



**HAL**  
open science

# Approche matricielle de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu diffusant aléatoire

Alexandre Aubry

► **To cite this version:**

Alexandre Aubry. Approche matricielle de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu diffusant aléatoire. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT : 2008PA066105 . tel-00811618

**HAL Id: tel-00811618**

**<https://theses.hal.science/tel-00811618>**

Submitted on 10 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris VI

UFR de Physique

Spécialité :

Sciences Mécaniques, Acoustique et Electronique

Présentée par :

**Alexandre Aubry**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Approche matricielle de l'opérateur de  
propagation des ondes ultrasonores en milieu  
diffusant aléatoire

---

sous la direction d'Arnaud Derode

---

Soutenance prévue le 23 Septembre 2008

Devant le jury composé de :

M. Arnaud Derode	Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris	Directeur de thèse
M. Josselin Garnier	Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris	Rapporteur
M. John Page	Professor at the University of Manitoba, Winnipeg	Rapporteur
M. Claude Boccara	Professeur à l'ESPCI, Paris	Examineur
M. Rémi Carminati	Professeur à l'ESPCI, Paris	Examineur
M. Mathias Fink	Professeur à l'ESPCI, Paris	Examineur
M. Pascal Laugier	Directeur de recherche CNRS, Paris	Examineur
M. Walid Tabbara	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris	Examineur



# Approche matricielle de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu diffusant aléatoire

## Résumé :

Cette thèse étudie les propriétés de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu aléatoire. Le dispositif expérimental consiste en un réseau multi-éléments placé en vis-à-vis d'un milieu désordonné. L'opérateur de propagation est donné par la matrice des réponses inter-éléments mesurées entre chaque couple de transducteurs. En s'appuyant sur la théorie des matrices aléatoires, le comportement statistique de cet opérateur a été étudié en régime de diffusion simple et multiple. Une cohérence déterministe des signaux est ainsi mise en évidence en régime de diffusion simple, cohérence qui disparaît dès que la diffusion multiple prédomine. Cette différence de comportement a permis la mise au point d'un *radar intelligent* séparant les échos simplement et multiples diffusés. On peut ainsi extraire l'écho direct d'une cible échogène enfouie dans un milieu hautement diffusant, bien que ce dernier soit source de diffusion multiple et d'aberration. Une deuxième approche consiste, au contraire, à extraire une contribution de diffusion multiple noyée dans une contribution de diffusion simple largement prédominante. L'étude de l'intensité multiple diffusée permet de mesurer des paramètres de transport (*p.ex.* la constante de diffusion  $D$ ) caractérisant la propagation de l'onde multiple diffusée. Un passage en champ lointain (ondes planes) permet d'obtenir une mesure fiable de  $D$  en étudiant le cône de rétrodiffusion cohérente. Un passage en champ proche, via l'utilisation de faisceaux gaussiens, permet d'effectuer des mesures locales de  $D$  en étudiant la croissance du halo diffusif. Cette approche a été appliquée au cas de l'os trabéculaire humain autour de 3 MHz.

**Mots clés :** milieux aléatoires, ultrasons, diffusion simple, diffusion multiple, réseau multi-éléments, théorie des matrices aléatoires, décomposition en valeurs singulières, loi du quart de cercle, matrice de Hankel aléatoire, corrélations, cohérence, méthode D.O.R.T, détection de cible, fausses alarmes, aberration, imagerie ultrasonore, rétrodiffusion cohérente, halo diffusif, transfert radiatif, approximation de diffusion, coefficient de diffusion, formation de voies, antiréciprocité, os trabéculaire, milieu effectif, fonction d'autocorrélation.



# Ultrasonic wave propagation in random media under a matrix-operator approach

## **Abstract :**

This manuscript is devoted to the study of the ultrasonic wave propagation operator in random media. The experimental set up consists in a multi-element array placed in front of a random medium. The inter-element responses between each couple of transducers form the array response matrix. Its statistical behaviour has been studied in the single and multiple scattering regimes, using random matrix theory. Whereas the propagation operator exhibits a random behaviour in the multiple scattering regime, single scattered echoes keep a deterministic coherence despite disorder. This difference of behaviour has led to the design of a smart radar which separates single and multiple scattered echoes. We are able to extract the direct echo of an echogenic target embedded in a strongly diffusive medium, despite multiple scattering and aberration. Another approach is proposed to extract the multiple scattering contribution in a weakly scattering random medium (*e.g.* human soft tissues). The investigation of multiple scattering allows to characterize the random medium by transport parameters which govern the propagation of multiple scattered waves (*e.g.* the diffusion constant  $D$ ). Plane-wave beamforming allows to study the coherent backscattering effect in the far-field and then obtain a measurement of  $D$ , independently from absorption. Gaussian beamforming allows to study the growth of the diffusive halo in the near-field and local measurements of  $D$  are obtained. This technique has been applied to the ultrasonic imaging of human trabecular bone around 3 MHz. Finally, we also study the theoretical link between the microarchitecture of a random medium and the transport parameters.

**Keywords :** random media, ultrasound, single scattering, multiple scattering, multi-element array, random matrix theory, singular value decomposition, quarter circle law, random Hankel matrix, correlations, coherence, D.O.R.T method, target detection, false alarms, aberration, ultrasonic imaging, coherent backscattering, diffusive halo, radiative transfer, diffusion approximation, diffusion constant, beamforming, antireciprocity, trabecular bone, effective medium, autocorrelation function.



Thèse effectuée au sein du  
**Laboratoire Ondes et Acoustique**

Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA)  
ESPCI, 10 rue Vauquelin  
75231 Paris Cedex 05  
France

Tél. : +33 (0)1 40 79 44 52

Fax : +33 (0)1 40 79 44 68

WWW : [www.loa.espci.fr](http://www.loa.espci.fr)





## Remerciements

A tout seigneur tout honneur, je tiens à remercier chaleureusement Arnaud Derode pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et m'avoir encadré durant ces trois années de thèse. Arnaud est un remarquable chercheur, doté d'une grande rigueur scientifique. Il fut pour moi un guide, que dis-je un dieu vivant, durant ces trois années, ne cessant de m'encourager, de me conseiller et se tenant toujours au fait de mes travaux. Je lui suis profondément reconnaissant pour ses qualités humaines, notamment sa grande honnêteté, qualité ô combien appréciable chez un directeur de thèse. Son aide fut particulièrement décisive dans la rédaction des divers manuscrits ayant jalonné ma thèse, car il faut bien l'avouer, l'écriture n'est pas vraiment ma tasse de thé. Enfin, Arnaud est également une personne dotée d'un humour fin et aiguisé, ce qui rajoute, si besoin était, au charme du personnage, encore que parfois il subisse l'influence néfaste de ses collègues de bureaux, mais je m'é gare... Bref, toutes les mauresques du monde ne suffiront pas à lui rendre ce qu'il m'a donné...

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mathias Fink, sans qui rien n'aurait été possible. Ses cours que j'ai suivi à l'ESPCI puis en Master m'ont réellement enthousiasmé et tout droit dirigé vers le LOA. Par son dynamisme, son esprit, ses qualités scientifiques, Mathias a mis sur pied un laboratoire à son image, *that is to say* exceptionnel, abordant une multitude de sujets passionnants mêlant à la fois recherche fondamentale et applications. Ce foisonnement d'idées, ainsi que les conditions de travail dans lesquelles ces sujets peuvent être étudiés sont en grande partie l'oeuvre de Mathias.

Les rapporteurs de ce travail de thèse sont MM. les professeurs Josselin Garnier et John Page. J'exprime à tous deux ma gratitude pour le temps qu'ils y ont consacré ; je suis particulièrement gré à M. Page d'avoir lu ce manuscrit dans une langue qui n'est pas la sienne et de s'être déplacé du Canada pour la circonstance, et à M. Garnier d'avoir apporté son expertise mathématique à ce travail. Je tiens à remercier sincèrement MM. les professeurs Claude Boccara, Rémi Carminati, Mathias Fink, Pascal Laugier et Walid Tabbara de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Mes premiers pas au LOA ont été guidés par Julien de Rosny, Claire Prada, Dominique Clorennec et Jean-Gabriel Minonzio au cours de mon stage de Master ainsi que lors d'un projet de recherche 3<sup>ème</sup> année à l'ESPCI. Je leur adresse de profonds remerciements. Ils m'ont initié, avec talent, pédagogie et disponibilité, aux subtilités de la méthode D.O.R.T. Tout ce que j'ai appris auprès d'eux a été d'un grand secours lors de ma thèse et m'a permis d'étudier la physique des ondes en milieu désordonné d'un point de vue original. Ce travail de thèse leur revient donc également.

J'adresse de chaleureux remerciements à Patricia Daenens pour son aide expérimentale et sa grande disponibilité durant toutes ces années. Merci également à Mickaël Tanter pour son aide et son expertise sur les manip effectuées dans le corps humain, et Arnaud Tourin pour m'avoir introduit dans le joyeux monde des matrices aléatoires. Une spéciale dédicace à Christophe Barrière, qui, en plus d'être un formidable trublion de pots de thèse, m'a encadré lors de mes enseignements de monitorat.

Je remercie Frédéric Padilla et Pascal Laugier du laboratoire d'imagerie paramétrique pour notre collaboration sur les expériences sur l'os. Merci également à Philippe Roux avec qui nous avons interagé en début de thèse sur les manips mêlant cône de rétrodiffusion cohérente et formation de voies.

Un grand merci aux administratrices/secrétaires qui m'ont rendu de fiers services durant ces années, avec, dans l'ordre d'apparition, Arnaude Cariou, Vera da Costa, Delphine Charbonneau & Rabia Bachiri. Merci à Christian Dorme pour sa disponibilité. Merci à Abdel Souilah, notre mécanicien dont l'aide fut précieuse. Mes remerciements s'adressent également au personnel technique du laboratoire, Pierre Landais & Rosa, sans qui le laboratoire ne pourrait pas fonctionner.

Je poursuis mes remerciements en saluant mes collègues thésards et autres post-docs que j'ai cotoyés durant toutes ces années. Je commencerai par l'illustre Geoffroy Lerosey, alias *Magic Thesard* puis *Fonctionnaire Stagiaire*, qui a su montrer la voie à toute une génération de PC1. Je le remercie vivement pour ses conseils avisés lors de ma recherche de post-doc. J'ai une pensée émue également pour l'homme qui cueille des billets sur les arbres chaque été, j'ai nommé Fabrice Marquet, dit *Beufa* ou encore *l'étalon monégasque*. Je n'oublie pas bien sûr le sieur Benjamin Robert, dit *Benbob* ou *BenKebab*, qui a égayé chacune de mes journées par son don certain pour conter blagues et autres anecdotes croustillantes ainsi que pour faire la lecture de Midi Olympique. Et comment pourrais-je ne pas remercier la charmante Alice Bretagne, alias *Lolita* ou *Cruella* (ça dépend des jours et des personnes), qui a eu l'extrême gentillesse et abnégation de relire ma thèse ? Merci à elle d'avoir amené un peu de douceur dans ce monde de brutes... Une pensée également pour les sieurs Mathieu Rénier et Xavier Jacob, qui, lorsqu'ils daignaient sortir de leur caverne, faisaient le bonheur des piliers de bar parisiens et des sud-américaines. Je remercie enfin tous les co-bureaux que j'ai vu défiler durant ma thèse et qui ont supporté mon côté polard/autiste/mutant d'apprenti chercheur, avec dans l'ordre des apparitions : Dom, Guillemette, Jean-Gab alias *Le Barde*, Gwladys, Seb, Eric, Mathieu D. & Jérôme. Salutations également aux membres imminents du bureau des thésards rigolos : TomTom, Francky, Benoît & Pierre. Je finis là cette énumération et remercie tous les membres du LOA (permanents, post-docs, thésards, stagiaires) que je n'ai pas cités et que j'ai eu le plaisir de cotoyer.

Enfin, je conclurai par des remerciements plus personnels en saluant tous les disciples du BAR de PC avec qui j'ai eu l'immense plaisir de me muscler le foie depuis tant d'années. Spéciale dédicace à l'ABS (*Aide Badakhshan Solidarité* ou *Anti Babylone System* pour les intimes) grâce à qui j'ai pu vivre un fabuleux voyage en Afghanistan et ce n'est pas fini ! J'ai une pensée émue également pour les *nantais* avec qui j'ai passé tant de bons moments. Et comment ne pas remercier les goretts du PorC (*Paris Olympique Rugby Club*) avec lesquels j'ai bataillé, sept ans durant, sur tous les terrains franciliens et grolandais, sans oublier toutes ces troisième mi-temps endiablées ?

Merci enfin à mes parents et grand-parents sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, qui m'ont toujours soutenu moralement et financièrement(!) tout au long de mes études. Une pensée également pour mes frangins Julien & Camille ainsi que ma petite soeur Emilie.

Je dédie cette thèse à ma belle Marion. Je la remercie de tout mon coeur pour son soutien et pour tout le bonheur qu'elle m'apporte depuis sept ans. Je tiens à lui tirer également un coup de chapeau pour son abnégation et son courage puisqu'elle a relu cette thèse plein d'équations et de figures incompréhensibles, chose ardue vous l'imaginez lorsque l'on est chimiste organicienne.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Formation de voies et diffusion multiple</b>	<b>5</b>
I.1 Introduction	5
I.2 Intensité multiplement diffusée en régime dynamique	6
I.2.1 Introduction	6
I.2.2 Expression générale des intensités simplement et multiplement diffusées	10
I.2.3 Opérateur de propagation de l'intensité en milieu aléatoire	15
I.2.4 Champ proche	19
I.2.5 Champ lointain	22
I.2.6 Cas des expériences ultrasonores	27
I.3 Coherent backscattering and far-field beamforming in acoustics	32
I.3.1 Abstract	32
I.3.2 Introduction	32
I.3.3 Principle and Applications	34
I.3.4 Conclusion	44
I.4 Ultrasonic imaging of highly scattering media	47
I.4.1 Abstract	47
I.4.2 Introduction	47
I.4.3 Near-field beamforming with Gaussian beam	49
I.4.4 Separation of coherent and incoherent intensities	53
I.4.5 Experimental results	55
I.4.6 Local measurement of the diffusion constant	57
I.4.7 Experimental results	58
I.4.8 Conclusion	60
I.5 Application to human trabecular bone imaging	62
I.5.1 Abstract	62
I.5.2 Introduction	62
I.5.3 Experiment	63
I.5.4 Discussion	66
I.6 Conclusion et perspectives	68
<b>II L'opérateur matriciel de propagation en milieu aléatoire</b>	<b>69</b>
II.1 Résumé	69
II.2 Introduction	70
II.3 Procédure expérimentale	71
II.4 Régime de diffusion multiple	74
II.4.1 Configuration expérimentale	74
II.4.2 Distribution expérimentale des valeurs singulières	75
II.4.3 Variance des coefficients de la matrice $\mathbf{K}$	77
II.4.4 Influence des corrélations sur la distribution des valeurs singulières	81
II.4.5 Conclusion	85
II.5 Régime de diffusion simple	86
II.5.1 Cohérence déterministe des signaux simplement diffusés	87
II.5.2 Distribution des valeurs singulières	88
II.6 Détection de cible	90

## Table des matières

II.7	Conclusion . . . . .	94
II.A	Annexes du chapitre II . . . . .	95
II.A.1	. . . . .	95
II.A.2	. . . . .	97
II.A.3	. . . . .	100
II.A.4	. . . . .	102
<b>III</b>	<b>Séparation diffusion simple/diffusion multiple : détection de cible</b>	<b>105</b>
III.1	Résumé . . . . .	105
III.2	Introduction . . . . .	106
III.3	Dispositif et protocole expérimental . . . . .	108
III.4	Extraction des signaux simplement diffusés . . . . .	110
III.4.1	Cohérence spatiale des signaux simplement et multiplement diffusés . . . . .	111
III.4.2	Rotation des données . . . . .	112
III.4.3	Extraction de la diffusion simple par un filtrage adapté des antidiagonales . . . . .	113
III.4.4	Reconstruction d'une matrice filtrée . . . . .	115
III.4.5	Illustration de l'action du filtre adapté sur les antidiagonales de $K$ . . . . .	116
III.5	Détection et image de la cible . . . . .	116
III.5.1	Echographie fréquentielle . . . . .	117
III.5.2	Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice de réponse . . . . .	119
III.5.3	Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice préalablement filtrée . . . . .	120
III.6	Critère de détection . . . . .	121
III.6.1	Etablissement d'un critère de détection : Théorie . . . . .	122
III.6.2	Application des critères de détection à l'expérience . . . . .	126
III.7	Aberration . . . . .	130
III.7.1	Distorsion du front d'onde due à la couche diffusante . . . . .	130
III.7.2	Action du filtrage sur les coefficients de distorsion . . . . .	132
III.7.3	Extraction de la diffusion simple combinée avec D.O.R.T . . . . .	133
III.8	Conclusion . . . . .	136
III.A	Annexes du chapitre III . . . . .	137
III.A.1	. . . . .	137
III.A.2	. . . . .	138
III.A.3	. . . . .	142
III.A.4	. . . . .	144
<b>IV</b>	<b>Séparation diffusion simple/diffusion multiple : milieu faiblement diffusant</b>	<b>147</b>
IV.1	Résumé . . . . .	147
IV.2	Introduction . . . . .	148
IV.3	Séparation diffusion simple / diffusion multiple . . . . .	149
IV.3.1	Procédure expérimentale . . . . .	149
IV.3.2	Filtrage par SVD des matrices $A$ . . . . .	150
IV.4	Application à l'étude d'un milieu très faiblement diffusant . . . . .	154
IV.4.1	Illustration de la qualité de séparation diffusion simple / diffusion multiple . . . . .	155
IV.4.2	Intensité multiplement diffusée . . . . .	156
IV.4.3	Caractérisation d'un milieu très faiblement diffusant . . . . .	157
IV.5	Application à l'imagerie ultrasonore dans le corps humain . . . . .	159
IV.6	Conclusion . . . . .	162
IV.A	Annexe du chapitre IV . . . . .	163
IV.A.1	Intensité simplement diffusée . . . . .	163
IV.A.2	Intensité multiplement diffusée . . . . .	164
<b>V</b>	<b>Lien entre micro-architecture du milieu aléatoire et paramètres diffusants</b>	<b>167</b>
V.1	Introduction . . . . .	167
V.2	Libre parcours moyen élastique . . . . .	169
V.2.1	Equation d'ondes en milieu hétérogène . . . . .	169
V.2.2	Passage à la moyenne : Notion de milieu effectif . . . . .	173
V.2.3	Expression analytique du libre parcours moyen (3D) . . . . .	180
V.2.4	Comparaison entre théorie et simulation numérique (2D) . . . . .	193
V.3	Libre parcours moyen de transport & coefficient de diffusion . . . . .	200
V.3.1	Sections efficaces différentielle et totale de diffusion . . . . .	202
V.3.2	Libre parcours moyen de transport (3D) . . . . .	208
V.3.3	Confrontation entre la théorie et les expériences menées dans l'os . . . . .	212
V.A	Annexes du chapitre V . . . . .	219

V.A.1	.....	219
V.A.2	.....	221
<b>Conclusion</b>		<b>223</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>235</b>





# Introduction

La propagation des ondes dans des milieux désordonnés a été largement étudiée en physique des ondes depuis une cinquantaine d'années. Les premières études expérimentales et théoriques ont été menées en physique du solide, puis en optique avant que ce sujet n'intéresse des domaines plus appliqués comme les télécommunications, l'acoustique ultrasonore ou encore la sismologie. En ce qui concerne les ondes dites *classiques*, la plupart des travaux théoriques et expérimentaux traitent de la propagation de l'intensité au sein d'un milieu aléatoire. D'un point de vue probabiliste, il a ainsi été prouvé que l'intensité obéissait classiquement à l'équation de diffusion, sous certaines approximations. L'évolution spatio-temporelle de l'intensité moyenne est donc gouvernée par des paramètres tel que le libre parcours moyen élastique  $l_e$ , le libre parcours moyen de transport  $l^*$  ou encore la constante de diffusion  $D$ . La mesure expérimentale de ces paramètres diffusants permet, dans une certaine mesure, de caractériser le milieu désordonné. En ce qui concerne les ondes acoustiques, les différents travaux menés sur ce sujet ont consisté, dans un premier temps, à reprendre les voies déjà explorées par les opticiens et à les adapter aux spécificités de cette discipline. Or, les ultrasons peuvent offrir bien plus que les expériences menées en optique. Les transducteurs d'une barrette échographique permettent en effet de mesurer à la fois l'amplitude et la phase du champ et non pas seulement son intensité. De plus, nous fonctionnons en large bande ce qui permet d'émettre des signaux brefs en temps et de mesurer le champ ondulatoire en régime dynamique. Enfin, l'utilisation de réseau multi-éléments apporte une grande diversité spatiale à l'information collectée lors des mesures expérimentales. Le principal objectif de cette thèse a donc été de tirer profit de la souplesse expérimentale des ultrasons afin de développer une approche originale de la propagation des ondes en milieu aléatoire. Celle-ci est fondée sur un opérateur matriciel de propagation mesuré à l'aide d'un réseau multi-éléments à la fois émetteur et récepteur.

Le dispositif expérimental utilisé tout au long de cette thèse est présenté sur la figure 1. Une barrette échographique comprenant  $N$  transducteurs indépendants est placée en vis-à-vis du milieu que l'on désire étudier. L'expérience consiste ensuite à mesurer les réponses impulsionnelles entre les différents éléments du réseau. L'ensemble de ces réponses forment une matrice de réponse globale du milieu que l'on nommera  $\mathbf{K}$ . Toute l'information disponible sur le milieu inspecté est contenue dans cette matrice. Une fois  $\mathbf{K}$  acquise, un certain nombre d'opérations de traitement du signal peuvent être appliquées sur cette matrice afin d'extraire

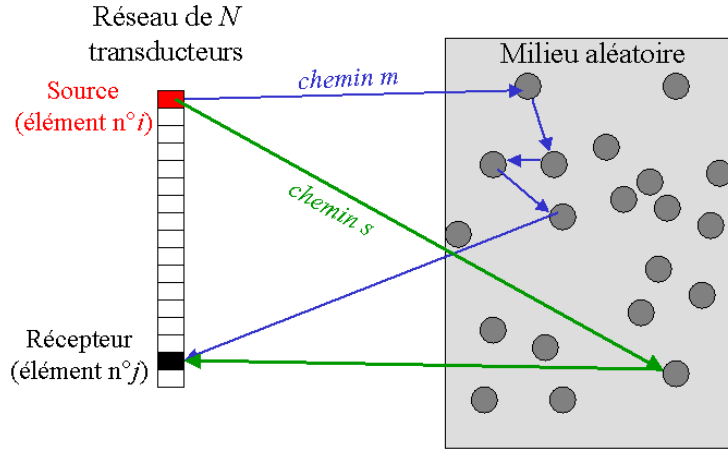


FIG. 1: Dispositif expérimental en configuration de rétrodiffusion.

les informations pertinentes, en fonction du problème physique considéré.

Lorsqu'un transducteur émet une onde incidente en direction du milieu que l'on souhaite étudier, celle-ci est réfléchi par les diffuseurs contenus dans le milieu et revient vers les capteurs du réseau. Nous traitons ici le cas des milieux désordonnés c'est-à-dire des milieux dans lesquels des diffuseurs (ou réflecteurs) sont répartis de manière aléatoire et *a priori* inconnue. L'onde totale diffusée par le milieu comprend deux contributions :

- une contribution dite de *diffusion simple* (chemin  $s$  sur la figure 1) : l'onde incidente ne subit qu'une seule réflexion par un diffuseur du milieu avant de revenir vers le(s) capteur(s). C'est cette contribution qui est utilisée en échographie ou en radar ; il y a en effet une équivalence directe entre le temps d'arrivée de chaque écho et la distance séparant le capteur et le diffuseur ayant engendré cet écho. Une image de la réflectivité du milieu, ou de la position des différentes cibles diffusantes au sein du milieu, peut alors être construite à partir des signaux enregistrés.
- une contribution dite de *diffusion multiple* (chemin  $m$  sur la figure 1) : l'onde subit dans ce cas plusieurs réflexions successives sur les diffuseurs du milieu avant d'atteindre le capteur. Ce phénomène se produit particulièrement lorsque les réflecteurs ont un pouvoir diffusant élevé, et/ou sont très concentrés. Dès qu'il y a diffusion multiple, il n'y a plus d'équivalence entre le temps d'arrivée d'un d'écho et la distance séparant le capteur et un diffuseur du milieu, il n'est alors plus possible de construire des images fiables du milieu selon les techniques classiques. Par contre l'intensité multiplement diffusée peut être étudiée sous une approche probabiliste. Cela permet de mesurer des paramètres statistiques comme le libre parcours moyen  $l_e$  ou le coefficient de diffusion  $D$  de l'onde se propageant au sein du milieu aléatoire. La contribution de diffusion multiple est donc intéressante à des fins de caractérisation des milieux désordonnés.

Ainsi, la matrice de réponse  $\mathbf{K}$  contient à la fois une contribution de diffusion simple et une contribution de diffusion multiple. Une partie importante de cette thèse s'articule autour de l'étude et la séparation de ces deux contributions qui présentent des comportements statistiques bien distincts et fournissent des informations complémentaires sur le milieu inspecté.

Au chapitre I, nous traitons tout d'abord le cas de milieux hautement diffusants pour lesquels la contribution de diffusion multiple est prépondérante. Nous établissons dans un premier temps l'expression théorique de l'intensité multiplement diffusée en régime dynamique dans les configurations de *champ lointain* ou *champ proche*. Nous rappelons ainsi que l'intensité multiplement diffusée comprend à la fois une contribution incohérente (le *halo diffusif*) satisfaisant classiquement à l'équation de diffusion, et une contribution cohérente (le *cône de rétrodiffusion cohérente*) résultant de l'interférence entre chemins réciproques. La rétrodiffusion cohérente se manifeste par une augmentation d'un facteur deux de l'intensité rétrodiffusée au voisinage de la source. Après cette introduction à la théorie de la diffusion multiple, nous nous intéressons au cas des expériences ultrasonores. Celles-ci sont réalisées dans une configuration intermédiaire qui ne fournit pas un cadre satisfaisant à l'étude de l'intensité multiplement diffusée. L'idée a donc été d'appliquer des techniques de type *formation de voies* au champ mesuré et ainsi se projeter en champ lointain ou champ proche pour étudier l'intensité multiplement diffusée. Le passage en champ lointain permet en particulier de mesurer de façon fiable le coefficient de diffusion  $D$  indépendamment des phénomènes d'absorption en étudiant le cône de rétrodiffusion cohérente en régime dynamique. Le passage en champ proche, *via* l'utilisation de faisceaux collimatés, nous permet d'effectuer des mesures locales du coefficient de diffusion en étudiant la croissance du halo diffusif au cours du temps. Ces mesures locales de  $D$  ont été effectuées sur une tranche d'os trabéculaire et un très bon accord est trouvé avec les variations locales de densité de l'os. Ce passage en champ proche sera également l'occasion de mettre en place une astuce permettant la séparation du pic de rétrodiffusion cohérente et du halo diffusif. Celle-ci consiste à créer une *antiréciprocité* virtuelle dans le milieu étudié par *antisymétrisation* de la matrice  $\mathbf{K}$  initialement mesurée.

Le chapitre II est dédié à l'étude de l'opérateur de propagation en milieu aléatoire. L'objectif est ici de confronter la distribution expérimentale des valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{K}$  aux résultats de la théorie des matrices aléatoires. Nous verrons que les corrélations résiduelles qui peuvent exister entre les coefficients de la matrice  $\mathbf{K}$  constituent un paramètre clé pour ce problème. Les régimes de diffusion simple et multiple sont examinés. Nous faisons ainsi apparaître un comportement bien distinct de la distribution des valeurs singulières selon que l'on est en régime de diffusion simple ou multiple. Cette différence de comportement provient d'une cohérence déterministe des signaux simplement diffusés le long des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  en régime de diffusion simple, alors que les signaux multiplement diffusés ne présentent au contraire aucune cohérence particulière.

L'idée a été ensuite de tirer profit de cette différence de comportement statistique à des fins de séparation des contributions de diffusion simple et multiple. Le chapitre III traite ainsi du problème de la détection d'une cible enfouie dans un milieu hautement diffusant. Les techniques d'imagerie classique comme l'échographie échouent dans ce genre de configuration du fait des échos de diffusion multiple et de l'aberration engendrés par les milieux hautement diffusants. Nous proposons donc une technique permettant d'extraire les signaux simplement diffusés parmi une contribution de diffusion multiple prédominante. La combinaison de cette technique avec la méthode D.O.R.T (*Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel*) permet de

détecter et localiser avec précision la cible, ce qui est impossible avec les techniques d'imagerie traditionnelles (échographie, méthode D.O.R.T classique *etc.*). Dans cette partie, la théorie des matrices aléatoires permet de fixer des critères de détection rigoureux et de prédire les performances pour chaque technique d'imagerie.

La différence de comportement statistique entre diffusion simple et multiple nous a conduit également à la mise au point d'une technique permettant l'extraction de signaux multiplement diffusés noyés dans une contribution de diffusion simple largement prédominante. Ces travaux sont présentés au chapitre IV. Une nouvelle fois, la théorie des matrices aléatoires fournit une assise théorique précieuse. L'extraction de la diffusion multiple permet de mesurer séparément le libre parcours moyen élastique  $l_e$  et le libre parcours moyen d'absorption  $l_a$  et donc de caractériser les milieux faiblement diffusants par des paramètres statistiques du désordre. Nous présentons également une application à un milieu biologique : le sein. On montre ainsi que la diffusion multiple des ondes ultrasonores autour de quelques MHz est loin d'être négligeable dans les tissus mous du corps humain.

Enfin, le chapitre V traite du lien existant entre les paramètres diffusants de l'onde multiplement diffusée ( $l_e$ ,  $l^*$ ,  $D$ ) et la micro-architecture du milieu diffusant. Un modèle continu du désordre est considéré et le lien est fait entre la fonction d'autocorrélation du désordre et les différents paramètres diffusants. Ces prédictions théoriques sont confrontées à des simulations numériques ainsi qu'aux mesures expérimentales de  $D$  effectuées dans l'os. Le bon accord qualitatif trouvé entre expérience et théorie laisse présager des perspectives intéressantes.

# Chapitre I

## Formation de voies et diffusion multiple

### I.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'intensité rétrodiffusée par un milieu désordonné à des fins de caractérisation et d'imagerie. De nombreux travaux ont été menés sur ce sujet depuis trente ans, notamment en optique. L'originalité de notre travail consiste ici à utiliser les facilités expérimentales offertes par l'acoustique afin de tirer le meilleur profit des mesures ultrasonores. En effet, les barrettes échographiques permettent de mesurer à la fois l'amplitude et la phase du champ et non pas seulement l'intensité, comme c'est souvent le cas en optique. De plus, nous fonctionnons en large bande ce qui permet d'émettre des signaux brefs en temps et de mesurer le champ rétrodiffusé en régime dynamique. Enfin, les transducteurs sont contrôlables à l'émission et la réception ce qui offre la possibilité d'émettre et de recevoir n'importe quel front d'onde. L'idée a donc été de combiner des traitements *cohérents* tel que la formation de voies au traitement *incohérent* des données que constitue le calcul de l'intensité moyenne rétrodiffusée, en particulier dans le cadre de l'étude de la rétrodiffusion cohérente.

A partir de mesures expérimentales réalisées en champ intermédiaire, on a ainsi pu, grâce à la formation de voies, étudier l'intensité rétrodiffusée en champ lointain ou en champ proche. Il faut entendre ici *champ proche* au sens où la source et le récepteur sont situés à la surface du milieu diffusant ou enfouis dans celui-ci. Le passage en champ lointain permet d'améliorer les mesures des paramètres de transport (notamment le coefficient de diffusion) caractérisant la propagation de l'intensité moyenne de l'onde multiple diffusée. On obtient ainsi une meilleure caractérisation du milieu aléatoire sondé. Le passage en champ proche, via l'utilisation de faisceaux collimatés, nous a permis d'effectuer des mesures locales des paramètres de transport de l'onde. Ceci constitue un premier pas vers l'imagerie des milieux diffusants, pour lequel les techniques d'imagerie classiques, telles que l'échographie, échouent habituellement. Après de premiers essais sur des échantillons prototypes, la technique a été appliquée en particulier sur une tranche d'os trabéculaire. Nous avons ainsi pu mettre en évidence des variations spatiales du coefficient de diffusion en très bon accord avec les fluctuations spatiales de densité dans l'os. Ce passage en champ proche a également été l'occasion de montrer comment créer une *antiréciprocité* virtuelle dans le milieu étudié afin de séparer l'intensité cohérente (pic de

rétrodiffusion cohérente) et l'intensité incohérente (halo diffusif).

Dans ce chapitre, nous allons rappeler dans un premier temps quelques éléments théoriques concernant l'intensité multiple diffusée en régime dynamique. Cela nous permettra de définir les paramètres de transport caractérisant la propagation d'une onde multiple diffusée au sein d'un milieu aléatoire. Le phénomène de rétrodiffusion cohérente sera également abordé. Son origine et sa manifestation en champ lointain, intermédiaire ou proche seront discutées. Nous développerons ensuite le coeur de notre travail qui s'articule autour de trois axes, illustrés chacun par un article :

- Etude du cône de rétrodiffusion cohérente en champ lointain.
- Mesure locale du coefficient de diffusion  $D$  dans les milieux diffusants.
- Application à l'imagerie de milieux désordonnés réels : l'os trabéculaire.

## I.2 Intensité multiple diffusée en régime dynamique

### I.2.1 Introduction

Le cadre général de notre étude met en jeu un milieu diffusant insonifié par une onde incidente issue d'une source  $\mathbf{S}$ . Cette onde incidente est diffusée par le milieu désordonné et un récepteur  $\mathbf{R}$  enregistre le champ diffusé  $\phi(t)$  (voir Fig.I.1). Ce dernier correspond à la somme des ondes partielles liées à chaque chemin de diffusion que l'on peut emprunter pour aller de  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}$ . Si on note  $A_p(t)$  l'évolution temporelle de l'amplitude de l'onde partielle empruntant un chemin  $p$  donné, le champ  $\phi(t)$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\phi(t) = \sum_p A_p(t) \quad (\text{I.1})$$

Si maintenant, on s'intéresse à l'intensité diffusée  $I(t)$  reçue au point  $\mathbf{R}$ , il suffit de prendre la

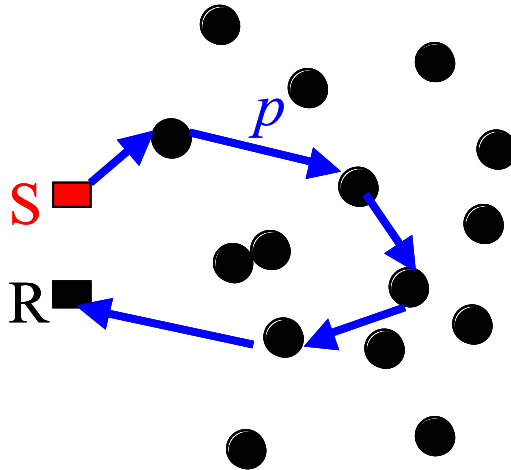


FIG. I.1: Exemple d'un chemin de diffusion  $p$  que l'on peut emprunter pour aller de  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}$ .

norme au carré du champ  $\phi(t)$  :

$$I(t) = |\phi(t)|^2 = \left| \sum_p A_p(t) \right|^2 \quad (\text{I.2})$$

soit

$$I(t) = \sum_p |A_p(t)|^2 + \sum_p \sum_{q \neq p} A_p(t) A_q^*(t) \quad (\text{I.3})$$

Le premier terme correspond à l'intensité dite *incohérente* ; la contribution des chemins se réduit à la somme de leurs intensités individuelles. On peut considérer cette intensité incohérente comme l'interférence entre chemins qui ont suivi la même séquence de diffuseurs (Fig.I.2). Le

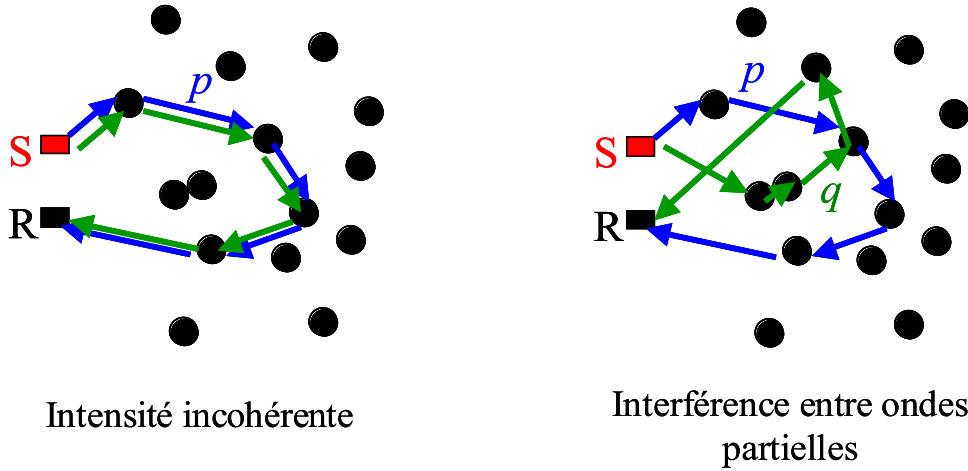


FIG. I.2: Interférence entre chemins de diffusion donnant lieu à l'intensité incohérente (à gauche) et à l'intensité cohérente (à droite)

deuxième terme correspond aux interférences entre ondes partielles liées à des séquences de diffusion distinctes. La différence de phase entre les chemins  $p$  et  $q$  peut être traitée comme une variable aléatoire. La répartition spatiale de l'intensité diffusée correspond à une somme de fonctions aléatoires ne dépendant que de la répartition des diffuseurs et donnant lieu, pour une réalisation du désordre, à des fluctuations fortes selon la position du récepteur  $\mathbf{R}$ . Le signal fluctuant observé est appelé *speckle ultrasonore*. Un profil spatial typique d'intensité diffusée est présenté sur la figure I.3.

Supposons en première approche que les phases des ondes partielles  $p$  et  $q$  ne sont pas corrélées. De ce fait, si on effectue une moyenne sur plusieurs configurations du désordre, on s'attend à ce que les fluctuations erratiques du speckle disparaissent et que seule l'intensité incohérente résiste à la moyenne :

$$\langle I(t) \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_p |A_p(t)|^2 \right\rangle}_{\text{Intensité incohérente}} + \underbrace{\left\langle \sum_p \sum_{q \neq p} A_p(t) A_q^*(t) \right\rangle}_{\text{Intensité cohérente} \rightarrow 0?} \quad (\text{I.4})$$

Ce raisonnement intuitif est valable si on s'intéresse à l'intensité transmise, c'est-à-dire quand la source et le récepteur sont placés de part et d'autre du milieu désordonné. Dans ce cas, la



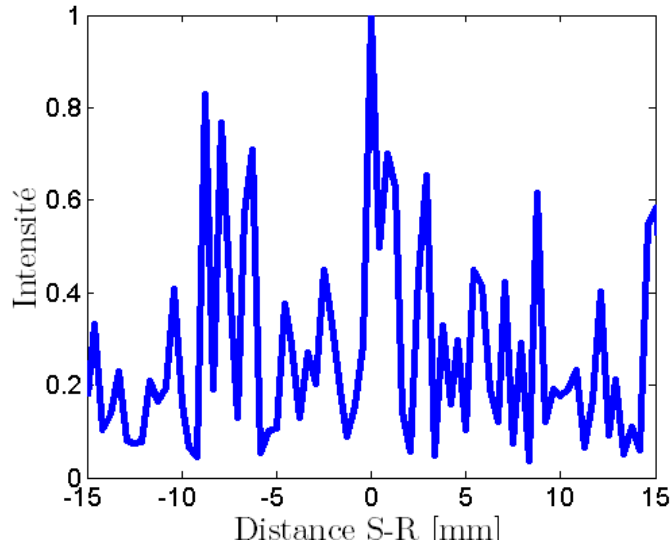


FIG. I.3: Distribution spatiale d'intensité obtenue pour une réalisation du désordre

trajectoire de l'onde multidiffusée peut être considérée comme celle d'un marcheur aléatoire. Cette analogie se justifie si l'on admet qu'il n'existe aucune corrélation, donc aucune possibilité d'interférence, entre deux chemins multidiffusés distincts. Dans ce cas, l'onde qui se propage à travers un milieu aléatoire est équivalente à une bille classique subissant des chocs aléatoires répétés. Si l'on considère une source ponctuelle  $\mathbf{S}$  émettant une impulsion brève dans un milieu diffusant, calculer l'intensité moyenne  $\langle I(t) \rangle$  reçue au point  $\mathbf{R}$  au bout du temps  $t$  revient à déterminer la probabilité pour la bille d'arriver au point  $\mathbf{R}$  à l'instant  $t$ . Cette probabilité satisfait classiquement à l'équation de transfert radiatif (Eq.I.27) [1] dont la solution aux temps longs s'approche de celle de l'équation de diffusion (Eq.I.30). L'énergie s'étale dans le milieu en formant un *halo diffusif*, dont l'évolution spatio-temporelle est quantifiée par le coefficient de diffusion  $D$ . Selon cette approche classique de la diffusion, l'intensité se réduit à la somme des contributions individuelles des chemins de diffusion. Les effets d'interférence sont négligés et les ondes traitées comme des particules classiques.

En rétrodiffusion, le raisonnement précédent s'écroule : une moyenne sur le désordre montre que la distribution de l'intensité rétrodiffusée n'est pas celle attendue. En particulier l'expérience a montré que l'énergie réfléchie dans la direction d'incidence est le double de la contribution incohérente attendue, comme on peut le voir sur la figure I.4(a). Ce phénomène physique a été illustré expérimentalement en optique par Kuga et Ishimaru [2], il y a 25 ans. Il s'agit de la *rétrodiffusion cohérente*. Ce phénomène, également appelé *localisation faible*, provient de l'interférence constructive entre une onde multiplement diffusée et l'onde réciproque associée, *i.e* l'onde suivant la même trajectoire mais en sens inverse. En effet, si la source  $\mathbf{S}$  et le récepteur  $\mathbf{R}$  sont confondus, on peut associer à toute onde partielle suivant un chemin de diffusion multiple  $p^+$ , une onde réciproque suivant ce même chemin mais en sens inverse (chemin  $p^-$ , voir Fig. I.4(b)). Bien que différentes, ces deux séquences de diffusion ont exactement la même phase lorsque  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{R}$  : elles interfèrent donc constructivement. La rétrodiffusion cohérente se manifeste

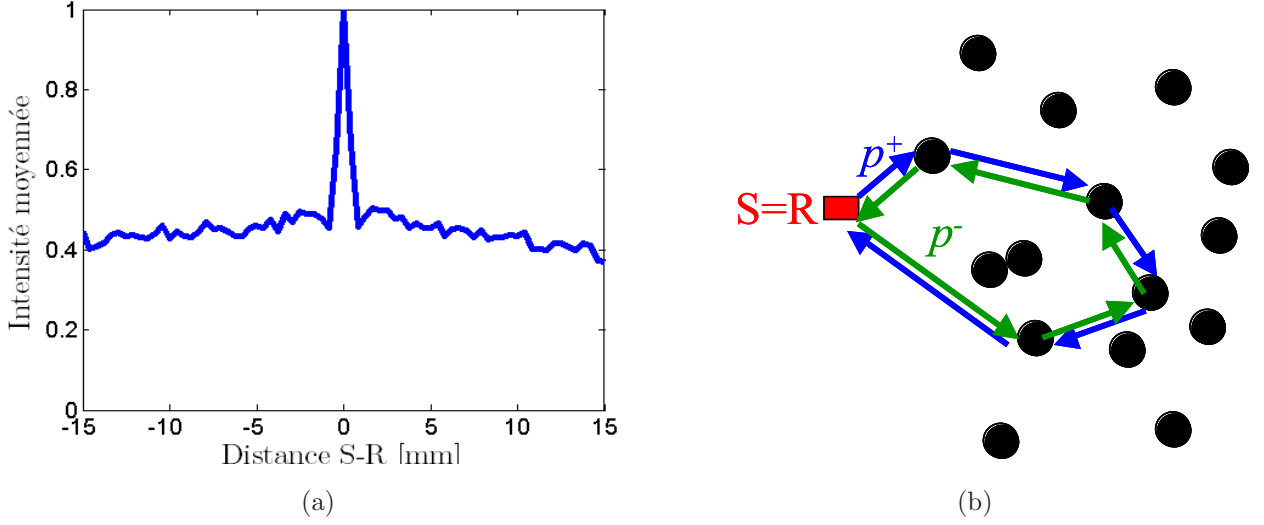


FIG. I.4: (a) Distribution spatiale de l'intensité multiplement diffusée moyennée sur plusieurs configurations du désordre. (b) Interférence entre deux chemins de diffusion réciproques responsable de l'effet de rétrodiffusion cohérente.

par une intensité double lorsque source et récepteur sont confondus. On parlera de *cône de rétrodiffusion cohérente* lorsqu'on opère en champ lointain et de pic de rétrodiffusion cohérente en champ proche. Ce phénomène n'apparaît qu'en régime de diffusion multiple, dans les milieux vérifiant le principe de réciprocité. Initialement, l'effet de rétrodiffusion cohérente a intrigué les physiciens car il montrait les limites de l'approche classique pour décrire la propagation d'une onde en milieu multidiffuseur. Il illustre de façon spectaculaire la persistance d'effets d'interférence malgré le désordre et la diffusion multiple. Suite aux résultats de Kuga et Ishimaru [2], d'autres travaux à la fois théoriques et expérimentaux ont été menés en optique afin de mieux comprendre et analyser ce phénomène [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Par la suite, le cône de rétrodiffusion cohérente a également été observé en physique des atomes froids [9, 10, 11]. Notons que ce phénomène n'est pas réservé aux seules ondes électromagnétiques. Il est commun à tous les types d'ondes et a été mis en évidence également en acoustique [12, 13, 14, 15, 16] et en sismologie [17, 18, 19].

L'intensité moyenne issue d'un milieu multidiffuseur peut donc se décomposer en deux termes : l'intensité *incohérente*  $I_{inc}$  et l'intensité *cohérente*  $I_{coh}$  (Eq.I.4). La première résulte classiquement de l'interférence de chaque onde partielle avec elle-même, la seconde provient de l'interférence entre une onde partielle et l'onde réciproque correspondante. Selon la configuration expérimentale et la nature du milieu sondé, ces deux contributions de l'intensité totale vont présenter des évolutions spatio-temporelles différentes. Un paramètre clé pour décrire la propagation de l'onde multidiffusée à travers un milieu aléatoire est son coefficient de diffusion  $D$ . Ce paramètre est très intéressant à mesurer puisqu'il est directement lié à la microstructure du milieu désordonné et permet donc de le caractériser (*cf* Chap.V). Dans les paragraphes suivants, nous allons rappeler les évolutions spatio-temporelles des contributions cohérente et incohérente dans les configurations de champ proche et champ lointain. Puis, nous discuterons du cas des

expériences ultrasonores qui sont souvent réalisées dans une configuration intermédiaire. Pour établir les différentes expressions théoriques des intensités simplement et multiplement diffusées, nous nous plaçons dans une configuration bidimensionnelle qui est celle dans laquelle se déroulent nos expériences ultrasonores (utilisation d'une barrette échographique 1D).

## **I.2.2 Expression générale des intensités simplement et multiplement diffusées**

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'expression générale des intensités moyennes simplement et multiplement diffusées, notées respectivement  $I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  et  $I_M(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$ , reçues par un récepteur  $\mathbf{R}$  au bout d'un temps  $t$  suite à l'émission d'une impulsion depuis une source  $\mathbf{S}$  à l'instant  $t = 0$ . L'intensité moyenne totale  $\langle I(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \rangle$  correspond alors à la somme de contributions moyennes issues de la diffusion simple ( $I_S$ ) ou multiple ( $I_M$ ) :

$$\langle I(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \rangle = I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) + I_M(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \quad (\text{I.5})$$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'intensité multiplement diffusée se décompose sous la forme d'une contribution cohérente ( $I_{coh}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$ ) et d'une contribution incohérente ( $I_{inc}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$ ), tel que :

$$I_M(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = I_{inc}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) + I_{coh}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \quad (\text{I.6})$$

Aucune hypothèse n'est faite quant aux positions de la source  $\mathbf{S}$  et du récepteur  $\mathbf{R}$  vis à vis du milieu diffusant (champ proche, lointain ou intermédiaire). De la même manière, on ne fait aucune hypothèse quant à la manière d'illuminer le milieu et de recevoir les ondes rétrodiffusées par celui-ci (onde plane, onde sphérique, faisceau collimaté *etc.*).

### **Expression de l'intensité simplement diffusée**

Introduisons tout d'abord quelques notations. La fonction  $\bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t)$  traduit la manière dont est illuminé en moyenne un point  $\mathbf{R}'$  du milieu diffusant. Si une impulsion (au sens d'un dirac temporel  $\delta(t)$ ) est émise depuis la source  $\mathbf{S}$  à l'instant  $t = 0$ , le champ reçu en moyenne au point  $\mathbf{R}'$  est donné par  $\bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t)$ . De la même manière,  $\bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t)$  traduit le trajet retour du point  $\mathbf{R}'$  au récepteur  $\mathbf{R}$  : si une impulsion ultrasonore était émise depuis  $\mathbf{R}'$  à  $t = 0$ , le champ mesuré en moyenne par le récepteur  $\mathbf{R}$  serait donné par  $\bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t)$ .

Soit  $\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  la contribution de diffusion simple du champ mesuré. Nous souhaitons établir l'expression théorique de l'intensité simplement diffusée moyenne  $I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  :

$$I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \langle |\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)|^2 \rangle \quad (\text{I.7})$$

où le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne sur le désordre. Nous allons modéliser le désordre à l'aide d'un potentiel de perturbation  $\epsilon(\mathbf{R}')$ . Le champ  $\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$ , obtenu sur une réalisation du désordre, peut être décomposé sous la forme d'une somme d'ondes partielles n'ayant interagi qu'une seule fois avec le potentiel du désordre (développement de Born à l'ordre 1) :

$$\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{R}') \bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t) \overset{t}{\otimes} \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) d^2\mathbf{R}' \quad (\text{I.8})$$

où  $\Omega$  désigne la surface contenant le milieu diffusant (à 2D). Le terme  $\bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t)$  décrit la propagation aller (de  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}'$ ) et retour (de  $\mathbf{R}'$  à  $\mathbf{R}$ ) de l'onde simplement diffusée en  $\mathbf{R}'$ . L'intensité associée au champ  $\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  peut être déduite en considérant la norme au carré de l'équation I.8 :

$$|\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)|^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{R}') \epsilon^*(\mathbf{R}'') \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) \right] \times \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}'', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}'', t) \right]^* d^2\mathbf{R}' d^2\mathbf{R}'' \quad (\text{I.9})$$

Un passage à la moyenne permet ensuite d'obtenir une expression générale de l'intensité simplement diffusée moyenne (Eq.I.7) :

$$I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \langle |\psi_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)|^2 \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \langle \epsilon(\mathbf{R}') \epsilon^*(\mathbf{R}'') \rangle \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) \right] \times \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}'', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}'', t) \right]^* d^2\mathbf{R}' d^2\mathbf{R}'' \quad (\text{I.10})$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'un milieu désordonné dont le potentiel de désordre est un *bruit blanc*. La fonction d'autocorrélation  $\langle \epsilon(\mathbf{R}') \epsilon^*(\mathbf{R}'') \rangle$  du potentiel de perturbation est alors donnée par :

$$\langle \epsilon(\mathbf{R}') \epsilon^*(\mathbf{R}'') \rangle = \frac{c}{l_e} \delta(\mathbf{R}'' - \mathbf{R}') \quad (\text{I.11})$$

où  $l_e$  correspond au libre parcours moyen élastique du milieu diffusant et  $c$  est la célérité de l'onde. Ainsi, le terme  $\frac{c}{l_e}$  de l'équation précédente peut être vu comme un nombre de collisions subies par l'onde incidente, par unités de temps et de surface. Sous l'hypothèse de *bruit blanc*, l'expression de l'intensité simplement diffusée (Eq.I.10) devient :

$$I_S(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \frac{c}{l_e} \int_{\Omega} \left| \bar{\psi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t) \otimes \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) \right|^2 d^2\mathbf{R}' \quad (\text{I.12})$$

Si nous avons à faire à un milieu aléatoire discret, la section efficace  $\sigma_0$  de chaque diffuseur et leur concentration  $n$  apparaissent implicitement dans l'expression de  $I_S$  par l'intermédiaire de  $l_e$ , puisque  $l_e = \frac{1}{n\sigma_0}$  [20]. L'expression finale obtenue pour l'intensité simplement diffusée n'est valable que si le potentiel de désordre peut être modélisé par un bruit blanc. Eq.I.12 sera utilisée au chapitre IV lorsque nous nous intéresserons à l'évolution temporelle de l'intensité simplement diffusée par un milieu faiblement diffusant.

## Expression des intensités cohérente et incohérente

Comme nous l'avons vu précédemment, l'intensité incohérente résulte de l'interférence de chaque onde partielle avec elle-même alors que l'intensité cohérente est liée à l'interférence entre les ondes partielles suivant des chemins réciproques. Pour établir leur expression, on *regroupe* les chemins de diffusion dont les premier et dernier diffuseurs sont identiques (voir Fig.I.5). On notera  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  les vecteurs positions respectivement du premier et du dernier diffuseur. On

va donc calculer dans un premier temps la contribution à l'intensité moyenne pour un couple  $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$  quelconque.

On note  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  l'opérateur de propagation de l'intensité dans le milieu aléatoire pour une source localisée en  $\mathbf{R}_1$  et un détecteur en  $\mathbf{R}_2$  ;  $t$  représente ici le temps qui s'est écoulé depuis l'émission d'une impulsion d'énergie en  $\mathbf{R}_1$ .  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  correspond à la fonction de Green de l'équation de transfert radiatif ([1], Eq.I.27) qui gouverne la propagation de l'intensité moyenne dans le milieu diffusant.

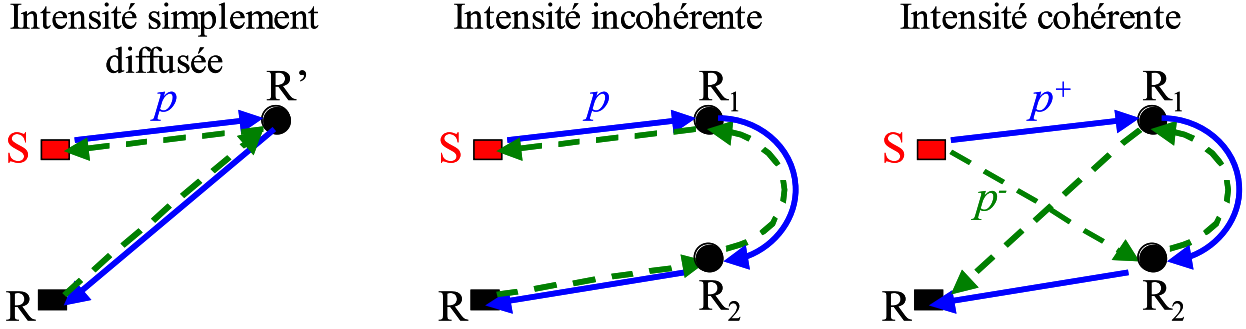


FIG. I.5: Exemple de chemins de diffusion contribuant à l'intensité simplement diffusée (à gauche), à l'intensité incohérente (au centre) et à l'intensité cohérente (à droite)

Intéressons-nous dans un premier temps à l'expression de l'intensité incohérente. Quand l'onde partielle subit sa première diffusion en  $\mathbf{R}_1$ , l'énergie totale diffusée par unité de temps, par l'élément de surface  $d^2\mathbf{R}_1$ , est donnée par

$$\frac{c}{l_e} |\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 d^2\mathbf{R}_1 \quad (\text{I.13})$$

De nouveau, le terme  $\frac{c}{l_e}$  représente le nombre de collisions subies par l'onde incidente, par unités de temps et de surface. Le transport de l'énergie de  $\mathbf{R}_1$  à  $\mathbf{R}_2$  est décrit ensuite par l'opérateur  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$ . L'énergie ainsi reçue par l'élément de surface  $d^2\mathbf{R}_2$  consécutif au premier évènement de diffusion en  $\mathbf{R}_1$  s'écrit :

$$\frac{c}{l_e} P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes |\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 d^2\mathbf{R}_2 d^2\mathbf{R}_1 \quad (\text{I.14})$$

L'onde est ensuite diffusée pour la dernière fois en  $\mathbf{R}_2$ . Seule une fraction  $\frac{1}{l_e}$  de l'énergie reçue en  $\mathbf{R}_2$  est diffusée. Le trajet retour de l'onde est pris en compte par l'intermédiaire de la fonction  $\bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ . Finalement, l'intensité reçue au point  $\mathbf{R}$  est donnée par :

$$\frac{1}{l_e} \times \frac{c}{l_e} |\bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, t)|^2 \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes |\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2 \quad (\text{I.15})$$

Cette dernière équation représente la contribution à l'intensité incohérente des chemins de diffusion dont le premier et le dernier diffuseur sont situés en  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ . L'intensité incohérente totale  $I_{inc}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  reçue au temps  $t$  par le récepteur  $\mathbf{R}$  est ensuite obtenue en intégrant sur toutes les positions  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  possibles :

$$I_{inc}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \frac{c}{l_e^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, t)|^2 \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes |\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2 \quad (\text{I.16})$$

Comme pour l'intensité simplement diffusée (Eq.I.12), cette expression de l'intensité incohérente tient donc compte du temps de propagation des trajets aller (de  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{R}_1$ ) et retour (de  $\mathbf{R}_2$  à  $\mathbf{R}$ ) de l'onde. Cette expression sera utilisée lorsque l'on souhaitera étudier l'évolution de l'intensité incohérente aux temps courts et/ou pour des milieux faiblement diffusants ( $l_e \gg ct$ ) (cf Chap.IV). En effet, on ne peut alors pas négliger les temps de parcours des trajets aller et retour par rapport au temps de propagation de l'onde entre  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ . La résolution de Eq.I.16 ne peut être, la plupart du temps, que numérique.

Intéressons-nous maintenant au cas de l'intensité cohérente. Cette contribution correspond à l'interférence entre deux ondes partielles distinctes empruntant des chemins réciproques au sein du milieu diffusant, *i.e* entre  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  (cf Fig.I.5). Si on se place en régime impulsionnel, ce terme d'interférence ne sera non nul que si source et récepteur sont strictement confondus (cf Fig.I.4(b)). En effet, la cohérence temporelle  $\Delta t$  des signaux est nulle et l'interférence entre les deux chemins réciproques n'existera que lorsque les deux chemins  $p^+$  et  $p^-$  seront à différence de phase nulle. Le pic de rétrodiffusion cohérente serait donc dans ce cas là de largeur infiniment petite. Expérimentalement, nous ne sommes pas, bien sûr, en régime strictement impulsionnel puisque la source  $\mathbf{S}$  présente une bande passante finie  $\Delta f$ , avec une fréquence centrale  $f$ . Le terme d'interférence peut alors être approché en considérant des ondes quasi-mochromatiques [21]. Pour qu'il y ait interférence entre deux chemins  $p^+$  et  $p^-$ , il faut que la différence de phase  $\Delta\phi$  entre  $p^+$  et  $p^-$  soit inférieure à  $2\pi f\Delta t$ , où  $\Delta t = \frac{1}{\Delta f}$  est la cohérence temporelle de l'onde :

$$\Delta\phi < 2\pi f\Delta t \tag{I.17}$$

La différence de phase  $\Delta\phi$  est donnée par :

$$\Delta\phi = k (|\mathbf{SR}_1| - |\mathbf{RR}_1| + |\mathbf{RR}_2| - |\mathbf{SR}_2|).$$

où  $k = \frac{2\pi f}{c}$  est le nombre d'onde associé à la fréquence centrale  $f$ . La condition I.17 peut donc se réécrire de la manière suivante :

$$|\mathbf{SR}_1| - |\mathbf{RR}_1| + |\mathbf{RR}_2| - |\mathbf{SR}_2| < c\Delta t \tag{I.18}$$

Cette condition est facilement vérifiée dès que la source  $\mathbf{S}$  et le récepteur  $\mathbf{R}$  sont placés en champ lointain. En champ proche, on montrera par la suite que le pic de rétrodiffusion cohérente s'étale sur une distance de l'ordre de la demi-longueur d'onde :  $|\mathbf{SR}| \leq \frac{\lambda}{2}$ . Les deux différences  $|\mathbf{SR}_1| - |\mathbf{RR}_1|$  et  $|\mathbf{SR}_2| - |\mathbf{RR}_2|$  pouvant être majorées par  $|\mathbf{SR}|$  et donc  $\frac{\lambda}{2}$ . La condition I.18 devient :

$$\frac{\Delta f}{f} < 1 \tag{I.19}$$

Cette relation est vérifiée expérimentalement. Chaque paquet d'onde peut alors être considéré comme lentement modulé en phase et amplitude et le terme d'interférences entre chemins  $p^+$  et  $p^-$  de la figure I.5 peut être obtenu en considérant des ondes monochromatiques à la pulsation centrale  $\omega$  [19]. Plus généralement, on peut exprimer les ondes incidentes et rétrodiffusées comme le produit d'une enveloppe complexe  $A(t)$  dépendant (lentement) du temps et d'une

fonction d'onde monochromatique  $\bar{\psi}(\omega)$  vibrant à la fréquence centrale  $\omega$  :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega, t) &= A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega) \\ \bar{\psi}_R(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega, t) &= A_R(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)\bar{\psi}_R(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega)\end{aligned}\quad (\text{I.20})$$

Si l'on considère l'ensemble des chemins  $p^+$  et  $p^-$  dont les premier et dernier diffuseurs de la chaîne sont situés en  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  (Fig.I.5), leur contribution à l'intensité cohérente s'écrit [20, 19] :

$$\frac{c}{l_e^2} \left[ \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, \omega, t)\bar{\psi}_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \omega, t) \right] \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega)\bar{\psi}_E^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{S}, \omega) \right] d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2 \quad (\text{I.21})$$

Si l'on injecte les expressions de  $\bar{\psi}_E$  et  $\bar{\psi}_R$  (Eq.I.20), la contribution à l'intensité cohérente devient :

$$\frac{c}{l_e^2} \left[ \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, \omega)\bar{\psi}_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \omega) \right] \quad (\text{I.22})$$

$$\times \left\{ [A_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, t)A_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, t)] \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes [A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)A_E^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{S}, t)] \right\} \quad (\text{I.23})$$

$$\times \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega)\bar{\psi}_E^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{S}, \omega) \right] d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2 \quad (\text{I.24})$$

Ainsi les termes monochromatiques I.22 et I.24 décrivent respectivement les interférences entre chemins réciproques au retour et à l'aller. Le noyau temporel I.23 décrit quant à lui les temps de parcours de l'onde entre son émission/réception et le premier/dernier évènement de diffusion. Il tient compte également de la propagation incohérente de l'onde au sein du milieu diffusant par l'intermédiaire de l'opérateur  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$ . L'intensité cohérente totale  $I_{coh}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t, \omega)$  est ensuite déduite en intégrant les positions  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sur tout le milieu diffusant  $\Omega$  :

$$\begin{aligned}I_{coh}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t, \omega) &= \frac{c}{l_e^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left[ \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, \omega)\bar{\psi}_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \omega) \right] \\ &\times \left\{ [A_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, t)A_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, t)] \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes [A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)A_E^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{S}, t)] \right\} \\ &\times \left[ \bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega)\bar{\psi}_E^*(\mathbf{R}_2, \mathbf{S}, \omega) \right] d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2\end{aligned}\quad (\text{I.25})$$

L'intensité incohérente  $I_{inc}$  peut prendre une forme équivalente en remplaçant, dans son expression obtenue en régime impulsionnel (Eq.I.16), les ondes transmises et reçues par leurs expressions données par Eq.I.20, prenant en compte la bande passante finie des signaux émis et mesurés :

$$\begin{aligned}I_{inc}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t, \omega) &= \frac{c}{l_e^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left| \bar{\psi}_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, \omega) \right|^2 \\ &\times \left\{ |A_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2, t)|^2 \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes |A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 \right\} \\ &\times \left| \bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega) \right|^2 d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_2\end{aligned}\quad (\text{I.26})$$

Les équations I.25 et I.26 sont les plus générales possibles. On verra par la suite comment elles peuvent se simplifier (et à quel prix) selon les configurations expérimentales et les observables que l'on désire étudier.



Nous allons maintenant nous intéresser à l'opérateur de propagation de l'intensité  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  qui apparaît dans les expressions des intensités cohérente et incohérente. Son expression diffère en effet selon la géométrie du milieu aléatoire (milieu infini, tranche infinie, *etc.*). De plus,  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  est souvent approché par la solution de l'équation de diffusion. Nous discuterons des hypothèses à vérifier pour réaliser une telle approximation.

### I.2.3 Opérateur de propagation de l'intensité en milieu aléatoire

L'opérateur de propagation de l'intensité dans un milieu aléatoire est solution de l'équation de transfert radiatif [1]. La théorie du transfert radiatif peut être appliquée aux ondes si la trajectoire de l'onde multidiffusée est analogue à celle d'une bille subissant des chocs aléatoires répétés :

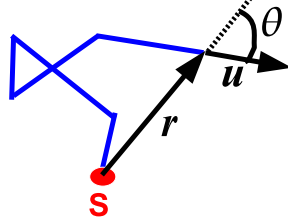


FIG. I.6: Représentation schématique d'une séquence de diffusion dans un milieu aléatoire

Les phénomènes d'interférences sont donc négligés. Dans le cas d'évènements de diffusion isotrope, cette équation s'écrit :

$$c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = -(l_e^{-1} + l_a^{-1}) I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) + l_e^{-1} I(\mathbf{r}, t) + c^{-1} S(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}), \quad (\text{I.27})$$

$$\text{avec } I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (\text{I.28})$$

$I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  est l'intensité spécifique, c'est-à-dire la densité de puissance au point  $\mathbf{r}$  diffusée dans la direction donnée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ .  $l_e$  et  $l_a$  sont respectivement les libres parcours moyens élastique et d'absorption ; ils caractérisent respectivement les pertes par diffusion et par absorption. Le terme  $S(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  correspond au terme source. L'équation de transfert radiatif met en jeu dans le membre de gauche les variations spatiale et temporelle de l'intensité spécifique. Le premier terme du membre de droite caractérise la perte d'énergie dans la direction incidente  $\mathbf{u}$ , due aux diffusions dans les autres directions et à l'absorption. Le deuxième terme du membre de droite représente le gain d'énergie dans la direction incidente liée à des diffusions provenant des autres directions. Enfin le dernier terme regroupe les éventuelles sources. Dans le cas bidimensionnel, Paasschens [22] a montré que la fonction de Green  $P(r, t)$  liée l'équation de transfert radiatif (solution de l'équation pour une source isotrope  $S(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$ ) possède



une expression analytique :

$$P(r, t) = \underbrace{\frac{\exp(-ct/l_{ext})}{2\pi r} \delta(ct - r)}_{\text{intensité balistique}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi l_e ct} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{l_e} - \frac{ct}{l_{ext}}\right) \Theta(ct - r)}_{\text{intensité diffusée}} \quad (\text{I.29})$$

où  $l_{ext} = (l_e^{-1} + l_a^{-1})$  est la longueur d'extinction ; elle prend en compte à la fois les pertes par diffusion et par absorption.  $\Theta(ct - r)$  correspond à la fonction de Heaviside. On reconnaît dans l'expression de  $P(r, t)$  (Eq.I.29) :

- L'intensité balistique associée au Dirac  $\delta(ct - r)$ .
- L'intensité diffusée associée à la fonction d'Heaviside  $\Theta(ct - r)$  ; cette fonction permet de tenir compte du fait que l'énergie a besoin d'un temps  $t \geq \frac{r}{c}$  pour atteindre un point situé à une distance  $r$  de la source.

La solution exacte de l'équation de transfert radiatif (Eq.I.29) présente une forme analytique assez compliquée et son utilisation sera délicate si on veut obtenir des expressions analytiques simples pour les intensités cohérente et incohérente (Eq.I.25 et I.26). La simplification la plus souvent réalisée dans la littérature est d'approcher l'équation de transfert radiatif par une équation de diffusion. Ainsi, après un grand nombre de diffusions, on peut montrer que l'équation de transfert radiatif (Eq.I.27) peut se simplifier en [23, 24] :

$$\frac{\partial}{\partial t} I(r, t) - D \Delta I(r, t) = -\frac{c}{l_a} I(r, t) + S(r, t), \quad (\text{I.30})$$

$$\text{avec } D = \frac{cl_e}{d} \quad (\text{I.31})$$

où  $d$  correspond à la dimension du problème. Nous traitons ici le cas 2D et donc,  $d = 2$ . Dans l'équation I.30 apparaît le paramètre essentiel de ce chapitre : la constante de diffusion  $D$ . Ce paramètre diffusant est propre au régime dynamique puisqu'il détermine la taille caractéristique de la zone atteinte par l'intensité multidiffusée, le *halo diffusif*. La fonction de Green  $P_{diff}(r, t)$  de l'équation de diffusion I.30 s'écrit à 2D :

$$P_{diff}(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt} - \frac{ct}{l_a}\right) \quad (\text{I.32})$$

Le propagateur de l'intensité au sein d'un milieu diffusant est analogue à la distribution de probabilité de la position d'une bille subissant des chocs aléatoires, quand le nombre de chocs tend vers l'infini. Notons que l'expression de  $D$  (Eq.I.31) n'est valable que dans le cas d'évènements de diffusion isotropes et élastiques [23, 24]. Dans le cas d'évènements de diffusion anisotrope, le libre parcours moyen  $l_e$  apparaissant dans l'expression de  $D$  (Eq.I.31) est remplacé par un libre parcours moyen de transport  $l^*$  dont l'expression (Eq.V.91) et la signification physique seront donnés dans la partie V.3 de cette thèse.

Il est intéressant de comparer la solution de l'équation de diffusion  $P_{diff}(r, t)$  (Eq.I.30) avec  $P(r, t)$ , solution exacte de l'équation de transfert radiatif (Eq.I.29) (voir Fig I.7). En examinant les expressions Eq.I.29 et Eq.I.32, nous voyons que  $P_{diff}$  constitue une bonne approximation de l'opérateur de propagation de l'intensité dès que le temps  $t$  est grand devant  $\frac{r}{c}$ . Ceci est propre

au cas bidimensionnel. En régime 3D, l'approximation de diffusion est assujettie à la double condition  $l_e, r \ll ct$  [22]. En régime 2D, l'approximation de diffusion est valable même si le temps  $t$  est inférieur au temps de collision élastique  $\tau_e = \frac{l_e}{c}$ , du moment que la condition  $r \ll ct$  soit réalisée. La principale source d'erreur quant à l'utilisation de l'équation de diffusion est le fait de négliger le temps mis par l'onde pour se propager dans le milieu :  $P_{diff}$  a une valeur non nulle dans tout l'espace alors que la solution exacte  $P$  est strictement nulle pour  $r > ct$  puisque l'onde a une célérité  $c$  finie. Sur la figure I.7, on voit que l'erreur entre  $P(r, t)$  et  $P_{diff}(r, t)$  est inférieure à 5% dès que  $r \leq \frac{ct}{2}$  environ, soit dès que  $t$  est au moins deux fois plus grand que le temps balistique  $\frac{r}{c}$ . L'approximation de diffusion qui consiste à prendre  $P(r, t) \simeq P_{diff}(r, t)$  est donc à utiliser avec précaution et n'est valable que dans la limite des temps longs.

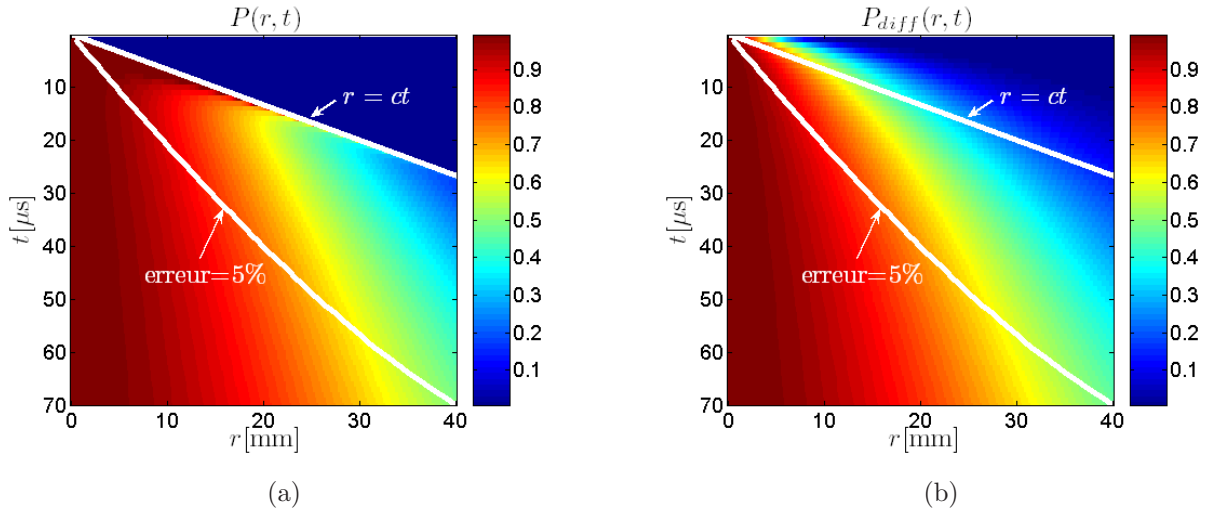


FIG. I.7: (a) Evolution spatio-temporelle de  $P(r, t)$  (Eq.I.29) normalisé à chaque temps  $t$  par son maximum. (b) Evolution spatio-temporelle de  $P_{diff}(r, t)$  (Eq.I.32) normalisé lui aussi par son maximum à chaque temps  $t$ . Les paramètres diffusifs ont été fixés arbitrairement et correspondent à des valeurs typiques de nos expériences ultrasonores :  $l_e = 10$  mm,  $c = 1,5$  mm/ $\mu\text{s}$  et donc  $D = 7,5$  mm<sup>2</sup>/ $\mu\text{s}$ . Les pertes par absorption ont été négligées ( $l_a \rightarrow \infty$ ) si bien que  $l_{ext} = l_e$ . Sur chacune des figures, on a représenté par des lignes blanches le front balistique  $r = ct$  et la limite pour laquelle l'erreur relative entre  $P$  et  $P_{diff}$  est égale à 5%. Sous cette ligne,  $P_{diff}$  est une bonne approximation de  $P$  puisque l'erreur réalisée est alors inférieure à 5%.

Jusqu'ici, nous n'avons traité que le cas d'un milieu aléatoire infini. Or, nous verrons par la suite qu'une grande partie des expériences présentées dans ce chapitre consiste à étudier la multidiffusion dans des échantillons d'épaisseur finie. Il est donc utile de s'attarder à présent sur la propagation de l'intensité dans un milieu désordonné semi-infini compris entre les abscisses  $z = 0$  et  $z = L$  (cf Fig.I.8). On suppose qu'elle obéit localement à l'équation de diffusion (Eq.I.30). Les conditions aux limites imposent d'annuler le flux net d'énergie arrivant dans l'échantillon depuis l'extérieur. On peut alors montrer que les conditions aux limites pour

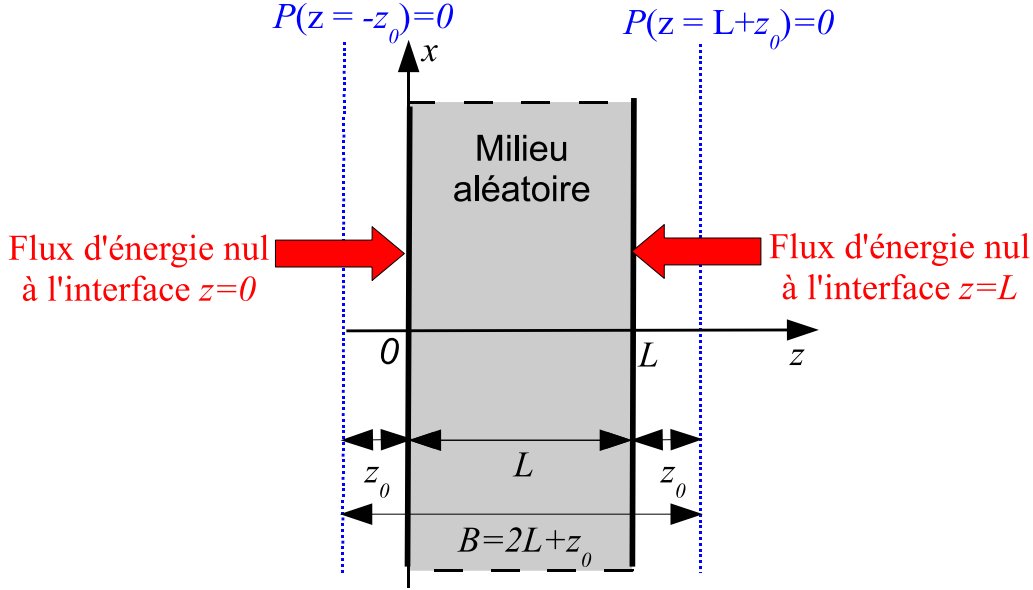


FIG. I.8: Conditions aux limites à appliquer sur l'intensité dans le cas d'une tranche semi-infinie

l'intensité s'écrivent [25] :

$$P + z_0 \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \text{ en } z = L$$

$$P - z_0 \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \text{ en } z = 0$$

avec  $z_0 = \frac{2}{3}l^*$  à trois dimensions et  $z_0 = \frac{\pi}{4}l^*$  à deux dimensions. L'extrapolation des deux conditions conduit à annuler l'intensité  $P$  en  $z = -z_0$  et  $z = L + z_0$ . L'annulation de l'intensité au niveau de ces deux interfaces effectives mène à l'expression suivante pour  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  aux temps longs [24, 25] :

$$P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1-x_n)^2}{4Dt} - \frac{ct}{l_a}\right]}{4\pi Dt} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi(z_1+z_0)}{B} \sin \frac{m\pi(z_N+z_0)}{B} \exp\left(-\frac{m\pi^2 Dt}{B}\right) \quad (\text{I.33})$$

où  $B = L + 2z_0$  correspond à l'épaisseur effective du milieu. L'opérateur de propagation  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  conserve sa forme classique le long de la direction  $x$ , direction dans laquelle le milieu aléatoire est infini. Suivant la direction  $z$ ,  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  se décompose en une somme infinie de modes propres de l'opérateur laplacien satisfaisant les conditions d'annulation de l'intensité aux interfaces effectives [24]. Dans le cas d'un milieu semi-infini avec une seule interface en  $z = 0$  ( $L \rightarrow \infty$ ), l'expression de  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  devient [6] :

$$P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1-x_n)^2}{4Dt} - \frac{ct}{l_a}\right]}{4\pi Dt} \left\{ \exp\left[-\frac{(z_N - z_1)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(z_N + z_1 + 2z_0)^2}{4Dt}\right] \right\} \quad (\text{I.34})$$

Dans ce paragraphe, nous avons établi l'expression exacte de l'opérateur de propagation en intensité  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  au sein d'un milieu diffusant. Nous avons ainsi pu voir les différentes approximations mises en jeu lorsque le modèle diffusif est utilisé. Nous allons maintenant pouvoir

établir théoriquement l'expression des intensités cohérente et incohérente dans les configurations expérimentales les plus courantes en optique (champ lointain), en sismologie (champ proche) et en acoustique ultrasonore (champ intermédiaire).

### I.2.4 Champ proche

La dénomination *champ proche* signifie ici que la source  $\mathbf{S}$  et le récepteur  $\mathbf{R}$  sont enfouis et/ou situés à la surface du milieu diffusant. Cette configuration est celle que l'on retrouve typiquement en sismologie [17, 19, 26] ou dans des cavités chaotiques [27, 28]. Dans ce paragraphe, nous allons déterminer le comportement dynamique des intensités simplement et multiplement diffusées.

Par souci de simplification, nous nous plaçons ici dans le cas idéal d'un milieu aléatoire 2D infini dans lequel sont enfouis une source et un récepteur ponctuels.

#### Décomposition de l'intensité à chaque ordre de diffusion

Les fonctions d'onde  $\bar{\psi}_E$  et  $\bar{\psi}_R$  correspondent ici aux fonctions de Green 2D moyennes  $\bar{G}(\mathbf{R}', \mathbf{S}, t)$  et  $\bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t)$ , soit [29] :

$$\bar{G}(r = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|, t) = \exp\left(-\frac{ct}{2l_{ext}}\right) \frac{\Theta(ct - r)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \quad (\text{I.35})$$

Le terme  $\exp\left(-\frac{ct}{2l_{ext}}\right)$  décrit la décroissance exponentielle de l'onde cohérente due aux pertes par diffusion et par absorption. Cette expression de la fonction de Green se prête peu à des calculs analytiques en régime impulsif. En revanche, par un passage habile dans les domaines de Fourier temporel et spatial, Paasschens [22] a pu décomposer l'intensité moyenne en une somme de contributions associées à chaque ordre de diffusion. La contribution  $I_N$  associée à l'ordre de diffusion  $N$  est donnée par :

$$I_N(r, t) = \frac{c}{2\pi l_e^2} \frac{1}{(N-1)!} \exp\left(-\frac{ct}{l_{ext}}\right) \left(\frac{ct}{l_e}\right)^{N-2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2t^2}\right)^{\frac{N-2}{2}} \Theta(ct - r), \text{ pour } N \geq 1 \quad (\text{I.36})$$

La fonction de Heaviside permet de tenir compte du temps d'arrivée de l'onde diffusée. Parmi tous les termes  $I_N$ , on peut extraire l'intensité simplement diffusée  $I_S(r, t)$  (ordre 1) :

$$I_S(r = |\mathbf{R} - \mathbf{S}|, t) = \frac{\exp\left(-\frac{ct}{l_{ext}}\right)}{2\pi l_e \sqrt{t^2 - (r/c)^2}} \Theta(ct - r) \quad (\text{I.37})$$

Dans la limite des temps longs ( $r \ll ct$ ), l'expression de  $I_S$  se simplifie en :

$$\lim_{t \gg r/c} I_S(r, t) = I_S(r = 0, t) = \frac{\exp(-ct/l_{ext})}{2\pi l_e t} \quad (\text{I.38})$$

L'étude de l'intensité simplement diffusée ne peut fournir qu'une mesure de  $l_{ext}$ , bien que  $l_e$  apparaisse au dénominateur de Eq.I.38. En effet, l'intensité mesurée dépend, en pratique, fortement de l'appareillage expérimental et nous n'avons donc pas accès à une mesure absolue de  $I_S$ .

### Intensité incohérente

Si on s'intéresse maintenant à l'évolution temporelle de l'intensité incohérente, celle-ci peut être obtenue en sommant les contributions  $I_N$  de  $N = 2$  à l'infini :

$$\begin{aligned} I_{inc}(r = |\mathbf{R} - \mathbf{S}|, t) &= \sum_{p=2}^{\infty} I_p(r, t) \\ &= \frac{c}{2\pi l_e^2} \exp\left(-\frac{ct}{l_{ext}}\right) \Theta(ct - r) \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{ct}{l_e}\right)^{p-2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Cette somme peut se simplifier en utilisant le fait que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$  :

$$I_{inc}(r, t) = \frac{\exp\left(-\frac{ct}{l_{ext}}\right)}{2\pi l_e \sqrt{t^2 - (r/c)^2}} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{l_e}\right) - 1 \right] \Theta(ct - r) \quad (\text{I.40})$$

L'intensité incohérente est correctement décrite aux temps longs par l'approximation de diffusion I.32 ( $t \gg r/c$ ) :

$$\lim_{t \gg r/c} I_{inc}(r, t) = \frac{c \exp(-ct/l_a)}{4\pi D t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad (\text{I.41})$$

avec  $D = \frac{cl_e}{2}$  à 2D en supposant la diffusion isotrope. Expérimentalement, on peut accéder à une mesure des paramètres statistiques de l'onde multiplement diffusée par :

- l'étude de la distribution des temps de vol [30, 31, 32, 33, 34] : la source et le récepteur sont fixés et on étudie l'évolution temporelle de l'intensité incohérente proportionnelle à  $\frac{c \exp(-ct/l_a)}{4\pi D t}$ . Notons que cette évolution dépend à la fois des phénomènes de diffusion ( $D$ ) et d'absorption ( $l_a$ ).
- l'étude de la croissance du halo diffusif : celui-ci croît en  $\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$  et une mesure du coefficient de diffusion peut être obtenue indépendamment de l'absorption [35, 36, 37, 38, 34].

### Intensité cohérente

Concernant l'intensité cohérente, on ne peut pas déterminer son expression en considérant un régime strictement impulsionnel. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, les ondes émises et reçues présentent expérimentalement une cohérence temporelle. Nous allons donc considérer l'expression I.25 prenant en compte les interférences entre chemins réciproques d'un point de vue monochromatique. Nous allons ignorer ici l'enveloppe temporelle des signaux  $A_R(t)$  et  $A_E(t)$  puisque celles-ci n'ont *a priori* aucune influence sur le profil spatial de l'intensité cohérente, pourvu que la cohérence des signaux persiste suffisamment ( $\Delta f/f < 1$ ) :

$$[A_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_N, t) A_R^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, t)] \otimes P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) \otimes [A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t) A_E^*(\mathbf{R}_N, \mathbf{S}, t)] \simeq P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t)$$

Cette approximation revient à négliger les différences de temps de parcours entre la source (ou le récepteur) et les premiers (ou derniers) diffuseurs possibles. Elle n'est donc pas justifiée aux

temps courts mais donnera de bons résultats aux temps longs ( $t \gg \tau_E = \frac{l_e}{c}$ ). La dépendance en temps n'apparaît donc plus que par l'intermédiaire du noyau  $P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t)$ . Comme nous avons à faire à des sources et récepteurs ponctuels, les fonctions d'onde  $\bar{\psi}_E$  et  $\bar{\psi}_R$  décrivant la phase d'émission et de réception correspondent ici à la fonction de Green moyenne  $\bar{G}$  au sein du milieu diffusant. L'expression de l'intensité cohérente est donc simplement donnée par [19] :

$$I_{coh}(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t, \omega) \simeq \frac{c}{l_e^2} \int \int \bar{G}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_N, \omega) \bar{G}^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \omega) \times P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) \bar{G}(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, \omega) \bar{G}^*(\mathbf{R}_N, \mathbf{S}, \omega) d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_N \quad (\text{I.42})$$

L'approximation suivante consiste à se mettre dans la limite des temps longs tel que  $\sqrt{Dt} \gg l_e$  si bien que l'opérateur de propagation de l'intensité  $P(t)$  est uniforme spatialement et ne dépend plus que du temps :

$$P(t) \simeq \frac{\exp(-ct/l_a)}{4\pi Dt} \quad (\text{I.43})$$

A 2D, la fonction de Green moyenne monochromatique s'écrit [29] :

$$\bar{G}(|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|, \omega) = \frac{j}{4} H_0^{(1)} \left( \left[ k_0 - \frac{j}{2l_{ext}} \right] |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| \right) \quad (\text{I.44})$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel du premier ordre. Le nombre d'onde effectif  $k_e = k_0 - \frac{j}{2l_{ext}}$  présente une partie imaginaire non nulle afin de tenir compte des pertes par diffusion et absorption. En injectant  $P(t)$  (Eq.I.43) et  $\bar{G}(r, \omega)$  (Eq.I.44) dans Eq.I.42, on obtient l'expression de l'intensité cohérente en champ proche :

$$I_{coh}(r = |\mathbf{R} - \mathbf{S}|, t) \simeq \frac{c \exp(-ct/l_a)}{4\pi Dt l_e^2} |L(r)|^2, \quad (\text{I.45})$$

avec

$$L(r) = \frac{1}{16} \int d^2\mathbf{R}_1 H_0^{(1)} \left( \left[ k_0 - j \frac{1}{2l_{ext}} \right] |\mathbf{R}_1 - \mathbf{S}| \right) H_0^{(1)*} \left( \left[ k_0 - j \frac{1}{2l_{ext}} \right] |\mathbf{R} - \mathbf{R}_1| \right).$$

En passant dans l'espace des  $\mathbf{k}$ , un calcul analogue à celui de Margerin *et al.* [19] conduit à :

$$L(r) = l_e J_0(k_0 r) \exp\left(-\frac{r}{2l_{ext}}\right)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce et d'ordre 0. En injectant cette expression de  $L$  dans Eq.I.45, on obtient finalement :

$$I_{coh}(r, t) \simeq \frac{c \exp(-ct/l_a)}{4\pi Dt} |J_0(k_0 r)|^2 \exp\left(-\frac{r}{l_{ext}}\right) \\ I_{coh}(r, t) \simeq I_{inc}(r=0, t) |J_0(k_0 r)|^2 \exp\left(-\frac{r}{l_{ext}}\right) \quad (\text{I.46})$$

Alors que le profil spatial de l'intensité incohérente est directement lié à la croissance du halo diffusif au sein du milieu diffusant (Eq.I.41), celui de l'intensité cohérente ne présente aucune évolution avec le temps et ne contient donc aucune information quant aux paramètres diffusants du milieu (Eq.I.46). Un profil spatial typique de l'intensité moyenne obtenue en champ

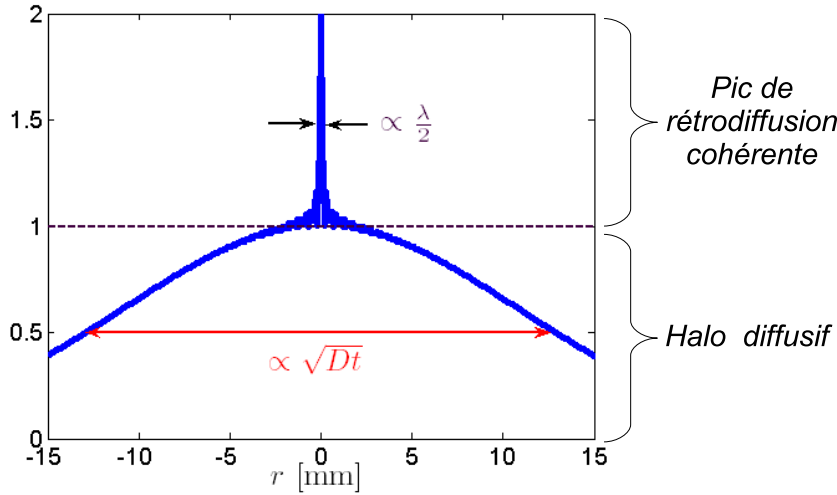


FIG. I.9: Profil spatial typique obtenu pour l'intensité multidiffusée dans une configuration champ proche dans le cas d'un milieu 2D infini

proche est représenté sur la figure I.9. L'intensité moyenne présente la forme suivante : un pic étroit (l'intensité cohérente) surplombant un fond incohérent dont l'étendue spatiale croît avec le temps. Bien sûr, le résultat tracé sur la figure I.9 est théorique. En pratique, le profil expérimental est plus erratique du fait de fluctuations liées au manque de moyenne sur le désordre. Il n'en reste pas moins que la configuration champ proche est intéressante car l'étude du fond incohérent permet de mesurer la constante de diffusion, indépendamment de l'absorption. De plus, comme nous le verrons dans la suite du manuscrit, une telle configuration permet d'avoir accès à des mesures de  $D$  locales, ce qui peut être fort intéressant pour l'imagerie des milieux désordonnés.

### I.2.5 Champ lointain

La dénomination *champ lointain* signifie ici que source et récepteur sont placés idéalement à l'infini. Cette configuration est celle que l'on retrouve typiquement en optique [2, 4, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 32]. Désormais, les ondes incidente et rétrodiffusée sont des ondes planes caractérisées par leurs vecteurs d'onde respectifs  $\mathbf{k}_E$  et  $\mathbf{k}_R$ . Nous allons supposer ici le milieu aléatoire semi-infini. L'intensité multiplement diffusée est toujours la somme d'une intensité cohérente (interférence entre ondes partielles associées à des chemins réciproques) et incohérente (interférence de l'onde partielle avec elle-même) (Eq.I.4). Ces deux contributions ne présentent plus en champ lointain les mêmes dépendances spatio-temporelles que celles observées en champ proche. Dans ce paragraphe, nous développons, dans un premier temps, une approche qualitative permettant de prédire le profil spatio-temporel de l'intensité multidiffusée en configuration champ lointain. Puis, nous nous appuyerons sur l'étude théorique d'Akkermans *et al.* [6] pour donner les expressions rigoureuses des contributions cohérente et incohérente.

Pour appréhender qualitativement le comportement de l'intensité multiplement diffusée en champ lointain, nous repartons de son expression générale donnée par Eq.I.4. Détaillons

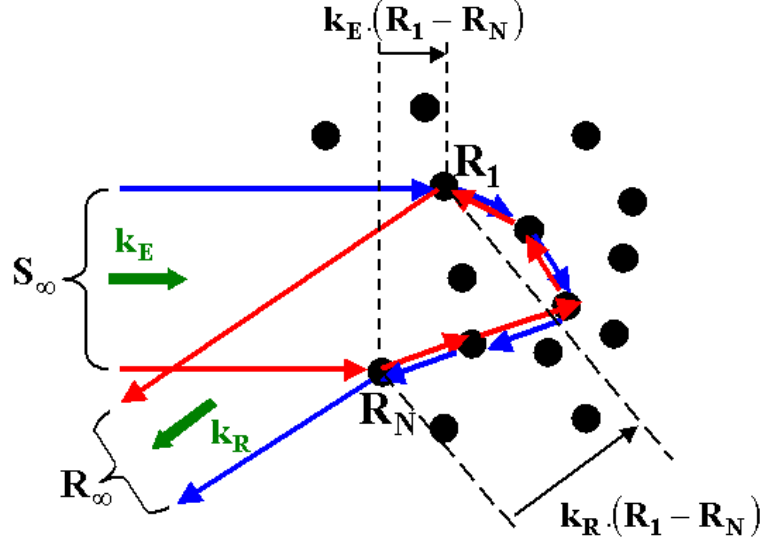


FIG. I.10: La différence de phase à grande distance dans la direction  $\mathbf{k}_R$  vaut  $(\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N)$ .

l'expression de  $\langle I(t) \rangle$  dans le cas d'une intensité observée dans la direction  $\mathbf{k}_R$  après émission d'une onde plane depuis la direction  $\mathbf{k}_E$  :  $\langle I(\mathbf{k}_R, \mathbf{k}_E, t) \rangle$ . Comme pour l'étude en champ proche, on remplace la somme sur les chemins par une énumération de la position des centres des premier et dernier diffuseurs rencontrés pour un chemin donné. On note  $A(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t)$  l'amplitude au point  $\mathbf{R}_N$  obtenue au bout temps  $t$ , suite à l'émission d'une impulsion depuis un point source situé en  $\mathbf{R}_1$ . En champ lointain, l'intensité moyenne peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{k}_R, \mathbf{k}_E, t) \rangle &= \left\langle \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_N} \|A(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t)\|^2 \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_N} A(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) A^*(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_N, t) \exp [j(\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N)] \right\rangle \end{aligned} \quad (I.47)$$

Le premier terme correspond à l'intensité incohérente ; il résulte de la sommation individuelle des intensités associées à chacun des chemins de diffusion possibles. Le second terme correspond à l'intensité cohérente ; il contient les interférences entre chemins réciproques. Les différences de phases entre les chemins réciproques sont de la forme  $\Delta\Phi = (\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N)$  (cf Fig.I.10). La différence de phase est donc nulle dans la direction d'observation  $\mathbf{k}_R = -\mathbf{k}_E$ , c'est-à-dire à la rétrodiffusion. On constate en outre que tous les chemins tels que  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_N$  donnent lieu à des interférences constructives quelles que soient les directions d'observation : on parle de *chemins récurrents*. Etant donné que la contribution liée aux chemins récurrents ne présente pas de dépendance angulaire, elle intervient dans le cône de rétrodiffusion à la manière de l'intensité incohérente. C'est pourquoi, on classe l'intensité des chemins récurrents dans le terme incohérent bien qu'ils résultent d'interférences résistant à la moyenne. De la même manière, on constate que les chemins de diffusion simple donnent lieu à des contributions égales dans toutes les directions. En effet, on a  $\mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{R}_N$  et donc  $\Delta\phi = 0$ , quels que soient  $\mathbf{k}_E$  et  $\mathbf{k}_R$  pour la contribution de diffusion simple  $I_S$ . Notons  $\theta = \widehat{(\mathbf{k}_E, \mathbf{k}_R)}$  l'angle d'observation par



rapport à la direction d'incidence. On peut donc décomposer l'intensité moyennée  $\langle I(\theta, t) \rangle$  selon

$$\langle I(\theta, t) \rangle = I_S(t) + I_{inc}(\theta, t) + I_{coh}(\theta, t) \quad (\text{I.48})$$

La différence de phase entre les chemins de diffusion réciproques est nulle dans la direction arrière quelle que soit la position des diffuseurs. En dehors de cette direction particulière,  $\Delta\Phi$  est non nul et dépend de la position des premier et dernier diffuseurs : la contribution des chemins réciproques ne résiste à la moyenne qu'au voisinage de la direction de rétrodiffusion. On peut évaluer le secteur angulaire  $\Delta\theta$  dans lequel  $I_{coh}$  est non nul par la condition  $(\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N) < \pi$ . Le secteur angulaire  $\Delta\theta$  est donc de l'ordre de

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{2|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N|} \quad (\text{I.49})$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on peut modéliser la diffusion multiple par une approche diffusive : au cours du temps le halo diffusif s'étend selon une loi caractéristique en  $\sqrt{Dt}$ . Un ordre de grandeur de la distance entre le premier et le dernier diffuseur à un temps  $t$  est donc donné par  $\sqrt{Dt}$ . L'évolution temporelle du secteur angulaire, où  $I_{coh}$  est non nul, est donnée par :

$$\Delta\theta(t) \propto \frac{\lambda}{\sqrt{Dt}} \quad (\text{I.50})$$

En régime dynamique, on s'attend donc à ce que le cône de rétrodiffusion cohérente s'affine au cours du temps (on parlera de cône dynamique), et on peut espérer accéder à la constante de diffusion en mesurant la largeur dudit cône.

Plus rigoureusement, on peut reprendre les expressions générales des intensités cohérente et incohérente (Eqs.I.25 & I.26) et les appliquer à la configuration champ lointain décrite sur la figure I.11.  $\theta_E$  et  $\theta_R$  sont les angles que font les vecteurs d'onde émis et reçus avec la normale à

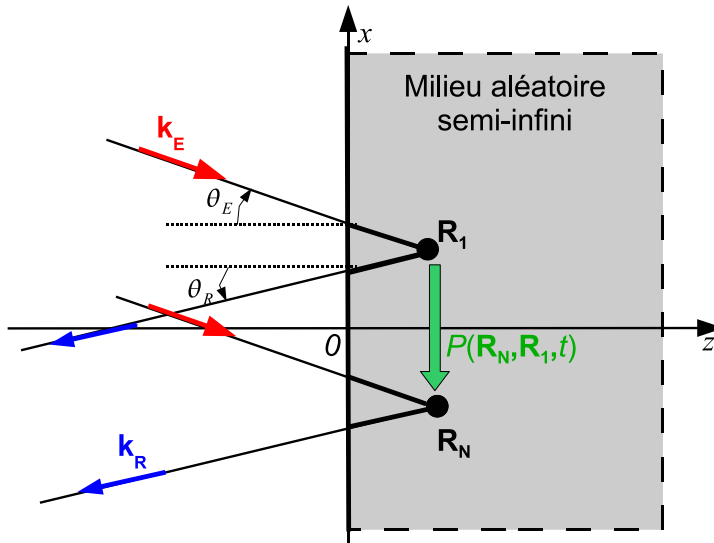


FIG. I.11: Les différentes notations utilisées pour le calcul de l'intensité multidiffusée en champ lointain.

la surface du milieu diffusant. Comme en champ proche, on va se placer à des temps suffisamment longs pour pouvoir faire l'approximation diffusive. D'autre part, on va négliger les temps de propagation avant et après les premier et dernier évènements de diffusion, en ignorant les enveloppes complexes des signaux émis et reçus, soit :

$$\left\{ |A_R(\mathbf{R}, \mathbf{R}_N, t)|^2 \otimes P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) \otimes |A_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 \right\} \approx P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t),$$

L'origine des temps est prise à l'instant où l'onde incidente rencontre l'interface du milieu aléatoire ( $z = 0$ ). Les ondes émise  $\psi_E$  et reçue  $\psi_R$  sont des ondes planes de vecteurs d'onde respectifs  $\mathbf{k}_E$  et  $\mathbf{k}_R$ . L'onde plane émise est d'amplitude unité. En revanche, l'onde reçue doit être d'amplitude  $1/\sqrt{2\pi}$  pour tenir compte du fait que seule l'intensité réfléchie dans la direction  $\mathbf{k}_R$  est captée :

$$\psi_E(\mathbf{R}_1, \omega) = \exp(j\mathbf{k}_E \cdot \mathbf{R}_1) \exp\left(-\frac{z_1}{2l_{ext}\mu_E}\right)$$

$$\psi_R(\mathbf{R}_N, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(j\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{R}_N) \exp\left(-\frac{z_N}{2l_{ext}\mu_R}\right)$$

où  $\mu_E$  et  $\mu_R$  sont les cosinus des angles d'émission  $\theta_E$  et de réception  $\theta_R$ . Les termes en  $\exp\left(-\frac{z}{2l_{ext}\mu}\right)$  traduisent la décroissance de l'onde cohérente au sein du milieu diffusant entre l'émission/réception et le premier/dernier évènement de diffusion (traits gras sur la figure I.11). En explicitant les expressions de  $\psi_E$  et  $\psi_R$  dans les équations I.25 et I.26, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{coh}(\mathbf{k}_E, \mathbf{k}_R, t, \omega) &= \frac{c}{2\pi l_e^2} \int \int \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_E} + \frac{1}{\mu_R}\right) \frac{z_1 + z_N}{l_{ext}}\right] \\ &\times \exp[j(\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N)] P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_N \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

$$\begin{aligned} I_{inc}(\mathbf{k}_E, \mathbf{k}_R, t, \omega) &= \frac{c}{2\pi l_e^2} \int \int \exp\left[-\frac{z_1}{\mu_E l_{ext}}\right] \exp\left[-\frac{z_N}{\mu_R l_{ext}}\right] \\ &\times P(\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_1, t) d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_N \end{aligned} \quad (\text{I.52})$$

Dans un souci de simplification des calculs, nous allons supposer que nous sommes en incidence et réflectance quasi-normale, si bien que  $\mu_E \approx 1$ ,  $\mu_R \approx 1$  et  $\theta \ll 1$ . Le terme de phase  $\Delta\Phi$ , apparaissant dans la contribution cohérente, se simplifie tel que :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &\approx (\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N) \\ &\approx 2k_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}_x \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N) \\ &\approx k_0\theta(x_1 - x_n) \end{aligned}$$

En tenant compte de cette simplification du terme de phase et en injectant l'expression de l'opérateur de propagation de l'intensité dans un milieu 2D semi-infini (Eq.I.34), les expressions

des contributions cohérente et incohérente deviennent :

$$I_{coh}(\theta, t, \omega) = \frac{c \exp\left(-\frac{ct}{l_a}\right)}{8\pi^2 Dt l_e^2} I_z(t) \iint dx_1 dx_N \exp\left[-\frac{(x_1 - x_n)^2}{4Dt}\right] \exp[jk_0\theta(x_1 - x_n)], \quad (\text{I.53})$$

$$I_{inc}(\theta, t, \omega) = \frac{c \exp\left(-\frac{ct}{l_a}\right)}{8\pi^2 Dt l_e^2} I_z(t) \iint dx_1 dx_N \exp\left[-\frac{(x_1 - x_n)^2}{4Dt}\right], \quad (\text{I.54})$$

$$\text{avec, } I_z(t) = \iint dz_1 dz_N \exp\left[-\frac{z_1 + z_N}{l_{ext}}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(z_N - z_1)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(z_N + z_1 + 2z_0)^2}{4Dt}\right] \right\}$$

Le terme  $I_z(t)$  peut être calculé analytiquement aux temps longs. Du fait du facteur exponentiel  $\exp\left[-\frac{z_1+z_N}{l_{ext}}\right]$ , les termes gaussiens entre accolades peuvent être développés à l'ordre 1 dans la limite des temps longs ( $Dt \gg l_e^2$ ), et on obtient :

$$I_z(t) \approx \frac{l_{ext}^2 (z_0 + l_{ext})^2}{Dt}$$

En intégrant suivant les positions  $x_1$  et  $x_n$ , on obtient les expressions finales des intensités cohérente et incohérente en champ lointain :

$$I_{coh}(\theta, t, \omega) = \frac{c l_{ext}^2 (z_0 + l_{ext})^2 \exp\left(-\frac{ct}{l_a}\right)}{l_e^2 4\pi Dt} \exp[-Dk_0^2\theta^2 t], \quad (\text{I.55})$$

$$I_{inc}(t, \omega) \approx \frac{c l_{ext}^2 (z_0 + l_{ext})^2 \exp\left(-\frac{ct}{l_a}\right)}{l_e^2 4\pi Dt}. \quad (\text{I.56})$$

On peut remarquer que, en champ lointain, l'intensité incohérente ne dépend pas de l'angle  $\theta$  (dans la limite des angles petits). Le profil spatial de l'intensité multidiffusée obtenu en champ lointain est donc constitué d'un plateau incohérent, surplombé par le cône de rétrodiffusion cohérente dont la largeur se rétrécit en  $(Dt)^{-1/2}$  (cf Fig.I.12), de telle sorte que :

$$I_{coh}(\theta, t, \omega) = I_{inc}(t, \omega) \exp[-Dk_0^2\theta^2 t] \quad (\text{I.57})$$

On retrouve bien par ce calcul rigoureux le résultat précédent (Eq.I.50), plus intuitif. Contrairement au cas de mesures en champ proche, c'est en examinant l'évolution du profil angulaire de l'intensité cohérente avec le temps qu'une mesure de la constante de diffusion  $D$  peut être réalisée. L'intensité incohérente, dont l'évolution spatio-temporelle était directement liée au halo diffusif en champ proche, ne présente aucune dépendance angulaire en champ lointain ; on parlera par la suite de *fond incohérent*. Seule son évolution temporelle peut éventuellement donner une information sur le milieu sondé. Néanmoins, en pratique, cette observable est difficilement exploitable puisque l'évolution temporelle de l'intensité incohérente dépend des quatre paramètres  $l_e$ ,  $l_a$ ,  $D$  et  $l^*$  (par l'intermédiaire de  $z_0$ ). Notons que dans le cas d'une tranche infinie (cf Fig.I.8), les calculs mènent au même profil spatial pour l'intensité multiplement diffusée (Eq.I.57). Expérimentalement, Vreeker *et al.* [7] ont été les premiers à réaliser, en optique, des mesures du profil spatial de l'intensité rétrodiffusée en régime dynamique. Mais ce

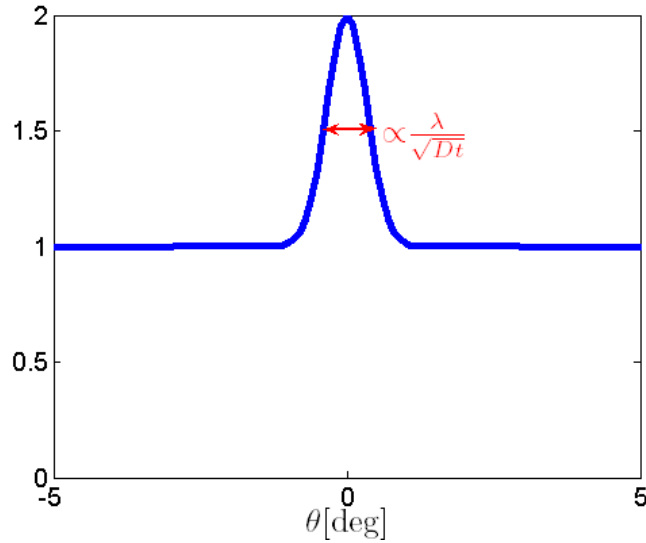


FIG. I.12: Profil spatial typique obtenu pour l'intensité multidiffusée dans une configuration champ lointain.

type d'expérience reste compliqué à mettre en oeuvre en optique car elle nécessite l'utilisation d'impulsions femtoseconde. Au contraire, les barettes échographique utilisées en ultrasons permettent de réaliser facilement des expériences résolues à la fois en espace et en temps.

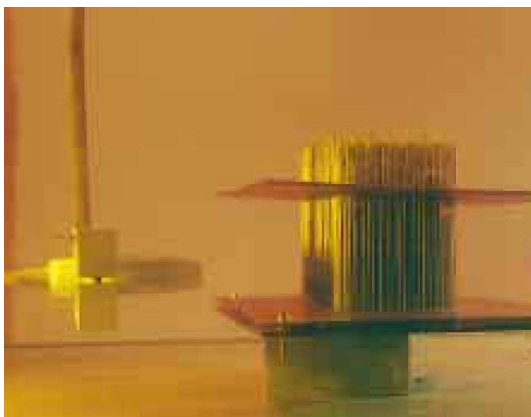
Maintenant que nous avons établi théoriquement les évolutions spatio-temporelles des contributions cohérente et incohérente de l'intensité multiplement diffusée dans les configurations de champ lointain ou de champ proche, nous allons discuter du cas des expériences ultrasonores qui se déroulent généralement dans une configuration intermédiaire.

### I.2.6 Cas des expériences ultrasonores

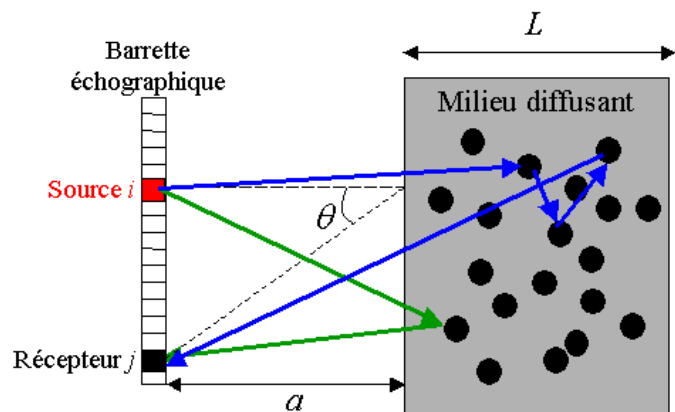
Dans le domaine des ultrasons, Bayer et Niederdränk[12] furent les premiers à mettre en évidence, en 1993, le cône de rétrodiffusion cohérente à la fois dans un cadre tridimensionnel (gravillons immergés dans l'eau) et bidimensionnel (échantillon de tiges de cuivre). Quelques années plus tard, Sakai *et al.*[14] mirent également en évidence le cône de rétrodiffusion cohérente dans du polystyrène immergé dans l'eau. Durant ces mêmes années, Page *et al.* réalisèrent de nombreuses études sur les propriétés de transport d'une onde ultrasonore se propageant dans un milieu hétérogène désordonné [30, 35, 36, 39, 40, 41]. Au LOA, Tourin *et al.* [24, 13, 42, 43] ont été les premiers à mesurer les paramètres de transport de l'onde multiplement diffusée en examinant l'intensité diffusée en régime dynamique. Les expériences ont été menées sur des échantillons 2D de tiges en acier réparties aléatoirement (voir Fig.I.13). Les échantillons varient selon leur concentration en diffuseurs et le diamètre de ces derniers. Pour les expériences réalisées en rétrodiffusion, le dispositif expérimental typique est décrit sur la figure I.14. L'échantillon est plongé dans une cuve d'eau. Une barrette échographique composée de  $N$  transducteurs est placée en vis à vis du milieu diffusant, à une distance  $a$ . Comme en sismologie [17], un élément de la barrette fait office de source ponctuelle (élément  $i$  sur la fi-



FIG. I.13: Echantillon 2D de tiges en acier réparties aléatoirement. Ces milieux sont classiquement utilisés au laboratoire pour étudier les phénomènes physiques mettant en jeu la diffusion multiple.



(a)



(b)

FIG. I.14: (a) Photographie du dispositif expérimental utilisé pour étudier l'intensité multiple-ment diffusée : une barrette échographique est placée en vis-à-vis du milieu diffusant que l'on souhaite étudier. (b) Schéma du dispositif expérimental.

gure I.14) ; le champ rétrodiffusé est ensuite mesuré et son intensité est calculée sur chacun des transducteurs de la barrette. Une moyenne sur différentes configurations du désordre peut ensuite être réalisée en changeant de source et en répétant la procédure.

Les expériences ultrasonores constituent un cas intermédiaire entre les configurations champ proche et champ lointain. Selon le rapport entre la distance  $a$  et la taille du halo diffusif en  $\sqrt{Dt}$ , nous sommes soit dans une configuration champ lointain ( $a \gg \sqrt{Dt}$ ), soit dans une configuration champ proche ( $a \ll \sqrt{Dt}$ ). Un profil typique d'évolution spatio-temporelle de l'intensité multiplement diffusée dans cette configuration intermédiaire est montrée sur la figure I.15. Aux temps courts et aux petits angles, le profil de l'intensité multiplement diffusée est analogue à ce qui est prédit théoriquement en champ lointain : un fond incohérent *plat* sur lequel est superposé le cône de rétrodiffusion cohérente autour de  $\theta = 0$ . La largeur  $\Delta\theta$  du cône diminue en  $(Dt)^{-1/2}$ . Mais, au bout d'un certain temps, on observe un phénomène de saturation : l'étendue angulaire  $\Delta\theta$  du cône ne présente plus d'évolution avec le temps et sature typiquement à  $\frac{\lambda}{a}$ . On se retrouve dans la configuration champ proche, pour lequel le profil de l'intensité cohérente ne présente plus aucune évolution avec le temps. Quant à l'intensité incohérente, elle présente un profil plat puisqu'on est aux temps longs.

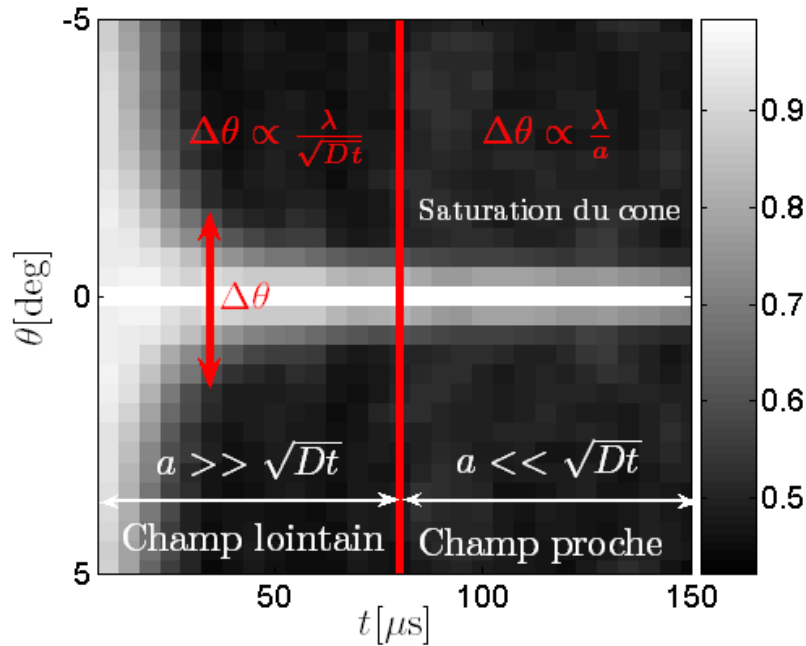


FIG. I.15: Evolution spatio-temporelle de l'intensité multiplement diffusée obtenue en champ intermédiaire. L'intensité a été normalisée par son maximum à chaque temps  $t$ .

Lors de ses travaux de thèse, Victor Mamou[44] a mesuré la constante de diffusion  $D$  de divers échantillons de tiges aléatoires. Il a réalisé le calcul théorique de l'évolution spatio-temporelle de l'intensité cohérente en configuration intermédiaire. Comme on pouvait s'y attendre, celle-ci diffère de celle obtenue en champ lointain (Eq.I.57). De plus, les transducteurs de la barrette échographique ne sont pas ponctuels, mais de taille finie. Leur diagramme de directivité n'est donc pas isotrope et cela a une influence non négligeable sur l'évolution tem-

porelle de la largeur  $\Delta\theta$  du cône de rétrodiffusion cohérente. Celle-ci est en effet donnée par [44] :

$$\Delta\theta^{-2} = \frac{k^2 D}{\Gamma} t \quad (\text{I.58})$$

où  $\Gamma$  est un coefficient dépendant principalement de la distance  $a$  séparant la barrette du milieu diffusant et de la directivité des transducteurs. Ce facteur ne présente pas d'expression analytique et ne peut être calculé que numériquement. Ainsi, la mesure du coefficient de diffusion  $D$  à partir du cône de rétrodiffusion cohérente peut s'avérer difficile si l'on n'est pas en mesure de connaître précisément  $\Gamma$ . D'autre part, la saturation du cône aux temps longs réduit significativement l'intervalle de temps sur lequel on peut ajuster linéairement l'évolution temporelle de  $\Delta\theta^{-2}$ , ce qui rend difficile la mesure du coefficient de diffusion  $D$ . On pourrait objecter qu'il suffirait d'éloigner autant qu'on le souhaite la barrette afin de se placer le plus longtemps possible dans une configuration champ lointain, tel que  $a \gg \sqrt{Dt}$ . Toutefois, en pratique, cet éloignement conduit à des signaux d'amplitude de plus en plus faible. On ne pourra donc pas mesurer le champ rétrodiffusé sur des temps suffisamment longs du fait du seuil de détection limité de l'appareillage.

Un autre désavantage de la configuration intermédiaire est son incapacité à mesurer un coefficient de diffusion  $D$  local. En effet, en champ lointain ou intermédiaire, l'onde incidente insonifie tout le milieu et la constante de diffusion  $D$  mesurée est moyennée sur tout le milieu. Or, les milieux aléatoires réels sont en général inhomogènes en désordre : certaines zones sont plus concentrées que d'autres en diffuseurs, par exemple. La solution serait donc de se ramener à une configuration champ proche comme en sismologie. La mesure du coefficient de diffusion  $D$  serait faite, cette fois, en examinant l'intensité incohérente puisque son évolution spatio-temporelle représente directement la croissance du halo diffusif au sein du milieu désordonné (Eq.I.41). La mesure du coefficient de diffusion serait locale puisque l'onde incidente n'insonifierait pas tout le milieu dans son ensemble mais juste une zone du milieu (centrée sur la source) dont la taille caractéristique serait de l'ordre du libre parcours moyen  $l_e$ . Malheureusement, des problèmes expérimentaux rendent la configuration champ proche impossible ou très délicate dans le domaine des ultrasons. D'une part, si la barrette est à proximité du milieu diffusant, une partie du champ rétrodiffusé se réfléchit sur la barrette et ces échos non désirés brouillent les mesures. D'autre part, la solution diffusive obtenue en champ proche n'est valable que dans le cas de sources et récepteurs ponctuels. Expérimentalement, la directivité des éléments brise la croissance de l'étendue spatiale de l'intensité incohérente en  $\sqrt{Dt}$  et seul un calcul numérique extrêmement fastidieux pourrait permettre un ajustement avec les mesures expérimentales.

La première partie de ma thèse a donc consisté à franchir ces obstacles inhérents aux expériences ultrasonores dans le but d'une meilleure caractérisation des milieux désordonnés. L'idée a été d'aller plus loin qu'un simple calcul d'intensité à partir du champ rétrodiffusé mesuré en champ intermédiaire. En effet, la technologie multi-éléments disponible pour les ondes acoustiques offre une grande flexibilité au niveau expérimental. D'une part, les transducteurs sont contrôlables à l'émission et à la réception. D'autre part, ils mesurent à la fois l'amplitude et la phase du champ rétrodiffusé. On peut donc *jouer* avec le champ ondulatoire en émission

et en réception avant de s'intéresser à l'intensité rétrodiffusée. Ce type de traitement cohérent des signaux est communément appelé *formation de voies* en acoustique comme en radar. Cette technique est couramment utilisée pour l'imagerie ultrasonore ou en acoustique sous marine. A partir de la configuration intermédiaire des expériences ultrasonores, nous avons pu nous projeter en champ lointain ou champ proche pour étudier l'intensité multiplement diffusée. Comme nous allons le voir, la formation de voies peut faciliter et améliorer la mesure des paramètres de transport de l'onde multidiffusée. Les résultats de mes travaux sur ce sujet ont donné lieu à trois publications dans des revues à comité de lecture. Celles-ci complètent ce premier chapitre.



## I.3 Coherent backscattering and far-field beamforming in acoustics

Alexandre Aubry, Arnaud Derode, Philippe Roux and Arnaud Tourin

Article publié dans *Journal of the Acoustical Society of America* [45]

### I.3.1 Abstract

Coherent backscattering of waves by a random medium is a spectacular evidence of interference effects despite disorder and multiple scattering. It manifests itself as a doubling of the wave intensity reflected exactly in the backward direction. This phenomenon has been observed experimentally in optics, acoustics or seismology. While optical measurements are realized in far-field conditions with a plane wave illumination and a beamwidth much larger than the wavelength, ultrasonic experiments are carried out with wide-band controllable arrays of (nearly) point-like transducers that directly record the wavefield, in amplitude and phase. Therefore it is possible to perform beamforming of the incoming and outgoing wavefields before computing the average backscattered intensity. In this paper, the advantages of plane-wave beamforming applied to the study of the coherent backscattering effect are shown. Particularly, the angular resolution, the signal-to-noise ratio as well as the estimation of the enhancement factor can be improved by beamforming. Experimental results are presented with ultrasonic pulses, in the 2.5-3.5MHz range, propagating in random collections of scatterers. Since the coherent backscattering effect can be taken advantage of to measure diffusive parameters (transport mean free path, diffusion constant), plane-wave beamforming can be applied to the characterization of highly scattering media.

### I.3.2 Introduction

The coherent backscattering effect corresponds to an enhancement (by a factor of 2) in the intensity of waves scattered in the backward direction from a disordered medium. This phenomenon, also known as weak localization, originates from a constructive interference between a wave traveling a multiple-scattering path and its time-reversed counterpart : it appears when multiple scattering occurs and the reciprocity symmetry is preserved. For the last twenty five years or so, enhanced backscattering has attracted a great deal of attention. In 1984, Ishimaru and Kuga [2] reported the first observation of coherent backscattering in optical experiments. Since then, a lot of theoretical and experimental efforts [3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 46] have been undertaken to understand this effect in detail; while the first observations were carried out with optical waves, coherent backscattering was later observed with other types of waves, and applied to a variety of contexts ranging from light scattering on cold atoms to geophysics or ultrasound. By and large, the acoustic and seismic experimental procedures reproduced the optical experiments : the average backscattered intensity was directly measured as a function of the source-receiver distance, or backscattering angle. An important advantage

of seismic or acoustic waves was the possibility to observe the time-dependence of the enhanced backscattering spot [12, 13, 17].

However, acoustic waves offer more than that : since ultrasonic transducers are controllable and can directly record time-dependent fluctuations in both amplitude and phase, one can “play with the wavefield” in emission and reception, i.e., perform beamforming prior to calculating the intensity. The main purpose of this article is to illustrate the advantages of plane-wave beamforming in the study of the coherent backscattering effect. Particularly, we will show that it can improve the angular resolution as well as the signal-to-noise ratio.

Moreover, another important aspect is that optical measurements are realized in far-field conditions with an incoming beam whose width is much larger than the wavelength  $\lambda$ . On the contrary, in seismology, sources and detectors sit on the surface of the Earth i.e., in the near field [17, 19, 18]. In such conditions, the width of the coherent backscattering peak depends only on  $\lambda$  and does not display any time dependence. Ultrasonic laboratory measurements correspond to an intermediate configuration between experiments in optics and seismology. Indeed, the typical experimental setup consists in an array of transducers placed in front of a random scattering sample at a distance  $a$  [13] (see Fig.I.16). Like in seismology, one element of the array is used as a point-like source; the backscattered wave field is recorded and its intensity is calculated at every receiver (including the initial source element). Averaging can be performed by changing the source element and repeating the same experiment. In far-field conditions, the dynamics of the coherent backscattering effect can be taken advantage of to measure the diffusion constant  $D$ . Tourin et al. [13] showed that as long as  $a \gg \sqrt{Dt}$  (far-field condition), the coherent backscattering spot width narrows as  $a\lambda/\sqrt{Dt}$ , as was also shown in optics [6]. Yet for small distances  $a$  or weakly scattering media (high  $D$ ) or long times, the spatial extent of the coherent peak no longer displays such a time dependence and saturates at about  $\lambda/2$ , like in the near-field configuration. This saturation reduces the time interval during which the cone width evolution in  $(Dt)^{-1/2}$  is valid : it prevents a quantitative measurement of  $D$ . We will show that this inconvenience can be overcome by plane-wave beamforming.

Beamforming is a classical technique employed e.g., in medical imaging or underwater acoustics. Instead of firing just by one element, plane-wave beamforming consists in emitting a plane-wave with a steering angle  $\alpha$  with respect to the normal direction of the array. This angle is controlled by a set of delays that are applied to each array element, since ultrasonic array elements are controlled by independent electronic channels. In the reception mode, delays corresponding to an angle  $\beta$  are applied to the received signals before they are summed. Hence, the whole array can be used as a source and as a receptor. By adjusting the delays, it is possible to vary progressively the angles of emission  $\alpha$  and reception  $\beta$ .

In this study, first we will show that plane-wave beamforming with ultrasonic arrays can be applied in the context of coherent backscattering. The advantages and drawbacks of beamforming compared to the classical approach [13] (direct intensity measurements, without beamforming) are emphasized. Particularly, a possible improvement in angular resolution is discussed. It would allow to estimate  $D$  even though the far-field condition ( $a \gg \sqrt{Dt}$ ) is not fulfilled. Moreover, in the presence of additive white noise, beamforming will be shown to increase the

signal-to-noise ratio, due to residual spatial correlations between multiple scattered waves. In the last section of the paper, beamforming will be applied to the case of a weakly scattering medium, where the coherent backscattering enhancement is hardly visible hence the enhancement factor is very low. In that case, we will show that beamforming can do better than direct intensity measurements, provided a correction is taken into account.

### I.3.3 Principle and Applications

#### Experimental setup and basic principle

The experiment takes place in a water tank. We use a  $N$ -element ultrasonic array with a 3MHz central frequency and a 2.5-3.5MHz bandwidth; each array element is 0.39mm in size and the array pitch  $p$  is 0.417mm. The sampling frequency is 20 MHz. The first step of the experiment consists in measuring the inter-element matrix of the array (see Fig. I.16). A 100- $\mu$ s-long chirp is emitted from transducer  $i$  into the scattering sample. The backscattered wave is recorded with the  $N$  transducers of the same array. The operation is repeated for the  $N$  emitting transducers. The response from transducer  $i$  to transducer  $j$  is correlated with the emitted chirped signal, which gives the impulse response  $h_{ij}(t)$ . The  $N \times N$  array response matrix  $\mathbf{H}(t)$  whose elements are the  $N^2$  impulse responses  $h_{ij}(t)$  is finally obtained.

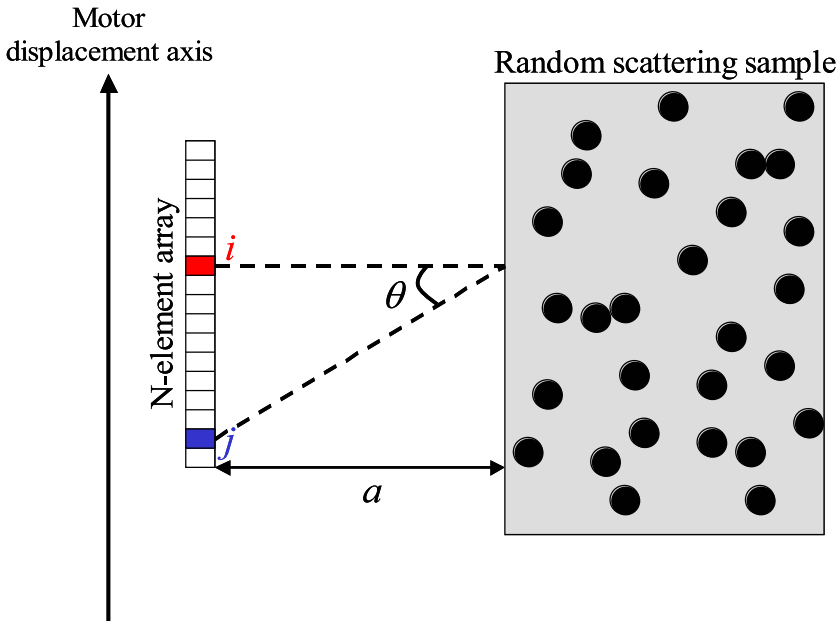


FIG. I.16: Experimental setup used in our experiments : a  $N$ -element linear array is placed in front of a random scattering sample immersed in a water tank. The array is parallel to the scattering slab. A motor allows a lateral displacement of the array, in order to average the backscattering intensity over several configurations of disorder.

The usual way to detect the coherent backscattering phenomenon is to compute the average backscattered intensity directly from the time-dependent response matrix  $\mathbf{H}(t)$  [46]. The signals are time shifted to compensate for the difference of arrival times  $\Delta t_{ij}$  between receiving array

elements, so that the first backscattered wave front arrives at  $t=0$  on every element. The backscattered intensity is obtained by integrating the square of the signals on  $10\text{-}\mu\text{s}$ -long overlapping time windows. The results are averaged for all transmitter/receiver couples that correspond to the same backscattering angle  $\theta$ , in order to reduce the fluctuations of the intensity pattern. Finally, the averaged backscattered intensity is determined as :

$$I^{DM}(\theta, T) = \left\langle |h_{ij}(t - \Delta t_{ij})|^2 \right\rangle_{t - \Delta t_{ij} \in [T, T + \delta t], i} \quad (\text{I.59})$$

where  $\delta t = 10\mu\text{s}$ ,  $\theta = \arctan\left[\frac{(i-j)p}{a}\right]$ . The symbol  $\langle . \rangle$  denotes the average over the variables in the subscript. The superscript  $DM$  stands for ‘‘direct measurements’’. Fig.I.17(a) shows an experimental result for the averaged backscattered intensity  $I^{DM}(\theta, T)$  from a multiple scattering medium. Corresponding experimental conditions are described in Sec.I.3.3.

Another way to process the data  $\mathbf{H}(t)$  consists in plane-wave beamforming. Once the array response matrix is known, beamforming can be achieved in two ways. One way is to work directly in the time domain and to introduce a time delay between impulse responses  $h_{ij}(t)$  at emission and reception, so that signals from the required direction are brought into phase and can be added together coherently. For a plane-wave emission with an angle  $\alpha$ , the time delay  $\Delta t_i$  to apply to transducer  $i$  is

$$\Delta t_i = \frac{(i-1)p \sin \alpha}{c}, \quad i = 1, 2 \dots N \quad (\text{I.60})$$

if the first transducer is taken as reference ( $\Delta t_1 = 0$ ).  $c$  is the wave velocity in water. Since small variations in the angle  $\alpha$  may be required, the time delays  $\Delta t_i$  must be calculated with a precision lower than the sampling time ( $1/20\mu\text{s}$ ). This requires an oversampling of the data well above Shannon’s limit before processing, which is possible yet time-consuming. We chose to perform beamforming in the frequency domain instead. First, the time signals  $h_{ij}(t)$  are truncated into  $10 - \mu\text{s}$ -long overlapping windows :  $k_{ij}(T, t) = h_{ij}(t - T)w(t)$  with  $w(t) = 1$  for  $t \in [0, 10\mu\text{s}]$ ,  $w(t) = 0$  elsewhere. For each value of time  $T$ , the  $k_{ij}$  form a matrix  $\mathbf{K}$ . A short-time Fourier analysis is achieved by a numerical FFT and gives the response matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  in the frequency domain. For each frequency  $f$  in the bandwidth, the plane wave whose propagation direction makes an angle  $\alpha$  with the axis perpendicular to the array corresponds to the spatial Fourier transform at the spatial frequency  $f_s$  given by :

$$f_s = \frac{f \sin \alpha}{c} \quad (\text{I.61})$$

The 2D spatial Fourier transform of the response matrices gives the time-dependent plane-wave decomposition  $k_{\alpha\beta}(T, f)$  of  $\mathbf{K}(T, f)$  where  $\alpha$  and  $\beta$  correspond to angular directions at emission and reception respectively. After that, the backscattered intensity  $I^{BF}(\theta, T)$  (the superscript  $BF$  stands for beamforming) is obtained by averaging the squared norm of  $k_{\alpha, \alpha+\theta}(T, f)$  over the emission angle  $\alpha$  and the frequency bandwidth (see Eq.I.63). As the evolution of the cone width in  $(DT)^{-1/2}$  is valid only under the assumption of small incident angles, the average over the emission angle  $\alpha$  is restricted to the interval  $[-10^\circ, 10^\circ]$ . Moreover, transducers directivity

$\mathcal{D}(\alpha, f)$  is compensated for, using the theoretical expression under the far-field assumption :

$$\mathcal{D}(\alpha, f) = \frac{\sin(\pi b f \sin \alpha / c)}{\pi b f \sin \alpha / c} \quad (\text{I.62})$$

where  $b$  is the effective aperture of an array element. Finally, the backscattered intensity  $I^{BF}(\theta, T)$  is inferred from :

$$I^{BF}(\theta, T) = \left\langle \frac{|k_{\alpha, \alpha + \theta}(T, f)|^2}{\mathcal{D}(\alpha, f)^2 \mathcal{D}(\alpha + \theta, f)^2} \right\rangle_{f, \alpha} \quad (\text{I.63})$$

where subscripts denote the averages over  $f$  and  $\alpha$ . Fig.I.17(b) shows an experimental result for the averaged backscattered intensity obtained after beamforming from a multiple scattering medium. Corresponding experimental conditions are described in Sec.I.3.3.

With or without beamforming, the averaged backscattered intensity  $I(\theta, T)$  at a given time  $T$ , originates from single scattering ( $I_{SS}$ ) and multiple scattering ( $I_{MS}$ ) contributions :  $I(\theta, T) = I_{SS}(\theta, T) + I_{MS}(\theta, T)$ . The contribution due to multiple scattering can be split in two terms : an incoherent term ( $I_{inc}$ ) that corresponds to the incoherent summation of multiple-scattering paths intensity, and a coherent term ( $I_{coh}$ ) which results from the interference between multiple-scattering paths and their reciprocal counterparts[3]. At exact backscattering (i.e.  $\theta = 0$ ), these two terms are equal :  $I_{inc}(0, T) = I_{coh}(0, T)$ . Given the scattering angles considered in this study, the incoherent term as well as the single scattering contribution are almost flat :  $I_{SS}(\theta, T) = I_{SS}(T)$  and  $I_{inc}(\theta, T) = I_{inc}(T)$ . In the case of plane waves, akkermans2 et al.[6] calculated the time-dependent coherent intensity using plane wave decomposition in the long time limit  $\sqrt{DT} \gg l_e$ , where  $l_e$  is the mean free path, and for a small angle  $\theta$  :

$$I_{coh}^{BF}(\theta, T) \simeq I_{inc}^{BF}(T) e^{-DTk^2\theta^2} \quad (\text{I.64})$$

A linear fit of the inverse square of the half width at half-maximum  $\Delta\theta_{BF}$  gives access to the diffusion constant  $D$ , since

$$\Delta\theta_{BF}^{-2} = \frac{k^2 D}{\ln(2)} T \quad (\text{I.65})$$

When plane-wave beamforming is not applied, the expression of the coherent intensity as well as the influence of transducers directivity are more complex. Under the far-field condition  $a \gg \sqrt{DT}$ , the inverse square of the half width at half maximum is then given by[44] :

$$\Delta\theta_{DM}^{-2} = \frac{k^2 D}{\Gamma} T \quad (\text{I.66})$$

where  $\Gamma$  is a factor which mainly depends on transducers directivity and on the distance  $a$ . One advantage of plane-wave beamforming is that it allows to compensate for transducers directivity, with no need to compute the factor  $\Gamma$ .

### Angular resolution

Another advantage of beamforming is a possible improvement in angular resolution. To illustrate this idea, we measure the response matrix from a highly scattering sample. It consists

of steel rods ( $C_L=5.9\text{mm}/\mu\text{s}$ ,  $C_T=3.2\text{mm}/\mu\text{s}$ , radius  $0.4\text{ mm}$ ,  $\rho = 7.85 \times 10^{-3}\text{kg}/\text{m}^3$ ) randomly distributed with a concentration  $n=29.54\text{rods}/\text{cm}^2$ . The elastic mean free path  $l_e$  is typically  $3.15 \pm 0.15\text{mm}$  for this medium between  $2.5$  and  $3.5\text{MHz}$ [47]. The distance  $a$  is  $67\text{mm}$ . The measured response matrix  $\mathbf{H}(t)$  is of dimension  $N = 284$ . The averaged backscattered intensities, with or without preliminary beamforming, are then calculated as described in Sec.I.3.3 and are shown in Fig.I.17. Because this sample is a strongly multiple scattering medium, the single scattering contribution  $I_{SS}(\theta, T)$  becomes rapidly negligible with time compared to the multiple scattering contribution  $I_{MS}(\theta, T)$  and the enhancement factor reaches 2 after about  $20\mu\text{s}$ . A comparison between experimental results with or without beamforming (Fig. I.17) shows that the angular resolution is much finer when beamforming is performed. Indeed, the angular resolution  $\delta\theta_r^{DM}$  of a direct intensity measurement is given by :

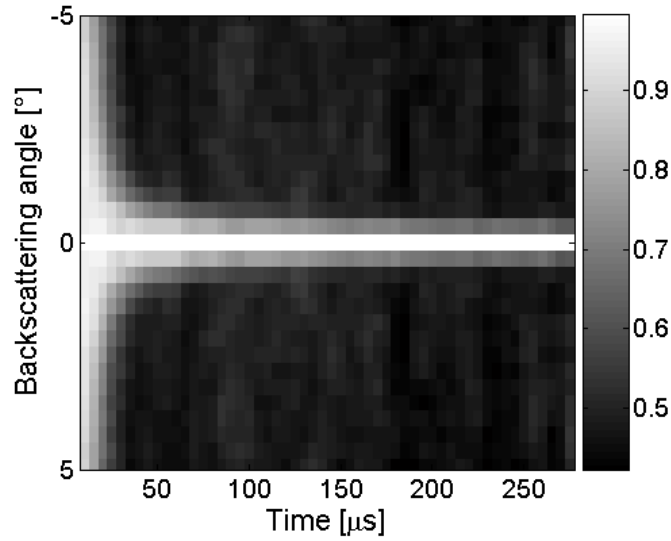
$$\delta\theta_r^{DM} \simeq \frac{b}{a} \quad (\text{I.67})$$

The effective aperture  $b$  of transducers equals  $0.55\text{mm}$  and is different from the array pitch  $p = 0.417\text{mm}$  because of the mechanical coupling between transducers. The effective aperture  $b$  is calculated by measuring the far-field radiation diagram of a single element. A fit of the experimental directivity with its theoretical expression given in Eq.I.62, provides an estimation for  $b$ . A finer resolution could be obtained by moving the array away from the scattering sample (thus increasing  $a$ ) but the signal-to-noise ratio would decrease. Beamforming improves the angular resolution while working at a moderate distance  $a$ , which allows an acceptable signal-to-noise ratio. Indeed, the angular resolution  $\delta\theta_r^{BF}$  in the far-field is given by :

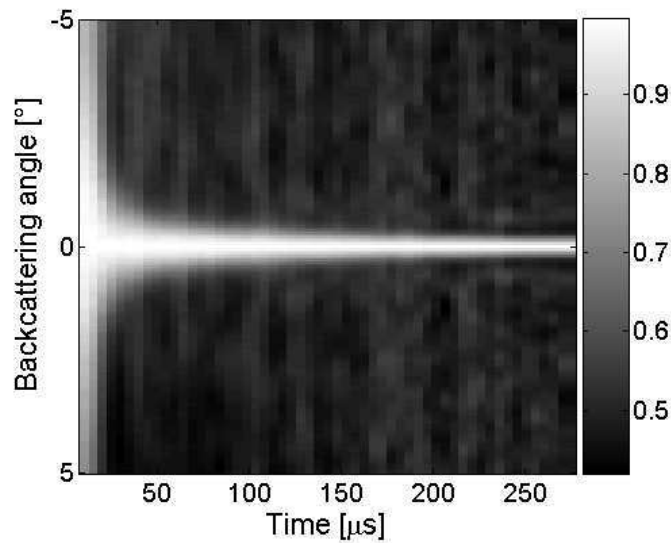
$$\delta\theta_r^{BF} \simeq \frac{\lambda}{Np} \quad (\text{I.68})$$

Increasing the number of array elements, i.e widening the array, refines the angular resolution and allows to go below  $b/a$ . In our experimental conditions, the angular resolution  $\delta\theta_r^{DM}$  of direct measurements is about  $0.47^\circ$  (Eq. I.67) whereas the angular resolution with beamforming  $\delta\theta_r^{BF}$  is  $0.24^\circ$  (Eq. I.68).

In order to compare both experimental results with the same precision, the angular intensity distributions are resampled with an angular step of  $45\mu\text{rad}$  using a low-pass interpolation. The result of this resampling is shown in Fig. I.18 which compares the angular distribution of intensity with and without beamforming, at  $T = 265\mu\text{s}$ . The gain in resolution thanks to beamforming is obvious in this figure : The peak is significantly narrower with beamforming. In fact, in this experiment, the width  $\Delta\theta_{DM}$  of the coherent backscattering peak obtained without beamforming reaches its saturation limit at  $T = 75\mu\text{s}$ . The evolution of  $\Delta\theta^{-2}$  with time is plotted in Fig. I.19. For direct measurements(i.e., no beamforming), the cone narrows with time; a linear evolution of  $\Delta\theta_{DM}^{-2}$  versus time is found, once the diffusive regime is reached (after  $\sim 15\mu\text{s}$ ) and before the saturation due to the angular resolution limit occurs (after  $\sim 75\mu\text{s}$ ). According to Eq.I.66, the slope of the linear fit gives an estimation of the diffusion constant once the constant  $\Gamma$  is known. The angular resolution limit restricts the time interval where a linear fit of  $\Delta\theta_{DM}^{-2}$  can be achieved and thus the estimation of the diffusion constant



(a)



(b)

FIG. I.17: Dynamic backscattered intensity obtained from direct measurements (a) and after beamforming (b). The scattering sample is made of 0.4mm-radius steel rods with a concentration of  $29.54 \text{ rods}/\text{cm}^2$ . The distance  $a$  is  $67 \text{ mm}$  and the number of array elements is 284. At each time, the dynamic intensity has been normalized by its maximum



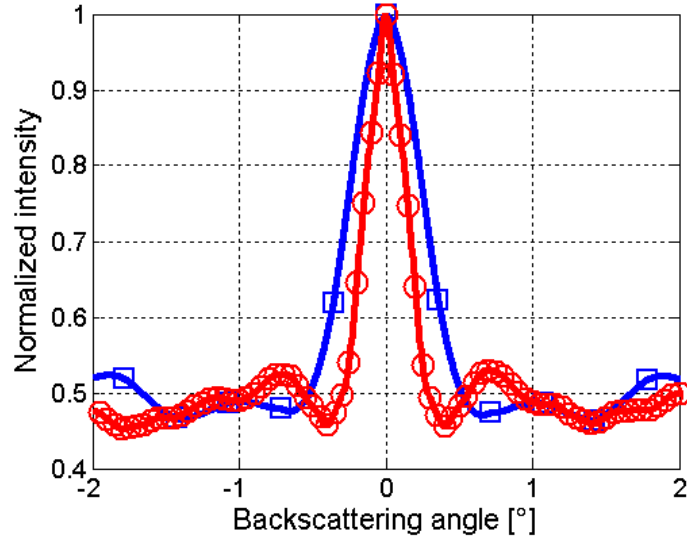


FIG. I.18: Normalized intensity versus backscattering angle at  $T = 265\mu s$ , with (red circles) or without (blue squares) beamforming. In order to measure the half width at half maximum, original data have been resampled at the same sample rate (angular step of  $45\mu rad$ ). Resampled data with (red line) or without (blue line) beamforming are superposed to original measurements.

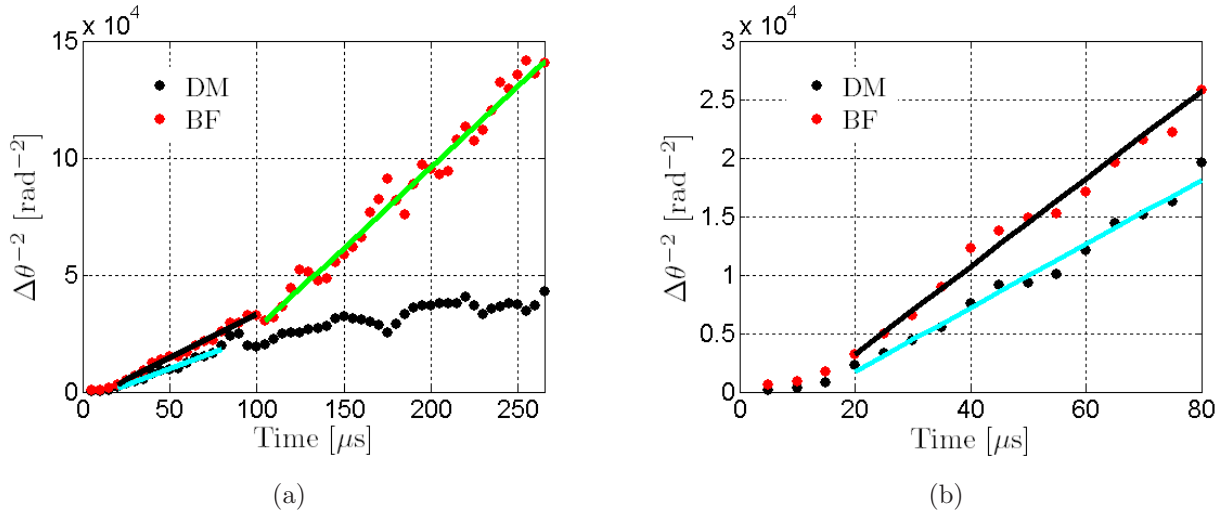


FIG. I.19: (a) Evolution of the inverse square of the half width at half maximum  $\Delta\theta^{-2}$  with time. Black dots : direct measurements, i.e., no beamforming ; red dots : with beamforming. For direct measurements, a linear fit has been made from  $T = 15\mu s$  to  $T = 75\mu s$  (cyan line). In the case of beamforming, linear fits are represented from  $T = 15\mu s$  to  $T = 95\mu s$  (black line) and from  $T = 100\mu s$  to  $T = 265\mu s$  (green line). (b) A zoom on the first  $80\mu s$  is displayed.



is less reliable. It also prevents from observing the evolution of the diffusive regime for long times. The situation is very different if beamforming is achieved (see Fig.I.19) ; no saturation is observed. Interestingly, a change of slope is observed around  $T = 100\mu s$  that could not have been perceived without beamforming because saturation occurs at  $T = 75\mu s$ . This change of slope can be accounted for. For short times, the signal spectrum is wideband ; the -3dB bandwidth,  $\delta f_{-3db}$ , is larger than 1.2MHz and the measured diffusion constant is averaged over the whole frequency bandwidth(2.5-3.5MHz). For long times, the signal spectrum becomes narrowband ( $\delta f_{-3db} \simeq 0.2MHz$ ) and centered around 2.8MHz, because of the individual resonance of rods at 2.8MHz. Mamou[44] showed that the diffusion constant and the mean free path are higher at this frequency : for instance, the mean free path  $l_e$  is 4.8mm at the resonance frequency[47], i.e about 1.5 times higher than the mean free path averaged over the frequency bandwidth. This is consistent with our measurements because a linear fit from  $T = 15\mu s$  to  $T = 95\mu s$  of  $\Delta\theta_{BF}^{-2}$  gives a diffusion constant  $D = 1.9mm^2/\mu s$ , whereas from  $T = 100\mu s$  to  $T = 265\mu s$ ,  $D = 3.4mm^2/\mu s$ .

It should also be noted that there are many techniques other than dynamic coherent backscattering to measure diffusive parameters ; particularly, the diffusion constant can be estimated from measurements of the time-of-flight distribution[30, 48, 32, 33, 34], or the spatial extent of the diffuse halo[30]. Yet the dynamic coherent backscattering enhancement, aside from being a very elegant physical illustration of reciprocity, is independent from intrinsic absorption. Moreover, the size of the arrays is usually not very large compared to  $\sqrt{DT}$ , so the transverse size of the diffuse halo cannot always be directly measured from the data available on the array.

### Robustness to noise

Another advantage is that intensity measurements with beamforming are less noise-sensitive than direct measurements. In underwater acoustics or telecommunication, the *array gain* is the improvement in signal-to-noise ratio (SNR) provided by coherently combining the beamformer's  $N$  antenna signal. The addition of  $N$  identical signals increases the signal amplitude by  $N$ , whereas the total amplitude of  $N$  uncorrelated noises with identical power only increases as  $\sqrt{N}$ . Therefore, in the presence of additive uncorrelated noise, if the array elements were to receive perfectly identical signals, then an array gain of  $\sqrt{N}$ , relative to the SNR of a reference single-element system, could be expected. On the contrary, if the signals received by the array have no spatial correlation, then there is no array gain : the SNR is the same whatever the number of elements on the array. Here, for each scattering angle, the beamforming technique utilizes the whole array to compute the backscattered intensity. The question we address in this paragraph is : is there an array gain ? In other words : in a coherent backscattering experiment, is the SNR improved by beamforming ?

In the experiment we consider here, the waveforms received on the array are backscattered from a highly scattering random medium. In that case, the signals received on two array elements are far from being identical. Yet the correlation length of the backscattered waves is larger than the array pitch. There are two reasons for that. Firstly, there is a mechanical

coupling between neighbouring array elements. Secondly, the wave recorded on the array can be seen as the radiation of an incoherent source with width  $W$  (the diffuse halo inside the medium) observed at a distance  $a$ . The Van Cittert-Zernike theorem[21, 49, 50] states that the typical coherence length of the wavefield is  $\lambda a/W$  (in other words, the waves radiated by a finite-size incoherent source see their coherence length increases as they propagate).

These two effects result in a short-range correlation between the scattered signals recorded on the array. In the experimental situation we investigated, these residual correlations are limited in range to adjacent elements, both in emission and reception. Experimentally, it has been observed that the two impulse responses  $h_{i,j}$  and  $h_{m,n}$  are correlated if  $|i - m| \leq 1$  and  $|j - n| \leq 1$ . So, only the following correlations coefficients are not zero :

$$C_1 = \frac{\langle h_{i,j} h_{i\pm 1,j}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle} = \frac{\langle h_{j,i} h_{i\pm 1,j}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle}, \quad C_2 = \frac{\langle h_{i,j} h_{i,j\pm 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle} = \frac{\langle h_{j,i} h_{i,j\pm 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle},$$

$$C_3 = \frac{\langle h_{i,j} h_{i\pm 1,j\pm 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle} = \frac{\langle h_{j,i} h_{i\pm 1,j\pm 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle}, \quad C_4 = \frac{\langle h_{i,j} h_{i\pm 1,j\mp 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle} = \frac{\langle h_{j,i} h_{i\pm 1,j\mp 1}^* \rangle}{\langle |h_{i,j}|^2 \rangle}.$$

The average, denoted by the symbol  $\langle . \rangle$ , is achieved over time and source/receiver pairs. In the experiment described in Sec.I.3.3, the typical values we obtained are :  $C_1 = C_2 \simeq 0.425$ ,  $C_3 \simeq 0.15$ ,  $C_4 \simeq 0.26$ . Though weak, these correlations imply an array gain in presence of an additive white noise. This effect can be calculated more precisely, the details are given in the Appendix. The theoretical array gain  $G$  due to these correlations is found to be :

$$G \simeq 1 + 4 \sum_{i=1}^4 C_i \quad (\text{I.69})$$

From the  $C_i$  given above, we obtain an array gain of 6.0. Here, the correlations are mainly due to the mechanical coupling between neighbour transducers. The correlations linked to the Van Cittert-Zernike theorem cannot be perceived for long times because the diffusive halo is too large and the corresponding coherence length  $\lambda a/W$  is smaller than the array pitch  $p$ . Experimentally, this improvement in robustness to noise has been checked by adding a numerical white noise on initial measurements before beamforming; an array gain  $G$  of 5.4 ( $\simeq 7.3\text{dB}$ ) has been found. This experimental value is in reasonable agreement with the theoretical one, the remaining mismatch probably comes from the small angles assumption used in our theoretical study (see Appendix).

### Weakly scattering media

In previous subsections, only the case of a strongly multiple scattering medium has been discussed, and the advantages of beamforming have been revealed. In this section, beamforming is applied to the case of a weakly scattering medium. The interest is to point out an error that can occur when beamforming is applied to a situation in which single scattering dominates. However, once a correction is applied to  $I_{SS}^{BF}(\theta, t)$ , another advantage of beamforming will be shown. It should be noted that there is no such thing as a purely multiple scattering medium

or a purely single scattering medium. In any inhomogeneous medium, there is a combination of both. Yet, according to the time and path lengths involved compared to the mean free time or mean free path, single scattering can sometimes predominate or, on the contrary, be neglected. Here we consider the application of beamforming to a weakly scattering medium, where single scattering dominates. Yet multiple scattering is not ruled out : a coherent backscattering peak can emerge, but the enhancement factor is so weak that it is difficult to distinguish.

In this experiment, the weakly scattering medium is a slab of agar gel whose thickness  $L$  is about  $100mm$ . The distance  $a$  is  $50mm$  and 128 elements have been used to measure the response matrix  $\mathbf{H}(t)$ . Because the medium is only weakly scattering ( $l_e > 50mm$ ), average over several disorder configurations is needed. To achieve such an average, 19 response matrices have been measured by moving the array with a motor (see Fig. I.16). The averaged backscattered intensity obtained after beamforming is shown in Fig.I.20(a).

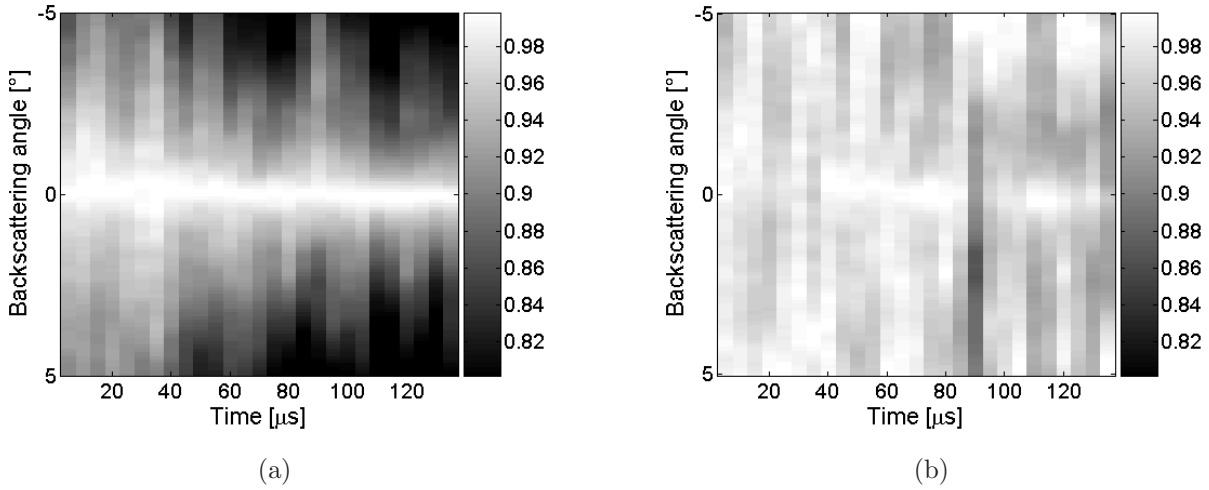


FIG. I.20: Dynamic backscattered intensity obtained for a weakly scattering sample made of agar gel. The distance  $a$  is  $50mm$ . At each time, the dynamic intensity has been normalized by its maximum. The dynamic intensity obtained after beamforming is shown before (a) and after (b) applying the correction of Eq.I.71.

Since the medium scatters weakly, there should be almost no coherent backscattering enhancement and the intensity profile should be flat. The experimental results contradicts this prediction (Fig.I.20(a)) : a peak seems to emerge at late times. One may wrongly conclude that there is more multiple scattering than expected. Actually, this artefact is due to the finite dimension of the array. Assume an incident quasi-plane wave which makes an angle  $\alpha$  with the axis perpendicular to the array (see Fig.I.21). The backscattered signals which are received by the array elements at time  $T$  come from reflections on scatterers located at a depth  $d = (a + cT/2)$ . As the array has a finite aperture, the transverse size of the area  $\mathbf{A}$  insonified by the incident plane-wave is approximately  $Np$ , corresponding to the array width. Only scatterers contained in this area  $\mathbf{A}$  scatter the incident plane-wave. Now, if the backscattered plane-wave with an angle  $\alpha + \theta$  is considered, only a fraction of the backscattered beam can be intercepted by the array, as it is depicted in Fig.I.21. Note  $h$  the transverse size of the beam backscattered out of

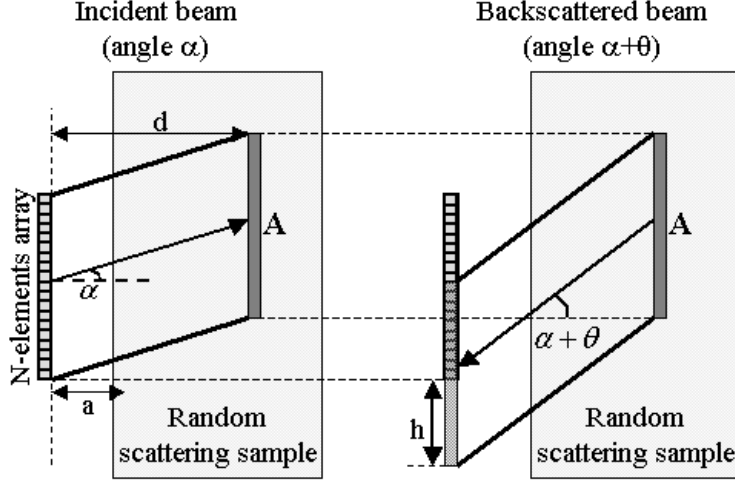


FIG. I.21: Effect of the array finite aperture on the single scattering intensity obtained after beamforming. On the left is depicted the area  $A$  sounded by an incident beam corresponding to a plane-wave with an incident angle  $\alpha$ , at a distance  $d(= a + ct/2)$  from the array. On the right, the backscattered beam at an angle  $\alpha + \theta$  comes from  $A$  and intercept then only a fraction of the array.  $h$  is the size of the beam scattered out of the array.

the array. For small incident and backscattering angles, at time  $T$ ,  $h$  can be expressed as :

$$h \simeq d|\theta| \simeq \left(a + \frac{cT}{2}\right)|\theta| \quad (\text{I.70})$$

Therefore, a fraction  $h/Np$  of the backscattered intensity is not recorded by the array. This fraction increases with time and with the backscattering angle  $\theta$  : even if single scattering dominates, it gives the illusion that there is a coherent backscattering peak (Fig.I.20(a)). So, when single scattering dominates, the measured intensity must be corrected into :

$$I_{SS}^{BF}(t) \left[ 1 - \frac{(a + cT/2)|\theta|}{Np} \right]^{-1} \quad (\text{I.71})$$

The corrected single scattering intensity calculated from the measured intensity of Fig.I.20(a) is shown in Fig.I.20(b). The intensity profile is now flat except for a weak enhancement at exact backscattering that can now be perceived for long times. Fluctuations of the intensity pattern are observed on Fig.I.20(a) and are due to a lack of average on disorder configurations. The intensity has been integrated from  $T=35\mu\text{s}$  to  $T=135\mu\text{s}$  to reduce these variations. The integrated intensity is shown in Fig.I.22 before and after beamforming. The intensity obtained from direct measurements does not display a flat baseline, which cannot provide a quantitative measurement of a low enhancement factor. On the contrary, the intensity obtained after beamforming exhibits a very regular plateau which enables to estimate a very weak enhancement factor of about 1.025. The fluctuations in the single scattering intensity profile obtained from direct measurements originates from the variation in sensitivity of transducers. These fluctuations in sensitivity cannot be considered as random and display long-range correlations : it appears that one side of the array is more sensitive than the other one and as a consequence, intensity

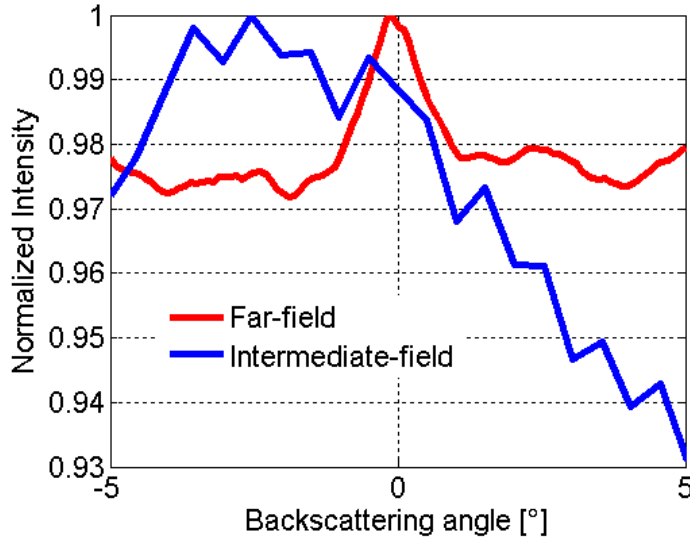


FIG. I.22: Dynamic backscattered intensity obtained with the agar gel, integrated from  $T=35\mu s$  to  $T=135\mu s$  before beamforming (blue line) and after beamforming and correction (red line).

for negative backscattering angles is a bit higher than for positive angles (see Fig. I.22). With beamforming, fluctuations of transducers sensitivity are averaged out and a flat single scattering intensity profile is obtained.

### I.3.4 Conclusion

In this study, advantages and drawbacks of far-field beamforming for ultrasonic measurements of the coherent backscattering effect have been investigated. The main disadvantage is the computation time that is quite long compared to a direct intensity measurement from the array response matrix. Nevertheless, beamforming can be of a great interest to measure more properly dynamic transport properties of a multiply scattered acoustic wave from the coherent backscattering effect. Indeed, beamforming can provide an improvement in angular resolution which is very useful for a quantitative measurement of the diffusion constant. Furthermore, beamforming processing is more robust to additional white noise on measurements because it takes advantage of correlations between neighbouring transducers. Concerning weakly scattering media, a correction factor has to be applied to the single scattering intensity because of the array finite aperture. Once this correction made, the measurement of a low enhancement factor can be obtained.

### Acknowledgments

The authors wish to acknowledge the groupe de recherches IMCODE of CNRS (GDR 2253), Patricia Daenens for her technical help and Victor Mamou who made the steel rods samples.

## Appendix

Assuming an additive white noise on each measurements, the measured impulse response is written  $h_{i_1, i_2}(t) + n_{i_1, i_2}(t)$ , where  $h_{i_1, i_2}$  is the non-noisy impulse response and  $n_{i_1, i_2}(t)$  an additive white noise. The averaged backscattered intensity  $I_n^{DM}$  obtained without beamforming is :

$$I_n^{DM}(\theta, T) = I^{DM}(\theta, T) + \eta^2 = I_{inc}^{DM}(T) + I_{coh}^{DM}(\theta, T) + \eta^2 \quad (I.72)$$

where  $I^{DM}(\theta, T) = \langle |h_{i_1, i_2}(t)|^2 \rangle_{i_1, t \in [T, T+\delta t]}$  is the averaged backscattered intensity without noise.  $\theta$  corresponds to the angle associated with the elements couple  $(i_1, i_2)$  and  $\eta$  is the standard deviation of the additive noise. The error  $\epsilon^{DM}$  on the backscattered intensity without beamforming is :

$$\epsilon^{DM}(\theta, T) = \frac{I_n^{DM}(\theta, T) - I^{DM}(\theta, T)}{I^{DM}(\theta, T)} = \frac{\eta^2}{I_{inc}^{DM}(T) + I_{coh}^{DM}(\theta, T)} \quad (I.73)$$

When beamforming is applied, the original signals are first truncated in time, then a temporal Fourier transform is achieved on each time window. Finally, we have to deal with the 2D spatial Fourier transform of random signals. Without noise, the backscattered intensity is :

$$I^{BF}(\theta, T) = I_{coh}^{BF}(\theta, T) + I_{inc}^{BF}(T) \quad (I.74)$$

If the directivity ponderation is not taken into account in Eq.I.63, the backscattered intensity directly equals  $\langle |k_{\alpha, \alpha+\theta}(T, f)|^2 \rangle_{f, \alpha}$ . To achieve beamforming, the 2D spatial Fourier transform is done numerically using the Discrete Fourier Transform (DFT) algorithm. If the assumption of small incident and backscattering angles is made, the backscattered intensity  $I^{BF}(\theta, T)$ , obtained after beamforming and without noise, can be expressed as :

$$I^{BF}(\theta, T) \simeq \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=1}^N \sum_{l_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{l_2=1}^N \left\langle k_{i_1, i_2}(T, f) k_{l_1, l_2}^*(T, f) e^{-j2\pi p \frac{f}{c} [\alpha(i_1 - l_1) + (\alpha + \theta)(i_2 - l_2)]} \right\rangle_{f, \alpha} \quad (I.75)$$

If the responses  $k_{i_1, i_2}(T, f)$  were totally decorrelated one from another, only the incoherent terms  $\langle |k_{i_1, i_2}^T(T, f)|^2 \rangle$  and coherent terms  $\langle |k_{i_1, i_2}(T, f)|^2 e^{j2\pi p \frac{f}{c} \theta (i_1 - i_2)} \rangle$  would survive the average. But, as backscattered signals are correlated, correlations  $C_1, C_2, C_3$  and  $C_4$  have to be taken into account. Still under the assumption of small backscattering angle and  $N \gg 1$ , the coherent and incoherent intensity can be expressed as :

$$I_{inc}^{BF}(T) \simeq \left( 1 + 4 \sum_{i=1}^4 C_i \right) \langle |k_{i_1, i_2}(T, f)|^2 \rangle_{i_1, i_2, f} \quad (I.76)$$

$$I_{coh}^{BF}(\theta, T) \simeq \left( 1 + 4 \sum_{i=1}^4 C_i \right) \langle |k_{i_1, i_2}(T, f)|^2 e^{j2\pi p \frac{f}{c} \theta (i_1 - i_2)} \rangle_{i_1, i_2, f} \quad (I.77)$$

As the noise is totally decorrelated on each element of the array, its contribution to the mean intensity is  $\eta^2$ . Finally, the error  $\epsilon^{BF}$  on the measured backscattered intensity with beamforming is :

$$\epsilon^{BF}(\theta, T) = \frac{\eta^2}{I_{inc}^{BF}(T) + I_{coh}^{BF}(\theta, T)} \quad (I.78)$$

As the coherent intensity  $I_{coh}^{DM}$  obtained without beamforming is not zero only over transducers connected to the source, the coherent intensity contribution is negligible in  $\langle |k_{i_1, i_2}(T, f)|^2 \rangle_{i_1, i_2, f} = \langle |h_{i_1, i_2}(t)|^2 \rangle_{i_1, i_2, t \in [T, T+\delta t]}$ . It comes out that  $I_{inc}^{DM}(T) \simeq \langle |k_{i_1, i_2}(T, f)|^2 \rangle_{i_1, i_2, f}$ , and Eq.I.76 simplifies in :

$$I_{inc}^{BF}(T) \simeq \left( 1 + 4 \sum_{i=1}^4 C_i \right) I_{inc}^{DM}(T) \quad (\text{I.79})$$

Let  $\theta_{lim}$  be the angle from which  $I_{coh}^{BF}$  and  $I_{coh}^{DM}$  vanish. For  $\theta > \theta_{lim}$ , the array gain  $G$  which corresponds to the ratio between  $\epsilon^{DM}$  and  $\epsilon^{BF}$  is found to be :

$$G = \frac{\epsilon^{DM}}{\epsilon^{BF}} \simeq 1 + 4 \sum_{i=1}^4 C_i \quad (\text{I.80})$$

Note that Eq. I.80 is also valid at  $\theta=0$  because the coherent intensity is strictly equal to the incoherent one with or without beamforming in that case. Between  $\theta = 0$  and  $\theta = \theta_{lim}$ , the computation of the array gain  $G$  is tedious.



## I.4 Ultrasonic imaging of highly scattering media from local measurements of the diffusion constant : separation of coherent and incoherent intensities

Alexandre Aubry and Arnaud Derode  
Article publié dans *Physical Review E* [51]

### I.4.1 Abstract

As classical imaging fails with diffusive media, one way to image a multiple-scattering medium is to achieve local measurements of the dynamic transport properties of a wave undergoing diffusion. This paper presents a method to obtain local measurements of the diffusion constant  $D$  in a multiple-scattering medium. The experimental set up consists in an array of programmable transducers placed in front of the multiple-scattering medium to be imaged. By achieving Gaussian beamforming both at emission and reception, an array of virtual sources and receivers located in the near-field is constructed. The time evolution of the incoherent component of the intensity backscattered on this virtual array is shown to represent directly the growth of the diffusive halo as  $\sqrt{Dt}$ . A matrix treatment is proposed to separate the incoherent intensity from the coherent backscattering peak. Once the incoherent contribution is isolated, a local measurement of the diffusion constant is possible. The technique is applied to image the long-scale variations of  $D$  in a random scattering sample made of two parts with different concentration of cylindrical scatterers. This experimental result is obtained with ultrasonic waves around 3 MHz. It illustrates the possibility of imaging diffusive media from local measurements of the diffusion constant, based on coherent Gaussian beamforming and a matrix “antisymmetrization”, which creates a virtual antireciprocity.

### I.4.2 Introduction

Multiple scattering of waves concerns many domains of physics, ranging from optics or acoustics to solid state physics, seismology, medical imaging or telecommunications[52, 25, 1, 53, 54, 23, 55, 43, 56, 17, 18, 57, 58, 59]. In an inhomogeneous medium where the wave celerity  $c$  depends on the spatial coordinates  $\mathbf{r}$ , it is a classical approach to consider a scattering sample as one realisation of a random process, and study statistical parameters such as the mean, variance, and correlation of the field amplitude or intensity. Under this approach, several physical parameters are relevant to characterize wave propagation in scattering media : the scattering mean free path  $l_e$ , the transport mean free path  $l^*$ , the diffusion constant  $D$ , the absorption length  $l_{abs}$ . From an experimental point of view, these parameters can be measured by a variety of experiments. Some of them involve measurements of the ensemble-averaged field transmitted through a scattering layer[35, 36, 47, 37, 38, 34]. One can also study the variations of the mean intensity with time (“time of flight” distribution)[30, 31, 32, 33, 34], and fit the result with a radiative transfer or a diffusive model. The coherent backscattering



effect[5, 3, 6, 9, 27] can also be taken advantage of to measure the diffusion constant  $D$  and the transport mean free path  $l^*$ [13, 42]. The advantage of backscattering measurements is that they can be obtained even if only one side of the medium is accessible. Moreover, in a thick scattering sample ( $L \gg l^*$  where  $L$  is the medium thickness), the transmitted signal is much less energetic. As to classical imaging techniques, they fail when multiple scattering predominates. However, one can still hope to measure the long-scale spatial variations of the diffusive parameters and build a map. The resulting image would not be an image of the celerity  $c(\mathbf{r})$  but e.g., of the diffusion constant  $D(\mathbf{r})$  and would therefore have a different resolution. Indeed, an ideal image would give details with a length scale of the order of the correlation length  $\xi$  of the celerity fluctuations. Experimentally, in a highly scattering medium where diffuse fields are used to build an image, a map of the diffusion constant  $D(\mathbf{r})$  would have a resolution of the order of the transport mean free path  $l^*$ , at best. Intrinsically, the measurement of  $D$  cannot be exactly local, since the wave has to be scattered (hence, to travel over a distance  $\mathcal{L}$  of the order of few mean free paths) before it makes sense to speak of wave diffusion. So there are essentially three length scales in ascending order :  $\xi$ ,  $l^*$  and  $\mathcal{L}$ . Even though classical imaging fails in diffusive media, one can try to build maps of  $D$ , with a resolution given by  $\mathcal{L}$ . This is similar to what can be done in seismology, where the coda  $Q$  factor is found to be a regional constant[56], or in medical imaging[58], where diffuse optical tomography is used to reconstruct the internal distribution of the reduced scattering coefficient in the breast.

Here, we investigate the possibility of measuring spatial variations of the diffusion constant in a scattering medium, based on the mean dynamic backscattered intensity and near-field Gaussian beamforming. In acoustics, the diffusion constant  $D$  can be estimated from the coherent backscattering (CB) effect[13]. It is well known that dynamic CB is a signature of multiple scattering and manifests itself as a peak in the backscattered intensity with a typical angular width  $\lambda/\sqrt{Dt}$ . However, this result is only valid in the far field, when the source-sample distance  $a$  is very large compared to  $\sqrt{Dt}$ . In that case, the whole sample is illuminated by a quasi-plane wave. In order to obtain a *local* measurement of  $D$ , the source can be brought close to the medium, but in that case, the angular width of the CB peak depends only on the wavelength and the source size [28, 18], and brings no information on the diffusion constant. However, in the ensemble-averaged backscattered intensity, there are two contributions : the so-called coherent part (which is responsible for the CB peak) and the incoherent background. We show that, if the source and receivers are strongly directive (collimated beams) and located in the near-field, the incoherent intensity exhibits the growth of the diffusive halo with time : the width of the incoherent contribution does depend on the diffusion constant, unlike the coherent contribution. Basically, in a typical near-field experiment, the angular distribution of the backscattered intensity at a given time has the following shape : a narrow, steep peak (the coherent contribution), on top of a wider pedestal that widens with time (the incoherent contribution)(see Fig.I.24). The problem is that it is difficult to distinguish between the coherent and the incoherent contributions, especially at early times. In addition, speckle fluctuations cannot be entirely averaged out by spatial averaging, in order to maintain a significant resolution.

In this paper, we present an experimental illustration of a method that allows one to

separate the coherent and the incoherent contributions, and obtain a local measurement of the diffusion constant from the near-field backscattered intensity. The experiment utilizes programmable piezoelectric elements that transmit and receive ultrasound waves around 3 MHz. Gaussian beamforming is applied to incoming and outgoing wave fields, in order to create arrays of virtual sources and receivers at the surface of the sample. It is similar to seismic measurements[17] where geophones sit at the surface of the Earth, except that sources and receivers are not point-like but strongly directive, as Gaussian beams are collimated. The source/receiver responses form a transfer matrix, which is symmetric because of reciprocity. Yet, this transfer matrix can be “made antisymmetric” to separate the coherent from the incoherent part. By “made antisymmetric”, we mean that the upper matrix elements are kept unchanged while the diagonal elements are nulled and the sign of lower matrix elements is reversed. Once the coherent contribution is subtracted, the diffusion constant is retrieved by fitting the evolution of the incoherent contribution with time. The medium under investigation consists of two adjacent random collections of steel rods, with different densities ( $29 \text{ rods/cm}^2$  and  $12 \text{ rods/cm}^2$ ), hence the diffusion constant is not homogeneous but shows long-scale variations. The spatial dependence of the diffusion constant is measured and exhibits a cut-off at the border between the two parts of the random scattering sample. The experimental result shows the possibility of imaging random media based on local measurements of the diffusion constant.

### I.4.3 Near-field beamforming with Gaussian beam

#### Experimental set up

The experiment takes place in a water tank. We use a  $N$ -element ultrasonic array ( $N = 128$ ) with a 3MHz central frequency and a 2.5-3.5MHz bandwidth; each array element is 0.39mm in size and the array pitch  $p$  is 0.417mm. The sampling frequency is 20 MHz. The first step of the experiment consists in measuring the inter-element matrix of the array (see Fig. I.23). A 100- $\mu$ s-long linear chirp is emitted from transducer  $i$  into the scattering sample immersed in water. The backscattered wave is then recorded with the  $N$  transducers of the same array. The operation is repeated for the  $N$  emitting transducers. The response from transducer  $i$  to transducer  $j$  is correlated with the emitted chirp, which gives the impulse response  $h_{ij}(t)$ . The  $N \times N$  array response matrix  $\mathbf{H}(t)$  whose elements are the  $N^2$  impulse responses  $h_{ij}(t)$  is thus obtained. Because of reciprocity,  $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$  and  $\mathbf{H}(t)$  is symmetric.

A classical way to build the coherent backscattering cone is to calculate directly the angular distribution of the backscattered intensity by averaging  $h_{ij}^2(t)$  over all pairs  $(i,j)$  separated by the same angle[13, 42, 46]. Here, as a local measurement of the diffusion constant is required, Gaussian beamforming is applied to the  $\mathbf{H}$  matrix before computing the intensity.

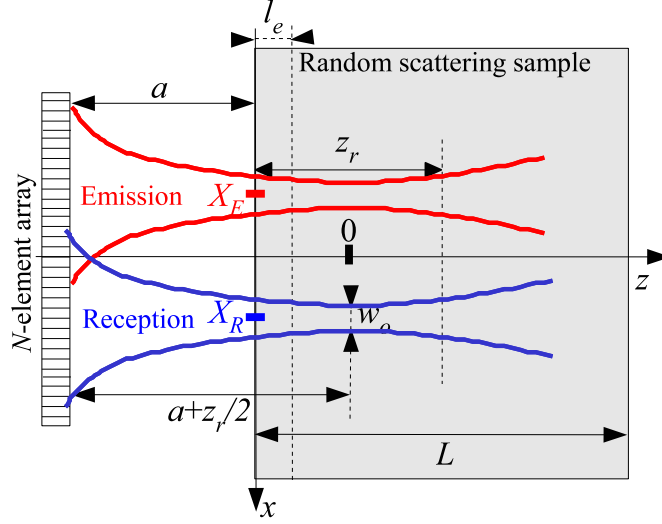


FIG. I.23: Experimental setup : a 128-element linear array is placed in front of a random scattering sample at a distance  $a$ . The whole setup is immersed in a water tank. The array is parallel to the scattering slab. Each array element is controlled by independent D/A and A/D converters. Gaussian beamforming allows to send a collimated beam entering at  $x = X_E$  in the emitting mode and to receive a collimated beam coming out at  $x = X_R$  in the receiving mode. The beam is characterized by its waist width  $w_0$  and the Rayleigh range  $z_r$  that defines the area where the Gaussian beam is collimated. The focal spot of the Gaussian beam is centered at a distance  $z_r/2$  behind the surface of the scattering sample.

### Gaussian beam

A Gaussian beam can be expressed as[60] :

$$\psi(x, z, k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\{j[\phi_0 - \phi(z)]\}}{w(z)} \exp\left[-j \frac{kx^2}{2R(z)} - \frac{x^2}{w^2(z)}\right] \exp(jkz) \quad (\text{I.81})$$

This expression describes the beam amplitude as a function of the transversal coordinate  $x$  and the axial coordinate  $z$ .  $k$  is the wave number.  $w(z)$  is the beam width, its evolution along the direction of propagation  $z$  is :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (\text{I.82})$$

The beam width  $w(z)$  reaches its minimum value  $w_0$  at  $z = 0$ . This parameter  $w_0$  is usually known as the beam waist width.  $R(z)$  is the radius of curvature of the wavefront of the Gaussian beam. Its dependence with  $z$  is as follows[60] :

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{z\lambda}\right)^2 \right] \quad (\text{I.83})$$

$\phi(z)$  is known as the Guoy phase shift :

$$\phi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_r}\right) \quad (\text{I.84})$$

$z_r$  is the Rayleigh range[60] :

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (I.85)$$

$z_r$  gives the longitudinal dimension of the focal region, it is similar to the depth of field of a lens. In the region of the beam waist, the Gaussian beam can be considered as collimated and its expression simplifies into :

$$\psi\left(x, -\frac{z_r}{2} < z < \frac{z_r}{2}, k\right) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] \exp(jkz) \quad (I.86)$$

Fig.I.23 depicts the Gaussian beams. As collimated beams are needed to obtain a simple expression of the incoherent intensity (see Sec.I.4.3), the Gaussian beam is not focused exactly at the surface of the sample but at a distance of  $z_r/2$  behind the surface, in order to maximize the range over which the Gaussian beam is collimated within the random medium.

### Gaussian beamforming

To achieve Gaussian beamforming, the time signals  $h_{ij}(t)$  are first truncated into  $10 - \mu s$ -long overlapping windows :  $k_{ij}(T, t) = h_{ij}(T - t)W_R(t)$  with  $W_R(t) = 1$  for  $t \in [0, 10\mu s]$ ,  $W_R(t) = 0$  elsewhere. For each value of time  $T$ , the  $k_{ij}$  form a matrix  $\mathbf{K}$ . A short-time Fourier analysis is achieved by a fast Fourier transform(FFT) and gives the response matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  at time  $T$  and frequency  $f$ .  $X_E$  and  $X_R$  are the transversal positions of Gaussian beams in emission and reception respectively(see Fig.I.23). From  $\mathbf{K}(T, f)$ , a virtual response matrix  $\mathbf{K}^{GB}(T, f)$  is built; each of its elements  $k_{X_E, X_R}^{GB}(T, f)$  correspond to the responses at the frequency  $f$  and time  $T$  between the emitted beam(at  $X_E$ ) and the received beam(at  $X_R$ ). The superscript GB stands for ‘‘Gaussian beamforming’’. The elements  $k_{X_E, X_R}^{GB}(T, f)$  are calculated as follows :

$$k_{X_E, X_R}^{GB}(T, f) = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N k_{lm}(T, f) \psi\left(x_l - X_E, -a - z_r/2, \frac{2\pi f}{c}\right) \psi\left(x_m - X_R, -a - z_r/2, \frac{2\pi f}{c}\right) \quad (I.87)$$

$N$  is the number of array elements. Eq.I.87 constitutes the Gaussian beamforming process.

With Parseval’s theorem, the backscattered intensity  $I^{GB}(X_E, X_R, T)$  can be obtained by integrating the squared norm of the responses  $k_{X_E, X_R}^{GB}(T, f)$  over the frequency bandwidth (2.5-3.5MHz). The results are averaged for all source/receiver couples that are separated by the same distance  $X = |X_E - X_R|$ . Thus, the averaged backscattered intensity  $I^{GB}(X, T)$  after Gaussian beamforming is determined as :

$$I^{GB}(X, T) = \left\langle \left| k_{X_E, X_R}^{GB}(T, f) \right|^2 \right\rangle_{f, \{X_E, X_R\}} \quad (I.88)$$

where the symbol  $\langle \rangle$  denotes an average over the variables in the subscript. This quantity is (ideally) the intensity that would have been obtained at time  $T$  with a Gaussian-shaped source and a Gaussian-shaped receiver separated by  $X$  and located at distance  $z_r/2$  below the surface. The typical size of these virtual sources and receivers is controlled by the parameter  $w_0$ .

### Expression of the coherent and incoherent intensities

In this subsection, the expressions of incoherent and coherent components of the intensity are determined from the theoretical studies by Akkermans et al.[6](far-field) and Margerin et al.[19](near-field) and applied to our experimental configuration. Let us introduce some notation.  $\mathbf{R}_1(x_1, z_1)$  and  $\mathbf{R}_n(x_n, z_n)$  are the position vectors of the first and last scatterer along a scattering path, respectively. The emitted beam is centered at  $X_E = 0$  for simplicity and the received beam at  $X_R = X$ . The emitted and backscattered beams  $\psi_{in}(0, \mathbf{R}_1)$  and  $\psi_{out}(\mathbf{R}_n, X)$  cannot be directly expressed with Eq.I.86, because the presence of scatterers causes the wave packet to lose energy during the propagation through the random medium. As a consequence, on average, the emitted and backscattered beams decay spatially as  $\exp[-(z + z_r/2)/(2l_e)]$ , where  $l_e$  is the scattering mean free path. Eq.I.86 is valid in the beam waist region. Thus, if the scattering mean free path  $l_e$  is less than or equal to the Rayleigh length  $z_r$ , the first and last scattering events take place in the beam waist region. Then, the incident and backscattered beams  $\psi_{in}(0, \mathbf{R}_1)$  and  $\psi_{out}(\mathbf{R}_n, X)$  can be expressed as :

$$\psi_{in}(0, \mathbf{R}_1) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-\frac{(z_1 + z_r/2)}{2l_e}\right] \exp(jkz_1) \quad (\text{I.89})$$

$$\psi_{out}(\mathbf{R}_n, X) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left[-\frac{(x_n - X)^2}{w_0^2}\right] \exp\left[-\frac{(z_n + z_r/2)}{2l_e}\right] \exp(jkz_n) \quad (\text{I.90})$$

To model the diffusive propagation from  $\mathbf{R}_1$  to  $\mathbf{R}_n$ , the Green's function for the intensity  $P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T)$  in the random medium has to be introduced.  $P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T)$  is the probability distribution to go from  $\mathbf{R}_1$  to  $\mathbf{R}_n$  in a time  $t$  for a random walker with the appropriate boundary conditions. For large lapse times, the Green function of the radiative transfer equation  $P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T)$  can be approximated by the solution of the diffusion equation[22]. The expression of  $P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T)$  for a semi-infinite medium[6] can be extended for a scattering slab[44] as follows :

$$P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T) = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1 - x_n)^2}{4DT}\right]}{\sqrt{4\pi DT}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi(z_1 + z_r/2 + z_0)}{B} \sin \frac{m\pi(z_n + z_r/2 + z_0)}{B} \exp\left(-\frac{m\pi^2 DT}{B}\right) \quad (\text{I.91})$$

where  $z_0$  comes from the exact solution of the Milne problem which tells that  $P$  cancels on the plane  $z = -z_r/2 - z_0$  with  $z_0 = \pi l^*/4$  ( $l^*$  is the transport mean free path).  $B = L + 2z_0$  is the effective thickness of the medium. Finally, the incoherent and coherent intensities can be expressed as :

$$I_{inc}(0, X, T) \simeq \int \int d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_n |\psi_{in}(0, \mathbf{R}_1)|^2 P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T) |\psi_{out}(\mathbf{R}_n, X)|^2 \quad (\text{I.92})$$

$$I_{coh}(0, X, T) \simeq \int \int d^2\mathbf{R}_1 d^2\mathbf{R}_n \psi_{in}(0, \mathbf{R}_1) \psi_{in}^*(0, \mathbf{R}_n) P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_n, T) \psi_{out}(\mathbf{R}_n, X) \psi_{out}^*(\mathbf{R}_1, X) \quad (\text{I.93})$$

Eq.I.92 and I.93 neglect the propagation times before the first scattering and after the last scattering and are therefore valid when time  $T$  is much larger than the scattering mean free

time  $l_e/c$ . In Eq.I.89, I.90 and I.91, the variables  $x_1$  and  $x_n$  are separated from the variables  $z_1$  and  $z_n$ . Thus, the calculation of integrals of Eq.I.92 and I.93 is straightforward, and under the assumption  $w_0^2 \ll 4DT$ , the final results are :

$$I_{inc}(0, X, T) \simeq (4\pi DT)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{X^2}{4DT}\right) I_z(T) \quad (\text{I.94})$$

$$I_{coh}(0, X, T) \simeq (4\pi DT)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{X^2}{w_0^2}\right) I_z(T) \quad (\text{I.95})$$

where  $I_z(T)$  is the result of integrations on  $z_1$  and  $z_n$  and is given by :

$$I_z(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\pi^2 DT}{B}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{l_e^2} + \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 \right]^{-1} \left[ \frac{m\pi}{B} \cos \frac{m\pi z_0}{B} + \frac{1}{l_e} \sin \frac{m\pi z_0}{B} \right] \right\}^2 \quad (\text{I.96})$$

The final expression of the incoherent intensity of Eq.I.94 can be given a physical representation : the term  $\exp\left(-\frac{X^2}{4DT}\right)$  represents the growth of the diffusive halo from which a local measurement of the diffusion constant may be obtained. The expression of the coherent intensity (Eq.I.95) shows that the width of the coherent backscattering peak does not display any time dependence, as the use of collimated beams at the surface of the sample corresponds to a near-field configuration. The typical width of the CB peak is therefore given by  $w_0$ . In this theoretical study, several assumptions have been made. First, the scattering mean free path  $l_e$  has to be less than or equal to the Rayleigh length  $z_r$  in order to neglect the radius of curvature of the Gaussian beam. Second, the results of Eq.I.94 and I.95 apply only for large times when the diffusion approximation of the radiative transfer equation is valid.

#### I.4.4 Separation of coherent and incoherent intensities

In order to achieve a local measurement of the diffusion constant from the growth of the diffusive halo, the incoherent and coherent intensities have to be separated. In this section, an original method is proposed. It relies on the ‘‘antisymmetrization’’ of the symmetric inter-element matrix  $\mathbf{H}(t)$  measured in the real space, which allows to make a multiple scattering path and its counterpart interfere destructively in the  $\vec{k}$ -space. Then, by achieving Gaussian beamforming on this antisymmetric matrix, the mean intensity (Eq.I.88) displays an ‘‘anticone’’ instead of the usual CB enhancement : the coherent intensity is subtracted rather than added to the incoherent intensity. Then, both intensities can be deduced from the cone and its ‘‘anticone’’.

##### Principle

Let us assume for simplicity that the inter-element impulse responses  $h_{ij}(t)$  are totally decorrelated one from each other. From Eq.I.87 and I.88, the following expression for the averaged backscattered intensity after Gaussian beamforming  $I^{GB}(X, T)$  is obtained :

$$I^{GB}(X, T) = \sum_{l_1=1}^N \sum_{m_1=1}^N \sum_{l_2=1}^N \sum_{m_2=1}^N \left\langle k_{l_1, m_1}(T, f) k_{l_2, m_2}^*(T, f) \psi_{l_1, E}(f) \psi_{m_1, R}(f) \psi_{l_2, E}^*(f) \psi_{m_2, R}^*(f) \right\rangle_{f, \{X_E, X_R\}} \quad (\text{I.97})$$

where  $\psi_{l,E}(f) = \psi\left(x_l - X_E, -a - z_r/2, \frac{2\pi f}{c}\right)$ . Because of the decorrelation assumption and reciprocity, only the terms containing the products  $k_{l_1,m_1}(T, f)k_{l_1,m_1}^*(T, f)$  and  $k_{m_1,l_1}(T, f)k_{l_1,m_1}^*(T, f)$  survive the average. The first product consists in an incoherent summation of multiple-scattering paths intensity : it corresponds to the incoherent intensity. The second one results from interference between multiple-scattering paths and their reciprocal counterparts : it is linked to the coherent intensity. Finally the incoherent ( $I_{inc}^{GB}$ ) and coherent intensities ( $I_{coh}^{GB}$ ) after Gaussian beamforming are given by :

$$I_{inc}^{GB}(X, T) = \sum_{l_1=1}^N \sum_{m_1=1}^N \left\langle |k_{l_1,m_1}(T, f)\psi_{l_1,E}(f)\psi_{m_1,R}(f)|^2 \right\rangle_{f,\{X_E, X_R\}} \quad (\text{I.98})$$

$$I_{coh}^{GB}(X, T) = \sum_{l_1=1}^N \sum_{m_1=1}^N \left\langle k_{l_1,m_1}(T, f)k_{m_1,l_1}^*(T, f)\psi_{l_1,E}(f)\psi_{m_1,R}(f)\psi_{m_1,E}^*(f)\psi_{l_1,R}^*(f) \right\rangle_{f,\{X_E, X_R\}} \quad (\text{I.99})$$

If the reciprocity symmetry is respected, the inter-element matrix  $\mathbf{H}(t)$  is symmetric. From  $\mathbf{H}(t)$ , an antisymmetric matrix  $\mathbf{H}^A(t)$  can be defined as follows :

- for  $i < j$ ,  $h_{ij}^A = h_{ij}$
- for  $i = j$ ,  $h_{ii}^A = 0$
- for  $i > j$ ,  $h_{ij}^A = -h_{ij}$

By replacing the measured responses  $k_{ij}(T, f)$  by the fictitious responses  $k_{ij}^A(T, f)$  in Eq.I.98 and I.99, the incoherent ( $I_{inc}^{GB,A}$ ) and coherent ( $I_{coh}^{GB,A}$ ) intensities obtained from  $\mathbf{H}^A(t)$  can be expressed as :

$$I_{inc}^{GB,A}(X, T) = I_{inc}^{GB}(X, T) - \sum_{l_1=1}^N \left\langle |k_{l_1,l_1}(T, f)\psi_{l_1,E}(f)\psi_{l_1,R}(f)|^2 \right\rangle_{f,\{X_E, X_R\}} \quad (\text{I.100})$$

$$I_{coh}^{GB,A}(X, T) = -I_{coh}^{GB}(X, T) + \sum_{l_1=1}^N \left\langle |k_{l_1,l_1}(T, f)\psi_{l_1,E}(f)\psi_{l_1,R}(f)|^2 \right\rangle_{f,\{X_E, X_R\}} \quad (\text{I.101})$$

The physical (and fictitious) interpretation of the ‘‘antisymmetrization’’ procedure would be to build an antireciprocal medium i.e., a medium for which the impulse responses from  $i$  to  $j$  and  $j$  to  $i$  are exactly out of phase ( $h_{ij}^A = -h_{ji}^A$ ). In such a medium, there would be no coherent backscattering cone, but an ‘‘anticone’’ instead, at exact backscattering. Indeed, the interference between any multiple scattering path and its reciprocal counterpart, which is represented by the product  $k_{i,j}(T, f)k_{j,i}(T, f)$  in Eq.I.99, would be destructive. As a result, the coherent intensity obtained from  $H^A$ (Eq.I.101) is equal to the opposite of that obtained from the symmetric matrix  $H$  plus a residual term, due to the nulling of the diagonal terms. As the incoherent intensity corresponds to the summation of the individual intensities of multiple scattering paths, the minus sign between  $h_{ij}^A$  and  $h_{ji}^A$  has no influence on  $I_{inc}^{GB,A}$  which remains equal to  $I_{inc}^{GB}$ , except for the same residual term. Finally, when the total (coherent + incoherent) backscattered intensity  $I^{GB,A}$  is calculated, the residual term vanishes and  $I^{GB,A}$  is given by :

$$I^{GB,A} = I_{inc}^{GB,A} + I_{coh}^{GB,A} = I_{inc}^{GB} - I_{coh}^{GB} \quad (\text{I.102})$$



Even though the antireciprocal medium has no physical existence, from a mathematical point of view the advantage of this trick is to separate the coherent and incoherent contributions in the intensity backscattered from the *real* medium. The incoherent and coherent intensities are obtained by summing and subtracting respectively the intensities corresponding to the symmetric(experimental) and the antisymmetric(fictitious) cases.

$$I_{inc}^{GB} = \frac{I^{GB} + I^{GB,A}}{2} \quad (\text{I.103})$$

$$I_{coh}^{GB} = \frac{I^{GB} - I^{GB,A}}{2} \quad (\text{I.104})$$

Actually, in the simple case of Gaussian beams, the separation of the coherent and incoherent terms could have been achieved more simply. Since the waist width  $w_0$  is known, from Eq.I.95 one can easily calculate and subtract the coherent part from the total intensity. Nevertheless, as it is shown in Sec.I.4.5, the coherent backscattering peak width is slightly larger than  $w_0$  because of the size of the array elements, so a direct subtraction of the coherent part would have been a possible source of error. The advantage of the antisymmetrization technique is that it does not require the beam to be Gaussian, it can be generalized to any kind of illumination. However, it relies on the assumption that the responses  $h_{lm}$  are fully decorrelated (or at least, have a finite correlation length), which is not the case when single scattering dominates. The antisymmetrization technique can successfully separate the coherent and the incoherent contributions to the total intensity only at times such that the single scattering intensity can be neglected compared to the multiple scattering contribution.

### I.4.5 Experimental results

The experimental set up is shown in Fig.I.23. The experimental process has already been described in Sec.I.4.3. The distance  $a$  is  $27.5\text{mm}$ . An array of  $N = 128$  elements has been used. The random scattering sample consists of steel rods ( $C_L = 5.9\text{mm}/\mu\text{s}$ ,  $C_T = 3.2\text{mm}/\mu\text{s}$ , radius  $0.4\text{mm}$ , density  $7.85\text{kg}/\text{l}$ ) randomly distributed with a concentration  $n = 29.54\text{rods}/\text{cm}^2$ . The frequency-averaged elastic mean free path  $l_e$  is  $3.15 \pm 0.15\text{mm}$  for this medium between  $2.5$  and  $3.5\text{MHz}$  [47]. Once the inter-element matrix  $\mathbf{H}$  is measured, the averaged backscattered intensity obtained with Gaussian beamforming  $I^{GB}(X, T)$  is calculated as described in Sec.I.4.3. The virtual array obtained with Gaussian beamforming contains 43 virtual elements which correspond to the axial position of the collimated beams. The pitch  $p'$  of this virtual array is  $1\text{mm}$ . The beam waist width  $w_0$  is  $1\text{mm}$ . The corresponding intensity profile obtained at  $T = 70\mu\text{s}$  is shown in Fig.I.24(a). The total intensity contains the incoherent intensity, that spreads far from the source, and the coherent intensity which is only observed near the source. From this intensity distribution, the separation between the coherent and incoherent intensities is difficult. As a consequence, the ‘‘antisymmetrization’’ method described in the previous subsection is applied. The inter-element matrix  $\mathbf{H}$  is made antisymmetric and the corresponding intensity  $I^{GB,A}(X, T)$  is shown in Fig.I.24(a). An ‘‘anticone’’ is obtained as it is predicted by Eq.I.102. Then, the addition and subtraction of  $I^{GB}(X, T)$  and  $I^{GB,A}(X, T)$  give access to the incoherent



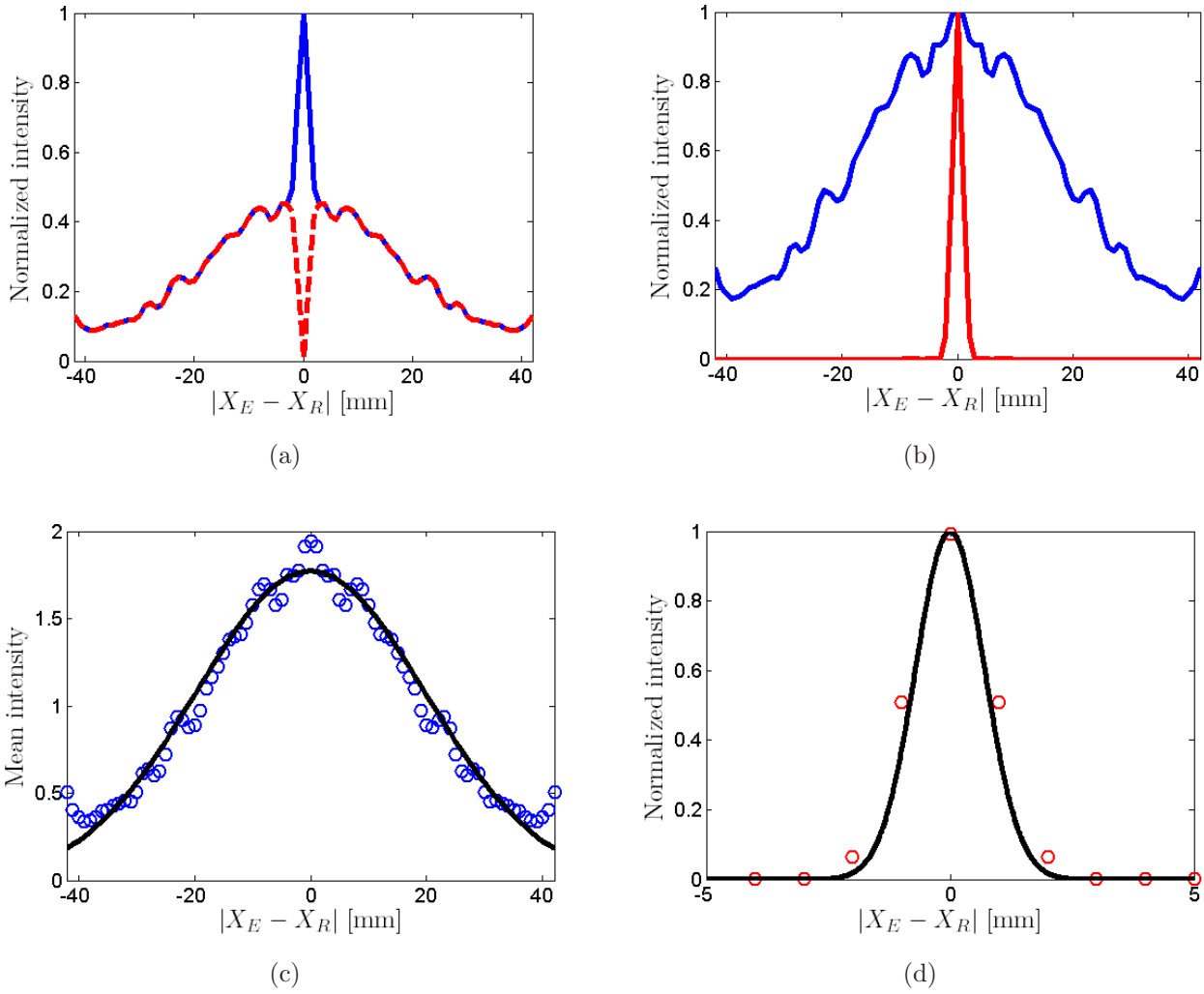


FIG. I.24: Separation of the coherent and incoherent intensities (a) Backscattered intensity obtained after Gaussian beamforming performed on matrix  $\mathbf{H}$  (blue continuous line) and the antisymmetric matrix  $\mathbf{H}^A$  (red dashed line).(b) Incoherent(blue line) and coherent (red line) intensities obtained from the cone and “anticone” displayed in (a). (c) The incoherent intensity (blue circles) is fitted with a Gaussian curve (continuous line) whose variance  $W^2$  allows to determine the diffusion constant  $D$ . (d) The coherent intensity (red circles) is compared to its theoretical expression (continuous line) given by Eq.I.95.

and coherent intensities (Fig.I.24(b)). The incoherent intensity looks like a Gaussian curve as it is predicted by Eq.I.94, the residual fluctuations are due to a lack of averaging. The coherent intensity profile is compared to its theoretical expression (Eq.I.95) in Fig.I.24(d). The experimental result and the theoretical prediction are in a good agreement. The small mismatch comes from the fact that transducers are not point-like sources and so the continuous approach used in Sec.I.4.3 does not model perfectly the experimental conditions.

### I.4.6 Local measurement of the diffusion constant

In this section, local measurements of the diffusion constant  $D$  are achieved, based on Gaussian beamforming and the “antisymmetrization” technique. To this end, a random scattering sample containing two parts with different concentrations of scatterers has been used (see Fig.I.25). The first sample consists of steel rods randomly distributed with a concentration  $n_1=12\text{rods}/\text{cm}^2$ . The frequency-averaged scattering mean free path  $l_1^e$  is  $7.7 \pm 0.3\text{mm}$  for this medium between 2.5 and 3.5MHz[47]. The second sample consists of the same steel rods but with a concentration  $n_2=29.54\text{rods}/\text{cm}^2$ . The corresponding scattering mean free path is  $l_2^e = 3.15 \pm 0.15\text{mm}$ [47]. The array-sample distance  $a$  is 27.5mm.

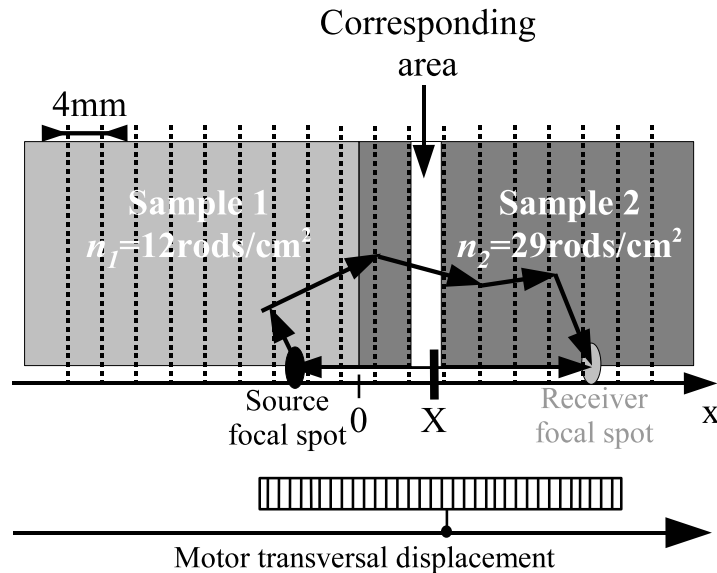


FIG. I.25: Experimental process used to obtain a local measurement of the diffusion constant  $D$ . Two scattering samples are placed side by side in front of the 128-element array. These two samples differ by their concentrations in steel rods. The array can be moved with a motor. The space is divided into areas of 4mm width. When a Gaussian beam is emitted at  $x = X_E$  and received at  $x = X_R$ , the measured backscattered intensity is attributed to the area that contains  $X = (X_E + X_R)/2$ .

## Experimental process

We use Gaussian beamforming to mimic a virtual array of 43 sources/receivers, with a 1 mm pitch, for each position of the real array. The Gaussian beam waist width  $w_0$  is 1 mm. The real 128-element array can be moved parallel to the front face of the sample with a motor. The experimental procedure is divided into four steps :

- The inter-element matrix  $\mathbf{H}(t)$  is recorded.
- The emission/reception on every point of the virtual array is calculated in the computer and yields  $\mathbf{H}^{GB}(X_E, X_R)$
- The antisymmetrization technique is applied to obtain the incoherent contribution of the backscattered intensity
- The 128-element array is translated by 0.72 mm and the same procedure is repeated.

The region to image has been divided into 4 mm-wide areas(see Fig.I.25). The aim is to obtain a measurement of  $D$ , at the scale of 4 mm, by a fit of the incoherent contribution. The inversion procedure is very crude : when a Gaussian beam is focused at  $X_E$  (in emission) and  $X_R$  (in reception), the resulting diffusive halo is attributed to the area with a spatial coordinate  $X = (X_E + X_R)/2$ . The diffusive halos corresponding to the same area are averaged, in order to reduce the speckle fluctuations. A typical example is represented in Fig.I.26, where the growth of the averaged halo with time is obvious.

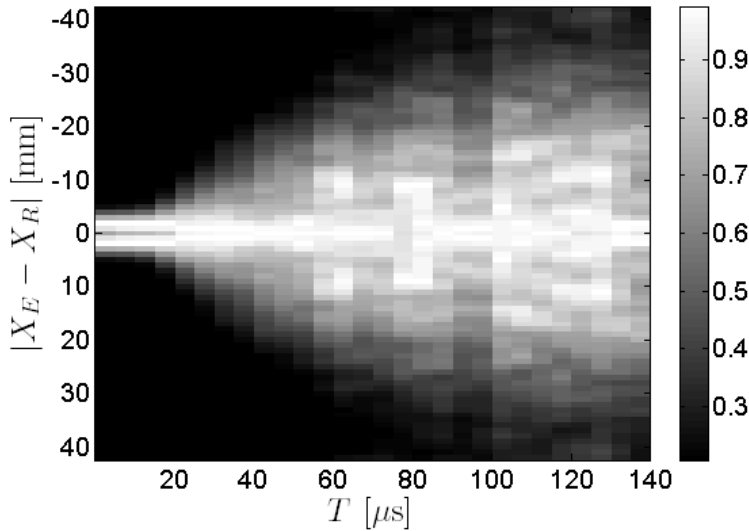


FIG. I.26: Incoherent intensity corresponding the area located at  $X = +10mm$ . The intensity is normalized with its maximum at each time.

## I.4.7 Experimental results

At each time, the incoherent intensity profile has been fitted with a Gaussian curve with a variance  $W^2$ . Fig.I.24(c) depicts an example of fit of the incoherent intensity at a given time. The best value  $W^2$  is chosen such that the scalar product between the normalized Gaussian

curve and normalized data is maximum. The model described in Sec.I.4.3 predicts that the temporal evolution of  $W^2(t)$  should be equal to  $2Dt$ . Thus, a linear fit of  $W^2(t)$  gives access to the diffusion constant  $D$ . In Fig.I.27, the temporal evolution of  $W^2$  is shown for the two areas located at  $X = -10\text{mm}$ (low-concentrated sample) and at  $X = +10\text{mm}$ (high-concentrated sample).

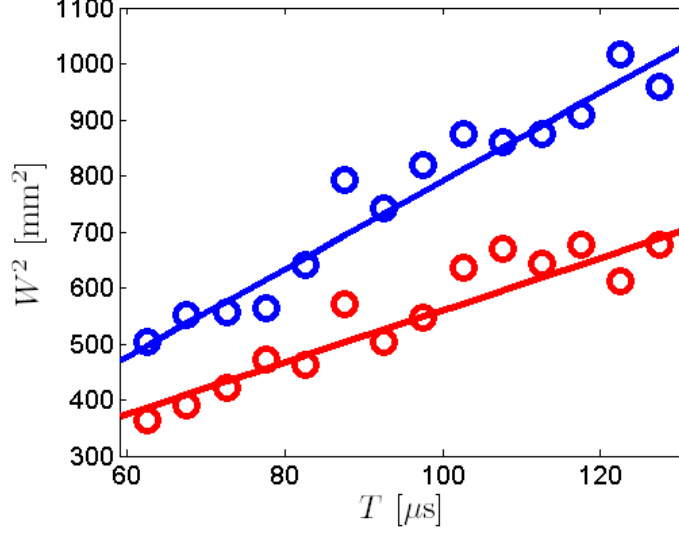


FIG. I.27: Temporal evolution of the variance  $W^2$  of the Gaussian curve which fits the incoherent intensity profile from  $T = 60\mu\text{s}$  to  $T = 130\mu\text{s}$ . The blue circles correspond to the area located at  $X = -10\text{mm}$  (low-concentrated sample) and the red circles to the area located at  $X = +10\text{mm}$  (high-concentrated sample). A linear fit of  $W^2$  is performed in each case (continuous lines) and provides a measurement of the diffusion constant. For  $X = -10\text{mm}$ , the measured diffusion constant is  $D = 3.9\text{mm}^2/\mu\text{s}$ , whereas, for  $X = +10\text{mm}$ , the measured diffusion constant is  $D = 2.4\text{mm}^2/\mu\text{s}$ .

At  $X = -10\text{mm}$ , the measured diffusion constant is  $3.9\text{mm}^2/\mu\text{s}$ , whereas at  $X = +10\text{mm}$ , the diffusion constant is  $2.4\text{mm}^2/\mu\text{s}$ . This is not surprising : the diffusion constant decreases with the concentration of scatterers. Note that the linear fit is applied from  $T = 60\mu\text{s}$  only, which corresponds to a typical penetration depth of  $6l_e$ . Before this time, the diffusion approximation is not valid yet and the evolution of  $W^2$  is not linear. Even if the condition  $l_e < z_r$  is not strictly fulfilled for medium 1 ( $X < 0$ ), the experimental result shows that the model is still valid if  $l_e$  and  $z_r$  are of the same order of magnitude. The same data processing has been applied to each area and the spatial evolution of the diffusion constant  $D$  has been obtained and is shown in Fig.I.28. A cut-off of the diffusion constant is observed at the border between the high-concentrated and the low-concentrated parts( $X = 0$ ). The diffusion constant is about  $4.0\text{mm}^2/\mu\text{s}$  for the low-concentrated medium and  $2.4\text{mm}^2/\mu\text{s}$  for the high-concentrated one. The spatial resolution is intrinsically limited by the transport mean free path  $l^*$ . Here, the transition for the diffusion constant spreads over  $10\text{mm}$  which gives an order of magnitude for the spatial resolution of such a measurement. A better resolution would be obtained if the spatial mesh was denser. But, in this case, the average of the backscattered intensity would not

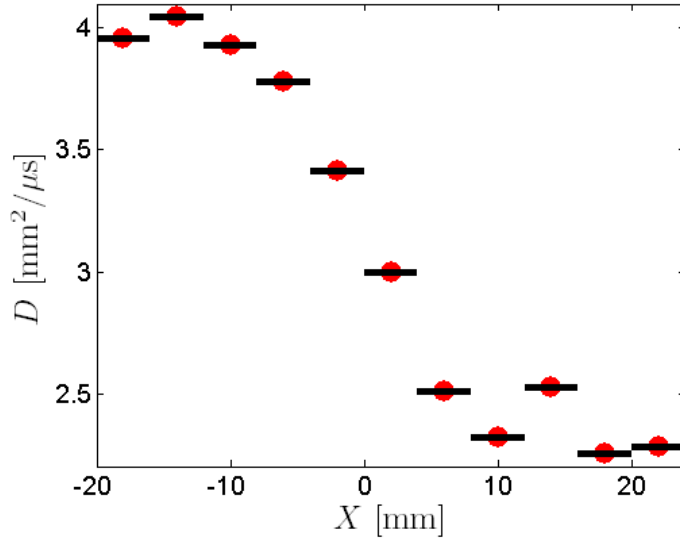


FIG. I.28: Spatial evolution of the measured diffusion constant. For each area, the diffusion constant has been estimated and is plotted as a function of the lateral position  $X$ .

be satisfying : residual fluctuations of the intensity pattern would be too high because of the lack of average over disorder configurations. Consequently, a compromise has to be found between the density of the mesh and a sufficient average over disorder configurations. Moreover, the spatial resolution is limited by the spreading of the diffusive halo characterized by the typical length  $\mathcal{L}$  : near the border ( $X = 0$ ), the diffusive halo spreads in both media, so the measured diffusion constant corresponds to an average of the diffusion constants of both media. The method proposed in this study does not allow to achieve a 3D image of a diffusive medium. Indeed, the medium is supposed to be homogeneous in the direction of depth ( $z$ ) to achieve a local measurement of the diffusion constant  $D(x, y)$  at the scale of  $\mathcal{L}$ . Yet this technique could provide a 2D map of a diffusive medium from backscattered measurements taken at its surface.

### I.4.8 Conclusion

In this study, we have investigated the possibility to measure locally the diffusion constant of an acoustic pulsed wave propagating in a strongly disordered 2D medium. To this end, Gaussian beamforming has been used and allows to observe the local growth of the diffusive halo via the incoherent intensity. An original method to separate the coherent and incoherent intensities has been presented and applied to the case of ultrasonic waves. This method is based on the “antisymmetrization” of the inter-element matrix ; it creates an artificial antireciprocity which allows to separate the coherent backscattering peak from the incoherent background. The technique proposed in this paper has been applied experimentally to the observation of a gradient of concentration in scatterers from the spatial evolution of the diffusion constant. Experimental results are very encouraging and show that this technique would be of a great interest to achieve 2D imaging of real multiple-scattering media.

## **Acknowledgments**

The authors would like to thank Dr Julien de Rosny for fruitful discussions and Dr Victor Mamou who made the steel rods samples. They wish to acknowledge also the groupe de recherches IMCODE of CNRS (GDR 2253).

## I.5 Local measurements of the diffusion constant in multiple scattering media : Application to human trabecular bone imaging

Alexandre Aubry, Arnaud Derode and Frédéric Padilla

Article publié dans *Applied Physics Letters* [61]

### I.5.1 Abstract

We present local measurements of the diffusion constant for ultrasonic waves undergoing multiple scattering. The experimental set up uses a coherent array of programmable transducers. By achieving Gaussian beamforming at emission and reception, an array of virtual sources and receivers located in the near-field is constructed. A matrix treatment is proposed to separate the incoherent intensity from the coherent backscattering peak. Local measurements of the diffusion constant  $D$  are then achieved. This technique is applied to a real case : a sample of human trabecular bone for which the ultrasonic characterization of multiple scattering is an issue.

### I.5.2 Introduction

Waves of various natures are widely used to characterize and image heterogeneous media, and multiple wave scattering is often regarded as a nightmare for standard imaging techniques, which are mostly based on the first Born approximation (single scattering). Whether for imaging or modelling purposes, it is essential to know whether multiple wave scattering occurs. A typical signature of multiple scattering is the phenomenon known as coherent backscattering which was originally observed with optical waves [2, 3, 5, 10]. Recently, coherent backscattering of seismic waves (around 25 Hz) in the earth crust [17], and of ultrasound (around 3 MHz)[46] in porous bones was reported, indicating that multiple scattering should be taken into account in these media and frequency ranges. The aim of this letter is to go beyond this diagnosis, in order to obtain local measurements (at the typical scale of a mean-free path) of the diffusion constant in a heterogeneous medium. To that end, we apply a technique that was initially tested on prototype samples (random collections of steel rods)[51] to a real medium : a inhomogeneous slab of human trabecular bone. Using an ultrasonic array of transmitters/receivers, the idea is to combine Gaussian beam-forming, time-resolved intensity measurements and a matrix antisymmetrization procedure in order to remove the coherent backscattering peak and characterize the local size of the diffuse halo, independently of intrinsic attenuation. The experimental results are compared with the bone mineral density image obtained by X-ray densitometry (Fig.I.29), which is known to be highly correlated to porosity [62].

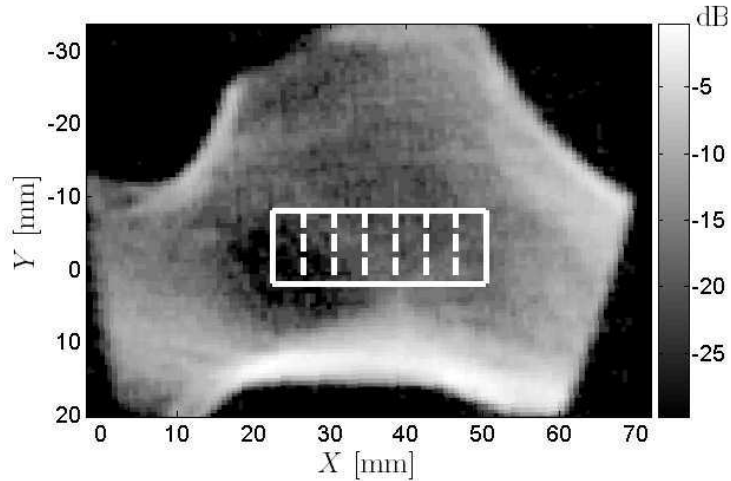


FIG. I.29: X-Ray density map. The scale is in dB and normalized with the maximum density  $\rho_{max}$  of the bone. The resolution is  $175\mu m$ . The white rectangle corresponds to the region of interest. In each 4mm-wide areas delimited by white dashed lines, a local measurement of the ultrasonic diffusion constant is achieved.

### I.5.3 Experiment

The sample under study is a 10-mm-thick slice of pure trabecular bone cut from the upper part of a human femur (see Fig.I.29). The bone slab was defatted and vacuum-degassed under water to remove air bubbles. The experiment takes place in a water tank. The experimental setup consists of an array of programmable transducers placed in front of the multiple-scattering medium to be imaged. We use a 128-element ultrasonic array in the 2.5-3.5 MHz band; the array pitch is 0.417 mm, and the element size is 0.39 mm. Each array element is controlled by independent D/A and A/D converters. The sampling frequency is 20 MHz. The array is parallel to the bone slab, at a distance  $a = 43$  mm.

The first step of the experiment consists in measuring the interelement matrix of the array (see Fig.I.30). A  $100 - \mu s$ -long linear chirp is emitted from transducer  $i$  into the scattering sample. The backscattered wave is recorded with the  $N$  transducers of the same array. The operation is repeated for the  $N$  emitting transducers. The response from transducer  $i$  to transducer  $j$  is correlated with the emitted chirp, which gives the impulse response  $h_{ij}(t)$ . The  $N \times N$  array response matrix  $\mathbf{H}(t)$  whose elements are the  $N^2$  impulse responses  $h_{ij}(t)$  is obtained. For convenience, the origin of time ( $t = 0$ ) corresponds to the first arrival of backscattered waves. Once the matrix  $\mathbf{H}(t)$  is measured, Gaussian beamforming is achieved at emission and reception. The corresponding operation is described in details in [51]. The basic idea is to apply the proper phase-shifts and amplitudes to the matrix elements in order to compute the virtual response (at each time  $T$  and frequency  $f$ ) that would exist between a Gaussian-shaped emitter (at position  $X_E$ ) and a Gaussian-shaped receiver (at position  $X_R$ ) at the surface of the bone (Fig.I.30). This procedure mimics a virtual array of 43 sources/receivers, with a 1-mm pitch. The Gaussian beam waist was also 1 mm. Afterwards, the mean backscattered intensity  $I(r, T)$



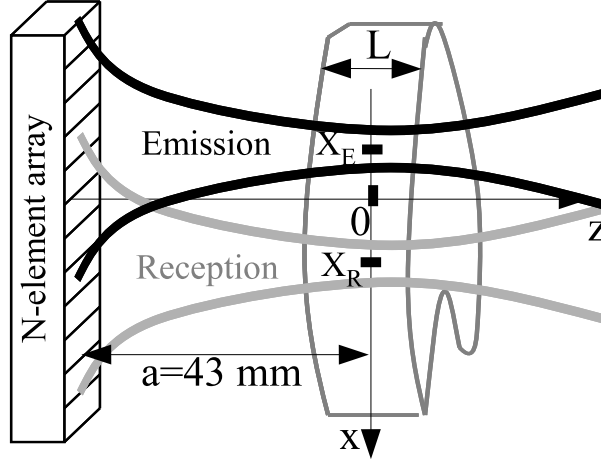


FIG. I.30: Gaussian beamforming provides the means to send a collimated beam entering at  $x = X_E$  in the emitting mode and to receive a collimated beam coming out at  $x = X_R$  in the receiving mode. The focal spot of the Gaussian beam is centered at the half thickness of the bone slice.

is calculated by averaging the square of the virtual matrix elements over all frequencies, as well as over all source/receiver couples that are separated by the same distance  $r = |X_E - X_R|$ . A typical intensity profile at a given time  $T$  is shown in Fig.I.31(a). It clearly shows a coherent backscattering peak, typical of multiple scattering.

The backscattered intensity contains single scattering ( $I_S$ ) and multiple scattering ( $I_M$ ) contributions :  $I(r, T) = I_S(r, T) + I_M(r, T)$ . Since we consider here times of flight  $T$  larger than  $2L/c \simeq 13\mu s$  (where  $L$  is the slab thickness), the single scattering contribution vanishes. The multiple scattering intensity can be split into two terms : an “incoherent” one  $I_{inc}(r, T)$  which corresponds to the interference of the wave with itself and a “coherent” one  $I_{coh}(r, T)$  which corresponds to the interference of the wave with its reciprocal counterpart. As it is shown in Fig.I.31(a), the spatial distribution of the backscattered intensity at a given time has the following shape : a narrow, steep peak (the coherent contribution), on top of a wider pedestal (the incoherent contribution). This shape is typical of the backscattering enhancement profile when it is observed in the near field, like for instance in seismology [17]. The next operation consists in separating the coherent and incoherent contributions. To that end, the matrix  $\mathbf{H}$  is transformed into an antisymmetric matrix  $\mathbf{M}$  such that  $m_{ij} = h_{ij}$  for  $i < j$ ,  $m_{ij} = -h_{ij}$  for  $i > j$  and  $m_{ii} = 0$  [51]. The physical equivalent of the antisymmetrization procedure would be to build an “antireciprocal” medium, i.e., a medium for which the impulse responses from  $i$  to  $j$  and  $j$  to  $i$  are exactly out of phase. In such a medium, there would be no coherent backscattering cone, but an “anticone” instead, at exact backscattering[63, 64]. The coherent and incoherent intensities can be isolated by adding or subtracting the intensities resulting from the real matrix  $\mathbf{H}$  and the fictitious anti-reciprocal matrix  $\mathbf{M}$  [51].

Assuming that the propagation of the incoherent intensity obeys the diffusion equation,

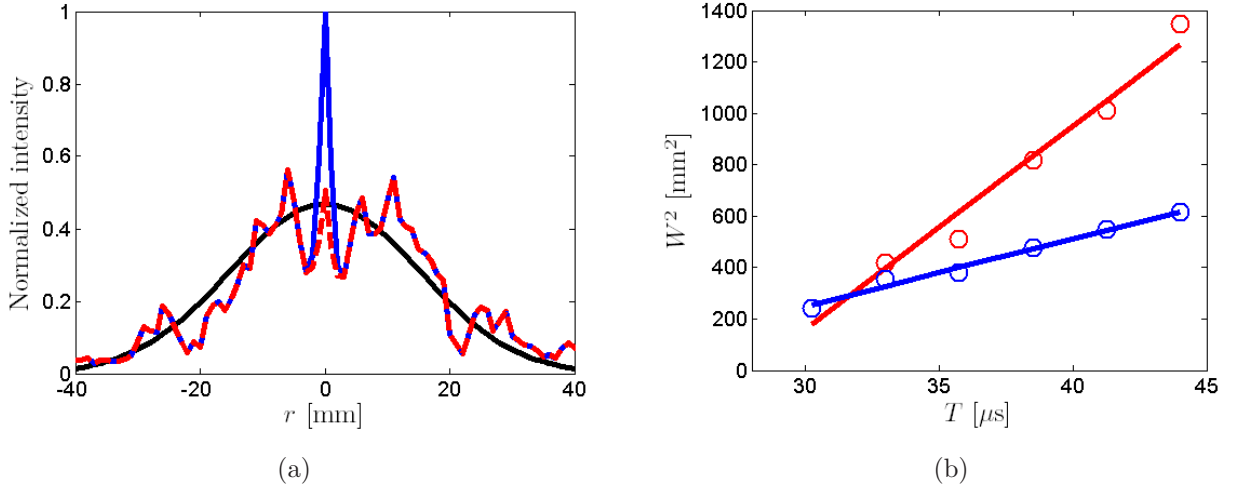


FIG. I.31: (a) Backscattered intensity  $I(r)$  after Gaussian beamforming at time  $T = 36\mu s$  in the area located at  $X = 28.5mm$  (blue continuous line) and the corresponding incoherent intensity  $I_{inc}(r)$  at the same time (red dashed line). Both intensities have been normalized with the maximum of  $I(r)$ . The incoherent intensity  $I_{inc}(r)$  is fitted with a gaussian curve (black continuous line) of variance  $W^2$ . (b) Temporal evolution of  $W^2$  from  $T = 30\mu s$  to  $T = 44\mu s$ . The blue and red circles correspond respectively to the area located at  $X = 36.5mm$  and  $X = 24.5mm$ . A linear fit of  $W^2$  is performed in each case (continuous lines) and provides an estimation of the diffusion constant.

and that the Gaussian beam waist  $w_0 \ll \sqrt{DT}$ , on average the incoherent contribution reads :

$$I_{inc}(r, T) = I_z(T) \exp\left(-\frac{r^2}{4DT}\right) \quad (\text{I.105})$$

where the term  $I_z(T)$  depends on the sample thickness, the mean-free path, the attenuation coefficient, but not on the transverse coordinate  $r$ . The physical meaning of Eq.I.105 is that the incoherent intensity exhibits the growth of the diffusive halo in  $\sqrt{DT}$ . The measurement of the diffusion constant is achieved by fitting at each time  $T$  the incoherent intensity profile  $I_{inc}(r, T)$  by a Gaussian curve with a variance  $W^2$ . From Eq.I.105, we have  $W^2(T) = 2DT$ . The diffusion constant  $D$  is estimated from a linear fit of  $W^2(T)$  (see Fig.I.31(b)).

The interest of Gaussian beamforming is that theoretical derivations are easier, and measurements are made in the near-field. Consequently, local measurements of the diffusion constant  $D(X)$  are possible. To that aim, an inversion procedure is needed. It consists in subdividing the medium into 4 mm-wide areas (see Fig.fig :setup3). The inversion procedure is very crude : when a Gaussian beam is focused at  $X_E$  (in emission) and  $X_R$  (in reception), the resulting intensity  $I_{inc}(r, T)$  is attributed to the area which contains the spatial coordinate  $(X_E + X_R)/2$ . For each area, a mean incoherent intensity is obtained and a fit of its width gives a local estimation of the diffusion constant  $D(X)$ . Note that there remain many fluctuations in the measured incoherent intensity shown in Fig.I.31(a) compared to its theoretical expression given by Eq.I.105 : it is due to a lack of averaging. As a local measurement of  $D$  is needed, a compromise has to be found between the final image resolution (Fig.I.32) and the necessity of spatial averaging.

The experimental procedure described above has been applied to build a map of the diffusion constant in the area highlighted with a white rectangle in Fig.fig :setup3. This area was chosen because the porosity showed rapid variations. From the ultrasonic experimental results, an estimation of the diffusion constant is obtained by fitting the temporal evolution of  $W^2$  between  $T = 30\mu s$  and  $T = 44\mu s$  (Fig.I.31(b)). Before  $T = 30\mu s$ , the diffusion regime is not reached yet and the evolution of  $W^2$  is not linear. For  $X = 36.5mm$ , the measured diffusion constant is  $D = 6.6 \pm 0.3mm^2/\mu s$ , whereas, for  $X = 24.5mm$ , we obtain  $D = 19.8 \pm 1.5mm^2/\mu s$ . X-ray local density measurements were also made and are shown in Figs.1 and 4. The spatial variations of  $D$  are compared to the local density measurements in Fig.I.32.

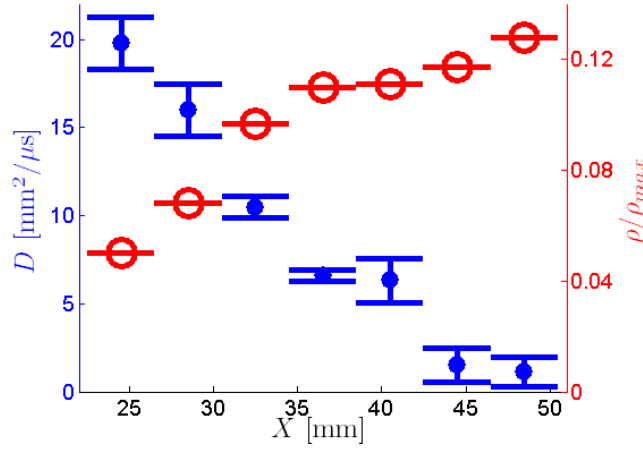


FIG. I.32: The diffusion constant  $D$  (blue disks) is compared to the normalized bone density  $\rho/\rho_{max}$  (red circles).

As one could expect, the highest values for the diffusion constant correspond to the areas where the bone is less dense, hence the weaker scattering. An interesting result is that the image obtained from local measurements of  $D$  shows more contrast than the image provided by density measurements : the diffusion constant increases by a factor of ten in the region of interest, while the bone density decreases only by a factor of three. Ultrasonic measurements of the diffusion constant could thus be a more sensitive marker of porosity than bone density measurements.

### I.5.4 Discussion

The technique we presented was applied on a real sample : the trabecular bone was chosen here as a typical example of attenuating, porous, real random medium. Rather than carrying out *in vivo* measurements of the diffusion constant in the bone, a perspective of this work would be to incorporate the presence of multiple scattering in the modelling of ultrasonic wave propagation in the bone. Apart from this example, the technique can be applied to the characterization of other multiple scattering media (*e.g.*, coarse-grain steels for non destructive evaluation) and use other types of waves (*e.g.*, seismic waves). It requires a coherent array of transmitters/receivers. Gaussian beamforming allows simple measurements of diffuse param-

ters at the local scale. 2-D images of the diffusion constant can then be drawn. Note that in this imaging procedure, the resolution is not the wave length. Intrinsically, the measurement of  $D$  cannot be exactly local, since the wave has to travel over a distance of the order of a few mean-free paths before it makes sense to speak of wave diffusion. Moreover, variations of  $D$  with depth are ignored. Further theoretical work is needed to investigate the relation between the diffusion constant and the local density fluctuations.  $D$  is not determined only by the local density. Multiple scattering theory predicts that the diffusion constant is strongly connected with anisotropy of scattering, hence with the characteristic size  $l_c$  of scatterers. One can expect that measurements of the diffusion constant provide some information about the microarchitecture, particularly the characteristic length  $l_c$  of microstructures which constitute the scattering medium, beyond the simple local density. Further research on that subject demands detailed images of the sample microarchitecture, to be compared with the local measurements of the diffusion constant.

## I.6 Conclusion et perspectives

Cette partie de ma thèse a consisté, tout d'abord, à améliorer les mesures ultrasonores du coefficient de diffusion  $D$ . Grâce à la formation de voies en ondes planes, nous avons pu nous projeter dans une configuration champ lointain et ainsi obtenir une mesure beaucoup plus précise du coefficient de diffusion. En effet, ce passage en champ lointain s'accompagne d'une amélioration de la résolution. L'affinement du cône de rétrodiffusion cohérente a ainsi pu être observé sur une durée beaucoup plus longue que celle obtenue en champ intermédiaire. D'autres avantages apportés par la formation de voies ont été mis en évidence, notamment une meilleure résistance au bruit. Enfin, nous avons également montré que l'utilisation d'ondes planes permet d'observer le cône de rétrodiffusion cohérente dans des milieux très faiblement diffusants, ce qui était auparavant impossible en étudiant l'intensité obtenue en champ intermédiaire.

Nous avons été plus loin qu'une simple amélioration de la mesure des paramètres de transport de l'onde multiple diffusée. Grâce à l'utilisation de faisceaux collimatés, l'étude de l'intensité multiple diffusée a pu être réalisée en champ proche. Ceci constitue un premier pas vers l'imagerie des milieux désordonnés puisque des mesures locales de  $D$  ont ainsi été effectuées. De telles mesures ont été possibles grâce à une technique permettant de séparer le halo diffusif du pic de rétrodiffusion cohérente. En *antisymétrisant* la matrice des réponses impulsionnelles de la barrette, on force le milieu désordonné à devenir virtuellement antiréciproque. Les interférences entre chemins réciproques deviennent alors destructives et un *anticône* est obtenu lorsqu'on étudie l'intensité en champ proche. La somme de l'intensité obtenue dans le cas réel (milieu réciproque) et le cas virtuel (milieu antiréciproque) permet ensuite d'extraire le halo diffusif. Des mesures locales la constante de diffusion  $D$  sont alors obtenues. Lors d'une expérience prototype, nous avons ainsi mis en évidence des fluctuations spatiales de  $D$  liées à un gradient de concentration en diffuseurs. La résolution de l'image finale est de l'ordre du libre parcours moyen de transport  $l^*$ .

Cette technique d'imagerie des milieux désordonnés par mesure locale de  $D$  a été par la suite appliquée à l'os trabéculaire humain. Une corrélation importante entre les variations de densité dans l'os et celles de  $D$  a ainsi été mise en évidence. La constante de diffusion dépendant également fortement de l'anisotropie de la diffusion, nous espérons que sa mesure puisse nous donner des informations quant à la microarchitecture de l'os. Le lien théorique entre microstructure d'un milieu désordonné et les paramètres diffusants de l'onde multiple diffusée sera évoquée au chapitre V. Nous avons notamment établi la relation entre la fonction d'auto-corrélation d'un milieu aléatoire et le coefficient de diffusion  $D$ . A partir d'une image typique de microstructure d'un os trabéculaire, nous avons estimé le coefficient de diffusion  $D$  attendu et cette prédiction théorique est en bon accord qualitatif avec nos mesures expérimentales. Ce premier test est encourageant quant à la possibilité de caractériser et d'imager la microstructure d'une tranche d'os par de simples mesures ultrasonores. Bien sûr, la méthode mise au point n'est pas réservée à l'os et pourrait s'appliquer à l'imagerie d'autres milieux diffusants réels tels que les bétons, les aciers austénitiques *etc.*

# Chapitre II

## L'opérateur matriciel de propagation en milieu aléatoire

### II.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés statistiques de la matrice de réponse  $\mathbf{K}$  en milieu aléatoire, acquise en rétrodiffusion à l'aide d'un réseau multiéléments. L'observable étudiée est la distribution des valeurs singulières de  $\mathbf{K}$ . La réponse impulsionnelle entre chaque couple de transducteurs est mesurée et l'ensemble forme la matrice de réponse. Une analyse temps-fréquence permet ensuite d'étudier l'évolution des valeurs singulières avec le temps et la fréquence. Les résultats expérimentaux sont comparés à la distribution moyenne des valeurs singulières prédite par la théorie des matrices aléatoires. Après renormalisation des coefficients de la matrice, on observe un très bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques. Deux types de milieux aléatoires ont été étudiés : un milieu hautement diffusant pour lequel la diffusion multiple prédomine et un milieu faiblement diffusant pour lequel elle peut être négligée. Dans les deux cas, les corrélations qui peuvent exister entre les éléments de la matrice constituent un paramètre clé. De plus, il apparaît que la distribution des valeurs singulières présente un comportement très différent selon le régime de diffusion (simple ou multiple). Ces résultats sont appliqués à la détection d'une cible enfouie en milieu diffusant.

## II.2 Introduction

Depuis quelques années, la technologie multi-éléments est source de nombreux travaux de recherche que ce soit en acoustique (réseau de transducteurs), en électromagnétisme (réseau d'antennes) ou en sismologie (réseau de géophones). Ces réseaux peuvent être utilisés en transmission : deux réseaux sont placés à des endroits différents et peuvent communiquer entre eux. Dans ce cas, les antennes multi-éléments apportent une diversité spatiale qui permet par exemple d'améliorer significativement les performances des communications MIMO (multiple input - multiple output), notamment dans des environnements très diffusants [59, 65, 66]. Ces réseaux multi-éléments peuvent également être utilisés en rétrodiffusion : le réseau est placé en vis-à-vis du milieu que l'on désire sonder. Une onde incidente est émise par un ou plusieurs éléments du réseau, celle-ci est réfléchi par le milieu et les éléments du réseau mesurent ensuite le champ rétrodiffusé. Cette configuration est utilisée notamment par les échographes, les sonars et radars : grâce aux réseaux multi-éléments, un traitement cohérent (*p.ex.* formation de voies) peut être appliqué aux données enregistrées et une image du milieu sondé est ainsi obtenue [67]. Cet exemple illustre l'intérêt de nouvelles techniques de traitement des signaux permettant de tirer le meilleur profit des mesures expérimentales. Quelles que soient les applications (*p.ex.* télécommunications, détection, imagerie, caractérisation *etc.*) et les techniques employées (*p.ex.* formation de voies, mesures d'intensité, tomographie, retournement temporel *etc.*), toute l'information disponible est contenue dans la matrice de réponse du réseau,  $\mathbf{K}$ . A chaque fréquence, ses coefficients  $k_{ij}$  correspondent à la réponse complexe entre les éléments  $i$  et  $j$  du réseau. Une fois que  $\mathbf{K}$  est connue, tout le reste n'est que traitement du signal : il faut alors extraire les informations pertinentes, en fonction du problème considéré.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes placés dans une configuration de rétrodiffusion : le même réseau de  $N$  transducteurs indépendants est utilisé à la fois en émission et réception. Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{K}$  est une matrice carrée de taille  $N \times N$ . Cette matrice est symétrique si les conditions de propagation respectent la réciprocité spatiale. Grâce notamment aux travaux menés au laboratoire par Claire Prada et son équipe, il est maintenant bien connu que dans le cas de diffuseurs ponctuels, chaque réflecteur du milieu est associé à une valeur singulière de  $\mathbf{K}$  [68, 69], tant que le nombre de diffuseurs est inférieur à  $N$  et que la diffusion multiple est négligeable [70, 71]. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au contraire à la matrice  $\mathbf{K}$  dans des milieux diffusants, contenant un grand nombre de diffuseurs ( $\gg N$ ) distribués aléatoirement et pouvant donner lieu à de la diffusion multiple.

Le but principal de ce chapitre est d'étudier l'applicabilité de la théorie des matrices aléatoires [72] (*Random Matrix Theory*, RMT) aux expériences ultrasonores réalisées en milieu aléatoire. La RMT a déjà été largement utilisée en physique, en statistique et en ingénierie. Ses domaines d'application sont nombreux, ils vont de la physique nucléaire [73] à l'étude générale des systèmes chaotiques [74] en passant par les réseaux de neurones [75], les télécommunications [76], ou encore l'analyse financière [77]. La RMT permet par exemple de déterminer la capacité de Shannon pour les communications MIMO en milieu aléatoire [78, 79]. En physique nucléaire, elle permet de prédire les propriétés statistiques des niveaux d'énergie hautement ex-



cités des noyaux lourds [73]. Une autre application de la RMT est la séparation des composantes déterministe et aléatoire en analyse de données multivariées [80, 81, 82].

Dans cette partie, la RMT est utilisée afin de prédire les propriétés statistiques de la matrice  $\mathbf{K}$ . L'observable pertinente est la distribution de ses valeurs singulières  $\lambda_i$ . Les corrélations qui peuvent exister entre les éléments de la matrice  $\mathbf{K}$  constituent un paramètre clé si on souhaite déterminer la densité de probabilité théorique des valeurs singulières [78, 79, 80]. Nous allons également montrer que la distribution des valeurs singulières diffère selon que l'on se place en régime de diffusion simple ou multiple. Alors que la fameuse *loi du quart de cercle* [76, 83] est bien observée expérimentalement en régime de diffusion multiple, le comportement statistique de  $\mathbf{K}$  est différent en régime de diffusion simple : la matrice  $\mathbf{K}$  présente une distribution de valeurs singulières analogue à celle obtenue pour les matrices de Hankel aléatoires (matrices dont les éléments sont constants le long de chaque antidiagonale) [84, 85]. Ce comportement qui peut sembler curieux de prime abord, s'explique en fait par la persistance d'une cohérence déterministe des ondes simplement diffusées le long des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  en milieu aléatoire. Cette cohérence disparaît en régime de diffusion multiple. Ceci ouvre de nouvelles perspectives quant à la séparation des contributions de diffusion simple et multiple, que nous aborderons dans les chapitres III & IV.

Dans la dernière partie de chapitre, nous appliquons les résultats de la RMT à la détection de cible enfouie dans un milieu diffusant. En particulier, nous montrons que la RMT apporte une assise théorique nécessaire à l'utilisation de la méthode D.O.R.T (*Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel*) en milieu aléatoire [68, 69]. Cette technique découverte par Claire Prada et Mathias Fink en 1994 consiste en une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $\mathbf{K}$ . Dans le cas d'un milieu *simple* (faible nombre de diffuseurs, diffusion simple), chaque diffuseur du milieu inspecté est associé à une valeur singulière de la matrice  $\mathbf{K}$  (et à l'espace propre correspondant). La méthode D.O.R.T peut être utilisée pour détecter, par exemple, une cible échogène enfouie dans un milieu diffusant aléatoire. En cas de détection, la cible serait donc associée à la première valeur singulière  $\lambda_1$  (*i.e* la plus grande). En fondant notre analyse sur la RMT, nous introduisons un critère de détection sur  $\lambda_1$ , critère déterminant si, oui ou non, une cible est détectée. L'analyse permet également de prédire théoriquement les performances de la méthode D.O.R.T en terme de détection de cible en milieu aléatoire, et de la comparer à d'autres techniques. Ces résultats peuvent être généralisés à la détection de cible en environnements bruités.

## II.3 Procédure expérimentale

L'expérience a lieu dans une cuve à eau. On utilise une barrette échographique disposant de  $N$  transducteurs indépendants ( $N = 64$ , dans notre cas), de fréquence centrale 3 MHz et dont la bande de fréquence est comprise entre 2,5 et 3,5 MHz. La taille d'un élément est de 0,39 mm et l'espace inter-éléments  $p$  est de 0,417 mm. La fréquence d'échantillonnage est de 20 MHz. La barrette est placée face au milieu que l'on désire étudier (voir Fig.II.1).

La première étape expérimentale consiste à mesurer la matrice inter-éléments. Un chirp



linéaire de  $100 \mu\text{s}$  est émis par l'élément  $i$  dans le milieu diffusant. L'onde rétrodiffusée est ensuite mesurée par les  $N$  transducteurs du même réseau. L'opération est répétée pour les  $N$  transducteurs émetteurs. La réponse entre les transducteurs  $i$  et  $j$  est corrélée avec le chirp émis, ce qui donne accès à la réponse impulsionnelle  $h_{ij}(t)$ . Une matrice de réponse  $\mathbf{H}(t)$  de taille  $N \times N$  contenant les  $N^2$  réponses impulsionnelles  $h_{ij}(t)$  est ainsi obtenue. Du fait de la réciprocity spatiale,  $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$  et  $\mathbf{H}(t)$  est symétrique. On prendra comme origine des temps l'instant où la source émet l'onde incidente.

Un milieu diffusant est essentiellement caractérisé par son libre parcours moyen  $l_e$  et son coefficient de diffusion  $D$ . Si la longueur du chemin de diffusion au sein du milieu diffusant est sensiblement supérieur à  $l_e$ , la diffusion multiple prédomine. Celle-ci va donc se manifester dans les signaux  $h_{ij}(t)$  aux temps  $t$  longs devant  $l_e/c$ .

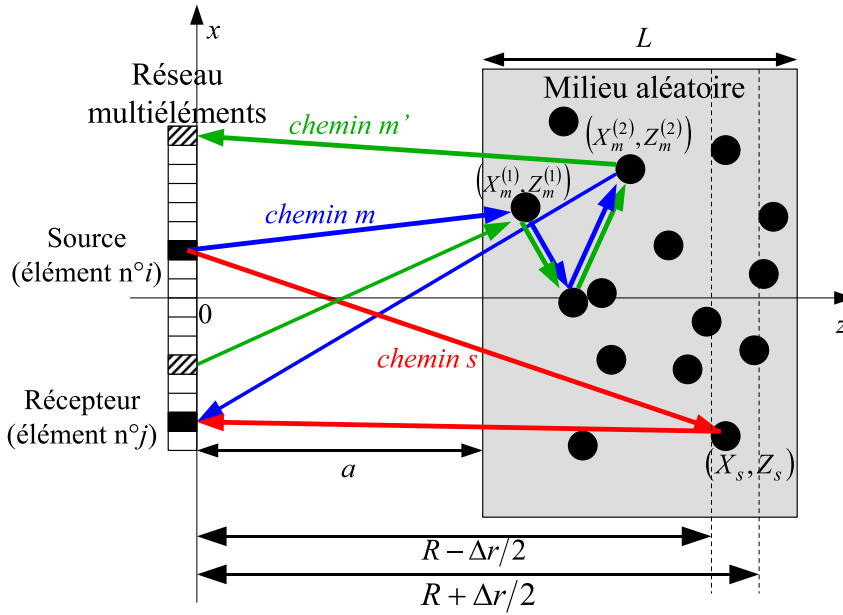


FIG. II.1: Dispositif expérimental : un réseau linéaire de 64 éléments est placé à une distance  $a$  d'un milieu aléatoire. Le dispositif entier est immergé dans l'eau. La réponse inter-éléments  $k_{ij}(T, f)$ , mesurée autour du temps de vol  $T$  et à la fréquence  $f$ , correspond à la somme d'ondes partielles simplement et multiplement diffusées qui empruntent des chemins de longueur comprises dans l'intervalle  $[R - \Delta r/2; R + \Delta r/2]$ , où  $R = cT/2$  et  $\Delta r = c\Delta t/2$ . Un exemple de chemin simplement diffusé (chemin  $s$ ) qui contribue à  $k_{ij}(T, f)$ , est représenté avec des flèches rouges ; les coordonnées  $(X_s, Z_s)$  correspondent à la position du diffuseur impliqué dans le chemin de diffusion  $s$ . Un chemin de diffusion multiple (chemin  $m$ ), qui contribue également à  $k_{ij}(T, f)$ , est représenté avec des flèches bleues ;  $(X_m^{(1)}, Z_m^{(1)})$  et  $(X_m^{(2)}, Z_m^{(2)})$  correspondent aux positions des premiers et derniers diffuseurs le long du chemin  $m$ . Un autre chemin de diffusion multiple (chemin  $m'$ ) est décrit avec des flèches vertes : il suit la même trajectoire que  $m$  dans le milieu mais est associé à un couple source/récepteur différent.

La matrice des réponses impulsionnelles  $\mathbf{H}(t)$  est tronquée en fenêtres de temps successives, assez courtes pour conserver la résolution temporelle des expériences ultrasonores et étudier la transition du régime de diffusion simple (temps courts) au régime de diffusion multiple (temps

longs). Les signaux temporels  $h_{ij}(t)$  sont découpés en fenêtres temporelles de durée  $\Delta t$  (voir Fig.II.2) :  $k_{ij}(T, t) = h_{ij}(T - t)W_R(t)$  avec  $W_R(t) = 1$  pour  $t \in [-\Delta t/2, \Delta t/2]$ ,  $W_R(t) = 0$  partout ailleurs.

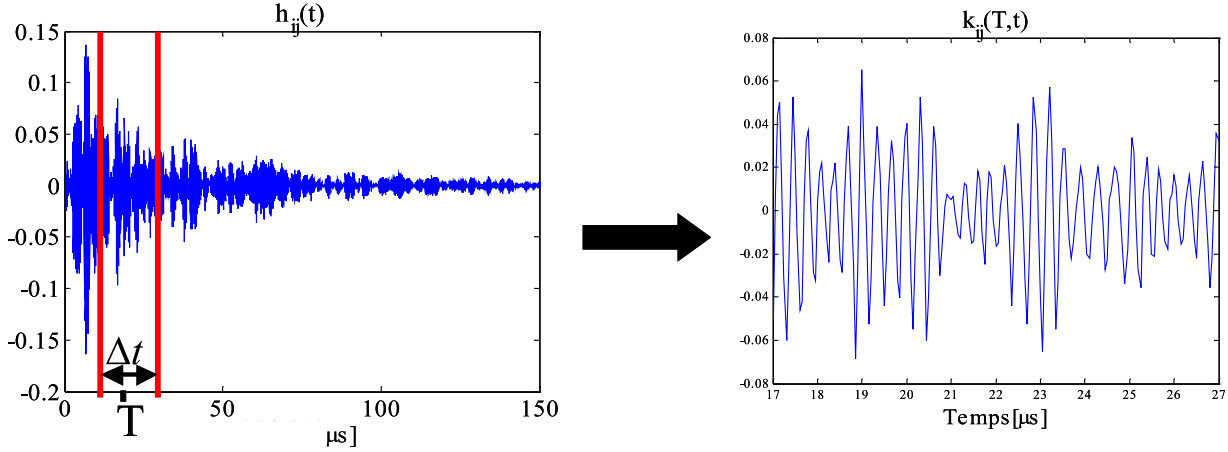


FIG. II.2: Principe du découpage en fenêtres de temps succesives de  $h_{ij}(t)$

La valeur de  $\Delta t$  est choisie telle que les signaux associés à un même chemin diffusant au sein du milieu (par exemple les chemins  $m$  et  $m'$  de la figure II.1) apparaissent dans la même fenêtre temporelle. Le calcul détaillé de  $\Delta t$  est donné en Annexe II.A.1. Dans nos expériences, nous avons typiquement  $\Delta t \sim 30$  périodes du signal émis. A chaque temps  $T$ , les  $k_{ij}$  forment une matrice  $\mathbf{K}$ . Le passage dans le domaine de Fourier est assuré par une transformée de Fourier discrète (DFT). On obtient alors une série de matrices  $\mathbf{K}(T, f)$ , chacune associée à un temps de vol  $T$  et une fréquence  $f$ . La décomposition en valeurs singulières (SVD) des matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  est ensuite réalisée numériquement :

$$\mathbf{K}(T, f) = \mathbf{U}(T, f)\mathbf{\Lambda}(T, f)\mathbf{V}(T, f)^\dagger \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières positives et réelles  $\lambda_i$  rangées en ordre décroissant ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ ).  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices unitaires dont les colonnes  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$  correspondent aux vecteurs singuliers normés.  $N$  valeurs singulières  $\lambda_i$  sont ainsi obtenues à chaque temps  $T$  et fréquence  $f$ .

L'étape suivante consiste à étudier la distribution des valeurs singulières. On peut d'ores et déjà noter que nous n'avons accès qu'à une seule réalisation du désordre : le milieu diffusant est fixé, il ne peut donc pas y avoir *a priori* de moyenne d'ensemble. En pratique, cette dernière sera approchée en moyennant sur la fréquence et le temps. Les différents théorèmes établis dans le cadre de la RMT sont fondés sur l'hypothèse suivante : les coefficients de la matrice aléatoire doivent être à moyenne nulle et de variance  $1/N$  [76]. La première condition est facilement réalisée, si on suppose que les  $k_{ij}(T, f)$  sont la somme d'ondes partielles à phase aléatoire uniformément distribuée entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . Afin de réaliser la seconde condition et ainsi pouvoir comparer les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques, nous sommes amenés à renormaliser la matrice  $\mathbf{K}$  en une matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Cette matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  présentent les mêmes espaces

propres que la matrice  $\mathbf{K}$ , mais ses valeurs singulières  $\tilde{\lambda}_i$  sont normalisées, de telle sorte que :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \lambda_p^2}} \quad (\text{II.2})$$

Une fois cette renormalisation effectuée, on peut enfin étudier la distribution expérimentale des valeurs singulières. On construit pour cela l'histogramme  $\mathcal{H}(\lambda)$  de l'ensemble des valeurs singulières  $\tilde{\lambda}_i(T, f)$ , prises à chaque rang  $i$ , temps  $T$  et fréquence  $f$ . Les classes de l'histogramme sont les intervalles  $[mw; (m+1)w]$ , où  $w$  correspond à la largeur de chaque classe et  $m$  est un entier naturel.  $\mathcal{H}(\lambda)$  représente le nombre de valeurs singulières  $\tilde{\lambda}_i(T, f)$  contenues dans la même classe que  $\lambda$ . Un estimateur  $\hat{\rho}(\lambda)$  de la densité de probabilité des valeurs singulières  $\rho(\lambda)$  est ensuite obtenu en normalisant  $\mathcal{H}(\lambda)$  :

$$\hat{\rho}(\lambda) = \frac{\mathcal{H}(\lambda)}{nw} \quad (\text{II.3})$$

où  $n$  est le nombre total de valeurs singulières ( $n = N \times n_T \times n_f$ , où  $n_T$  est le nombre de fenêtres de temps considérées et  $n_f$  le nombre de fréquences sur laquelle la transformée de Fourier discrète des  $k_{ij}$  a été effectuée). Aux temps courts ( $cT \sim l_e$ ) la diffusion multiple peut être négligée, tandis qu'aux temps longs, elle domine. Dans la suite de ce chapitre, la distribution théorique des valeurs singulières va être comparée à l'estimateur expérimental  $\hat{\rho}(\lambda)$ , dans les régimes de diffusion simple et de diffusion multiple.

## II.4 Régime de diffusion multiple

### II.4.1 Configuration expérimentale

On souhaite étudier le comportement statistique des valeurs singulières en régime de diffusion multiple. Pour cela, nous avons donc choisi un milieu aléatoire hautement diffusant : un échantillon de tiges en acier parallèles ( $c_L = 5,7 \text{ mm}/\mu\text{s}$ ,  $c_T = 3 \text{ mm}/\mu\text{s}$ , rayon 0,4 mm, densité 7,85 kg/L) aléatoirement distribuées avec une concentration  $n = 12 \text{ tiges}/\text{cm}^2$  (voir Fig.I.13). Le libre parcours moyen élastique moyenné sur la bande de fréquence  $[2,5 ; 3,5] \text{ MHz}$  est de  $7,7 \pm 0,3 \text{ mm}$  [47]. La distance  $a$  entre le réseau et l'échantillon diffuseur est de 25 mm. Son épaisseur  $L$  est de 40 mm. Même dans un milieu hautement diffusant, la contribution de diffusion simple existe aux temps courts. Nous considérons donc des temps de vol  $T$  supérieurs à  $70 \mu\text{s}$ , ce qui, compte tenu de la distance  $a$ , correspond à des chemins de diffusion de longueur supérieure à sept libres parcours moyens. Dans ces conditions, la diffusion simple peut être négligée et  $\mathbf{K}$  ne contient que des signaux multiples diffusés. La procédure expérimentale décrite au paragraphe II.3 est effectuée et un ensemble de matrices renormalisées  $\tilde{\mathbf{K}}(T, f)$  est obtenu. La durée  $\Delta t$  des fenêtres de temps considérées pour tronquer  $h_{ij}(t)$  est déterminée en Annexe II.A.1 :  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ .

## II.4.2 Distribution expérimentale des valeurs singulières

Un exemple typique de matrice  $\mathbf{K}(T, f)$  mesurée expérimentalement est présenté sur la figure suivante :

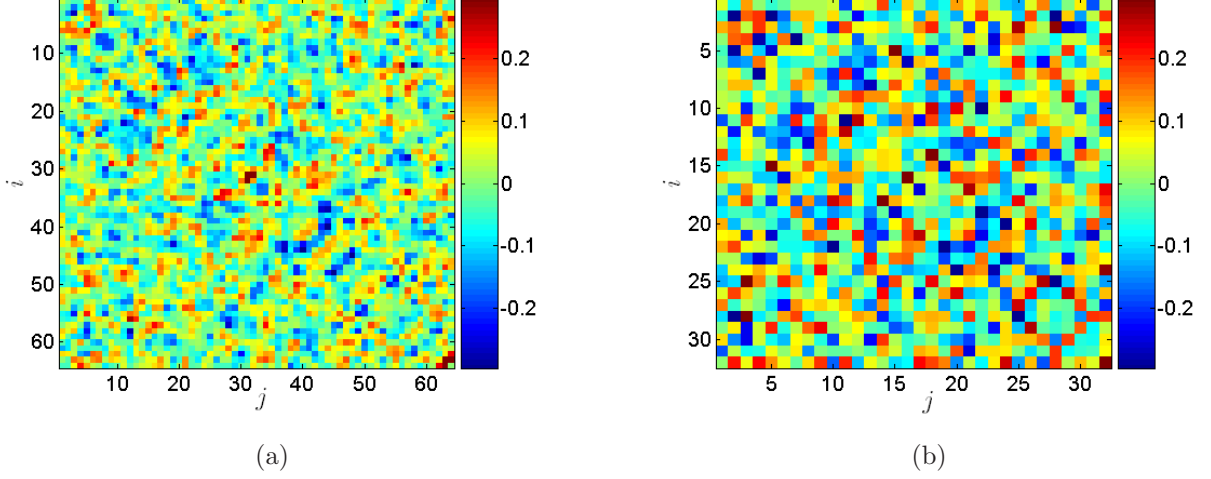


FIG. II.3: Mesure expérimentale de la matrice  $\mathbf{K}(T, f)$  dans le régime de diffusion multiple.

- (a) Partie réelle de  $\mathbf{K}(T, f)$  obtenue au temps  $T=120 \mu s$  et à la fréquence  $f=3,1$  MHz.  
 (b) La même matrice que pour (a) mais en ne considérant qu'une voie sur deux (matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_t$ ).

Une fois la décomposition en valeurs singulières de l'ensemble des matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  effectuée (Eq.II.1), leurs valeurs singulières  $\lambda_i(T, f)$  sont normalisées selon Eq.II.2. On construit ensuite l'histogramme  $\mathcal{H}(\lambda)$  des valeurs singulières normalisées  $\tilde{\lambda}_i$  et on en déduit l'estimateur  $\hat{\rho}(\lambda)$  de la distribution des valeurs singulières (Eq.II.3). Selon la RMT, si les coefficients  $\tilde{k}_{ij}$  de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}(T, f)$  sont des variables complexes, gaussiennes, à symétrie circulaire, indépendamment et identiquement distribuées (*i.i.d*), à moyenne nulle et de variance  $1/N$ , alors la densité de probabilité asymptotique (*i.e* pour  $N \rightarrow \infty$ ) des valeurs singulières  $\tilde{\lambda}_i$  est donnée par la *loi du quart de cercle* [83] :

$$\rho_{QC}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} & \text{pour } 0 < \lambda < 2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Comme on peut le voir sur la figure II.4, la distribution expérimentale des valeurs singulières est très loin de vérifier la loi prédite par la RMT. La raison majeure de ce désaccord est que les coefficients  $\tilde{k}_{ij}$  sont loin d'être indépendants. De fortes corrélations existent en fait entre voies voisines (voir Fig.II.3(a)). Celles-ci peuvent être mesurées par le coefficient de corrélation  $\Gamma_m$ , défini par :

$$\Gamma_m = \frac{\left\langle \tilde{k}_{i,j} \tilde{k}_{i,j+m}^* \right\rangle_{T,f,(i,j)}}{\left\langle |\tilde{k}_{i,j}|^2 \right\rangle_{T,f,(i,j)}} = \frac{\left\langle \tilde{k}_{i,j} \tilde{k}_{i+m,j}^* \right\rangle_{T,f,(i,j)}}{\left\langle |\tilde{k}_{i,j}|^2 \right\rangle_{T,f,(i,j)}} \quad (\text{II.5})$$

Le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne sur les variables placées en indice, c'est-à-dire ici le temps  $T$ , la fréquence  $f$  et les couples source/récepteur  $(i, j)$ . L'entier  $m$  représente la distance

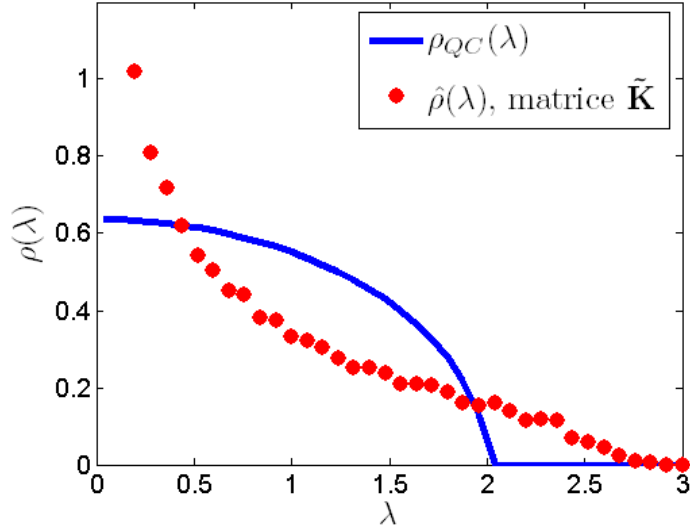


FIG. II.4: Distribution expérimentale des valeurs singulières obtenue dans le cas de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  et comparaison avec la loi du quart de cercle (Eq.II.4).

entre les sources ou récepteurs. La figure II.5 met en évidence une corrélation importante entre voies voisines, avec un coefficient  $|\Gamma_1| = |\Gamma_{-1}| \simeq 0.5$ . L'origine physique de ces corrélations sera détaillée au §II.4.4. Nous montrerons également comment inclure de telles corrélations dans le modèle théorique.

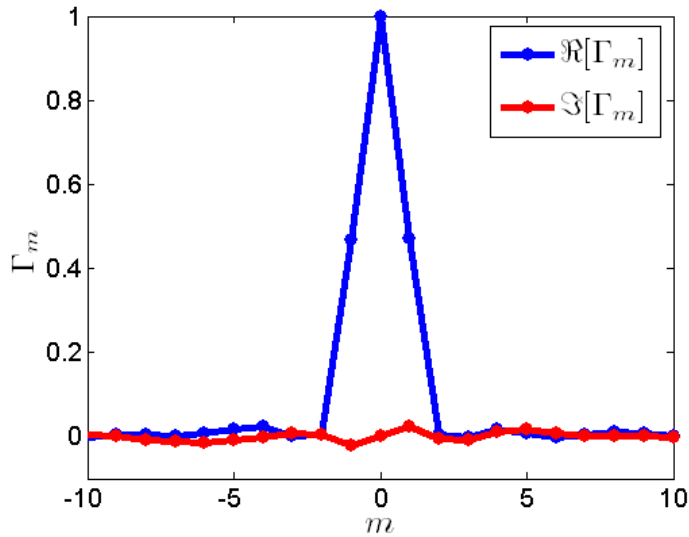


FIG. II.5: Parties réelle et imaginaire du coefficient de corrélation  $\Gamma_m$  (Eq.II.5) en fonction de l'entier  $m$ .

Dans ce cas particulier de corrélations courte portée, celles-ci peuvent être supprimées en ne considérant qu'une voie sur deux comme le montre la figure II.3(b). A partir de la matrice  $\mathbf{K}$  initiale de dimension  $N \times N$ , une matrice *tronquée*  $\mathbf{K}_t$  de dimension  $N/2 \times N/2$  est construite, en ne conservant que les éléments de rang pair (ou impair). Après renormalisation, on obtient une matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_t$  qui ne présente plus de corrélations courte-portée à l'émission et à la réception.

La distribution expérimentale des valeurs singulières est désormais beaucoup plus proche de la loi du quart de cercle (Eq.II.4) prédite par la RMT (voir Fig.II.6).

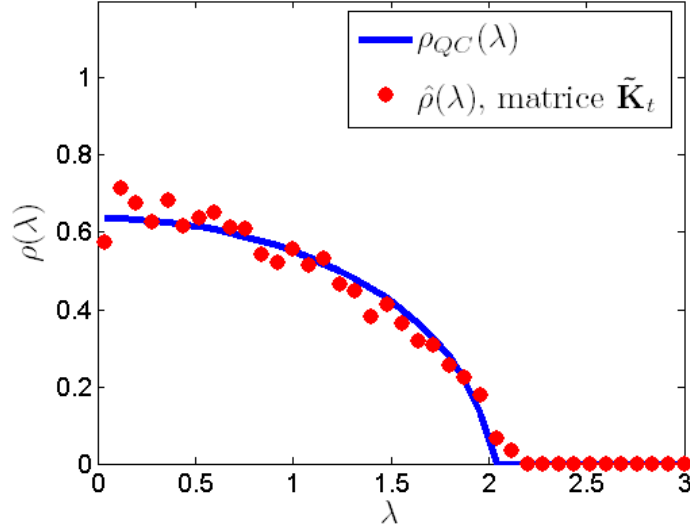


FIG. II.6: Distribution expérimentale des valeurs singulières obtenue dans le cas de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_t$

Néanmoins, un léger désaccord persiste entre les courbes théorique et expérimentale, spécialement au voisinage des valeurs extrêmes  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 2$ . Dans le paragraphe suivant, nous montrons que, dans le régime de diffusion multiple, la variance des coefficients  $k_{ij}$  n'est pas la même pour tous les couples  $(i, j)$ , contrairement à l'hypothèse de coefficients  $\tilde{k}_{ij}$  identiquement distribués. Nous discuterons des conséquences de cette déviation par rapport aux hypothèses classiques de la RMT.

### II.4.3 Variance des coefficients de la matrice $\mathbf{K}$

Dans ce paragraphe, nous exposons les différentes origines physiques responsables de l'hétérogénéité de la variance des  $\tilde{k}_{ij}$ . Pour cela, nous exprimons théoriquement ces coefficients en régime de diffusion multiple. Nous montrons ensuite que l'effet de rétrodiffusion cohérente et la croissance progressive du halo diffusif sont responsables de la distribution hétérogène des  $\tilde{k}_{ij}$ . Enfin, nous verrons comment ces effets peuvent être compensés afin d'obtenir des coefficients identiquement distribués, comme le requiert la RMT.

#### Expression des coefficients $\tilde{k}_{ij}$ en régime de diffusion multiple

Les signaux  $k_{ij}(T, f)$  au temps  $T$  et à la fréquence  $f$  correspondent à la somme d'ondes partielles qui atteignent la barrette dans la fenêtre temporelle  $[T - \Delta t/2; T + \Delta t/2]$ . Elles sont associées à des chemins de diffusion multiple dont les longueurs appartiennent à l'intervalle  $[R - \Delta r/2; R + \Delta r/2]$ , où  $R = cT/2$  et  $\Delta r = c\Delta t/2$  ( $c$  est la vitesse du son dans l'eau). Des exemples de chemins de diffusion multiple sont donnés sur la figure Fig.II.1. La réponse

$k_{ij}(T, f)$  peut être décomposée sous la forme d'une somme d'ondes partielles associées aux  $N_p$  chemins possibles. Dans une configuration 2D, sous l'approximation paraxiale et en supposant les transducteurs ponctuels,  $k_{ij}(T, f)$  peut s'écrire :

$$k_{ij}(T, f) \propto \sum_{p=1}^{N_p} B_p \frac{\exp \left[ jk \left( Z_p^{(1)} + Z_p^{(2)} \right) \right]}{\sqrt{Z_p^{(1)} Z_p^{(2)}}} \exp \left[ jk \frac{\left( x_i - X_p^{(1)} \right)^2}{2Z_p^{(1)}} \right] \exp \left[ jk \frac{\left( x_j - X_p^{(2)} \right)^2}{2Z_p^{(2)}} \right] \quad (\text{II.6})$$

où  $k = 2\pi f/c$  est le nombre d'onde. L'indice  $p$  représente le  $p^{\text{ème}}$  chemin qui contribue au signal reçu au temps  $T$ .  $(X_p^{(1)}, Z_p^{(1)})$  et  $(X_p^{(2)}, Z_p^{(2)})$  sont respectivement les coordonnées des premier et dernier diffuseurs le long d'un chemin  $p$ .  $B_p$  est l'amplitude complexe associée au chemin  $p$ , du premier évènement de diffusion en  $(X_p^{(1)}, Z_p^{(1)})$  jusqu'au dernier évènement de diffusion en  $(X_p^{(2)}, Z_p^{(2)})$ . Compte tenu du grand nombre de chemins, on s'attend, d'après le théorème de la limite centrale, à ce que les coefficients  $k_{ij}$  soient des variables aléatoires complexes gaussiennes.

La renormalisation selon Eq.II.2 conduit à une série de matrices  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Si les  $k_{ij}$  étaient identiquement distribués, les coefficients renormalisés  $\tilde{k}_{ij}$  seraient des variables aléatoires complexes distribuées selon une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_{ij}^2)$  avec une variance  $\sigma_{ij}^2 = 1/N$ . La figure II.7 présente l'histogramme des éléments  $\tilde{k}_{ij}(T, f)$  construit en considérant tous les couples  $(i, j)$ , temps  $T$  et fréquences  $f$  : un excellent accord est obtenu avec la loi normale  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$ .

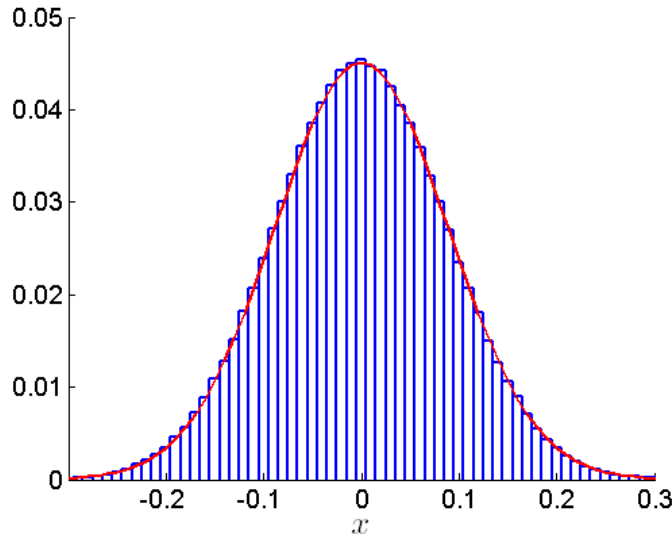


FIG. II.7: Histogramme de la partie réelle des éléments  $\tilde{k}_{ij}(T, f)$  comparé à la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2N})$ . L'histogramme des  $\tilde{k}_{ij}$  a été obtenu en considérant tous les couples  $(i, j)$ , temps  $T$  et fréquences  $f$ .

Cependant, cet accord n'est que de façade car nous avons construit l'histogramme sur l'ensemble des couples  $(i, j)$ . En fait, si on l'avait construit pour un couple source/récepteur  $(i, j)$  particulier, la distribution expérimentale de  $\tilde{k}_{ij}$  tendrait toujours vers une loi normale, mais avec une variance  $\sigma_{ij}^2$  différente de  $\frac{1}{N}$ . Cette dernière affirmation est illustrée sur la figure II.8.

L'intensité  $\left\langle \left| \tilde{k}_{ij} \right|^2 \right\rangle_{T,f}$  moyennée sur le temps  $T$  et la fréquence  $f$  est représentée pour chaque

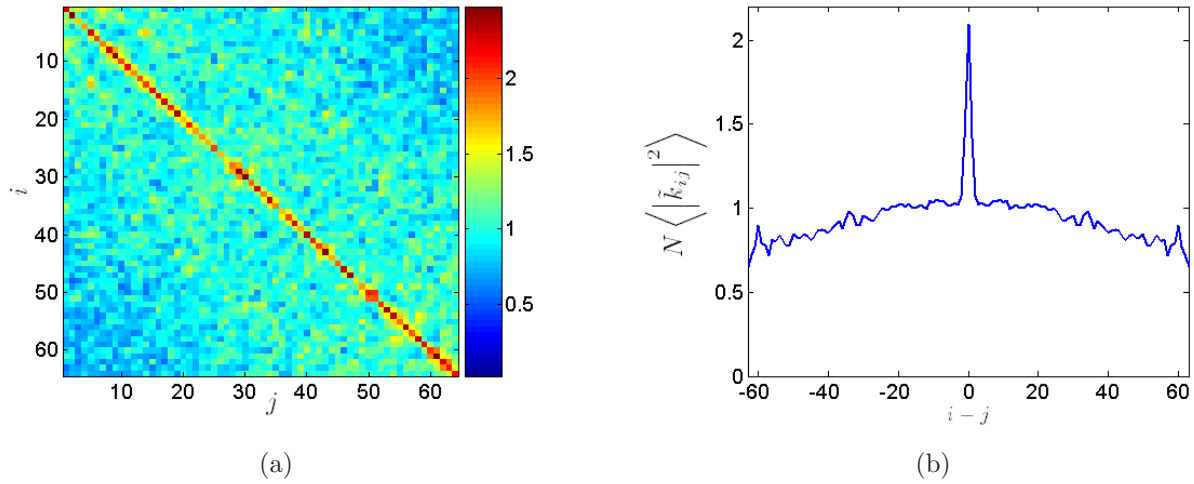


FIG. II.8: (a) Intensité moyenne des coefficients  $\tilde{k}_{ij}$ , normalisés par  $\frac{1}{N}$ . La moyenne est réalisée sur le temps  $T$  et la fréquence  $f$ . (b)  $N \langle |\tilde{k}_{ij}|^2 \rangle_{T,f}$  représentée en fonction de  $i - j$

couple source/récepteur  $(i, j)$  (Fig.II.8(a)).  $\langle |\tilde{k}_{ij}|^2 \rangle_{T,f}$  constitue un estimateur de la variance  $\sigma_{ij}^2$ . D'une part, les éléments diagonaux  $\tilde{k}_{ii}$  présentent une variance double comparé aux éléments non-diagonaux. D'autre part, la variance des éléments hors-diagonale décroît avec la distance  $|i - j|$  entre source et récepteur. A partir de ces résultats, on peut modéliser empiriquement la variance des coefficients de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  de la manière suivante :

$$N\sigma_{ij}^2 = N \langle |\tilde{k}_{ij}|^2 \rangle \simeq \delta_{ij} + g(|i - j|) \quad (\text{II.7})$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker et  $g$  une fonction décroissante tel que  $g(0) = 1$ .

### Influence de l'effet de rétrodiffusion cohérente

La variance double des éléments diagonaux comparé aux éléments hors-diagonale résulte de l'effet de rétrodiffusion cohérente [2, 3, 4, 5, 6]. Ce phénomène a été expliqué en détail au chapitre I. Rappelons juste qu'il n'apparaît qu'en régime de diffusion multiple et seulement si la réciprocité spatiale est bien respectée. Si source et récepteur sont identiques ( $i = j$ ), chaque chemin  $p$  dont les premier et dernier diffuseurs rencontrés sont de coordonnées  $(X_p^{(1)}, Z_p^{(1)})$  et  $(X_p^{(2)}, Z_p^{(2)})$ , interfèrent constructivement avec le chemin réciproque de  $p$  dont les premier et dernier diffuseurs sont situés en  $(X_p^{(2)}, Z_p^{(2)})$  et  $(X_p^{(1)}, Z_p^{(1)})$  (voir Eq.II.6). Les éléments diagonaux  $\tilde{k}_{ii}$  ont ainsi une variance deux fois plus grande que celle des éléments hors-diagonale. Cet effet pourrait également affecter les coefficients proches de la diagonale. La largeur typique du cône de rétrodiffusion cohérente est de l'ordre de  $\frac{a}{k\sqrt{D(T-2a/c)}}$  (Eq.I.58), qui doit être comparée à l'espace inter-éléments  $p$  de la barrette. Dans notre configuration expérimentale, on a  $T > 70 \mu s$ ,  $D \simeq 4 \text{ mm}^2/\mu s$  [51],  $a = 25 \text{ mm}$  d'où  $\frac{a}{k\sqrt{D(T-2a/c)}} < 0,16 \text{ mm}$ , alors que l'espace inter-éléments est de  $0,417 \text{ mm}$ . Par conséquent, l'élévation d'intensité due à la rétrodiffusion



cohérente est strictement limitée aux éléments diagonaux. Finalement, après renormalisation (Eq.II.2), la prise en compte du phénomène de rétrodiffusion cohérente revient à écrire la variance de  $\tilde{k}_{ij}$  comme  $\sigma_{ij}^2 = \frac{1+\delta_{ij}}{N+1}$  (voir Annexe II.A.2, Eq.II.32).

On peut se demander si cette variance double des éléments diagonaux peut avoir une quelconque influence sur la distribution des valeurs singulières. En fait, nous montrons en Annexe II.A.2 que, si la dimension  $N$  de la matrice  $\mathbf{K}$  est suffisamment grande, l'influence du pic de rétrodiffusion cohérente peut être négligée, à condition bien sûr que la matrice ait été au préalable renormalisée (Eq.II.2). On le prouvera par ailleurs lorsque l'on compensera artificiellement l'hétérogénéité de la variance des  $\tilde{k}_{ij}$  (voir Chap.II.4.3) : aucun changement significatif au niveau de la distribution des valeurs singulières ne sera observé.

### Croissance non-instantanée du halo diffusif

La variance double le long de la diagonale de  $\tilde{\mathbf{K}}$  n'est pas la seule déviation par rapport à l'hypothèse de distribution identique des  $\tilde{k}_{ij}$ . En effet, si on s'intéresse à l'évolution de  $\sigma_{ij}^2$  en fonction de  $(i - j)$  (voir Fig.II.8(b)), on observe que  $\sigma_{ij}^2$  n'est pas uniforme : il décroît avec la distance  $x = |i - j|p$  entre la source  $i$  et le récepteur  $j$ . Cela est dû à la croissance du halo diffusif (*i.e* intensité incohérente) dans le milieu diffusant, croissance qui n'est pas instantanée mais dépend de la constante de diffusion (voir Chap.I). Dans une configuration champ proche ( $a \ll Np$ ,  $Np$  étant la taille de la barrette),  $\sigma_{ij}^2$  décroît en  $\exp\left(-\frac{x^2}{4DT}\right)$ . Et dès que  $\sqrt{DT}$  devient grand devant la taille de la barrette ( $Np$ ),  $\sigma_{ij}^2$  peut être considéré comme constant. En champ lointain ( $a \gg Np$ ),  $\sigma_{ij}^2$  est toujours constant, tant que  $i \neq j$ . Comme on l'a vu au paragraphe Chap.I.2.6, les expériences ultrasonores correspondent à une configuration intermédiaire entre champ proche et champ lointain. La décroissance de  $\sigma_{ij}^2$  avec  $|i - j|$  est visible (en particulier aux temps courts), et cela pourrait être à l'origine du léger désaccord observé entre la distribution expérimentale des valeurs singulières et la loi du quart de cercle prédite par la RMT (Fig.II.6). Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment les fluctuations de  $\sigma_{ij}^2$  peuvent être compensées afin de mieux respecter l'hypothèse de distribution identique des  $\tilde{k}_{ij}$ .

### Imposer une distribution identique des coefficients de la matrice $\mathbf{K}$

Une solution pour s'affranchir des variations de  $\sigma_{ij}^2$  est tout simplement de les estimer, puis de les compenser.  $\sigma_{ij}^2$  ne dépend que du temps  $T$  et de la distance  $|i - j|$  entre la source  $i$  et le récepteur  $j$  (Eq.II.7). Par conséquent, nous pouvons estimer  $\sigma_{ij}^2$  en moyennant  $\left|\tilde{k}_{ij}(T, f)\right|^2$  sur la fréquence  $f$  et sur les éléments  $(i, j)$  séparés de la même distance  $m = |i - j|$  :

$$\widehat{\sigma}^2(T, i - j) = \left\langle \left| \tilde{k}_{ij}(T, f) \right|^2 \right\rangle_{f, \{(i, j) \mid m = |i - j|\}} \quad (\text{II.8})$$

où  $\widehat{\sigma}^2(T, m)$  est l'estimateur de  $\sigma_{ij}^2$ . L'étape suivante consiste à normaliser une nouvelle fois les  $\tilde{k}_{ij}$  à chaque temps  $T$  :

$$\tilde{k}_{ij}^C(T, f) = \frac{\tilde{k}_{ij}(T, f)}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(T, |i-j|)}} \quad (\text{II.9})$$

Un ensemble de matrices  $\tilde{\mathbf{K}}^C(T, f)$  est ainsi construit à partir des matrices  $\tilde{\mathbf{K}}(T, f)$ . On peut montrer que les coefficients  $\tilde{k}_{ij}^C(T, f)$  vérifient bien l'hypothèse de distribution identique : la variance des  $\tilde{k}_{ij}^C$  est égale à  $1/N$  quel que soit le couple  $(i, j)$  considéré. Une fois cette opération effectuée, une nouvelle distribution de valeurs singulières est obtenue et tracée sur la figure Fig.II.9(b).

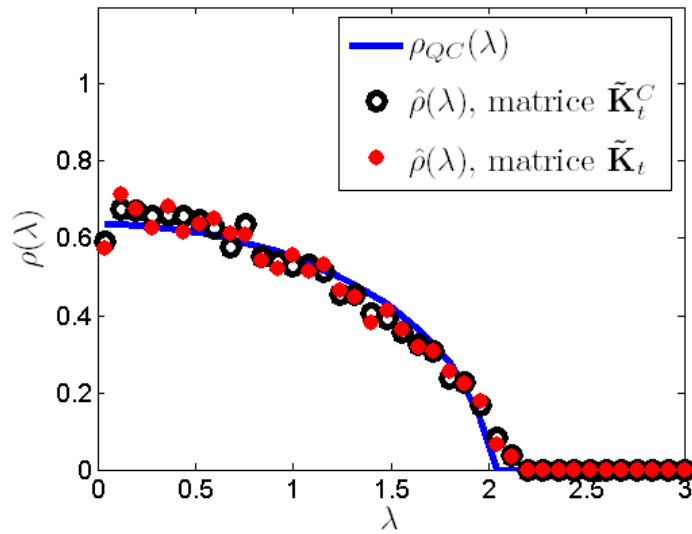


FIG. II.9: Distributions de valeurs singulières obtenues à partir des matrices  $\tilde{\mathbf{K}}_t$  et  $\tilde{\mathbf{K}}_t^C$  comparées à la loi du quart de cercle (Eq.II.4)

Les deux séries de matrices  $\tilde{\mathbf{K}}_t$  et  $\tilde{\mathbf{K}}_t^C$  conduisent à des spectres de valeurs singulières similaires. Cela signifie que les variations de  $\sigma_{ij}^2$  ne sont pas assez importantes pour pouvoir influencer significativement la distribution des valeurs singulières. Néanmoins, dans d'autres configurations expérimentales, ces variations de  $\sigma_{ij}^2$  pourraient avoir une influence plus importante. Ce serait le cas par exemple dans une configuration champ proche pour laquelle la croissance du halo diffusif en fonction du temps est plus marquée. La distribution des valeurs singulières s'en ressentirait, en particulier aux temps courts.

#### II.4.4 Influence des corrélations sur la distribution des valeurs singulières

Comme on l'a mis en évidence au §II.4.2, les corrélations qui peuvent exister entre voies voisines (Fig.II.5) ont une influence importante sur la distribution des valeurs singulières (Fig.II.4). Nous allons donc examiner maintenant les origines et conséquences de ces corrélations. Nous allons montrer que le spectre des valeurs singulières peut également être prédit dans ce cas, en

nous fondant sur les travaux théoriques de Sengupta et Mitra [80]. Les résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions théoriques ainsi qu'aux résultats d'une simulation numérique. Enfin, l'effet de la symétrie de  $\tilde{\mathbf{K}}$  est également abordé. Elle constitue un autre écart par rapport à l'hypothèse d'indépendance des coefficients de la matrice. Son effet sur la distribution des valeurs singulières sera estimé numériquement. On montrera également qu'il décroît avec la dimension  $N$  de la matrice  $\mathbf{K}$ .

### Origine des corrélations entre voies voisines

Comme on peut le voir sur la figure II.5, la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}(T, f)$  présente des corrélations importantes entre voies adjacentes. Deux phénomènes sont à l'origine de ces corrélations. Premièrement, il existe un couplage mécanique partiel entre capteurs voisins. Deuxièmement, l'onde enregistrée par le réseau provient de la radiation d'une source incohérente de largeur  $W$  (le halo diffusif dans le milieu diffusant) observée à une distance  $a$ . Le théorème de Van Cittert-Zernike [21, 49, 50] indique que la longueur de cohérence typique de l'onde évolue en  $\lambda a/W$  (autrement dit, l'onde provenant d'une source incohérente de taille  $W$  finie voit sa longueur de cohérence augmenter au cours de sa propagation). Ces deux effets induisent une corrélation courte portée des signaux mesurés par le réseau. Dans notre configuration expérimentale, ces corrélations résiduelles semblent être limitées aux voies voisines aussi bien à l'émission qu'à la réception, comme en témoigne la figure II.5.

### Prédiction théorique du spectre singulier en présence de corrélations

Sengupta et Mitra [80] ont étudié théoriquement l'influence des corrélations sur la distribution des valeurs singulières dans le cas de matrices aléatoires de grande dimension. Leur modèle suppose que  $\langle \tilde{k}_{ij} \rangle = 0$ . Il suppose également que la corrélation entre deux coefficients  $\tilde{k}_{il}$  et  $\tilde{k}_{jm}$  s'écrit :

$$\langle \tilde{k}_{il} \tilde{k}_{jm}^* \rangle = N^{-1} c_{ij} d_{lm} \quad (\text{II.10})$$

où le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne d'ensemble.  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont des matrices de taille  $N \times N$ . Nous les appellerons par la suite matrices de *corrélation*. En partant de l'équation II.10, Sengupta et Mitra prédisent la distribution des valeurs singulières en s'appuyant sur une technique diagrammatique et la méthode du point-selle (ou point-col). Seule la connaissance des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  est nécessaire à l'obtention de la distribution des valeurs singulières.

Appliquons maintenant l'approche de Sengupta et Mitra à notre configuration expérimentale. Ici, les coefficients  $c_{ij}$  et  $d_{ij}$  sont égaux du fait de la réciprocité spatiale :  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$ . On peut estimer  $c_{ij}$  par le coefficient de corrélation  $\Gamma_{i-j}$  (Eq.II.4) :

$$\hat{c}_{ij} = \Gamma_{i-j} \quad (\text{II.11})$$

Les coefficients  $\hat{c}_{ij}$  forment une matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  qui constitue un estimateur de la matrice de corrélation  $\mathbf{C}$ .  $\hat{\mathbf{C}}$  est une matrice de Toeplitz : ses coefficients ne dépendent que de  $i - j$ . L'application du modèle de Sengupta et Mitra à notre configuration expérimentale repose sur deux hypothèses :

- La corrélation entre deux signaux reçus (émis) par le même élément  $l$  et émis (reçus) par deux éléments  $i$  et  $j$  ne dépend pas de l'élément  $l$  mais seulement de la distance  $|i - j|$ .
- La corrélation entre deux signaux émis et reçus par deux paires d'éléments  $(i, l)$  et  $(j, m)$  est donnée par le produit des corrélations à l'émission ( $\Gamma_{i-j}$ ) et à la réception ( $\Gamma_{l-m}$ ).

La première hypothèse requiert que le milieu soit statistiquement invariant par translation. La seconde est vérifiée dans notre cas.

Une fois le coefficient de corrélation  $\Gamma_{i-j}$  mesuré expérimentalement (voir Fig.II.5), la matrice de corrélation  $\mathbf{C}$  est estimée par  $\hat{\mathbf{C}}$  (Eq.II.11). Les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{C}}$  sont calculées numériquement et incorporées dans le modèle de Sengupta et Mitra afin d'obtenir une estimation de la distribution des valeurs singulières pour  $\tilde{\mathbf{K}}$ .

### Comparaison entre les spectres singuliers numériques, théoriques et expérimentaux

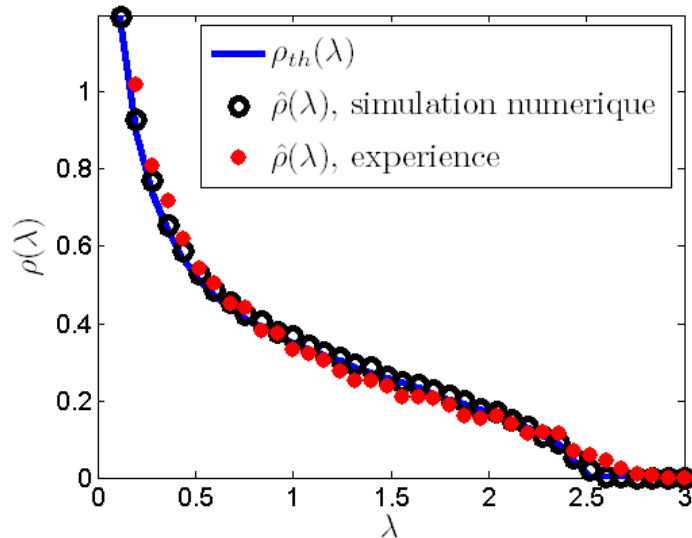


FIG. II.10: Distributions des valeurs singulières théorique [80], numérique et expérimentale dans le cas de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  corrélée

Sur la figure II.10, le résultat théorique obtenu par la méthode de Sengupta et Mitra est comparé à la distribution expérimentale des valeurs singulières, mais également au résultat d'une simulation numérique. Celle-ci consiste à générer numériquement une matrice  $\mathbf{P}$  dont les éléments sont des variables aléatoires complexes à symétrie circulaire et à moyenne nulle. À partir de cette matrice aléatoire, une matrice  $\mathbf{Q}$  aléatoire corrélée est construite ainsi :

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P} \hat{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.12})$$

On peut montrer que la matrice  $\mathbf{Q}$  présente alors les mêmes corrélations à l'émission et à la réception que la matrice  $\mathbf{K}$  mesurée expérimentalement. Un histogramme des valeurs singulières est obtenu en réalisant la SVD de  $\mathbf{Q}$ , en renormalisant ses valeurs singulières selon Eq.II.2 et en moyennant le résultat sur 2000 réalisations. L'accord entre les distributions théorique et numérique est parfait, ce qui illustre la validité de la technique proposée par Segupta et Mitra

[80]. La prise en compte des corrélations améliore significativement l'accord entre théorie et expérience. Un résultat particulièrement intéressant apporté par la théorie est que la distribution des valeurs singulières est toujours à support borné, même en présence de corrélations. Par conséquent, la modélisation théorique des corrélations permet d'établir une valeur maximale  $\tilde{\lambda}_{\max}$  (ici  $\lambda_{\max} \simeq 2.5$ ) qui ne serait jamais dépassée par la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1$ . Notons toutefois qu'il subsiste toujours aux bornes du support une petite différence résiduelle entre les résultats expérimentaux et théoriques (Fig.II.6).

### Effet de la symétrie de $\mathbf{K}$

A cause de la réciprocité spatiale, la matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique. Cette propriété conduit de nouveau à une déviation par rapport à l'hypothèse d'indépendance des coefficients qui est généralement faite dans le cadre de la RMT. Nous considérons ici le cas de la matrice tronquée  $\tilde{\mathbf{K}}_t$ . Cela permet d'étudier l'effet de la symétrie indépendamment des corrélations entre voies voisines traitées ci-dessus. Une simulation numérique est réalisée. Elle consiste à générer une matrice symétrique  $\mathbf{P}$  de dimension  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$  dont les éléments sont des variables aléatoires complexes gaussiennes à symétrie circulaire et de moyenne nulle. Un histogramme des valeurs singulières est obtenu en réalisant la SVD de  $\mathbf{Q}$ , en renormalisant ses valeurs singulières (Eq.II.2) et en moyennant le résultat sur 2000 réalisations. La distribution des valeurs singulières obtenue numériquement ne suit pas exactement la loi du quart de cercle (voir Fig.II.11).

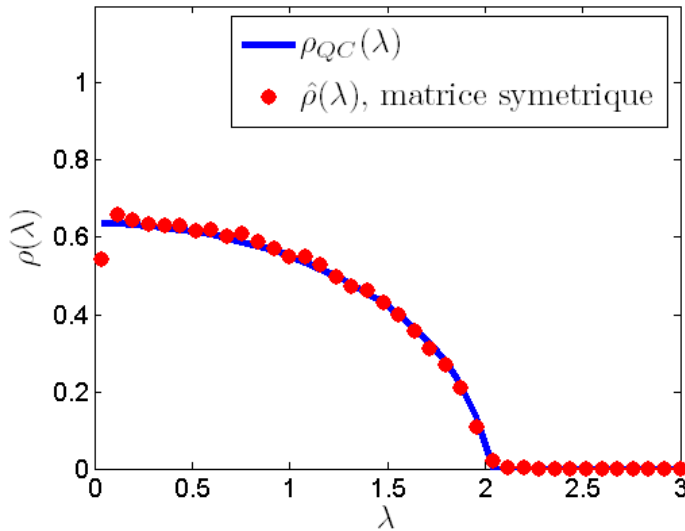


FIG. II.11: Distribution des valeurs singulières obtenue numériquement dans le cas d'une matrice aléatoire symétrique comparée à la loi du quart de cercle (Eq.II.4)

Plus précisément, l'écart apparaît principalement aux limites du support théorique de  $\rho(\lambda)$ , c'est-à-dire au voisinage de  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 2$ . La raison de cet écart est détaillée en Annexe II.A.3. La symétrie de  $\mathbf{K}$  implique en effet des corrélations résiduelles entre les éléments diagonaux de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger$ , corrélations qui n'existent pas quand la matrice aléatoire n'est pas symétrique. Ces corrélations résiduelles sont de l'ordre de  $\frac{1}{N}$ . Dans notre

configuration expérimentale ( $N/2 = 32$ ), elle sont assez faibles mais suffisantes pour induire une légère déviation par rapport à la loi du quart de cercle, notamment au voisinage de  $\lambda = 0$ .

### II.4.5 Conclusion

En l'absence de corrélations spatiales entre les coefficients  $k_{ij}$ , la distribution expérimentale des valeurs singulières est proche de la loi du quart de cercle. Néanmoins, des déviations par rapport aux hypothèses classiques faites dans le cadre de la RMT ont été mises en évidence. Tout d'abord, les éléments de  $\mathbf{K}$  ne sont pas identiquement distribués. Cela est dû à une répartition inhomogène de l'intensité moyenne rétrodiffusée. Cette inhomogénéité provient du phénomène de rétrodiffusion cohérente ainsi que de la décroissance du halo diffusif avec la distance séparant la source et le récepteur. Ces effets peuvent être compensés artificiellement et nous avons montré qu'ils ne pouvaient pas expliquer, dans notre configuration expérimentale, la légère déviation par rapport à la loi du quart de cercle observée expérimentalement. Un autre écart par rapport aux hypothèses générales de la RMT a été mis en évidence numériquement : la symétrie de la matrice  $\mathbf{K}$  induit des corrélations résiduelles entre les coefficients  $k_{ij}$ . Elle explique en grande partie la décroissance de la densité de probabilité des valeurs singulières observée autour de  $\lambda = 0$ . En revanche, ces différents effets ne peuvent pas expliquer complètement la légère déviation du spectre singulier expérimental par rapport à la loi du quart de cercle autour de  $\lambda = 2$ .

En présence de corrélations entre les coefficients de la matrice  $\mathbf{K}$ , nous sommes capables de prédire une nouvelle loi théorique pour la distribution des valeurs singulières, grâce au modèle proposé par Sengupta et Mitra [80]. En conclusion, en régime de diffusion multiple, la matrice de réponse  $\tilde{\mathbf{K}}$  renormalisée tombe dans le cadre général de la RMT et une prédiction théorique de la distribution de ses valeurs singulières peut être réalisée. Comme nous allons le voir au §II.5, ce n'est plus vrai lorsque la diffusion simple prédomine.

Des hypothèses peuvent être avancées pour expliquer la différence résiduelle que nous avons observée entre expérience et théorie. Cela peut provenir d'effets interférentiels, comme la *diffusion récurrente* [8, 86]. Un chemin *récurrent* est un chemin de diffusion multiple pour lequel le premier et le dernier diffuseur rencontrés sont identiques. Ces chemins présentent le même comportement statistique que les signaux simplement diffusés (*i.e* cohérence déterministe le long des antidiagonales), mais leur contribution par rapport aux autres chemins de diffusion multiple est négligeable [8]. Par contre, du fait de l'ouverture finie de la barrette, la cellule de résolution de taille  $W_R \simeq \frac{\lambda a}{Np}$  dans le milieu aléatoire n'est pas infiniment petite : deux ondes issues de deux diffuseurs situés dans la même cellule de résolution apparaissent fortement corrélées au niveau du réseau. Ainsi les chemins dont les premier et dernier événements de diffusion ont lieu dans la même cellule de résolution vont également donner lieu à une corrélation longue portée le long des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ . On peut qualifier ces chemins de *pseudo-récurrents*. Leur contribution est loin d'être négligeable aux temps courts. Ils conduiraient donc à un spectre singulier différent des prédictions théoriques : la distribution des valeurs singulières est intermédiaire entre celle obtenue en régime de diffusion simple et la loi du quart de cercle.

L'autre hypothèse est l'existence de *points* ou *chemins brillants* : pour une réalisation donnée du désordre, des régions peuvent être fortement concentrées en diffuseurs. Cela conduit à des zones où l'énergie accumulée est très importante du fait d'une résonance collective des diffuseurs. Ce phénomène expliquerait pourquoi la première valeur singulière peut dépasser la valeur limite théorique  $\lambda_{\max} = 2$  même aux temps longs. Quelques études théoriques [87, 88] existent sur la statistique des points brillants dans les figures de speckle ; elles pourraient fournir à l'avenir une base théorique pour l'étude de ces phénomènes. Dans tous les cas, le désaccord entre théorie et expérience est minime et délicat à quantifier avec précision. Il est donc difficile à ce stade d'aller au-delà de spéculations pour expliquer l'origine du très léger écart entre le spectre singulier expérimental et les prédictions de la RMT.

## II.5 Régime de diffusion simple

Dans cette partie, nous considérons le cas d'un milieu faiblement diffusant. Expérimentalement, le milieu aléatoire inspecté est une tranche de gel (composition : gélatine 5%, agar 3%), d'épaisseur  $L \simeq 100$  mm et de libre parcours moyen  $l_e \sim 1000$  mm (voir Chap.IV). Dans de telles conditions, la contribution de diffusion multiple est négligeable. La distance  $a$  entre la barrette et la surface du gel est de 60 mm. La procédure expérimentale et le traitement numérique réalisés sont ceux décrits au paragraphe II.4.1. Un exemple typique de matrice  $\mathbf{K}(T, f)$  mesurée expérimentalement est donné sur la figure II.12. Contrairement à ce que l'on obtient en régime de diffusion multiple (voir Fig.II.3), une cohérence particulière le long des antidiagonales de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  apparaît, bien que les diffuseurs soient répartis aléatoirement dans le gel. Nous allons étudier l'origine de ce phénomène, ainsi que son effet sur la distribution des valeurs singulières.

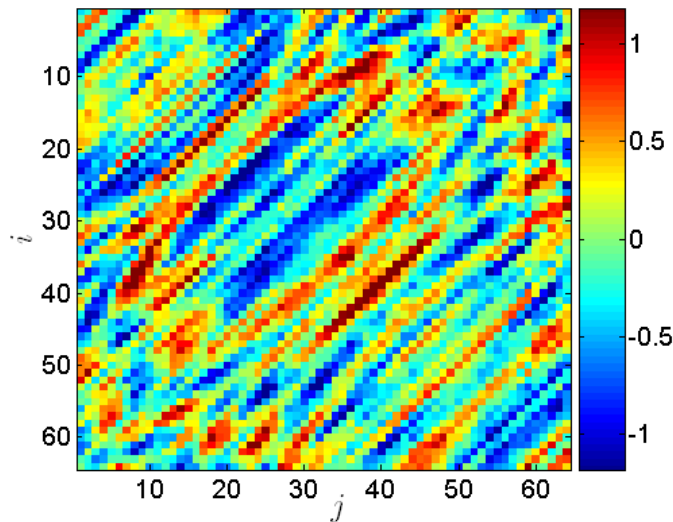


FIG. II.12: Partie réelle de la matrice expérimentale  $\tilde{\mathbf{K}}(T, f)$  obtenue au temps de vol  $T=265$   $\mu\text{s}$  et à la fréquence  $f=3,1$  MHz dans un milieu faiblement diffusant (gel).



### II.5.1 Cohérence déterministe des signaux simplement diffusés

Comme précédemment, les signaux  $k_{ij}(T, f)$  mesurés au temps  $T$  et à la fréquence  $f$  correspondent à la somme d'ondes partielles qui atteignent la barrette dans la fenêtre de temps  $[T - \Delta t/2; T + \Delta t/2]$ , sauf que ce sont maintenant les chemins de diffusion simple qui sont considérés. Le *volume isochrone* est défini comme l'ensemble des points qui contribuent au signal rétrodiffusé à l'instant  $T$ . Il correspond ici à la superposition d'ellipses dont les foyers sont la source  $i$  et le récepteur  $j$ . En champ lointain, on peut assimiler le volume isochrone à une tranche d'épaisseur  $\Delta r = c\Delta t$ , située à une distance  $R = cT$  du réseau et parallèle à celui-ci (voir Fig.II.1). Dans un souci de simplification mais sans perte de généralité, nous allons supposer que les diffuseurs ainsi que les transducteurs sont ponctuels.

Dans une configuration 2D et sous l'approximation paraxiale,  $k_{ij}(T, f)$  peut être exprimé de la manière suivante :

$$k_{ij}(T, f) \propto \frac{\exp(j2kR)}{R} \sum_{d=1}^{N_d} A_d \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_d)^2}{2R} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_d)^2}{2R} \right] \quad (\text{II.13})$$

L'indice  $d$  représente le  $d^{\text{ème}}$  chemin contribuant au signal reçu au temps  $T$ .  $X_d$  est la position transverse du diffuseur associé à ce chemin  $d$  et l'amplitude  $A_d$  dépend de la réflectivité du diffuseur.

Exprimons  $k_{ij}$  en fonction des variables  $(x_i - x_j)$  and  $(x_i + x_j)$ . Du fait de l'approximation paraxiale, une factorisation apparaît :

$$k_{ij}(T, f) \propto \underbrace{\frac{\exp(j2kR)}{R} \exp \left[ jk \frac{(x_i - x_j)^2}{4R} \right]}_{\text{terme déterministe}} \underbrace{\sum_{d=1}^{N_d} A_d \exp \left[ jk \frac{(x_i + x_j - 2X_d)^2}{4R} \right]}_{\text{terme aléatoire}} \quad (\text{II.14})$$

Le terme placé devant la somme dans l'équation II.14 ne dépend pas de la distribution des diffuseurs. Au contraire, le terme de droite dépend, lui, de cette distribution et est donc aléatoire. Pour une distribution de diffuseurs donnée, le terme aléatoire de l'équation II.14 est constant le long de chaque antidiagonale, c'est-à-dire pour les couples source/récepteur  $(i, j)$  tel que  $i + j$  est constant. Quelle que soit la réalisation du désordre, il existe donc une relation de phase déterministe entre les coefficients de  $\mathbf{K}$  situés sur la même antidiagonale :

$$\beta_m = \frac{k_{i-m, j+m}(T, f)}{k_{ii}(T, f)} = \exp \left[ jk \frac{(mp)^2}{R} \right] \quad (\text{II.15})$$

où  $p$  est l'espace inter-éléments. On peut noter que ce résultat essentiel est valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées : la prédominance de la diffusion simple et la validité de l'approximation paraxiale. La dépendance parabolique de la phase le long de chaque antidiagonale prédite par Eq.II.15 est comparée sur la figure Fig.II.13 au coefficient  $\beta_m$  obtenu expérimentalement au temps  $T = 265 \mu s$  et à la fréquence  $f = 3,1 \text{ MHz}$  le long de l'antidiagonale principale (i.e  $i = 32$ ). Le résultat expérimental est en très bon accord avec nos prédictions théoriques. Maintenant que nous avons prouvé la cohérence déterministe des signaux simplement diffusés le long des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ , son influence sur le spectre singulier de  $\mathbf{K}$  peut être examinée.



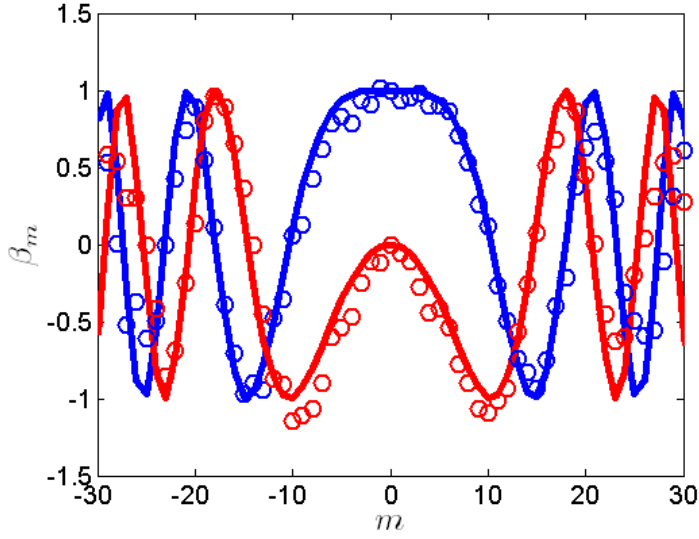


FIG. II.13: Les partie réelle (cercles bleus) et imaginaire (cercles rouges) du coefficient  $\beta_m$ , obtenu expérimentalement au temps  $T=265 \mu s$  et à la fréquence  $f=3,1$  MHz, sont comparées à la prédiction théorique (traits continus, cf Eq.II.15)

## II.5.2 Distribution des valeurs singulières

Afin d'étudier exclusivement l'effet de la cohérence déterministe le long des antidiagonales de  $\mathbf{K}$ , les autres corrélations qui peuvent exister entre les lignes et les colonnes de  $\mathbf{K}$  doivent être supprimées. Ces dernières sont mesurées en estimant le coefficient de corrélation  $\Gamma_m$  (Eq.II.5) et sont présentées sur la figure II.14. Ces corrélations s'étalent jusqu'à  $|m| = 2$  dans notre configuration expérimentale. Par conséquent, les matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  mesurées doivent être tronquées en ne conservant qu'un élément sur trois. Notons que cette opération ne supprime que les corrélations entre lignes et colonnes. Comme la cohérence déterministe le long des antidiagonales est à longue portée, elle n'est pas éliminée par cette opération. Comme précédemment, les matrices tronquées  $\mathbf{K}_t(T, f)$  sont renormalisées selon Eq.II.2. La distribution expérimentale des valeurs singulières obtenue est montrée sur la figure II.15 : clairement, celle-ci ne suit pas la loi du quart de cercle, bien que les corrélations entre éléments adjacents aient été au préalable supprimées. Cela est dû à la cohérence déterministe des signaux simplement diffusés le long des antidiagonales de  $\tilde{\mathbf{K}}_t$ .

A notre connaissance, ce type de matrice aléatoire dont les éléments antidiagonaux sont liés par une relation de phase déterministe n'a pas encore été étudié théoriquement. Toutefois, ses propriétés sont proches de celles d'une matrice de Hankel, dont le comportement spectral a été étudié récemment [84]. Une matrice de Hankel est une matrice carrée de taille  $N \times N$ , dont les éléments appartenant à la même antidiagonale ( $i + j = \text{constante}$ ) sont égaux. Soit  $\{a_p\}$  une suite de  $2N - 1$  variables aléatoires complexes identiquement et indépendamment distribuées. La matrice aléatoire  $\mathbf{R}$ , construite à partir de cette suite de telle sorte que  $r_{ij} = a_{i+j-1}$ , est dite de Hankel. Nous avons vérifié numériquement qu'une matrice aléatoire dont les éléments antidiagonaux sont liés par une relation de phase déterministe présente la même

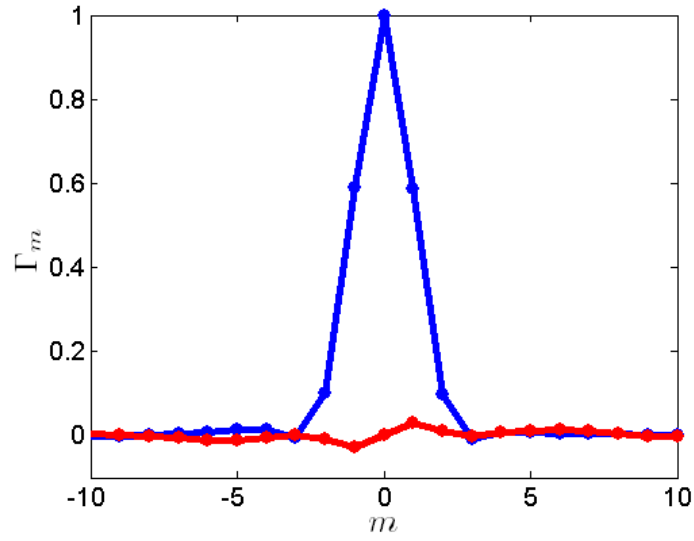


FIG. II.14: Parties réelle (en bleu) et imaginaire (en rouge) du coefficient de corrélation  $\Gamma_m$  (Eq.II.5) en fonction de l'entier  $m$ .

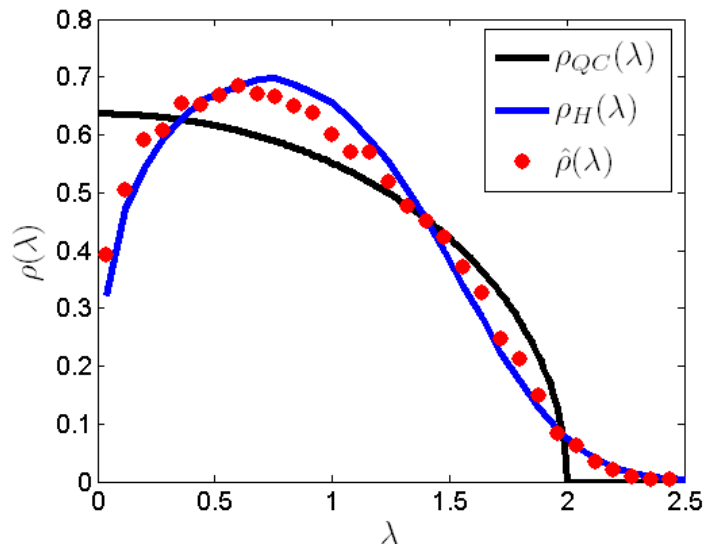


FIG. II.15: Distribution expérimentale des valeurs singulières obtenue en régime de diffusion simple.

distribution de valeurs singulières qu'une matrice de Hankel aléatoire, à condition bien sûr que ses éléments soient à moyenne nulle et aient la même variance. Dans la littérature, Bryc et al. [84] ont prouvé, pour des matrices de Hankel aléatoires normalisées, la convergence presque sûre de la distribution des valeurs propres vers une distribution universelle, déterministe, paire et à support non borné. Puisqu'une matrice de Hankel est symétrique, ses valeurs singulières correspondent aux valeurs absolues de ses valeurs propres. Ainsi, la distribution des valeurs singulières d'une matrice de Hankel aléatoire converge elle aussi vers une distribution  $\rho_H(\lambda)$  universelle, déterministe et à support non borné. Par la suite, la distribution  $\rho_H(\lambda)$  sera appelée *loi de Hankel*. A notre connaissance, une expression analytique de la loi de Hankel n'a jamais été trouvée et seule une simulation numérique peut nous donner accès à une estimation de  $\rho_H(\lambda)$ . Sur la figure II.15, la distribution expérimentale des valeurs singulières de  $\tilde{\mathbf{K}}_t$  est comparée à la loi de Hankel. Celle-ci a été obtenue par génération numérique de matrices de Hankel aléatoires dont on a moyenné l'histogramme des valeurs singulières sur 10000 réalisations. L'accord entre les deux courbes est excellent. Ainsi, en régime de diffusion simple et en l'absence de corrélations entre les lignes et les colonnes de la matrice de réponse, la distribution des valeurs singulières suit la loi de Hankel  $\rho_H(\lambda)$ . Une propriété importante de cette loi est son *support non borné*, contrairement à la loi du quart de cercle. Ainsi, en régime de diffusion simple, la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1$  peut prendre en théorie n'importe quelle valeur positive. Au contraire, en régime de diffusion multiple,  $\tilde{\lambda}_1$  ne pourra jamais dépasser la valeur maximum  $\lambda_{\max} = 2$ , à condition que la loi du quart de cercle soit effectivement respectée. Cette différence de comportement est cruciale lorsqu'on souhaite détecter une cible enfouie dans un milieu diffusant, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

## II.6 Détection de cible

En guise de prélude au chapitre suivant, nous abordons, dans ce paragraphe, le problème de la détection d'une cible enfouie dans un milieu aléatoire à l'aide d'un réseau multi-éléments. L'écho provenant de la cible peut être perturbé par la diffusion (simple et/ou multiple) des nombreux réflecteurs du milieu diffusant, ou par un bruit quelconque. Dans ce genre de situation, on peut se demander dans quelle mesure la RMT peut nous aider à évaluer une probabilité de fausse alarme et définir un seuil de détection fondé sur les valeurs singulières de l'opérateur de propagation  $\mathbf{K}$ . Dans un souci de simplification, nous supposons dans ce paragraphe que la contribution de diffusion multiple donne lieu à une distribution de valeurs singulières suivant la loi du quart de cercle  $\rho_{QC}$ .

Nous allons traiter du cas de la méthode D.O.R.T (Acronyme d'une technique inventée au laboratoire par Claire Prada et Mathias Fink, signifiant *Décomposition de l'Opérateur Retournement Temporel* [68, 69]). Cette méthode repose sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{K}$ . Initialement, elle a été définie comme la diagonalisation de l'opérateur de retournement temporel  $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ , ce qui est équivalent à réaliser la SVD de  $\mathbf{K}$ . La méthode D.O.R.T est particulièrement efficace pour détecter et séparer les réponses de plusieurs diffuseurs dans un milieu homogène ou faiblement hétérogène [68] ainsi que dans les guides d'onde [89, 90, 91].

De nombreuses applications en sont issues, par exemple en contrôle non destructif [92], en acoustique sous-marine [93, 94], en électromagnétisme [95, 96, 97, 98] et en technologie radar appliquée aux milieux forestiers [99, 100, 101]. La méthode D.O.R.T est très puissante car, sous l'approximation de diffusion simple et pour des réflecteurs ponctuels, chaque diffuseur est essentiellement associé à un espace propre, correspondant à une valeur singulière non-nulle de  $\mathbf{K}$ . Cependant, cette association *un diffuseur / un espace propre* n'est valable que pour des milieux *simples* pour lesquels les diffuseurs sont bien séparés, pas trop nombreux, et tant que l'approximation de diffusion simple est respectée [70, 71]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés au cas plus compliqué d'un milieu contenant un grand nombre de diffuseurs aléatoirement distribués et qui peut être éventuellement le siège de diffusion multiple. Gaumond et al. [93] ont étudié numériquement l'influence du bruit sur la méthode D.O.R.T lors d'expériences en mer, mais à notre connaissance, le lien entre la RMT et la méthode D.O.R.T appliquée aux milieux aléatoires n'a jamais été étudiée.

La configuration considérée ici est toujours celle décrite par la figure II.1, sauf que cette fois une cible (*i.e* un réflecteur très échogène) peut être enfouie dans le milieu diffusant. Le problème est le suivant : il s'agit de détecter son éventuelle présence par une simple SVD de la matrice  $\mathbf{K}$ . Si sa première valeur singulière normalisée  $\tilde{\lambda}_1$  est au dessus d'un certain seuil  $\alpha$ , une cible sera détectée, avec une probabilité de fausse alarme dépendant du seuil retenu. Comment établir ce seuil et quelle est la probabilité de fausse alarme associée ? Pour cela, nous allons utiliser les résultats des paragraphes précédents.

Nous supposons ici que les corrélations entre lignes et colonnes adjacentes sont nulles pour ce qui concerne les signaux issus du milieu diffusant. Comme on l'a vu précédemment, ces corrélations peuvent exister mais peuvent toujours être supprimées en tronquant la matrice  $\mathbf{K}$  originale. Supposons l'existence d'une cible à une profondeur  $R$ . La matrice  $\mathbf{K}(T, f)$  au temps d'écho  $T = 2R/c$  peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}(T, f) = \mathbf{K}^T(T, f) + \mathbf{K}^A(T, f) \quad (\text{II.16})$$

$\mathbf{K}^T(T, f)$  correspond à l'écho simplement diffusé par la cible.  $\mathbf{K}^A(T, f)$  correspond à la réponse du milieu aléatoire, qui inclut à la fois de la diffusion simple, de la diffusion multiple et éventuellement du bruit additif. Cette matrice  $\mathbf{K}^A(T, f)$  peut être considérée comme une perturbation (pas forcément faible) de la matrice  $\mathbf{K}^T(T, f)$ . Comme précédemment, la matrice  $\mathbf{K}$  est renormalisée selon l'équation Eq.II.2.

En première approximation, la matrice  $\mathbf{K}^T$  est de rang 1 (en fait, pour une cible résonante ou grande devant la cellule de résolution, il peut exister plusieurs valeurs singulières associées à la cible [102, 103, 104, 105]). La matrice  $\mathbf{K}^A$  est aléatoire, et ses valeurs singulières normalisées  $\tilde{\lambda}_i^A$  ont une densité de probabilité  $\rho(\lambda)$ . Selon les propriétés diffusantes du milieu (en particulier, son libre parcours moyen),  $\rho(\lambda)$  peut suivre au temps  $T = 2R/c$  soit la loi de Hankel (si la diffusion simple prédomine), soit la loi du quart de cercle (si la diffusion multiple ou un bruit blanc additionnel prédomine) ou encore une combinaison des deux si on se place dans une situation intermédiaire. Soit  $\tilde{\lambda}_1^A$  la première valeur singulière renormalisée de  $\mathbf{K}^A(T, f)$ . Il est nécessaire de connaître le comportement statistique de  $\tilde{\lambda}_1^A$  pour définir un seuil de détection fondé sur

la première valeur singulière de  $\mathbf{K}$ . Si les valeurs singulières  $\tilde{\lambda}_i^A$  de  $\mathbf{K}^A$  étaient indépendantes les unes des autres, alors la fonction de répartition  $F_1$  de  $\tilde{\lambda}_1^A$  serait simplement donnée par la puissance  $N$  de la fonction de répartition  $F(\lambda)$  d'une valeur singulière, avec

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda dx \rho(x).$$

En réalité, les valeurs singulières d'une matrice aléatoire ne sont pas indépendantes : il s'agit du phénomène bien connu de *répulsion de niveaux* [72, 106]. Cela implique notamment une probabilité nulle pour la dégénérescence de deux valeurs singulières et celles-ci se *repoussent* donc nécessairement. Par conséquent, la densité de probabilité  $\rho_1(\lambda)$  et la fonction de répartition  $F_1(\lambda)$  de la première valeur singulière ne peuvent pas se déduire trivialement de  $\rho(\lambda)$ .

Une nouvelle fois, nous allons avoir recours à la RMT et plus particulièrement, aux nombreuses études théoriques traitant du comportement statistique de la première valeur propre de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{K}^A \mathbf{K}^{A\dagger}$ , autrement dit  $[\tilde{\lambda}_1^A]^2$ . Dans le cas où  $\mathbf{K}^A$  est une matrice aléatoire dite *classique*,  $[\tilde{\lambda}_1^A]^2$  s'exprime de la manière suivante [107, 108, 109, 81, 110] :

$$[\tilde{\lambda}_1^A]^2 = 4 + \left(\frac{N}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} Z + o\left(N^{-\frac{2}{3}}\right) \quad (\text{II.17})$$

où  $Z$  est une variable aléatoire satisfaisant à une loi de probabilité compliquée, connue sous le nom de distribution de Tracy Widom. Cette loi décrit une courbe en cloche asymétrique, elle est non centrée et à support infini [107, 108]. Aucune expression analytique n'est disponible pour une telle loi, toutefois elle peut être calculée numériquement. Ici, nous nous intéressons plutôt à la densité de probabilité  $\rho_1^{QC}$  de la première valeur singulière  $\lambda_1^A$ . Nous avons pu y accéder numériquement et le résultat obtenu est présenté sur la figure II.16(a) en considérant les dimensions  $N = 32$  et  $N = 100$ . Bien que la loi du quart de cercle  $\rho_{QC}$  soit bornée, la distribution  $\rho_1^{QC}$  de  $\tilde{\lambda}_1^A$  est à support non borné. Cela provient du fait que  $\rho_{QC}$  n'est qu'une loi asymptotique, valable pour  $N \rightarrow \infty$ . Pour une matrice aléatoire de taille finie,  $\tilde{\lambda}_1^A$  a une probabilité non nulle de dépasser  $\lambda_{\max} = 2$ . Cependant, la densité de probabilité  $\rho_1^{QC}(\lambda)$  s'affine avec  $N$  : la variance de  $\tilde{\lambda}_1^A$  diminue quand  $N$  augmente. En outre, sa valeur moyenne est majorée par  $\lambda_{\max} = 2$ , ce qui est dû au caractère borné de la loi du quart de cercle. Nous verrons plus loin que ce n'est plus du tout le cas pour les matrices de Hankel aléatoires.

La quantité pertinente, pour le problème de détection de cible, est la fonction de répartition de la première valeur singulière. Celle-ci correspond à la primitive de  $\rho_1(\lambda)$ . Dans le cas d'une matrice aléatoire dite classique, nous avons

$$F_1^{QC}(\lambda) = P \left\{ \tilde{\lambda}_1^A \leq \lambda \right\} = \int_0^\lambda dx \rho_1^{QC}(x).$$

Les fonctions de répartition  $F_1^{QC}$ , obtenues pour  $N = 32$  et  $N = 100$ , sont tracées sur la figure II.16(b). Nous observons ainsi que pour  $N = 32$  et  $N = 100$ ,  $F_1^{QC}(\lambda = 2) \simeq 0,99$ . Autrement dit, nous pouvons considérer que  $\tilde{\lambda}_1^A$  sera inférieur à la valeur  $\lambda_{\max} = 2$ , avec une probabilité d'erreur de 1% environ. En ce qui concerne la détection de cible, la probabilité de

fausse alarme est directement donnée par  $PFA(\alpha) = 1 - F_1(\alpha)$ . Ainsi, si la première valeur singulière normalisée  $\tilde{\lambda}_1$  de  $\mathbf{K}$  est égale à  $\alpha$ , alors il y a une probabilité  $PFA(\alpha)$  qu'il s'agisse d'une fausse alarme.

Concernant les matrices de Hankel aléatoires, quelques travaux théoriques ont été menés sur le comportement statistique de la première valeur singulière  $\lambda_1^A$ . L'espérance de la première valeur singulière renormalisée évolue en  $\sqrt{\log N}$  [85] : plus la dimension de la matrice est grande, plus la probabilité de fausses alarmes augmente. Cela est illustré sur la figure II.16 : la densité de probabilité  $\rho_1^H$  et la fonction de répartition  $F_1^H$  liées à loi de Hankel  $\rho_H$  ont été calculées numériquement et sont tracées dans les cas  $N = 32$  et  $N = 100$ . On observe que les courbes correspondant à  $N = 100$  sont décalées vers la droite ce qui implique une probabilité de fausse alarme plus importante pour un seuil de détection  $\alpha$  fixé. D'autres études théoriques ont montré que les fluctuations de  $\tilde{\lambda}_1^A$  sont inférieures à  $\sqrt{\log N}$  [111] et que dans le cas gaussien, la variance de  $\tilde{\lambda}_1^A$  reste bornée [112].

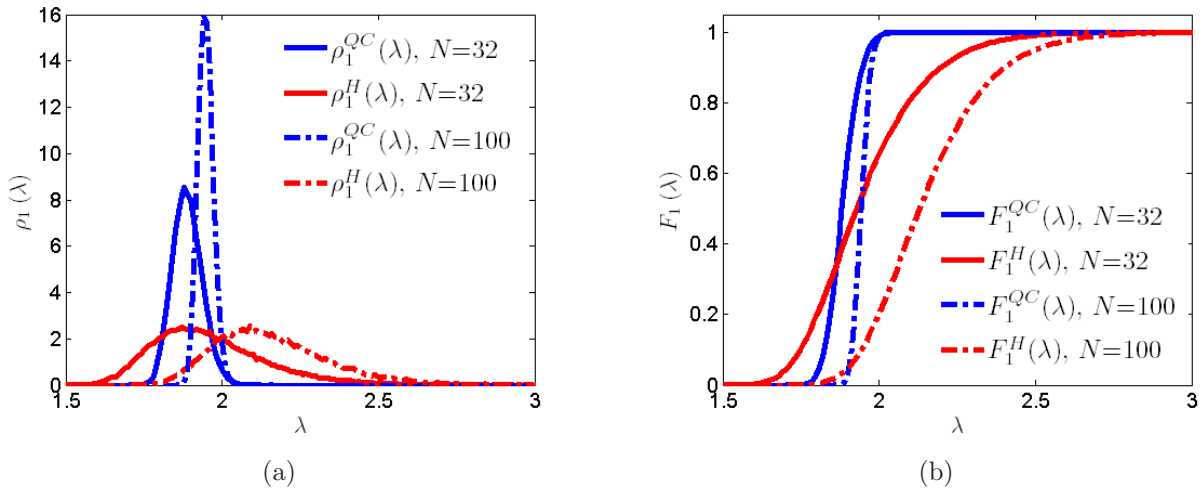


FIG. II.16: (a) Densité de probabilité  $\rho_1$  de la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1^A$  renormalisée. (b) Fonction de répartition  $F_1(\lambda)$  de  $\tilde{\lambda}_1^A$  en considérant  $N = 32$  et  $N = 100$ .

En pratique, diffusion simple et multiple coexistent ; quelle est alors la fonction de répartition  $F_1$  pertinente dans ce cas ? Si la diffusion multiple prédomine (*i.e.*, la profondeur de la cible dans le milieu diffusant est supérieure à quelques libres parcours moyens) ou si la perturbation  $\mathbf{K}^A$  n'est qu'un bruit additionnel non corrélé, alors  $PFA(\alpha) = 1 - F^{QC}(\alpha)$  (Eq.II.4). Si aucune information n'est *a priori* disponible concernant le milieu diffusant, il faut considérer la valeur maximale de la probabilité de fausse alarme qui est donnée par :  $\max [1 - F^{QC}(\alpha) ; 1 - F^H(\alpha)]$ .

En pratique, lorsqu'on souhaitera détecter une cible (*p.ex.* en contrôle non destructif, en acoustique sous-marine ou en détection de mines *etc.*), une probabilité de fausse alarme acceptable  $P_0$  doit être fixée par l'opérateur. On en déduit le seuil de détection suivant :

$$\alpha = F_1^{-1}(1 - P_0) \quad (\text{II.18})$$

Si  $\tilde{\lambda}_1 > \alpha$ , une cible est détectée au temps  $T$  et à la fréquence  $f$ . Inversement, si  $\tilde{\lambda}_1 < \alpha$  on ne peut rien conclure quant à l'éventuelle présence d'une cible. Le critère de détection (Eq.II.18)

peut être utilisé afin de prédire les performances de la méthode D.O.R.T en milieu aléatoire (ou en présence de bruit). Soient  $\sigma_T^2$  et  $\sigma_A^2$  les puissances des signaux associés respectivement à la cible et à la contribution aléatoire. Si la première valeur singulière  $\lambda_1$  de  $\mathbf{K}$  est associée à l'écho de la cible, l'espérance de  $\lambda_1$  est  $\lambda_1^T$ . En Annexe II.A.4, nous montrons que  $\lambda_1^T = N\sigma_T$ , si bien que

$$E\{\lambda_1\} = N\sigma_T.$$

Nous montrons également en Annexe II.A.4 que la moyenne quadratique des valeurs singulières  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{K}$  est

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=1} \lambda_p^2} \simeq \sqrt{N(\sigma_T^2 + \sigma_A^2)}.$$

Après renormalisation des valeurs singulières (Eq.II.2), nous avons donc :

$$E\{\tilde{\lambda}_1\} \simeq \sqrt{N \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_A^2}} \simeq \frac{\sigma_T}{\sigma_A} \sqrt{N}, \text{ pour } \sigma_T^2 \ll \sigma_A^2$$

et  $\text{var}\{\tilde{\lambda}_1\} \simeq \frac{1}{N}$ . Ainsi, même si l'écho de la cible est faible par rapport à la contribution aléatoire ( $\sigma_T^2 \ll \sigma_A^2$ ), la méthode D.O.R.T peut arriver à détecter la cible à condition que

$$\tilde{\lambda}_1 > \alpha \Rightarrow \frac{\sigma_T}{\sigma_A} > \frac{F_1^{-1}(1 - P_0)}{\sqrt{N}}. \quad (\text{II.19})$$

La situation la plus favorable correspond au cas où  $F_1 = F_1^{QC}$ , c'est à dire au régime de diffusion multiple. Dans ce cas,  $\alpha$  peut être fixé à 2, ce qui correspond, comme nous l'avons vu pour  $N = 32$ , à une probabilité de fausse alarme  $P_0 \simeq 1\%$ , et typiquement la cible sera détectée si

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_A} > \frac{2}{\sqrt{N}}. \quad (\text{II.20})$$

Autrement dit, la faible puissance du signal lié à la cible peut être compensée par un nombre plus important d'éléments du réseau : la performance de la méthode D.O.R.T évolue comme la racine carrée du nombre  $N$  de canaux indépendants, en régime de diffusion multiple. En régime de diffusion simple, la valeur moyenne de  $\tilde{\lambda}_1^A$  évolue comme  $\sqrt{\log N}$  [85]. A  $P_0$  fixé, on peut supposer que le seuil  $\alpha$  évolue lui aussi en  $\sqrt{\log N}$ . La performance de la méthode D.O.R.T n'évolue alors plus qu'en  $\sqrt{\frac{N}{\log N}}$ , en régime de diffusion simple.

## II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la distribution des valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{K}$  en milieu aléatoire, dans une configuration de rétrodiffusion. Une fois qu'une renormalisation appropriée est réalisée, la distribution  $\rho(\lambda)$  obtenue expérimentalement est en très bon accord avec les prédictions théoriques de la RMT. Une découverte particulièrement intéressante est la différence de comportement de  $\rho(\lambda)$  en régimes de diffusion simple et multiple. Quand la diffusion multiple prédomine,  $\rho(\lambda)$  suit la fameuse loi du quart de cercle, tant que les corrélations



entre coefficients de la matrice sont négligeables. Les corrélations entre voies voisines peuvent également être prises en compte : dans ce cas,  $\rho(\lambda)$  peut être calculée selon une méthode proposée par Sengupta et Mitra [80]. Au contraire, le comportement de la matrice  $\mathbf{K}$  n'est pas celui d'une matrice aléatoire *classique* en régime de diffusion simple : quelle que soit la réalisation du désordre, une cohérence déterministe persiste le long de chaque antidiagonale de la matrice  $\mathbf{K}$ . Ainsi,  $\rho(\lambda)$  ne suit plus la loi du quart de cercle et le spectre singulier de  $\mathbf{K}$  devient analogue à celui d'une matrice de Hankel. Ces résultats ont été appliqués à la détection d'une cible enfouie dans un milieu diffusant. Une fois la matrice renormalisée, la connaissance de la distribution  $\rho(\lambda)$  permet de définir un critère de détection rigoureux, fondé sur la plus grande valeur singulière, dont on espère qu'elle soit associée à l'écho direct de la cible. Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Par exemple, ces résultats pourraient être appliqués en contrôle non destructif, en imagerie sous marine, en détection de mines *etc.* Les propriétés spectrales de la matrice  $\mathbf{K}$  doivent être également étudiées en transmission, ce qui est de première importance en télécommunications. Ces résultats ouvrent également de nouvelles perspectives en ce qui concerne la séparation de la diffusion simple et de la diffusion multiple. L'idée est en effet de profiter des différences de comportements statistiques des contributions de diffusion simple et de diffusion multiple pour pouvoir les séparer. Ceci fera l'objet des deux prochains chapitres.

## II.A Annexes du chapitre II

### II.A.1

La durée  $\Delta t$  des fenêtres temporelles est choisie de telle sorte que les signaux associés au même chemin de diffusion dans le milieu apparaissent dans la même fenêtre temporelle. Dans un souci de simplification, nous ne traitons ici que le cas des chemins simplement diffusés mais le même résultat serait obtenu en considérant les chemins multidiffusés.

Pour calculer  $\Delta t$ , nous devons trouver les deux chemins de diffusion simple, associés au même évènement de diffusion, pour lesquels la différence de marche est la plus importante. Pour cela, nous devons tenir compte de la directivité des transducteurs. La majeure partie de l'énergie émise est localisée dans un cône d'ouverture  $2\theta_{\max}$ . De même en réception, l'énergie reçue par les transducteurs provient de diffuseurs situés dans ce cône de directivité. Pour ce qui concerne l'élément  $k_{ij}$ , seuls les diffuseurs contenus dans le volume commun aux deux cônes de directivité des éléments  $i$  et  $j$  doivent être considérés.

A chaque profondeur  $Z_s$ , nous devons trouver la position transverse  $X_s$  du diffuseur qui maximise la différence de marche entre deux chemins simplement diffusés. Ces chemins sont associés à deux couples source/récepteur  $(i, j)$  et  $(l, m)$ . Nous devons donc optimiser simultanément la position transverse  $X_s$  ainsi que les couples  $(i, j)$  et  $(l, m)$ . Ce problème peut se simplifier car nous avons affaire à des chemins de diffusion simple. Il y a en effet équivalence des trajets aller (de la barrette jusqu'au diffuseur) et retour (du même diffuseur jusqu'à la barrette), en régime de diffusion simple. Les paires d'éléments  $(i, j)$  et  $(l, m)$  correspondent donc à des couples source/récepteur identiques :  $i = j$  et  $l = m$ . Nous devons finalement trouver les



éléments  $i$  et  $l$  qui sont respectivement les éléments le plus éloigné et le plus proche du diffuseur de coordonnées  $(X_s, Z_s)$ ,  $X_s$  restant inconnu.

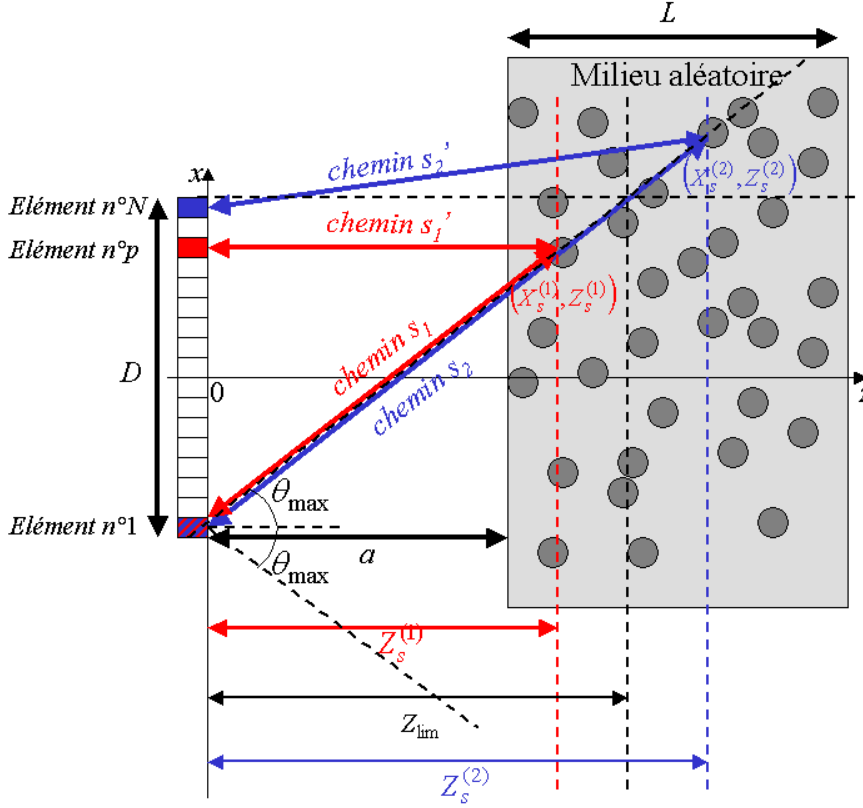


FIG. II.17: Optimisation de la durée  $\Delta t$  des fenêtres temporelles. Les chemins de diffusion simple  $s$  et  $s'$  sont associés au même évènement de diffusion. Deux situations sont à distinguer. Le cas  $z = Z_s^{(1)}$ , où  $Z_s^{(1)} < Z_{\text{lim}}$ , correspond aux flèches rouges. Les deux chemins  $s_1$  et  $s'_1$  sont choisis tels que la différence de marche entre eux soit la plus importante. Dans le cas  $z = Z_s^{(2)}$  (avec  $Z_s^{(2)} > Z_{\text{lim}}$ ), les flèches bleues représentent les deux chemins  $s_2$  et  $s'_2$  pour lesquels la différence de marche est la plus grande.

Le résultat de cette optimisation diffère selon la profondeur  $Z_s$  du diffuseur :

- $Z_s < Z_{\text{lim}} = \frac{D}{2} \cos \theta_{\text{max}}$  : les deux chemins  $s_1$  and  $s'_1$  correspondant à la plus grande différence de marche possible sont représentés par des flèches rouges sur la figure II.17. Le chemin  $s_1$  est le plus long et contribue au signal  $k_{11}$ . Il est lié au diffuseur situé sur la génératrice supérieure du cône de directivité du premier transducteur. Le chemin  $s'_1$  correspond au chemin le plus court. Il est associé au  $p^{\text{ème}}$  élément du réseau et contribue donc au signal  $k_{pp}$ . L'élément  $p$  est à la même position transverse  $X_s$  que le diffuseur. Pour  $Z_s < Z_{\text{lim}}$ ,  $\Delta t$  est donné par

$$\Delta t = \frac{2Z_s}{c} \left[ \frac{1}{\cos \theta_{\text{max}}} - 1 \right] \quad (\text{II.21})$$

- $Z_s > Z_{\text{lim}}$  : Les deux chemins  $s_2$  et  $s'_2$  sont représentés avec des flèches bleues sur la figure II.17. Comme précédemment, le chemin  $s_2$  est le plus long possible et contribue au

signal  $k_{11}$ . Il est toujours lié à un diffuseur situé sur la génératrice supérieure du cône de directivité du premier transducteur. Le chemin  $s'_2$  correspond au chemin le plus court. Il est associé au  $N^{\text{ème}}$  élément de la barrette et contribue donc au signal  $k_{NN}$ . Pour  $Z_s > Z_{\text{lim}}$ ,  $\Delta t$  est donc donné par :

$$\Delta t = \frac{2}{c} \left[ \frac{Z_s}{\cos \theta_{\text{max}}} - \sqrt{(Z_s \tan \theta_{\text{max}} + D)^2 + Z_s^2} \right] \quad (\text{II.22})$$

où  $D$  est l'ouverture de la barrette. Quand  $Z_s \rightarrow \infty$ , Eq.II.22 devient

$$\lim_{Z_s \rightarrow +\infty} \Delta t = \frac{2D \sin \theta_{\text{max}}}{c} \quad (\text{II.23})$$

En pratique, nous devons donc estimer  $\Delta t$  en considérant la profondeur maximum  $Z_{\text{max}} = a+L$ . Pour l'expérience décrite au §II.4,  $Z_{\text{max}} = 65$  mm. Si l'on considère un angle d'ouverture  $\theta_{\text{max}} = 27,5$  deg, on obtient  $\Delta t \simeq 10$   $\mu\text{s}$ . Pour l'expérience décrite au §II.5,  $Z_{\text{max}} = 150$  mm, ce qui nous donne une durée  $\Delta t$  égale à 14  $\mu\text{s}$ . Toutefois, étant donné la largeur finie de l'échantillon de gel (8 cm), de si longues fenêtres temporelles ne sont pas nécessaires et une durée  $\Delta t = 10$   $\mu\text{s}$  est également choisie.

## II.A.2

Comme nous l'avons vu au §II.4.3, l'effet de rétrodiffusion cohérente se manifeste sur les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{K}$  : la variance des coefficients diagonaux est le double de celle des éléments hors-diagonale. Nous voulons estimer l'influence du phénomène de rétrodiffusion cohérente sur le spectre des valeurs singulières. Pour cela, nous allons examiner son effet sur les propriétés statistiques de la matrice d'autocorrélation.

Considérons dans un premier temps une matrice aléatoire  $\mathbf{R}$  de dimension  $N \times N$ . Nous supposons que les coefficients de  $\mathbf{R}$  sont des variables aléatoires complexes gaussiennes *i.i.d.*, à moyenne nulle et de variance  $1/N$ . La distribution théorique des valeurs singulières d'une matrice aléatoire  $\mathbf{R}$  (la loi du quart de cercle, Eq.II.4) est déduite directement du spectre des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$  (loi dite de Marčenko-Pastur [76]), puisque les valeurs singulières de  $\mathbf{R}$  correspondent à la racine carrée des valeurs propres de  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$ . Nous nous intéressons maintenant aux propriétés statistiques de  $\mathbf{A}$ . Les coefficients  $a_{lm}$  de la matrice  $\mathbf{A}$  sont donnés par

$$a_{lm} = \sum_{p=1}^N r_{lp} r_{mp}^* \quad (\text{II.24})$$

Calculons la moyenne et la variance de ces coefficients  $a_{lm}$ .  $\langle a_{lm} \rangle$  est donné par :

$$\langle a_{lm} \rangle = \sum_{p=1}^N \langle r_{lp} r_{mp}^* \rangle$$

$$\langle a_{lm} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq m \\ \sum_{p=1}^N \langle |r_{lp}|^2 \rangle = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La moyenne des coefficients  $a_{lm}$  est non nulle seulement pour les éléments diagonaux :

$$\langle a_{lm} \rangle = \delta_{lm} \quad (\text{II.25})$$

$\langle |a_{lm}|^2 \rangle$  s'exprime ainsi :

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \langle r_{lp} r_{mp}^* r_{lq}^* r_{mq} \rangle$$

En utilisant le théorème des moments,  $\langle |a_{lm}|^2 \rangle$  devient

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = \underbrace{\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \langle r_{lp} r_{mp}^* \rangle \langle r_{lq}^* r_{mq} \rangle}_{\langle |a_{lm}|^2 \rangle} + \underbrace{\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \langle r_{lp} r_{lq}^* \rangle \langle r_{mp}^* r_{mq} \rangle}_{\text{var}[a_{lm}]} \quad (\text{II.26})$$

Pour calculer  $\text{var}[a_{lm}]$ , nous utilisons le fait que :

$$\langle r_{lp} r_{lq}^* \rangle = \frac{1}{N} \delta_{pq}$$

On obtient :

$$\text{var}[a_{lm}] = \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \delta_{pq} = \frac{1}{N} \quad (\text{II.27})$$

Les éléments hors-diagonale de  $\mathbf{A}$  sont donc des variables complexes aléatoires à moyenne nulle et de variance  $1/N$ . Les éléments diagonaux de  $\mathbf{A}$  sont également des variables complexes aléatoires mais avec une moyenne égale à 1 et une variance de  $1/N$ .

Maintenant que nous avons calculé les propriétés statistiques de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{A}$  construite à partir d'une matrice aléatoire  $\mathbf{R}$  dite *classique*, nous nous intéressons à l'influence de l'effet de rétrodiffusion cohérente. Pour cela, nous considérons la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  qui est obtenue expérimentalement en régime de diffusion multiple. Cette matrice est construite à partir de la matrice de réponse  $\mathbf{K}$  selon :

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N |k_{pq}|^2}} \quad (\text{II.28})$$

Eq.II.28 est une autre façon d'exprimer la renormalisation définie par Eq.II.2. Par construction, nous avons :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\tilde{k}_{ij}|^2 = 1 \quad (\text{II.29})$$

On peut noter que la matrice  $\mathbf{R}$  vérifie la même propriété. Cependant, comme nous l'avons mis en évidence au §II.4.3, la variance des éléments de  $\tilde{\mathbf{K}}$  n'est pas uniforme. En particulier, la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  présente une variance double le long de sa diagonale du fait de la rétrodiffusion cohérente. Pour en estimer l'effet sur la distribution des valeurs singulières, on modélise  $\tilde{\mathbf{K}}$  comme une matrice dont les coefficients  $\tilde{k}_{ij}$  sont des variables complexes aléatoires gaussiennes indépendamment distribuées avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_{ij}^2$  telle que :

$$\sigma_{ij}^2 = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i \neq j \\ 2\sigma^2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

L'équation II.29 mène à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \sigma_{pq}^2 &= \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^N [(N-1)\sigma^2 + 2\sigma^2] &= \frac{1}{N} \\ \frac{N(N+1)}{N^2} \sigma^2 &= \frac{1}{N},\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\sigma^2 = \frac{1}{N+1} \quad (\text{II.31})$$

$\sigma_{ij}^2$  est donc donné par :

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1 + \delta_{ij}}{N+1} \quad (\text{II.32})$$

La variance des  $\tilde{k}_{ij}$  est égale à  $\frac{1}{N+1}$  pour les éléments hors-diagonale ( $i \neq j$ ) et à  $\frac{2}{N+1}$  pour les éléments diagonaux ( $i = j$ ).

Intéressons-nous maintenant à la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$ . Ses coefficients sont définis par :

$$b_{lm} = \sum_{p=1}^N \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{mp}^* \quad (\text{II.33})$$

La moyenne des coefficients  $b_{lm}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\langle b_{lm} \rangle &= \sum_{p=1}^N \langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{mp}^* \rangle \\ \langle b_{lm} \rangle &= \begin{cases} 0, \text{ si } l \neq m \\ \sum_{p=1}^N \langle |\tilde{k}_{lp}|^2 \rangle = \sigma_{ll}^2 + \sum_{p \neq l}^N \sigma_{lp}^2 = \frac{2}{N+1} + \frac{N-1}{N+1} = 1, \text{ sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la même moyenne pour  $b_{lm}$  que pour  $a_{lm}$  (Eq.II.25)

$$\langle b_{lm} \rangle = \delta_{lm} \quad (\text{II.34})$$

Concernant la variance du coefficient  $b_{lm}$ , elle peut s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned}\text{var}[b_{lm}] &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \underbrace{\langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{lq}^* \rangle}_{\sigma_{lq}^2 \delta_{pq}} \underbrace{\langle \tilde{k}_{mp} \tilde{k}_{mq}^* \rangle}_{\sigma_{mq}^2 \delta_{pq}} \\ \text{var}[b_{lm}] &= \sum_{q=1}^N \sigma_{lq}^2 \sigma_{mq}^2 \\ \text{var}[b_{lm}] &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{q=1}^N (1 + \delta_{lq})(1 + \delta_{mq}) \\ \text{var}[b_{lm}] &= \frac{1}{(N+1)^2} (N+2 + \delta_{lm}) \\ \text{var}[b_{lm}] &= \frac{N+2 + \delta_{lm}}{(N+1)^2} \quad (\text{II.35})\end{aligned}$$

Les propriétés statistiques des matrices d'autocorrélation  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont résumées dans le tableau suivant :

Matrice aléatoire <i>classique</i> $\mathbf{R}$ $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$	Matrice expérimentale $\tilde{\mathbf{K}}$ $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$
$\langle a_{lm} \rangle = \delta_{lm}$	$\langle b_{lm} \rangle = \delta_{lm}$
$\text{var}[a_{lm}] = \frac{1}{N}$	$\text{var}[b_{lm}] = \frac{N+2+\delta_{lm}}{(N+1)^2}$

TAB. II.1: Propriétés statistiques des matrices d'autocorrélation  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , selon que la matrice de départ présente ou non l'effet de la rétrodiffusion cohérente.

L'effet de rétrodiffusion cohérente augmente la variance des coefficients d'autocorrélation, par rapport au cas *classique*. Ainsi, le spectre des valeurs propres de  $\mathbf{B}$  et donc celui des valeurs singulières de  $\tilde{\mathbf{K}}$  doivent être modifiés par l'effet de rétrodiffusion cohérente. Néanmoins, pour  $N \gg 1$ , la différence entre  $\frac{1}{N}$ ,  $\frac{N+2}{(N+1)^2}$  et  $\frac{N+3}{(N+1)^2}$  est négligeable. Par exemple, l'erreur relative est de 3% pour  $N = 32$ . Ainsi, la variance double des éléments diagonaux de  $\tilde{\mathbf{K}}$  ne perturbe pas significativement le spectre des valeurs singulières dans notre configuration expérimentale.

### II.A.3

Nous examinons ici l'influence de la réciprocité sur les propriétés statistiques de la matrice d'autocorrélation. Nous considérerons dans un premier temps le cas d'une matrice aléatoire *classique* et étudierons les propriétés statistiques de sa matrice d'autocorrélation. Ensuite, le cas d'une matrice aléatoire symétrique sera étudié. La comparaison des résultats obtenus dans chacun des cas nous permettra d'expliquer et de quantifier l'effet de la symétrie sur la distribution des valeurs singulières. Comme nous le verrons, la symétrie induit des corrélations entre les éléments diagonaux de la matrice d'autocorrélation.

Considérons dans un premier temps une matrice aléatoire *classique*  $\mathbf{R}$  de dimension  $N \times N$ . Nous supposons que les coefficients de  $\mathbf{R}$  sont des variables aléatoires complexes gaussiennes *i.i.d.*, à moyenne nulle et de variance  $1/N$ . Les coefficients  $a_{lm}$  de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$  sont donnés par :

$$a_{lm} = \sum_{p=1}^N r_{lp} r_{mp}^*$$

Calculons le coefficient de corrélation  $\Theta_{lm}^A$  entre éléments diagonaux  $a_{ll}$  et  $a_{mm}$ , défini par :

$$\Theta_{lm}^A = \frac{\langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle - |\langle a_{ll} \rangle|^2}{\text{var}[a_{ll}]} \quad (\text{II.36})$$

Le terme de corrélation  $\langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle$  peut se développer de la manière suivante :

$$\langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \langle r_{lp} r_{lp}^* r_{mq} r_{mq}^* \rangle$$

En utilisant le théorème des moments, cette dernière équation devient :

$$\langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle = \underbrace{\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \langle r_{lp} r_{lp}^* \rangle \langle r_{mq} r_{mq}^* \rangle}_{| \langle a_{ll} \rangle |^2} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \langle r_{lp} r_{mq}^* \rangle \langle r_{mq} r_{lp}^* \rangle \quad (\text{II.37})$$

La seconde somme peut être calculée en utilisant le fait que :

$$\langle r_{lp} r_{mq}^* \rangle = \frac{\delta_{lm} \delta_{pq}}{N} \quad (\text{II.38})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle - | \langle a_{ll} \rangle |^2 &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \frac{\delta_{lm} \delta_{pq}}{N^2} \\ \langle a_{ll} a_{mm}^* \rangle - | \langle a_{ll} \rangle |^2 &= \frac{\delta_{lm}}{N} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\text{var}[a_{ll}] = \frac{1}{N}$  (Eq.II.27), le coefficient de corrélation  $\Theta_{lm}^A$  (Eq.II.36) est finalement donné par :

$$\Theta_{lm}^A = \delta_{lm} \quad (\text{II.39})$$

Cette dernière équation signifie que les éléments diagonaux  $a_{ll}$  de  $\mathbf{A}$  sont totalement décorrés les uns des autres.

Considérons maintenant le cas d'une matrice aléatoire symétrique comme  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Ses coefficients sont des variables aléatoires complexes gaussiennes identiquement distribuées, à moyenne nulle et de variance  $1/N$ . La seule différence avec une matrice aléatoire *classique* provient du fait que  $\tilde{k}_{ij} = \tilde{k}_{ji}$ . Nous négligeons ici l'effet de rétrodiffusion cohérente (voir Annexe II.A.2) pour nous intéresser exclusivement à l'influence de la réciprocité.

Étudions les propriétés statistiques de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$ . On peut montrer que la symétrie n'a aucun effet sur la moyenne et la variance des  $b_{lm}$  :

$$\begin{aligned} \langle b_{lm} \rangle &\equiv \langle a_{lm} \rangle = \frac{\delta_{lm}}{N} \\ \text{var}[b_{lm}] &\equiv \text{var}[a_{lm}] = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Comme on l'a fait précédemment pour la matrice  $\mathbf{A}$ , nous définissons le coefficient de corrélation  $\Theta_{lm}^B$  entre les éléments diagonaux  $b_{ll}$  et  $b_{mm}$

$$\Theta_{lm}^B = \frac{\langle b_{ll} b_{mm}^* \rangle - | \langle b_{ll} \rangle |^2}{\text{var}[b_{ll}]} \quad (\text{II.40})$$

Le terme de corrélation  $\langle b_{ll} b_{mm}^* \rangle$  peut s'exprimer ainsi :

$$\langle b_{ll} b_{mm}^* \rangle = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \left\langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{lp}^* \tilde{k}_{mq} \tilde{k}_{mq}^* \right\rangle$$

En utilisant le théorème des moments, cette dernière équation devient :

$$\langle b_{ll} b_{mm}^* \rangle = \underbrace{\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{lp}^* \rangle \langle \tilde{k}_{mq} \tilde{k}_{mq}^* \rangle}_{|\langle b_{ll} \rangle|^2} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{mq}^* \rangle \langle \tilde{k}_{mq} \tilde{k}_{lp}^* \rangle$$

Mais, puisque  $\tilde{k}_{lp} = \tilde{k}_{pl}$ , nous avons :

$$\langle \tilde{k}_{lp} \tilde{k}_{mq}^* \rangle = \frac{\delta_{lm} \delta_{pq}}{N} + \frac{\delta_{lq} \delta_{mp}}{N} \quad (\text{II.41})$$

Nous obtenons :

$$\langle b_{ll} b_{mm}^* \rangle - |\langle b_{ll} \rangle|^2 = \frac{\delta_{lm}}{N} + \frac{1}{N^2}$$

En utilisant le fait que  $\text{var}[b_{ll}] = \frac{1}{N}$ , le coefficient de corrélation  $\Theta_{lm}^B$  (Eq.II.40) est finalement donné par :

$$\Theta_{lm}^B = \delta_{lm} + \frac{1}{N} \quad (\text{II.42})$$

Cette dernière équation signifie qu'une corrélation existe entre les éléments diagonaux  $b_{ll}$  de  $\mathbf{B}$ , du fait de la réciprocité. Les corrélations entre les éléments diagonaux des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont comparées dans le tableau suivant :

Matrice aléatoire classique $\mathbf{R}$ $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$	Matrice aléatoire symétrique $\tilde{\mathbf{K}}$ $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^\dagger$
$\Theta_{lm}^A = \delta_{lm}$	$\Theta_{lm}^B = \delta_{lm} + \frac{1}{N}$

TAB. II.2: Corrélation entre les éléments diagonaux des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , selon que la matrice de départ est symétrique ou non.

Même si cette corrélation n'est pas très importante ( $1/N \simeq 3\%$  avec  $N = 32$ ), elle est suffisante pour influencer sur le spectre des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation, et donc sur la distribution des valeurs singulières de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Cela explique la déviation induite par la réciprocité vis à vis de la loi du quart de cercle autour de  $\lambda = 0$ , que l'on a mise en évidence numériquement (voir Fig.II.11). On peut noter que pour  $N \gg 1$ , l'influence de la symétrie doit disparaître.

## II.A.4

Nous supposons que la matrice  $\mathbf{K}^T$  associée à la cible est de rang 1.  $\lambda_1^T$  est la seule valeur singulière non-nulle de  $\mathbf{K}^T$ . La trace de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{K}^T \mathbf{K}^{T\dagger}$  est donc :

$$\text{Trace} \left[ \mathbf{K}^T \mathbf{K}^{T\dagger} \right] = \sum_{p=1}^N (\lambda_p^T)^2 = (\lambda_1^T)^2 \quad (\text{II.43})$$

$\sigma_T^2$  est la puissance des signaux associés à la cible :

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle |k_{ij}^T|^2 \rangle.$$

La trace de  $\mathbf{K}^T \mathbf{K}^{T\dagger}$  peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Trace} [\mathbf{K}^T \mathbf{K}^{T\dagger}] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |k_{ij}^T|^2 \\ \text{Trace} [\mathbf{K}^T \mathbf{K}^{T\dagger}] &= N^2 \sigma_T^2 \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

En considérant Eq.II.43 et Eq.II.44, on en déduit :

$$\lambda_1^T = N \sigma_T \quad (\text{II.45})$$

Nous considérons désormais le cas de la matrice  $\mathbf{K}$ . Cette matrice est la somme de deux contributions (Eq.II.16) :

- $\mathbf{K}^T$  qui correspond à l'écho direct réfléchi par la cible.
- $\mathbf{K}^A$  qui correspond à la réponse du milieu aléatoire (ou à du bruit additionnel).

La trace de la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger$  est donnée par :

$$\text{Trace} [\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger] = \sum_{p=1}^N \lambda_p^2 \quad (\text{II.46})$$

On note  $\sigma_A^2$  la puissance moyenne des signaux associés au milieu aléatoire :

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle |k_{ij}^A|^2 \rangle.$$

La trace de  $\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger$  peut également s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \text{Trace} [\mathbf{K} \mathbf{K}^\dagger] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |k_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (k_{ij}^T + k_{ij}^A) (k_{ij}^{T*} + k_{ij}^{A*}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |k_{ij}^T|^2}_{N^2 \sigma_T^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |k_{ij}^A|^2}_{N^2 \sigma_A^2} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Re [k_{ij}^T k_{ij}^{A*}] \end{aligned}$$

En supposant que  $N \sigma_T \gg \sigma_A$  et que  $N \sigma_A \gg \sigma_T$  (hypothèses justifiées *a posteriori* par Eq.II.19), on peut négliger la troisième somme car

$$\langle \Re [k_{ij}^T k_{ij}^{A*}] \rangle = 0 \text{ et écart-type } \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Re [k_{ij}^T k_{ij}^{A*}] \right] = N \sigma_T \sigma_A \ll N^2 \sigma_T^2, N^2 \sigma_A^2.$$



Nous obtenons finalement :

$$\text{Trace} [\mathbf{K}\mathbf{K}^\dagger] \simeq N^2 (\sigma_T^2 + \sigma_A^2) \quad (\text{II.47})$$

Des équations II.46 et II.47, on déduit une expression pour la moyenne quadratique des valeurs singulières :

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=1} \lambda_p^2} \simeq \sqrt{N (\sigma_T^2 + \sigma_A^2)} \quad (\text{II.48})$$

# Chapitre III

## Séparation des contributions de diffusion simple et multiple : détection de cible en milieu fortement diffusant

### III.1 Résumé

A partir des résultats du chapitre précédent, nous proposons ici une nouvelle technique d'imagerie dédiée à la détection de cible enfouie en milieu fortement diffusant. Les techniques d'imagerie classique comme l'échographie échouent dans ce genre de configuration du fait des échos de diffusion multiple et de l'aberration engendrés par les milieux hautement diffusants. Typiquement, le dispositif expérimental que nous considérons est le suivant : une barrette échographique large bande, de fréquence centrale 3 MHz, est placée en vis-à-vis d'un ensemble de tiges métalliques réparties aléatoirement. Derrière cette couche diffusante dont l'épaisseur est au moins de l'ordre de trois libres parcours moyens, nous plaçons un tube en acier échogène que l'on souhaite détecter et localiser. Dans un premier temps, les réponses impulsionnelles entre chacun des transducteurs sont mesurées, elles constituent la matrice inter-éléments. Nous montrons dans ce chapitre qu'il est possible d'extraire les échos simplement diffusés noyés dans une contribution de diffusion multiple prédominante. Comme nous l'avons mis en évidence au chapitre précédent, les signaux simplement diffusés présentent une cohérence déterministe le long des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ , quelle que soit la répartition des diffuseurs. Ainsi, en filtrant judicieusement ces antidiagonales, on peut extraire les signaux simplement diffusés. Une fois cette opération réalisée, la détection de la cible est effectuée en appliquant la méthode D.O.R.T. aux signaux filtrés. La qualité de détection est évaluée théoriquement à l'aide de la théorie des matrices aléatoires. Nous montrerons ainsi que cette technique présente des performances supérieures à l'échographie et à la méthode D.O.R.T classique. En outre, elle permet de lisser les effets aberrants de la couche diffusante et la cible est localisée.

## III.2 Introduction

Dans le domaine de l'imagerie et de la détection par ondes classiques, on cherche à caractériser un milieu inconnu en le sondant de manière active puis en mesurant les ondes issues du milieu : c'est par exemple le principe de l'échographe et du radar. Un ou plusieurs capteur(s) émette(nt) une onde en direction du milieu que l'on souhaite étudier. Cette onde incidente est réfléchi(e) par les diffuseurs contenus dans le milieu et revient vers ce(s) même(s) capteur(s). Nous traitons ici le cas des milieux désordonnés c'est-à-dire des milieux dans lesquels des diffuseurs (ou réflecteurs) sont répartis de manière aléatoire et a priori inconnue. L'onde totale diffusée par le milieu comprend deux contributions :

- une contribution dite de *diffusion simple* (chemin  $s$  sur la figure III.1) : l'onde incidente ne subit qu'une seule réflexion avant de revenir vers le(s) capteur(s). C'est cette contribution qui est utilisée en échographie ou en radar ; si chaque diffuseur n'interagit qu'une seule fois avec l'onde, il y a en effet une équivalence directe entre le temps d'arrivée de chaque écho et la distance séparant le capteur et le diffuseur ayant engendré cet écho. La détection d'un signal écho à un instant donné est le signe de la présence d'un diffuseur à la distance correspondant au temps d'arrivée de l'écho. Une image de la réflectivité du milieu, ou de la position des différentes cibles diffusantes au sein du milieu, peut alors être construite à partir des signaux enregistrés.
- une contribution dite de *diffusion multiple* (chemin  $m$  sur la figure III.1) : l'onde subit dans ce cas plusieurs réflexions successives sur les diffuseurs du milieu avant d'atteindre le capteur. Ce phénomène se produit particulièrement lorsque les réflecteurs ont un pouvoir diffusant élevé, et/ou sont très concentrés. Dès qu'il y a diffusion multiple, il n'y a plus d'équivalence entre le temps d'arrivée d'un d'écho et la distance séparant le capteur et un diffuseur du milieu, il n'est alors plus possible de construire des images fiables du milieu selon les techniques classiques.

Pour réaliser une image d'un milieu ou y détecter des cibles (par ondes ultrasonores, radar, sismiques *etc.*), on cherche donc généralement à diminuer le poids de la contribution de diffusion multiple relativement à la contribution de diffusion simple. Sur ce point, l'utilisation de réseaux multi-éléments constitue une grande avancée. Au lieu d'insonifier le milieu par un seul élément, on peut réaliser de la formation de voies focalisée à l'émission et à la réception. Cela consiste à construire un faisceau focalisé en l'onde depuis plusieurs capteurs et en fixant des temps de retard (et éventuellement des amplitudes) appropriés sur chacune des voies. En réception, les mêmes retards sont appliqués aux signaux mesurés avant qu'ils soient sommés. L'amplitude du signal échographique résultant de cette somme est directement proportionnelle à la réflectivité du milieu au niveau du point focal. Grâce à la formation de voies (et en ignorant ici d'éventuels effets d'aberration), la somme des signaux simplement diffusés est cohérente, alors qu'elle est incohérente pour la contribution de diffusion multiple. Le gain en rapport *signal* (diffusion simple) sur *bruit* (diffusion multiple) offert par la formation de voies adaptative est proportionnel à  $N$ , où  $N$  est le nombre d'éléments du réseau. En imagerie médicale, cette opération est suffisante pour imager correctement les organes du corps humain. En revanche, dans des milieux plus

complexes, la contribution de diffusion multiple peut être si importante que même la formation de voies cohérente ne permet pas d’imager correctement le milieu. L’image échographique est alors une image de type *speckle* (tavelure), sans aucun rapport direct avec la réflectivité du milieu. De *fausses alarmes* peuvent ainsi apparaître sur l’image ; celles-ci sont liées aux fluctuations erratiques du speckle que l’on peut par erreur attribuer à la présence d’un réflecteur échogène dans le milieu. De plus, les milieux complexes sont souvent de forts aberrateurs : la célérité  $c(\mathbf{r})$  de l’onde est inhomogène et dépend de la coordonnée spatiale  $\mathbf{r}$ . L’aberration induit une distorsion du front d’onde du faisceau focalisé. Cela peut conduire à l’apparition de lobes secondaires et même à un déplacement de la tache focale du réseau.

L’objectif de ce travail a été d’aborder les problèmes inhérents à la détection et l’imagerie d’une cible enfouie dans un milieu diffusant. Le résultat principal est la mise au point d’une technique permettant d’éliminer les échos multidiffusés qui cachent habituellement les cibles enfouies dans les milieux diffusants. Ce problème se rapporte à des cas réels comme des cibles enfouies dans la terre (mines antipersonnelles [113, 114], canalisations, *etc.*), ou le contrôle non destructif dans des structures en béton [115] ou des aciers austénitiques [116]. La technique que nous proposons peut s’appliquer à tous les domaines de la physique des ondes classiques et plus particulièrement aux ondes acoustiques, élastiques, sismiques, électromagnétiques, pour lesquelles les mesures expérimentales permettent un accès direct à l’amplitude et à la phase de l’onde sur un réseau de capteurs. Le milieu que l’on désire étudier est placé en vis à vis d’un réseau multi-éléments. La réponse inter-élément de chaque paire d’émetteur/récepteur est enregistrée : un signal impulsionnel est envoyé depuis l’élément  $n^oi$ , l’onde rétrodiffusée par le milieu est enregistrée par l’élément  $n^oj$ , et cette opération est réalisée pour tous les couples émetteur/récepteur possibles. L’ensemble des  $N^2$  réponses forme la fameuse matrice  $\mathbf{K}$ , réponse globale du milieu inspecté. C’est à partir de cette matrice que l’on peut séparer les contributions de diffusion simple et multiple. En effet, les ondes simplement diffusées présentent une cohérence particulière selon les antidiagonales de la matrice alors que les ondes multiplement diffusées ont un aspect aléatoire et ne présentent pas de direction de cohérence privilégiée (*cf* Chap.II). En filtrant judicieusement ces antidiagonales, les deux contributions peuvent être séparées. Une matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  est ainsi obtenue. Une fois l’extraction des signaux simplement diffusés réalisée, la méthode D.O.R.T est appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^F$ .

Comme on l’a vu au paragraphe II.6, la méthode D.O.R.T consiste une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de réponse  $\mathbf{K}$  :  $\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\dagger$ , où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale contenant  $N$  valeurs singulières  $\lambda_i$  rangées dans l’ordre décroissant. Les matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices unitaires dont les colonnes correspondent aux vecteurs singuliers normalisés  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$ . Dans l’approximation de diffusion simple et pour des réflecteurs ponctuels, chaque diffuseur est lié principalement à une valeur singulière non nulle  $\lambda_i$ . Le vecteur singulier correspondant  $\mathbf{V}_i$  est un invariant de l’opérateur retournement temporel  $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$  ; il correspond au signal à appliquer sur le réseau à l’émission pour focaliser sur le diffuseur. A partir de l’analyse D.O.R.T, on peut soit repropager physiquement le vecteur propre  $\mathbf{V}_i$  et ainsi focaliser sélectivement sur le diffuseur associé, soit le repropager numériquement, auquel cas on obtient l’image du diffuseur en question. Notre dispositif expérimental consiste en une cible échogène

cachée derrière une couche hautement diffusante. Lorsque l'on applique la méthode D.O.R.T à la matrice de réponse  $\mathbf{K}$ , on espère que la cible est associée à la valeur singulière  $\lambda_1$  de plus haute amplitude pour ainsi obtenir l'image de la cible en repropageant numériquement le vecteur propre associé  $\mathbf{V}_1$ . Malheureusement, D.O.R.T est très sensible aux échos multiples diffusés issus de la couche diffusante. Ceux-ci agissent comme un bruit qui perturbe fortement les espaces propres de la matrice  $\mathbf{K}$ . Dans notre configuration expérimentale, la méthode D.O.R.T n'arrive donc pas à extraire l'écho direct de la cible. En revanche, si on applique la méthode D.O.R.T non pas à la matrice  $\mathbf{K}$  mais à la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$ , l'influence de la diffusion multiple est fortement diminuée et la détection de la cible devient possible. Un critère de détection doit être appliqué sur la première valeur singulière  $\lambda_1$  afin de savoir si oui ou non une cible est détectée. Pour cela, on se servira des résultats de la théorie des matrices aléatoires (RMT) et notamment des développements théoriques présentés au paragraphe II.6. La RMT nous permettra également de prouver la supériorité de notre technique en terme de détection de cible par rapport à la méthode D.O.R.T classique et à l'échographie. Enfin, le problème de l'aberration sera abordé. Nous montrons que le filtrage des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  s'accompagne d'un *lissage* des distorsions subies par le front d'onde. Ceci permet d'éliminer l'apparition de lobes secondaires ou encore le déplacement de la tache focale, généralement observés sur l'image échographique.

### III.3 Dispositif et protocole expérimental

Le cadre expérimental est le suivant : un réseau d'émetteurs/récepteurs est placé en vis-à-vis du milieu que l'on désire étudier (voir Fig.III.1).

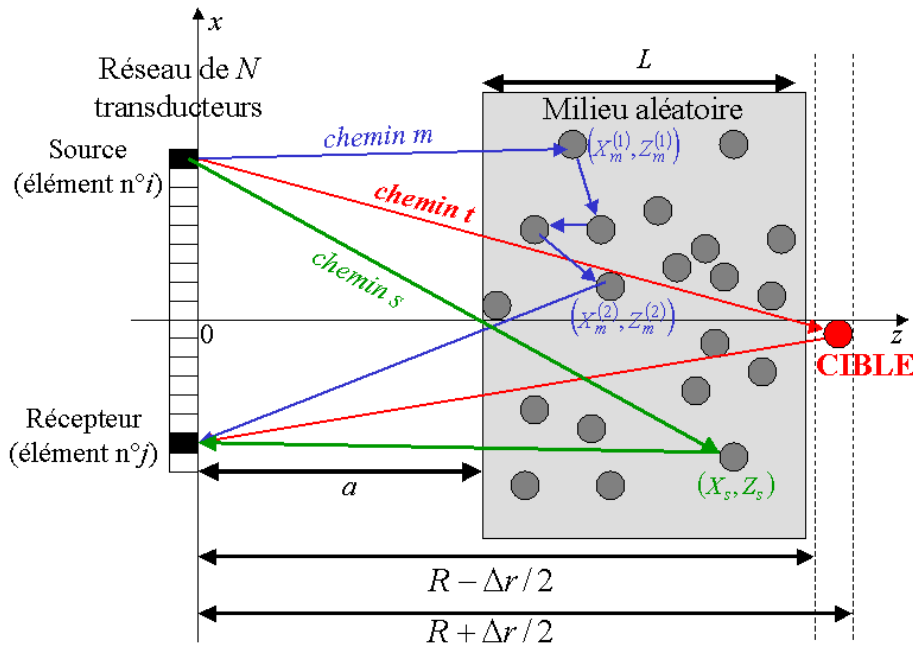


FIG. III.1: Dispositif expérimental utilisé pour la détection d'une cible cachée derrière une couche hautement diffusante

L'expérience a lieu dans une cuve à eau. Nous utilisons une barrette échographique constituée de

$N = 125$  éléments (de largeur égale 0,39 mm), de fréquence centrale 3 MHz et de bande passante [2,5 ; 3,5] MHz. L'espace inter-éléments  $p$  est de 0,417 mm. La fréquence d'échantillonnage des signaux est de 20 MHz. Le milieu diffusant consiste en un ensemble de tiges en acier ( $c_L = 5,7$  mm/ $\mu$ s,  $c_T = 3$  mm/ $\mu$ s, rayon 0,4 mm, densité 7,85 kg/L) réparties aléatoirement avec une concentration  $n = 12$  tiges/cm<sup>2</sup>. Le libre parcours moyen élastique  $l_e$  moyenné sur la bande de fréquence [2,5 ; 3,5] MHz est de  $7,7 \pm 0,3$  mm [47]. La distance  $a$  entre le réseau et l'échantillon diffusant est de 40 mm. Son épaisseur  $L$  est de 20 mm. Derrière cette couche hautement diffusante est placé un tube en acier rempli d'air. Son diamètre est de 15 mm. Notre objectif est de détecter la présence de cette cible échogène et de la localiser. Notons que l'onde simplement diffusée associée à la cible (chemin  $t$  sur la figure III.1) doit traverser plus de cinq libres parcours moyens  $l_e$  du milieu diffusant. La décroissance de l'intensité de l'onde cohérente à travers le milieu diffusant est en  $\exp(-\frac{d}{l_e})$  (où  $d$  est la distance parcourue par l'onde dans le milieu diffusant). Ici,  $d = 2L = 40$  mm et donc, l'intensité de l'écho direct lié à la cible subit une décroissance d'un facteur  $\frac{1}{180}$  lors de son passage à travers le milieu diffusant. Ainsi, la faiblesse de l'amplitude de l'onde cohérente, la diffusion multiple et les effets aberrants engendrés par la couche diffusante rendent la détection de la cible particulièrement difficile par des techniques d'imagerie classique. On peut illustrer ce fait en réalisant l'image du milieu par échographie adaptative (formation de voies focalisée à l'émission et à la réception). L'image échographique obtenue est montrée sur la figure III.2.

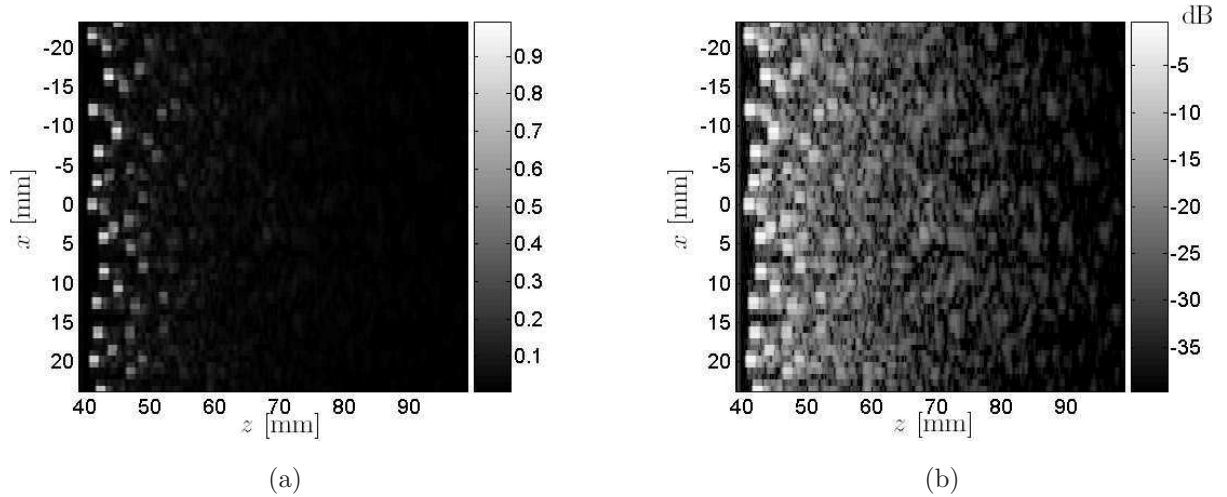


FIG. III.2: Image échographique du milieu obtenue par formations de voies adaptative à l'émission et à la réception. L'image est normalisée par son maximum. Elle est montrée en échelle linéaire (a) et en dB (b)

L'échographie traditionnelle ne permet pas de détecter la cible située à la profondeur  $z=70$  mm ici. On détecte clairement les premiers diffuseurs du milieu désordonné (sur environ 1 cm d'épaisseur, soit une épaisseur comparable au libre parcours moyen) mais ensuite, les signaux multiples diffusés prennent le dessus et une figure de *speckle* est obtenue, sans correspondance physique avec la présence de cibles.

La première étape du protocole expérimental consiste à mesurer la matrice inter-éléments.

Un signal, de durée  $2,5 \mu\text{s}$  et de fréquence  $3 \text{ MHz}$ , est émis par l'élément  $i$  dans le milieu diffusant. L'onde rétrodiffusée est ensuite mesurée par les  $N$  transducteurs du même réseau. L'opération est répétée pour les  $N$  transducteurs émetteurs. Une matrice de réponse  $\mathbf{H}(t)$  de taille  $N \times N$  contenant les  $N^2$  réponses impulsionnelles  $h_{ij}(t)$  est ainsi obtenue. Du fait de la réciprocité spatiale,  $h_{ij}(t) = h_{ji}(t)$  et  $\mathbf{H}(t)$  est symétrique. On prendra comme origine des temps l'instant où la source émet l'onde incidente.

La matrice de réponse impulsionnelle  $\mathbf{H}(t)$  est ensuite tronquée en fenêtres de temps successives, suffisamment courtes pour conserver la résolution temporelle des expériences ultrasonores. Les signaux temporels  $h_{ij}(t)$  sont tronqués en fenêtres temporelles de durée  $\Delta t$  (voir Fig.II.2) :  $k_{ij}(T, t) = h_{ij}(T - t)W_R(t)$  avec  $W_R(t) = 1$  pour  $t \in [-\Delta t/2, \Delta t/2]$ ,  $W_R(t) = 0$  partout ailleurs. La valeur de  $\Delta t$  est choisie de telle sorte que les signaux associés aux mêmes événements de diffusion apparaissent dans la même fenêtre temporelle. En particulier, cette fenêtre doit être suffisamment longue pour que l'écho direct de la cible apparaisse dans la même fenêtre temporelle. Le calcul détaillé de  $\Delta t$  a déjà été présenté au chapitre précédent (Annexe II.A.1). Pour cette expérience,  $\Delta t$  a été fixé à  $11 \mu\text{s}$ . A chaque temps  $T$ , les  $k_{ij}$  forment une matrice  $\mathbf{K}$ . Le passage dans le domaine de Fourier est assuré par une transformée de Fourier discrète (TFD). On obtient alors une série de matrices de réponse  $\mathbf{K}(T, f)$ , chacune associée à un temps de vol  $T$  et à une fréquence  $f$ . Cette analyse temps-fréquence de la matrice de réponse est nécessaire car elle permettra d'appliquer la méthode D.O.R.T (qui s'effectue dans le domaine de Fourier) tout en conservant la résolution temporelle des expériences ultrasonores.

### III.4 Extraction des signaux simplement diffusés

Dans cette partie, nous montrons comment peuvent être extraits les signaux simplement diffusés noyés dans une contribution de diffusion multiple prédominante. Nous revenons dans un premier temps sur la cohérence spatiale des composantes simplement et multiples diffusées de la matrice  $\mathbf{K}$  déjà étudiées au chapitre II. La cohérence déterministe des ondes simplement diffusées le long des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  est rappelée. L'idée est de profiter de cette cohérence pour séparer les contributions de diffusion simple et multiple. Cette séparation s'effectue selon les étapes suivantes :

- Rotation de chaque matrice  $\mathbf{K}$ , et création de deux sous-matrices d'antidiagonales  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ .
- Filtrage adapté des matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  par projection. On obtient alors deux matrices filtrées, notées  $\mathbf{A}_1^F$  et  $\mathbf{A}_2^F$ .
- Reconstitution, à partir de  $\mathbf{A}_1^F$  et  $\mathbf{A}_2^F$ , de matrices  $\mathbf{K}^F$  dites *filtrées*, contenant la contribution de diffusion simple et une contribution de diffusion multiple résiduelle.

Ces étapes sont détaillées dans les paragraphes suivants.



### III.4.1 Cohérence spatiale des signaux simplement et multiplement diffusés

Lors d'une séquence d'émission-réception, l'onde émise est réfléchiée par les diffuseurs du milieu. Plusieurs trajets sont possibles pour cette onde. Elle peut revenir directement vers le réseau de transducteurs : un tel chemin est représenté par les flèches vertes sur la figure III.1, il s'agit de *diffusion simple*. Elle peut également poursuivre son chemin dans le milieu, subir de nouvelles réflexions sur les diffuseurs du milieu et enfin revenir vers le réseau de transducteurs : un exemple de chemin de *diffusion multiple* est représenté par les flèches bleues sur la figure III.1. Le champ rétrodiffusé comprend donc deux contributions : une contribution de diffusion simple (l'onde a subi une et une seule réflexion) et une contribution de diffusion multiple (l'onde subit plusieurs réflexions sur les diffuseurs du milieu avant de revenir vers le réseau de capteurs). Chacune des réponses impulsionnelles  $h_{ij}(t)$  peut se décomposer sous la forme suivante :

$$h_{ij}(t) = h_{ij}^S(t) + h_{ij}^M(t) \quad (\text{III.1})$$

où  $h_{ij}^S(t)$  et  $h_{ij}^M(t)$  correspondent respectivement aux signaux issus de la diffusion simple (S) et de la diffusion multiple (M). Notons que l'écho direct associé à la cible (flèches rouges sur la figure III.1) est compris dans la contribution de diffusion simple ( $h_{ij}^S(t)$ ). De la même manière, la série de réponses  $k_{ij}(T, f)$  peut se décomposer sous la forme d'une somme de  $k_{ij}^S(T, f)$  (contribution de diffusion simple) et  $k_{ij}^M(T, f)$  (contribution de diffusion multiple) :

$$\mathbf{K}(T, f) = \mathbf{K}^S(T, f) + \mathbf{K}^M(T, f) \quad (\text{III.2})$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe II.4, les signaux  $k_{ij}^M(T, f)$  multiplement diffusés donnent lieu à une matrice  $\mathbf{K}^M(T, f)$  aléatoire. Cette matrice peut éventuellement présenter des corrélations entre voies voisines, mais celles-ci ne sont que de courte portée. On pourra s'en affranchir en tronquant la matrice initiale  $\mathbf{K}$ . Un exemple de matrice  $\mathbf{K}^M(T, f)$  est donné sur la figure III.3(b).

Bien que la répartition des diffuseurs soit totalement aléatoire et sans corrélation entre diffuseurs, la composante simplement diffusée  $\mathbf{K}^S$  présente une cohérence particulière (longue portée), contrairement à la contribution de diffusion multiple. Pour fixer les idées, rappelons l'expression des coefficients  $k_{ij}^S$  établie sous l'approximation paraxiale au chapitre précédent :

$$k_{ij}^S(T, f) \propto \frac{\exp(j2kR)}{R} \sum_{d=1}^{N_d} A_d \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_d)^2}{2R} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_d)^2}{2R} \right] \quad (\text{III.3})$$

$$k_{ij}^S(T, f) \propto \underbrace{\frac{\exp(j2kR)}{R} \exp \left[ jk \frac{(x_i - x_j)^2}{4R} \right]}_{\text{terme déterministe}} \underbrace{\sum_{d=1}^{N_d} A_d \exp \left[ jk \frac{(x_i + x_j - 2X_d)^2}{4R} \right]}_{\text{terme aléatoire}} \quad (\text{III.4})$$

où  $R = cT/2$  est la profondeur des diffuseurs contribuant au signal simplement diffusé à l'instant  $T$ ,  $k$  est le nombre d'onde et  $x_i$  représente la position transverse du  $i^{\text{ème}}$  transducteur. L'indice  $d$  représente le  $d^{\text{ème}}$  chemin contribuant au signal reçu au temps  $T$ .  $X_d$  est la position transverse



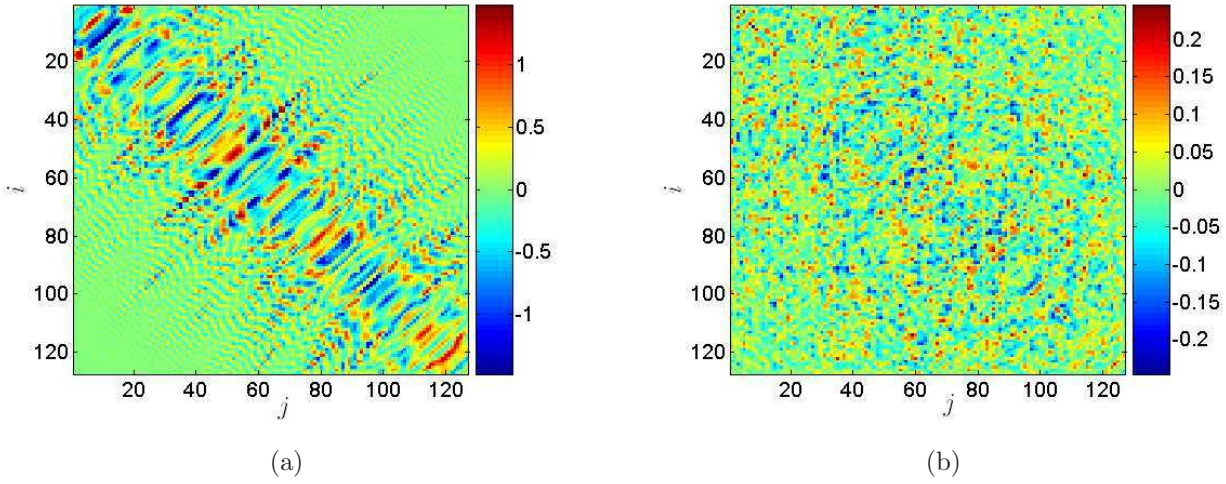


FIG. III.3: Partie réelle de matrices  $\mathbf{K}(T, f)$  mesurées expérimentalement à la fréquence  $f = 3$  MHz et à différents temps de vol  $T$  : (a) quand la diffusion simple prédomine,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^S$  (temps courts,  $T = 58,5 \mu\text{s} \simeq 2a/c$ ); (b) quand la diffusion multiple prédomine,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^M$  (temps longs,  $T = 122,5 \mu\text{s} \gg 2(a + L)/c$ )

du diffuseur associé à ce chemin  $d$  et l'amplitude  $A_d$  dépend de la réflectivité du diffuseur. Le terme apparaissant devant la somme de l'équation III.4 est indépendant de la répartition exacte des diffuseurs, il s'agit donc d'une contribution déterministe. Elle constitue la *marque de fabrique* de la diffusion simple. Le terme de droite est aléatoire, car il dépend explicitement de la position des diffuseurs. A contrario, le signal lié à la diffusion multiple  $k_{ij}^M$  (Eq.II.6) ne peut pas se décomposer ainsi. Cette propriété des signaux issus de la diffusion simple se traduit par une cohérence particulière suivant les antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}^S$  (cf Chap.II), comme l'illustre la figure III.3. En effet, le terme aléatoire de l'équation III.4 est constant le long de chaque antidiagonale, c'est-à-dire pour les couples source/récepteur  $(i, j)$  tels que  $x_i + x_j$  est constant. En revanche, en régime de diffusion multiple, cette propriété n'est plus vérifiée et la matrice  $\mathbf{K}^M$  ne présente pas de cohérence particulière : les éléments sont indépendants les uns des autres.

La technique, que l'on va présenter maintenant, consiste à tirer profit de cette propriété pour isoler les contributions de diffusion simple et multiple à partir des signaux mesurés expérimentalement, en exploitant la cohérence particulière de la contribution de diffusion simple au sein de la matrice  $\mathbf{K}$  totale.

### III.4.2 Rotation des données

L'étude expérimentale commence par l'acquisition de la matrice  $\mathbf{K}$  de dimension  $N \times N$ , où  $N$  désigne le nombre d'éléments émetteurs/récepteurs du réseau. On pose  $M = (N + 3)/4$ . Dans notre cas  $N = 125$ ,  $M = 32$  est un nombre pair. La cohérence des signaux issus de la diffusion simple se manifestant sur les antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ , on procède à une rotation des données, schématisée sur la figure III.4. Cette rotation consiste à créer deux matrices  $\mathbf{A}_1$

et  $\mathbf{A}_2$  à partir de la matrice  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 = [a_{1uv}] \quad \text{de dimension} \quad & (2M - 1) \times (2M - 1), \\ \text{telle que} \quad & a_1[u, v] = k[u + v - 1, v - u + 2M - 1] \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 = [a_{2uv}] \quad \text{de dimension} \quad & (2M - 2) \times (2M - 2), \\ \text{telle que} \quad & a_2[u, v] = k[u + v, v - u + 2M - 1] \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

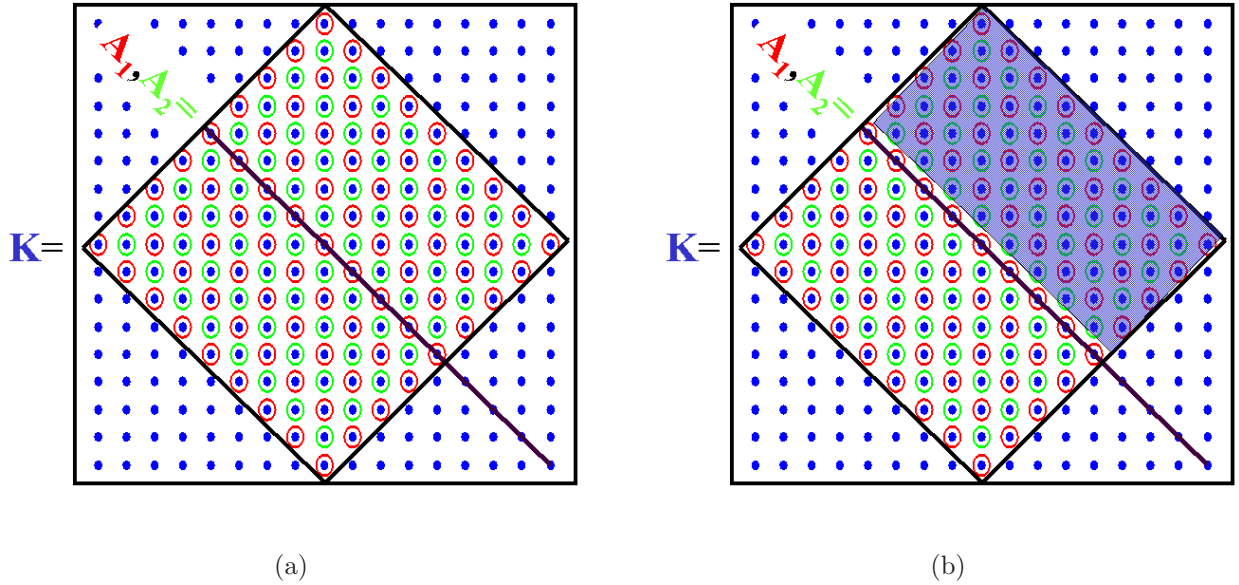


FIG. III.4: (a) Principe de la rotation des données sur l'exemple d'une matrice carrée de dimension  $N = 17$ . Chaque point bleu désigne la position d'un élément de la matrice  $\mathbf{K}$ . Les éléments entourés d'un cercle coloré sont ceux des matrices  $\mathbf{A}_1$  (en rouge) et  $\mathbf{A}_2$  (en vert). Le trait noir continu matérialise la diagonale de  $\mathbf{K}$ . (b) Symétrie de la matrice  $\mathbf{A}$ .

Dans les deux prochains paragraphes, on ne fera plus la différence entre les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  car elles sont filtrées de la même façon. Elles seront nommées indifféremment  $\mathbf{A}$ . On pose  $L$  la dimension de la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour la matrice  $\mathbf{A}_1$ , on a donc  $L = 2M - 1$ . Pour la matrice  $\mathbf{A}_2$ ,  $L = 2M - 2$ .

Du fait de la réciprocité spatiale, la matrice  $\mathbf{K}$  est symétrique ( $k_{ij} = k_{ji}$ ). La matrice  $\mathbf{A}$  présente donc elle aussi une symétrie : chacune des lignes de sa partie supérieure possède une *soeur jumelle* identique dans la partie inférieure. L'axe de symétrie est matérialisé par un trait noir sur la figure III.4. La partie supérieure de la matrice  $\mathbf{A}$ , ombrée sur la figure III.4(b), peut donc être déduite directement de la partie inférieure. Ainsi chaque colonne de la matrice  $\mathbf{A}$  ne comporte que  $M$  coefficients indépendants bien qu'elle soit de dimension  $L > M$ .

### III.4.3 Extraction de la diffusion simple par un filtrage adapté des antidiagonales

Soit  $\mathbf{A}$  une des deux matrices obtenues par rotation de la matrice  $\mathbf{K}$ .  $\mathbf{A}$  est la somme de deux termes,  $\mathbf{A}^S$  et  $\mathbf{A}^M$ , désignant respectivement les contributions dues à la diffusion simple

et à la diffusion multiple :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^M \quad (\text{III.7})$$

La rotation des données, i.e. le passage de  $\mathbf{K}$  à  $\mathbf{A}$ , se traduit mathématiquement par le changement de coordonnées  $(x_i, x_j) \rightarrow (y_u, y_v)$  :

$$y_u = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y_v = \frac{x_i + x_j}{\sqrt{2}} \quad (\text{III.8})$$

L'équation III.4 se réécrit alors dans cette nouvelle base :

$$a_{uv}^S(T, f) \propto \underbrace{\frac{\exp(j2kR)}{R} \exp\left[jk \frac{y_u^2}{2R}\right]}_{\text{contribution déterministe}} \times \underbrace{\Pi_v}_{\text{contribution aléatoire}} \quad (\text{III.9})$$

où  $\Pi_v = \sum_{d=1}^{N_d} A_d \exp\left[jk \frac{(y_v - \sqrt{2}X_d)^2}{2R}\right]$ . Ainsi pour un tirage de diffuseurs (= un milieu) donné, chaque colonne de la matrice  $\mathbf{A}^S$  présente une dépendance suivant l'indice des lignes ( $u$ ) parfaitement déterminée. En revanche, la contribution de diffusion multiple (Eq.II.6) ne peut se factoriser aussi simplement. Même après rotation de la matrice, le caractère aléatoire de la position des diffuseurs persiste sur les colonnes comme sur les lignes de la matrice  $\mathbf{A}^M$ .

Le filtrage des signaux diffusés simplement peut donc être réalisé en projetant les colonnes de la matrice totale  $\mathbf{A}$  sur l'espace *caractéristique de la diffusion simple*, engendré par le vecteur  $\mathbf{S}$  de coordonnées :

$$s_u = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left[jk \frac{y_u^2}{2R}\right] \quad (\text{III.10})$$

La présence au dénominateur de  $\sqrt{L}$  assure la normalisation du vecteur  $\mathbf{S}$ . Le vecteur ligne  $\mathbf{P}$  résultat de cette projection s'écrit :

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A} \quad (\text{III.11})$$

Ses coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned} p_v &= \sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv} = \sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv}^S + \sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv}^M \\ &= \sqrt{L} \frac{\exp(j2kR)}{R} \Pi_v + \sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv}^M \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Le terme résiduel  $\sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv}^M$  correspond à la projection des signaux multiplement diffusés sur le vecteur  $\mathbf{S}$ . Ensuite, la matrice filtrée  $\mathbf{A}^F$  est obtenue en multipliant le vecteur colonne  $\mathbf{S}$  par le vecteur ligne  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{A}^F = \mathbf{S} \mathbf{P} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A} \quad (\text{III.13})$$

Les coordonnées de la matrice  $\mathbf{A}^F$  s'écrivent alors :

$$a_{uv}^F = \frac{\exp(j2kR)}{R} \exp\left[jk \frac{y_u^2}{2R}\right] \Pi_v + s_u \sum_{u'=1}^L s_{u'}^* a_{u'v}^M \quad (\text{III.14})$$

Le premier terme est strictement égal à la composante simplement diffusée (Eq.III.9), on a donc :

$$a_{uv}^F = a_{uv}^S + s_u \sum_{u'=1}^L s_{u'}^* a_{u'v}^M \quad (\text{III.15})$$

En terme de matrices, l'équation III.15 se réécrit de la manière suivante :

$$\mathbf{A}^F = \underbrace{\mathbf{A}^S}_{\text{diffusion simple}} + \underbrace{\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}^M}_{\text{bruit résiduel}} \quad (\text{III.16})$$

La matrice  $\mathbf{A}^F$  contient bien la contribution liée à la diffusion simple ( $\mathbf{A}^S$ ). Mais elle contient également un terme résiduel lié à la présence de diffusion multiple ( $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}^M$ ). La persistance de ce terme est due au fait que, pour une réalisation du désordre, les signaux de diffusion multiple ne sont pas strictement orthogonaux à l'espace caractéristique de la diffusion simple engendré par le vecteur  $\mathbf{S}$ . Le filtrage réalisé n'est donc pas parfait. Cependant, on peut évaluer l'importance du bruit résiduel. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe III.4.2, chaque colonne de  $\mathbf{A}$  ne dispose que de  $M$  coefficients indépendants ; la contribution de diffusion multiple est donc diminuée d'un facteur  $\sqrt{M}$  en amplitude suite au filtrage. La contribution de diffusion simple restant inchangée, le gain en rapport *signal-sur-bruit*, ou plus exactement *diffusion simple-sur-diffusion multiple* est donc de l'ordre de  $\sqrt{M}$ .

La technique de filtrage décrite ici est à utiliser préférentiellement quand on souhaite extraire une contribution de diffusion simple noyée dans de la diffusion multiple, c'est-à-dire dans le cas de milieux pour lesquels les signaux simplement diffusés sont d'amplitude très faible par rapport aux signaux issus de la diffusion multiple. Cela s'applique notamment au cas de la détection de cibles enfouies dans un milieu diffusant.

En revanche, si on souhaite extraire la contribution de diffusion multiple noyée dans une importante contribution de diffusion simple, cette technique n'est pas adaptée. En effet, l'équation III.4 n'est pas strictement exacte : l'approximation parabolique et la non prise en compte de la directivité des éléments aboutissent à une expression approchée simple mais pas suffisamment rigoureuse pour mesurer précisément l'amplitude de la contribution de diffusion multiple. Pour ce type de milieux, une autre technique sera proposée au chapitre suivant.

### III.4.4 Reconstruction d'une matrice filtrée

Une fois que les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  ont été filtrées selon la technique décrite au paragraphe précédent, une matrice inter-éléments filtrée  $\mathbf{K}^F$ , de taille  $(2M-1) \times (2M-1)$ , est reconstituée par une transformation inverse de celle décrite au paragraphe III.4.2 :

$$\begin{aligned} \text{si } (i-j)/2 \text{ est entier, alors} \\ k^F[i, j] &= a_1^F [(i-j)/2 + M, (i+j)/2] \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \text{si } (i-j)/2 \text{ n'est pas un entier, alors} \\ k^F[i, j] &= a_2^F [(i-j-1)/2 + M, (i+j-1)/2] \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

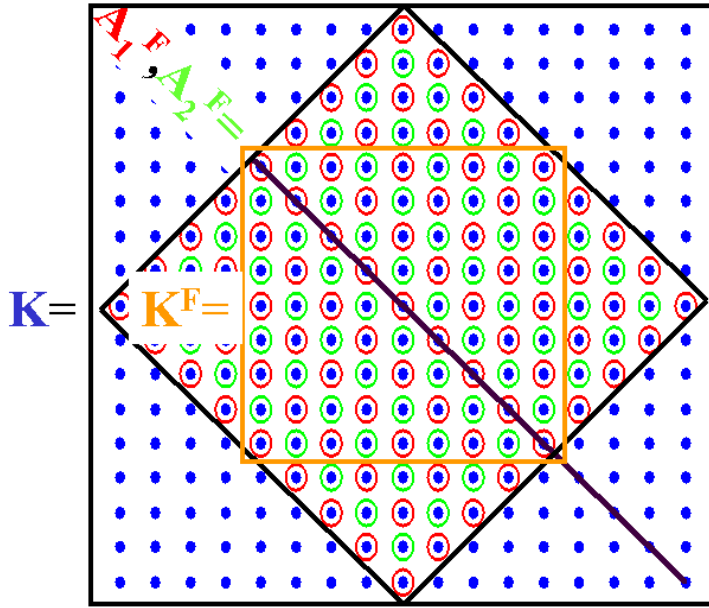


FIG. III.5: Construction de la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  à partir des matrices  $\mathbf{A}_1^F$  et  $\mathbf{A}_2^F$  filtrées. La rotation inverse aboutit à la matrice  $\mathbf{K}^F$ , qui contient les éléments encadrés par le carré orange.

Ainsi, on obtient une matrice inter-éléments  $\mathbf{K}^F$  filtrée. La procédure de rotation inverse des données est présentée sur la figure III.5. Par la suite, on appellera  $\mathbf{K}^0$  la matrice qui serait obtenue à la place de  $\mathbf{K}^F$  si aucun filtrage n'était appliqué. Cette matrice  $\mathbf{K}^0$  de dimension  $(2M-1) \times (2M-1)$  est directement construite à partir de la matrice initiale  $\mathbf{K}$  en ne considérant que les coefficients situés à l'intérieur du carré orange sur la figure III.5.

### III.4.5 Illustration de l'action du filtre adapté sur les antidiagonales de $\mathbf{K}$

La figure III.6 illustre l'action du filtre sur les antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ . Nous nous sommes placés au temps de vol attendu pour l'écho direct de la cible. Alors que la matrice  $\mathbf{K}^0$  présente une apparence aléatoire (Fig.III.6(a)), la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  présente une cohérence déterministe le long de ses antidiagonales comme désiré (Fig.III.6(b)). Toutefois, on ne peut pas dire *a priori* si la cible est effectivement détectée ou si la matrice  $\mathbf{K}^F$  ne contient qu'un bruit résiduel lié à la diffusion multiple (Eq.III.16). Par conséquent, une opération supplémentaire est nécessaire pour imaginer le milieu, ou plutôt ici pour détecter et localiser la cible placée derrière la couche diffusante. Plusieurs techniques d'imagerie sont maintenant proposées dans ce but.

## III.5 Détection et image de la cible

Nous présentons maintenant les différentes techniques qui pourraient nous offrir la possibilité de détecter et d'imager la cible cachée derrière la couche diffusante. Une repropagation

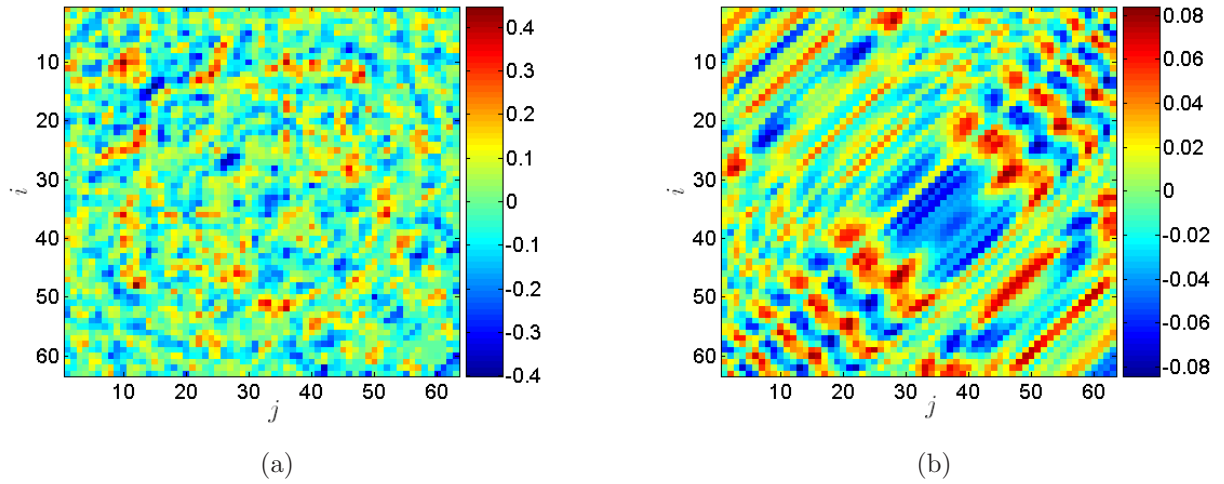


FIG. III.6: Illustration de l'action du filtre appliqué aux antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ . (a) Matrice  $\mathbf{K}^0$  mesurée au temps  $T = 94,5 \mu\text{s}$  (temps d'écho attendu pour la cible) et à la fréquence  $f = 2,7 \text{ MHz}$ . (b) Matrice  $\mathbf{K}^F$  obtenue après filtrage des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ .

directe des signaux (équivalente à l'échographie adaptative dans le domaine de Fourier) et la méthode D.O.R.T sont présentées. Comme nous allons le voir, il n'y a aucun intérêt à combiner un filtrage préalable de la diffusion simple avec l'échographie. Au contraire, son association avec la méthode D.O.R.T apporte d'excellents résultats.

### III.5.1 Echographie fréquentielle (Repropagation directe des signaux)

La manière la plus directe d'imager la cible est d'effectuer une repropagation numérique des signaux mesurés. Le principe est très simple. Il consiste à discrétiser le plan focal en un ensemble de points où la réflectivité du milieu va être mesurée. Le plan focal est parallèle au réseau multi-éléments et est situé à une distance  $R = cT/2$  de celui-ci. L'algorithme de repropagation consiste tout d'abord à calculer l'opérateur de propagation  $\mathbf{G}$  entre les transducteurs du réseau et les points du plan focal; les coefficients  $g_{il}$  sont proportionnels à la fonction de Green entre l'élément  $i$  du réseau et le point  $n^o l$  du plan focal, comme décrit sur la figure III.7. Le milieu fictif de repropagation est considéré comme homogène avec une vitesse du son  $c$  égale à celle de l'eau. La repropagation des signaux est effectuée à chaque temps  $T$  et à chaque fréquence  $f$ . L'image finale est un vecteur  $\mathbf{I}(T, f)$  correspondant à la valeur absolue du champ repropagé :

$$\mathbf{I}(T, f) = |\mathbf{G}^\dagger(T, f)\mathbf{K}^0(T, f)\mathbf{G}^*(T, f)| \quad (\text{III.19})$$

L'image peut ensuite être moyennée sur toute la bande de fréquence. Cette repropagation directe des signaux est l'équivalent de l'échographie adaptative focalisée dans le domaine de Fourier. L'image finale présenterait une moins bonne résolution temporelle que celle présentée sur la Fig.III.2. Cela mis à part, les deux images seraient équivalentes : une figure de speckle est obtenue à partir d'une profondeur  $R = 50 \text{ mm}$  et la cible ne peut pas être détectée par



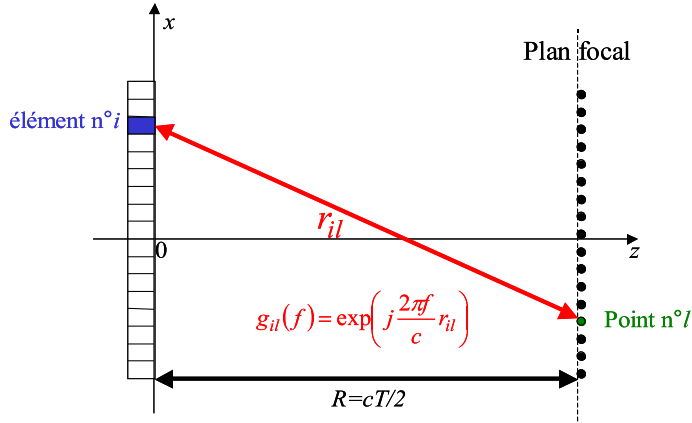


FIG. III.7: Principe de la repropagation directe des signaux.

une simple observation attentive de l'image. Un algorithme de détection doit être mis au point pour sélectionner les temps de vol  $T$  et fréquences  $f$  pour lesquels la cible serait détectée. Ce sera l'objet du §III.6.

On peut mettre en évidence l'incapacité de cette technique à imager la cible en considérant l'image obtenue au temps  $T = 94,5 \mu\text{s}$  et à la fréquence  $f = 2,7 \text{ MHz}$  (voir Fig.III.8).

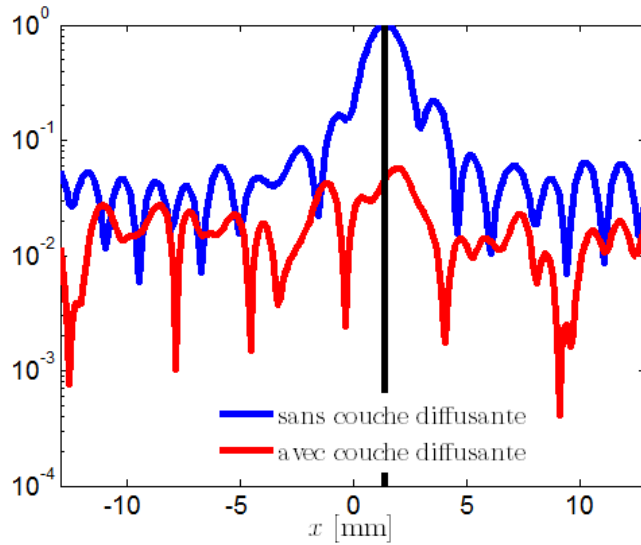


FIG. III.8: Image de la cible obtenue par échographie fréquentielle au temps  $T = 94,5 \mu\text{s}$  et à la fréquence  $f = 2,7 \text{ MHz}$ . La ligne verticale noire indique la position du centre de la cible.

Ce temps de vol  $T$  correspond au temps d'écho attendu pour la cible. La matrice  $\mathbf{K}^0$  correspondante est présentée sur la figure III.6(a). La présence de la couche diffusante dégrade fortement l'image obtenue. Les échos de diffusion multiple brulent fortement l'image. Deux pics principaux surnagent tout de même du bruit de multidiffusion mais aucun des deux n'est localisé à la position de la cible. Ce sont les effets aberrants induits par la couche diffusante qui sont responsables de ce dédoublement du pic principal en deux lobes secondaires.

Pour améliorer les résultats fournis par l'échographie, on peut proposer d'appliquer l'équation

III.19 à la matrice préalablement filtrée  $\mathbf{K}^F$  au lieu de la matrice mesurée  $\mathbf{K}^0$ . Mais l'image obtenue serait identique quelle que soit la matrice considérée ( $\mathbf{K}^F$  ou  $\mathbf{K}^0$ ) (voir Annexe III.A.1). Une démonstration heuristique peut être donnée. L'échographie focalisée permet de réaliser une somme cohérente des signaux simplement diffusés provenant d'un point focal situé à la profondeur  $R = cT/2$  et à une position transverse  $X$ . La technique d'extraction de la diffusion simple (voir §III.4) sélectionne quant à elle les signaux simplement diffusés liés à des réflecteurs situés à une profondeur  $R = cT/2$ , indépendamment de leur position transverse. En cela, notre technique constitue une étape de l'échographie focalisée, car elle fixe la distance focale  $R$ . Maintenant, si nous appliquons l'échographie focalisée aux signaux filtrés, nous réalisons la somme cohérente des signaux provenant de réflecteurs situés à une position transverse  $X$  et à une profondeur  $R = cT/2$ . Cependant, cette dernière variable a déjà été fixée lors du filtrage préalable de la diffusion simple. Il y a redondance dans le choix de  $R$ . C'est pourquoi le filtrage préalable des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  n'apporte rien de plus quand il est associé à l'échographie traditionnelle. Ces deux techniques, l'échographie focalisée adaptative et notre technique d'extraction des signaux simplement diffusés, ne sont pas complémentaires. Une démonstration rigoureuse est donnée en Annexe III.A.1.

### III.5.2 Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice $\mathbf{K}^0$

Plutôt que l'échographie, la méthode D.O.R.T peut être proposée pour construire une image de la cible. Cette technique consiste à réaliser la SVD de la matrice de réponse mesurée avant d'imager le milieu :

$$\mathbf{K}^0(T, f) = \mathbf{U}^0(T, f)\mathbf{\Lambda}^0(T, f)\mathbf{V}^{0\dagger}(T, f) \quad (\text{III.20})$$

où  $\mathbf{\Lambda}^0$  est une matrice diagonale contenant les  $2M - 1$  valeurs singulières  $\lambda_i^0$  rangées dans un ordre décroissant. Les vecteur propres  $\mathbf{U}_i^0$  et  $\mathbf{V}_i^0$  associés à la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière  $\lambda_i^0$  correspondent aux colonnes des matrices unitaires  $\mathbf{U}^0$  et  $\mathbf{V}^0$ . Sous l'approximation de diffusion simple, chaque diffuseur contenu dans le volume isochrone est associé à un espace propre de  $\mathbf{K}^0$  lié à une valeur singulière non nulle  $\lambda_i^0$ . Le vecteur propre correspondant  $\mathbf{V}_i^0$  (ou  $\mathbf{U}_i^{0*}$ ) correspond au signal à appliquer sur les éléments du réseau pour focaliser sur le diffuseur en question. Ainsi, la repropagation numérique du vecteur propre permet d'imager chaque diffuseur détecté. L'image obtenue grâce à l'analyse D.O.R.T est un vecteur  $\mathbf{I}_i^0$  correspondant à la valeur absolue du champ repropagé :

$$\mathbf{I}_i^0(T, f) = \lambda_i^0 |\mathbf{V}_i^0(T, f)\mathbf{G}^*(T, f)| \quad (\text{III.21})$$

$\mathbf{I}_i^0(T, f)$  représente l'image du diffuseur n°  $i$  à la fréquence  $f$  dans le plan focal situé à une profondeur  $R = cT/2$ .

Dans notre étude, nous espérons que le premier espace propre (associé à  $\lambda_1^0$ ) corresponde à l'écho direct de la cible. Cependant, la couche diffuseuse placée en amont de la cible engendre de la diffusion multiple, ce qui empêche sa détection. La figure III.9(a) représente le premier espace propre  $\lambda_1^0\mathbf{U}_1^0\mathbf{V}_1^{0\dagger}$  de  $\mathbf{K}^0$  (voir Fig.III.6(a)) au temps de vol  $T$  attendu pour la cible. Ce premier espace propre ne présente pas l'allure d'un écho simplement diffusé, il correspond



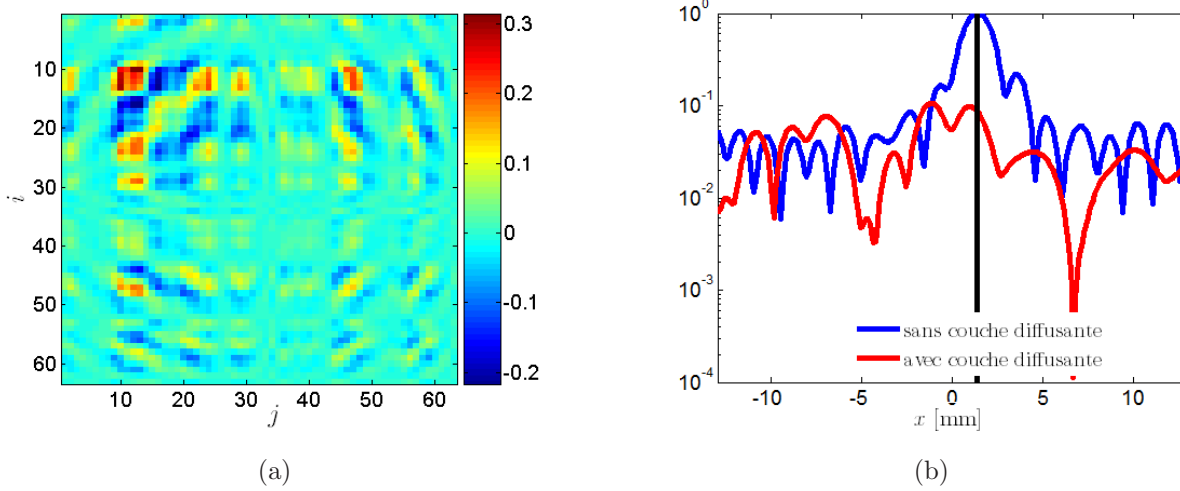


FIG. III.9: Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^0$  mesurée au temps  $T = 94,5 \mu\text{s}$  et à la fréquence  $f = 2,7 \text{ MHz}$ . (a) Partie réelle du premier espace propre  $\lambda_1^0 \mathbf{U}_1^0 \mathbf{V}_1^{0\dagger}$  de  $\mathbf{K}^0$ . (b) Image obtenue en repropageant numériquement  $\mathbf{V}_1^0$ . La ligne verticale noire indique la position du centre de la cible.

en fait à un espace propre de bruit. Du fait du bruit de multidiffusion, la SVD n'arrive pas à extraire l'écho direct de la cible. La diffusion multiple résulte en une matrice aléatoire  $\mathbf{K}^0$  (voir Fig.III.6(a)) dont les espaces propres sont aléatoires et sans aucune connexion avec des échos directs de diffuseurs situés dans le volume isochrone. L'image  $\mathbf{I}_1^0$  obtenue suite à la repropagation numérique de  $\mathbf{V}_1^0$  est montrée sur la figure III.9(b). Cette image n'est qu'une image de bruit : aucun pic autour de la position de la cible n'est observé. La méthode D.O.R.T échoue dans notre configuration expérimentale du fait de la diffusion multiple. L'idée a donc été d'appliquer la méthode D.O.R.T non pas à la matrice  $\mathbf{K}^0$ , mais à la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$ .

### III.5.3 Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice $\mathbf{K}^F$

L'idée essentielle de ce chapitre est de combiner la méthode D.O.R.T avec le filtrage préalable des signaux simplement diffusés décrit au §III.4. Comme la contribution de diffusion multiple est fortement diminuée par ce filtrage adapté des antidiagonales de  $\mathbf{K}$ , on espère que la cible puisse être détectée en appliquant la méthode D.O.R.T à la matrice  $\mathbf{K}^F$ . La procédure est identique à celle décrite au paragraphe précédent, en remplaçant la matrice  $\mathbf{K}^0$  par  $\mathbf{K}^F$ . La figure III.10 illustre le succès de la combinaison de la méthode D.O.R.T avec le filtrage préalable des signaux simplement diffusés. La matrice  $\mathbf{K}^F$  obtenue au temps d'écho  $T = 94,5 \mu\text{s}$  attendu pour la cible, présente déjà une marque potentielle de l'écho de la cible (voir Fig.III.6(b)). Néanmoins, cet écho est toujours bruité par la diffusion multiple résiduelle. Mais une fois que la SVD de  $\mathbf{K}^F$  est réalisée ( $\mathbf{K}^F = \mathbf{U}^F \mathbf{\Lambda}^F \mathbf{V}^{F\dagger}$ ), le premier espace propre  $\lambda_1^F \mathbf{U}_1^F \mathbf{V}_1^{F\dagger}$  présente une forme en cercles concentriques caractéristique d'un écho simplement diffusé (voir Fig.III.10(a)). La repropagation numérique du vecteur propre  $\mathbf{V}_1^F$  est présentée sur la figure III.10(b). L'image obtenue présente clairement un pic au niveau de la position attendue pour la cible. Bien sûr,

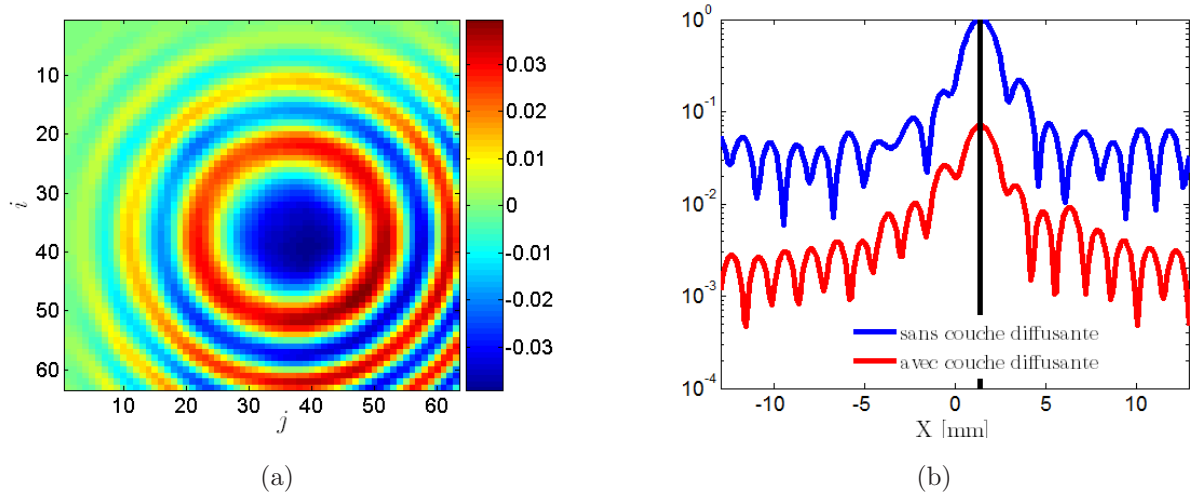


FIG. III.10: Méthode D.O.R.T appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^F$  obtenue au temps  $T = 94,5 \mu\text{s}$  et à la fréquence  $f = 2,7 \text{ MHz}$ . (a) Partie réelle du premier espace propre  $\lambda_1^F \mathbf{U}_1^F \mathbf{V}_1^{F\dagger}$  de  $\mathbf{K}^F$ . (b) Image obtenue en repropageant numériquement  $\mathbf{V}_1^F$ . La ligne verticale noire indique la position du centre de la cible.

l'amplitude de l'image est moindre qu'en l'absence de couche diffusante, puisque celle-ci diminue fortement l'intensité de l'onde cohérente associée à la cible.

La comparaison des figures III.9 et III.10 illustre la réussite de notre technique. Le filtrage préalable de la diffusion simple élimine une grande partie de la diffusion multiple. Cela permet à la SVD d'extraire brillamment l'écho associé à la cible, ce qui était impossible avec la méthode D.O.R.T classique ou l'échographie. Toutefois, ces résultats ne sont qu'un exemple à un couple temps-fréquence arbitrairement choisi. La détection de la cible doit maintenant être systématisée, ce qui nécessite de sélectionner les bandes de fréquence et les temps de vol  $T$  sur la base d'un critère qui reste à établir. De plus, la diffusion multiple peut engendrer des fausses alarmes associées à d'importantes fluctuations du speckle que l'on pourrait faussement attribuer à la présence de réflecteurs échogènes au sein du milieu. Ainsi, un critère de détection rigoureux doit être établi afin de distinguer l'écho de la cible des artefacts de la diffusion multiple.

## III.6 Critère de détection

Dans ce paragraphe, des critères de détection sont établis théoriquement pour les deux méthodes d'imagerie présentées au paragraphe précédent. Pour l'échographie, le critère est appliqué au maximum de l'image normalisée. Pour la méthode D.O.R.T, ce critère est directement déduit de la théorie des matrices aléatoires comme nous l'avons vu au §II.6 du chapitre précédent. Il est appliqué à la première valeur singulière normalisée. Le seuil de détection est ajusté par l'opérateur qui choisit une probabilité de fausse alarme satisfaisante. Une fois ces critères de détection établis théoriquement, ils sont appliqués à nos mesures expérimentales. On montre alors que le filtrage de la diffusion multiple réalisé préalablement à la méthode D.O.R.T

permet une détection claire de la cible sur une bande de fréquence assez large, contrairement aux autres techniques d'imagerie traditionnelles.

### III.6.1 Etablissement d'un critère de détection : Théorie

Pour établir un seuil de détection, on doit tout d'abord définir la variable sur laquelle va être appliqué ce seuil. Concernant la méthode D.O.R.T, si la cible est effectivement détectée, elle sera associée à la première valeur singulière de la matrice de réponse. Ce seuil doit donc être appliqué sur la première valeur singulière (voir Chap.II.6). Concernant la repropagation directe des données (échographie fréquentielle), la détection de la cible est réalisée si le pic principal de l'image est effectivement associé à celle-ci. Le seuil de détection sera donc appliqué au maximum de l'image  $\mathbf{I}(T, f)$  obtenu à chaque temps  $T$  et fréquence  $f$ . Pour établir un critère de détection, nous avons besoin de connaître au préalable le comportement statistique des valeurs singulières de la matrice et de l'image échographique en régime de diffusion multiple. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

#### Comportement statistique en régime de diffusion multiple

Le critère de détection est déduit du comportement des valeurs singulières et de l'image échographique en l'absence de cible. Pour cela, nous avons réalisé la même expérience que celle décrite sur la figure III.1 mais en ôtant la cible du dispositif expérimental. Le reste de la procédure expérimentale est inchangée et une série de matrices  $\mathbf{K}^0(T, f)$  et  $\mathbf{K}^F(T, f)$  est obtenue.

Traisons tout d'abord le cas de la méthode D.O.R.T. Nous allons étudier la densité de probabilité des valeurs singulières. Comme au chapitre précédent, les matrices initiales  $\mathbf{K}^0$  et  $\mathbf{K}^F$  de taille  $(2M - 1) \times (2M - 1)$  sont tronquées en des matrices de taille  $M \times M$  afin de s'affranchir des corrélations entre voies adjacentes (on ne conserve qu'un élément sur deux par rapport à la matrice initiale). Dans un souci d'allègement des écritures, nous continuerons à noter les matrices tronquées  $\mathbf{K}^0$  et  $\mathbf{K}^F$ . Leur SVD est ensuite réalisée, on obtient ainsi  $M$  valeurs singulières  $\lambda_i^0(T, f)$  et  $\lambda_i^F(T, f)$  à chaque couple temps-fréquence  $(T, f)$ . Celles-ci sont ensuite normalisées selon Eq.II.2 afin d'entrer dans le cadre général des hypothèses de la RMT. Une fois cette normalisation effectuée, l'histogramme des valeurs singulières peut être construit dans les deux cas. Deux estimateurs,  $\hat{\rho}_0(\lambda)$  et  $\hat{\rho}_F(\lambda)$ , de la distribution des valeurs singulières sont ainsi obtenus, respectivement pour les matrices  $\mathbf{K}^0$  et  $\mathbf{K}^F$  (Eq.II.3). Les résultats sont présentés sur la figure III.11.

En régime de diffusion multiple, on s'attend à ce que la matrice  $\mathbf{K}^0$  soit aléatoire. La RMT prédit alors une distribution de valeurs singulières  $\rho_0(\lambda)$  donnée par la loi du quart de cercle  $\rho_{QC}(\lambda)$  (Eq.II.4). Comme nous l'avons mis en évidence au chapitre précédent, on observe une déviation de la distribution expérimentale des valeurs singulières vis-à-vis de cette loi théorique (voir Fig.III.11). Lorsque sera établi le critère de détection sur la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1^0$ , on considèrera donc la fonction de répartition  $F_1^0(\lambda)$  de la première valeur singulière estimée

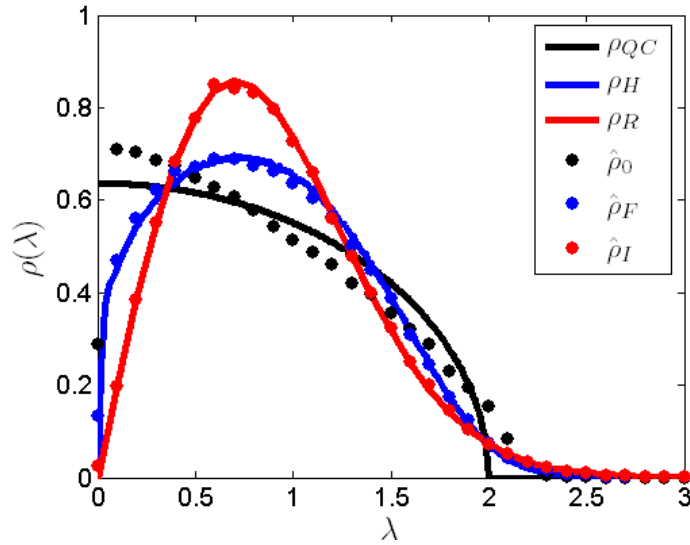


FIG. III.11: Comparaison entre les distributions expérimentales  $\hat{\rho}_0(\lambda)$ ,  $\hat{\rho}_F(\lambda)$  et  $\hat{\rho}_I(\lambda)$  et les lois théoriques  $\rho_{QC}(\lambda)$ ,  $\rho_H(\lambda)$  et  $\rho_R(\lambda)$ .

à partir des données expérimentales, plutôt que la loi numérique obtenue au §II.6, valable seulement si la loi du quart de cercle est vérifiée.

La matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  présente quant à elle une relation de phase déterministe le long de ses antidiagonales. La distribution de ses valeurs singulières normalisées doit donc être analogue à celle obtenue en régime diffusion simple (voir §II.5). Nous avons donc comparé la distribution expérimentale  $\hat{\rho}_F(\lambda)$  des valeurs singulières de  $\mathbf{K}^F$  à la loi de Hankel  $\rho_H(\lambda)$  (voir Fig.III.11). L'accord entre les deux courbes est parfait. Par la suite, nous considérerons donc la fonction de répartition  $F_1^H(\lambda)$  établie numériquement au §II.6, lorsqu'un critère de détection sera établi sur la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1^F$ .

Concernant l'échographie fréquentielle, les points où la réflectivité du milieu est estimée doivent être choisis avec précaution. Le vecteur image  $\mathbf{I}(T, f)$  doit présenter des coordonnées indépendamment distribuées. Les coordonnées  $I_l$  du vecteur  $\mathbf{I}$  doivent donc être associées chacune à une cellule de résolution distincte. En pratique, nous avons considéré les points situés à la même position transverse que les transducteurs impliqués dans les matrices tronquées  $\mathbf{K}^0$  et  $\mathbf{K}^F$ . Ainsi, les points de l'image échographique sont séparés d'une distance,  $2p \simeq 0,84$  mm, supérieure à la taille de la cellule de résolution égale à  $\frac{\lambda a}{D} \simeq 0,76$  mm (où  $D = (2M - 1)p$  correspond à la taille du réseau). Chaque vecteur image  $\mathbf{I}(T, f)$  contient donc  $M$  coordonnées  $I_l$  indépendantes. Les coordonnées  $I_l(T, f)$  de l'image sont normalisées par leur moyenne quadratique à chaque temps  $T$  et fréquence  $f$  :

$$\tilde{I}_l(T, f) = \frac{I_l(T, f)}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M I_p^2(T, f)}} \quad (\text{III.22})$$

Une fois cette normalisation effectuée, l'histogramme de l'image échographique peut être construit en considérant tous les couples temps-fréquence  $(T, f)$ . L'estimateur  $\hat{\rho}_I(\lambda)$  de la densité de probabilité de l'image échographique est tracé sur la figure III.11.

En régime de diffusion multiple, on s'attend à ce que les coordonnées  $\tilde{I}_l$  normalisées correspondent à la valeur absolue de variables aléatoires complexes gaussiennes à moyenne nulle et de variance unité. Leur densité de probabilité théorique est donc donnée par la loi de Rayleigh  $\rho_R(\lambda)$  :

$$\rho_R(\lambda) = 2\lambda \exp(-\lambda^2) \quad (\text{III.23})$$

$\rho_R(\lambda)$  est comparée à l'estimateur expérimental  $\hat{\rho}_I(\lambda)$  sur la figure III.11. L'accord entre expérience et théorie est parfait. La loi de Rayleigh  $\rho_R(\lambda)$  sera considérée lorsque sera établi un critère de détection sur le pic principal de l'image échographique.

### Mise en place des critères de détection

Maintenant que les comportements statistiques de  $\tilde{\lambda}_i^0$ ,  $\tilde{\lambda}_i^F$  et  $\tilde{I}_l$  sont connus, un critère de détection peut être défini pour chaque technique d'imagerie.

Comme nous l'avons vu précédemment, la distribution  $\rho_0(\lambda)$ , obtenue à partir de  $\mathbf{K}^0$ , ne suit pas la loi du quart de cercle. La fonction de répartition  $F_1^0$  doit être estimée à partir des mesures expérimentales. En construisant l'histogramme de la première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1^0$ , puis en l'intégrant, nous obtenons un estimateur de la fonction de répartition  $F_1^0$  liée à la première valeur singulière de  $\mathbf{K}^0$ . Cette loi expérimentale est tracée sur la figure III.12. Concernant les matrices  $\mathbf{K}^F$ , nous avons vu que la distribution des valeurs singulières était bien donnée par la loi de Hankel  $\rho_H(\lambda)$ . La fonction de répartition que nous allons considérer est donc la loi  $F_1^H(\lambda)$  obtenue numériquement au §II.6, pour  $M = 32$ .  $F_1^H(\lambda)$  est également reportée sur la figure III.12.

Concernant l'échographie fréquentielle, nous avons vu que la densité de probabilité de l'image obtenue suivait la loi de Rayleigh  $\rho_R(\lambda)$ . Contrairement aux valeurs singulières d'une matrice, les différents points de l'image sont indépendants les uns des autres puisque nous avons veillé à ce qu'ils soient placés dans des cellules de résolution distinctes. Dans ce cas, la fonction de répartition  $F_1^R(\lambda)$  du pic principal,  $\tilde{I}_{\max} = \max[\tilde{I}_l]$ , de l'image échographique peut être directement déduite de  $\rho_R(\lambda)$ . En effet,  $F_1^R(\lambda)$  est alors directement égal à la puissance  $M$  de la fonction de répartition  $F^R(\lambda)$  d'un point quelconque de l'image échographique :

$$F_1^R(\lambda) = P\left\{\tilde{I}_{\max} \leq \lambda\right\} = [F^R(\lambda)]^M ,$$

$$\text{avec, } F^R(\lambda) = \int_0^\lambda dx \rho_R(x).$$

La fonction de répartition  $F_1^R(\lambda)$ , ainsi obtenue, est présentée sur la figure III.12.

Pour chacune des trois techniques d'imagerie, la probabilité de fausses alarmes  $PFA(\lambda)$  est ensuite directement déduite de  $F_1$ , puisque  $PFA(\lambda) = 1 - F_1(\lambda)$  (voir §II.6). Une fois les fonctions  $F_1^0$  (méthode D.O.R.T classique),  $F_1^H$  (méthode D.O.R.T combinée à un filtrage préalable des signaux simplement diffusés) et  $F_1^R$  (échographie fréquentielle) établies, des seuils de détection  $\lambda_S^0$ ,  $\lambda_S^F$  et  $I_S$  peuvent être déduits. Il suffit de fixer un taux de fausses alarmes  $\gamma$  identique pour les trois techniques. Les seuils  $\lambda_S^0$ ,  $\lambda_S^F$  et  $I_S$  sont alors déterminés en calculant

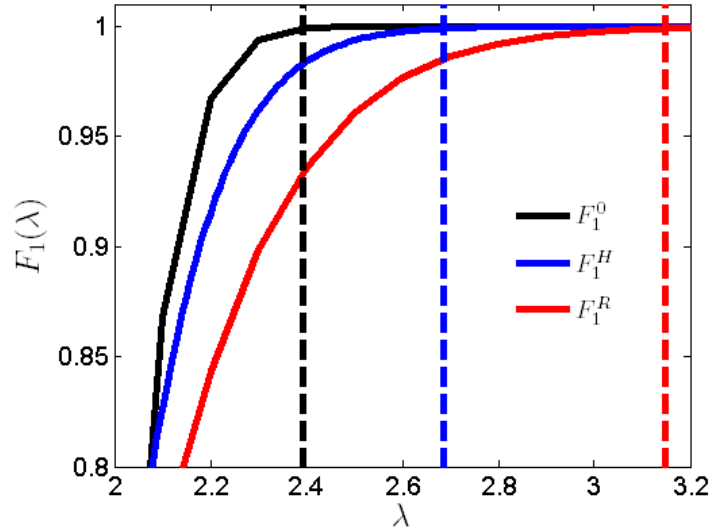


FIG. III.12: Fonctions de répartition  $F_1^0(\lambda)$ ,  $F_1^H(\lambda)$  et  $F_1^R(\lambda)$  obtenues pour  $M = 32$ . Les lignes verticales représentent les seuils de détection  $\lambda_S^0$ ,  $\lambda_S^F$  et  $I_S$  obtenus pour un taux de fausses alarmes  $\gamma = 10^{-3}$ .

Technique d'imagerie	D.O.R.T, $\mathbf{K}^0$	D.O.R.T, $\mathbf{K}^F$	Echographie
Seuil de détection	$\lambda_S^0 = 2.39$	$\lambda_S^F = 2.69$	$I_S = 3.15$
Limite de détection	$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{\lambda_S^0}{\sqrt{M}} \simeq 0,42$	$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{\lambda_S^F \sqrt{2}}{M} \simeq 0,12$	$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{I_S \sqrt{2}}{M} \simeq 0,14$

TAB. III.1: Tableau récapitulant les seuils de détection déduits de Eq.III.24 en considérant  $\gamma = 10^{-3}$ , et les conditions de détection établies en Annexe III.A.2. Ces seuils de détection ont été établis en prenant  $M = 32$ .

la fonction inverse  $F_1^{-1}(u)$  en  $u = 1 - \gamma$  :

$$I_S, \lambda_S^0, \lambda_S^F = F_1^{-1}(1 - \gamma) \quad (\text{III.24})$$

Sur la figure III.12, les lignes verticales désignent les seuils de détection obtenus pour chacune des trois techniques. Le taux de fausses alarmes a été fixé à  $\gamma = 10^{-3}$ . Les valeurs numériques de ces seuils sont reportées dans le tableau III.1. Les seuils de détection,  $I_S$ ,  $\lambda_S^0$ ,  $\lambda_S^F$ , seront appliqués respectivement sur le pic principal  $\tilde{I}_{\max}(T, f)$  de l'image échographique et sur les premières valeurs singulières normalisées,  $\tilde{\lambda}_1^0$  et  $\tilde{\lambda}_1^F$ , à chaque couple temps-fréquence  $(T, f)$  (voir Fig.III.13).

Ces seuils de détection permettent d'évaluer les performances de chaque technique. Cela consiste à prédire à partir de quel rapport signal-sur-bruit la cible pourra être détectée. On note  $\sigma_T^2$  la puissance des signaux associés à l'écho direct de la cible.  $\sigma_M^2$  représente la puissance moyenne du bruit de diffusion multiple. Nous devons donc prédire à partir de quel ratio  $\frac{\sigma_T}{\sigma_M}$ , la cible est susceptible d'être détectée pour une probabilité de fausse alarme donnée. Les détails des calculs sont donnés en Annexe III.A.2. Les performances estimées pour chaque technique

sont présentées sur le tableau III.1.

Il apparaît que notre technique est la plus performante. Sa limite de détection évolue en  $\frac{1}{M}$  tout comme l'échographie, ce qui est bien meilleur que la méthode D.O.R.T classique dont la limite de détection évolue en  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ . Les fluctuations inhérentes à la diffusion multiple sont plus importantes sur l'image échographique que sur le spectre des valeurs singulières de  $\mathbf{K}^F$  :  $\lambda_S^F < I_S$ . Ceci implique donc que pour une probabilité de fausse alarme donnée, notre technique arrive à détecter la cible pour des rapports signal-sur-bruit  $\frac{\sigma_T}{\sigma_M}$  moins importants que pour l'échographie. Néanmoins, la différence reste relativement faible. Comme on le verra au §III.7, ce n'est pas la seule raison pour laquelle notre technique présente de meilleures performances qu'une repropagation directe des signaux mesurés. Elle permet en effet de réduire les distorsions du front d'onde induites par l'aberration de la couche diffusante, alors que l'image échographique y est très sensible et est fortement dégradée par ces effets aberrants.

### III.6.2 Application des critères de détection à l'expérience

Maintenant que des seuils de détection ont été établis théoriquement (voir Tab.III.1), nous allons pouvoir les appliquer à nos résultats expérimentaux. La figure III.13 représente le maximum  $\tilde{I}_{\max}$  de l'image échographique normalisée, et les premières valeurs singulières normalisées  $\tilde{\lambda}_1^0$  et  $\tilde{\lambda}_1^F$ , à chaque couple  $(T, f)$ . A partir des figures de gauche de Fig.III.13, il est *a priori* difficile de déterminer pour quels couples  $(T, f)$  une cible est détectée. L'application des critères de détection, fondés sur une même probabilité de fausse alarme, donne une réponse très claire (voir Fig.III.13). La cible n'est détectée que pour très peu de couples temps-fréquence que ce soit par la méthode D.O.R.T classique ou par l'échographie. Au contraire, la combinaison d'un filtrage préalable des signaux simplement diffusés avec la méthode D.O.R.T permet la détection de la cible sur une bande de fréquence de  $[2, 65 ; 2, 8]$  MHz et sur une durée de  $7 \mu\text{s}$ . Cet étalement temporel de l'écho, qui était initialement de  $2, 5 \mu\text{s}$ , est dû à la perte d'une grande partie de la bande de fréquence initiale : alors que le signal émis présente une bande passante de 1 MHz, l'écho direct de la cible n'est perçu que sur une bande fréquentielle de 0, 15 MHz. Ce n'est pas un hasard si la détection de la cible se fait autour de 2, 7 MHz, car le milieu diffusant présente un libre parcours moyen  $l_e$  plus important ( $\simeq 10 \text{ mm}$ ) autour de cette fréquence [47]. Le milieu diffusant est plus *transparent* dans cette bande de fréquence, l'écho direct de la cible est moins atténué et peut être détecté grâce à notre technique. La figure III.13 illustre la facilité avec laquelle nous pouvons dire si effectivement une cible est détectée ou non, une fois la normalisation des valeurs singulières (Eq.II.2) et de l'image échographique (Eq.III.22) effectuée. Cette normalisation est très puissante car elle permet de fixer des critères de détection valables quels que soient le temps de vol  $T$  et la fréquence  $f$  considérés. Cela offre la possibilité d'effectuer une détection systématique de la cible plutôt qu'une détection *à l'oeil* très délicate en milieu aléatoire (*cf* Fig.III.13).

Maintenant que l'on a déterminé systématiquement les couples temps-fréquence  $(T, f)$  pour lesquels la cible est détectée, l'image finale peut être obtenue en sommant, pour chaque temps d'écho  $T$ , les images sur les fréquences  $f$  qui satisfont aux critères de détection. L'image finale



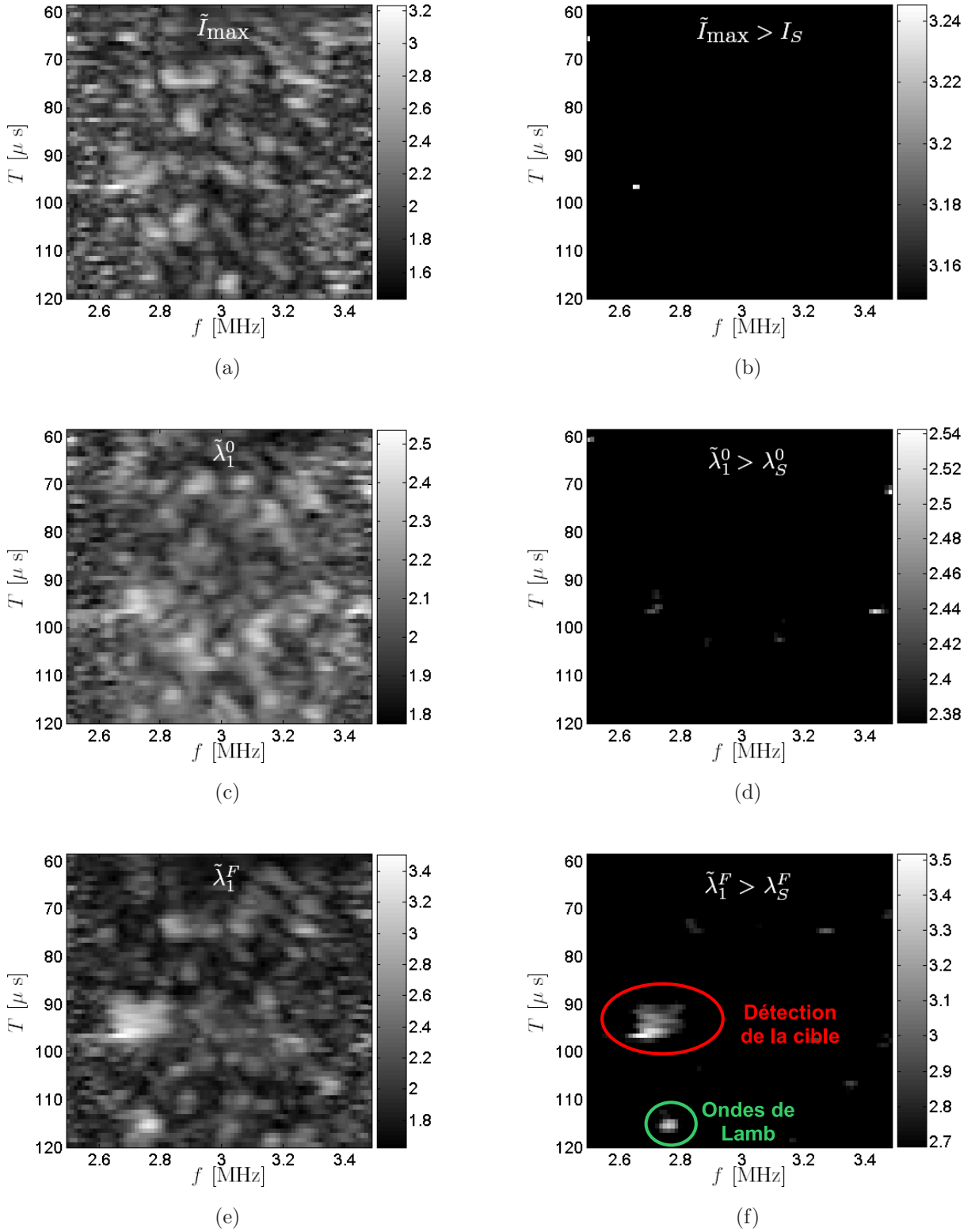


FIG. III.13: Evolution temps-fréquence de  $\tilde{I}_{\max}(T, f)$ ,  $\tilde{\lambda}_1^0(T, f)$  et  $\tilde{\lambda}_1^F(T, f)$ . A gauche, aucun critère de détection n'est appliqué. A droite, les différents critères de détection sont appliqués (voir Tab.III.1).



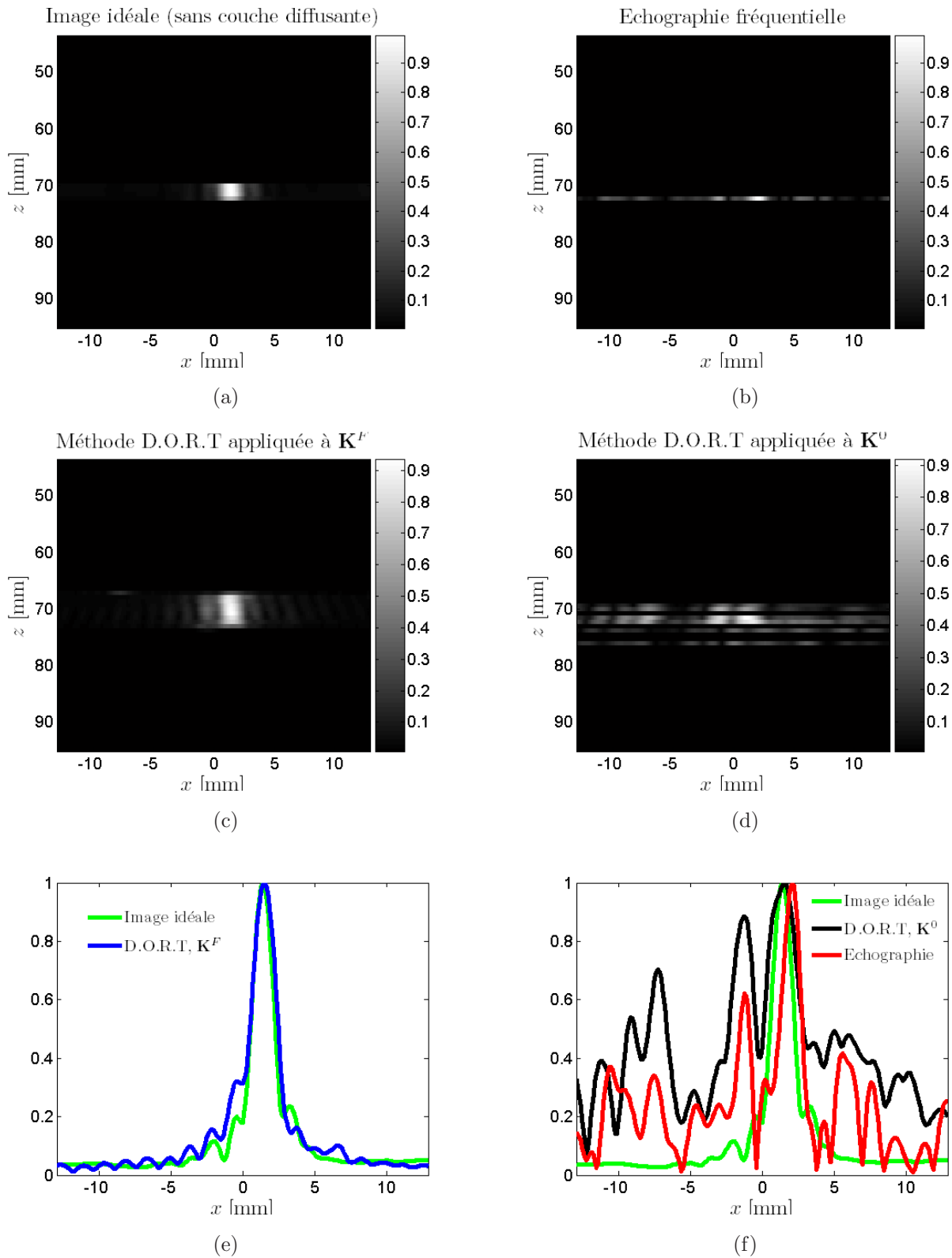


FIG. III.14: Image de la cible obtenue, (a) : en l'absence de couche diffusante, (b) : par repropagation directe des signaux, (c) : par une association de la méthode D.O.R.T et d'un filtrage préalable des signaux simplement diffusés, (d) : avec la méthode D.O.R.T. classique. (e) & (f) Images obtenues dans le plan de la cible

s'exprime en fonction de la position transverse  $x$  et de la profondeur  $z = cT/2$ . La figure III.14 montre les images obtenues par chacune des techniques d'imagerie proposées. L'image idéale obtenue en absence de couche diffusante est également représentée et constitue l'image de référence (Fig.III.14(a)). Le résultat est très satisfaisant pour notre technique (Fig.III.14(c)) : le filtrage préalable de la diffusion simple permet d'obtenir une image de la cible de qualité équivalente à celle obtenue dans le cas idéal (sans couche diffusante). Seule la résolution en profondeur est moins bonne du fait de la dispersion temporelle subie par l'écho de la cible lors de son passage à travers le milieu diffusant. La résolution axiale est, elle, pratiquement conservée par rapport au cas idéal comme on peut le voir sur le plan de coupe présenté sur la figure III.14(e). La position de la cible est retrouvée grâce à cette technique, contrairement aux résultats obtenus avec la méthode D.O.R.T classique et l'échographie fréquentielle. En plus de ne permettre une détection de la cible que pour très peu de couples temps-fréquence  $(T, f)$ , les images obtenues sont particulièrement dégradées par l'aberration. Même si, sur le plan de coupe (Fig.III.14(f)), un pic est observé à proximité de la position attendue pour la cible, des lobes secondaires d'amplitude importante apparaissent sur l'image (pour les deux techniques) et un déplacement de la tache focale est observé pour l'échographie fréquentielle. Cette dégradation est due au fait qu'on repropage les signaux en faisant l'approximation de Born : le milieu de repropagation est considéré comme homogène avec une célérité du son homogène, ce qui n'est évidemment pas adapté ici. Les techniques de correction d'aberration [117, 118, 119, 120, 121] sont difficilement exploitables dans notre configuration expérimentale du fait de la diffusion multiple importante engendrée par le milieu. Au contraire, notre technique s'accommode fort bien de ce modèle de repropagation homogène. Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, le filtrage des antidiagonales *lisse* les distorsions du front d'onde, ce qui permet de *gommer* l'aberration engendrée par le milieu.

Une autre observation intéressante est l'apparition d'un écho autour d'un temps  $T = 115 \mu\text{s}$ , situé au-dessus du seuil de détection (voir Fig.III.13(f)). Cet écho n'est pas un artefact lié à la diffusion multiple. Il correspond à la détection d'ondes circonférentielles s'étant propagées autour de la cible. Ce phénomène a déjà été mis en évidence par Kerbrat *et al.* en appliquant la méthode D.O.R.T à la caractérisation de tubes en acier [122]. La différence de temps de vol entre l'écho spéculaire ( $90 \mu\text{s} < T < 97 \mu\text{s}$ ) et ce front d'onde lié à une onde circonférentielle ( $T \simeq 115 \mu\text{s}$ ) nous laisse penser qu'il s'agit du mode de Lamb  $A_0$  se propageant à la surface du cylindre [122]. L'étude de ces modes de Lamb peut offrir une caractérisation plus complète de la cible.

En conclusion, le filtrage préalable des antidiagonales de la matrice de réponse associé à la méthode D.O.R.T permet de détecter la cible sur une bande de fréquence et une durée plus importantes que pour les techniques d'imagerie classiques. Cette différence de performance entre notre technique et la méthode D.O.R.T est bien expliquée en comparant les performances prévues pour les deux techniques sur le tableau III.1. En revanche, elle ne devrait pas être aussi importante avec l'échographie fréquentielle si l'on s'en réfère au même tableau. En réalité, les performances résumées dans le tableau III.1 ont été prédites en considérant que la couche diffusante n'occasionnait que du bruit de diffusion multiple, or l'aberration de la couche diffusante

est un phénomène loin d'être négligeable ici. Les fronts d'onde incident et rétrodiffusé par la cible subissent des distorsions de phase et d'amplitude lorsqu'ils traversent la couche diffusante. Ces effets aberrants dégradent fortement l'image échographique : la tache focale voit son amplitude diminuer, elle se déplace et des lobes secondaires font leur apparition. Au contraire, le filtrage des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  lisse les distorsions de phase subies par l'écho direct de la cible, comme nous le verrons au §III.7. Ceci explique l'excellente localisation de la cible lorsque la méthode D.O.R.T est appliquée à la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$ .

## III.7 Aberration

Dans ce paragraphe, nous étudions l'effet de notre technique de filtrage des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  sur les distorsions du front d'onde issu de la cible. On met en évidence un *lissage* des distorsions de phase dues à l'aberration de la couche diffusante. Si celles-ci ne sont pas trop importantes, notre filtre les diminue suffisamment pour que la méthode D.O.R.T appliquée à  $\mathbf{K}^F$  puisse ensuite localiser correctement la cible.

### III.7.1 Distorsion du front d'onde due à la couche diffusante

Afin d'étudier les effets de l'aberration indépendamment de ceux de la diffusion multiple, nous avons mesuré la matrice des réponses impulsionnelles  $\mathbf{H}(t)$  dans trois configurations :

- 1/ En présence de la seule couche diffusante (la cible a été ôtée du dispositif expérimental).
- 2/ En présence de la couche diffusante et de la cible ; il s'agit de la configuration étudiée jusqu'à maintenant.
- 3/ En présence de la seule cible (la couche diffusante a été ôtée du dispositif expérimental).

Nous notons les matrices correspondantes  $\mathbf{H}^{(i)}$ , où l'exposant  $i$  est associé au numéro de la configuration correspondante (1, 2 ou 3). Pour examiner les effets de l'aberration, nous avons calculé la matrice  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}$ . Les signaux, associés à des chemins de diffusion ne mettant pas en jeu la cible, sont supprimés par cette opération. Les premiers échos de la matrice  $\mathbf{H}$  correspondent à l'écho direct de la cible (diffusion simple). Les échos qui suivent sont liés à des chemins de diffusion multiple mettant en jeu à la fois la cible et les diffuseurs de la couche diffusante. Sur la figure III.15(b), une ligne de la matrice  $\mathbf{H}(t)$  est représentée dans la fenêtre temporelle  $[90; 100] \mu\text{s}$  où l'écho direct de la cible est attendu. Elle est comparée à la même ligne de la matrice  $\mathbf{H}^{(3)}$ , présentée sur la figure III.15(a).

La comparaison de ces deux matrices met en évidence les distorsions subies par le front d'onde lorsqu'il traverse la couche diffusante. La figure III.15(b) correspond à un front d'onde typique obtenu en présence d'un fort aberrateur.

Étudions maintenant l'action du filtrage de la diffusion simple sur ces distorsions. Pour cela, on passe dans le domaine de Fourier par l'intermédiaire d'une TFD effectuée sur la fenêtre temporelle  $[90; 100] \mu\text{s}$ . On obtient ainsi une série de matrices  $\mathbf{K}(f)$  et  $\mathbf{K}^{(3)}(f)$ . Les distorsions induites par la couche diffusante peuvent être quantifiées par une matrice  $\mathbf{D}(f)$  dont les

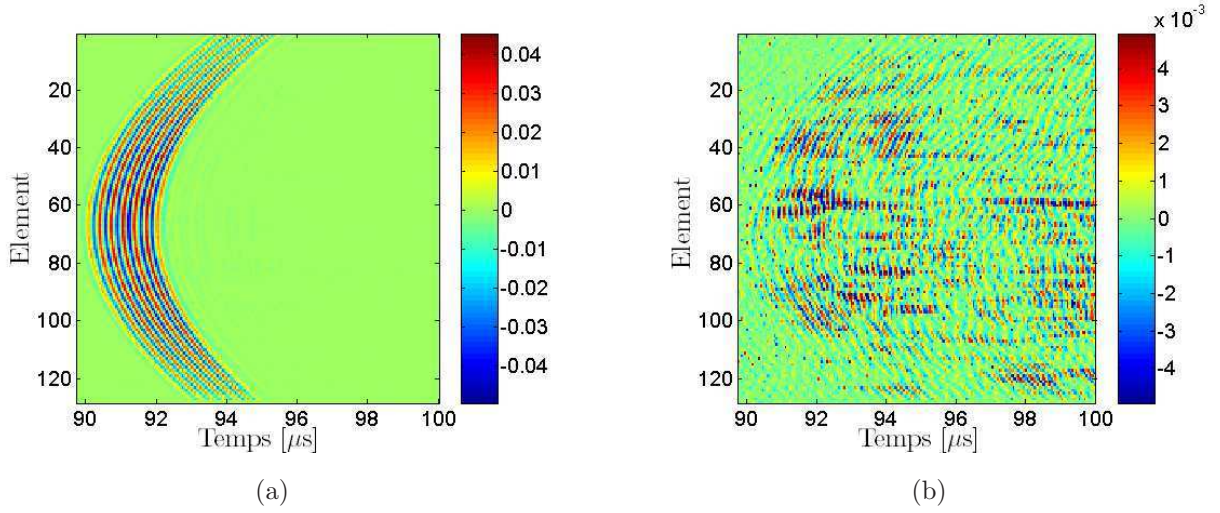


FIG. III.15: (a) Ligne 64 de la matrice  $\mathbf{H}^{(3)}(t)$  dans la fenêtre temporelle  $[90; 100] \mu\text{s}$ . (b) Ligne 64 de la matrice  $\mathbf{H}(t)$  dans la même fenêtre temporelle.

coefficients  $d_{ij}$  sont définis par :

$$d_{ij}(f) = \frac{k_{ij}(f)}{k_{ij}^{(3)}(f)} \quad (\text{III.25})$$

Si la couche diffusante n'était pas aberrante, les coefficients  $d_{ij}$  seraient réels (pas d'aberration de phase) et d'amplitude uniforme (pas d'aberration d'amplitude). Evidemment, dans notre cas, les coefficients  $d_{ij}$  sont loin de respecter cette propriété comme on peut le voir sur l'exemple de la figure III.16(a).

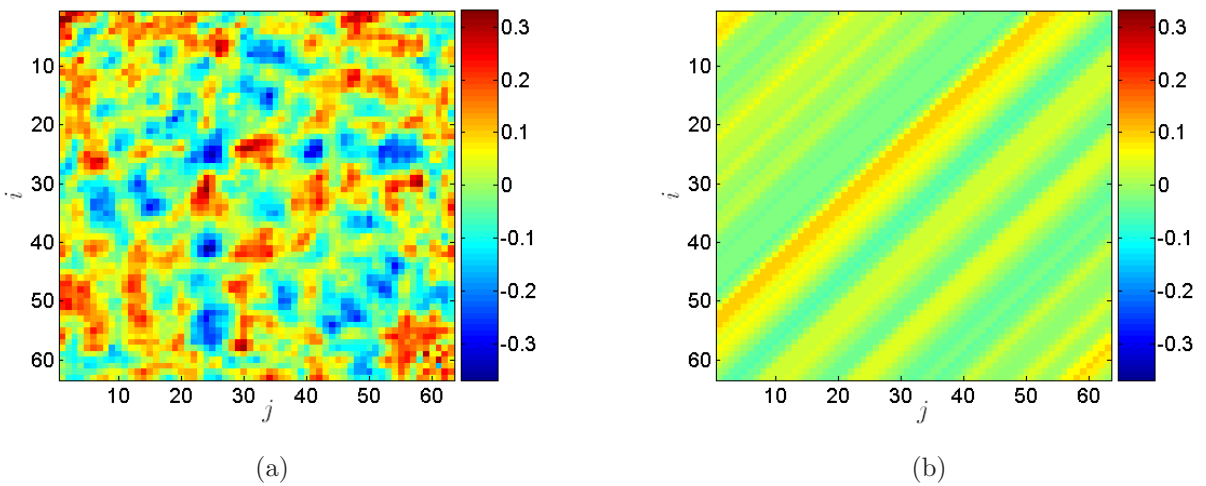


FIG. III.16: (a) Partie réelle de la matrice des coefficients de distorsion  $\mathbf{D}^0(f)$  à la fréquence  $f = 3,1 \text{ MHz}$ . (b) Partie réelle de la matrice des coefficients de distorsion filtrés  $\mathbf{D}^F(f)$  à la même fréquence.

### III.7.2 Action du filtrage sur les coefficients de distorsion

Nous exprimons tout d'abord les coefficients  $k_{ij}$  et  $k_{ij}^{(3)}$ . Pour la matrice  $\mathbf{K}^{(3)}$  mesurée en l'absence de couche diffusante, on peut reprendre l'équation III.3 mais en ne considérant qu'un diffuseur (la cible) :

$$k_{ij}^{(3)}(f) \propto \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.26})$$

où  $(X_T, R_T)$  sont les coordonnées de la cible. Dans un souci de simplification, nous omettons le terme  $\frac{\exp(j2kR_T)}{R_T}$  et le terme de réflectivité présents dans Eq.III.3. Ces termes sont constants et n'auront aucune influence dans notre démonstration. Les coefficients  $k_{ij}$  peuvent eux être directement déduits des équations III.25 et III.26.

$$k_{ij}(f) \propto d_{ij}(f) \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.27})$$

Comme on l'a vu au §III.4, l'extraction de la diffusion simple consiste en un filtrage des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ . Concernant l'action de ce filtrage sur l'aberration, il se traduit par une moyenne des coefficients de distorsion le long de chaque antidiagonale. En effet, si on applique à la matrice  $\mathbf{K}$  les différentes étapes du filtrage décrites au §III.4, on peut montrer que les coefficients de la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  sont donnés par (voir Annexe III.A.3) :

$$k_{lm}^F(f) \propto e_{l+m-1}(f) \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.28})$$

où les coefficients  $e_v$  correspondent à la moyenne des coefficients  $d_{ij}$  le long de chaque antidiagonale de la matrice  $\mathbf{D}$  (voir Annexe III.A.3) :

si  $v$  est impair,

$$\text{alors, } e_v = \left\langle d \left[ u + \frac{v-1}{2}, \frac{v-1}{2} - u + 2M - 1 \right] \right\rangle_{u=1, \dots, 2M-1} \quad (\text{III.29})$$

si  $v$  est pair,

$$\text{alors, } e_v = \left\langle d \left[ u + \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - u + 2M - 1 \right] \right\rangle_{u=1, \dots, 2M-2} \quad (\text{III.30})$$

où le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne effectuée sur la variable placée en indice. Le filtre appliqué à la matrice  $\mathbf{K}$  moyenne les fluctuations dues à l'aberration le long de chaque antidiagonale. Sur la figure III.16(b), on a représenté la matrice des coefficients de distorsion filtrés  $\mathbf{D}^F$ , dont les coefficients sont tels que  $d_{ij}^F = e_{i+j-1}$ . Si on compare les matrices  $\mathbf{D}^0$  et  $\mathbf{D}^F$ , on observe que le filtrage des antidiagonales s'accompagne d'une diminution des fluctuations des coefficients de distorsion. L'écart type  $\text{std}[e_p]$  des coefficients  $e_p$  est diminué d'un facteur  $\sqrt{N_{ind}}$  par rapport aux coefficients  $d_{ij}$  :

$$\text{std}[e_p] = \frac{\text{std}[d_{ij}]}{\sqrt{N_{ind}}} \quad (\text{III.31})$$

où  $N_{ind}$  est le nombre de coefficients indépendants le long de chaque antidiagonale de  $\mathbf{D}$ . Si la matrice  $\mathbf{D}$  ne présentait pas de corrélations entre éléments voisins, le nombre de coefficients indépendants  $N_{ind}$  le long de chaque antidiagonale serait égal à  $M$ . Ici, des corrélations résiduelles existent entre éléments voisins appartenant à la même antidiagonale (voir Fig.III.16(a)). Dans notre configuration expérimentale,  $N_{ind}$  est proche de  $\frac{M}{2}$ .  $N_{ind}$  est ici directement relié à la longueur de cohérence de l'aberrateur. La décroissance de l'écart type des coefficients de distorsion après filtrage de la diffusion simple est illustrée sur la figure III.17.

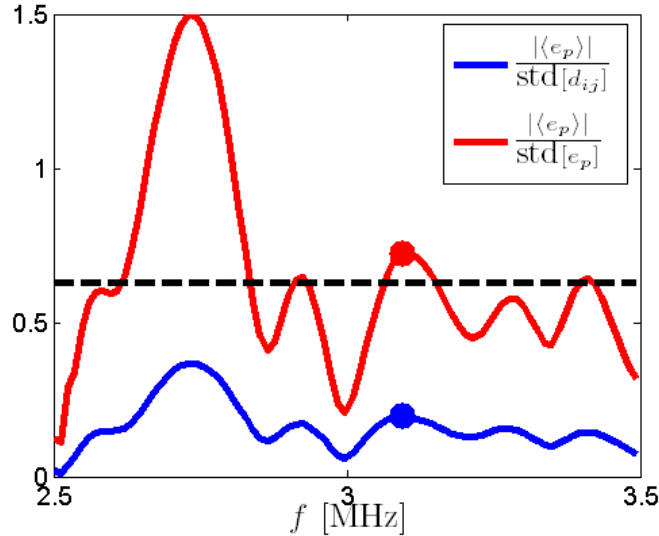


FIG. III.17: Inverse de l'écart-type estimé pour les coefficients de distorsion avant (bleu) et après (rouge) filtrage des antidiagonales de  $\mathbf{K}$ . La ligne horizontale représente le seuil défini par l'équation III.38.

L'évolution des ratios  $\frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[d_{ij}]}$  et  $\frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[e_p]}$  est tracée en fonction de la fréquence. Notons que  $|\langle e_p \rangle| = |\langle d_{ij} \rangle|$ . On vérifie bien que le facteur de proportionnalité entre les deux courbes est d'environ  $\sqrt{N_{ind}} \simeq \sqrt{\frac{M}{2}} = 4$ .

### III.7.3 Extraction de la diffusion simple combinée avec D.O.R.T

Avant d'appliquer la méthode D.O.R.T, la matrice  $\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$  est tronquée en ne considérant plus qu'une voie sur quatre. Cette opération est nécessaire afin que la matrice des coefficients de distorsion correspondante  $\mathbf{D}^{\mathbf{F}}$  ne présente plus de corrélations entre ses lignes et ses colonnes, ce qui permet de se placer dans le cadre général de la RMT. Une fois cette opération réalisée, la matrice  $\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$  est de taille  $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$ .

La méthode D.O.R.T est appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$  :

$$\mathbf{K}^{\mathbf{F}} = \mathbf{U}^{\mathbf{F}} \mathbf{\Lambda}^{\mathbf{F}} \mathbf{V}^{\mathbf{F}\dagger} \quad (\text{III.32})$$

Pour comprendre l'action de la SVD sur la matrice  $\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ , on peut décomposer cette dernière en la somme d'une matrice *moyenne*  $\langle \mathbf{K}^{\mathbf{F}} \rangle$  (qui constitue l'espérance de la matrice  $\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ ) et d'une

perturbation  $\Delta\mathbf{K}^F$  associée aux fluctuations  $[e_p - \langle e_p \rangle]$  des coefficients de distorsion autour de leur moyenne :

$$\mathbf{K}^F = \underbrace{\langle \mathbf{K}^F \rangle}_{\text{Matrice de rang 1}} + \underbrace{\Delta\mathbf{K}^F}_{\text{Matrice de Hankel aléatoire}} \quad (\text{III.33})$$

Les coefficients de la matrice  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$  sont donnés par :

$$\langle k_{lm}^F(f) \rangle = \langle e_{l+m-1}(f) \rangle \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.34})$$

Cette matrice  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$  est strictement égale à la matrice  $\mathbf{K}^{(3)}$  (Eq.III.26) pondérée par la distorsion moyenne  $\langle e_p \rangle$  engendrée par la couche diffusante :

$$\langle \mathbf{K}_t^F \rangle = \langle e_p \rangle \langle \mathbf{K}^{(1)} \rangle \quad (\text{III.35})$$

Cette matrice est de rang 1 et on s'attend à ce que le vecteur propre correspondant focalise exactement à l'endroit où est placée la cible.

Quant à la matrice  $\Delta\mathbf{K}^F$ , ses coefficients  $\delta k_{lm}^F$  sont donnés par

$$\delta k_{lm}^F(f) = [e_{l+m-1}(f) - \langle e_{l+m-1}(f) \rangle] \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.36})$$

Cette matrice  $\Delta\mathbf{K}^F$  correspond à la perturbation due à l'aberration de la couche diffusante : elle contient les fluctuations des coefficients de distorsion  $e_p$  autour de leur moyenne  $\langle e_p \rangle$ . Ses coefficients de distorsion  $[e_{l+m-1}(f) - \langle e_{l+m-1}(f) \rangle]$  sont constants le long de chaque antidiagonale ( $l + m = \text{constante}$ ). Il existe donc une relation de phase déterministe entre les coefficients de  $\Delta\mathbf{K}$  situés sur la même antidiagonale :

$$\beta_n = \frac{\delta k_{l-n, l+n}(T, f)}{\delta k_{ll}(T, f)} = \exp \left[ jk \frac{(np)^2}{R} \right] \quad (\text{III.37})$$

où  $p$  est la distance inter-éléments et  $n$  un entier. Comme on l'a montré au §II.5.2, la matrice  $\Delta\mathbf{K}$  présente le même comportement statistique qu'une matrice de Hankel aléatoire.

Quand la SVD est appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^F$  (Eq.III.32), nous espérons que son premier espace propre  $\lambda_1^F \mathbf{U}_1^F \mathbf{V}_1^{F\dagger}$  corresponde à la matrice  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$ . Dans ce cas, le vecteur singulier  $\mathbf{V}_1^F$  se repropage vers la position exacte de la cible. Cela n'est possible que si la matrice  $\Delta\mathbf{K}^F$  ne constitue qu'une faible perturbation par rapport à  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$ . Autrement dit, on arrivera à imager correctement la cible si les coefficients de distorsion sont suffisamment lissés par le filtrage préalable des antidiagonales.

Nous allons maintenant prédire le taux de fluctuations limite à ne pas pas dépasser si l'on souhaite imager correctement la cible. Les résultats de la RMT sont une nouvelle fois utilisés. Le signal correspond ici à la valeur moyenne des coefficients de distorsion  $|\langle e_p \rangle|$ . Le bruit correspond à leur écart type observé. En Annexe III.A.4, on montre que la SVD réussira à extraire  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$  sur le premier espace propre de  $\mathbf{K}^F$  si :

$$\frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[e_p]} > \frac{\lambda_S^F}{\sqrt{M/2}} \quad (\text{III.38})$$



où  $\lambda_S^F$  est le seuil de détection pour la première valeur singulière dans le cas d'une matrice de Hankel aléatoire (voir §III.6). Le seuil de détection défini par l'équation III.38 est matérialisé par la ligne horizontale noire sur la figure III.17.  $\lambda_S^F$  a été calculé ici en considérant la fonction de répartition  $F_1^H(\lambda)$  obtenue pour une matrice de Hankel de taille  $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$ , avec ici  $\frac{M}{2} = 16$ . Le taux de fausses alarmes a été fixé à  $\gamma = 10^{-3}$  et nous avons obtenu numériquement un seuil  $\lambda_S^F = 2.52$ . Notre technique réussira à imager correctement la cible aux fréquences  $f$  pour lesquelles le ratio  $\frac{|(e_p)|}{\text{std}_{[e_p]}}$  (courbe rouge sur Fig.III.17) est au dessus du seuil  $\frac{\lambda_S^F}{\sqrt{M/2}}$  (ligne noire sur Fig.III.17).

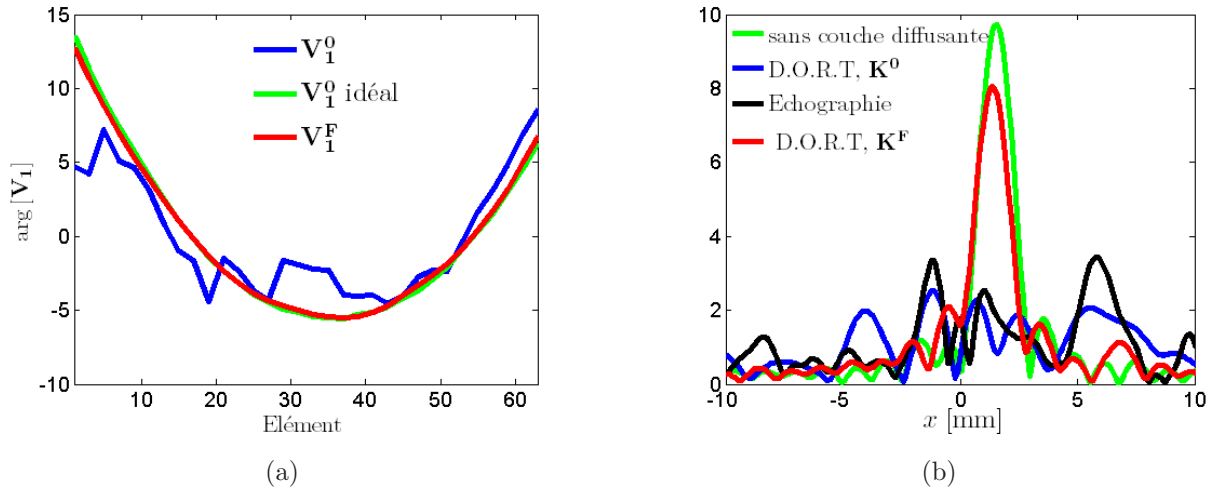


FIG. III.18: (a) Phase déroulée du premier vecteur propre  $\mathbf{V}_1$  à la fréquence  $f = 3,1$  MHz. Les phases des vecteurs propres  $\mathbf{V}_1^0$  (bleu) et  $\mathbf{V}_1^F$  (rouge) sont comparées à la phase idéale (vert) obtenue en l'absence d'aberration. (b) Images obtenues en repropageant numériquement les premiers vecteurs propres  $\mathbf{V}_1^0$  (bleu),  $\mathbf{V}_1^F$  (rouge) comparées à celle obtenu dans le cas idéal (vert) et à l'image échographique (noir).

Pour illustrer l'effet du filtrage des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  sur les distortions du front d'onde, nous allons prendre l'exemple des résultats obtenus à la fréquence  $f = 3,1$  MHz. Cette fréquence est mise en évidence par des disques pleins sur la figure III.17. A cette fréquence, notre technique doit fonctionner puisque l'on est au dessus du seuil de détection. La SVD est appliquée aux matrices  $\mathbf{K}^0$  (non filtrée) et  $\mathbf{K}^F$ . Les phases déroulées des premiers vecteurs propres  $\mathbf{V}_1^0$  et  $\mathbf{V}_1^F$  sont tracées sur la figure III.18(a). Elles sont comparées à la phase idéale obtenue en absence de couche diffusante. Celle-ci correspond à la loi parabolique  $k \frac{(x_i - X_T)^2}{2R_T}$  qui permet de focaliser à la bonne position. La phase déroulée du premier vecteur propre est une observable pertinente car elle correspond au front d'onde lié à la cible. Sans filtrage préalable, les fortes distortions de phase du front d'onde résultent en un premier vecteur propre  $\mathbf{V}_1^0$  dont la phase déroulée est marquée par d'importantes fluctuations erratiques par rapport à la phase idéale : l'écart type de ces fluctuations est ici de 2,65 rad. Au contraire, le filtrage préalable des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  conduit à un vecteur propre  $\mathbf{V}_1^F$  dont la phase déroulée présente un comportement proche du cas idéal.



La figure III.18(b) représente les différentes images obtenues dans le plan focal suite à la repropagation numérique des premiers vecteurs propres  $\mathbf{V}_1^0$  et  $\mathbf{V}_1^F$ . Ce dernier refocalise sur la position de la cible, avec une qualité proche de celle obtenue en l'absence d'aberration. Au contraire, sans filtrage préalable, le vecteur singulier  $\mathbf{V}_1^0$  ne refocalise pas numériquement sur la cible et il est impossible de connaître sa position. Notons que si  $\mathbf{V}_1^0$  était repropagé expérimentalement, il refocaliserait sur la cible : les distorsions du front d'onde seraient corrigées par le milieu diffusant lui même. Malheureusement, en pratique, on ne peut pas connaître l'aberration engendrée par la couche diffusante du fait de la diffusion multiple. Enfin, nous montrons également l'image échographique obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{K}^0$  sur la figure III.18(b). De nouveau, les distorsions de phase induites par l'aberration sont si importantes que l'image obtenue présente une série de lobes principaux sans rapport avec la position réelle de la cible.

L'exemple présenté sur la figure III.18 rend évidente l'action de notre filtre sur les effets aberrants de la couche diffusante. Il permet de lisser les coefficients de distorsion  $d_{ij}$  d'un facteur  $\sqrt{\frac{M}{2}}$ . Si ce lissage est suffisant, la SVD réussit ensuite à extraire la matrice *non-distordue*  $\langle \mathbf{K}_t^F \rangle$  sur le premier espace propre de  $\mathbf{K}^F$ . La repropagation du vecteur propre associé  $\mathbf{V}_1^F$  permet ensuite de localiser la cible avec une très bonne précision, comme en atteste la figure III.18(b).

En conclusion, le lissage de l'aberration opéré par le filtrage des antidiagonales de  $\mathbf{K}$  explique la grande différence de performance observée entre l'échographie et notre technique. En effet, même si l'écho direct de la cible émerge du bruit de diffusion multiple, l'échographie échoue à imager correctement la cible du fait de l'aberration importante induite par la couche diffusante. Au contraire, notre technique diminue cette influence et la SVD permet ensuite d'extraire le front d'onde non distordu sur le premier vecteur propre  $\mathbf{V}_1^F$ . La repropagation de celui-ci dans un milieu virtuellement homogène permet ensuite d'imager correctement la cible, sans occurrence de lobes secondaires ni de déplacement de la tache focale.

## III.8 Conclusion

En conclusion, la technique développée ici, combinant l'extraction de signaux simplement diffusés et la méthode D.O.R.T, améliore sensiblement les capacités d'un réseau multi-éléments en ce qui concerne la détection et l'imagerie d'une cible placée derrière une couche hautement diffusante. D'une part, l'analyse temps-fréquence de la matrice de réponse permet de sélectionner les bandes de fréquence favorables à sa détection, contrairement à l'échographie traditionnelle effectuée dans le domaine temporel. Cela est rendu possible en fixant un critère de détection rigoureux basé sur la théorie des matrices aléatoires. On a ainsi pu montrer que la diminution de la contribution multiplement diffusée permettait d'améliorer significativement les performances de la méthode D.O.R.T en milieu aléatoire. Notre technique présente même de meilleures performances que l'échographie focalisée en terme de détection de cible. D'autre part, les effets aberrants de la couche diffusante sont fortement diminués par le filtre appliqué aux antidiagonales de la matrice de réponse. Alors que l'aberration dégrade fortement l'image

échographique, notre technique permet de corriger ses effets et de localiser la cible avec une très bonne précision. Les perspectives de ce travail sont nombreuses, un brevet a notamment été déposé sur cette technique. La prochaine étape consistera à tester son efficacité dans des situations *réelles* (détection d'une cible enfouie dans la terre, de défauts dans des aciers particulièrement diffusants aux fréquences ultrasonores, *etc.*).

## III.A Annexes du chapitre III

### III.A.1

Le but de cet annexe est de montrer pourquoi l'échographie et l'extraction des signaux simplement diffusés décrite au §III.4 ne sont pas complémentaires.

D'après l'équation III.19 et sous l'approximation paraxiale, la coordonnée  $I_l$  de l'image échographique obtenue au temps  $T = 2R/c$  et à la fréquence  $f$  peut être exprimée comme :

$$I_l(T, f) = \left| \sum_i \sum_j k_{ij}(T, f) \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} [(x_i - x_l)^2 + (x_j - x_l)^2] \right\} \right| \quad (\text{III.39})$$

On peut réécrire cette dernière équation dans la base définie par Eq.III.8 :

$$y_u = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y_v = \frac{x_i + x_j}{\sqrt{2}},$$

ce qui donne :

$$I_l(T, f) = \left| \sum_u \sum_v a_{uv} \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ y_u^2 + (y_v - \sqrt{2}x_l)^2 \right] \right\} \right| \quad (\text{III.40})$$

où les coefficients  $a_{uv}$  sont directement déduits des  $k_{ij}$  suite à la rotation des données décrites au §III.4.2. Eq.III.40 peut se simplifier selon :

$$I_l(T, f) = \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ (y_v - \sqrt{2}x_l)^2 \right] \right\} \underbrace{\sum_u s_u^* a_{uv}}_{p_v} \right| \quad (\text{III.41})$$

où les coordonnées  $s_u$  du vecteur  $\mathbf{S}$  sont données par l'équation III.10. Ici, nous voyons que l'échographie peut être décomposée en deux étapes : la somme sur l'indice  $u$  et la somme sur l'indice  $v$ . Cette dernière somme n'est autre que la projection des colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$  sur l'espace caractéristique de la diffusion simple généré par le vecteur  $\mathbf{S}$ , comme on l'a vu au paragraphe III.4.3. Ainsi, la technique d'extraction des signaux simplement diffusés constitue une étape de l'échographie.

Maintenant, nous pouvons essayer de combiner l'extraction des signaux simplement diffusés avec l'échographie. On pourrait en effet s'attendre à un gain en rapport signal-sur-bruit puisque nous associons deux techniques censées diminuer le poids de la contribution de diffusion multiple. En réalité, il n'en est rien. Ces deux techniques ne sont pas complémentaires car le filtrage

de la diffusion simple constitue déjà une étape de l'échographie. Afin de montrer rigoureusement cette non-complémentarité, on peut exprimer l'image  $I_l^F(T, f)$  qui serait obtenue à partir de la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$ . Cette expression est directement déduite de Eq.III.41, en remplaçant  $a_{uv}$  par  $a_{uv}^F$ ,

$$I_l^F(T, f) = \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ \left( y_v - \sqrt{2}x_l \right)^2 \right] \right\} \sum_u s_u^* a_{uv}^F \right| \quad (\text{III.42})$$

En injectant l'expression de  $a_{uv}^F$  (Eq.III.15) dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} I_l^F(T, f) &= \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ \left( y_v - \sqrt{2}x_l \right)^2 \right] \right\} \sum_u s_u^* a_{uv}^S \right| \\ &+ \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ \left( y_v - \sqrt{2}x_l \right)^2 \right] \right\} \sum_u s_u^* s_u \sum_{u'=1}^L s_{u'}^* a_{u'v}^M \right| \end{aligned}$$

Comme le vecteur  $\mathbf{S}$  est normé, on a  $\sum_u s_u^* s_u = 1$  et la dernière équation se simplifie selon :

$$I_l^F(T, f) = \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ \left( y_v - \sqrt{2}x_l \right)^2 \right] \right\} \sum_u s_u^* [a_{uv}^S + a_{uv}^M] \right| \quad (\text{III.43})$$

$$= \left| \sqrt{L} \sum_v \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} \left[ \left( y_v - \sqrt{2}x_l \right)^2 \right] \right\} \sum_u s_u^* a_{uv} \right| \quad (\text{III.44})$$

Cette dernière équation est strictement identique à Eq.III.41 :

$$I_l(T, f) = I_l^F(T, f) \quad (\text{III.45})$$

Ainsi les images obtenues à partir des données mesurées (matrice  $\mathbf{K}$ ) ou préalablement filtrées (matrice  $\mathbf{K}^F$ ) sont identiques. Il n'y a aucun intérêt à combiner un filtrage préalable des signaux simplement diffusés avec l'échographie.

### III.A.2

Le but de cette annexe est de prédire les performances de chaque technique (échographie fréquentielle, D.O.R.T, D.O.R.T combinée à l'extraction de la diffusion simple) en ce qui concerne la détection d'une cible cachée derrière une couche diffusante. L'écho direct de la cible est associé à des signaux dont la puissance est donnée par  $\sigma_T^2$ . Le bruit de diffusion multiple est associé à des signaux de puissance moyenne  $\sigma_M^2$ . La performance de chaque technique est évaluée en déterminant à partir de quel rapport  $\frac{\sigma_T}{\sigma_M}$  la cible pourra être détectée.

On se place au temps d'écho de la cible et à une fréquence quelconque. On va décomposer la matrice tronquée  $\mathbf{K}^0$  de taille  $M \times M$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}^T + \mathbf{K}^M \quad (\text{III.46})$$

La matrice  $\mathbf{K}^M$  est associée à la contribution de diffusion multiple ; ses coefficients sont supposés être des variables aléatoires, complexes, gaussiennes, *i.i.d.*, de variance  $\sigma_M^2$  et à moyenne nulle.

Du fait de la réciprocité spatiale,  $\mathbf{K}^M$  est symétrique. La matrice  $\mathbf{K}^T$  est associée à l'écho direct de la cible, ses coefficients s'expriment de la manière suivante :

$$k_{ij}^T = \sigma_T \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.47})$$

où  $(X_T, R_T)$  sont les coordonnées de la cible. Les effets aberrants de la couche diffuse sont négligés.

### Echographie fréquentielle

Les coordonnées de l'image échographique  $\mathbf{I}$  obtenue au temps d'écho de la cible sont données par :

$$I_l = \left| \sum_i \sum_j k_{ij}^0 \exp \left\{ -j \frac{k}{2R_T} [(x_i - x_l)^2 + (x_j - x_l)^2] \right\} \right| \quad (\text{III.48})$$

Exprimons l'intensité de l'image échographique en utilisant le fait que  $k_{ij}^0 = k_{ij}^T + k_{ij}^M$  :

$$I_l^2 = \underbrace{\sum_{p,q,r,s} k_{pq}^T k_{rs}^{T*} \exp \left\{ -\frac{jk}{2R_T} [(x_p - x_l)^2 - (x_r - x_l)^2 + (x_s - x_l)^2 - (x_t - x_l)^2] \right\}}_{[I_l^T]^2} \quad (\text{III.49})$$

$$+ \underbrace{\sum_{p,q,r,s} k_{pq}^M k_{rs}^{M*} \exp \left\{ -\frac{jk}{2R_T} [(x_p - x_l)^2 - (x_r - x_l)^2 + (x_s - x_l)^2 - (x_t - x_l)^2] \right\}}_{[I_l^M]^2} \quad (\text{III.50})$$

$$+ \underbrace{\sum_{p,q,r,s} k_{pq}^T k_{rs}^{M*} \exp \left\{ -\frac{jk}{2R_T} [(x_p - x_l)^2 - (x_r - x_l)^2 + (x_s - x_l)^2 - (x_t - x_l)^2] \right\}}_{I_l^{T,M}} \quad (\text{III.51})$$

$$+ \underbrace{\sum_{p,q,r,s} k_{pq}^M k_{rs}^{T*} \exp \left\{ -\frac{jk}{2R_T} [(x_p - x_l)^2 - (x_r - x_l)^2 + (x_s - x_l)^2 - (x_t - x_l)^2] \right\}}_{I_l^{M,T}} \quad (\text{III.52})$$

En injectant l'expression de  $k_{ij}^T$  dans  $[I_l^T]^2$  (Eq.III.49), on obtient directement l'intensité du pic lié à la cible :

$$[I_l^T]^2 = M^4 \sigma_T^2 \delta(x_l - X_T) \quad (\text{III.53})$$

La contribution de diffusion multiple (Eq.III.50) donne lieu à une figure de speckle dont l'intensité moyenne  $\langle [I_l^M]^2 \rangle$  est donnée par :

$$\langle [I_l^M]^2 \rangle = 2M^2 \sigma_M^2 \quad (\text{III.54})$$

Le facteur 2 provient du fait que  $k_{ij}^M = k_{ji}^M$ . Les troisième et quatrième termes  $I_l^{T,M}$  et  $I_l^{M,T}$  correspondent à l'interférence entre les signaux associés à la cible et les signaux multidiffusés. Ceux-ci étant par hypothèse décorrélés, ces termes sont à moyenne nulle :

$$\langle I_l^{T,M} \rangle = \langle I_l^{M,T} \rangle = 0 \quad (\text{III.55})$$

En moyenne, l'intensité de l'image échographique au temps de vol de la cible présente le profil suivant : un pic lié à la cible en  $x_l = X_T$ , d'intensité  $M^4\sigma_T^2$ , enfoui dans une figure de speckle d'intensité moyenne  $2M^2\sigma_M^2$ .

Si le maximum de l'image  $I_{\max}$  est effectivement lié à la cible, alors son intensité est donnée par :

$$I_{\max} \simeq E[I_{\max}] = \sqrt{M^4\sigma_T^2 + 2M^2\sigma_M^2} \quad (\text{III.56})$$

La moyenne quadratique de l'image est, quant à elle, donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M I_l^2} \simeq \sqrt{M^3 (\sigma_T^2 + 2\sigma_M^2)} \quad (\text{III.57})$$

Le pic principal renormalisé  $\tilde{I}_{\max}$  selon Eq.III.22 est donc donné par :

$$\tilde{I}_{\max} \simeq \frac{\sqrt{M^4\sigma_T^2 + 2M^2\sigma_M^2}}{\sqrt{M^2 (\sigma_T^2 + 2\sigma_M^2)}} \quad (\text{III.58})$$

A la limite de détection, on peut supposer que  $M^2\sigma_T^2 \gg \sigma_M^2 \gg \sigma_T^2$ . On justifiera, *a posteriori*, ces approximations par le résultat final.  $\tilde{I}_{\max}$  se simplifie alors :

$$\tilde{I}_{\max} \simeq \frac{M\sigma_T}{\sqrt{2}\sigma_M} \quad (\text{III.59})$$

Le seuil de détection pour l'échographie fréquentielle est tel que  $\tilde{I}_{\max} > I_S$ , où  $I_S$  est donné par Eq.III.24 et dépend du taux de fausses alarmes  $\gamma$ . On obtient finalement le critère de détection suivant :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{I_S\sqrt{2}}{M} \quad (\text{III.60})$$

Cette condition est celle reportée dans le tableau III.1. Elle indique, à partir de quel rapport signal sur bruit de diffusion multiple  $\frac{\sigma_T}{\sigma_M}$ , le pic principal de l'image sera effectivement lié à une cible avec une probabilité de fausse alarme  $\gamma$ . Notons que Eq.III.60 n'est valable que dans le cas d'un bruit de diffusion multiple qui respecte la réciprocité spatiale. Si on avait affaire à un bruit additionnel ne respectant pas le principe de réciprocité, le facteur  $\sqrt{2}$  disparaîtrait et on obtiendrait le critère de détection suivant :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{I_S}{M}$$

### Méthode D.O.R.T

Nous traitons dans un premier temps le cas de la méthode D.O.R.T classique, c'est à dire lorsque l'on effectue la SVD de la matrice  $\mathbf{K}^0$  mesurée expérimentalement. Nous avons déjà démontré au §II.6, que si la première valeur singulière  $\lambda_1^0$  est effectivement associée à la cible, alors son espérance est donnée par :

$$E[\lambda_1^0] = M\sigma_T$$

La valeur moyenne quadratique des valeurs singulières est, quant à elle, donnée par (voir Annexe II.A.4) :

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{p=1} [\lambda_p^0]^2} \simeq \sqrt{M(\sigma_T^2 + \sigma_M^2)}$$

L'espérance de la première valeur singulière normalisée  $\tilde{\lambda}_1^0$  est donc donnée par :

$$E\{\tilde{\lambda}_1^0\} = \sqrt{M \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \sigma_M^2}} \simeq \frac{\sigma_T}{\sigma_M} \sqrt{M}, \text{ pour } \sigma_T^2 \ll \sigma_M^2$$

L'application du critère de détection  $\tilde{\lambda}_1^0 > \lambda_S^0$  nous conduit ensuite à la condition de détection :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{\lambda_S^0}{\sqrt{M}} \quad (\text{III.61})$$

Cette condition est celle reportée dans le tableau III.1. Si on la compare à celle obtenue pour l'échographie (Eq.III.60), on voit que D.O.R.T est nettement plus sensible au bruit que l'échographie. L'évolution du critère de détection est en  $M^{-1/2}$  pour la méthode D.O.R.T alors qu'il évolue en  $M^{-1}$  pour l'échographie.

La façon de procéder est strictement équivalente pour notre technique, sauf qu'il faut tenir compte de l'action du filtrage préalable. Nous avons vu au §III.4.3 que le filtrage des antidiagonales conduisait à une diminution d'un facteur de l'ordre de  $\sqrt{\frac{M}{2}}$  de la contribution de diffusion multiple. Ainsi la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}^F = \mathbf{K}^T + \mathbf{K}^{MF} \quad (\text{III.62})$$

La matrice  $\mathbf{K}^{MF}$  est associée à la contribution de diffusion multiple résiduelle. Il s'agit d'une matrice de Hankel aléatoire dont les coefficients présentent une variance égale à  $\frac{2\sigma_M^2}{M}$ . Les résultats obtenus pour la matrice  $\mathbf{K}^0$  peuvent être directement appliqués à la matrice  $\mathbf{K}^F$  en tenant compte de la nouvelle variance des signaux multiples diffusés. Si la première valeur singulière  $\lambda_1^F$  est effectivement associée à la cible, alors son espérance est toujours donnée par :

$$E[\lambda_1^0] = M\sigma_T$$

La valeur moyenne quadratique des valeurs singulières est quant à elle donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{p=1} [\lambda_p^F]^2} = \sqrt{M \left( \sigma_T^2 + \frac{2\sigma_M^2}{M} \right)}$$

L'espérance de la première valeur singulière normalisée  $\tilde{\lambda}_1^F$  est donc donnée par :

$$E\{\tilde{\lambda}_1^F\} = \sqrt{M \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \frac{2\sigma_M^2}{M}}} \simeq \frac{M}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_T}{\sigma_M}, \text{ pour } M\sigma_T^2 \ll \sigma_M^2$$

La condition  $M\sigma_T^2 \ll \sigma_M^2$  sera justifiée *a posteriori* par le résultat. L'application du critère de détection  $\tilde{\lambda}_1^F > \lambda_S^F$  nous conduit ensuite à la condition de détection :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_M} > \frac{\sqrt{2}\lambda_S^F}{M} \quad (\text{III.63})$$

Cette condition est celle reportée dans le tableau III.1. Si on la compare à celle obtenue pour l'échographie (Eq.III.60) et pour la méthode D.O.R.T classique (Eq.III.61) , on voit que le filtrage des antidiagonales permet d'améliorer d'un facteur  $\sqrt{M}$  la condition de détection par rapport à D.O.R.T et donc de se hisser au niveau de l'échographie. Mieux, la condition de détection sera meilleure étant donné que  $\lambda_S^F < I_S$ . Notre technique arrive à détecter la cible à des rapports bruit sur signal plus élevés que l'échographie. Cette meilleure performance est renforcée par la bonne tenue de notre technique face à l'aberration, que l'on a négligé ici (voir §III.7).

### III.A.3

Dans cette annexe, nous traitons de l'effet du filtrage des antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  sur les effets aberrants. Plus particulièrement, nous cherchons à exprimer les signaux  $k_{lm}^F$  de la matrice  $\mathbf{K}^F$  obtenue après filtrage. Les coefficients de la matrice  $\mathbf{K}$  sont donnés par (Eq.III.27) :

$$k_{ij}(f) = d_{ij}(f) \exp \left[ jk \frac{(x_i - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_j - X_T)^2}{2R_T} \right]$$

Les coefficients  $d_{ij}$  constituent la matrice de distorsion  $\mathbf{D}$ . La première étape du filtrage consiste en une rotation des données décrite au §III.4.2. Cette étape consiste à construire deux matrices d'antidiagonales  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  (Eqs.III.5 & III.6). Soit  $\mathbf{A}_1^D$  et  $\mathbf{A}_2^D$  les deux matrices d'antidiagonales construites à partir de  $\mathbf{D}$  selon le même processus qu'au §III.4.2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^D = [a_{1uv}^D] \quad \text{de dimension} \quad & (2M - 1) \times (2M - 1), \\ \text{telle que} \quad & a_1^D[u, v] = d[u + v - 1, v - u + 2M - 1] \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2^D = [a_{2uv}^D] \quad \text{de dimension} \quad & (2M - 2) \times (2M - 2), \\ \text{telle que} \quad & a_2^D[u, v] = d[u + v, v - u + 2M - 1] \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

A partir de maintenant, on appellera indifféremment  $\mathbf{A}$ , les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$ , et  $\mathbf{A}^D$ , les matrices  $\mathbf{A}_1^D$  et  $\mathbf{A}_2^D$ .

Les coefficients de  $\mathbf{A}$  peuvent s'exprimer en fonction des coefficients de  $\mathbf{A}^D$  :

$$a_{uv} = a_{uv}^D \exp \left[ jk \frac{y_u^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(y_v - \sqrt{2}X_T)^2}{2R_T} \right] \quad (\text{III.66})$$

avec,

$$y_u = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y_v = \frac{x_i + x_j}{\sqrt{2}}$$

L'étape suivante du filtrage consiste à projeter les colonnes de  $\mathbf{A}$  sur l'espace caractéristique de la diffusion simple, engendré par le vecteur  $\mathbf{S}$  de coordonnées :

$$s_u = \exp \left[ jk \frac{y_u^2}{2R_T} \right] L^{-1/2}$$

Les coordonnées du vecteur  $\mathbf{P}$  résultat de cette projection (Eq.III.11) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 p_v &= \sum_{u=1}^L s_u^* a_{uv} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{u=1}^L \exp \left[ -jk \frac{y_u^2}{2R_T} \right] a_{uv}^D \exp \left[ jk \frac{y_u^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(y_v - \sqrt{2}X_T)^2}{2R_T} \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{u=1}^L a_{uv}^D \right] \exp \left[ jk \frac{(y_v - \sqrt{2}X_T)^2}{2R_T} \right]
 \end{aligned}$$

La matrice filtrée  $\mathbf{A}^F$  est finalement obtenue en multipliant le vecteur colonne  $\mathbf{S}$  par le vecteur ligne  $\mathbf{P}$  (Eq.III.13). Les coefficients  $a_{uv}^F$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 a_{uv}^F &= s_u p_v \\
 a_{uv}^F &= \left[ \frac{1}{L} \sum_{u=1}^L a_{uv}^D \right] \exp \left[ jk \frac{y_u^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(y_v - \sqrt{2}X_T)^2}{2R_T} \right]
 \end{aligned} \tag{III.67}$$

Si on compare les expressions des coefficients initiaux  $a_{uv}$  (Eq.III.66) et des coefficients filtrés  $a_{uv}^F$  (Eq.III.67), on s'aperçoit que le filtrage des antidiagonales s'accompagne d'une moyenne des coefficients de distorsion le long de chaque colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ . Cette moyenne est matérialisée par le terme  $\left[ \frac{1}{L} \sum_{u=1}^L a_{uv}^D \right]$  dans Eq.III.67.

A l'issue du filtrage des antidiagonales, deux matrices  $\mathbf{A}_1^F$  et  $\mathbf{A}_2^F$ , contenant les antidiagonales filtrées, sont obtenues. La dernière étape consiste en la reconstruction de la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  décrite au §III.4.4 :

$$\begin{aligned}
 &\text{si } (l - m)/2 \text{ est entier} \\
 &\text{alors, } k^F[l, m] = a_1^F [(l - m)/2 + M, (l + m)/2]
 \end{aligned} \tag{III.68}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{si } (l - m)/2 \text{ n'est pas un entier} \\
 &\text{alors, } k^F[l, m] = a_2^F [(l - m - 1)/2 + M, (l + m - 1)/2]
 \end{aligned} \tag{III.69}$$

En injectant Eq.III.67 dans ces deux dernières équations et en effectuant le changement de variables inverse de Eq.III.8, nous obtenons :

$$k^F[l, m] = e_{l+m-1} \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right] \tag{III.70}$$

où les coefficients  $e_{l+m-1}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 &\text{si } (l - m)/2 \text{ est entier,} \\
 &\text{alors, } e_{l+m-1} = \frac{1}{2M - 1} \sum_{u=1}^{2M-1} a_1^D [u, (l + m)/2]
 \end{aligned} \tag{III.71}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{si, } (l - m)/2 \text{ n'est pas un entier,} \\
 &\text{alors, } e_{l+m-1} = \frac{1}{2M - 2} \sum_{u=1}^{2M-2} a_2^D [u, (l + m - 1)/2]
 \end{aligned} \tag{III.72}$$



On peut exprimer finalement les coefficients  $e_v$  en fonction des coefficients de distorsion  $d_{ij}$  en utilisant les équations III.64 et III.65 reliant les coefficients  $d_{ij}$  aux coefficients  $a_{uv}^D$  :

si  $v$  est impair,  
 alors,  $e_v = \frac{1}{2M-1} \sum_{u=1}^{2M-1} d \left[ u + \frac{v-1}{2}, \frac{v-1}{2} - u + 2M - 1 \right]$  (III.73)

si  $v$  est pair,  
 alors,  $e_v = \frac{1}{2M-2} \sum_{u=1}^{2M-2} d \left[ u + \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - u + 2M - 1 \right]$  (III.74)

Les coefficients  $e_v$  correspondent donc à une moyenne des coefficients de distorsion le long de chaque antidiagonale de la matrice  $\mathbf{D}$ . La dernière équation peut donc se réécrire :

si  $v$  est impair,  
 alors,  $e_v = \left\langle d \left[ u + \frac{v-1}{2}, \frac{v-1}{2} - u + 2M - 1 \right] \right\rangle_{u=1, \dots, 2M-1}$  (III.75)

si  $v$  est pair,  
 alors,  $e_v = \left\langle d \left[ u + \frac{v}{2}, \frac{v}{2} - u + 2M - 1 \right] \right\rangle_{u=1, \dots, 2M-2}$  (III.76)

où le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne effectuée sur la variable placée en indice.

### III.A.4

On a vu au §III.7.3 que la matrice filtrée  $\mathbf{K}^F$  pouvait se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}^F = \underbrace{\langle \mathbf{K}^F \rangle}_{\text{Matrice de rang 1}} + \underbrace{\Delta \mathbf{K}^F}_{\text{Matrice de Hankel aléatoire}}$$

$\langle \mathbf{K}^F \rangle$  est l'espérance de la matrice  $\mathbf{K}^F$ , ses coefficients sont donnés par :

$$\langle k_{lm}^F(f) \rangle = \langle e_{l+m-1}(f) \rangle \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right].$$

La norme de ses coefficients est uniforme et égale au coefficient de distorsion moyen  $\langle e_p \rangle$ . La matrice  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$  est de rang 1.

$\Delta \mathbf{K}^F$  correspond à une perturbation liée aux fluctuations des coefficients de distorsion  $e_p$ . Ses coefficients sont donnés par :

$$\delta k_{lm}^F(f) = [e_{l+m-1}(f) - \langle e_{l+m-1}(f) \rangle] \exp \left[ jk \frac{(x_l - X_T)^2}{2R_T} \right] \exp \left[ jk \frac{(x_m - X_T)^2}{2R_T} \right].$$

Les coefficients  $\delta k_{lm}^F(f)$  sont donc des variables aléatoires à moyenne nulle et d'écart type donné par  $\text{std}[e_p]$ . Comme on l'a vu au §III.7.3, la matrice  $\Delta \mathbf{K}^F$  est une matrice aléatoire de type Hankel.

L'objet de cette annexe est donc de savoir à partir de quel ratio  $\frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[e_p]}$ , la SVD appliquée à la matrice  $\mathbf{K}^F$  (Eq.III.32) va réussir à extraire la matrice  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$  de rang 1 sur son premier espace propre. Pour cela, nous allons avoir une nouvelle fois recours à la RMT.

Nous allons reprendre le même type de raisonnement qu'en Annexe III.A.2. En effet, on peut établir une analogie avec le critère de détection relatif au rapport signal-sur-bruit  $\frac{\sigma_T}{\sigma_M}$ . L'amplitude du signal  $\sigma_T$  correspond ici à la valeur moyenne des coefficients de distorsion  $|\langle e_p \rangle|$ . L'écart-type des coefficients  $e_p$  joue le rôle du bruit d'amplitude  $\sigma_M$ . Rappelons que la matrice  $\mathbf{K}^F$  considérée ici est de taille  $\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}$ . Si le premier espace propre de  $\mathbf{K}^F$  est effectivement associé à la matrice *non distordue*  $\langle \mathbf{K}^F \rangle$ , alors l'espérance de la première valeur singulière  $\lambda_1^F$  est donnée par (voir Annexe II.A.4) :

$$\mathbb{E} [\lambda_1^F] = \frac{M}{2} |\langle e_p \rangle| \quad (\text{III.77})$$

La valeur moyenne quadratique des valeurs singulières est, quant à elle, donnée par (voir Annexe III.A.2) :

$$\sqrt{\frac{1}{M/2} \sum_{p=1} [\lambda_p^F]^2} \simeq \sqrt{\frac{M}{2} (|\langle e_p \rangle|^2 + \text{var}[e_p])} \quad (\text{III.78})$$

L'espérance de la première valeur singulière normalisée  $\tilde{\lambda}_1^F$  est donc donnée par :

$$\mathbb{E} \left\{ \tilde{\lambda}_1^F \right\} = \sqrt{\frac{M}{2} \frac{|\langle e_p \rangle|^2}{|\langle e_p \rangle|^2 + \text{var}[e_p]}} \simeq \frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[e_p]} \sqrt{\frac{M}{2}}, \text{ pour } |\langle e_p \rangle|^2 \ll \text{var}[e_p] \quad (\text{III.79})$$

La condition  $|\langle e_p \rangle|^2 \ll \text{var}[e_p]$  sera encore une fois justifiée *a posteriori* par le résultat. Comme  $\mathbf{K}^F$  est une matrice de type Hankel, le critère de détection s'écrit  $\tilde{\lambda}_1^F > \lambda_S^F$  (voir §III.6). Ceci conduit à la condition de détection désirée :

$$\frac{|\langle e_p \rangle|}{\text{std}[e_p]} > \frac{\lambda_S^F}{\sqrt{M/2}} \quad (\text{III.80})$$



# Chapitre IV

## Séparation des contributions de diffusion simple et multiple : cas de milieux faiblement diffusants

### IV.1 Résumé

Dans un milieu faiblement hétérogène, l'intensité diffusée contient une contribution prédominante de diffusion simple, mais également une composante multiplement diffusée qui est généralement négligée, notamment lorsqu'il s'agit de construire une image sur le principe de l'échographie. Néanmoins son étude peut être intéressante à des fins de caractérisation car elle offre la possibilité de mesurer des paramètres caractéristiques de la diffusion multiple tels que le libre parcours moyen élastique  $l_e$ . Le but de ce chapitre est de proposer une méthode, différente de celle présentée au chapitre précédent, permettant d'extraire la contribution de diffusion multiple issue d'un milieu aléatoire *faiblement* diffusant. Le dispositif expérimental est toujours constitué d'une barrette de transducteurs placée en vis à vis du milieu que l'on désire étudier. La matrice inter-éléments est ensuite obtenue en mesurant les réponses impulsionnelles de chaque couple de transducteurs. Les ondes multiplement diffusées sont sélectionnées en profitant de leur comportement aléatoire, contrairement aux ondes simplement diffusées qui conservent une cohérence déterministe malgré le désordre, comme nous l'avons établi précédemment. Pour illustrer l'intérêt de cette séparation, nous l'appliquons d'abord à un milieu synthétique (gel à base d'agar-agar), puis à un milieu biologique (les tissus du sein). L'expérience réalisée sur le gel met en évidence la possibilité de mesurer les paramètres diffusants à partir de la composante multiplement diffusée, et ce même pour des milieux très faiblement diffusants ( $l_e \simeq 1000$  mm, épaisseur  $L = 100$  mm). L'expérience réalisée sur le sein montre que la diffusion multiple est loin d'être négligeable dans les tissus du sein autour de 4 MHz, fréquence couramment utilisée en imagerie médicale. L'évolution temporelle de l'intensité multiplement diffusée peut ainsi fournir un nouvel outil complétant l'information apportée par l'échographie traditionnelle. Elle constitue également un test expérimental afin de vérifier la validité de la première approximation de Born sur laquelle repose la construction de l'image échographique.

## IV.2 Introduction

Contrairement au chapitre précédent, nous considérons ici le cas d'un milieu désordonné *faiblement diffusant*, en ce sens que les trajets parcourus par l'onde au sein du milieu diffusant sont plus courts que le libre parcours moyen  $l_e$ . La contribution de diffusion simple domine alors la diffusion multiple. Dans ce type de milieu, les techniques conventionnelles comme l'échographie fonctionnent bien et permettent de construire des images de réflectivité du milieu. La diffusion multiple étant minoritaire, celle-ci ne perturbe que très peu l'image échographique obtenue. Cependant, on cherche ici à avoir accès à d'autres informations intéressantes pour l'étude du milieu de propagation : des paramètres caractérisant purement la partie multiple diffusée de l'onde.

Lorsqu'une onde se propage au sein d'un milieu diffusant aléatoire, elle perd progressivement, de façon exponentielle, sa cohérence : au bout d'une distance  $L$ , seule une fraction  $\exp(-L/l_{ext})$  de l'énergie initiale continue de se propager en conservant la cohérence de l'onde initiale. Le paramètre  $l_{ext}$ , libre parcours d'extinction globale, caractérise donc la distance d'extinction de la partie cohérente de l'onde. Cette extinction progressive de l'onde cohérente a deux origines distinctes : la diffusion (à chaque rencontre avec un diffuseur, une partie de la cohérence initiale est perdue), et l'absorption intrinsèque du milieu de propagation. A ces deux phénomènes sont rattachées deux autres longueurs caractéristiques : le libre parcours moyen élastique  $l_e$ , et le libre parcours moyen d'absorption  $l_a$ , de telle sorte que :

$$\exp\left(-\frac{L}{l_{ext}}\right) = \exp\left(-\frac{L}{l_e}\right) \times \exp\left(-\frac{L}{l_a}\right) \quad (IV.1)$$

et donc,

$$\frac{1}{l_{ext}} = \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_a} \quad (IV.2)$$

Mesurer le coefficient de transmission de l'onde cohérente donne accès à la longueur d'extinction globale  $l_{ext}$  mais ne permet pas de distinguer les pertes par absorption ( $l_a$ ) des pertes par diffusion ( $l_e$ ). Dans ce chapitre, nous proposons une méthode permettant de séparer les ondes simplement et multiplement diffusées. Nous verrons que l'étude séparée des deux contributions permet en effet de mesurer de façon distincte  $l_e$  et  $l_a$  et ainsi de caractériser plus complètement le milieu sondé.

La technique de séparation diffusion simple / diffusion multiple présente des similitudes avec celle introduite au chapitre précédent. La matrice  $\mathbf{K}$ , contenant les réponses inter-éléments de la barrette, est mesurée. L'idée est toujours de profiter du comportement particulier des ondes simplement diffusées le long des antidiagonales de  $\mathbf{K}$ . Comme précédemment, une rotation des coordonnées est opérée, ce qui aboutit à la matrice  $\mathbf{A}$  des antidiagonales (*cf* §III.4.2). En revanche, la technique de filtrage des antidiagonales diffère. Au lieu de projeter les colonnes de  $\mathbf{A}$  sur un vecteur  $\mathbf{S}$  connu (Eq.III.11), la séparation des composantes simplement et multiplement diffusées est cette fois effectuée en réalisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $\mathbf{A}$ . La composante simplement diffusée prédominante présente une cohérence longue portée le long des colonnes de  $\mathbf{A}$  et va donc être extraite par la SVD sur l'espace *signal*, associé

aux valeurs singulières de plus haute amplitude. La composante multiplement diffusée présente au contraire un caractère aléatoire : elle va être associée à l'espace *bruit*, correspondant aux valeurs singulières les plus faibles. La séparation de l'espace signal (diffusion simple) et de l'espace bruit (diffusion multiple) est réalisée en s'appuyant une nouvelle fois sur la théorie des matrices aléatoires [80]. Une fois le filtrage des antidiagonales effectué, on procède à une rotation inverse des données. La matrice  $\mathbf{K}$  initiale est ainsi décomposée en deux sous-matrices, l'une contenant les ondes simplement diffusées, l'autre contenant les ondes multiplement diffusées.

Pour illustrer la faisabilité et l'intérêt de cette technique, nous l'avons appliquée tout d'abord à un milieu synthétique (gel faiblement diffusant). Nous avons ainsi obtenu l'évolution temporelle des intensités simplement et multiplement diffusées dans ce milieu. Ces mesures expérimentales ont été confrontées aux résultats théoriques fournis par la solution exacte de l'équation de transfert radiatif [22]. On a ainsi pu mesurer de façon distincte  $l_e$  et  $l_a$ , et caractériser le milieu inspecté. Nous avons appliqué également notre technique sur un milieu biologique, dont l'imagerie ultrasonore est souvent réalisée : le sein. Alors que la diffusion multiple n'est généralement pas prise en compte dans les modèles de propagation ultrasonore au sein des tissus mous, on montre que sa contribution est en fait loin d'être négligeable autour de 4 MHz. En plus de fournir un nouvel outil de caractérisation des tissus du corps humain, notre technique constitue un test expérimental de la première approximation de Born (approximation de diffusion simple).

## IV.3 Séparation diffusion simple / diffusion multiple

### IV.3.1 Procédure expérimentale

Le protocole expérimental est identique à celui présenté au §III.3. Une barrette échographique est placée en vis à vis du milieu que l'on désire étudier. La réponse impulsionnelle de chaque couple source/récepteur est mesurée. L'ensemble forme la matrice  $\mathbf{H}(t)$ . Une analyse temps-fréquence de  $\mathbf{H}(t)$  est ensuite réalisée.  $\mathbf{H}(t)$  est découpée en fenêtres temporelles successives :  $k_{ij}(T, t) = h_{ij}(T - t)W_R(t)$  avec  $W_R(t) = 1$  pour  $t \in [-\Delta t/2, \Delta t/2]$ ,  $W_R(t) = 0$  partout ailleurs. La valeur de  $\Delta t$  est choisie de telle sorte que les signaux associés aux mêmes événements de diffusion apparaissent dans la même fenêtre temporelle (voir Annexe II.A.1). Une transformée de Fourier permet ensuite d'accéder à la série des matrices de réponse  $\mathbf{K}(T, f)$ , chacune associée à un temps de vol  $T$  et à une fréquence  $f$ .

Une fois les matrices  $\mathbf{K}$  mesurées, la séparation des contributions de diffusion simple et multiple s'effectue selon les étapes suivantes :

- Rotation de chaque matrice  $\mathbf{K}$ , et création des matrices d'antidiagonales  $\mathbf{A}$ .
- Filtrage des matrices  $\mathbf{A}$  par décomposition en valeurs singulières. On obtient alors deux matrices, notées  $\mathbf{A}^S$  et  $\mathbf{A}^M$ , contenant respectivement les signaux simplement et multiplement diffusés.
- Reconstitution, à partir de  $\mathbf{A}^S$  et  $\mathbf{A}^M$ , des matrices  $\mathbf{K}^S$  (diffusion simple) et  $\mathbf{K}^M$  (diffusion multiple).

Les première et dernière étapes ont déjà été décrites en détail au chapitre précédent (voir §III.4.2 & §III.4.4). Nous allons donc détailler maintenant le filtrage par SVD des matrices d'antidiagonales  $\mathbf{A}$ .

### IV.3.2 Filtrage par SVD des matrices $\mathbf{A}$

La technique proposée ici consiste à séparer diffusion simple et multiple en effectuant la SVD des matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  obtenues après rotation. La SVD a en effet la propriété de décomposer une matrice en deux sous-espaces : un espace  $\mathbf{S}$  dit *signal* (matrice caractérisée par une importante corrélation entre lignes et/ou colonnes de la matrice) et un espace  $\mathbf{N}$  dit *bruit* (matrice d'aspect aléatoire, sans corrélation entre éléments). Nous appliquons la SVD aux matrices  $\mathbf{A}$  obtenues après rotation : l'espace signal correspond alors à la matrice  $\mathbf{A}^{\mathbf{S}}$  (contribution de diffusion simple, caractérisée par une grande corrélation suivant ses colonnes) et l'espace bruit est associé à la matrice  $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$  (contribution de diffusion multiple).

La SVD des matrices  $\mathbf{A}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\dagger = \sum_{k=1}^L \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.3})$$

$\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices carrées unitaires de dimension  $L$ . Leurs colonnes respectives  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$  correspondent aux vecteurs propres associées à la valeur singulière  $\lambda_i$ .  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice carrée diagonale de dimension  $L$  dont les éléments diagonaux correspondent aux valeurs singulières  $\lambda_i$  rangées dans l'ordre décroissant. Dans le §III.4.2, une symétrie particulière de la matrice  $\mathbf{A}$  a été mise en évidence : cette matrice ne comprend que  $M$  lignes indépendantes, elle est donc de rang  $M < L$ . La matrice  $\mathbf{A}$  ne présente donc que  $M$  valeurs singulières non nulles et l'équation IV.3 se réécrit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\dagger = \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.4})$$

La diffusion simple se caractérisant, après rotation des données, par une grande cohérence le long des colonnes des matrices  $\mathbf{A}$ , la SVD fait ressortir cette contribution dans l'espace signal (la contribution diffusion simple sera associée aux valeurs singulières les plus élevées) alors que la contribution de diffusion multiple sera associée aux valeurs singulières plus faibles. Ici, contrairement à la technique de séparation du chapitre précédent (§III.4), on ne fait pas d'hypothèse *a priori* sur la forme de la cohérence existant sur les antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$  dans le cas de la diffusion simple, on suppose simplement que cette cohérence existe.

Le problème est de déterminer à quel rang de valeur singulière correspond le seuil séparant l'espace *signal* (associé à la diffusion simple) de l'espace *bruit* (associé à la diffusion multiple). Nous avons prédit au chapitre précédent que sous les approximations paraxiale et de diffusion simple, les éléments de chaque antidiagonale de  $\mathbf{K}$  étaient liés par une loi de phase parabolique (Eq.III.4). Si cette prédiction était rigoureusement exacte, la contribution de diffusion simple  $\mathbf{A}^{\mathbf{S}}$  de  $\mathbf{A}$  serait de rang 1 : seule la première des valeurs singulières correspondrait à l'espace signal. Lorsque les hypothèses aboutissant à l'équation III.4 ne sont pas valables, la contribution

de diffusion simple n'est pas de rang 1 et plusieurs valeurs singulières portent la trace de cette contribution. Il faut alors établir un critère de séparation entre les contributions de diffusion simple (espace signal) et de diffusion multiple (espace bruit).

Pour ce faire, nous utilisons les résultats de la théorie des matrices aléatoires. Les valeurs singulières  $\lambda_i$  sont tout d'abord renormalisées par leur moyenne quadratique :

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \lambda_q^2}} \quad (\text{IV.5})$$

Soit une matrice aléatoire de dimension  $P \times Q$  (avec  $P < Q$  et  $P, Q \gg 1$ ), dont les coefficients sont des variables aléatoires complexes *i.i.d* normalement distribuées. La densité de probabilité  $\rho(\lambda)$  de ses valeurs singulières normalisées  $\tilde{\lambda}_k$  est donnée par [80] :

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\lambda} \sqrt{(\lambda_{\max}^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_{\min}^2)} & \text{pour } \lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max} \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$\lambda_{\max, \min} = 1 \pm \sqrt{\frac{P}{Q}} \quad (\text{IV.7})$$

Notons que si la matrice aléatoire est carrée ( $P = Q$ ), on retrouve bien la loi du quart de cercle (Eq.II.4). La théorie des matrices aléatoires nous assure donc du fait que toutes les valeurs singulières sont contenues dans un support borné par  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ . Dans notre cas, la matrice  $\mathbf{A}$  est carrée de dimension  $L \times L$ . Toutefois, comme cette matrice ne contient que  $M$  lignes indépendantes, elle est équivalente à une matrice rectangulaire de dimension  $M \times L$ . Si la matrice  $\mathbf{A}$  était aléatoire (*i.e* si elle ne contenait que des ondes multiples diffusées), sa première valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1$  ne dépasserait jamais la valeur  $\lambda_{\max} \simeq 1,71$ . Cette valeur est obtenue par application numérique de Eq.IV.7 en considérant  $P = M = 32$  et  $Q = L = 63$ .

Revenons un instant sur le support supposé borné de la distribution des valeurs singulières. L'affirmation selon laquelle toutes les valeurs singulières sont comprises dans l'intervalle  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$  n'est en réalité pas strictement vérifiée puisque nous avons affaire à des matrices de taille finie (*cf* la distribution de Tracy Widom [107, 108, 109, 81, 110], §II.6). Néanmoins, nous allons le supposer : la probabilité que les valeurs singulières extrémales (de plus haute et de plus faible amplitude) soient en dehors du support  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ , devient en effet relativement faible dès que  $P, Q \gg 1$ . Par exemple, pour une matrice de dimension  $32 \times 63$ , nous avons estimé numériquement cette probabilité à 1,5 %.

Après rotation des données expérimentales, la matrice  $\mathbf{A}$  de taille fictive  $M \times L$  est donc la somme d'une matrice  $\mathbf{A}^S$  de rang  $p < M$  associée à la diffusion simple (espace signal) et d'une matrice  $\mathbf{A}^M$  de rang  $M$  associée à la diffusion multiple. Sengupta et Mitra [80] ont montré dans ce cas que les  $(M - p)$  plus petites valeurs singulières (associées à l'espace bruit) présentaient la même distribution qu'une matrice aléatoire de taille  $(M - p) \times L$ . On note  $\lambda_{\max}^{(p)}$  la valeur maximum obtenue pour la distribution des valeurs singulières normalisées dans le cas d'une matrice aléatoire de taille  $(M - p) \times L$ ; on a

$$\lambda_{\max}^{(p)} = 1 + \sqrt{\frac{M - p}{L}} \quad (\text{IV.8})$$



A partir de cette propriété, nous pouvons proposer une méthode de séparation systématique des espaces signal et bruit de  $\mathbf{A}$ . On considère tout d'abord la 1<sup>ère</sup> valeur singulière  $\tilde{\lambda}_1$  après renormalisation. Si celle-ci est supérieure à  $\lambda_{\max}^{(0)}$  (Eq.IV.8), cela signifie que le 1<sup>er</sup> espace propre est associé à de la diffusion simple. On itère le processus au rang 2 : on considère maintenant la 2<sup>ème</sup> valeur singulière. La renormalisation est de nouveau effectuée mais en ne considérant les valeurs singulières qu'à partir du rang 2 :

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=2}^M \lambda_k^2}} \quad (\text{IV.9})$$

La valeur seuil  $\lambda_{\max}$  à considérer cette fois est celle d'une matrice aléatoire de dimension  $(M-1) \times L$ , c'est à dire  $\lambda_{\max}^{(1)}$  (Eq.IV.8). Si  $\tilde{\lambda}_2 > \lambda_{\max}^{(1)}$ , l'espace propre associé est encore lié à de la diffusion simple, et on réitère le processus jusqu'à aboutir au rang  $p+1$ , rang pour lequel  $\tilde{\lambda}_{p+1} < \lambda_{\max}^{(p)}$ . On obtient ainsi le rang seuil  $p$  qui permet de dissocier objectivement l'espace signal  $\mathbf{S}$  et l'espace bruit  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.10})$$

$$\mathbf{N} = \sum_{k=p+1}^M \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.11})$$

$$(\text{IV.12})$$

A ce stade, la matrice  $\mathbf{S}$  contient la contribution de diffusion simple ( $\mathbf{A}^S$ ) plus une contribution résiduelle de diffusion multiple. En effet les signaux multiples diffusés ne sont pas strictement orthogonaux au sous-espace généré par la diffusion simple. On peut montrer que la part de diffusion multiple se retrouvant dans l'espace signal à l'issue du filtrage des antidiagonales est de  $\frac{\sigma_M}{\sqrt{M}}$  ( $\ll \sigma_S$ ), où  $\sigma_M$  est l'amplitude des signaux multiples diffusés. La matrice  $\mathbf{N}$  est associée à la contribution restante (majoritaire) de diffusion multiple. Nous avons donc réussi à séparer les contributions de diffusion simple et multiple :

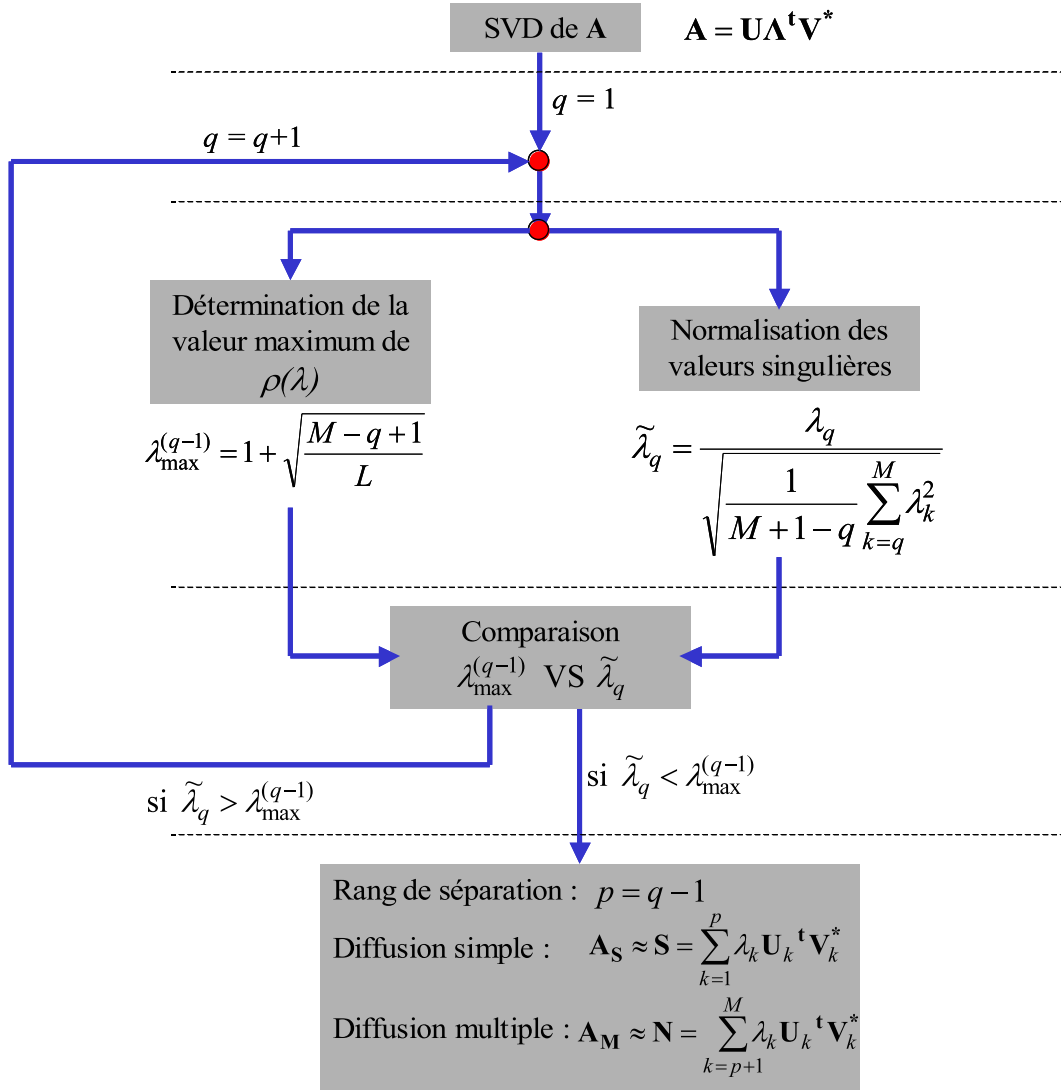
$$\mathbf{A}^S \simeq \mathbf{S} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.13})$$

$$\mathbf{A}^M \simeq \mathbf{N} = \sum_{k=p+1}^M \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^\dagger \quad (\text{IV.14})$$

$$(\text{IV.15})$$

Après la première étape de rotation des données, l'ensemble du processus de filtrage de matrices  $\mathbf{A}$  par SVD est résumé sur le schéma de la figure IV.1.

Nous avons supposé implicitement jusqu'ici que la contribution de diffusion multiple résultait en des antidiagonales dont les éléments étaient totalement décorrélés les uns des autres. Or, expérimentalement, il peut exister des corrélations entre capteurs, notamment à cause du couplage mécanique entre éléments voisins du réseau ou d'une longueur de corrélation du champ diffus supérieure à l'espace inter-éléments (voir §II.4.4). Dans ce cas, on a recours au modèle


 FIG. IV.1: Les différentes étapes du processus de filtrage de matrices  $\mathbf{A}$  à partir de la SVD.

théorique prenant en compte les corrélations entre capteurs que l'on a déjà présenté au §II.4.4 et qui est issu des travaux de Sengupta et Mitra [80]. Une nouvelle loi de probabilité  $\rho(\lambda)$  est établie et on en déduit une nouvelle valeur  $\lambda_{\max}$  adaptée à notre configuration expérimentale.

Cette technique de filtrage suppose que la première des valeurs singulières dépasse le seuil  $\lambda_{\max}^{(0)}$ . Elle ne peut donc pas être utilisée dans les milieux hautement diffusants, c'est-à-dire des milieux pour lesquels la contribution de diffusion multiple est prépondérante par rapport à la diffusion simple. Dans ce cas, on utilisera plutôt la technique de filtrage par projection des antidiagonales sur l'espace de diffusion simple (cf §III.4.3) pour extraire la contribution de diffusion simple. Si au contraire la contribution de diffusion simple est prépondérante ou du même ordre de grandeur que la diffusion multiple, on pourra utiliser la technique de filtrage par SVD des matrices  $\mathbf{A}$  et ainsi extraire la contribution de diffusion multiple.

Une fois que les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  sont décomposées en la somme de deux sous matrices  $\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_{1,2}^S + \mathbf{A}_{1,2}^M$ , deux sous matrices inter-éléments  $\mathbf{K}^S$  et  $\mathbf{K}^M$ , de dimension  $(2M - 1) \times (2M - 1)$  sont construites selon la procédure décrite au §III.4.4. La matrice  $\mathbf{K}^S$  contient les signaux simplement diffusés (et une contribution de diffusion multiple résiduelle). La matrice  $\mathbf{K}^M$  est associée à la diffusion multiple.

Nous allons à présent appliquer cette approche à l'étude de milieux faiblement diffusants. Nous allons ainsi illustrer sa faisabilité et l'avancée qu'elle constitue en ce qui concerne la caractérisation ultrasonore de tels milieux désordonnés.

## IV.4 Application à l'étude d'un milieu très faiblement diffusant

Le milieu faiblement diffusant étudié ici est un gel constitué à 5% de gélatine et à 3% d'agar-agar. L'épaisseur  $L$  du gel est de 10 cm. Il s'agit du même échantillon que celui étudié au Chapitre I, lorsque que nous avons montré que l'étude en champ lointain de l'intensité rétrodiffusée permettait de mesurer un facteur d'amplification lié à la rétrodiffusion cohérente de très faible amplitude [45] (cf §I.3.3). Cela nous assure du caractère très faiblement diffusant du gel : la diffusion multiple est noyée dans une contribution de diffusion simple largement prédominante. Le dispositif expérimental est analogue à ceux des chapitres précédents (Fig.II.1). L'expérience a lieu dans une cuve à eau. Nous utilisons une barrette échographique constituée de  $N = 125$  éléments (de largeur 0,39 mm), de fréquence centrale 3 MHz et de bande passante [2, 5 ; 3, 5] MHz. L'espace inter-éléments  $p$  est de 0,417 mm. La fréquence d'échantillonnage des signaux est de 20 MHz. On enregistre tout d'abord la matrice des réponses impulsionnelles  $\mathbf{H}(t)$ . Son analyse temps-fréquence donne accès à l'ensemble des matrices de réponse  $\mathbf{K}(T, f)$  obtenues au temps  $T$  et à la fréquence  $f$ . Notons qu'ici l'origine des temps est prise à l'instant où la source émet l'onde incidente. La séparation des contributions de diffusion simple et multiple est ensuite réalisée telle que décrite au paragraphe précédent. A l'issue de cette opération, deux ensembles de matrices  $\mathbf{K}^S(T, f)$  et  $\mathbf{K}^M(T, f)$  sont obtenus. Dans le paragraphe suivant, nous illustrons la réussite de la séparation diffusion simple / diffusion multiple en considérant les

résultats obtenus pour un couple  $(T, f)$  quelconque.

#### IV.4.1 Illustration de la qualité de séparation diffusion simple / diffusion multiple

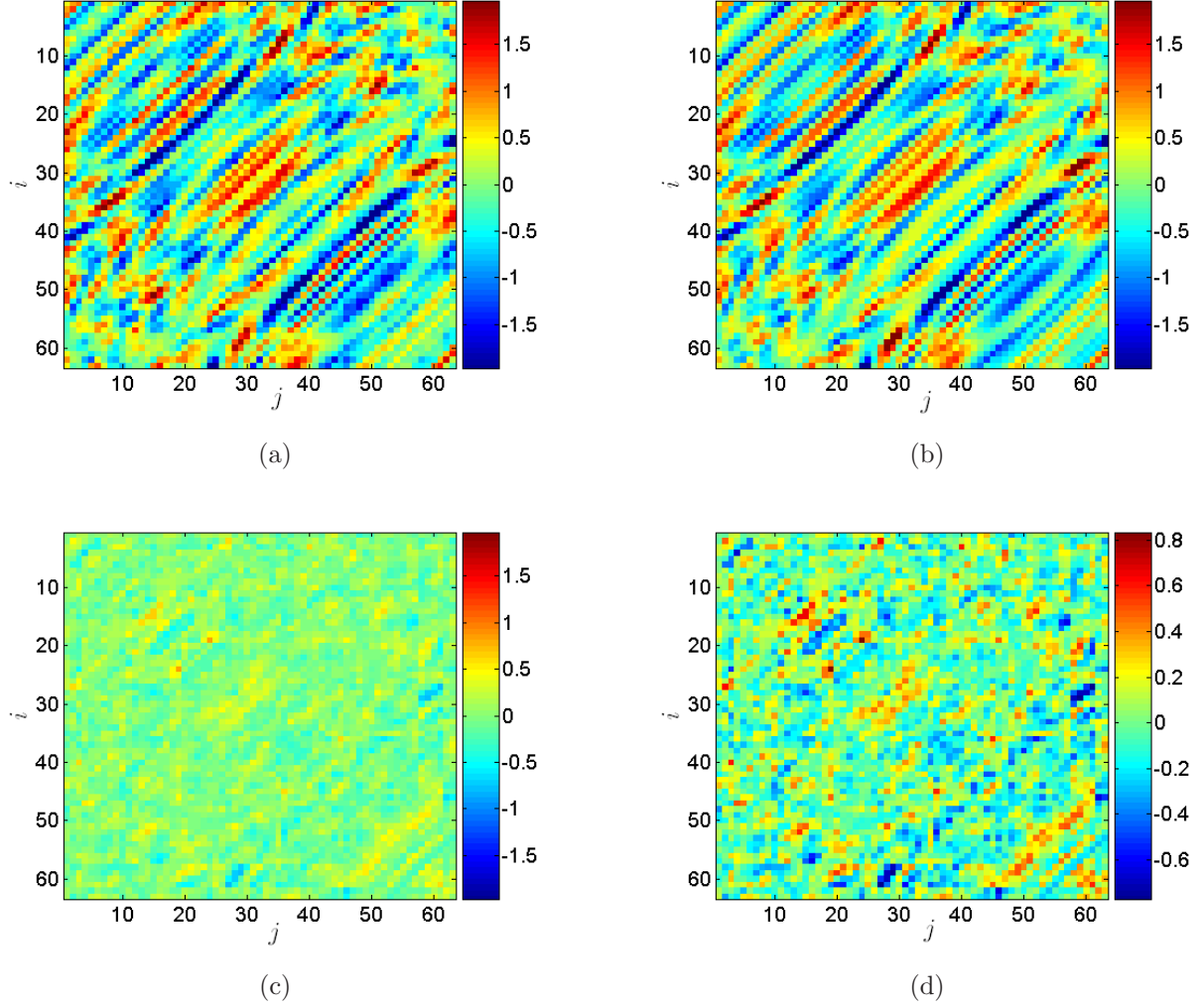


FIG. IV.2: Décomposition de la matrice  $\mathbf{K}$  mesurée à  $T = 115 \mu s$  et  $f = 3,1 \mu s$ . (a) Partie réelle de  $\mathbf{K}^0$  initialement mesurée. (b) Partie réelle de  $\mathbf{K}^S$  associée à la contribution de diffusion simple (espace *signal*). (c) Partie réelle de  $\mathbf{K}^M$  associée à la contribution de diffusion multiple (espace *bruit*). Pour ces trois premières figures, l'échelle de couleurs est identique. (d) Partie réelle de  $\mathbf{K}^M$  avec une échelle de couleurs plus contrastée.

On considère ici l'exemple de la matrice  $\mathbf{K}$  obtenue au temps d'écho  $T = 115 \mu s$  et à la fréquence  $f = 3,1 \text{ MHz}$ . L'illustration expérimentale de la décomposition définie par les équations IV.13 et IV.14, est présentée sur la figure IV.2. Les matrices  $\mathbf{K}^0$  et  $\mathbf{K}^S$  sont pratiquement égales, ce qui est logique car le gel est faiblement diffusant et la diffusion simple y est nettement majoritaire. Les éléments de la matrice  $\mathbf{K}^M$  sont d'amplitude nettement plus faible que ceux de la matrice d'origine. Comme prévu, la matrice  $\mathbf{K}^M$  est d'apparence aléatoire, sans

corrélation entre les éléments, alors que la matrice  $\mathbf{K}^S$  présente une cohérence marquée suivant les antidiagonales, signature de la diffusion simple.

## IV.4.2 Intensité multiplement diffusée

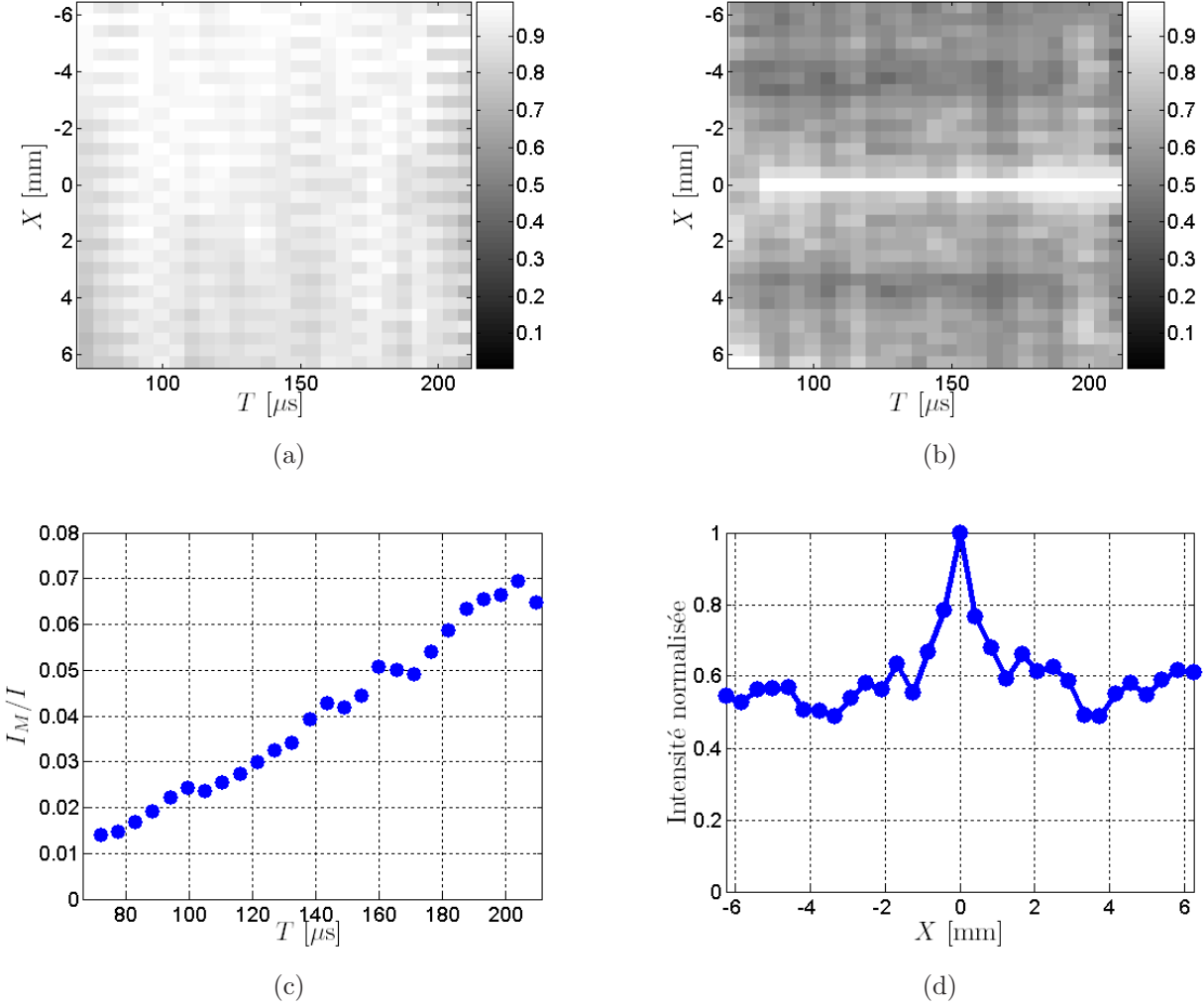


FIG. IV.3: Intensités rétrodiffusées en fonction du temps  $T$  et de la distance source/récepteur  $X$ . (a) Intensité totale  $I(X, T)$  obtenue à partir de la matrice initiale  $\mathbf{K}$ . (b) Intensité  $I^M(X, T)$  correspondant à la seule contribution de diffusion multiple, obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{K}^M$ . Pour ces deux premières figures, l'intensité a été normalisée à chaque temps  $T$  par son maximum suivant  $X$ . (c) Evolution du ratio  $\frac{I^M}{I}$  en fonction du temps  $T$ . Les intensités  $I$  et  $I^M$  sont ici moyennées sur la distance source/récepteur  $X$ . (d) Profil spatial de l'intensité multiplement diffusée  $I^M(X)$  obtenue au temps  $T = 137 \mu\text{s}$ .

Une fois la contribution de diffusion multiple isolée, on calcule l'intensité moyenne correspondante  $I^M$  en fonction de l'écart source-récepteur  $X$  et du temps d'écho  $T$  :

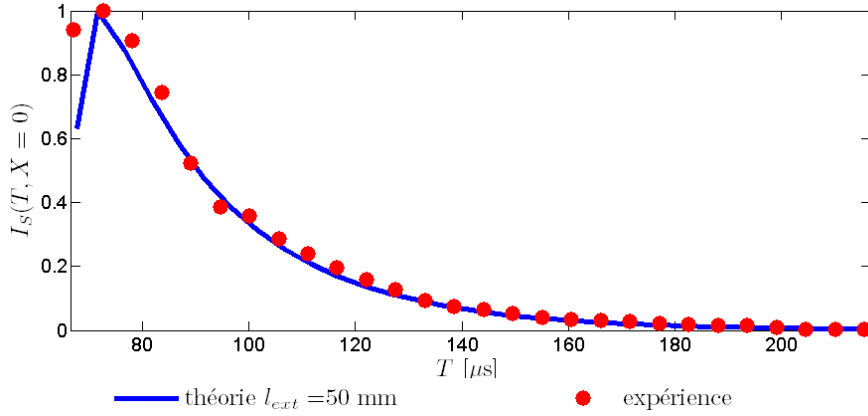
$$I^M(X = x_j - x_i, T) = \left\langle |k_{ij}^M(T, f)|^2 \right\rangle_{\{f, (x_i, x_j)\}} \quad (\text{IV.16})$$

Le symbole  $\langle . \rangle$  représente une moyenne effectuée d'une part sur toute la bande de fréquence  $f$  et d'autre part sur tous les couples source/récepteur  $(i, j)$  séparés de  $X = x_j - x_i$ . Le résultat obtenu pour l'évolution spatio-temporelle de l'intensité multiplement diffusée  $I^M(X, T)$  est présentée sur la figure IV.3. A n'importe quel instant  $T$ , l'intensité totale  $I(X, T)$  obtenue à partir de la matrice initiale  $\mathbf{K}$  présente un profil spatial plat, sans direction privilégiée, ce qui est caractéristique d'une contribution de diffusion simple largement majoritaire (Fig.IV.3(a)). Au contraire la matrice filtrée  $\mathbf{K}^M$  donne lieu à un profil d'intensité typique de la diffusion multiple : le pic de rétrodiffusion cohérente est clairement observé autour de  $X = 0$  (Fig.IV.3(b)-(d)). Ce phénomène a été largement discuté au chapitre I, il se manifeste concrètement par une intensité double au voisinage de la source (c'est-à-dire pour  $X = 0$ ) à condition que les ondes mesurées soient issues de diffusions multiples. Le profil d'intensité obtenu à partir de  $\mathbf{K}^M$  est donc caractéristique de la diffusion multiple et montre l'efficacité de notre technique d'extraction de la composante de diffusion multiple, initialement noyée dans une contribution de diffusion simple largement dominante. L'évolution temporelle du ratio  $\frac{I^M}{I}$  moyenné sur  $X$  est tracée sur la figure IV.3(c). On voit ainsi qu'on est capable d'extraire une composante multidiffusée qui est en intensité jusqu'à cent fois inférieure à la diffusion simple. La part de diffusion multiple parmi l'intensité totale augmente linéairement avec le temps, et nous verrons dans le paragraphe suivant comment obtenir à partir de ces mesures expérimentales une caractérisation ultrasonore de l'échantillon étudié. Notons que l'intensité filtrée  $I^M$  contient également un bruit expérimental non négligeable aux temps courts. On voit en effet que pour  $T < 80 \mu s$ , le facteur d'amplification en intensité autour de  $X = 0$  est loin d'être égal à 2, preuve que le fond incohérent de  $I^M$  contient du bruit expérimental. Les mesures de l'intensité multiplement diffusée sont donc à prendre avec précaution aux temps courts ( $T < 80 \mu s$ ). Au delà, la contribution de diffusion multiple devient suffisamment importante pour noyer le bruit expérimental. Un facteur d'amplification proche de 2 est obtenu pour  $T > 80 \mu s$ .

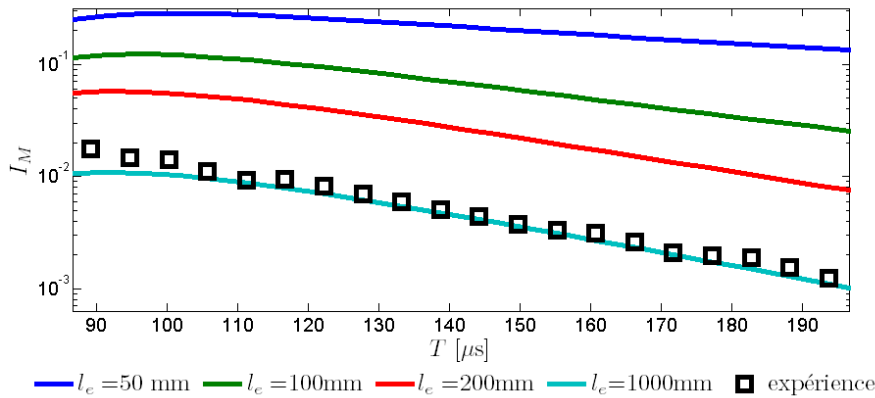
### IV.4.3 Caractérisation d'un milieu très faiblement diffusant à partir de la contribution de diffusion multiple

Nous pouvons à présent tirer profit de la séparation des contributions de diffusion simple et multiple pour caractériser l'échantillon de gel par des paramètres statistiques, tels que le libre parcours moyen élastique  $l_e$ . Ce dernier peut être estimé en examinant l'évolution temporelle des intensités simplement et multiplement diffusées au point source ( $X = 0$ ), notées respectivement  $I^S(X = 0, T)$  et  $I^M(X = 0, T)$ . L'évolution temporelle de ces deux intensités est montrée sur la figure IV.4.

Afin de mesurer les paramètres statistiques caractérisant la décroissance de l'onde cohérente ( $l_{ext}$ ,  $l_e$  et  $l_a$ ), un modèle décrivant l'évolution temporelle de l'intensité moyenne diffusée est nécessaire. Pour cela, on s'est appuyé sur la solution exacte de l'équation de transfert radiatif dans un cadre bidimensionnel [22]. Cette solution est à utiliser plutôt que la solution de l'équation de diffusion. En effet, comme le gel étudié présente un libre parcours moyen très important ( $l_e \simeq 1000mm$ ), les ondes multiplement diffusées sont associées à de faibles ordres



(a)



(b)

FIG. IV.4: Evolution temporelle de l'intensité rétrodiffusée au point source. (a) Evolution de  $I^S(X = 0, T)$ . Les données expérimentales sont comparées à la courbe théorique obtenue pour  $l_{ext} = 50$  mm. L'intensité  $I^S(X = 0, T)$  est normalisée par sa valeur maximum au cours du temps. (b) Evolution de  $I^M(X = 0, T)$ . Les données expérimentales sont comparées à plusieurs courbes théoriques obtenues pour différents libres parcours moyens ( $l_e = 50, 100, 200, 1000$  mm). La longueur d'extinction  $l_{ext}$  est fixée à 50 mm. L'échelle des ordonnées est logarithmique. L'intensité  $I^M(X = 0, T)$  est normalisée par la valeur maximum de  $I^S(X = 0, T)$  au cours du temps.

de diffusion. Un modèle purement diffusif ne peut donc pas être appliqué ici. Les calculs de  $I^S(X = 0, T)$  et  $I^M(X = 0, T)$  sont détaillés en Annexe IV.A. Ils s'appuient sur les éléments théoriques développés au §I.2. Il apparaît que l'évolution temporelle de l'intensité simplement diffusée ne dépend que du libre parcours moyen d'extinction  $l_{ext}$ . Dans le cas du gel étudié ici, un ajustement entre la prévision théorique et le résultat de l'expérience (Fig.IV.4(a)) aboutit à la valeur  $l_{ext} = 50$  mm. Si l'on considère à présent l'évolution temporelle de l'intensité multiple-ment diffusée  $I^M(X = 0, T)$ , l'analyse théorique montre qu'elle dépend distinctement des libres parcours moyens  $l_e$  et  $l_a$ . Ainsi, une fois  $l_{ext}$  connu grâce aux mesures de  $I^S(X = 0, T)$ ,  $l_e$  et  $l_a$  peuvent être déterminés par ajustement des mesures expérimentales de  $I^M(X = 0, T)$  avec la théorie (Fig.IV.4(b)). Le fait de pouvoir séparer contribution de diffusion simple et contribution de diffusion multiple permet donc de mesurer de façon distincte les pertes par absorption et les pertes par diffusion. Ici, l'échantillon étudié se trouve être beaucoup plus absorbant que diffusant puisqu'on trouve un libre parcours moyen élastique  $l_e \simeq 1000$  mm alors que le libre parcours d'absorption  $l_a$  est de l'ordre de 50 mm.

Cette première expérience montre que notre technique permet de mieux caractériser le milieu diffusant, en mesurant séparément des paramètres diffusifs ( $l_e$ ,  $l_a$ ). Ici, on a considéré un cas extrême (gel faiblement diffusant) où le rapport  $I^M/I^S$  est particulièrement faible, mais la même approche peut être appliquée au cas de milieux plus diffusants pour lesquels le rapport  $I^M/I^S$  est proche de l'unité.

## IV.5 Application à l'imagerie ultrasonore dans le corps humain

Pour illustrer les possibilités d'application de notre technique à des matériaux *réels*, la même expérience a été réalisée sur un milieu biologique dans lequel les ultrasons sont couramment employés : le sein. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure IV.5. Nous utilisons une barrette échographique constituée de  $N = 125$  éléments, de fréquence centrale 4,3 MHz (ordre de grandeur typique en imagerie médicale) et de bande passante [3,5 ; 5] MHz. L'espace inter-éléments  $p$  est de 0,33 mm. La fréquence d'échantillonnage des signaux est de 50 MHz. Le même protocole expérimental a été appliqué ; la matrice inter-éléments  $\mathbf{H}$  a été enregistrée, puis les contributions de diffusion simple et multiple ont été séparées.

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure IV.6. La figure IV.6(a) représente l'image échographique du milieu. Les figures IV.6(b) et IV.6(c) détaillent l'évolution temporelle des intensités  $I^M$  (diffusion multiple),  $I^S$  (diffusion simple) et  $I = I^M + I^S$ . Enfin la figure IV.6(d) représente l'évolution spatio-temporelle de l'intensité multiple-ment diffusée. Comme pour l'expérience sur le gel, on met en évidence l'apparition du cône de rétrodiffusion cohérente, ce qui prouve que les signaux filtrés de la matrice  $\mathbf{K}^M$  correspondent bien à des ondes multiple-ment diffusées.

L'analyse de ces résultats expérimentaux permet de distinguer trois régimes :

- $10 \mu s < T < 20 \mu s$  (*i.e.* entre 7,5 et 15 mm sous la peau) : dans cette gamme de temps,



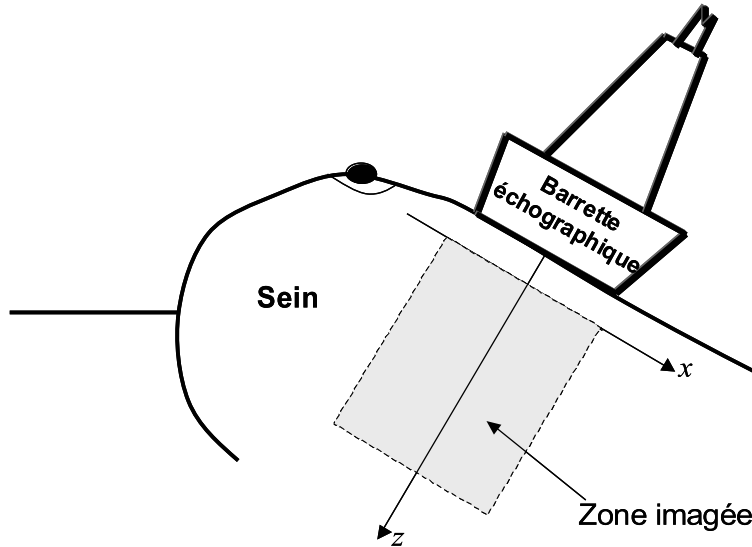


FIG. IV.5: Dispositif expérimental utilisé pour l'expérience menée sur le sein.

l'image échographique (a) est sombre, ce qui indique que le tissu est faiblement échogène c'est-à-dire peu réflecteur pour les ultrasons. La séparation des ondes simplement et multiplement diffusées permet de suivre une décroissance rapide de l'intensité, qui se fait à des rythmes différents pour les contributions de diffusion simple et de diffusion multiple. Ainsi le rapport  $\frac{I^M}{I}$  (qui mesure la proportion instantanée de diffusion multiple) ne reste pas constant mais passe de 0 à environ 20% en 10  $\mu\text{s}$ , ce qui indique que le caractère diffusant du milieu monte en puissance au cours du temps (et donc de la profondeur inspectée) ce que ne permet pas de révéler l'image échographique seule.

- 20  $\mu\text{s} < T < 30 \mu\text{s}$  (*i.e.* entre 15 et 22,5 mm sous la peau) : on entre progressivement dans une zone beaucoup plus échogène, comme en témoigne la luminosité de l'image échographique dans cette partie. Par ailleurs, l'intensité simplement diffusée  $I^S$  augmente au fil du temps (Fig.IV.6(b)), on a donc affaire à davantage de diffusion simple. Le rapport  $\frac{I^M}{I}$  chute (il passe de 20% à 10%) ce qui indique que cette zone du sein, bien que plus échogène, donne moins naissance à de la diffusion multiple que la zone située en amont (Fig.IV.6(c)).
- $T > 30 \mu\text{s}$  (*i.e.* au-delà de 22,5 mm) : d'après l'image échographique, la partie centrale du tissu semble grossièrement homogène à ces temps d'écho. Parallèlement, on mesure une décroissance régulière de  $I^S$  et une augmentation progressive du rapport  $\frac{I^M}{I}$ . Il est intéressant de noter que la diffusion multiple devient même prépondérante ( $\frac{I^M}{I} > 50\%$ ) au-delà de  $T = 52 \mu\text{s}$ , soit à environ 40 mm de profondeur. Ce qui indique que l'image échographique (a), dont le principe de construction est fondé sur une hypothèse de diffusion simple, perd de sa crédibilité. Or ce renseignement ne peut être obtenu que par la mesure du rapport  $\frac{I^M}{I}$ , il n'est pas disponible dans l'image échographique seule.

Ainsi l'évolution du ratio  $\frac{I^M}{I}$  offre une estimation quantitative de la proportion instantanée de diffusion multiple, ce qui complète l'information donnée par l'échographie. On peut construire une barre d'erreur pour l'image échographique en fonction du temps de vol  $T$  (ou de la profon-

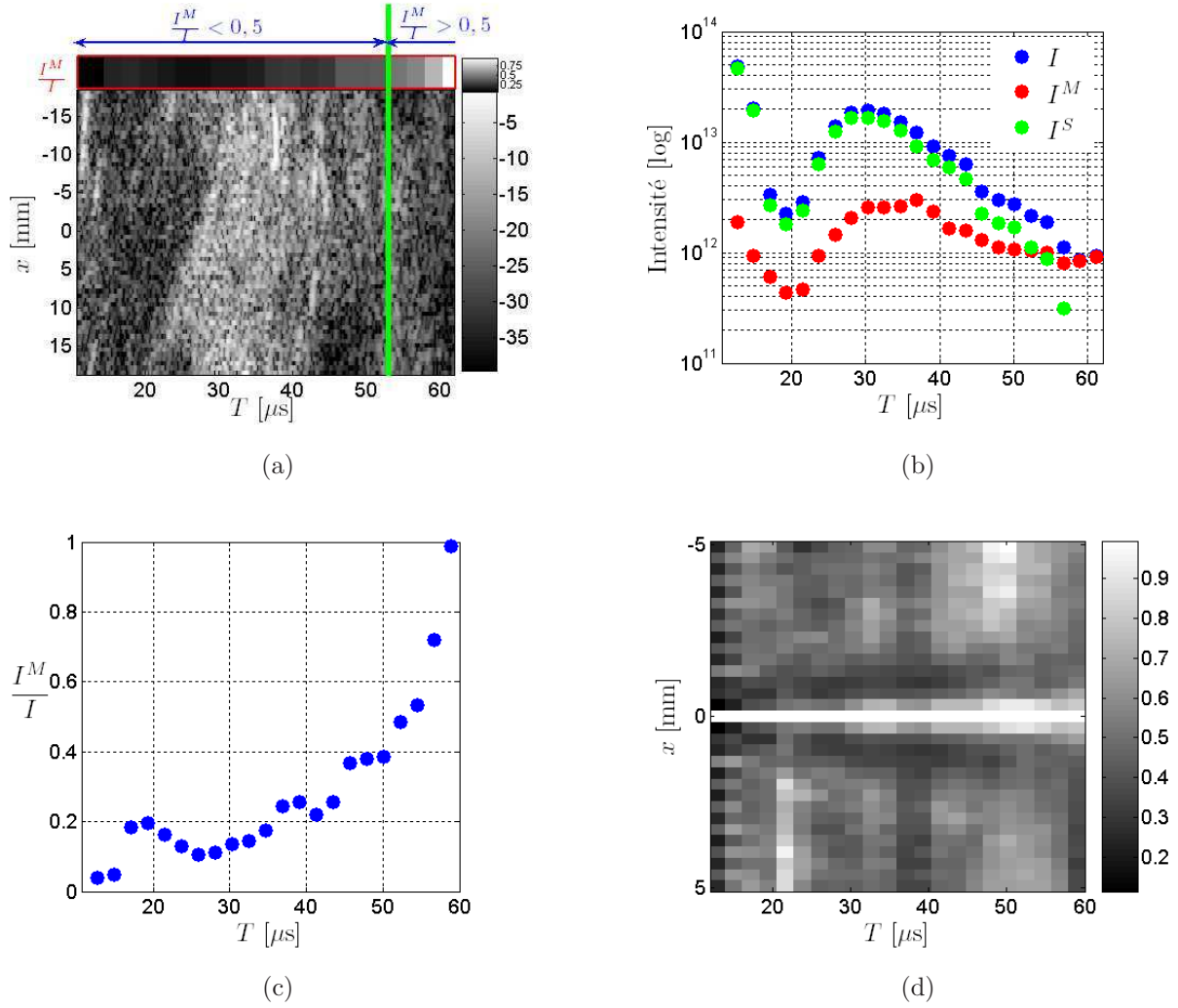


FIG. IV.6: (a) Image échographique du sein (l'échelle de gris est en dB). Au dessus de celle-ci, une échelle de gris représente l'évolution du ratio  $\frac{I^M}{I}$  en fonction du temps.  
 (b) Evolution temporelle de l'intensité totale  $I(X = 0, T)$ , de l'intensité simplement diffusée  $I^S(X = 0, T)$  et de l'intensité multiplement diffusée  $I^M(X = 0, T)$ .  
 (c) Evolution temporelle du ratio  $\frac{I^M}{I}$ .  
 (d) Evolution spatio temporelle de l'intensité multiplement diffusée  $I^M(X, T)$ . L'intensité a été normalisée par son maximum à chaque temps  $T$ .

deur sondée) comme on l'a représenté sur la figure IV.6(a). A gauche de la ligne verticale verte ( $T < 52 \mu\text{s}$ ),  $\frac{I^M}{I} < 0,5$  et on peut donc avoir confiance en l'image échographique. En revanche, pour  $\frac{I^M}{I} > 0,5$ , l'image échographique perd de sa crédibilité puisqu'elle est construite en majeure partie à partir d'échos multiples diffusés. Cet indicateur permettrait donc d'aider le médecin dans son analyse.

La connaissance du ratio  $\frac{I^M}{I}$  offre également des informations qualitatives quant aux caractéristiques des tissus rencontrés par les ultrasons. Néanmoins, un travail théorique reste à faire en vue de caractériser quantitativement les tissus mous à partir des paramètres statistiques de la diffusion multiple. En effet, la caractérisation réalisée sur le milieu synthétique au paragraphe précédent n'est plus valable ici. Le gel est statistiquement homogène en désordre, ce qui n'est pas le cas pour le sein. La procédure d'inversion, qui consisterait à déduire les paramètres diffusants de l'étude de l'intensité multiple diffusée, est loin d'être aussi simple dans le cas d'un milieu aléatoire statistiquement hétérogène.

## IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point une méthode permettant de séparer les ondes simplement et multiplement diffusées par un milieu aléatoire, particulièrement adaptée au cas de milieux faiblement diffusants. Cette séparation est rendue possible par une cohérence déterministe des signaux simplement diffusés qui résiste au désordre. Cette cohérence apparaît le long des antidiagonales de la matrice inter-éléments. En appliquant la SVD à la matrice des antidiagonales, on a pu séparer la diffusion simple (espace *signal*) de la diffusion multiple (espace *bruit*). Cette séparation est réalisée en s'appuyant sur la théorie des matrices aléatoires. L'expérience réalisée sur un milieu prototype de synthèse (gel) a mis en relief les capacités de notre technique. Elle est capable d'extraire une contribution de diffusion multiple même lorsque la diffusion simple est largement dominante. Un des avantages de cette méthode est de permettre une mesure en rétrodiffusion des libres parcours moyen d'absorption et de diffusion.

Au-delà des milieux prototypes fabriqués en laboratoire, notre méthode de séparation diffusion simple/diffusion multiple pourrait s'appliquer à la caractérisation des milieux faiblement diffusants *réels*. Nous l'avons testée lors d'une première application à la caractérisation ultrasonore du sein. Pour l'instant, ces premières expériences sur milieu réel démontrent la faisabilité et l'apport des mesures d'évolution temporelle de la diffusion multiple issues de notre technique, en complément de l'image échographique classique, lorsqu'on s'intéresse à des milieux réputés *faiblement diffusants* comme c'est le cas des tissus mous du corps humain. On a pu ainsi montrer que la diffusion multiple est bien présente dans les tissus du corps humain autour de 4 MHz et de manière non négligeable puisque les signaux multiplement diffusés sont aux temps longs ( $\simeq 50\mu\text{s}$ ) du même ordre de grandeur que ceux simplement diffusés. Un de nos objectifs est de pouvoir caractériser plus précisément la structure des tissus traversés par l'onde ultrasonore au fil du temps, à partir de l'étude de la contribution de diffusion multiple. Pour se faire, un travail théorique supplémentaire est nécessaire, en complément de nouvelles campagnes de mesures.

## IV.A Annexe du chapitre IV

Nous calculons ici l'évolution temporelle des intensités simplement et multiplement diffusées pour un milieu faiblement diffusant. On va supposer le milieu semi-infini et se placer dans la configuration bidimensionnelle des expériences ultrasonores. Le milieu aléatoire est caractérisé par son libre parcours moyen élastique  $l_e$  et son libre parcours moyen d'absorption  $l_a$ . Les événements de diffusion sont supposés isotropes. Cette dernière hypothèse conduit à confondre le libre parcours moyen de transport  $l^*$  et le libre parcours moyen élastique  $l_e$ . Nous considérons le cas particulier d'une source et d'un récepteur confondus ( $X = 0$ ). Une impulsion ultrasonore est émise par un transducteur de la barrette et le champ rétrodiffusé est mesuré sur le même transducteur. Le but de cette annexe est de calculer l'intensité moyenne rétrodiffusée par le milieu aléatoire.

### IV.A.1 Intensité simplement diffusée

Calculons tout d'abord l'évolution temporelle de l'intensité simplement diffusée  $I^S(X = 0, t)$ . On note  $\bar{\psi}_E(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$  le champ reçu par un point  $\mathbf{R}$  du milieu aléatoire lorsqu'une impulsion ultrasonore est émise depuis la source située en  $\mathbf{S}$  (voir Fig.IV.7).

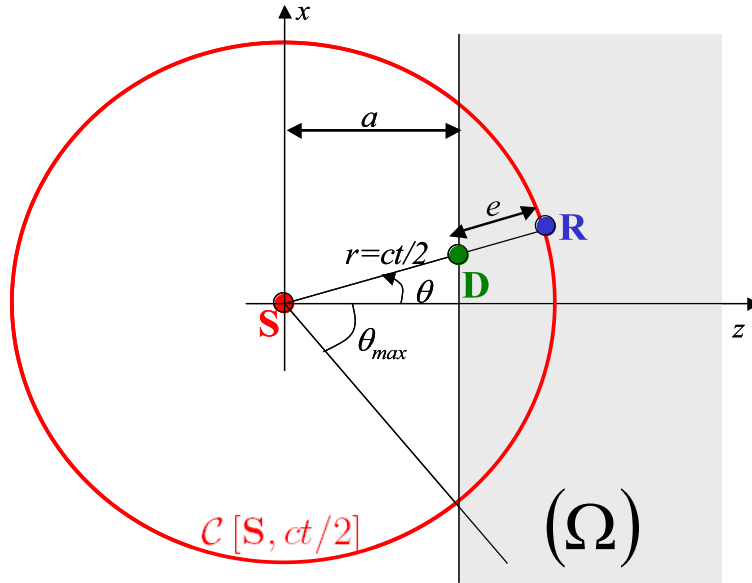


FIG. IV.7: Différentes notations utilisées pour le calcul de l'intensité simplement diffusée  $I^S(X = 0, t)$

De la même manière, on note  $\bar{\psi}_R(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$  le champ reçu par le transducteur situé en  $\mathbf{S}$  lorsqu'une impulsion ultrasonore est émise depuis le point  $\mathbf{R}$ . Le même transducteur est utilisé à l'émission et à la réception ; on a donc  $\bar{\psi}_E \equiv \bar{\psi}_R$ .  $\bar{\psi}_E$  est bien approchée dans notre configuration expérimentale par la fonction suivante :

$$\bar{\psi}_E(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \frac{\delta(ct - r)}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{e}{2l_{ext}}\right) \quad (\text{IV.17})$$

$r = |\mathbf{SR}|$  est la distance entre le transducteur et le point  $\mathbf{R}$  du milieu aléatoire.  $e = |\mathbf{DR}| = r - \frac{a}{\cos\theta}$  est la distance parcourue dans le milieu aléatoire par l'onde incidente. Le terme  $\exp\left(-\frac{e}{2l_{ext}}\right)$  traduit la décroissance des ondes incidente et rétrodiffusée lors de leur passage dans le milieu diffusant. Au chapitre I, nous avons donné l'expression générale de l'intensité simplement diffusée (Eq.I.12). On peut appliquer ce résultat à notre configuration expérimentale pour laquelle source et récepteur sont confondus :

$$I^S(X = 0, t) = \frac{c}{l_e} \iint_{(\Omega)} d\mathbf{R} \left| \bar{\psi}_E(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) \otimes \bar{\psi}_E(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \right|^2 \quad (\text{IV.18})$$

où  $(\Omega)$  désigne l'espace occupé par le milieu diffusant, ici le demi espace infini tel que  $z > a$ . Les chemins aller et retour de l'onde simplement diffusée sont décrits par le terme  $\bar{\psi}_E(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) \otimes \bar{\psi}_E(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t)$ . On peut expliciter ce terme en utilisant l'expression de  $\bar{\psi}_E(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$  (Eq.IV.17) :

$$\bar{\psi}_E(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) \otimes \bar{\psi}_E(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = \frac{\delta(ct - 2r)}{2\pi r} \exp\left(-\frac{e}{l_{ext}}\right) \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant Eq.IV.19 et en se plaçant en coordonnées polaires, Eq.IV.18 devient

$$I^S(X = 0, t) = \frac{c}{4\pi^2 l_e} \iint_{(\Omega)} \frac{\exp\left(-\frac{2e}{l_{ext}}\right)}{r} \delta(ct - 2r) d\theta dr \quad (\text{IV.20})$$

La distribution de Dirac  $\delta(ct - 2r)$  transforme l'intégrale sur la surface du milieu diffusant  $(\Omega)$  en une intégrale sur un contour qui correspond à l'intersection entre le cercle  $\mathcal{C}[\mathbf{S}, ct/2]$  (de centre  $\mathbf{S}$  et de rayon  $ct/2$ ) et le milieu diffusant  $(\Omega)$  (voir Fig.IV.7). Cela signifie que l'intensité reçue au temps  $t$  provient d'évènements de diffusion simple associés à des réflecteurs situés à une distance  $r = ct/2$  du transducteur. Finalement, nous obtenons :

$$I^S(X = 0, t) = \frac{e^{-ct/l_{ext}}}{4\pi^2 l_e t} \Theta(ct - 2a) \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \exp\left(\frac{2a}{l_{ext} \cos\theta}\right) d\theta \quad (\text{IV.21})$$

où  $\theta_{max} = \arccos\left(\frac{2a}{ct}\right)$ . La fonction de Heaviside  $\Theta(ct - 2a)$  signifie qu'aucun signal n'est reçu pour les temps  $t < 2a/c$ , comme attendu. Eq.IV.21 est la forme analytique la plus simple de  $I^S(X = 0, t)$ . Le résultat final ne peut être obtenu que numériquement (voir Fig.IV.4(a)). Nous vérifions que si  $I^S(X = 0, t)$  est normalisée par son maximum au cours du temps, l'évolution temporelle de l'intensité simplement diffusée ne dépend que de  $l_{ext}$ . Dans le cas particulier de  $a = 0$  (champ proche), une expression analytique de l'intensité simplement diffusée  $I^S$  peut être obtenue :

$$I^S(X = 0, t) = \frac{e^{-ct/l_{ext}}}{4\pi l_e t} \Theta(ct) , \text{ si } a = 0 \quad (\text{IV.22})$$

## IV.A.2 Intensité multiplement diffusée

Comme nous l'avons vu au chapitre I, l'intensité multiplement diffusée peut être décomposée en deux termes : un terme incohérent  $I_{inc}$  et un terme cohérent  $I_{coh}$ . Lorsque source et récepteur sont confondus ( $X = 0$ ), les intensités cohérente et incohérente sont égales :  $I_{inc}(X = 0) =$

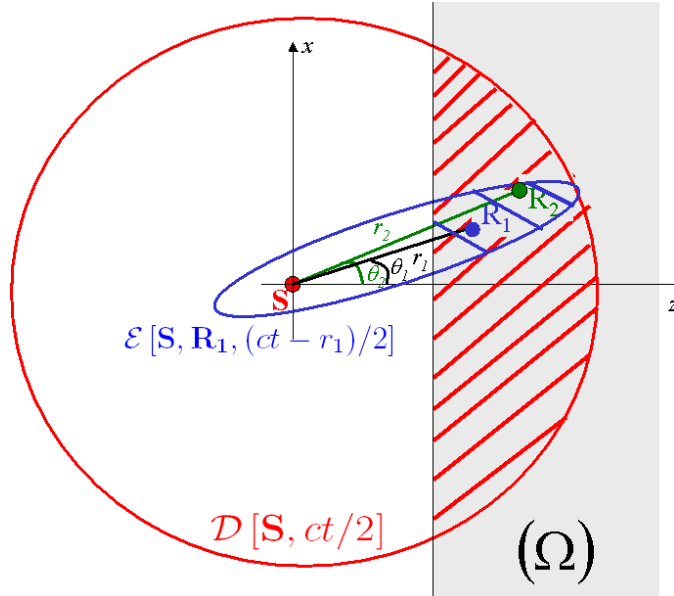


FIG. IV.8: Différentes notations utilisées pour le calcul de l'intensité multiple diffusée  $I^M(X = 0, t)$

$I_{coh}(X = 0)$ . Nous allons considérer ici seulement le calcul de l'intensité incohérente  $I_{inc}$ . En effet, une fois que celle-ci sera calculée, on pourra déduire directement l'intensité multiple diffusée  $I^M$  puisque  $I^M(X = 0) = I_{inc}(X = 0) + I_{coh}(X = 0) = 2I_{inc}(X = 0)$ .

On note  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  les vecteurs positions respectifs du premier et dernier diffuseur le long d'un chemin de diffusion multiple quelconque (voir Fig.IV.8). Au chapitre I, nous avons établi l'expression générale de l'intensité incohérente (Eq.I.16). On peut appliquer ce résultat à notre configuration expérimentale pour laquelle source et récepteur sont confondus :

$$I_{inc}(X = 0, t) = \frac{c}{l_e^2} \iint_{(\Omega)} d\mathbf{R}_1 \iint_{(\Omega)} d\mathbf{R}_2 |\bar{\psi}_E(\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, t)|^2 \otimes P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t) \otimes |\bar{\psi}_E(\mathbf{R}_1, \mathbf{S}, t)|^2 \quad (\text{IV.23})$$

où le terme  $P(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, t)$  décrit le transport de l'énergie du point  $\mathbf{R}_1$  au point  $\mathbf{R}_2$ . Cet opérateur est solution de l'équation de transfert radiatif (Eq.I.27) dont une solution analytique existe en configuration 2D (Eq.I.29, [22]). Nous utiliserons cette solution exacte plutôt que la solution de l'équation de diffusion (Eq.I.32). En effet, nous traitons ici le cas d'un milieu faiblement diffusant pour lequel l'approximation de diffusion n'est pas valable, compte tenu des faibles ordres de diffusion mis en jeu. En explicitant l'expression de  $\bar{\psi}_E$  (Eq.IV.17) et en utilisant les coordonnées polaires (voir Fig.IV.8), l'équation IV.23 devient :

$$I_{inc}(X = 0, t) = \frac{c}{4\pi^2 l_e^2} \iint_{D \cap (\Omega)} dr_1 d\theta_1 \iint_{E \cap (\Omega)} dr_2 d\theta_2 \exp\left(-\frac{e_1 + e_2}{l_{ext}}\right) P\left(r, t - \frac{r_1 + r_2}{c}\right) \quad (\text{IV.24})$$

où  $r_1 = |\mathbf{S}\mathbf{R}_1|$ ,  $r_2 = |\mathbf{S}\mathbf{R}_2|$  et  $r = |\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2|$ . Les distributions de Dirac  $\delta(r - ct)$  et d'Heaviside  $\Theta(r - ct)$  qui apparaissent dans l'expression exacte de  $P(r, t)$  (Eq.I.29) impliquent que l'intégrale suivant  $\mathbf{R}_1(r_1, \theta_1)$  doit être réalisée sur l'intersection du disque  $\mathcal{D}[\mathbf{S}, ct/2]$  (centré en  $\mathbf{S}$  et de rayon  $ct/2$ ) et du milieu aléatoire  $(\Omega)$  (= la surface hachurée en rouge sur la figure IV.8). Concernant l'intégration de  $\mathbf{R}_2(r_2, \theta_2)$ , celle-ci doit être réalisée sur l'intersection de la surface contenue

dans l'ellipse  $\mathcal{E}[\mathbf{S}, \mathbf{R}_1, (ct - r_1)/2]$  (de foyers  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{R}_1$  et de demi grand axe  $(ct - r_1)/2$ ) et du milieu aléatoire ( $\Omega$ ) (= la surface hachurée en bleue sur la figure IV.8). Eq.IV.24 est la forme la plus simple que l'on puisse obtenir pour l'intensité incohérente. L'évolution temporelle de  $I^M(X = 0, t)$  doit être calculée numériquement (voir Fig.IV.4(b)). Notons que la dépendance temporelle de l'intensité multiple diffusée ne dépend pas seulement de  $l_{ext}$ , mais aussi de la part relative entre les pertes par diffusion ( $l_e$ ) et par absorption ( $l_a$ ). Cette dépendance vis à vis de  $l_e$  et  $l_a$  est contenue implicitement dans l'opérateur de propagation de l'intensité  $P(r, t)$  (Eq.I.29).

# Chapitre V

## Lien entre la micro-architecture du milieu aléatoire et les paramètres diffusants

### V.1 Introduction

Le but de ce cinquième et dernier chapitre est de relier les paramètres diffusants d'une onde se propageant dans un milieu aléatoire à sa micro-architecture. Plus précisément, nous allons considérer ici le cas de milieux continus. Ce travail ne s'applique donc pas aux milieux discrets monodisperses, comme par exemple les échantillons prototypes de tiges en acier souvent utilisés au laboratoire. Ce type de milieu a déjà fait l'objet d'une étude approfondie lors de la thèse de Victor Mamou [44]. Ici, nous nous intéressons aux milieux aléatoires dans lesquels les variations de célérité  $c(\mathbf{r})$  peuvent être considérées comme continues. Les tissus du corps humain sont un exemple de milieu aléatoire continu, pour lesquels nous avons mis en évidence, au cours de cette thèse, l'occurrence de diffusion multiple. Nous espérons également que le modèle des milieux continus puisse s'appliquer à des milieux certes constitués de diffuseurs discrets, mais dont la taille et la forme sont hétérogènes. C'est le cas pour l'os poreux dont les propriétés multidiffusantes ont également été étudiées au cours de cette thèse. Pour ce type de milieux aléatoires, le désordre peut être modélisé en moyenne par une fonction d'autocorrélation continue. On peut alors supposer que le résultat donné par un modèle continu sera plus proche de la réalité qu'une superposition arbitraire de modèles discrets.

Dans la littérature, de nombreux travaux expérimentaux ont déjà été menés afin de relier les mesures ultrasonores à la micro-architecture des tissus du corps humain [123, 124, 125] ou de l'os [62, 126, 127, 128]. Ceux-ci reposent sur la mesure de l'intensité diffusée par le milieu aléatoire étudié. L'inversion des données (*i.e* la déduction de la micro-architecture à partir des mesures expérimentales) s'appuie sur les travaux théoriques de Chernov [129] qui a relié l'intensité diffusée à la fonction d'autocorrélation du milieu aléatoire sous une approximation de diffusion simple, et de Sehgal et Greenleaf [124] qui ont par la suite pris en compte la diffusion multiple dans le calcul de l'intensité diffusée.



En ce qui nous concerne, nous avons vu au chapitre I que nous pouvions aller plus loin expérimentalement qu'une simple mesure d'intensité en accédant aux paramètres diffusants qui caractérisent la propagation de l'onde multiples fois diffusée au sein du milieu aléatoire. Ces paramètres sont principalement le libre parcours moyen élastique  $l_e$ , le libre parcours moyen de transport  $l^*$  et la constante de diffusion  $D$ . Notre objectif est de relier les deux libres parcours moyens  $l_e$  et  $l^*$  à la microarchitecture du milieu désordonné. La constante de diffusion est, quant à elle, directement reliée au libre parcours moyen de transport par la relation  $D = \frac{v_E l^*}{d}$  (où  $d$  est la dimension du système et  $v_E$  la vitesse de l'énergie).

Le libre parcours moyen  $l_e$  caractérise la décroissance de l'onde cohérente due aux événements de diffusion subis par l'onde incidente. Nous nous intéressons donc dans un premier temps à la décroissance du champ moyen. Notre étude s'appuie sur les développements théoriques proposés par Rytov *et al.* [130]. Nous partons de l'équation de propagation en milieu hétérogène et nous introduisons la notion de moyenne sur le désordre. Nous rappelons que l'amplitude du champ moyen obéit à l'équation de Dyson. Les notions de milieu effectif et de libre parcours moyen élastique sont alors introduites. L'équation de Dyson met en jeu un terme d'énergie propre  $\Sigma$  caractérisant les pertes par diffusion. Un développement à l'ordre 1 de celle-ci permet alors de la relier directement à la fonction d'autocorrélation du potentiel perturbatif du milieu aléatoire. Connaissant cette fonction d'autocorrélation, on peut donc en déduire le libre parcours moyen  $l_e$ . L'originalité de notre approche consiste à repérer les conditions sous lesquelles l'expression théorique du nombre d'onde effectif  $k_e$  établie par Rytov *et al.* [130] reste valable. Nous distinguons ainsi deux régimes dits de *faibles* et *hautes* perturbations. Dans le premier régime, les différentes approximations réalisées par Rytov *et al.* sont valables et une expression analytique du libre parcours moyen  $l_e$  est obtenue dans le cas de fonctions d'autocorrélation dites *classiques* (exponentielle et gaussienne). Cela nous permet de déduire le comportement de  $l_e$  en fonction des paramètres statistiques du désordre (longueur de corrélation, amplitude des fluctuations) et de la fréquence. En régime de hautes perturbations, nous montrons pourquoi l'expression analytique obtenue pour  $l_e$  n'est plus valable et nous verrons qu'on entre rapidement dans un régime de localisation forte ( $k_0 l_e \simeq 1$ ). Cette discussion quant à la validité des résultats théoriques établis par Rytov *et al.* [130] est ensuite complétée par une simulation numérique. Celles-ci ont été réalisées avec le code Acel développé au laboratoire par Mickaël Tanter. Ce code permet de simuler la propagation d'ondes scalaires ou élastiques en définissant une carte de vitesse et de densité choisie par l'opérateur. On a ainsi pu simuler la propagation d'ondes dans des milieux aléatoires 2D caractérisés par une fonction d'autocorrélation gaussienne. L'accord entre les prédictions théoriques et les simulations numériques est très bon, ce qui nous permet de valider les différents éléments théoriques développés dans ce chapitre.

Le second axe de ce chapitre consiste à relier le libre parcours moyen de transport  $l^*$  aux paramètres statistiques du milieu aléatoire. A notre connaissance, ce lien n'avait pas encore été établi explicitement dans la littérature. Physiquement,  $l^*$  caractérise la distance au bout de laquelle l'onde diffusée a perdu la mémoire de la direction de l'onde incidente.  $l^*$  est fortement lié à l'anisotropie des événements de diffusion, en effet  $l^* = \frac{l_e}{1 - \langle \cos \theta \rangle}$ , où  $\theta$  correspond à l'angle entre l'onde incidente et l'onde diffusée et  $\langle \cos \theta \rangle$  quantifie donc l'anisotropie du milieu.  $\langle \cos \theta \rangle$

peut directement être déduit de la section efficace différentielle de diffusion  $\sigma(\theta)$ . Cette dernière étant directement reliée à la fonction d'autocorrélation du potentiel perturbatif [129, 131], le lien entre  $l^*$  et les paramètres statistiques de la célérité  $c(\mathbf{r})$  dans le milieu aléatoire a ainsi pu être établi théoriquement. Enfin, nous avons également confronté la théorie avec les mesures expérimentales du coefficient de diffusion  $D$  effectuées sur l'os (*cf* Chap.I.5). En considérant une coupe typique de l'os trabéculaire, nous avons pu calculer une fonction d'autocorrélation liée à la microarchitecture de l'os. Le coefficient de diffusion  $D$  établi à partir de cette fonction d'autocorrélation est en bon accord avec nos mesures expérimentales de  $D$  dans l'os trabéculaire. Ces mesures ont été effectuées en collaboration avec le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de l'Université Paris VI.

## V.2 Libre parcours moyen élastique

Dans cette partie, nous étudions la décroissance de l'onde cohérente (*i.e* l'onde qui résiste à la moyenne d'ensemble) lors de son passage à travers un milieu aléatoire continu. Cette étude s'appuie principalement sur les développements théoriques présentés par Rytov *et al.* [130]. Nous rappelons dans un premier temps les équations d'onde en milieu homogène et hétérogène. Ceci nous permet d'introduire le formalisme de Green qui fournit un cadre efficace et élégant pour la résolution de problèmes comme la propagation ondulatoire en milieu désordonné. Le passage à la moyenne de la fonction de Green en milieu aléatoire nous permet de définir une fonction de Green effective. Celle-ci est solution de l'équation de Dyson qui met en jeu un terme d'énergie propre, modélisant les pertes par diffusion. Le nombre d'onde effectif du milieu peut être déduit de cette équation de Dyson, moyennant une approximation de faibles perturbations, dont on déterminera les limites. A travers divers exemples de fonctions d'autocorrélation (exponentielle et gaussienne), le libre parcours moyen  $l_e$  peut être calculé analytiquement à trois dimensions. Par la suite, nous aborderons également le cas bidimensionnel. Nous avons pu ainsi comparer les prédictions théoriques avec les résultats de simulations numériques réalisées avec le code Acel.

### V.2.1 Equation d'ondes en milieu hétérogène

#### Equation d'ondes en milieu homogène et formalisme de Green

La propagation d'une onde acoustique en milieu fluide, continu, compressible, linéaire, homogène, isotrope et sans pertes, est gouvernée par l'équation suivante :

$$\Delta\psi_0(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.1})$$

où  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  représente la surpression instantanée au point  $\mathbf{r}$  et au temps  $t$  et  $c_0$  la célérité des ondes acoustiques dans le fluide. Dans le cas d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , l'équation précédente se réduit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\psi_0(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2\psi_0(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (\text{V.2})$$

avec  $k_0$  le nombre d'onde défini par  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ .

L'équation de Green s'obtient en remplaçant le second membre de Eq.V.2 par un Dirac spatial qui représente une source ponctuelle située en  $\mathbf{r}'$  émettant une onde acoustique sinusoïdale à la fréquence  $\omega$  :

$$\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + k_0^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{V.3})$$

Notons que par la suite, la dépendance de la fonction de Green vis à vis de  $\omega$  ne sera plus explicitée dans un souci d'allègement des notations. En milieu homogène, la fonction de Green ne dépend que de la différence  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  :  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Pour des raisons de conservation d'énergie, on accompagne l'équation de Green en milieu homogène de la condition d'espace libre :  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 0$  quand  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ . La fonction de Green spatiale est particulièrement utile puisqu'elle permet de calculer le champ  $\psi_s(\mathbf{r}, \omega)$  engendré par une distribution quelconque de source monochromatique  $s(\mathbf{r})$  en effectuant une simple convolution spatiale :  $\psi_s(\mathbf{r}, \omega) = G(\mathbf{r}) \otimes s(\mathbf{r})$ .

Par la suite, on sera amené à décomposer la fonction de Green sur ses fréquences spatiales :

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int G_0(\mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} \quad (\text{V.4})$$

En injectant Eq.V.4 dans Eq.V.3, on obtient l'équation de Green dans l'espace des  $\mathbf{k}$  :

$$G_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 \pm j0} \quad (\text{V.5})$$

Le passage dans l'espace des  $\mathbf{k}$  permet de mettre en évidence les modes du système, c'est à dire les nombres d'onde  $k$  vérifiant la relation de dispersion du milieu.

Si on revient maintenant dans l'espace réel, on obtient l'expression de la fonction de Green de l'espace libre. A trois dimensions, celle-ci s'écrit :

$$G_0^\pm(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{e^{\pm jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{V.6})$$

$G_0^+$  est l'expression d'une onde divergente et correspond à la fonction de Green retardée.  $G_0^-$  est l'expression d'une onde convergente et correspond à la fonction de Green avancée. Nous aurons parfois à considérer le cas bidimensionnel notamment pour ce qui concerne les simulations numériques. Dans ce cas, la fonction de Green a une forme plus compliquée dans l'espace réel :

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mp \frac{j}{4} H_0^{(1,2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (\text{V.7})$$

$G_0^+$  représente une onde cylindrique divergente et  $G_0^-$  une onde cylindrique convergente.  $H_0^{(1)}$  et  $H_0^{(2)}$  sont les fonctions de Hankel du premier ordre, respectivement du premier et du second type.

### Equation d'ondes en milieu hétérogène

En acoustique, dans un modèle liquide-liquide, les hétérogénéités du milieu sont définies par une dépendance spatiale de la compressibilité  $\chi(\mathbf{r})$ , de la densité  $\rho(\mathbf{r})$  et donc de la vitesse

$c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\chi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})}$ . En milieu hétérogène, l'équation d'onde devient [129] :

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla \log \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{V.8})$$

Dans le cas d'une onde monochromatique, elle s'écrit :

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \psi(\mathbf{r}, \omega) - \nabla \log \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (\text{V.9})$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme de l'équation d'onde non perturbée (Eq.V.2) mais avec un terme source lié aux hétérogénéités du milieu :

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2\psi(\mathbf{r}, \omega) = -k_0^2\mu(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{V.10})$$

$\mu(\mathbf{r})$  est un opérateur lié aux perturbations engendrées par les fluctuations de célérité et de densité du milieu :

$$\mu(\mathbf{r}) = \left( \frac{c_0^2}{c(\mathbf{r})^2} - 1 \right) - k_0^{-2} \nabla \log \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla \quad (\text{V.11})$$

Pour simplifier l'expression de  $\mu(\mathbf{r})$ , on peut supposer que la densité et la célérité ne dévient que légèrement de leur valeur moyenne  $\rho_0$  et  $c_0$ , *i.e*

$$c(\mathbf{r}) = c_0 + \delta c(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r}) \quad (\text{V.12})$$

avec  $\delta c(\mathbf{r}) \ll c_0$  et  $\delta\rho(\mathbf{r}) \ll \rho_0$ . Dans ce régime de faibles perturbations, Eq.V.11 se simplifie :

$$\mu(\mathbf{r}) = -2 \frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0} - \frac{1}{k_0^2 \rho_0} \nabla \delta\rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla \quad (\text{V.13})$$

Remarquons que le potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  est la somme d'un champ scalaire  $(-2 \frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0})$  lié aux fluctuations de célérité dans le milieu et d'un opérateur lié aux fluctuations de densité  $(\frac{1}{k_0^2 \rho_0} \nabla \delta\rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla)$ . Ce deuxième terme sous forme d'opérateur complique singulièrement les calculs. Dans nos configurations expérimentales, les inhomogénéités sont le plus souvent solides ou liquides et le milieu enrobant ces inhomogénéités est un liquide (l'eau la plupart du temps). Dans ce cas, les fluctuations de compressibilité sont nettement supérieures à celles de densité. On peut donc négliger le terme ne dépendant que de la densité dans l'expression du potentiel perturbatif [129] :

$$\mu(\mathbf{r}) \simeq -2 \frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0} \quad (\text{V.14})$$

Notons que cette expression prend en compte tout de même une partie des pertes par diffusion dues aux fluctuations de densité puisque les variations de célérité  $c(\mathbf{r})$  dépendent implicitement de  $\rho(\mathbf{r})$ . Si on souhaite tenir compte du terme  $\frac{1}{k_0^2 \rho_0} \nabla \delta\rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla$  dans l'expression du potentiel perturbatif (par exemple dans le cas de bulles de gaz piégées dans un liquide), on peut se référer au travail effectué par Jones [132] lors de sa thèse. Le développement théorique et les approximations réalisées par Jones [132] se réfèrent comme nous au modèle proposé par Rytov *et al.* [130], mais la prise en compte du terme ne dépendant que de la densité dans Eq.V.13 complique quelque peu les calculs et l'expression finale du libre parcours moyen.

L'équation d'ondes en milieu hétérogène (Eq.V.10) se mettant sous la forme d'une équation d'onde perturbée, avec un terme source  $-k_0^2\mu(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},\omega)$  lié aux hétérogénéités du milieu, on peut, grâce au formalisme de Green, exprimer le champ  $\psi(\mathbf{r},\omega)$ , obtenu en milieu hétérogène, comme la somme d'un champ  $\psi_0(\mathbf{r},\omega)$ , qu'on obtiendrait en milieu homogène, et d'un champ diffusé par les hétérogénéités du milieu :

$$\psi(\mathbf{r},\omega) = \psi_0(\mathbf{r},\omega) - k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',\omega)d\mathbf{r}' \quad (\text{V.15})$$

Cette équation self-consistante conduit au développement de Born en remplaçant le terme  $\psi(\mathbf{r}',t)$  sous l'intégrale par le membre de droite et en répétant cette manipulation à l'infini :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r},\omega) &= \psi_0(\mathbf{r},\omega) - k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}_1,\omega)d\mathbf{r}_1 \\ &+ k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mu(\mathbf{r}_2)\psi_0(\mathbf{r}_2,\omega)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2 \\ &- k_0^6 \iiint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mu(\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\mu(\mathbf{r}_3)\psi_0(\mathbf{r}_3,\omega)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{r}_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Limitier ce développement à l'ordre 1 (première approximation de Born) revient à faire une hypothèse de diffusion simple (on suppose une seule interaction de l'onde incidente avec le potentiel). Cette approximation est souvent faite en imagerie médicale ou en contrôle non destructif : elle constitue l'hypothèse de base de l'échographe, du sonar et du radar.

### Fonction de Green en milieu hétérogène

La fonction de Green  $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  vérifie l'équation suivante

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + k_0^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -k_0^2\mu(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{V.17})$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (\text{V.18})$$

On peut remarquer que l'invariance par translation du milieu homogène, qui se traduit par le fait que  $G_0$  ne dépende que de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , n'est plus valable dans le cas inhomogène :  $G$  dépend dans le cas général des deux variables d'espace  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ . A l'instar du développement de Born réalisé au paragraphe précédent (Eq.V.16),  $G$  peut également se développer sous la forme :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 \\ &+ k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mu(\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2 \\ &- k_0^6 \iiint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mu(\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\mu(\mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{r}_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

Dans la pratique, on a accès expérimentalement à la fonction de Green  $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$  entre plusieurs couples de points  $(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ , comme lorsque l'on mesure la matrice inter-éléments  $\mathbf{K}$ . En imagerie,

le but est de retrouver, à partir de cette banque de fonctions de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , les variations de célérité et/ou densité du milieu sondé. Malheureusement, cette inversion ne peut être réalisée que pour des cas simples où l'on peut tronquer l'équation V.19 aux premiers ordres. C'est le cas pour les milieux simplement diffusants pour lesquels l'approximation de Born à l'ordre 1 est valable.

Lorsque l'ordre de diffusion devient élevé, le processus d'inversion sur une réalisation du désordre n'est généralement plus possible. Une manière élégante de franchir cet obstacle est alors de prendre un point de vue probabiliste. En effet, en moyennant sur le désordre, nous allons accéder à la notion de milieu effectif. Nous pourrions alors introduire différents paramètres statistiques, tel que le libre parcours moyen  $l_e$ , pour décrire la propagation d'une onde dans de tels milieux désordonnés. Ces paramètres permettent de caractériser de manière moyenne le milieu sondé par son désordre.

## V.2.2 Passage à la moyenne : Notion de milieu effectif [130]

### Fonction de Green moyenne et formalisme diagrammatique [130]

La fonction de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  (Eq.V.19), obtenue pour une réalisation du désordre, est maintenant moyennée sur le désordre. Pour cela, nous allons faire l'hypothèse d'un champ de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  gaussien, de moyenne nulle. Le second cumulant s'écrit alors :

$$\langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle = B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{V.20})$$

Ce processus étant gaussien, la fonction d'autocorrélation  $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  suffit à caractériser complètement le potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$ . Le passage à la moyenne de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  (Eq.V.19) s'accompagne de l'annulation des moments impairs du potentiel de perturbation :

$$\langle \mu(\mathbf{r}_1) \cdots \mu(\mathbf{r}_{2n-1}) \rangle = 0 \quad (\text{V.21})$$

Les moments pairs sont, quant à eux, donnés par :

$$\langle \mu(\mathbf{r}_1) \cdots \mu(\mathbf{r}_{2n}) \rangle = \sum B(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \cdots B(\mathbf{r}_\gamma, \mathbf{r}_\delta) \quad (\text{V.22})$$

La somme du second membre est réalisée sur tous les couples possibles  $(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)$  parmi les  $2n$  points  $(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{2n})$ . Par exemple, on a à l'ordre 4 :

$$\langle \mu(\mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_2)\mu(\mathbf{r}_3)\mu(\mathbf{r}_4) \rangle = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)B(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \quad (\text{V.23})$$

En considérant un modèle gaussien pour le potentiel perturbatif, le passage à la moyenne de l'équation V.19 donne :

$$\begin{aligned} \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &+ k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2 \\ &+ k_0^8 \iiint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)G_0(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}') \\ &\times [B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)B(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)]d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{r}_3d\mathbf{r}_4 + \cdots \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

où  $\overline{G}$  représente la fonction de Green moyenne.

Dans un souci de simplification, il est possible de représenter le développement précédent par des diagrammes de Feynman. Du fait de la compacité de ces derniers, la représentation diagrammatique est en effet bien plus pratique que la représentation analytique, et elle nous facilitera la tâche dans la suite du raisonnement. Les conventions utilisées sont présentées sur la figure suivante :

$$\begin{aligned}
 G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &\sim \text{---} \mathbf{r} \text{---} \mathbf{r}' \text{---} \\
 k_0^4 B(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) &\sim \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \\
 \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\sim \text{---} \mathbf{r} \text{---} \mathbf{r}' \text{---}
 \end{aligned}$$

FIG. V.1: Convention utilisée pour la construction des diagrammes de Feynman.

On peut donc réécrire l'équation V.24 sous la forme d'une somme de diagrammes de Feynman :

$$\begin{aligned}
 \text{---} &= \text{---} \quad (1) \\
 + &\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (2) \\
 + &\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (3) + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (4) + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (5) \\
 + &\dots
 \end{aligned}$$

FIG. V.2: Représentation diagrammatique du développement de Born de  $\overline{G}$  (Eq.V.24).

Pour une plus grande lisibilité, nous avons fait correspondre une ligne du développement à une ligne de l'équation V.24. Les vertices (pluriel de vertex) sont les points où les lignes représentant  $G_0$  et  $B$  se rejoignent. Ils sont représentés par des disques noirs et correspondent aux variables d'intégration dans Eq.V.24. Le nombre de vertices dans chaque diagramme donne l'ordre du diagramme. Avant de poursuivre le calcul diagrammatique, on peut décrire physiquement la signification de chacun de ces diagrammes. Le premier diagramme (ordre 0) du développement décrit la propagation de l'onde de  $\mathbf{r}'$  à  $\mathbf{r}$  sans aucun évènement de diffusion intermédiaire. Le deuxième diagramme (ordre 1) décrit la propagation de l'onde en milieu homogène de  $\mathbf{r}'$  à  $\mathbf{r}_2$ , où l'onde subit sa première interaction avec le potentiel. L'onde diffusée se propage ensuite jusqu'à  $\mathbf{r}_1$  où elle est diffusée une seconde fois. L'onde doublement diffusée se propage enfin jusqu'à  $\mathbf{r}$ . Le chemin parcouru par l'onde est donc décrit par le produit  $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}')$ . La fonction d'autocorrélation  $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  indique dans quelle mesure les positions des deux diffuseurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont corrélées (*grosso modo* s'ils appartiennent à la même inhomogénéité). Pour ce



qui est des diagrammes d'ordre 2 (diagrammes (3), (4) et (5)), leur signification physique est représentée sur la figure suivante :

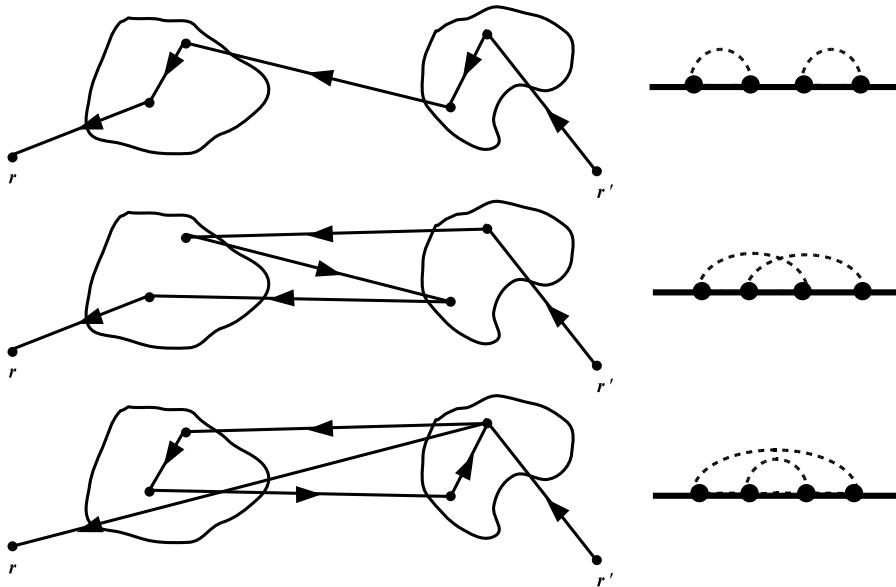


FIG. V.3: Interprétation physique des diagrammes d'ordre 2.

Ces diagrammes mettent en jeu des ondes quadruplement diffusées avec des diffuseurs qui se partagent entre deux inhomogénéités. On peut d'ores et déjà noter que les chemins de diffusion multiple contribuant à l'onde cohérente comprennent un nombre pair d'évènements de diffusion et que chaque diffuseur est corrélé à un autre diffuseur du chemin (ils appartiennent à la même inhomogénéité).

L'utilisation des diagrammes permet d'alléger l'écriture et de mieux voir ce que représente physiquement chaque terme du développement de la fonction de Green moyenne. Mais ce ne sont pas ses seuls bienfaits. Nous allons pouvoir en effet mener certains calculs dans l'espace des diagrammes, en profitant de leurs propriétés topologiques pour effectuer des regroupements entre diagrammes de même nature et simplifier ainsi nos calculs.

### Equation de Dyson [130]

Un diagramme est dit faiblement connecté s'il peut être divisé en 2 diagrammes d'ordre inférieur en coupant une ligne  $G_0$  ; c'est le cas du diagramme 3 de la figure V.2. Les autres diagrammes ((2), (4), (5) et une infinité d'autres) sont eux fortement connectés ; il s'agit des diagrammes insécables. On définit l'indice de connectivité d'un diagramme par le nombre de diagrammes fortement connectés qu'il contient. Par exemple, le diagramme (3) a un indice de connectivité égal à 2 puisqu'il se décompose en deux diagrammes (2)(voir Fig.V.4).



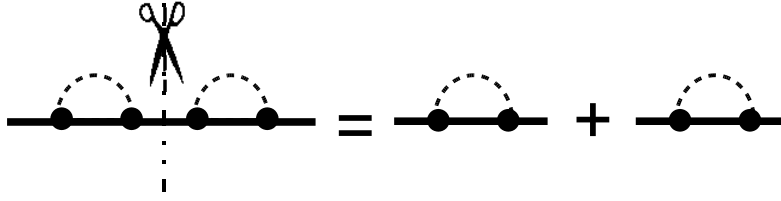


FIG. V.4: Diagramme faiblement connecté, exemple du diagramme 3 de la figure V.2.

Puisque chaque diagramme dispose d'une ligne  $G_0$  à chacune de ses extrémités, on peut représenter la somme des diagrammes fortement connectés de la manière suivante :

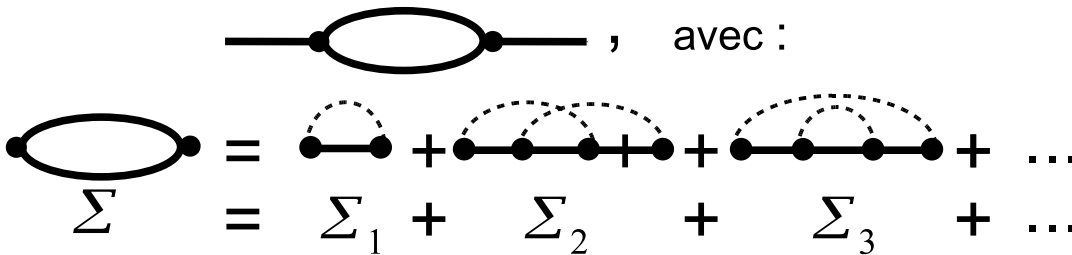


FIG. V.5: Définition de l'opérateur énergie propre.

Analytiquement, la somme des diagrammes fortement connectés peut s'écrire comme :

$$\iint G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.25})$$

où  $\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est l'opérateur *énergie propre*, encore appelé *opérateur de masse* (noms empruntés à la théorie quantique des champs), défini tel que

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \underbrace{k_0^4 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\Sigma_1} + \underbrace{\iint G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}_{\Sigma_2} \\ &+ \underbrace{\iint G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}_{\Sigma_3} + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

Graphiquement, l'opérateur énergie propre est représenté par le développement de la figure V.5. Une fois cet opérateur défini, on peut représenter la somme de tous les diagrammes de connectivité  $n$  par une juxtaposition de  $n$  diagrammes *énergie propre*, comme le décrit la figure V.6. Ainsi, grâce à l'écriture diagrammatique, une nouvelle décomposition de la fonction de Green moyenne  $\bar{G}$  est accessible. En effet,  $\bar{G}$  peut être décomposé comme la somme sur  $n$  de la somme des diagrammes de connectivité  $n$  comme le décrit la figure V.7. Par un raisonnement itératif, on peut rapidement déduire de ce dernier développement diagrammatique que la fonction de Green moyenne  $\bar{G}$  obéit à une équation self-consistante, dite équation de Dyson, dont la représentation diagrammatique est présentée sur la figure V.8.

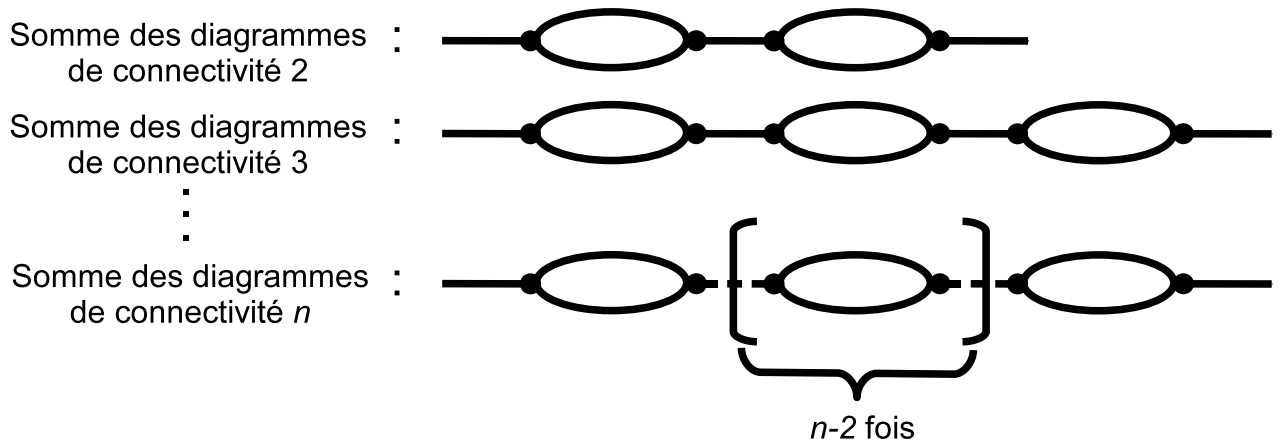


FIG. V.6: Somme des diagrammes de connectivité  $n$  représentés à l'aide du diagramme lié à l'opérateur énergie propre.

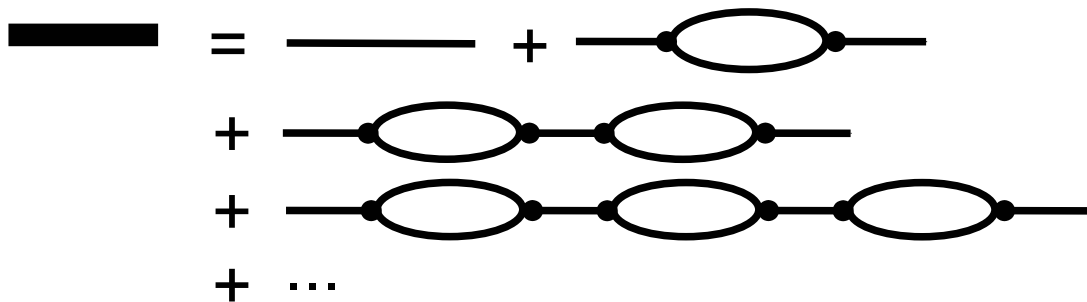


FIG. V.7: Nouvelle décomposition de  $\bar{G}$  sous la forme de la somme de la somme des diagrammes de toute connectivité.

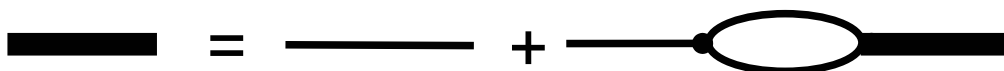


FIG. V.8: Equation de Dyson écrite sous forme diagrammatique.

La forme analytique de l'équation de Dyson est la suivante :

$$\overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \overline{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.27})$$

Cette équation à laquelle obéit l'onde cohérente, c'est-à-dire la partie de l'amplitude qui résiste à la moyenne sur le désordre, se trouve à la base de l'idée de milieu effectif que l'on va préciser dans le paragraphe suivant. Toute l'information sur la diffusion est contenue dans l'opérateur énergie propre  $\Sigma$ . Nous verrons par la suite que, pour le calculer, nous allons devoir faire un certain nombre d'hypothèses et d'approximations.

### Milieu effectif [130]

Pour simplifier le problème, nous allons faire l'hypothèse d'un milieu statistiquement homogène. Cela revient à faire l'hypothèse suivante sur la fonction d'autocorrélation :

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (\text{V.28})$$

Physiquement, cette hypothèse signifie qu'il y a une invariance par translation du désordre. La fonction d'autocorrélation ne dépend donc plus que de la différence entre les deux positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Comme la fonction de Green en champ libre  $G_0$  vérifie également cette invariance par translation, elle s'applique également à la fonction de Green moyenne ( $\overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ) ainsi qu'à l'énergie propre ( $\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ).

Sous cette hypothèse, l'équation de Dyson (Eq.V.27) prend une forme très simple dans l'espace des  $\mathbf{k}$ , puisque la transformée de Fourier a la propriété de transformer le produit de convolution en une simple multiplication :

$$\overline{G}(\omega, \mathbf{k}) = G_0(\omega, \mathbf{k}) + G_0(\omega, \mathbf{k}) \Sigma(\omega, \mathbf{k}) \overline{G}(\omega, \mathbf{k}) \quad (\text{V.29})$$

avec  $\mathbf{k}$  la variable duale de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . En tenant compte de l'expression de la fonction de Green en milieu homogène (Eq.V.5), on obtient finalement :

$$\overline{G}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - \Sigma(\omega, \mathbf{k})} \quad (\text{V.30})$$

Cette dernière expression de  $\overline{G}(\omega, \mathbf{k})$  est très intéressante car le(s) pôle(s) de la fonction de Green nous donne(nt) directement accès au(x) mode(s) du système. Dans le cadre des milieux désordonnés discrets, on considère souvent des régimes de fréquence pour lesquels  $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$  est indépendante de  $\mathbf{k}$ . Le seul effet de l'énergie propre est alors de renormaliser  $k_0^2$  et l'expression de la fonction de Green moyenne prend la même forme que celle obtenue en milieu homogène. On appelle le milieu, dont le nombre d'onde est ainsi renormalisé, milieu effectif. On note  $k_e$  le pôle de  $\overline{G}(\omega, \mathbf{k})$ .  $k_e$  est donc le nombre d'onde associé à la propagation de l'onde dans ce milieu effectif, tel que  $k_e^2 = k_0^2 - \Sigma(\omega)$ . La partie imaginaire de  $k_e$  caractérise l'atténuation d'origine diffusive de l'onde cohérente. Pour quantifier cette atténuation, on définit le libre parcours moyen élastique  $l_e$ , tel que :

$$l_e = \frac{1}{2\Im[k_e]} \quad (\text{V.31})$$

$l_e$  correspond à la distance d'atténuation de l'énergie de l'onde cohérente.

Toutefois, l'énergie propre  $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$  dépend de  $\mathbf{k}$  dans le cas des milieux aléatoires continus. Pour arriver au calcul du libre parcours moyen  $l_e$ , on doit calculer le(s) pôle(s) de la fonction de Green moyenne exprimée dans l'espace des  $\mathbf{k}$  (Eq.V.30). Pour cela, on doit donc accéder théoriquement à l'énergie propre  $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$  du milieu désordonné. Il est bien sûr illusoire de vouloir calculer son expression exacte qui consiste en une somme infinie de termes (Eq.V.26). Une première approximation est donc nécessaire afin d'obtenir une expression littérale de  $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$ .

### Approximation de Bourret [130]

L'une des approximations les plus simples pour calculer l'énergie propre est l'approximation de Bourret. Elle consiste tout simplement à ne conserver que le premier terme du développement de l'énergie propre (Eq.V.26) :

$$\Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \simeq \Sigma_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k_0^4 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{V.32})$$

Cette approximation est l'équivalent de l'*Independent Scattering Approximation* (ISA) pour les milieux discrets [23, 44]. On note  $\overline{G}^{(1)}$  l'approximation correspondante de la fonction de Green moyenne. Sa représentation diagrammatique est donnée sur la figure suivante :

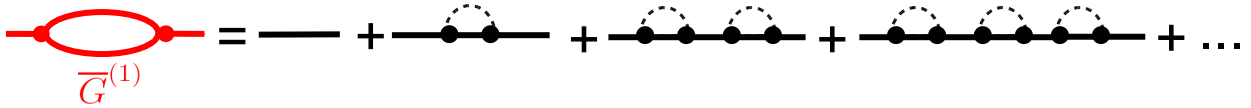


FIG. V.9: Représentation diagrammatique de  $\overline{G}^{(1)}$ .

On voit donc que  $\Sigma_1$  décrit une succession indépendante de double collisions qui ont lieu au sein de la même inhomogénéité. L'approximation de Bourret revient à négliger par exemple les deux séquences de diffusion présentées en bas de la figure V.3 : ces chemins correspondent toujours à une succession de double collisions mais celles-ci mettent en jeu plusieurs inhomogénéités à la fois. L'approximation de Bourret néglige donc ces termes d'interférence. La condition de validité de l'approximation de Bourret, qui sera établie par la suite, est donnée par :

$$k_0 l_e \gg 1 \quad (\text{V.33})$$

Cette relation est généralement appelée la limite de faible désordre [20].

Un parallèle peut être fait entre l'approximation de Bourret et l'ISA, qui concerne les milieux discrets. L'ISA considère les diffuseurs comme ponctuels. Cette simplification conduit à ne conserver que des événements successifs de diffusion indépendants dans le calcul de l'énergie propre [44]. Ainsi, la séquence élémentaire qui est une double collision au sein d'une même inhomogénéité dans l'approximation de Bourret, devient une simple collision pour l'ISA car l'inhomogénéité étendue des milieux continus se transforme en diffuseur ponctuel dans le cas du modèle discret.

Voyons ce que devient maintenant l'expression de  $\overline{G}(\mathbf{k})$  (Eq.V.30) dans le cadre de l'approximation de Bourret (Eq.V.32) :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - k_0^4 \int G_0(\mathbf{r})B(\mathbf{r})e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}} \quad (\text{V.34})$$

Si on souhaite obtenir une résolution analytique, on doit être capable de calculer la transformée de Fourier de  $G_0(\mathbf{r})B(\mathbf{r})$ . A deux dimensions, cela paraît *a priori* impossible du fait de la forme peu sympathique de la fonction de Green 2D (Eq.V.7). Seul un calcul numérique nous permettra de connaître le nombre d'onde effectif  $k_e$  et le libre parcours moyen associé  $l_e$ , comme on le verra par la suite. En revanche, à trois dimensions, la forme plus simple de la fonction de Green (Eq.V.6) nous permet d'accéder à une résolution analytique pour certaines fonctions d'autocorrélation. Pour cela, on doit faire une hypothèse supplémentaire sur le milieu désordonné. Non seulement, le milieu va être supposé statistiquement homogène (Eq.V.28), mais également isotrope, de telle sorte que :

$$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = B(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \text{ et donc } \overline{G}^{(1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \overline{G}^{(1)}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (\text{V.35})$$

La fonction d'autocorrélation ne dépend plus que de la distance entre les deux positions considérées  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  et il en est donc de même pour la fonction de Green moyenne. Cette nouvelle hypothèse permet de simplifier la transformée de Fourier 3D de  $G_0(\mathbf{r})B(\mathbf{r})$  en une simple transformée de Fourier 1D, en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\int G_0(\mathbf{r})B(\mathbf{r})e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{k} \int G_0(r)B(r) \sin(kr)r dr \quad (\text{V.36})$$

En explicitant la fonction de Green  $G_0$  (Eq.V.6), on aboutit à la forme simplifiée suivante pour  $\overline{G}^{(1)}(\mathbf{k})$  :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 + \frac{k_0^4}{k} \int B(r)e^{jk_0 r} \sin(kr) dr} \quad (\text{V.37})$$

Pour calculer analytiquement le nombre d'onde effectif  $k_e$ , il faut donc choisir une fonction d'autocorrélation  $B(r)$  telle que l'intégrale au dénominateur de  $\overline{G}^{(1)}(\omega, k)$  ait une solution analytique. Comme on va le voir, les fonctions d'autocorrélation exponentielle et gaussienne offrent cette possibilité. Ce sont ces deux cas particuliers que l'on va examiner maintenant.

### V.2.3 Expression analytique du libre parcours moyen (3D)

#### Cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle

On considère, dans un premier temps, le cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle, telle que :

$$B(r) = \sigma_\mu^2 e^{-\alpha r} = \sigma_\mu^2 e^{-\frac{r}{l_c}} \quad (\text{V.38})$$

où  $l_c = \alpha^{-1}$  constitue la longueur de corrélation du milieu aléatoire continu et correspond donc à la taille caractéristique des hétérogénéités du milieu. Dans le cas d'une autocorrélation exponentielle, l'intégrale du dénominateur de  $\overline{G}^{(1)}(\omega, k)$  (Eq.V.37) est donnée par :

$$\int B(r)e^{jk_0 r} \sin(kr) dr = \frac{\sigma_\mu^2 k}{(\alpha - jk_0)^2 + k^2} \quad (\text{V.39})$$

Ce qui donne pour  $\overline{G}^{(1)}(\omega, k)$  :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^4}{(\alpha - jk_0)^2 + k^2}} = -\frac{(\alpha - jk_0)^2 + k^2}{k^4 + [(\alpha - jk_0)^2 - k_0^2] k^2 - [k_0^2(\alpha - jk_0)^2 + \sigma_\mu^2 k_0^4]} \quad (\text{V.40})$$

On voit ici que l'énergie propre dépend effectivement du nombre d'onde  $k$ , contrairement à ce qu'on obtient avec l'ISA pour un modèle discret du désordre. Le dénominateur ne se réduit pas à un simple polynôme d'ordre 2, ce qui conduirait à une renormalisation du nombre d'onde. Néanmoins, on peut toujours calculer les pôles de  $\overline{G}^{(1)}(\omega, k)$  qui nous donnent accès aux modes du système. Puisque le dénominateur est un polynôme d'ordre 4, l'onde cohérente est *a priori* constituée de deux ondes divergentes de nombre d'onde effectifs  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$  distincts :

$$k_{e1}^2 = -\frac{1}{2} \left[ (\alpha - jk_0)^2 - k_0^2 - \alpha(\alpha - 2jk_0)\sqrt{1 + \delta} \right], \quad (\text{V.41})$$

$$k_{e2}^2 = -\frac{1}{2} \left[ (\alpha - jk_0)^2 - k_0^2 + \alpha(\alpha - 2jk_0)\sqrt{1 + \delta} \right], \quad (\text{V.42})$$

$$\text{avec } \delta = \frac{4\sigma_\mu^2 k_0^4}{\alpha^2(\alpha - 2jk_0)^2}$$

Il est difficile d'obtenir directement, à partir de (V.41), des formules analytiques simples pour  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$ . Cependant, dans un premier temps, on peut les calculer numériquement et observer leur dépendance vis à vis des différents paramètres statistiques du désordre ( $l_c$  et  $\sigma_\mu$ ) et de la fréquence  $f$ . La figure V.10 (sur la page suivante) représente donc les libres parcours moyens  $l_{e1}$  et  $l_{e2}$  associés à chacun des deux nombres effectifs  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$  en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  (Fig.V.10(a)), de l'amplitude des fluctuations  $\sigma_\mu$  (Fig.V.10(b)) et de la fréquence  $f$  (Fig.V.10(c)). On a également tracé l'évolution des vitesses effectives  $c_{e1}$  et  $c_{e2}$ , tel que  $c_e = \frac{\omega}{\Re[k_e]}$ , en fonction de  $\sigma_\mu$  (Fig.V.10(d)). On distingue clairement sur chacune de ces figures deux régimes asymptotiques différents : un régime de faibles perturbations, dont on verra qu'il est défini par la condition  $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \ll 1$ , et un régime de hautes perturbations qui est défini par la condition opposée  $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \gg 1$ . On va maintenant s'intéresser à ces deux régimes asymptotiques, caractérisés par des dépendances *a priori* relativement simples des nombres d'ondes effectifs vis à vis des paramètres du problème. L'étude de ces régimes asymptotiques permet en effet de simplifier l'équation (V.41) et d'aboutir à des expressions analytiques simples de  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$ . L'étape suivante consistera à porter un regard physique et critique sur ces résultats. On vérifiera notamment la validité de l'approximation de Bourret dans chacun de ces régimes.

### Régime de faibles perturbations

En régime de faibles perturbations, la valeur absolue de  $\delta$  (Eq.(V.41)) peut être considérée comme petite devant l'unité :  $|\delta| \ll 1$ . Cela revient à supposer que :

$$\left| \frac{4\sigma_\mu^2 k_0^4}{\alpha^2(\alpha - 2jk_0)^2} \right| = \frac{4\sigma_\mu^2 k_0^4}{\alpha^2(\alpha^2 + 4k_0^2)} \ll 1 \quad (\text{V.43})$$

Dans ce cas, on peut effectuer le développement limité suivant :

$$\sqrt{1 + \delta} \simeq 1 + \frac{\delta}{2}$$

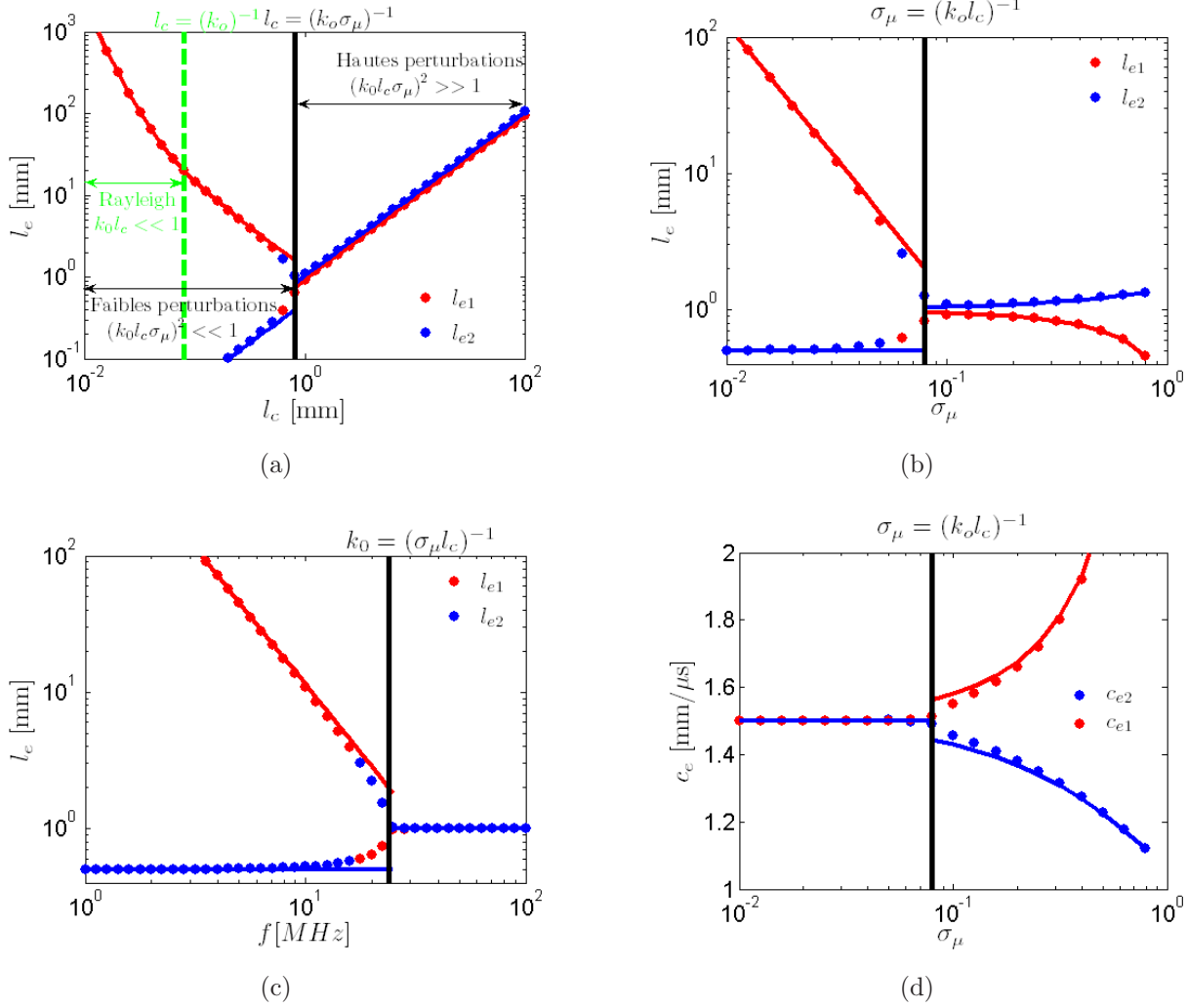


FIG. V.10: Nombres d'onde effectifs  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$  (Eq.V.41) dans le cas d'une fonction d'auto-corrélation exponentielle (Eq.V.38). (a) Evolution de  $l_e$  en fonction de  $l_c$  ( $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $f = 3$  MHz). (b) Evolution de  $l_e$  en fonction de  $\sigma_\mu$  ( $l_c = 1$  mm,  $f = 3$  MHz). (c) Evolution de  $l_e$  en fonction de  $f$  ( $l_c = 1$  mm,  $\sigma_\mu = 0.01$ ). (d) Evolution de  $c_e$  en fonction de  $\sigma_\mu$  ( $l_c = 1$  mm,  $f = 3$  MHz). Pour chacune de ces figures, les points désignent le calcul exact (numérique) des pôles  $k_{e1}$  (Eq.V.41) et  $k_{e2}$  (Eq.V.42), les traits continus correspondent aux lois analytiques obtenues dans chacun des régimes asymptotiques.

$k_{e1}^2$  se simplifie alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_{e1}^2 &= k_0^2 \left[ 1 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{\alpha(\alpha - 2jk_0)} + \dots \right] \\ &= k_0^2 \left[ 1 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{(\alpha^2 + 4k_0^2)} + j \frac{\sigma_\mu^2 k_0^3}{\alpha(\alpha^2 + 4k_0^2)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{V.44})$$

Si, en plus de l'hypothèse déjà effectuée (Eq.V.43), les conditions suivantes

$$\frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{(\alpha^2 + 4k_0^2)} \ll 1, \quad \frac{\sigma_\mu^2 k_0^3}{\alpha(\alpha^2 + 4k_0^2)} \ll 1 \quad (\text{V.45})$$

sont respectées, alors le nombre d'onde  $k_{e1}$  est donné par :

$$k_{e1} = k_0 \left[ 1 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{2\alpha(\alpha - 2jk_0)} \right] = k_0 \left[ 1 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{2(\alpha^2 + 4k_0^2)} + j \frac{\sigma_\mu^2 k_0^3}{\alpha(\alpha^2 + 4k_0^2)} + \dots \right] \quad (\text{V.46})$$

La partie réelle du nombre d'onde effectif  $k_{e1}$  augmente en milieu hétérogène. Cela est dû au fait que les inhomogénéités augmentent le trajet parcouru par l'onde cohérente dans le milieu inhomogène. Ainsi la vitesse effective du milieu diminue par rapport à la vitesse en milieu homogène. On peut directement déduire de l'équation V.46 le libre parcours moyen  $l_{e1} = (2\Im[k_{e1}])^{-1}$  :

$$l_{e1} \simeq \frac{\alpha(\alpha^2 + 4k_0^2)}{2\sigma_\mu^2 k_0^4} = \frac{1 + 4k_0^2 l_c^2}{2\sigma_\mu^2 k_0^4 l_c^3} \quad (\text{V.47})$$

Cette expression du libre parcours moyen  $l_{e1}$  (trait continu) s'ajuste parfaitement au calcul numérique en régime de faibles perturbations sur la figure V.10.

Dans le régime de Rayleigh ( $k_0 l_c \ll 1$ ), *i.e* quand la taille des inhomogénéités devient petite devant la longueur d'onde  $\lambda$ , le libre parcours moyen élastique est simplement donné par :

$$l_{e1} \sim \frac{1}{2} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-4} l_c^{-3}, \quad \text{pour } k_0 l_c \ll 1 \quad (\text{V.48})$$

On retrouve bien le fait que  $l_{e1}$  varie comme la puissance  $-4$  de la fréquence en régime de Rayleigh (à gauche du trait pointillé vert sur la figure V.10(a)). Notons également la dépendance en puissance  $-3$  de la longueur de corrélation  $l_c$  (*i.e* comme l'inverse du volume d'une inhomogénéité) et en puissance  $-2$  de l'amplitude des fluctuations de célérité.

En régime intermédiaire, c'est-à-dire toujours en régime de faibles perturbations mais en dehors du régime de Rayleigh ( $k_0 l_c > 1$ , régime géométrique), l'expression du libre parcours moyen élastique est donnée par :

$$l_{e1} \sim 2\sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}, \quad \text{pour } k_0 l_c > 1 \quad (\text{V.49})$$

Dans ce régime intermédiaire, la dépendance du libre parcours moyen est en puissance  $-1$  de  $l_c$  et en puissance  $-2$  de la fréquence  $f$ . Ce résultat est intéressant car la seule observation d'une loi de puissance pour le libre parcours moyen en fonction de la fréquence, permet d'accéder expérimentalement à la longueur de corrélation  $l_c$  du milieu. Néanmoins, en pratique, cela n'est pas aussi simple car on est souvent gêné par les phénomènes d'absorption qui viennent s'ajouter aux pertes par diffusion.



Notons que les trois hypothèses de faibles perturbations faites durant le raisonnement (Eq.V.43 et V.45 ) peuvent être combinées en une seule :

$$\frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{\alpha^2 + 4k_0^2} \ll \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k_0}, \frac{\alpha^2}{4k_0^2} \right\}.$$

En utilisant le fait que

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4k_0^2} < \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k_0}, \frac{\alpha^2}{4k_0^2} \right\},$$

on peut imposer une contrainte plus forte :

$$\frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{\alpha^2 + 4k_0^2} \ll \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4k_0^2} < \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k_0}, \frac{\alpha^2}{4k_0^2} \right\}$$

Cette dernière équation peut se simplifier sous une forme qu'on appellera la condition de faibles perturbations :

$$\frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{\alpha^2} = \sigma_\mu^2 k_0^2 l_c^2 \ll 1 \quad (\text{V.50})$$

Concernant la deuxième onde divergente, son comportement asymptotique peut se déduire en prenant  $\delta \simeq 0$ .  $k_{e2}^2$  s'écrit alors :

$$k_{e2}^2 = [k_0 + j\alpha + \dots]^2 \quad (\text{V.51})$$

Le nombre d'onde  $k_{e2}$  est donné alors par :

$$k_{e2} = k_0 + j\alpha + \dots \quad (\text{V.52})$$

Cette deuxième onde divergente est donc caractérisée par un libre parcours moyen  $l_{e2}$  directement proportionnel à la longueur de corrélation  $l_c$  :

$$l_{e2} \simeq \frac{1}{2\alpha} = \frac{l_c}{2} \quad (\text{V.53})$$

L'expression analytique de  $l_{e2}$  s'ajuste, elle aussi, fort bien au calcul numérique en régime de faibles perturbations (voir Figure V.10).  $l_{e2}$  ne montre aucune dépendance vis à vis de  $\sigma_\mu$  ni de la fréquence  $f$ , et est directement égal à  $l_c/2$ . Cela signifie que l'onde cohérente associée à  $k_{e2}$  décroît extrêmement rapidement. Après avoir traversé cinq hétérogénéités (*i.e*  $5l_c$ ), son amplitude a diminué d'un facteur 50 environ. Elle serait donc très difficile à observer expérimentalement. De plus comme nous allons le voir maintenant, son amplitude est très faible comparée à la première onde cohérente associée à  $k_{e1}$ .

L'expression de  $\overline{G}^{(1)}(\omega, k)$  peut maintenant se réécrire de la manière suivante :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, k) = \frac{1 + \sqrt{1 + \delta}}{2\sqrt{1 + \delta}} \frac{1}{k_{e1}^2 - k^2} + \frac{-1 + \sqrt{1 + \delta}}{2\sqrt{1 + \delta}} \frac{1}{k_{e2}^2 - k^2} \quad (\text{V.54})$$

Et, si on revient dans l'espace réel, la fonction de Green  $\overline{G}^{(1)}(\omega, R)$  s'écrit :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, R) = -\frac{1 + \sqrt{1 + \delta}}{2\sqrt{1 + \delta}} \frac{e^{jk_{e1}R}}{4\pi R} - \frac{-1 + \sqrt{1 + \delta}}{2\sqrt{1 + \delta}} \frac{e^{jk_{e2}R}}{4\pi R} \quad (\text{V.55})$$

Dans le régime asymptotique des petites fluctuations,  $\delta \ll 1$  et  $\overline{G}^{(1)}(\omega, R)$  se simplifie selon :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, R) \simeq -\frac{e^{jk_{e1}R}}{4\pi R} + \frac{\delta}{2} \frac{e^{jk_{e2}R}}{4\pi R} \quad (\text{V.56})$$

$\overline{G}^{(1)}(\omega, R)$  correspond donc à deux ondes divergentes, l'amplitude de la seconde étant largement plus faible que celle de la première dans le régime des faibles perturbations ( $\frac{\delta}{8\pi} \ll 1$ ). De plus, la seconde s'atténue beaucoup plus rapidement que la première. En effet, le ratio des coefficients d'atténuation des deux ondes est donné par :

$$\frac{\Im\{k_{e1}\}}{\Im\{k_{e2}\}} = \frac{k_0^4 \sigma_\mu^2}{\alpha^2(\alpha^2 + 4k_0^2)}$$

Or, en régime de faibles perturbations (Eq.V.50), ce ratio est petit, si bien que

$$\Im\{k_{e1}\} \ll \Im\{k_{e2}\} \quad \text{et, } l_{e1} \gg l_{e2}$$

La seconde onde cohérente n'a donc pas vraiment de sens physiquement, et finalement la fonction de Green moyenne  $\overline{G}^{(1)}(\omega, R)$  peut se mettre sous la forme d'une seule onde divergente dans le régime des faibles perturbations :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, R) \simeq -\frac{e^{jk_{e1}R}}{4\pi R} \quad (\text{V.57})$$

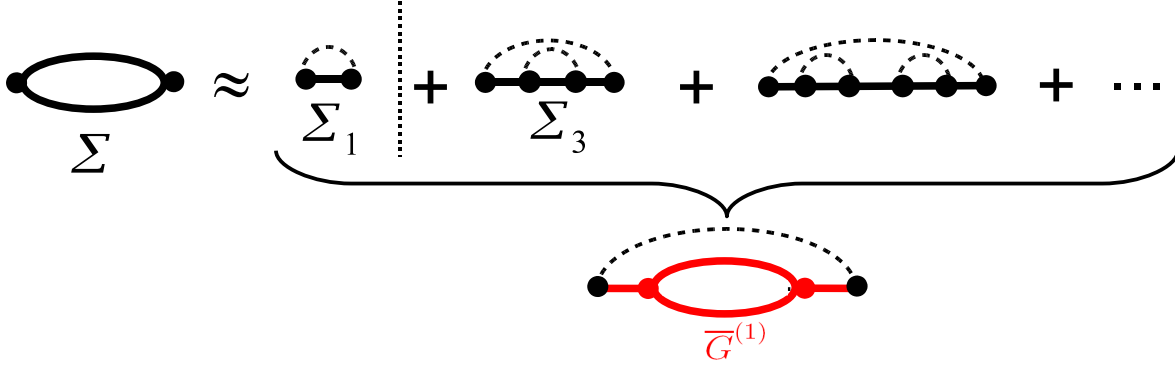
On retrouve donc la notion de milieu effectif avec une seule onde divergente pour décrire la fonction de Green moyenne. Nous aurions pu aboutir directement à la solution, en régime de faibles perturbations, en considérant l'énergie propre en  $k = k_0$  :  $\Sigma(\omega, k) \simeq \Sigma(\omega, k_0)$  dans l'expression initiale de  $\overline{G}^{(1)}$  (Eq.V.30). Résoudre l'équation de Dyson revient alors à renormaliser le nombre d'onde  $k_0$  en milieu homogène en tenant compte des pertes par diffusion. Le nombre d'onde  $k_e$  du milieu effectif vérifie alors l'équation suivante :

$$k_e^2 = k_0^2 + \frac{\sigma_\mu^2 k_0^4}{\alpha(\alpha - 2jk_0)} \quad (\text{V.58})$$

Cette équation est strictement identique à l'expression approchée de  $k_{e1}^2$  (Eq.V.44). La suite du calcul serait identique avec un libre parcours moyen  $l_e$  donné par l'équation V.47.

### Limite de validité de l'approximation de Bourret en régime de faibles perturbations

Par convention, la fonction de Green obtenue sous l'approximation de Bourret sera appelée  $\overline{G}^{(1)}$  et le nombre d'onde effectif correspondant  $k_e^{(1)}$ . L'approximation de Bourret consiste à ne conserver que le premier terme du développement de l'énergie propre (voir Figure V.5). L'approximation suivante, plus précise que l'approximation de Bourret, consiste à inclure la suite infinie de diagrammes décrite sur la figure V.11. Cette nouvelle approximation tient compte en particulier de  $\Sigma_3$ . On reconnaît dans le développement de la figure V.11 la suite de diagrammes constituant la fonction de Green  $\overline{G}^{(1)}$  (Fig.V.9) *encadrée* par deux événements de diffusion


 FIG. V.11: Approximation à l'ordre 2 de  $\Sigma$ .

corrélés (Fig.V.11). On peut donc déduire une expression analytique pour ce *développement* à l'ordre 2 de l'énergie propre

$$\Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \simeq k_0^4 \overline{G}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{V.59})$$

Cette nouvelle approximation de l'énergie propre diffère de l'approximation de Bourret dans le fait qu'au lieu de contenir  $G_0$  (Eq.V.32), elle fait apparaître la fonction de Green moyenne  $\overline{G}^{(1)}$  obtenue justement en considérant l'approximation de Bourret. La nouvelle fonction de Green moyenne  $\overline{G}^{(2)}$  est donc donnée par :

$$\overline{G}^{(2)}(\omega, k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 + \frac{k_0^4}{k} \int B(r) e^{jk_e^{(1)} r} \sin(kr) dr} \quad (\text{V.60})$$

On note  $k_e^{(2)}$  le pôle de  $\overline{G}^{(2)}(\omega, k)$ . Il correspond au nouveau nombre d'onde effectif obtenu à l'ordre 2. La quantité  $|k_e^{(2)} - k_e^{(1)}|$  représente la correction apportée sur le nombre d'onde effectif par le *développement* à l'ordre 2 de l'énergie propre (voir Fig.V.11). L'idée est de comparer cette quantité à la variation du nombre d'onde effectif obtenue sous l'approximation de Bourret :  $|k_e^{(1)} - k_0|$ . Ainsi, l'approximation de Bourret sera justifiée si la correction apportée par le développement de l'énergie propre à l'ordre 2 est petite devant celle obtenue à l'ordre 1 :

$$|k_e^{(2)} - k_e^{(1)}| \ll |k_e^{(1)} - k_0|$$

Les termes  $|k_e^{(2)} - k_e^{(1)}|$  et  $|k_e^{(1)} - k_0|$  peuvent être estimés en fonction des paramètres statistiques du milieu. Les calculs sont détaillés en Annexe V.A.1. Finalement, on aboutit à la condition suivante :

$$2k_0 l_e \gg 1 \quad (\text{V.61})$$

On reconnaît ici la condition de faible désordre. Cette condition est identique à celle obtenue dans le cadre de l'ISA pour les milieux discrets. Tant que la condition de l'équation V.61 est respectée, l'approximation de Bourret est suffisante, autrement une description beaucoup plus précise de l'énergie propre (et donc beaucoup plus coûteuse en calculs) est nécessaire.

### Régime de hautes perturbations

On s'intéresse à présent au régime des hautes perturbations. On définit ce régime par opposition à celui des basses perturbations (Eq.V.50) :

$$\sigma_\mu^2 k_0^2 l_c^2 \gg 1 \quad (\text{V.62})$$

Dans ce cas, la valeur absolue de la quantité  $\delta$  (Eq.V.41) est grande devant 1 ( $\delta \gg 1$ ). Ainsi le terme  $\sqrt{1+\delta}$  apparaissant dans les expressions de  $k_{e1}^2$  et  $k_{e2}^2$  peut être remplacé par  $\sqrt{\delta}$  :

$$\sqrt{1+\delta} \simeq \sqrt{\delta}$$

$k_{e1}^2$  et  $k_{e2}^2$  se simplifient alors selon :

$$\begin{aligned} k_{e1}^2 &= (1 + \sigma_\mu) k_0^2 + j k_0 \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \\ k_{e2}^2 &= (1 - \sigma_\mu) k_0^2 + j k_0 \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

Comme on est en régime de hautes perturbations, on peut négliger ici le terme en  $\alpha^2$  d'ordre 2. On prend la racine carrée des deux équations ci-dessus :

$$\begin{aligned} k_{e1} &= k_0 \sqrt{1 + \sigma_\mu} \sqrt{1 + j \frac{\alpha}{(1 + \sigma_\mu) k_0}} \\ k_{e2} &= k_0 \sqrt{1 - \sigma_\mu} \sqrt{1 + j \frac{\alpha}{(1 - \sigma_\mu) k_0}} \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{\alpha}{(1 \pm \sigma_\mu) k_0}$  étant petit devant 1, on peut par l'intermédiaire d'un développement limité aboutir ensuite à une expression simple des deux nombres d'onde effectifs :

$$\begin{aligned} k_{e1} &= k_0 \sqrt{1 + \sigma_\mu} + j \frac{\alpha}{2\sqrt{1 + \sigma_\mu}} \\ k_{e2} &= k_0 \sqrt{1 - \sigma_\mu} + j \frac{\alpha}{2\sqrt{1 - \sigma_\mu}} \end{aligned} \quad (\text{V.63})$$

L'amplitude de ces deux ondes effectives peut être déduite de l'équation V.55 sachant que  $|\delta| \gg 1$  :

$$\overline{G}^{(1)}(\omega, R) \simeq -\frac{e^{jk_{e1}R}}{8\pi R} - \frac{e^{jk_{e2}R}}{8\pi R} \quad (\text{V.64})$$

Contrairement au régime des faibles perturbations, les deux ondes effectives coexistent et leurs amplitudes sont égales. Sur la figure V.10, les expressions analytiques des nombres d'onde effectifs  $k_{e1}$  et  $k_{e2}$  (Eq.V.63) en régime de hautes perturbations s'ajustent parfaitement au calcul numérique issu de l'équation V.41. L'onde (1) est caractérisée par une vitesse effective  $c_{e1} = \frac{c_0}{\sqrt{1+\sigma_\mu}}$  plus faible que  $c_0$  mais est moins atténuée que l'onde (2). Au contraire, la vitesse effective  $c_{e2} = \frac{c_0}{\sqrt{1-\sigma_\mu}}$  est supérieure à  $c_0$ . Les vitesses effectives de ces deux ondes ne dépendent que de l'amplitude  $\sigma_\mu$  des fluctuations (voir Fig.V.10(d)). Les deux libres parcours moyens dépendent linéairement de  $l_c$  (voir Fig.V.10(a)) avec un coefficient directeur fonction seulement

de  $\sigma_\mu$  (voir Fig.V.10(b)). On est donc dans un régime pour lequel les grandeurs du problème ne montrent plus de dépendance par rapport à la pulsation  $\omega$  (voir Fig.V.10(c)).

Ce résultat est surprenant mais n'est en fait pas valable physiquement. En effet, comme on peut s'y attendre, l'approximation de Bourret n'est plus valable en régime de hautes perturbations. Pour démontrer cette dernière assertion, on peut, comme au paragraphe précédent, s'intéresser à la correction apportée au nombre d'onde effectif par des approximations de l'énergie propre qui vont plus loin que l'approximation de Bourret. Pour cela, on va considérer le raisonnement itératif suivant. On note  $k_{e1}^{(1)}$  et  $k_{e2}^{(1)}$  les nombres d'onde effectif obtenus dans l'approximation de Bourret en régime de hautes perturbations (Eq.V.63). A l'instar de ce qu'on a fait en régime de faibles perturbations, on peut calculer la correction apportée au nombre d'onde effectif par l'approximation à l'ordre 2 de l'énergie propre (Fig.V.11). On obtient ainsi deux nombres d'onde effectifs  $k_{e1}^{(2)}$  et  $k_{e2}^{(2)}$  qui tiennent compte des diagrammes supplémentaires pris en compte dans cette approximation à l'ordre 2 de l'énergie propre, tels que :

$$\left[ k_{ei}^{(2)} \right]^2 = k_0^2 - \frac{4\pi k_0^4}{k_{ei}^{(2)}} \int B(r) \overline{G}^{(1)}(\omega, r) \sin(k_{ei}^{(2)} r) r dr$$

où  $k_{ei}$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) désigne le nombre d'onde effectif  $k_{e1}$  ou  $k_{e2}$ . Pour simplifier l'équation précédente self-consistante, nous allons faire l'approximation suivante :  $\Sigma(\omega, k_{ei}^{(2)}) \simeq \Sigma(\omega, k_{ei}^{(1)})$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \left[ k_{ei}^{(2)} \right]^2 &= k_0^2 - \frac{4\pi k_0^4}{k_{ei}^{(1)}} \int B(r) \overline{G}^{(1)}(\omega, r) \sin(k_{ei}^{(1)} r) r dr \\ &= k_0^2 + \frac{k_0^4}{2k_{ei}^{(1)}} \int e^{-\alpha r} \left[ e^{jk_{e1}^{(1)} R} + e^{jk_{e2}^{(1)} R} \right] \sin(k_{ei}^{(1)} r) dr \end{aligned} \quad (\text{V.65})$$

On peut réitérer le processus ce qui revient à une approximation de plus en plus précise de l'énergie propre :

$$\left[ k_{ei}^{(n)} \right]^2 = k_0^2 + \frac{k_0^4}{2k_{ei}^{(n-1)}} \int e^{-\alpha r} \left[ e^{jk_{e1}^{(n-1)} R} + e^{jk_{e2}^{(n-1)} R} \right] \sin(k_{ei}^{(n-1)} r) dr \quad (\text{V.66})$$

Les différents degrés d'approximation de l'énergie propre sont représentés sous forme de diagrammes sur la figure V.12. On a calculé numériquement les nombres d'onde obtenus après quelques itérations de l'équation V.66. Sur la figure V.13, on compare les libres parcours moyens  $l_{e1}^{(4)}$  et  $l_{e2}^{(4)}$  obtenus au bout de la 4<sup>ème</sup> itération à ceux obtenus dans l'approximation de Bourret (Eq.V.63). Clairement, l'approximation de Bourret n'est plus suffisante en régime de hautes perturbations ; alors que  $l_{e1}^{(1)}$  et  $l_{e2}^{(1)}$  augmentaient linéairement avec la longueur de corrélation  $l_c$ , les libres parcours moyens itérés  $l_{e1}^{(4)}$  et  $l_{e2}^{(4)}$  sont très éloignés des valeurs au rang 1 et exhibent au contraire une décroissance avec  $l_c$ . Les approximations plus précises de l'énergie propre (Fig.V.12) mènent à un libre parcours moyen évoluant selon l'équation V.47 (courbe verte de la figure V.13). Cette tendance est vérifiée tant que le libre parcours moyen reste supérieur à la longueur d'onde ( $k_0 l_e \gg 1$ ). Au delà, le processus d'itération diverge.

En conclusion, on a donc montré dans cette partie que l'approximation de Bourret n'avait plus lieu d'être en régime de hautes perturbations. Par conséquent, les nombres d'onde effectifs

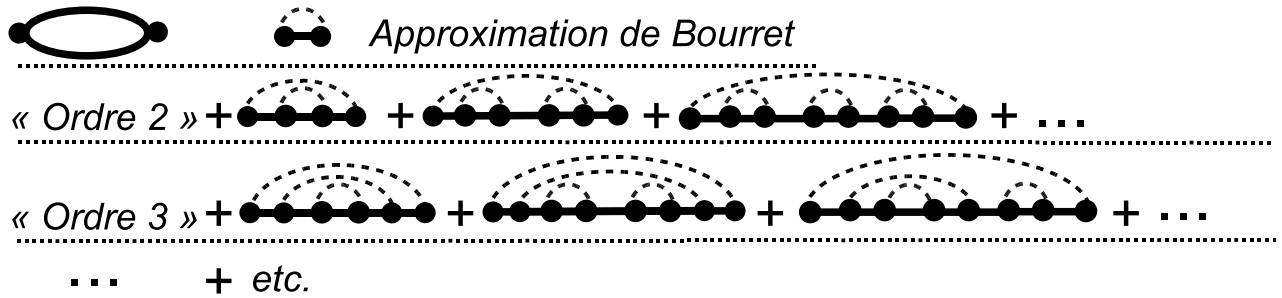


FIG. V.12: Diagrammes participant aux différents ordres d'approximation (Eq.V.66).

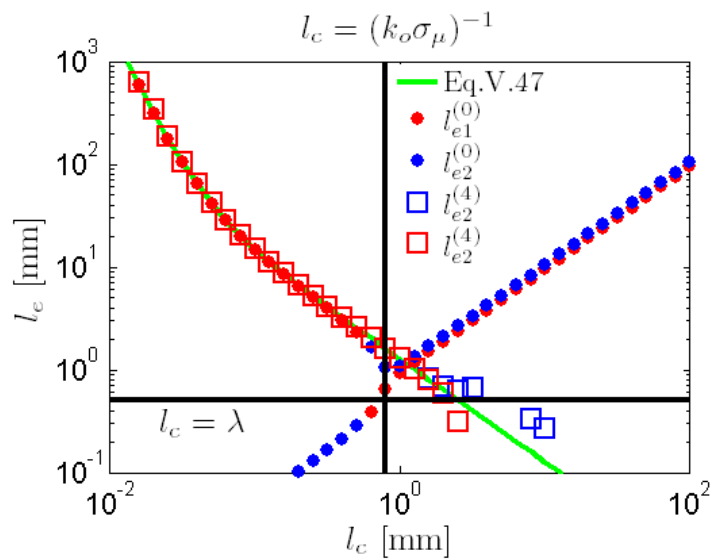


FIG. V.13: Comparaison des libres parcours moyens  $l_{e1}^{(4)}$  et  $l_{e2}^{(4)}$  obtenus au bout de la 4<sup>ème</sup> itération avec ceux obtenus dans l'approximation de Bourret (Eq.V.63), en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$ .

donnés par l'équation V.63 sont faux. On a observé numériquement que le processus itératif de l'équation V.66 menait à un libre parcours moyen  $l_e$  qui restait donné par l'équation V.47, tant que  $k_0 l_e \gg 1$ . Toutefois, cette conjecture est à prendre avec des pincettes puisque les différentes approximations de l'énergie propre contenues dans le processus itératif de l'équation (V.66) ne prennent pas en compte les diagrammes croisés (voir Fig.V.12) comme par exemple le terme  $\Sigma_2$  de la figure V.5. Or, autour de la limite  $k_0 l_c \sigma_\mu \simeq 1$ , ces diagrammes ne sont peut être pas négligables. Des calculs numériques sont donc exigés si on veut accéder à un calcul précis du libre parcours moyen dans ce régime intermédiaire. Dans le régime des hautes perturbations  $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \gg 1$ , le régime de localisation forte ( $k_0 l_e \simeq 1$ ) est très vite atteint.

### Cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne. Traiter ce cas est pertinent puisqu'une telle fonction d'autocorrélation met en jeu une distribution en taille des hétérogénéités plus resserrée que la fonction d'autocorrélation exponentielle. Il sera donc intéressant de comparer les deux expressions analytiques du libre parcours moyen  $l_e$  obtenues dans chacun des cas pour examiner l'influence de la portée des corrélations sur celui-ci. De plus, bien que le choix d'une fonction d'autocorrélation exponentielle soit bien pratique pour conduire des calculs analytiques, il n'est pas réaliste physiquement. En effet, elle présente une dérivée non nulle en 0. Ceci conduit à un potentiel de perturbation  $\mu(r)$  discontinu alors qu'on le suppose continu ! [129]

Pour que la comparaison entre les fonctions d'autocorrélation exponentielle et gaussienne soit pertinente, il faut que le volume  $V$  d'une hétérogénéité soit identique dans les deux cas. Ce volume  $V$  est égal à la quantité suivante :

$$V = \frac{1}{B(0)} \int B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\sigma_\mu^2} \int_0^\infty B(r) r^2 dr \quad (\text{V.67})$$

Dans le cas d'une autocorrélation exponentielle (Eq.V.38), on a  $V_e = 8\pi l_c^3$ . Considérons une fonction d'autocorrélation gaussienne telle que :

$$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp(-\alpha r^2) \quad (\text{V.68})$$

En injectant cette expression de  $B(r)$  dans l'équation V.67, on obtient un volume  $V_g = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}$ . Si on force l'égalité entre  $V_e$  et  $V_g$ , on obtient la correspondance :

$$\alpha = \frac{\pi^{1/3}}{4l_c^2} \quad (\text{V.69})$$

En injectant cette expression de  $\alpha$  dans Eq.V.68, on peut exprimer la fonction d'autocorrélation gaussienne en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  :

$$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{\pi^{1/3} r^2}{4l_c^2}\right) \quad (\text{V.70})$$

Les profils de chaque fonction d'autocorrélation (gaussienne et exponentielle) sont présentés sur la figure V.14.

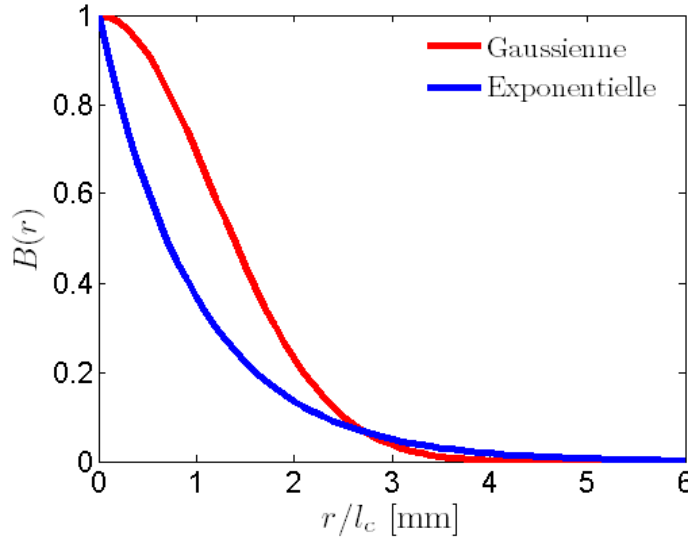


FIG. V.14: Evolution de  $B(r)$  en fonction de  $r/l_c$ . Les profils exponentiel et gaussien correspondent respectivement aux équations V.38 et V.70

La comparaison de ces deux profils permet de mieux cerner le type de milieu auquel chaque fonction d'autocorrélation pourra être associée. Le profil gaussien sera associé à des milieux dont la distribution en taille des hétérogénéités est plus resserrée. Au contraire, l'étendue spatiale importante du profil exponentiel implique une plus large distribution en taille des hétérogénéités.

On se place dans un régime de faibles perturbations tel que  $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \ll 1$ . Pour obtenir le nombre d'onde effectif  $k_e$  d'un milieu aléatoire continu caractérisé par une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.68), on repart de l'expression de la fonction de Green moyenne  $\bar{G}(\omega, k)$  (Eq.V.37) obtenue dans l'approximation de Bourret. Le nombre d'onde effectif  $k_e$  est donc solution de l'équation suivante :

$$k^2 = k_0^2 + \underbrace{\frac{\sigma_\mu^2 k_0^4}{k} \int_0^\infty \exp(-\alpha r^2) \exp(jk_0 r) \sin(kr) dr}_{-\Sigma_1(\omega, k)} \quad (\text{V.71})$$

Pour accéder à une expression analytique de  $k_e$ , nous sommes amenés à faire plusieurs approximations. La première consiste à considérer l'énergie propre en  $k = k_0$ . Cette approximation est justifiée en régime de faibles perturbations, comme nous avons pu le voir dans le cas de la fonction d'autocorrélation exponentielle. La deuxième approximation est un peu plus problématique. Elle consiste à négliger la variation de la partie réelle du nombre d'onde, c'est-à-dire  $\Re[k_e] \simeq k_0$ . Nous sommes obligés de faire une telle approximation puisque la partie réelle de l'énergie propre n'a pas de forme analytique dans le cas d'une autocorrélation gaussienne. Une fois ces approximations réalisées, l'atténuation  $\gamma$  de l'onde cohérente (telle que,  $k_e = k_0 + j\gamma$ ) est simplement



donnée par :

$$\gamma = -\frac{\Im[\Sigma_1(\omega, k_0)]}{2k_0} \quad (\text{V.72})$$

$$= \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{2} \int_0^\infty \exp(-\alpha r^2) \sin^2(k_0 r) dr \quad (\text{V.73})$$

L'intégrale de l'équation précédente peut se résoudre analytiquement et on en déduit :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sigma_\mu^2 k_0^2}{8} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k_0^2}{\alpha}\right) \right] \quad (\text{V.74})$$

Le libre parcours moyen  $l_e$  peut ensuite être déduit de  $\gamma$ , car  $l_e = \frac{1}{2\gamma}$ . D'autre part, on peut expliciter  $\alpha$  en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  (Eq.V.69). On obtient finalement :

$$l_e = \frac{2}{\pi^{1/3} \sigma_\mu^2 k_0^2 l_c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4k_0^2 l_c^2}{\pi^{1/3}}\right) \right]^{-1} \quad (\text{V.75})$$

Dans le régime de Rayleigh ( $k_0 l_c \ll 1$ ), le libre parcours moyen élastique est simplement donné par :

$$l_e \sim \frac{1}{2} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-4} l_c^{-3}, \text{ pour } k_0 l_c \ll 1 \quad (\text{V.76})$$

On retrouve strictement la même expression que celle obtenue dans le cas d'une autocorrélation exponentielle dans le régime de Rayleigh (Eq.V.48). Ceci est logique car, quand  $k_0 l_c$  tend vers 0, les deux fonctions d'autocorrélation vont être vues de manière identique par l'onde effective, c'est à dire comme ayant une étendue spatiale infiniment petite (cas de diffuseurs ponctuels). En régime intermédiaire, c'est-à-dire toujours en régime de faibles perturbations mais en dehors du régime de Rayleigh ( $k_0 l_c > 1$ ), l'expression du libre parcours moyen élastique tend vers l'expression suivante :

$$l_e \sim \frac{2}{\pi^{1/3}} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}, \text{ pour } k_0 l_c > 1 \quad (\text{V.77})$$

En régime intermédiaire, les fonctions d'autocorrélations gaussienne et exponentielle (Eq.V.49) donnent lieu à deux expressions du libre parcours moyen variant selon les mêmes lois de puissance vis-à-vis des différents paramètres  $l_c$ ,  $f$  et  $\sigma_\mu$ . Seule la constante est modifiée : 2 pour l'exponentielle et  $\frac{2}{\pi^{1/3}}$  pour la gaussienne. Ainsi, à volume d'hétérogénéité égal, la fonction d'autocorrélation gaussienne donne lieu à un libre parcours moyen plus petit.

## Conclusion

Les principaux résultats concernant le libre parcours moyen  $l_e$  associé à l'onde cohérente dans un milieu aléatoire continu tridimensionnel sont résumés dans le tableau V.1. Nous avons mis en évidence deux régimes asymptotiques dans lesquels le comportement ondulatoire est très différent :

- **Régime de faibles perturbations** ( $k_0^2 l_c^2 \sigma_\mu^2 \ll 1$ ) : dans ce régime, le premier terme du développement de l'énergie propre suffit à décrire les processus de pertes par diffusion (Approximation de Bourret). Cela permet d'introduire la notion de milieu effectif et

Fonction d'autocorrélation	Faibles perturbations $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \ll 1$		Hautes perturbations $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \gg 1$
	Rayleigh $(k_0 l_c)^2 \ll 1$	Géométrique $(k_0 l_c)^2 \gg 1$	
$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{r}{l_c}\right)$	$l_e \sim \frac{1}{2} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-4} l_c^{-3}$	$l_e \sim 2 \sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}$	Localisation forte
$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{\pi^{1/3} r^2}{4 l_c^2}\right)$	$l_e \sim \frac{1}{2} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-4} l_c^{-3}$	$l_e \sim \frac{2}{\pi^{1/3}} \sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}$	$k_0 l_e \sim 1$

TAB. V.1: Evolution du libre parcours moyen  $l_e$  en fonction des paramètres statistiques du milieu ( $l_c, \sigma_\mu$ ) et de la fréquence (matérialisée par le nombre d'onde  $k_0$ ) pour un milieu aléatoire continu tridimensionnel.

le libre parcours moyen  $l_e$  associé est donné par les équations V.47 et V.75, respectivement dans le cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.38) ou gaussienne (Eq.V.70). Deux sous-régimes ont été ainsi mis en évidence (voir Tab.V.1) : le régime géométrique ( $k_0^2 l_c^2 \gg 1$ ) et le régime de Rayleigh ( $k_0^2 l_c^2 \ll 1$ ) qui correspondent aux cas où la taille des hétérogénéités (caractérisée par  $l_c$ ) est plus ou moins grande que la longueur d'onde  $\lambda$ .

- **Régime de hautes perturbations** ( $k_0^2 l_c^2 \sigma_\mu^2 \gg 1$ ) : dans ce régime, l'approximation de Bourret n'est plus valable et un développement à des ordres d'approximation beaucoup plus importants pour l'énergie propre est alors nécessaire. Le libre parcours moyen  $l_e$  devient rapidement du même ordre de grandeur que la longueur d'onde  $\lambda$ . On s'approche du régime de localisation forte.

L'étude du cas tridimensionnel est intéressante car elle permet d'obtenir des expressions analytiques simples du libre parcours moyen  $l_e$  pour des fonctions d'autocorrélation modèles. L'objet de la prochaine partie est de s'intéresser au cas 2D pour lequel la résolution analytique de l'équation de Dyson est beaucoup plus délicate mais qui offre une plus grande facilité pour la réalisation de simulations numériques.

## V.2.4 Comparaison entre théorie et simulation numérique (2D)

Nous traitons maintenant de l'évolution du libre parcours moyen  $l_e$  en fonction des différents paramètres statistiques du désordre dans le cas d'un milieu aléatoire continu bidimensionnel. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'expression théorique de  $l_e$  qui sera directement déduite de l'équation de Dyson toujours valable à deux dimensions (Eq.V.30). Cette fois, une expression analytique simple de  $l_e$  ne peut pas être obtenue car la transformée de Fourier 2D, présente au dénominateur de  $\overline{G}(\omega, k)$ , ne peut pas être résolue analytiquement. On peut néanmoins calculer le(s) pôle(s) de  $\overline{G}(\omega, k)$  numériquement en procédant itérativement. Nous en déduisons les lois de puissance auxquelles obéit le libre parcours moyen  $l_e$  en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$ , de la fréquence  $f$  et de l'amplitude des fluctuations  $\sigma_\mu$ . Même si le cas 2D n'est pas aussi simple analytiquement, il se prête bien plus facilement

aux simulations numériques. Nous avons utilisé pour cela le code Acel, développé par Mickaël Tanter au laboratoire. Ce code consiste en une simulation numérique de type FDTD (Finite-difference time-domain) de la propagation des ondes ultrasonores. Nous avons pu ainsi simuler numériquement la propagation d'une onde plane dans un champ de vitesses  $c(\mathbf{r})$  caractérisé par une autocorrélation gaussienne. En moyennant sur le désordre, nous avons accès à l'onde cohérente et plus particulièrement à sa décroissance spatiale directement reliée au libre parcours moyen  $l_e$ . Un excellent accord est trouvé entre théorie et simulation numérique.

### Calcul théorique de $l_e$ dans un cadre bidimensionnel

Nous nous intéressons ici au cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne puisqu'il s'agit de ce type de désordre qui sera simulé numériquement par la suite :

$$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) \quad (\text{V.78})$$

Notons que, par simplification,  $l_c$  désigne ici l'écart type de la gaussienne contrairement à ce qui avait été choisi précédemment (Eq.V.70). On se place dans le régime des faibles perturbations tel que  $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \ll 1$ . Dans ce cas, un simple développement à l'ordre 1 de l'énergie propre est possible (approximation de Bourret) et le nombre d'onde effectif  $k_e$ , caractérisant le milieu effectif, correspond au pôle de  $\overline{G}(\omega, k)$  dont l'expression est donnée par Eq.V.34.  $k_e$  est donc solution de l'équation suivante :

$$k^2 = k_0^2 - k_0^4 \int G_0(\mathbf{r}) B(\mathbf{r}) \exp(-j\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{V.79})$$

En explicitant les expressions de  $B(r)$  (Eq.V.78) et de  $G_0(\mathbf{r})$  à 2D (Eq.V.7), on peut réécrire l'équation précédente en utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\begin{aligned} k^2 &= k_0^2 + j \frac{k_0^4 \sigma_\mu^2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k_0 r) \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) \exp(-jkr \cos \theta) r dr d\theta \\ k^2 &= k_0^2 + j \frac{\pi k_0^4 \sigma_\mu^2}{2} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k_0 r) \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) J_0(kr) r dr \end{aligned} \quad (\text{V.80})$$

où  $J_0(kr)$  est la fonction de Bessel à l'ordre 0. Une résolution analytique de cette équation n'est pas possible, contrairement au résultat obtenu à trois dimensions (Eq.V.37). L'idée est donc de calculer numériquement la solution de cette équation en procédant par itération :

$$[k^{(n)}]^2 = k_0^2 + j \frac{\pi k_0^4 \sigma_\mu^2}{2} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k_0 r) \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) J_0(k^{(n-1)} r) r dr \quad (\text{V.81})$$

Le nombre d'onde au rang 0 est celui obtenu en milieu homogène :  $k^{(0)} = k_0$ . Ce processus itératif converge rapidement vers  $k_e$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^{(n)} = k_e$$

On a ainsi pu étudier l'évolution du libre parcours moyen  $l_e$  en fonction des différents paramètres du problème. Sur la figure suivante,  $l_e$  a été étudié en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  et de la fréquence  $f$ .

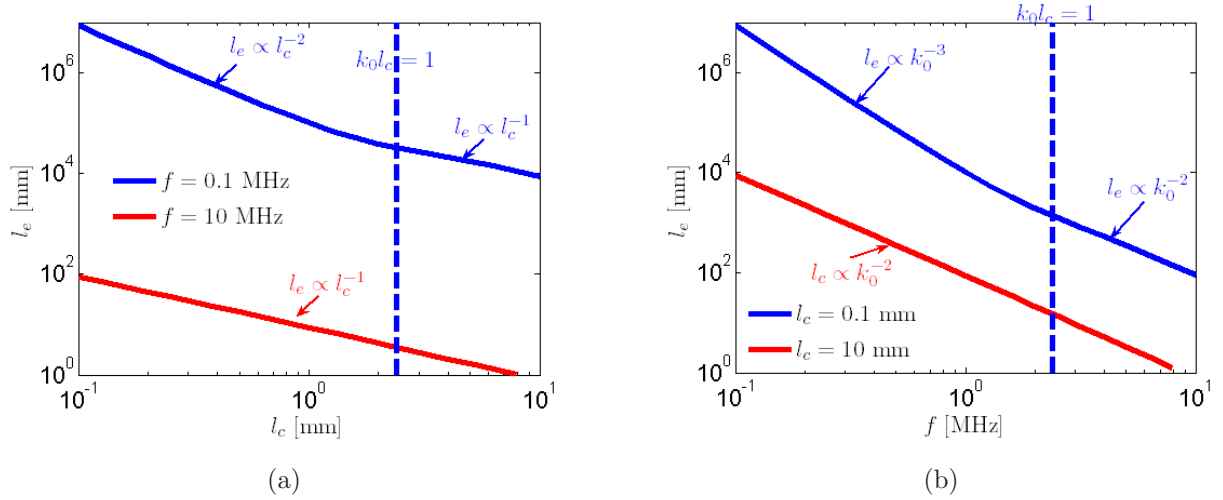


FIG. V.15: Nombre d'onde effectif  $k_e$  à 2D dans le cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne (Eq.V.78). (a) Evolution de  $l_e$  en fonction de  $l_c$  ( $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $c = 1,5$  mm/ $\mu$ s). (b) Evolution de  $l_e$  en fonction de  $f$  ( $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $c = 1,5$  mm/ $\mu$ s).

Comme dans le cas tridimensionnel, deux régimes sont à considérer : le régime de Rayleigh et le régime géométrique. Pour  $(k_0 l_c)^2 \ll 1$  (Rayleigh), le libre parcours moyen varie comme la puissance  $-3$  de la fréquence et  $-2$  de la longueur de corrélation  $l_c$ . Pour  $(k_0 l_c)^2 \gg 1$  (régime géométrique), l'exposant de la loi de puissance devient  $-2$  en ce qui concerne la fréquence  $f$  et  $-1$  pour  $l_c$ . L'évolution en fonction de l'amplitude des fluctuations  $\sigma_\mu$  n'est pas montrée ici mais est en  $\sigma_\mu^{-2}$  pour les deux régimes. On peut noter également que, dès qu'on entre dans le régime des hautes perturbations ( $l_e \sim \lambda$ ), le processus itératif décrit par l'équation V.81 diverge et l'obtention d'un libre parcours moyen  $l_e$  est impossible. C'est ce que l'on observe avec les courbes continues rouges de la figure V.15 qui ne présentent plus de solution aux grandes longueurs de corrélation ( $l_c > 8$  mm, Fig.V.15(a)) et aux grandes fréquences ( $f > 8$  MHz, Fig.V.15(b)). L'évolution de  $l_e$ , déduite numériquement dans le cas 2D, est résumée dans le tableau suivant :

Faibles perturbations, $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \ll 1$		Hautes perturbations $(k_0 l_c \sigma_\mu)^2 \gg 1$
Rayleigh, $(k_0 l_c)^2 \ll 1$	Géométrique, $(k_0 l_c)^2 \gg 1$	
$l_e \propto \sigma_\mu^{-2} k_0^{-3} l_c^{-2}$	$l_e \propto \sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}$	Localisation forte ( $k_0 l_e \sim 1$ )

TAB. V.2: Evolution du libre parcours moyen  $l_e$  en fonction des paramètres statistiques du milieu ( $l_c$ ,  $\sigma_\mu$ ) et de la fréquence (matérialisée par le nombre d'onde  $k_0$ ) pour un milieu aléatoire continu bidimensionnel (Cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne, Eq.V.78).

On peut comparer ce tableau à celui obtenu dans le cas tridimensionnel (Tab.V.1). Seul le régime de Rayleigh diffère dans les deux cas. Alors que  $l_e \propto \sigma_\mu^{-2} k_0^{-3} l_c^{-2}$  en 2D,  $l_e \propto \sigma_\mu^{-2} k_0^{-4} l_c^{-3}$  dans le cas 3D. Le régime géométrique donne lieu quant à lui au même comportement en loi de puissance pour le libre parcours moyen  $l_e$  :  $l_e \propto \sigma_\mu^{-2} k_0^{-2} l_c^{-1}$ . Maintenant que nous avons étudié

théoriquement le comportement asymptotique de  $l_e$  en fonction des paramètres statistiques du désordre et de la fréquence  $f$ , nous allons comparer le libre parcours moyen  $l_e$  théorique avec les résultats d'une simulation numérique afin de valider le modèle théorique utilisé et les différentes approximations effectuées précédemment.

### Présentation des simulations numériques

Les simulations numériques ont été réalisées grâce au code Acel développé au laboratoire par Mickaël Tanter. Ce code se prête bien à nos objectifs car il permet de simuler entre autres la propagation d'une onde acoustique dans un champ de vitesse  $c(\mathbf{r})$  quelconque défini par l'opérateur. Nous avons donc simulé la propagation d'une onde plane dans un milieu aléatoire continu 2D. L'expérience ainsi simulée est décrite sur la figure suivante :

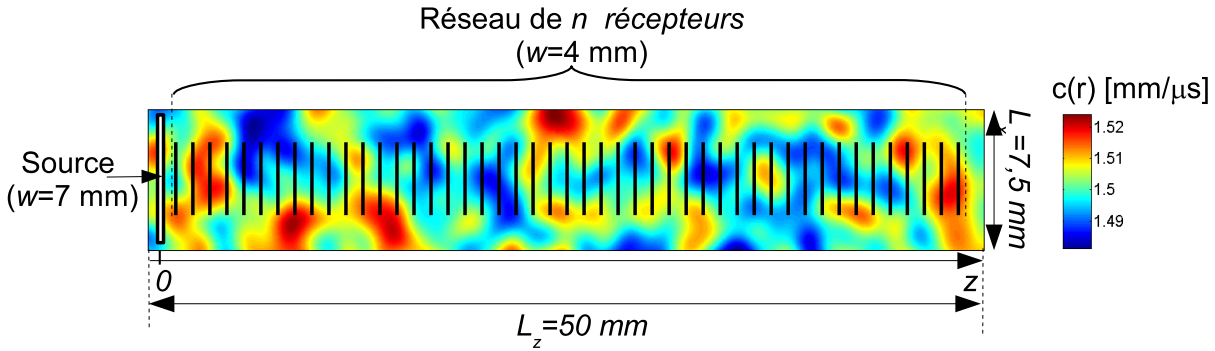


FIG. V.16: Expérience simulée numériquement à l'aide d'Acel.

La simulation numérique se déroule dans un espace de largeur  $L_x = 7,5$  mm et d'épaisseur  $L_z = 50$  mm. Le pas de la grille a été fixé à 0.025 mm afin de simuler la propagation d'une impulsion ultrasonore large bande dont la fréquence centrale est de 4 MHz et dont la largeur de la bande passante à mi-hauteur est de 4 MHz. Les conditions aux limites sont absorbantes. L'onde est émise depuis une source située en  $z = 0$ . La taille de cette source ( $w = 7$  mm) est grande devant la longueur d'onde moyenne  $\lambda_{\text{moy}}$  ( $\lambda_{\text{moy}} \simeq 0,37$  mm). L'onde émise est donc quasi-plane. La propagation de cette onde est ensuite mesurée tous les 0.05 mm par des récepteurs de taille  $w = 4$  mm (voir Fig.V.16).

La carte de vitesse que l'on désire fabriquer est de taille  $N_x \times N_z$ , avec  $N_x = 300$  et  $N_z = 2000$ . Elle doit être caractérisée par une fonction d'autocorrélation gaussienne. Une carte de vitesse typique est présentée sur la figure V.16. Le choix d'une autocorrélation gaussienne a été fait car elle est facile à modéliser numériquement. La fabrication d'une telle carte de vitesse est détaillée en Annexe V.A.2.

Nous avons simulé la propagation d'une onde plane dans un champ de vitesse aléatoire caractérisé par une fonction d'autocorrélation gaussienne. Comme une moyenne sur le désordre est nécessaire pour accéder à l'onde cohérente, cette simulation numérique est répétée  $N_r$  de fois en générant à chaque fois une carte de vitesse  $\mathbf{C}$  différente. Le signal reçu par chacun des

récepteurs est noté  $\psi_i(z_j, t)$ ,  $i$  représentant l'indice de la configuration du désordre et  $j$  celui du récepteur. Une transformée de Fourier discrète permet ensuite de passer dans le domaine des fréquences et donne accès au champ  $\psi_i(z_j, f)$  mesuré en  $z = z_j$  et à la fréquence  $f$ .

Nous avons également réalisé une simulation numérique de référence pour lequel le champ de vitesse est uniforme et égal à  $c_0$ . Le champ  $\psi_0(z_j, t)$  ainsi mesuré constitue notre référence. Si la simulation était parfaite, ce champ  $\psi_0(z_j, t)$  représenterait la propagation d'une onde plane dont l'amplitude resterait constante avec la distance parcourue  $z_j$ . Toutefois, la présence de conditions limites absorbantes, l'ouverture limitée de la source et d'éventuels artefacts numériques font que cette onde de référence dévie quelque peu de l'onde plane. On se servira donc de  $\psi_0(z_j, t)$  pour renormaliser nos résultats par la suite, ce qui nous permettra de nous affranchir des aléas numériques et de prendre en compte la diffraction.

Pour chaque configuration du désordre, le champ  $\psi_i(z_j, f)$  mesuré par chacun des récepteurs peut être décomposé de la manière suivante :

$$\psi_i(z_j, f) = \bar{\psi}(z_j, f) + \delta\psi_i(z_j, f) \quad (\text{V.82})$$

où  $\bar{\psi}$  est l'onde cohérente qui résiste à la moyenne et  $\delta\psi_i(z_j, f)$  le champ fluctuant. L'intensité moyenne  $\langle |\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle$  peut s'exprimer en fonction du champ moyen et du champ fluctuant selon

$$\langle |\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle = |\bar{\psi}(z_j, f)|^2 + \langle |\delta\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle \quad (\text{V.83})$$

où le symbole  $\langle \dots \rangle$  représente une moyenne d'ensemble. En pratique, l'onde cohérente  $\bar{\psi}$  est obtenue en moyennant sur les  $N_r$  configurations simulées du désordre :

$$\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i = \bar{\psi}(z_j, f) + \langle \delta\psi_i(z_j, f) \rangle_i \quad (\text{V.84})$$

où le symbole  $\langle \dots \rangle$  désigne ici une moyenne sur la variable  $i$  placée en indice.  $\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i$  est un estimateur de l'onde cohérente. Celui-ci constituera une bonne approximation de l'onde cohérente si le nombre de configurations du désordre  $N_r$  est suffisant. Alors que l'onde cohérente résiste à la moyenne, le terme fluctuant voit son amplitude diminuer avec la moyenne d'un facteur  $\frac{1}{\sqrt{N_r}}$ . Pour savoir si la moyenne est suffisante, il faut donc comparer l'intensité incohérente  $\langle |\delta\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle$  à l'intensité de l'onde cohérente  $|\bar{\psi}(z_j, f)|^2$ . On peut alors appliquer la condition suivante :

$$\frac{\langle |\delta\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle}{|\bar{\psi}(z_j, f)|^2} \simeq \frac{\langle |\psi_i(z_j, f)|^2 \rangle_i - |\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i|^2}{|\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i|^2} < \frac{N_r}{10} \quad (\text{V.85})$$

où le facteur  $\frac{1}{10}$  du terme de droite est choisi arbitrairement. Cette condition nous indique si la moyenne effectuée sur les  $N_r$  configurations du désordre *gomme* suffisamment le champ fluctuant. Ainsi, si cette condition est respectée, l'estimateur  $\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i$  constitue une bonne approximation de l'onde cohérente  $\bar{\psi}(z_j, f)$ . Si elle n'est pas respectée, on ne pourra pas avoir confiance en la moyenne réalisée. Cette condition sera appliquée à nos résultats et les positions  $z_j$  pour lesquels elle n'est pas vérifiée ne seront pas pris en compte dans la mesure du libre parcours moyen à la fréquence  $f$ .

Pour accéder au libre parcours moyen  $l_e$ , on calcule le coefficient de transmission de l'onde cohérente (normalisée par l'onde de référence  $\psi_0$ ), censé décroître exponentiellement en fonction de  $z$  :

$$\left| \frac{\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i}{\psi_0(z_j, f)} \right| = \exp\left(-\frac{z_j}{2l_e(f)}\right) \quad (\text{V.86})$$

La pente de la courbe  $\ln\left(\left|\frac{\langle \psi_i(z_j, f) \rangle_i}{\psi_0(z_j, f)}\right|\right)$  nous donne donc une mesure du libre parcours moyen  $l_e$ , à la fréquence  $f$ . La mesure de cette pente ne sera réalisée que sur les points  $z_j$  vérifiant la condition V.85.

### Comparaison entre simulation numérique et théorie

Avant de comparer les résultats numériques à la théorie, le lien doit être fait entre le potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  défini à partir de l'équation d'onde en milieu hétérogène (Eq.V.10) et les variations de célérité  $c(\mathbf{r})$ . Lors des développements théoriques précédents, on a considéré le potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  alors qu'en pratique, on a plutôt tendance à caractériser un milieu par ses variations de célérité  $\delta c(\mathbf{r})$ . Comme on ne considère pas ici des variations de densité, l'expression de  $\mu(\mathbf{r})$  (Eq.V.13) se simplifie :

$$\mu(\mathbf{r}) = -2\frac{\delta c(\mathbf{r})}{c_0} \quad (\text{V.87})$$

On peut en déduire la relation existant entre la fonction d'autocorrélation  $B$  du potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  (Eq.V.20) et la fonction d'autocorrélation du champ de vitesse  $B_c(r)$  définie telle que

$$B_c(r) = \langle c(\mathbf{r}')c(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}'} - c_0^2 = \sigma_c^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right),$$

ce qui donne :

$$B(r) = 4\frac{B_c(r)}{c_0^2}, \text{ et donc } \sigma_\mu = 2\frac{\sigma_c}{c_0} \quad (\text{V.88})$$

L'amplitude des fluctuations  $\sigma_\mu$  de potentiel  $\mu(\mathbf{r})$  à considérer théoriquement correspond au double de l'amplitude des fluctuations  $\sigma_c$  de célérité normalisée par la célérité moyenne  $c_0$ .

Sur la figure V.17, est présenté un exemple de résultats obtenus avec Acel. L'amplitude des fluctuations a été fixée à  $\sigma_\mu = 0.01$ , ce qui correspond à des fluctuations de vitesses  $\sigma_c = 5 \times 10^{-3}$  mm/ $\mu$ s, la vitesse de référence étant celle de l'eau ( $c_0 = 1.5$  mm/ $\mu$ s). La longueur de corrélation  $l_c$  est de 2 mm. La figure V.17(a) représente l'évolution de  $\ln\left(\left|\frac{\langle \psi_i \rangle_i}{\psi_0}\right|\right)$  en fonction de la fréquence  $f$  et de la profondeur  $z$ . Nous sommes dans un régime de faibles perturbations sur toute la gamme de fréquence [0 ; 8] MHz. La décroissance de  $\ln\left(\left|\frac{\langle \psi_i \rangle_i}{\psi_0}\right|\right)$  en fonction de la profondeur  $z$  est linéaire comme prévu théoriquement. Comme on pouvait s'y attendre, la décroissance exponentielle de l'onde cohérente est plus raide aux hautes fréquences, autrement dit le libre parcours moyen diminue avec la fréquence.

A chaque fréquence  $f$ , le libre parcours moyen  $l_e$  est déduit de la pente de  $\ln\left(\left|\frac{\langle \psi_i \rangle_i}{\psi_0}\right|\right)$  comme le montre la figure V.17(b). Comme établi au paragraphe précédent, la condition V.85 est appliquée au préalable afin de connaître la distance de propagation sur laquelle  $\langle \psi_i \rangle_i$  est une estimation satisfaisante de l'onde cohérente  $\bar{\psi}$ .



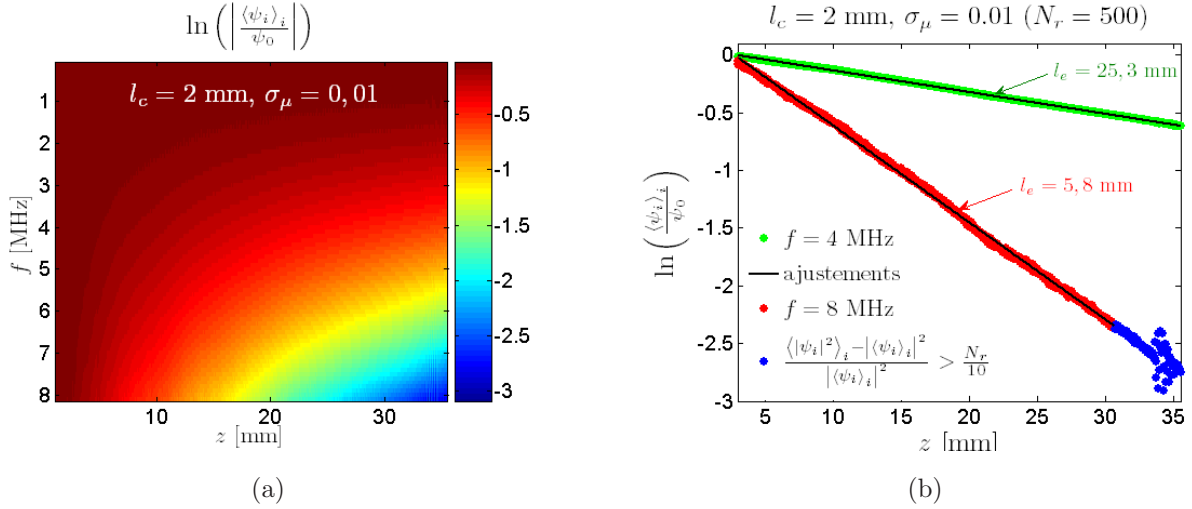


FIG. V.17: (a) Evolution de  $\ln \left( \left| \frac{\langle \psi_i \rangle_i}{\psi_0} \right| \right)$  en fonction de la fréquence  $f$  et de la profondeur  $z$  pour un milieu aléatoire d'autocorrélation gaussienne avec  $l_c = 2\text{mm}$  et  $\sigma_\mu = 0,01$ . La moyenne du champ cohérent est effectuée sur  $N_r = 500$  réalisations du désordre. (b) Résultats obtenus aux fréquences  $f = 4$  et  $8$  MHz. Les courbes sont ajustées linéairement sur les points  $z_j$  vérifiant la condition V.85 ce qui permet de déduire le libre parcours moyen  $l_e$ . Notons qu'à  $4$  MHz, toutes les positions  $z_j$  satisfont la condition V.85.

Nous avons tracé sur la figure V.18 l'évolution fréquentielle du libre parcours moyen  $l_e$  pour trois types de milieux différents :  $(\sigma_\mu = 0,01, l_c = 1\text{ mm})$ ,  $(\sigma_\mu = 0,01, l_c = 2\text{ mm})$  et  $(\sigma_\mu = 0,02, l_c = 2\text{ mm})$ . Ces résultats sont comparés aux prévisions théoriques directement déduites de l'équation V.81. L'accord entre la théorie et la simulation numérique est très bon, ce qui indique que le modèle théorique utilisé et les différentes approximations effectuées, notamment celle de Bourret, sont valables. Notons que l'on est ici en régime géométrique ( $k_0 l_c \gg 1$ ) et que donc  $l_e$  évolue en  $f^{-2}$  (voir Tab.V.2). Le milieu pour lequel  $\sigma_\mu = 0,02$  et  $l_c = 2\text{ mm}$  tombe en régime de hautes perturbations autour de  $f = 6$  MHz. L'accord entre la simulation numérique et la théorie reste valable dans ce régime. Cela s'explique par le fait que le libre parcours moyen  $l_e$  reste supérieur à la longueur d'onde  $\lambda$ . L'approximation de Bourret reste donc valable en régime de hautes perturbations tant que la condition  $k_0 l_e \gg 1$  est respectée.

La validation du modèle théorique par des simulations numériques nous permet d'envisager une prochaine application à des résultats expérimentaux. Néanmoins, les hypothèses effectuées sont tout de même assez nombreuses, comme celle d'un potentiel de perturbation gaussien ou encore l'isotropie et l'invariance par translation du désordre. Ce travail est un premier pas vers la caractérisation de milieux aléatoires continus grâce à une mesure du libre parcours moyen  $l_e$ .

Pour compléter notre étude théorique, nous nous sommes également intéressés au lien entre le libre parcours moyen de transport  $l^*$ , le coefficient de diffusion  $D$  et la microarchitecture du milieu. Comme nous allons le voir, ces paramètres sont fortement connectés à l'anisotropie des événements de diffusion et donc à la taille des inhomogénéités  $l_c$ . Ils peuvent donc apporter des informations complémentaires par rapport au libre parcours moyen élastique et des mesures expérimentales, notamment celle du coefficient de diffusion  $D$ , pourraient améliorer la



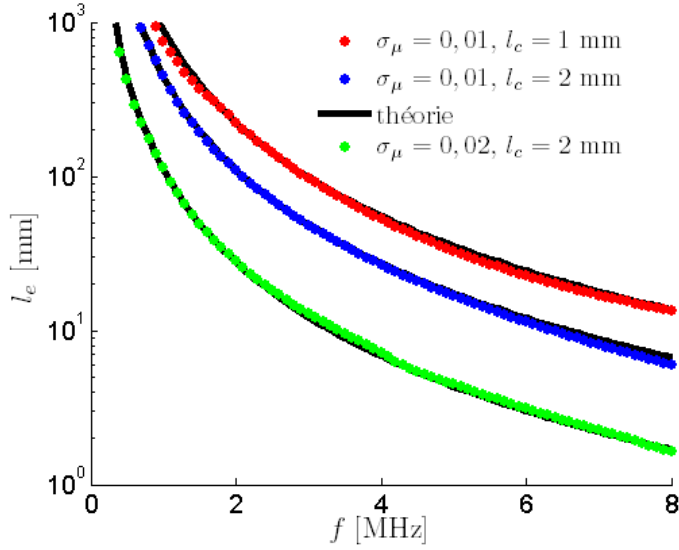


FIG. V.18: Evolution du libre parcours moyen  $l_e$  en fonction de la fréquence  $f$  pour trois types de milieu aléatoire d'autocorrélation gaussienne dont les paramètres statistiques sont respectivement  $(\sigma_\mu = 0,01, l_c = 1 \text{ mm})$ ,  $(\sigma_\mu = 0,01, l_c = 2 \text{ mm})$  et  $(\sigma_\mu = 0,02, l_c = 2 \text{ mm})$ . Les résultats des simulations numériques sont comparés aux prévisions théoriques obtenues à partir de l'équation V.81.

caractérisation des milieux aléatoires continus.

### V.3 Libre parcours moyen de transport & coefficient de diffusion

Au bout de quelques libres parcours moyens, pratiquement toute l'énergie de l'onde incidente a été transmise aux ondes multidiffusées. En régime de diffusion multiple, une observable plus pertinente que l'amplitude de l'onde cohérente, est donc l'intensité moyenne transmise à travers le milieu aléatoire. Pour calculer l'intensité moyenne, la trajectoire de l'onde multidiffusée peut alors être considérée comme celle d'un marcheur aléatoire. Cette analogie se justifie si l'on admet qu'il n'existe aucune corrélation, donc aucune possibilité d'interférence, entre deux chemins multidiffusés distincts. On qualifie donc cette intensité d'incohérente, l'intensité totale étant égale à la somme des intensités relatives à chaque chemin de diffusion multiple. Dans ce cas, l'onde qui se propage à travers un milieu aléatoire est équivalente à une bille classique subissant des chocs aléatoires répétés. Si on considère une source ponctuelle  $S$  émettant une impulsion brève dans un milieu diffusant, calculer l'intensité moyenne  $\bar{I}(\mathbf{r}, t)$  reçue au point  $\mathbf{r}$  au bout du temps  $t$  revient à déterminer la probabilité pour la bille d'arriver au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . Cette probabilité satisfait classiquement l'équation de diffusion aux temps longs. Ainsi, dans un milieu diffusant sans pertes constitué de diffuseurs isotropes (diffuseurs ponctuels),

l'intensité incohérente obéit à une équation en tout point semblable :

$$\left(D\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\bar{I}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (\text{V.89})$$

Le coefficient de diffusion  $D$  est alors proportionnel au libre parcours moyen qui représente la distance moyenne entre deux collisions successives :

$$D = \frac{c_0 l_e}{d} \quad (\text{V.90})$$

où  $c_0$  est la vitesse moyenne de propagation et  $d$  la dimension du problème.

La relation V.90 s'applique dans le cas d'événements de diffusion isotropes. Cependant, comme on le verra par la suite, dès que la taille caractéristique des hétérogénéités  $l_e$  devient du même ordre de grandeur ou supérieure à la longueur d'onde, la diffusion par chaque hétérogénéité devient anisotrope. Dans ce cas, le transport de l'intensité incohérente peut toujours s'écrire sous la forme d'une équation de diffusion en substituant dans Eq.V.90 le libre parcours moyen élastique  $l_e$  par un libre parcours moyen de transport  $l^*$  prenant en compte l'anisotropie de chaque événement de diffusion :

$$l^* = \frac{l_e}{1 - \overline{\cos\theta}} \quad (\text{V.91})$$

L'angle  $\theta$  désigne l'écart angulaire entre la direction de l'onde incidente et la direction de l'onde diffusée. L'onde diffusée peut prendre n'importe quelle direction  $\theta$  *a priori*, mais avec une distribution de probabilité particulière. Dans le cas de la diffusion isotrope, l'onde est diffusée dans toutes les directions avec une distribution de probabilité homogène. Le cosinus moyen de l'angle  $\theta$  est alors nul et on a  $l_e \equiv l^*$ . Dans le cas de diffuseurs anisotropes, cette distribution de probabilité n'est pas uniforme et est proportionnelle à la section efficace différentielle de diffusion  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ . Cette quantité caractérise la répartition de l'intensité diffusée selon la direction  $(\theta, \phi)$  considérée. Alors que le libre parcours moyen élastique  $l_e$  désigne une longueur caractéristique d'extinction de l'onde cohérente, le libre parcours moyen  $l^*$  correspond à une longueur caractéristique de perte de directivité par rapport à l'onde incidente. Ainsi, lorsque la diffusion est piquée vers l'avant ( $\theta \simeq 0$ ),  $\overline{\cos\theta} \rightarrow 1$  et le libre parcours moyen  $l^*$  tend vers l'infini, bien que  $l_e$  soit fini.  $l^*$  caractérise la distance au bout de laquelle l'onde diffusée "a perdu la mémoire" de la direction de l'onde incidente.

L'anisotropie n'est pas la seule source de déviation vis à vis de l'expression du coefficient de diffusion donnée par l'équation V.90. Dans le cas général, la vitesse de transport de l'énergie  $v_E$  n'est égale ni à la vitesse de phase ni à la vitesse de groupe de l'onde cohérente. En particulier, pour des diffuseurs discrets, des phénomènes de résonance entrent en jeu et l'onde peut donc rester piégée un certain temps dans chaque diffuseur [133, 39, 40, 41]. La vitesse de transport  $v_E$  peut donc différer fortement des vitesses de phase et de groupe de l'onde cohérente. L'expression du coefficient de diffusion devient dans le cas général :

$$D = \frac{v_E l^*}{d} \quad (\text{V.92})$$

Dans ce chapitre, nous allons donc, dans un premier temps, relier l'anisotropie des événements de diffusion aux paramètres statistiques du milieu aléatoire continu. Plus précisément, il s'agit d'établir l'expression théorique de la section efficace différentielle de diffusion  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ . A partir de là, on peut en déduire le cosinus directeur moyen  $\overline{\cos\theta}$  et le libre parcours moyen de transport  $l^*$  (Eq.V.91). Une expression analytique de  $l^*$  sera obtenue dans le cadre tridimensionnel en considérant des fonctions d'autocorrélation exponentielle ou gaussienne. Ces travaux théoriques sont enfin confrontés aux mesures expérimentales du coefficient de diffusion  $D$  dans l'os trabéculaire humain, réalisées au cours de cette thèse. Nous avons utilisé pour cela des images typiques de microstructure de l'os trabéculaire humain présentées dans un article de Padilla *et al.* [126]. A partir de ces images, nous avons pu estimer une fonction d'autocorrélation typique du désordre dans l'os et en déduire une estimation théorique du coefficient de diffusion  $D$ . Un bon accord qualitatif a été trouvé entre nos mesures expérimentales et les prédictions théoriques.

### V.3.1 Sections efficaces différentielle et totale de diffusion

Les éléments théoriques présentés dans ce paragraphe s'appuient sur les travaux de Chernov [129] et de Rytov *et al.* [131].

#### Intensité diffusée en régime de diffusion simple

Le but de ce paragraphe est de prédire théoriquement l'intensité diffusée par un élément de volume ( $V$ ) d'un milieu aléatoire continu. Comme nous souhaitons accéder *in fine* à la section efficace différentielle volumique du milieu aléatoire, nous allons supposer que  $V \ll l_e^3$ , ce qui nous permettra de nous placer dans le cadre de la première approximation de Born (diffusion simple). Le milieu désordonné est caractérisé par une fonction d'autocorrélation  $B(r)$  que l'on supposera invariante par translation et à symétrie sphérique. Le problème est le suivant : une onde plane progressive et monochromatique,  $\psi_0(\mathbf{r}', \omega)$ , illumine le volume ( $V$ ) :  $\psi_0(r', \omega) = \psi_0 \exp(j\mathbf{k}\mathbf{r}')$ . Le vecteur d'onde incident  $\mathbf{k}$  est dirigé suivant le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , tel que  $\mathbf{k} = k_0\mathbf{n}$ . Notre objectif est de déduire l'intensité moyenne diffusée par le volume ( $V$ ) reçue en un point d'observation  $P$  dont la position est repérée par le vecteur  $\mathbf{r}$  (voir Fig.V.19). L'origine du repère  $O$  correspond au centre d'inertie du volume ( $V$ ). Par la suite nous supposerons que le volume ( $V$ ) contient un grand nombre d'inhomogénéités : la taille caractéristique  $L = V^{1/3}$  est donc très grande devant la taille typique des inhomogénéités le constituant :  $l_c \ll L$ . Le caractère fini du volume ( $V$ ) est décrit par la fonction  $M(\mathbf{r}')$ , tel que :

$$M(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{r}' \in (V) \\ 0, & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (\text{V.93})$$

Le champ diffusé  $\psi_d(\mathbf{r}, \omega)$  par le volume ( $V$ ) peut être extrait du développement de Born du champ total  $\psi(\mathbf{r}, \omega)$  (Eq.V.16). En effet, on a  $\psi_d(\mathbf{r}, \omega) = \psi(\mathbf{r}, \omega) - \psi_0(\mathbf{r}, \omega)$  et le champ diffusé

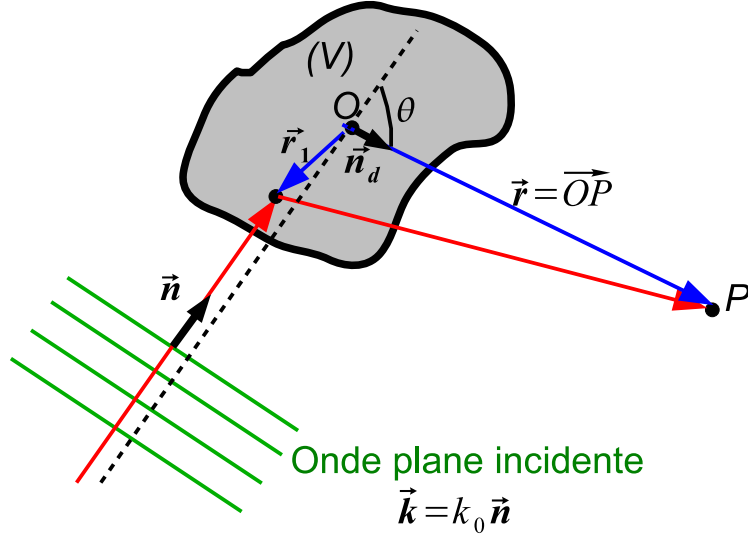


FIG. V.19: Géométrie du problème.

est donc donné par :

$$\psi_d(\mathbf{r}, \omega) = -k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1, \omega) M(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (\text{V.94})$$

$$+ k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mu(\mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_2, \omega) M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - k_0^6 \dots \quad (\text{V.95})$$

On se place en régime de diffusion simple (première approximation de Born), puisque nous avons supposé que  $L \ll l_e$ . Cela revient à ne considérer que le premier terme du développement précédent, et  $\psi_d(\mathbf{r}, \omega)$  s'écrit :

$$\psi_d(\mathbf{r}, \omega) = -k_0^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) \psi_0(\mathbf{r}_1, \omega) M(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (\text{V.96})$$

L'intensité diffusée incohérente,  $I_d = |\psi_d|^2$ , se déduit ensuite facilement :

$$I_d(\mathbf{r}) = k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \mu(\mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_2) \psi_0(\mathbf{r}_1) \psi_0^*(\mathbf{r}_2) M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.97})$$

Le passage à la moyenne de l'intensité diffusée conduit à faire apparaître la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  du potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  :

$$\bar{I}_d(\mathbf{r}) = k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_0^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) B(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \psi_0(\mathbf{r}_1) \psi_0^*(\mathbf{r}_2) M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.98})$$

On peut ensuite expliciter les expressions de  $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  et de  $\psi_0(\mathbf{r}_i)$ . On va considérer pour l'instant le cas tridimensionnel et  $G_0$  est donc donné par l'équation V.6. L'équation V.98 se réécrit sous la forme suivante en 3D :

$$\bar{I}_d^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^4}{16\pi^2} \iint B(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \frac{\exp\{jk_0 [|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}]\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.99})$$

L'étape suivante consiste à effectuer l'approximation de Fraunhofer : cela revient à considérer que le point  $P$  est situé à une distance  $r = |\mathbf{r}|$  grande devant la taille de l'échantillon diffusant :  $r \gg L$ . Dans ce cas, les termes en  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  peuvent se développer selon :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \underbrace{r}_{\text{ordre 0}} - \underbrace{\mathbf{n}_d \cdot \mathbf{r}_i}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\frac{r_i^2}{2r}}_{\text{ordre 2}} + \dots \quad (\text{V.100})$$

où  $\mathbf{n}_d = \frac{\mathbf{OP}}{|\mathbf{OP}|}$  est le vecteur unitaire désignant la direction de l'onde diffusée. En se limitant à l'ordre 1 pour les termes de phase et à l'ordre 0 pour les termes d'amplitude, l'équation V.99 se simplifie selon :

$$\bar{I}_d^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^4}{16\pi^2 r^2} \iint B(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \exp \{jk_0 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}_d)\} M(\mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (\text{V.101})$$

L'approximation de Fraunhofer revient donc à négliger les termes quadratiques dans l'exponentielle complexe, ce qui se traduit par la condition suivante :

$$\frac{k_0(r_1^2 - r_2^2)}{2r} \ll \pi \quad (\text{V.102})$$

On peut développer  $r_1^2 - r_2^2$  sous la forme de l'identité remarquable  $(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$ . Le terme  $(r_1 - r_2)$  est typiquement de l'ordre de la longueur de corrélation  $l_c$ . Cela provient de la présence de la fonction d'autocorrélation sous l'intégrale de l'équation V.101. Le terme  $(r_1 + r_2)$  est majoré quant à lui par la taille typique  $L$  de l'échantillon diffusant. La condition V.102 peut donc se simplifier en fonction des différentes grandeurs caractéristiques du problème :

$$r \gg \frac{Ll_c}{\lambda} \quad (\text{V.103})$$

Une fois l'approximation de Fraunhofer réalisée, on peut effectuer le changement de variables suivant :

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad (\text{V.104})$$

L'équation V.101 devient alors :

$$\bar{I}_d^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^4}{16\pi^2 r^2} \iint B(q) \exp \{jk_0 (\mathbf{n} - \mathbf{n}_d) \cdot \mathbf{q}\} M(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{q}}{2}) M(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{q}}{2}) d\mathbf{q} d\mathbf{R} \quad (\text{V.105})$$

Le produit  $M(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{q}}{2})M(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{q}}{2})$  peut se simplifier en  $M(\mathbf{R})$  pour le volume  $V$  entier, excepté pour une couche d'épaisseur  $l_c$  aux frontières du volume. L'erreur relative est alors de l'ordre du ratio entre le volume de la couche externe  $L^2 l_c$  et le volume entier  $V = L^3$ , *i.e* de l'ordre de  $\frac{l_c}{L}$ . Or, d'après nos hypothèses de départ, ce ratio est très petit devant 1 et donc l'approximation est justifiée. L'intégrale suivant  $d\mathbf{R}$  est tout simplement égale au volume  $V$  de l'échantillon diffusant et l'expression finale de l'intensité diffusée  $\bar{I}_d(\mathbf{r})$  est simplement donnée par :

$$\bar{I}_d^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^4 V}{16\pi^2 r^2} \int B(q) \exp \{jk_0 (\mathbf{n} - \mathbf{n}_d) \cdot \mathbf{q}\} d\mathbf{q} \quad (\text{V.106})$$

L'intensité diffusée en champ lointain est donc directement proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $B(q)$  prise en  $\mathbf{K} = k_0 (\mathbf{n}_d - \mathbf{n})$  :

$$\bar{I}_d^{(3D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^4 V}{16\pi^2 r^2} B(\mathbf{K}) \quad (\text{V.107})$$

avec  $B(\mathbf{K}) = \int B(q) \exp \{-j\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}\} d\mathbf{q}$ . Physiquement, l'équation V.107 révèle la nature sélective de la diffusion. Soit  $\theta$  l'angle entre les vecteurs d'onde incident et réfléchi (Fig.V.19). On a alors :

$$K = k_0 |\mathbf{n} - \mathbf{n}_d| = 2k_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{V.108})$$

La longueur d'onde  $\Lambda_K$  associée au vecteur  $\mathbf{K}$  est donnée par :

$$\Lambda_K = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (\text{V.109})$$

Cette équation de Bragg relie la période spatiale  $\Lambda_K$  de la fonction d'autocorrélation à l'angle de diffusion  $\theta$ . Ainsi dans le cas de la rétrodiffusion ( $\theta = \pi$ ), la diffusion est dominée par l'harmonique de période  $\Lambda_K = \frac{\lambda}{2}$ . La période de  $\Lambda_K$  augmente quand  $\theta$  diminue. Les valeurs de  $\Lambda_K$  et  $\lambda$  coïncident pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . En deçà de cette valeur,  $\Lambda_K$  est supérieure à  $\lambda$  et devient infinie en  $\theta = 0$  (diffusion vers l'avant). Cela implique que la diffusion vers l'avant est essentiellement due aux inhomogénéités de taille caractéristique  $l_c \sim \Lambda_K$  grande devant la longueur d'onde  $\lambda$ .

Concernant le cas bidimensionnel, la forme plus compliquée de la fonction de Green (Eq.V.7) rend *a priori* le calcul impossible. Néanmoins, l'approximation de champ lointain permet de considérer une forme approchée pour la fonction de Green  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  [44] :

$$G_0^{(2D)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \simeq -\frac{1+j}{4\sqrt{\pi k_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \exp(jk_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \quad (\text{V.110})$$

On peut injecter cette expression approchée de la fonction de Green dans l'expression générale de  $\bar{I}_d(\mathbf{r})$  (Eq.V.98). Puis, par le même raisonnement et les mêmes approximations que celles effectuées précédemment dans le cas 3D, on aboutit à une expression simplifiée de l'intensité simplement diffusée en champ lointain dans le cas 2D :

$$\bar{I}_d^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{k_0^3 S}{4\pi r} B(\mathbf{K}) \quad (\text{V.111})$$

Notons que le volume  $V$  apparaissant dans l'équation V.107 est remplacé par une surface diffusante  $S$  puisque l'on considère ici le cas bidimensionnel.

### Section efficace différentielle

Maintenant que l'intensité diffusée a été calculée théoriquement en régime de diffusion simple, nous allons pouvoir en déduire l'expression de la section efficace différentielle de diffusion dans le cas des milieux aléatoires continus. Comme dans le paragraphe précédent, le cas tridimensionnel sera traité en premier, puis nous déduirons par analogie les résultats dans le cas 2D.

Connaissant l'intensité  $I_d(\mathbf{r})$ , on peut facilement en déduire la section efficace différentielle de diffusion  $\frac{d\sigma}{d\Omega dV}$  par unité de volume  $dV$  dans l'angle solide  $d\Omega$  autour de la direction  $\mathbf{n}_d$ . En effet, la section efficace différentielle de diffusion est définie comme le rapport entre la puissance diffusée dans l'angle solide  $d\Omega$  et l'intensité de l'onde incidente :

$$\frac{d\sigma(\mathbf{n}_d)}{d\Omega dV} = \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega dV} = \frac{1}{I_0} \frac{d\mathcal{P}_d(\mathbf{n}_d)}{d\Omega dV} \quad (\text{V.112})$$

$d\mathcal{P}_d(\mathbf{n}_d)$  est la puissance moyenne diffusée dans l'angle solide  $d\Omega$  autour de la direction  $\mathbf{n}_d$  par l'élément de volume diffusant  $dV$ .  $I_0$  représente l'intensité de l'onde incidente qui est ici égale à 1 puisque l'amplitude de l'onde incidente  $|\psi_0|$  a été fixée à 1.  $\theta$  et  $\phi$  représentent respectivement la co-latitude et la longitude de  $\mathbf{n}_d$ , la direction de l'onde incidente  $\mathbf{n}$  étant colinéaire à l'axe ( $Oz$ ) :

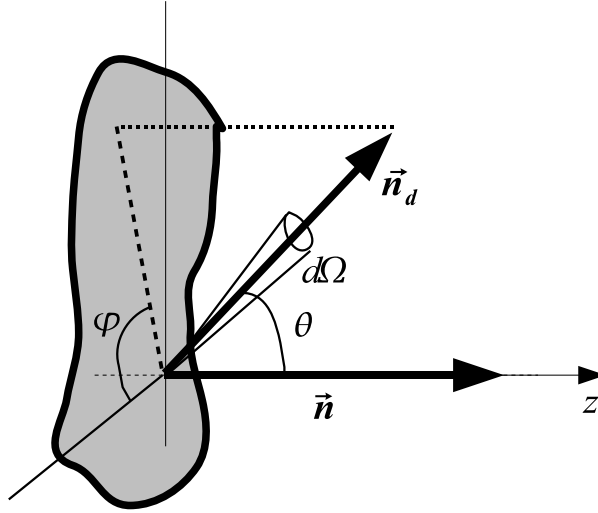


FIG. V.20: Diffusion dans l'angle solide  $d\Omega$  suivant la direction  $\mathbf{n}_d = (\theta, \phi)$ .

La puissance diffusée  $d\mathcal{P}_d$  est directement reliée à l'intensité moyenne  $d\bar{I}_d$  diffusée par l'élément de volume  $dV$ , tel que :

$$d\mathcal{P}_d(\mathbf{n}_d) = d\bar{I}_d(\mathbf{r})r^2 d\Omega \quad (\text{V.113})$$

L'intensité diffusée  $dI_d(\mathbf{r})$  par l'élément de volume  $dV$  peut directement être déduite de l'équation V.107, et donc

$$d\mathcal{P}_d(\mathbf{n}_d) = \frac{k_0^4}{16\pi^2} B(\mathbf{K}) dV d\Omega \quad (\text{V.114})$$

La section efficace différentielle de diffusion (Eq.V.112) est finalement donnée par :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} = \frac{k_0^4}{16\pi^2} B(\mathbf{K}) \quad (\text{V.115})$$

La section efficace différentielle de diffusion  $\frac{d\sigma}{d\Omega dV}$  est donc directement proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $B(q)$  prise en  $\mathbf{K} = 2k_0 \sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{u}_K$ , avec  $\mathbf{u}_K = \frac{\mathbf{K}}{K}$ . Notons que la section efficace différentielle ne dépend que de l'angle  $\theta$  (pas

de dépendance vis-à-vis de l'angle  $\phi$ ). Ainsi, dans le cas d'inhomogénéités petites devant la longueur d'onde ( $l_c \ll \lambda$ ), la fonction d'autocorrélation  $B(q)$  n'est non nulle qu'au voisinage de 0 ( $q < l_c \ll \lambda$ ). Son spectre spatial  $B(\mathbf{K})$  est alors quasiment indépendant de  $\mathbf{K}$  et la diffusion est isotrope comme pressenti :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} \simeq \frac{k_0^4}{16\pi^2} B(\mathbf{K} = \mathbf{0}) \quad (\text{V.116})$$

On retrouve bien une évolution de l'intensité diffusée à la puissance 4 de la fréquence dans le régime de Rayleigh. Au contraire, dans le cas d'inhomogénéités grandes devant la longueur d'onde ( $l_c \gg \lambda$ ), c'est cette fois la densité spectrale  $B(2k_0 \sin(\theta/2) \mathbf{u}_{\mathbf{K}})$  qui est piquée en  $\mathbf{0}$  et la diffusion vers l'avant ( $\theta = 0$ ) est nettement privilégiée.

La section efficace totale  $\frac{d\sigma_T}{dV}$  par élément de volume  $dV$  est obtenue en intégrant  $\frac{d\sigma}{d\Omega dV}$  sur l'angle solide  $d\Omega$  :

$$\frac{d\sigma_T}{dV} = \oint_{4\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} \sin\theta d\theta \quad (\text{V.117})$$

En 2D, la section efficace différentielle est définie comme le rapport entre la puissance diffusée par un élément de surface  $dS$  dans l'ouverture angulaire  $d\theta$  et l'intensité de l'onde incidente :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS} = \frac{1}{I_0} \frac{d\mathcal{P}_d(\mathbf{n}_d)}{d\theta dS} \quad (\text{V.118})$$

Par un raisonnement analogue au cas 3D et en utilisant l'expression de l'intensité diffusée en 2D (Eq.V.111), on obtient l'expression suivante pour la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS} = \frac{k_0^3}{4\pi} B(\mathbf{K}) \quad (\text{V.119})$$

En régime de Rayleigh ( $B(\mathbf{K}) = \text{constante}$ ) et dans le cas bidimensionnel, l'intensité diffusée varie comme la puissance 3 de la fréquence.

Quant à la section efficace totale par élément de surface  $dS$ , elle est obtenue en intégrant la section efficace différentielle sur l'angle  $\theta$  :

$$\frac{d\sigma_T}{dS} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS} d\theta \quad (\text{V.120})$$

### Anisotropie de la diffusion

Pour établir l'expression théorique du libre parcours moyen de transport  $l^*$ , nous devons au préalable calculer l'expression théorique du cosinus directeur moyen  $\overline{\cos\theta}$ . Dans un problème 3D,  $\overline{\cos\theta}$  est donné par :

$$\overline{\cos\theta}^{(3D)} = \frac{2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} \cos\theta \sin\theta d\theta}{[d\sigma_T/dV]} \quad (\text{V.121})$$

On peut ensuite expliciter les expressions de  $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV}$  (Eq.V.115) et de  $\frac{d\sigma_T}{dV}$  (Eq.V.117) établies au paragraphe précédent :

$$\overline{\cos\theta}^{(3D)} = \frac{\int_0^\pi B(2k_0 \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi B(2k_0 \sin \frac{\theta}{2}) \sin\theta d\theta} \quad (\text{V.122})$$



Une forme simplifiée de  $\overline{\cos\theta}$  peut enfin être obtenue en effectuant le changement de variables  $K = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2}$  :

$$\overline{\cos\theta}^{(3D)} = \frac{\int_0^{2k_0} B(\mathbf{K}) \left(1 - \frac{K^2}{2k_0^2}\right) K dK}{\int_0^{2k_0} B(\mathbf{K}) K dK} \quad (\text{V.123})$$

Si  $k_0 l_c \ll 1$  (régime de Rayleigh), on a alors  $B(\mathbf{K}) = \text{constante}$  et l'intégrale du numérateur s'annule. On a alors  $\overline{\cos\theta} \simeq 0$  ce qui est caractéristique de la diffusion isotrope. Au contraire si  $k_0 l_c \gg 1$  (régime géométrique),  $B(\mathbf{K})$  est piquée au voisinage de 0 et les deux intégrales de l'équation V.123 sont égales. On trouve donc que  $\overline{\cos\theta} \simeq 1$  d'où une diffusion vers l'avant nettement privilégiée par rapport aux autres directions.

A 2D, le raisonnement est exactement similaire. Le cosinus directeur moyen est défini selon :

$$\overline{\cos\theta}^{(2D)} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS} \cos\theta d\theta}{[d\sigma_T/dS]} \quad (\text{V.124})$$

En utilisant les expressions de  $\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS}$  (Eq.V.119) et de  $\frac{d\sigma_T}{dS}$  (Eq.V.120), on obtient finalement :

$$\overline{\cos\theta}^{(2D)} = \frac{\int_0^{2\pi} B(2k_0 \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \cos\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} B(2k_0 \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) d\theta} \quad (\text{V.125})$$

Maintenant que l'anisotropie de chaque évènement de diffusion (représentée par  $\overline{\cos\theta}$ ) a pu être exprimée théoriquement, nous allons pouvoir en déduire une expression théorique du libre parcours moyen de transport  $l^*$  par l'intermédiaire de l'équation V.91.

### V.3.2 Libre parcours moyen de transport (3D)

Dans cette partie, l'expression théorique du libre parcours moyen de transport  $l^*$  est établie dans le cas tridimensionnel. Les cas des fonctions d'autocorrélation exponentielle et gaussienne sont étudiés. A notre connaissance, des relations explicites liant  $l^*$  aux paramètres statistiques du milieu aléatoire n'ont jamais été établies dans la littérature.

#### Cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle

La fonction d'autocorrélation exponentielle a été définie au chapitre précédent (Eq.V.38). La transformée de Fourier 3D de  $B(r)$  est donnée par :

$$B(\mathbf{K}) = \frac{8\pi\sigma_\mu^2 l_c^3}{(1 + K^2 l_c^2)^2} \quad (\text{V.126})$$

Connaissant  $B(\mathbf{K})$ , les expressions théoriques des sections efficaces différentielle (Eq.V.115) et totale (Eq.V.117) sont ensuite facilement obtenues :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} = \frac{k_0^4 \sigma_\mu^2 l_c^3}{2\pi (1 + 4k_0^2 l_c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \quad (\text{V.127})$$

$$\frac{d\sigma_T}{dV} = \frac{k_0^2 \sigma_\mu^2 l_c}{2} \left[ 1 - \frac{1}{1 + 4k_0^2 l_c^2} \right] \quad (\text{V.128})$$

Ces expressions théoriques (ou des variantes prenant en compte également les fluctuations de densité) ont déjà été largement utilisées en acoustique à des fins de caractérisation des milieux aléatoires. Les deux observables souvent utilisées sont le coefficient de rétrodiffusion  $\frac{d\sigma(\theta=\pi)}{d\Omega dV}$  et le coefficient de transmission. Ce dernier est directement déduit de  $\frac{d\sigma_T}{dV}$ . Sehgal *et al.* [124, 125] ont par exemple étudié quantitativement la relation entre ces deux paramètres et la composition de différents tissus biologiques ainsi que celle du sang. Concernant la caractérisation de l'os trabéculaire, des études expérimentales ont montré le bien fondé d'une modélisation du désordre par la fonction d'autocorrélation [62, 126, 127]. Cette dernière a pu être estimée grâce aux images de microarchitecture 3D de l'os obtenues par tomographie rayons X. La forte dépendance entre la microarchitecture de l'os (*i.e*  $l_c$ ) et les mesures acoustiques de l'intensité diffusée par l'os a été ainsi mise en évidence [62, 126, 127, 128]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes proposés d'aller plus loin que l'étude de l'intensité simplement diffusée pour déduire, de mesures ultrasonores, une information relative à la microarchitecture de milieux désordonnés. Comme nous l'avons montré précédemment, la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  permet en effet d'accéder aux paramètres diffusants de l'onde multidiffusée, comme le libre parcours moyen  $l_e$  et le libre parcours moyen de transport  $l^*$  qui nous intéresse ici.

Pour accéder à  $l^*$ , nous devons caractériser l'anisotropie du milieu en estimant le cosinus directeur moyen  $\overline{\cos\theta}$  lié à chaque évènement de diffusion dans le milieu aléatoire (Eq.V.91).  $\overline{\cos\theta}$  est directement déduit de  $B(\mathbf{K})$  (Eq.V.123) :

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{2k_0^2 l_c^2} \left[ 1 + 2k_0^2 l_c^2 - \frac{(1 + 4k_0^2 l_c^2) \ln(1 + 4k_0^2 l_c^2)}{4k_0^2 l_c^2} \right] \quad (\text{V.129})$$

Cette dernière équation montre que l'anisotropie de la diffusion ne dépend que de la taille relative des inhomogénéités  $l_c$  par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$ . L'anisotropie de la diffusion ne dépend en effet que du produit  $k_0 l_c$  et en aucun cas de l'amplitude des perturbations  $\sigma_\mu$ . Sur la figure V.21(a), nous avons tracé l'évolution de  $1 - \overline{\cos\theta} = \frac{l^*}{l_e}$  en fonction du produit  $k_0 l_c$ . Clairement, on peut distinguer le régime de Rayleigh pour lequel  $\overline{\cos\theta} \rightarrow 0$  (diffusion isotrope et donc  $l^* \simeq l_e$ ) du régime géométrique ( $k_0 l_c \gg 1$ ), dominé par la diffusion vers l'avant ( $\overline{\cos\theta} \rightarrow 1$ , donc  $l^* \gg l_e$ ).

L'expression analytique du libre parcours moyen de transport  $l^*$  peut être déduite de l'expression de  $\overline{\cos\theta}$  (Eq.V.129) et de celle du libre parcours moyen  $l_e$  obtenue dans le cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.47) :

$$l^* = \frac{k_0^2 l_c^2 (1 + 4k_0^2 l_c^2)}{\sigma_\mu^2 k_0^4 l_c^3 \left[ \frac{(1 + 4k_0^2 l_c^2) \ln(1 + 4k_0^2 l_c^2)}{4k_0^2 l_c^2} - 1 \right]} \quad (\text{V.130})$$

Sur la figure V.21(b), on a tracé l'évolution de  $l^*$  en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  pour une fréquence  $f = 3$  MHz et une amplitude de fluctuations  $\sigma_\mu = 0.01$ . Là encore, on distingue bien les deux régimes asymptotiques que sont le régime de Rayleigh et le régime géométrique. Pour  $k_0 l_c \ll 1$ , la diffusion est isotrope et les libres parcours moyens élastique et de transport sont confondus. Pour  $k_0 l_c \gg 1$ , le libre parcours moyen de transport  $l^*$  remonte alors que  $l_e$  continue à diminuer avec  $l_c$ . Comme vu précédemment, la mesure expérimentale

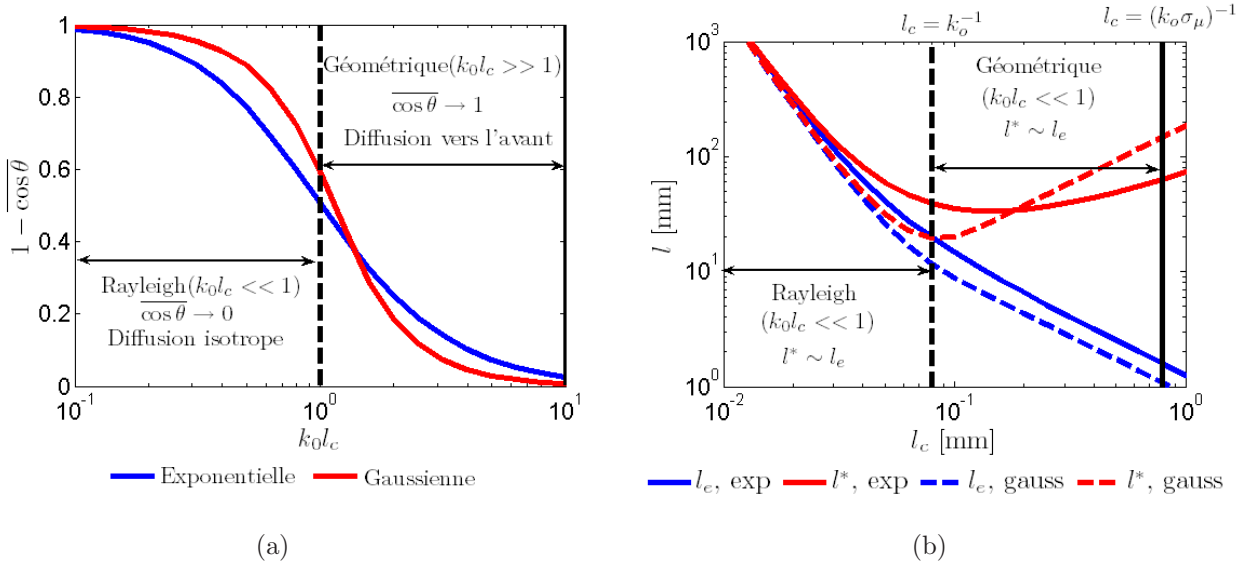


FIG. V.21: (a) Evolution de  $(1 - \overline{\cos \theta})$  en fonction de  $k_0 l_c$ . (b) Evolution de  $l_e$  et  $l^*$  en fonction de  $l_c$  ( $\sigma_\mu = 0.01$ ,  $f = 3$  MHz).

du rapport entre  $l^*$  et  $l_e$  (ou bien entre  $D$  et  $l_e$ ) peut être extrêmement intéressante puisqu'elle est indépendante de l'amplitude des fluctuations du milieu et qu'elle ne dépend que du produit  $k_0 l_c$ . La fréquence étant fixée par l'opérateur, la mesure de  $\frac{l^*}{l_e}$  permettrait d'accéder directement à la longueur de corrélation  $l_c$  du milieu et donc à sa microarchitecture.

### Cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne. Afin de comparer ce cas avec celui d'une autocorrélation exponentielle, on considérera la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  définie par l'équation V.70. La transformée de Fourier 3D de  $B(r)$  est donnée par :

$$B(\mathbf{K}) = 8\pi\sigma_\mu^2 l_c^3 \exp\left(-\frac{K^2 l_c^2}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (\text{V.131})$$

En injectant cette expression de  $B(\mathbf{K})$  dans les équations V.115 et V.117, on en déduit les expressions des sections efficaces différentielle et totale :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega dV} = \frac{k_0^4 \sigma_\mu^2 l_c^3}{2\pi} \exp\left(-\frac{4k_0^2 l_c^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (\text{V.132})$$

$$\frac{d\sigma_T}{dV} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}} k_0^2 \sigma_\mu^2 l_c}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{4k_0^2 l_c^2}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right)\right] \quad (\text{V.133})$$

On peut comparer l'expression théorique de  $\frac{d\sigma_T}{dV}$  avec celle obtenue dans le cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.128) en considérant leurs comportements asymptotiques. Les résultats sont présentés sur le tableau V.3.

Comme pour le libre parcours moyen  $l_e$  (Tab.V.1), les deux fonctions d'autocorrélation (exponentielle et gaussienne) donnent lieu au même résultat en régime de Rayleigh. Pour  $k_0 l_c \gg 1$ ,

Fonction d'autocorrélation	Rayleigh $(k_0 l_c)^2 \ll 1$	Géométrique $(k_0 l_c)^2 \gg 1$
$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{r}{l_c}\right)$	$\frac{d\sigma_T}{dV} \sim 2\sigma_\mu^2 k_0^4 l_c^3$	$\frac{d\sigma_T}{dV} \sim \frac{1}{2}\sigma_\mu^2 k_0^2 l_c$
$B(r) = \sigma_\mu^2 \exp\left(-\frac{\pi^{1/3} r^2}{4l_c^2}\right)$	$\frac{d\sigma_T}{dV} \sim 2\sigma_\mu^2 k_0^4 l_c^3$	$\frac{d\sigma_T}{dV} \sim \frac{\pi^{1/3}}{2}\sigma_\mu^2 k_0^2 l_c$

TAB. V.3: Evolution de la section efficace totale de diffusion  $\frac{d\sigma_T}{dV}$  en fonction des paramètres statistiques du milieu ( $l_c$ ,  $\sigma_\mu$ ) et du nombre d'onde ( $k_0$ ) pour un milieu aléatoire continu tridimensionnel.

les deux sections efficaces diffèrent d'un facteur  $\pi^{1/3} \simeq 1,5$  (le même que pour le libre parcours moyen). On retrouve dans les deux régimes asymptotiques la relation directe qui existe entre le libre parcours moyen  $l_e$  et la section efficace totale de diffusion  $\frac{d\sigma_T}{dV}$  :

$$l_e \simeq \left[ \frac{d\sigma_T}{dV} \right]^{-1} \quad (\text{V.134})$$

Cette relation est analogue à celle trouvée pour les milieux discrets, en régime dilué [20] :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_D} \quad (\text{V.135})$$

où  $n$  représente la concentration en diffuseurs et  $\sigma_D$  la section efficace totale d'un diffuseur. Dans le cas discret on a en effet  $\frac{d\sigma_T}{dV} = n\sigma_D$ . Dans le cas de la fonction d'autocorrélation gaussienne, la relation V.134 est vraie quelle que soit  $k_0 l_c$  alors qu'elle n'est pas strictement retrouvée dans le cas de la fonction d'autocorrélation exponentielle. Cela s'explique par le fait que la relation V.135 est démontrée dans le cas discret sous couvert de l'approximation V.72 qui consiste à négliger la variation de la partie réelle du nombre d'onde effectif  $k_e$ . Cette approximation a été faite dans le cas de l'autocorrélation gaussienne alors qu'un calcul plus exact de  $l_e$  a été mené dans le cas de l'autocorrélation exponentielle.

L'anisotropie de la diffusion peut être estimée analytiquement en appliquant l'équation V.122 au cas de la fonction d'autocorrélation gaussienne définie par Eq.V.70. On obtient :

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{\tanh\left(\frac{2k_0^2 l_c^2}{\pi^{1/3}}\right)} - \frac{\pi^{1/3}}{2k_0^2 l_c^2} \quad (\text{V.136})$$

L'évolution de  $\overline{\cos \theta}$  en fonction de  $k_0 l_c$  est comparée à celle obtenue dans le cas d'une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.129) sur la figure V.21(a). Les deux courbes présentent des formes similaires. Cependant, celle correspondant à la fonction d'autocorrélation gaussienne présente une pente plus abrupte lorsque  $\overline{\cos \theta}$  passe de 0 à 1. En régime de Rayleigh, la diffusion est plus isotrope dans le cas de la fonction d'autocorrélation gaussienne. Dans le régime géométrique, les rôles sont inversés et la diffusion vers l'avant est moins importante dans le cas exponentiel. Une explication qualitative peut être faite en analysant la forme des deux fonctions d'autocorrélation (Fig.V.14). Pour  $k_0 l_c \ll 1$ , c'est le comportement de  $B(r)$  aux grandes

distances  $r$  qui fait la différence. La queue de la fonction exponentielle (corrélations longues portées) a tendance à privilégier un peu plus la diffusion vers l'avant que les autres directions, ce qui explique l'anisotropie un peu plus importante observée pour la fonction d'autocorrélation exponentielle en régime de Rayleigh (Fig.V.21(a)). Pour  $k_0 l_c \gg 1$ , c'est cette fois le comportement autour de 0 de  $B(r)$  qui prime. La forme plus piquée de la fonction d'autocorrélation exponentielle au voisinage de  $r = 0$  résulte en une diffusion un peu moins piquée vers l'avant que celle obtenue dans le cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne. Physiquement, cela indique, qu'à volume d'hétérogénéités moyen égal, les milieux dont la distribution en taille des inhomogénéités est plus dispersée seront caractérisés par une anisotropie plus importante en régime de Rayleigh par rapport aux milieux dont la distribution en taille des hétérogénéités est plus resserrée (fonction d'autocorrélation gaussienne). Le comportement est inversé en régime géométrique.

Le libre parcours moyen de transport  $l^*$  peut être déduit de l'expression de  $\overline{\cos \theta}$  (Eq.V.136) et de celle du libre parcours moyen  $l_e$  obtenue dans le cas d'une fonction d'autocorrélation gaussienne (Eq.V.75) :

$$l^* = \frac{2}{\pi^{1/3} \sigma_\mu^2 k_0^2 l_c} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{4k_0^2 l_c^2}{\pi^{1/3}} \right) \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{\tanh \left( \frac{2k_0^2 l_c^2}{\pi^{1/3}} \right)} + \frac{\pi^{1/3}}{2k_0^2 l_c^2} \right]^{-1} \quad (\text{V.137})$$

Sur la figure V.21(b), on compare cette évolution théorique de  $l^*$  en fonction de la longueur de corrélation  $l_c$  au cas de la fonction d'autocorrélation exponentielle. La fonction d'autocorrélation gaussienne mène à un libre parcours moyen de transport plus faible en régime de Rayleigh. Les évènements de diffusion associés sont en effet caractérisés par une plus grande isotropie comme vu précédemment (Fig.V.21(a)). Pour  $k_0 l_c \gg 1$ , au contraire, la multidiffusion est plus importante pour des milieux dont la distribution en taille des hétérogénéités est plus dispersée (fonction d'autocorrélation exponentielle).

### V.3.3 Confrontation entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales dans l'os

Maintenant que la relation entre la microarchitecture et les paramètres diffusants a été établie, nous allons pouvoir confronter la théorie aux résultats expérimentaux obtenus sur l'os. Pour avoir accès à une fonction d'autocorrélation typique de l'os, nous avons utilisé les images de tomographie rayons X utilisées par Padilla *et al.* [126] pour leurs travaux reliant la microstructure 3D au coefficient de rétrodiffusion  $\frac{d\sigma(\theta=\pi)}{d\Omega dV}$ . Sur la figure V.22 sont présentées une image 3D de la microarchitecture d'un morceau d'os trabéculaire et une coupe 2D de celle-ci. A partir de cette coupe 2D, une estimation de la fonction d'autocorrélation du milieu  $B(r)$  peut être obtenue. Une fois connue cette fonction d'autocorrélation, on va pouvoir comparer nos mesures expérimentales du coefficient de diffusion  $D$  avec les prédictions théoriques. On discutera également du choix d'un modèle 2D ou 3D de propagation des ultrasons dans l'os.

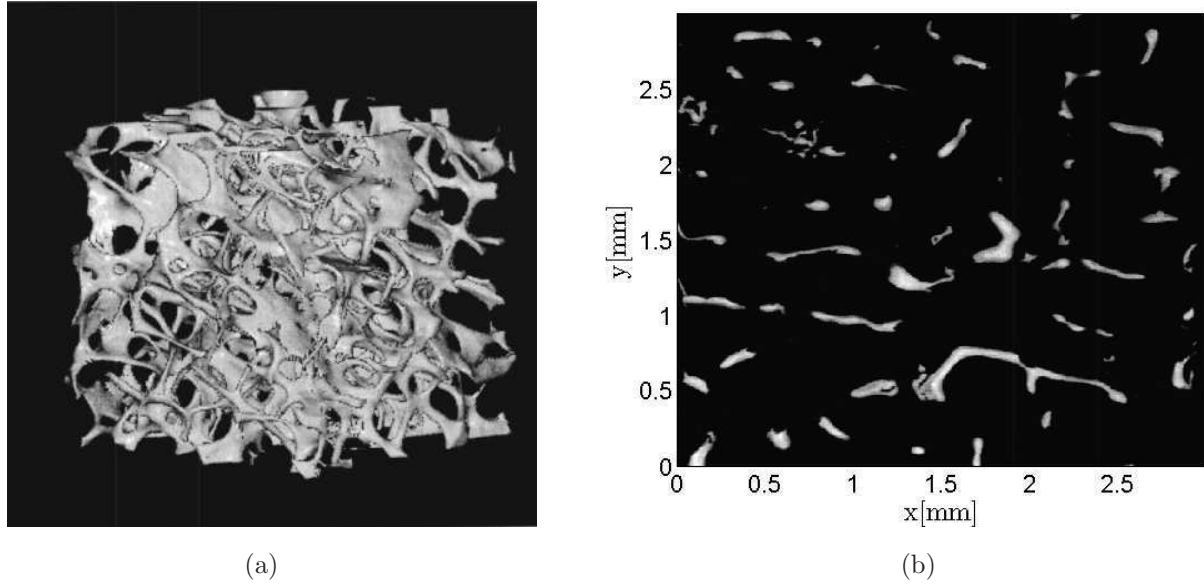


FIG. V.22: Images de la microarchitecture d'un morceau d'os trabéculaire utilisées par Padilla *et al.* [126]. (a) Image 3D de la microarchitecture (le volume reconstruit est de  $6,6 \times 6,6 \times 6,6 \text{ mm}^3$ ). (b) Coupe 2D d'un échantillon d'os trabéculaire.

### Fonction d'autocorrélation

Pour estimer la fonction d'autocorrélation de  $B(r)$  à partir des images de microarchitecture de l'os (Fig.V.22), on s'est appuyé sur la procédure employée par Padilla *et al.* [126]. A partir de l'image 2D  $I(x, y)$  de la figure V.22, une fonction binaire  $I'(x, y)$  est construite :

$$I'(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pour chaque pixel appartenant à l'os} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.138})$$

On peut ensuite en déduire la carte de vitesse  $c(\mathbf{r})$  associée à l'image de la micro-architecture de l'os. Pour cela, nous allons considérer que les célérités des ondes acoustiques dans l'eau et l'os sont données respectivement par  $c_f = 1,5 \text{ mm}/\mu\text{s}$  et  $c_b = 3,2 \text{ mm}/\mu\text{s}$ . La valeur numérique considérée pour  $c_b$  est déduite de différentes mesures expérimentales de la célérité des ondes dans l'os trabéculaire [126]. La carte de vitesses associée à la fonction  $I'(\mathbf{r})$  est donnée par :

$$c(\mathbf{r}) = (c_b - c_f)I'(\mathbf{r}) + c_f \quad (\text{V.139})$$

Enfin, le potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  est déduit du champ de vitesses  $c(\mathbf{r})$  en considérant son expression donnée par Eq.V.11 et en négligeant les variations de densité :

$$\mu(\mathbf{r}) = \frac{c_0^2}{c(\mathbf{r})^2} - 1 \quad (\text{V.140})$$

L'étape suivante consiste à choisir la vitesse  $c_0$  du milieu de référence. Cette vitesse est obtenue en imposant le fait que le potentiel de perturbation doit être à moyenne nulle :  $\langle \mu(\mathbf{r}) \rangle = 0$ .  $c_0$  est donc donnée par :

$$c_0 = \left[ \left\langle \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \right\rangle_{\mathbf{r}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{V.141})$$



En injectant cette expression de  $c_0$  dans l'équation V.140, on vérifie bien que  $\langle \mu(\mathbf{r}) \rangle = 0$ . Notons que Padilla *et al.* [126] ont choisi dans leurs travaux de considérer plutôt la vitesse de l'eau comme vitesse de référence. Ce choix était justifié car les auteurs s'intéressaient à l'intensité diffusée par l'os dans l'eau (notamment au coefficient de rétrodiffusion); le résultat dépend alors du choix du fluide environnant. En revanche, ici le libre parcours moyen  $l_e$  est un paramètre intrinsèque, il est donc nécessaire de prendre comme référence la vitesse annulant la moyenne du potentiel  $\mu(\mathbf{r})$  plutôt que la vitesse du son du milieu environnant.

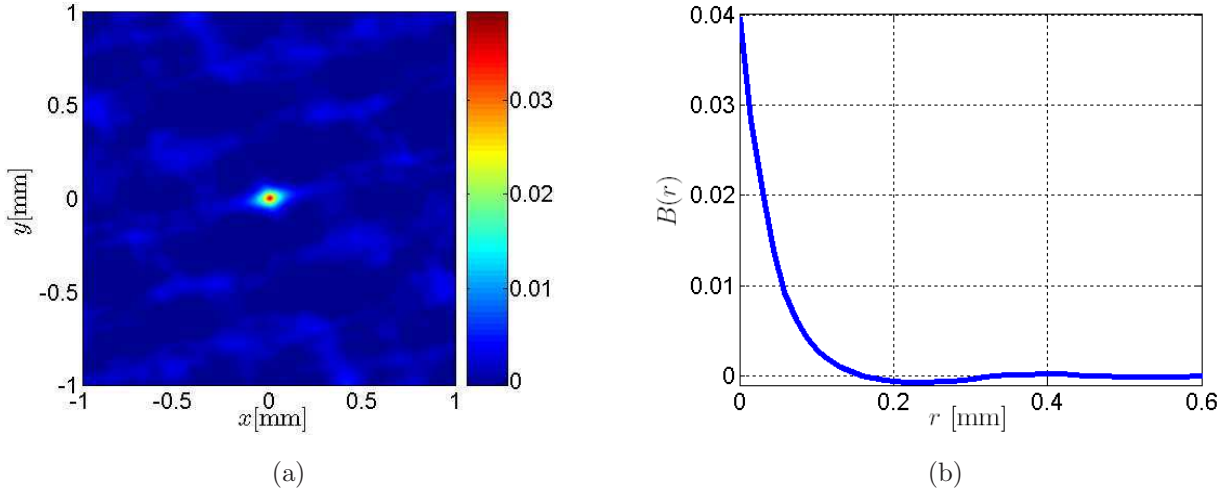


FIG. V.23: Fonction d'autocorrélation du potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$ . (a) Fonction d'autocorrélation  $B(\mathbf{r})$  construite à partir de l'image 2D de l'os de la figure V.22(b). (b) Fonction d'autocorrélation  $B(r)$  moyennée angulairement.

Une fois la vitesse de référence définie, on peut déduire la fonction d'autocorrélation  $B(\mathbf{r}) = \langle \mu(\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}'}$  à partir de la carte du potentiel de perturbations  $\mu(\mathbf{r})$ . Celle-ci est présentée sur la figure V.23(a). Comme  $B(\mathbf{r})$  a été construite à partir de la seule coupe 2D à notre disposition (Fig.V.22(b)), la moyenne effectuée n'est certainement pas suffisante. On a donc supposé l'isotropie de l'os dans le plan  $(x, y)$  ce qui paraît être une hypothèse vraisemblable, et moyenné la fonction d'autocorrélation  $B(\mathbf{r})$  angulairement pour finalement obtenir une fonction d'autocorrélation  $B(r)$  ne dépendant que de la distance  $r$ . La fonction d'autocorrélation ainsi estimée est présentée sur la figure V.23(b).  $B(r)$  présente un pic autour de  $r = 0$  de largeur caractéristique  $\Delta r = 100 \mu\text{m}$ . Elle tend ensuite vers 0 à l'infini tout en oscillant; ces oscillations sont liées physiquement au volume d'exclusion qui entoure chaque bout d'os.

### Anisotropie de la diffusion par l'os

On s'intéresse dans un premier temps à l'anisotropie de la diffusion dans l'os. On prend l'exemple d'une propagation bidimensionnelle des ultrasons. Les sections efficaces différentielle  $(\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta dS})$  et totale  $(\frac{d\sigma_T}{dS})$  sont déduites respectivement des équations V.119 et V.120. On peut

ensuite en déduire la fonction de phase  $p$  définie par :

$$p(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)/d\theta dS}{d\sigma_T/dS} \quad (\text{V.142})$$

Sur la figure V.24, la fonction de phase  $p(\theta)$  est représentée en fonction de la fréquence  $f$  et de l'angle  $\theta$ .

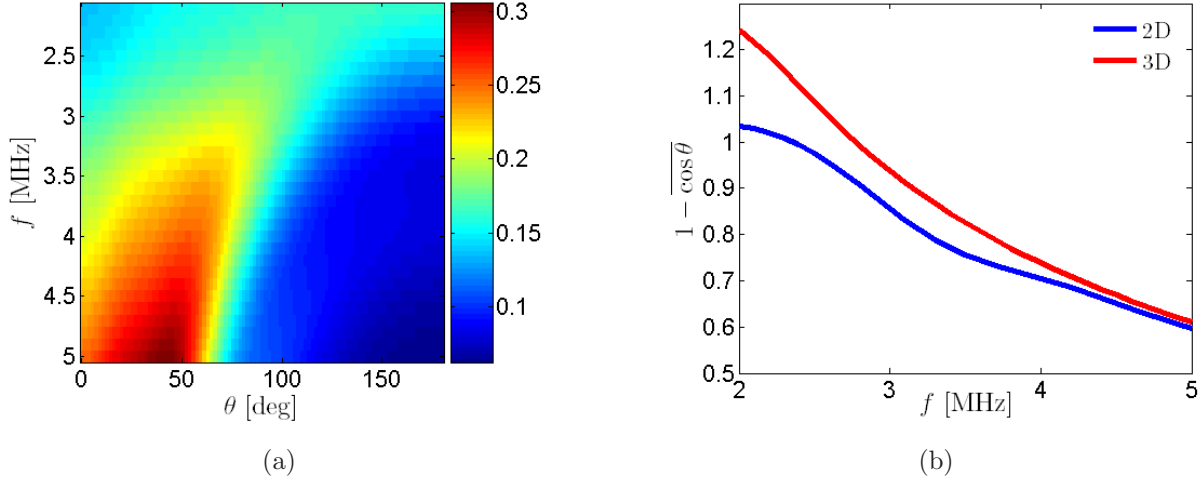


FIG. V.24: Anisotropie de la diffusion. (a) Fonction de phase  $p(\theta)$  (Eq.V.142) en fonction de l'angle  $\theta$  et de la fréquence  $f$  dans le cas 2D. (b) Evolution de  $1 - \overline{\cos\theta}$  en fonction de la fréquence  $f$  dans les cas 2D et 3D.

Contrairement à ce qu'on avait obtenu pour des fonctions d'autocorrélation classiques, la diffusion n'est pas strictement isotrope aux basses fréquences. Aux hautes fréquences, la diffusion n'est pas piquée vers l'avant mais présente un maximum au voisinage de  $\theta = 40^\circ$ . On peut déduire de cette fonction de phase  $p(\theta)$  le cosinus directeur moyen  $\overline{\cos\theta}$  qui caractérise l'anisotropie de la diffusion (Eqs.V.124 et V.121). Cette quantité permet d'accéder au ratio entre le libre parcours moyen élastique  $l_e$  et le libre parcours moyen de transport  $l^*$  puisque  $1 - \overline{\cos\theta} = \frac{l_e}{l^*}$ . L'évolution théorique de  $1 - \overline{\cos\theta}$  est présentée dans les cas 2D et 3D sur la figure V.24(b). Une observation assez surprenante est le fait que  $1 - \overline{\cos\theta}$  puisse être supérieur à 1 à basse fréquence, autrement dit que  $l^*$  soit inférieur à  $l_e$ . Cela est dû au volume d'exclusion qui entoure chaque morceau d'os. En effet, comme nous l'avons déjà vu, ce volume d'exclusion conduit la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  à être négative par endroit (en dehors du pic central) (Fig.V.22). Ces corrélations longue portée ont une grande influence sur la diffusion vers l'avant puisque l'intensité transmise dans la direction  $\theta = 0$  est directement proportionnelle à la transformée de Fourier de  $B(r)$  prise en  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  (Eqs. V.115 et V.119). Or,  $B(\mathbf{K} = \mathbf{0})$  dépend fortement des corrélations à longue portée. Celles-ci conduisent donc, lorsqu'elles sont négatives, à des interférences destructives dans la direction  $\theta = 0$ . Ceci implique une décroissance de  $p(\theta)$  au voisinage de  $\theta = 0$  à basse fréquence et la possibilité d'avoir un cosinus directeur moyen négatif (Fig.V.24). L'énergie rétrodiffusée est alors plus importante que celle transmise vers l'avant. Notons également que cet effet lié au volume d'exclusion est plus sensible dans le cas 3D comme l'illustre la figure V.24(b).



Paramètres diffusants

Le libre parcours moyen élastique est déduit de la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  en résolvant itérativement l'équation suivante :

$$[k_e^{(i)}]^2 = k_0^2 - k_0^4 \int G_0(\mathbf{r})B(\mathbf{r}) \exp(-j\mathbf{k}_e^{(i-1)} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{V.143})$$

A l'itération 0, on prend  $k_e^{(0)} = k_0$ . Résoudre cette équation revient à chercher les pôles de la fonction de Green effective dans l'approximation de Bourret (Eq.V.34). Comme on a supposé la fonction d'autocorrélation isotrope, cette équation se simplifie, dans les cas 2D et 3D respectivement, par :

$$[k_e^{(i)}]^2 = k_0^2 + j \frac{\pi k_0^4}{2} \int_0^\infty B(r) H_0^{(1)}(k_0 r) J_0(k_e^{(i-1)} r) r dr, \text{ en 2D} \quad (\text{V.144})$$

$$[k_e^{(i)}]^2 = k_0^2 + \frac{k_0^4}{k_e^{(i-1)}} \int_0^\infty B(r) \exp(jk_0 r) \sin(k_e^{(i-1)} r) dr, \text{ en 3D} \quad (\text{V.145})$$

Au bout de quelques itérations, la solution (2D ou 3D) converge vers le nombre d'onde  $k_e$  recherché. Le libre parcours moyen est ensuite déduit facilement puisque  $l_e = [2\Im\{k_e\}]^{-1}$ . On a donc calculé ici l'évolution du libre parcours moyen en fonction de la fréquence  $f$ . Les résultats obtenus en 2D et 3D sont présentés sur la figure V.25(a).

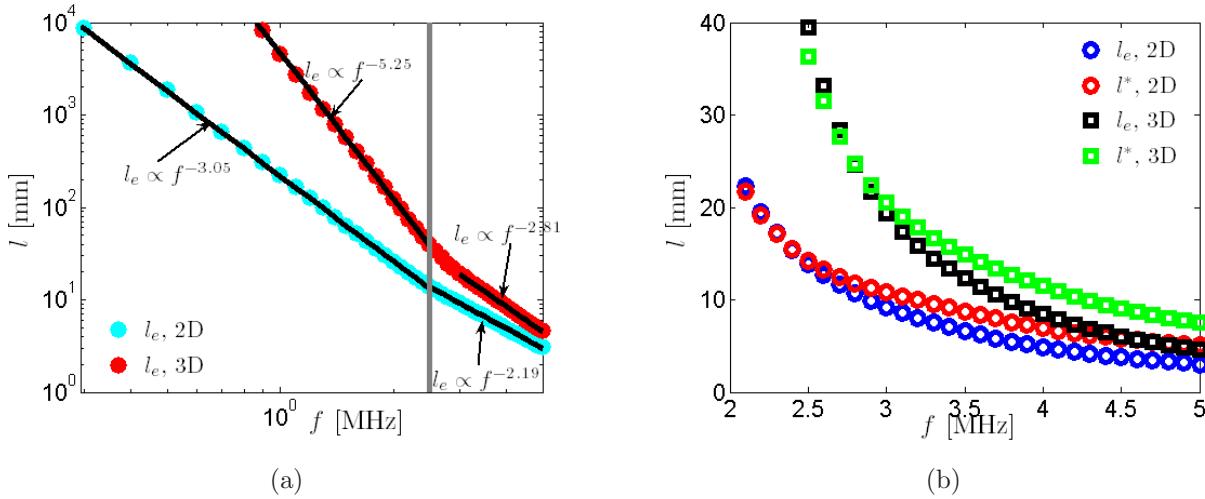


FIG. V.25: Paramètres diffusants  $l_e$  et  $l^*$  obtenus en considérant la fonction d'autocorrélation  $B(r)$  caractéristique de l'os trabéculaire (voir Fig.V.23(b)). (a) Evolution de  $l_e$  en fonction de la fréquence  $f$  dans les cas 2D et 3D. Les échelles des deux axes sont logarithmiques. (b) Evolution de  $l_e$  et  $l^*$  en fonction de la fréquence  $f$  dans les cas 2D et 3D. Les échelles des deux axes sont linéaires.

On retrouve les deux régimes asymptotiques (Rayleigh et géométrique) que l'on avait mis en avant lors de l'étude théorique. Par contre, les lois de puissance du libre parcours moyen vis à vis de la fréquence diffèrent de ce que l'on a obtenu avec des fonctions d'autocorrélation

gaussienne ou exponentielle (principalement pour le modèle 3D). Cela est dû au volume d'exclusion qui entoure chaque morceau d'os. Pour le modèle 3D, on observe, en régime de Rayleigh ( $f < 2,5$  MHz), une évolution en  $f^{-5,2}$  du libre parcours moyen élastique au lieu de l'exposant  $-4$  obtenu en considérant des fonctions d'autocorrélation dites *classiques*. A 2D, l'effet du volume d'exclusion est nettement moindre puisqu'on obtient un exposant caractéristique proche de  $-3$ , comme on l'avait prévu théoriquement. En régime géométrique ( $f > 2,5$  MHz), les lois de puissance diffèrent également de ce qu'on avait établi précédemment avec des fonctions d'autocorrélation *classiques* (évolution en  $f^{-2}$ ). Ce résultat est très intéressant puisqu'on a montré l'influence importante du volume d'exclusion vis-à-vis du comportement fréquentiel du libre parcours moyen élastique.

En injectant les valeurs de  $1 - \overline{\cos\theta}$  trouvées au paragraphe précédent dans l'équation V.91, on peut déduire le libre parcours moyen  $l^*$ . L'évolution fréquentielle de  $l^*$  est présentée sur la figure V.25(b). Dans la bande de fréquence  $[2,5 ; 5]$  MHz typique en imagerie médicale,  $l^*$  est compris entre 5 et 15 mm en 2D et entre 7,5 et 40 mm en 3D. Ces valeurs typiques de  $l^*$  font que la multidiffusion dans l'os peut facilement être observée dans cette gamme de fréquence pour des tranches d'os d'épaisseur  $L \simeq 10$  mm, comme Derode *et al.* [46] l'ont mis en évidence expérimentalement. Une fois  $l^*$  connu, on peut en déduire facilement une estimation du coefficient  $D$  grâce à l'équation V.92 en considérant la vitesse de transport proche de la vitesse effective du milieu :  $v_E \simeq c_0$ . L'évolution fréquentielle de  $D$  est présentée sur la figure suivante :

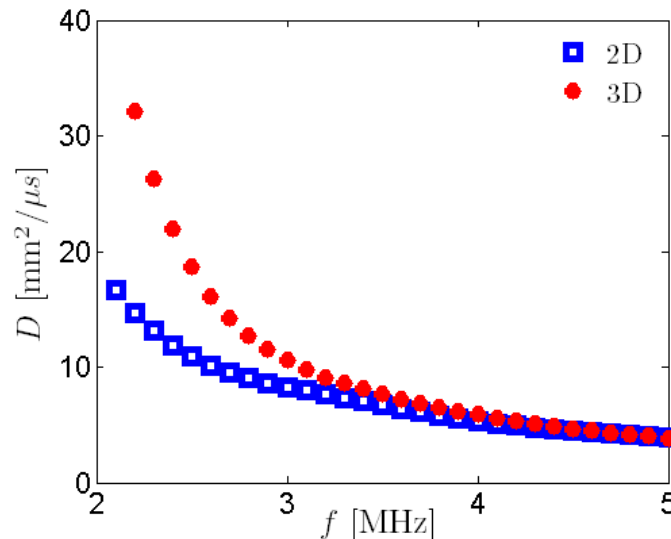


FIG. V.26: Evolution de  $D$  en fonction de la fréquence  $f$  dans les cas 2D et 3D.

A partir de 3 MHz, les modèles 2D et 3D fournissent les mêmes résultats théoriques pour le coefficient de diffusion  $D$ . Les valeurs obtenues pour  $D$  dans la gamme de fréquence  $[2,5 ; 3,5]$  MHz s'étalent de 6 à 15 mm<sup>2</sup>/μs. On retrouve donc typiquement les valeurs de  $D$  que l'on a mesurées expérimentalement dans l'os *via* l'étude de la croissance du halo diffusif (voir Chap.I.5). En effet, le coefficient de diffusion moyen mesuré dans la tranche d'os est de

9 mm<sup>2</sup>/μs. Il faut toutefois noter que cette comparaison entre expérience et théorie ne peut être que qualitative. En effet, les valeurs théoriques de  $D$  ont été calculées à partir d'une fonction d'autocorrélation déduite d'un échantillon typique d'os trabéculaire, mais différent de celui étudié expérimentalement, même si les caractéristiques globales sont similaires.

Concernant le choix d'un modèle 2D ou 3D, nous nous porterions naturellement vers le second. En effet, même si l'émission et la réception des ondes ultrasonores s'effectuent dans un plan, les ondes multidiffusées dans l'os n'ont *a priori* aucune raison de rester dans ce plan lorsqu'elles se propagent. Du fait de l'isotropie de la microstructure de l'os qui semble vérifiée au vue de la figure V.22, la multidiffusion dans l'os est tridimensionnelle et donc le modèle 3D convient à l'étude de la multidiffusion dans l'os trabéculaire. Par ailleurs, le fait que l'émission et la réception des ondes ultrasonores soient effectuées dans un plan ne modifie pas le profil spatial de l'intensité incohérente, celui-ci s'étalant toujours spatialement en  $\sqrt{Dt}$ , qu'il soit mesuré dans une configuration 2D ou 3D.

## Discussion

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le modèle théorique développé dans ce chapitre donne des résultats en bon accord qualitatif avec les mesures expérimentales du coefficient de diffusion  $D$  dans l'os trabéculaire. Néanmoins, plusieurs hypothèses du modèle théorique ne sont pas strictement vérifiées dans le cas de l'os trabéculaire. Ces déviations par rapport aux hypothèses du modèle théorique sont ici détaillées et leur influence est discutée.

Premièrement, notre étude est fondée sur un modèle liquide-liquide régi par une équation d'onde scalaire, alors que l'os est un solide et que donc les ondes transverses peuvent s'y propager. Une étude théorique plus rigoureuse consisterait à partir d'une équation d'ondes vectorielle et de considérer alors une fonction de Green dyadique [134]. Cependant, ici, nous sommes dans un cas plus simple de milieu fluide/solide puisque le milieu enrobant l'os est de l'eau. Dans ce cas, la prise en compte des ondes élastiques n'est *a priori* nécessaire que dans le calcul des sections efficaces différentielle et totale de diffusion, à l'instar de ce qui est fait pour étudier théoriquement la multidiffusion dans les échantillons de tiges [44].

La deuxième déviation par rapport aux hypothèses du modèle théorique est le supposé caractère gaussien du potentiel de perturbation (Eq.V.20). Dans le cas de l'os, cette hypothèse n'est clairement pas vérifiée puisque la distribution du potentiel de perturbation est *binnaire* : dans l'eau  $\mu = \frac{c_0^2}{c_f^2} - 1$ , dans l'os  $\mu = \frac{c_0^2}{c_b^2} - 1$ . Même si on a forcé la mise à zéro de la moyenne du potentiel de perturbation en ajustant la vitesse de référence  $c_0$  (Eq.V.141), les cumulants d'ordre impair du potentiel de perturbation ne sont pas nuls (hormis celui d'ordre 1). Cela est donc contraire à ce que l'on suppose dans nos calculs théoriques (Eq.V.21). La prise en compte du moment d'ordre 3 du potentiel de perturbation est donc nécessaire mais complique singulièrement les calculs puisqu'il nous faudrait définir une seconde fonction d'autocorrélation dépendant de trois positions. Aucune résolution analytique du problème n'est alors possible, même dans le cas de fonctions d'autocorrélation *classiques*. Une résolution numérique serait par ailleurs très gourmande en temps de calcul.

D'autres hypothèses comme l'isotropie (Eq.V.35) et l'invariance par translation du milieu (Eq.V.28) doivent également être vérifiées. La possibilité de mesurer un coefficient de diffusion  $D$  local permet de considérer des zones où l'os est statistiquement homogène. La deuxième hypothèse d'invariance par translation ne pose donc pas de problème. L'isotropie de l'os semble également vérifiée à première vue lorsque l'on observe les exemples de microstructures constituant l'os trabéculaire sur la figure V.22. De toute façon, une éventuelle anisotropie de la fonction d'autocorrélation peut facilement être prise en compte numériquement.

Enfin, le fait de négliger en partie des variations de densité dans l'expression du potentiel de perturbation  $\mu(\mathbf{r})$  (Eq.V.11) peut également être source d'une légère déviation entre expérience et théorie. Comme nous l'avons vu précédemment, le terme lié aux fluctuations de densité  $(\frac{1}{k_0^2 \rho_0} \nabla \delta \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla)$  devrait être pris en compte. Pour cela, on peut se référer à la thèse de Jones [132] où le calcul de l'énergie propre  $\Sigma$  est réalisé en conservant le terme de perturbation lié aux fluctuations de densité.

Ainsi, le modèle aléatoire continu exposé dans ce chapitre présente certaines hypothèses qui pourraient s'avérer insuffisantes vis-à-vis de l'étude de la diffusion multiple des ultrasons dans l'os trabéculaire. Une campagne systématique sur divers échantillons d'os pourrait être menée afin de comparer quantitativement les mesures expérimentales de  $D$  fondées par exemple sur la croissance du halo diffusif, avec les prédictions théoriques. Cela dit, comme on l'a illustré en s'appuyant sur un exemple de microstructure typique trouvée dans l'os trabéculaire (Fig.V.22), le modèle fournit déjà des valeurs théoriques du coefficient de diffusion en bon accord qualitatif avec nos mesures expérimentales. D'autre part, le modèle continu a permis de mettre en évidence l'influence importante du *volume d'exclusion* sur les paramètres diffusants.

## V.A Annexes du chapitre V

### V.A.1

Le but de cet annexe est de déterminer la validité de l'approximation de Bourret en régime de faibles perturbations. Pour cela, nous considérons l'approximation à l'ordre 2 de l'énergie propre (*cf* Fig.V.11) :

$$\Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \simeq k_0^4 \overline{G}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

La nouvelle fonction de Green moyenne  $\overline{G}^{(2)}$  est donc donnée par :

$$\overline{G}^{(2)}(\omega, k) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 + \frac{k_0^4}{k} \int B(r) e^{jk_e^{(1)} r} \sin(kr) dr}$$

Pour trouver le nombre d'onde effectif  $k_e^{(2)}$  pôle de  $\overline{G}^{(2)}(\omega, k)$ , on peut considérer la self énergie en  $k = k_e^{(1)}$  :

$$[k_e^{(2)}]^2 = k_0^2 + \frac{k_0^4}{k_e^{(1)}} \int B(r) e^{jk_e^{(1)} r} \sin(k_e^{(1)} r) dr \quad (\text{V.146})$$

On peut la comparer avec l'équation vérifiée par  $[k_e^{(1)}]^2$  :

$$[k_e^{(1)}]^2 = k_0^2 + k_0^3 \int B(r) e^{jk_0 r} \sin(k_0 r) dr \quad (\text{V.147})$$

On définit maintenant les quantités  $\Delta k_e^{(1)}$  et  $\Delta k_e^{(2)}$  telles que  $k_e^{(1)} = k_0 + \Delta k_e^{(1)}$  et  $k_e^{(2)} = k_0 + \Delta k_e^{(2)}$ . Ces quantités représentent donc les variations du nombre d'onde dues respectivement à la prise en compte du terme  $\Sigma_1(\omega, k)$  (approximation de Bourret), et de la suite infinie de diagrammes représentée sur la figure V.11. Le but de ce paragraphe est de savoir à quelle condition l'approximation de Bourret est suffisante pour tenir des processus de diffusion. Autrement dit, dans quel régime de perturbations  $\Delta k_e^{(1)}$  (correction apportée par l'approximation de Bourret) reste grand devant  $k_e^{(2)} - k_e^{(1)}$  (correction apportée par l'approximation suivante) ?

On va calculer dans un premier temps la quantité  $[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2$ . Pour simplifier le calcul, on peut déjà supposer que  $\Delta k_e^{(1)} \ll k_0$ , ce qui est réalisé sous la condition de l'équation V.50. Dans ce cas, on a  $\frac{1}{k_e^{(1)}} \simeq \frac{1}{k_0} - \frac{\Delta k_e^{(1)}}{k_0^2}$ . On va donc substituer  $\frac{1}{k_e^{(1)}}$  par  $\frac{1}{k_0} - \frac{\Delta k_e^{(1)}}{k_0^2}$  dans l'expression de  $[k_e^{(2)}]^2$  (Eq.V.147). Si on remplace la fonction sinus par une différence d'exponentielles complexes en utilisant les formules d'Euler, on obtient finalement :

$$[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2 = \frac{k_0^3}{2j} \int B(r) [e^{2jk_e^{(1)}r} - e^{2jk_0r}] dr - \frac{k_0^2 \Delta k_e^{(1)}}{2j} \int B(r) [e^{2jk_e^{(1)}r} - 1] dr$$

Pour estimer cette différence, on va de nouveau considérer une fonction d'autocorrélation exponentielle (Eq.V.38). Les intégrales peuvent ainsi être facilement calculées, et on obtient :

$$[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2 = \Delta k_e^{(1)} \left[ \frac{k_0^3 \sigma_\mu^2}{(\alpha - 2jk_0)(\alpha - 2jk_e^{(1)})} - \frac{k_0^2 k_e^{(1)} \sigma_\mu^2}{\alpha(\alpha - 2jk_0)} \right]$$

Puisqu'on estime la différence  $[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2$  au 1er ordre en  $\Delta k_e^{(1)}$ , on peut approcher  $k_e^{(1)}$  par  $k_0$  pour le terme entre crochets de l'équation précédente :

$$[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2 \simeq j \Delta k_e^{(1)} \frac{2k_0^4 \sigma_\mu^2}{\alpha(\alpha - 2jk_0)^2}$$

Et puisque

$$[k_e^{(2)}]^2 - [k_e^{(1)}]^2 = (k_e^{(2)} - k_e^{(1)}) (k_e^{(2)} + k_e^{(1)}) \simeq 2k_0 (k_e^{(2)} - k_e^{(1)})$$

on en déduit que :

$$k_e^{(2)} - k_e^{(1)} \simeq j \Delta k_e^{(1)} \frac{k_0^3 \sigma_\mu^2}{\alpha(\alpha - 2jk_0)^2} \quad (\text{V.148})$$

Pour que l'approximation de Bourret puisse être considérée comme suffisante pour modéliser la décroissance de l'onde cohérente, il faut donc que le module de la correction  $|\Delta k_e^{(1)}|$  liée à l'approximation de Bourret soit grand devant celui de la correction apportée par l'approximation suivante (*i.e.*,  $k_e^{(2)} - k_e^{(1)}$ ) :

$$\left| \frac{k_e^{(2)} - k_e^{(1)}}{\Delta k_e^{(1)}} \right| \simeq \frac{k_0^3 \sigma_\mu^2}{\alpha(\alpha^2 + 4k_0^2)} \ll 1 \quad (\text{V.149})$$

Le terme de gauche est en fait strictement égal au facteur  $[2k_0l_e]^{-1}$ , avec  $l_e$ , le libre parcours moyen calculé analytiquement dans l'approximation de Bourret (Eq.V.47). Cette dernière condition peut donc se mettre sous la forme :

$$2k_0l_e \gg 1 \quad (\text{V.150})$$

On reconnaît ici la condition de faible désordre.

## V.A.2

Nous décrivons ici la fabrication des cartes de vitesse utilisées sous Acel. Soit  $\mathbf{C}$  la carte des vitesses que l'on désire simuler. Cette matrice contient les coefficients  $c_{ij}$  représentant la célérité de l'onde acoustique au point de coordonnées  $(x_i, z_j)$ , tel que  $c_{ij} = c(x_i, z_j)$ . Le champ aléatoire de vitesses doit donc être caractérisé par une fonction d'autocorrélation  $B_c$ , tel que :

$$B_c(r) = \langle c(\mathbf{r}')c(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}'} - c_0^2 = \sigma_c^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2l_c^2}\right) \quad (\text{V.151})$$

où  $c_0$  est la vitesse de référence, tel que  $c_0 = \langle c(\mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}'}$ .  $\sigma_c^2$  représente la variance du champ de vitesse :  $\sigma_c^2 = \langle c(\mathbf{r}')^2 \rangle_{\mathbf{r}'} - c_0^2$ . En écriture matricielle, l'équation V.151 se traduit par :

$$\begin{aligned} E[c_{ij}c_{kl}] - c_0^2 &= E[c(x_i, z_j)c(x_k, z_l)] - c_0^2 \\ &= \sigma_c^2 \exp\left[-\frac{(x_i - x_k)^2 + (z_j - z_l)^2}{2l_c^2}\right] \\ &= \sigma_c \exp\left[-\frac{(x_i - x_k)^2}{2l_c^2}\right] \times \sigma_c \exp\left[-\frac{(z_j - z_l)^2}{2l_c^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{V.152})$$

On définit maintenant les matrices de covariance  $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ , respectivement de taille  $N_x \times N_x$  et  $N_z \times N_z$ , telles que leurs coefficients  $c_{ik}^{\mathbf{X}}$  et  $c_{jl}^{\mathbf{Z}}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_{ik}^{\mathbf{X}} &= c^{\mathbf{X}}(x_i - x_k) = \sigma_c \exp\left[-\frac{(x_i - x_k)^2}{2l_c^2}\right] \\ c_{jl}^{\mathbf{Z}} &= c^{\mathbf{Z}}(z_j - z_l) = \sigma_c \exp\left[-\frac{(z_j - z_l)^2}{2l_c^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{V.153})$$

Ces matrices de covariance sont des matrices de Toeplitz car leurs coefficients ne dépendent que de la différence entre les deux indices associés :  $c_{mn}^{\mathbf{X},\mathbf{Z}} = c_{m-n}^{\mathbf{X},\mathbf{Z}}$ . La fonction d'autocorrélation de la carte de vitesses  $\mathbf{C}$  (Eq.V.152) peut donc se réécrire comme le produit des coefficients des matrices de covariance  $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$  :

$$E[c_{ij}c_{kl}] - c_0^2 = c_{ik}^{\mathbf{X}}c_{jl}^{\mathbf{Z}} \quad (\text{V.154})$$

Notons qu'une telle décomposition est propre à la fonction d'autocorrélation gaussienne. Elle ne pourrait pas être réalisée par exemple si l'on considérait une fonction d'autocorrélation exponentielle. Une fois la décomposition de l'équation V.154 démontrée, on peut facilement

générer une carte aléatoire de vitesses  $\mathbf{C}$  caractérisée par la fonction d'autocorrélation désirée (Eq. V.152). Il suffit dans un premier temps de générer numériquement une matrice aléatoire de vitesses  $\mathbf{V}$  dont les entrées  $v_{ij}$  sont des coefficients aléatoires réels distribués selon une loi normale. A partir de cette matrice aléatoire  $\mathbf{V}$ , la carte de vitesse désirée  $\mathbf{C}$  est construite par l'intermédiaire du produit de matrices suivant :

$$\mathbf{C} = c_0 \mathbf{J} + (\mathbf{C}^{\mathbf{X}})^{1/2} \mathbf{V} (\mathbf{C}^{\mathbf{Z}})^{1/2} \quad (\text{V.155})$$

où  $\mathbf{J}$  représente une matrice de taille  $N_x \times N_z$  dont tous les coefficient sont égaux à 1. On peut facilement démontrer que la matrice  $\mathbf{C}$  ainsi construite est bien caractérisée par la fonction d'autocorrélation gaussienne désirée (Eq.V.152). Un exemple de carte de vitesse ainsi obtenu est présenté sur la figure V.16.

# Conclusion

L'objectif de cette thèse était d'adopter une approche originale de la propagation des ondes en milieu désordonné en profitant de la souplesse des expériences ultrasonores. Cette approche repose sur le dispositif expérimental suivant : un réseau multi-éléments placé en vis-à-vis du milieu diffusant que l'on souhaite étudier. La procédure expérimentale consiste ensuite à mesurer les réponses impulsionnelles entre les différents capteurs du réseau. L'ensemble de ces réponses forme la matrice  $\mathbf{K}$ , réponse globale du milieu inspecté. Un ensemble d'opérations peut ensuite être appliqué sur cette matrice afin d'extraire les informations pertinentes, en fonction du problème considéré.

Une étape importante de cette thèse a consisté à étudier la matrice  $\mathbf{K}$  acquise en milieu désordonné du point de vue de la théorie des matrices aléatoires (RMT). Nous avons ainsi comparé la distribution expérimentale des valeurs singulières de  $\mathbf{K}$  aux lois théoriques prédites par la RMT. Les régimes de diffusion simple et multiple ont été étudiés. Dans les deux cas, nous avons mis en évidence l'importance des corrélations résiduelles qui peuvent exister entre les éléments de la matrice. Nous avons également montré comment elles pouvaient être incorporées au modèle théorique et ainsi obtenir une loi décrivant la distribution des valeurs singulières en présence de corrélations. Une découverte particulièrement intéressante est la différence de comportement observé entre les régimes de diffusion simple et multiple. Nous avons en effet mis en évidence une cohérence déterministe des signaux simplement diffusés le long des antidiagonales de  $\mathbf{K}$ . Au contraire, les signaux multiples diffusés ne présentent aucune cohérence particulière en milieu aléatoire. Ces propriétés statistiques de la matrice  $\mathbf{K}$  influencent grandement la distribution des valeurs singulières. Alors que la fameuse loi dite du *quart de cercle* est observée en régime de diffusion multiple, la diffusion simple donne lieu à une matrice  $\mathbf{K}$  qui présente la même distribution de valeurs singulières qu'une matrice de Hankel aléatoire. Une perspective à ce travail serait l'étude de la distribution des valeurs singulières lors de la transition diffusion simple / diffusion multiple. En effet, aux faibles ordres de diffusion, la distribution des valeurs singulières de  $\mathbf{K}$  présente *a priori* un comportement intermédiaire entre la loi de Hankel et celle du quart de cercle. Cela est dû notamment à une contribution non négligeable aux temps courts des chemins récurrents ou pseudo récurrents. D'autre part, nous



avons mis en évidence une légère déviation par rapport à la loi du quart de cercle en régime de diffusion multiple, et cela même aux temps longs. L'hypothèse de *points ou chemins brillants* a été proposée pour expliquer cette déviation par rapport à la théorie. De nouvelles expériences ainsi que des simulations numériques sont à prévoir afin de valider ou infirmer cette hypothèse. Un modèle théorique pourrait alors être établi afin de prendre en compte ces phénomènes.

La différence de comportement statistique de la matrice  $\mathbf{K}$  selon que l'on est en régime de diffusion simple ou multiple, a conduit à l'élaboration de deux méthodes permettant la séparation des signaux simplement et multiplement diffusés. Concernant les milieux hautement diffusants pour lesquels la diffusion multiple prédomine, une technique de projection des anti-diagonales de  $\mathbf{K}$  permet d'extraire les signaux simplement diffusés minoritaires. Cette approche a été appliquée au problème de la détection de cible enfouie en milieu diffusant. On a montré que le filtrage de la diffusion simple combiné à la méthode D.O.R.T offraient des résultats spectaculaires comparé aux techniques d'imagerie traditionnelles (échographie, méthode D.O.R.T classique). Le filtrage préalable de la diffusion simple élimine une grande partie des échos multiplement diffusés. Il permet également un *lissage* des effets aberrants subis par l'écho direct de la cible lors de son passage à travers le milieu diffusant. La décomposition en valeurs singulières (SVD) est appliquée à la matrice filtrée. Cela permet d'extraire le front d'onde associé à la cible et sa repropagation numérique permet de la localiser avec précision. Les chapitres II & III ont également été l'occasion de mettre en place des critères de détection rigoureux quand la méthode D.O.R.T est appliquée en milieu aléatoire ou dans des environnements bruités. Pour cela, on s'est appuyé sur la théorie des matrices aléatoires. Un brevet a été déposé sur cette technique et des premiers tests sur des milieux réels sont d'ores et déjà envisagés : détection de défauts dans des échantillons d'aciers particulièrement diffusants, détection de cible enfouie dans la terre *etc.*

En ce qui concerne les milieux faiblement diffusants, une deuxième méthode a été mise au point afin d'extraire les signaux multiplement diffusés noyés dans une contribution de diffusion simple, cette fois, largement prédominante. Cette approche consiste à appliquer la SVD aux antidiagonales de la matrice  $\mathbf{K}$ . Les ondes simplement diffusées, caractérisées par une grande cohérence le long des antidiagonales, sont associés à l'espace *signal* alors que la diffusion multiple se retrouve principalement dans l'espace *bruit*. La théorie des matrices aléatoires est une nouvelle fois utilisée afin de séparer les espaces *signal* et *bruit*. Cette méthode a d'abord été appliquée à un milieu synthétique pour lequel on a prouvé la possibilité de mesurer des paramètres diffusants à partir d'une contribution de diffusion multiple ultra minoritaire. Cela offre une nouvelle voie de caractérisation pour les milieux faiblement diffusants. On a également appliqué cette technique à un milieu biologique dont l'imagerie ultrasonore est souvent réalisée : le sein. D'une part, cette expérience a permis de vérifier l'applicabilité de notre approche à des milieux *réels*. On a ainsi montré que la diffusion multiple des ultrasons existait bel et bien dans les tissus mous autour de 4 MHz, alors qu'elle est souvent négligée en imagerie médicale. Notre méthode constitue donc un test expérimental pour l'hypothèse de diffusion simple. D'autre part, on a pu corrélérer qualitativement l'image échographique du sein avec la part de diffusion multiple dans l'intensité totale. Notre approche pourrait donc apporter une information complémentaire sur les tissus

traversés. Néanmoins, les milieux *réels* sont la plupart du temps statistiquement hétérogènes. La procédure d'inversion qui consiste à mesurer les paramètres diffusants à partir des intensités simplement et multiples diffusées, est alors beaucoup plus délicate. Un travail théorique supplémentaire est donc nécessaire si on souhaite caractériser quantitativement les tissus mous du corps humain à partir de la diffusion multiple.

En fait, nous avons déjà réalisé un premier pas au cours de cette thèse vers la caractérisation de milieu aléatoire statistiquement hétérogène. En effet, l'étude de l'intensité multiple diffusée en champ proche nous a permis de mesurer localement le coefficient de diffusion  $D$ . Pour cela, nous avons eu recours à une technique de formation de voies permettant de se projeter en champ proche du milieu diffusant par l'intermédiaire de faisceaux collimatés. Une astuce matricielle (l'*antisymétrisation* de la matrice de réponse) rend le milieu virtuellement antiréiproque et permet ainsi de séparer le halo diffusif du pic de rétrodiffusion cohérente. L'étude de la croissance du halo diffusif en champ proche nous permet ensuite d'effectuer des mesures locales du coefficient de diffusion  $D$ . Une première expérience sur un milieu prototype a ainsi mis en évidence la possibilité d'imager un milieu désordonné en surface à partir de son coefficient de diffusion  $D$ . L'image obtenue possède une résolution de l'ordre du libre parcours moyen. Cette première expérience constitue une belle illustration de la possibilité d'imager des milieux à partir d'échos multiples diffusés. Cette technique suppose néanmoins une distribution homogène du désordre en profondeur.

Une application intéressante de ce travail a été la mesure locale du coefficient de diffusion  $D$  dans une tranche d'os. Cette expérience, effectuée en collaboration avec le laboratoire d'imagerie paramétrique, a montré une grande corrélation entre les variations spatiales de  $D$  et la densité locale de l'os. Néanmoins, la mesure du coefficient de diffusion  $D$  est sûrement liée à d'autres paramètres que la densité de l'os. En particulier, il est fortement connecté à l'anisotropie des événements de diffusion et donc à la micro-architecture de l'os.

Ces premières mesures expérimentales de  $D$  dans l'os nous ont conduits à nous interroger sur le lien existant entre les paramètres diffusants ( $l_e$ ,  $l^*$  et  $D$ ) de l'onde multiple diffusée et la micro-architecture du milieu diffusant. Dans la dernière partie de cette thèse, nous nous sommes donc appuyés sur la théorie de la diffusion multiple pour faire le lien tout d'abord entre le libre parcours moyen élastique et la fonction d'autocorrélation du potentiel de désordre d'un milieu aléatoire. Les différentes approximations réalisées dans le cadre de ces développements théoriques ont été validées par une simulation numérique réalisée à l'aide du code Acel. Nous avons mis en évidence différents régimes asymptotiques : régime de Rayleigh, régime géométrique, régime de hautes perturbations. Pour chacun de ces régimes, nous avons pu établir la dépendance de  $l_e$  vis-à-vis de la fréquence  $f$  et des paramètres statistiques du désordre (longueur de corrélation  $l_c$ , amplitude des fluctuations du désordre  $\sigma_\mu$ ). De même, la dépendance de  $l^*$  et  $D$  vis-à-vis de ces différents paramètres a également été étudiée. Ces résultats théoriques ont ensuite été appliqués à l'os. En considérant une image typique de la microarchitecture constituant l'os trabéculaire, une fonction d'autocorrélation est déduite. A partir de là, une estimation théorique du coefficient de diffusion  $D$  dans l'os a été réalisée et un très bon accord qualitatif avec nos mesures expérimentales a été trouvé. Ces premiers tests

## ***Conclusion***

---

sont encourageants et devraient conduire à une nouvelle campagne de mesures. Pour chaque échantillon d'os étudié, il faudra à la fois réaliser des mesures du coefficient de diffusion  $D$ , de densité et de la micro-architecture que l'on peut obtenir par microtomographie aux rayons X. On aura ainsi accès à des fonctions d'autocorrélation locales de l'os et les mesures expérimentales de  $D$  pourront être confrontées quantitativement aux prédictions théoriques. De telles mesures pourraient s'avérer très utiles à des fins de caractérisation ultrasonore de l'os trabéculaire. Les développements théoriques du chapitre V peuvent également s'appliquer à l'étude de la diffusion multiple dans les tissus mous du corps humain.

# Bibliographie

- [1] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. Academic Press, New York, USA, 1978.
- [2] Y. Kuga and A. Ishimaru. Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1 :831, 1984.
- [3] P-E Wolf and G. Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :2696–2699, 1985.
- [4] M. van Albada and A. Lagendijk. Observation of weak localization of light in a random medium. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :2692–2695, 1985.
- [5] E. Akkermans, P-E. Wolf, and R. Maynard. Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1471–1474, 1986.
- [6] E. Akkermans, P-E. Wolf, R. Maynard, and G. Maret. Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media. *J. Phys. France*, 49 :77–98, 1988.
- [7] R. Vreeker, M.P. Albada, R. Sprik, and A. Lagendijk. Femtosecond time-resolved measurements of weak localization of light. *Phys. Lett. A*, 132 :51–54, 1988.
- [8] D.S. Wiersma, M.P. van Albada, B.A. van Tiggelen, and A. Lagendijk. Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :4193–4196, 1995.
- [9] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C.A. Müller, and C. Miniatura and R. Kaiser. Coherent backscattering of light by cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5266–5269, 1999.
- [10] G. Labeyrie, C.A. Müller, D.S. Wiersma, C. Miniatura, and R. Kaiser. Observation of coherent backscattering of light by cold atoms. *J. Opt. B.*, 2 :672–685, 2000.
- [11] D.V. Kupriyanov, I.M. Solokov, C.I. Sukenik, and M.D. Havey. Coherent backscattering of light from ultracold and optically dense atomic ensembles. *Laser Phys. Lett.*, 3 :223–243, 2006.
- [12] G. Bayer and T. Niederdränk. Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :3884–3887, 1993.
- [13] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B.A. van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent backscattering of acoustic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3637–3639, 1997.

- [14] K. Sakai, K. Yamamoto, and K. Takagi. Observation of acoustic coherent backscattering. *Phys. Rev. B*, 56 :10930–10933, 1997.
- [15] J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, B. van Tiggelen, and M. Fink. Relation between time reversal focusing and coherent backscattering in multiple scattering media : A diagrammatic approach. *Phys. Rev. E*, 70 :046601, 2004.
- [16] J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, P. Roux, and M. Fink. Weak localization and time reversal of ultrasound in a rotational flow. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :074301, 2005.
- [17] E. Larose, L. Margerin, B.A. van Tiggelen, and M. Campillo. Weak localization of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :048501, 2004.
- [18] B.A. van Tiggelen, L. Margerin, and M. Campillo. Coherent backscattering of elastic waves : Specific role of source, polarization, and near field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :1291–1298, 2001.
- [19] L. Margerin, M. Campillo, and B.A. van Tiggelen. Coherent backscattering of acoustic waves in the near field. *Geophys. J. Int.*, 145 :593–603, 2001.
- [20] E. Akkermans and G. Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des phonons*. CNRS Editions, Paris, France, 2004.
- [21] J.W. Goodman. *Statistical Optics*, chapter 5. Wiley & Sons, New York, USA, 1985.
- [22] J. Paasschens. Solution of the time-dependent Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56 :1135–1141, 1997.
- [23] A. Lagendijk and B.A. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.*, 270 :143–215, 1996.
- [24] A. Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1997.
- [25] P. Sheng. *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*. Academic Press, New York, USA, 1995.
- [26] N. Trégourès and B. van Tiggelen. Quasi-two-dimensional transfer of elastic waves. *Phys. Rev. E*, 66 :036601, 2002.
- [27] R.L. Weaver and O.I. Lobkis. Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :4942–4945, 2000.
- [28] J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :1693–1695, 2000.
- [29] G. Barton. *Elements of Green's functions and propagation*. Oxford Science Press, New York, USA, 1989.
- [30] J.H. Page, H.P. Schriemer, A.E. Bailey, and D.A. Weitz. Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound. *Phys. Rev. E*, 52 :3106–3114, 1995.
- [31] S.E. Skipetrov. Information transfer through disordered media by diffuse waves. *Phys. Rev. E*, 67 :036621, 2003.

- 
- [32] M. Storzer, P. Gross, C.M. Aegerter, and G. Maret. Observation of the critical regime near Anderson localization of light. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :063904, 2006.
- [33] L. Margerin, M. Campillo, and B.A. van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium : new insight into coda Q. *Geophys. J. Int.*, 134 :596–612, 1998.
- [34] M.M. Haney, K. van Wijk, and R. Snieder. Radiative transfer in layered media and its connection to the O’Doherty-Anstey formula. *Geophysics*, 70 :1–11, 2005.
- [35] J.H. Page, P. Sheng, H.P. Schriemer, I. Jones, X. Jing, and D.A. Weitz. Group velocity in strongly scattering media. *Science*, 271 :634, 1996.
- [36] Z.Q. Zhang, I.P. Jones, H.P. Shriemer, J.H. Page, D.A. Weitz, and P. Sheng. Wave transport in random media : The ballistic to diffusive transition. *Phys. Rev. E*, 60 :4843, 1999.
- [37] J. Scales and K. Van Wijk. Tunable multiple-scattering system. *App. Phys. Lett.*, 79 :2294–2296, 2001.
- [38] J. Scales and A. Malcolm. Laser characterization of ultrasonic wave propagation in random media. *Phys. Rev. E*, 67 :046618, 2003.
- [39] J.H. Page, H.P. Schriemer, I.P. Jones, P. Sheng, and D.A. Weitz. Classical wave propagation in strongly scattering media. *Physica A*, 241 :64–71, 1997.
- [40] H.P. Schriemer, M.L. Cowan, J.H. Page, P. Sheng, Z. Liu, and D.A. Weitz. Energy velocity of diffusing waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3166–3169, 1997.
- [41] M.L. Cowan, K. Beaty, J.H. Page, Z. Liu, and P. Sheng. Group velocity of acoustic waves in strongly scattering media : Dependence on the volume fraction of scatterers. *Phys. Rev. E*, 58 :6626–6636, 1998.
- [42] A. Tourin, A. Derode, A. Peyre, and M. Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108 :503–512, 2000.
- [43] A. Tourin, A. Derode, and M. Fink. Multiple scattering of sound. *Waves in random media*, 10 :R31–R60, 2000.
- [44] V. Mamou. *Caractérisation ultrasonore d’échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2005.
- [45] A. Aubry, A. Derode, P. Roux, and A. Tourin. Coherent backscattering and far-field beamforming in acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121 :70–77, 2007.
- [46] A. Derode, V. Mamou, F. Padilla, F. Jenson, and P. Laugier. Dynamic coherent backscattering in a heterogenous medium : Application to human trabecular bone characterization. *Appl. Phys. Lett.*, 87 :114101, 2005.
- [47] A. Derode, V. Mamou, and A. Tourin. Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Phys. Rev. E*, 74 :036606, 2006.

- [48] S.E. Skipetrov and B.A. van Tiggelen. Dynamics of weakly localized waves. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :113901, 2004.
- [49] R. Mallart and M. Fink. The van Cittert-Zernike theorem in pulse echo measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90 :2718–2727, 1991.
- [50] A. Derode and M. Fink. Partial coherence of transient ultrasonic fields in anisotropic random media : Application to coherent echo detection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101 :690–704, 1997.
- [51] A. Aubry and A. Derode. Ultrasonic imaging of highly scattering media from local measurements of the diffusion constant : Separation of coherent and incoherent intensities. *Phys. Rev. E*, 75 :026602, 2007.
- [52] P. Sheng. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [53] P.W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109 :1492–1505, 1958.
- [54] M.C.W. Rossum and T.M. Nieuwenhuizen. Multiple scattering of classical waves : Microscopy, mesoscopy and diffusion. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :313–371, 1999.
- [55] P. Sebbah. *Waves and Imaging through Complex Media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [56] K. Aki and B. Chouet. Origin of coda waves : Source, attenuation and scattering effects. *J. Geophys. Res.*, 80 :3322–3342, 1975.
- [57] A. Yodh and B. Chance. Spectroscopy and imaging with diffusing light. *Physics Today*, 48 :33–40, 1995.
- [58] R. Choe, A. Corlu, K. Lee, T. Durduran, S. Donecky, M. Grosicka-Koptyra, S. Arridge, B. Czerniecki, D. Fraker, A. DeMichele, B. Chance, and A. Yodh. Diffuse optical tomography of breast cancer during neoadjuvant chemotherapy : A case study with comparison to MRI. *Med. Phys.*, 32 :1128–1139, 2005.
- [59] A. Derode, A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon, and M. Fink. Taking advantage of multiple scattering to communicate with time-reversal antennas. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :014301, 2003.
- [60] J. Alda. *Encyclopedia of Optical Engineering*, chapter Laser and Gaussian Beam Propagation and Transformation, pages 999–1013. Marcel Dekker, New York, USA, 2003.
- [61] A. Aubry, A. Derode, and F. Padilla. Local measurements of the diffusion constant in multiple scattering media : Application to human trabecular bone imaging. *Appl. Phys. Lett.*, 92 :124101, 2008.
- [62] S. Chaffai, V. Roberjot, F. Peyrin, G. Berger, and P. Laugier. Frequency dependence of ultrasonic backscattering cancellous bone : Autocorrelation model and experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108 :2403–2411, 2000.



- 
- [63] K.A. O'Donnell and R. Torre. Second-harmonic generation from a strongly roughly metal surface. *Opt. Commun.*, 138 :341–344, 1997.
- [64] M. Leyva-Lucero, E.R. Mendez, T.A. Leskova, and A.A. Maradudin. Destructive interference effects in the second harmonic light generated at randomly rough metal surfaces. *Opt. Commun.*, 161 :79–94, 1999.
- [65] G. Foschini and M. Gans. *Wireless Personal Communication*, volume 6. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1998.
- [66] A. Moustakas, H. Baranger, L. Balents, A. Sengupta, and S. Simon. Communication through a diffusive medium : Coherence and capacity. *Science*, 287 :287–290, 1999.
- [67] B.A. Angelsen. *Ultrasound Imaging. Waves, Signals and Signal Processing*. Emantec, Trondheim, Norway, 2000.
- [68] C. Prada and M. Fink. Eigenmodes of the time-reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20 :151–163, 1994.
- [69] C. Prada, S. Manneville, D. Poliansky, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator : Application to detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99 :2067–2076, 1996.
- [70] C. Prada and J-L. Thomas. Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :235–243, 2003.
- [71] J-G. Minonzio, C. Prada, A. Aubry, and M. Fink. Multiple scattering between two elastic cylinders and invariants of the time-reversal operator : Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120 :875–883, 2006.
- [72] M. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, Boston, USA, 1991.
- [73] T. Brody, J. Flores, J. Franch, P. Mello, A. Pandey, and S. Song. Random-matrix physics : Spectrum and strength fluctuations. *Rev. Mod. Phys.*, 53 :385–479, 1981.
- [74] C. Ellegaard, T. Guhr, K. Lindemann, J. Nygard, and M. Oxborrow. Symmetry breaking and spectral statistics of acoustic resonances in quartz blocks. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4918–4921, 2003.
- [75] Y. L. Cun, I. Kanter, and S. A. Solla. Eigenvalues of covariance matrices : Application to neural-network learning. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2396–2399, 1991.
- [76] A. Tulino and S. Verdù. Random matrix theory and wireless communications. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 1 :1–182, 2004.
- [77] L. Laloux, P. Cizeau, J-P. Bouchaud, and M. Potters. Noise dressing of financial correlation matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1467–1470, 1999.
- [78] C-N. Nuah, D. Tse, J. Kahn, and R. Valenzuela. Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48 :637–650, 2002.
- [79] A. Moustakas, S. Simon, and A. Sengupta. MIMO capacity through correlated channels in the presence of correlated interferers and noise : A (not so) large N analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49 :2545–2561, 2003.



- [80] A.M. Sengupta and P.P Mitra. Distribution of singular values for some random matrices. *Phys. Rev. E*, 60 :3389–3392, 1999.
- [81] I. Johnstone. On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis. *Ann. Stat.*, 29 :295–327, 2001.
- [82] N. El-Karoui. Spectrum estimation for large dimensional covariance matrices using random matrix theory. *arXiv :math/0609418*, 2007.
- [83] V. Marčenko and L. Pastur. Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices. *Math. USSR-Sbornik*, 1 :457–483, 1967.
- [84] W. Bryc, A. Dembo, and T. Jiang. Spectral measure of large random Hankel, Markov and Toeplitz matrices. *Ann. Probab.*, 34 :1–38, 2006.
- [85] M. Meckes. On the spectral norm of a random Toeplitz matrix. *Electron. Commun. Probab.*, 12 :315–325, 2007.
- [86] M. Haney and R. Snieder. Breakdown of wave diffusion in 2D due to loops. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :093902, 2003.
- [87] J. Garnier, C. Gouédard, and A. Migus. Statistics of the hottest spot of speckle patterns generated by smoothing techniques. *Journal of Modern Optics*, 46 :1213–1232, 1999.
- [88] J. Garnier. Statistics of the hot spots of smoothed beams produced by random phase plates revisited. *Physics of plasmas*, 6 :1601–1610, 1999.
- [89] N. Mordant, C. Prada, and M. Fink. Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105 :2634–2642, 1999.
- [90] J. F. Lingeitch, H. C. Song, and W. A. Kuperman. Time reversed reverberation focusing in a waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :2609–2614, 2002.
- [91] L. Carin, H. Liu, T. Yoder, L. Couchman, B. Houston, and J. Bucaro. Wideband time-reversal imaging of an elastic target in an acoustic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(1) :259–268, 2004.
- [92] E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau, and M. Fink. Imaging the presence of grain noise using the decomposition of the time reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 :1230–1240, 2003.
- [93] C. Gaumond, D. Fromm, J. Lingeitch, R. Menis, G. Edelmann, D. Calvo, and E. Kim. Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119 :976–990, 2006.
- [94] C. Prada, J. de Rosny, D. Clorennec, J-G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Berniere, P. Billand, S. Hibrat, and T. Folegot. Experimental detection and focusing in shallow water by decomposition of the time reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122 :761–768, 2007.
- [95] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard. Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 13 :687–719, 1999.

- 
- [96] G. Micolau, M. Saillard, and P. Borderies. D.O.R.T method as applied to ultrawideband signals for detection of buried objects. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 41 :1813–1820, 2003.
- [97] E. Iakovleva, S. Gdoura, D. Lesselier, and G. Perrusson. Multi-static response matrix of a 3-D inclusion in a half space and MUSIC imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 55 :2598–2609, 2007.
- [98] E. Iakovleva and D. Lesselier. Multistatic response matrix of spherical scatterers and the back-propagation of singular fields. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 56 :825–833, 2008.
- [99] D. de Badereau, H. Roussel, and W. Tabbara. Radar remote sensing of forest at low frequencies : a two dimensional full wave approach. *J. Electromagnetic Waves Applic.*, 17 :921–949, 2003.
- [100] H. Nguyen, H. Roussel, and W. Tabbara. A coherent model of forest scattering and SAR imaging in the VHF and UHF band. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 44 :838–848, 2006.
- [101] Y. Ziadé, H. Roussel, M. Lesturgie, and W. Tabbara. A coherent model of forest propagation - Application to detection and localisation of targets using the DORT method. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 56 :1048–1057, 2008.
- [102] D. Chambers and A. Gautesen. Time reversal for a single spherical scatterer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109 :2616–2624, 2001.
- [103] J-G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, and M. Fink. Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117 :789–798, 2005.
- [104] H. Zhao. Analysis of the response matrix for an extended target. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64 :725–745, 2004.
- [105] A. Aubry, J. de Rosny, J.-G. Minonzio, C. Prada, and M. Fink. Gaussian beams and Legendre polynomials as invariants of the time reversal operator for a large rigid cylinder. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120 :2746–2754, 2006.
- [106] L. Pastur. On the universality of the level spacing distribution for some ensembles of random matrices. *Letters in Mathematical Physics*, 25 :259–265, 1992.
- [107] C.A. Tracy and H. Widom. Level-spacing distributions and the Airy kernel. *Commun. Math. Phys.*, 159 :151–174, 1994.
- [108] C.A. Tracy and H. Widom. On orthogonal and symplectic matrix ensembles. *Commun. Math. Phys.*, 177 :727–754, 1996.
- [109] K. Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Commun. Math. Phys.*, 209 :437–476, 2000.
- [110] N. El-Karoui. Recent results about the largest eigenvalue of random covariance matrices and statistical application. *Acta Physica Polonica B*, 36 :2681–2697, 2005.

- [111] R. Adamczak. A few remarks on the operator norm of random Toeplitz matrices. *arXiv :math/0803.3111*, 2008.
- [112] S. Chatterjee. Fluctuations of eigenvalues and second order Poincaré inequalities. *arXiv :math/0705.1224*, 2007.
- [113] P. Norville and W.R. Scott. An investigation of time reversal techniques in seismic landmine detection. In *Proceedings of the SPIE : 2004 Annual International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation, and Controls, Orlando, USA*, 2004.
- [114] M. Alam, P. Norville, J. H. McClellan, and W. R. Scott. Time-reverse imaging for detection of land-mines. In *Proceedings of the SPIE : 2004 Annual International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation, and Controls, Orlando, USA*, 2004.
- [115] E. Larose, J. de Rosny, L. Margerin, D. Anache, P. Gouédard, M. Campillo, and B. van Tiggelen. Observation of multiple scattering of kHz vibrations in a concrete structure and application to monitoring weak changes. *Phys. Rev. E*, 73 :016609, 2006.
- [116] J-M. Bordier, M. Fink, A. le Brun, and F. Cohen-Tenoudji. The influence of multiple scattering in incoherent ultrasonic inspection of coarse grain stainless steel. *Ultrasonics Symposium*, 2 :803–808, 1991.
- [117] S. Flax and M.O'Donnell. Phase-aberration correction using signals from point reflectors and diffuse scatterers : Basic principles. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 35 :758–767, 1988.
- [118] R. Waag and P. Astheiner. Statistical estimation of ultrasonic propagation path parameters for aberration correction. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 52 :851–869, 2005.
- [119] L. Borcea, G. Papanicolaou, and C. Tsogka. Adaptive interferometric imaging in clutter and optimal illumination. *Inverse Problems*, 22 :1405–1436, 2006.
- [120] J-L Robert, M. Burcher, C. Cohen-Bacrie, and M. Fink. Time reversal operator decomposition with focused transmission and robustness to speckle noise : Application to microcalcification detection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(1) :3848–3859, 2006.
- [121] J-L. Robert and M. Fink. Green's function estimation in speckle noise using the decomposition of the time-reversal operator : Application to aberration correction in medical imaging. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123 :866–877, 2008.
- [122] E. Kerbrat, D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, D. Cassereau, and M. Fink. Detection of cracks in a thin air-filled hollow cylinder by application of the D.O.R.T method to elastic components of the echo. *Ultrasonics*, 40 :715–720, 2002.
- [123] R.C. Chivers. The scattering of ultrasound by human tissues - Some theoretical models. *Ultrasound. Med. Biol.*, 3 :1–13, 1977.
- [124] C.M. Sehgal and J. Greenleaf. Scattering of ultrasound by tissues. *Ultrasonic imaging*, 6 :66–80, 1984.
- [125] C.M. Sehgal. Quantitative relationship between tissue composition and scattering of ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94 :1944–1952, 1993.

- [126] F. Padilla, F. Peyrin, and P. Laugier. Prediction of backscatter coefficient in trabecular bones using a numerical model of three-dimensional microstructure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108 :2403–2411, 2003.
- [127] D. Deligianni and K. Apostolopoulos. Characterization of dense bovine cancellous bone tissue microstructure by ultrasonic backscattering using weak scattering models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122 :1180–1190, 2007.
- [128] M. Hakulinen, J. Day, J. Töyräs, H. Weimans, and J. Jurvelin. Ultrasonic characterization of human trabecular bone microstructure. *Phys. Med. Biol.*, 51 :1633–1648, 2006.
- [129] L.A. Chernov. *Wave propagation in a random medium. (a) Chapter 4*. Dover, New York, USA, 1960.
- [130] S.M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V.I. Tatarskii. *Principle of statistical radiophysics IV : Wave propagation through random media. Chapter 4*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989.
- [131] S.M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V.I. Tatarskii. *Principle of statistical radiophysics III : Elements of random fields. Chapter 4*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989.
- [132] C.D. Jones. *High frequency acoustic volume scattering from biologically active marine sediments*. PhD thesis, University of Washington (Applied Physics Laboratory), 1999 (<http://handle.dtic.mil/100.2/ADA371341>).
- [133] M.P. van Albada, B.A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip. Speed of propagation of classical waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :3132, 1991.
- [134] L. Ryzhik, G. Papanicolaou, and J. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave motion*, 24 :327–370, 1996.





## Résumé :

Cette thèse étudie les propriétés de l'opérateur de propagation des ondes ultrasonores en milieu aléatoire. Le dispositif expérimental consiste en un réseau multi-éléments placé en vis-à-vis d'un milieu désordonné. L'opérateur de propagation est donné par la matrice des réponses inter-éléments mesurées entre chaque couple de transducteurs. En s'appuyant sur la théorie des matrices aléatoires, le comportement statistique de cet opérateur a été étudié en régime de diffusion simple et multiple. Une cohérence déterministe des signaux est ainsi mise en évidence en régime de diffusion simple, cohérence qui disparaît dès que la diffusion multiple prédomine. Cette différence de comportement a permis la mise au point d'un *radar intelligent* séparant les échos simplement et multiples diffusés. On peut ainsi extraire l'écho direct d'une cible échogène enfouie dans un milieu hautement diffusant, bien que ce dernier soit source de diffusion multiple et d'aberration. Une deuxième approche consiste, au contraire, à extraire une contribution de diffusion multiple noyée dans une contribution de diffusion simple largement prédominante. L'étude de l'intensité multiple diffusée permet de mesurer des paramètres de transport (*p.ex.* la constante de diffusion  $D$ ) caractérisant la propagation de l'onde multiple diffusée. Un passage en champ lointain (ondes planes) permet d'obtenir une mesure fiable de  $D$  en étudiant le cône de rétrodiffusion cohérente. Un passage en champ proche, via l'utilisation de faisceaux gaussiens, permet d'effectuer des mesures locales de  $D$  en étudiant la croissance du halo diffusif. Cette approche a été appliquée au cas de l'os trabéculaire humain autour de 3 MHz.

## Abstract :

This manuscript is devoted to the study of the ultrasonic wave propagation operator in random media. The experimental set up consists in a multi-element array placed in front of a random medium. The inter-element responses between each couple of transducers form the array response matrix. Its statistical behaviour has been studied in the single and multiple scattering regimes, using random matrix theory. Whereas the propagation operator exhibits a random behaviour in the multiple scattering regime, single scattered echoes keep a deterministic coherence despite disorder. This difference of behaviour has led to the design of a smart radar which separates single and multiple scattered echoes. We are able to extract the direct echo of an echogenic target embedded in a strongly diffusive medium, despite multiple scattering and aberration. Another approach is proposed to extract the multiple scattering contribution in a weakly scattering random medium (*e.g.* human soft tissues). The investigation of multiple scattering allows to characterize the random medium by transport parameters which govern the propagation of multiple scattered waves (*e.g.* the diffusion constant  $D$ ). Plane-wave beamforming allows to study the coherent backscattering effect in the far-field and then obtain a measurement of  $D$ , independently from absorption. Gaussian beamforming allows to study the growth of the diffusive halo in the near-field and local measurements of  $D$  are obtained. This technique has been applied to the ultrasonic imaging of human trabecular bone around 3 MHz. Finally, we also study the theoretical link between the microarchitecture of a random medium and the transport parameters.