du nombre de Reynolds jusqu’à  $Re = 100000$  sur la perturbation  $m = 1$  ( $r_c$  représente la taille du coeur tourbillonnaire et  $T_0$  la période de retournement du vortex).

Sur la figure 7.87, le second maillage présente un raffinement de l’ordre de 43% par rapport au premier, puisqu’on discrétise le coeur tourbillonnaire par dix points au lieu de sept.

D’autre part, étant donné la difficulté du problème à résoudre numériquement pour  $Re = 100000$ , nous avons choisi de réduire sensiblement le pas de temps (d’environ 25%) afin d’éviter toute instabilité du schéma explicite d’intégration temporelle. C’est pourquoi nous avons pris  $dt = 0.0037$ , alors que l’équation 7.10 permettrait a priori d’envisager un pas de temps un peu plus grand (4.9e-3 avec cette taille de maille).

L’augmentation du nombre de points d’une part, et la diminution du pas de temps d’autre part, expliquent le raccourcissement de la durée physique que nous avons pu simuler : six temps de retournement du tourbillon, à la place de dix rotations du vortex avec le premier maillage (que nous qualifions de ”standard” dans ce qui suit).

Les courbes de la figure 7.88 montrent que notre maillage raffiné, décrit à la figure 7.87, améliore visiblement la convergence de notre calcul DNS vers la solution obtenue par Fabre [99] en théorie de stabilité linéaire. Cela nous indique que pour cette configuration ( $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  et  $Re = 100000$ ), il faudrait raffiner encore le maillage pour tenter d’obtenir une convergence parfaite de la DNS sur la stabilité linéaire, si tant est réellement le cas.

Numériquement, le fait que la courbe verte s’intercale entre la courbe bleue (fournie par le maillage standard qui nous a permis de réaliser au chapitre 6 la convergence de la DNS sur la stabilité linéaire à  $Re = 100$  et  $Re = 1000$ ) et la courbe rouge de la stabilité linéaire s’explique par le fait que le maillage ”absorbe” artificiellement de l’énergie via la méthode numérique de résolution (schéma hermitien - compact centré d’ordre 6 agrémenté de la méthode de stabilisation par filtrage spatial 3D du paragraphe 5.3.1). Par extension, notre dernier calcul à haut nombre de Reynolds non totalement convergé s’apparente d’une certaine manière à un calcul de type ”MILES” comme ceux réalisés par exemple au LMFA de Lyon <sup>2</sup>, plus qu’à une véritable simulation LES car dans toute notre étude, nous avons fait le choix de ne pas utiliser de modèle de sous maille.

<sup>2</sup>communications personnelles avec Marc TERRACOL (ONERA/DSNA/ETRI)

## 7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS

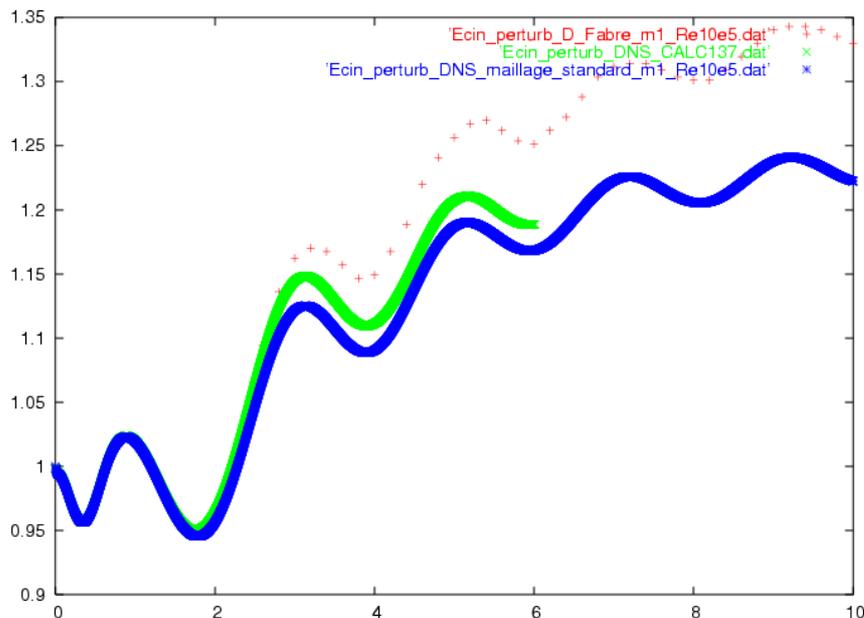


FIG. 7.88 – Test de convergence pour  $Re=100000$  : comparaison entre le maillage standard et le maillage raffiné.

Sur les figures 7.89 à 7.100, nous illustrons le comportement de la vorticité axiale afin de mettre en évidence l'effet du nombre de Reynolds sur la dynamique des structures cohérentes, dans le cadre de la résolution pleinement non linéaire des équations de Navier-Stokes complètes, par la DNS. Plus précisément, les figures 7.89 à 7.100 représentent l'évolution au cours du temps de la perturbation en traçant deux isosurfaces 3D correspondant à  $\pm 10\%$  du niveau maximum de la perturbation initiale de vorticité axiale, comme nous l'avons fait au paragraphe 7.3.1.

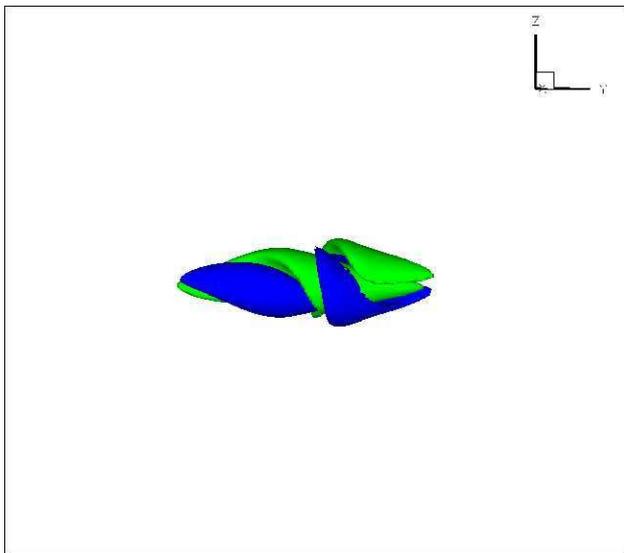


FIG. 7.89 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=1$  (maillage à 8 M points)

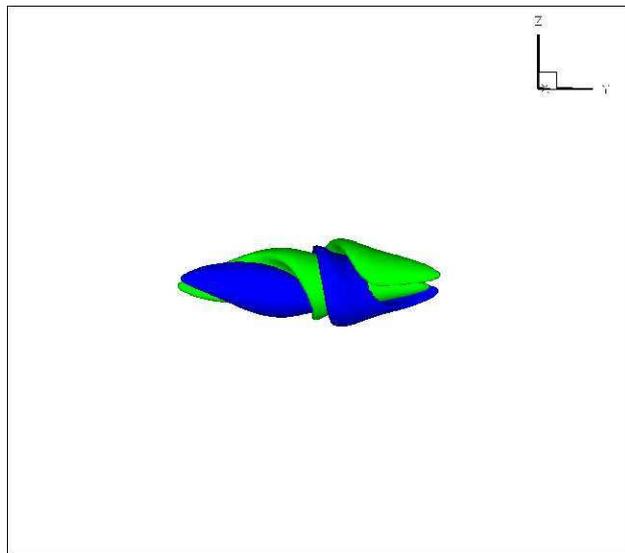


FIG. 7.90 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=1$  (maillage à 13.4 M points)

Sur les figures 7.89 et 7.90 correspondant au premier temps de retournement du tourbillon, on n'observe visuellement aucune différence sur la structure entre  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ .

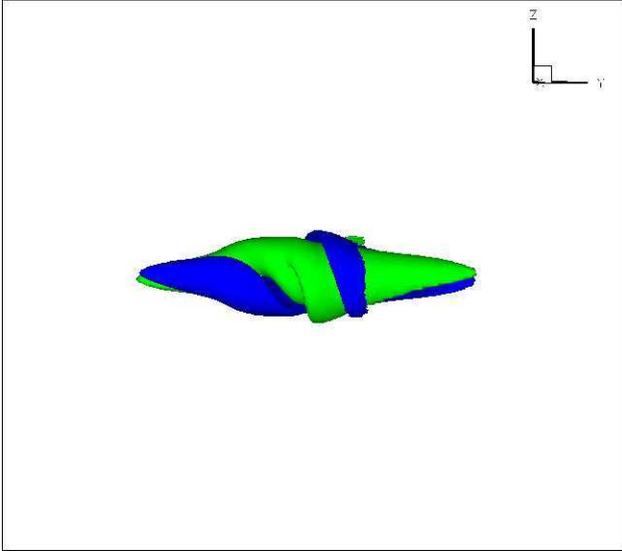


FIG. 7.91 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=2$  (maillage à 8 M points)

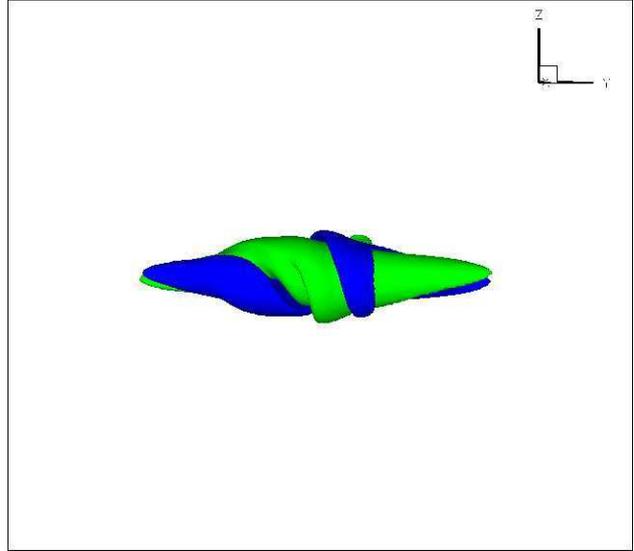


FIG. 7.92 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=2$  (maillage à 13.4 M points)

Après deux rotations du vortex, la comparaison des figures 7.91 et 7.92 révèle de très légères différences, prémices des effets du nombre de Reynolds. En particulier, on note à  $Re = 100000$  le début d'un enroulement un peu plus prononcé de la perturbation dans la partie centrale de la colonne tourbillonnaire. Par contre, on ne constate aucun étirement de la structure hydrodynamique dans la direction axiale du vortex.

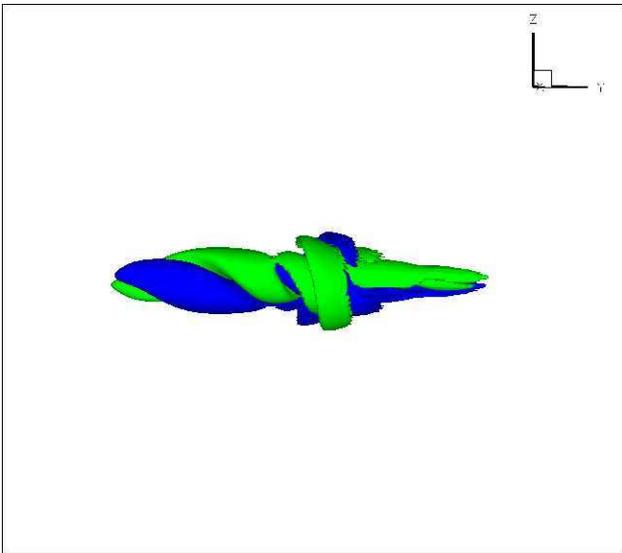


FIG. 7.93 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=3$  (maillage à 8 M points)

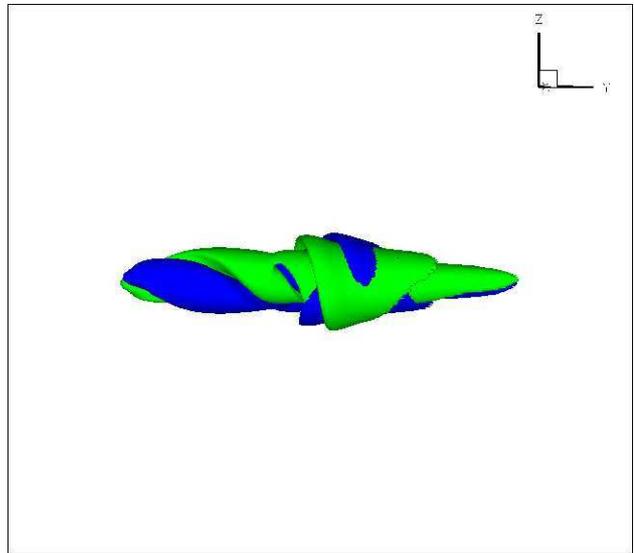


FIG. 7.94 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=3$  (maillage à 13.4 M points)

Au bout de trois périodes de retournement du tourbillon, on constate de très nettes différences entre les figures 7.93 et 7.94. Les distinctions les plus importantes entre les deux perturbations apparaissent clairement dans la localisation initiale de la perturbation ( $y = 0$ ) et la partie droite du vortex ( $y > 0$ ), car le front d'onde à gauche - formé d'une double hélice de vorticit e composée de modes h elicoïdaux de d eplacement (famille "D") - reste rigoureusement inchangée. En effet, la

7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS

figure 7.93 montre que les modes du paquet d'ondes initial qui se propagent vers la droite (essentiellement les modes corotatifs de coeur, dits de la famille "C") commencent déjà à disparaître à  $T = 3$ , en raison d'un fort amortissement par diffusion visqueuse à  $Re = 1000$ . A  $Re = 100000$ , ces mêmes ondes de la famille "C" survivent sur la figure 7.94 et persistent beaucoup mieux car en régime bien moins visqueux. De plus, on note des différences au niveau de l'enroulement de la perturbation autour de l'origine  $y = 0$ , ce qui s'explique par une modification du comportement des modes hélicoïdaux de la famille "L" (parmi lesquels les modes singuliers de couche critique) lorsqu'ils passent de  $Re = 1000$  à  $Re = 100000$ . Enfin, on remarque, dans une moindre mesure, un léger étirement axial de la perturbation à  $Re = 100000$ , exclusivement vers la droite du tourbillon.

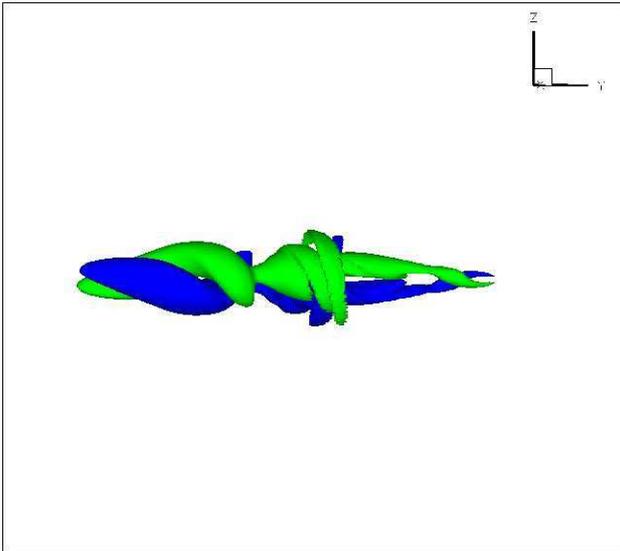


FIG. 7.95 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=4$  (maillage à 8 M points)

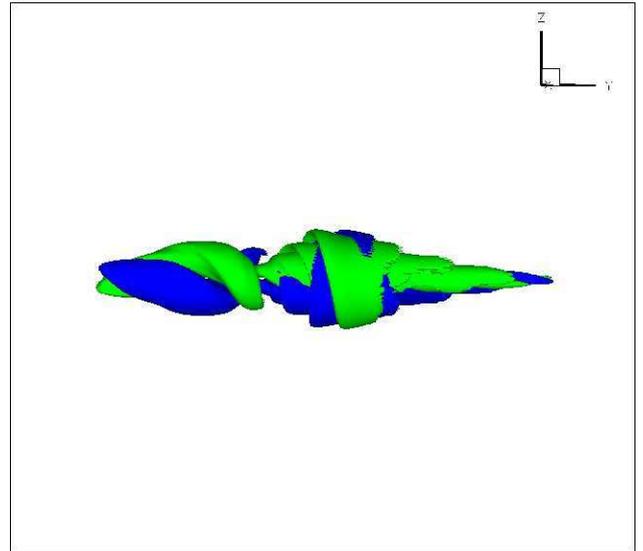


FIG. 7.96 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=4$  (maillage à 13.4 M points)

Après quatre rotations du vortex, la comparaison des figures 7.95 et 7.96 confirme l'amplification des différences décrites à  $T = 3$ , leur seul point commun restant la double hélice de vorticité contrarotative qui se propage vers la gauche (mode "D"). En particulier, on observe sur la figure 7.95 que la structure hydrodynamique de la perturbation à  $Re = 1000$  s'est très nettement "décantée" et clairsemée car les effets de l'amortissement par diffusion visqueuse deviennent plus perceptibles à  $T = 4$ . Tout au contraire, la figure 7.96 met en évidence à  $Re = 100000$  une complexification et une densification des structures cohérentes, rendues possibles par une diffusion visqueuse bien moindre. On distingue tout particulièrement la genèse d'une structure en forme de spirale torsadée, s'enroulant dans le même sens de rotation que celui du tourbillon porteur : celle-ci est un mélange compliqué d'ondes hélicoïdales de la classe "C" (corotatives), mais aussi de modes des familles "L" et "V",   en juger par son étendue dans la direction radiale. Juste à gauche de cette spirale torsadée, on note également sur la figure 7.96 un enroulement beaucoup plus resserré de la perturbation à  $Re = 100000$ , vraisemblablement dû à un paquet d'ondes rétrogrades (voire même contrarotatives pour les petites longueurs d'onde) de la famille "L".

Les figures 7.97 et 7.98 au bout de cinq périodes de retournement du tourbillon confirment en grande partie les tendances décrites à  $T = 4$ ,   quelques nuances près. Le schéma 7.97 montre effectivement que la structure de la perturbation à  $Re = 1000$  continue de se simplifier, toujours par amortissement et diffusion visqueuse, comme on peut le constater en comparant les figures

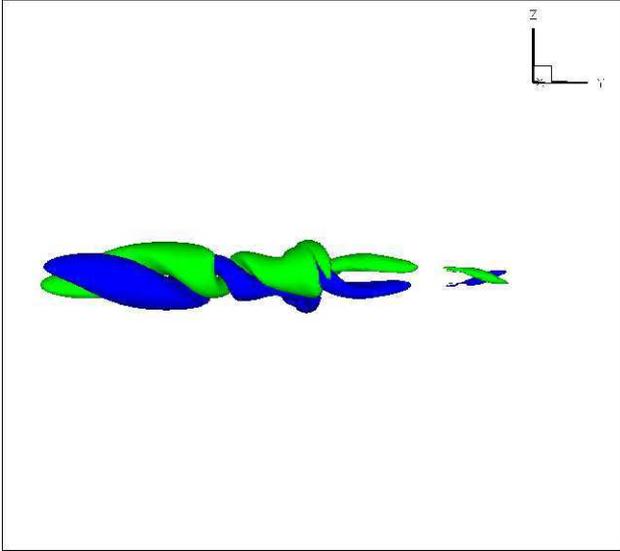


FIG. 7.97 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=5$  (maillage à 8 M points)

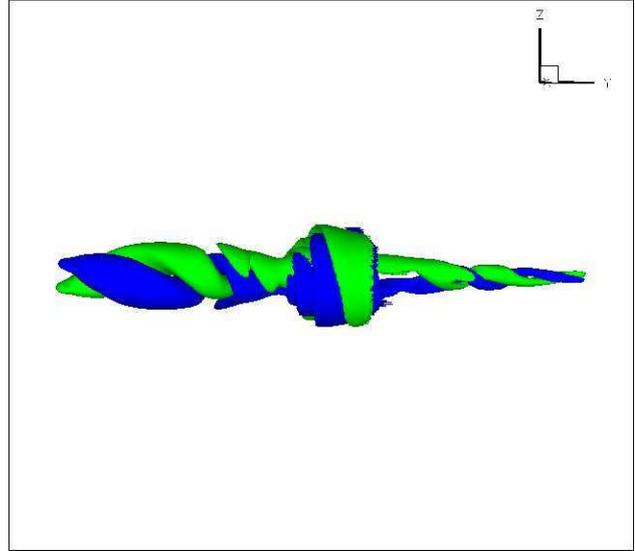


FIG. 7.98 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=5$  (maillage à 13.4 M points)

7.95 et 7.97, respectivement à  $T = 4$  et  $T = 5$ . Visuellement, le schéma 7.97 indique que pour la première fois, la structure cohérente de la perturbation à  $Re = 1000$  se disloque en deux. En fait, à ce stade de son évolution instationnaire, on peut déjà interpréter la structure de la perturbation à  $Re = 1000$  en la décomposant en trois éléments (et non pas deux seulement) :

- la double hélice de vorticité contrarotative (modes "D"), donnant toujours le front d'onde à gauche
- une structure beaucoup plus complexe dans la zone  $-5 \leq y/a \leq 0$ , qui semble rétrograde et constituée de modes hélicoïdaux de la famille "L" (couche critique)
- un paquet corotatif d'ondes hélicoïdales de la classe "C", qui se propage vers la droite du tourbillon et qui s'est déjà scindé à  $T = 5$  en deux paquets, situés approximativement en  $0 \leq y/a \leq 4.3$  et  $7 \leq y/a \leq 8.5$ , déterminant ainsi le front d'onde à droite.

La structure cohérente de la perturbation à  $Re = 100000$ , représentée sur la figure 7.98, est plus compacte que pour le cas  $Re = 1000$  et peut être décomposée en quatre éléments hydrodynamiques :

- la double hélice de vorticité contrarotative (modes "D"), donnant toujours le front d'onde à gauche
- deux structures distinctes de couche critique, situées respectivement en  $-2.6 \leq y/a \leq -1$  et  $-1 \leq y/a \leq 1.4$  : ces deux couches critiques sont beaucoup plus complexes que celle observée à  $Re = 1000$ , par un mécanisme d'enroulement et filamentation nettement plus prononcé à  $Re = 100000$ .
- le paquet corotatif d'ondes hélicoïdales de la classe "C", qui se propage vers la droite du tourbillon reste d'un seul tenant pour  $Re = 100000$     $T = 5$ , situé approximativement en  $1.4 \leq y/a \leq 11.47$  : ce paquet d'ondes "C" est fortement étiré et on note que la propagation du front d'onde à droite est sensiblement plus rapide qu'   $Re = 1000$ .

Par ailleurs, on observe sur la dynamique à  $Re = 100000$  un fait important qui se produit entre  $T = 4$  et  $T = 5$  : la comparaison des figures 7.96 et 7.98 montre une brusque dislocation de la spirale torsadée (apparue à  $T = 3$  sur la figure 7.94, puis développée à  $T = 4$  sur la figure 7.96), qui fait place à  $T = 5$  aux deux structures que nous venons de décrire dans la région  $y \geq 0$  de la figure 7.98, c'est à dire une couche critique non propagative et le paquet d'ondes "C" qui se propage vers la droite du tourbillon.

**7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS**

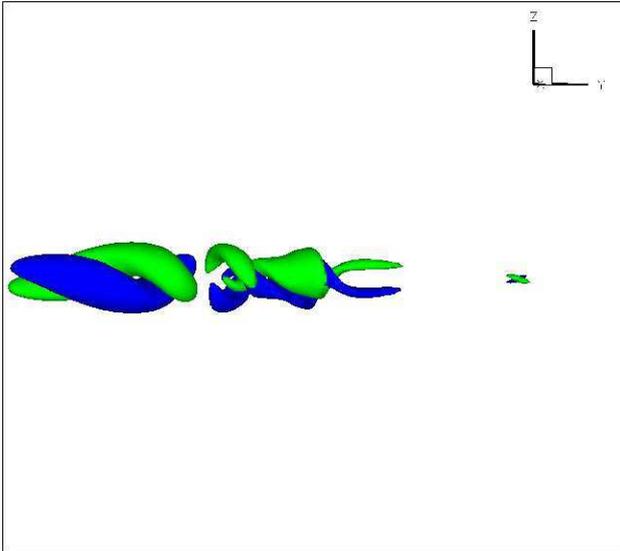


FIG. 7.99 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=1000$  en régime linéaire  $T=6$  (maillage à 8 M points)

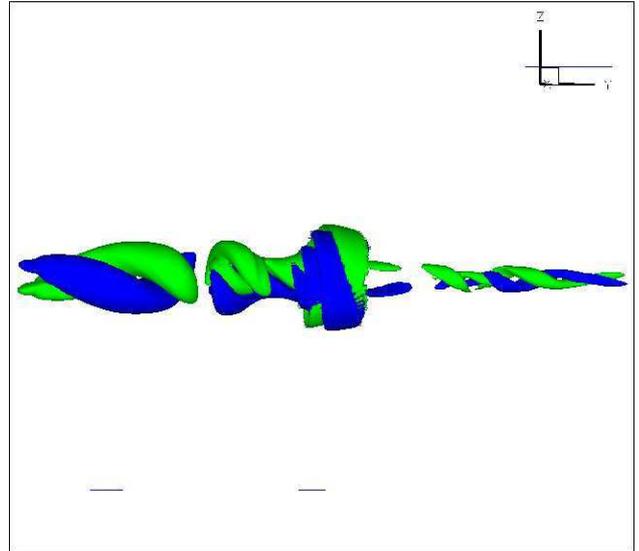


FIG. 7.100 – Perturbation  $m=1$  à  $Re=100000$  en régime linéaire  $T=6$  (maillage à 13.4 M points)

Après six rotations du vortex, la comparaison des figures 7.99 et 7.100 confirme l’amplification des différences décrites à  $T = 5$  entre  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ , leur seul point commun restant la double hélice de vorticité contrarotative qui se propage vers la gauche (mode "D"). En ce qui concerne la dynamique à  $Re = 1000$  exposée au schéma 7.99, le lecteur pourra se référer aux résultats du paragraphe 6.3.3 qui fournit une analyse plus détaillée de la perturbation hélicoïdale infinitésimale en régime visqueux (cf. les figures 6.47, 6.48, 6.49, 6.50).

Pour ce qui est de la perturbation à  $Re = 100000$ , la figure 7.100 à  $T = 6$  corrobore très nettement les tendances observées à  $T = 5$  sur le schéma 7.98 : la perturbation à  $Re = 100000$  exhibe bien quatre éléments hydrodynamiques, comme décrits à  $T = 5$  sur la figure 7.98, mais mieux discernables du fait de l’apparition à  $T = 6$  de deux brisures dans la structure du schéma 7.100. En effet, la première cassure à  $-3.2 \leq y/a \leq -2.9$  montre comment la double hélice contrarotative de vorticité (front d’onde à gauche) se déconnecte de la première structure en couche critique (située en  $-2.9 \leq y/a \leq -1$ ), et la seconde fragmentation autour de  $2.2 \leq y/a \leq 2.6$  illustre comment la deuxième structure en couche critique (localisée en  $-1 \leq y/a \leq 1$ ) se détache du paquet d’ondes hélicoïdales de la classe "C" (front d’onde à droite).

Pour finir, la disparition (amorcée à  $T = 5$ ) de la structure en forme de spirale torsadée à  $Re = 100000$  est confirmée à  $T = 6$  et sera discutée d’un double point de vue, physique et théorique, au paragraphe 7.6.2, en faisant appel à la notion délicate de "quasi-mode".

**7.5.2 Contenu spectral de la perturbation hélicoïdale infinitésimale à bas et haut nombres de Reynolds**

En suivant la même démarche que celle faite au paragraphe 7.3.2, et pour caractériser les différentes composantes en nombre d’onde azimutal présentes dans la perturbation, nous effectuons une analyse de type TFD dans la direction azimutale. Dans cette partie, notre nalayse TFD porte uniquement sur le plan  $y = 0$ , lieu où est initiée la perturbation, pour mieux appréhender le comportement des modes constituant la seconde structure en couche critique que nous avons décrite au paragraphe prédédent, notamment sur les figures 7.98 et 7.100. Nous savons en effet

depuis le chapitre 6 qu'une des principales propriétés des modes de couche critique est de ne pas (ou très peu) se propager le long de l'axe du tourbillon.

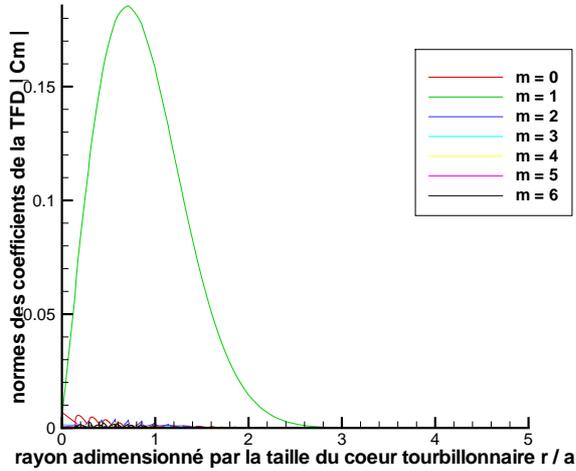


FIG. 7.101 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 0$  dans le cas  $Re = 1000$ .

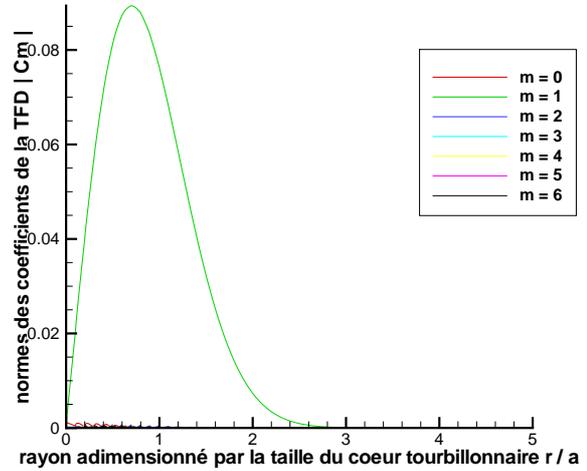


FIG. 7.102 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 0$  dans le cas  $Re = 100000$ .

Les figures 7.101 et 7.102 montrent que l'initialisation de la perturbation hélicoïdale est tout naturellement dominée par la composante  $m = 1$ , avec les courbes  $|C_1(r)|$  de ces deux graphiques qui sont d'allure extrêmement similaire, en forme de cloche. Nous avons déjà expliqué de manière analytique ces résultats au paragraphe 7.3.2, à l'aide de l'équation 7.3 et de la figure 7.65.

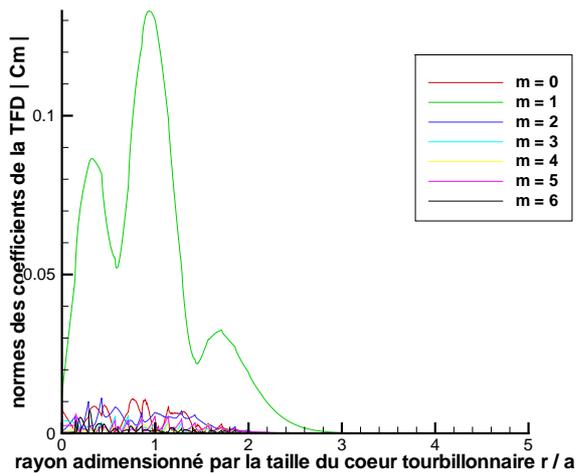


FIG. 7.103 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 1$  dans le cas  $Re = 1000$ .

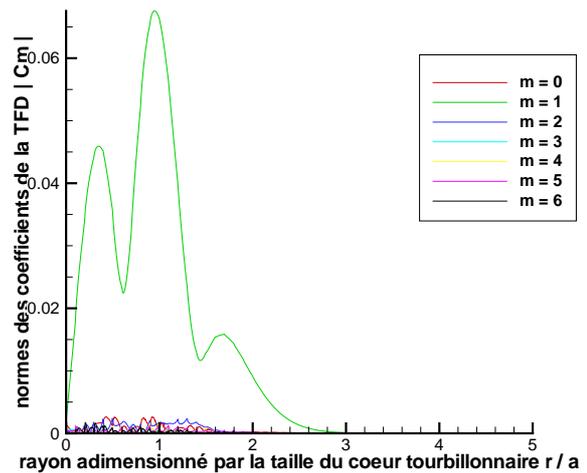


FIG. 7.104 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 1$  dans le cas  $Re = 100000$ .

Les figures 7.103 et 7.104 indiquent toujours une très nette prédominance de la composante  $m = 1$  de la perturbation au bout d'un temps de retournement du vortex, avec des profils

### 7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS

extrêmement semblables des deux courbes  $|C_1(r)|$  à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ . Ces très grandes similitudes et cette prééminence de la composante hélicoïdale confortent a posteriori les observations réalisées sur les figures 7.89 et 7.90 : au bout d'une rotation du vortex, la perturbation  $m = 1$  a, d'une part, pleinement conservé sa géométrie initiale et d'autre part, elle s'avère insensible à l'effet de l'augmentation du nombre de Reynolds. A cet instant  $T = 1$ , on note également, et de manière assez paradoxale, que l'apparition des autres composantes azimutales est un peu plus prononcée sur la figure 7.103 à  $Re = 1000$  qu'à  $Re = 100000$  sur la figure 7.104. En fait, les niveaux particulièrement bas des courbes  $|C_m(r)|$  pour  $m \neq 1$ , par rapport au tracé  $|C_1(r)|$ , indiquent à l'évidence qu'il s'agit de toute façon et dans les deux cas de bruit numérique.

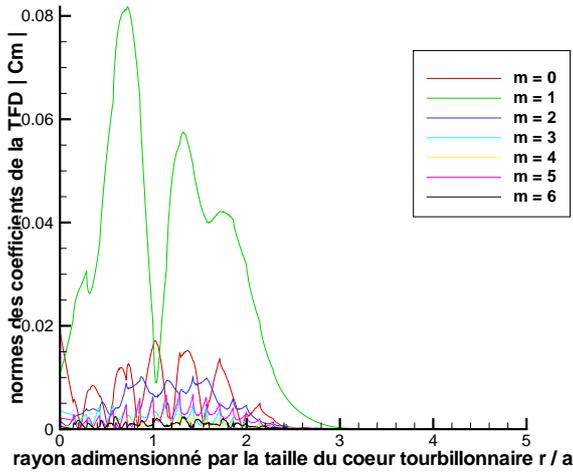


FIG. 7.105 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 2$  dans le cas  $Re = 1000$ .

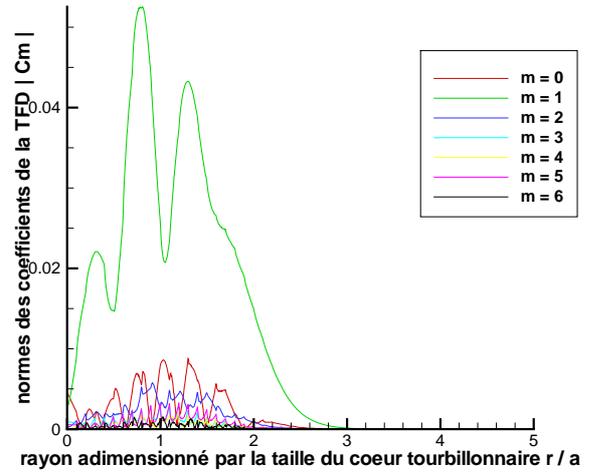


FIG. 7.106 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 2$  dans le cas  $Re = 100000$ .

Les figures 7.105 et 7.106 montrent encore une large prépondérance de la composante  $m = 1$  de la perturbation après deux rotations du vortex, sauf de manière très localisée au centre du tourbillon ( $|C_0| > |C_1|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.06$  à  $Re = 1000$  et  $|C_0| > |C_1|$  pour  $0 \leq r/a \leq 0.01$  à  $Re = 100000$ ). Les profils des deux courbes  $|C_1(r)|$  à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$  sont une nouvelle fois très semblables, à l'exception d'un intervalle extrêmement resserré au niveau du coeur tourbillonnaire, confirmant là encore a posteriori les conclusions tirées des figures 7.91 et 7.92 : après deux retournements du tourbillon, la perturbation  $m = 1$  est quasiment inchangée entre  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ . En effet, la seule différence consiste en un soudain et très bref effondrement de la composante  $m = 1$  à  $Re = 1000$  ( $|C_0| > |C_1|$  pour  $1 \leq r/a \leq 1.08$  sur le graphique 7.105), alors que nous observons une baisse beaucoup moins importante de la composante  $m = 1$  à  $Re = 100000$  ( $|C_0| < |C_1|$  pour  $0.01 \leq r/a \leq 3$  sur le graphique 7.106).

Les figures 7.107 et 7.108 mettent véritablement en évidence les premiers changements importants dans la composition azimutale de la perturbation au bout de la troisième période de retournement du tourbillon, ce qui est tout à fait conforme avec les observations "macroscopiques" réalisées sur les structures cohérentes des figures 7.93 et 7.94. Les graphiques 7.107 et 7.108 montrent globalement une prédominance de la composante  $m = 1$  dans les deux cas, mais on remarque que l'allure de la courbe  $|C_1(r)|$  est largement modifiée de  $Re = 1000$  à  $Re = 100000$ . On note en particulier que l'énergie de la perturbation due à la contribution  $m = 1$ , matérialisée par l'aire sous la courbe  $|C_1|$ , est majoritairement concentrée dans le coeur

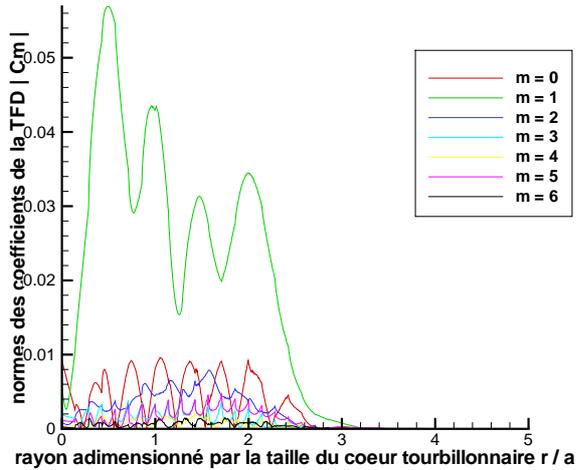


FIG. 7.107 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 3$  dans le cas  $Re = 1000$ .

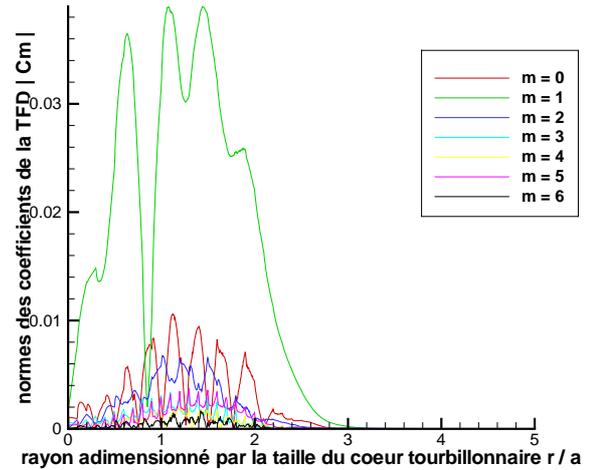


FIG. 7.108 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 3$  dans le cas  $Re = 100000$ .

tourbillonnaire à  $Re = 1000$ , alors que cette même énergie de nature hélicoïdale se déplace très nettement à l'extérieur du vortex dans le cas  $Re = 100000$ . Cette constatation est matérialisée par le soudain effondrement de la composante  $m = 1$  au niveau de la périphérie intérieure du coeur tourbillonnaire à  $Re = 100000$  ( $|C_0| > |C_1|$  pour  $0.8 \leq r/a \leq 0.9$  sur le graphique 7.108). Ce phénomène de transfert de l'énergie hélicoïdale du coeur tourbillonnaire à  $Re = 1000$  vers la zone potentielle à  $Re = 100000$  s'interprète physiquement comme un effet des couches critiques : les modes hélicoïdaux singuliers de la famille "L" se manifestent par la création de bras spiraux de vorticit   à l'ext  rieur du noyau du tourbillon qui sont porteurs d'  nergie, malgr   leur amortissement par filamentation. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 7.6.2.

Dans une moindre mesure, la comparaison des figures 7.107 et 7.108 nous permettent de noter qu'   partir de  $T = 3$ , les contributions des composantes  $m = 0$  et  $m = 2$ , relativement    celle de  $m = 1$ , sont l  g  rement plus actives     $Re = 100000$  qu'    $Re = 1000$ .

Les figures 7.109 et 7.110 confirment dans l'ensemble la pr  pond  rance de la composante  $m = 1$  pour les deux cas, mais aussi des diff  rences importantes dans les d  tails de la composition azimutale de la perturbation apr  s quatre rotations du vortex.

Le graphique 7.110 ( $Re = 100000$      $T = 4$ ) met en   vidence une nette augmentation du nombre d'oscillations et de leurs amplitudes sur la courbe  $|C_1(r)|$ , par rapport aux figures 7.109 ( $Re = 1000$      $T = 4$ ) et 7.108 ( $Re = 100000$      $T = 3$ )

Par comparaison avec les figures 7.107 et 7.108     $T = 3$ , les graphiques 7.109 et 7.110 confirment qu'    $T = 4$ , l'  nergie h  lico  dale de la perturbation     $Re = 1000$  est essentiellement concentr  e dans le coeur tourbillonnaire, alors qu'elle semble en voie de s'  quilibrer     $Re = 100000$  entre le noyau du vortex et la zone potentielle.

De plus, le sch  ma 7.110     $T = 4$  confirme la tendance     $Re = 100000$  d'une augmentation de la contribution  $m = 0$ , amorc  e     $T = 3$  sur le graphique 7.108. Plus g  n  ralement, l'analyse spectrale de la perturbation     $Re = 100000$  sugg  re un m  canisme d'  change d'  nergie entre les composantes  $m = 1$  et  $m = 0$  car on peut constater sur la figure 7.110 que les maxima de l'une correspondent aux minima de l'autre et vice versa. Par exemple, le rayon  $r/a = 0.6$  minimise  $|C_1|$  tout en maximisant  $|C_0|$ , les maxima en  $r/a = 0.9$  et  $r/a = 1.1$  de  $|C_0|$  encadrent le minimum

7.5. RÉPONSE NON LINÉAIRE DU TOURBILLON DE LAMB-OSEEN À UNE PERTURBATION HÉLICOÏDALE INFINITÉSIMALE À HAUT NOMBRE DE REYNOLDS

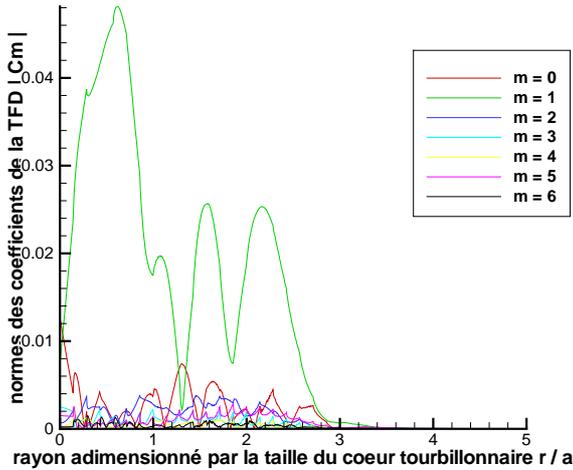


FIG. 7.109 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 4$  dans le cas  $Re = 1000$ .

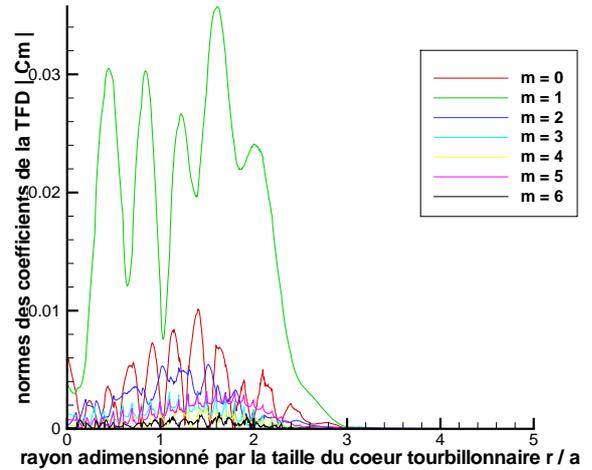


FIG. 7.110 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 4$  dans le cas  $Re = 100000$ .

de  $|C_1|$  en  $r/a = 1$  et le maximum global de  $|C_0|$  en  $r/a = 1.4$  correspond à un minimum de  $|C_1|$ .

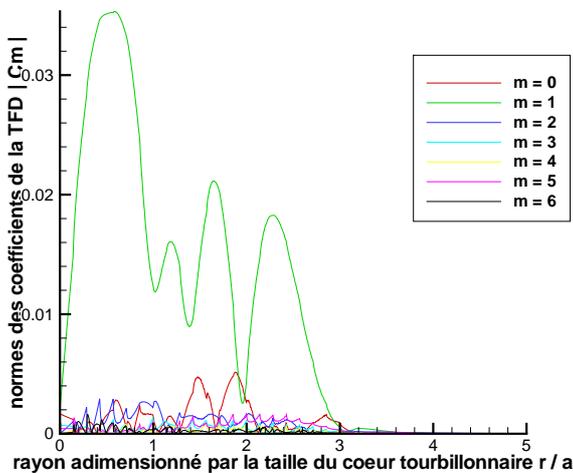


FIG. 7.111 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 5$  dans le cas  $Re = 1000$ .

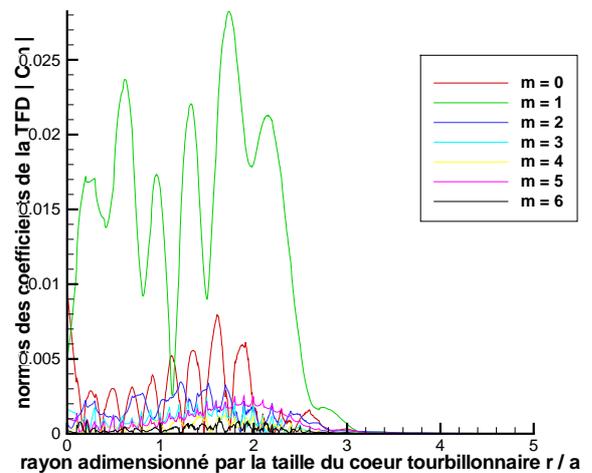


FIG. 7.112 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 5$  dans le cas  $Re = 100000$ .

Après cinq périodes de retournement du tourbillon, les figures 7.111 et 7.112 montrent encore la prédominance de la composante  $m = 1$  dans les deux cas, ainsi que des différences substantielles dans le contenu spectral à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ .

Le schéma 7.111 à  $T = 5$  révèle une allure de la courbe  $|C_1|(r)$  très similaire, en plus lissée, à celle du graphique 7.109 à  $T = 4$ .

En revanche, la figure 7.112 confirme à  $T = 5$  les tendances observées aux deux instants précédents sur la perturbation à  $Re = 100000$  :

- Le mécanisme de transfert de l'énergie hélicoïdale (aire sous la courbe  $|C_1|(r)$ ) du coeur tour-

billonnaire vers la zone potentielle semble se réenclencher, à la manière du graphique 7.108 à  $T = 3$  : ceci peut se vérifier visuellement sur la figure 7.98 par le développement des couches critiques à l'endroit de l'initialisation de la perturbation ( $y = 0$ ).

- La contribution de  $m = 0$  relativement à la composante  $m = 1$  se maintient et s'affirme dans l'intervalle  $0 \leq r/a \leq 3$ , comme à  $T = 3$  et  $T = 4$  : par exemple, on note à  $T = 5$  que  $|C_0| > |C_1|$  pour  $1.1 \leq r/a \leq 1.18$ , c'est à dire autour du lieu du maximum de vitesse tangentielle du tourbillon de Lamb-Oseen.

- Enfin, on observe encore à  $T = 5$  une augmentation des oscillations de la courbe  $|C_1(r)|$  et de ses amplitudes, ainsi qu'une correspondance entre les minima de  $|C_1(r)|$  et des maxima de  $|C_0(r)|$ , comme sur le graphique 7.110 à  $T = 4$ .

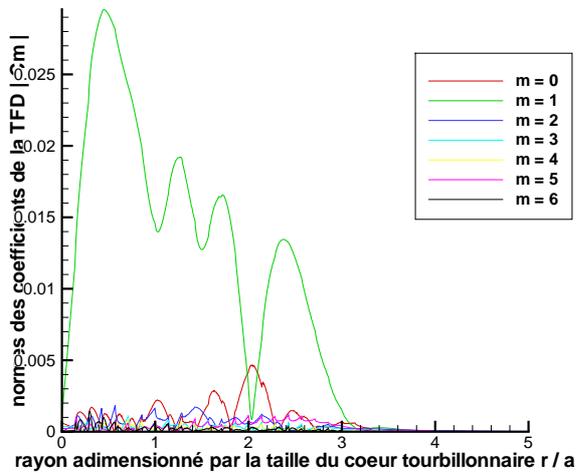


FIG. 7.113 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 6$  dans le cas  $Re = 1000$ .

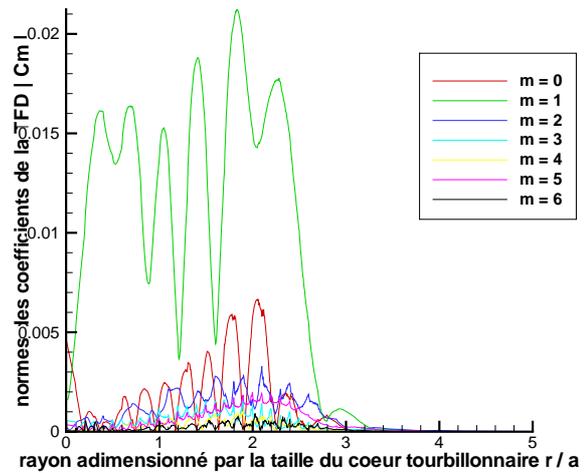


FIG. 7.114 – Contenu spectral de la perturbation  $m = 1$  infinitésimale ( $\varepsilon = 0.01$ ) à  $T = 6$  dans le cas  $Re = 100000$ .

Au bout de six rotations du vortex, les figures 7.113 et 7.114 confirment dans l'ensemble la prépondérance de la composante  $m = 1$  pour les deux cas, mais aussi les différences importantes de la composition azimutale de la perturbation à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$ .

Le graphique 7.113 montre une stabilisation du profil de  $|C_1(r)|$ , déjà mentionnée à  $T = 5$  : cela est cohérent avec le fait qu'on observe peu de différences sur les structures hydrodynamiques en  $y = 0$  des figures 7.98 et 7.100. De plus, on a vu au paragraphe 7.3.1 que l'évolution de notre perturbation  $m = 1$  infinitésimale traverse un régime transitoire d'environ sept retournements du tourbillon avant d'atteindre une dynamique bien établie et régulière.

Par contre, la figure 7.114 à  $T = 6$  retrouvent certaines des observations réalisées aux précédents instants sur la perturbation à  $Re = 100000$  :

- Le mécanisme de transfert de l'énergie hélicoïdale (aire sous la courbe  $|C_1(r)|$ ) du coeur tourbillonnaire vers la zone potentielle se poursuit et ceci est confirmé par l'enroulement de la perturbation de vorticité, de plus en plus fin et étendu dans la direction radiale, perceptible sur la figure 7.100 autour de  $y = 0$ .

- Ce dernier phénomène va de pair avec les fortes oscillations de la courbe  $|C_1(r)|$  visibles à  $T = 6$  sur le graphique 7.114, déjà remarquées à  $T = 4$  et  $T = 5$ .

La principale originalité du contenu spectral de la perturbation  $Re = 100000$  à  $T = 6$  tient à la montée en crescendo des maxima de la composante  $m = 0$  entre  $r/a = 0.6$  et  $r/a = 2$ .

En tout état de cause, l'évolution de la perturbation à  $Re = 100000$ , décrite d'une part par ses structures cohérentes (figures 7.94, 7.96, 7.98, 7.100), d'autre part par son contenu spectral en azimuth, montre qu'elle n'est pas encore parvenue, loin s'en faut, à un régime bien instauré au bout de six rotations du tourbillon (contrairement à la dynamique visqueuse à  $Re = 1000$ ), et il faudrait simuler numériquement cette perturbation à haut nombre de Reynolds sur une durée plus longue (cf. paragraphe 7.4.3) pour vérifier si les tendances observées se poursuivent effectivement. Ces principaux phénomènes sont le processus d'enroulement-filamentation des bras spiraux de vorticité à l'extérieur du coeur tourbillonnaire (couches critiques) et la création de composantes azimutales  $m \neq 1$  de plus en plus conséquentes (via le terme non linéaire du second ordre).

## 7.6 Discussions et interprétations physiques des calculs DNS de la perturbation hélicoïdale

### 7.6.1 Résumé des principaux résultats obtenus avec le code DNS sur la perturbation $m = 1$

De manière patente, la comparaison de nos calculs DNS montre que l'augmentation du nombre de Reynolds se distingue substantiellement au bout de trois périodes de retournement du tourbillon, au lieu d'une seule rotation du vortex dans le cas de l'effet de grande amplitude de la perturbation, étudié au paragraphe 7.3.1.

Globalement, l'effet du nombre de Reynolds sur une perturbation  $m = 1$  infinitésimale se traduit essentiellement par un développement très différent des modes hélicoïdaux centraux visqueux et de couche critique (les modes "L" et "V" dans la terminologie introduite par Fabre [98]), qui restent localisés autour de la perturbation initiale. Ces couches critiques sont caractérisées d'une part par un mécanisme accentué d'enroulement et filamentation de la vorticité et d'autre part par l'absence d'effet propagatif. Par ailleurs, ces structures sont porteuses d'énergie et sont en grande partie à l'origine des différences relevées sur les courbes à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$  de la figure 6.42.

### 7.6.2 Effets du nombre de Reynolds : comparaison entre la DNS et la théorie de stabilité linéaire

Après la validation fine au chapitre 6 (cf. les paragraphes 6.3.2 et 6.3.3) de notre code DNS sur les résultats de la théorie de stabilité linéaire, nous présentons dans cette partie une comparaison entre notre calcul DNS à haut nombre de Reynolds de la perturbation hélicoïdale de petite amplitude (paragraphe 7.5) et le calcul de stabilité linéaire non visqueux obtenu par Fabre [99], au bout de six périodes de retournement du tourbillon.

En fait, nous nous permettons cette comparaison entre notre calcul DNS  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Re = 100000$  et le résultat de stabilité linéaire non visqueux de Fabre précisément parce que les solutions numériques obtenues par Fabre [99] sur la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 1$  ne montrent pratiquement aucune différence entre ses calculs à  $Re = 100000$  et dans le cas non visqueux ( $Re \rightarrow \infty$ ), lors des six premières rotations du vortex.

Les résultats exposés dans cette partie viennent en complément de ceux du paragraphe 6.3.3 en régime visqueux à  $Re = 1000$ , afin de compléter notre analyse de l'effet du nombre de Reynolds (et donc de la viscosité) sur le comportement du tourbillon de Lamb-Oseen en réponse à notre perturbation  $m = 1$  dans le cas *infinitésimal*, en proposant une description plus physique et théorique des phénomènes observés.

Qualitativement, la comparaison des structures cohérentes entre la figure 7.115 et 7.119 met en évidence des similarités mais aussi des différences sensibles, que nous allons tenter d'expliquer, en particulier à l'aide des résultats présentés au paragraphe 7.5.

Les ressemblances concernent essentiellement le comportement de la perturbation hélicoïdale sur la gauche du tourbillon de Lamb-Oseen car on retrouve dans les deux cas, d'une part la double hélice de vorticité contrarotative (constituée de modes hélicoïdaux "D" et donnant le front d'onde à gauche), et d'autre part un élément hydrodynamique en forme d'enroulement mais moins allongé (localisé approximativement en  $-3 \leq y/a \leq -1$  sur la figure 7.115 et en  $-5 \leq z/a \leq -1$  sur la figure 7.119), vraisemblablement constitué d'un paquet d'ondes se propageant vers la gauche et constitué de modes hélicoïdaux de la famille "L" qui deviennent marginalement stables quand  $Re \rightarrow \infty$  (cf. figure 6.2 à  $Re = 1000$  et Fabre [99] pour le diagramme de stabilité linéaire correspondant au cas non visqueux) et contrarotatifs dans la limite des petites longueurs d'onde (i.e.  $ka \geq 2.3$  ou encore  $\lambda \leq 0.07 a$ ).

En revanche, les principales différences entre notre calcul DNS    $Re = 100000$  et le résultat de stabilité linéaire en non visqueux se manifestent sur les deux structures hydrodynamiques présentes dans la partie droite du tourbillon de Lamb-Oseen :

- la figure 7.119 met en évidence une remarquable structure en forme de spirale torsadée, très étendue à la fois axialement ( $-1 \leq z/a \leq 11$ ) et radialement (en s'étalant à l'extérieur du coeur tourbillonnaire pour  $-1 \leq z/a \leq 9$ ), à l'extrémité de laquelle on discerne un paquet d'ondes hélicoïdales de la classe "C", perceptible dans la zone  $11 \leq z/a \leq 14$  et constituant le front d'onde à droite.
- la figure 7.115 montre une structure caractéristique de couche critique (enroulement très fin de filaments de vorticité) dans la région  $-1 \leq y/a \leq 1$ , à laquelle s'ajoute clairement un paquet d'ondes hélicoïdales de la classe "C",   la manière d'une longue "vrille" de vorticité (dipôle corotatif de vorticité positive et négative, concentré dans le coeur tourbillonnaire), qui se propage vers la droite du vortex et qui a eu le temps de s'enrouler autour d'elle-même sur environ quatre tours.

En fait, la structure en forme de spirale torsadée de vorticité obtenue à  $T = 6$  par Fabre [99] avec la théorie de stabilité linéaire en régime non visqueux a également été observée de manière très similaire sur notre calcul DNS    $Re = 100000$  et  $\varepsilon = 0.01$  mais à des instants antérieurs :

-    $T = 3$  sur la figure 7.94
-    $T = 4$  sur la figure 7.96.

Par contre, le même calcul DNS montre que cette spirale torsadée "disparaît"    $T = 5$  et  $T = 6$  : en réalité, elle nous semble plutôt se recroqueviller axialement, en se recentrant vers l'origine de la perturbation initiale, tout en conservant son étendue dans la direction radiale (environ 2.5 fois la taille du coeur tourbillonnaire).

Ainsi, on se rend compte que les visualisations du paragraphe 7.5.1 donnant l'évolution instationnaire de la structure de la perturbation hélicoïdale infinitésimale calculée par la DNS    $Re = 100000$  rejoint en partie les observations de la stabilité linéaire. Ce point nous paraît particulièrement intéressant et sera discuté plus loin.

Fabre [99] interprète la spirale torsadée de vorticité en  $z = 0$  sur la figure 7.119 comme une manifestation du spectre continu, d'une part parce qu'elle ne correspond à aucune topologie des

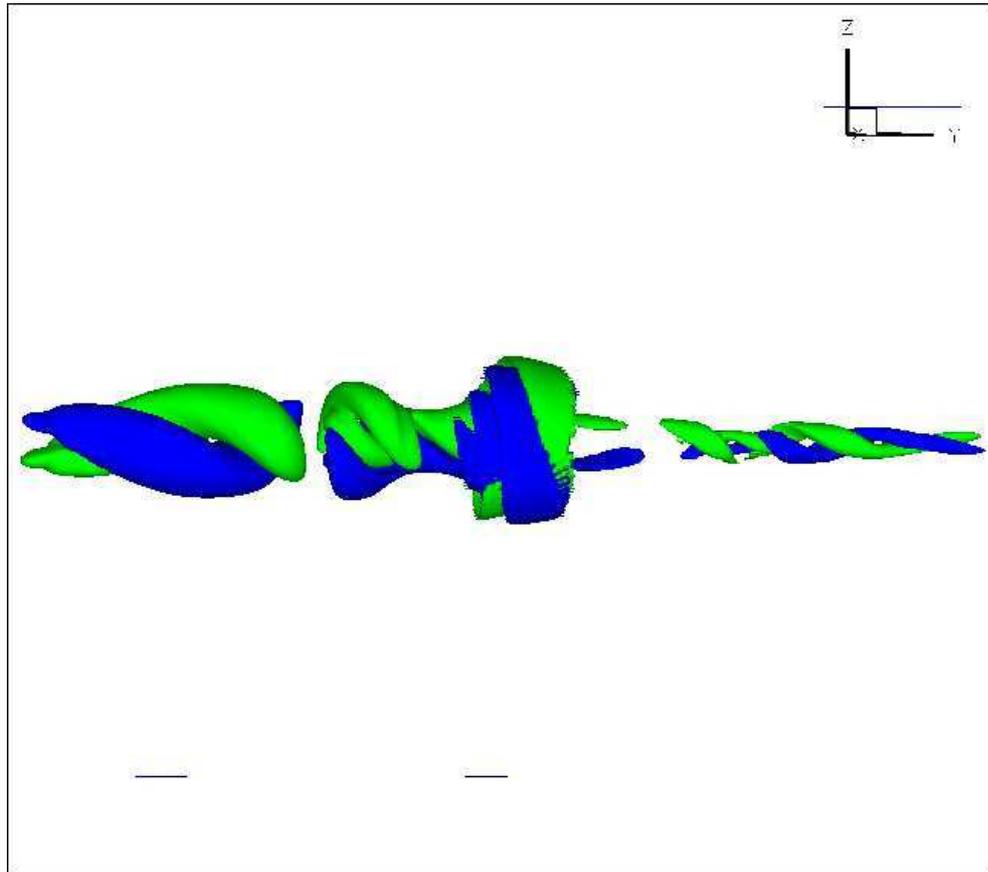


FIG. 7.115 – isosurfaces en 3D de la perturbation de vorticité axiale correspondant à  $\pm 10\%$  du maximum de la perturbation initiale

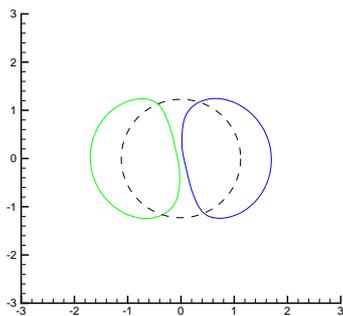


FIG. 7.116 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = -12$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

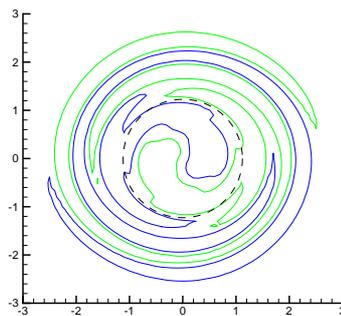


FIG. 7.117 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = 0$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

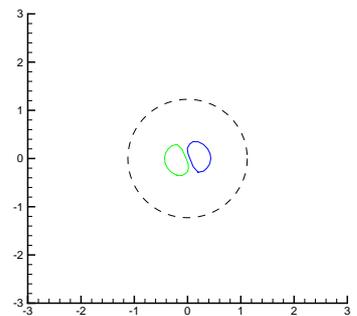


FIG. 7.118 – isosurfaces dans le plan  $\frac{y}{a} = +12$  de la perturbation de vorticité correspondant à  $\pm 5\%$  du maximum de la perturbation initiale

Calcul DNS à  $Re = 1000$  de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à notre perturbation  $m = 1$  en régime linéaire ( $\varepsilon = 0.01$ ) à l'instant  $T = 6$  (maillage à 13,4 M points). Le cercle en pointillé noir représente le coeur tourbillonnaire (lieu du maximum de vitesse azimutale du tourbillon de Lamb-Oseen).

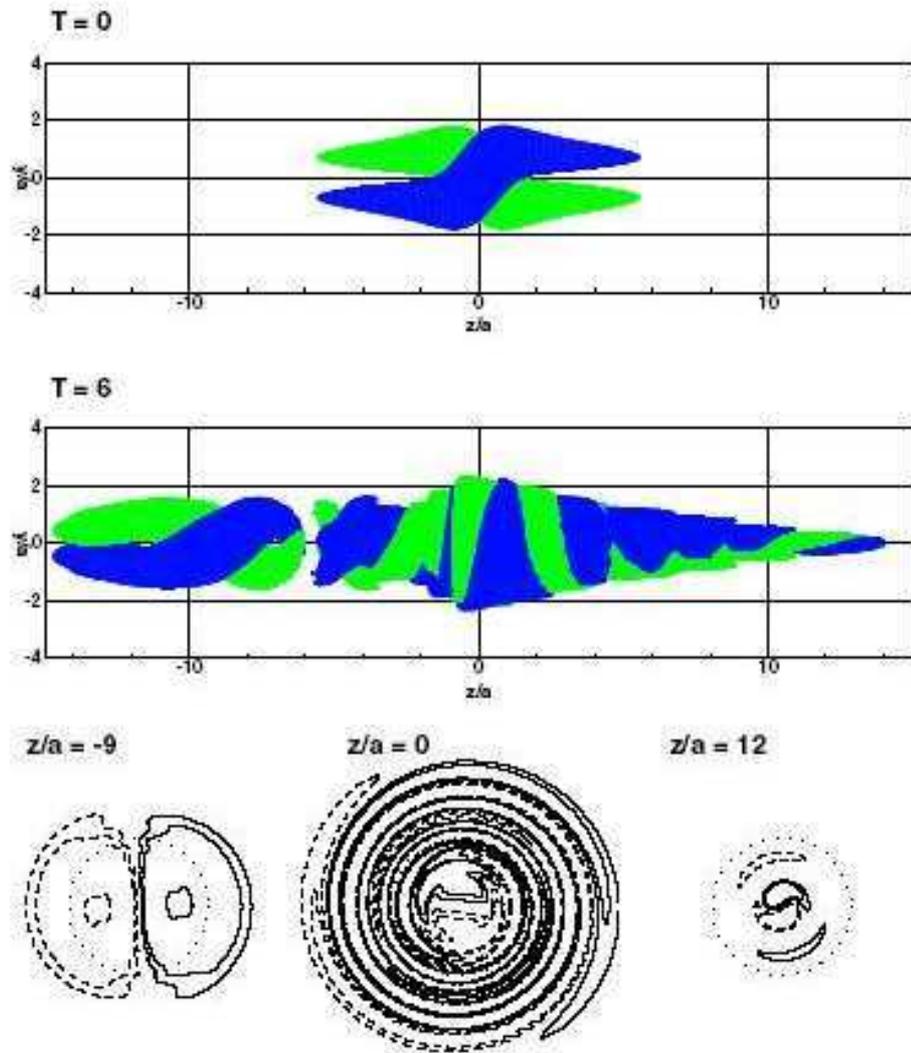


FIG. 7.119 – Calcul par la théorie de stabilité linéaire de la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen en régime non visqueux à notre perturbation  $m = 1$  en régime linéaire à l'instant  $T = 6$  (d'après Fabre [99]).

ondes de Kelvin régulières du tourbillon de Lamb-Oseen, et d'autre part parce qu'il n'existe pas d'élément hydrodynamique équivalent avec le modèle de Rankine dans l'étude de Arendt & al. [8]. Selon Fabre, cette structure cohérente particulièrement complexe serait constituée d'un paquet d'ondes de "quasi-modes" (au sens de Schecter & al. ??) dans le coeur tourbillonnaire, associée à une spirale torsadée de vorticité, localisée en grande partie à l'extérieur du vortex.

En complément des éléments d'interprétation physique proposés par Fabre (effet de spectre continu et comportement de type quasi-mode) et du fait que globalement, tous les modes de la zoologie des ondes hélicoïdales sont bien moins amortis à  $Re = 100000$  et a fortiori en non visqueux qu'à  $Re = 1000$ , il nous semble qu'un phénomène supplémentaire est susceptible d'entrer en jeu dans cette dynamique complexe.

D'une part, le fait que notre calcul DNS à  $Re = 100000$  ait retrouvé cette structure en forme de spirale torsadée à  $T = 3$  et  $T = 4$  avant de la voir disparaître ou s'amenuiser, suggère que nous sommes en présence d'un effet dynamique qui joue aux temps courts, c'est à dire un régime transitoire. En complément des visualisations des structures cohérentes au paragraphe 7.5.1 sur la perturbation de vorticité axiale, les résultats de l'analyse spectrale de la perturbation du paragraphe 7.5.2 confirment que ce régime transitoire n'est pas terminé au bout de six rotations du tourbillon (ce que nous avons déjà mentionné précédemment), avec notamment l'émergence en crescendo de la composante axisymétrique et une augmentation des oscillations de la composante hélicoïdale (cf. figure 7.114) sur l'analyse TFD à  $T = 6$ .

D'autre part, la topologie même de notre perturbation à  $T = 6$ , illustrée sur la DNS à  $Re = 100000$  par la figure 7.117 et extrêmement similaire en stabilité linéaire non visqueuse sur le schéma équivalent 7.119 (en  $z/a = 0$ ), démontre que la structure de la perturbation à l'extérieur du coeur tourbillonnaire (indépendamment de ce qui se passe dans le noyau du vortex) est constituée de deux filaments de vorticité entremêlés, situés entre  $1.5 a$  et  $2.5 a$ , s'enroulant sur eux-mêmes sur un tour et demi. Cette observation nous incite à faire un rapprochement avec la perturbation optimale de géométrie  $m = 1$ , calculée par Antkowiak et Brancher [5] pour le tourbillon de Lamb-Oseen. En suivant les conclusions de cette étude, cette perturbation optimale conduit à des croissances transitoires importantes qui sont équivalentes à une transition non linéaire vers un autre état, lui aussi *linéairement stable*, du tourbillon. Par un procédé fortement tridimensionnel combinant les mécanismes d'Orr et de lift-up, cette perturbation optimale évolue au cours du temps pour finalement aboutir en un dipôle de vorticité concentré dans le coeur tourbillonnaire. Dans le cas non visqueux, cette structure finale de la perturbation correspond tout à fait aux "bending waves" décrites par Leibovich & al. [171] et qui correspondent aux ondes hélicoïdales de la famille "C" dans la classification de Fabre & al. [98].

En résumé, ces différentes constatations nous amènent à envisager un mécanisme de type "feed-back" entre notre perturbation  $m = 1$  et le tourbillon de Lamb-Oseen, dans le cas d'une amplitude infinitésimale et à nombre de Reynolds suffisamment grand :

- notre perturbation initiale  $m = 1$ , constituée d'un paquet d'ondes localisé et concentré dans le coeur tourbillonnaire, évolue au cours du temps en se propageant axialement mais aussi radialement, jusqu'à migrer à l'extérieur du noyau du vortex et ainsi venir "exciter" des filaments de vorticité en périphérie du tourbillon
- à leur tour, ces bras spiraux de vorticité situé à l'extérieur du coeur tourbillonnaire se déroulent via une dynamique tridimensionnelle de type "stretching-tilting" pour finalement réintégrer le noyau du vortex, sous la forme de filaments longs et robustes, resserrés sur l'axe du tourbillon (ceci est particul rement net sur la figure 7.115)
- ce paquet d'ondes hélicoïdales à l'intérieur du coeur tourbillonnaire est susceptible à son tour de créer des perturbations qui s'élargissent radialement, provoquant ainsi des interactions avec des filaments de vorticité en périphérie du tourbillon et ainsi de suite.

En dynamique non visqueuse, cet éventuel mécanisme physique d’auto-entretien de notre perturbation  $m = 1$ , ou au moins, d’émission par la structure en couche critique de fortes ”bending waves” au sens de Leibovich & al. [171], c’est-à-dire d’une ”onde lente” (hélice de vorticit e contrarotative se propageant vers la gauche) et d’une ”onde rapide” (dip ole de vorticit e corotatif se propageant vers la droite) est à confirmer en rallongeant la dur ee physique simul ee dans notre calcul DNS    $Re = 100000$ . S’il était av er e, il pourrait ainsi expliquer l’apparition sur la figure 6.42 d’oscillations quasi-p eriodiques, ind ependamment de la modulation en amplitude due au nombre de Reynolds, de p eriodes approximativement double du temps de retournement du tourbillon.

### 7.6.3 Interpr etation des couches critiques 3D   l’aide de nombres adimensionnels

Dans cette partie, nous tentons d’interpr eter les couches critiques de nos calculs CFD à la lumi ere de deux nombres adimensionnels, avant de donner quelques  l ements conclusifs sur le sujet et de proposer une piste de recherche sur les calculs DNS qu’il nous semblerait judicieux de r ealiser à l’avenir.

#### 7.6.3.1 Nombre d’Haberman-Morton

Pour mieux comprendre nos r esultats DNS et les ph enom enes physiques se produisant dans les couches critiques, il nous semble relativement coh erent de faire appel au fameux param etre d’Haberman-Morton, introduit par Haberman [119–121] au d ebut des ann ees 1970 et d efini par :

$$Ha = \frac{1}{Re \zeta^{3/2}} \quad (7.23)$$

où  $Re$  d esigne le nombre de Reynolds fondée sur la circulation du tourbillon et  $\zeta$  repr esente une mesure de la non-axisym etricit e du tourbillon, assez d elicat e par essence (dans son étude 2D, Le Diz es [72] utilise avec pr ecauti on l’expression ”amplitude de la correction non axisym etricque”).

Comme nous l’avons évoquée au paragraphe 6.3.3, une onde h elico dale dont la fr equence avoisine la fr equence propre du tourbillon porteur est susceptible d’entrer en r esonance avec le champ de base par un m ecanisme de type point critique. Pour normaliser une telle singularit e, il est alors n ecessaire de prendre en compte les effets de la viscosit e et / ou des non lin earit es. Ces deux ph enom enes physiques r egularisants ont  t e mis en évidence par des études bidimensionnelles, notamment de Dritschel [85] et de Le Diz es [72, 73].

En fait, le nombre d’Haberman-Morton de l’ equation 7.23 rev et une importance capitale car il est censée à lui seul d eterminer enti erement la nature de la couche critique :

- (1) Lorsque  $Ha \ll 1$ , les non-lin earit es des  equations de Navier-Stokes sont le principal moteur de la dynamique des couches critiques dans les perturbations non-axisym etricques. On parle dans ce cas de *couches critiques non lin earies*.
- (2) Lorsque  $Ha \gg 1$ , ce sont au contraire les effets visqueux qui sont dominants et pilotent totalement la dynamique des couches critiques. On parle dans ce cas de *couches critiques visqueuses*.
- (3) Lorsque  $Ha \approx 0(1)$ , les deux effets sont pr esents simultan ement. Dans ce cas, un examen de la comp etition entre la viscosit e et les non lin earit es est n ecessaire au cas par cas, en tenant compte à la fois de la g eom etrie azimutale de la perturbation (les études 2D montrent des comportements variant selon le nombre d’onde azimutal  $m$ ) et des éventuelles interactions avec la

tridimensionnalité de l'écoulement tourbillonnaire, encore mal comprises.

Dans le cadre de notre modélisation, les paramètres caractéristiques de notre perturbation localisée ( $m$ ,  $\varepsilon$  et  $Re$ ) suggèrent de prendre comme mesure de la non-axisymétrie du tourbillon ( $\zeta$  dans l'équation 7.23), notre amplitude de perturbation initiale  $\varepsilon$ . Le choix d'identifier  $\zeta$  avec  $\varepsilon$  n'est pas du tout trivial car un éventuel facteur correctif est possible, étant donné la difficulté à estimer  $\zeta$ , à plus forte raison dans une approche 3D des couches critiques. En fait, le raisonnement qui nous incite à prendre  $\zeta = \varepsilon$  dans l'estimation du paramètre  $Ha$  s'appuie sur la méthode d'anti-diffusion du champ de base (cf. paragraphe 5.3.2). En effet, cette technique numérique utilisée dans toutes nos simulations DNS pour calculer "proprement" l'évolution instationnaire de la perturbation, en la préservant de toute diffusion visqueuse *axisymétrique* du tourbillon de Lamb-Oseen, nous semble prendre toute son importance et sa pertinence pour choisir d'un point de vue physique d'identifier  $\zeta$  avec  $\varepsilon$ .

Dans le cas où on prendrait donc  $\zeta \cong \varepsilon$ , du moins en première approximation, les paramètres caractéristiques de l'initialisation de notre calcul DNS sur la perturbation hélicoïdale infinitésimale à haut nombre de Reynolds ( $m = 1$ ,  $Re = 100000$  et  $\varepsilon = 0.01$ ) conduiraient à  $Ha = 0.01$ , c'est-à-dire  $Ha \ll 1$ . Nous serions alors dans une situation où la dynamique des couches critiques serait dominée par les effets des non linéarités (et par voie de conséquence par les non normalités) des équations de Navier-Stokes, plus que par les effets de viscosité.

Visuellement, une comparaison de la figure 7.117 à  $Ha = 0.01$  avec la figure 6.49 correspondante en dynamique linéaire ( $m = 1$ ,  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.01$ , soit  $Ha = 1.0$ ) montre clairement que l'augmentation du nombre de Reynolds (et donc des "non-linéarités", en donnant un poids plus fort aux termes convectifs) a pour conséquence d'amplifier considérablement le mécanisme d'enroulement et filamentation des bras spiraux de vorticité, en particulier à l'extérieur du coeur du tourbillon. En effet, ces bras spiraux de vorticité en périphérie du noyau tourbillonnaire s'enroulent d'un tour et demi sur la figure 7.117 au lieu d'un quart de tour seulement à la figure 6.49, alors que la structure dipolaire reste pratiquement inchangée à l'intérieur du coeur tourbillonnaire. Cependant, il est très difficile au vu de ces constatations de se prononcer définitivement sur la nature *non linéaire* ou *visqueuse* des couches critiques observées sur la figure 7.117, surtout en l'absence d'une théorie bien établie sur les couches critiques tridimensionnelles (i.e.  $k \neq 0$ ) dans les écoulements tourbillonnaires.

Les similitudes que présente notre calcul DNS    $Re = 100000$  avec le calcul de stabilité linéaire *non visqueux* de Fabre [99] et notre estimation du nombre d'Haberman-Morton (certes fondée sur l'amplitude initiale de notre perturbation) laissent à penser que les distinctions entre les figures 7.117 et 6.49 sont peut-être les manifestations de *couches critiques non linéaires*, ou du moins de leurs prémices à partir de  $Re = 100000$ . Pour s'en assurer complètement, il faudrait augmenter encore le nombre de Reynolds dans nos calculs DNS (au prix de ressources de calcul extrêmement c teuses) et / ou faire croître l'amplitude de la perturbation initiale, afin de diminuer le nombre d'Haberman-Morton et ainsi se rapprocher du comportement asymptotique  $Ha \rightarrow 0$ .

### 7.6.3.2 Construction d'un nouveau nombre adimensionnel

Le nombre d'Haberman a été déterminé au début des années 1970, dans le cadre d'études de *stabilité linéaire* et *faiblement non linéaire* (résolution d'équation d'amplitude).   ce titre, la prise en compte des effets des *non linéarités* en était à leurs balbutiements, tout particulièrement

dans l'analyse de la dynamique tourbillonnaire.

Dans le cadre de cette thèse et de notre modélisation numérique, il nous semble plus judicieux d'introduire un autre nombre adimensionnel, relativement proche du paramètre d'Haberman-Morton, mais mieux adapté pour interpréter les effets conjugués des non-linéarités et de la tridimensionnalité de l'écoulement tourbillonnaire dans les résultats de nos calculs DNS :

$$N_{Re-\varepsilon} = \frac{1}{Re \varepsilon^2} \quad (7.24)$$

où  $\varepsilon$  et  $Re$  désignent respectivement, sans aucune ambiguïté, l'amplitude initiale de la perturbation et le nombre de Reynolds fondé sur la circulation du tourbillon, directement employé dans l'adimensionnement de nos calculs DNS ( $Re = \frac{\Gamma}{2 \pi \nu}$ ).

Ce nombre adimensionnel  $N_{Re-\varepsilon}$  permet de rendre compte des effets visqueux (via le nombre de Reynolds) en même temps que ceux des non linéarités, par l'intermédiaire du carré de l'amplitude de la perturbation initiale. Pour s'en convaincre, nous avons vu au paragraphe 5.3.2 que la conservation de la quantité de mouvement en incluant le terme non linéaire nous amène à l'équation aux perturbations 5.55, dans laquelle une estimation des ordres de grandeurs nous conduit à  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = O(\varepsilon^2)$ , alors que tous les autres termes sont en  $O(\varepsilon)$ .

Nous tentons ici d'interpréter le comportement des couches critiques 3D visqueuses non linéaires à l'aide du nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  dans les résultats de nos calculs DNS. En effet, dans le cadre d'une résolution des équations complètes de Navier-Stokes, la "régularisation" non linéaire, tridimensionnelle et visqueuse des singularités de type point critique (i.e. le phénomène de résonance entre la perturbation et le tourbillon porteur décrit à l'équation 6.10) s'opère toujours par les deux mécanismes de natures bien différentes mentionnés ci-dessus, à savoir la viscosité et les non linéarités. A partir des résultats de Fabre [99] obtenus par l'approche de stabilité linéaire (avec ses restrictions) et de nos calculs DNS présentés dans ce chapitre (dont les limitations portent essentiellement sur les ressources de calcul nécessaires), il nous semble que nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

(1) Les mécanismes tridimensionnels qui pilotent la dynamique des couches critiques de la perturbation  $m = 1$  nous paraissent nettement plus complexes encore qu'en 2D (cf. paragraphe 7.6.1). Ceci nous incite à la plus grande prudence dans leur interprétation physique.

(2) La classification de ces couches critiques 3D en trois régimes, dont deux bien tranchés (complètement visqueux ou totalement non linéaire, séparé par un régime intermédiaire) ne nous semble pas du tout triviale, dans la mesure où les effets des non linéarités et de la viscosité sont toujours présents simultanément dans la réalité et difficilement discriminables en 3D.

(3) L'interprétation asymptotique du nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  sur nos calculs DNS nous semble exiger des précautions (cf. le caractère abscon de la variable  $\zeta$  dans la définition 7.23 du paramètre d'Haberman). Ainsi, la distinction entre *couches critiques 3D non linéaires* pour  $N_{Re-\varepsilon} \rightarrow 0$  et *couches critiques 3D visqueuses* pour  $N_{Re-\varepsilon} \rightarrow \infty$  nous paraît encore délicate, au stade actuel de nos calculs DNS, comme nous le montrons sur les estimations ci-dessous.

En appliquant le nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  dans le cas particulier de nos calculs DNS sur notre perturbation  $m = 1$ , nous obtenons les résultats suivants :

(1) dans la comparaison des deux DNS du paragraphe 7.3, à  $Re$  donné :

## 7.6. DISCUSSIONS ET INTERPRÉTATIONS PHYSIQUES DES CALCULS DNS DE LA PERTURBATION HÉLICOÏDALE

- $m = 1$ ,  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.01 \implies N_{Re-\varepsilon} = 10$ , ce qui suggère des couches critiques de nature plutôt visqueuse
- $m = 1$ ,  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.5 \implies N_{Re-\varepsilon} = 0.004$ , ce qui suggère des couches critiques de nature plutôt non linéaire
- (2) dans la comparaison des deux DNS du paragraphe 7.5, à  $\varepsilon$  donné :
  - $m = 1$ ,  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.01 \implies N_{Re-\varepsilon} = 10$ , ce qui suggère des couches critiques de nature plutôt visqueuse
  - $m = 1$ ,  $Re = 100000$  et  $\varepsilon = 0.01 \implies N_{Re-\varepsilon} = 0.1$ , ce qui suggère des couches critiques de nature plutôt non linéaire ... mais nettement "moins non linéaire" que dans le second cas du paragraphe 7.3.

En fait, ces estimations montrent bien que la question la plus épineuse avec un tel nombre adimensionnel est de quantifier de manière suffisamment précise des valeurs seuils (si cela est possible), afin de situer "proprement" les régimes respectivement visqueux et non linéaire des couches critiques 3D, ce qui n'a pas été encore fait à notre connaissance dans le cas de la dynamique tourbillonnaire tridimensionnelle. Cette difficulté se pose avec la même acuité aussi bien en raisonnant sur le paramètre  $Ha$  que sur le nombre  $N_{Re-\varepsilon}$ .

### 7.6.3.3 Éléments de conclusion sur les couches critiques 3D

Les études de stabilité linéaire sur un tourbillon de Lamb-Oseen isolé ont été réalisées par Sipp [247] en régime non visqueux et par Fabre [99] en régime visqueux. Ces deux auteurs ont été systématiquement confrontés au phénomène de couche critique dans les cas  $m \neq 0$  et ont contourné le problème à l'aide d'une technique astucieuse de mappage dans le plan complexe du rayon en calculant la solution sur un contour d'intégration déformé qui évite la singularité du rayon critique. Pour faire simple, cette méthode revient à introduire artificiellement une sorte de viscosité "évanescence" qui permet de résoudre le problème, qui sinon resterait mathématiquement mal posé. Indépendamment des détails techniques de la méthode numérique, cela illustre la forte capacité de la viscosité à stabiliser les singularités de couche critique et le résultat "non visqueux" de Fabre présenté à la figure 7.119 du paragraphe 7.6.2 est en fait représentatif d'une dynamique visqueuse avec  $\nu \rightarrow 0$ . Ainsi, les calculs de stabilité linéaire, de par leur formalisme même et l'absence du terme non linéaire, sont inéluctablement bornés à ne rendre compte que des couches critiques visqueuses. Schématiquement, ce résultat se retrouve de manière simplificatrice par le second nombre adimensionnel présenté ci-dessus : en théorie de stabilité linéaire, on a de facto  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui conduit à  $\forall Re, N_{Re-\varepsilon} \rightarrow \infty$  et les couches critiques ainsi observées sont nécessairement de nature visqueuse.

Etant donné que les deux façons d'aborder le problème des couches critiques sur la géométrie  $m = 1$  (la théorie de stabilité linéaire et la DNS sur des perturbations infinitésimales) ont conduit à des résultats très proches sur le modèle du Lamb-Oseen et n'ont pas mis en évidence d'éclatement tourbillonnaire ni de phénomène d'instabilité spontanée de type dispersion tourbillonnaire, nous inclinons à formuler deux conclusions :

- nos calculs DNS sur la perturbation hélicoïdale infinitésimale à  $Re = 1000$  et  $Re = 100000$  aboutissent à des dynamiques très similaires à la théorie de stabilité linéaire, ce qui signifierait donc que les DNS à  $\varepsilon = 0.01$  retrouvent des couches critiques de nature visqueuse, à moins d'augmenter sensiblement le nombre de Reynolds au delà de  $Re = 100000$
- les couches critiques 3D visqueuses semblent stables car aucune des deux approches ne montre

d'instabilité, notamment la DNS qui est une approche non modale et globale, qui intègre tous les éléments de la dynamique tourbillonnaire.

Les réserves à émettre sur ces conclusions sont de deux types :

- les durées physiques simulées dans nos calculs DNS (entre six et dix périodes de retournement du tourbillon) ne sont peut-être pas suffisantes pour être significative et observer une éventuelle instabilité (cf. paragraphe 7.4.3)
- notre perturbation initiale  $m = 1$ , conçue comme un paquet d'ondes localisées dans le coeur tourbillonnaire, n'est pas la perturbation optimale du tourbillon de Lamb-Oseen : cette dernière a été calculée par Antkowiak et Brancher [5] et prend une forme très différente de la notre.

Par conséquent, si les couches critiques 3D de nature visqueuse ( $N_{Re-\varepsilon} \rightarrow \infty$ ) sont effectivement toujours stables, il existe schématiquement deux scénarios possibles pour la régularisation en dynamique 3D non linéaire des singularités de point critique ( $m \neq 0$ ) :

- à  $Re$  donné, il faut que  $\varepsilon \searrow_0$ , ce qui a pour conséquence  $N_{Re-\varepsilon} \nearrow \infty$ , avec la vitesse de convergence  $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{\varepsilon^2}$
- à  $\varepsilon$  donné, il faut que  $Re \searrow_0$ , ce qui a pour conséquence  $N_{Re-\varepsilon} \nearrow \infty$  avec la vitesse de convergence  $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{Re}$ .

A contrario, pour solliciter des singularités liées aux couches critiques 3D non linéaires et "exciter" une éventuelle instabilité de type éclatement tourbillonnaire, il faudrait diminuer le nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  pour tendre vers la limite  $N_{Re-\varepsilon} \rightarrow 0$ . En raisonnant encore sur l'équation 7.24, on peut envisager deux types de déstabilisation par développement de couches critiques 3D non linéaires :

- à  $Re$  donné, il faut que  $\varepsilon \nearrow \infty$ , ce qui a pour conséquence  $N_{Re-\varepsilon} \searrow_0$  avec la vitesse de convergence  $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{\varepsilon^2}$
- à  $\varepsilon$  donné, il faut que  $Re \nearrow \infty$ , ce qui a pour conséquence  $N_{Re-\varepsilon} \searrow_0$  avec la vitesse de convergence  $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{Re}$ .

La définition 7.24 du nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  permet d'illustrer ces conclusions sur nos calculs DNS et de montrer la pondération entre les effets des non linéarités (en  $\varepsilon^2$ ) et de la viscosité (en  $Re$ ) :

- (1) dans la comparaison des deux DNS du paragraphe 7.3, à  $Re = 1000$  donné, l'effet déstabilisant des couches critiques 3D par une augmentation de  $\varepsilon$  d'un rapport 50 se traduit par une diminution de  $N_{Re-\varepsilon}$  d'un rapport 1/2500
- (2) dans la comparaison des deux DNS du paragraphe 7.5, à  $\varepsilon = 0.01$  donné, l'effet déstabilisant des couches critiques 3D par une augmentation de  $Re$  d'un rapport 100 se traduit par une diminution de  $N_{Re-\varepsilon}$  d'un rapport 1/100

Le nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  montre ainsi que l'augmentation de l'amplitude initiale de la perturbation ( $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{\varepsilon^2}$ ) est "plus efficace" que l'augmentation du nombre de Reynolds ( $N_{Re-\varepsilon} \propto \frac{1}{Re}$ ), pour mettre en évidence des couches critiques 3D non linéaires. Ces déductions sont confirmées a posteriori par les résultats comparatifs exposés aux paragraphes 7.3 et 7.5 puisque le calcul DNS sur la perturbation hélicoïdale de grande amplitude en régime visqueux ( $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et  $Re = 1000$  au paragraphe 7.3) est celui qui conduit à la valeur la plus basse de  $N_{Re-\varepsilon}$  ( $N_{Re-\varepsilon} = 0.004 \ll 1$ ) et à la dynamique la plus complexe, différente et riche, aussi bien en terme de structures cohérentes que de contenu spectral azimuthal.

Cela nous semble justifier la commodité du nombre  $N_{Re-\varepsilon}$  pour interpréter nos calculs DNS, en quantifiant les effets relatifs de l'amplitude de la perturbation et du nombre de Reynolds.

Suite à notre analyse des couches critiques et aux discussions en fonction du nombre  $N_{Re-\varepsilon}$ , l'étape suivante consisterait à jouer simultanément sur les deux leviers (augmentation de l'amplitude initiale de la perturbation et augmentation du nombre de Reynolds), afin de favoriser encore plus l'émergence de couches critiques 3D non linéaires. Pour ce faire et dans la lignée des simulations présentées dans ce chapitre, nous avons naturellement envisagé le calcul DNS suivant :  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et  $Re = 100000$ , qui conduirait à  $N_{Re-\varepsilon} = 0.00004 \ll 1$  et donc à des couches critiques 3D encore plus fortement non linéaires.

perturbation initiale	longueur (axe du vortex)	section transverse (perpendiculaire au vortex)	nombre total de points	dt adim	durée simulée
$m = 1$	$[-30 r_c; 30 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	26.7 M	3.7e-3	6 $T_0$
$m = 1$	$[-50 r_c; 50 r_c]$	$[-10 r_c; 10 r_c] \times [-10 r_c; 10 r_c]$	44.5 M	3.7e-3	10 $T_0$

FIG. 7.120 – Estimations de maillages pour un calcul DNS dédié aux couches critiques 3D non linéaires, sur la perturbation  $m = 1$  avec  $\varepsilon = 0.5$  et  $Re = 100000$  ( $r_c$  représente la taille du coeur tourbillonnaire et  $T_0$  la période de retournement du vortex).

La figure 7.120 présente les maillages nécessaires à cette simulation pour des durées physiques de six et dix rotations du vortex, en nous appuyant sur les résultats de convergence obtenus avec la perturbation hélicoïdale infinitésimale à  $Re = 100000$  (cf. les figures 7.87 et 7.88 du paragraphe 7.5.1), tout en tenant compte du fait que la grande amplitude initiale de cette perturbation à  $\varepsilon = 50\%$  conduirait inévitablement et immédiatement, par coopérations non linéaires inter-modales, à la création d'ondes de Kelvin axisymétriques (cf. les paragraphes 7.3.1 et 7.3.2), qui ont les vitesses de propagation les plus rapides le long du tourbillon (cf. figure 6.39), ce qui nous force à rallonger les maillages dans la direction de l'axe du vortex.

Comme le montrent nos estimations de la figure 7.120, le calcul DNS  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et  $Re = 100000$ , dédié aux couches critiques 3D non linéaires du tourbillon de Lamb-Oseen est malheureusement inenvisageable car inaccessible dans l'état actuel de notre code DNS et de nos ressources de calcul. Pour information, à ce jour, la plus grosse simulation aérodynamique menée à l'ONERA a été réalisée par l'unité MHL du DAAP sur une cinquantaine de millions de points (dans le cadre d'une étude concernant des tourbillons longitudinaux), avec le code FLU3M parallélisé sur quatre processeurs et en utilisant un schéma de discrétisation spatiale d'ordre deux. A titre de comparaison, notre code FLUDILES ne fonctionne que sur un seul processeur et nous utilisons un schéma de discrétisation spatiale d'ordre six dans nos calculs DNS.

## 7.7 Conclusions de la dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen

Les calculs DNS présentés dans ce chapitre nous ont permis de répondre en partie aux questions qui se posaient de manière insistante et persistante à la fin des travaux de Fabre & al. [98] et formulées en introduction de ce chapitre, à savoir :

- Comment se comportent des perturbations localisées du tourbillon de Lamb-Oseen, en forme de paquets d'ondes, dans le domaine de la dynamique non linéaire ?

- Est-ce qu'un "mélange" constitué à la fois d'ondes de Kelvin régulières mais aussi de modes normaux singuliers (les modes visqueux centraux et les modes de couches critiques décrits au chapitre 6), pourrait éventuellement être le siège d'une nouvelle famille d'ondes tridimensionnelles purement non linéaires et non amorties, à l'origine de l'éclatement tourbillonnaire observé au banc B20?
- A défaut de découvrir de nouvelles instabilités tourbillonnaires, est-ce que la prise en compte des non linéarités et des non normalités de l'opérateur de Navier-Stokes permet de mettre en évidence, sur le plan de la physique tourbillonnaire, de nouveaux phénomènes propagatifs ou transitoires liés aux ondes de Kelvin, impliquant en particulier les modes rétrogrades et / ou de grandes longueurs d'onde?
- Enfin, sur un plan plus mathématique, quels sont les éventuels effets du spectre continu sur la dynamique tourbillonnaire non linéaire, lequel est pratiquement inaccessible dans la majorité des études de stabilité linéaire et que l'on peut espérer capturer par la DNS?

Nos calculs DNS ont montré que :

- Les modes normaux calculés en théorie de stabilité linéaire sur le modèle de Lamb-Oseen constituent effectivement les "briques" élémentaires de la dynamique tourbillonnaire, comme on a pu le constater par exemple sur notre calcul DNS à  $Re = 100000$  de notre perturbation  $m = 1$ , en retrouvant dans des coupes perpendiculaires à l'axe du tourbillon les contributions caractéristiques des modes hélicoïdaux des familles "D", "L" et "V" ainsi que "C" (décrits au chapitre 6).

- Nos calculs DNS ne nous ont pas permis de mettre clairement en évidence un nouveau type d'instabilité tourbillonnaire, qui serait à l'origine de l'éclatement observé au B20. Pour autant, cela ne signifie en aucun cas qu'une perturbation localisée ne peut pas donner naissance à des ondes tridimensionnelles purement non linéaires et non amorties. En effet, nous rappelons que nos trois perturbations construites au chapitre 4 consistent seulement en des paquets d'ondes et qu'elles n'ont pas été calculées comme les perturbations optimales du tourbillon de Lamb-Oseen.

- Par contre, nous avons montré qu'il existe en dynamique non linéaire des échanges d'énergie entre modes de Kelvin de géométries azimutales différentes, via les non linéarités des équations de Navier-Stokes (cf. résultats de TFD). Ce phénomène nous semble particulièrement intéressant et important car des études ont démontré de possibles changements de natures de l'éclatement tourbillonnaire (en terme de géométrie azimutale), notamment le passage d'un éclatement spiral (à son origine) vers un éclatement axisymétrique simplement en augmentant le nombre de Reynolds.

Le calcul DNS présenté au paragraphe 7.5, bien que non totalement convergé, nous donne des indications sur le développement des couches critiques de géométrie hélicoïdale par l'augmentation du nombre de Reynolds. Avec des moyens de calculs plus importants, une piste de recherche particulièrement intéressante consisterait à augmenter encore le nombre de Reynolds (au prix de maillages extrêmement raffinés et coûteux en ressources de calcul), afin d'investiguer plus profondément l'évolution des couches critiques à des nombres de Reynolds représentatifs

d'un avion de transport (typiquement  $Re \approx 10^7$ ). En effet, il est tout à fait possible, voire probable, que les couches critiques non linéaires se comportent subitement de manière foncièrement différente des couches critiques linéaires pour  $Re > Re_{crit}$ , où  $Re_{crit}$  serait un nombre de Reynolds critique donnant lieu à une instabilité de type croissance transitoire de couches critiques 3D non linéaires non amorties, conduisant à un "éclatement" ou une dispersion du tourbillon de sillage. Ce  $Re_{crit}$  pourrait être totalement hors de notre portée dans l'état actuel de notre code de calcul DNS et de nos moyens de calcul à l'ONERA), car l'effet du nombre de Reynolds est à l'évidence capital. Celui-ci est à plus forte raison plus important en régime non linéaire que dans le régime linéaire. Ces aspects physiques et numériques des couches critiques non linéaires seront discutées respectivement aux paragraphes 8.1 et 8.2.

Sur notre perturbation hélicoïdale  $m = 1$ , nous avons constaté par l'analyse TFD que les échanges d'énergie entre géométries azimutales via les non linéarités sont nettement plus rapides et prononcés par l'augmentation de l'amplitude initiale de la perturbation à bas  $Re$ , que par l'augmentation du  $Re$  sur une perturbation infinitésimale. En effet, on constate sur la figure 7.67 (DNS à  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.5$ ) que la composante axisymétrique atteint des niveaux équivalents à la composante hélicoïdale dès la première période de retournement du tourbillon, alors que la figure 7.114 (DNS à  $Re = 100000$  et  $\varepsilon = 0.01$ ) montre une évolution en crescendo de la composante axisymétrique avec des niveaux significatifs (i.e. à des degrés de l'ordre de la composante hélicoïdale) au bout de six temps de retournement du vortex.

De l'opposition entre la théorie, la pratique et la réalité ...

”Theorie ist wenn man weiß wie es geht und es nicht funktioniert.  
Praxis ist wenn es funktioniert und niemand weiß warum.  
Realität ist wenn nichts funktioniert und niemand weiß warum.”

”La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.  
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.  
La réalité, c'est quand rien ne fonctionne et que personne ne sait pourquoi.”

Albert EINSTEIN.

# Chapitre 8

## Conclusion générale

L'objectif premier de cette thèse était de comprendre l'origine de l'éclatement tourbillonnaire se produisant au banc d'essai B20. Au cours de cette étude, il s'est avéré, de par la complexité du sujet, que plusieurs scénarios sont envisageables pour expliquer ce phénomène et nous nous sommes donc efforcé de l'aborder sous différents angles, en particulier en essayant de concilier, dans la mesure du possible, l'approche expérimentale et théorique avec la simulation numérique.

Nous présentons donc un bilan de nos travaux avant de proposer des perspectives qui nous semblent judicieuses pour tirer profit de cette étude et prolonger ces recherches sur l'éclatement tourbillonnaire dans le sillage des avions de transport.

### 8.1 Synthèse des principaux résultats obtenus

En premier lieu, notre étude bibliographique (chapitre 2) sur les end effects et l'éclatement tourbillonnaire a mis en évidence que ces concepts sont multi-factoriels et recouvrent une grande diversité d'effets dynamiques. Pour ce qui est des end effects, les observations les plus explicites ont été obtenues en bassin hydrodynamique (notamment par Bao et Vollmers au DLR), mais les rapprochements - à défaut de comparaison quantitative - avec les phénomènes propagatifs dans la soufflerie à catapulte du B20 restent très délicats, en raison d'importantes différences dans ces deux types d'essais (fluides utilisés, dimensions des installations, dispositifs de tractage de la maquette, régimes du sillage tourbillonnaire à caractériser etc.). En ce qui concerne plus particulièrement l'éclatement tourbillonnaire, nous avons constaté qu'il existe différentes écoles puisque certains auteurs font une distinction très nette entre le "vortex breakdown" au sens de Benjamin (bifurcation d'un écoulement tourbillonnaire se trouvant dans un état transcritique) et le "vortex bursting" décrit par Spalart (implosion spontanée du coeur d'un tourbillon après propagation et focalisation d'ondes variqueuses), alors que d'autres auteurs associent ces deux terminologies au même concept. Au cours de notre revue bibliographique, il nous est apparu que les physiques de la propagation d'ondes le long d'un tourbillon et de l'éclatement tourbillonnaire pouvaient mettre en jeu de nombreux facteurs, à la fois d'origines bien différentes mais aussi susceptibles d'interagir entre eux : la géométrie des perturbations (caractérisée par le nombre d'onde azimutal) et leurs amplitudes, les effets de la viscosité (caractérisé par le nombre de Reynolds), ainsi que ceux de la tridimensionnalité de l'écoulement. Nos travaux se sont donc attachés à décrire autant les effets de la géométrie azimutale de la perturbation que de son amplitude sur la dynamique du tourbillon de sillage, du fait de la grande richesse des mécanismes décrits au paragraphe 2.2.3.

Le traitement des données PIV du banc B20 (chapitre 3) nous a conduit à mieux caractériser la perturbation observée expérimentalement, en particulier dans les premières phases

de l'éclatement tourbillonnaire. Bien que cette base de données présente des limites certaines pour analyser ce phénomène d'éclatement (mesures PIV bidimensionnelles, quantité limitée de données disponibles sans aucune donnée sur la vitesse axiale, fréquence d'échantillonnage de l'ordre de trois images par seconde, etc.), les conclusions de cette étude nous ont fourni des indications fort utiles quant à la géométrie de l'éclatement du B20. En effet, selon la technique d'extraction du centre tourbillonnaire et les critères d'analyse utilisés, l'interprétation de ces données PIV présente tantôt des caractéristiques d'un éclatement axisymétrique (brusque élargissement du coeur tourbillonnaire, diminution de la vitesse tangentielle maximale et prédominance de la composante axisymétrique dans le spectre azimutal), tantôt des caractéristiques d'une perturbation hélicoïdale (illustrée sur la figure 3.41 représentant la trajectoire du centre du tourbillon).

Les chapitres 2 et 3 nous ont conduit à mettre en place notre démarche de modélisation au chapitre 4 fondée sur la simulation numérique directe (DNS) ainsi qu'à orienter nos hypothèses et choix scientifiques quant au modèle de tourbillon de sillage et la construction des perturbations, tout en tenant compte de l'état actuel des connaissances relatives à la dynamique des tourbillons en général et plus spécifiquement des sillages tourbillonnaires d'avions, ce qui représente une quantité importante d'informations. En effet, les observations de la NASA et plus récemment du NLR (figure 4.7) sur l'éclatement d'un seul des deux tourbillons dans le sillage d'avions de transport en conditions de vol libre, ainsi que le mécanisme physique proposé par Spalart (figure 4.8) et l'étude numérique de Moet & al. [204] nous ont permis de formuler une hypothèse qui a sous-tendu toute notre démarche de modélisation et la suite de notre étude : l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire au banc B20 peut être le fait d'une dynamique inhérente à un seul tourbillon, sans nécessiter l'effet d'un confinement (dû par exemple aux dimensions finies d'une installation expérimentale) ni d'interaction directe avec l'autre tourbillon contra-rotatif (aucune reconnexion des deux tourbillons de bout d'aile n'a été constatée au B20 - figures 4.1 et 4.2 - ni au DLR - figure 1.11).

Au chapitre 5, nous avons présenté le code de calcul FLUDILES que nous avons utilisé pour toutes nos DNS, ainsi que nos développements spécifiques rendus nécessaires pour les besoins de notre étude, en particulier une technique de stabilisation du schéma numérique et notre méthode pour calculer l'évolution des perturbations du tourbillon au cours de nos simulations instationnaires.

Nos calculs DNS sur des perturbations infinitésimales du tourbillon de Lamb-Oseen (chapitre 6) ont montré à Reynolds modéré ( $Re = \frac{\Gamma}{2\pi\nu} = 1000$ ) un remarquable accord avec les résultats de la théorie de stabilité linéaire, développée sur le tourbillon de Lamb-Oseen dans le cas visqueux par Fabre. Cette résolution directe du problème aux valeurs initiales avec les équations complètes de Navier-Stokes confirme ainsi pleinement les résultats obtenus par Fabre [99] à la fin de sa thèse et légitime a posteriori l'idée que l'ensemble des modes normaux du tourbillon de Lamb-Oseen constituent une "pseudo-base" suffisamment dense pour être représentative de sa dynamique linéaire, bien que sa complétude ne soit assurée par aucun théorème mathématique, du fait de l'existence d'un spectre continu dans le cas de ce modèle (question que nous avons mentionnée au paragraphe 2.2.2). En complément des travaux d'Arendt & al. [8] et de Fabre & al. [98, 99], nos calculs montrent que les ondes de Kelvin fournissent effectivement les briques élémentaires pour comprendre la dynamique tourbillonnaire en régime linéaire, au moins dans les cas particuliers des modèles de Rankine et de Lamb-Oseen. Sur le plan de la propagation des ondes de Kelvin, nous avons pu vérifier dans nos simulations directes que seules les ondes axisymétriques ( $m=0$ ) et une partie des ondes hélicoïdales ( $m=1$ ) se propagent à la manière de "paquets d'ondes", alors qu'à l'inverse les ondes elliptiques ( $m=2$ ) s'amortissent rapidement tout en restant localisées. Enfin, du point de vue de l'éclatement tourbillonnaire, nos résultats

DNS montrent que pour des perturbations infinitésimales, il n'y a pas de transition vers une solution différente de celle de la stabilité linéaire, du moins jusqu'à 10 périodes de retournement du vortex à  $Re=1000$ .

Au chapitre 7, nous avons investigué la dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen, en nous concentrant plus particulièrement sur les perturbations capables de se propager le long du vortex, i.e. les perturbations axisymétrique et hélicoïdale, en quête d'un éventuel éclatement du type vortex bursting de Spalart. Ce choix a été motivé par nos résultats du chapitre 6 qui nous ont prouvé que dans le régime linéaire, les non linéarités des équations de Navier-Stokes sur des perturbations infinitésimales ne créent pas de solution multiple [117, 140] et ne conduisent pas le tourbillon de Lamb-Oseen à bifurquer d'un état colonne vers un état éclaté, nous écartant a priori du scénario de vortex breakdown de Benjamin [20, 21, 25].

Sur la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à une perturbation axisymétrique de grande amplitude, on constate une rapide propagation de paquets de vorticité axiale (positive et négative) et une dispersion totale de la perturbation à l'endroit où elle a été initiée au bout de cinq périodes de retournement.

Sur la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen à une perturbation hélicoïdale de grande amplitude, on observe que la physique non linéaire (création de nombreuses petites structures enchevêtrées) est beaucoup plus complexe que la dynamique linéaire (principalement trois structures persistantes et régulières). De plus, la physique non linéaire est d'évolution nettement plus rapide. Ces constatations s'expliquent par la présence du terme de couplage non linéaire ( quation 5.55) dans la résolution DNS, qui assure une recombinaison de l'énergie de la perturbation entre modes azimutaux et génère ainsi les ondes de Kelvin associées à tous les nombres d'ondes azimutaux, en particulier  $m=0$ . La dynamique non linéaire du mode  $m=1$  met en évidence un étirement du paquet d'ondes beaucoup plus rapide que dans le cas linéaire, du fait de l'apparition d'une composante axisymétrique car l'analyse de stabilité linéaire (Fabre [99] et chapitre 6) montre que les ondes de Kelvin axisymétriques exhibent les vitesses de propagation les plus élevées.

Enfin, à l'aide d'estimations à partir des données du B20 et dans l'optique de réaliser une DNS se rapprochant des conditions de similitude avec l'expérience, nous avons fait une simulation directe d'une perturbation hélicoïdale infinitésimale à  $Re=100000$ . Bien qu'il ne soit pas parfaitement convergé malgré le raffinement de maillage, ce dernier calcul retrouve qualitativement la dynamique linéaire obtenue par Fabre [99] en théorie non visqueuse, et nous permet de mettre en évidence, par la DNS, les effets de l'augmentation du nombre de Reynolds, en particulier l'apparition d'une spirale torsadée (forte filamentation du champ de vorticité, caractéristique des couches critiques)   l'endroit où la perturbation a été initiée.

## Bilan de notre étude sur l'éclatement tourbillonnaire du banc B20

Suite à nos travaux et en synth isant nos données de natures expérimentale, théorique et numérique, il nous semble au vu de nos résultats DNS que l'éclatement tourbillonnaire observé au banc B20 est constitué d'ondes axisymétriques et hélicoïdales. Deux mécanismes physiques nous paraissent particulièrement vraisemblables :

- la propagation et la focalisation d'ondes inertielles axisymétriques de grande amplitude, illustrée sur la figure 8.1 au bout de six périodes de retournement du tourbillon. Ce mécanisme est dans le droit-fil du scénario de "vortex bursting" proposé par Spalart [249] et des études numériques réalisées au CERFACS [204, 207, 208]
- l'entrée en résonance, à haut nombre de Reynolds, d'ondes de Kelvin hélicoïdales à la fréquence propre de rotation du tourbillon, illustrée sur la figure 8.2 au bout de six périodes de retourne-

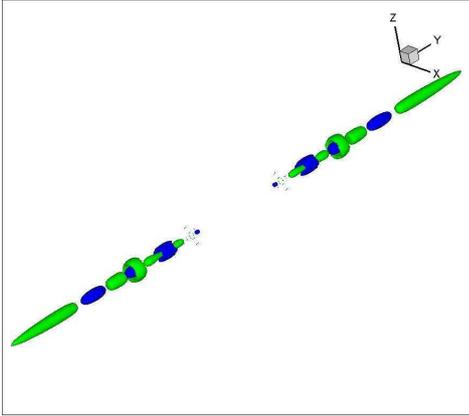


FIG. 8.1 – DNS de notre perturbation  $m=0$  de grande amplitude à  $Re=1000$  -  $T=6$

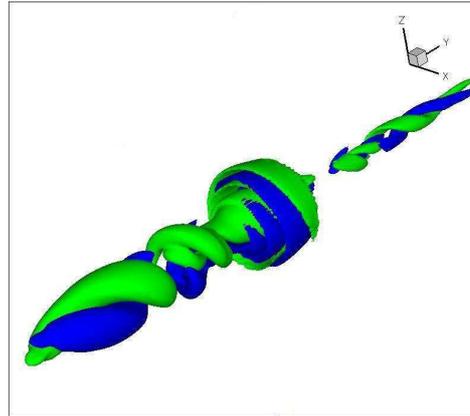


FIG. 8.2 – DNS de notre perturbation  $m=1$  infinitésimale à  $Re=100000$  -  $T=6$

ment du tourbillon. Ce mécanisme est une singularité de type point critique, qui se caractérise par un fort enroulement et une filamentation très fine du champ de vorticité axiale, dénommée couche critique.

## 8.2 Perspectives de prolongation de ces travaux

La synthèse de Coustols & al. [59] présente l'état actuel d'avancement des multiples recherches menées à l'ONERA sur les sillages tourbillonnaires d'avions de transport, et en particulier les efforts pour coordonner au mieux les approches expérimentales, théoriques et numériques. C'est dans cette optique que nous formulons un certain nombre de suggestions pour aller plus loin dans la connaissance de ces sillages tourbillonnaires.

### 8.2.1 Exploitation des données expérimentales

#### Mesures issues de la catapulte B20 de l'ONERA

Il nous semblerait utile de reproduire l'analyse du chapitre 3 sur les données PIV des autres essais de la configuration de base (DFS 26/26) correspondant à des lois d'accélération différentes du catapultage de la maquette, ce que nous n'avons malheureusement pas eu le temps de faire dans cette thèse. En effet, une telle étude pourrait fournir des informations particulièrement utiles dans la modélisation des phénomènes du B20, en plus des études complémentaires mentionnées au paragraphe 4.1.1, notamment pour confirmer définitivement la conjecture selon laquelle la loi d'accélération n'a que peu d'effet sur les end effects et l'éclatement tourbillonnaire.

De plus, en raison de consortium agreements, les données du programme AWIATOR sont la propriété intégrale d'Airbus. C'est ainsi que dans le cadre du programme FAR-Wake, nous avons post-traité les données PIV exclusivement relatives à la configuration de référence (dite "baseline", i.e. la maquette A340 avec le braquage de volets 26/26), sans analyser les autres résultats de mesure concernant des réglages DFS différents et des dispositifs spécifiquement conçus par le DLR et Airbus France, afin de modifier la charge aérodynamique de l'aile et ainsi d'accélérer la dispersion du sillage tourbillonnaire. Avec l'accord préalable d'Airbus, il pourrait être opportun d'analyser ces données PIV, et en priorité celles correspondant aux autres réglages DFS, qui selon la synthèse d'AWIATOR, influencent particulièrement les tourbillons de sillage.

En ce qui concerne les mesures du Lidar au B20, des banques de données et des dépouillements avec Matlab ont été malencontreusement égarés et nous devons nous contenter des conclusions

des rapports techniques.

### Mesures issues des bassins hydrodynamiques

Dans le cadre du WP1 du programme FAR-Wake sur la question des end effects, nous avons entrepris des rapprochements entre les calculs théoriques, numériques et les mesures réalisées en bassin d'eau (DLR, IRPHE) ainsi qu'à la soufflerie B20 (ONERA). Après réflexion avec nos collègues du DLR, il nous est apparu que nos calculs DNS à  $Re=1000$  pourraient tirer profit des mesures réalisées par Bao et Vollmers [11,12]. Malheureusement, cette base de données PIV réalisée au WSG n'est plus disponible <sup>1</sup> et nous ne pouvons nous appuyer que sur leurs publications.

Les comparaisons entre les mesures de l'IRPHE (Meunier [197]) et les études de stabilité linéaire (Fabre [98,99]) ont montré que l'expérience retrouve avec précision plusieurs des modes de Kelvin issus des calculs réalisés sur le modèle de Lamb-Oseen, en particulier des ondes axi-symétriques et hélicoïdales. Ce sont précisément les modes dont on a montré la capacité à se propager le long de l'axe du tourbillon (chapitres 6 et 7), et qui participent des end-effects observés à la catapulte B20 de l'ONERA Lille.

### 8.2.2 Développements informatiques dans le code de calcul FLUDILES

Nos résultats numérique des chapitres 6 et 7 ont montré que le code FLUDILES est opérationnel et validé. Cependant, les calculs DNS 3D instationnaires à 16 M de points réalisés sur un seul processeur posent de sérieuses difficultés en termes de temps de restitution, ce qui est pénalisant pour balayer les différents paramètres de notre modélisation (nombre d'onde azimutal et amplitude de la perturbation initiale, nombre de Reynolds). C'est pourquoi nous préconisons en premier lieu que le code FLUDILES soit parallélisé sur plusieurs processeurs (comme c'est le cas d'autres codes ONERA tels qu'Elsa, FLU3M ou Sabrina), par des techniques telles qu'Open MP ou MPI qui améliorent sensiblement les performances. A titre d'exemple, des simulations instationnaires équivalentes utilisant les mêmes schémas numériques (une dizaine de périodes de retournement de tourbillon sur des maillages d'une quinzaine de millions de points) demandent environ deux semaines de calcul à l'ONERA avec le code FLUDILES sur un seul processeur, contre une demi journée au CERFACS avec le code NTMX3D parallélisé sur huit processeurs <sup>2</sup>. De plus, en l'état actuel de la gestion des travaux sur le super-calculateur vectoriel de l'ONERA (NEC SX8 "Iseran"), la parallélisation de FLUDILES est impérative, pour des raisons de mémoire, si on souhaite réaliser des DNS sur des maillages dépassant 16 M de points. La parallélisation du code FLUDILES est actuellement envisagée à l'ONERA, en particulier au département DMPH <sup>3</sup>. De plus, la parallélisation des grands codes de calcul est fortement recommandée par les gestionnaires des supercalculateurs, non seulement pour réduire les temps de restitution mais aussi dans l'intérêt général de l'ensemble des utilisateurs car cela permet d'optimiser la charge de calcul de la machine mutualisée <sup>4</sup>.

En outre, il serait très utile de modifier le schéma d'intégration en temps en le rendant implicite. En effet, le code FLUDILES emploie dans l'état actuel un schéma temporel explicite, ce qui est particulièrement pénalisant pour nos DNS instationnaires à  $Ma=0.1$  (dynamique dominée par le temps de la viscosité), avec raffinement de maillage (en augmentant  $Re$ ). Pour assurer

<sup>1</sup>communications personnelles avec Thomas GERZ (DLR Oberpfaffenhofen)

<sup>2</sup>communications personnelles avec Laurent NYBELEN (CERFACS)

<sup>3</sup>communications personnelles avec Emmanuel MONTREUIL (ONERA/DMPH/EAG)

<sup>4</sup>communications personnelles avec Paul LEVART et Emeric MARTIN (ONERA/DRIS)

la stabilité du schéma explicite, le pas de temps doit être d'autant plus petit que la taille de maille est plus raffinée, ce qui rallonge considérablement les nombres d'itérations et les temps de restitution.

Enfin, il pourrait être judicieux de modifier les conditions aux limites de FLUDILES selon l'axe du tourbillon (dans la direction  $y$ ), en remplaçant les conditions périodiques par des conditions de non-réflexion, dans le but de limiter les maillages (et donc le nombre total de points de discrétisation). Nous avons envisagé de réaliser ce développement dans cette thèse mais ne l'avons pas fait car d'un point de vue physique, cela réduit de facto la fenêtre d'observation selon l'axe du tourbillon (alors que nous étudions les ondes et phénomènes qui se propagent dans cette direction), et d'un point de vue numérique nous n'étions pas certain que cette technique permette effectivement d'absorber les structures cohérentes atteignant les bornes du maillage sans impacter la partie observable de l'écoulement (risque de réflexion d'onde). En fait, ce développement - s'il s'avère suffisamment robuste sur le plan numérique - serait pertinent, dans le cas où on aurait des idées précises des durées physiques (cf. paragraphe 7.4.3) et des longueurs le long de l'axe du tourbillon à simuler par la DNS pour observer numériquement un éclatement tourbillonnaire.

### 8.2.3 Les outils de post-traitement et d'analyse physique

Nous proposons ici quelques pistes pour approfondir le post-traitement des calculs DNS avec le code FLUDILES, et ainsi affiner leur interprétation physique.

En parallèle des développements que nous préconisons dans le code FLUDILES, nous pensons que des renseignements plus fins sur la caractérisation de la propagation des ondes de Kelvin peuvent être également apportés par une analyse de type POD appliquée aux champs instationnaires que nous avons obtenus par nos calculs DNS. Nous recommandons en particulier les travaux de J. L. Lumley & al. [133,187,215], véritable pionnier de la méthode POD dès 1967. Sur ce thème, nous pouvons également citer les travaux menés plus récemment au DSN de l'ONERA par Couplet & al. [53–57].

Par ailleurs, Larchevêque [163] décrit dans le chapitre 3 de sa thèse un outil de post-traitement permettant de calculer les vitesses convectives sous-jacentes d'un écoulement au moyen d'autocorrélations spatio-temporelles. Cette procédure, qui peut s'avérer très lourde en terme de volume informatique des données à stocker (cf. les commentaires de Larchevêque qui a mis en place cette technique sur des LES 3D instationnaires d'écoulement de cavité), pourrait selon nous, fournir un outil adéquat, i.e. d'une précision suffisante pour discriminer et quantifier finement les multiples vitesses de propagation le long du tourbillon exhibées dans nos DNS, correspondant aux différents paquets et nombres d'ondes constituant la perturbation initiale (cf. les branches des diagrammes de stabilité de Fabre [99], solutions de l'équation de dispersion).

Enfin, nous avons constaté sur nos calculs DNS, notamment au chapitre 6, qu'il est déjà très délicat en dynamique linéaire d'identifier les multiples vitesses de propagation des ondes présentes dans l'écoulement, en discriminant les différents modes d'une géométrie azimutale donnée de perturbation, afin de faire des comparaisons quantitatives avec la théorie de stabilité linéaire. Ayant montré que la réponse du tourbillon de Lamb-Oseen prend la forme de paquets d'ondes dont certains se propagent en structures cohérentes, cette difficulté à identifier les vitesses de propagation est encore plus grande en régime non linéaire, du fait du "mélange" des modes azimutaux (chapitre 7). De notre point de vue, une analyse en ondelettes et ondes de Gabor appliquée - dans un premier temps - à des variables monodimensionnelles de nos calculs DNS pourrait conduire à une quantification fine des vitesses de propagation d'onde. Les ouvrages de Mallat [189, 190] fournissent une remarquable introduction au traitement des signaux en

ondelettes. De plus, la thèse de Martinez [192] présente des techniques spécifiques de traitement du signal en ondelettes et comment les mettre en pratique sur des signaux instationnaires en aérodynamique.

#### 8.2.4 Quelques perspectives de calculs DNS pour l'avenir

Nous proposons pour finir quelques pistes de simulations numériques, qui nous sembleraient prioritaires pour compléter nos résultats DNS sur la dynamique non linéaire du tourbillon de Lamb-Oseen.

(1) Pour approfondir la perturbation  $m = 1$ , nous voyons trois points à explorer :

- Nous avons évoqué au paragraphe 7.6.3.3 le calcul DNS de notre perturbation  $m = 1$  à  $Re = 100000$  et  $\varepsilon = 0.5$  pour examiner plus avant les couches critiques 3D non linéaires. Avec les estimations des maillages nécessaires pour simuler six ou dix rotations du tourbillons (cf. figure 7.120), cela ne sera réalisable que si le code FLUDILES est à terme parallélisé sur plusieurs processeurs.
- Une autre façon d'étudier la dynamique hélicoïdale non linéaire consisterait à initialiser le calcul DNS par un déplacement de grande amplitude du centre du tourbillon suivant une trajectoire en forme d'hélice. Nous ne l'avons pas fait dans cette thèse parce que ce cas d'étude pourrait être délicat à interpréter physiquement, du fait qu'il ne s'agit plus d'un monopôle soumis à une perturbation localisée.
- Dans l'état actuel des connaissances sur le tourbillon de Lamb-Oseen, il pourrait être envisageable de calculer analytiquement une nouvelle perturbation initiale de géométrie azimutale  $m = 1$ , construite comme un "paquet d'ondes" (idée d'Arendt & al. [8] et de Fabre [99]), mais dont la composition serait restreinte à des modes hélicoïdaux singuliers des familles "C" et "L", localisés respectivement en périphérie intérieure du coeur tourbillonnaire et à l'extérieur du noyau du vortex. Cette simulation par la DNS aurait pour but de vérifier la conjecture que nous avons émise au paragraphe 7.6.2, selon laquelle il pourrait exister une interaction entre ces deux classes d'ondes avec effets réciproques, via la triple action du terme non linéaire, de la tridimensionnalité et de la viscosité. Antkowiak et Brancher [6] ont montré que ce mécanisme fonctionne dans un sens (de l'extérieur vers l'intérieur du coeur tourbillonnaire) mais la réciproque, si elle est réelle, reste à démontrer.

(2) En dernier lieu, il nous paraîtrait judicieux de réaliser un calcul DNS sur notre perturbation  $m = 2$  à  $Re = 1000$  et  $\varepsilon = 0.5$ , analogue à la simulation du paragraphe 7.3 (maillage à 16 M points pour simuler dix rotations du vortex), mais sur notre configuration en double hélice. Ce dernier calcul DNS répondrait à deux objectifs :

- D'un point de vue théorique, la question des couches critiques, de leur régularisation sous le double effet de la viscosité et du terme non linéaire, se pose pour toute perturbation non axi-symétrique, donc en particulier pour  $m = 2$ .
- Sur un plan plus pratique par rapport à l'éclatement tourbillonnaire du banc B20, certains auteurs comme Arendt & al. [8] soupçonnent de possibles interactions entre les géométries azimutales  $m = 0$  (le tourbillon porteur) et  $m = 2$  (une perturbation localisée), qui pourraient conduire à un mécanisme d'instabilité.

De l'opposition entre la science et l'art, dans la quête humaine d'une vérité absolue ou relative

...

”[...] La science est autre. Le relatif qui la gouverne s'y imprime, et cette série d'empreintes successives constitue la certitude mobile de l'homme. En science, des choses ont été chefs-d'oeuvre et ne le sont plus. La machine de Marly a été chef-d'oeuvre.

[...] La science cherche le mouvement perpétuel : elle l'a trouvé, c'est elle-même... Tout remue en elle, tout change, tout fait peau neuve... La science va sans cesse se raturant elle-même... Elle est l'asymptote de la vérité : elle approche sans cesse et ne touche jamais.

Hippocrate est dépassé ; Archimède, Paracelse, Vésale, Copernic, Lavoisier sont dépassés.  
Pascal savant est dépassé, Pascal écrivain ne l'est pas.”

Victor HUGO, *William Shakespeare*.  
in *Oeuvres complètes de Victor HUGO*, tome II, Paris, Pierre-Jules HETZEL, 1882.

# Communications

## Programme Européen FAR-Wake : DNS and analysis of data from far field wake facilities

"Kick-off", IRPHE Marseille, 1 & 2 février 2005

Premier meeting annuel, TUM Garching (Munich), 16 & 17 février 2006

Meeting technique du WP1, ETSII Malaga, 14 & 15 septembre 2006

Deuxième meeting annuel, ONERA-CERT Toulouse, 8 & 9 février 2007

Rapport technique final (WP 1 - ST 1.1.2-4) [166]

## Workshops

Workshop Wake Net 2 - Europe, ONERA-CERT Toulouse, 9 & 10 février 2005

## Congrès avec comité de relecture

O. Thomas, D. Sipp, L. Jacquin, D. Fabre, P. Sagaut, E. Coustols, P. Servel  
*Etude de l'éclatement tourbillonnaire dans les sillages des avions de transport.*  
18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007, thème S9 : dynamique des tourbillons.

# Bibliographie

- [1] M. Abid. Nonlinear mode selection in a model of trailing line vortices. *J. of Fluid Mech.*, 805 :19–45, 2008.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New-York, 1965.
- [3] A. Agrawal and A. K. Prasad. Properties of vortices in the self-similar turbulent jet. *Experiments in Fluids*, 33 :565–577, 2002.
- [4] A. Antkowiak and P. Brancher. A generic mechanism for by-pass transition in vortices? *21ème Congrès ICTAM, Varsovie, 15-21 août 2004*.
- [5] A. Antkowiak and P. Brancher. Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids*, 16(1) :L1–L4, 2004.
- [6] A. Antkowiak and P. Brancher. On vortex rings around vortices : an optimal mechanism. *J. of Fluid Mech.*, 578 :295–304, 2007.
- [7] Arnaud Antkowiak. *Dynamique aux temps courts d'un tourbillon isolé*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [8] S. Arendt, D. C. Fritts, and O. Andreassen. The initial value problem for Kelvin vortex waves. *J. of Fluid Mech.*, 344 :181–212, 1997.
- [9] D. J. Baker. A technique for the precise measurement of small fluid velocities. *J. of Fluid Mech.*, 26 :573–575, 1966.
- [10] N. J. Balmforth, S. G. Llewellyn Smith, and W. R. Young. Disturbing vortices. *J. of Fluid Mech.*, 426 :95–133, 2001.
- [11] F. Bao and H. Vollmers. Alleviation of end-effect in facilities for far wake investigations. *AIAA Paper*, (2005), 2001.
- [12] F. Bao, H. Vollmers, and H. Mattner. Experimental study on controlling wake vortex in water towing tank. *ICIASF'03 Göttingen, Germany (Paper 8.3 Proceedings pp. 214-223)*, 2003.
- [13] A. P. Bassom and A. D. Gilbert. The spiral wind-up of vorticity in an inviscid planar vortex. *J. of Fluid Mech.*, 371 :109–140, 1998.
- [14] G. K. Batchelor. Axial flow in trailing line vortices. *J. of Fluid Mech.*, 20(4) :645–658, 1964.
- [15] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [16] G. K. Batchelor and A. E. Gill. Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. of Fluid Mech.*, 14(4) :529–551, 1962.
- [17] G. K. Batchelor and I. Proudman. The effect of rapid distorsion on a fluid in turbulent motion. *Q. J. Mech. Appl. Maths*, 7 :83–103, 1954.
- [18] C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 1999.

- 
- [19] T. B. Benjamin. The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity. *J. of Fluid Mech.*, 12 :97–116, 1962.
- [20] T. B. Benjamin. Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. of Fluid Mech.*, 14 :593–630, 1962.
- [21] T. B. Benjamin. Significance of the vortex breakdown phenomenon. *ASME, Paper No.64-WA/FE-18*, 1964.
- [22] T. B. Benjamin. Internal waves of finite amplitude and permanent form. *J. of Fluid Mech.*, 25 :241–270, 1966.
- [23] T. B. Benjamin. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *J. of Fluid Mech.*, 27 :417–430, 1967.
- [24] T. B. Benjamin. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. of Fluid Mech.*, 29 :559–592, 1967.
- [25] T. B. Benjamin. Some developments in the theory of vortex breakdown. *J. of Fluid Mech.*, 28 :65–84, 1967.
- [26] T. B. Benjamin. A new kind of solitary wave. *J. of Fluid Mech.*, 245 :401–411, 1992.
- [27] T. B. Benjamin and A. T. Ellis. Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles. *J. of Fluid Mech.*, 212 :65–80, 1990.
- [28] D. J. Benney and R. F. Bergeron. A new class of nonlinear waves in parallel flows. *Stud. Appl. Maths*, 48 :181–204, 1969.
- [29] S. Benyounes and V. Chong. Etude des instabilités de sillage d’un avion de transport. *Rapport de stage, Université de Versailles Saint-Quentin en Yvelines*, 2007.
- [30] P. S. Beran. Numerical simulations of trailing vortex bursting. *AIAA Paper*, 87 :1313–, 1987.
- [31] P. S. Beran and F. E. C. Culick. The role of non-uniqueness in the development of vortex breakdown in tubes. *J. of Fluid Mech.*, 242 :491–527, 1992.
- [32] A. J. Bernoff and J. F. Lingeitch. Rapid relaxation of an axisymmetric vortex. *Phys. Fluids*, 6(11) :3717–3723, 1994.
- [33] A. Bers. *Linear waves and instabilities*. In C. De Witt and J. Peyraud, editors, *Physique des Plasmas*. Gordon & Breach, New-York, 1975.
- [34] A. J. Bilanin, M. E. Teske, and G. G. Williamson. Vortex interactions and decay in aircraft wakes. *AIAA Journal*, 15(2) :250–260, 1976.
- [35] P. Billant, P. Brancher, and J. M. Chomaz. Three-dimensional stability of a vortex pair. *Phys. Fluids*, 11(8) :2069–2077, 1999.
- [36] P. Billant, J. M. Chomaz, and P. Huerre. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *J. of Fluid Mech.*, 376 :183–219, 1998.
- [37] G. A. Blaisdell, E. T. Spyropoulos, and J. H. Qin. The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods. *Applied Numerical Mathematics*, 21 :207–219, 1996.
- [38] Gregory Allan Blaisdell. *Numerical Simulation of compressible homogeneous turbulence*. PhD thesis, U. M. I., 1991.
- [39] R. J. Briggs. *Electron-stream interaction with plasmas*. MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1964.
- [40] R. J. Briggs, J. D. Daugherty, and R. H. Levy. Role of Landau damping in crossed-field electron beams and inviscid shear flows. *Phys. Fluids*, 13(2) :421–432, 1970.

- [41] V. Brion, D. Sipp, and L. Jacquin. Optimal amplification of the Crow instability. *Phys. Fluids*, 19, 2007.
- [42] G. L. Brown and J. M. Lopez. Axisymmetric vortex breakdown. Part 2. Physical mechanisms. *J. of Fluid Mech.*, 221 :553–576, 1990.
- [43] Stéphane Brunet. *Etude numérique et expérimentale du mélange des jets de moteurs dans les tourbillons de sillage d'un avion de ligne*. PhD thesis, Thèse de Doctorat, Université de Provence, 1999.
- [44] K. M. Case. Stability of inviscid plane Couette flow. *Phys. Fluids*, 3(2) :143–148, 1960.
- [45] T. Castelain. *Contrôle de jet par microjets impactants. Mesure de bruit rayonné et analyse aérodynamique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [46] P. Chassaing. *Mécanique des fluides : éléments d'un premier parcours*. Cépaduès Editions, 1997.
- [47] H. Chevalier. Flight test studies of the formation and dissipation of trailing vortices. *Journal of Aircraft*, 10 :14–18, 1973.
- [48] J. M. Chomaz. Fully nonlinear dynamics of parallel wakes. *J. of Fluid Mech.*, 495 :57–75, 2003.
- [49] J.-M. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and non-linearity. *Annu. Rev. Journal of Fluid Mechanics*, 37 :357–392, 2005.
- [50] S. M. Churilov and I. G. Schukhman. The nonlinear critical layer resulting from the spatial or temporal evolution. *J. of Fluid Mech.*, 318 :189–221, 1996.
- [51] Fabien Coppens. *Simulations numériques sur le développement de la turbulence dans un tourbillon*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1998.
- [52] L. Coquart, D. Sipp, and L. Jacquin. Mixing induced by rayleigh-taylor instability in a vortex. *Phys. Fluids*, 17 :-, 2005.
- [53] M. Couplet, C. Basdevant, and P. Sagaut. Modélisation d'un écoulement turbulent par un système dynamique de dimension réduite. *CANUM, Montpellier, 02-06 juin 2003*.
- [54] M. Couplet, C. Basdevant, and P. Sagaut. Calibrated reduced-order POD-Galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207 :192–220, 2005.
- [55] M. Couplet, P. Sagaut, and C. Basdevant. Stabilized reduced POD-Galerkin models for turbulent flows. *ECCOMAS, Jyväskylä (Finlande), 24-28 juillet 2004*.
- [56] M. Couplet, P. Sagaut, and C. Basdevant. Intermodal energy transfers in POD-Galerkin representation of a turbulent separated flow. *J. of Fluid Mech.*, 491 :275–284, 2003.
- [57] Mathieu Couplet. *Modélisation POD-Galerkin réduite pour le contrôle des écoulements instationnaires*. PhD thesis, Université Paris XIII, 2005.
- [58] E. Coustols, P. Coton, A. Dolfi-Bouteyre, A. Gilliot, and F. Moens. Analysis of onera B20 catapult tests (test campaigns : I to iv). *AWIATOR D1.1.4-5, ONERA RT n°14/07311 DAAP/DMAE*, 2007.
- [59] E. Coustols, O. Labbé, F. Moens, P. Molton, and L. Jacquin. Synthèse des recherches menées à l'ONERA sur la caractérisation des tourbillons de sillage et leur contrôle dans le cadre de programmes nationaux et de collaborations européennes. *Congrès AAAF, Poitiers, 10-12 mars 2008*, 2008.
- [60] E. Coustols, E. Stumpf, L. Jacquin, F. Moens, H. Vollmers, and T. Gerz. 'minimised wake' : a collaborative research programme on aircraft wake vortices. *AIAA Journal*, pages 938–953, 2003.
- [61] J. D. Crouch. Instability and transient growth for two trailing-vortex pairs. *J. of Fluid Mech.*, 350 :311–330, 1997.

- [62] J. D. Crouch and L. Jacquin. Aircraft trailing vortices. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 6, 2005.
- [63] J. D. Crouch, G. D. Miller, and P. R. Spalart. Active-control system for breakup of airplane trailing vortices. *AIAA Journal*, 39(12) :2374–2381, 2001.
- [64] S. C. Crow. Stability theory of a pair of trailing vortices. *AIAA Journal*, 8 :2172–2179, 1970.
- [65] A. Davey. The propagation of a weak nonlinear wave. *J. of Fluid Mech.*, 53 :769–781, 1972.
- [66] A. Davey, L. M. Hocking, and K. Stewartson. On the nonlinear evolution of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. *J. of Fluid Mech.*, 63 :529–536, 1974.
- [67] I. Delbende, J.-M. Chomaz, and P. Huerre. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response. *J. of Fluid Mech.*, 355 :229–254, 1998.
- [68] I. Delbende, M. Rossi, and S. Le Dizès. Stretching effects on the three-dimensional stability of vortices with axial flow. *J. of Fluid Mech.*, 454 :419–442, 2002.
- [69] W. J. Devenport, M. C. Rife, S. I. Liapis, and G. J. Follin. The structure and development of a wing-tip vortex. *J. of Fluid Mech.*, 312 :67–106, 1996.
- [70] W. J. Devenport, C. M. Vogel, and J. S. Zsoldos. Flow structure produced by the interaction and merger of a pair of co-rotating wing-tip vortices. *J. of Fluid Mech.*, 394 :357–377, 1999.
- [71] W. J. Devenport, J. S. Zsoldos, and C. M. Vogel. The structure and development of a counter-rotating wing-tip vortex pair. *J. of Fluid Mech.*, 332 :71–104, 1997.
- [72] S. Le Dizès. Non-axisymmetric vortices in two-dimensional flows. *J. of Fluid Mech.*, 406 :175–198, 2000.
- [73] S. Le Dizès. *Structure of a new family of stretched non-axisymmetric vortices*. In J. C. R. Hunt and J. C. Vassilicos, editors, *Turbulence Structure and Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [74] S. Le Dizès. Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Phys. Fluids*, 12(11) :2762–2774, 2000.
- [75] S. Le Dizès. Inviscid waves on a Lamb-Oseen vortex in a rotating stratified fluid : consequences for the elliptic instability. *J. of Fluid Mech.*, 597 :283–303, 2008.
- [76] S. Le Dizès, P. Brancher, E. Coustols, L. Nybelen, and L. Jacquin. Previous work and present knowledge on vortex instabilities and decay. *FAR-Wake Deliverable D 1.0*, 2005.
- [77] S. Le Dizès and D. Fabre. Large-Reynolds-number asymptotic analysis of viscous centre modes in vortices. *J. of Fluid Mech.*, 585 :153–180, 2007.
- [78] S. Le Dizès and L. Lacaze. An asymptotic description of vortex Kelvin modes. *J. of Fluid Mech.*, 542 :69–96, 2005.
- [79] S. Le Dizès and F. Laporte. Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *J. of Fluid Mech.*, 471 :169–201, 2002.
- [80] S. Le Dizès and A. Verga. Viscous interactions of two co-rotating vortices before merging. *J. of Fluid Mech.*, 467 :389–410, 2002.
- [81] J. M. Délerly. Physics of vortical flows. *Journal of Aircraft*, 29(5) :856–876, 1992.
- [82] P. G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge texts in Applied Mathematics, 2002.
- [83] P. G. Drazin and W. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 1981.

- [84] T. Van Driest. *Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco-method*. NACA TN 2597, 1952.
- [85] D. Dritschel. On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows. *J. of Fluid Mech.*, 371 :141–155, 1998.
- [86] K. Duraisamy and S. K. Lele. Evolution of isolated turbulent trailing vortices. *Phys. Fluids*, 20, 2008.
- [87] C. Eloy and S. Le Dizès. Three-dimensional instability of Burgers and Lamb-Oseen vortices in a strain field. *J. of Fluid Mech.*, 378 :145–166, 1999.
- [88] C. Eloy and S. Le Dizès. Stability of the rankine vortex in a multipolar strain field. *Phys. Fluids*, 13(3) :660–676, 2001.
- [89] Christophe Eloy. *Instabilité multipolaire de tourbillons*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, 2000.
- [90] M. P. Escudier and N. Zehnder. Vortex-flow regimes. *J. of Fluid Mech.*, 115 :105–121, 1982.
- [91] D. Fabre, C. Cossu, and L. Jacquin. Spatio-temporal development of the long and short-wave vortex-pair instabilities. *Phys. Fluids*, 12 :-, 2000.
- [92] D. Fabre and S. Le Dizès. Viscous and inviscid centre modes in the linear stability of vortices : the vicinity of the neutral curves. *J. of Fluid Mech.*, 603 :1–38, 2007.
- [93] D. Fabre and L. Jacquin. Dynamique linéaire d’un tourbillon de Lamb-Oseen. *18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007, thème S9 : dynamique des tourbillons*.
- [94] D. Fabre and L. Jacquin. Stability of a four-vortex aircraft wake model. *Phys. Fluids*, 12(10) :2438–2443, 2000.
- [95] D. Fabre and L. Jacquin. Short-wave cooperative instabilities in representative aircraft vortices. *Phys. Fluids*, 16(5) :-, 2004.
- [96] D. Fabre and L. Jacquin. Viscous instabilities in trailing vortices at large swirl numbers. *J. of Fluid Mech.*, 500 :239–262, 2004.
- [97] D. Fabre, L. Jacquin, and A. Loof. Optimal perturbations in a four-vortex aircraft wake in counter-rotating configuration. *J. of Fluid Mech.*, 451 :319–328, 2002.
- [98] D. Fabre, D. Sipp, and L. Jacquin. Kelvin waves and the singular modes of the Lamb-Oseen vortex. *J. of Fluid Mech.*, 551 :235–274, 2006.
- [99] David Fabre. *Instabilités et instationnarités dans les tourbillons : application aux sillages d’avions*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.
- [100] J. H. Faler. Some experiments in swirling flows : detailed velocity measurements of a vortex breakdown using a laser doppler anemometer. *NASA C. R. 135115*, 1976.
- [101] J. H. Faler and S. Leibovich. Disrupted states of vortex flows and vortex breakdown. *Phys. Fluids*, 20(9) :1385–1400, 1977.
- [102] J. H. Faler and S. Leibovich. An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown. *J. of Fluid Mech.*, 86 :313–335, 1978.
- [103] C. A. J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics, specific techniques for different flow categories*, volume 2. Springer, 1991.
- [104] C. Ferreira Gago. *Fludiles, guide de l’utilisateur*. Technical report, ONERA, 2004.
- [105] C. Ferreira Gago, S. Brunet, and F. Garnier. Numerical investigation of turbulent mixing in a jet/wake vortex interaction. *AIAA Journal*, 40(2) :276–284, 2002.

- [106] Cécile Ferreira Gago. *Simulations numériques d'un jet rond turbulent et de son interaction avec un tourbillon de sillage*. PhD thesis, Université de Marne La Vallée, 2002.
- [107] F. Gallaire and J. M. Chomaz. Mode selection in swirling jet experiments : a linear stability analysis. *J. of Fluid Mech.*, 494 :223–253, 2003.
- [108] F. Gallaire, M. R. Ruith, E. Meiburg, J.-M. Chomaz, and P. Huerre. Spiral vortex breakdown as a global mode. *J. of Fluid Mech.*, 549 :71–80, 2006.
- [109] François Gallaire. *Instabilités dans les jets tournants et contrôle de l'éclatement tourbillonnaire*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.
- [110] A. Gilliot and A. Schröder. Report of onera B20 catapult tests (PIV measurements - february 2005 campaign). *AWIATOR D1.1.2-25, ONERA RT n°9/07311 DAAP*, 2005.
- [111] D. Goular, D. Fleury, J.-P. Lafforgue, A. Dolfi, and J.-P. Cariou. Caractérisation de tourbillons de sillage par triangulation lidar. *9ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser*, 2004.
- [112] Laurent Graftiaux. *Etude expérimentale de l'instabilité d'un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [113] L. Graftiaux, M. Michard, and N. Grosjean. Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. *Meas. Sci. Technol.*, 12 :1422–1429, 2001.
- [114] S. I. Green. *Wing tip vortices, In Fluid Vortices*.
- [115] H. P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1968.
- [116] R. Grimshaw. Resonant flow of a rotating fluid past an obstacle : the general case. *Studies in Applied Math.*, 83 :249–269, 1990.
- [117] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [118] I. Gursul and C. M. Ho. Vortex breakdown over delta wings in unsteady freestream. *AIAA Journal*, 32(2) :433–436, 1993.
- [119] R. Haberman. Critical layers in parallel flows. *Studies in Applied Math.*, 51 :139–161, 1972.
- [120] R. Haberman. Note on slightly unstable nonlinear wave systems. *J. of Fluid Mech.*, 58 :129–142, 1973.
- [121] R. Haberman. Wave-induced distortions of a slightly stratified shear flow : a nonlinear critical-layer effect. *J. of Fluid Mech.*, 58 :727–735, 1973.
- [122] R. Haberman. Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 37(1) :69–106, 1979.
- [123] R. Haberman. Slow passage through a transcritical bifurcation for Hamiltonian systems and the change in action due to a nonhyperbolic homoclinic orbit. *CHAOS Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(3) :641–, 2000.
- [124] M. Hafez and J. Ahmad. Vortex breakdown simulation. part II. *AIAA Paper*, 88 :508–, 1988.
- [125] M. G. Hall. Vortex breakdown. *Annu. Rev. of Fluid Mechanics*, 4 :195–218, 1972.
- [126] W. L. H. Hallet. Swirl generator for independent variation of swirl and velocity profile. *AIAA Journal*, 24(7) :1212–1213, 1986.
- [127] W. L. H. Hallet and D. J. Toews. The effects of inlet conditions and expansion ratio on the onset of flow reversal in swirling flow in a sudden expansion. *Exp. in Fluids (Springer-Verlag)*, 5 :129–133, 1987.

- [128] H. Hanazaki. On the wave excitation and the formation of recirculation eddies in an axisymmetric flow of uniformly rotating fluids. *J. of Fluid Mech.*, 322 :165–200, 1996.
- [129] J. K. Harvey. Some observations of the vortex breakdown phenomenon. *J. of Fluid Mech.*, 14 :585–592, 1962.
- [130] H. Hasimoto. A soliton on a vortex filament. *J. of Fluid Mech.*, 51 :477–485, 1972.
- [131] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1. John Wiley and Sons, 1991.
- [132] L. M. Hocking, K. Stewartson, J. T. Stuart, and S. N. Brown. A nonlinear instability burst in plane parallel flow. *J. of Fluid Mech.*, 51 :705–735, 1972.
- [133] P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics, 1996.
- [134] F. Holzäpfel, T. Gerz, and R. Baumann. The turbulent decay of trailing vortex pairs in stably stratified environments. *Aerosp. Sci. Technol.*, 5 :95–108, 2001.
- [135] E. J. Hopfinger, F. K. Browand, and Y. Gagne. Turbulence and waves in a rotating tank. *J. of Fluid Mech.*, 125 :505–534, 1982.
- [136] L. N. Howard and A. S. Gupta. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. of Fluid Mech.*, 14 :463–476, 1962.
- [137] P. Huerre and M. Rossi. *Hydrodynamic instabilities in open flows*. In C. Godrèche and P. Manneville, editors, *Hydrodynamic and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press, 1998.
- [138] J. P. Hulin, E. Guyon, and P. Petitjeans. Avions et tourbillons. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, (852) :377–386, 2003.
- [139] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. *Center for Turbulence Research*.
- [140] G. Ioss and D. D. Joseph. *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [141] L. Jacquin. Aérodynamique, tourbillons et turbulence. *AFM - EDP Sciences, Mécanique & Industries*, 8 :81–92, 2007.
- [142] L. Jacquin, D. Fabre, P. Geffroy, and E. Coustols. The properties of a transport aircraft wake in the extended near field : an experimental study. *AIAA Paper*, (2001), 2001.
- [143] L. Jacquin, D. Fabre, D. Sipp, and E. Coustols. Unsteadiness, instability and turbulence in trailing vortices. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 6, 2005.
- [144] L. Jacquin, D. Fabre, D. Sipp, V. Theofilis, and H. Vollmers. Instability and unsteadiness of aircraft wake vortices. *Aero. Sci. Tech.*, 7 :577–593, 2003.
- [145] L. Jacquin and C. Pantano. On the persistence of trailing vortices. *J. of Fluid Mech.*, 471 :159–168, 2002.
- [146] S. Jakirlic, K. Hanjalic, and C. Tropea. Modeling rotating and swirling turbulent flows : a perpetual challenge. *AIAA Journal*, 40(10) :1984–1996, 2002.
- [147] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. of Fluid Mech.*, 285 :69–94, 1995.
- [148] M. C. Jones, K. Hourigan, and M. C. Thompson. The generation and suppression of vortex breakdown by upstream swirl perturbations. *14th Australian Fluid Mechanics Conference, Adelaide, 10-14 December 2001*.
- [149] M. R. Khorrami. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. of Fluid Mech.*, 225 :197–212, 1991.

- [150] F. Köpp, I. Smalikho, and S. Rahm. Characterization of aircraft wake vortices by multiple-lidar triangulation. *AIAA Journal*, 41(6) :1081–1088, 2003.
- [151] R. Krasny. A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation. *J. of Fluid Mech.*, 167 :65–93, 1986.
- [152] A. Kribus and S. Leibovich. Instability of strongly nonlinear waves in vortex flows. *J. of Fluid Mech.*, 269 :247–264, 1994.
- [153] M. Kurosaka, M. Kikuchi, K. Hirano, T. Yuge, and H. Inoue. Interchangeability of vortex-breakdown types. *Exp. in Fluids (Springer-Verlag)*, 34 :77–86, 2003.
- [154] O. Labbé and P. Sagaut. Numerical simulation behind an A300 Airbus model. *ICMAR*, 2004.
- [155] E. Labourasse and P. Sagaut. Reconstruction of turbulent fluctuations using a hybrid RANS/LES approach. *Journal of Computational Physics*, 182 :301–336, 2002.
- [156] Emmanuel Labourasse. *Reconstruction des fluctuations turbulentes par une approche hybride RANS/SGE*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.
- [157] L. Lacaze, K. Ryan, and S. Le Dizès. Elliptic instability in a strained Batchelor vortex. *J. of Fluid Mech.*, 577 :341–361, 2007.
- [158] Laurent Lacaze. *L'instabilité elliptique : exemples en aéronautique et en géophysique*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille I, 2004.
- [159] N. C. Lambourne and D. W. Bryer. The bursting of leading edge vortices; some observations and discussion of the phenomenon. *R&M 3282, Aeronautical Research Council*, 1961.
- [160] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique - mécanique des fluides*. Mir - Ellipses : 3ème édition, 1994.
- [161] F. Laporte and A. Corjon. Direct numerical simulations of the elliptic instability of a vortex pair. *Phys. Fluids*, 12(5) :1016–1031, 2000.
- [162] Florent Laporte. *Simulation numérique appliquée à la caractérisation et aux instabilités des tourbillons de sillage d'avions de transport*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [163] Lionel Larchevêque. *Simulation des grandes échelles de l'écoulement au dessus d'une cavité*. PhD thesis, Université Paris VI, 2003.
- [164] B. Leclaire, L. Jacquin, and D. Sipp. Effets d'une tuyère convergente sur un écoulement tournant. *AFM - EDP Sciences, Mécanique & Industries*, 6 :263–268, 2005.
- [165] B. Leclaire, D. Sipp, and L. Jacquin. Near-critical swirling flow in a contracting duct : the case of plug axial flow with solid body rotation. *Phys. Fluids*, 19, 2007.
- [166] B. Leclaire, D. Sipp, and O. Thomas. Free-flight B20 catapult : end-effects analysis. *FAR-Wake Technical Report 1.1.2-4*, 2008.
- [167] Benjamin Leclaire. *Etude théorique et expérimentale d'un écoulement tournant dans une conduite*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [168] S. Leibovich. Weakly non-linear waves in rotating fluids. *J. of Fluid Mech.*, 42 :803–822, 1970.
- [169] S. Leibovich. The structure of vortex breakdown. *Annu. Rev. of Fluid Mechanics*, 10 :221–, 1978.
- [170] S. Leibovich. Vortex stability and breakdown : survey and extension. *AIAA Journal*, 22(9) :1192–1206, 1984.

- [171] S. Leibovich, S. N. Brown, and Y. Patel. Bending waves on inviscid columnar vortices. *J. of Fluid Mech.*, 173 :595–624, 1986.
- [172] S. Leibovich and A. Kribus. Large-amplitude wavetrains and solitary waves in vortices. *J. of Fluid Mech.*, 216 :459–504, 1990.
- [173] S. Leibovich and H. Y. Ma. Soliton propagation on vortex cores and the Hasimoto soliton. *Phys. Fluids*, 26, 1983.
- [174] S. Leibovich and J. D. Randall. Amplification and decay of long nonlinear waves. *J. of Fluid Mech.*, 53 :481–493, 1973.
- [175] S. Leibovich and K. Stewartson. A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. of Fluid Mech.*, 126 :335–356, 1983.
- [176] S. K. Lele. Direct numerical simulation of compressible free shear flows. *AIAA Paper*, pages AIAA–89–0374, 1989.
- [177] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103 :16–42, 1992.
- [178] M. Lessen and F. Paillet. The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory. *J. of Fluid Mech.*, 65(4) :769–779, 1974.
- [179] M. Lessen, P. J. Singh, and F. Paillet. The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. of Fluid Mech.*, 63(4) :753–763, 1974.
- [180] L. Lesshafft, P. Huerre, P. Sagaut, and M. Terracol. Nonlinear global modes in hot jets. *J. of Fluid Mech.*, 554 :393–409, 2006.
- [181] T. Leweke and C. H. K. Williamson. Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *J. of Fluid Mech.*, 360 :85–119, 1998.
- [182] T. Loiseleux, J. M. Chomaz, and P. Huerre. The effect of swirl on jets and wakes : linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids*, 10(5) :1120–1134, 1998.
- [183] T. Lonfils, R. Cocle, G. Daeninck, C. Cottin, and G. Winckelmans. Numerical investigations of end-effects associated with accelerated/decelerated wings : time-developing and space-developing simulations. *FAR-Wake Technical Report 1.1.2-6*, 2007.
- [184] J. M. Lopez. Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow. *J. of Fluid Mech.*, 221 :533–552, 1990.
- [185] P. S. Lowery and W. C. Reynolds. Numerical simulation of a spatially-developing, forced, plane mixing layer. Technical report, Stanford Univ., Rept TF-26, Stanford CA, 1986.
- [186] O. Lucca-Neggro and T. O’Doherty. Vortex breakdown : a review. *Progress in Energy and Combustion Science*, 27 :431–481, 2001.
- [187] J. L. Lumley. *The structure of inhomogeneous turbulent flows*. In A. M. Yaglom and V. I. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*. Nauka, Moskow, 1967.
- [188] Ephi Maglaras. *Application de la simulation numérique des grandes échelles à la formation des traînées de condensation dans le sillage d’un avion*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2007.
- [189] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing (second edition)*. Academic press, 1999.
- [190] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2000.
- [191] Olivier Marquet. *Stabilité globale et contrôle d’écoulements de recirculation*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.

- [192] José Martinez. *Méthodes temps-fréquence appliquées à l'analyse de signaux issus d'écoulements turbulents*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1994.
- [193] S. A. Maslowe. Critical layers in shear flows. *Annu. Rev. of Fluid Mechanics*, 18 :405–432, 1986.
- [194] T. Maxworthy, E. J. Hopfinger, and L.G. Redekopp. Wave motions on vortex cores. *J. of Fluid Mech.*, 151 :141–165, 1985.
- [195] E. W. Mayer and K. G. Powell. Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex. *J. of Fluid Mech.*, 245 :91–114, 1992.
- [196] M. V. Melander and F. Hussain. Core dynamics on a vortex column. *Fluid Dyn. Res.*, 13 :1–37, 1994.
- [197] P. Meunier. Axial propagation of vortex perturbations. *FAR-Wake Technical Report 1.1.2-1*, 2005.
- [198] Patrice Meunier. *Etude expérimentale de deux tourbillons corotatifs*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille I, 2001.
- [199] M. Michard and T. Favelier. Développement d'un critère d'identification de structures tourbillonnaires adapté aux mesures de vitesse par PIV. *9ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser, VKI/ULB, 14-17 septembre 2004*, 2004.
- [200] Anthony M. Mitchell. *Caractérisation et contrôle de l'éclatement tourbillonnaire sur une aile delta aux hautes incidences*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [201] T. Miyazaki and J.C.R. Hunt. Linear and nonlinear interactions between a columnar vortex and external turbulence. *J. of Fluid Mech.*, 402 :349–378, 2000.
- [202] Philippe Méliga. *Analyse théorique et contrôle des instationnarités dans un écoulement de culot en régime compressible*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2008.
- [203] F. Moens. A3XX wake vortex investigations. *ONERA final synthesis technical report R.T.S. n°69/1736 DAAP/Y*.
- [204] H. Moet, F. Laporte, G. Chevalier, and T. Poinot. Wave propagation in vortices and vortex bursting. *Phys. Fluids*, 17 :–, 2005.
- [205] Henri Moet. *Simulation numérique du comportement des tourbillons de sillage dans l'atmosphère*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [206] Emmanuel Montreuil. *Simulations numériques pour l'aérothermique avec des modèles de sous maille*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [207] L. Nybelen and J.-F. Boussuge. Temporal DNS on end effects and vortex waves. *FAR-Wake Technical Report 1.1.2-2*, 2007.
- [208] L. Nybelen and J.-F. Boussuge. Temporal DNS on vortex bursting and assessment. *FAR-Wake Technical Report 1.1.2-2*, 2008.
- [209] C. Olendraru, A. Sellier, M. Rossi, and P. Huerre. Inviscid instability of the Batchelor vortex : absolute-convective transition and spatial branches. *Phys. Fluids*, 11 :1805–1820, 1999.
- [210] J.H. Olsen. Results of trailing vortex studies in a towing tank. *Boeing Scientific Research Laboratories*, 1970.
- [211] S. A. Orszag and S. C. Crow. Instability of a vortex sheet leaving a semi-infinite plate. *Boeing Scientific Research Laboratories*, 1970.
- [212] J. M. Ortega, R.L. Bristol, and Ö. Savas. Wake alleviation properties of triangular-flapped wings. *AIAA Journal*, 40(4) :709–721, 2002.

- [213] Didier Pagan. *Contribution à l'étude expérimentale et théorique de l'éclatement tourbillonnaire en air incompressible*. PhD thesis, Université Paris VI, 1989.
- [214] C. Pantano and L. Jacquin. Differential rotation effects within a turbulent Batchelor vortex. *DLES-IV Workshop, Enschede, The Netherlands, July 18-20, 2001*. Kluwer, 2001.
- [215] A. C. Poje and J. L. Lumley. A model for large-scale structures in turbulent shear flows. *J. of Fluid Mech.*, 285 :349, 1995.
- [216] D. S. Pradeep and F. Hussain. Core dynamics of a strained vortex : instability and transition. *J. of Fluid Mech.*, 447 :247–285, 2001.
- [217] D. S. Pradeep and F. Hussain. Effects of boundary condition in numerical simulations of vortex dynamics. *J. of Fluid Mech.*, 516 :115–124, 2004.
- [218] D. S. Pradeep and F. Hussain. Transient growth of perturbations in a vortex column. *J. of Fluid Mech.*, 550 :251–288, 2006.
- [219] Stéphane Redonnet. *Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2001.
- [220] Florent Renac. *Contrôle expérimental de l'écoulement tourbillonnaire sur une aile delta*. PhD thesis, Université Paris VI, 2004.
- [221] F. Risso, A. Corjon, and A. Stoessel. Direct numerical simulations of wake vortices in intense homogeneous turbulence. *AIAA Journal*, 35(6) :1030–1040, 1997.
- [222] M. Rossi. *Of vortices and vortical layers : an overview*. Vortex Structure and Dynamics (ed. A. Maurel & P. Petitjeans), Springer, 2000.
- [223] M. R. Ruith, P. Chen, E. Meiburg, and T. Maxworthy. Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes : direct numerical simulation. *J. of Fluid Mech.*, 486 :331–378, 2003.
- [224] Z. Rusak and C. C. Meder. Near-critical swirling flow in a slightly contracting pipe. *AIAA Journal*, 42 :2284–2293, 2004.
- [225] Z. Rusak and S. Wang. Review of theoretical approaches to the vortex breakdown phenomenon. *AIAA Journal*, pages 1996–2126, 1996.
- [226] Z. Rusak, C. H. Whiting, and S. Wang. Axisymmetric breakdown of a Q-vortex in a pipe. *AIAA Journal*, pages –, 1997.
- [227] P. G. Saffman. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [228] P. Sagaut. Simulations numériques de l'éclatement tourbillonnaire. *Rapport de synthèse final n° 10/4368 AY - Direction de l'Aérodynamique ONERA*, 1992.
- [229] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, 2001.
- [230] Pierre Sagaut. *Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille*. PhD thesis, Université Paris VI, 1995.
- [231] T. Sarpkaya. Forced and periodic vortex breakdown. *J. Basic Eng. Trans. ASME n°66-WA/FE-7*, pages 1–7, 1966.
- [232] T. Sarpkaya. On stationary and travelling vortex breakdowns. *J. of Fluid Mech.*, 45 :545–559, 1971.
- [233] T. Sarpkaya. Vortex breakdown in swirling conical flows. *AIAA Journal*, 9(9) :1792–1799, 1971.
- [234] T. Sarpkaya. Effect of the adverse pressure gradient on vortex breakdown. *AIAA Journal*, 12(5) :602–607, 1974.
- [235] T. Sarpkaya. Turbulent vortex breakdown. *Phys. Fluids*, 7(10) :2301–2303, 1995.

- [236] T. Sarpkaya. Vortex breakdown and turbulence. *AIAA Paper*, 1995.
- [237] T. Sarpkaya and J. J. Daly. Effect of ambient turbulence on trailing vortices. *Journal of Aircraft*, 24 :399–, 1987.
- [238] D. A. Schecter, D. H. E. Durbin, A. C. Cass, C. F. Dritscoll, I. M. Lansky, and T. M. O’Neil. Inviscid damping of asymmetries on a two-dimensional vortex. *Phys. Fluids*, 12(10) :2397–2412, 2000.
- [239] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. Mc Graw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1968.
- [240] P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and transition in shear flows*. Springer, 2001.
- [241] D. Sipp. Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids*, 12(7) :1715–1729, 2000.
- [242] D. Sipp, F. Coppens, and L. Jacquin. Theoretical and numerical analysis of wake vortices. *ESAIM Proc.*, 7 :397–407, 1999.
- [243] D. Sipp and L. Jacquin. Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems. *Phys. Fluids*, 12(7) :1740–1748, 2000.
- [244] D. Sipp and L. Jacquin. Widnall instabilities in vortex pairs. *Phys. Fluids*, 15(7) :1861–1874, 2003.
- [245] D. Sipp, L. Jacquin, and C. Cossu. Self-adaptation and viscous selection in concentrated 2d vortex dipoles. *Phys. Fluids*, 2(2) :245–248, 2000.
- [246] D. Sipp and A. Lebedev. Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *J. of Fluid Mech.*, 593 :333–358, 2007.
- [247] Denis Sipp. *Instabilités dans les écoulements tourbillonnaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1999.
- [248] D. O. Snyder and R. E. Spall. Numerical simulation of bubble-type vortex breakdown within a tube-and-vane apparatus. *Phys. Fluids*, 12(3) :603–608, 2000.
- [249] P. R. Spalart. Airplane trailing vortices. *Annu. Rev. of Fluid Mechanics*, 30 :107–138, 1998.
- [250] P. R. Spalart. On the far wake and induced drag of aircraft. *J. of Fluid Mech.*, 603 :413–430, 2008.
- [251] R. E. Spall, T. B. Gatski, and C. E. Grosch. A criterion for vortex breakdown. *Phys. Fluids*, 30(11) :3434–3440, 1987.
- [252] H. B. Squire. Analysis of the vortex breakdown phenomenon. part I. *Imperial College, Aero. Dept. Rep.*, 102, 1960.
- [253] J. T. Stuart. Nonlinear stability theory. *Annu. Rev. of Fluid Mechanics*, 3 :347–370, 1971.
- [254] M. Terracol, E. Manoha, C. Herrero, E. Labourasse, S. Redonnet, and P. Sagaut. Hybrid methods for airframe noise numerical prediction. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 19 :197–227, 2005.
- [255] Marc Terracol. *Méthodes multiniveau pour la simulation des grandes échelles des écoulements turbulents compressibles*. PhD thesis, Université Paris Nord, 2001.
- [256] O. Thomas, D. Sipp, L. Jacquin, D. Fabre, P. Sagaut, E. Coustols, and P. Serval. Etude de l’éclatement tourbillonnaire dans les sillages des avions de transport. *18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007, thème S9 : dynamique des tourbillons*.
- [257] Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68 :1–24, 1987.

- [258] Lord Kelvin (Sir William Thomson). Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 10 :155–168, 1880.
- [259] C. Y. Tsai and S. E. Widnall. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. of Fluid Mech.*, 73 :721–733, 1976.
- [260] M. R. Turner and A. D. Gilbert. Linear and nonlinear decay of cat’s eyes in two-dimensional vortices, and the link to Landau poles. *J. of Fluid Mech.*, 593 :255–279, 2007.
- [261] M. R. Visbal. Onset of vortex breakdown above a pitching delta wing. *AIAA Journal*, 32(8) :1568–1575, 1994.
- [262] H. Vollmers, A. Gilliot, and A. Schröder. Report of onera B20 tests (PIV measurements - november 2003 campaign). *AWIATOR D1.1.2-17, ONERA RT n°1/06835 DAAP*, 2005.
- [263] F. Waleffe. Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process. *Studies in Applied Math.*, 95 :319–343, 1995.
- [264] S. Wang and Z. Rusak. The dynamics of a swirling flow in a pipe and transition to axisymmetric vortex breakdown. *J. of Fluid Mech.*, 340 :177–223, 1997.
- [265] H. Werlé. Quelques résultats expérimentaux sur les ailes en flèche, aux faibles vitesses, obtenus en tunnel hydrodynamique. *La Recherche Aéronautique*, 41, 1954.
- [266] H. Werlé. Sur l’éclatement des tourbillons d’apex d’une aile delta aux faibles vitesses. *La Recherche Aéronautique*, 74 :23–30, 1960.
- [267] H. Werlé. Sur l’éclatement des tourbillons. *ONERA N. T. n° 175*, 1971.
- [268] S. E. Widnall, D. Bliss, and C. Y. Tsai. The instability of short waves on a vortex ring. *J. of Fluid Mech.*, 66 :35–47, 1974.
- [269] Y. B. Zeldovich. Gravitational instability : an approximate theory for large density perturbations. *Astron. & Astrophys.*, 5 :84–89, 1970.
- [270] O. Zeman. The persistence of trailing vortices : a modeling study. *Phys. Fluids*, 7(1) :135–143, 1995.
- [271] O. Y. Zikanov. On the instability of pipe Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 8(11) :2923–2932, 1996.