



**HAL**  
open science

# Méthodes de Krylov pour les Equations de Navier-Sokes Non Linéaires, Linéarisées et pour l'Optimisation Aérodynamique

Jean-Guillaume Jeremiasz

► **To cite this version:**

Jean-Guillaume Jeremiasz. Méthodes de Krylov pour les Equations de Navier-Sokes Non Linéaires, Linéarisées et pour l'Optimisation Aérodynamique. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : 2007PA066618 . tel-00809208

**HAL Id: tel-00809208**

**<https://theses.hal.science/tel-00809208>**

Submitted on 8 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

*Spécialité : MÉCANIQUE*

présentée par :  
**Jean-Guillaume JÉRÉMIASZ**

pour obtenir le titre de :  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

# Méthodes de Krylov pour les Équations de Navier-Stokes Non Linéaires, Linéarisées et pour l'Optimisation Aérodynamique

soutenue le 6 décembre 2007  
devant le jury composé de :

J.P.	CALTAGIRONE	Rapporteur
J.C.	CHASSAING	Co-Directeur de Thèse
C.	CORRE	Rapporteur
G.A.	GEROLYMOS	Directeur de Thèse
P.	FERRAND	
B.	MOHAMMADI	
P.	SAGAUT	



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .	3
1.2	Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps . . . . .	4
1.3	Optimisation aérodynamique stationnaire . . . . .	5
1.4	Plan du mémoire . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Méthodes de Krylov pour les systèmes linéaires non symétriques</b>	<b>9</b>
2.1	Factorisation de Lanczos pour les problèmes à matrices non symétriques . . . . .	9
2.1.1	Méthode de résolution Bi-CG . . . . .	10
2.1.2	Méthode de résolution CGS . . . . .	12
2.1.3	Méthode de résolution Bi-CGstab . . . . .	13
2.2	Algorithme de Krylov avec factorisation d'Arnoldi . . . . .	15
2.2.1	Factorisation d'Arnoldi . . . . .	15
2.2.2	Méthode de résolution GMRES . . . . .	16
2.2.3	Méthode de résolution MGMRES . . . . .	18
2.3	Méthodes de préconditionnement pour les méthodes de Krylov . . . . .	19
2.3.1	Méthode de Jacobi . . . . .	20
2.3.2	Méthode de bloc Jacobi . . . . .	20
2.3.3	Méthode ILU0 . . . . .	21
2.4	Résolution des équations d'Euler linéarisées et harmoniques en temps $1\frac{1}{2}D$ . . . . .	21
2.4.1	Les équations d'Euler $1\frac{1}{2}D$ . . . . .	21
2.4.2	Résolution des équations d'Euler $1\frac{1}{2}D$ stationnaires . . . . .	22
2.4.3	Écoulement instationnaire avec une fluctuation harmonique de pression aval . . . . .	23
2.5	Conclusions . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Equations de Navier-Stokes non linéaires stationnaires</b>	<b>27</b>
3.1	Equations de Navier-Stokes . . . . .	27
3.1.1	Equations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	27
3.1.2	Les différents modèles de turbulence . . . . .	28
3.2	Méthode de discrétisation spatiale . . . . .	31
3.2.1	Génération du maillage multibloc structuré . . . . .	31
3.2.2	Discrétisation des flux . . . . .	32
3.2.3	Itération multigrille . . . . .	33
3.3	Schéma d'intégration temporelle et conditions aux limites . . . . .	34
3.3.1	Schéma d'intégration temporel décentré d'Euler . . . . .	34
3.3.2	Schéma à pas de temps dual pour la résolution des équations stationnaires . . . . .	35
3.3.3	Conditions aux limites . . . . .	35
3.4	Méthode de résolution du système linéaire . . . . .	36
3.4.1	Simplifications du calcul de la matrice jacobienne . . . . .	36
3.4.2	Résolution du système linéaire par factorisation AF-ADI . . . . .	37
3.4.3	Résolution du système linéaire par méthode de Krylov . . . . .	38
3.5	Tuyère de Délerly . . . . .	39

3.5.1	Présentation de la configuration . . . . .	39
3.5.2	Configuration subsonique . . . . .	39
3.5.3	Configuration transsonique . . . . .	46
3.6	Conclusions . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Equations de N-S linéarisées résolues par intégration temporelle</b>	<b>55</b>
4.1	Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps . . . . .	55
4.2	Linéarisation des flux et conditions aux limites . . . . .	56
4.2.1	Linéarisation des flux convectifs . . . . .	56
4.2.2	Linéarisation des flux diffusifs . . . . .	57
4.2.3	Conditions aux limites . . . . .	58
4.3	Méthode de résolution par introduction d'un pas de temps fictif . . . . .	58
4.3.1	Introduction du pas de temps . . . . .	58
4.3.2	Résolution du système linéaire par factorisation approchée . . . . .	59
4.3.3	Résolution du système linéaire par méthode de Krylov . . . . .	59
4.4	Démonstrateur 2-D : tuyère symétrique de Deléry . . . . .	61
4.4.1	Validation de la méthode GMRES_ptm pour une linéarisation autour d'un écoulement stationnaire subsonique . . . . .	61
4.4.2	Validation de la méthode GMRES_ptm et comparaison de la convergence autour d'un écoulement stationnaire transsonique . . . . .	66
4.5	Conclusions . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Equations de N-S linéarisées résolues sans intégration temporelle</b>	<b>77</b>
5.1	Affranchissement de l'intégration temporelle . . . . .	77
5.1.1	Algorithme de Krylov pour un problème complexe . . . . .	78
5.1.2	Préconditionnement ILU0 de la matrice complexe . . . . .	78
5.1.3	Algorithme GMRES_noptm pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps . . . . .	79
5.2	Résultats sur le démonstrateur 2D . . . . .	80
5.2.1	Écoulement stationnaire subsonique . . . . .	80
5.2.2	Écoulement stationnaire transsonique . . . . .	84
5.2.3	Application du problème de stabilité . . . . .	87
5.3	Conclusion . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Optimisation aérodynamique de formes</b>	<b>93</b>
6.1	Méthode d'optimisation . . . . .	93
6.1.1	Algorithme d'optimisation sans contrainte . . . . .	93
6.1.2	Paramétrisation de la géométrie . . . . .	94
6.1.3	Calcul de la direction de descente . . . . .	95
6.2	Discrétisation et résolution . . . . .	98
6.2.1	Discrétisation des flux aérodynamiques et sensibilité du maillage . . . . .	98
6.2.2	Conditions aux limites . . . . .	100
6.2.3	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	100
6.3	Résultats pour un problème inverse . . . . .	101
6.3.1	Écoulements aérodynamiques dans les tuyères initiale et objectif . . . . .	101
6.3.2	Convergence pour une résolution GMRES_noptm_drct . . . . .	102
6.3.3	Convergence pour une résolution MGMRES_noptm_drct . . . . .	104
6.3.4	Convergence pour une résolution GMRES_noptm_adjt . . . . .	106
6.4	Résultats pour un problème de minimisation des pertes . . . . .	107
6.4.1	Fonction de coût . . . . .	107
6.4.2	Convergence pour une résolution de la méthode directe . . . . .	107
6.4.3	Convergence pour une résolution GMRES_noptm_adjt . . . . .	108
6.5	Conclusion . . . . .	109

<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>111</b>
7.1	Conclusions . . . . .	111
7.1.1	Equations de Navier-Stokes stationnaires . . . . .	111
7.1.2	Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps . . . . .	112
7.1.3	Optimisation aérodynamique . . . . .	113
7.2	Perspectives . . . . .	113
7.2.1	Equations de Navier-Stokes stationnaires . . . . .	113
7.2.2	Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps . . . . .	114
7.2.3	Optimisation aérodynamique . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Equations de Navier-Stokes stationnaires</b>	<b>115</b>
A.1	Résultats complémentaires pour un écoulement subsonique . . . . .	115
A.2	Résultats complémentaires pour un écoulement transsonique . . . . .	118
<b>B</b>	<b>Equations de N-S linéarisées résolues par intégration temporelle</b>	<b>121</b>
B.1	Écoulement stationnaire subsonique . . . . .	121
B.2	Écoulement stationnaire transsonique . . . . .	125
<b>C</b>	<b>Equations de N-S linéarisées résolues sans intégration temporelle</b>	<b>129</b>
C.1	Écoulement stationnaire subsonique . . . . .	129
C.2	Écoulement stationnaire transsonique . . . . .	133
C.2.1	Résultats sur le maillage <i>Grid_A</i> . . . . .	133
C.2.2	Résultats sur le maillage <i>Grid_B</i> . . . . .	137



# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse porte sur l'application des méthodes de Krylov pour la résolution d'équations de la mécanique des fluides. L'ensemble des écoulements étudiés relève de la classe des écoulements internes, turbulents et compressibles, pouvant comporter des interactions entre une onde de choc et une couche limite, ainsi que d'importants décollements. Nous nous sommes intéressés à trois grands types de problèmes fréquemment rencontrés :

- la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires ;
- la résolution de certains écoulements instationnaires caractérisés par de petites fluctuations instationnaires et harmoniques en temps ;
- l'application à l'optimisation aérodynamique de formes.

Lorsque nous nous intéressons à la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées (en temps ou pour le calcul du gradient en optimisation), des études récentes [2, 14, 17, 21, 29, 113, 136] mettent en évidence la possibilité d'amplification de modes propres instables, par le processus itératif utilisé, conduisant à la divergence du calcul. La proposition de solutions à ce problème est l'objectif central de cette thèse.

### 1.1 Résolution des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont aujourd'hui couramment employées pour l'étude d'écoulements dans les domaines aéronautique, pétrolier, chimique ... Ces écoulements sont des écoulements externes ou internes, laminaires ou turbulents, stationnaires ou instationnaires. L'un des enjeux actuels est la réduction du temps nécessaire à la résolution de ces équations afin d'étudier des configurations de plus en plus complexes (avion entier, effets technologiques ...) et de prendre en compte des phénomènes physiques de plus en plus fins.

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles moyennées pour la turbulence (RANS) par la méthode de Newton. Cette méthode d'intégration consiste en une discrétisation temporelle implicite du problème. L'une des conséquences de cette discrétisation est la résolution à chaque itération temporelle d'un système linéaire dont les coefficients issus de la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes varient au cours des itérations. Les matrices des systèmes linéaires, issues de cette discrétisation, sont des matrices creuses, non symétriques et, lorsque les équations sont résolues sur un maillage structuré, comme c'est le cas ici, elles ont des structures bande-bloc [137]. Les différentes méthodes de factorisation approchée permettent de résoudre les systèmes linéaires de manière non exacte. Une bonne étude comparative de la résolution des équations d'Euler stationnaires utilisant ces factorisations approchées est décrite par Mottura *et al.* [100]. Cependant les erreurs de factorisation limitent la vitesse de convergence et imposent des pas de temps relativement faibles ( $CFL < 20$ ). Dès lors, pour augmenter le pas de temps et lever cet inconvénient, il est nécessaire de résoudre les systèmes linéaires avec des matrices exactes. Etant donné la taille des matrices, les résolutions directes du type LU\_bande sont limitées à des écoulements simples nécessitant peu de points de maillage [108]. Une alternative aux méthodes directes est l'utilisation de méthodes itératives de type Jacobi. Mais les matrices des systèmes linéaires étant mal conditionnées (matrice bloc dont les valeurs numériques ne sont pas comparables, présence de discontinuité avec des ondes de choc, importante zone de décollement ...), la relaxation nécessaire est très petite et les temps de calcul sont importants.



En contrepartie, les diverses méthodes itératives de Krylov (Bi-CG (Lanczos [83]), TFQMR (Freund [42]), CGS (Sonneveld [129]), Bi-CGSTab (Van Der Vorst [143]), GMRES (Saad [118]) ) se sont imposées comme la référence des algorithmes itératifs pour la résolution de systèmes linéaires à matrices creuses non symétriques. Dans le cadre de la mécanique des fluides, la majorité des auteurs utilisent l'algorithme GMRES [10, 54, 94–97, 107, 112, 114, 130, 142]; néanmoins certains, utilisent aussi le CGS, TFQMR ou le Bi-CGSTab [97, 107]. Par ailleurs, afin d'accélérer la convergence du processus itératif, à chaque itération temporelle, les méthodes de Krylov ne sont pas envisageables sans l'utilisation de préconditionnements.

Le tableau (1.1) résume de façon non exhaustive différentes références utilisant une méthode de Newton-Krylov pour la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes stationnaires :

TAB. 1.1 – Méthode de Newton-Krylov pour les écoulements stationnaires

Auteurs	Année	Modèle	Jacobien	Préconditionnement	Application
Venkatakrisnan, Mavriplis[142]	1993	NS 2D	AJ	BJ, SSOR, ILU	profils
McHugh, Knoll[97]	1994	NS-ic 2D	EJ/MF	ILU	cavité
Rogers[114]	1995	NS-ac	AJ	BJ, ILU	marche, profils
Luo, Baum, Lohner[94]	1998	NS 3D	AJ/MF-AJ	SGS, ILU	conduit, profil, aile
Blanco, Zingg[10]	1998	Euler 2D	EJ/AJ/MF	ILU	profils
Pueyo, Zingg[112]	1998	NS 2D	MF	ILU	profils
Soulaimani, Ben Salah, Saad[130]	2002	NS 2D/3D	MF-AJ	ILU	cavité, aile
Guezaine[54]	2002	NS 2D	MF	ILU	profil
Mavriplis[96]	2002	Euler/NS 2D	MF-AF	Multigrid	profils
Manzano, Lassaline, Wong, Zingg[95]	2003	Euler 2D/3D	MF	ILU	profil, aile, avion
Olawsky, Infed, Auweter-Kurtz[107]	2004	NS-hyp 2D	AJ/EJ/MF	BJ,SGS,ILU	capsule, sonde
présent	2006	NS 2D	AJ	BJ, ILU	tuyère

NS = Navier-Stokes ; ic = incompressible ; hyp = hypersonique ; ac = compressibilité artificielle ; AJ = matrice jacobienne approchée ; EJ = matrice jacobienne exacte ; MF = matrix free ; BJ = relaxation bloc Jacobi ; SGS = symétrique Gauss-Seidel ; ILU = factorisation LU incomplète ;

## 1.2 Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps

Pour certains écoulements instationnaires, lorsque certaines fréquences identifiées sont prépondérantes avec des perturbations de faible amplitude, l'écoulement instationnaire peut être décomposé en deux parties, une première partie stationnaire autour de laquelle est ajoutée une seconde partie instationnaire harmonique issue de la linéarisation des équations de Navier-Stokes. Ce modèle d'écoulement est particulièrement bien adapté pour la prédiction d'instabilités aéroélastiques (flottement d'ailes ou vibration d'aubes de turbomachines). Elles fournissent notamment une bonne approximation des coefficients des forces de pression instationnaires [17]. Par ailleurs, les équations d'Euler linéarisées sont aussi utilisées en aéroacoustique pour l'étude de la propagation de sources acoustiques dans un écoulement établi avec une méthode de couplage d'analogie acoustique.

Lorsque ces équations sont écrites dans le domaine fréquentiel, il y a pour chaque fréquence un système linéaire à matrice complexe à résoudre. Devant la taille des matrices de linéarisation, la majorité des auteurs utilisent une résolution à pas de temps fictif. Ces équations sont résolues soit par intégration pseudo-temporelle de façon explicite [56–60, 104] ou par intégration multi-pas de Runge-Kutta [23, 64, 89, 106], soit par résolution implicite [15, 17, 19–21, 25, 26, 81, 89, 111, 111, 123, 133].

Néanmoins, cette résolution par intégration pseudo-temporelle est sujette à des problèmes de stabilité. Ces instabilités numériques sont bien connues dans le cadre de la propagation de sources acoustiques ce sont les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Lorsque l'écoulement stationnaire présente des zones où les effets non linéaires sont importants (décollement de couche limite, zone de recirculation . . . ), ces instabilités sont convectées au fur

et à mesure des itérations pseudo-temporelles et rendent la résolution numériquement instable. Ces instabilités sont aussi bien reportées pour la résolution des équations d'Euler linéarisées et harmoniques en temps (selon Argawal *et al.* [2] : "*These (Kelvin-Helmholtz instabilities) are convective instabilities in which the disturbances grow as they propagate downstream from the point of introduction. The instability-wave solution can completely overwhelm the acoustic-solution*") que pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps (selon Compobasso *et al.* [14] : "*For most aeroelastic problems of practical interest ... the linear code converges without difficulty. However an exponential growth of the residual has been encountered in situations in which the steady flow calculation itself failed to converge to a steady state but instead finished in a small-amplitude limit cycles, related to some physical phenomenon such as sepparation bubbles, corner stalls, and vortes shedding at blund trailing edge*". Dans tous les cas, ces instabilités sont liées à l'écoulement stationnaire et aux mécanismes physiques non linéaires engendrés, et non au modèle simplifié des équations linéarisées.

Afin de remédier à ce problème de stabilité, les systèmes linéaires à matrices complexes, issues de la discrétisation spatio-temporelle des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps, peuvent être résolus sans introduction d'un pseudo-pas de temps. Morris *et al.* [2, 113], pour supprimer les instabilités numériques, résolvent le système linéaire par factorisation LU\_bande d'un modèle simplifié supposant seulement une équation pour une perturbation harmonique de la pression. Dans ce cas, le problème a seulement  $Ni \times Nj$  inconnues et une matrice de largeur bande  $2 \times \max(Ni, Nj)$ . Si l'ensemble des équations de Navier-Stokes linéarisées sont discrétisées en raison de la taille des matrices, une résolution directe de type LU est envisageable seulement dans des cas exceptionnels. Dans notre cas, avec une discrétisation des équations au troisième ordre pour un maillage  $Ni \times Nj = 101 \times 101$ , une résolution LU\_bande nécessite déjà une ressource de 7.5 Gb, ce qui, malgré la loi de Moore, n'est pas extrapolable pour des problèmes tridimensionnels dans un avenir proche. De plus, Compobasso et Giles [14, 29] montrent que ces instabilités sont liées à des valeurs propres de la matrice dont le module est supérieur à l'unité. Les méthodes de résolution de type Jacobi ne garantissent donc pas la convergence.

Dans le tableau (1.2) sont listées de façon non exhaustive les différentes résolutions des équations d'Euler et de Navier-Stokes sans intégration pseudo-temporelle :

TAB. 1.2 – Résolution des équations linéarisées sans introduction d'un pseudo-pas de temps

Auteurs	Année	Modèle	Schéma	Résolution	Application
Argawal, Morris, Mani [2]	2004	pression 2D	$\mathcal{O}(\Delta(x)^2)$ FD	LU	jet 2-D
Chassaing, Gerolymos, Jérémiasz [22]	2006	NS 2D/3D	$\mathcal{O}(\Delta(x)^3)$ VL [140]	GMRes [118]	tuyère 2-D/3-D
Rao, Morris [113]	2006	pression 2D	DG	LU	plaque plane
present	2007	NS 2D	$\mathcal{O}(\Delta(x)^3)$ VL [140]	GMRes [118]	tuyère 2-D

UC = centré non structuré; FD = différences finies; DG = Galerkin discontinu; GMRes = Global Minimal Residual [118]; VL = Van Leer [140]

Il faut noter que Compobasso et Giles [14, 29] utilisent une approche hybride où un solveur explicite multigrille *pseudo-time-marching* est couplé en tant que préconditionneur avec un solveur GMRes. Le solveur multigrille est utilisé à l'intérieur de la boucle de création de l'espace de Krylov.

### 1.3 Optimisation aérodynamique stationnaire

Dans un exercice d'optimisation aérodynamique de forme par méthode de descente, le gradient aérodynamique de la fonction de coût peut être évalué soit par méthode de différences finies [8, 37, 62, 79], soit à l'aide d'un opérateur linéarisé [71]. Grâce à cette méthode dite « méthode des sensibilités », un ou plusieurs systèmes linéaires avec une matrice identique mais différents vecteurs à droite doivent être résolus. Lorsque les maillages sont de petite taille et que le stockage nécessite donc un faible espace mémoire, ces systèmes linéaires peuvent être résolus directement par factorisation LU\_bande [7, 8, 13]. Néanmoins, lorsque la taille des maillages devient importante, il est actuellement obligatoire d'utiliser les méthodes itératives. Afin de relaxer le processus itératif

et de garder la même structure que l’algorithme stationnaire, un pas de temps fictif est généralement introduit. Dans ce cas, les systèmes linéaires sont résolus par méthode explicite à pas de temps simple [31, 36, 79, 84, 124] ou, pas de temps multiples [9, 24, 35] ou, afin d’accélérer la vitesse de convergence, par méthode implicite [8, 11, 12, 35, 79, 80, 124, 136].

Notons que Valentin [136] reporte, dans le cas de l’optimisation de formes stationnaires en régime subsonique, la présence d’instabilités numériques lors de résolutions pseudo-temporelles du système linéaire issu de la linéarisation des équations de Navier-Stokes. Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps, ces instabilités sont dépendantes des équations résolues mais sont présentes au sein même de la solution stationnaire.

Dans le tableau, (1.3) nous résumons de manière non exhaustive les différentes méthodes de résolution des équations d’optimisation aérodynamique stationnaire utilisant une résolution de Krylov :

TAB. 1.3 – Méthode de résolution des équations pour le calcul du gradient pour l’optimisation aérodynamique

Auteurs	Année	Modèle	Méthode	Algorithme d’optimisation	Résolution	Application
Burgreen, Baysal [11]	1994	Euler 2D	DA	SD [30]	GMRes_PTM	profil
Burgreen, Baysal [12]	1996	Euler 3D	DA	SD [30]	GMRes_PTM	aile
Anderson, Bonhaus [4]	1999	NS 2D	FD-DA	KSOPT [144]	GMRes_PTM	profil
Nemec, Zingg [103]	2002	NS 2D	FD-DA	BFGS [30]	GMRes_PTM	profil
Gatsis, Zingg [43]	2003	NS 2D	FD-DA	SD+LS [30]	GMRes_PTM	profil
Nielsen, Lu, Park, Darmofal [105]	2004	NS 3D	DD-DA	SD+LS [30]	GMRes_PTM	aile
present	2007	NS 2D	DD-DA	BFGS [30]	MGMRes_NOPTM	tuyère

FD = différences finies ; DD = discrète directe ; DA = discrète adjointe ; SD = Steepest descent ; LS = Line Search ; BFGS = Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno ; KSOPT = Kreisselmeier-Steinhauser optimisation ; PTM = *pseudo-time-marching* ; NOPTM = Sans *pseudo-time-marching* ; MGMRes = Multiple Right Hand Side GMRes [120]

## 1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire se décompose en cinq parties :

- Dans un premier temps, nous présenterons les quatre méthodes de Krylov implémentées et évaluées ainsi que les trois préconditionnements utilisés dans le cadre de ce travail. Puis, nous décrirons une première étude de résolution des équations d’Euler linéarisées 1 $\frac{1}{2}$ D qui nous permettra de justifier le choix de l’algorithme GMRes pour la suite.
- Dans un deuxième temps, nous développerons l’algorithme Newton-GMRes pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires. Nous testerons l’algorithme pour deux régimes d’écoulement : un écoulement hautement subsonique et un écoulement transsonique. Nous validerons les résultats aérodynamiques et comparerons les vitesses de convergence de l’algorithme Newton-GMRes par rapport aux résultats issus d’une résolution Newton-AF-ADI sur une tuyère bidimensionnelle.
- Dans le troisième chapitre, nous reporterons les différents résultats de convergence pour la résolution Newton-GMRes des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps. Nous présenterons une comparaison des résultats à une résolution Newton-AF-ADI déjà existante dans le cas d’une tuyère bi-dimensionnelle avec une fluctuation de pression avale. A la fin de ce chapitre, nous mettrons en évidence les problèmes de stabilité liés à une résolution pseudo-temporelle lorsque l’écoulement stationnaire comporte de forts effets non linéaires.

- Dans le quatrième chapitre, nous montrerons comment l'utilisation d'un algorithme GMRes sans introduction d'un pseudo-pas de temps permet de résoudre les problèmes de stabilité.
- Le dernier chapitre sera consacré à la présentation de résultats relatifs à l'optimisation aérodynamique de forme monocritère et multiparamètres pour une tuyère bidimensionnelle. Nous résoudrons les deux équations directe et adjointe grâce à l'algorithme GMRes sans introduction d'un pseudo-pas de temps. De plus, dans le cadre de la résolution de l'équation directe, nous utiliserons une résolution GMRes avec plusieurs vecteurs à droite.



## Chapitre 2

# Méthodes de Krylov pour les systèmes linéaires non symétriques

Dans le cadre des méthodes de Krylov, la résolution d'un système linéaire  $A\underline{x} = \underline{b}$  consiste à trouver une solution  $\underline{x}_m$  approchée du problème soumise aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \underline{x}_m \in \underline{x}_0 + \mathfrak{K}_m(A, \underline{r}_0) \\ \underline{r}_m \perp \mathfrak{K}_m(A, \underline{r}_0) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice réelle,  $\underline{x}_0$  est une solution initiale arbitraire,  $\mathfrak{K}_m(A, \underline{r}_0)$  est un espace de Krylov orthonormal formé de  $m$  vecteurs de façon itérative,  $\underline{r}_0$  ( $\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0$ ) et  $\underline{r}_m$  ( $\underline{r}_m = \underline{b} - A\underline{x}_m$ ) sont respectivement les résidus du système linéaire au début et en fin de procédure itérative.

Les méthodes de Krylov sont principalement divisées en deux grandes familles qui se différencient par leur procédé d'orthogonalisation. L'espace est orthogonalisé soit par la méthode de Lanczos, soit par la méthode d'Arnoldi. Nous présenterons, dans ce chapitre, les différentes méthodes de Lanczos pour la résolution de systèmes linéaires (cf. 2.1) sous forme unifiée ainsi que la méthode GMRES basée sur une orthogonalisation d'Arnoldi (cf. 2.2). Ces algorithmes étant généralement employés avec un préconditionnement, nous présenterons aussi les préconditionnements utilisés dans la suite de ce travail. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous illustrerons par un exemple simple le choix porté sur l'algorithme basé sur une orthogonalisation d'Arnoldi.

### 2.1 Algorithmes de Krylov pour les problèmes non symétriques avec factorisation de Lanczos

La méthode de biorthogonalisation de Lanczos [83] pour les problèmes à matrices non symétriques est une extension de l'algorithme d'orthogonalisation de Lanczos pour les matrices symétriques [82]. Pour réaliser cette biorthogonalisation, les deux bases  $\mathfrak{K}_m^1$  et  $\mathfrak{K}_m^2$  sont générées :

$$\mathfrak{K}_m^1(A, \underline{v}) = \text{Span}\{\underline{v}, A\underline{v}, \dots, A^{m-1}\underline{v}\} \text{ et } \mathfrak{K}_m^2(A, \underline{w}) = \text{Span}\{\underline{w}, A^T\underline{w}, \dots, (A^T)^{m-1}\underline{w}\} \quad (2.2)$$

Cet algorithme décompose la matrice du système à résoudre  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sous forme de produit entre deux matrices  $V_m \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $W_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$  composées respectivement des vecteurs des bases  $\mathfrak{K}_m^1(A, \underline{v})$  et  $\mathfrak{K}_m^2(A, \underline{w})$  et une matrice tridiagonale  $T_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  :

$$\begin{cases} AV_m &= V_m T_m + \delta_{m+1} \underline{v}_{m+1} \underline{e}_m^T \\ A^T W_m &= W_m T_m^T + \gamma_{m+1} \underline{w}_{m+1} \underline{e}_m^T \\ W_m^T AV_m &= T_m \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $m$  est le nombre d'itérations de Lanczos,  $\underline{v}_{m+1}$  et  $\underline{w}_{m+1}$ , sont les  $(m+1)^{\text{e}}$  vecteurs à l'itération  $m$  des espaces respectifs de Krylov  $\mathfrak{K}_m^1$  et  $\mathfrak{K}_m^2$ ,  $\delta_{m+1}$  et  $\gamma_{m+1}$  sont des facteurs réels multiplicatifs incluant l'erreur de la décomposition et  $\underline{e}_m^T$  est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf à la position  $m$  où  $\underline{e}_m^T(m) = 1$ .

### 2.1.1 Méthode de résolution Bi-CG

L'algorithme de résolution du Bi-Gradient conjugué (Bi-CG) a tout d'abord été proposé par Lanczos [83], puis une réécriture simplifiée a été décrite par Fletcher [40]. Cette méthode se base sur une nouvelle formulation du problème permettant de n'avoir qu'une matrice tridiagonale à inverser.

Deux problèmes sont définis :

- le problème primaire :  $A\underline{x} = \underline{b}$
- le problème dual :  $A^T \underline{x}^* = \underline{b}^*$

et cela même si la résolution d'un problème dual n'est pas nécessaire. Etant donné la biorthogonalisation, les solutions des problèmes primaire et dual s'écrivent de la façon suivante [120] :

$$\begin{aligned} \underline{x}_m &= \underline{x}_0 + V_m T_m^{-1} (\beta \underline{e}_1) \\ &= \underline{x}_0 + V_m U_m^{-1} L_m^{-1} (\beta \underline{e}_1) \\ &= \underline{x}_0 + P_m L_m^{-1} (\beta \underline{e}_1) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \underline{x}_m^* &= \underline{x}_0^* + W_m T_m^{-T} (\beta^* \underline{e}_1) \\ &= \underline{x}_0^* + W_m L_m^{-T} U_m^{-T} (\beta^* \underline{e}_1) \\ &= \underline{x}_0^* + P_m^* U_m^{-T} (\beta^* \underline{e}_1) \end{aligned} \right.$$

où les matrices  $P_m = V_m U_m^{-1}$  et  $P_m^* = W_m L_m^{-T}$  sont les matrices regroupant les directions de recherche des deux problèmes,  $U_m$  et  $L_m$  définissent la décomposition Lower-Upper de la matrice tridiagonale  $T_m$  (Eq. 2.3),  $\beta$  et  $\beta^*$  sont les normes des vecteurs résidus initiaux  $\underline{r}_0$  et  $\underline{r}_0^*$ .

Etant donné la structure de la biorthogonalisation de Lanczos, les vecteurs résidus du problème original  $\underline{r}_m$  et du problème dual  $\underline{r}_m^*$  à la  $m^e$  itération s'écrivent comme une expression polynomiale des vecteurs résidus initiaux :

$$\underline{r}_m = \underline{b} - A\underline{x}_m = \phi_m(A) \underline{r}_0 \text{ et } \underline{r}_m^* = \underline{b} - A^T \underline{x}_m^* = \phi_m(A^T) \underline{r}_0^* \quad (2.4)$$

où  $\phi_m$  est un polynôme de degré  $m$ . Comme les vecteurs des bases  $V_m$  et  $W_m$  sont biorthonormaux<sup>1</sup> [120], par construction les vecteurs résidus  $\underline{r}_i$  et  $\underline{r}_j^*$  sont biorthogonaux :

$$(\underline{r}_i, \underline{r}_j^*) = \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (2.5)$$

où  $\sigma_{ij}$  est un nombre réel et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Les vecteurs solutions à l'itération  $m+1$  s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs solutions à l'itération  $m$  et des directions de descente :

$$\begin{cases} \underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \alpha_m \underline{p}_m \\ \underline{x}_{m+1}^* = \underline{x}_m^* + \alpha_m \underline{p}_m^* \end{cases} \quad (2.6)$$

où respectivement  $\underline{p}_m$  et  $\underline{p}_m^*$  sont les  $m^{\text{es}}$  vecteurs des matrices  $P_m$  et  $P_m^*$  et  $\alpha_m$  un facteur multiplicatif réel à définir ultérieurement. Les vecteurs résidus respectent donc la récurrence suivante :

$$\begin{cases} \underline{r}_{m+1} = \underline{r}_m - \alpha_m A \underline{p}_m \\ \underline{r}_{m+1}^* = \underline{r}_m^* - \alpha_m A^T \underline{p}_m^* \end{cases} \quad (2.7)$$

Les directions de recherche  $\underline{p}_{m+1}$  et  $\underline{p}_{m+1}^*$  sont déterminées par des combinaisons linéaires des vecteurs résidus à l'itération  $m+1$  et des directions de recherche à l'itération  $m$  :

$$\begin{cases} \underline{p}_{m+1} = \underline{r}_{m+1} + \beta_m \underline{p}_m \\ \underline{p}_{m+1}^* = \underline{r}_{m+1}^* + \beta_m \underline{p}_m^* \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\beta_m$  est un autre facteur multiplicatif réel à définir ultérieurement.

En reprenant l'écriture sous forme polynomiale, les directions de recherche s'écrivent :

$$\underline{p}_m = \pi_m(A) \underline{r}_0 \text{ et } \underline{p}_m^* = \pi_m(A^T) \underline{r}_0^* \quad (2.9)$$

où  $\pi_m$  est un polynôme de degré  $m$ .

---

<sup>1</sup>Deux bases  $V_m$  et  $W_m$  sont dites biorthonormales si  $(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$  est le symbole de Kronecker.

Les matrices  $P_m$  et  $P_m^*$  étant A\_-conjuguées<sup>2</sup>, les vecteurs résidus à chaque itération sont orthogonaux à tous les autres vecteurs résidus, en particulier à ceux de deux itérations successives. Cette remarque se traduit par la relation suivante :

$$(\underline{r}_{m+1}^*, \underline{r}_m) = (\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_m^*) = 0 \quad (2.10)$$

En combinant les équations (2.8) et (2.10), la valeur optimale de  $\alpha_m$  qui permet de maximiser la pente pour le calcul de la direction de descente des résidus est obtenue par :

$$(\underline{r}_m - \alpha_m A \underline{p}_m, \underline{r}_m^*) = 0 \implies \alpha_m = \frac{(\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)}{(A \underline{p}_m, \underline{r}_m^*)} \quad (2.11)$$

En réécrivant la relation qui traduit la combinaison linéaire entre les résidus et la direction de descente (Eq. 2.7) ainsi que la relation entre les deux matrices A\_-conjuguées  $P_m$  et  $P_m^*$ , une nouvelle écriture du coefficient  $\alpha_m$  est obtenue :

$$(A \underline{p}_m, \underline{r}_m^*) = (A \underline{p}_m, \underline{p}_m^* - \beta_{m-1} \underline{p}_{m-1}^*) \implies \alpha_m = \frac{(\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)}{(A \underline{p}_m, \underline{p}_m^*)} \quad (2.12)$$

La valeur du coefficient  $\beta_m$  est calculée grâce à la définition de la direction de descente (Eq. 2.8) et le fait que les deux matrices  $P_m$  et  $P_m^*$  sont A\_-conjuguées :

$$(\underline{p}_{m+1}^*, A \underline{p}_m) = 0 \implies (\underline{r}_{m+1}^* + \beta_m \underline{p}_m^*, A \underline{p}_m) = 0 \implies \beta_m = -\frac{(\underline{r}_{m+1}^*, A \underline{p}_m)}{(\underline{p}_m^*, A \underline{p}_m)} \quad (2.13)$$

Par ailleurs, le calcul du coefficient  $\beta_m$  s'effectue de manière analogue à partir de l'équation (2.7) :

$$\beta_m = \frac{1}{\alpha_m} \frac{(\underline{r}_{m+1}^*, (\underline{r}_{m+1} - \underline{r}_m))}{(A \underline{p}_m, \underline{p}_m^*)} = \frac{1}{\alpha_m} \frac{(\underline{r}_{m+1}^*, \underline{r}_{m+1})}{(A \underline{p}_m, \underline{p}_m^*)} \implies \beta_m = \frac{(\underline{r}_{m+1}^*, \underline{r}_{m+1})}{(\underline{r}_m^*, \underline{r}_m)} \quad (2.14)$$

Notons que ces deux coefficients  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  s'expriment aussi sous forme polynomiale :

$$\alpha_m = \frac{(\phi_m(A) \underline{r}_0, \phi_m(A^T) \underline{r}_0^*)}{(A \pi_m(A) \underline{r}_0, \pi_m(A^T) \underline{r}_0^*)} \quad (2.15)$$

$$\beta_m = \frac{(\phi_{m+1}(A) \underline{r}_0, \phi_{m+1}(A^T) \underline{r}_0^*)}{(\phi_m(A) \underline{r}_0, \phi_m(A^T) \underline{r}_0^*)} \quad (2.16)$$

L'algorithme suivant (Al. 1) donne les étapes de la résolution d'un système linéaire par la méthode du Bi-CG tel que le propose Fletcher [40]. Notons que nous présentons ici, pour exemple, une méthode de résolution qui permet le calcul de solution du problème dual mais, en général, la résolution de celui-ci n'est pas demandée. Dans ce cas, le calcul de la nouvelle solution duale  $\underline{x}_{m+1}^*$  n'est pas nécessaire.

<sup>2</sup>Deux matrices  $V$  et  $W$  sont dites A\_-conjuguées si  $(A \underline{w}_i, \underline{v}_j) = (A \underline{w}_j, \underline{v}_i) = 0 \forall i \neq j$ . Par construction, nous avons bien la relation :

$$(P_m^*)^T A P_m = L_m^{-1} W_m^{-T} A V_m U_m^{-1} = L_m^{-1} T_m U_m^{-1} = \mathfrak{J}$$

Les deux matrices  $P_m$  et  $P_m^*$  sont donc bien A\_-conjuguées.



**Algorithme 1** Bi-Gradient Conjugué Bi-CG [40]

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'initialisation,  $\underline{b}_1 \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite du problème primaire,  $\underline{b}_2 \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite du problème dual si nécessaire,

**SORTIES:**  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  vecteur solution

$\underline{r}_0 = \underline{b}_1 - A\underline{x}_0$ ,  $\underline{r}_0^* = \underline{b}_2 - A^T \underline{x}_0$  si nécessaire, sinon  $\underline{r}_0^*$  arbitraire tel que :  $(\underline{r}_0, \underline{r}_0^*) \neq 0$  (généralement  $\underline{r}_0^* = \underline{r}_0$ )

$\underline{p}_0 = \underline{r}_0$  et  $\underline{p}_0^* = \underline{r}_0^*$

**For**  $m = 0, 1, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

$\alpha_m = (\underline{r}_m, \underline{r}_m^*) / (A\underline{p}_m, \underline{p}_m^*)$

$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \alpha_m \underline{p}_m$

$\underline{x}_{m+1}^* = \underline{x}_m^* + \alpha_m \underline{p}_m^*$

$\underline{r}_{m+1} = \underline{r}_m - \alpha_m A\underline{p}_m$

$\underline{r}_{m+1}^* = \underline{r}_m^* - \alpha_m A^T \underline{p}_m^*$

$\beta_m = (\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_{m+1}^*) / (\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)$

$\underline{p}_{m+1} = \underline{r}_{m+1} + \beta_m \underline{p}_m$

$\underline{p}_{m+1}^* = \underline{r}_{m+1}^* + \beta_m \underline{p}_m^*$

**End for**

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs :

- La multiplication d'un vecteur par la matrice transposée pour la création de l'espace dual. Généralement, grâce à ce type de résolution, la matrice n'a pas besoin d'être calculée explicitement puis stockée. Ainsi, le développement numérique nécessaire au calcul du produit avec la matrice transposée peut être très important.

- Par ailleurs, cette approche peut souffrir d'un manque de robustesse. Lorsque le produit scalaire entre les résidus  $(\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)$  définissant le numérateur pour le calcul du nouveau coefficient  $\beta_m$  devient nul (Eq. 2.14), le processus itératif ne peut se poursuivre. Il y a deux possibilités pour que ce produit soit nul. Dans le premier cas, si l'un des deux vecteurs est nul, le processus itératif a atteint la solution exacte [120]. Dans le second cas, les deux vecteurs résidus  $\underline{r}_m$  et  $\underline{r}_m^*$  sont orthogonaux, l'algorithme s'arrête sans parvenir à converger. Dans ce cas, certaines méthodes telles que le calcul avancé des vecteurs de Lanczos [110] permettent d'y remédier partiellement.

### 2.1.2 Méthode de résolution CGS

L'algorithme de résolution *Conjugate Gradient Square* (CGS) a été développé par Sonneveld [129] afin d'améliorer la vitesse de convergence du Bi-CG (Al. 1). De plus, il possède l'avantage de s'affranchir de la multiplication par la matrice transposée et de la résolution d'un problème dual.

Etant donné la relation de biorthogonalité entre les deux espaces  $\mathfrak{K}_1$  et  $\mathfrak{K}_2$ , les coefficients  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  de l'algorithme Bi-CG (Eqs. 2.15 et 2.16) peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\alpha_m = \frac{(\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)}{(A\underline{p}_m, \underline{p}_m^*)} = \frac{(\phi_m(A) \underline{r}_0, \phi_m(A^T) \underline{r}_0^*)}{(A\pi_m(A) \underline{r}_0, \pi_m(A^T) \underline{r}_0^*)} = \frac{(\phi_m^2(A) \underline{r}_0, \underline{r}_0^*)}{(A\pi_m^2(A) \underline{r}_0, \underline{r}_0^*)} \quad (2.17)$$

$$\beta_m = \frac{(\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_{m+1}^*)}{(\underline{r}_m, \underline{r}_m^*)} = \frac{(\phi_{m+1}(A) \underline{r}_0, \phi_{m+1}(A^T) \underline{r}_0^*)}{(\phi_m(A) \underline{r}_0, \phi_m(A^T) \underline{r}_0^*)} = \frac{(\phi_{m+1}^2(A) \underline{r}_0, \underline{r}_0^*)}{(\phi_m^2(A) \underline{r}_0, \underline{r}_0^*)} \quad (2.18)$$

Au lieu d'utiliser une double formule de récurrence sur les résidus  $\underline{r}_m = \phi_m(A) \underline{r}_0$  et  $\underline{r}_m^* = \phi_m(A^T) \underline{r}_0^*$ , Sonneveld [129] propose d'établir une autre formule de récurrence sur le carré des résidus du problème original  $\underline{r}_m = \phi_m^2(A) \underline{r}_0$ . Pour cela, il est nécessaire d'obtenir une récurrence pour les deux polynômes  $\phi_m^2(A)$  et  $\pi_m^2(A)$ . Ces expressions s'obtiennent en développant les équations (2.7) et (2.8) :

$$\phi_{m+1}^2(A) = (\phi_m(A) - \alpha_m A\pi_m(A))^2 = \phi_m^2(A) - 2A\alpha_m\phi_m(A)\pi_m(A) + \alpha_m^2 A^2\pi_m^2(A) \quad (2.19)$$

$$\pi_{m+1}^2(A) = (\phi_{m+1}(A) + \beta_m\pi_m(A))^2 = \phi_{m+1}^2(A) + 2\beta_m\phi_{m+1}(A)\pi_m(A) + \beta_m^2\pi_m^2(A) \quad (2.20)$$

Les termes carrés  $\phi_{m+1}^2(A)$  et  $\pi_{m+1}^2(A)$  sont des combinaisons linéaires de leurs valeurs précédentes  $\phi_m^2(A)$  et  $\pi_m^2(A)$  et des termes croisés  $\phi_m(A)\pi_m(A)$  et  $\phi_{m+1}(A)\pi_m(A)$ .

La récurrence du premier terme croisé  $\phi_m(A)\pi_m(A)$  est calculée à partir de la récurrence sur la direction de recherche (Eq. 2.8) :

$$\begin{aligned}\phi_m(A)\pi_m(A) &= \phi_m(A)(\phi_m(A) + \beta_{m-1}\pi_{m-1}(A)) \\ &= \phi_m^2(A) + \beta_{m-1}\phi_m(A)\pi_{m-1}(A)\end{aligned}\quad (2.21)$$

Cette procédure permet de faire apparaître l'autre terme croisé  $\phi_m(A)\pi_{m-1}(A)$  à l'itération précédente. Ce dernier est inséré comme nouveau polynôme à calculer par une nouvelle étape dans la boucle itérative.

$$\begin{aligned}\phi_{m+1}(A)\pi_m(A) &= (\phi_m(A) - \alpha_m A\pi_m(A))\pi_m(A) \\ &= \phi_m(A)\pi_m(A) - \alpha_m A\pi_m^2(A) \\ &= \phi_m^2(A) + \beta_{m-1}\phi_m(A)\pi_{m-1}(A) - \alpha_m A\pi_m^2(A)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Nous devons donc, à chaque itération de l'algorithme, calculer trois vecteurs par récurrence :

$$\begin{cases} \underline{q}_m &= \phi_m(A)\pi_{m-1}(A)\underline{r}_0 = \underline{r}_m + \beta_{m-1}\underline{q}_{m-1} - \alpha_m A\underline{p}_m \\ \underline{r}_{m+1} &= \phi_{m+1}^2(A)\underline{r}_0 = \underline{r}_m + \alpha_m A(2\underline{r}_m + 2\beta_{m-1}\underline{q}_{m-1} - \alpha_m A\underline{p}_m) \\ \underline{p}_{m+1} &= \pi_{m+1}^2(A)\underline{r}_0 = \underline{r}_{m+1} + 2\beta_m \underline{q}_m - \beta_m^2 \underline{p}_m \end{cases}\quad (2.23)$$

Les deux coefficients réels  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha_m &= \frac{(\phi_m^2(A)\underline{r}_0, \underline{r}_0^*)}{(A\pi_m^2(A)\underline{r}_0, \underline{r}_0^*)} = \frac{(\underline{r}_m, \underline{r}_0^*)}{(A\underline{p}_m, \underline{r}_0^*)} \\ \beta_m &= \frac{(\phi_{m+1}^2(A)\underline{r}_0, \underline{r}_0^*)}{(\phi_m^2(A)\underline{r}_0, \underline{r}_0^*)} = \frac{(\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_0^*)}{(\underline{r}_m, \underline{r}_0^*)} \end{cases}\quad (2.24)$$

L'algorithme de CGS proposé par Sonneveld [129], dans lequel le vecteur  $\underline{u}_m = \underline{r}_m + \beta_{m-1}\underline{q}_{m-1}$  a été introduit pour une meilleure lisibilité, peut ainsi s'écrire comme suit :

---

**Algorithme 2** Algorithme CGS [129]
 

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'initialisation,  $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite

**SORTIES:**  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  vecteur solution

$\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0$ ,  $\underline{r}_0^*$  arbitraire tel que :  $(\underline{r}_0, \underline{r}_0^*) \neq 0$  (généralement  $\underline{r}_0 = \underline{r}_0^*$ )

$\underline{p}_0 = \underline{u}_0 = \underline{r}_0$

**For**  $n = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

$\alpha_m = (\underline{r}_m, \underline{r}_0^*) / (A\underline{p}_m, \underline{r}_0^*)$

$\underline{q}_m = \underline{u}_m - \alpha_m A\underline{p}_m$

$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \alpha_m(\underline{u}_m - \underline{q}_m)$

$\underline{r}_{m+1} = \underline{r}_m - \alpha_m A(\underline{u}_m - \underline{q}_m)$

$\beta_m = (\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_0^*) / (\underline{r}_m, \underline{r}_0^*)$

$\underline{u}_{m+1} = \underline{r}_{m+1} + \beta_m \underline{q}_m$

$\underline{p}_{m+1} = \underline{u}_{m+1} + \beta_m(\underline{q}_m - \beta_m \underline{p}_m)$

**End for**

---

Par construction, l'algorithme CGS possède de bonnes propriétés de convergence, étant donné la procédure de récurrence basée sur le polynôme des résidus au carré. Grâce à cela, cet algorithme converge à une vitesse de l'ordre de deux fois plus élevée que l'algorithme de la méthode Bi-CG. En revanche, cette méthode étant basée sur l'élevation au carré des polynômes des résidus, elle souffre d'un manque de robustesse en raison des erreurs d'arrondis et des troncatures numériques [120, p. 216].

### 2.1.3 Méthode de résolution Bi-CGstab

Afin de remédier au problème de stabilité de l'algorithme CGS tout en conservant ses bonnes propriétés de convergence, Van Der Vorst [143] a proposé une nouvelle méthode appelée le Bi-Gradient Conjugué Stabilisé (Bi-CGstab) dont la convergence est plus régulière afin de limiter les risques de divergence. Pour cela, il propose

[143], au lieu d'élever au carré le polynôme des résidus (Eq. 2.18), de multiplier les polynômes  $\phi_m(A)$  et  $\pi_m(A)$  par un nouveau polynôme  $\psi_m(A)$  permettant de lisser la convergence du processus itératif :

$$\begin{cases} \underline{r}_m = \psi_m(A)\phi_m(A)\underline{r}_0 \\ \underline{p}_m = \psi_m(A)\pi_m(A)\underline{r}_0 \end{cases} \quad (2.25)$$

La formule de récurrence du polynôme  $\psi_m(A)$  est donnée par [143] :

$$\psi_m(A) = (1 - \omega_m A) \psi_{m-1}(A) \quad (2.26)$$

où  $\omega_m$  est un nouveau coefficient réel qu'il faudra définir ultérieurement.

En reprenant les définitions des polynômes  $\phi_m(A)$  (Eq. 2.4) et  $\psi_m(A)$  (Eq. 2.26), la formule de récurrence pour le nouveau polynôme  $\psi_m(A)\phi_m(A)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(A)\phi_{m+1}(A) &= (1 - \omega_m A) \psi_m(A)\phi_{m+1}(A) \\ &= (1 - \omega_m A) (\psi_m(A)\phi_m(A) - \alpha_m A \psi_m(A)\pi_m(A)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'équation précédente fait apparaître le nouveau polynôme  $\psi_m(A)\pi_m(A)$  qui définit la direction de descente à l'itération courante et dont la nouvelle formule de récurrence s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_{m+1}(A)\pi_{m+1}(A) &= \psi_{m+1}(A) (\phi_{m+1}(A) + \beta_m \pi_m(A)) \\ &= \psi_{m+1}(A)\phi_{m+1}(A) + \beta_m (1 - \omega_m A) \psi_m(A)\pi_m(A) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nous obtenons, en reprenant la notation vectorielle, les deux relations de récurrence suivantes pour  $\underline{r}_m$  et  $\underline{p}_m$  :

$$\underline{r}_{m+1} = (\mathcal{J} - \omega_m A)(\underline{r}_m - \alpha_m A \underline{p}_m) \quad (2.29)$$

$$\underline{p}_{m+1} = \underline{r}_{m+1} + \beta_m (\mathcal{J} - \omega_m A) \underline{p}_m \quad (2.30)$$

Il reste enfin à établir les relations pour les valeurs des différents coefficients réels  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  et  $\omega_m$  intervenant dans la procédure de résolution.

Notons  $\tilde{\rho}_m$  le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m &= (\underline{r}_m, \underline{r}_0^*) \\ &= (\psi_m(A)\phi_m(A)\underline{r}_0, \underline{r}_0^*) \\ &= (\phi_m(A)\underline{r}_0, \psi_m(A^T)\underline{r}_0^*) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Par construction,  $\phi_m(A)$  est orthogonal à tous polynômes  $(A^T)^k$  si  $k$  est inférieur  $m$  et en particulier  $\psi_k(A^T)$  et  $\phi_k(A^T)$ . Le seul coefficient non nul de l'équation (2.31) est donc le terme de plus haut degré noté  $\eta^{(m)}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m &= (\phi_m(A)\underline{r}_0, \eta^{(m)}(A^T)^m \underline{r}_0^*) \\ &= (\phi_m(A)\underline{r}_0, \frac{\eta^{(m)}}{\gamma^{(m)}} \phi_m(A^T)\underline{r}_0^*) \\ &= \frac{\eta^{(m)}}{\gamma^{(m)}} (\phi_m(A)\underline{r}_0, \phi_m(A^T)\underline{r}_0^*) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $\gamma^{(m)}$  est le terme de plus haut degré du polynôme  $\phi_m(A^T)$ .

En développant les récurrences des polynômes  $\phi_m(A^T)$  et  $\psi_m(A^T)$ , nous obtenons pour les termes de plus haut degré  $\eta^{(m)}$  et  $\gamma^{(m)}$  :

$$\eta^{(m)} = (-1)^m \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m \quad (2.33)$$

$$\gamma^{(m)} = (-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \quad (2.34)$$

Le calcul du coefficient réel  $\beta_m$  (Eq. 2.23) devant être identique à la méthode CGS,  $\beta_m$  se calcule donc par la formule [143] :

$$\beta_m = \frac{\tilde{\rho}_{m+1} \alpha_m}{\tilde{\rho}_m \omega_m} \quad (2.35)$$

Une procédure analogue permet d'obtenir une relation pour le calcul de  $\alpha_m$  :

$$\alpha_m = \frac{\tilde{\rho}_m}{(A \underline{p}_m, \underline{r}_0^*)} \quad (2.36)$$

Van Der Vorst [143] base le choix du coefficient  $\omega_m$  sur la minimisation de la norme L2 du polynôme  $(\mathcal{J} - \omega A)\psi_m(A)\phi_{m+1}(A)\underline{r}_0$  :

$$\omega_m = \frac{(A\underline{s}_m, \underline{s}_m)}{(A\underline{s}_m, A\underline{s}_m)}, \text{ avec } \underline{s}_m = \underline{r}_m - \alpha_m A \underline{p}_m \quad (2.37)$$

En reprenant les équations (2.25) et (2.37), le vecteur solution est entièrement déterminé par :

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \alpha_m \underline{p}_m + \omega_m \underline{s}_m \quad (2.38)$$

L'algorithme du Bi-CGstab proposé par Van Der Vorst [143] est présenté sous la forme synthétique ci-après.

---

**Algorithme 3** Algorithme Bi-CGstab [143]

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'initialisation,  $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite

**SORTIES:**  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  vecteur solution

$\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0$ ,  $\underline{r}_0^*$  arbitraire tel que :  $(\underline{r}_0, \underline{r}_0^*) \neq 0$  (généralement  $\underline{r}_0 = \underline{r}_0^*$ )

$\underline{p}_0 = \underline{r}_0$

**For**  $m = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

$\alpha_m = (\underline{r}_m, \underline{r}_0^*) / (A\underline{p}_m, \underline{r}_0^*)$

$\underline{s}_m = \underline{r}_m - \alpha_m A \underline{p}_m$

$\omega_m = (A\underline{s}_m, \underline{s}_m) / (A\underline{s}_m, A\underline{s}_m)$

$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \alpha_m \underline{p}_m + \omega_m \underline{s}_m$

$\underline{r}_{m+1} = \underline{s}_m - \omega_m A \underline{s}_m$

$\beta_m = (\underline{r}_{m+1}, \underline{r}_0^*) / (\underline{r}_m, \underline{r}_0^*) (\alpha_m / \omega_m)$

$\underline{p}_{m+1} = \underline{r}_{m+1} + \beta_m (\underline{p}_m - \omega_m A \underline{p}_m)$

**End for**

---

## 2.2 Algorithme de Krylov avec factorisation d'Arnoldi

### 2.2.1 Factorisation d'Arnoldi

L'algorithme d'Arnoldi modifié par Gram-Schmidt [120, p. 146-148] est une autre méthode pour factoriser et orthonormaliser un espace. Le principe de cet algorithme est de décomposer la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en une matrice  $H_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  Hessenberg supérieure grâce à la base de Krylov  $V_m \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

$$\begin{aligned} AV_m &= V_m H_m + w_m \underline{e}_m^T \\ &= V_{m+1} \overline{H}_m \\ V_m^T AV_m &= H_m \end{aligned} \quad (2.39)$$

où  $w_m$  est un coefficient réel,  $V_{m+1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la base de Krylov à l'itération  $m + 1$  et  $\overline{H}_m \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$  une matrice Hessenberg.

---

**Algorithme 4** Procédure de factorisation d'Arnoldi modifiée par Gram-Schmidt [120, p. 147-148]

---

**ENTRÉES:**  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  base de vecteur

**SORTIES:**  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  base de vecteurs orthonormaux

choix arbitraire  $\underline{v}_1$  tel que  $\|\underline{v}_1\| = 1$

**For**  $j = 1, \dots, m$  **Do** :

$\underline{q} = A\underline{v}_j$

**For**  $i = 1, \dots, j$  **Do** :

$h_{ij} = (\underline{q}, \underline{v}_i)$

$\underline{q} = \underline{q} - h_{ij}\underline{v}_i$

**End for**

$h_{j+1,j} = \|\underline{q}\|$

$\underline{v}_{j+1} = \underline{q}/h_{j+1,j}$

**End for**

---

Gram-Schmidt a apporté une modification dans la boucle interne qui permet une meilleure orthogonalisation dans le cas d'une résolution numérique. Alors que dans l'algorithme original d'Arnoldi [120, p. 146-148] le nouveau vecteur  $\underline{q}$  est calculé en deux boucles différentes, dans l'algorithme modifié par Gram-Schmidt, il est calculé en une seule. Soulignons par ailleurs l'existence de l'algorithme de Householder qui permet d'améliorer l'orthogonalisation de la base et, de ce fait, de réduire les erreurs numériques. Cependant, étant donné le surcroît en temps de calcul [120, p. 149-151], cette approche n'a pas été retenue dans le cadre de cette étude.

## 2.2.2 Méthode de résolution GMRes

La méthode de résolution du Global Minimal Residual (GMRes), proposée par Saad [118], s'appuie essentiellement sur l'algorithme d'orthogonalisation d'Arnoldi. Par construction, le vecteur solution est calculé comme suit :

$$\underline{x}_m = \underline{x}_0 + V_m \underline{y} \quad (2.40)$$

où  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur défini par la fonction suivante :

$$\mathcal{J}(\underline{y}) = \|\underline{b} - A\underline{x}_m\| = \|\underline{b} - A(\underline{x}_0 + V_m \underline{y})\| \quad (2.41)$$

Dans le cadre de la méthode GMRes, le vecteur  $\underline{y}$  est déterminé de telle sorte qu'il minimise les résidus, c'est-à-dire qu'il minimise la fonction  $\mathcal{J}(\underline{y})$  (Eq. 2.41).

Le vecteur résidus  $\underline{b} - A\underline{x}_m$  peut s'écrire à partir de la relation (2.39), de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{b} - A\underline{x}_m &= \underline{b} - A(\underline{x}_0 + V_m \underline{y}) \\ &= \underline{r}_0 - AV_m \underline{y} \\ &= \beta \underline{v}_1 - V_{m+1} \overline{H}_m \underline{y} \\ &= V_{m+1} (\beta \underline{e}_1 - \overline{H}_m \underline{y}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

où  $\beta = \|\underline{b} - A\underline{x}_0\|$  est la norme des résidus initiaux. Etant donné la structure de la matrice  $V_m$  qui est composée de vecteurs orthonormaux, la fonction  $\mathcal{J}(\underline{y})$  peut se réécrire :

$$\mathcal{J}(\underline{y}) = \|\underline{b} - A\underline{x}_m\| = \|V_{m+1} (\beta \underline{e}_1 - \overline{H}_m \underline{y})\| = \|\beta \underline{e}_1 - \overline{H}_m \underline{y}\| \quad (2.43)$$

Afin de minimiser  $\mathcal{J}(\underline{y})$ , il faut trouver le vecteur  $\underline{y}_m$  qui annule la norme  $\|\beta \underline{e}_1 - \overline{H}_m \underline{y}\|$ . Pour cela, nous devons résoudre le système linéaire suivant :

$$\beta \underline{e}_1 - \overline{H}_m \underline{y} = 0 \quad (2.44)$$

La solution du problème de minimisation est ainsi ramené à résoudre un système linéaire de taille beaucoup plus faible car  $m \ll n$ .

Les méthodes basées sur l'orthogonalisation d'Arnoldi présentent un inconvénient majeur par rapport aux méthodes basées sur la biorthogonalisation de Lanczos car elles nécessitent le stockage en mémoire de l'ensemble

de la base de Krylov. Pour remédier à ce problème, l'algorithme GMRes\_restarted a été développé. C'est-à-dire qu'à la fin du processus itératif, si la convergence désirée n'a pas été atteinte, l'algorithme est redémarré avec comme vecteur initial le vecteur solution calculé à la fin du processus GMRes précédent. Nous avons ainsi besoin de stocker en mémoire une partie seulement de l'ensemble de la base de Krylov nécessaire à la résolution. Mais alors que le processus GMRes classique, grâce à la minimisation des résidus, est assuré de converger en  $n$  itérations quel que soit le type de matrice, le processus GMRes\_restarted peut donner lieu à la stagnation des résidus si la matrice du problème n'est, comme ici, pas définie positive. L'algorithme GMRes\_restarted proposé par Saad [118] peut se résumer comme suit :

---

**Algorithme 5** Algorithme GMRes\_restarted [118]
 

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  vecteur d'initialisation,  $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite

**SORTIES:**  $\underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$  vecteur solution après  $m$  itérations GMRes

$\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0$ ,  $\beta = \|\underline{r}_0\|$ , et  $\underline{v}_1 = \underline{r}_0/\beta$

**For**  $j = 1, \dots, m$  **Do** :

$\underline{w}_j = A\underline{v}_j$

**For**  $i = 1, \dots, j$  **Do** :

$h_{ij} = (\underline{w}_j, \underline{v}_i)$

$\underline{w}_j = \underline{w}_j - h_{ij}\underline{v}_i$

**End for**

$h_{j+1,j} = \|\underline{w}_j\|$

$\underline{v}_{j+1} = \underline{w}_j/h_{j+1,j}$

**End for**

Calcul de  $\underline{y}_m$  qui minimise  $\|\beta e_1 - \overline{H}_m \underline{y}\|$

Calcul de  $\underline{x}_m = \underline{x}_0 + V_m \underline{y}_m$

**If**  $\|\underline{b} - A\underline{x}_m\| \not\leq \varepsilon$  **then**

$\underline{x}_0 = \underline{x}_m$  et redémarrage de l'algorithme

**End if**

---

La matrice d'orthogonalisation  $\overline{H}_m$  n'étant plus tridiagonale, nous ne pouvons plus calculer à chaque itération la nouvelle valeur du vecteur solution sans un surcoût important en temps de calcul. Dès lors, l'erreur de convergence ne peut pas être *a priori* connue au fur et à mesure des itérations mais seulement avant chaque redémarrage. Cependant, une implémentation numérique intelligente permet d'avoir la norme du vecteur erreur sans avoir à calculer le vecteur solution à chaque itération. Pour cela, nous devons réaliser des rotations successives des colonnes de la matrices rendant la matrice  $\overline{H}_m$  triangulaire supérieure. Cette implémentation est avantageuse en termes de temps de calcul car elle permet de définir comme critères d'arrêt du processus itératif un nombre d'itérations maximal et une diminution des résidus préalablement définie.

En reprenant l'écriture de la fonction  $\mathcal{J}(\underline{y})$  (Eq. 2.43), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\underline{y}) &= \|\underline{b} - A\underline{x}_m\| &= \|\beta e_1 - \overline{H}_m \underline{y}\| \\
 & &= \|\overline{Q}_m (\beta e_1 - \overline{H}_m \underline{y})\| \\
 & &= \|\underline{g}_{m+1} - \overline{S}_m \underline{y}\| \\
 & &= |g_{m+1}| + \|\underline{g}_m - S_m \underline{y}\|
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

où  $\overline{Q}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est la matrice de rotation qui annule la sous-diagonale de  $\underline{H}_m$ ,  $\underline{g}_{m+1} \in \mathbb{R}^{m+1}$ , est un vecteur issu des rotations du vecteur  $\beta e_1$ .

La minimisation se traduit alors par la résolution du problème suivant :

$$\text{trouver } \underline{y} \text{ tel que } \|\underline{g}_m - S_m \underline{y}\| = 0 \tag{2.46}$$

qui correspond à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est triangulaire et de dimensions  $m \times m$ . De plus, la norme des résidus à l'itération  $m$  s'obtient alors par :

$$\|\underline{b} - A\underline{x}_m\| = |g_{m+1}| \tag{2.47}$$

### 2.2.3 Méthode de résolution MGMRes

Certaines méthodologies relevant par exemple du cadre de l'optimisation de formes [71] peuvent nécessiter la résolution de plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice mais différents vecteurs de second membre. C'est notamment le cas des problèmes d'optimisation directe, avec plusieurs paramètres de contrôle, ou de l'optimisation adjointe avec des gradients de contraintes aérodynamiques [136]. Il peut être intéressant d'utiliser les méthodes de Krylov dites « méthodes de Krylov par bloc Multiple (MGMRes) » qui exploitent cette propriété [119, 122, 127]. Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes intéressés à une extension proposée par Ruhe [116] de l'algorithme d'Arnoldi. Cet algorithme [116] a été initialement développé pour la résolution de systèmes linéaires avec des matrices symétriques et a été étendu par Saad [120, p. 196-200] à des problèmes non symétriques. Notons qu'il limite la parallélisation mais son efficacité reste indépendante du nombre de systèmes linéaires à résoudre.

Ces méthodes consistent à résoudre simultanément  $p$  systèmes linéaires :

$$\underbrace{A\underline{x}^{(l=1,\dots,p)} = \underline{b}^{(l=1,\dots,p)}}_{\text{Forme vectorielle}} \iff \underbrace{AX = B}_{\text{Forme matricielle}} \quad (2.48)$$

Soit  $X_0 = [\underline{x}_0^{(1)}, \underline{x}_0^{(2)}, \dots, \underline{x}_0^{(p)}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$  un ensemble de vecteur initiaux, les résidus correspondants s'écrivent :

$$R_0 \equiv [\underline{r}_0^{(1)}, \underline{r}_0^{(2)}, \dots, \underline{r}_0^{(p)}] = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p] R \quad (2.49)$$

où  $R_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  désigne l'ensemble des résidus initiaux tel que  $\underline{r}_0^{(l)} = \underline{b}^{(l)} - A\underline{x}_0^{(l)}$ ,  $[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , est la factorisation  $QR$  de  $R_0$  formant les  $p$  premiers vecteurs de la base de Krylov et  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice triangulaire supérieure.

L'approximation de la solution s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{x}^{(l=1,\dots,p)} = \underline{x}_0^{(l=1,\dots,p)} + V_m y^{(l=1,\dots,p)} \iff X = X_0 + V_m Y \quad (2.50)$$

Afin de procéder par analogie avec la méthode GMRes classique, le seul élément manquant est l'analogie avec le vecteur  $\beta \underline{e}_1$  (Eq. 2.42) :

$$\begin{aligned} B - AX_m &= B - A(X_0 + V_m Y) \\ &= R_0 - AV_m Y \\ &= [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p] R - V_{m+p} \overline{H}_m Y \\ &= V_{m+p} (E_1 R - \overline{H}_m Y) \end{aligned} \quad (2.51)$$

où  $E_1 \in \mathbb{R}^{(m+p) \times p}$  est une matrice dont le bloc supérieur  $p \times p$  est la matrice identité, le vecteur  $\beta \underline{e}_1$  est remplacé par la matrice  $E_1$ .

Les fonctions à minimiser  $\mathcal{J}^{(l)}(y)$  (Eq. 2.41) relatives à chaque système linéaire sont alors données par :

$$\mathcal{J}^{(l)}(y) = \|\underline{b}^{(l)} - A\underline{x}_m^{(l)}\| = \|E_1 R \underline{e}_l - \overline{H}_m \underline{y}^{(l)}\| \quad (2.52)$$

Dans ce cas de figure, la matrice  $\overline{H}_m$  devient une matrice triangulaire supérieure à  $p$  sous-diagonales<sup>3</sup>. Il est donc nécessaire d'effectuer  $p$  rotations à chaque itération MGMRes pour obtenir une matrice  $H_m$  triangulaire supérieure. De plus, grâce à ces  $p$  rotations, les normes des erreurs de chaque système peuvent être évaluées sans avoir à calculer explicitement l'ensemble des vecteurs solutions :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(l)}(\underline{y}) &= \|\underline{b}^{(l)} - A\underline{x}_m^{(l)}\| = \min_{y^{(l)}} \|E_1 R \underline{e}_l - \overline{H}_m \underline{y}^{(l)}\| \\ &= \min_{y^{(l)}} \|\overline{Q}_m (E_1 R \underline{e}_l - \overline{H}_m \underline{y}^{(l)})\| \\ &= \min_{y^{(l)}} \|\hat{\underline{g}}_m^{(l)} - \overline{S}_m \underline{y}^{(l)}\| \\ &= \|g_{m+p}^{(l)}, \dots, g_{m+1}^{(l)}\| + \min_{y^{(l)}} \|g_m^{(l)} - S_m \underline{y}^{(l)}\| \end{aligned} \quad (2.53)$$

L'erreur de chaque système linéaire s'obtient donc à l'itération  $m$  par :

$$\|\underline{b}^{(l)} - A\underline{x}_m^{(l)}\| = \|g_{m+p}^{(l)} + \dots + g_{m+1}^{(l)}\| \quad (2.54)$$

<sup>3</sup>Rappelons que la matrice  $\overline{H}_m$  est une matrice d'Hessenberg dans le cas d'un système linéaire unique (Eq. 2.39).

---

**Algorithme 6** Algorithme MGMRes sans rotation [120, p. 196-200]
 

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  matrice des  $p$  vecteurs à droite,  $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  matrice des  $p$  vecteurs initiaux

**SORTIES:**  $X_m \in \mathbb{R}^{n \times p}$  matrice des  $p$  vecteurs solutions après  $m$  itérations GMRes

$$V = B - AX_0$$

$$r_{11} = \|\underline{v}_1\|, \text{ et } \underline{v}_1 = \underline{v}_1/r_{11}$$

**For**  $j = 2, 3, \dots, p$  **Do** :

$$\underline{w} = \underline{v}_j$$

**For**  $i = 1, \dots, j - 1$  **Do** :

$$r_{ij} = (\underline{w}, \underline{v}_i)$$

$$\underline{w} = \underline{w} - r_{ij}\underline{v}_i$$

**End for**

$$r_{jj} = \|\underline{w}\|$$

$$\underline{v}_j = \underline{w}/r_{jj}$$

**End for**
**For**  $j = p, p + 1, \dots, m$  **Do** :

$$k = j - p + 1$$

$$\underline{w} = A\underline{v}_k$$

**For**  $i = 1, 2, \dots, j$  **Do** :

$$h_{ik} = (\underline{w}, \underline{v}_i)$$

$$\underline{w} = \underline{w} - h_{ik}\underline{v}_i$$

**End for**

$$h_{j+1,j} = \|\underline{w}_j\|$$

$$\underline{v}_{j+1} = \underline{w}_j/h_{j+1,j}$$

**End for**

 Calcul de  $Y_m$  minimisant  $\|R - H_m Y\|$ 

 Calcul  $X_m = X_0 + V_m * Y_m$ 


---

## 2.3 Méthodes de préconditionnement pour les méthodes de Krylov

La résolution par méthode de Krylov n'est pas envisageable sans l'utilisation d'un préconditionnement. Il existe deux manières pour appliquer un préconditionnement  $M$  :

$$\underbrace{AM^{-1}M\underline{x} = \underline{b}}_{\text{Préconditionnement à droite}} \iff A\underline{x} = \underline{b} \iff \underbrace{M^{-1}A\underline{x} = M^{-1}\underline{b}}_{\text{Préconditionnement à gauche}} \quad (2.55)$$

Lorsque nous utilisons un préconditionnement à gauche, le système linéaire est résolu directement. En revanche, dans le cas d'un préconditionnement à droite, le système linéaire est modifié et le nouveau système s'écrit :

$$AM^{-1}\underline{y} = \underline{b} \text{ ou } \underline{x} = M^{-1}\underline{y} \quad (2.56)$$

La matrice de préconditionnement a pour but d'approcher le plus possible de la matrice inverse du système linéaire. Cette matrice peut être plus ou moins complexe et prendre plus ou moins de temps à calculer. Cela peut demander des FFT, des intégrations ou même la résolution de plusieurs systèmes linéaires simples. En règle générale, plus la matrice de préconditionnement est difficile à calculer, moins le temps de résolution du système linéaire est important. Cette matrice n'est pas forcément explicite, elle peut être seulement implicite et recalculée à chaque itération. Le choix des préconditionneurs a été dicté par une simplicité de calcul et d'utilisation. En effet, la matrice de préconditionnement n'est généralement pas multipliée directement à la matrice initiale du problème mais l'application du préconditionnement se réalise en deux temps.

$$AM^{-1}\underline{v}_i = (AM^{-1})\underline{v}_i = A(M^{-1}\underline{v}_i) \quad (2.57)$$

Cela a deux avantages. Tout d'abord, si nous stockons la matrice, nous ne stockons que ses éléments non nuls. Or le produit entre la matrice et son préconditionnement peut être nettement supérieur en espace mémoire requis pour le stockage des nouveaux éléments non nuls. Qui plus est, nous ne connaissons pas forcément *a priori* les



---

**Algorithme 7** Algorithme GMRes avec préconditionnement à droite [120]
 

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice de préconditionnement,  $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$  vecteur à droite,  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  vecteur initial

**SORTIES:**  $\underline{x}_m \in \mathbb{R}^n$  vecteur solution après  $m$  itérations GMRes

 $\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0$ ,  $\beta = \|\underline{r}_0\|$ , et  $\underline{v}_1 = \underline{r}_0/\beta$ 
**For**  $j = 1, \dots, m$  **Do** :

 $\underline{w}_j = AM^{-1}\underline{v}_j$ 
**For**  $i = 1, \dots, j$  **Do** :

 $h_{ij} = (\underline{w}_j, \underline{v}_i)$ 
 $\underline{w}_j = \underline{w}_j - h_{ij}\underline{v}_i$ 
**End for**
 $h_{j+1,j} = \|\underline{w}_j\|$ 
 $\underline{v}_{j+1} = \underline{w}_j/h_{j+1,j}$ 
**End for**

Calcul  $\underline{y}_m$  qui minimise  $\|\beta\underline{e}_1 - \overline{H}_m\underline{y}\|$ 

Calcul  $\underline{x}_m = \underline{x}_0 + M^{-1}V_m\underline{y}_m$ 
**If**  $\|\underline{b} - A\underline{x}_m\| \not\leq \varepsilon$  **then**
 $\underline{x}_0 = \underline{x}_m$  et redémarrage

**End if**


---

nouvelles dimensions de la matrice. De plus, nous ne stockons pas forcément la matrice, étant donné que seul le produit de la multiplication de la matrice par un vecteur est utile dans les algorithmes décrits précédemment. Nous avons considéré l'exemple du préconditionnement à droite (Al. 7) mais pour un préconditionnement à gauche l'implémentation est presque similaire. Le nombre d'opérations reste inchangé quel que soit le préconditionnement utilisé. La différence principale réside dans le calcul de la norme de l'erreur des résidus. Pour un préconditionnement à gauche, nous obtenons directement la norme des résidus grâce aux rotations successives décrites précédemment (Eq. 2.47). En revanche, pour un préconditionnement à droite, l'erreur obtenue est la norme du vecteur résidus multipliée par la matrice de préconditionnement.

Tous les préconditionnements utilisés dans le cadre de ce travail ne sont pas basés sur un développement physique en s'appuyant sur la mécanique des fluides, mais sont des préconditionnements purement numériques.

### 2.3.1 Méthode de Jacobi

Cette méthode de préconditionnement est très simple à mettre en œuvre et économique en temps de calcul. Elle s'inspire directement de la méthode de Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires.

$$A = L + \text{diag}(\underline{d}) + U \implies M = \text{diag}(\underline{d}) \quad (2.58)$$

où  $L$  et  $U$  sont respectivement les parties triangulaires inférieure et supérieure de la matrice et  $\underline{d}$  le vecteur de la diagonale.

Ce n'est pas la plus efficace, mais elle possède l'avantage d'être utilisable avec d'autres méthodes. En effet, nous pouvons facilement stocker seulement les éléments diagonaux ; le surcoût en espace mémoire supplémentaire correspond seulement à un seul vecteur dont les dimensions sont fixées par le nombre d'inconnues.

### 2.3.2 Méthode de bloc Jacobi

Cette méthode est très similaire à la méthode de Jacobi, mais le préconditionnement exploite la structure de la matrice imposée par le type de problème à résoudre. Les matrices des systèmes linéaires sont des matrices blocs, c'est-à-dire que leurs diagonales sont constituées de bloc  $4 \times 4$  pour des problèmes 2D et  $5 \times 5$  pour des problèmes 3D. La matrice peut alors être décomposée comme suit :

$$A = L + D + U \implies M = D \quad (2.59)$$

## 2.4. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS D'EULER LINÉARISÉES ET HARMONIQUES EN TEMPS $1\frac{1}{2}$ D21

Avec ce préconditionnement, les matrices sont multipliées par une matrice de la taille du bloc diagonal de façon à obtenir un bloc diagonal identité. Le calcul de la matrice inverse diagonale est réalisé par une méthode de pivot de Gauss classique [53].

### 2.3.3 Méthode ILU0

Le principe de la factorisation incomplète ILU0 est de réaliser une élimination de Gauss classique, telle qu'elle existe pour la résolution des systèmes linéaires, mais en gardant la même structure de matrice, et de ne pas ajouter d'éléments non nuls en plus de ceux déjà existants [120]. Ces techniques très populaires nécessitent le stockage de tous les éléments non nuls de la matrice. Cela permet de fixer la taille de la matrice de préconditionnement tout en utilisant une bonne approximation de la matrice inverse.

---

**Algorithme 8** Algorithme de préconditionnement ILU0 [120]

---

**ENTRÉES:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

```

For  $i = 2, \dots, n$  Do :
  For  $k = 1, \dots, i - 1$  Do :
    if  $a_{ik} \in NZ(A)$ ;  $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 
    For  $j = k + 1, \dots, n$  Do :
      if  $a_{ij} \in NZ(A)$ ;  $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 
    End for
  End for
End for

```

---

Il est à noter que des factorisations incomplètes plus élaborées existent [120].

## 2.4 Résolution des équations d'Euler linéarisées et harmoniques en temps $1\frac{1}{2}$ D

Ce paragraphe présente une comparaison entre les différentes résolutions présentées précédemment appliquées à la résolution d'écoulements compressibles instationnaires. Pour cela, nous avons retenu le cas correspondant à la réponse des équations d'Euler  $1\frac{1}{2}$ D linéarisées à une impulsion de pression en condition de limite aval dans le cas de la tuyère d'Adamson *et al.* [1].

### 2.4.1 Les équations d'Euler $1\frac{1}{2}$ D

Les équations d'Euler  $1\frac{1}{2}$ D ou quasi 1D constituent un modèle simplifié couramment utilisé pour l'étude d'écoulements de tuyères bidimensionnelles symétriques lorsque les effets visqueux de l'écoulement ainsi que les phénomènes physiques liés (conductivité thermique, turbulence ...) peuvent être négligés. Nous utiliserons ici la tuyère d'Adamson *et al.* [1] connue pour étudier l'amplitude d'une onde de choc dans un canal bidimensionnel. Nous supposons aussi que toutes les variations sont suivant l'axe de la tuyère. Nous n'avons donc pas de variation des quantités aérodynamiques suivant la direction normale à l'axe ( $\vec{y}$ ). Enfin nous supposons aussi que la vitesse est purement axiale ( $\vec{V} = u(x)\vec{e}_x$ ). Les équations résolues dans le cadre de cette étude démonstrative s'écrivent sous la forme suivante [63] :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho u A) & = 0 & \text{(conservation de la masse)} \\ \frac{d}{dx}(\rho u^2 A + p A) - p \frac{d}{dx}(A) & = 0 & \text{(quantité de mouvement)} \\ \frac{d}{dx}(\rho u E A + p u A) & = 0 & \text{(conservation de l'énergie)} \end{cases} \quad (2.60)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u$  la vitesse axiale,  $A$  la section qui varie selon la direction axiale de la tuyère,  $p$  la pression statique et  $E$  l'énergie totale.

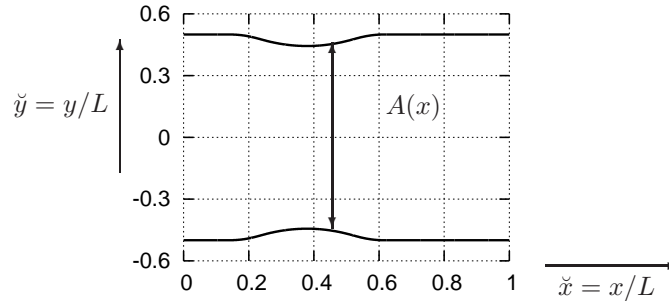


FIG. 2.1 – Représentation bidimensionnelle de la tuyère symétrique de T.C Adamson, A.F. Messiter, M.S. Liou, (*AIAA. J.*, vol. 16, 1978, p. 1240-1247)

## 2.4.2 Résolution des équations d'Euler $1\frac{1}{2}$ D stationnaires

### Méthode numérique

Ces équations sont discrétisées en utilisant une décomposition spatiale des flux de Van-Leer [140] avec une extrapolation des variables MUSCL au troisième ordre<sup>4</sup> et une méthode d'intégration temporelle de Runge Kutta à deux pas. Cette méthode est décrite plus en détail par R. Haugeard [63].

### Résultats et comparaisons

La figure (2.2) présente une comparaison du nombre de Mach et de la pression entre la théorie et un calcul stationnaire par un rapport  $\pi_{s-t} = 0.7$ . Le calcul a été réalisé sur un maillage de 201 points. La tuyère est amorcée avec un nombre de Mach avant le choc  $M_{choc} = 1.33$  et l'onde de choc est située à 53 % de la longueur de tuyère. Nous constatons un parfait accord entre les résultats théoriques et numériques. De plus, aucune oscillation parasite liée au traitement des conditions aux limites ou à la présence du choc n'est visible.

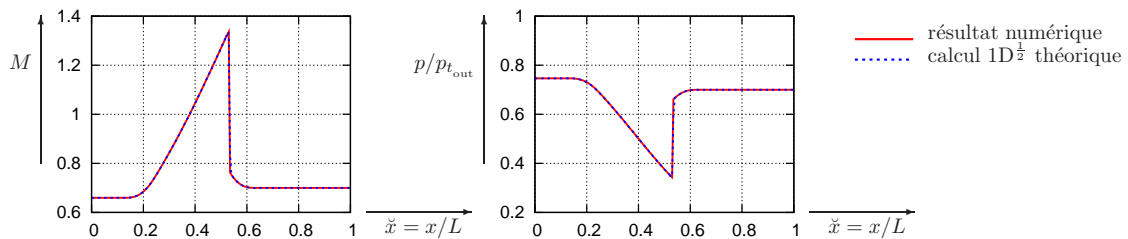


FIG. 2.2 – Comparaison de l'évolution du nombre de Mach et de la pression adimensionnée théorique et calculée pour un calcul Euler  $1\frac{1}{2}$ D pour un rapport de pression  $\pi_{s-t} = 0.7$  dans la tuyère de T.C Adamson, A.F. Messiter, M.S. Liou, (*AIAA. J.*, vol. 16, 1978, p. 1240-1247)

<sup>4</sup>Avec des limiteurs de pente de Van Albada [139], selon l'implémentation d'Anderson *et al.* [3].

### 2.4.3 Écoulement instationnaire avec une fluctuation harmonique de pression aval

#### Equations d'Euler $1\frac{1}{2}D$ linéarisées

Nous nous intéressons maintenant à un écoulement instationnaire engendré par une perturbation harmonique de faible amplitude de la pression aval. Dans ce cas, les équations d'Euler  $1\frac{1}{2}D$  peuvent être linéarisées autour d'une petite perturbation instationnaire, harmonique en temps et de fréquence  $\omega$ . Les perturbations des variables conservatives s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, t) &= {}^0\mathbf{r}(x) + \Re\left({}^1\hat{\mathbf{r}}(x, t)e^{i\omega t}\right) \\ \mathbf{m}(x, t) &= {}^0\mathbf{m}(x) + \Re\left({}^1\hat{\mathbf{m}}(x, t)e^{i\omega t}\right) \\ \mathfrak{E}(x, t) &= {}^0\mathfrak{E}(x) + \Re\left({}^1\hat{\mathfrak{E}}(x, t)e^{i\omega t}\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  ${}^1\hat{\mathbf{r}} \in \mathbb{C}^{N_i}$ ,  ${}^1\hat{\mathbf{m}} \in \mathbb{C}^{N_i}$  et  ${}^1\hat{\mathfrak{E}} \in \mathbb{C}^{N_i}$  sont les variables conservatives perturbées et  ${}^0\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_i}$ ,  ${}^0\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{N_i}$  et  ${}^0\mathfrak{E} \in \mathbb{R}^{N_i}$  sont les variables conservatives stationnaires. En introduisant cette décomposition des variables perturbées dans les équations d'Euler  $1\frac{1}{2}D$  instationnaires, nous obtenons, pour les équations linéarisées, le système linéaire suivant :

$$i\omega {}^1\hat{\underline{w}} + \frac{\partial^N F({}^0\underline{w})}{\partial x} {}^1\hat{\underline{w}} + \frac{\partial S({}^0\underline{w})}{\partial w} {}^1\hat{\underline{w}} = \underline{0} \quad (2.62)$$

où  ${}^1\hat{\underline{w}} = [{}^1\hat{\mathbf{r}}, {}^1\hat{\mathbf{m}}, {}^1\hat{\mathfrak{E}}]^T$ ,  ${}^0\underline{w} = [{}^0\mathbf{r}, {}^0\mathbf{m}, {}^0\mathfrak{E}]^T$ ,  $\frac{\partial S}{\partial w} \in \mathbb{R}^{3 \times N_i}$  est la matrice jacobienne des termes sources et  ${}^N F \in \mathbb{R}^{N_i}$  est le flux numérique.

Ces équations sont discrétisées aux nœuds du maillage. Les flux sont calculés selon la décomposition de Van Leer [140]. Les variables conservatives pour le calcul des flux au troisième ordre sont extrapolées en utilisant une extrapolation MUSCL, extrapolation MUSCL [67], et, afin de limiter les oscillations, nous utilisons des limiteurs de pente de Van Albada [139], selon l'implémentation d'Anderson *et al.* [3].

Les conditions aux limites sont basées sur la théorie des caractéristiques [65] :

Entrée		
Onde de pression entrante	$i\omega [{}^1\hat{p} + {}^0\rho^0 a^1 \hat{u}]$	$= 0$
Onde d'entropie	$i\omega [{}^1\hat{p} - {}^0a^2 {}^1\hat{\rho}]$	$= 0$
Onde de pression sortante	$i\omega [{}^1\hat{p} - {}^0\rho^0 a^1 \hat{u}] + ({}^0u - {}^0a) \left[ \frac{d}{dx} ({}^1\hat{p}) - {}^0\rho^0 a \frac{d}{dx} ({}^1\hat{u}) \right]$	$= 0$
Sortie		
Pression constante	${}^1\hat{p}$	$= {}^1\hat{p}_2$
Onde de pression sortante	$i\omega [{}^1\hat{p} - {}^0\rho^0 a^1 \hat{u}] + ({}^0u - {}^0a) \left[ \frac{d}{dx} ({}^1\hat{p}) - {}^0\rho^0 a \frac{d}{dx} ({}^1\hat{u}) \right]$	$= 0$
Onde d'entropie	$i\omega [{}^1\hat{p} - {}^0a^2 {}^1\hat{\rho}] + {}^0u \left[ \frac{d}{dx} ({}^1\hat{p}) - {}^0a^2 \frac{d}{dx} ({}^1\hat{\rho}) \right]$	$= 0$

TAB. 2.1 – Tableau des conditions aux limites pour les équations d'Euler  $1\frac{1}{2}D$  linéarisées et harmonique en temps

#### Méthodes de résolution

La discrétisation des équations d'Euler linéarisées (Eq. 2.61), avec les conditions aux limites associées, peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire complexe :

$$\hat{A}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}} \quad (2.63)$$

où la matrice complexe  $\hat{A}$  a une largeur de bande  $1 + 2 \times 8$  et  $\hat{\underline{x}} \in \mathbb{C}^{4 \times N_i}$ , est le vecteur d'inconnues complexes. Dans cette première étude, afin de simplifier le problème, nous avons préféré rester dans le cadre d'un calcul réel.

C'est pourquoi nous avons réalisé les calculs avec une fréquence nulle. Nous pourrions comparer ce problème à une tuyère où nous aurions un écoulement interne établi et où nous imposerions un saut de pression à l'aval. Nous avons ainsi réalisé plusieurs tests avec les algorithmes de Krylov (Als. 2, 3 et 5) pour résoudre ce système linéaire. L'algorithme LU\_bande, qui a déjà été validé par Haugéard [63], nous servira de référence pour la comparaison des résultats. Evidemment, pour ce problème, l'algorithme LU\_bande est le plus efficace en termes d'espace mémoire.

### Résolution par les différentes méthodes de Krylov

Toutes les simulations ont été réalisées en stockant la matrice et sans préconditionnement. Le vecteur d'initialisation  ${}^0\underline{x} = 0$  est le vecteur nul. La figure (2.3) présente les courbes de convergence en fonction du nombre d'itérations pour les trois méthodes. Nous constatons que seule l'approche GMRES, qui utilise une factorisation d'Arnoldi, permet d'obtenir la solution. Les deux autres méthodes utilisant une factorisation de Lanczos, le CGS et le Bi-CGSTab, présentent une croissance des résidus au fur et à mesure des itérations. Cette divergence est sans doute liée à la perte d'orthogonalité de la base Krylov créée lorsque le nombre de vecteurs devient important [120, p. 178]. Une solution aurait peut être été d'utiliser une méthode de réorthogonalisation. Mais dans ce cas, l'ensemble des vecteurs de la base doit être stockés et l'avantage principal d'une orthogonalisation de Lanczos, c'est-à-dire un espace mémoire nécessaire moindre, est perdu.

La convergence du GMRES peut être divisée en trois parties, un premier plateau lié à la diffusion de l'information vers l'amont de la tuyère, puis une décroissance rapide plus lente correspondant à la plage asymptotique de la convergence.

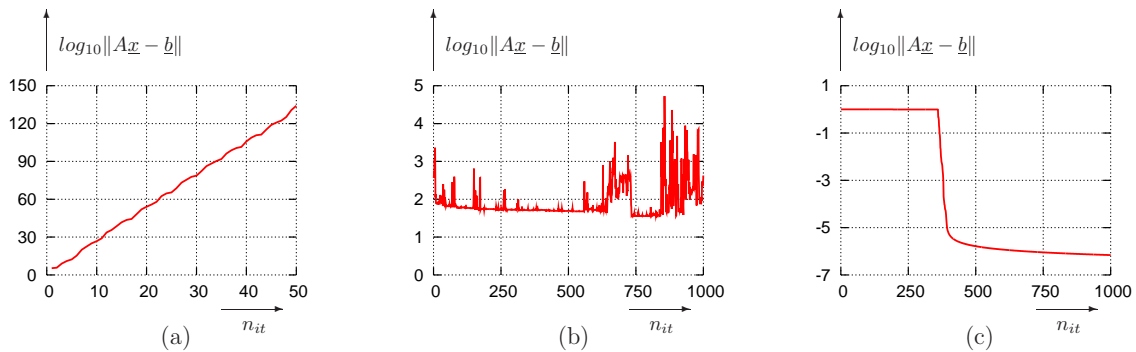


FIG. 2.3 – Comparaison de la convergence de différentes méthodes de résolution des équations d'Euler linéarisées (a) Conjugate Gradient Square, (b) Bi-Gradient Conjugué Stabilisé, (c) General Minimal Residual ; écoulement stationnaire (Fig. 2.2) ; maillage 201 points

Le calcul GMRES a été réalisé sans réinitialisation en utilisant une seule base de 1000 vecteurs. Des essais afin de réduire l'espace mémoire nécessaire ont été réalisés, en réduisant l'espace de Krylov et en réinitialisant le vecteur initial, mais la matrice n'étant pas définie positive, l'algorithme GMRES avec réinitialisation ne parvient pas à converger si le nombre de vecteurs est inférieur à celui permettant de passer le premier plateau, soit ici de l'ordre de 250 vecteurs.

Les résultats du GMRES ont été comparés aux résultats d'un calcul LU-bande. Le stockage de la matrice bande et la résolution du système linéaire par l'algorithme de LU [52, p. 152-155] ne prennent en espace mémoire que l'équivalent de 15 vecteurs de Krylov, soit seulement 1.5 % de l'espace mémoire nécessaire pour stocker l'espace de Krylov de 1000 vecteurs. Le but ici n'était pas de minimiser l'espace mémoire mais de réaliser une étude de faisabilité de la résolution du problème par une méthode basée sur un développement de Krylov.

La figure (2.4) nous permet de comparer l'évolution de la fluctuation de pression le long de la tuyère de Laval pour les deux méthodes de résolution LU et GMRES. Nous constatons une parfaite concordance des résultats entre les deux méthodes, autant sur la hauteur du pic (au niveau de l'onde de choc) que sur le niveau de fluctuation au pied et à l'aval du choc.

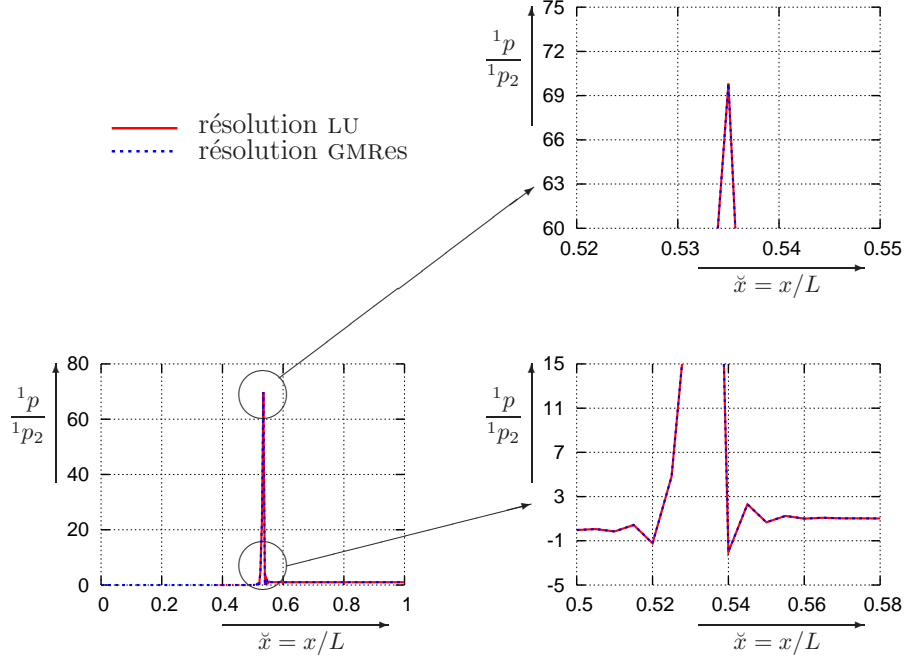


FIG. 2.4 – Comparaison de l'évolution de la perturbation de pression adimensionnée le long de la tuyère obtenue par résolution directe LU et itérative GMRes des équations d'Euler linéarisées  $1\frac{1}{2}D$  créée par une sensibilité de la pression aval  ${}^1p_2 = \Delta p_{out}$  ; écoulement stationnaire (Fig. 2.2) ; maillage 201 points

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à une présentation sous un formalisme unifié de plusieurs méthodes de Krylov pour des applications relevant du domaine de l'aérodynamique compressible. Le modèle utilisé ici est constitué par les équations d'Euler linéarisées  $1\frac{1}{2}D$  dans le cas d'un écoulement stationnaire transsonique. Deux méthodes basées sur la factorisation de Lanczos, le Bi-CGSAB et le CGS sans préconditionnement, et une basée sur la factorisation d'Arnoldi, le GMRES, aussi sans préconditionnement, ont été testées. Nous avons observé que la résolution de ces équations n'était possible dans notre cas qu'avec une résolution GMRES. Les résultats ont été comparés à une résolution directe de type LU\_bande du système. Les résultats issus des deux méthodes sont identiques. L'évolution des perturbations de pression sont en parfaite adéquation. Etant donné la qualité des résultats obtenus, nous avons donc décidé pour la suite de nous concentrer seulement sur la résolution des différentes équations de la mécanique des fluides avec une résolution GMRES.



## Chapitre 3

# Equations de Navier-Stokes non linéaires résolues par méthode pseudo-Newton-GMRes

### 3.1 Equations de la mécanique des fluides et équations de Navier-Stokes

Si nous nous plaçons à l'échelle macroscopique, il existe trois grandes familles d'équations décrivant la dynamique d'un écoulement qui sont résolues dans une géométrie donnée avec des conditions initiales et aux limites précisées. Elles sont toutes issues de la même base mais, pour les rendre plus aisées à résoudre, des simplifications successives ont été réalisées. Par degré applicatif croissant, ce sont les équations potentielles, les équations d'Euler et enfin les équations de Navier-Stokes. Dans le cadre de cette étude, nous ne considérerons que les équations de Navier-Stokes qui permettent de prendre en compte tous les phénomènes physiques mis en jeu dans un écoulement. Une simplification sera réalisée tout au long de notre travail, les forces à distance telles que la gravité ou les forces électromagnétiques ne seront pas prises en compte étant donné leurs faibles valeurs relatives par rapport à celles mises en jeu dans les configurations étudiées.

#### 3.1.1 Equations de Navier-Stokes moyennées

Compte tenu des valeurs du nombre de Reynolds<sup>1</sup> considéré dans cette étude qui reflète l'importance de la turbulence dans un écoulement par rapport à un écoulement moyen, nous utilisons le modèle des équations de Navier-Stokes moyennées. Ces méthodes permettent de prendre en compte uniquement les instationnarités déterministes mais, en aucun cas, les instationnarités intrinsèques turbulentes. Deux types de moyennes sont utilisés : la moyenne de Reynolds ou moyenne d'ensemble pour la masse volumique  $\rho$  et la pression  $p$  et la moyenne de Favre ou moyenne pondérée masse [38], [39] pour les autres variables thermodynamiques.

$$f = \bar{f} + f' = \tilde{f} + f'' \quad (3.1)$$

où  $\bar{f}$  est la moyenne de Reynolds,  $f'$  les fluctuations de Reynolds,  $\tilde{f}$  la moyenne pondérée masse et  $f''$  la fluctuation de la moyenne de Favre. Nous observons entre les moyennes les relations suivantes :

$$\overline{f'} = 0 \quad , \quad \tilde{f} = \frac{\rho \bar{f}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \overline{f''} = \bar{f} - \tilde{f} \neq 0 \quad (3.2)$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées s'écrivent sous forme conservative :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup> $\mathcal{R}_e = \frac{\rho V D}{\mu}$ .



$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_l + \bar{p} \delta_{il}] = \frac{\partial}{\partial x_l} [\bar{\tau}_{il} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_l''}] \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho} \check{h}_t - \bar{p}] + \frac{\partial}{\partial x_l} [\bar{\rho} \tilde{u}_l \check{h}_t] = \frac{\partial}{\partial x_l} [\tilde{u}_l (\bar{\tau}_{il} - \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_l''}) - (\bar{q}_l + \bar{\rho} \widetilde{h'' u_l''})] + S_{\check{h}_t} \quad (3.5)$$

Les variables sont définies comme suit :

$t$	:	le temps
$x_l = [x, y, z]^T$	:	les coordonnées spatiales cartésiennes
$\bar{\rho}$	:	la masse volumique
$\tilde{u}_i$	:	la vitesse d'une particule fluide
$\bar{p}$	:	la pression statique
$\bar{\tau} = 2\check{\mu}\check{D} + \frac{2}{3}\check{\mu}\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l}\mathcal{J}$	:	le tenseur des contraintes visqueuses, avec l'hypothèse de Stokes pour le second coefficient
$\check{D} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \right]$	:	le tenseur des taux de déformation
$\check{h}_t = \check{h} + \frac{1}{2}\tilde{u}_i \tilde{u}_i$	:	l'enthalpie totale
$\check{h} = \check{e} + \frac{\check{p}}{\bar{\rho}}$	:	l'enthalpie statique
$\check{e}$	:	l'énergie interne
$\bar{q}_l = -\check{\kappa} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_l}$	:	le flux de chaleur
$S_{\check{h}_t}$	:	le terme source qui dépend du modèle de turbulence utilisé

où la notation  $(\check{\cdot})$  indique une fonction de quantités moyennes qui n'est ni une moyenne de Reynolds ni la moyenne pondérée masse [38, 39]. Le système est fermé par la loi d'état des gaz calorifiquement et thermodynamiquement parfaits :

$$\bar{p} = \bar{\rho} R_g \tilde{T} = \bar{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \check{h} = \bar{\rho} (\gamma - 1) \check{e} \quad (3.6)$$

où  $R_g$  est la constante des gaz parfaits ( $R_g = 287.04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) et  $\gamma$  le coefficient isentropique ( $\gamma = 1.4$ ). Les coefficients de viscosité dynamique  $\check{\mu}$  et de conductivité thermique  $\check{\kappa}$  sont calculés par les lois de Sutherland [44] :

$$\check{\mu} = \mu_{\text{ref}} \left( \frac{\tilde{T}}{273.15} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{110.4 + 273.15}{110.4 + \tilde{T}} \quad ; \quad \check{\kappa} = \kappa_{\text{ref}} \frac{\check{\mu}}{\mu_{\text{ref}}} \left[ 1 + 0.00023 (\tilde{T} - 273.15) \right] \quad (3.7)$$

avec pour l'air  $\mu_{\text{ref}} = 17.11 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$  et  $\kappa_{\text{ref}} = 0.0242 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

### 3.1.2 Les différents modèles de turbulence

Lorsque les équations de Navier-Stokes sont moyennées, il apparaît, dans l'équation de la quantité de mouvement (Eq. 3.4) ainsi que dans l'équation de conservation de l'énergie (Eq. 3.5), le tenseur de Reynolds  $(-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''})$  ainsi que le flux de chaleur turbulent  $(\bar{\rho} \widetilde{h'' u_l''})$ . Ces termes ajoutent de nouvelles inconnues au système qui devient maintenant ouvert. Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé deux modèles de fermeture de la turbulence pour fermer le système d'équations.

#### Modèle $k - \varepsilon^*$ de Launder-Sharma (1974)

Ce modèle réalise une analogie entre la partie turbulente et la partie visqueuse. La turbulence est prise en compte par l'adjonction d'une viscosité non physique  $\mu_T$ , appelée viscosité turbulente, ainsi que par une conductivité thermique turbulente  $\kappa_T$ . Pour cela, l'hypothèse de Boussinesq est utilisée.

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} = \mu_T \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{il} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \kappa \delta_{il} \quad ; \quad \bar{\rho} \widetilde{h'' u_l''} = -\kappa_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_l} \quad (3.8)$$

où  $k = \frac{1}{2} \widetilde{u_i'' u_i''}$  est l'énergie cinétique turbulente. Pour fermer le système, deux équations de transport supplémentaires sont nécessaires, une pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une autre pour son taux de dissipation

$$\varepsilon : \bar{\rho}\varepsilon = \tau_{il}'' \frac{\partial u''_i}{\partial x_l} :$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\tilde{u}_l \bar{\rho}k)}_{\text{Convection}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \left( \check{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_l} \right]}_{\text{Diffusion } d_k} = \underbrace{-\bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_i}}_{\text{Production } P_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} - \left[ \bar{\rho}\varepsilon^* + 2\check{\mu} \left( \text{grad}\sqrt{k} \right)^2 \right] \quad (3.9)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}\varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\tilde{u}_l \bar{\rho}\varepsilon^*)}_{\text{Convection}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \left( \check{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_l} \right]}_{\text{Diffusion } d_\varepsilon} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon^*}{k} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^{*2}}{k} + \underbrace{\frac{2\check{\mu}\mu_T}{\bar{\rho}} \left( \nabla^2 (\sqrt{V}) \right)^2}_{\text{E}} \quad (3.10)$$

où  $\sigma_k$  est le nombre de Prandtl de l'énergie cinétique turbulente et  $\sigma_\varepsilon$  le nombre de Prandtl de la dissipation. Pour des raisons de stabilité numérique [45], l'équation de transport est écrite pour le taux de dissipation modifié  $\varepsilon^*$  introduit par Launder [78] :

$$\bar{\rho}\varepsilon = \bar{\rho}\varepsilon^* + 2\check{\mu} \left( \text{grad}\sqrt{k} \right)^2 \quad (3.11)$$

Le taux de dissipation modifié a pour avantage de s'annuler à la paroi, ce qui facilite l'application des conditions aux limites tout en renforçant la robustesse et la stabilité numérique. L'ensemble des valeurs des constantes du modèle de Launder Sharma [86] ainsi que des fonctions d'amortissement sont résumées dans le tableau ci-dessous dans le cadre d'un écoulement compressible :

$C_{\varepsilon 1} = 1.44$	$C_{\varepsilon 2} = 1.92$	$\sigma_k = 1$	$\sigma_\varepsilon = 1.3$
$\mu_T = C_\mu f_\mu (Re_T^*) \check{\mu} Re_T^*$	$C_\mu = 0.09$	$Re_T^* = \frac{\bar{\rho}k^2}{\check{\mu}\varepsilon^*}$	$f_\mu (Re_T^*) = \exp \left[ \frac{-3.4}{(1 + 0.02 Re_T^*)^2} \right]$
$\kappa_T = \frac{\mu_T c_p}{P_{rT}}$	$P_{rT} = 0.09$	$f_{\varepsilon 2} (Re_T^*) = 1 - 0.3e^{-Re_T^{*2}}$	$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_g$

### Modèle au second ordre de Gérolimos et Vallet [47]

Contrairement au modèle  $k - \varepsilon^*$  [45] à deux équations de transport, les modèles au second ordre résolvent une équation de transport pour chacun des six termes du tenseur de Reynolds, ainsi qu'une équation supplémentaire pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. L'équation de transport d'une des composantes du tenseur de Reynolds peut s'écrire comme suit [46] :

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_j u''_l})}_{\text{Convection } C_{ij}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_j u''_l} + \overline{p u''_j} \delta_{il} + \overline{p u''_i} \delta_{jl} \right)}_{\text{Diffusion } d_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{u''_i \tau'_{jl}} + \overline{u''_j \tau'_{il}} \right) +$$

$$\underbrace{p' \left( \frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial u''_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)}_{\text{Redistribution } \phi_{ij}} + \underbrace{p' \frac{2}{3} \frac{\partial u''_k}{\partial x_k} \delta_{ij}}_{\text{Pression-Dilatation}} + \underbrace{\left( \tau'_{jl} \frac{\partial u''_i}{\partial x_l} + \tau'_{il} \frac{\partial u''_j}{\partial x_l} \right)}_{\text{Dissipation } \bar{\rho}\varepsilon_{ij}} + \quad (3.12)$$

$$\underbrace{\left( -\bar{\rho} \widetilde{u''_i u''_l} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} - \bar{\rho} \widetilde{u''_j u''_l} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{\text{Production } P_{ij}} - \underbrace{\left( \overline{u''_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \overline{u''_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u''_i} \frac{\partial \bar{\tau}_{jl}}{\partial x_l} - \overline{u''_j} \frac{\partial \bar{\tau}_{il}}{\partial x_l} \right)}_{\text{Effets Directs des Fluctuations de Masse Volumique } K_{ij}}$$

Ces équations sont complétées pour déterminer l'échelle de la turbulence par une équation de transport pour le taux de dissipation modifié au lieu du taux de dissipation ( $\varepsilon^* = \varepsilon - 2\check{\nu} [\text{grad}(k)]^2$ ) [78], qui est numériquement plus stable grâce à la condition à la paroi ( $\varepsilon_w^* = 0$ ).

Le modèle s'affranchit des distances aux parois. L'influence de la turbulence est plus importante au niveau des parois et dans les zones décollées. La majorité de ces modèles sont donc généralement fonction des normales aux parois ainsi que des distances à celles-ci. Gerolymos et Vallet [46], pour éviter toute dépendance du modèle à une topologie pariétale [85], définissent un autre type de normale basé sur la longueur turbulente (Eq. 3.22) pour l'utilisation de ces méthodes.

Dans l'équation de transport des termes du tenseur de Reynolds (Eq. 3.12), seuls les termes de convection  $C_{ij}$  et de production  $P_{ij}$  sont des termes exacts, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas besoin d'être modélisés. En revanche, les autres termes dépendent du modèle. Dans le modèle proposé, les termes des effets directs de compressibilité  $K_{ij}$  ainsi que la corrélation de pression-dilatation sont négligés :

– Le terme de diffusion peut se décomposer en trois parties [137] :

$$d_{ij} = d_{ij}^v + d_{ij}^p + d_{ij}^\mu = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{\rho u_i'' u_j'' u_l''} \right)}_{\text{Diffusion Visqueuse } d_{ij}^v} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{\rho' u_j' \delta_{il}} + \overline{\rho' u_i' \delta_{jl}} \right)}_{\text{Viffusion de Pression } d_{ij}^p} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{u_i' \tau_{jl}} + \overline{u_j' \tau_{il}} \right)}_{\text{Diffusion Visqueuse } d_{ij}^\mu} \quad (3.13)$$

- La diffusion de pression  $d_{ij}^p$  est négligée [47]. On notera cependant que des versions plus récentes du modèle [138] montrent l'importance de  $d_{ij}^p$  dans les zones décollées.
- La corrélation triple de vitesse est modélisée selon la formulation de Hanjalić-Launder [61].

$$\tau_{ijl} = \overline{\rho u_i'' u_j'' u_l''} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{\rho u_i'' u_m''} \frac{\partial \overline{u_j'' u_l''}}{\partial x_m} + \overline{\rho u_j'' u_m''} \frac{\partial \overline{u_i'' u_l''}}{\partial x_m} + \overline{\rho u_l'' u_m''} \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_m} \right) ; \text{ avec } C_s = 0.11 \quad (3.14)$$

- La diffusion de visqueuse est modélisée comme ci-dessous :

$$d_{ij}^\mu = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \overline{u_i' \tau_{jl}} + \overline{u_j' \tau_{il}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \mu \frac{\partial \overline{u_i'' u_l''}}{\partial x_k} \right) \quad (3.15)$$

– Le terme de redistribution  $\phi_{ij}$  est modélisé conjointement avec le terme de dissipation [92] :

$$\phi_{ij} - \overline{\rho} \varepsilon_{ij} = \left[ \phi_{ij} - \overline{\rho} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \right) \right] = \phi_{ij1}^H + \phi_{ij2}^H + \phi_{ij1}^I + \phi_{ij2}^I - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (3.16)$$

Le terme de redistribution se divise en quatre parties, les parties dites lentes  $(\cdot)_{ij1}$  et les parties rapides  $(\cdot)_{ij2}$  avec les termes homogènes  $(\cdot)^H$  et les termes inhomogènes  $(\cdot)^I$ .

- $\phi_{ij1}^H$  est modélisé selon la proposition de Rotta [115], avec le coefficient  $C_1$  optimisé par Launder-Shima [87] :

$$\phi_{ij1}^H = -C_1 \overline{\rho} \varepsilon a_{ij} \quad (3.17)$$

$$\text{avec } a_{ij} = \frac{\overline{u_i'' u_j''}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} ; C_1^H = 1 + 2.58 A A_2^{1/4} \left[ 1 - e^{-\left( \frac{R_{eT}}{30} \right)^2} \right]$$

$$A = \left[ 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3) \right] ; A_2 = a_{ij} a_{ji} ; A_3 = a_{ik} a_{kj} a_{ji}$$

- La modélisation de la partie rapide  $\phi_{ij2}^H$  adopte la forme proposée par Naot *et al.* [102] :

$$\phi_{ij2}^H = -C_2^H \left( P_{ij} - \frac{1}{3} P_{II} \delta_{ij} \right) \quad (3.18)$$

mais avec un coefficient  $C_2^H$  optimisé pour la bonne prédiction d'écoulement décollé [47] :

$$C_2^H = \min[1, 0.75[0, A - 0.55]] \times A^{\max(0.5, 0.5 - 1.3 \max[0, A - 0.55])} [1 - \max(0, 1 - \text{Re}_T/50)] \quad (3.19)$$

- Les termes inhomogènes sont modélisés comme suit :

$$\phi_{ij1}^I = C_1^I \frac{\varepsilon}{k} \left[ \widetilde{\rho u_k'' u''}_m e_{Ik} e_{Im} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \widetilde{\rho u_k'' u''}_i e_{Ik} e_{Ij} - \frac{3}{2} \widetilde{\rho u_k'' u''}_j e_{Ik} e_{Ii} \right] \quad (3.20)$$

$$\text{avec } C_1^I = 0.9 \left[ 1 - \frac{2}{3} (C_1^H - 1) \right] \left\| \text{grad} \left\{ \frac{\ell_T \left[ 1 - e^{-\frac{R_e T}{30}} \right]}{1 + 2A_2^{0.8}} \right\} \right\|$$

$$\phi_{ij2}^I = C_2^I \left[ \phi_{km2}^H e_{Ik} e_{Im} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik2}^H e_{Ik} e_{Ij} - \frac{3}{2} \phi_{jk2}^H e_{Ik} e_{Ii} \right] \quad (3.21)$$

$$\text{avec } C_2^I = \max \left[ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{6C_2^H} \right); 0 \right] \left\| \text{grad} \left\{ \frac{\ell_T \left[ 1 - e^{-\frac{R_e T}{30}} \right]}{1 + 1.8A_2^{\max(0.6, A)}} \right\} \right\|$$

où  $A$  est le facteur d'aplatissement de Lumley [93] ( $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$ ) et  $A_2, A_3$  sont les invariants du tenseur d'anisotropie ( $A_2 = a_{ij}a_{ij}$ ,  $A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji}$  avec  $a_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$ ),  $\ell_T$  est l'échelle de longueur turbulente ( $\ell_T = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ ) et  $e_I$  sont les directions d'inhomogénéité de la turbulence :

$$\vec{e}_I = e_{Ii} \vec{e}_i = \frac{\text{grad } \ell_I}{\|\text{grad } \ell_I\|} \quad \text{avec } \ell_I = \frac{\ell_T \left[ 1 - e^{-\frac{R_e T}{30}} \right]}{1 + 2\sqrt{A_2} + 2A_2^{16}} \quad (3.22)$$

## 3.2 Méthode de discrétisation spatiale

Les équations de Navier-Stokes moyennées n'admettent de solutions analytiques que pour des configurations avec des écoulements simples. Pour les résoudre, dans le cas de géométries plus complexes, nous devons discrétiser notre volume d'étude et résoudre numériquement ces équations aux dérivées partielles.

### 3.2.1 Génération du maillage multibloc structuré

Le mailleur utilisé au cours de cette étude a été développé dans le cadre de la thèse de G. Tsanga [135]. Il permet la génération de maillage dans des configurations complexes réelles telles que des turbomachines multi-étages. Différentes topologies (maillage en C, H, O) sont utilisées afin de discrétiser correctement l'ensemble du domaine de calcul en fonction de la géométrie. La distribution des nœuds du maillage est générée de manière itérative à partir des points aux frontières, au moyen de la résolution d'un opérateur bilaplacien [55] dans le plan bidimensionnel des coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Après décomposition [55], le système différentiel à résoudre peut s'écrire au moyen de quatre opérateurs laplaciens couplés :

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi(x, y) = p \\ \nabla^2 \eta(x, y) = q \\ \nabla^2 p(x, y) = 0 \\ \nabla^2 q(x, y) = 0 \end{cases} ; \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{D} \quad (3.23)$$

Ces équations sont résolues en utilisant des conditions aux limites proposées par Sparis [132] qui permettent de contrôler l'orthogonalité du maillage aux parois par la prise en compte d'une constante d'orthogonalité. Le schéma de discrétisation est centré et précis à l'ordre 2 [135]; le système linéaire est résolu au moyen d'une résolution itérative implicite par factorisation AF-ADI. A la fin du processus itératif temporel, les mailles le long de la longueur curviligne  $\xi = \text{constante}$  sont de nouveau réparties selon une suite géométrique proche des parois afin de rendre compte lors du calcul aérodynamique des effets de couche limite en augmentant le nombre de points dans cette zone. Ces maillages nous permettent d'avoir les distances adimensionnées à la paroi  $y^{+2}$  de l'ordre de 0.5 sans dégrader l'ordre du schéma de discrétisation des équations de Navier-Stokes en ayant un nombre de points suffisant pour rendre compte de tous les phénomènes turbulents proches des parois avec les modèles utilisés (Fig. 3.1).

---


$$^2 y^+ = \frac{y}{\nu_w} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$$

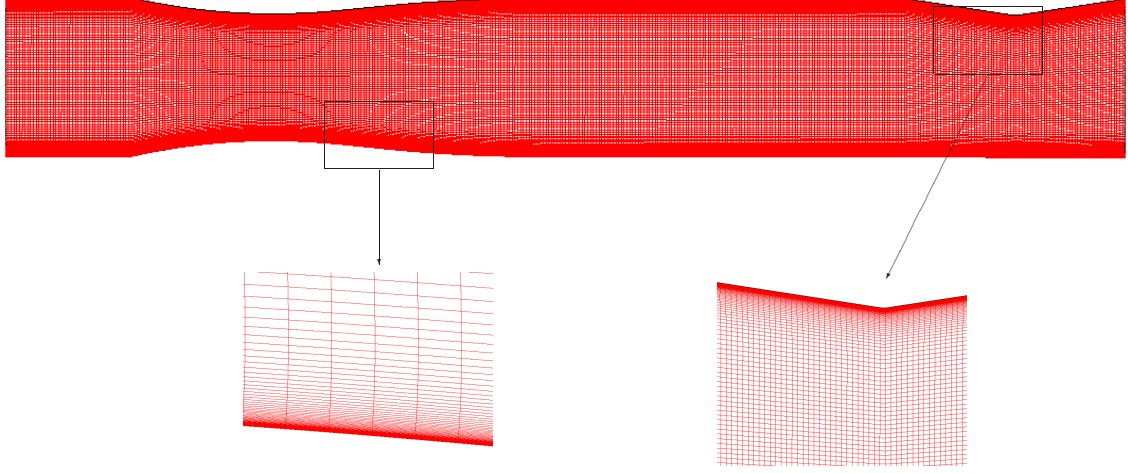


FIG. 3.1 – Maillage bidimensionnel utilisé pour le calcul transsonique dans la tuyère de J. M. Détery (*AIAA. J.*, vol. 21, 1983, p. 180-185) avec  $N_i = 401$  et  $N_j = 201$  équiréparti dans la direction longitudinale et raffiné près de la paroi

### 3.2.2 Discrétisation des flux

Les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \text{div} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}(\underline{w}) + {}^V \underline{\vec{F}}(\underline{w}) \right] + \underline{S}(\underline{w}) = 0 \quad (3.24)$$

où  ${}^C \underline{\vec{F}}(\underline{w}) \in \mathbb{R}^{m*3}$  ( $m$  est fonction du modèle de turbulence<sup>3</sup>) est le tenseur des flux convectifs,  ${}^V \underline{\vec{F}}(\underline{w}) \in \mathbb{R}^{m*3}$  est le tenseur des flux visqueux et  $\underline{S}(\underline{w})$  désigne le terme source. Le vecteur des variables conservatives  $\underline{w}$  contient les inconnues du champ aérodynamique et s'écrit respectivement pour les modèles  $k - \epsilon^*$  et RSM :

$$\underline{w} = \begin{cases} \left[ \bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{u}, \bar{\rho}\tilde{v}, \bar{\rho}\tilde{w}, \bar{\rho}\tilde{h}_t - \bar{p}, \bar{\rho}k, \bar{\rho}\epsilon^* \right] \\ \left[ \bar{\rho}, \bar{\rho}\tilde{u}, \bar{\rho}\tilde{v}, \bar{\rho}\tilde{w}, \bar{\rho}\tilde{h}_t - \bar{p}, \widetilde{\rho u'' u''}, \widetilde{\rho u'' v''}, \widetilde{\rho u'' w''}, \widetilde{\rho v'' v''}, \widetilde{\rho v'' w''}, \widetilde{\rho w'' w''}, \bar{\rho}\epsilon^* \right] \end{cases} \quad (3.25)$$

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur un maillage structuré par la méthode des volumes finis.

Les quantités représentant les inconnues du système sont stockées aux nœuds du maillage suivant une approche cell-vertex. L'intégration des équations s'effectue sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  créé à partir d'un maillage décalé ( $i + \frac{1}{2}, \dots$ ) ayant pour sommet commun le point  $\vec{x}_{i,j,k}$ . En utilisant le théorème de Green-Ostrogardsky, les équations de Navier-Stokes stationnaires peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \sum \underline{\vec{F}} \cdot \vec{S} + \underline{S}_{i,j,k} = 0 \iff \underline{\mathcal{L}}_{i,j,k}(\underline{w}) = 0 ; \forall_{i,j,k} \quad (3.26)$$

où  $\underline{\mathcal{L}}_{i,j,k}$  est l'opérateur de divergence des flux ou opérateur résidus, contient les flux à travers chaque surface du volume de la cellule.

$$\underline{\mathcal{L}}_{i,j,k} = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \begin{bmatrix} +^\xi \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2},j,k} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i+\frac{1}{2},j,k} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right]^\xi \vec{n}_{i+\frac{1}{2},j,k} -^\xi \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2},j,k} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i-\frac{1}{2},j,k} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right]^\xi \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ +^\eta \mathcal{S}_{i,j+\frac{1}{2},k} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i,j+\frac{1}{2},k} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i,j+\frac{1}{2},k} \right]^\eta \vec{n}_{i,j+\frac{1}{2},k} -^\eta \mathcal{S}_{i,j-\frac{1}{2},k} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i,j-\frac{1}{2},k} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i,j-\frac{1}{2},k} \right]^\eta \vec{n}_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ +^\zeta \mathcal{S}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right]^\zeta \vec{n}_{i,j,k+\frac{1}{2}} -^\zeta \mathcal{S}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \left[ {}^C \underline{\vec{F}}_{i,j,k-\frac{1}{2}} + {}^V \underline{\vec{F}}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]^\zeta \vec{n}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + \underline{S}_{i,j,k} \quad (3.27)$$

où  $^\xi \mathcal{S}_{i+\pm\frac{1}{2},j,k}$ ,  $^\eta \mathcal{S}_{i,j+\pm\frac{1}{2},k}$  et  $^\zeta \mathcal{S}_{i,j,k+\pm\frac{1}{2}}$  sont l'aire des faces de la cellule,  $^\xi \vec{n}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ ,  $^\eta \vec{n}_{i,j+\frac{1}{2},k}$  et  $^\zeta \vec{n}_{i,j,k+\frac{1}{2}}$  sont les normales sortantes aux surfaces respectives et  $\underline{S}_{i,j,k}$  les termes sources.

<sup>3</sup>m vaut 7 pour le modèle  $k - \epsilon^*$  et 12 pour le modèle RSM.

### Flux convectifs

Les flux convectifs sont calculés suivant la méthode de décomposition des flux de Van Leer [140]. Cette décomposition est basée sur le principe de la propagation d'ondes. Elle possède la propriété d'être naturellement dissipative compte tenu du décentrement de la molécule de discrétisation spatiale et ne nécessite donc pas l'ajout d'une viscosité artificielle. La décomposition des flux est réalisée dans chacune des trois directions du maillage suivant une contribution avancée  $\underline{F}^+$  et une contribution retardée  $\underline{F}^-$ . Cette décomposition de Van Leer possède les propriétés mathématiques suivantes : 1) dérivabilité des flux en fonction du nombre de Mach<sup>4</sup> aux points d'arrêt et sonique, 2) les valeurs propres pour les matrices jacobiennes retardées et avancées, respectivement positives et négatives, 3) pour des écoulements subsoniques, chacune des matrices jacobiennes retardées et avancées possède une valeur propre nulle [140]

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \xi \mathcal{S} \vec{F}_\xi^\xi \vec{n} \right]_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} = \underline{F}_\xi^+ \left( \underline{w}_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}^- \right) + \underline{F}_\xi^- \left( \underline{w}_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}^+ \right) \\ \left[ \eta \mathcal{S} \vec{F}_\eta^\eta \vec{n} \right]_{i, j \pm \frac{1}{2}, k} = \underline{F}_\eta^+ \left( \underline{w}_{i, j \pm \frac{1}{2}, k}^- \right) + \underline{F}_\eta^- \left( \underline{w}_{i, j \pm \frac{1}{2}, k}^+ \right) \\ \left[ \zeta \mathcal{S} \vec{F}_\zeta^\zeta \vec{n} \right]_{i, j, k \pm \frac{1}{2}} = \underline{F}_\zeta^+ \left( \underline{w}_{i, j, k \pm \frac{1}{2}}^- \right) + \underline{F}_\zeta^- \left( \underline{w}_{i, j, k \pm \frac{1}{2}}^+ \right) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Ces flux sont calculés à partir des variables conservatives par une extrapolation MUSCL<sup>5</sup> [137] précise au troisième ordre. Des limiteurs de pente de Van-Albada [139] sont appliqués afin d'éviter l'apparition de phénomènes non physiques des quantités aérodynamiques au voisinage d'une discontinuité (onde de choc ...). Ces limiteurs sont implémentés suivant la méthode proposée par Anderson *et al.* [3].

### Flux visqueux

La divergence des flux visqueux est discrétisée par la méthode des différences finies au moyen d'un schéma centré et précis au second ordre utilisant les deux points voisins dans chaque direction [45] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \vec{F}_\xi^\xi \right]_{i \pm \frac{1}{2}, j, k} = \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{i, j, k} + \vec{F}_{i \pm 1, j, k} \right] \\ \left[ \vec{F}_\eta^\eta \right]_{i, j \pm \frac{1}{2}, k} = \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{i, j, k} + \vec{F}_{i, j \pm 1, k} \right] \\ \left[ \vec{F}_\zeta^\zeta \right]_{i, j, k \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \vec{F}_{i, j, k} + \vec{F}_{i, j, k \pm 1} \right] \end{array} \right. \quad (3.29)$$

### 3.2.3 Itération multigrille

Afin d'accélérer la convergence du processus itératif, nous utilisons une méthode multigrille proposée par Leclercq et Stoufflet [88] qui a été initialement développée pour la résolution des équations de Navier-Stokes sur un maillage non structuré et étendue par Gérolimos et Vallet [48] pour les maillages structurés. Cette méthode possède la particularité de tenir compte des directions de propagation. Pour cela, l'opérateur de restriction effectue le transfert des variables conservatives d'une grille fine à une grille plus lâche suivant des lignes caractéristiques de l'écoulement. L'opérateur de prolongation, qui, lui, transfère les variables d'une grille plus lâche vers une grille plus fine, est basé sur une interpolation trilineaire [48].

L'extrapolation d'une grille plus fine à une grille plus lâche est réalisée en retirant un point sur deux dans chaque direction. Pour réaliser le transfert des variables conservatives le long des lignes caractéristiques de l'écoulement, l'opérateur de restriction réalise une moyenne pondérée utilisant le stencil lui-même et les 26 points voisins ainsi qu'une multiplication par une matrice d'annihilation dont le rôle est d'annuler les flux non issus d'une des

<sup>4</sup>Le nombre de Mach est le rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse de son  $\left( M = \frac{V}{\sqrt{\gamma R_g T}} \right)$ .

<sup>5</sup>Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Law.

directions caractéristiques. L'opérateur de restriction peut se résumer sous la forme matricielle suivante [48] :

$$\underline{r}_{2h}(n_{2h}) = \frac{1}{8}\underline{r}_h(n_h) + \sum_{n' \in \mathcal{M}(n_{2h})} \left\{ \alpha(n'_h) \underline{\Phi}(n_{2h}, n'_h) \underline{r}_h(n'_h) \right\} \begin{cases} \alpha(n'_h) = \frac{1}{16}; n'_h \in [i \pm 1, j, k] \cup \\ [i, j \pm 1, k] \cup \\ [i, j, k \pm 1] \\ \alpha(n'_h) = \frac{1}{32}; n'_h \in [i \pm 1, j \pm 1, k] \cup \\ [i, j \pm 1, k \pm 1] \cup \\ [i \pm 1, j, k \pm 1] \\ \alpha(n'_h) = \frac{1}{64}; n'_h \in [i \pm 1, j \pm 1, k \pm 1] \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $\underline{r}_h(n_h)$  et  $\underline{r}_{2h}(n_{2h})$  sont respectivement les résidus sur la grille fine et les résidus sur la grille lâche,  $\mathcal{M}(n_{2h})$  est l'ensemble des points entourant le stencil sur la grille fine,  $\alpha(\cdot)$  est la pondération et  $\Phi$  est la matrice d'annihilation. Cette matrice d'annihilation  $\Phi$  peut se décomposer comme suit :

$$\Phi = [P \Psi P^{-1}] \quad (3.31)$$

où  $P$  et  $P^{-1}$  sont les matrices qui diagonalisent la matrice jacobienne des flux convectifs et sont données pour les variables conservatives par Steger et Warming [134]. La matrice  $\Psi$  contient les valeurs propres de la matrice jacobienne.

$$\Psi = [\mathcal{I}_5 + \text{diag}\{\text{sgn}(U_d + a), \text{sgn}(U_d), \text{sgn}(U_d), \text{sgn}(U_d), \text{sgn}(U_d - a)\}] \quad (3.32)$$

où  $\mathcal{I}_5 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  est la matrice identité. Ainsi, en fonction des lignes caractéristiques, la matrice  $\Psi$  s'annule et ne transfère pas les informations des points non désirés. La validation de la méthode multigrille par comparaison avec des calculs monogrilles a été effectuée par Gérolymos et Vallet [48].

### 3.3 Schéma d'intégration temporelle et conditions aux limites

#### 3.3.1 Schéma d'intégration temporel décentré d'Euler

Pour résoudre le système non linéaire, une méthode d'avancement en temps est utilisée. Dans le cas de simulations d'écoulements stationnaires, l'intégration pseudo-temporelle est basée sur un schéma décentré Euler précis au premier ordre. Ce schéma permet d'utiliser des pas de temps suffisamment importants afin d'obtenir des temps de calcul non prohibitifs. Les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire de façon symbolique de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{w}) = 0 \quad (3.33)$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur des variables globales ( $\mathbf{w} = [\underline{w}_{1,1,1}, \underline{w}_{1,1,2}, \dots, \underline{w}_{Ni, Nj, Nk}]^T \in \mathbb{R}^{m \times Ni \times Nj \times Nk}$ ) et l'opérateur des résidus global ( $\mathcal{L} = [\underline{\mathcal{L}}_{1,1,1}, \underline{\mathcal{L}}_{1,1,2}, \dots, \underline{\mathcal{L}}_{Ni, Nj, Nk}]^T \in \mathbb{R}^{m \times Ni \times Nj \times Nk}$ ). Le développement limité de l'opérateur de divergence ( $\mathcal{L}(\underline{w})$ ) à l'instant  $n + 1$  donne :

$$\mathcal{L}^{(n+1)}(\mathbf{w}) = \mathcal{L}^{(n)}(\mathbf{w}) + n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} \right) ({}^{n+1}\mathbf{w} - {}^n\mathbf{w}) \quad (3.34)$$

où  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}}$  est le jacobien de l'opérateur de divergence des flux. En incluant l'équation temporelle (Eq. 3.34) aux équations de Navier-Stokes (Eq. 3.33) et en discrétisant la dérivée temporelle, nous obtenons :

$$\left( \mathcal{I} + \Delta t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} \right) \right) \Delta \mathbf{w} = -\Delta t \mathcal{L}^{(n)}(\mathbf{w}); \quad \Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n \quad (3.35)$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice identité,  $\Delta \mathbf{w}$  est la différence entre les variables aérodynamiques à l'instant ( $n$ ) et à l'instant ( $n + 1$ ) et  $\Delta t$  le pas de temps. Afin d'accélérer la convergence du processus itératif, le pas de temps local, fonction de la taille de chaque maille [137], est utilisé :

$$\Delta t_{i,j,k} = \min \left\{ \text{CFL} \frac{\ell_g}{\tilde{V} + \check{\alpha} \sqrt{1 + \frac{5}{6}(\gamma - 1)M_T^2}}, \text{VNN} \frac{\ell_g^2}{2\nu_{eq}} \right\}; \nu_{eq} = \max \left\{ \frac{4}{3}(\check{\nu} + \nu_T), \frac{\gamma - 1}{\bar{\rho}R_g}(\check{\kappa} + \kappa_T) \right\} \quad (3.36)$$

Le nombre de Courant Fredrich Levy (CFL) ainsi que le nombre de Von Neumann (VNN) sont généralement égaux. Nous avons donc un système linéaire à résoudre à chaque itération temporelle. Ce système peut être résolu de plusieurs façons et avec plus ou moins de simplification.

### 3.3.2 Schéma à pas de temps dual pour la résolution des équations stationnaires

Dans le cadre de cette étude, nous avons aussi utilisé une méthode sous-itérative [18] du type pas de temps dual [72] qui permet de réduire les erreurs de linéarisation et de factorisation approchée tout en augmentant le pas de temps physique [34]. Cette technique a pour philosophie, dans un premier temps, d'avoir une avancée temporelle supérieure à la limite pratique de stabilité de résolution d'un processus itératif à pas de temps simple classique. Dans un second temps, de façon à minimiser l'erreur de résolution, nous sous-itérons pour stabiliser notre solution. Deux matrices diagonales sont définies telles que :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{t} &= \text{diag} [(\Delta t_{1,1,1}) \mathfrak{I}, (\Delta t_{1,1,2}) \mathfrak{I}, \dots, (\Delta t_{N_i, N_j, N_k}) \mathfrak{I}] \\ \Delta \mathbf{t}^* &= \text{diag} [(\Delta t_{1,1,1}^*) \mathfrak{I}, (\Delta t_{1,1,2}^*) \mathfrak{I}, \dots, (\Delta t_{N_i, N_j, N_k}^*) \mathfrak{I}]\end{aligned}\quad (3.37)$$

où  $\mathfrak{I}$  est la matrice identité et  $\Delta t$  et  $\Delta t^*$  sont respectivement le pas de temps de la boucle itérative *pseudo-time-marching* et le pas de temps de la boucle sous-itérative.

Avec l'introduction du pas de temps physique  $n$  et du pas de temps dual  $m$ , les équations de Navier-Stokes à l'itération  $(m+1, n+1)$  s'écrivent [18] :

$${}^{m+1, n+1} \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + \mathfrak{L} ({}^{m+1, n+1} \mathbf{w}) = 0. \iff \frac{{}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^{m, n+1} \mathbf{w}}{\Delta t^*} + \frac{{}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^n \mathbf{w}}{\Delta t} + \mathfrak{L} ({}^{m+1, n+1} \mathbf{w}) = 0 \quad (3.38)$$

Les résidus sont à l'instant  $(m+1, n+1)$  linéarisés par un développement de Taylor à l'ordre un :

$$\mathfrak{L} ({}^{m+1, n+1} \mathbf{w}) = \mathfrak{L} ({}^{m, n+1} \mathbf{w}) + \frac{\partial \mathfrak{L} ({}^{m, n+1} \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} ({}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^{m, n+1} \mathbf{w}) + \mathcal{O}(\Delta w)^2 \quad (3.39)$$

En regroupant les deux relations (Eqs. 3.38-3.39), le système linéaire suivant est obtenu :

$$\frac{{}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^{m, n+1} \mathbf{w}}{\Delta t^*} + \frac{{}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^n \mathbf{w}}{\Delta t} + \mathfrak{L} ({}^{m, n+1} \mathbf{w}) + \frac{\partial \mathfrak{L} ({}^{m, n+1} \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} ({}^{m+1, n+1} \mathbf{w} - {}^{m, n+1} \mathbf{w}) = 0 \quad (3.40)$$

Le système qui doit être résolu peut alors s'écrire sous la forme finale suivante :

$$\left[ \mathfrak{I} + \Delta t^{**} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{w}} ({}^{m, n+1} \mathbf{w}) \right] \Delta \mathbf{w} = -\Delta t^{**} \left[ \frac{{}^{m, n+1} \mathbf{w} - {}^n \mathbf{w}}{\Delta t} + \mathfrak{L} ({}^{m, n+1} \mathbf{w}) \right], \quad \text{avec } \Delta t^{**} = \Delta t^* / (1 + \Delta t^* \Delta t^{-1})^{-1} \quad (3.41)$$

Nous pouvons noter que nous retrouvons un schéma d'intégration temporelle retardé d'Euler plus classique à pas de temps en imposant une seule sous-itération et un pas de temps physique ( $\Delta t$ ) tendant vers l'infini.

Il existe en pratique deux façons de fixer le nombre de sous-itérations entre l'itération  $n$  et l'itération  $n+1$ . La première possibilité consiste à fixer explicitement le nombre de sous-itérations, la seconde à imposer une réduction des résidus entre deux itérations. La première présente l'avantage de limiter le temps CPU d'une itération. La seconde est dynamique dans le sens où elle ajuste le nombre de sous-itérations pour imposer une réduction de résidus désirée entre chaque itération physique. Dans notre cas, nous utiliserons toujours la première approche, même si la seconde est préconisée [18].

### 3.3.3 Conditions aux limites

En plus de la résolution du système et des conditions initiales, il est nécessaire d'imposer, à chaque itération, des conditions aux limites dans la phase explicite et implicite. Pour cela, nous devons remplacer les ondes entrantes dans notre domaine par des conditions aux limites et les ondes sortantes par des relations de compatibilité. Nous utilisons la théorie des caractéristiques qui décompose les équations d'Euler en cinq ondes (une onde d'entropie  $PL^1$ , deux ondes de vorticit e  $PL^2$  et  $PL^3$  et deux ondes acoustiques  $ML^+$  et  $ML^-$ ) entrantes ou sortantes en fonction du nombre de Mach et de la position dans le domaine de calcul.



Entrée/Sortie	Nombre de Mach normal	Ondes sortantes	Ondes entrantes
Entrée	< 1	$ML^+, PL^{1,2,3}$	$ML^-$
Entrée	> 1	$ML^+, ML^-, PL^{1,2,3}$	-
Sortie	< 1	$ML^-$	$ML^+, PL^{1,2,3}$
Sortie	> 1	-	$ML^+, ML^-, PL^{1,2,3}$

TAB. 3.1 – Propagation des ondes en entrée et sortie de notre domaine en fonction du nombre de Mach normal selon la théorie des caractéristiques ( $ML$  = Machline et  $PL$  = Pathline).

Les conditions aux limites sont aussi bien imposées de façon implicite (chaque système linéaire) que de façon explicite à la fin de chaque itération temporelle. Les conditions aux limites implicites sont imposées par la méthode développée par Chakravarthy [16] qui décompose le système en fonction des ondes entrantes et sortantes :

$$Q_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + Q_2 \left( A_j \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.42)$$

où  $A_j$  sont les matrices jacobiennes des flux. Les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$  contiennent les conditions de type réservoir et sont données par Vallet [137]. Les parois solides, fixes ou mobiles, sont considérées comme adiabatiques.

## 3.4 Méthode de résolution du système linéaire

### 3.4.1 Simplifications du calcul de la matrice jacobienne

Il est fréquent d'avoir recours à la simplification des matrices jacobiennes des flux (Eq. 3.43) afin de minimiser le temps de calcul par itération et l'espace mémoire nécessaire [48]. Ces simplifications s'effectuent à trois niveaux et sont décrites de façon succincte ci-dessous :

- la discrétisation des flux de la matrice jacobienne s'effectue au premier ordre [ $\mathcal{O}(\Delta x)$ ] au lieu du troisième ordre [ $\mathcal{O}(\Delta x)^3$ ] pour la phase explicite ;
- la matrice des flux visqueux est diagonalisée par une méthode analogue à celle de Coakley [27].
- les termes sources sont négligés dans la phase implicite.

Ces simplifications permettent de rendre la résolution implicite indépendante du nombre de variables du modèle de turbulence utilisé. De plus amples détails théoriques et techniques sur leurs implémentations sont donnés par Chassaing *et al.* [18] et Gérolimos et Vallet [48]. Avec ces simplifications, la matrice jacobienne dans la direction  $\xi$  a pour forme :

$$\frac{\partial^\xi F_{i+\frac{1}{2},j,k}^J}{\partial \underline{w}_{i,j,k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{MF}}^\xi & 0 \\ \mathbf{B}_{\text{MF}}^\xi & \mathbf{A}_T^\xi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Nous observons un découplage, dans la forme de la matrice jacobienne, entre la partie moyenne et la partie turbulente. La matrice  $A_{\text{MF}}$  est une matrice  $5 \times 5$ , la matrice  $B_{\text{MF}}$  est une matrice  $5 \times 2$  dans le cas d'un modèle au premier ordre, et  $5 \times 7$  dans le cas d'un modèle au second ordre et la matrice  $A_T$  est une matrice  $2 \times 2$  pour un modèle au premier ordre et  $7 \times 7$  pour un modèle au second ordre.

La matrice jacobienne de la décomposition des flux est donc une matrice bloc triangulaire inférieure. C'est-à-dire que dans la phase implicite, la partie turbulente n'influence pas l'écoulement moyen. Nous emploierons par la suite une méthode faiblement couplée car la résolution implicite sépare la résolution de la partie moyenne de l'écoulement et la résolution de la partie turbulente. A l'inverse, une méthode totalement couplée résout directement l'ensemble du système linéaire sans prendre en compte la forme de la matrice. La méthode faiblement couplée, utilisée ici, a pour premier avantage d'avoir une résolution de la partie moyenne indépendante du modèle de turbulence utilisé. De plus,  $A_T$  étant une matrice tridiagonale, son inversion est réalisée par une méthode de Jacobi. En revanche, cette simplification limite le pas de temps utilisé pour assurer la convergence.

### 3.4.2 Résolution du système linéaire par factorisation AF-ADI

Dans le cas d'une méthode de résolution par factorisation approchée AF-ADI<sup>6</sup> [18], la résolution du système linéaire dans une direction est réalisée en trois étapes. Tout d'abord, la partie relative au champ moyen est résolue en utilisant une factorisation LU de la matrice  $(\mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{\text{MF}})$ . Dans un second temps, les résidus du champ moyen sont multipliés par la matrice  $\mathbf{B}_{\text{MF}}$  qui permet de prendre en compte l'influence de l'écoulement moyen sur la turbulence. Enfin, l'influence de la partie turbulente sur elle-même est calculée en inversant la matrice diagonale  $(\mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_T)$ . La résolution du système linéaire s'effectue donc en trois phases qui doivent être appliquées successivement dans les trois directions  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\psi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Bc}_{\text{MF}}^{\xi} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{\text{MF}}^{\xi} \right] \Delta \xi \mathbf{w}_{\text{MF}} = \mathfrak{bc}_{\text{MF}}^{\xi} \left[ -\underline{b}_{\text{MF}}^{(m,n+1)} \right] \quad \Leftarrow \text{Résolution LU du système linéaire} \\ \underline{b}_{\text{RSM}}^{(m,n+1)} = -\underline{b}_{\text{RSM}}^{(m,n+1)} + \mathbf{B}_{\text{MF}}^{\xi} \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}}^{\xi} \quad \Leftarrow \text{Influence de la partie moyenne sur la turbulence} \\ \mathfrak{Bc}_T^{\xi} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_T^{\xi} \right] \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} = \mathfrak{bc}_T^{\xi} \left[ \underline{b}_{\text{RSM}}^{(m,n+1)} \right] \quad \Leftarrow \text{Résolution de la partie turbulente} \end{array} \right.$$

où  $\mathfrak{Bc}$  et  $\mathfrak{bc}$  sont les matrices de conditions aux limites. Une vision globale de résolution par méthode AF-ADI est donnée dans l'algorithme 9.

---

**Algorithme 9** Schéma directeur de la résolution des équations Navier-Stokes par l'algorithme AF-ADI pour un calcul monogridle à pas de temps dual

---

**For**  $n = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

▶ Calcul du pas de temps physique  $\Delta t_{i,j,k}$  (Eq. 3.36)

**For**  $m = 1, 2, \dots$  Boucle sous-itérative **Do** :

• **Discrétisation spatiale**

▶ Calcul du pas de temps dual  $\Delta t_{i,j,k}^*$  (Eq. 3.36)

▶ Calcul des résidus :  $\underline{b}^{(m,n+1)} = \left[ \frac{m,n+1 \mathbf{w} - n \mathbf{w}}{\Delta t} + \mathcal{L}^{(m,n+1) \mathbf{w}} \right]$

▶ Multiplication par le pas de temps modifié :  $\underline{b}^{(m,n+1)} = -\Delta t_{i,j,k}^{**} \underline{b}^{(m,n+1)}$

• **Intégration temporelle**

▶ **Résolution de la partie moyenne puis turbulente dans la direction  $\xi$  :**

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_{\text{MF}}^{\xi} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{\text{MF}}^{\xi} \right] \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}} = \mathfrak{bc}_{\text{MF}}^{\xi} \left[ \underline{b}_{\text{MF}}^{(m,n+1)} \right]$$

$$\rightsquigarrow \xi \underline{b}_{\text{RSM}} = \underline{b}_{\text{RSM}}^{(m,n+1)} + \mathbf{B}_{\text{MF}}^{\xi} \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}}$$

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_T^{\xi} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_T^{\xi} \right] \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} = \mathfrak{bc}_T^{\xi} \left[ \xi \underline{b}_{\text{RSM}} \right]$$

▶ **Résolution de la partie moyenne puis turbulente dans la direction  $\eta$  :**

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_{\text{MF}}^{\eta} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{\text{MF}}^{\eta} \right] \eta \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}} = \mathfrak{bc}_{\text{MF}}^{\eta} \left[ \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}} \right]$$

$$\rightsquigarrow \eta \underline{b}_{\text{RSM}} = \xi \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} + \mathbf{B}_{\text{MF}}^{\eta} \eta \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}}$$

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_T^{\eta} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_T^{\eta} \right] \eta \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} = \mathfrak{bc}_T^{\eta} \left[ \eta \underline{b}_{\text{RSM}} \right]$$

▶ **Résolution de la partie moyenne puis turbulente dans la direction  $\zeta$  :**

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_{\text{MF}}^{\zeta} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{\text{MF}}^{\zeta} \right] \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}} = \mathfrak{bc}_{\text{MF}}^{\zeta} \left[ \eta \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}} \right]$$

$$\rightsquigarrow \zeta \underline{b}_{\text{RSM}} = \eta \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} + \mathbf{B}_{\text{MF}}^{\zeta} \Delta \mathbf{w}_{\text{MF}}$$

$$\rightsquigarrow \mathfrak{Bc}_T^{\zeta} \left[ \mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_T^{\zeta} \right] \Delta \mathbf{w}_{\text{RSM}} = \mathfrak{bc}_T^{\zeta} \left[ \zeta \underline{b}_{\text{RSM}} \right]$$

• **Mise à jour pour la sous-itération suivante**

▶ Mise à jour de la solution :  ${}^{(m+1,n+1)} \mathbf{w} = {}^{(m,n+1)} \mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}$

▶ Conditions aux limites explicites (Eq. 3.42) et réalisabilité [18]

▶ Calcul de l'erreur de convergence (Eq. 3.47)

**End for**

**End for**

---

<sup>6</sup> Approximate Factorisation Alternative Direction :  $\mathcal{J} + \Delta t \frac{\partial F^J}{\partial \mathbf{w}} \cong \left( \mathcal{J} + \Delta t \frac{\partial^{\xi} F^J}{\partial \mathbf{w}} \right) \left( \mathcal{J} + \Delta t \frac{\partial^{\eta} F^J}{\partial \mathbf{w}} \right) \left( \mathcal{J} + \Delta t \frac{\partial^{\zeta} F^J}{\partial \mathbf{w}} \right)$ .

### 3.4.3 Résolution du système linéaire par méthode de Krylov

Nous avons considéré une méthode de Krylov pour la résolution à chaque pas de temps des équations de Navier-Stokes stationnaires pour le champ moyen qui permettent de supprimer les erreurs de factorisation approchée. Nous qualifierons cette méthode de résolution faiblement couplée car nous séparons toujours la résolution de la partie moyenne de la résolution de la partie turbulente. De plus, étant donné la forme de la matrice turbulente, nous avons toujours une résolution AF-ADI pour cette partie.

Dans le cas présent, la matrice  $(\mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{MF})$  est stockée entièrement avec l'inclusion des conditions aux limites dans toutes les directions. La matrice du système linéaire à résoudre à chaque itération est donc :

$$\mathbf{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF} [\mathcal{J} + \Delta t^{**} (\mathbf{A}_{MF}^{\xi} + \mathbf{A}_{MF}^{\eta} + \mathbf{A}_{MF}^{\zeta})] \quad \text{où } \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF} [\cdot] = \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF}^{\zeta} \left[ \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF}^{\eta} \left[ \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF}^{\xi} [\cdot] \right] \right] \quad (3.44)$$

De même, l'ensemble des conditions aux limites sont imposées sur le vecteur à droite d'un système linéaire.

$$\underline{b}_{MF}^{(m,n+1)} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_{MF} [\underline{b}_{MF}] \quad \text{où } \mathfrak{b}\mathfrak{c}_{MF} [\cdot] = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_{MF}^{\zeta} \left[ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_{MF}^{\eta} \left[ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_{MF}^{\xi} [\cdot] \right] \right] \quad (3.45)$$

A chaque itération pseudo-temporelle, les vecteurs résidus sont initialisés à zéro. La sortie de la boucle de Krylov est dictée par une combinaison de deux paramètres en fixant un nombre d'itérations de Krylov maximal et à une diminution de résidus. Nous avons préféré cette combinaison avec une régulation auto-adaptative par rapport à une régulation stricte en fixant seulement le nombre d'itérations. Cette régulation permet au fur et à mesure du calcul de ne pas sur-résoudre le problème temporel et ainsi d'augmenter le temps de calcul inutilement [95]. Elle est surtout utile en fin de processus itératif temporel où les variations du vecteur solution d'une itération à la suivante sont faibles. Pour cela, nous définissons comme diminution un rapport maximal entre les résidus d'entrée et de sortie de la boucle de Krylov :

$$r_{\text{res}}^{-1} = \frac{\|\mathbf{A}\Delta\mathbf{w} - \underline{b}^{(m,n+1)}\|}{\|\underline{b}^{(m,n+1)}\|} \quad (3.46)$$

et limitons à 100 le nombre de vecteurs des bases de Krylov.

---

**Algorithme 10** Schéma directeur de la résolution des équations Navier-Stokes par l'algorithme GMRes pour un calcul monogrid à pas de temps dual

---

**For**  $n = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

▶ Calcul du pas de temps physique  $\Delta t_{i,j,k}$  (Eq. 3.36)

**For**  $m = 1, 2, \dots$  Boucle sous-itérative **Do** :

• **Discretisation spatiale**

▶ Calcul du pas de temps dual  $\Delta t_{i,j,k}^*$  (Eq. 3.36)

▶ Calcul des résidus :  $\underline{b}^{(m,n+1)} = \left[ \frac{m,n+1\mathbf{w} - n\mathbf{w}}{\Delta t} + \mathcal{L}^{(m,n+1)\mathbf{w}} \right]$

▶ Multiplication par le pas de temps modifié :  $\underline{b}^{(m,n+1)} = -\Delta t_{i,j,k}^{**} \underline{b}^{(m,n+1)}$

• **Intégration temporelle**

▶ **Conditions aux limites vecteur de droite** :  $\underline{b}_{MF}^{(m,n+1)} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF} \left[ \underline{b}_{MF}^{(m,n+1)} \right]$

▶ **Calcul de la matrice implicite de l'écoulement** :  $\mathbf{A} \leftarrow \mathfrak{B}\mathfrak{C}_{MF} [\mathcal{J} + \Delta t^{**} \mathbf{A}_{MF}]$

▶ **Calcul du préconditionnement** :  $\mathbf{M} \leftarrow \text{PREC} [\mathbf{A}]$

▶ **Résolution du système linéaire par l'algorithme GMRes** :  $\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} \Delta\mathbf{w} = \underline{b}_{MF}^{(m,n+1)}$

▶ **Résolution de la partie turbulente par méthode AF-ADI**

• **Mise à jour pour la sous-itération suivante**

▶ Mise à jour de la solution :  ${}^{(m+1,n+1)}\mathbf{w} = {}^{(m,n+1)}\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}$

▶ Conditions aux limites explicites (Eq. 3.42) et réalisabilité [18]

▶ Calcul de l'erreur de convergence (Eq. 3.47)

**End for**

**End for**

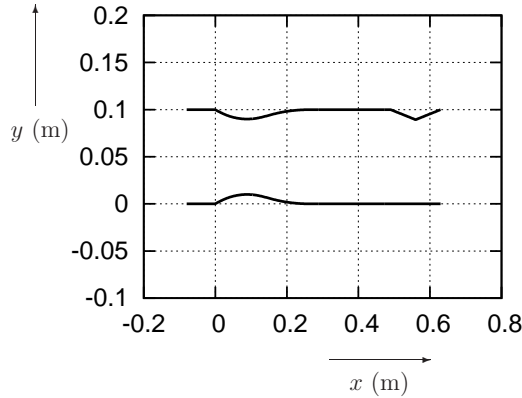
---

## 3.5 Tuyère de Délely

### 3.5.1 Présentation de la configuration

La géométrie considérée dans le cadre de ce travail est une tuyère bidimensionnelle symétrique étudiée par Délely *et al.* [32] pour l'étude de l'interaction entre une onde de choc et une couche limite. Nous nous limitons dans le cadre de cette thèse à un cas bidimensionnel, mais il n'y a aucune perte de généralité dans la méthode par rapport à un cas tridimensionnel<sup>7</sup>.

La tuyère est composée de deux profils symétriques sur les parois haute et basse. Un second col permet de contrôler la contre-pression aval et l'écoulement supersonique de sortie. Les principales caractéristiques de la tuyère sont présentées ci-dessous :



Caractéristiques géométriques	
Longueur	0.75 m
Hauteur en entrée	0.1 m
Hauteur de premier col	0.08 m
Hauteur du second col	0.09 m
Position du bord d'attaque	0.075 m
Corde du profil	0.27 m

FIG. 3.2 – Géométrie et caractéristiques géométriques de la tuyère (J.M Délely *AIAA. J.*, vol. 21, 1983, p. 180-185)

### 3.5.2 Configuration subsonique

La méthode de résolution pseudo-Newton-GMRES a tout d'abord été évaluée dans le cas d'un écoulement haut subsonique. Pour cela, la tuyère a été tronquée à 0.4 m (Fig. 3.2) pour supprimer le second col. Les conditions aux limites sont en entrée et en sortie des conditions de non réflexion [137] subsoniques et les parois sont considérées comme adiabatiques. Le calcul est réalisé sur un maillage de  $N_i \times N_j = 301 \times 121$  avec un rapport de pression sortie-entrée statique totale  $\pi_{S-T} = 0.77$ . Les données des conditions de fonctionnement sont reportées dans le tableau 3.2.

L'écoulement est initialisé suivant la procédure mise au point par Vallet [137] avec un taux de turbulence  $T_u = 1\%$  et des couches limites d'une épaisseur de 5 mm. Pour nous permettre d'accélérer la convergence, tous les calculs ont été réalisés avec trois niveaux de grille.

### Validation de la résolution pseudo-Newton-GMRES

La comparaison des résultats des grandeurs aérodynamiques est issue d'un calcul par factorisation approchée AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) et d'un autre par la méthode de Krylov avec un préconditionnement par factorisation approchée GMRES\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=50, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3$ ). La figure 3.3 présente

<sup>7</sup>Dans le cas d'une résolution 2D, la résolution AF-ADI, la résolution dans la troisième direction  $\zeta$  est simplement supprimée. Dans le cas de la résolution GMRES, la matrice implicite est une matrice bande composée de quatre blocs de dimensions  $4 \times N_i \times N_j$  en 2-D au lieu de sept blocs de dimensions  $5 \times N_i \times N_j$  en 3-D.

Conditions aux limites d'entrée			
Température totale	:	$\check{T}_t$ (K)	= 300
Pression totale	:	$\check{P}_t$ (Pa)	= 101325
nombre de Mach	:	$\check{M}$	= 0.6
Conditions de parois			
Température	:	$\check{T}_w$ (K)	= 300
Conditions aux limites de sortie			
Pression statique	:	$\check{P}$ (Pa)	= 78020
Rapport de pression sortie/entrée	:	$\pi_{S-T}$	0.77

TAB. 3.2 – Conditions aux limites d'entrée de la tuyère de Déleroy tronquée pour le calcul subsonique sur un maillage  $301 \times 121$

l'historique de la convergence où les erreurs relatives au champ moyen  $e_{MF}$  et au champ turbulent  $e_{RSM}$  sont calculées par les relations suivantes [18] :

$$e_{MF}[\mathbf{w}_{MF}, \Delta\mathbf{w}_{MF}] = \log_{10} \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{\sum[\Delta\bar{\rho}]^2}{\sum[\bar{\rho}]^2} + \frac{\sum[\Delta(\bar{\rho}\tilde{u}_i)\Delta(\bar{\rho}\tilde{u}_i)]}{\sum[\bar{\rho}\tilde{u}_i\bar{\rho}\tilde{u}_i]} + \frac{\sum[\Delta(\bar{\rho}\check{h}_t - \bar{p})]^2}{\sum[\bar{\rho}\check{h}_t - \bar{p}]^2} \right\}} \quad (3.47)$$

et

$$e_{RSM}[\mathbf{w}_{RSM}, \Delta\mathbf{w}_{RSM}] = \log_{10} \sqrt{\frac{1}{5} \left\{ \frac{\sum[\Delta(\bar{\rho}\widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j'')] \Delta(\bar{\rho}\widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j'')]}{\sum[\bar{\rho}\widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j''\bar{\rho}\widetilde{u}_i''\widetilde{u}_j'']} + \frac{\sum[\Delta\bar{\rho}\varepsilon^*]^2}{\sum[\bar{\rho}\varepsilon^*]^2} \right\}} \quad (3.48)$$

Les facteurs  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{5}$  sont utilisés (respectivement pour les erreurs  $e_{MF}$  et  $e_{RSM}$ ) pour les présents calculs 2-D (contrairement aux facteurs  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{7}$  en 3-D [18]).

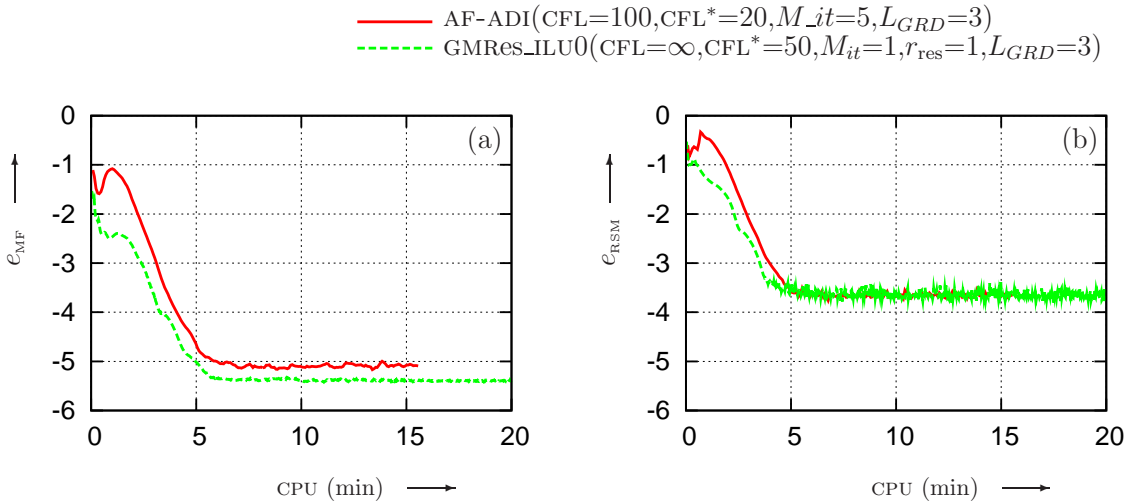


FIG. 3.3 – Convergence des résidus de la partie moyenne  $e_{MF}$  et de la partie turbulente  $e_{RSM}$  des résolutions AF-ADI(CFL=100,CFL\*=20, $M_{it}$ =5, $L_{GRD}$ =3) et GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ ,CFL\*=50, $M_{it}$ =1, $r_{res}$ =1, $L_{GRD}$ =3)

La figure 3.4 présente l'évolution du nombre de Mach obtenu par la résolution GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ ,CFL\*=50, $M_{it}$ =1, $r_{res}$ =1, $L_{GRD}$ =3) et compare sur les parois et à l'axe le Mach isentropique<sup>8</sup> des deux résolutions pour un

$${}^8 M_{is} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{p_{t \text{ inlet}}}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}.$$

nombre de Mach d'entrée tuyère de 0.6. Le fluide est accéléré dans la partie convergente de la tuyère, jusqu'au col à Mach 0.9, puis est décéléré dans la partie divergente. Après le divergent, la couche limite s'épaissit pour occuper jusqu'à 20 % de la section de passage. Par ailleurs, la figure 3.4(b) permet de mettre en évidence un très bon accord de la distribution du Mach isentropique et de la pression (Fig. 3.4) sur les parois ainsi qu'à l'axe de la tuyère entre les deux méthodes de résolution. Ces bons résultats sont confirmés par la comparaison sur les coupes transversales de la vitesse axiale  $\tilde{u}$  et tangentielle  $\tilde{v}$  à cinq positions axiales ( $x = 0$ ,  $x/L = 1/4$ ,  $x/L = 1/2$ ,  $x/L = 3/4$  et  $x = L$ ) (Fig. 3.5).

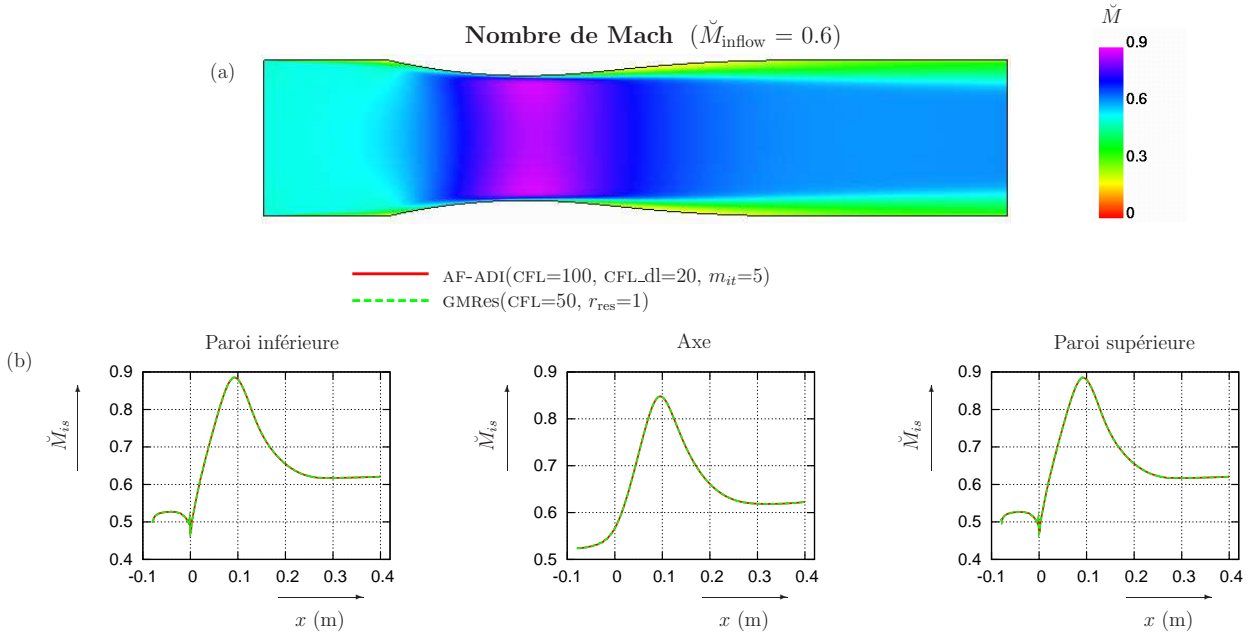


FIG. 3.4 – Cartographie du nombre de Mach par la méthode  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3)$  et comparaison de l'évolution du nombre de Mach isentropique le long de l'axe et de la paroi supérieure et inférieure entre une résolution  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3)$  et  $\text{AF-ADI}(\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3)$  dans la tuyère de Déleroy pour un écoulement subsonique

Le tableau 3.3 compare l'erreur relative maximale des quantités aérodynamiques locales<sup>9</sup> entre les résolutions  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3)$  et  $\text{AF-ADI}(\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3)$

Une comparaison entre les deux méthodes pour les grandeurs turbulentes est présentée en annexe § A.1.

Quantités aérodynamiques		Ecart relatif maximal
Masse volumique	$\bar{p}$	0.06 %
Vitesse axiale	$\tilde{u}$	0.20 %
Vitesse tangentielle	$\tilde{v}$	0.52 %
Pression	$\bar{p}$	0.08 %

TAB. 3.3 – Comparaison de l'erreur relative maximale des quantités aérodynamiques entre les résolutions  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3)$  et  $\text{AF-ADI}(\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3)$

<sup>9</sup> $\text{err}_{\text{rel}} = \max_{i,j,k} \left| \frac{w^{\text{AF-ADI}} - w^{\text{GMRes}}}{w^{\text{AF-ADI}}} \right|$ .

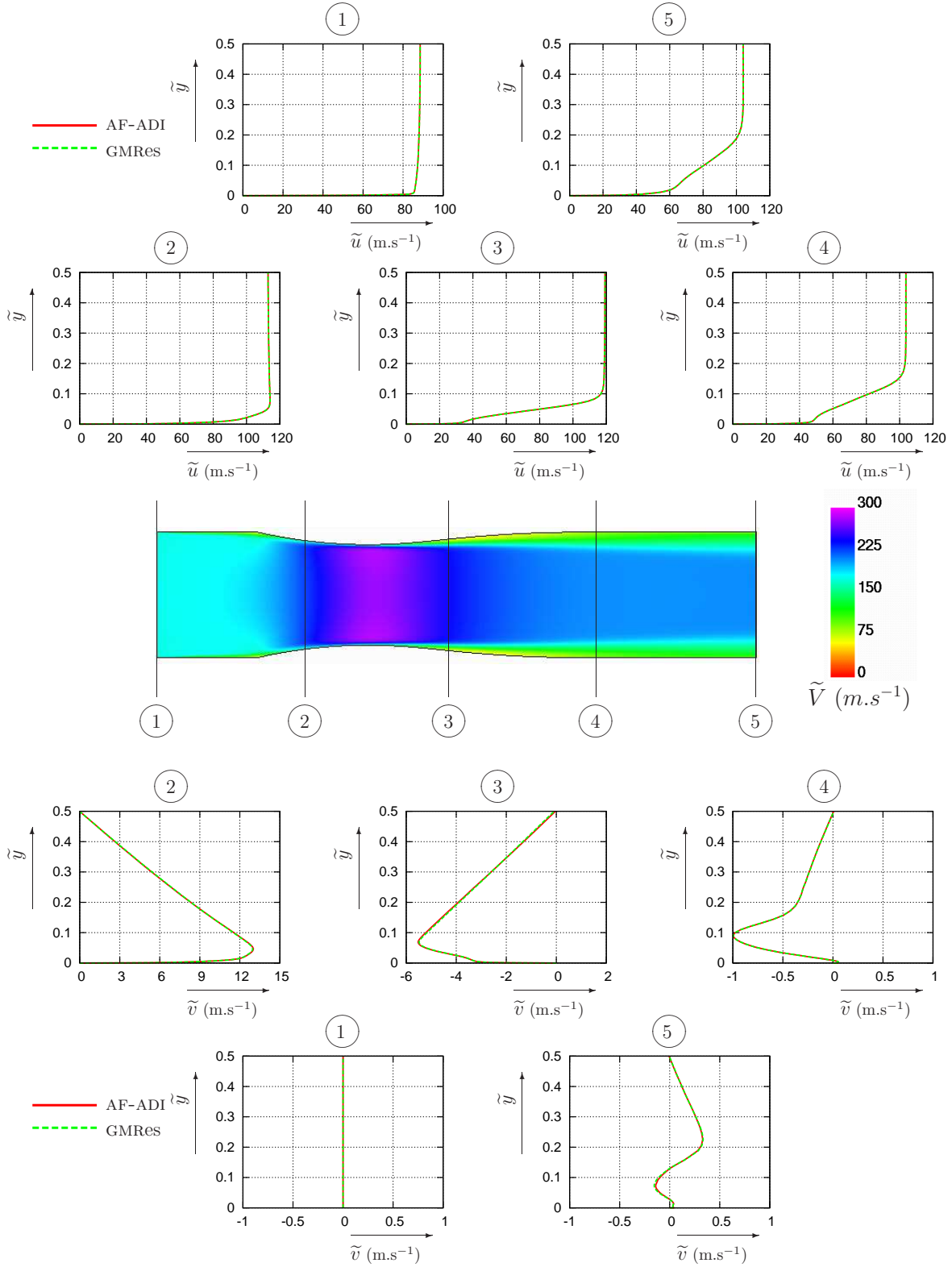


FIG. 3.5 – Comparaison de l'évolution de la vitesse axiale  $\tilde{u}$  et de la vitesse normale  $\tilde{v}$  à cinq positions axiales  $x = 0, x = \frac{1}{4}L, x = \frac{1}{2}L, x = \frac{3}{4}L$  et  $x = L$  entre une résolution GMRes\_ILU0( $CFL = \infty, CFL^* = 50, M_{it} = 1, r_{res} = 1, L_{GRD} = 3$ ) et AF-ADI( $CFL = 100, CFL^* = 20, M_{it} = 5, L_{GRD} = 3$ ) dans le cas d'un écoulement subsonique

### Influence de la méthode de résolution sur la convergence à iso pas de temps

Il est important de noter que les calculs GMRes et GMRes avec préconditionnement de Jacobi, quels que soient le pas de temps ( $CFL = 10, 15, 20$ ) et le rapport  $r_{res}$ , n'ont jamais convergé. L'historique de la convergence des méthodes AF-ADI( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, L_{GRD} = 3$ ), GMRes\_BJ( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 2, L_{GRD} = 3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 1-100, L_{GRD} = 3$ ) en fonction du nombre d'itérations et du temps de calcul est présenté dans la figure 3.6. Cette figure permet de comparer la convergence des différents calculs pour un pas de temps identique. Notons que le rapport minimal de réduction  $r_{res}$  pour un préconditionnement BJ est de 2 alors que pour un préconditionnement ILU0 il est de 1. Pour les résolutions AF-ADI et GMRes\_BJ, le niveau de convergence pour les résidus de l'écoulement moyen est de quatre ordres de grandeur (Fig. 3.6(a)-(b)). En revanche, le niveau atteint de convergence si un préconditionnement ILU0 est utilisé est de plus de cinq ordres de grandeur ( $e_{MF} = -5.2$ ) quel que soit le facteur de réduction demandé  $r_{res} = 1$  ou 100. Les pentes de convergence en fonction du nombre d'itérations (Fig. 3.6(a)) et du temps (Fig. 3.6(b)) des deux méthodes sont quasi identiques jusqu'à 250 itérations. Ensuite, alors que les résidus des résolutions AF-ADI et GMRes\_BJ( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 2, L_{GRD} = 3$ ) saturent, les résidus relatifs aux calculs GMRes\_ILU0 continuent de diminuer.

Pour les résidus turbulents,  $e_{RSM}$ , l'amélioration entre la méthode AF-ADI et la méthode GMRes\_BJ et GMRes\_ILU0 est moins probante. Avec la résolution par factorisation approchée, nous obtenons une réduction des résidus turbulents de  $e_{RSM} = -4.4$  et avec la résolution GMRes\_ILU0, nous obtenons une réduction de  $e_{RSM} = -4.7$  (Fig. 3.6(c)-(d)). Ce résultat nous paraît cohérent étant donné que les équations du champ turbulent sont toujours résolues par factorisation approchée quelle que soit la résolution du champ moyen (AF-ADI ou GMRes). Le faible gain observé avec les approches GMRes\_ILU0 dans le niveau des résidus turbulents par rapport aux résolutions AF-ADI et GMRes\_BJ est probablement consécutif à la réduction de l'erreur du champ moyen.

Nous remarquons par ailleurs sur la figure 3.6(a)-(b) que le facteur  $r_{res}$  pour un préconditionnement ILU0 influence la convergence. Les niveaux sont presque identiques mais la résolution GMRes\_ILU0( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 1, L_{GRD} = 3$ ) converge en 400 itérations temporelles alors que la résolution GMRes\_ILU0( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 100, L_{GRD} = 3$ ) en 150 itérations, soit un gain de 64.6 %. En revanche, en gain en temps CPU entre les deux résolutions GMRes\_ILU0 n'est que de 44.4 % (Fig. 3.6(b)). Cela est lié au nombre d'itérations GMRes nécessaires : la résolution avec un rapport  $r_{res} = 1$  nécessite moins de cinq itérations de Krylov à chaque itération pseudo-temporelle alors que la résolution GMRes\_ILU0( $CFL = \infty, CFL^* = 20, M_{it} = 1, r_{res} = 100, L_{GRD} = 3$ ) en nécessite en moyenne une dizaine. A pas de temps identique, la résolution GMRes\_BJ ou GMRes\_ILU0 ne permet pas d'accélérer la convergence.

Par ailleurs, nous avons remarqué que le nombre d'itérations GMRes effectuées à chaque itération temporelle varie beaucoup entre les différents préconditionnements pour le même rapport  $r_{res} = 2$ . Pour ce rapport  $r_{res}$ , dans le cas d'un préconditionnement Jacobi bloc, chaque itération temporelle nécessite 10 à 15 itérations GMRes ; en revanche dans le cas d'un préconditionnement ILU0, le nombre d'itérations GMRes n'a jamais été supérieur à 5. Cette constatation est probablement relative au type du préconditionnement. Même si ce sont des préconditionnements numériques, ils n'influencent pas de façon identique la résolution du système linéaire. Dans le cas Jacobi bloc, la molécule de discrétisation au nœud (i,j) est influencée uniquement par elle-même. En revanche, un préconditionnement ILU0 agit plus globalement et influence l'ensemble des points du maillage. Cela permet une meilleure propagation des informations le long des directions de l'écoulement.

### Influence du nombre de sous-itérations

La figure 3.7 permet de comparer les vitesses de convergence entre une résolution de Krylov avec pas de temps simple et pas de temps dual avec une résolution AF-ADI. Dans les deux cas représentés ici utilisant le pas de temps dual, les calculs ont été réalisés avec un  $CFL = 100$  et un  $CFL^* = 20$ , et un nombre de sous-itérations fixé  $M_{it} = 5$ .

Nous remarquons une faible différence entre le niveau de convergence des résidus de l'écoulement moyen et la résolution AF-ADI avec pas de temps dual et le GMRes avec pas de temps simple. Par ailleurs, si le nombre d'itérations



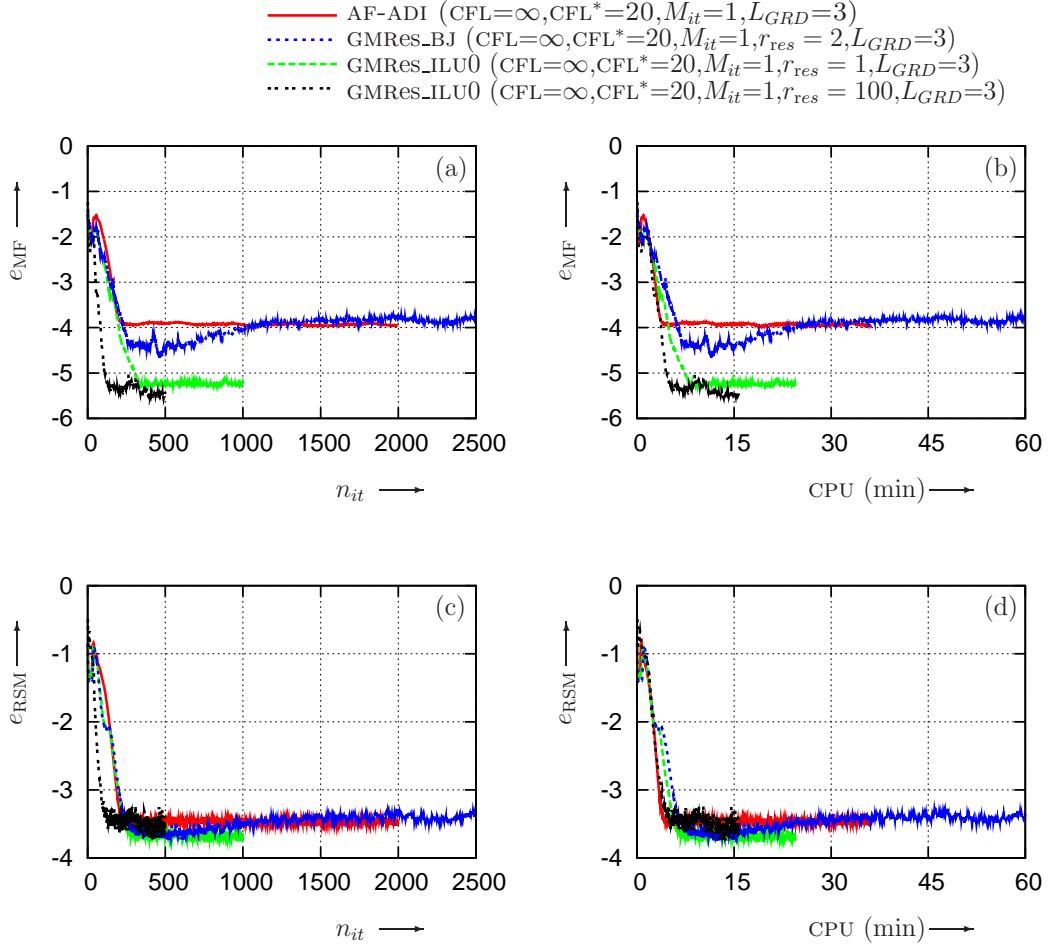


FIG. 3.6 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d'itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour une résolution AF-ADI(CFL= $\infty$ , CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=1$ ,  $L_{GRD}=3$ ), GMRes\_BJ(CFL= $\infty$ , CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=2$ ,  $L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ , CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=1$ ,  $L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ , CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=100$ ,  $L_{GRD}=3$ )

total<sup>10</sup> est quasi identique à convergence, la résolution GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ , CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=100$ ,  $L_{GRD}=3$ ) présente un coût CPU identique à la résolution AF-ADI(CFL=100, CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=5$ ,  $L_{GRD}=3$ ) mais est 85 % moins longue que la résolution GMRes\_ILU0(CFL=100, CFL\* $=20$ ,  $M_{it}=5$ ,  $r_{res}=1$ ,  $L_{GRD}=3$ ).

La factorisation ILU0 ainsi que la résolution LU sont réalisées par l'outil SPARSEKIT de Saad [117]. Notons que ces routines ne sont pas vectorisées, les temps de calcul sont donc fortement pénalisés car la factorisation approchée de la matrice doit être réalisée à chaque sous-itération temporelle et l'application du préconditionnement à chaque itération GMRes. Pour remédier à ce problème, Saad [130] propose de ne pas factoriser la matrice à chaque itération mais seulement à certaines itérations. Entre les deux itérations où le préconditionneur est de nouveau calculé par une nouvelle factorisation incomplète, le préconditionneur de l'itération courante est modifié en utilisant une correction de bas niveau de Broyden [33]. Une autre méthode proposée par Olawsky *et al.* [107], pour la résolution d'écoulement hypersonique, propose de vectoriser le processus de factorisation. Pour cela, ils utilisent soit une troncature de série de Neumann, soit, dans le cas d'un maillage structuré, une structure algorithmique basée sur un ordre spécial de rangement de données [107]. Ces deux approches doivent faire l'objet de prochaines études afin de minimiser le temps de calcul.

<sup>10</sup> $\ell_{it} = n_{it} \times m_{it} = \text{Nbs itérations primaires} \times \text{sous-itérations}$ .

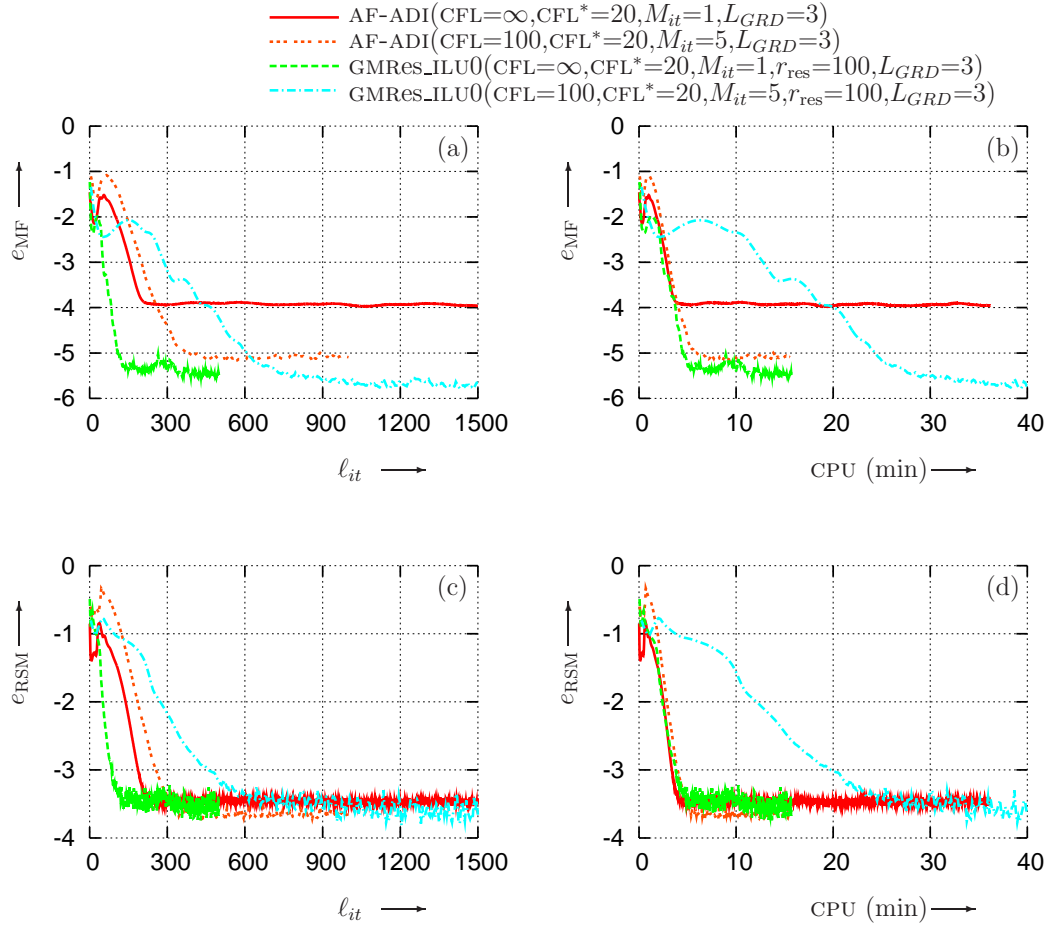


FIG. 3.7 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d’itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour une résolution AF-ADI( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, L_{GRD}=3$ ), AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=100, M_{it}=5$ ), GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ )

### Influence du pas de temps sur la convergence

L’influence du CFL sur la vitesse de convergence de la méthode GMRes\_ILU0 est présentée dans la figure (Fig. 3.8). Alors que la résolution AF-ADI ne permet pas, à cause des erreurs de factorisation, d’utiliser des CFL supérieurs à 20, la résolution GMRes\_ILU0 autorise des valeurs maximales de CFL de 100. Seuls les calculs avec le préconditionnement ILU0 ont convergé avec une CFL supérieur à 20. De plus, nous n’avons pas eu besoin d’augmenter la réduction des résidus pour converger.

Le niveau de convergence des résidus de la partie moyenne est du même ordre de grandeur pour les résolutions GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=100, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=100, M_{it}=1, r_{res}=500, L_{GRD}=3$ ) avec une réduction de plus de cinq ordres de grandeur qui est un niveau plus bas que la résolution AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) (Fig. 3.8(a)-(d)). Des remarques identiques peuvent être faites dans le cas des résidus turbulents (Fig. 3.8(c)-(d)).

Nous avons déjà remarqué qu’une résolution GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) convergeait en un temps identique qu’une résolution AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ), mais en augmentant le pas de temps pour les résolutions GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=100, M_{it}=1, r_{res}=100-500, L_{GRD}=3$ ) le temps à convergence augmente (Fig. 3.8(b)). En revanche, le nombre d’itérations est identique quel que soit le pas de

temps pour une résolution GMRes\_ILU0 (Fig. 3.8(a)). Alors que la résolution par AF-ADI nécessite 400 itérations pour atteindre la convergence, les résolutions GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) n'en requièrent que 150, soit un gain de 64.6 %.

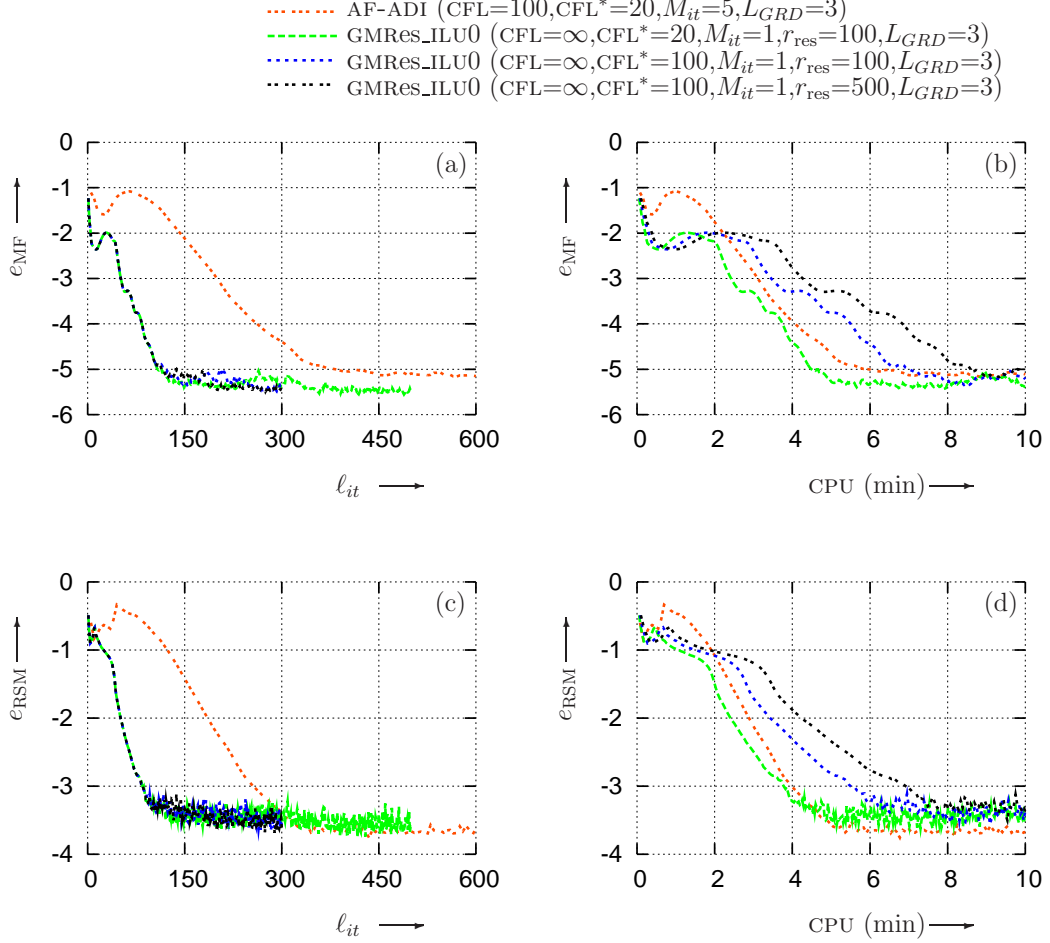


FIG. 3.8 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d'itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour une résolution AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=100, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=100, M_{it}=1, r_{res}=500, L_{GRD}=3$ )

### 3.5.3 Configuration transsonique

Dans le cas d'un écoulement transsonique, la géométrie complète de la tuyère est prise en compte. Cette configuration a déjà permis de valider le solveur AF-ADI [137] et a été retenue pour valider le solveur GMRes développé dans cette étude. Le nombre de points dans la direction transverse a été augmenté afin de discrétiser correctement la couche limite ( $y^+ \cong 0.5$ ). Le calcul a été réalisé sur un maillage de  $N_i \times N_j = 401 \times 201$  et un rapport entre la pression totale de sortie et la pression statique d'entrée  $\pi_{s-t} = 0.64$ .

L'écoulement est initialisé avec un taux de turbulence  $T_u = 1\%$  et des couches limites d'une épaisseur de 5 mm. Pour nous permettre d'accélérer la convergence, tous les calculs ont été réalisés avec trois niveaux de grille. Les conditions de fonctionnement sont reportées dans le tableau 3.4.

Conditions aux limites d'entrée			
Température totale	:	$\tilde{T}_t$ (K)	= 300
Pression totale	:	$\tilde{P}_t$ (Pa)	= 600000
nombre de Mach	:	$\tilde{M}$	= 0.57
Conditions de parois			
Température	:	$\tilde{T}_w$ (K)	= 300
Conditions aux limites de sortie			
Pression statique	:	$\tilde{P}$ (Pa)	= 38400
Rapport de pression sortie/entrée	:	$\pi_{S-T}$	= 0.64

TAB. 3.4 – Conditions aux limites d'entrée de la tuyère de Détery pour le calcul transsonique sur un maillage  $N_i \times N_j = 401 \times 201$

### Validation de la résolution pseudo-Newton-GMRes

Dans le cas de ce calcul transsonique, l'écoulement est accéléré dans la partie convergente et atteint la vitesse sonique au col. Le fluide continue d'accélérer dans le divergent jusqu'à l'onde de choc. L'onde de choc est droite au centre de la tuyère puis présente une structure classique de choc en lambda (Fig. 3.9) lors de ses interactions avec les couches limites turbulentes. L'interaction entre l'onde de choc et la paroi entraîne une importante zone de faible vitesse (Fig. 3.9) avec une recirculation qui s'étend sur une épaisseur d'un cinquième de hauteur totale de tuyère. Ce « rétrécissement » de section crée deux zones de plus forte vitesse entre la sortie de couche limite et le centre de la tuyère. En sortie de tuyère, l'écoulement est bloqué au niveau du second col, ce qui permet d'éviter la propagation de perturbation lors de la campagne de mesures.

La figure présentant l'évolution du nombre de Mach (Fig. 3.9(b)) montre une bonne concordance entre les résultats issus des méthodes AF-ADI(CFL=100,CFL\*=20, $M_{it}=5,L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ ,CFL\*=20, $M_{it}=1,r_{res}=1,L_{GRD}=3$ ). La position du choc ainsi que le nombre de Mach et les niveaux de pression sont identiques, que ce soit au niveau de l'axe de la tuyère ou sur les parois. Malgré l'importante discontinuité liée à la présence du choc, la méthode Krylov GMRes\_ILU0 converge correctement.

La figure 3.10 présente les évolutions transversales des champ de vitesse  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  en cinq positions axiales ( $x/L = 0, 25 \%, 42 \%, 45 \%, 1$ ). Les trois coupes sont placées pour  $x_2$  au début du divergent, la position  $x_3$  traverse la structure en lambda de l'onde de choc et  $x_4$  la zone de décollement. Pour la position  $x_3$ , les deux composantes du champ de vitesse  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont en bonne concordance avec les deux résolutions, particulièrement au niveau du choc et de la partie interne de la structure en lambda.

Le tableau 3.5 nous donne l'écart relatif maximal obtenu pour les différentes variables par les deux méthodes :

Variables aérodynamiques		Ecart relatif maximal
Masse volumique	$\bar{\rho}$	0.12 %
Vitesse axiale	$\tilde{u}$	1.82 %
Vitesse tangentielle	$\tilde{v}$	3.12 %
Pression	$\bar{p}$	0.98 %

TAB. 3.5 – Comparaison de l'erreur relative maximale des variables aérodynamiques entre les résolutions AF-ADI(CFL=100,CFL\*=20, $M_{it}=5,L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ ,CFL\*=20, $M_{it}=1,r_{res}=1,L_{GRD}=3$ )

Une étude comparative des grandeurs turbulentes est donnée en annexe (cf. A.2).

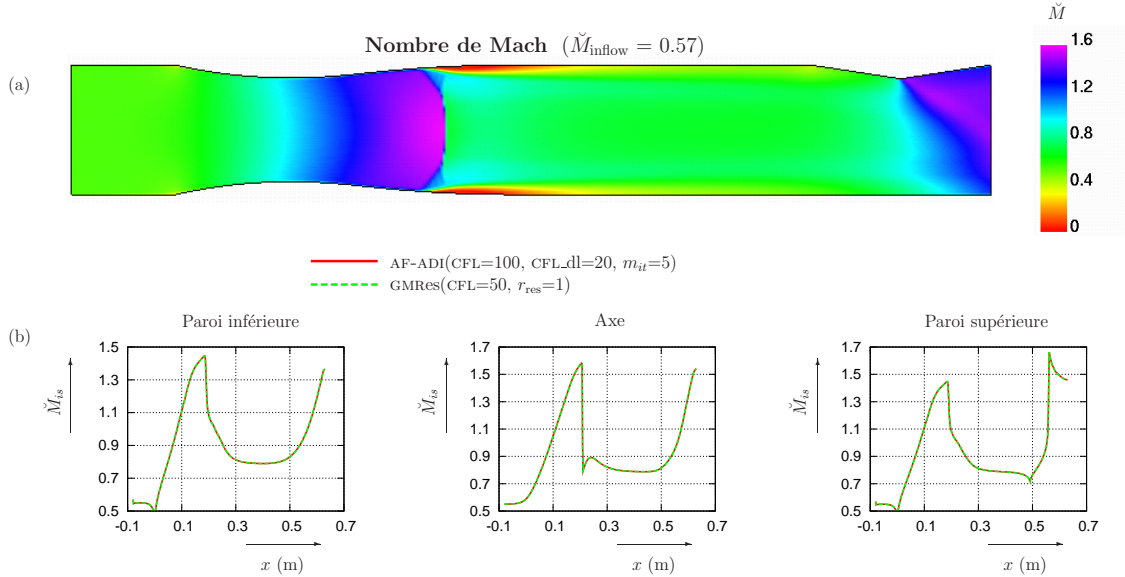


FIG. 3.9 – Cartographie du nombre de Mach par la méthode `GMRes_ILU0`( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3$ ) et comparaison de l'évolution du nombre de Mach isentropique le long de l'axe et de la paroi supérieure et inférieure entre une résolution `AF-ADI`( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) et `GMRes_ILU0`( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3$ ) dans la tuyère de Détery pour un écoulement transsonique

### Etude de la convergence à iso pas de temps

En raison de l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite, la physique de l'écoulement est beaucoup plus complexe et donc plus numériquement difficile à résoudre par rapport à un écoulement subsonique. D'un point de vue numérique, les non linéarités physiques relatives à la présence de l'onde de choc et de la zone de recirculation rendent l'obtention d'une solution plus délicate<sup>11</sup>. Notons que la résolution n'a pas été initialisée par une résolution des équations d'Euler ou par un calcul avec un ordre de schéma inférieur. L'initialisation de l'écoulement est une initialisation isentropique entre l'entrée et la sortie [137] à laquelle des profils de couche limite sont ajoutés au voisinage des parois. Le choc se place donc au fur et à mesure des itérations temporelles. De plus, à la différence du test précédent, le fluide à la sortie de la tuyère est supersonique et par conséquent il a été nécessaire de modifier les conditions aux limites (Tab. 3.1).

Aucun calcul utilisant une méthode de Krylov sans préconditionnement ou avec un préconditionnement simple de Jacobi n'a jamais réussi à converger. Dans le cas d'une résolution `GMRes_BJ`, le facteur de réduction  $r_{res}$  minimal est de 5 (ce qui correspond en moyenne à une base de 20 vecteurs par itération temporelle). En revanche, pour un préconditionnement `ILU0`, une diminution des résidus  $r_{res} = 1$  par pseudo-pas de temps suffit (Fig. 3.11).

Le facteur de réduction des résidus  $r_{res}$  dans le cas d'une résolution `GMRes_ILU0` ne permet pas de diminuer sensiblement le niveau des résidus de l'écoulement moyen  $e_{MF}$  (Fig. 3.11(a)-(b)). Par ailleurs, nous remarquons d'importantes fluctuations des résidus moyens à convergence quelle que soit la résolution `AF-ADI`, `GMRes_BJ` ou `GMRes_ILU0` bien que le champ moyen lui soit convergé. Cela est sans doute lié aux deux zones de décollement situées à l'aval de l'interaction entre l'onde de choc et les couches limites dans un milieu confiné (Fig. 3.9(a)).

Le meilleur niveau de convergence est atteint pour les résolutions `GMRes_ILU0`( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1$ -

<sup>11</sup>Activation des limiteurs de pente et application des conditions aux limites [137].

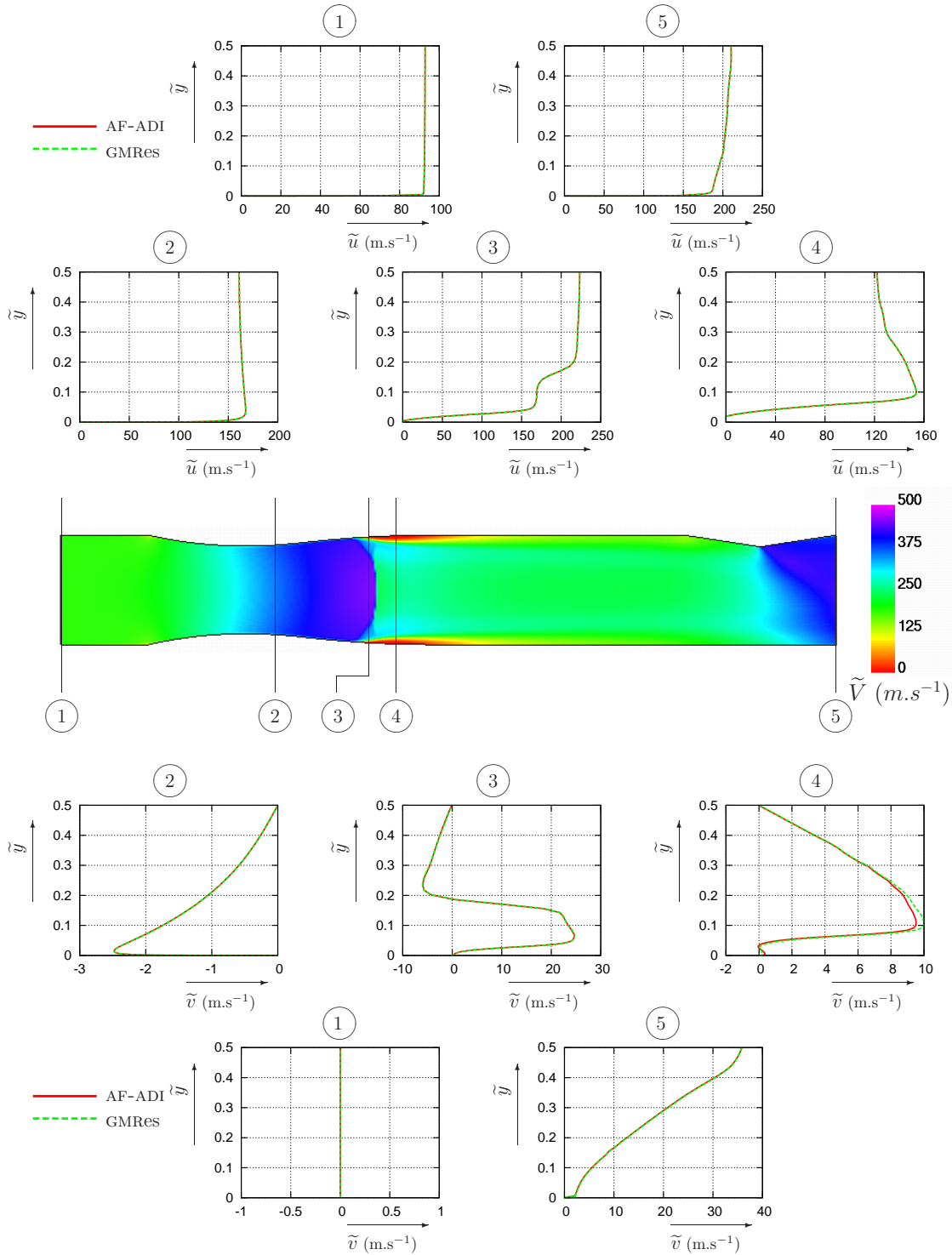


FIG. 3.10 – Comparaison de l'évolution de la vitesse axiale  $\tilde{u}$  et de la vitesse normale  $\tilde{v}$  à cinq positions axiales  $x=0$ ,  $x=25\%L$ ,  $x=42\%L$ ,  $x=45\%L$  et  $x=L$  entre une résolution GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3$ ) et AF-ADI( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) dans le cas d'un écoulement transsonique

2-100,  $L_{GRD}=3$ ) avec un niveau moyen de  $e_{MF} = -4.3$  alors que les résolutions AF-ADI et GMRes\_BJ convergent de moins de quatre ordres de grandeur (Fig. 3.11 (a)-(b)). Une remarque identique peut être faite pour les résidus turbulents : avec une résolution GMRes\_ILU0, le niveau moyen de  $e_{RSM} = -3.6$  et avec une résolution AF-ADI, il est de -3.1 (Fig. 3.11(c)-(d)). Le meilleur niveau de convergence obtenu pour les résidus turbulents est sans doute dû, tout comme pour un écoulement subsonique, à une meilleure convergence des résidus moyens.

Le temps de calcul est aussi amélioré dans le cas d'une méthode de Krylov par rapport à une résolution par factorisation approchée pour un nombre CFL identique. Avec une résolution de GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1-2-100, L_{GRD}=3$ ), la convergence est atteinte en 35 minutes environ alors que la AF-ADI( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, L_{GRD}=3$ ), elle, nécessite 45 minutes (Fig. 3.11) sur un NEC SX5.

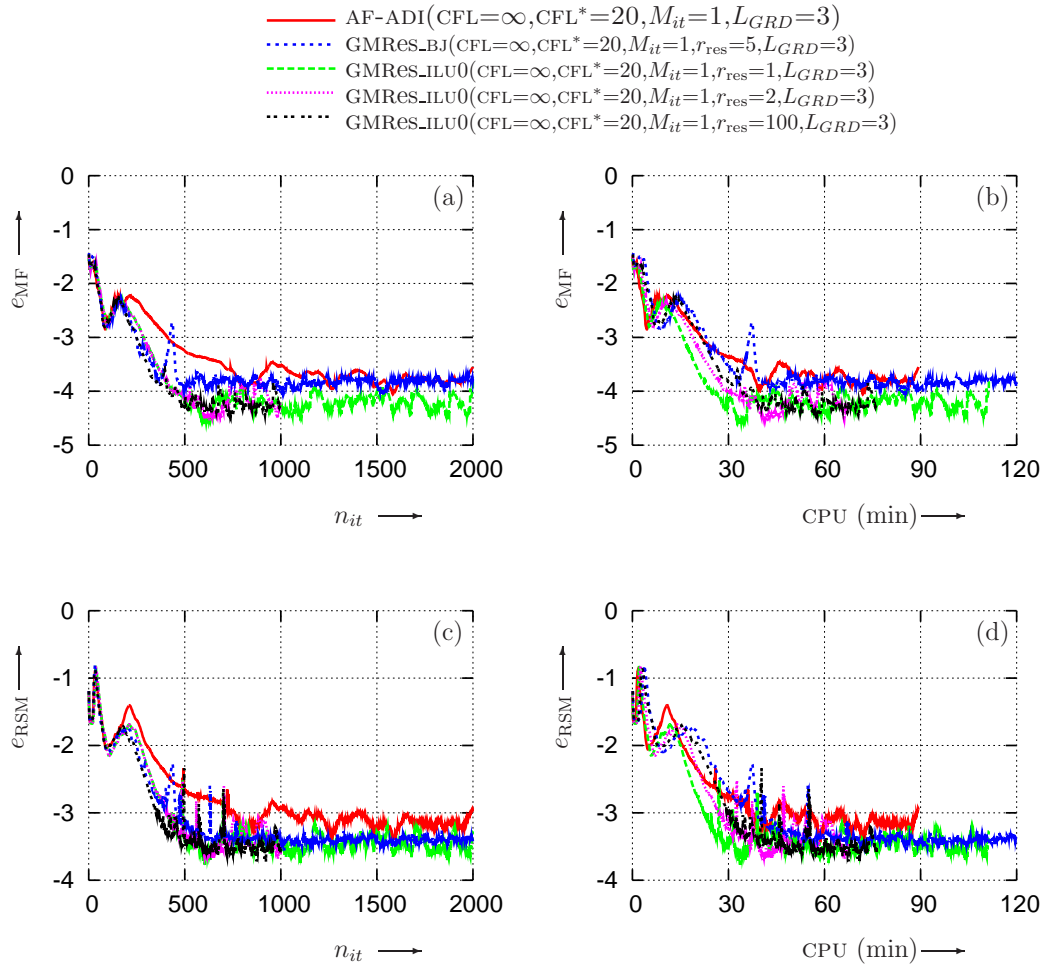


FIG. 3.11 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d'itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour une résolution AF-ADI( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_BJ( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=5, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=1, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=2, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $CFL=\infty, CFL^*=20, M_{it}=1, r_{res}=100, L_{GRD}=3$ )

### Influence du processus sous-itératif

La figure 3.12 permet d'analyser simultanément la vitesse et le niveau de convergence de la méthode de résolution à pas de temps dual ( $CFL=100, CFL^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) par rapport à l'approche sans itération duale. Pour chaque résolution de Krylov, nous utilisons à chaque pas de temps un préconditionnement ILU0 avec une

contrainte de diminution du facteur de réduction dans la boucle de Krylov  $r_{\text{res}}=100$ .

Les résolutions AF-ADI( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3$ ) ne permettent pas d'obtenir une meilleure erreur de convergence que l'approche AF-ADI( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=20, M_{it}=1, L_{GRD}=3$ ) (Fig. 3.12). Cela est sans doute lié à la présence de la zone de décollement. Le meilleur niveau de convergence est toujours atteint par la résolution GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=20, M_{it}=1, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3$ ). Le temps de convergence ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour converger ne sont pas plus importants avec une méthode sous-itérative. De plus, aucune des méthodes ne parviens à diminuer le bruit numérique observé en fin de processus itératif. Il semble que ce bruit soit associé à la résolution faiblement couplée des champs moyen et turbulent.

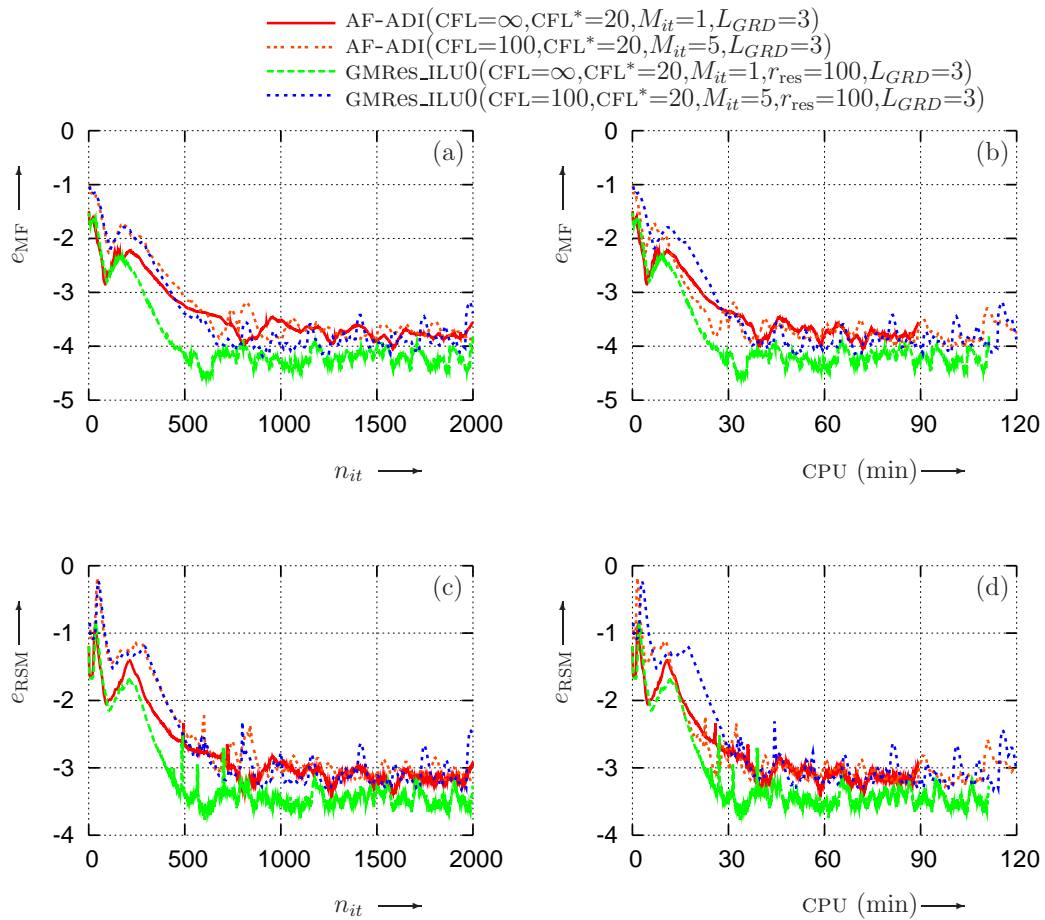


FIG. 3.12 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d'itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour les méthodes AF-ADI( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=20, M_{it}=1, L_{GRD}=3$ ), AF-ADI( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ), GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=20, M_{it}=1, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3$ ) et GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3$ )

### Influence du pas de temps

La figure (3.13) permet de quantifier l'influence du choix du CFL sur la vitesse de convergence de la méthode itérative utilisée. Alors que le CFL maximal d'une résolution AF-ADI est de 20, nous avons pu augmenter le CFL à 50 avec une résolution GMRes et  $r_{\text{res}} = 100 - 500$ . Avec un pas de temps plus important malgré une augmentation



du rapport  $r_{\text{res}}$  étant donné les simplifications réalisées pour le calcul de la matrice jacobienne, les calculs ne convergent pas.

Paradoxalement, un CFL plus important ne permet pas de converger plus rapidement, que ce soit en nombre d'itérations ou en temps CPU. En effet, chaque itération nécessite une moyenne de 25 itérations de Krylov pour une résolution  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3)$  alors que la résolution  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=500, L_{GRD}=3)$  en requiert en moyenne 35. Par ailleurs, nous avons un niveau plus faible de convergence, que ce soit pour les résidus moyens ou turbulents, avec un CFL de 50 (Fig. : 3.13).

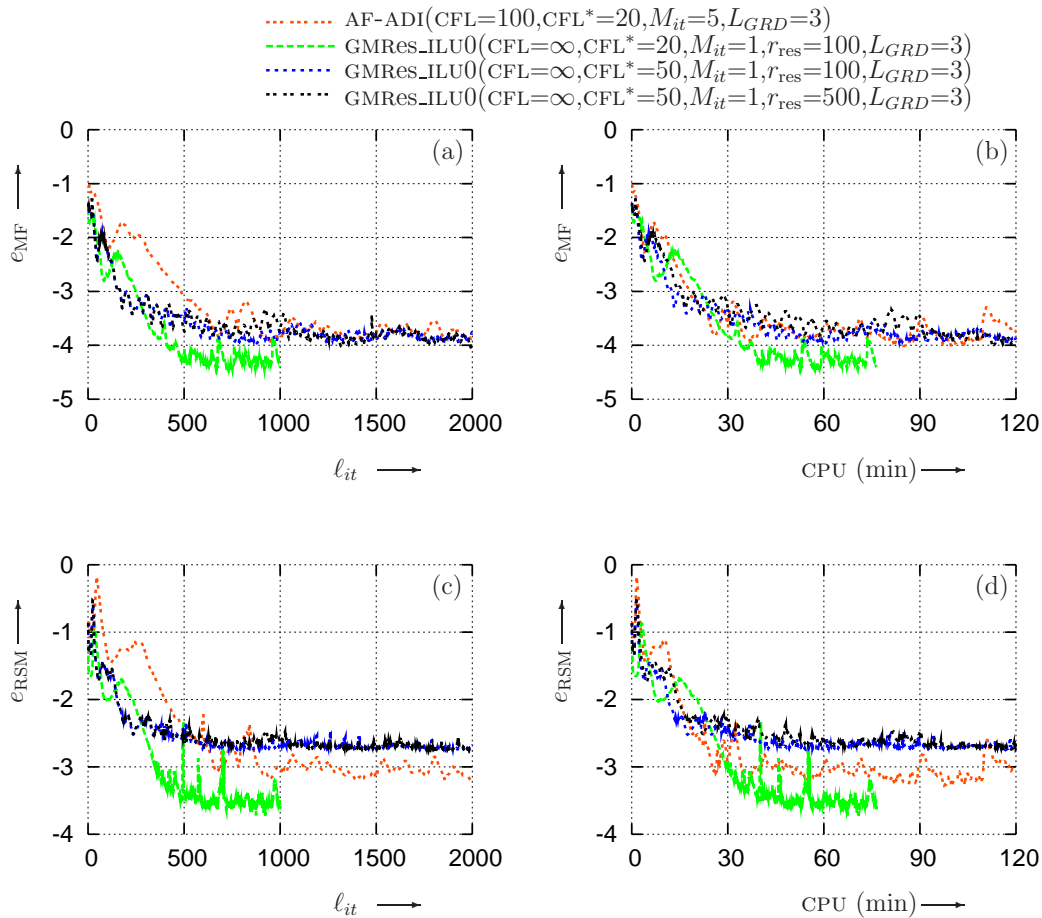


FIG. 3.13 – Comparaison de la vitesse de convergence en fonction du nombre d'itérations (a), (c) et du temps CPU (b), (d) pour les résidus moyens et turbulents pour une résolution AF-ADI(CFL=100,CFL\*=20, $M_{it}=5,L_{GRD}=3$ ),  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=20, M_{it}=1, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3)$ ,  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=100, L_{GRD}=3)$  et  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=500, L_{GRD}=3)$

### 3.6 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre les expériences numériques réalisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires par une méthode de pseudo-Newton-GMRes. Le système linéaire issu de la discrétisation implicite et portant sur les variables du champ moyen est résolu par une approche GMRes, alors que le système linéaire relatif au champ turbulent est résolu par une approche AF-ADI.

Pour la résolution GMRes, différents types de préconditionnement ont été testés et implémentés : le préconditionnement de Jacobi, le préconditionnement bloc Jacobi et une factorisation ILU0 de la matrice jacobienne. Dans tous les cas présentés ici, le système a été résolu avec un préconditionnement à droite. Lors d'autres études non rapportées, le préconditionnement à gauche donne des résultats similaires.

Le solveur pseudo-Newton-GMRes a été validé dans le cadre de la tuyère 2D de Détery [32] en régime haut subsonique et régime transsonique. L'influence du préconditionnement et de la diminution des résidus à l'intérieur de la boucle de Krylov a ensuite été étudiée en détail. Pour un pas de temps identique, nous avons constaté un niveau de convergence plus important dans le cas de résolution GMRes\_ILU0 que dans celui de la résolution GMRes\_BJ. De même, pour un même nombre CFL, la vitesse et le niveau de convergence pour la résolution GMRes\_ILU0 que AF-ADI. Dans un second temps, nous avons procédé à une étude de sensibilité de la convergence au pas de temps. Dans le cas d'une résolution AF-ADI à pas de temps simple, les erreurs de factorisation ne permettent pas d'utiliser des CFL supérieurs à 20. En revanche, lors d'une résolution GMRes, la limite de stabilité de la méthode est repoussée et permet d'utiliser des pas de temps plus importants (CFL=100 dans le cas subsonique et CFL=50 dans le cas transsonique). La convergence du processus itératif de résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires avec un modèle de turbulence au second ordre a ainsi été accélérée avec un gain de temps de 50 % dans le cas d'une résolution pour un écoulement haut subsonique. Nous avons aussi constaté, quels que soient les écoulements considérés, un gain en nombre d'itérations de 150 % dans le cas subsonique et de 75 % dans le cas transsonique.



## Chapitre 4

# Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps résolues par méthodes pseudo-Newton-GMRes

Après les essais concluants de résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires par une résolution de type pseudo-Newton-GMRes, nous avons, dans ce chapitre, procédé à l'application de cette méthode aux équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps. Ces équations présentent l'avantage d'avoir une résolution de l'ordre de cinq à dix fois plus rapide que la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires car elles ne requièrent pas l'obtention d'une solution périodique [17]. En revanche, la solution pour chaque fréquence étant obtenue séparément, les phénomènes couplés entre harmoniques ne sont pas calculés.

### 4.1 Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps

Les équations d'Euler et de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps sont basées sur la décomposition de l'écoulement instationnaire en un écoulement stationnaire sur lequel sont superposées des petites perturbations harmoniques. Les perturbations sont décomposées dans ce cas en série de Fourier :

$$\mathbf{w}(\vec{x}, t) = \Re \left( {}^0\mathbf{w}(\vec{x}) + \sum_{m=1}^{M_{freq}} {}^m\hat{\mathbf{w}}(\vec{x}) e^{i\omega_m t} \right) \quad (4.1)$$

où  ${}^0\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{Ni \times Nj \times Nk \times 12}$  est le vecteur des variables conservatrices stationnaires,  ${}^m\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}^{Ni \times Nj \times Nk \times 12}$  est le vecteur des variables perturbées de la perturbation  $m$  et  $\omega_m$  est la pulsation de la perturbation liée à la fréquence d'excitation de l'instationnarité  $f_m$ , tel que  $\omega_m = 2\pi f_m$ .

Deux linéarisations sont envisageables pour formuler le problème. Hall *et al.* [57] optent pour une linéarisation des flux puis discrétisent ces derniers par un schéma centré d'ordre 2. L'autre méthode utilisée notamment par Lindquist et Giles [89] consiste à linéariser directement les flux numériques issus de l'application du schéma spatial. Dans le cadre de cette étude, nous avons retenu cette dernière approche car elle permet d'utiliser le même schéma de discrétisation spatiale que pour la résolution des équations stationnaires [17]. En reportant dans les équations de Navier-Stokes instationnaires la décomposition de l'écoulement est représentée par l'équation 4.1 et en écrivant ces équations dans le domaine fréquentiel, pour un harmonique fixé, la formulation suivante est obtenue :

$$i\omega_m {}^m\hat{\mathbf{w}} + \text{div} \left[ \vec{\mathbf{F}}^C({}^0\mathbf{w}, {}^m\hat{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{F}}^V({}^0\mathbf{w}, {}^m\hat{\mathbf{w}}) \right] = 0 \quad (4.2)$$

Les perturbations instationnaires étant de faibles amplitudes par rapport à l'écoulement stationnaire, les flux

convectifs et visqueux sont linéarisés par un développement de Taylor au premier ordre :

$$\vec{\mathbf{F}}^{C,V} = {}^0\vec{\mathbf{F}}^{C,V} + \underbrace{{}^0 \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{F}}^{C,V}}{\partial \mathbf{w}} \right)}_{m \vec{\mathbf{F}}^{C,V}} m \hat{\mathbf{w}} + \mathcal{O}(\mathbf{w})^2 \quad (4.3)$$

où  ${}^n \vec{\mathbf{F}}^{C,V}$  désigne les flux convectifs et visqueux linéarisés en temps.

A convergence, les équations de Navier-Stokes stationnaires peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\operatorname{div} \left[ \vec{\mathbf{F}}^C({}^0\mathbf{w}) + \vec{\mathbf{F}}^V({}^0\mathbf{w}) \right] = 0 \quad (4.4)$$

En soustrayant ces équations (Eq. 4.4) aux équations de Navier-Stokes instationnaires écrites dans le domaine fréquentiel (Eq. 4.2) et en incluant la procédure de linéarisation des flux au premier ordre (Eq. 4.3), nous obtenons les équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps :

$$i\omega_m m \hat{\mathbf{w}} + \operatorname{div} \left[ {}^0 \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{F}}^C}{\partial \mathbf{w}} \right) m \hat{\mathbf{w}} + {}^0 \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{F}}^V}{\partial \mathbf{w}} \right) m \hat{\mathbf{w}} \right] = 0 \quad (4.5)$$

## 4.2 Linéarisation des flux et conditions aux limites

L'approche utilisée pour la linéarisation des flux est celle développée par Chassaing [17] et est résumée ici pour permettre la description des développements sur la résolution des systèmes linéaires par approche de Krylov.

### 4.2.1 Linéarisation des flux convectifs

Pour être consistants avec le schéma stationnaire, les flux convectifs sont obtenus par la linéarisation de la décomposition des flux de Van Leer [140] :

$$\begin{cases} m \vec{\mathbf{F}}_{\xi}^C &= \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\xi}^+({}^0\underline{w}^-) m \hat{\underline{w}}^- + \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\xi}^-({}^0\underline{w}^+) m \hat{\underline{w}}^+ \\ m \vec{\mathbf{F}}_{\eta}^C &= \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\eta}^+({}^0\underline{w}^-) m \hat{\underline{w}}^- + \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\eta}^-({}^0\underline{w}^+) m \hat{\underline{w}}^+ \\ m \vec{\mathbf{F}}_{\zeta}^C &= \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\zeta}^+({}^0\underline{w}^-) m \hat{\underline{w}}^- + \operatorname{VL} \mathbf{A}_{\zeta}^-({}^0\underline{w}^+) m \hat{\underline{w}}^+ \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $(.)^+$  est la contribution avancée,  $(.)^-$  est la contribution retardée et les matrices  $\mathbf{A}_{\xi}^{\pm} = \frac{\partial \operatorname{VL} \mathbf{F}_{\xi}^{\pm}}{\partial \underline{w}}$ ,  $\mathbf{A}_{\eta}^{\pm} = \frac{\partial \operatorname{VL} \mathbf{F}_{\eta}^{\pm}}{\partial \underline{w}}$

et  $\mathbf{A}_{\zeta}^{\pm} = \frac{\partial \operatorname{VL} \mathbf{F}_{\zeta}^{\pm}}{\partial \underline{w}}$  sont les matrices jacobiennes des flux de Van Leer et sont données par Vallet [137]. Les extrapolations MUSCL sont elles aussi linéarisées pour les perturbations comme pour les variables stationnaires.

$$\begin{cases} m \hat{\underline{w}}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{\pm} &= \underline{w}^{\pm} \left( m \hat{\underline{w}}_{i-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2},j,k}, m \hat{\underline{w}}_{i-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},j,k}, m \hat{\underline{w}}_{i+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},j,k} \right) \\ m \hat{\underline{w}}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{\pm} &= \underline{w}^{\pm} \left( m \hat{\underline{w}}_{i,j-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2},k}, m \hat{\underline{w}}_{i,j-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},k}, m \hat{\underline{w}}_{i,j+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2},k} \right) \\ m \hat{\underline{w}}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{\pm} &= \underline{w}^{\pm} \left( m \hat{\underline{w}}_{i,j,k-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}}, m \hat{\underline{w}}_{i,j,k-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}, m \hat{\underline{w}}_{i,j,k+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \quad (4.7)$$

avec

$$\underline{w}^{\pm}(\underline{w}_{-1}, \underline{w}_0, \underline{w}_1) = \underline{w}_0 \mp \left[ \frac{{}^0\mathfrak{s}}{4} \left( 1 \mp \frac{{}^0\mathfrak{s}}{3} \right) (\underline{w}_{+1} - \underline{w}_0) + \frac{{}^0\mathfrak{s}}{4} \left( 1 \pm \frac{{}^0\mathfrak{s}}{3} \right) (\underline{w}_0 - \underline{w}_{-1}) \right] \quad (4.8)$$

Les limiteurs de pente de Van-Albada  ${}^0\mathfrak{s}$  [139] sont, eux, fixés à leurs valeurs stationnaires.

Ce schéma de résolution des équations d'Euler linéarisées avec capture de choc a été développé et validé par Haugeard [63] dans le cadre d'écoulements avec et sans choc dans une tuyère et les résultats ont été comparés avec des résultats provenant de la résolution des équations d'Euler instationnaires.

### 4.2.2 Linéarisation des flux diffusifs

Toujours pour être consistants avec le schéma stationnaire, les flux visqueux sont discrétisés par des différences finies précises au second ordre [67] :

$$\begin{cases} m \hat{\mathbf{F}}_{i \pm \frac{1}{2}, j, k}^V &= \frac{1}{2} \left[ m \hat{\mathbf{F}}_{i, j, k}^V + m \hat{\mathbf{F}}_{i \pm 1, j, k}^V \right] \\ m \hat{\mathbf{F}}_{i, j \pm \frac{1}{2}, k}^V &= \frac{1}{2} \left[ m \hat{\mathbf{F}}_{i, j, k}^V + m \hat{\mathbf{F}}_{i, j \pm 1, k}^V \right] \\ m \hat{\mathbf{F}}_{i, j, k \pm \frac{1}{2}}^V &= \frac{1}{2} \left[ m \hat{\mathbf{F}}_{i, j, k}^V + m \hat{\mathbf{F}}_{i, j, k \pm 1}^V \right] \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans le cadre de cette étude, le modèle de turbulence au second ordre [46] n'est pas linéarisé de sorte que le champ aérodynamique perturbé  $m \hat{\underline{w}}$  se limite aux cinq variables de l'écoulement moyen :

$$m \hat{\underline{w}} = \left[ m \hat{\rho}, m \hat{\rho u}, m \hat{\rho v}, m \hat{\rho h_t} - \bar{p} \right]^T \quad (4.10)$$

Notons que Sbardella et Imregun [123] préconisent la linéarisation du modèle à une équation de transport de Spalart-Allmaras [131] dans le cas de fort décollement. A notre connaissance, seuls Holmes et Lorence [68] ont linéarisé le modèle à deux équations de transport  $k - \omega$  [91]. Les flux visqueux du champ moyen sont linéarisés en fonction des quantités équivalentes du modèle de turbulence  $k - \varepsilon^*$  [45] (§ 3.1.2) :

$$m \hat{\mathbf{F}}^V ({}^0 \underline{w}, m \underline{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ m \hat{\tau}_{xx}^{eq} \\ m \hat{\tau}_{xy}^{eq} \\ m \hat{\tau}_{xz}^{eq} \\ {}^0 \tilde{u} m \hat{\tau}_{xx}^{eq} + {}^0 \tilde{v} m \hat{\tau}_{xy}^{eq} + {}^0 \tilde{w} m \hat{\tau}_{xz}^{eq} + m \hat{u} {}^0 \tau_{xx}^{eq} + m \hat{v} {}^0 \tau_{xy}^{eq} + m \hat{w} {}^0 \tau_{xz}^{eq} - m \hat{q}_x \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

où la linéarisation du tenseur des contraintes équivalentes  $m \hat{\tau}_{ij}^{eq}$  et du flux de chaleur linéarisé  $m \hat{q}_i$  est obtenue en linéarisant respectivement l'hypothèse de Boussinesq et la loi de Fourier :

$$m \hat{\tau}_{ij}^{eq} = m \hat{\mu}_{eq} \left[ \left( \frac{\partial {}^0 \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial {}^0 \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial {}^0 \tilde{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} {}^0 \bar{\rho} m \hat{k} + {}^0 \mu_{eq} \left[ \left( \frac{\partial m \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial m \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial m \hat{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} m \hat{\rho} {}^0 k \quad (4.12)$$

$$m \hat{q}_i = - ({}^0 \kappa + {}^0 \kappa_T) \frac{\partial m \hat{T}}{\partial x_i} - (m \hat{\kappa} + m \hat{\kappa}_T) \frac{\partial {}^0 \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (4.13)$$

où  $\mu_{eq} = \check{\mu} + \mu_T$ . Les fluctuations des grandeurs turbulentes ( $\frac{2}{3} {}^0 \bar{\rho} m \hat{k}$ ) sont négligées. Les coefficients de viscosité et de conductivité thermique sont obtenus par la linéarisation des lois de Sutherland :

$$\begin{aligned} m \hat{\mu} &= {}^0 \check{\mu} \left( \frac{3}{2T_{273}} - \frac{1}{T_{273} + S} \right) m \hat{T} \\ m \hat{\kappa} &= \left[ {}^0 \check{\kappa} \left( \frac{3}{2T_{273}} - \frac{1}{T_{273} + S} \right) + {}^0 \mu \frac{\kappa_{273}}{\mu_{273}} A \right] m \hat{T} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La fluctuation de la température  $m \hat{T}$  est calculée grâce aux fluctuations des variables primitives :

$$m \hat{T} = \frac{1}{C_v} \left( m \left( \widehat{\rho h_t} - \bar{p} \right) - {}^0 \tilde{u} m \hat{u} - {}^0 \tilde{v} m \hat{v} - {}^0 \tilde{w} m \hat{w} \right) \quad (4.15)$$

### 4.2.3 Conditions aux limites

Tout comme pour le calcul stationnaire, en entrée et en sortie, les conditions aux limites sont basées sur la théorie des caractéristiques et les parois considérées comme adiabatiques.

#### Entrée du domaine de calcul

En entrée, sont imposées les conditions d'Hedstrom qui se résument [17] ainsi :

$${}^m\hat{p} + {}^0\bar{p} {}^0a {}^m\hat{u} = 0; \quad {}^m\hat{p} + {}^0a^2 {}^m\hat{p} = 0; \quad {}^m\hat{v} = 0; \quad {}^m\hat{w} = 0; \quad {}^m\hat{p} + {}^0\bar{p} {}^0a {}^m\hat{u} = [{}^m\hat{p}]^{\text{SCH}} - {}^0\bar{p} {}^0a [{}^m\hat{u}]^{\text{SCH}} \quad (4.16)$$

où le superscript SCH indique que ce sont les valeurs à la fin d'une boucle du schéma d'intégration en temps.

#### Sortie du domaine de calcul

En sortie, un signal de pression est imposé après avoir été décomposé en série de Fourier :

$$\bar{p}_2(t) = {}^0\bar{p}_2 + \sum_{m=1}^M [ |{}^m\hat{p}_2| \cos(\omega t + {}^m\phi_2) ] \quad (4.17)$$

où  $|{}^m\hat{p}_2|$  et  ${}^m\phi_2$  sont respectivement les amplitudes et les phases des perturbations. Les autres variables conservatives sont extrapolées de l'intérieur du domaine :

$$\frac{\partial {}^m\hat{p}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial {}^m\hat{p}\hat{u}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial {}^m\hat{p}\hat{v}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial {}^m\hat{p}\hat{w}}{\partial n} = 0 \quad (4.18)$$

#### Parois adiabatiques

Les parois sont considérées comme adiabatiques :

$${}^m\hat{u} = 0; \quad {}^m\hat{v} = 0; \quad {}^m\hat{w} = 0; \quad \frac{\partial {}^m\hat{p}}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial {}^m\hat{T}}{\partial n} = 0 \quad (4.19)$$

## 4.3 Méthode de résolution par introduction d'un pas de temps fictif

Nous devons résoudre les équations linéarisées et harmoniques en temps directement dans le domaine fréquentiel indépendamment pour chaque fréquence étudiée. Il est à noter que toutes les méthodes d'accélération classiques telles que l'introduction d'un pas de temps local ou d'une méthode multigrille peuvent être utilisées.

### 4.3.1 Introduction du pas de temps

Autant de systèmes linéaires que nécessaires doivent être résolus pour permettre la bonne description des phénomènes physiques mis en jeu. Par la suite, nous nous limiterons à la description pour une seule pulsation ( $M_{freq} = 1$ ). En ayant une écriture synthétique du problème pour les points intérieurs du domaine, hors conditions aux limites, pour une fréquence donnée nous obtenons le problème linéaire suivant à résoudre :

$$i\omega_1 {}^1\hat{\mathbf{w}} + {}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}) = 0 \quad (4.20)$$

où  ${}^0\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{5 \times Ni \times Nj \times Nk}$  est le vecteur global des grandeurs aérodynamiques stationnaires,  ${}^1\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}^{5 \times Ni \times Nj \times Nk}$  est le vecteur des inconnues relatives aux perturbations harmoniques, et  ${}^1\hat{\mathcal{L}} \in \mathbb{C}^{5 \times Ni \times Nj \times Nk}$  est l'opérateur regroupant les flux convectifs et les flux visqueux. Cette équation est résolue par l'introduction d'un pas de temps selon une procédure *pseudo-time-marching* proposée par Ni et Sisto [104]. Considérant un schéma de discrétisation implicite d'Euler décentré au premier ordre, la discrétisation pseudo-temporelle s'écrit :

$$\frac{{}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} - {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)}}{\Delta t} + i\omega_1 {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} + {}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)}) = 0 \quad (4.21)$$

Avec l'hypothèse des petites perturbations, les flux linéarisés  ${}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)})$  se calculent en fonction des résidus stationnaires  ${}^0\mathbf{w}$  et des résidus perturbés à l'itération pseudo-temporelle  $(n+1)$  :

$${}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)}) = {}^0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}}\right){}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} \quad (4.22)$$

En introduisant les flux linéarisés dans l'équation de discrétisation temporelle (Eq. 4.20), la discrétion pseudo-temporelle des équations linéarisées et harmoniques en temps s'écrit alors :

$$\left[\mathcal{J} + \Delta t^* {}^0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}}\right)^J\right] \Delta^1\hat{\mathbf{w}} \cong -\Delta t^* \left[i\omega_1 {}^1\hat{\mathbf{w}}^n + {}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)})\right] \quad (4.23)$$

où nous avons posé  $\Delta t^* = \frac{\Delta t}{1 + i\omega_1 \Delta t} \in \mathbb{C}^{Ni \times Nj \times Nk}$  le pas de temps local et  ${}^0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}}\right)^J$  la matrice jacobienne approchée au premier ordre avec les mêmes simplifications que pour l'écoulement moyen des matrices jacobienues stationnaires (cf. § 3.4.1).

Devant les valeurs numériques du pas de temps fictif local par rapport à l'unité, nous réalisons, uniquement dans la phase implicite, la simplification suivante :

$$|i\omega_1 \Delta t| \ll 1 \implies \Delta t^* \cong \Delta t \quad (4.24)$$

Cette simplification du pas de temps est possible car nous nous limiterons à l'étude d'écoulements internes. Imhof [69] montre que cette simplification dans la résolution implicite pose des problèmes de convergence seulement lorsque le pas de temps devient grand, par exemple autour de profil d'aile (écoulement externe). Cette simplification rend la matrice globale implicite strictement réelle et découple les systèmes linéaires de discrétisation pseudo-temporelle en deux problèmes distincts : un problème pour la partie réelle des inconnues et un autre pour leur partie complexe mais avec la même matrice. Cette approximation dans le cadre d'une résolution AF-ADI, dominée par les factorisations LU\_bande, divise le temps de résolution de l'intégration temporelle par deux.

### 4.3.2 Résolution du système linéaire par factorisation approchée

Ce système linéaire (Eq. 4.23) peut être résolu à chaque pas de temps avec une méthode de factorisation approchée comme pour les équations stationnaires. Dans ce cas, la matrice est factorisée suivant les trois directions principales du maillage :

$$\mathcal{J} + \Delta t {}^0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{w}}\right)^J \cong (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\xi) (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\eta) (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\zeta) \quad (4.25)$$

et la résolution de la phase implicite à chaque pas de temps se réalise en trois étapes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\xi) \quad \xi \Delta^1\hat{\mathbf{w}} &= -\Delta t^* \left[i\omega_1 {}^1\hat{\mathbf{w}}^n + {}^1\hat{\mathcal{L}}({}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)})\right] \\ (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\eta) \quad \eta \Delta^1\hat{\mathbf{w}} &= \xi \Delta^1\hat{\mathbf{w}} \\ (\mathcal{J} + \Delta t \mathcal{A}^\zeta) \quad \Delta^1\hat{\mathbf{w}} &= \eta \Delta^1\hat{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cette méthode de résolution a été validée par Haugeard [63] dans le cas d'une résolution Euler 3-D, Imhof [69] pour des calculs Navier-Stokes bidimensionnels et Chassaing [17] l'a étendue à des cas tridimensionnels. Cet algorithme de résolution nous servira de référence pour les comparaisons de performance de convergence et de validité des résultats avec la méthode de Krylov.

### 4.3.3 Résolution du système linéaire par méthode de Krylov

Nous avons décidé d'utiliser l'algorithme GMRES pour la résolution de ces équations avec la même philosophie que pour la résolution des équations stationnaires. La différence principale réside dans le fait que la matrice jacobienne n'évolue pas au cours du processus itératif car elle ne dépend que du champ aérodynamique stationnaire



---

**Algorithme 11** Schéma de la résolution des équations Navier-Stokes linéarisées par l'algorithme AF-ADI

---

- Initialisation du vecteur résidu  ${}^1\hat{\mathbf{w}}^{(1)} = 0$ .
- Calcul du pas de temps local :  $\Delta t_{i,j,k}$
- For**  $n = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :
  - **Phase explicite**
    - ▶ Calcul des résidus :  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)} \Leftarrow \left[ i\omega_1 {}^1\hat{\mathbf{w}}^n + {}^1\hat{\mathcal{L}} \left( {}^0\mathbf{w}, {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)} \right) \right]$
    - ▶ Calcul du pas de temps local  $\Delta t_{i,j,k}^* \Leftarrow \frac{\Delta t_{i,j,k}}{1 + i\omega_1 \Delta t_{i,j,k}}$
    - ▶ Multiplication par le pas de temps local :  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)} \Leftarrow -\Delta t_{i,j,k}^* \hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)}$
  - **Phase implicite**
    - ▶ **Résolution du système linéaire dans la direction  $\xi$  par l'algorithme LU-bande :**  
 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}^\xi \left[ \mathfrak{J} + \Delta t_{i,j,k} \mathcal{A}^\xi \right] \xi \Delta^1 \hat{\mathbf{w}} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}^\xi \left[ \hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)} \right]$
    - ▶ **Résolution du système linéaire dans la direction  $\eta$  par l'algorithme LU-bande :**  
 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}^\eta \left[ \mathfrak{J} + \Delta t_{i,j,k} \mathcal{A}^\eta \right] \eta \Delta^1 \hat{\mathbf{w}} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}^\eta \left[ \xi \Delta^1 \hat{\mathbf{w}} \right]$
    - ▶ **Résolution du système linéaire dans la direction  $\zeta$  par l'algorithme LU-bande :**  
 $\mathfrak{B}\mathfrak{C}^\zeta \left[ \mathfrak{J} + \Delta t_{i,j,k} \mathcal{A}^\zeta \right] \Delta^1 \hat{\mathbf{w}} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}^\zeta \left[ \eta \Delta^1 \hat{\mathbf{w}} \right]$
  - **Mise à jour pour l'itération suivante**
    - ▶ Mise à jour de la solution :  ${}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} = {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)} + \Delta^1 \hat{\mathbf{w}}$
    - ▶ Conditions aux limites explicites
    - ▶ Calcul de l'erreur de convergence

**End for**


---

(Eq. 4.23). Elle peut de ce fait être calculée une seule fois au début de la boucle itérative pseudo-temporelle puis stockée en tenant compte des conditions aux limites. Bien que la matrice soit une matrice réelle, le problème est un problème à inconnues complexes. Pour résoudre ce type de problème, nous réorganisons les bases de Krylov afin que celles-ci soient des bases réelles<sup>1</sup> comme le font Campobasso et Giles [14]. Néanmoins, la minimisation de l'algorithme GMRES (Eq. 2.46) ne porte pas distinctement sur la partie réelle et la partie imaginaire mais sur le vecteur global (Eq. 4.27).

Le vecteur d'initialisation de la boucle itérative de Krylov à chaque itération pseudo-temporelle est le vecteur nul. La sortie est toujours dictée par une combinaison de deux paramètres en fixant le nombre maximal d'itérations GMRES et en définissant une diminution de résidu. Nous avons préféré cette combinaison avec une régulation auto-adaptative car cela permet de ne pas sur-résoudre le problème et ainsi d'augmenter le temps de calcul inutilement [95]. Pour cela, nous définissons comme diminution un rapport  $r_{\text{res}}$  maximal entre les résidus d'entrée et de sortie de la boucle de Krylov :

$$r_{\text{res}}^1 = \frac{\|\Re \left[ \mathcal{A} \Delta \hat{\underline{\mathbf{w}}}^n - \hat{\underline{\mathbf{b}}}^n \right] + \Im \left[ \mathcal{A} \Delta \hat{\underline{\mathbf{w}}}^n - \hat{\underline{\mathbf{b}}}^n \right]\|}{\|\Re \left[ -\hat{\underline{\mathbf{b}}}^n \right] + \Im \left[ -\hat{\underline{\mathbf{b}}}^n \right]\|} \quad (4.27)$$

et limitons à 100 les itérations GMRES par itération pseudo-temporelle.

De plus, l'expérience acquise nous permet de considérer seulement un préconditionnement ILU0. Nous pouvons d'ores et déjà noter que quel que soit le rapport  $r_{\text{res}}$  demandé, l'algorithme pseudo-Newton-GMRES avec un préconditionnement ILU0 (GMRES\_ptm) requiert toujours moins de 100 itérations GMRES pour converger.

---

<sup>1</sup>Nous décomposons le  $i^e$  vecteur complexe de la base de Krylov  $\hat{\underline{\mathbf{v}}}_i$  de façon à former une base de Krylov réelle :

$$\underline{\mathbf{v}}_i = \left[ \Re(\hat{\underline{\mathbf{v}}}_{i,1}), \Im(\hat{\underline{\mathbf{v}}}_{i,1}), \dots, \Re(\hat{\underline{\mathbf{v}}}_{i,n}), \Im(\hat{\underline{\mathbf{v}}}_{i,n}) \right]^T$$

---

**Algorithme 12** Schéma de la résolution des équations Navier-Stokes linéarisées par l'algorithme GMRes\_ptm
 

---

- Initialisation du vecteur résidu :  $\hat{\mathbf{w}}^{(1)} = 0$ .
- Calcul du pas de temps local :  $\Delta t_{i,j,k}$
- Calcul de la matrice implicite et multiplication par la matrice des conditions aux limites :

$$\mathcal{A} \leftarrow \mathfrak{BC} \left[ \mathfrak{J} + \Delta t_{i,j,k} {}^0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} \right)^J \right]$$

- Calcul du préconditionnement :  $\mathcal{M} \leftarrow \text{ILU0}[\mathcal{A}]$

**For**  $n = 1, 2, \dots$ , jusqu'à convergence **Do** :

- **Phase explicite**

- ▶ Calcul des résidus :  $\underline{\hat{\mathbf{b}}}^{(n)} \leftarrow \left[ i\omega_1 {}^1 \hat{\mathbf{w}}^n + {}^1 \hat{\mathcal{L}}({}^0 \mathbf{w}, {}^1 \hat{\mathbf{w}}^{(n)}) \right]$

- ▶ Calcul du pas de temps local :  $\Delta t_{i,j,k}^* \leftarrow \frac{\Delta t_{i,j,k}}{1 + i\omega_1 \Delta t_{i,j,k}}$

- ▶ Multiplication par le pas de temps local :  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)} \leftarrow -\Delta t_{i,j,k}^* \underline{\hat{\mathbf{b}}}^{(n)}$

- **Phase implicite**

- ▶ Multiplication par la matrice des conditions aux limites :  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)} \leftarrow \mathfrak{bc}[\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)}]$

- ▶ Séparation du vecteur à droite en partie réelle et partie imaginaire :  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_1^{(n)} \leftarrow \Re[\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)}]$  ;  $\hat{\underline{\mathbf{b}}}_2^{(n)} \leftarrow \Im[\hat{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)}]$

- ▶ Résolution du système linéaire par l'algorithme GMRes :  $\mathcal{A}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}(\Delta^1 \mathbf{w}_1, \Delta^1 \mathbf{w}_2) = (\hat{\underline{\mathbf{b}}}_1^n, \hat{\underline{\mathbf{b}}}_2^n)$

- ▶ Reconstitution du vecteur solution :  $\Delta^1 \hat{\mathbf{w}} \leftarrow (\Delta^1 \mathbf{w}_1, \Delta^1 \mathbf{w}_2)$

- **Mise à jour pour l'itération suivante**

- ▶ Mise à jour de la solution :  ${}^1 \hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} = {}^1 \hat{\mathbf{w}}^{(n)} + \Delta^1 \hat{\mathbf{w}}$

- ▶ Conditions aux limites explicites

- ▶ Calcul de l'erreur de convergence

**End for**

---

## 4.4 Démonstrateur 2-D : tuyère symétrique de Deléry

La méthode de résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps avec une résolution GMRes\_ptm a été testée et validée dans le cas de la tuyère symétrique de Deléry *et al.* [32]. Quels que soient les tests réalisés, les conditions de perturbation sont identiques. Nous avons choisi une perturbation aval de pression de 180 Hz avec une amplitude  $|{}^1 \hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et un déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$ . Cette fréquence est prise en exemple, elle n'a aucun rapport physique avec une quelconque dimension de la tuyère qui nous situerait proche d'une fréquence de résonance. L'amplitude de la perturbation de pression a été choisie car elle est faible par rapport aux niveaux de pression présente dans la tuyère ( $|{}^1 \hat{p}_2|$  est inférieure à 10 % de la pression minimale). Elle correspond au niveau de perturbation de pression aval dans des installations expérimentales de ce type [109].

### 4.4.1 Validation de la méthode GMRes\_ptm pour une linéarisation autour d'un écoulement stationnaire subsonique

Pour la résolution des équations linéarisées et harmoniques en temps dans le cas subsonique, aucune modification n'est à apporter à la géométrie de la tuyère. Le champ stationnaire utilisé autour duquel sont résolues ces équations est le champ issu de la résolution GMRes\_ILU0(CFL=50,  $r_{\text{res}}=1$ ) sur un maillage  $301 \times 121$ .

#### Validation de la résolution GMRes\_ptm

La figure 4.1 présente les évolutions des perturbations des quatre grandeurs aérodynamiques pour la résolution GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ). L'ensemble des perturbations sont symétriques et se propagent de l'aval à l'amont de la tuyère. Alors que la perturbation de pression est presque monodimensionnelle, les perturbations des trois autres variables non conservatives ( $\hat{p}$ ,  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$ ) sont, elles, perturbées par les couches limites, particulièrement les perturbations des deux composantes de la vitesse.

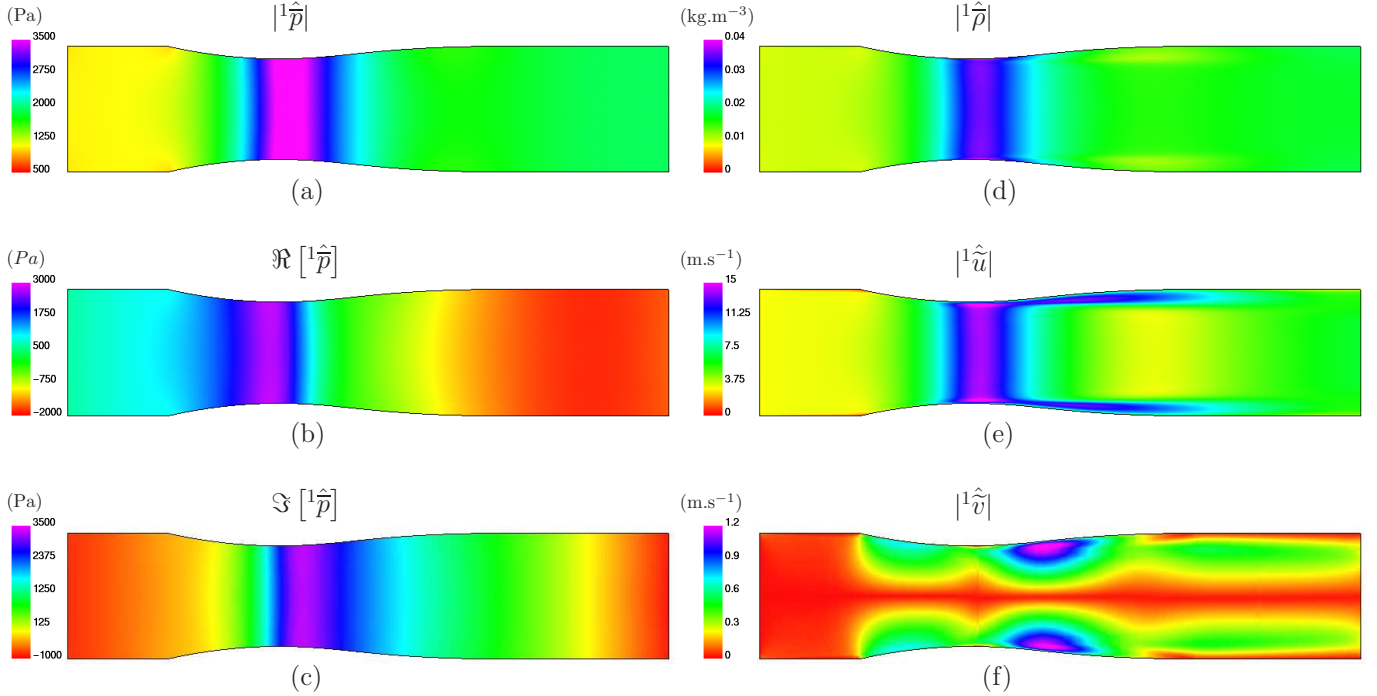


FIG. 4.1 – Evolution des modules des fluctuations des quatre grandeurs non conservatives ( $|^1\hat{\rho}|$ ,  $|^1\hat{u}|$ ,  $|^1\hat{v}|$  et  $|^1\hat{p}|$ ) ainsi que du déphasage de pression ( $\Re[^1\hat{p}]$  et  $\Im[^1\hat{p}]$ ) pour une perturbation aval de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  dans la tuyère symétrique de Deléry [32] autour d'un écoulement stationnaire subsonique pour une résolution GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ )

N'ayant pas de résultats expérimentaux instationnaires pour cette configuration, la validation de la résolution GMRes\_ptm est réalisée en comparaison avec la résolution AF-ADI développée par Haugeard [63], Imhof [69] et Chassaing [17], [21]. La figure (4.2) compare les évolutions du module et le déphasage de la pression le long de l'axe de symétrie et des parois supérieure et inférieure de la tuyère pour les trois calculs AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ). Les autres grandeurs aérodynamiques  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  sont comparées en annexe (*cf.* annexe B). Nous remarquons que pour la résolution GMRes\_ptm ni le pas de temps ni la diminution des résidus à chaque itération pseudo-temporelle  $r_{\text{res}}$  n'influencent les résultats aérodynamiques. De plus, les perturbations de chaque variable sont identiques quelle que soit la méthode de résolution AF-ADI ou GMRes\_ptm. L'erreur relative maximale est calculée au centre de tuyère pour la perturbation de vitesse  $^1\hat{v}$  et est de 1.6 %.

Un paramètre important pouvant être calculé par ces équations est le coefficient de l'effort engendré par la force de pression instationnaire sur les parois. Ces coefficients sont utilisés lors d'études aéroélastiques [17] pour calculer les effets liés à la vibration d'une aube ou d'une aile et de savoir si cette vibration va être amplifiée ou amortie par la structure. Il est donc intéressant de comparer les intégrales de l'harmonique de pression [63], [69] et [17] sur les parois inférieure et supérieure :

$$^1\hat{C}_{\text{lower}} = \left[ \int_0^1 \frac{^1\hat{p}(x, y)}{|^1\hat{p}_2|} d \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right]_{j=1} ; \quad ^1\hat{C}_{\text{upper}} = \left[ \int_0^1 \frac{^1\hat{p}(x, y)}{|^1\hat{p}_2|} d \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right]_{j=N_j} \quad (4.28)$$

La comparaison entre les forces de pression instationnaires issues de différents calculs est réalisée dans le tableau (4.1).

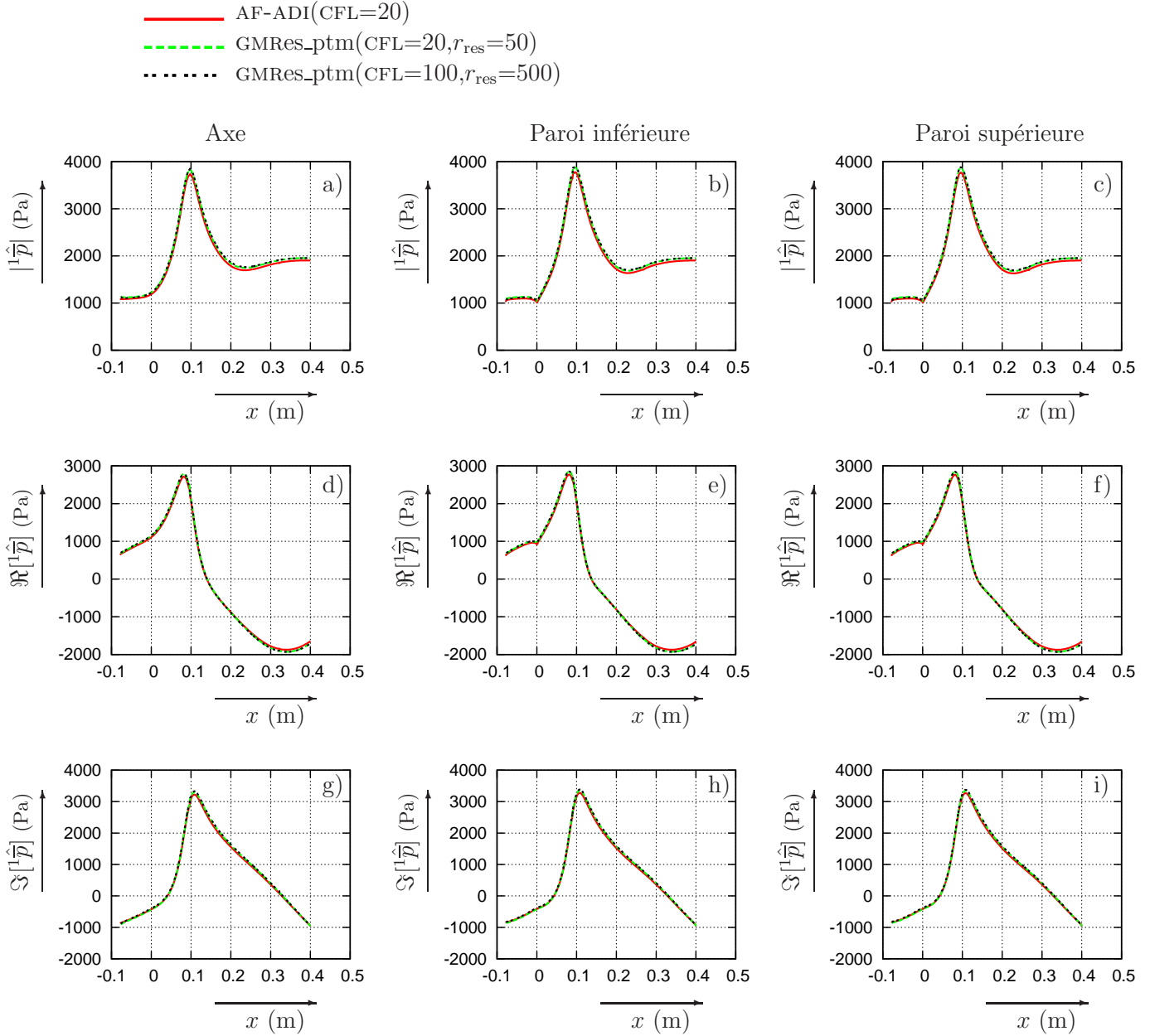


FIG. 4.2 – Comparaison de l'évolution du module  $|{}^1\hat{p}|$  et de la phase ( $\Re[{}^1\hat{p}]$  et  $\Im[{}^1\hat{p}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Déleroy [32] pour une perturbation aval de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|{}^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire subsonique.

où  $r({}^1\hat{C}) = \frac{{}^1\hat{C}_{\text{GMRES}} - {}^1\hat{C}_{\text{AF-ADI}}}{{}^1\hat{C}_{\text{AF-ADI}}}$  est le rapport entre le coefficient de pression d'une résolution par méthode de Krylov et celui de la résolution par factorisation approchée. Nous pouvons de nouveau vérifier la symétrie entre les parois inférieure et supérieure de ce coefficient pour les deux méthodes de résolution, cela quel que soit le pas de temps. Tous les calculs GMRes\_ptm convergent vers la même valeur de coefficient de pression de 0.43 et la différence avec la méthode AF-ADI, est de 2.65 %.

Méthode de résolution	CFL	$r_{\text{res}}$	${}^1\tilde{C}_{\text{lower}}$	$r({}^1\tilde{C}_{\text{lower}}) \times 100$	${}^1\tilde{C}_{\text{upper}}$	$r({}^1\tilde{C}_{\text{upper}}) \times 100$
AF-ADI	20	-	0.41791	-	0.41790	-
GMRes_ptm	20	10	0.42897	2.648	0.42896	2.648
GMRes_ptm	20	50	0.42896	2.648	0.42896	2.648
GMRes_ptm	100	50	0.42894	2.647	0.42894	2.647

TAB. 4.1 – Comparaison des coefficients des forces aérodynamiques pour les deux méthodes de résolution autour d'un écoulement stationnaire subsonique

### Comparaison de la vitesse de convergence

Si le CFL est supérieur à 20, les pas de temps sont trop importants pour une résolution AF-ADI et entraînent des instabilités numériques. La vitesse de convergence des deux méthodes de résolution a été comparée pour un CFL = 20 (Fig. 4.3). Sur la figure (4.3(a)-(d)) est comparée la convergence de la fluctuation globale des variables conservatives  $e_{MF}$  :

$$e_{MF} = \log_{10} \left[ \frac{\|{}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n+1)} - {}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)}\|_2}{\|{}^1\hat{\mathbf{w}}^{(n)}\|_2} \right] ; \|{}^1\hat{\mathbf{w}}\|_2 = \sum_{ijk} \left[ |{}^1\hat{\rho}|^2 + |{}^1(\hat{\rho}\hat{u})|^2 + |{}^1(\hat{\rho}\hat{v})|^2 + |{}^1(\hat{\rho}\hat{h}_t - \hat{p})|^2 \right] \quad (4.29)$$

en fonction du nombre d'itérations pseudo-temporelles et du temps CPU pour les deux types de résolution et trois rapports  $r_{\text{res}} = 10, 50$  et  $100$ . Avec une diminution faible des résidus par itération pseudo-temporelle GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=10$ ), le temps de résolution par itération est faible. La majeure partie de la convergence est réalisée en peu d'itérations de Krylov grâce au préconditionnement. En revanche, la convergence globale du processus pseudo-newtonien de résolution des équations linéarisées et harmoniques en temps est, lui, très lent, que ce soit en fonction du nombre d'itérations pseudo-temporelles (Fig. 4.3(a)) ou du temps CPU (Fig. 4.3(d)). Si nous augmentons la diminution des résidus GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=50-100$ ), nous avons besoin de 3500 itérations pseudo-temporelles pour converger au lieu de 3000 itérations pour une résolution AF-ADI, soit 14 % en plus (Fig. 4.3(a)). En revanche, une itération GMRes étant plus rapide qu'une itération AF-ADI, la convergence est atteinte en un temps CPU identique (Fig. 4.3(d)).

Les valeurs numériques entre les quatre variables perturbées conservatives étant numériquement très différentes (Fig. 4.1), la convergence temporelle pourrait être réalisée seulement pour les fluctuations les plus importantes en valeur absolue mais pas pour les autres grandeurs. Nous avons donc aussi isolé la convergence de la variable perturbation numériquement la plus petite, c'est-à-dire la masse volumique.

$$e_{\rho} = \frac{(|{}^1\hat{\rho}|^2)^{(n+1)} - (|{}^1\hat{\rho}|^2)^{(n)}}{(|{}^1\hat{\rho}|^2)^{(n)}} \quad (4.30)$$

Nous voyons que la perturbation de la masse volumique converge aussi jusqu'à la précision machine, soit une réduction de 16 ordres de grandeur (Fig. 4.3(a)-(e)) avec un temps CPU et un nombre d'itérations identique aux résidus globaux. C'est-à-dire qu'avec ce préconditionnement ILU0 et malgré la grande disparité des valeurs numériques entre les différentes variables aérodynamiques, avec un pas de temps identique, l'algorithme GMRes\_ptm converge à la même vitesse que pour une résolution AF-ADI.

Une autre variable nous permettant de juger de la qualité de la convergence est la fluctuation de débit à l'aval de la tuyère entre l'écoulement stationnaire et l'écoulement perturbé. Cette fluctuation est calculée sur la surface située à 10 points avant la sortie du domaine.

$$\Delta(\dot{m}) = \iint_{S_{Ni-10}} |{}^1(\hat{\rho}\hat{u})|^2 dx dy \quad (4.31)$$

Nous observons deux niveaux de plateau de convergence pour le débit. Un premier plateau à  $12, 16 \times 10^{-3} \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$  pour la résolution par factorisation approchée et la résolution GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=10$ ). Pour les deux autres résolutions GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=50-100$ ), nous avons un plateau légèrement plus haut situé à  $12, 21 \times 10^{-3} \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

soit une différence de 0.4 % (Fig. 4.3(c)-(f)). Cette petite différence est sans doute liée au niveau de convergence à chaque itération pseudo-temporelle du processus pseudo-newtonien. Dans le cas d'une réduction plus importante des résidus avec les itérations de Krylov, la solution résultant du processus GMRES est plus proche de la solution exacte. Nous pouvons donc avoir de légères fluctuations dans les valeurs des résidus donc dans la fluctuation de débit.

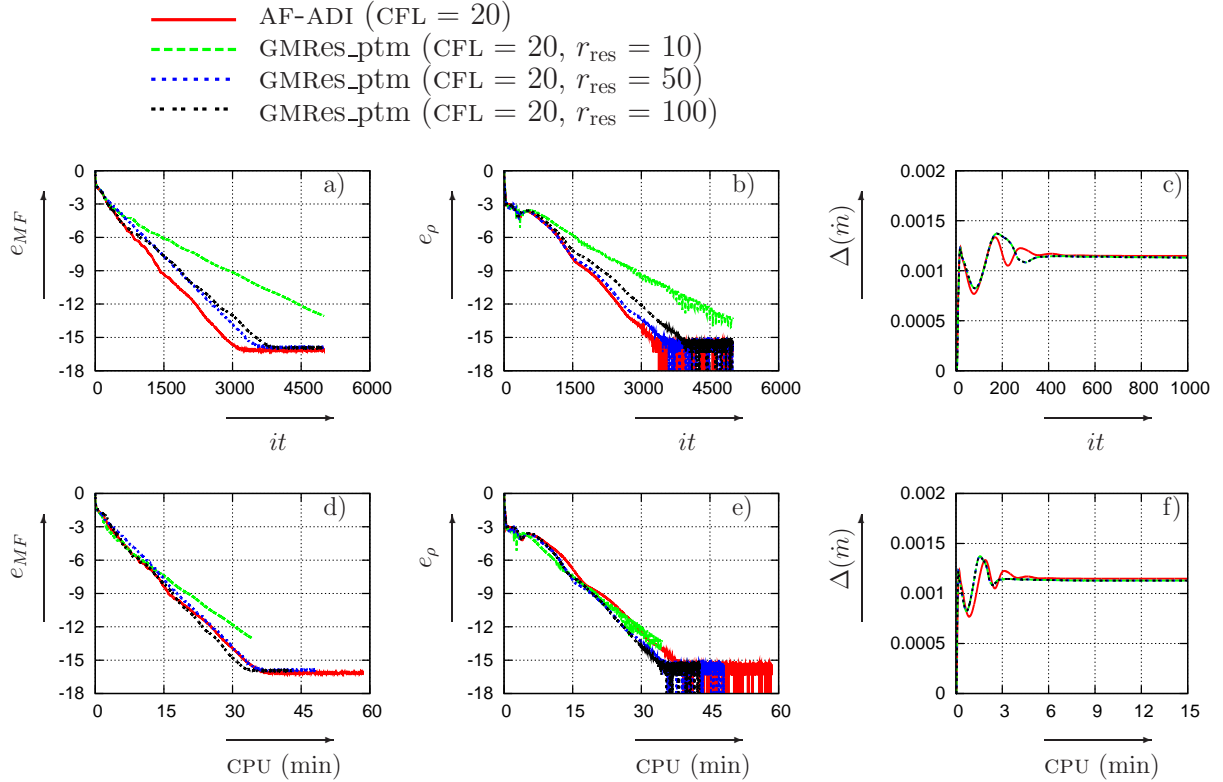


FIG. 4.3 – Comparaison de la convergence des résidus globaux  $e_{MF}$ , de la fluctuation de la masse volumique  $e_\rho$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  en fonction du nombre d'itérations et du temps CPU pour la méthode AF-ADI(CFL=20) et GMRES\_ptm(CFL=20,  $r_{res}$ =10-50-100) autour d'un écoulement stationnaire subsonique

#### Influence du CFL

Alors que pour une résolution AF-ADI, les erreurs numériques liées à la non résolution exacte du système linéaire limite le CFL à 20, pour une résolution de Krylov, les erreurs de résolution étant plus faibles, le CFL peut être augmenté jusqu'à 100. Avec une augmentation du CFL, le problème pseudo-temporel est moins bien conditionné. Afin de converger, le nombre d'itérations GMRES maximal est toujours fixé à 100 mais le rapport  $r_{res}$  entre les résidus de sortie et d'entrée de boucle de Krylov est augmenté. Alors que pour un CFL de 20 le rapport minimal est de 10, pour un CFL de 50 il est de 20 et pour un CFL de 100 il est de 50. Avec les simplifications réalisées lors du calcul de la matrice, nous ne pouvons pas augmenter plus le pas de temps (rayon spectral pour les termes visqueux, discrétisation au premier ordre des flux convectifs et pas de temps réel).

En augmentant le CFL, nous nous rapprochons d'un processus itératif pseudo-temporel newtonien et réduisons le nombre d'itérations à convergence aussi bien pour les résidus globaux  $e_{MF}$  (Fig. 4.4(a)) que pour les résidus isolant la fluctuation de masse volumique  $e_\rho$  (Fig. 4.4(b)). Alors que la résolution GMRES\_ptm(CFL=20,  $r_{res}$ =50) requiert 3500 itérations pseudo-temporelles pour converger, la résolution GMRES\_ptm(CFL=50,  $r_{res}$ =50) requiert

2500 itérations pseudo-temporelles, soit un gain de 28 % et la résolution  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=100, r_{\text{res}}=500)$  requiert plus que 1000 itérations pseudo-temporelles, soit un gain de 71 %. De même, pour les deux résolutions  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=50, r_{\text{res}}=50)$  et  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=100, r_{\text{res}}=500)$ , le gain en nombre d'itérations est respectivement de 16 % et 66 % par rapport à la résolution  $\text{AF-ADI}(\text{CFL}=20)$  (Fig. 4.4(a)-(b)). Le gain en temps de calcul est moins important. En augmentant le pas de temps, la matrice de discrétisation pseudo-temporelle est moins bien conditionnée et demande plus d'itérations GMRes pour obtenir le rapport  $r_{\text{res}}$  demandé. La résolution  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=20, r_{\text{res}}=50)$  converge en 40 minutes (Fig. 4.4(d)), la résolution  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=50, r_{\text{res}}=50)$  converge en 20 minutes, soit un gain de temps de 50 %, et la résolution  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=100, r_{\text{res}}=500)$  converge en 16 minutes, soit un gain de temps de 60 %.

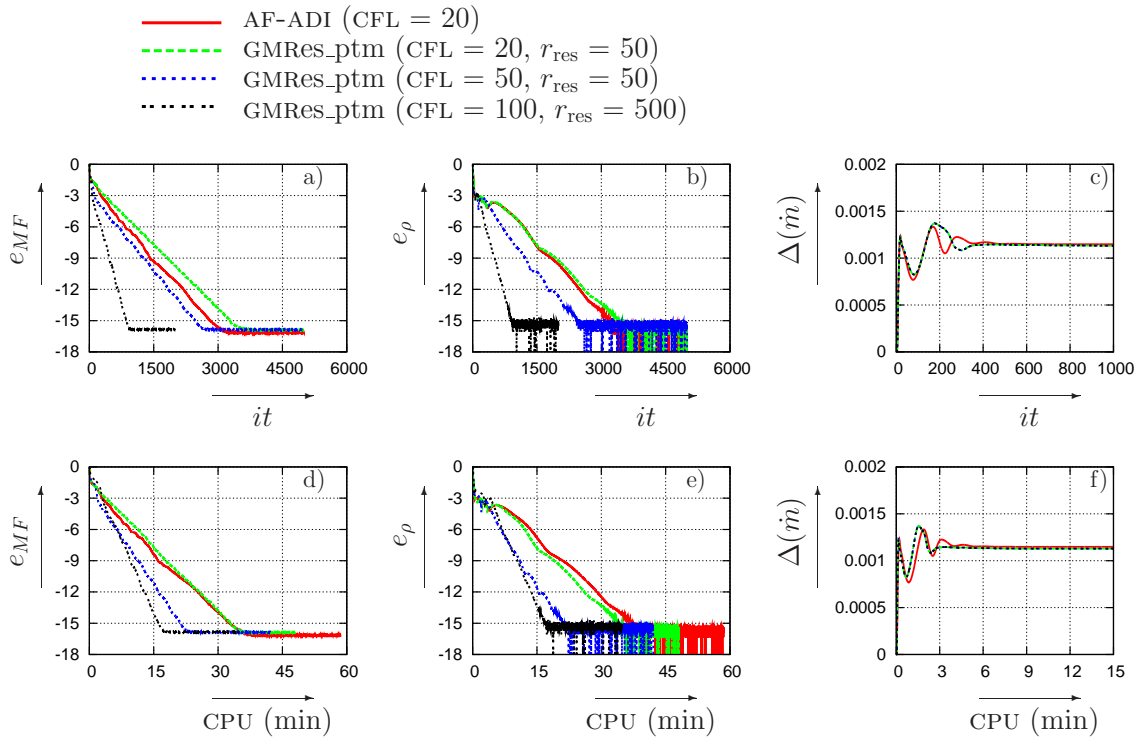


FIG. 4.4 – Comparaison de la convergence des résidus globaux  $e_{MF}$ , de la fluctuation de la masse volumique  $e_\rho$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  en fonction du nombre d'itérations et du temps CPU pour la méthode  $\text{AF-ADI}(\text{CFL}=20)$  et  $\text{GMRes\_ptm}(\text{CFL}=20-50-100, r_{\text{res}}=50-50-500)$  autour d'un écoulement stationnaire subsonique

#### 4.4.2 Validation de la méthode $\text{GMRes\_ptm}$ et comparaison de la convergence autour d'un écoulement stationnaire transsonique

Les calculs stationnaires autour desquels ont été résolues les équations linéarisées et harmoniques en temps dans le cas transsonique sont deux maillages qui diffèrent par leur nombre de points dans la direction  $\eta$ . Le premier calcul stationnaire est issu d'un maillage  $N_i \times N_j = 401 \times 101$ , soit un maillage lâche dans la direction  $\eta$ . Les conditions aux limites sont les conditions aux limites de l'écoulement transsonique précédent (Tab. 3.4). Le nombre de points  $N_j$  selon  $y$  de ce calcul est trop faible pour être convergé en maillage, mais nous permet de réaliser une première étude de validation de notre méthode de résolution pseudo-Newton-GMRes autour d'un écoulement transsonique. Le second maillage  $N_i \times N_j = 401 \times 201$  est considéré comme convergé en maillage pour le calcul stationnaire. Les champs stationnaires sont issus de résolutions  $\text{GMRes\_ILU0}(\text{CFL}=50, r_{\text{res}}=2)$ . Une perturbation ne pouvant « remonter » à travers un écoulement supersonique, la tuyère de Déleroy [32] a été coupée afin de supprimer le second col et les calculs linéarisés ont été réalisés sur des maillages  $\text{Grid}_A$  :

$Ni \times Nj = 301 \times 101$  et  $Grid\_B : Ni \times Nj = 301 \times 201$ .

#### Validation de la résolution GMRes\_ptm en transsonique

L'écoulement stationnaire étant transsonique, hors des couches limites, la perturbation de pression se propage de l'aval de la tuyère vers l'amont et les fluctuations des grandeurs thermodynamiques sont nulles à l'amont du choc (Fig. 4.5). Tout comme pour la résolution des équations linéarisées dans le cas subsonique, malgré les hauts niveaux et la grande disparité des valeurs numériques des fluctuations, les symétries axiales des perturbations des grandeurs thermodynamiques sont préservées avec une résolution GMRES. La présence de l'onde de choc est située par la présence des gradients les plus importants. Malgré le faible nombre de points dans la direction normale à la paroi, la structure de l'onde de choc en lambda se détache avec sa partie droite et sa partie oblique.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite (Fig. 3.9) crée une importante zone de recirculation dans la partie divergente de la tuyère. Cette zone de recirculation ne perturbe pas la fluctuation de pression puisque dans une couche limite la variation de pression moyenne normale à la paroi est nulle. En revanche, au pied de l'onde de choc oblique, la variation de la vitesse est importante (Fig. 4.5(e)-(f)).

La comparaison entre les évolutions des fluctuations de pression le long de l'axe et des parois entre les calculs, par factorisation approchée et par méthode de Krylov, donnent des résultats satisfaisants (Fig. 4.6). Ces fluctuations se propagent seulement jusqu'à l'onde de choc, cela quelle que soit la méthode de résolution utilisée. La résolution de Krylov rend bien compte de cette rupture de pente. Les niveaux atteints par le module de la fluctuation de pression au niveau du choc, autant à l'axe que sur les parois, sont identiques. La seule différence notable se trouve dans la fluctuation de la partie imaginaire à l'axe de la tuyère. Il est à noter que les résultats présentés ici issus des résolutions GMRes\_ptm sont représentatifs de tous les calculs effectués avec une résolution de Krylov. Une comparaison pour les trois autres grandeurs est donnée en annexe (*cf.* annexe B).

Comme dans le cas précédent, nous pouvons comparer les coefficients des efforts instationnaires de pression aérodynamique (Eq. 4.28). Dans le tableau 4.2 sont donnés différents coefficients de pression pour les deux méthodes de résolution sur le maillage  $Grid\_A Ni \times Nj = 301 \times 101$  et différents pas de temps. Malgré les différences au niveau local du niveau de perturbation de pression, les coefficients résultant des calculs par méthode de Krylov et celui résultant du calcul par factorisation approchée n'ont qu'une petite différence de 2.6 %. Tous les coefficients issus d'un calcul GMRes\_ptm convergent vers la valeur identique de 0.438. Nous pouvons de plus vérifier la symétrie de la solution avec la résolution par méthode de Krylov.

Méthode de résolution	CFL	$r_{res}$	${}^1\hat{C}_{lower}$	$\Delta({}^1\hat{C}_{lower}) \times 100$	${}^1\hat{C}_{upper}$	$\Delta({}^1\hat{C}_{upper}) \times 100$
AF-ADI	20	-	0.42653	-	0.42653	-
GMRes_ptm	20	10	0.43765	2.608	0.43765	2.608
GMRes_ptm	20	50	0.43765	2.608	0.43765	2.608
GMRes_ptm	50	50	0.43765	2.608	0.43765	2.608
GMRes_ptm	100	100	0.43765	2.608	0.43765	2.608

TAB. 4.2 – Comparaison des coefficients des forces aérodynamiques pour les deux méthodes de résolution autour d'un écoulement stationnaire transsonique

#### Comparaison de la vitesse de convergence

Comme dans le cas du calcul subsonique, le pas de temps maximal pour une résolution AF-ADI est obtenu avec un CFL = 20. Nous avons donc réalisé plusieurs tests de résolution avec un CFL = 20 pour les deux méthodes. Quel que soit le rapport  $r_{res}$  pour les résolutions GMRES\_ptm (CFL=20,  $r_{res} = 10, 50$  ou 100), la convergence est obtenue en 7000 itérations pseudo-temporelles (Figs. 4.7(a)-(b)). La convergence est aussi obtenue en 7000 itérations avec une résolution AF-ADI. Nous n'avons donc pas de gain en nombre d'itérations par une résolution



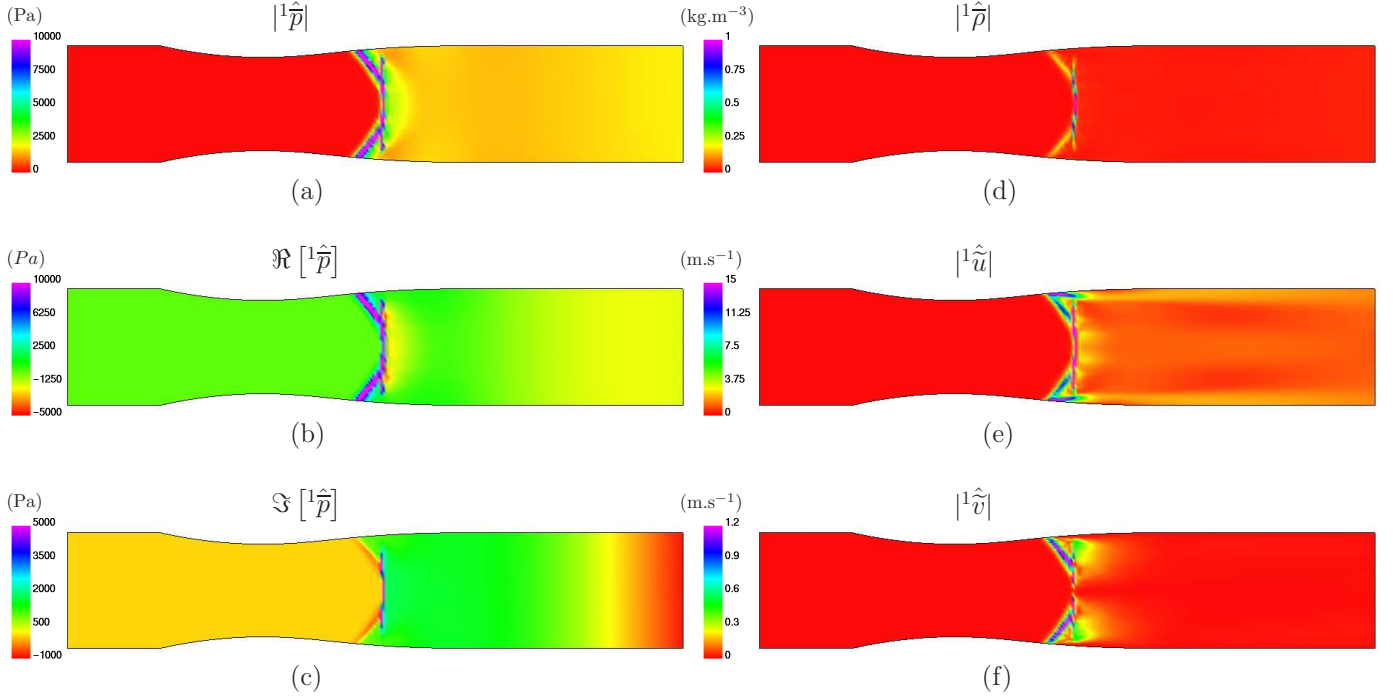


FIG. 4.5 – Evolution des modules des fluctuations des quatre grandeurs non conservatives ( $|^1\hat{\rho}|$ ,  $|^1\hat{u}|$ ,  $|^1\hat{v}|$  et  $|^1\hat{p}|$ ) ainsi que du déphasage de pression ( $\Re[^1\hat{p}]$  et  $\Im[^1\hat{p}]$ ) pour une perturbation aval de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  dans la tuyère symétrique de Deléry [32] autour d'un écoulement stationnaire transsonique pour une résolution GMRES\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=100$ )

de Krylov avec un CFL identique.

Le temps CPU à convergence est d'une heure pour les calculs AF-ADI(CFL=20) et GMRES\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=10$ ) (Fig. 4.7(d)-(e)). Mais lorsque le facteur de réduction  $r_{\text{res}}$  augmente ( $r_{\text{res}} = 50$  ou 100) avec un pas de temps identique, le calcul converge en une heure et demie. Cette augmentation de 50 % de temps CPU est liée au nombre d'itérations de Krylov par itération pseudo-temporelle. Alors que pour une résolution GMRES\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=10$ ), le processus de Krylov atteint la diminution des résidus demandée en une moyenne de cinq itérations, pour les deux autres facteurs de réduction, chaque itération pseudo-temporelle requiert en moyenne dix itérations de Krylov.

L'écoulement étant transsonique, la tuyère est dite « amorcée ». C'est-à-dire qu'au col la vitesse du fluide est la vitesse sonique. Le débit est donc fixé et cela quelle que soit la fluctuation de pression à l'aval de l'écoulement. Nous avons une fluctuation de débit, liée sans doute aux erreurs numériques, de  $1.09 \times 10^{-3} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$  avec une résolution par factorisation approchée et de  $1.12 \times 10^{-3} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$  avec une résolution GMRES quelle que soit la diminution des résidus, soit une différence de 0.03 % par rapport au débit initial.

### Influence du CFL

Grâce à une meilleure résolution du problème à chaque itération pseudo-temporelle, nous pouvons augmenter le pas de temps. Le CFL maximal ayant permis à un calcul de converger pour une résolution GMRES\_ptm est de 100, soit une multiplication par cinq du pas de temps par rapport à une résolution AF-ADI. Pour cela, nous avons augmenté la réduction des résidus à chaque itération pseudo-temporelle. La diminution minimale des résidus  $r_{\text{res}}$  pour l'utilisation d'un CFL de 50 est de 50 et pour une CFL de 100 elle est de 100. Comme précédemment, les simplifications pour le calcul de la matrice jacobienne limitent le pas de temps.

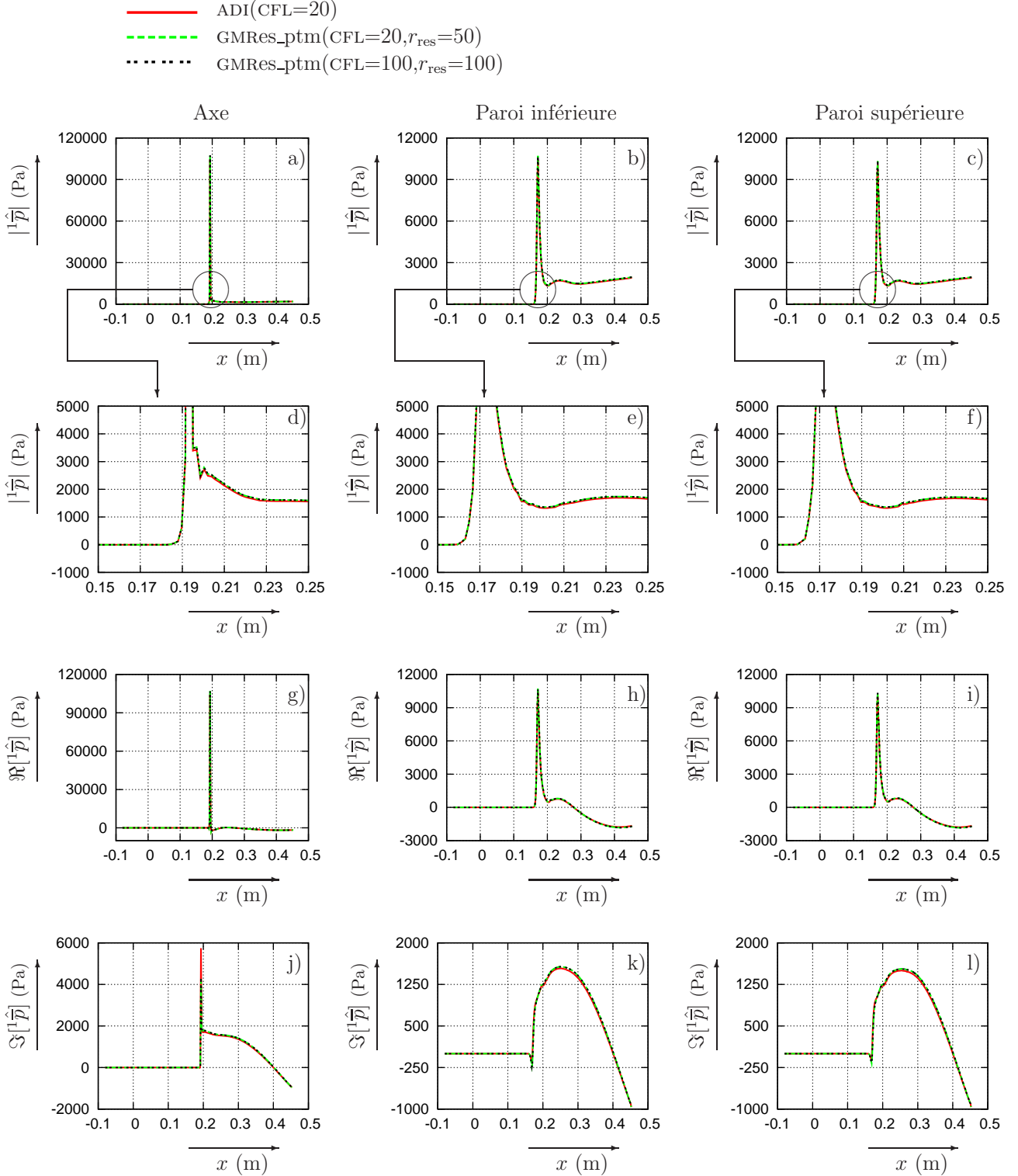


FIG. 4.6 – Comparaison de l'évolution du module  $|\hat{p}|$  et de la phase ( $\Re[\hat{p}]$  et  $\Im[\hat{p}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=100$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Déleury [32] pour une perturbation aval de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire transsonique

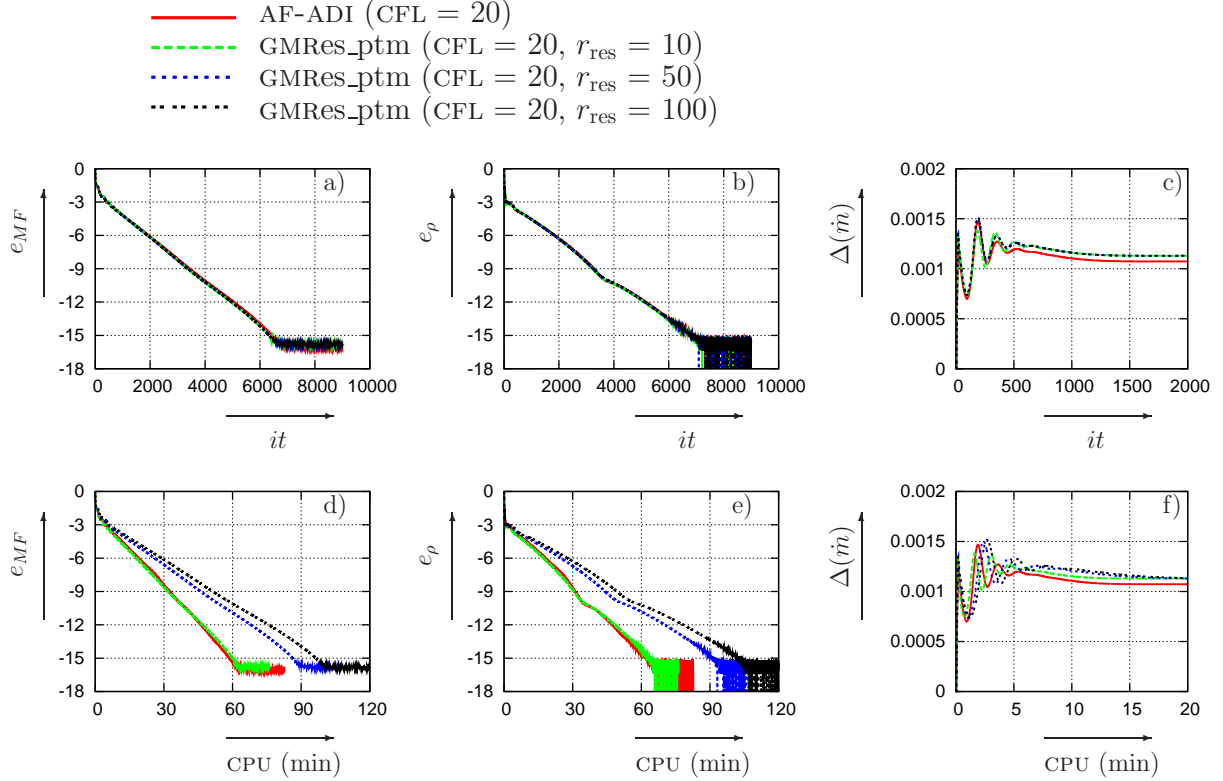


FIG. 4.7 – Comparaison de la convergence des résidus globaux  $e_{MF}$ , de la fluctuation de la masse volumique  $e_{\rho}$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  en fonction du nombre d'itérations et du temps CPU pour la méthode AF-ADI(CFL=20) et GMRes\_ptm(CFL=20,  $r_{res}$ =10-50-100) autour d'un écoulement stationnaire transsonique

Alors que pour la résolution AF-ADI(CFL=20) le calcul converge en 7000 itérations, en augmentant le pas de temps, nous réduisons le nombre d'itérations pseudo-temporelles à 4500 avec une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{res}$ =50) et à 1800 pour la résolution GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{res}$ =100). Nous avons donc un gain de 75 % en termes de nombre d'itérations nécessaires à convergence. Comme toujours, en augmentant le pas de temps, la matrice implicite est moins bien conditionnée et afin d'obtenir la réduction des résidus  $r_{res}$  il y a plus d'itérations de Krylov. Le gain en temps est donc moins important que le gain en nombre d'itérations. Le gain en temps CPU n'est pas significatif avec un CFL de 50, le calcul converge en 58 minutes au lieu de 61 par rapport à une résolution AF-ADI. Avec un CFL de 100, en revanche, le calcul converge en 45 minutes, soit un gain de 25 % de temps CPU.

Quel que soit le pas de temps employé, avec une résolution AF-ADI, nous avons une perturbation de débit identique de  $1.12 \times 10^{-3} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$  légèrement supérieure à une résolution par factorisation.

En comparaison avec la convergence des calculs des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique, la réduction des résidus  $r_{res}$ , n'est pas aussi importante pour la vitesse de convergence. Alors qu'en ajustant au mieux ce facteur de réduction nous obtenons une convergence bien plus rapide dans le cas d'un écoulement stationnaire subsonique, avec un écoulement stationnaire transsonique, ce facteur n'influence pas particulièrement la vitesse de convergence. Cela est sans doute lié à la physique de l'écoulement stationnaire et à la propagation de la perturbation. Alors que dans le cas subsonique, la perturbation se propage de la sortie à l'entrée de la tuyère, dans le cas d'un calcul transsonique, la perturbation est bloquée par la présence de l'onde

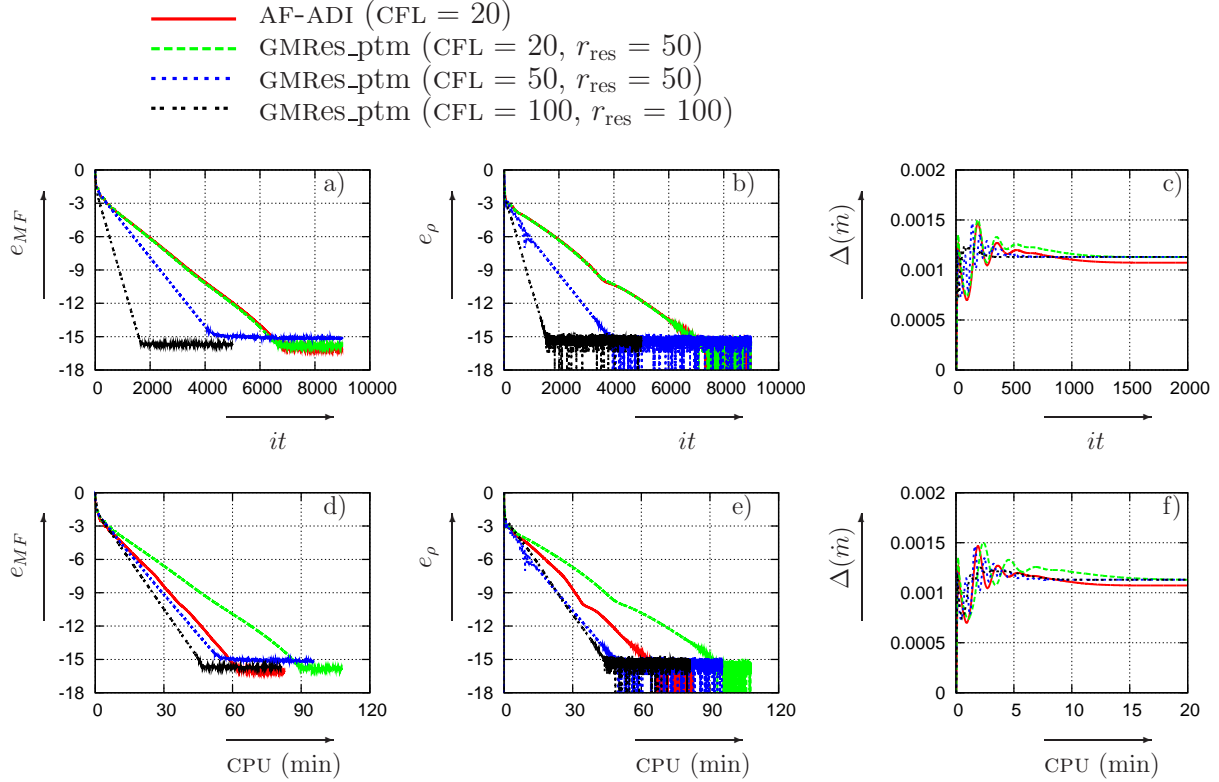


FIG. 4.8 – Comparaison de la convergence des résidus globaux  $e_{MF}$ , de la fluctuation de la masse volumique  $e_\rho$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  en fonction du nombre d’itérations et du temps CPU pour la méthode AF-ADI(CFL=20) et GMRes\_ptm(CFL=20-50-100,  $r_{res}$ =50-50-500) autour d’un écoulement stationnaire transsonique

de choc. Donc dans le cas subsonique, plus il y a d’itérations de Krylov, plus la perturbation est propagée vers l’aval de la tuyère et plus le processus pseudo-temporel converge rapidement.

#### Mise en évidence du problème de stabilité

Dans sa thèse, lors d’une étude de convergence en maillage, Chassaing [17] observe qu’en raffinant le maillage dans les directions perpendiculaires aux parois, donc en augmentant le facteur de forme des mailles, lorsque l’écoulement stationnaire présente une onde de choc qui induit un décollement important de la couche limite, la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps diverge lorsqu’elles sont résolues par un processus *pseudo-time-marching* avec une résolution par factorisation approchée. Nous avons donc testé notre méthode de résolution pseudo-Newton-GMRES sur un maillage plus raffiné proche paroi noté *Grid\_B* ( $N_i \times N_j = 301 \times 201$ ) dont les résultats stationnaires sont issus du calcul GMRES\_ILU0(CFL=50,  $r_{res}$ =1) présentés au chapitre précédent (*cf.* § 3.5.3) où nous avons de nouveau tronqué le second col. Il est important de noter que cette divergence est seulement rencontrée dans notre cas, lors de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées au troisième ordre. Nous n’avons jamais constaté de divergence dans le cas de la résolution des équations d’Euler linéarisées ou des équations de Navier-Stokes linéarisées au premier ordre [17]. Remarquons que Morris *et al.* [2], [113] rapportent des instabilités numériques pour la résolution des équations d’Euler linéarisées liées aux ondes de Kelvin-Helmholtz. Des problèmes de stabilité ont aussi été décrits par Campobasso et Giles [14], [15] et [29] pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées au second ordre avec une décomposition des flux de Jameson [70] et une résolution du type point fixe.

Dans la figure (Fig. 4.8(a)-(c)) sont tracées les évolutions des résidus globaux  $e_{MF}$ , des résidus de la masse volumique  $e_\rho$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  pour trois résolutions AF-ADI(CFL=5, 10 et 20). Quel que soit le CFL, aucun des calculs ne converge. Les résidus globaux stagnent entre  $-3$  pour un CFL de 20 et  $-3.5$  pour

un CFL de 5 (Fig. 4.8(a)). De même, les résidus de la masse volumique après un pic stagnant autour de  $-3.4$  (Fig. 4.8(b)). En revanche, après un nombre d'itérations temporelles fonction du pas de temps, les fluctuations de débit croissent sans parvenir à se stabiliser (Fig. 4.8(c)).

Sur la même figure (Fig. 4.9(d)-(l)) sont tracées les évolutions de convergence des trois variables précédentes, résidus globaux  $e_{MF}$ , les résidus de la masse volumique  $e_\rho$  et la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  pour une résolution GMRes\_ptm avec trois différents pas de temps (CFL=5, 10 et 20) et trois rapports  $r_{\text{res}}$  ( $r_{\text{res}}=10, 100$  et  $1000$ ). Nous voyons que quels que soient les paramètres utilisés, les calculs ne convergent pas. Les résidus des fluctuations globales et de la masse volumique stagnant et le débit ne parvient pas non plus à se stabiliser. Une résolution plus précise du système à chaque pas de temps ne permet donc pas de supprimer les instabilités de convergence.

L'évolution de la fluctuation de la pression pour la résolution AF-ADI(CFL=20) au cours des itérations temporelles est présentée dans la figure 4.10. Cette évolution est significative et peut être reproduite pour tous les autres calculs AF-ADI(CFL=5-10) et GMRes\_ptm(CFL=5-10-20,  $r_{\text{res}}=10, 100, 1000$ ). Nous observons une montée du pic de pression au niveau de l'onde de choc au fur et à mesure des itérations. A l'avant de ce pic se forme une bulle de pression qui croît en même temps que le pic augmente. L'évolution de la fluctuation de pression montre que les résidus passent sans doute par la solution mais ne parviennent pas à se stabiliser.

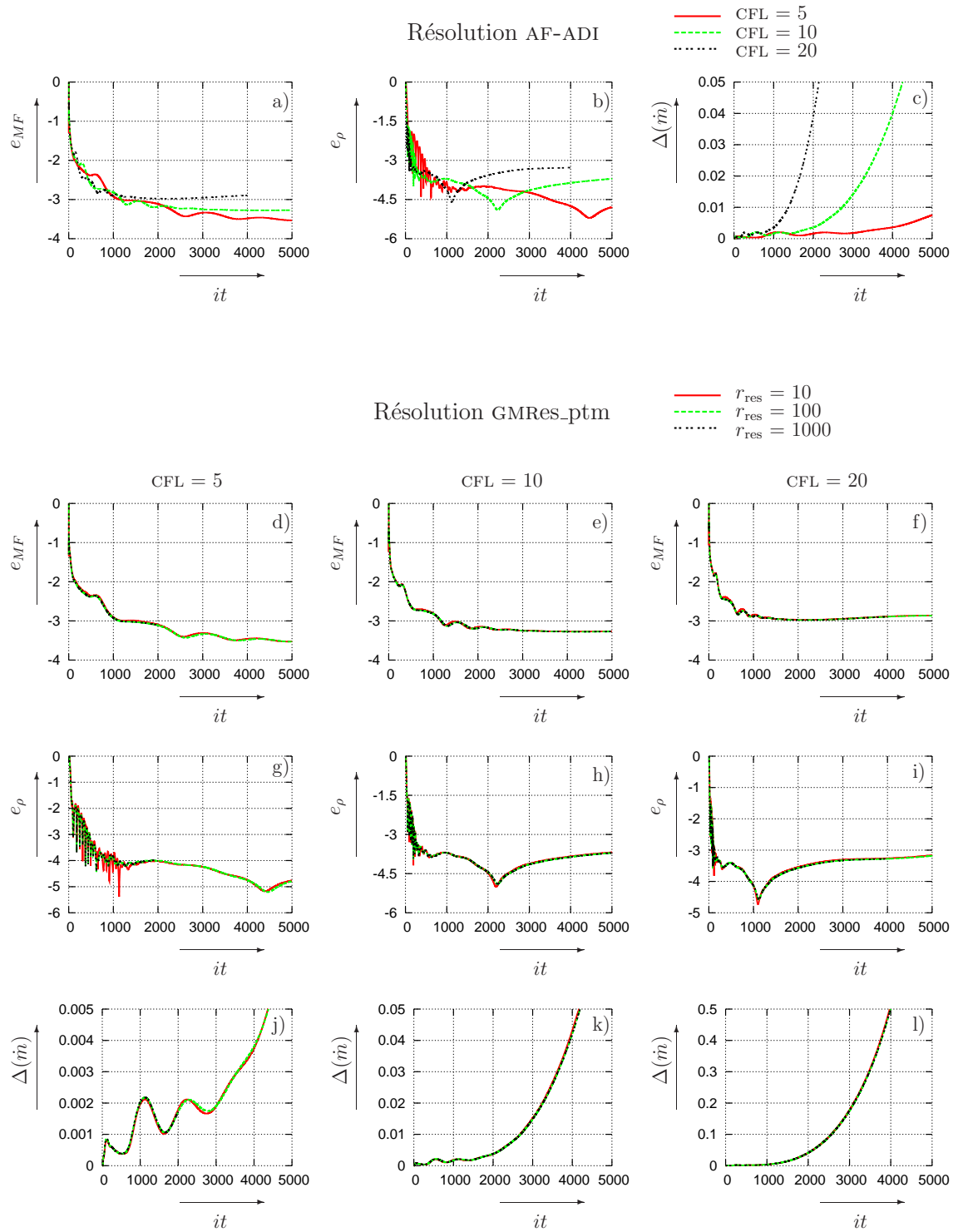


FIG. 4.9 – Comparaison de la convergence des résidus globaux  $e_{MF}$ , de la fluctuation de la masse volumique  $e_\rho$  et de la variation de débit  $\Delta(\dot{m})$  en fonction du nombre d'itérations et du temps CPU pour la méthode AF-ADI et GMRes avec un CFL pour trois pas de temps différents CFL = 20, 10 et 5 et pour le GMRes avec les diminutions minimales des résidus pour les  $r_{res}$  de 10, 100 et 1000 avec un écoulement stationnaire transsonique sur le maillage raffiné proche paroi

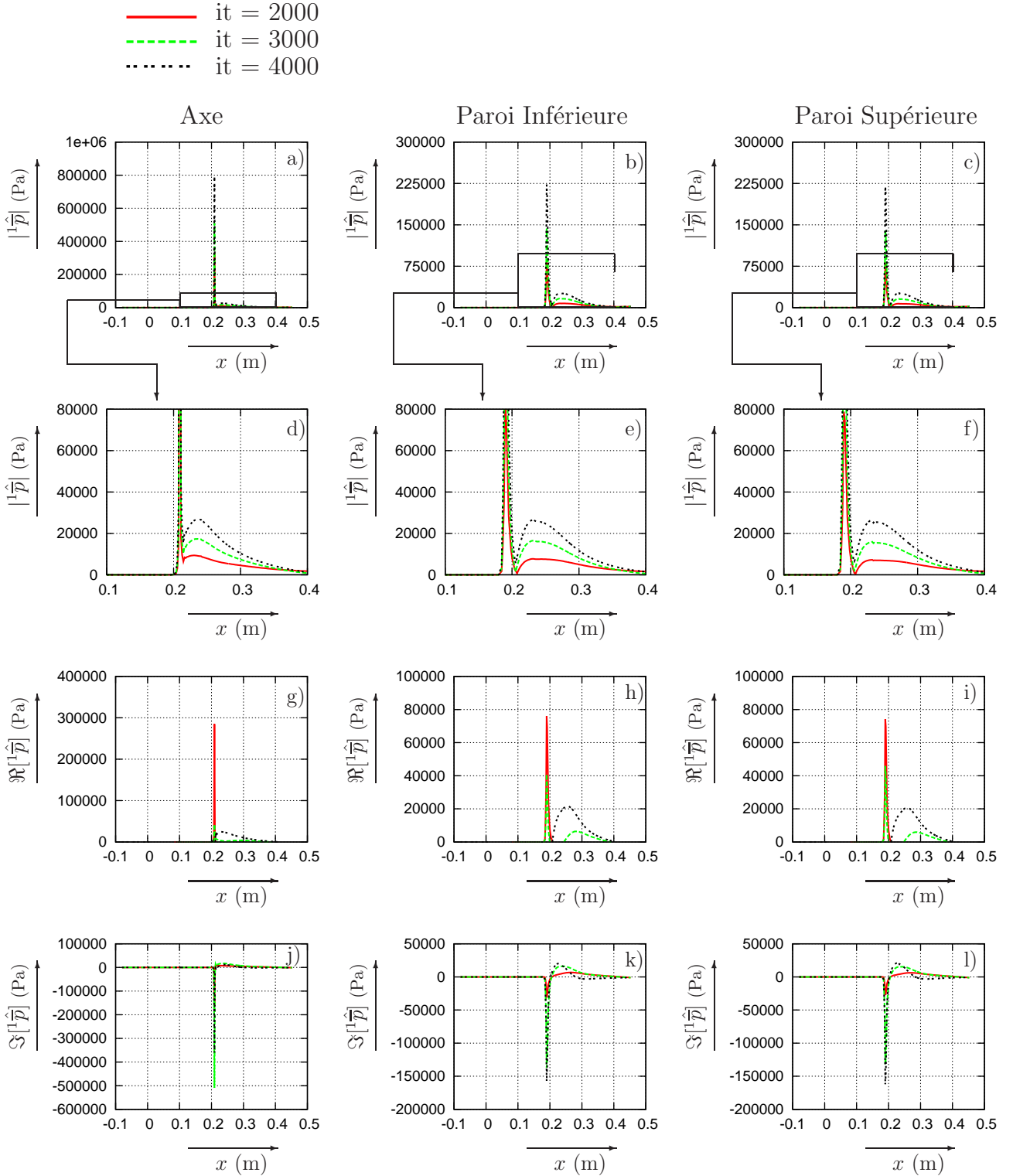


FIG. 4.10 – Comparaison de l'évolution du module  $|{}^1\hat{p}|$  et de la phase ( $\Re[{}^1\hat{p}]$  et  $\Im[{}^1\hat{p}]$ ) de la perturbation de pression pour la résolution AF-ADI(CFL=20) à trois itérations temporelles 2000, 3000 et 4000 à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Délerly [32] pour une perturbation aval de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|{}^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire transsonique

## 4.5 Conclusions

Nous avons, dans ce chapitre, développé une méthode de résolution pseudo-temporelle avec une résolution GMRes à chaque pas de temps. Le but de ce développement était d'accélérer la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps par rapport à une résolution AF-ADI. Les gains ont été réalisés autant en nombre d'itérations pseudo-temporelles qu'en temps CPU pour une linéarisation autour d'écoulements stationnaires haut subsonique et transsonique. Ces gains sont liés en particulier à l'augmentation de la limite de stabilité du pas de temps grâce à une meilleure résolution du système linéaire à chaque itération pseudo-temporelle. Malheureusement, notre algorithme ne nous a pas permis de lever les problèmes de stabilité déjà rencontrés avec une résolution AF-ADI.





## Chapitre 5

# Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps résolues sans introduction d'un pseudo-pas de temps

Nous avons souligné au chapitre précédent l'intérêt de l'utilisation des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps pour la prédiction d'écoulements instationnaires de faibles amplitudes. Nous avons aussi mis en exergue une limite de l'utilisation de ces équations lorsque l'écoulement stationnaire est caractérisé par de forts effets non linéaires (onde de choc, décollement ...) et le fait que le système était résolu par une méthode d'avancement pseudo-temporelle. Par ailleurs, nous avons constaté que l'apparition de cette instabilité numérique était conditionnée par le raffinement du maillage proche des parois indispensable pour la capture des structures turbulentes.

Morris *et al.* [2, 113], dans le cas d'un modèle simplifié de perturbation harmonique de la pression issu de la linéarisation des équations d'Euler, utilisé pour l'étude de la propagation de sources acoustiques dans un écoulement non homogène (couche de mélange : présence de point d'inflexion), montrent que ces instabilités numériques liées aux ondes de Kelvin-Helmholtz, présentes au sein même de la solution stationnaire, se propagent lors d'une résolution pseudo-temporelle au fur et à mesure du processus itératif. Afin de remédier à ce problème de convergence, ils proposent une nouvelle méthode de résolution directe de leur problème par une factorisation LU\_bande [2, 113].

Des problèmes de convergence ont aussi été décrits par Campobasso et Giles pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées [14, 15, 29] dans le cadre de problèmes d'aéroélasticité pour un profil de turbine avec un important décollement au bord d'attaque et ainsi que dans le cas d'une soufflante avec de forts décollements en pied. Ils montrent que ces instabilités sont liées à des valeurs propres de la matrice préconditionnée dont le module est supérieur à l'unité. Pour résoudre ce problème de stabilité, Campobasso et Giles [15] proposent d'utiliser une méthode de résolution pseudo-temporelle des équations de Navier-Stokes linéarisées couplée à une méthode *Recursive Projection Method* [125], qui permet d'annuler les valeurs propres dont le module est le plus important. Ils proposent aussi de supprimer la méthode itérative de type points fixes en utilisant une résolution GMRes toujours préconditionnée par des itérations de Runge-Kutta couplées avec des itérations multigrilles [14, 29]. L'inconvénient majeur de leur approche réside dans le fait que leur algorithme GMRes est initialisé par un premier calcul du type Runge-Kutta avant la divergence de celui-ci [14, 29]. Leur résolution est donc réalisée en deux temps, ce qui n'est pas compatible avec un algorithme utilisable de manière intensive car une intervention extérieure est nécessaire afin d'initialiser et de stabiliser la procédure.

### 5.1 Affranchissement de l'intégration temporelle

Pour essayer de résoudre ce problème de stabilité des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps avec une discrétisation au troisième ordre, nous proposons de s'affranchir de la résolution pseudo-temporelle du système linéaire. Le système linéaire à résoudre est donc un système linéaire complexe qui peut

s'écrire comme ci-dessous :

$$\mathfrak{BC} \left\{ i\omega + \text{div} \left[ {}^0 \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{F}}^C}{\partial \underline{w}} \right) + {}^0 \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{F}}^V}{\partial \underline{w}} \right) \right] \right\} \hat{\underline{w}} = \mathbf{bc} \{ \underline{0} \} \iff \hat{A} \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}} \quad (5.1)$$

où  $\hat{A}$  est une matrice complexe par sa diagonale dont la partie réelle est la discrétisation des flux convectifs au troisième ordre et des flux visqueux au second ordre et  $\hat{\underline{b}}$  est un vecteur nul avant l'introduction des conditions aux limites. Ce système linéaire peut être résolu de plusieurs façons. Si nous désirons procéder comme Morris *et al.* [2] [113] en résolvant par factorisation LU, il est nécessaire de stocker au minimum la bande de la matrice, soit  $4 \times Ni \times Nj (1 + 8 \times (2 \times \min(Ni, Nj) + 1))$  nombres complexes dans un cas bidimensionnel sur un maillage structuré. Nous voyons immédiatement que cela est aujourd'hui presque inapplicable dans le cas de calculs tridimensionnels. L'espace mémoire nécessaire au stockage de la bande des éléments non nuls de la matrice est bien supérieur aux moyens actuellement disponibles, sauf peut être avec du massivement parallèle. Nous avons donc décidé d'utiliser un algorithme de Krylov pour résoudre ce système linéaire complexe.

### 5.1.1 Algorithme de Krylov pour un problème complexe

Plusieurs méthodes sont possibles pour développer une méthode de Krylov dans le cas d'un problème complexe. Le problème peut être résolu directement sous sa forme complexe, ou alors il est possible de décomposer ce dernier en un seul problème réel où les parties réelles et les parties imaginaires du vecteur solution sont résolues comme deux inconnues distinctes.

Lors d'une étude bibliographique non exhaustive, nous n'avons trouvé qu'une seule variante de l'algorithme GMRES, qui est étendue directement à des résolutions de systèmes linéaires complexes [41]. En plus de la définition des produits scalaires en produits conjugués, la modification principale concerne la procédure des rotations de Givens (Eq. 2.45). Ces rotations doivent être définies pour des variables complexes, de façon à annuler l'élément sous-diagonal de chaque colonne de la matrice  $\overline{H}$  issue de la factorisation QR (Al. 5). Frayssé [41] définit les rotations de Givens comme suit :

$$G(i, j) = \begin{bmatrix} \mathfrak{J} & & & \\ & c & -s & \\ & \overline{s} & c & \\ & & & \mathfrak{J} \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} c = \frac{|z_i|}{\sqrt{z_i^2 + z_k^2}} & \text{et } s = c \frac{z_k}{z_i} & \text{si } z_i \neq 0 \\ c = 0 & \text{et } s = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cependant, Campobasso et Giles [14, 15] reportent des difficultés dans la vectorisation d'un code avec un algorithme GMRES complexe avec un compilateur FORTRAN. Selon ces auteurs, ils obtiennent une meilleure vectorisation lorsque leur algorithme est basé sur une décomposition de leur problème en une résolution pour la partie réelle et une pour la partie imaginaire. De plus, forts de l'expérience obtenue dans la résolution des équations linéarisées par méthode d'intégration pseudo-temporelle, nous avons décidé de séparer de nouveau le problème. Nous avons développé un algorithme GMRES qui permette de résoudre simultanément les parties réelles et imaginaires des inconnues (couplage par les éléments diagonaux de la matrice), tout en ayant une structure algorithmique GMRES réelle. La reconstitution de la solution complexe du problème s'effectue seulement à la fin du processus itératif de Krylov.

### 5.1.2 Préconditionnement ILU0 de la matrice complexe

Etant donné le temps de calcul du preconditionnement, il est nécessaire de stocker la matrice de preconditionnement. Dans le cas de la transformation du problème à valeurs complexes en problème à valeur réelles<sup>1</sup>, le

<sup>1</sup>Prenons comme exemple le cas d'un système complexe  $2 \times 2$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & -b_{11} & a_{12} & -b_{12} \\ b_{11} & a_{11} & b_{12} & a_{12} \\ a_{21} & -b_{21} & a_{22} & -b_{22} \\ b_{21} & a_{21} & b_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

où  $a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}, c_1, d_1, c_2, d_2, x_1, y_1, x_2$  et  $y_2$  sont des coefficients à valeurs réelles.

nombre d'inconnues (donc la base de Krylov) est deux fois plus important même si l'espace mémoire nécessaire est identique. En revanche, la matrice (donc le préconditionnement ILU0) requiert, elle, un espace mémoire deux fois plus important. Ici, la structure particulière de la matrice complexe a été utilisée pour la transformer en matrice réelle. Dans le cas du problème des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps, le couplage entre la partie réelle et la partie imaginaire du problème ne se réalise que par la diagonale de la matrice. Tous les autres éléments non nuls sont des éléments strictement réels. Or, pour le calcul de la factorisation incomplète ILU0, seuls les éléments non nuls de la matrice sont nécessaires. Nous avons donc besoin de stocker les parties imaginaires de la diagonale uniquement. En reprenant l'exemple du système complexe  $2 \times 2$  précédent (Eq. 5.2) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + ib_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & -b_{11} & a_{12} & 0 \\ b_{11} & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & -b_{22} \\ 0 & a_{21} & b_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Ainsi, grâce à cette simplification, l'espace mémoire de la matrice sous forme réelle n'est supérieur que de deux vecteurs réels de taille  $Ni \times Nj - 2$  par rapport à la matrice stockée sous sa forme complexe.

La matrice de préconditionnement peut être une matrice discrétisée au premier ou au troisième ordre. L'avantage d'un préconditionnement au premier ordre réside bien sûr dans coût mémoire relativement faible par rapport à une matrice de préconditionnement avec une discrétisation à l'ordre 3 (respectivement  $168 \times Ni \times Nj$  nombres réels et  $424 \times Ni \times Nj$  nombres réels). Cependant, la factorisation de la matrice au troisième ordre est une factorisation approchée de la matrice exacte, la résolution est donc numériquement plus stable. Nous précisons tout de suite qu'aucun calcul n'a convergé avec un préconditionnement au premier ordre. Cela est sans doute lié au mauvais conditionnement de la matrice en particulier pour un écoulement transsonique où les résultats présentent une forte discontinuité.

De plus, notons que le préconditionnement par factorisation incomplète ILU0 utilisé est calculé par le bibliothèque SPARSEKIT [117] qui est une bibliothèque seulement écrite pour des matrices réelles.

### 5.1.3 Algorithme GMRes\_noptm pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps

L'algorithme GMRES a donc été étendu à la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps sans introduction de l'intégration pseudo-temporelle (GMRES\_noptm). Etant donné la taille des matrices, le nombre d'inconnues<sup>2</sup> et le très mauvais conditionnement du système linéaire, l'algorithme GMRES demandant beaucoup d'itérations pour converger, des itérations de redémarrage sont utilisées. Néanmoins le problème principal de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps sans introduction d'un pseudo-pas de temps est l'espace mémoire nécessaire.

Rappelons que lors de l'application de l'intégration temporelle dans le cas d'une résolution GMRES\_ptm, la matrice, qui n'est qu'une discrétisation des flux au premier ordre, ainsi que le préconditionnement sont stockés en mémoire. Afin de limiter l'espace mémoire dans ce cas de résolution GMRES\_noptm, la discrétisation des flux au troisième ordre est stockée seulement pour le calcul du préconditionnement ILU0 (cf. § 5.1.2). Le calcul du produit matrice vecteur dans l'algorithme GMRES\_noptm est réalisé par une linéarisation à chaque itération de Krylov.

Les conditions aux limites sont théoriquement incluses dans le calcul de la matrice et du vecteur à droite. La résolution sans introduction d'un pseudo-pas de temps prend donc en compte les conditions aux limites. Mais afin d'accélérer la convergence, avant chaque redémarrage de la procédure d'Arnoldi, les conditions aux limites

<sup>2</sup>Avec la séparation du problème en une résolution pour la partie réelle et pour la partie imaginaire, nous avons pour un problème 3-D :  $2 \times 5 \times Ni \times Nj \times Nk$  inconnues et pour un problème 2D :  $2 \times 4 \times Ni \times Nj$  inconnues.

explicites (Eqs. 4.16-4.19) sont de nouveau imposées au vecteur résidus.

Lors de la résolution des équations linéarisées par introduction d'un pseudo-pas de temps, le vecteur résidus est initialisé par un vecteur nul car il n'existe pas d'initialisation physique. Or les premiers tests réalisés avec une initialisation nulle de l'algorithme GMRes\_noptm ne parviennent pas à propager la perturbation. Dans ce cas, les résidus stagnent à leurs valeurs initiales quel que soit le nombre d'itérations de Krylov. Cela est sans doute lié à l'application des conditions aux limites. Les conditions aux limites, en particulier à l'aval, imposent des valeurs numériques de l'ordre de 1 alors que les autres valeurs numériques issues de la discrétisation des flux sont de l'ordre de  $10^6$ . Cet écart numérique ne permet pas la propagation de la fluctuation de pression à l'aval. Le vecteur pourrait en théorie être initialisé par un vecteur quelconque mais nous avons décidé d'imposer un vecteur nul auquel nous ajoutons les conditions aux limites explicites (Eqs. 4.16-4.19). Nous pourrions également initialiser le vecteur résidus issu d'un calcul linéarisé au premier ordre au moyen d'une résolution *pseudo-time-marching*, mais les premières tentatives n'ayant pas été concluantes, nous n'avons pas poussé l'étude plus loin.

Nous présentons dans l'algorithme 13 une récapitulation de la méthode de résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps avec l'algorithme GMRes\_noptm.

---

**Algorithme 13** Schéma de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées par l'algorithme GMRes\_noptm

---

- Initialisation du vecteur résidu :  $\hat{\underline{x}} \leftarrow \mathbf{bc}[0]$
- Evaluation du second membre :  $\hat{\underline{b}} \leftarrow \mathbf{bc}[0]$
- Calcul de la matrice complexe et conditions aux limites :

$$\hat{A} \leftarrow \mathfrak{BC} \left\{ i\omega + \text{div} \left[ {}^0 \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^C}{\partial \underline{w}} \right) + {}^0 \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^V}{\partial \underline{w}} \right) \right] \right\}$$

- Stockage de la matrice sous forme réelle :

$$\mathcal{A} \leftarrow \text{CSR} \left\{ \hat{A} \right\}$$

- Calcul du préconditionnement :  $M \leftarrow \text{ILU0}[A]$

**For** IT\_restarted = 1, 2, ..., jusqu'à convergence **Do** :

- ▶ Résolution du système linéaire ( $\hat{A}MM^{-1}\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{b}}$ ) par l'algorithme GMRes (Al. [5])
  - ↪ Construction de la base de Krylov de dimension IT\_base
  - ↪ Minimisation des résidus dans la base de Krylov de dimension IT\_base
  - ↪ Calcul de la nouvelle solution
- ▶ Application des conditions aux limites :  $\hat{\underline{x}} \leftarrow \mathbf{bc}[\hat{\underline{x}}]$
- ▶ IT\_gmres = IT\_base + (IT\_restarted - 1) \* IT\_base

**End for**

---

## 5.2 Résultats sur le démonstrateur 2D

### 5.2.1 Écoulement stationnaire subsonique

Dans un premier temps, la méthode de résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées GMRes\_noptm a été testée dans le cas de la prédiction d'un écoulement stationnaire subsonique. Le champ stationnaire utilisé correspond au champ aérodynamique issu de la résolution GMRes\_ILU0(CFL=50,  $r_{\text{res}}=1$ ). Il est à noter que dans le cadre de ce travail, aucun problème de stabilité n'a été rencontré dans le cas de la tuyère de Délerly [32] en régime stationnaire subsonique. Néanmoins, les instabilités numériques liées aux ondes de Kelvin-Helmoltz existent aussi pour les écoulements stationnaires subsoniques [2], [113]. De plus, Valentin [136] reporte des instabilités lors de la résolution de problèmes d'optimisation d'aubes de turbomachines par une résolution pseudo-temporelle des équations directe (Eq. 6.15) et adjointe (Eq. 6.16) pour un écoulement 3D subsonique présentant d'importantes structures tourbillonnaires.

Le maillage utilisé pour la résolution des équations linéarisées est identique à celui utilisé pour la résolution pseudo-temporelle (*cf.* § 3.5.2). Le maillage est uniforme dans la direction axiale et raffiné proche paroi dans la direction normale aux parois  $Ni \times Nj = 301 \times 121$ . Les principales difficultés de la résolution de cette équation sont relatives au mauvais conditionnement de la matrice, au nombre d'inconnues<sup>3</sup> ainsi qu'à l'importante disparité des valeurs numériques du vecteur solution. De plus, lorsque ces équations sont résolues autour d'un écoulement stationnaire entièrement subsonique, la fluctuation remontant le long de l'écoulement jusqu'à l'entrée de la tuyère, tous les points du maillage sont perturbés, l'initialisation est donc éloignée de la solution.

### Etude de la convergence

Pour la résolution des équations linéarisées et harmoniques en temps, sur ce maillage la taille de la base minimale de Krylov est de 400 vecteurs pour converger. La figure 5.1 représente les évolutions des résidus en fonction des itérations GMRes pour des bases de Krylov comportant 400, 500, 600 et 700 vecteurs. Le type de convergence est similaire à celui obtenu dans le cas de la résolution des équations linéarisées d'Euler  $1\frac{1}{2}$ D (Fig. 2.3). Dans un premier temps, la pente des résidus est faible avec une diminution lente de la norme du vecteur erreur. A partir de 300 itérations de chaque itération redémarrée, la vitesse convergence de la méthode augmente sensiblement (Fig. 5.1). Quelle que soit la taille de la base de Krylov, la convergence est toujours décomposée en deux parties. Cela explique pourquoi les bases sont aussi importantes en nombre de vecteurs. Si la base est trop petite ( $IT\_base < 300$ ), la partie dite de convergence rapide n'est pas atteinte et le redémarrage ne permet pas de faire converger le processus itératif. Par ailleurs, plus la taille de la base est importante et moins d'itérations de redémarrage sont nécessaires (Fig. 5.1). En contrepartie, en augmentant la taille des bases de Krylov, l'espace mémoire requis augmente aussi linéairement (Tab. 5.1). Pour une résolution avec une base de 400 vecteurs, l'espace mémoire nécessaire est de 2.15 Giga-Bytes (GB) et pour une résolution avec une base de 700 vecteurs, l'espace mémoire requis est de 3.62 GB. Cependant, cet espace mémoire est inférieur à celui nécessaire à une résolution LU\_bande; dans le cas d'une résolution par factorisation de la matrice, nous aurions eu besoin de 9.07 GB de mémoire, soit un espace 2.5 fois plus important que pour la résolution avec une base de 700 vecteurs. Notons que le rapport LU\_bande/GMRes serait plus important dans les cas 3-D.

Les temps de calcul réalisés sur un processeur cadencé à 3 Giga-Hertz sont présentés dans le tableau 5.1. Nous remarquons que contrairement à l'espace mémoire, l'augmentation en temps CPU n'est pas proportionnelle au nombre de vecteurs de la base de Krylov. A chaque itération de Krylov, le nouveau vecteur de la base doit être orthogonalisé avec tous les précédents. De plus, plus la base est importante, plus la minimisation des résidus dans la base sera longue. Le temps nécessaire à la création et à la minimisation des résidus pour une base de 400 vecteurs est de 11' 33" alors que pour une base de 700 vecteurs le temps CPU est de 22' 06", soit près de deux fois plus de temps pour un rapport de nombre de vecteurs de base de 1.75 fois plus important. Alors que pour une base avec 700 vecteurs, deux redémarrages sont suffisants, pour une base de 400 vecteurs, treize sont nécessaires pour converger (Tab. 5.1). Le temps CPU total pour obtenir la convergence est de 44 minutes pour la résolution GMRes\_noptm( $IT\_base=700$ ,  $IT\_restarted=2$ ) et de 150 minutes GMRes\_noptm( $IT\_base=400$ ,  $IT\_restarted=13$ ), soit un temps CPU 3.5 fois plus important.

Notons enfin qu'en augmentant le nombre de vecteurs de la base de Krylov le niveau d'erreur diminue à la fin des itérations de redémarrage (Fig. 5.1). Si nous redémarrons de nouveau pour chaque base une nouvelle itération, l'erreur stagne. Cette stagnation des résidus, lors du redémarrage, est sans doute liée à la matrice du système linéaire qui n'est pas définie positive. Dans ce cas, l'algorithme GMRes avec redémarrage peut stagner et ne pas parvenir à converger [121, p. 167-168]. Les niveaux atteints de la minimisation des résidus, présentés dans la figure 5.1, sont donc les niveaux de convergence maximaux avec les bases utilisées.

### Comparaison des grandeurs aérodynamiques

Les grandeurs aérodynamiques perturbées obtenues avec une résolution GMRes\_ptm( $CFL = 50$ ,  $r_{res} = 50$ ) sont comparées avec des résultats issus de la résolution GMRes\_noptm( $IT\_base = 700$ ,  $IT\_restarted = 2$ ) pour la fluctuation de pression dans la figure 5.2 et en annexe C.1 pour les autres variables. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la comparaison de l'évolution de la perturbation de la pression. Les évolutions générales

<sup>3</sup>Avec le maillage utilisé, le nombre d'inconnues s'élève à  $2 \times 4 \times Ni \times Nj = 291368$ .

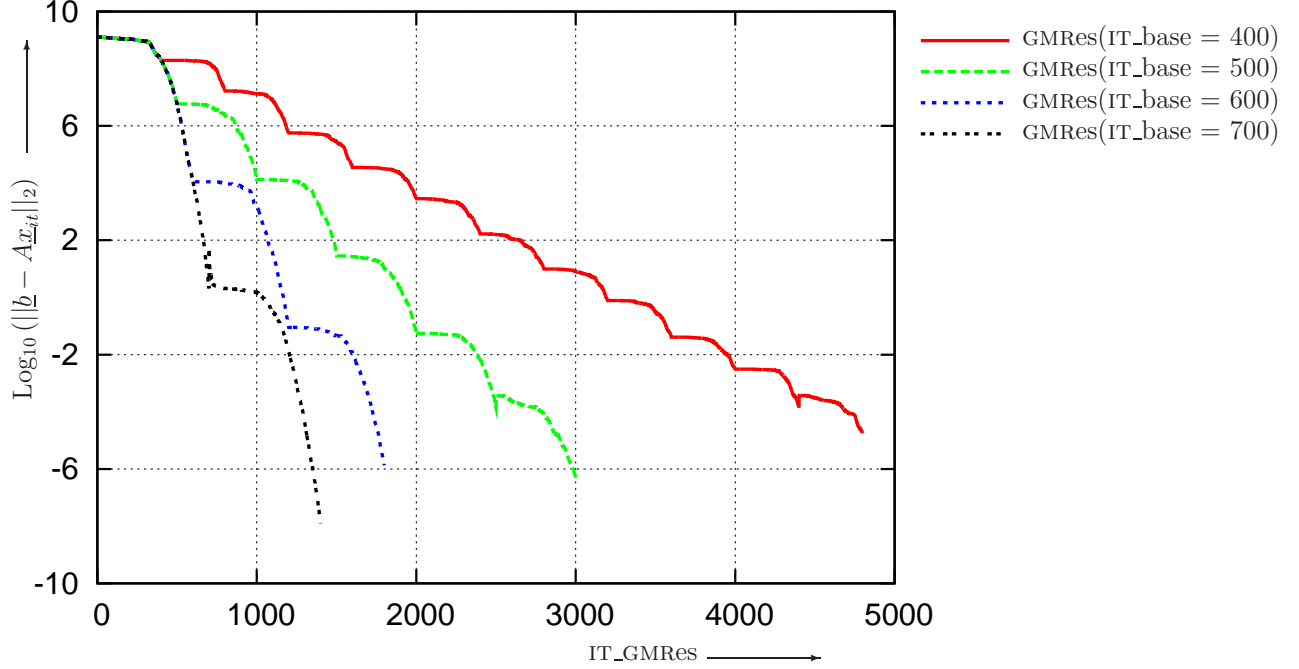


FIG. 5.1 – Comparaison de la convergence pour une résolution GMRes\_noptm en fonction de la taille de la base de Krylov IT\_base = 400, 500, 600 et 700 des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $Ni \times Nj = 301 \times 121$

IT_base	Temps CPU par redémarrage	IT_restarted	Temps CPU total	Mémoire utilisée (GB)
300	8' 45"	-	-	1.66
400	11' 33"	13	150' 09"	2.15
500	15' 32"	6	93' 12"	2.64
600	19' 59"	3	59' 55"	3.13
700	22' 06"	2	44' 12"	3.62

TAB. 5.1 – Temps et mémoire nécessaires pour les résolutions GMRes\_noptm des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $Ni \times Nj = 301 \times 121$

de perturbation de la pression, que ce soit pour le module (Fig. 5.2(a)-(c)) ou pour la phase (Fig. 5.2(d)-(i)), sont sensiblement identiques pour les deux méthodes. Les niveaux sont un peu plus élevés dans le cas de la résolution GMRes\_noptm(IT\_base = 700, IT\_restarted = 2), particulièrement au col et en entrée de la tuyère. Un résultat particulièrement important est la symétrie des perturbations de toutes les variables sur les parois haute et basse. Les perturbations des grandeurs aérodynamiques ont des valeurs numériques très différentes, elles varient de entre  $10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$  pour la perturbation maximale de la masse volumique et 4000 Pa pour la perturbation maximale de la pression. Malgré cela, les résolutions GMRes\_noptm convergent pour toutes les grandeurs (Figs. 5.2, C.1, C.2 et C.3).

Dans le tableau suivant (Tab. 5.2) sont données les coefficients des forces de pression sur les parois (Eq. 4.28) haute et basse de la tuyère qui sont comparées aux coefficients des forces de pression calculées par une résolution AF-ADI(CFL = 20) grâce au rapport adimensionné :  $r(^1\hat{C}) = \frac{{}^1\hat{C}_{\text{GMRES}} - {}^1\hat{C}_{\text{AF-ADI}}}{{}^1\hat{C}_{\text{AF-ADI}}}$ .

Nous avons, quelle que soit la base utilisée pour la résolution à la fin du processus de redémarrage, des forces de pression identiques sur les deux parois de la tuyère. De plus, la variation entre les méthodes de résolution est très faible, de l'ordre de 0.1 %.

IT_base	IT_restarted	${}^1\hat{C}_{lower}$	$r({}^1\hat{C}_{lower}) \times 100$	${}^1\hat{C}_{upper}$	$r({}^1\hat{C}_{upper}) \times 100$
400	13	0.41751	0.092	0.41752	0.091
500	6	0.41753	0.091	0.41753	0.091
600	3	0.41748	0.102	0.41749	0.101
700	2	0.41751	0.092	0.41751	0.092

TAB. 5.2 – Comparaison des coefficients des forces de pression pour les résolutions GMRes\_noptm et pour une résolution AF-ADI(CFL = 20) autour d'un écoulement stationnaire subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $Ni \times Nj = 301 \times 121$

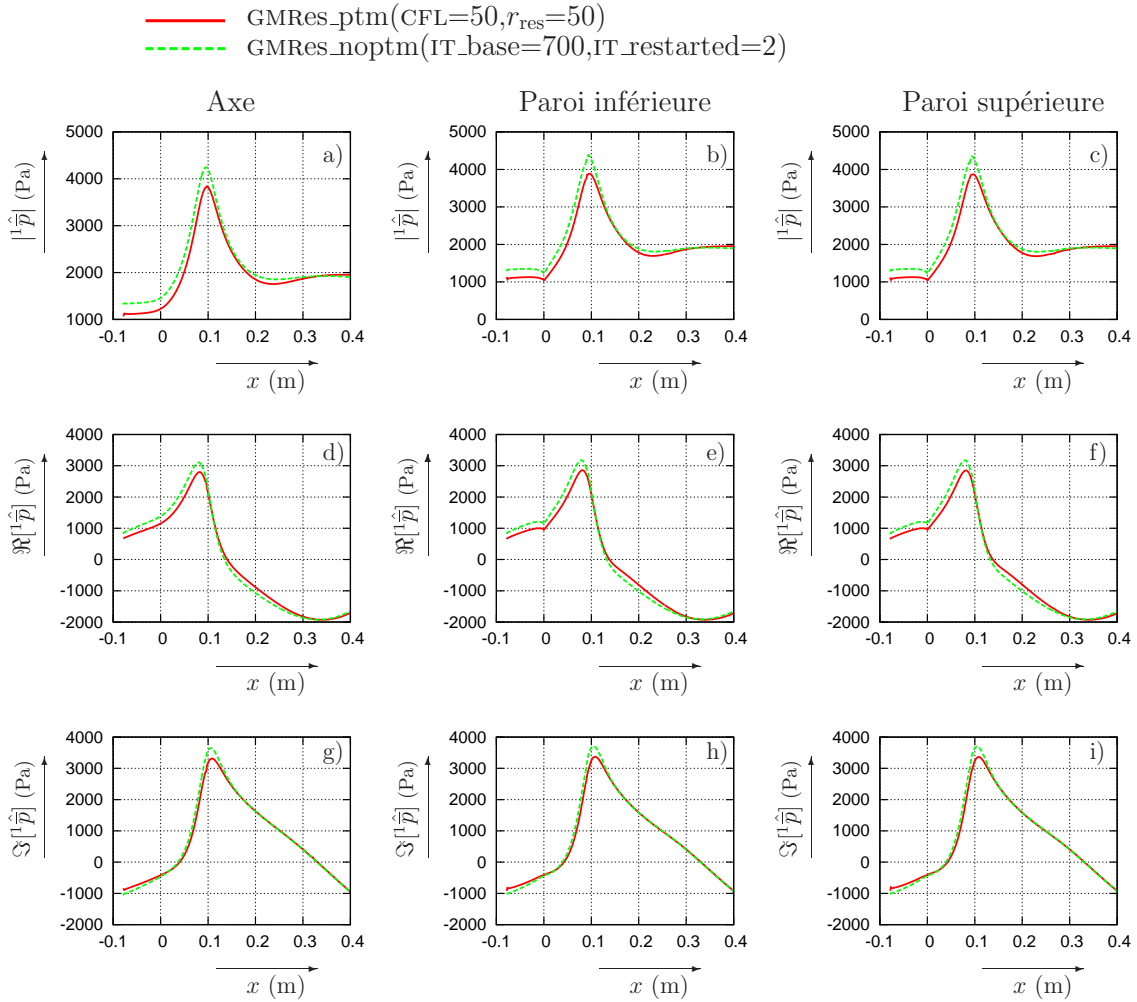


FIG. 5.2 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de pression  $\hat{p}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{res}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=700, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $Ni \times Nj = 301 \times 121$



### 5.2.2 Ecoulement stationnaire transsonique

La difficulté de cet exercice réside dans la capture du choc, de sa position et de son intensité. La présence de l'onde de choc implique une forte discontinuité de toutes les variables aérodynamiques. Cette discontinuité présente un avantage : la perturbation ne remontant pas à l'amont de l'onde de choc, en dehors des couches limites, l'initialisation est exacte dans cette partie de l'écoulement. Les calculs sont réalisés sur le même domaine que celui-ci de la résolution avec introduction d'un pseudo-pas de temps (*cf.* 4.4.2) sur le maillage *Grid\_A* ( $N_i \times N_j = 301 \times 101$ ), le système linéaire comporte donc  $4 \times N_i \times N_j = 121604$  inconnues.

#### Etude de la convergence

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées sur le maillage standard *Grid\_A* avec une résolution GMRes\_noptm, la base de Krylov doit posséder une taille minimale de 300 vecteurs pour assurer la convergence de la méthode (Tab. 5.3). L'allure de la convergence est identique à celle du cas subsonique (Figs. 5.1-5.3). La convergence est dans un premier temps lente avec un plateau jusqu'à 250 vecteurs puis croît jusqu'à une pente limite, indépendamment du nombre de vecteurs par base de Krylov et du nombre de redémarrages. Après 600 itérations (Fig. 5.3), l'algorithme GMRes\_noptm arrête sa convergence y compris avec un plus grand nombre d'itérations. Pour converger à un niveau plus bas, il est alors nécessaire de redémarrer le calcul. Les pics de convergence visibles sur la figure 5.3 lors des redémarrages de l'algorithme GMRes pour les calculs GMRes\_noptm(IT\_base = 500, IT\_restarted = 2) et GMRes\_noptm(IT\_base = 600, IT\_restarted = 2) sont des erreurs numériques liées à l'application à chaque redémarrage des conditions aux limites explicites sur le vecteur résultat.

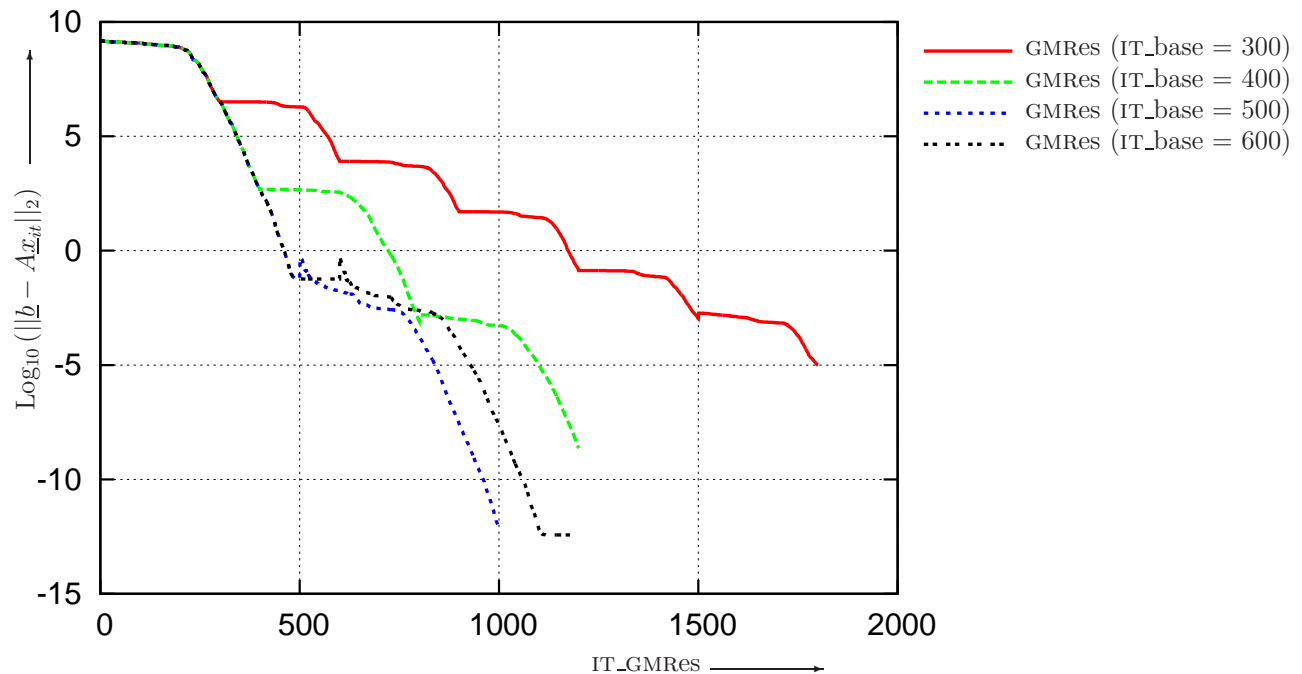


FIG. 5.3 – Comparaison de la convergence pour une résolution GMRes\_noptm en fonction de la taille de la base de Krylov IT\_base = 200, 300, 400, 500 et 600 des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur le maillage *Grid\_A*

Quatre bases différentes ont été testées pour étudier la convergence de la méthode (IT\_base = 300, 400, 500 et 600). Pour une base de 300 vecteurs, le calcul a besoin de sept itérations de redémarrage pour converger, alors que pour une base de 500 ou 600 seulement deux sont nécessaires. Même si l'augmentation du temps de résolution

n'est pas proportionnelle au nombre de vecteurs, le temps CPU à convergence est plus petit pour les résolutions GMRes\_noptm(IT\_base=500-600, IT\_restarted=2) que pour la résolution GMRes\_noptm(IT\_base=300, IT\_restarted=7) (Tab. 5.3). De plus, la résolution requiert toujours un espace mémoire moins important pour toutes les résolutions GMRes\_noptm par rapport à une résolutions LU\_bande. En effet, pour une base de 600 vecteurs et le préconditionnement ILU0, nous avons besoin de 2.63 GB alors que pour une résolution LU\_bande nous aurions eu besoin de 4.22 GB.

IT_base	Temps CPU par redémarrage	IT_restarted	Temps CPU total	Mémoire utilisée (GB)
200	2' 24"	-	-	1.07
300	4' 26"	7	31' 48"	1.46
400	5' 54"	3	16' 48"	1.85
500	7' 36"	2	15' 12"	2.24
600	10' 36"	2	21' 12"	2.63

TAB. 5.3 – Temps et mémoire nécessaires pour les résolutions GMRes\_noptm des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage *Grid\_A*

### Comparaison des grandeurs aérodynamiques

Les résultats des grandeurs aérodynamiques perturbées obtenues par la méthode GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) ont été comparés avec les résultats issus de la résolution sans pas de temps GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) (Fig. 5.4) et (*cf.* C.2.1). Nous nous intéresserons en particulier à la perturbation de pression (Fig. 5.4), mais l'étude des autres perturbations est faite dans l'annexe C.2.1 (Figs. C.4-C.5-C.6). La figure 5.4 présente l'évolution du module et des parties réelle et imaginaire de la fluctuation de pression le long de l'axe de la tuyère ainsi que sur les parois inférieure et supérieure. Nous observons une bonne concordance globale de la perturbation, en particulier sur le niveau et la position de l'onde de choc. Nous avons aussi une symétrie entre les parois haute et basse.

La principale différence entre les deux approches se situe dans la partie imaginaire de la fluctuation (Fig. 5.4(j)-(k)-(l)). Sur les parois, la résolution GMRes\_noptm donne une fluctuation de pression de l'onde de choc beaucoup plus importante que la résolution GMRes\_ptm. Alors que sur les parois la valeur de la partie imaginaire de la perturbation de pression au niveau de l'onde de choc pour une résolution *pseudo-time-marching* est de  $\Im_{sw}^1 \hat{p}_{sw} = 150$  Pa, pour une résolution sans introduction du pas de temps elle est de  $\Im_{sw}^1 \hat{p}_{sw} = -2010$  Pa (Fig. 5.4(k)(l)). De plus, nous observons à l'axe de la tuyère que les deux méthodes obtiennent des déphasages opposés au niveau du l'onde de choc.  $\Im^1 \hat{p}_{sw\_ptm} = 4600$  Pa et  $\Im^1 \hat{p}_{sw\_noptm} = -7900$  Pa (Fig. 5.4(j)).

Les différentes valeurs du coefficient des forces de pression instationnaire sont présentées pour les différents calculs dans le tableau 5.4 :

IT_base	IT_restarted	${}^1\tilde{C}_{lower}$	$r({}^1\tilde{C}_{lower}) \times 100$	${}^1\tilde{C}_{upper}$	$r({}^1\tilde{C}_{upper}) \times 100$
400	13	0.42660	0.002	0.42660	0.002
500	6	0.42659	0.002	0.42661	0.002
600	3	0.42660	0.002	0.42659	0.002
700	2	0.42661	0.002	0.42660	0.002

TAB. 5.4 – Comparaison des coefficients des forces de pression pour les résolutions GMRes\_noptm et pour une résolution AF-ADI(CFL = 20) autour d'un écoulement stationnaire transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur le maillage *Grid\_B*

Tous les calculs GMRes\_noptm convergent vers une valeur quasi identique de  ${}^1\tilde{C} = 0.43$ . Nous constatons que les différences obtenues sur le champ aérodynamique décrites ci-dessus influencent donc peu le coefficient des forces de pression et que ce coefficient est proche du coefficient obtenu par une résolution pseudo-temporelle.

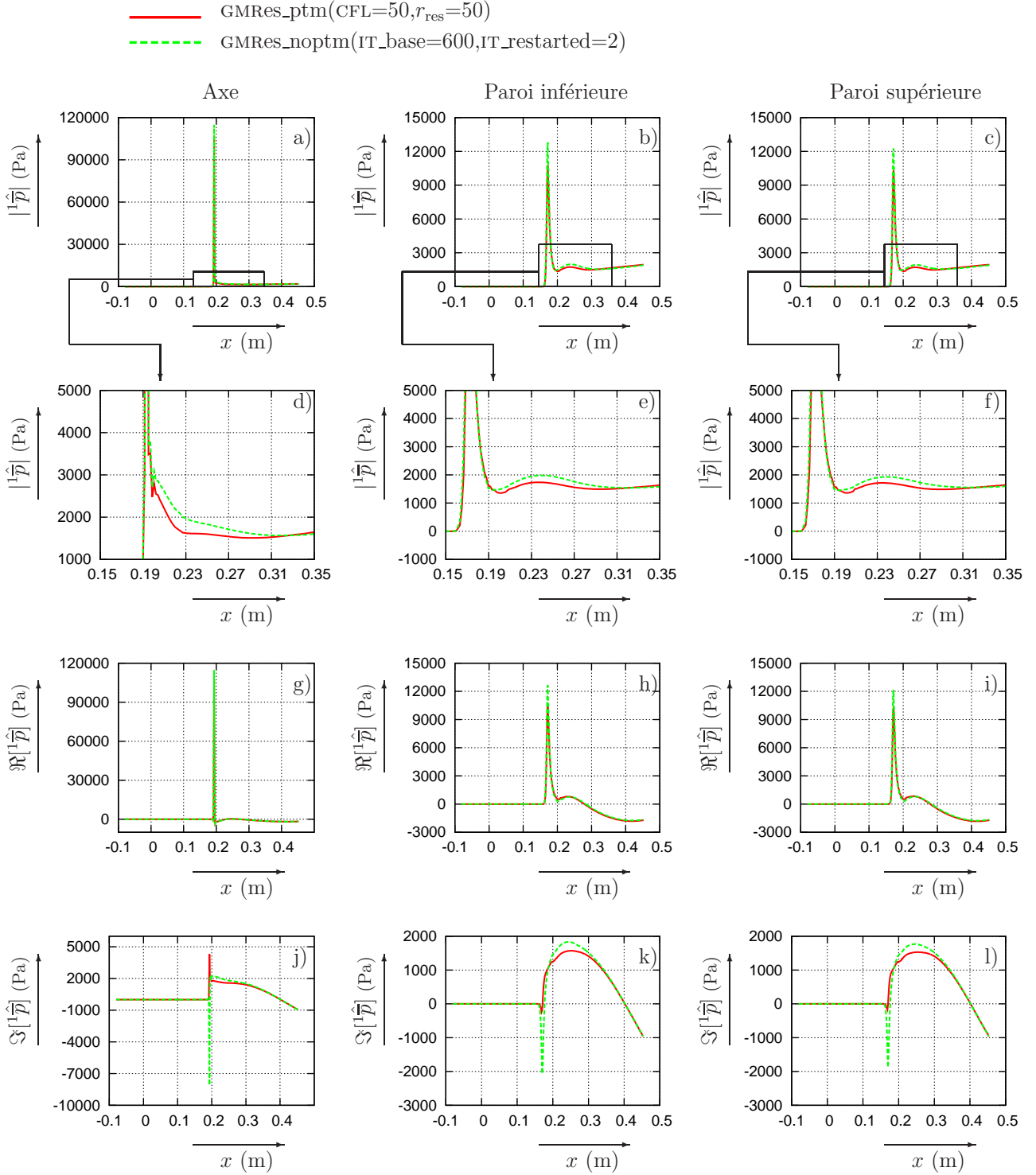


FIG. 5.4 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de pression  $\hat{p}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=700, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur le maillage *Grid\_B*

### 5.2.3 Application du problème de stabilité

Rappelons que le but premier du développement de cette méthode de résolution est de stabiliser la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées lorsque celles-ci sont résolues sur un maillage raffiné proche des parois. Nous avons mis en évidence ce problème de stabilité dans le cas de la résolution de ces équations lorsqu'elles sont linéarisées autour d'un écoulement stationnaire transsonique avec un champ stationnaire présentant un fort décollement (*cf.* chapitre 4).

Après la validation de l'algorithme `GMRes_noptm` sur le maillage `Grid_A` où les résolutions AF-ADI et `GMRes_ptm` convergent, nous avons donc testé notre algorithme sur le maillage `Grid_B` ( $N_i \times N_j = 301 \times 201$ ). Sur ce maillage, les résolutions avec une intégration pseudo-temporelle (AF-ADI et `GMRes_ptm`), quel que soit le pas de temps, avec une discrétisation au troisième ordre des flux convectifs, ne parviennent pas à converger.

Comme nous le verrons par la suite, la méthode `GMRes_noptm` nous a permis de résoudre le problème de stabilité. Nous savions qu'il existait une solution au problème des équations linéarisées, c'est-à-dire que la matrice n'était pas une matrice singulière. Mais une résolution LU\_bande complexe de ce système requiert le stockage d'une matrice demandant un espace mémoire de 24.9 GB. Les ordinateurs actuels et même les « super-calculateurs » ne disposant que rarement de cet espace mémoire ou de manière exceptionnelle, il nous était nécessaire de développer une méthode de résolution requérant moins de ressource mémoire.

#### Etude de la convergence

Dans la figure 5.5, la convergence de l'algorithme `GMRes_noptm` est comparée pour différentes bases de Krylov variant de 400 à 800 vecteurs. En utilisant une base de Krylov comportant moins de vecteurs, quel que soit le nombre de redémarrages, le calcul ne parvient pas à converger. Comme dans les cas précédents, la convergence pour chaque redémarrage est très lente pour les 350 premières itérations et accélère ensuite pour atteindre la même pente quel que soit le nombre d'itérations. Avec une base de 400 vecteurs, le calcul converge avec un maximum de trois ordres de grandeur. Pour diminuer davantage la norme du vecteur erreur, les bases de Krylov doivent être augmentées. Avec une base de 800 vecteurs, les résidus finaux diminuent de plus de neuf ordres de grandeur.

Le tableau 5.5 regroupe les données pour les résolutions avec les bases de Krylov de 400, 500, 600, 700 et 800 vecteurs. Nous avons besoin d'un espace mémoire minimal 6.1 fois moins important que la résolution LU\_bande pour converger (résolution `GMRes_noptm(IT_base=400)`). Mais avec cette base 14 itérations de redémarrage sont nécessaires pour converger, soit un temps total de 226 minutes sur un processeur cadencé à 3 Giga-Hertz. En augmentant la base de Krylov ( $IT\_base = 600$ ), l'espace mémoire requis est de 5.65 GB mais le calcul converge en 113 minutes. Afin de diminuer la norme du vecteur erreur, en fin de processus itératif, nous avons réalisé la calcul avec une plus grande base de 800 vecteurs. Dans ce cas, 7.19 GB en espace mémoire sont nécessaires et les deux itérations de redémarrage convergent en 238 minutes.

IT_base	Temps CPU par redémarrage	IT_restarted	Temps CPU total	Mémoire utilisée (GB)
300	13' 55"	-	-	3.32
400	19' 02"	14	266' 28"	4.10
500	32' 09"	6	192' 50"	4.87
600	56' 28"	2	112' 56"	5.65
700	84' 25"	2	168' 50"	6.42
800	119' 16"	2	238' 32"	7.19

TAB. 5.5 – Temps et mémoire nécessaires pour les résolutions `GMRes_noptm` des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur le maillage `Grid_B`

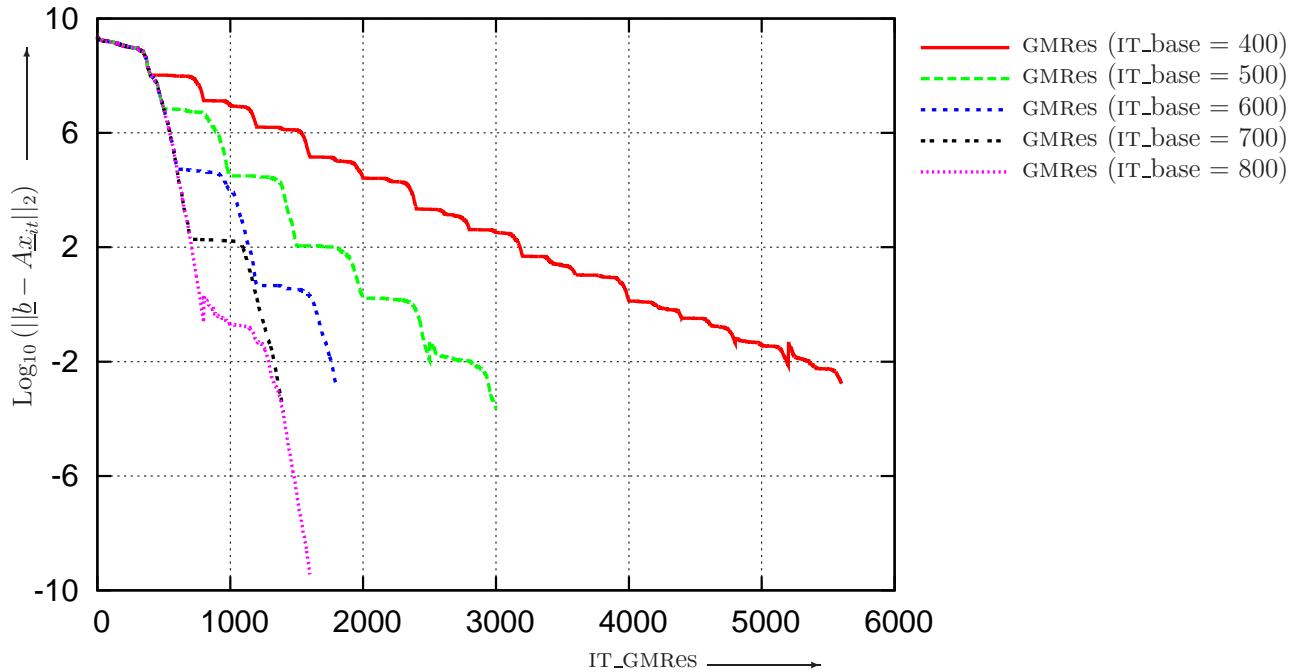


FIG. 5.5 – Comparaison de la convergence pour une résolution `GMRes_noptm` en fonction de la taille de la base de Krylov  $\text{IT\_base} = 400, 500, 600, 700$  et  $800$  des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur le maillage *Grid\_B*

### Comparaison des grandeurs aérodynamiques

Les résultats issus de la résolution de la `GMRes_noptm` ( $\text{IT\_base}=800, \text{IT\_restarted}=2$ ) pour le maillage *Grid\_B* sont représentés pour la fluctuation de pression sur la figure 5.7 et pour les autres fluctuations en annexe (Figs. C.7, C.8 et C.9). Ne pouvant comparer ces perturbations avec des perturbations issues d'une résolution pseudo-temporelle, les résultats sont validés par rapport à la résolution `GMRes_noptm` ( $\text{IT\_base}=600, \text{IT\_restarted}=2$ ) sur le maillage *Grid\_A* (Fig. 5.7).

Il est à noter que les deux champs stationnaires ne sont pas identiques, en particulier sur la position de l'onde de choc (Fig. 5.6). Sur le maillage *Grid\_A*, le choc est placé plus vers l'amont de la tuyère que pour le maillage *Grid\_B*. En revanche, les deux champs ont des zones de décollement derrière l'onde de choc. De même, les deux résultats présentent des structures classiques de choc en lambda (Fig. 5.6).

Il aurait donc sans doute été plus intéressant de comparer les perturbations de la résolution sur un maillage fin par rapport à des perturbations sur un maillage plus lâche mais dont le champ aérodynamique est interpolé à partir des résultats issus du maillage fin.

La figure 5.7 présente les évolutions de la fluctuation de la pression à l'axe de la tuyère et sur les parois. Nous remarquons en particulier que le saut de la perturbation de pression lié à la présence de l'onde de choc n'est pas placé à la même position axiale. Cette différence de position n'est pas liée à la résolution des équations linéarisées mais aux différences des champs stationnaires entre les deux maillages (Fig. 5.6). De même, l'intensité de la perturbation de pression liée à l'onde de choc est différente dans le cas des deux maillages. A l'axe de la tuyère, l'intensité est deux fois plus importante sur le maillage *Grid\_A* que *Grid\_B*, alors que sur les parois l'intensité est plus importante dans le cas du maillage *Grid\_B* (Fig. 5.7). Nous remarquons aussi la différence de niveau dans la bulle de pression à l'aval de la position de l'onde choc. Dans le cas du maillage *Grid\_B* la bulle est

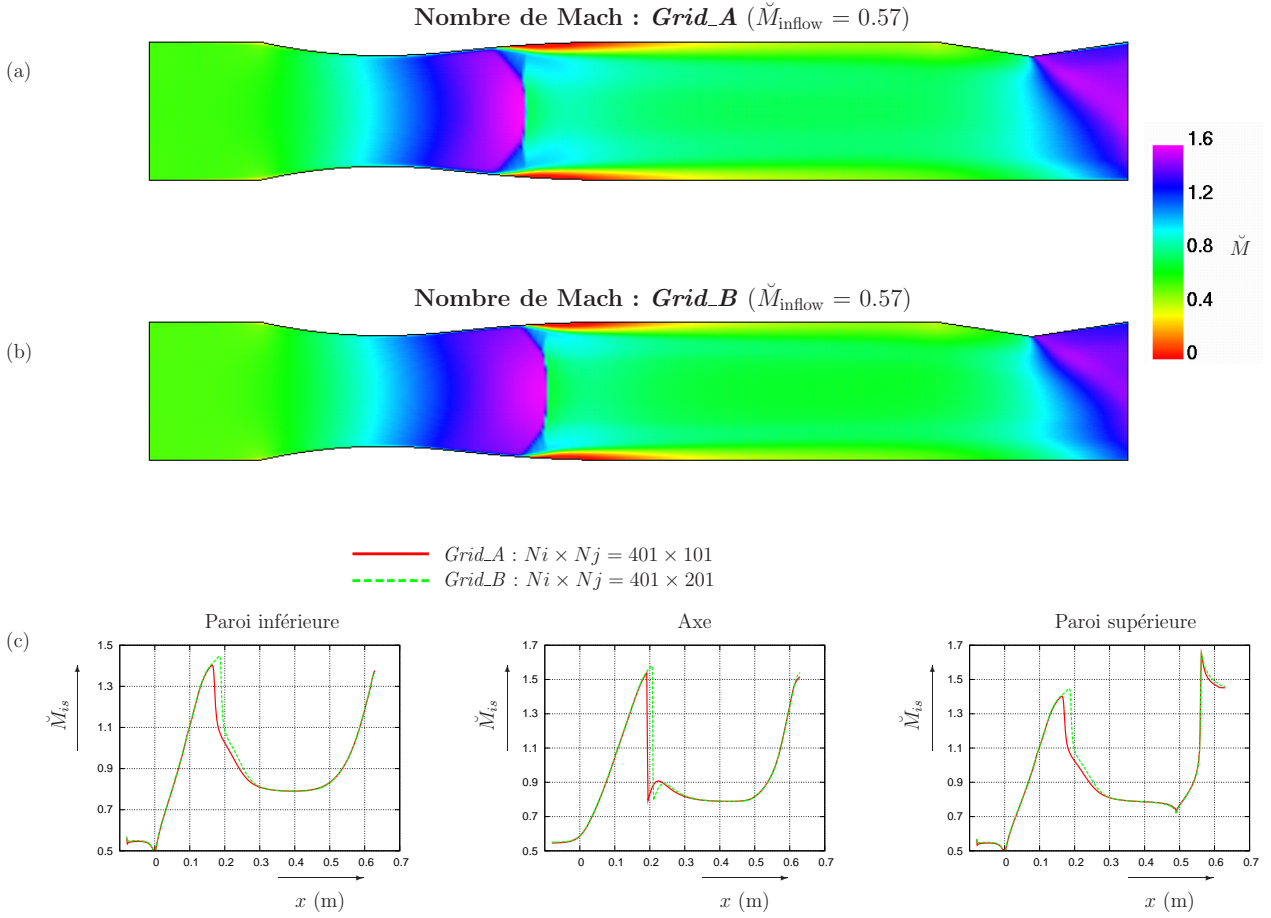


FIG. 5.6 – Cartographie du nombre de Mach stationnaire ( $\check{M}_{\text{inflow}}=0.57$ ) pour les résolutions sur les maillages *Grid\_A* ( $N_i \times N_j = 401 \times 101$ ) (a) et *Grid\_B* ( $N_i \times N_j = 401 \times 201$ ) (b) et comparaison des Mach isentropiques sur les parois et l'axe (c) dans la tuyère [32] avant la troncature à l'aval pour la résolution des équations linéarisées

beaucoup plus importante que dans le cas du maillage *Grid\_A*. Mais cela est aussi lié aux différences des champs stationnaires. Comme pour les autres tests, nous avons comparé les résultats du coefficient des forces de pression instationnaire pour les résolutions GMRES\_noptm et le coefficient des forces de pression issu d'une résolution AF-ADI(CFL = 20) sur le maillage *Grid\_A* (Tab. 5.6). Nous voyons que les variations de ces coefficients, quelle que soit la base de Krylov utilisée, sont infimes. De plus, le niveau de convergence n'influence pas beaucoup la valeur du coefficient de pression.

IT_base	IT_restarted	${}^1\check{C}_{lower}$	$r({}^1\check{C}_{lower}) \times 100$	${}^1\check{C}_{upper}$	$r({}^1\check{C}_{upper}) \times 100$
400	13	0.42652	0.004	0.42653	0.004
500	6	0.42651	0.004	0.42652	0.004
600	3	0.42650	0.004	0.42651	0.004
700	2	0.42652	0.004	0.42652	0.004

TAB. 5.6 – Comparaison des coefficients des forces de pression pour les résolutions GMRES\_noptm sur un maillage *Grid\_B* et pour une résolution AF-ADI(CFL = 20) *Grid\_A* autour d'un écoulement stationnaire transsonique dans une tuyère symétrique [32]

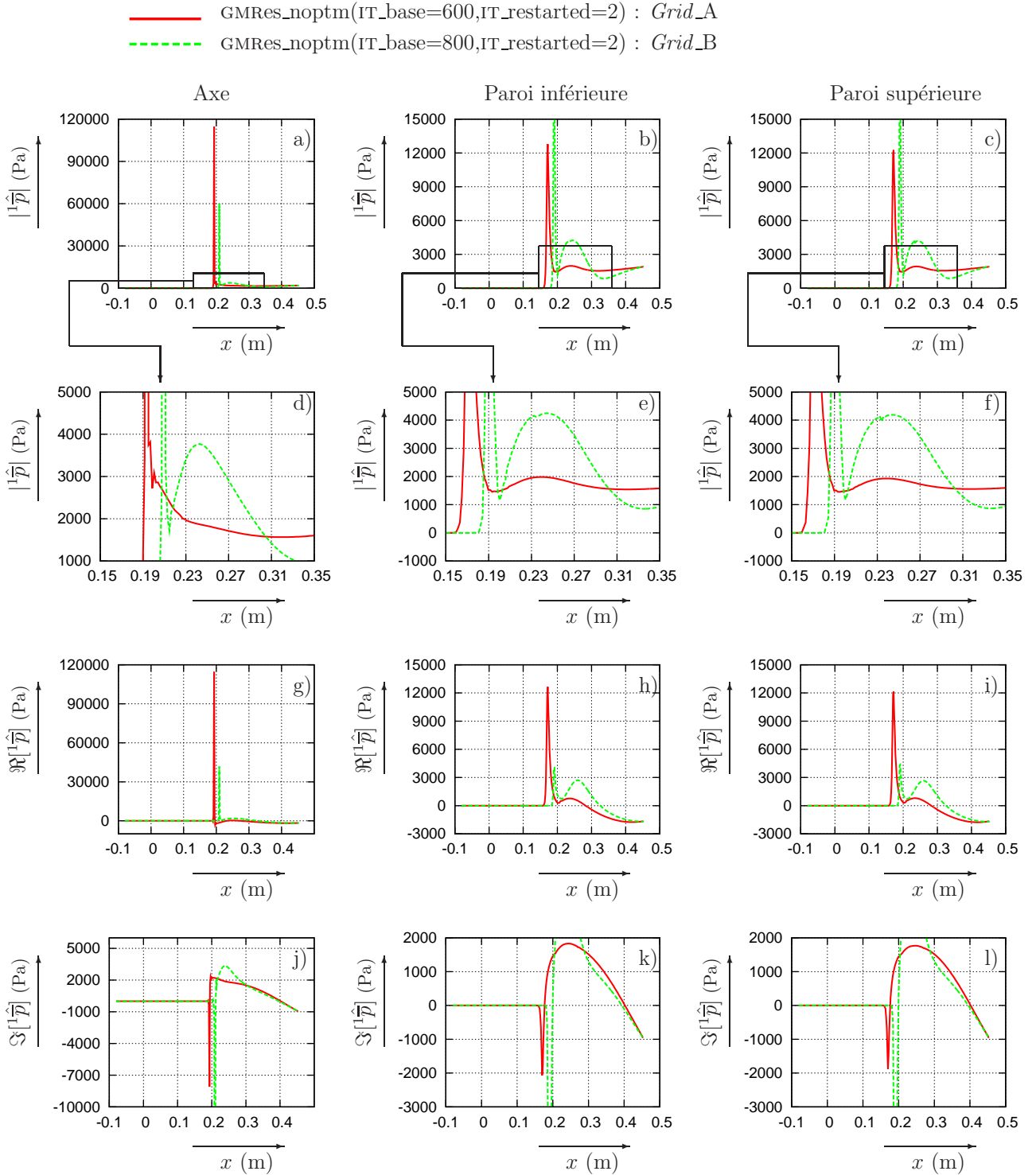


FIG. 5.7 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de pression  $\hat{p}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution sur le maillage *Grid\_A* GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) et sur le maillage *Grid\_B* GMRes\_noptm(IT\_base=800, IT\_restarted=2) issue de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32]

## 5.3 Conclusion

Le but principal de ce chapitre était de développer une nouvelle méthode numérique qui stabilise la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées. Nous avons vu au chapitre précédent qu'une instabilité numérique apparaissait avec une résolution implicite *pseudo-time-marching*, que ce soit avec une résolution du système linéaire à chaque pas de temps par une méthode de factorisation approchée ou par une méthode GMRes avec un préconditionnement ILU0. Pour cela, nous nous sommes affranchis d'une résolution par introduction d'un pseudo-pas de temps.

Etant donné la taille des systèmes linéaires à résoudre, nous ne pouvions pas utiliser une résolution LU\_bande de la matrice complexe. Nous nous sommes donc dirigés vers des méthodes de Krylov et en particulier vers l'algorithme GMRes avec un préconditionnement ILU0 grâce au savoir-faire acquis pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires et pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées avec un pseudo-pas de temps. Nous nous sommes posé la question du préconditionnement à utiliser. Fallait-il un préconditionnement avec une discrétisation des flux au premier ou au troisième ordre? Aucun calcul avec préconditionnement ILU0 au premier ordre n'ayant convergé, nous en avons conclu qu'étant donné le très mauvais conditionnement de la matrice, il nous fallait forcément un préconditionnement basé sur une matrice ayant les mêmes valeurs numériques.

Un autre problème était la propagation de la fluctuation de la pression, étant donné les valeurs numériques imposées par les conditions aux limites (très différentes des valeurs liées à la discrétisation des flux). Nous avons constaté que si le vecteur initial était le vecteur nul, la perturbation ne se propage pas vers l'amont de la tuyère. Nous avons donc décidé d'imposer, à chaque redémarrage de l'algorithme GMRes, les conditions aux limites au vecteur initialisant l'algorithme de Krylov.

Enfin, il était nécessaire de réduire l'espace mémoire requis par l'algorithme proposé. Nous avons donc décidé de ne pas stocker la matrice mais de linéariser les flux à chaque itération de Krylov pour calculer le produit matrice vecteur. Nous n'avons ainsi pas eu à stocker la matrice de préconditionnement. De plus, un autre gain en utilisation d'espace mémoire a été obtenu en décomposant le problème complexe pour obtenir deux problèmes réels couplés, l'un pour la partie complexe et l'un pour la partie réelle.

Grâce à ces différentes techniques, nous avons pu résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps sur maillage sur lequel une résolution *pseudo-time-marching* divergeait. Malgré des différences observées sur les résultats de fluctuation de pression, le paramètre important de ces équations, le coefficient des forces de pression, reste presque inchangé quels que soient le maillage et la méthode de résolution utilisée.





## Chapitre 6

# Optimisation aérodynamique de formes

Il existe deux grandes familles de méthode d'optimisation, la méthode stochastique inspirée de la théorie de l'évolution de Darwin et la méthode de descente qui est une généralisation de la méthode de Newton appliquée à l'optimisation [30, p. 60-61]. Pour ces deux approches, il est nécessaire de définir une fonction de coût de façon à évaluer la pertinence de la géométrie testée.

Dans le cas de la méthode stochastique, la géométrie à optimiser est représentée par un ensemble de paramètres appelés « gènes ». Plus la fonction de coût obtient un score important, plus la géométrie est susceptible d'être sélectionnée pour recombinaison ses gènes avec ceux d'une autre géométrie et ainsi de créer une nouvelle génération de population censée posséder de meilleures propriétés par rapport à la fonction de coût demandée. Le principal inconvénient des méthodes stochastiques réside dans le fait que nous devons évaluer la pertinence de tous les membres de la famille à chaque itération d'optimisation. Pour cela, il est nécessaire de réaliser autant de calculs stationnaires que de membres d'une population, ce qui peut devenir prohibitif en temps de calcul.

Dans le cas de la méthode de descente, la valeur de la fonction de coût en elle-même n'a que peu d'importance. Elle est seulement utilisée pour fournir un état représentatif de la valeur de la géométrie. En revanche, il est nécessaire de connaître les valeurs du vecteur gradient et même, dans certains cas, de la matrice hessienne de la fonction de coût par rapport aux différents paramètres de description de la géométrie. Les valeurs du gradient et de la matrice hessienne sont généralement obtenues par résolution d'un ou plusieurs systèmes linéaires issus de la linéarisation des équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Valentin [136] reporte l'obligation d'utilisation de maillages peu raffinés proches des parois. En effet, lorsque le maillage est très raffiné proche des parois, des problèmes de stabilité numérique identiques à ceux rencontrés lors de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps apparaissent, même dans le cas d'un écoulement stationnaire subsonique.

Le but de ce travail de recherche n'était pas de développer un algorithme d'optimisation complexe avec ou non prise en compte de contraintes aérodynamiques et/ou géométriques, mais de résoudre le calcul linéarisé du gradient grâce à une méthode de Krylov sans introduction d'un pseudo-pas de temps.

### 6.1 Méthode d'optimisation

Dans le cadre de ce travail, le choix a été porté sur l'utilisation de la méthode de descente avec une résolution d'un problème issu de la linéarisation des équations de Navier-Stokes. Cela nous a permis de nous appuyer sur l'expérience acquise dans le cadre des travaux de V. Valentin [136] en ce qui concerne la partie algorithmique de l'optimisation et de J.C. Chassaing [17] en ce qui concerne la linéarisation des flux des équations de Navier-Stokes stationnaires.

#### 6.1.1 Algorithme d'optimisation sans contrainte

Dans ce travail, un algorithme d'optimisation sans contrainte est utilisé. Pour cela, la direction de descente à chaque itération d'optimisation doit réaliser un angle minimal de  $90^\circ$  par rapport au gradient de la fonction de

coût  $F$  [141]. Cette condition se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$(\nabla F(\underline{X}_d))^T \cdot \underline{S} \leq 0 \quad (6.1)$$

où  $\underline{X}_d$  sont les paramètres de dessin et  $\underline{S}$  la direction de descente.

Les différentes étapes constituant un algorithme d'optimisation sans contrainte par direction de descente sont :

- |   |   |
|---|---|
| { | <ol style="list-style-type: none"> <li>(1.) Initialisation des variables de dessin : <math>\underline{X}_d = \underline{X}_d^0</math></li> <li>(2.) Calcul du champ aérodynamique initial</li> <li>(3.) <i>Début de la boucle d'optimisation</i></li> <li>(3.1) Pour <math>k = 0, 1, 2, 3, \dots</math> jusqu'à convergence, faire :</li> <li>(3.2) Recherche de la direction de descente : <math>\underline{S}^k</math></li> <li>(3.3) Recherche linéaire : <math>\alpha^k</math> tel que <math>F(\underline{X}_d^k + \alpha^k \underline{S}^k)</math> soit minimal</li> <li>(3.4) Actualisation des variables de dessin : <math>\underline{X}_d^{k+1} = \underline{X}_d^k + \alpha^k \underline{S}^k</math></li> <li>(3.5) Calcul du nouveau champ aérodynamique avec les paramètres de dessin : <math>\underline{X}_d^{k+1}</math></li> <li>(3.6) Evaluation de la fonction de coût</li> <li>(3.) <i>Fin de boucle d'optimisation</i></li> </ol> |
|---|---|

TAB. 6.1 – Etapes d'un algorithme d'optimisation par direction de descente

Dans notre cas, la recherche linéaire du meilleur coefficient  $\alpha^k$ , étape (3.2) de l'algorithme précédent (Tab. 6.1), n'est pas réalisée. Nous fixerons à chaque itération d'optimisation le facteur  $\alpha^k$  à 1. Cela peut poser, dans certains cas, des problèmes de relaxation. Néanmoins cela n'a jamais déstabilisé le processus d'optimisation ni remis en cause la condition de descente (Eq. 6.1) pour aucun des exercices d'optimisation présentés.

Comme nous l'avons déjà dit, l'essentiel du travail réalisé dans le cadre de cette étude concerne le calcul et la recherche de la direction de descente  $\underline{S}^k$  (étape (3.1) de l'algorithme précédent (Tab. 6.1)). En effet, le calcul de la direction de descente requiert généralement la résolution d'un problème issu de la linéarisation des équations de Navier-Stokes (Eqs. 6.14, 6.17) qui présente les mêmes sources d'instabilité numérique que la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps.

### 6.1.2 Paramétrisation de la géométrie

Avant de résoudre un problème d'optimisation, il est nécessaire de définir des paramètres de contrôle permettant de définir et de modifier la géométrie afin de minimiser la fonction de coût. Nous avons pour cela repris la base du travail de Valentin [136], qui utilise des courbes de Bezier pour décrire la géométrie. Les courbes de Bezier sont définies comme des fonctions paramétriques dépendantes du nombre de points de contrôle :

$$Y(u) = \sum_{l=0}^n y_l B_{l,n}(u) \quad ; \quad B_{l,n}(u) = \frac{n!}{l!(n-l)!} u^l (1-u)^{n-l} \quad ; \quad u \in [0, 1] \quad (6.2)$$

où  $n + 1$  est le nombre de points de contrôle,  $y_l$  la position des points de contrôle et  $B_{l,n}(u)$  est un polynôme de Bernstein.

Les courbes de Bezier sont donc des fonctions polynomiales de degré  $n$  qui ont pour caractéristique de passer aux extrémités par les deux points de contrôle 0 et  $n$ . De plus, la tangente initiale de la courbe interpolée est définie par la droite passant par les deux premiers points de contrôle et la tangente finale par la droite passant par les deux derniers points de contrôle, ce qui permet de définir les pentes au début et à la fin de la courbe. En revanche, compte tenu du degré d'interpolation des polynômes, la position de chaque point de contrôle influence l'ensemble de la courbe et donc ces interpolations ne permettent pas de modification locale de la géométrie. Notons que nous aurions pu utiliser des interpolations de courbes plus évoluées du type B-Spline ou NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) qui permettent de prendre en compte des variations plus localisées de la géométrie.

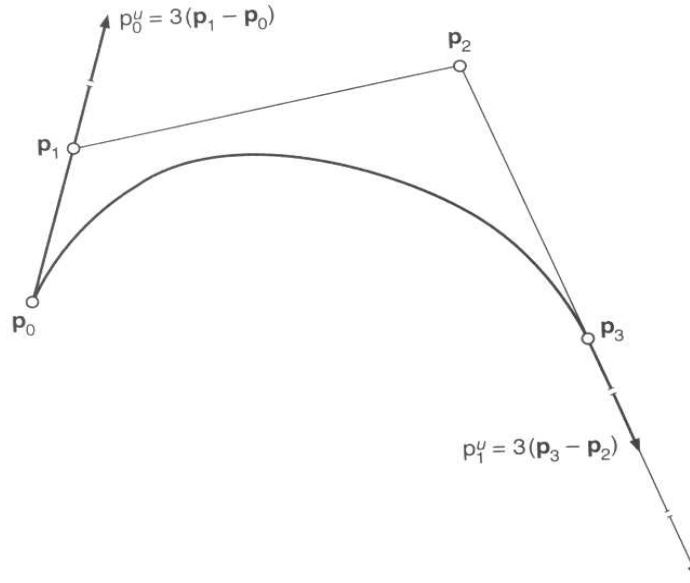


FIG. 6.1 – Exemple de courbe de Bezier cubique avec quatre points de contrôle et les directions des dérivées au début et en fin de courbe [99, p. 86]

Quel que soit le problème d'optimisation, la géométrie initiale ainsi que les points de contrôle des courbes de Bezier sont à chaque fois identiques. Nous nous sommes appuyés sur la tuyère de Détery [32] qui a été modifiée. La tuyère est coupée à l'aval afin de supprimer le second col et la bosse sur la paroi basse a été supprimée (Fig. 6.2). Nous avons repris le cas d'étude présenté initialement par Valentin [136] en paramétrant la paroi basse de la tuyère par neuf points de contrôle équirépartis dans la direction axiale (Fig. 6.2). Afin de garder une pente nulle en entrée et en sortie de la tuyère, les deux premiers et les deux derniers points de contrôle seront fixes. Les variables d'optimisation seront les cinq points de contrôle médians qui seront autorisés à se déplacer uniquement suivant l'axe vertical  $y$ .

### 6.1.3 Calcul de la direction de descente

Nous avons utilisé dans le cadre de ce travail une optimisation sans contrainte. La partie liée à l'optimisation a été développée, dans la thèse de V. Valentin [136]. Néanmoins, nous résumons ici succinctement les algorithmes d'optimisation employés dans cette étude.

La méthode la plus simple pour le calcul de la direction de descente est la méthode dite « de la meilleure pente » :

$$\underline{S}^k = -\underline{\nabla}F(\underline{X}_d^k) \quad (6.3)$$

où  $\underline{S}^k$  est la direction de descente à l'itération d'optimisation  $k$ ,  $\underline{\nabla}F$  le vecteur gradient de la fonction de coût et  $\underline{X}_d^k$  les paramètres d'optimisation. Ce calcul de la pente présente l'avantage d'assurer la condition de réduction (Eq. 6.1) à chaque itération de la boucle d'optimisation. En revanche, nous savons aussi par expérience que la vitesse de convergence de cette méthode est très faible [136].

Afin d'accélérer la convergence, Valentin [136] utilise l'algorithme de Broyden Fletcher Goldfarb et Shanno (BFGS) [30, pp. 71-73]. Cet algorithme caractéristique des algorithmes quasi-Newton<sup>1</sup> utilise les informations

<sup>1</sup>Les méthodes de Newton utilisent un développement de Taylor au second ordre pour la définition de la direction de descente :

$$F(\underline{X}_d) = F(\underline{X}_d^k) + \underline{\nabla}F(\underline{X}_d^k)(\underline{X}_d - \underline{X}_d^k) + \frac{1}{2}(\underline{X}_d - \underline{X}_d^k)^T \underline{\underline{\nabla}}^2 F(\underline{X}_d^k)(\underline{X}_d - \underline{X}_d^k) \quad (6.4)$$

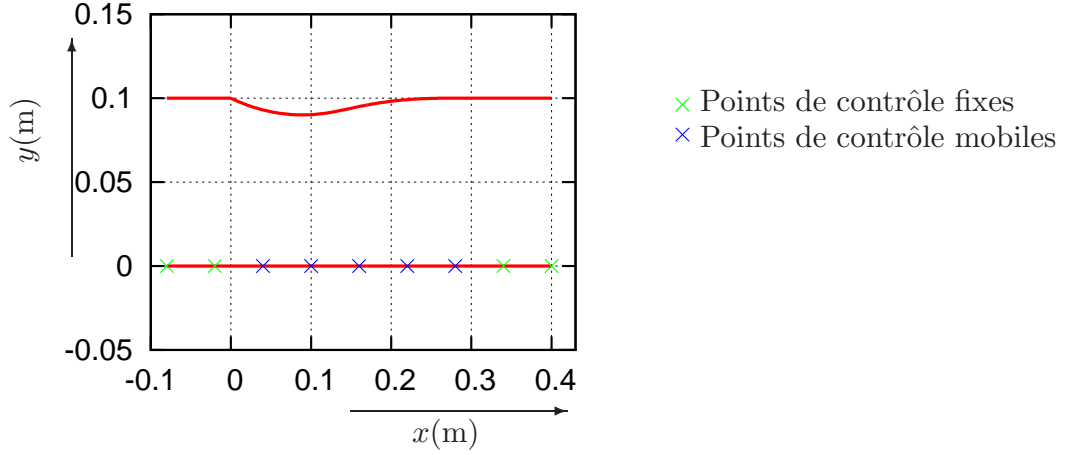


FIG. 6.2 – Géométrie initiale de la tuyère de tous les exercices d'optimisation avec les positions des points de contrôle fixes et mobiles sur la paroi inférieure de la tuyère de Déleroy [32]

disponibles aux itérations d'optimisation  $k$  et  $k - 1$  pour approcher la matrice Hessienne inverse  $H^*$  (Eq. 6.8) nous permettant d'obtenir la direction de descente  $\underline{S}^k$  :

$$\underline{S}^k = -H^{*k} \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k) \quad (6.7)$$

L'algorithme BFGS calcule l'approximation de la matrice Hessienne inverse de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H^{*k} &= H^{*k-1} + \left(1 + \frac{\gamma^T H^{*k-1} \gamma}{\delta^T \gamma}\right) \frac{\delta \delta^T}{\delta^T \gamma} - \left(\frac{\delta \gamma^T H^{*k-1} + H^{*k-1} \gamma \delta^T}{\delta^T \gamma}\right) \\ \delta &= \underline{X}_d^k - \underline{X}_d^{k-1} \\ \gamma &= \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k) - \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^{k-1}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

L'approximation de la matrice Hessienne étant symétrique et définie positive, elle permet d'assurer la condition de descente (Eq. 6.1) :

$$\left(\underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k)\right)^T \cdot \underline{S}^k = - \left(\underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k)\right)^T H^{*k} \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k) \leq 0 \quad (6.9)$$

Il est à noter que dans tous les cas, le calcul de la meilleure pente a toujours été utilisé pour initialiser le processus itératif d'optimisation BFGS.

Dans les deux cas, la méthode de la meilleure pente et le BFGS requièrent l'évaluation du gradient de la fonction de coût en fonction des paramètres d'optimisation. Pour cela, les deux méthodes sont possibles, la méthode des différences finies ou la méthode des sensibilités.

Le vecteur qui minimise la fonction quadratique  $F(\underline{X}_d)$  est le vecteur  $\underline{X}_d^{k+1}$  solution du système linéaire suivant :

$$\underline{\underline{\nabla}}^2 F(\underline{X}_d^k) \underline{X}_d^{k+1} = \underline{\underline{\nabla}}^2 F(\underline{X}_d^k) \underline{X}_d^k - \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k) \quad (6.5)$$

Cela nous donne donc la direction de descente suivante :

$$\underline{S}^k = - \left[\underline{\underline{\nabla}}^2 F(\underline{X}_d^k)\right]^{-1} \underline{\nabla} F(\underline{X}_d^k) \quad (6.6)$$

### La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est la plus simple à mettre en œuvre mais, en contrepartie, la plus chère en temps de calcul. Elle consiste à incrémenter les paramètres de dessin les uns indépendamment des autres et de calculer le champ aérodynamique stationnaire lié à cette nouvelle géométrie. Le gradient est alors déterminé par la relation suivante :

$$\nabla F = \frac{F[\underline{w}(\underline{X}_d + \Delta \underline{X}_d), \underline{\mathfrak{x}}(\underline{X}_d + \Delta \underline{X}_d)] - F[\underline{w}(\underline{X}_d - \Delta \underline{X}_d), \underline{\mathfrak{x}}(\underline{X}_d - \Delta \underline{X}_d)]}{2} \quad (6.10)$$

où  $\underline{w}$  est la valeur du champ aérodynamique et  $\underline{\mathfrak{x}}$  est le vecteur des coordonnées des points du maillage.

Si la géométrie est définie avec NDV paramètres d'optimisation, il est nécessaire d'effectuer  $2 \times \text{NDV}$  calculs stationnaires bien convergés pour obtenir un gradient précis à l'ordre 2. Cette méthode possède l'avantage d'être simple à mettre en œuvre car elle est non intrusive et ne nécessite pas de nouveaux développements numériques. Cependant, lorsque le nombre de degrés de liberté du système est important, le calcul du gradient devient trop coûteux en nombre de calculs stationnaires nécessaires.

De plus, le choix de l'incrémentation pour la modification de la géométrie peut influencer la valeur du gradient. En effet, il ne faut pas que l'incrémentation soit trop petite car, dans ce cas, le calcul du gradient est dépendant de la précision du solveur stationnaire. Par ailleurs, si l'incrémentation est trop importante, le signe du gradient calculé peut s'inverser [6].

### La méthode des sensibilités

Contrairement à la méthode des différences finies, la méthode des sensibilités aérodynamiques ne nécessite plus d'évaluations successives de champs aérodynamiques stationnaires dans chaque dimension de l'espace de recherche. Cette méthode utilise la propriété qu'à convergence du processus itératif du calcul stationnaire, les résidus ainsi que leurs dérivées sont nuls :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}[\underline{w}(\underline{X}_d), \underline{\mathfrak{x}}(\underline{X}_d)] = 0 \\ \frac{d}{d\underline{X}_d} \{ \underline{\mathcal{L}}[\underline{w}(\underline{X}_d), \underline{\mathfrak{x}}(\underline{X}_d)] \} = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

où  $\underline{\mathcal{L}}$  sont les résidus stationnaires.

En développant la seconde partie de l'équation (6.11), le calcul de la dérivée s'obtient par :

$$\left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{w}} \right)_{\underline{\mathfrak{x}}} \left( \frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{X}_d} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{\mathfrak{x}}} \right)_{\underline{w}} \left( \frac{\partial \underline{\mathfrak{x}}}{\partial \underline{X}_d} \right) = 0 \quad (6.12)$$

Cette équation exprime le fait qu'il y a un rééquilibrage du champ aérodynamique réalisé par la modification d'un paramètre de contrôle. En effet, si un paramètre varie, celui-ci va engendrer automatiquement une modification du maillage qui sera à l'origine de fluctuations induites sur le champ aérodynamique calculé.

La fonction de coût aérodynamique  $F$  dépendant des paramètres de dessin  $\underline{X}_d$ , des points du maillages  $\underline{\mathfrak{x}}$  ainsi que du champ aérodynamique stationnaire  $\underline{w}$ , son gradient peut s'écrire de la façon suivante :

$$\nabla F(\underline{X}_d, \underline{\mathfrak{x}}, \underline{w}) = \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathfrak{x}}} \right)_{\underline{w}, \underline{X}_d}^T \left( \frac{\partial \underline{\mathfrak{x}}}{\partial \underline{X}_d} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{w}} \right)_{\underline{\mathfrak{x}}, \underline{X}_d}^T \left( \frac{\partial \underline{w}}{\partial \underline{X}_d} \right) \quad (6.13)$$

Il existe deux méthodes pour calculer le gradient de la fonction de coût par la méthode des sensibilités. La méthode directe est fondée sur une évaluation explicite des sensibilités dans toutes les directions de l'espace de recherche, alors que la méthode adjointe utilise la théorie du contrôle développée par Lions [90].

### La méthode directe

La méthode directe, calculant explicitement les sensibilités de la fonction de coût en fonction de chaque variable de dessin, nous amène donc à la résolution de NDV systèmes linéaires de la forme :

$$\left( \frac{\partial w}{\partial X_d} \right) = - \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial w} \right)_{\underline{x}}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{w}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) \quad (6.14)$$

Le gradient peut ainsi être reconstitué pour chaque variable de dessin :

$$\underline{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial X_d} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{w}, X_d}^T \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)_{\underline{x}, X_d}^T \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial w} \right)_{\underline{x}}^{-1} \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{w}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) \quad (6.15)$$

La méthode directe s'appuie donc essentiellement sur la linéarisation des flux telle qu'elle a été réalisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps.

### La méthode adjointe

La méthode adjointe utilise les vecteurs de Lagrange  $\underline{\lambda}$  afin d'introduire, sous la forme de contraintes, la dérivée du vecteur des résidus dans le gradient de la fonction de coût :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} F &= \left( \frac{\partial F}{\partial X_d} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \right)^T \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)^T \left( \frac{\partial w}{\partial X_d} \right) - \underline{\lambda}^T \left\{ \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial w} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial X_d} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{x}} \right) \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) \right\} \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial X_d} \right) + \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} \right)^T - \underline{\lambda}^T \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{x}} \right) \right\} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_d} \right) + \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)^T - \underline{\lambda}^T \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial w} \right) \right\} \left( \frac{\partial w}{\partial X_d} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le vecteur de Lagrange peut être choisi, tel que nous le désirons, en particulier, de manière à annuler le terme dépendant des sensibilités aérodynamiques, c'est-à-dire :

$$\underline{\lambda} = - \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial w} \right)_{\underline{x}}^{-T} \left( \frac{\partial F}{\partial w} \right)_{\underline{x}, X_d} \quad (6.17)$$

La méthode adjointe ne peut pas s'appuyer uniquement sur la linéarisation de flux précédente. En effet, d'un point de vue numérique, la principale différence avec la méthode directe réside dans la résolution de la linéarisation des flux transposés au lieu de la matrice issue directement de la linéarisation des flux (Eq. 6.17).

## 6.2 Discrétisation et résolution

### 6.2.1 Discrétisation des flux aérodynamiques et sensibilité du maillage

#### Discrétisation des flux convectifs et visqueux

Que ce soit pour la méthode directe ou adjointe, nous nous sommes appuyés sur la même discrétisation des flux. Comme pour la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps, deux approches sont possibles, l'approche continue ou l'approche discrète (*cf.* § 4.1). Dans le cas de la méthode directe, cela ne pose pas de problème. En revanche, il semble exister une limitation dans le cas de la résolution de l'équation adjointe [51]. On peut citer Giles et Pierce [51], [49] pour la définition des conditions aux limites, Jameson [74], Nadarajah et Jameson [101] dans une étude comparative entre les deux méthodes de linéarisation, Soemoarwoto [128], Anderson et Venkatakrisnan [5], Hiernaux et Essers [66], Eyal et Salas [36] et Baysal et Ghayour [9] pour une généralisation des conditions aux limites, utilisent une linéarisation continue des flux, c'est-à-dire avant l'application du schéma spatial.

En nous appuyant sur le travail de linéarisation précédent, nous avons choisi de linéariser nos flux après l'application de l'opérateur spatial, soit de manière discrète. A cela plusieurs raisons, tout d'abord même si de nouveaux développements, en particulier [36] et [9], montrent une généralisation possible des conditions aux limites dans le cas d'une linéarisation continue, à notre connaissance aucune limitation des conditions aux limites dans le cadre d'une linéarisation discrète n'est connue à ce jour. Donc la formulation algébrique qui consiste à calculer la matrice jacobienne et ensuite de lui inclure les conditions aux limites [35] ne semble pas être fautive mathématiquement, même si la relation entre les deux méthodes discrète et continue n'est pas encore claire [5]. De plus, la différenciation des équations de Navier-Stokes discrètes nous garantit la cohérence et la précision entre la phase stationnaire et la phase de calcul de la direction de descente (Tab. 6.1). Et enfin nous nous sommes appuyés sur la linéarisation des équations de Navier-Stokes réalisée par Haugeard [63], Imhof [69], Chassaing [17] et Valentin [136] qui ont largement testé la linéarisation du schéma à capture de choc de Van Leer dans le cas des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps et dans le cadre de différents exercices d'optimisation d'aubages de turbomachines.

### Sensibilités des points du maillage

De par leur nature, les méthodes directe et adjointe prennent en compte la variation des points de coordonnées d'un maillage dans le rééquilibrage du champ aérodynamique. Cependant, elles nécessitent de tenir compte de l'influence d'une modification d'un des paramètres de dessin sur le maillage. Pour cela, nous avons repris les travaux de Chassaing [17] et Valentin [136] sur le mouvement du maillage. Ces derniers calculent le déplacement du maillage en fonction de la déformation de la géométrie par la résolution de l'opérateur laplacien suivant les coordonnées curvilignes avec une solution découplée pour les deux vecteurs  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$  et  $\underline{y} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$  par une méthode d'avancement pseudo-temporelle :

$$\begin{cases} \left[ \mathcal{J} - \Delta t \frac{\partial {}^0 \mathcal{D}^\xi}{\partial \underline{x}} \right] \left[ \mathcal{J} - \Delta t \frac{\partial {}^0 \mathcal{D}^\eta}{\partial \underline{x}} \right] \left[ \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_d} \right)^{n+1} - \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_d} \right)^n \right] \cong \Delta t {}^0 \mathcal{D} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_d} \right)^n \\ \left[ \mathcal{J} - \Delta t \frac{\partial {}^0 \mathcal{D}^\xi}{\partial \underline{y}} \right] \left[ \mathcal{J} - \Delta t \frac{\partial {}^0 \mathcal{D}^\eta}{\partial \underline{y}} \right] \left[ \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{X}_d} \right)^{n+1} - \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{X}_d} \right)^n \right] \cong \Delta t {}^0 \mathcal{D} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{X}_d} \right)^n \end{cases} \quad (6.18)$$

où  ${}^0 \mathcal{D}$  est l'opérateur laplacien<sup>2</sup> et le pas de temps est  $\Delta t$ <sup>3</sup>.

Les conditions aux limites sont appliquées explicitement sur les frontières de notre domaine de calcul. En entrée, en sortie et sur la paroi supérieure, les mouvements du maillages sont supposés nuls. Sur la paroi inférieure, nous devons imposer les conditions aux limites qui correspondent à un mouvement dans la direction  $y$  du point de contrôle  $l$  :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \underline{x}_{i,1}}{\partial \underline{X}_d} \right) = 0 \\ \left( \frac{\partial \underline{y}_{i,1}}{\partial \underline{X}_d} \right)_l = B_{l,NDV}(u) \end{cases} \quad (6.21)$$

<sup>2</sup>L'opérateur s'exprime en fonction des coordonnées curvilignes :

$${}^0 \mathcal{D}(\cdot) = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial {}^0 \underline{x}}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^0 \underline{y}}{\partial \eta} \right)^2 \right]}_{{}^0 \text{A}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial {}^0 \underline{x}}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial {}^0 \underline{x}}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{\partial {}^0 \underline{y}}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial {}^0 \underline{y}}{\partial \eta} \right) \right]}_{{}^0 \text{B}} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial {}^0 \underline{x}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^0 \underline{y}}{\partial \xi} \right)^2 \right]}_{{}^0 \text{C}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (6.19)$$

avec  $(\xi, \eta)$  les coordonnées curvilignes.

<sup>3</sup>Le pas de temps pour une équation de Laplace est calculé [17] :

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{1}{2} \frac{({}^0 \text{A} + {}^0 \text{C})}{({}^0 \text{A} + {}^0 \text{C})({}^0 \text{A} + {}^0 \text{C}) + {}^0 \text{B}^2} \quad (6.20)$$

avec un CFL de 50.



## 6.2.2 Conditions aux limites

Pour la résolution de l'équation directe (Eq. 6.15), l'application des conditions aux limites ne pose pas de difficulté particulière. Les équations à résoudre résultant d'une linéarisation directe des équations de Navier-Stokes stationnaires, les conditions aux limites sont la linéarisation des conditions aux limites stationnaires. En revanche, comme nous l'avons expliqué précédemment (*cf.* § 6.2.1), l'application des conditions aux limites pour la résolution de l'équation adjointe (qui utilise la théorie du contrôle) ne semble pas évidente [5].

Quelle que soit la méthode utilisée, directe ou adjointe, nous appliquerons les mêmes conditions aux limites. Ces dernières sont du même type que celles utilisées pour la résolution des équations harmoniques et linéarisées en temps (*cf.* § 4.2.3). L'unique différence concerne les conditions de sortie de la tuyère, où la condition de fluctuation de pression a été remplacée par une condition de non-reflexion d'Hedström [65].

## 6.2.3 Résolution des systèmes linéaires

### Résolution du système linéaire de la méthode directe

Pour la méthode directe (Eq. 6.15), nous devons résoudre autant d'équations que de paramètres d'optimisation. Nous avons donc décidé dans un premier temps d'utiliser une résolution GMRes\_noptm pour une résolution indépendante de chaque système linéaire. Mais comme nous l'avons vu dans le second chapitre (§ 2.2.3), il existe différentes méthodes de Krylov permettant de résoudre plusieurs systèmes linéaires simultanément avec une matrice identique et différents vecteurs dans le second membre. Nous avons donc, dans un second temps, utilisé la méthode MGMRES décrite dans le second chapitre de cette thèse (Al. 6) pour un problème d'optimisation direct sans introduction d'un pas de temps fictif (MGMRes\_noptm). Ainsi nous n'avons pas de surcoût en temps de calcul pour la résolution de NDV systèmes linéaires par rapport à la résolution au cas de la méthode adjointe où nous n'avons qu'un seul système linéaire à résoudre. Le schéma de résolution de l'équation directe par une résolution MGMRES sans introduction d'un pseudo-pas de temps est donné dans l'algorithme suivant (Al. 14).

---

**Algorithme 14** Schéma de résolution de l'équation d'optimisation directe : MGMRes\_noptm\_drct

---

- Initialisation du vecteur des paramètres dessin :  $\underline{X}_d^0$
  - Calcul des variables aérodynamiques et de la fonction de coût :  $\underline{w}$  et  $F^0(\underline{X}_d^0, \underline{x}, \underline{w})$
  - For** IT\_design = 1, 2, ..., jusqu'à convergence **Do** :
    - ▶ Calcul des sensibilités aux maillages :  $\underline{b}_l = \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{w}} \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_d^l} \right)$ ,  $l = 1, \text{NDV}$
    - ▶ Calcul de la matrice :  $A^* = \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{w}} \right)_{\underline{x}} = \text{div} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^C}{\partial \underline{w}} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^V}{\partial \underline{w}} \right) \right]$
    - ▶ Application des conditions aux limites :  $A = \mathfrak{BC}[A^*]$  ;  $B = \mathfrak{bc}[\underline{b}_l, l = 1, \text{NDV}]$
    - ▶ Calcul du préconditionnement :  $M \leftarrow \text{ILU0}[A]$
    - ▶ Résolution des systèmes linéaires ( $AM^{-1}MX = B$ ) par l'algorithme (Al. 6)
    - ▶ Calcul du gradient (Eq. 6.15)
    - ▶ Calcul de la direction de descente par la méthode de la meilleure pente ou BFGS
    - ▶ Calcul des nouveaux paramètres de dessin :
 
$$\underline{X}_d^{\text{IT\_design}} = \underline{X}_d^{\text{IT\_design-1}} + \alpha^{\text{IT\_design}} \cdot \underline{G}^{\text{IT\_design}}$$
    - ▶ Calcul des nouvelles variables aérodynamiques et de la nouvelle fonction de coût :  $\underline{w}$  et  $F^{\text{IT\_design}}$
- End for**
- 

De plus, étant donné la nature du vecteur à droite (à la différence du vecteur à droite des équations de Navier-Stokes harmoniques et linéarisées en temps dans le cas présent, les valeurs non nulles sont réparties sur l'ensemble du vecteur), le vecteur d'initialisation de l'algorithme de Krylov est un vecteur nul.

### Résolution du système linéaire de la méthode adjointe

Comme nous l'avons déjà dit précédemment, la principale difficulté du point de vue de la mise en œuvre numérique de la méthode adjointe réside dans la résolution d'un système linéaire issu de la linéarisation des flux transposés. Nous avons donc décidé de ne pas calculer le produit matrice vecteur de l'algorithme de Krylov avec une linéarisation à chaque itération de Krylov, mais de stocker la matrice transposée. De plus, aucune restriction sur les conditions aux limites pour la résolution de l'équation adjointe discrète ne semble être connue [5], nous les avons donc incluses dans la matrice avant le calcul de la transposée [136].

Le schéma de résolution de l'équation adjointe par la méthode GMRes\_noptm\_adj est donné dans l'algorithme 15).

---

#### Algorithme 15 Schéma de résolution de l'équation d'optimisation adjointe : GMRes\_noptm\_adj

---

- Initialisation du vecteur des paramètres dessin :  $\underline{X}_d^0$
  - Calcul des variables aérodynamiques et de la fonction de coût :  $\underline{w}$  et  $F^0(\underline{X}_d^0, \underline{x}, \underline{w})$
  - For** IT\_design = 1, 2, ..., jusqu'à convergence **Do** :
    - ▶ Calcul des sensibilités aux maillages :  $\underline{b} = \frac{\partial F}{\partial \underline{w}}$
    - ▶ Calcul de la matrice :  $A^* = \left( \frac{\partial \underline{\mathcal{L}}}{\partial \underline{w}} \right)_{\underline{x}} = \text{div} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^C}{\partial \underline{w}} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{F}}^V}{\partial \underline{w}} \right) \right]$
    - ▶ Application des conditions aux limites :  $A = \mathfrak{BC}[A^*]$  ;  $\underline{b} = -\mathfrak{bc}[\underline{b}]$
    - ▶ Transposition de la matrice :  $A = A^T$
    - ▶ Calcul du préconditionnement :  $M \leftarrow \text{ILU0}[A]$
    - ▶ Résolution des systèmes linéaires ( $AM^{-1}M\underline{\lambda} = \underline{b}$ ) par l'algorithme (Al. 5)
    - ▶ Calcul du gradient (Eq. 6.16)
    - ▶ Calcul de la direction de descente par la méthode de la meilleure pente ou BFGS
    - ▶ Calcul des nouveaux paramètres de dessin :
 
$$\underline{X}_d^{\text{IT\_design}} = \underline{X}_d^{\text{IT\_design-1}} + \alpha^{\text{IT\_design}} \cdot \underline{S}^{\text{IT\_design}}$$
    - ▶ Calcul des nouvelles variables aérodynamiques et de la nouvelle fonction de coût :  $\underline{w}$  et  $F^{\text{IT\_design}}$
- End for**
- 

D'un point de vue numérique, pour les mêmes raisons que pour les équations linéarisées et harmoniques en temps, le vecteur initial ne peut être le vecteur nul. Nous avons donc décidé de prendre comme vecteur d'initialisation le vecteur nul modifié sur sa dernière composante par 1.

## 6.3 Résultats pour un problème inverse

Le premier problème d'optimisation résolu dans cette étude concerne un problème d'optimisation inverse. Dans le cas de l'optimisation de forme d'une tuyère, il s'agit par exemple de modifier une géométrie pour retrouver la distribution objectif d'une grandeur aérodynamique sur les parois. Ce problème n'aurait théoriquement pas besoin d'un calcul des sensibilités aérodynamiques. Mohammadi et Pironneau [98] propose une méthode d'optimisation basée sur le gradient incomplet qui s'affranchit du calcul du gradient aérodynamique représentant sans doute la partie la plus importante en temps de calcul d'un algorithme de descente. Notons cependant que cette approche, qui est limitée à un problème basé sur une fonction de coût calculée à partir d'une intégrale de surface ne peut être étendue à l'ensemble des problèmes d'optimisation.

### 6.3.1 Ecoulements aérodynamiques dans les tuyères initiale et objectif

Dans le cadre de cet exercice, nous resterons dans le cas d'écoulement subsonique, cela afin d'éviter les problèmes liés à l'algorithme d'optimisation [73]. La répartition de pression demandée est la répartition de pression issue de l'écoulement subsonique présenté au paragraphe (3.5.2), dont les conditions aux limites sont données dans le

tableau (3.2).

Afin de réduire le temps de calcul et l'espace mémoire nécessaire, les maillages utilisées dans les exercices d'optimisation, que ce soit pour les tuyères initiale, intermédiaires ou objectif, sont des maillages identiques de  $N_i \times N_j = 201 \times 81$ . Cette limitation de la taille du maillage nous permet aussi de pouvoir comparer les résultats issus d'une résolution de Krylov avec les résultats issus d'une résolution LU\_bande.

Les évolutions des grandeurs aérodynamiques des géométries initiale et recherchée sont illustrées dans la figure 6.3.

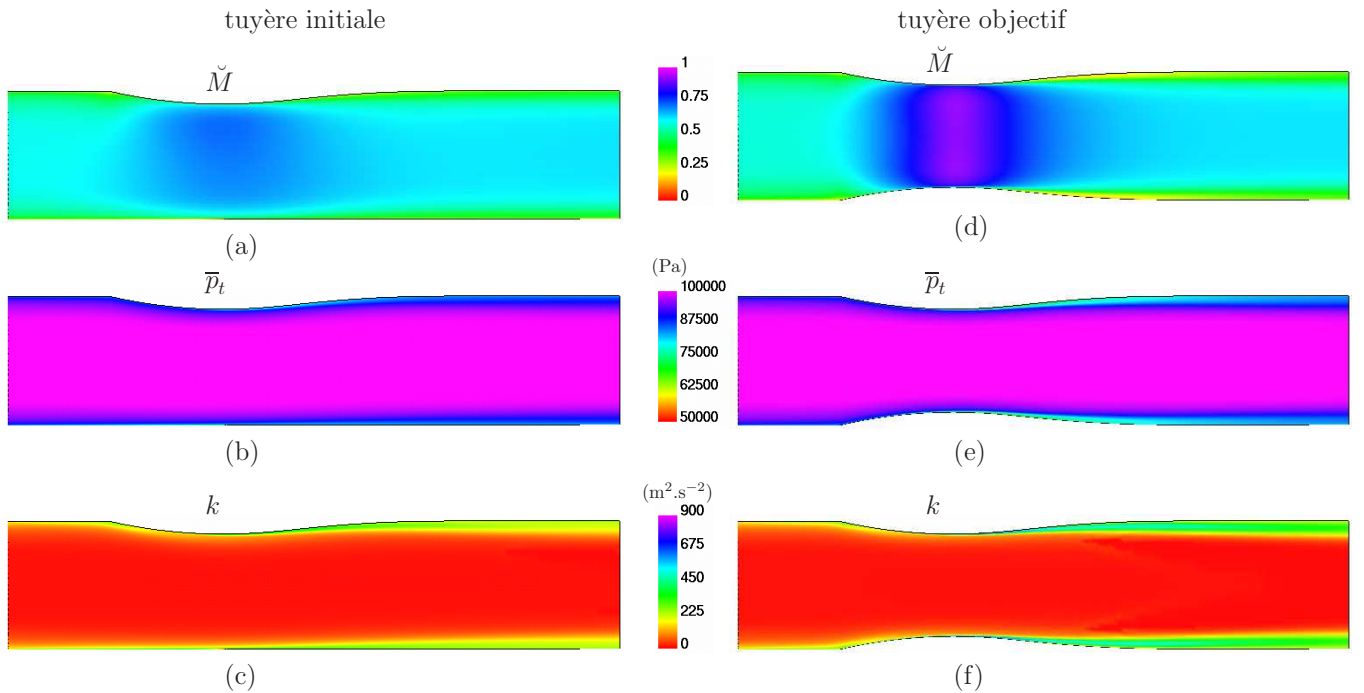


FIG. 6.3 – Evolution du nombre de Mach ( $\check{M}$ ), de la pression totale ( $\bar{p}_t$ ) et de l'énergie cinétique turbulente  $k$  dans les tuyères initiale (a-b-c) et objectif (d-e-f)

### Fonction de coût

Dans le cas du problème inverse, la fonction est basée sur l'intégrale de la pression sur la paroi inférieure de la tuyère :

$$F(\underline{w}(\underline{X}_d), \underline{\mathbf{x}}(\underline{X}_d)) = \frac{1}{L} \left[ \int_0^L \left( \frac{\bar{p} - \bar{p}_{req}}{\bar{p}_{req}} \right)^2 dx \right]_{i,1} \quad (6.22)$$

où  $\bar{p}_{req}$  est la pression de la tuyère objectif et  $L$  désigne la longueur axiale de la tuyère. Ce type de fonction de coût est très largement utilisé pour un grand nombre d'exercices d'optimisation [28, 50, 51, 74–77, 98, 101].

### 6.3.2 Convergence pour une résolution GMRes\_noptm\_drct

Dans le cadre de cet exercice, cinq systèmes linéaires doivent être résolus indépendamment les uns des autres, bien qu'ils aient la même matrice. C'est pourquoi nous nous sommes limités pour cette étude à la première itération d'optimisation (IT\_design = 1). Ce premier exercice nous permet de valider notre processus de résolution de l'équation d'optimisation directe par l'algorithme de Krylov GMRes\_noptm\_drct.

La figure (6.4) présente l'historique de la convergence pour chaque paramètre d'optimisation, où :

$$e_{\text{GMRES\_noptm\_drct}} = \text{Log}_{10} \| \underline{A} \underline{x}_{\text{GMRES\_noptm\_drct}} - \underline{b}_{\text{GMRES\_noptm\_drct}} \| \quad (6.23)$$

Le calcul est réalisé avec 500 vecteurs pour la base de Krylov et nécessite 1.1 GB de mémoire, ce qui représente 20 % d'espace mémoire en moins par rapport à une résolution LU\_bande (1.39 GB). Notons que le niveau de convergence aurait été amélioré en augmentant la dimension de la base de Krylov. Cependant, après 250 itérations, la convergence est réalisée uniquement par palier.

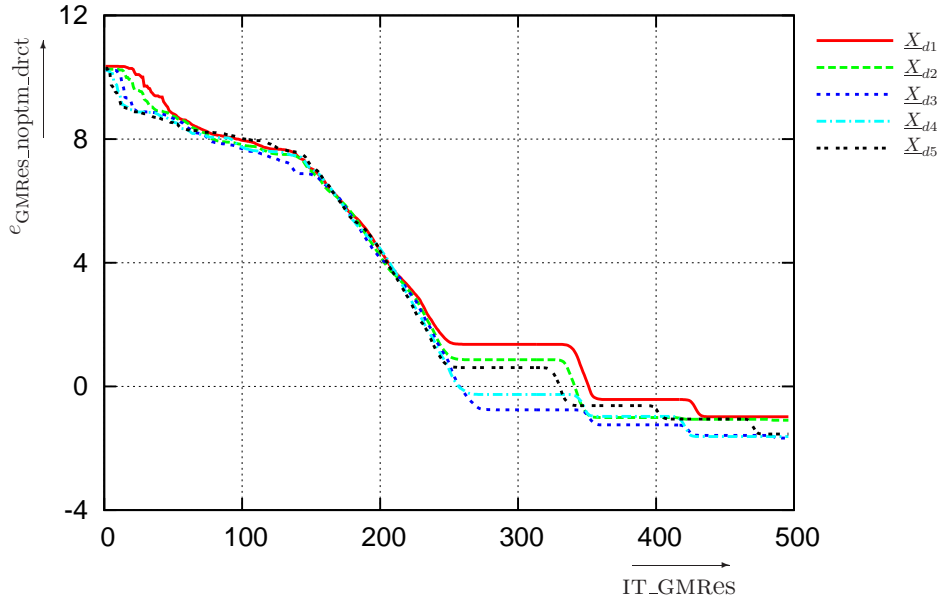


FIG. 6.4 – Convergence de la résolution du calcul de chaque sensibilité aérodynamique à l'itération d'optimisation  $IT\_design = 1$  pour  $GMRES\_noptm\_drct$  du problème inverse

Le maillage utilisé ( $Ni \times Nj = 201 \times 81$ ) est suffisamment lâche pour nous permettre de résoudre les systèmes linéaires de l'équation directe par un algorithme LU\_bande. Nous pouvons ainsi comparer les résultats obtenus par résolution GMRES\_noptm et par résolution LU\_bande pour la valeur du gradient de chaque paramètre d'optimisation. Pour cela, le paramètre adimensionnel suivant est défini :

$$\Delta_{LU/GMRES} \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right) = \left| \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right)_{GMRES} - \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right)_{LU}}{\left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right)_{LU}} \right| \times 100 \quad (6.24)$$

Malgré un faible niveau de convergence, de deux ordres de grandeur (Fig. 6.4), la valeur du gradient obtenue est tout à fait satisfaisante (Tab. 6.2).

	$\underline{X}_{d1}$	$\underline{X}_{d2}$	$\underline{X}_{d3}$	$\underline{X}_{d4}$	$\underline{X}_{d5}$
$\left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right)_{GMRES}$	$-0.21728 \times 10^{-1}$	$-0.24903 \times 10^{-1}$	$-0.15996 \times 10^{-1}$	$-0.55679 \times 10^{-2}$	$-0.36909 \times 10^{-3}$
$\Delta_{LU/GMRES} \left( \frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d} \right)$	0.0001 %	0.0002 %	0.0008 %	0.0002 %	0.0004 %

TAB. 6.2 – Différence adimensionnée du gradient calculé entre une résolution LU\_bande\_drct et une résolution GMRES\_noptm\_drct à l'itération d'optimisation  $IT\_design = 1$  pour le problème inverse

Nous n'avons pas réalisé de test sur une éventuelle convergence avec redémarrage. Le but était de réaliser cette étude de faisabilité de la résolution GMRES\_noptm\_drct.

### 6.3.3 Convergence pour une résolution `MGMRes_noptm_drct`

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous avons appliqué la méthode de résolution `MGMRes` (Al. 6) pour la résolution de l'équation d'optimisation directe (Eq. 6.14) avec plusieurs paramètres d'optimisation sans introduction d'un pseudo-pas de temps. Nous constatons qu'avec une base de taille identique, 500 vecteurs, nous obtenons une convergence, à la première itération d'optimisation  $IT\_desgin = 1$ , plus élevée de l'ordre de 3 pour une résolution `MGMRes_noptm_drct` que pour une résolution `GMRes_noptm_drct` (Figs 6.4-6.5). Néanmoins, cette différence de niveau de convergence ne fait pas varier la valeur du gradient de la fonction de coût pour chacun des paramètres d'optimisation. En effet, les valeurs du gradient de la résolution `GMRes_noptm_drct` et `MGMRes_noptm_drct` sont identiques à la première itération d'optimisation (Tab. 6.2-6.3).

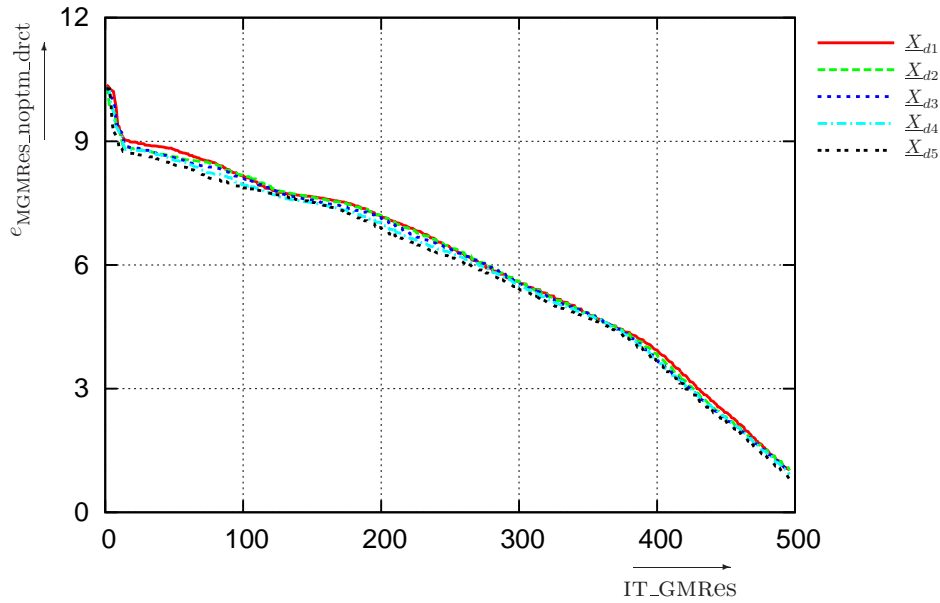


FIG. 6.5 – Convergence de la résolution du calcul de chaque sensibilité aérodynamique à l'itération d'optimisation  $IT\_design = 1$  pour `MGMRes_noptm_drct` du problème inverse

	$\underline{X}_{d1}$	$\underline{X}_{d2}$	$\underline{X}_{d3}$	$\underline{X}_{d4}$	$\underline{X}_{d5}$
$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)_{MGMRes}$	$-0.21728 \times 10^{-1}$	$-0.24903 \times 10^{-1}$	$-0.15996 \times 10^{-1}$	$-0.55679 \times 10^{-2}$	$-0.36909 \times 10^{-3}$
$\Delta_{LU/MGMRes} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0001 %	0.0002 %	0.0008 %	0.0002 %	0.0004 %

TAB. 6.3 – Différence adimensionnée du gradient calculé par l'équation directe entre une résolution `LU_bande_drct` et une résolution à l'itération d'optimisation  $IT\_design = 1$  pour le problème inverse `MGMRes_noptm_drct`

### Convergence de l'algorithme d'optimisation BFGS

Afin de tester l'algorithme BFGS, dans le cas d'une résolution `MGMRes_noptm_drct`, nous avons réalisé plusieurs itérations  $IT\_design$  afin d'obtenir la convergence du processus d'optimisation pour le problème inverse. La figure (6.6) présente les évolutions de la fonction de coût, du gradient  $\nabla F$  et de la valeur de la pondération de la courbe de Bezier de chaque paramètre d'optimisation. Nous constatons qu'à la fin du processus d'optimisation ( $it\_design=16$ ) la première condition d'optimalité ( $\nabla F = 0$ ) est bien respectée (Figs. 6.6(a)-(b)). Notons par ailleurs qu'il est nécessaire d'effectuer au moins une dizaine d'itérations  $IT\_design$  pour faire converger les processus d'optimisation. Le pic observé de la fonction de coût lors de l'itération  $IT\_design=6$  est relatif au

mauvais choix du paramètre de relaxation de l'algorithme BFGS ( $\alpha_k = 1$ ) mais la condition de descente (Eq. 6.1) n'a pas été mise en cause.

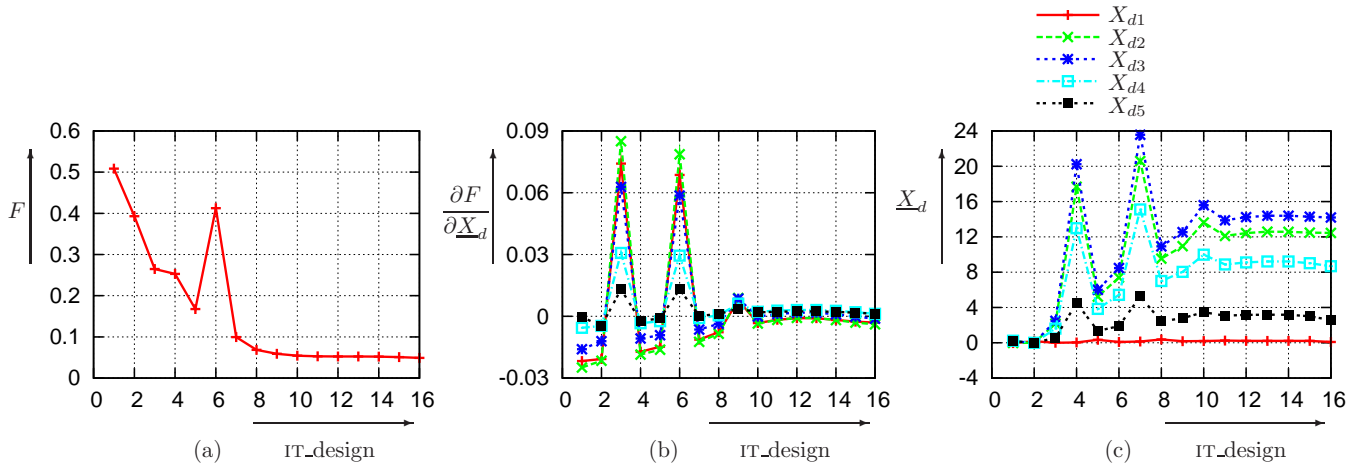


FIG. 6.6 – Convergence de l'algorithme d'optimisation BFGS pour le problème inverse avec à chaque itération d'optimisation pour une résolution MGRMes pour (a) la fonction de coût, (b) le gradient par rapport à chaque variable et (c) la valeur de tous les paramètres d'optimisation

### Champ aérodynamique à convergence de l'algorithme d'optimisation

Nous observons un accord entre les distributions du nombre Mach isentropique et donc de la pression sur les parois haute et basse de la tuyère (Fig. 6.7). La différence la plus importante se situe au niveau du début de la bosse probablement en raison du fait que les courbes de Bezier ne peuvent pas reproduire la rupture de pente brusque créée par le « bord d'attaque » sur la paroi inférieure (Fig. 6.7). Pour améliorer les résultats à convergence, de par leurs propriétés intrinsèques, nous aurions pu augmenter le nombre de points de contrôle de la courbe de Bezier. Une autre possibilité consisterait à utiliser une représentation (B\_spline ou NURBS) qui permet une modification plus locale de la géométrie.

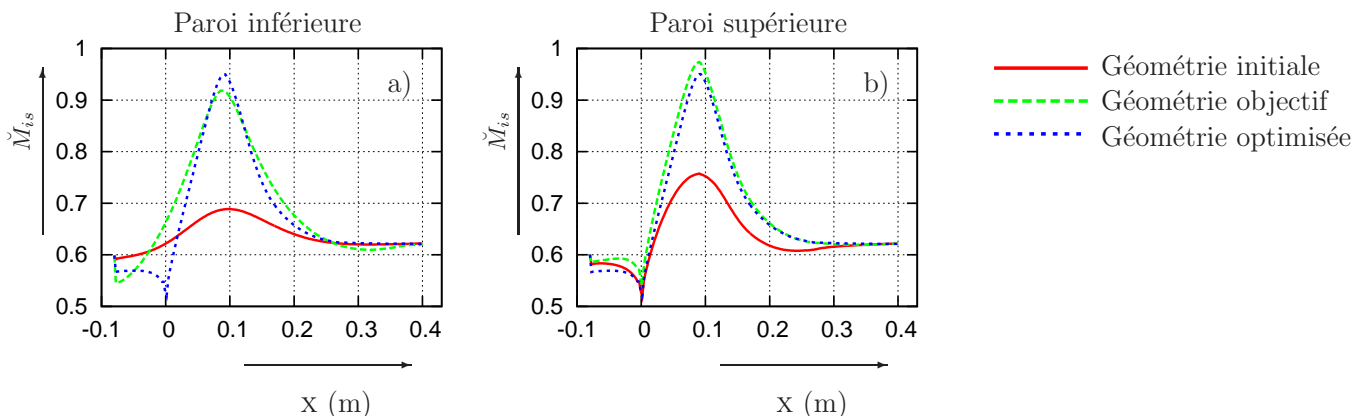


FIG. 6.7 – Evolution Mach isentropique sur les parois inférieure (a) et supérieure (b) de la tuyère pour la géométrie initiale (Fig. 6.3), optimisée et objectif (Fig. 6.3)

### 6.3.4 Convergence pour une résolution GMRes\_noptm\_adjt

L'algorithme GMRes\_noptm a ensuite été testé pour la résolution de la première itération d'optimisation du problème inverse avec l'équation adjointe. La réduction des résidus est de onze ordres de grandeur avec une base de 500 vecteurs (Fig. 6.8). Nous remarquons que la convergence s'effectue principalement au cours des 250 premières itérations. Par ailleurs, bien qu'à la fin du processus itératif de Krylov le niveau de convergence de la résolution GMRes\_noptm\_adjt soit meilleur que le niveau de convergence de la résolution GMRes\_noptm\_drct, la diminution entre les résidus initiaux et les résidus finaux au cours du processus itératif reste identique entre les deux méthodes.

$$\Delta e_{\text{GMRES\_noptm\_drct}} = \Delta e_{\text{GMRES\_noptm\_adjt}} = 14 \quad (6.25)$$

où  $\Delta e_{\text{GMRES\_noptm\_drct}} = e_{\text{GMRES\_noptm\_drct}}(\text{IT\_GMRES} = 500) - e_{\text{GMRES\_noptm\_drct}}(\text{IT\_GMRES} = 0)$ . Cette remarque s'explique par le fait que le conditionnement des matrices est presque identique pour la matrice originale et la matrice transposée.

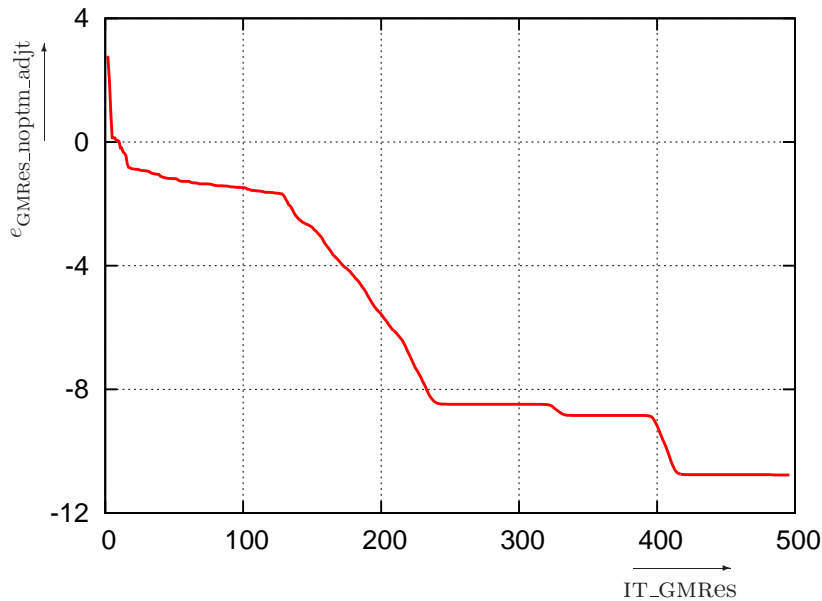


FIG. 6.8 – Convergence de la résolution du calcul de chaque sensibilité aérodynamique à l'itération d'optimisation  $\text{IT\_design} = 1$  pour GMRes\_noptm\_adjt du problème inverse

Nous avons aussi comparé les résultats du gradient de la résolution de GMRes\_noptm\_adjt avec la résolution LU\_bande de l'équation adjointe (LU\_bande\_adjt) ainsi que la résolution LU\_bande\_drct (Tab. 6.4). Nous en concluons un très bon accord général pour tous les points de contrôle considérés quelles que soient les méthodes d'optimisation et de résolution.

	$\underline{X}_{d1}$	$\underline{X}_{d2}$	$\underline{X}_{d3}$	$\underline{X}_{d4}$	$\underline{X}_{d5}$
$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)_{\text{GMRES}}$	$-0.21728 \times 10^{-1}$	$-0.24903 \times 10^{-1}$	$-0.15996 \times 10^{-1}$	$-0.55679 \times 10^{-2}$	$-0.36909 \times 10^{-3}$
$\Delta_{\text{LU/MGMRES}}^{\text{Directe}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0001 %	0.0002 %	0.0008 %	0.0002 %	0.0004 %
$\Delta_{\text{LU/MGMRES}}^{\text{Adjointe}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0001 %	0.0002 %	0.0008 %	0.0002 %	0.0004 %

TAB. 6.4 – Différence adimensionnée du gradient calculé par l'équation directe entre une résolution LU\_bande\_drct, LU\_bande\_adjt et MGMRES\_noptm\_adjt à l'itération d'optimisation  $\text{IT\_design} = 1$  pour le problème inverse

## 6.4 Résultats pour un problème de minimisation des pertes

Afin d'illustrer l'intérêt de notre méthode en nous affranchissant d'une fonction de coût basée sur une intégrale de surface, pour laquelle la méthode proposée par Mohammadi et Pironneau [98] des gradients incomplets peut être utilisée, nous avons défini un nouveau problème avec une nouvelle fonction de coût.

### 6.4.1 Fonction de coût

Ce second problème d'optimisation a pour but de minimiser les pertes entre l'entrée et la sortie de la tuyère. Pour cela, la fonction de coût est basée sur l'accroissement d'entropie à travers la tuyère :

$$F(\underline{w}(\underline{X}_d), \underline{X}(\underline{X}_d)) = \frac{1}{\Delta y_{\text{aval}}} \int_{s_{\text{aval}}} \check{s} dy - \frac{1}{\Delta y_{\text{amont}}} \int_{s_{\text{amont}}} \check{s} dy \quad (6.26)$$

Nous aurions dû en toute rigueur pondérer les intégrales par le débit massique. De plus, les variations du maillage proche des frontières amont et aval de la tuyère étant quasiment nulles, elles sont négligées, ce qui simplifie sensiblement l'écriture du gradient de la fonction de coût [136].

### 6.4.2 Convergence pour une résolution de la méthode directe

Nous pouvons faire les mêmes remarques que pour l'exercice d'optimisation inverse. Les méthodes `GMRes_noptm_drct` et `MGMRes_noptm_drct` convergent avec une différence de trois ordres de grandeur (Fig. 6.9). De plus, quel que soit le problème d'optimisation (problème inverse ou problème de minimisation des pertes), la première matrice étant seulement dépendante du champ aérodynamique de la géométrie initiale, la convergence des premières itérations d'optimisation sont identiques (Figs. 6.4-6.5-6.9).

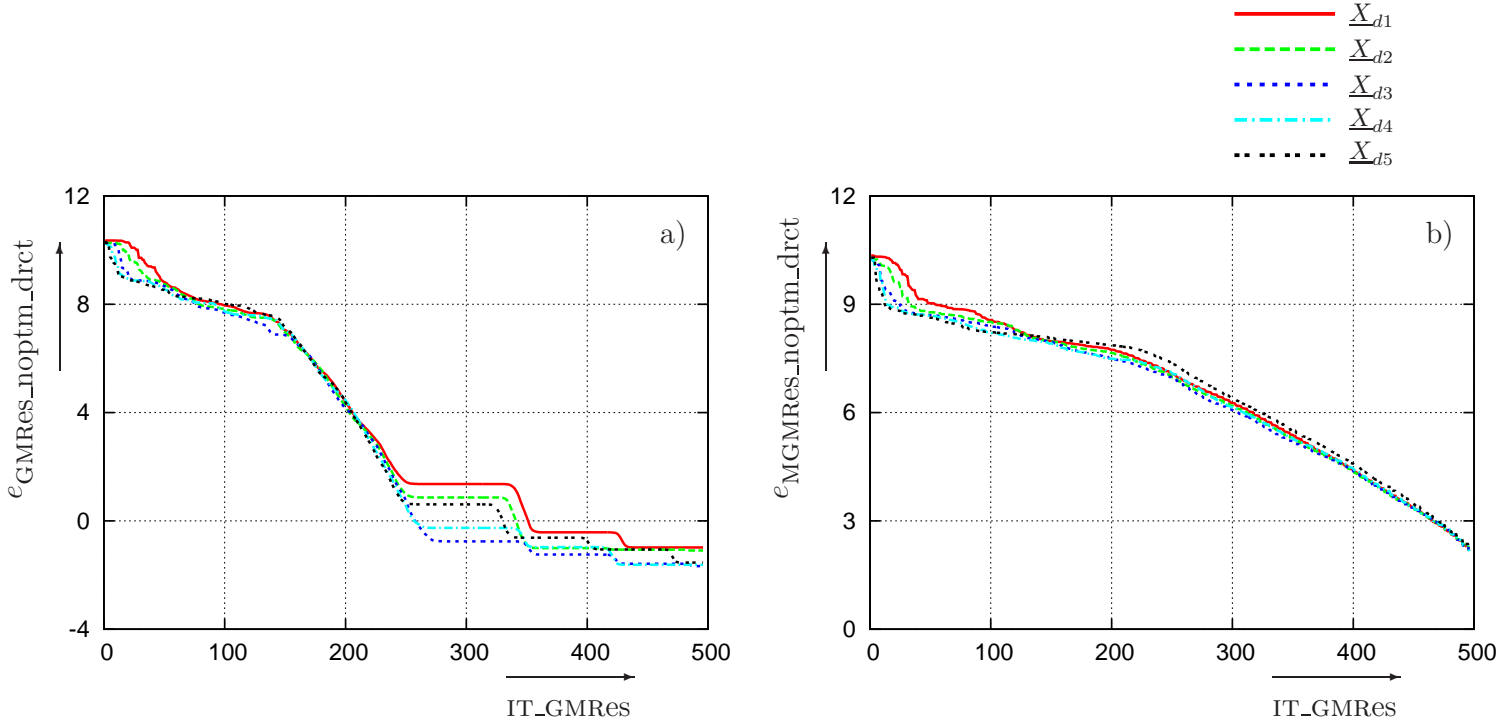


FIG. 6.9 – Convergence de la résolution du calcul de chaque sensibilité aérodynamique à l'itération d'optimisation  $IT_{\text{design}} = 1$  pour a) `GMRes_noptm_drct` et b) `MGMRes_noptm_drct` du problème de minimisation

Mais ces différences de niveau de convergence ne changent pas la valeur du gradient (Tab. 6.5).



	$\underline{X}_{d1}$	$\underline{X}_{d2}$	$\underline{X}_{d3}$	$\underline{X}_{d4}$	$\underline{X}_{d5}$
$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)_{\text{GMRES}}$	$0.23691 \times 10^{-1}$	$0.29924 \times 10^{-1}$	$0.32808 \times 10^{-1}$	$0.29364 \times 10^{-1}$	$0.23296 \times 10^{-1}$
$\Delta_{\text{LU/GMRES}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0002 %	0.0004 %	0.0001 %	0.0004 %	0.0003 %
$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)_{\text{GMRES}}$	$0.23691 \times 10^{-1}$	$0.29924 \times 10^{-1}$	$0.32808 \times 10^{-1}$	$0.29364 \times 10^{-1}$	$0.23296 \times 10^{-1}$
$\Delta_{\text{LU/MGMRES}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0002 %	0.0004 %	0.0001 %	0.0004 %	0.0003 %

TAB. 6.5 – Différence adimensionnée du gradient calculé par l'équation directe entre une résolution LU\_bande et GMRES\_notpm à la première itération d'optimisation IT\_design = 1 pour le problème de minimisation des pertes

### 6.4.3 Convergence pour une résolution GMRES\_noptm\_adjt

De même que pour la résolution de la méthode directe pour le problème de minimisation des pertes, la méthode de résolution GMRES\_noptm\_adjt parvient à converger avec un niveau de convergence de onze ordres de grandeur (Fig. 6.10) vers des niveaux identiques de gradient que les résolutions LU\_bande\_drct et LU\_bande\_adjt (Tab. 6.6).

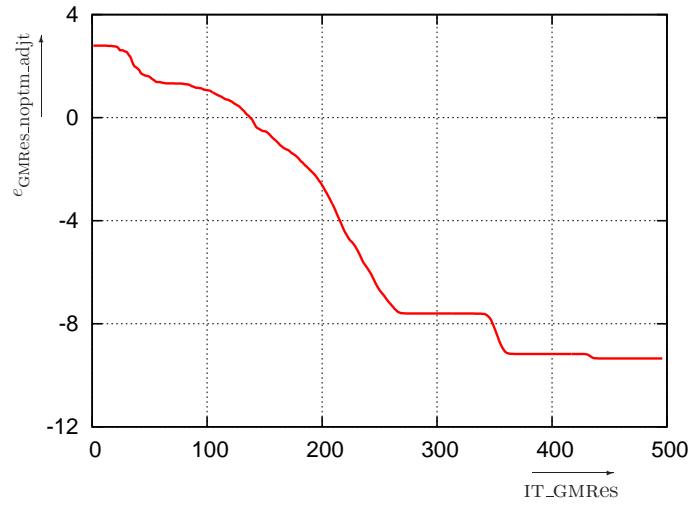


FIG. 6.10 – Convergence de la résolution du calcul de chaque sensibilité aérodynamique à l'itération d'optimisation IT\_design = 1 pour GMRES\_noptm\_adjt du problème de minimisation des pertes

	$\underline{X}_{d1}$	$\underline{X}_{d2}$	$\underline{X}_{d3}$	$\underline{X}_{d4}$	$\underline{X}_{d5}$
$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)_{\text{GMRES}}$	$0.23691 \times 10^{-1}$	$0.29924 \times 10^{-1}$	$0.32808 \times 10^{-1}$	$0.29364 \times 10^{-2}$	$0.23296 \times 10^{-3}$
$\Delta_{\text{LU/GMRES}}^{\text{Directe}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0002 %	0.0004 %	0.0001 %	0.0004 %	0.0003 %
$\Delta_{\text{LU/GMRES}}^{\text{Adjointe}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{X}_d}\right)$	0.0002 %	0.0004 %	0.0001 %	0.0004 %	0.0003 %

TAB. 6.6 – Différence adimensionnée du gradient calculé par l'équation directe entre une résolution LU\_bande\_drct, LU\_bande\_adjt et MGMRES\_noptm\_adjt à l'itération d'optimisation IT\_design = 1 pour le problème de minimisation des pertes

## 6.5 Conclusion

Dans le cadre d'un exercice d'optimisation par méthode de descente, nous devons à chaque itération calculer les valeurs du gradient de la fonction coût. Pour cela et quelle que soit la méthode utilisée, directe ou adjointe, nous devons résoudre au moins un système linéaire dont la matrice correspond à la linéarisation des flux convectifs et visqueux de l'écoulement stationnaire.

Pour éviter tout problème de stabilité lié à une résolution pseudo-temporelle, nous avons proposé d'utiliser l'approche `GMRES_notpm`. Le premier problème est un problème inverse qui consistait à retrouver une distribution de pression désirée sur une paroi de tuyère. Le second problème concernait la minimisation de pertes entre l'entrée et la sortie de la tuyère; pour cela, la fonction de coût était basée sur l'accroissement d'entropie. Dans tous les cas, les algorithmes `GMRES_notpm` et `MGMRES_noptm` nous ont permis de retrouver les mêmes résultats que ceux issus de la résolution `LU_bande`, que ce soit pour une résolution de l'équation directe ou adjointe.



# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

### 7.1 Conclusions

Le premier but de ce travail de recherche était d'accélérer la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires avec un modèle de turbulence au second ordre et des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps avec une méthode pseudo-Newton-Krylov par rapport à une méthode pseudo-Newton-AF-ADI. Le second objectif était de stabiliser la résolution pseudo-temporelle avec factorisation approchée des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps ainsi que le calcul de gradients de fonctions de coût pour des problèmes d'optimisation de formes aérodynamiques stationnaires. Les écoulements considérés ici sont des écoulements compressibles comportant d'importants phénomènes non linéaires (onde de choc, zone de recirculation . . . ) Toutes les résolutions ont été réalisées sur des maillages structurés.

Les matrices issues de ces problèmes ne sont pas des matrices symétriques ou définies positives, ce sont des matrices creuses, de type blocs à valeurs numériques très différentes, donc mal conditionnées, et dont les rayons spectraux peuvent être supérieurs à l'unité. Avec le développement des ordinateurs actuels (vectorisation, parallélisation, espace mémoire disponible), il nous est aujourd'hui possible d'utiliser de façon intensive les diverses méthodes de type Krylov (GMRES, Bi-CGSTAB, TFQMR . . . ) pour la résolution de systèmes linéaires avec des matrices quelconques. Ces méthodes sont basées sur la projection dans un espace décrit par des vecteurs de la forme  $p(A)\underline{v}$  où  $p$  est un polynôme, de sorte que le vecteur solution  $A^{-1}\underline{b}$  soit « proche » du polynôme  $p(A)\underline{v}$ . Dans le cadre de ce travail, après un premier test pour la résolution des équations d'Euler linéarisées, nous nous sommes limités à l'utilisation de l'algorithme GMRES [118].

#### 7.1.1 Equations de Navier-Stokes stationnaires

Les équations de Navier-Stokes stationnaires moyennées sont aujourd'hui couramment utilisées pour l'étude d'écoulements à l'échelle dans des configurations réalistes. Nous devons résoudre ces équations de façon robuste et de plus en plus rapide afin d'intégrer leur utilisation intensive dans le cadre de chaînes de conception, de boucles d'optimisation . . . Compte tenu de ce contexte, nous avons décidé d'utiliser une méthode pseudo-Newton-GMRES. Les méthodes de Newton intègrent les variables pseudo-temporelles par une succession de résolutions de systèmes linéaires afin de résoudre les équations non linéaires. Nous avons donc couplé la résolution Newton des équations non linéaires à une résolution GMRES préconditionnée par une méthode Jacobi par bloc ou ILU0.

Nous ne parlons pas d'une résolution newtonienne mais d'une résolution pseudo-newtonienne car le système est relaxé par un pas de temps et que les matrices jacobienne des systèmes linéaires ne sont pas les matrices jacobienne exactes mais des matrices simplifiées. Alors que les flux sont discrétisés au troisième ordre, les matrices jacobienne, elles, sont discrétisées seulement au premier ordre. De plus, les flux visqueux de la partie implicite sont approchés par une méthode de rayon spectral. Cette simplification permet de séparer la résolution de la partie moyenne de l'écoulement de la partie turbulente. C'est pourquoi cette résolution est appelée résolution faiblement couplée.

Nous avons testé la méthode développée dans le cadre de cette thèse, dans le cas d'une tuyère bidimensionnelle pour deux types d'écoulement, un écoulement haut subsonique ( $M_{\text{inflow}} = 0.6$ ) et un écoulement transsonique ( $M_{\text{choc}} = 1.5$ ). Le but de cette étude était de comparer la vitesse de convergence de notre algorithme de résolution pseudo-Newton-GMRES des équations de Navier-Stokes stationnaires moyennées avec un modèle de turbulence au second ordre avec une résolution pseudo-Newton-AF-ADI. Dans un premier temps, les résultats aérodynamiques de la méthode pseudo-Newton-GMRES ont été validés par rapport à la résolution pseudo-Newton-AF-ADI. La comparaison a montré un bon accord général, que ce soit pour les grandeurs moyennes ou les grandeurs turbulentes d'un modèle de turbulence au second ordre [47] pour les deux écoulements.

Nous avons remarqué que quel que soit le type d'écoulement, les résolutions GMRES\_ILU0 ont un niveau de convergence plus bas que pour une méthode AF-ADI avec pas de temps simple. De plus, grâce à une meilleure résolution à chaque pas temps du système linéaire avec la méthode GMRES\_ILU0, la limite de stabilité de discrétisation temporelle du problème non linéaire des équations de Navier-Stokes stationnaires a été repoussée. Nous avons ainsi, en particulier pour l'écoulement haut subsonique, une meilleure vitesse de convergence avec un gain de temps de l'ordre de 50 % ainsi qu'un plus petit nombre d'itérations.

### 7.1.2 Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps

Afin de limiter les erreurs de résolution du système linéaire à chaque pas de temps, nous avons, dans un premier temps, étendu l'algorithme de résolution GMRES\_ptm pour la résolution de ces équations. Cette intégration pseudo-temporelle a été validée pour un écoulement stationnaire haut subsonique et un autre transsonique sur un maillage lâche dans une tuyère bidimensionnelle. Les résultats des évolutions des grandeurs aérodynamiques et la vitesse de convergence ont été comparés avec une résolution AF-ADI. Nous en avons conclu une très bonne concordance entre les résultats des deux résolutions, tant pour les niveaux globaux (coefficients des forces de pression instationnaires identiques) qu'au niveau local (évolution des grandeurs aérodynamiques). De plus, dans le cas subsonique que dans le cas transsonique, la résolution GMRES\_ptm a permis d'augmenter le pas de temps par rapport à la résolution pseudo-Newton-AF-ADI en passant d'un nombre CFL de 20 à un nombre CFL 100. Cela a réduit le temps de résolution de 40 à 60 %.

Néanmoins, cette intégration ne permet pas de stabiliser la résolution pseudo-temporelle des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps lorsque les équations sont résolues sur un maillage fin. Des instabilités sont reportées pour les équations d'Euler linéarisées lorsque le calcul propage des ondes de Kelvin-Helmholtz qui sont présentes au sein même de la solution stationnaire. Lors de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps autour d'un écoulement stationnaire comportant des profils de vitesse instables, sans que les limiteurs de pente soit actifs, des ondes, présentes au sein même de l'écoulement stationnaire, déstabilisent la résolution pseudo-temporelle. Afin d'inclure ces ondes dans la solution du problème linéarisé, les équations doivent être résolues sans l'intégration pseudo-temporelle.

L'originalité de la méthode proposée dans le cadre de ce travail est la résolution itérative, grâce à l'algorithme GMRES, mais sans introduction d'un pseudo-pas de temps, de ces équations. En effet, les résolutions directes de type LU\_bande sont aujourd'hui limitées par la puissance des ordinateurs et l'espace mémoire qu'elles requièrent. La principale difficulté vient de la taille des bases nécessaires. Une résolution pseudo-newtonienne permet de diminuer le conditionnement de la matrice et d'augmenter l'importance de la diagonale sans rendre la matrice à diagonale dominante. Cela permet une convergence plus rapide de l'algorithme de Krylov. Dans le cas d'une résolution sans introduction d'un pseudo-pas de temps, la matrice issue de la linéarisation des équations de Navier-Stokes étant mal conditionnée, elle impose l'utilisation d'un algorithme GMRES avec redémarrage afin de limiter l'espace mémoire.

Les résultats aérodynamiques des résolutions sans introduction d'un pseudo-pas de temps ont été validés par rapport à la résolution pseudo-Newton-GMRES dans les cas où celle-ci converge. Nous pouvons en conclure un bon niveau général entre les résultats des deux méthodes de résolution pour les deux types d'écoulement. Malgré l'utilisation d'un algorithme GMRES avec redémarrage, les bases de Krylov minimales sont importantes : 400 vecteurs dans le cas subsonique et 300 vecteurs dans le cas transsonique. Néanmoins, l'espace mémoire nécessaire à la résolution GMRES\_noptm avec un préconditionnement ILU0 est 40 à 70 % inférieur à une résolution LU\_bande.

Ce gain en espace mémoire de l'algorithme `GMRes_noptm` nous a permis de résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps dans le cas où les résolutions pseudo-Newton-GMRes et pseudo-Newton-AF-ADI échouent. Nous avons alors constaté une bonne concordance globale des résultats entre le maillage lâche et le maillage fin même si des variations locales sont présentes.

### 7.1.3 Optimisation aérodynamique

L'optimisation aérodynamique par méthode de descente requiert pour l'évaluation du gradient de la fonction de coût la résolution d'un ou plusieurs systèmes linéaires dont la matrice est issue de l'opérateur de linéarisation des équations de Navier-Stokes. Identiquement à la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps, la résolution de ces systèmes linéaires est sujette à des instabilités lorsque ces équations sont résolues par intégration pseudo-temporelle. C'est pourquoi nous avons étendu l'algorithme de résolution sans introduction d'un pseudo-pas de temps `GMRes_noptm` à la résolution des deux équations d'optimisation directe et adjointe.

Dans le cas de l'équation directe, après une première résolution indépendante de chaque système linéaire `GMRes_drct`, nous avons utilisé une résolution `MGMRes` pour des systèmes ayant une matrice identique et des vecteurs différents dans le second membre. Cette méthode de résolution nous a permis de résoudre les systèmes linéaires issus de l'équation d'optimisation avec un temps identique à la résolution d'une seule équation ; nous avons ainsi limité l'intérêt de l'utilisation de l'équation adjointe. En effet, l'équation adjointe n'étant qu'une réécriture mathématique du problème d'optimisation, elle est sujette à caution, en particulier pour l'application des conditions aux limites.

Toutes les méthodes de résolution (`GMRes_drct`, `MGMRes_drct`, `GMRes_adjt`) ont été testées dans le cas d'un écoulement interne subsonique bidimensionnel avec cinq paramètres d'optimisation pour deux problèmes. Un premier problème inverse basé sur la minimisation d'une intégrale de surface de pression et un second de minimisation des pertes basé sur la différence d'entropie entre l'entrée et la sortie de la tuyère. Le maillage (identique pour tous les problèmes d'optimisation) était un maillage lâche. Cela nous a permis de comparer les résultats de la résolution des systèmes linéaires avec une résolution `LU_bande`. Nous pouvons en conclure que tous les résultats sont en très bonne concordance avec une erreur relative maximale de 0.0004 % entre les résolutions itératives et la résolution directe.

## 7.2 Perspectives

### 7.2.1 Equations de Navier-Stokes stationnaires

Nous nous sommes intéressés dans notre cas à un développement pour des calculateurs vectoriels. Or nous utilisons l'outil de Saad `SPARSEKIT` [117] pour le préconditionnement `ILU0`. Ce préconditionnement étant calculé à chaque itération temporelle, le temps global du calcul du préconditionnement devient important (de l'ordre de 10 % du temps total). Afin de diminuer ce temps de calcul, il serait intéressant soit de vectoriser ce dernier [107] dans le cas d'un maillage structuré, soit d'utiliser une factorisation incomplète évolutive [130].

Pour permettre une comparaison exacte entre les deux méthodes (AF-ADI et GMRes), nous avons utilisé les mêmes simplifications pour le calcul des matrices jacobiennes. Afin d'accélérer encore la résolution pseudo-temporelle et de rapprocher la vitesse de convergence d'une convergence newtonienne, il serait intéressant de calculer les matrices jacobiennes exactes. Les matrices exactes peuvent être évaluées de deux façons, soit de manière explicite avec un coût important en termes de stockage de la matrice, soit par une implémentation dite « Matrix Free » où la matrice jacobienne est évaluée sans être stockée par la formule suivante [10, 54, 94–97, 107, 112, 130] :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{w})}{\partial \underline{w}} = \frac{\mathcal{L}(\underline{w} + \varepsilon \underline{w}) - \mathcal{L}(\underline{w})}{\varepsilon \underline{w}} \quad (7.1)$$

où  $\varepsilon$  est un coefficient paramètre réel à paramétrer.

Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes seront donc résolues de manière fortement couplée, c'est-à-dire que

la partie moyenne et la partie turbulente sont résolues en même temps.

### 7.2.2 Equations de Navier-Stokes linéarisées et harmoniques en temps

Même si la résolution `GMRES_ILU0_noptm` réduit nettement l'espace mémoire nécessaire pour une résolution par rapport à une résolution `LU_bande`, il paraît encore trop important pour être utilisable de manière intensive pour l'étude d'écoulements instationnaires en 3D. Afin de réduire le nombre de vecteurs de la base de Krylov, nous pourrions étudier un nouveau préconditionnement prenant en compte la structure bloc de la matrice et la grande disparité des valeurs numériques.

A notre connaissance, peu d'études existent pour la présentation et la comparaison d'un algorithme GMRES dans le cadre de problèmes dont la matrice est composée de coefficients complexes. Néanmoins, Campobasso et Giles [29], pour des problèmes aéroélastiques d'aubes de turbomachines, utilisent un algorithme GMRES complexe et diminuent ainsi la taille de la base de Krylov. Etant donné qu'ils utilisent un préconditionnement bloc Jacobi [29] demandant peu de ressource mémoire, celui-ci peut être calculé et stocké sous forme complexe sans un surcoût important par rapport au préconditionnement sous forme réelle. Dans notre cas, il faudrait vérifier que le stockage des éléments non nuls de matrice sous forme complexe pour un préconditionnement ILU0 ne pénalise pas en termes d'espace mémoire lorsque nous utilisons un algorithme GMRES purement complexe.

### 7.2.3 Optimisation aérodynamique

Avec l'utilisation d'une méthode MGMRES, nous limitons l'intérêt de l'utilisation de la méthode adjointe en résolvant dans l'ensemble des systèmes linéaires de l'équation directe avec un temps identique à la résolution d'un seul système. Néanmoins, nous ne connaissons pas d'étude lorsque le nombre de vecteurs devient important ( $>5$  [126]). Ici seul un cas bidimensionnel a été étudié mais dans le cas d'une géométrie tri-dimensionnelle (aubes de turbomachine, ailes ...), afin de réaliser une réelle optimisation, pas moins de dix paramètres d'optimisation sont nécessaires. Dans ce cas, une résolution MGMRES peut réclamer une taille de base de Krylov importante et une résolution de l'équation adjointe peut-être plus intéressante. Pour cela il faut ne plus avoir à stocker la matrice transposée pour réaliser le produit matrice-vecteur mais que celui-ci soit réalisé directement.

## Annexe A

# Résultats des grandeurs turbulentes de la résolution des équations de Navier Stokes stationnaires

### A.1 Résultats complémentaires pour un écoulement subsonique



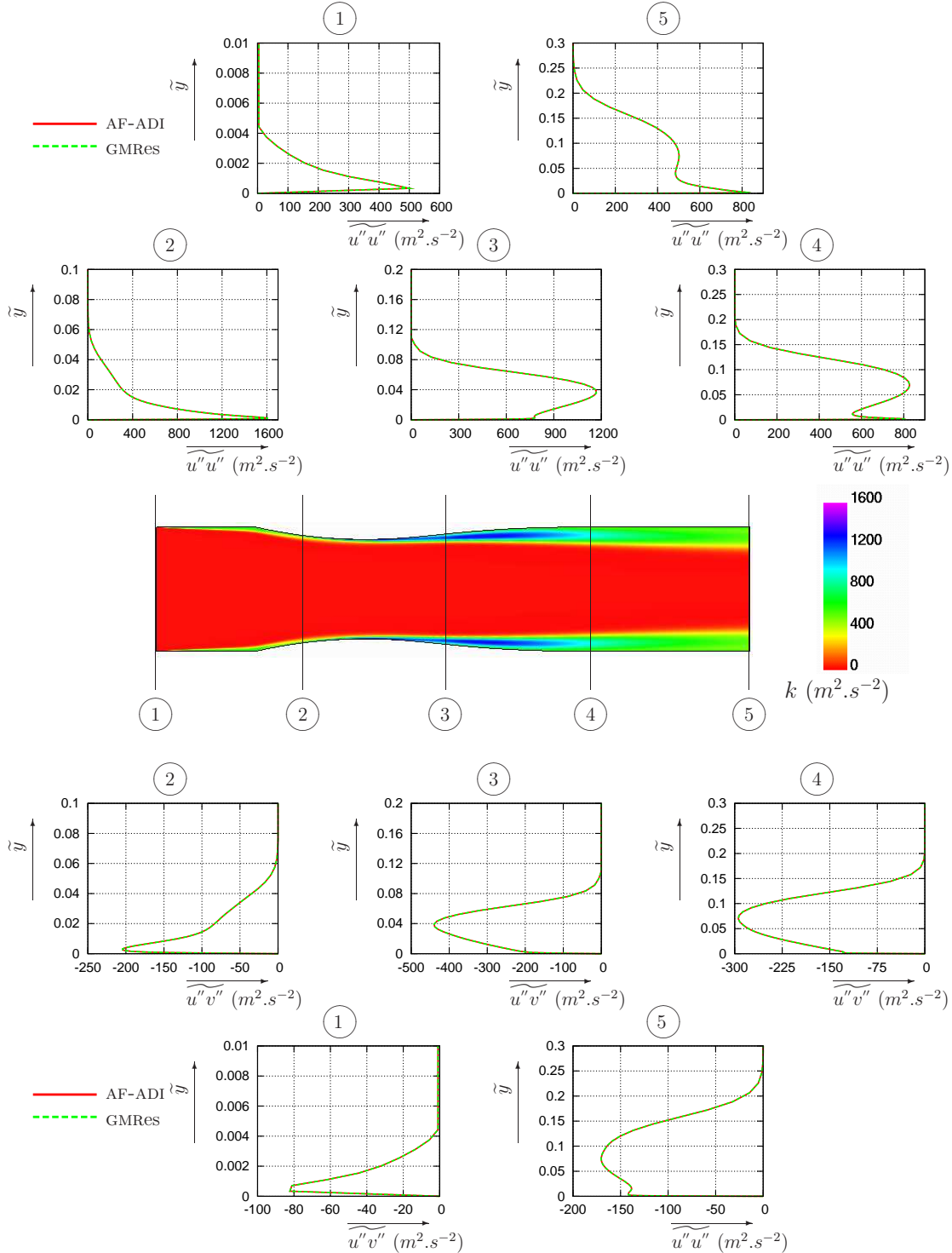


FIG. A.1 – Comparaison de l'évolution des grandeurs turbulentes  $\overline{u''u''}$  et  $\overline{u''v''}$  à cinq positions axiale  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{4}L$ ,  $x = \frac{1}{2}L$ ,  $x = \frac{3}{4}L$  et  $x = L$  entre une résolution GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=1, L_{GRD}=3$ ) et AF-ADI( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) dans le cas d'un écoulement subsonique

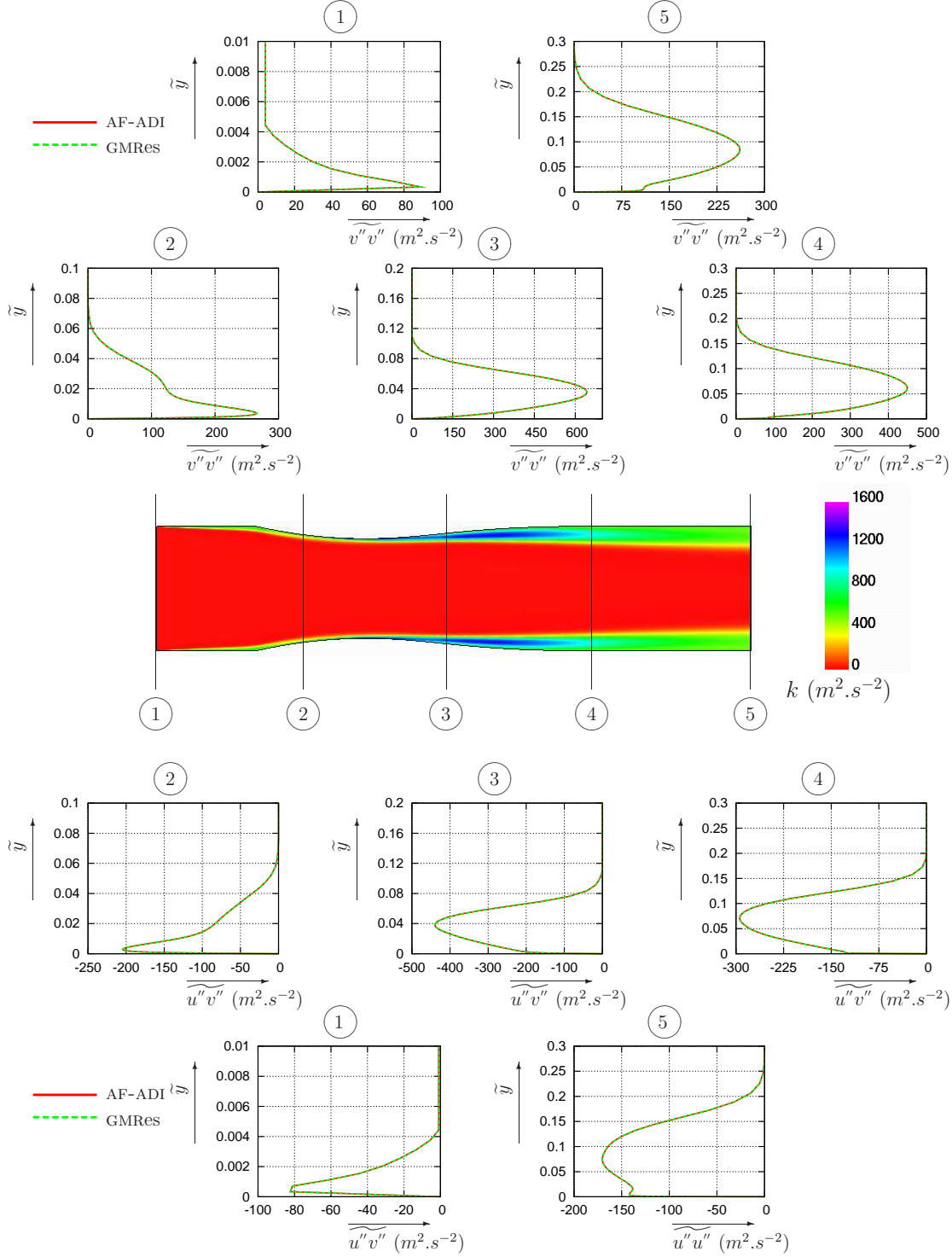


FIG. A.2 – Comparaison de l'évolution des grandeurs turbulentes  $\overline{v''v''}$  et  $\overline{u''v''}$  à cinq positions axiales  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{4}L$ ,  $x = \frac{1}{2}L$ ,  $x = \frac{3}{4}L$  et  $x = L$  entre une résolution GMRes\_ILU0( $\text{CFL}=\infty, \text{CFL}^*=50, M_{it}=1, r_{\text{res}}=1, L_{GRD}=3$ ) et AF-ADI( $\text{CFL}=100, \text{CFL}^*=20, M_{it}=5, L_{GRD}=3$ ) dans le cas d'un écoulement subsonique

## A.2 Résultats complémentaires pour un écoulement transsonique

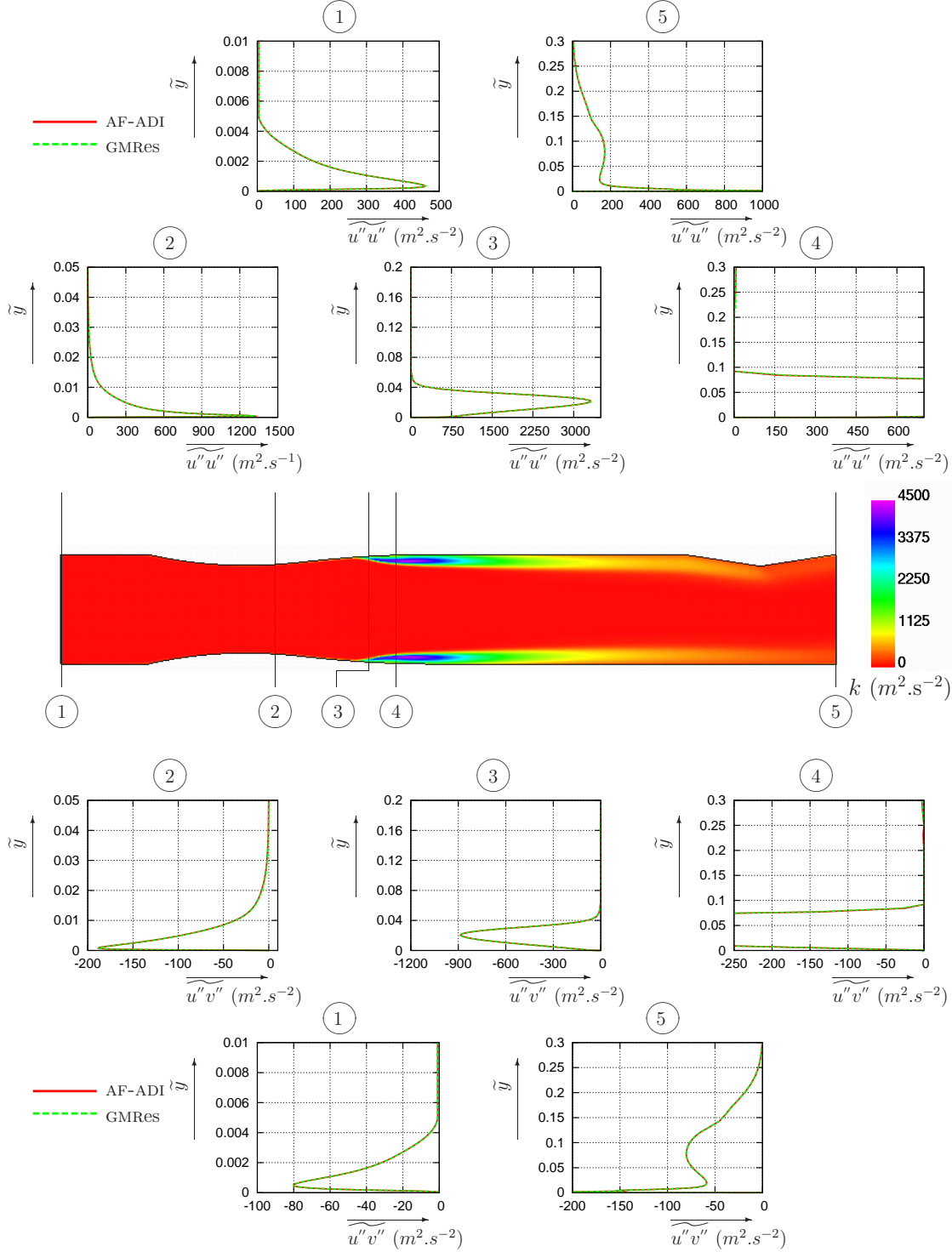


FIG. A.3 – Comparaison de l'évolution des grandeurs turbulentes  $\overline{u''u''}$  et  $\overline{u''v''}$  à cinq positions axiales  $x = 0$ ,  $x = 25\%L$ ,  $x = 42\%L$ ,  $x = 45\%L$  et  $x = L$  entre une résolution GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ , CFL\*= $50$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=1$ ,  $L_{GRD}=3$ ) et AF-ADI(CFL= $100$ , CFL\*= $20$ ,  $M_{it}=5$ ,  $L_{GRD}=3$ ) dans le cas d'un écoulement transsonique

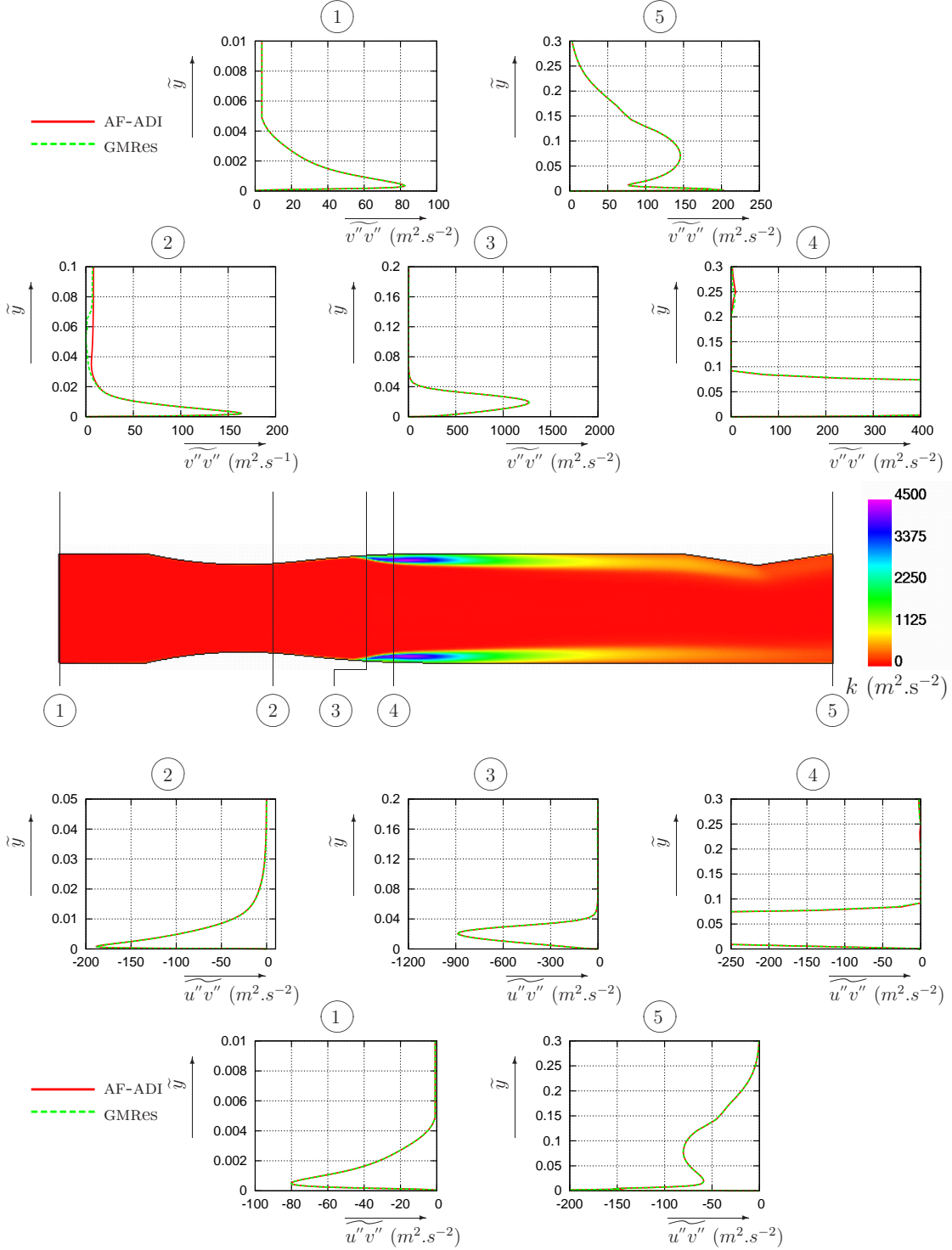


FIG. A.4 – Comparaison de l'évolution des grandeurs turbulentes  $\overline{v''v''}$  et  $\overline{u''v''}$  à cinq positions axiales  $x = 0$ ,  $x = 25\%L$ ,  $x = 42\%L$ ,  $x = 45\%L$  et  $x = L$  entre une résolution GMRes\_ILU0(CFL= $\infty$ , CFL\*= $50$ ,  $M_{it}=1$ ,  $r_{res}=1$ ,  $L_{GRD}=3$ ) et AF-ADI(CFL= $100$ , CFL\*= $20$ ,  $M_{it}=5$ ,  $L_{GRD}=3$ ) dans le cas d'un écoulement transsonique

## Annexe B

# Résultats complémentaires de la résolution des équations de Navier Stokes linéarisées avec introduction d'un pseudo-pas de temps

### B.1 Résultats complémentaires pour la résolution issue d'un écoule- ment stationnaire subsonique

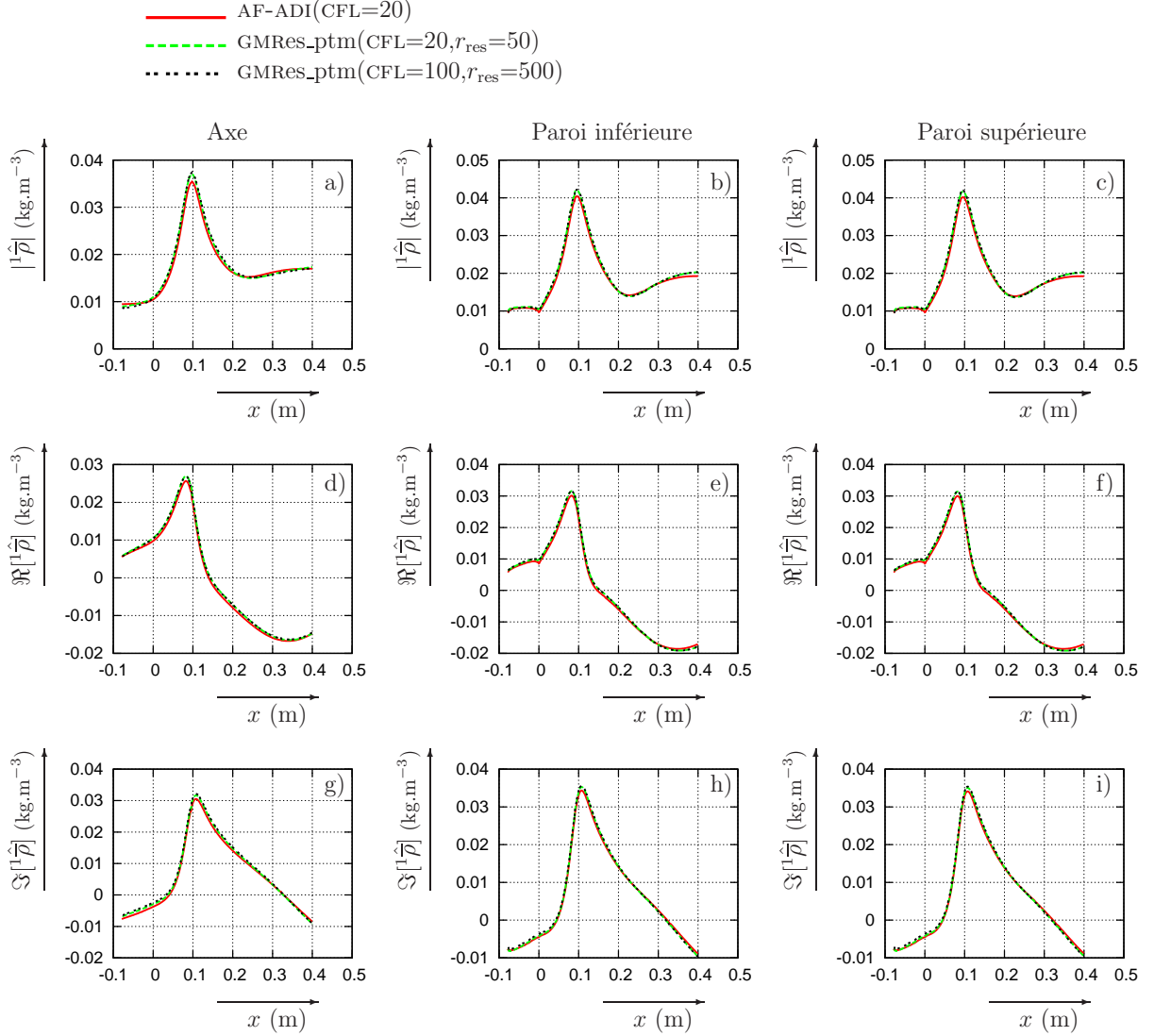


FIG. B.1 – Comparaison de l'évolution du module  $|{}^1\hat{p}|$  et de la phase ( $\Re[{}^1\hat{p}]$  et  $\Im[{}^1\hat{p}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Déleré [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|{}^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire subsonique.

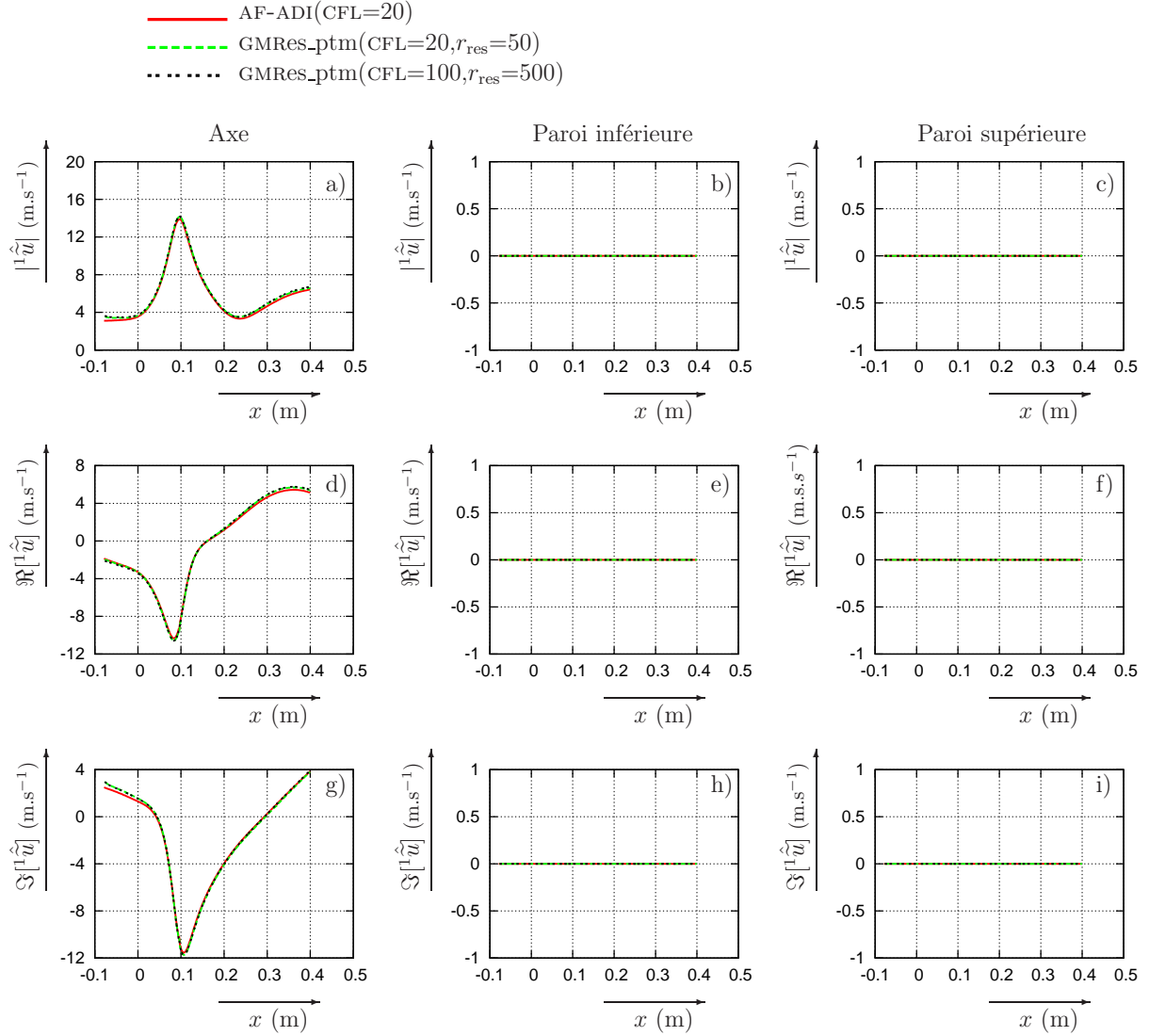


FIG. B.2 – Comparaison de l'évolution du module  $|{}^1\hat{u}|$  et de la phase ( $\Re[{}^1\hat{u}]$  et  $\Im[{}^1\hat{u}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Déleroy [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|{}^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire subsonique.



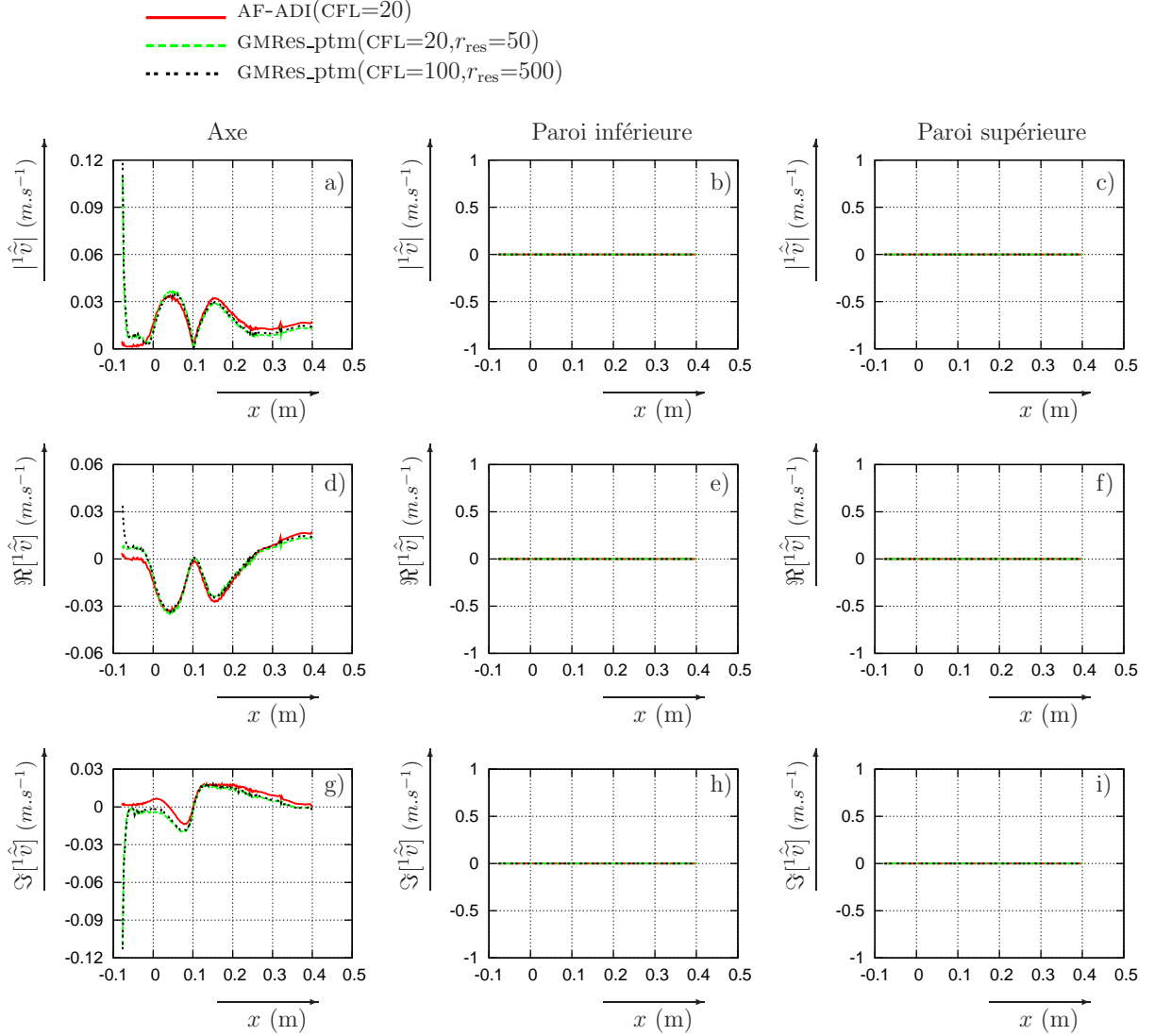


FIG. B.3 – Comparaison de l'évolution du module  $|^1\hat{v}|$  et de la phase ( $\Re[^1\hat{v}]$  et  $\Im[^1\hat{v}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Détery [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire subsonique.

## B.2 Résultats complémentaires pour la résolution issue d'un écoulement stationnaire transsonique

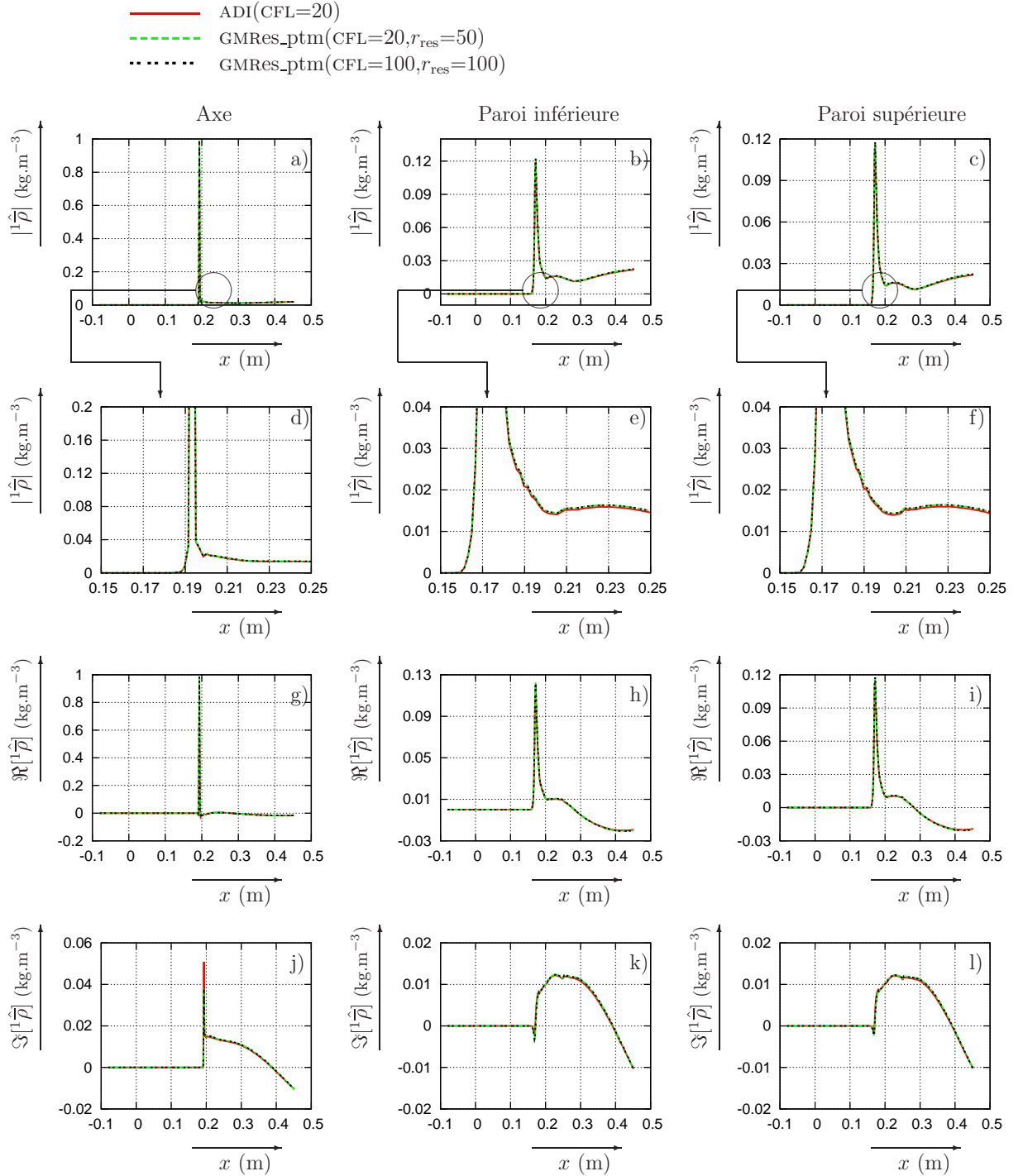


FIG. B.4 – Comparaison de l'évolution du module  $|^1\hat{p}|$  et de la phase ( $\Re[^1\hat{p}]$  et  $\Im[^1\hat{p}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Détery [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|^1\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire transsonique.

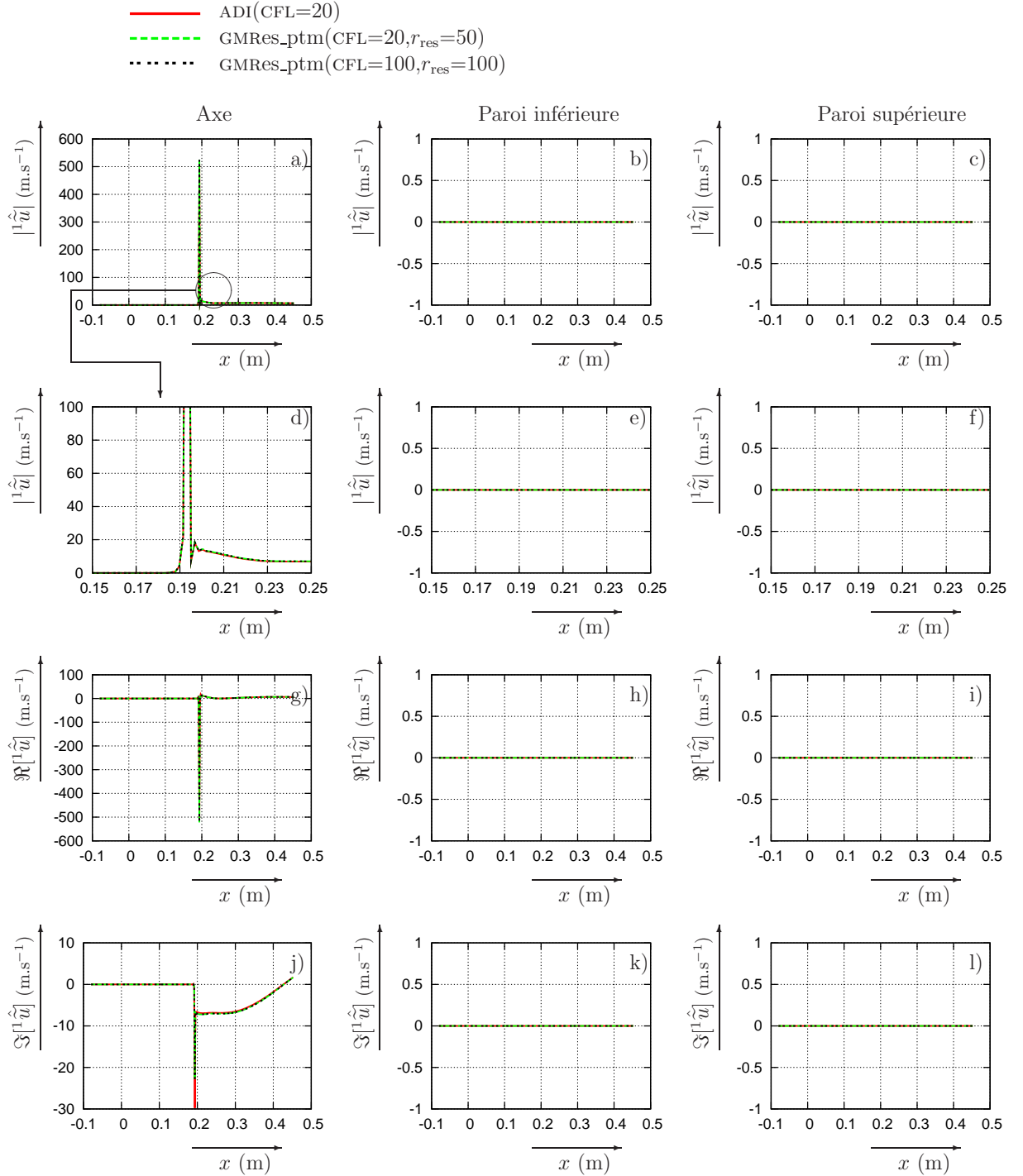


FIG. B.5 – Comparaison de l'évolution du module  $|\hat{u}|$  et de la phase ( $\Re[\hat{u}]$  et  $\Im[\hat{u}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Détery [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire transsonique.

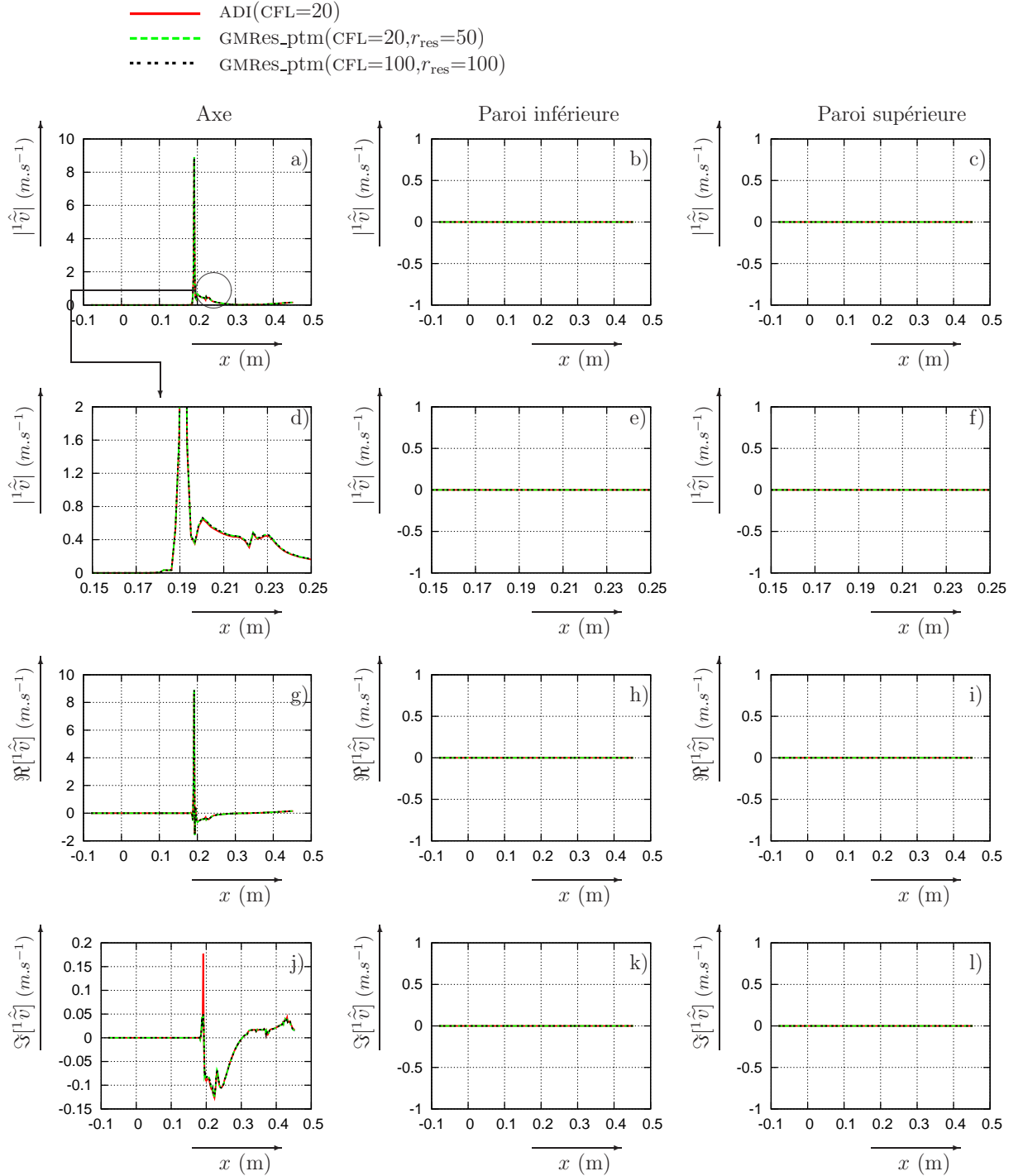


FIG. B.6 – Comparaison de l'évolution du module  $|\hat{v}|$  et de la phase ( $\Re[\hat{v}]$  et  $\Im[\hat{v}]$ ) de la perturbation de pression pour les résolutions AF-ADI(CFL=20), GMRes\_ptm (CFL=20,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_ptm(CFL=100,  $r_{\text{res}}=500$ ) à l'axe et sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère de Détery [32] pour une perturbation avale de pression de fréquence de 180 Hz, de module  $|\hat{p}_2| \cong 2000$  Pa et de déphasage de  $\angle \hat{p}_2 \cong -60^\circ$  autour d'un écoulement stationnaire transsonique.

## Annexe C

# Résultats complémentaires de la résolution des équations de Navier Stokes linéarisées sans introduction d'un pseudo-pas de temps

### C.1 Résultats complémentaires pour la résolution autour d'un écoulement stationnaire subsonique

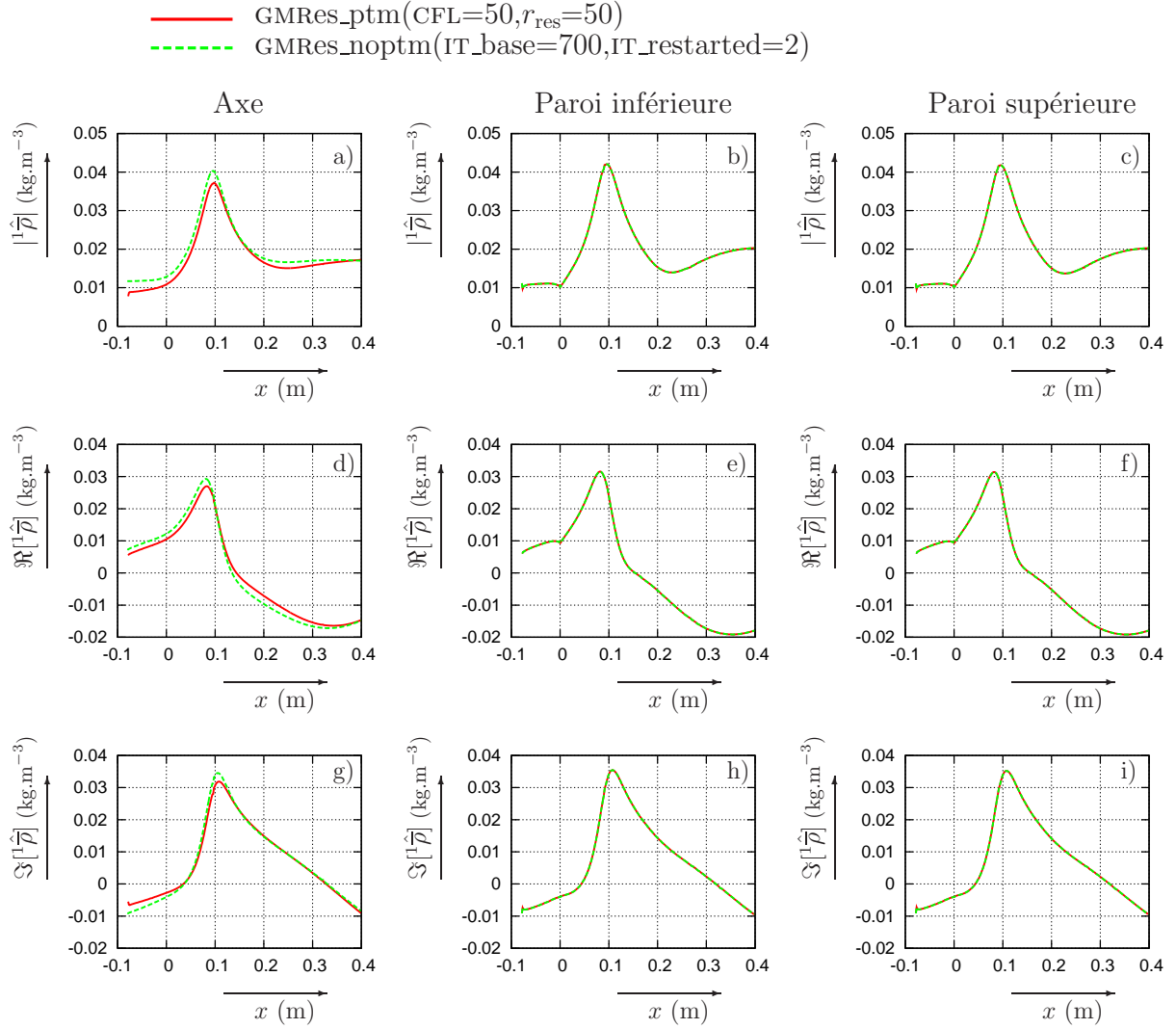


FIG. C.1 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la masse volumique  $\hat{\rho}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=700, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 121$

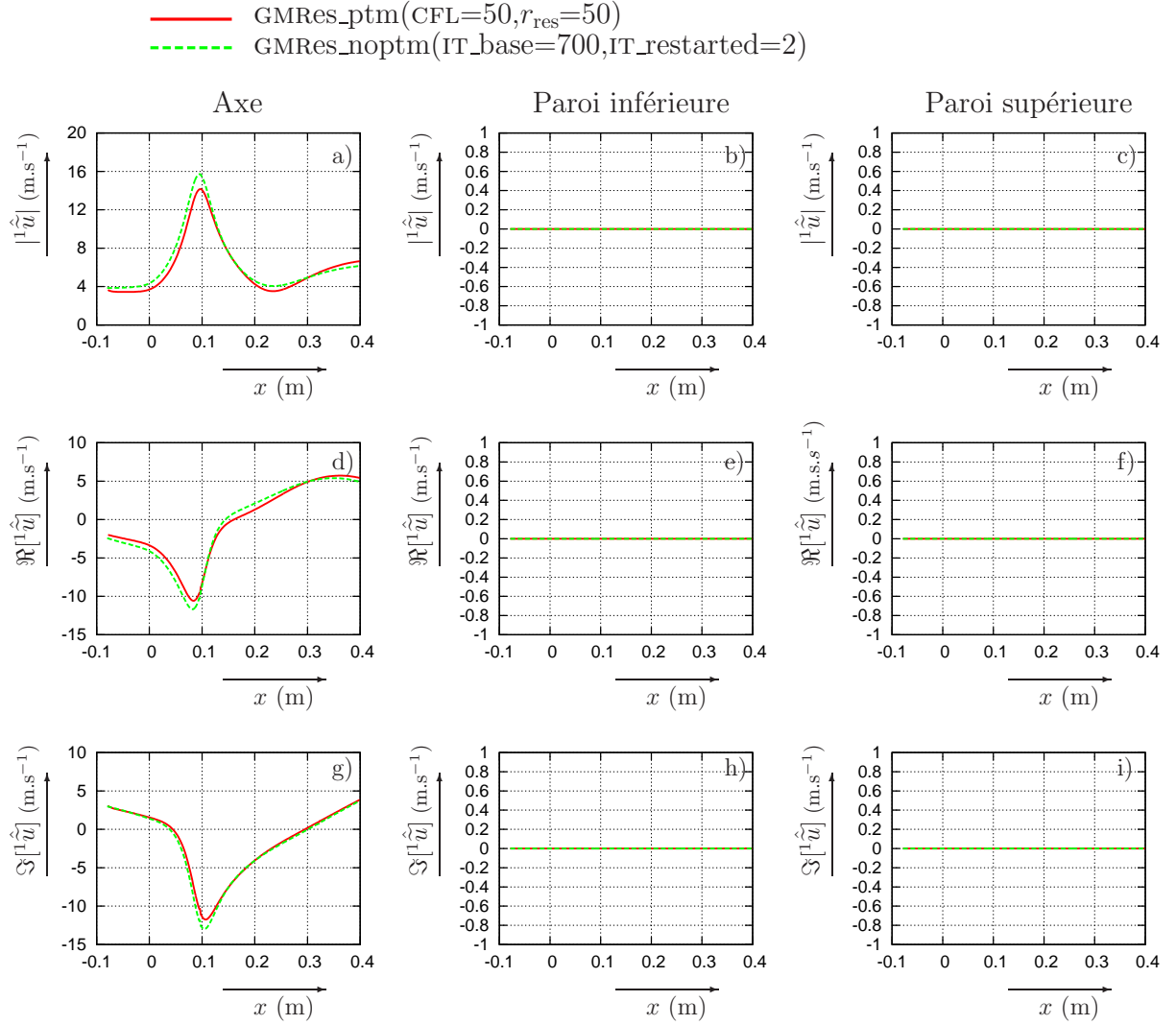


FIG. C.2 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la vitesse  $\hat{u}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=700, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 121$



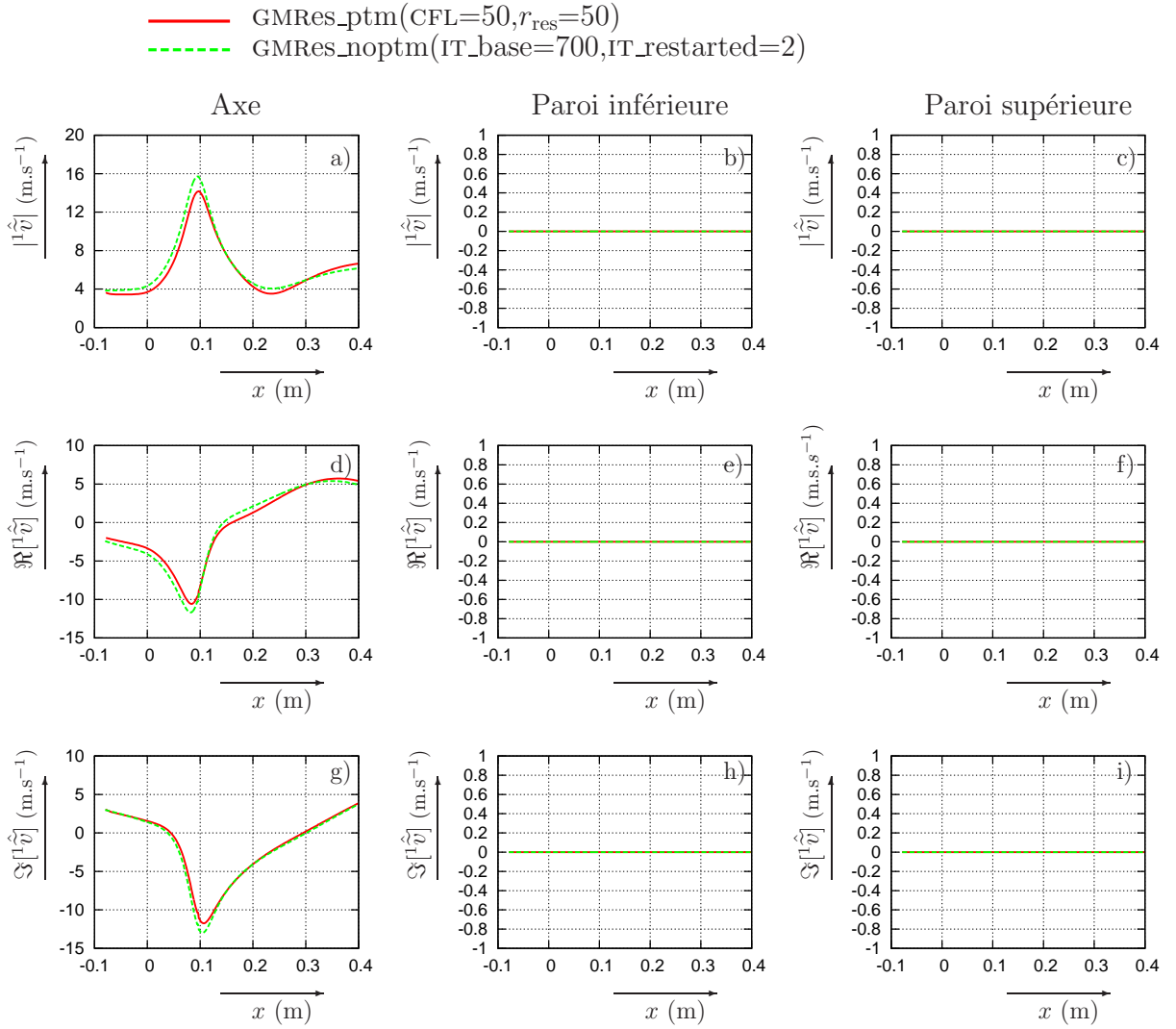


FIG. C.3 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la vitesse  $\hat{v}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=700, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement subsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 121$

## C.2 Résultats complémentaires pour la résolution autour d'un écoulement stationnaire transsonique

### C.2.1 Résultats sur le maillage *Grid\_A*

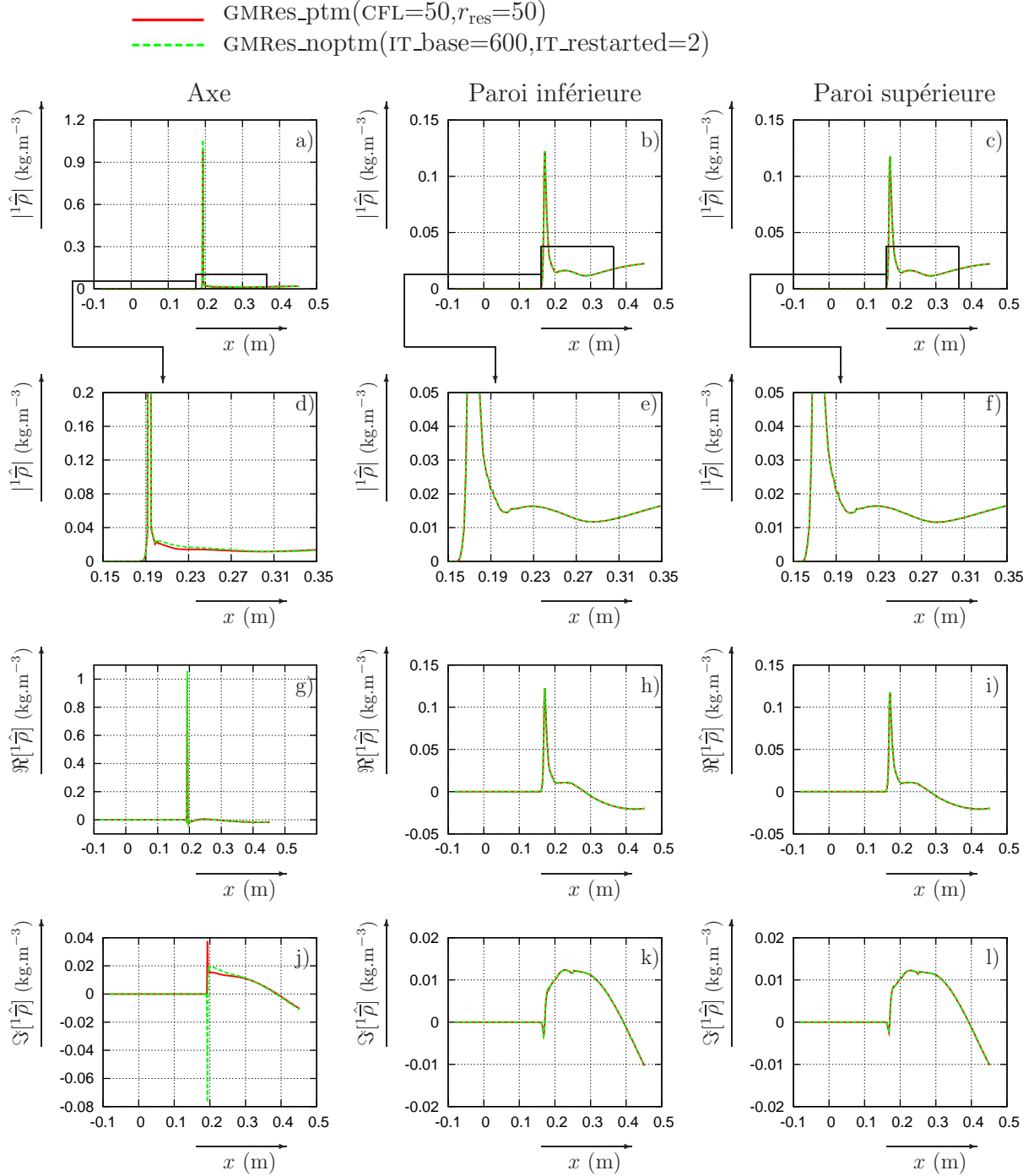


FIG. C.4 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de masse volumique  $\hat{p}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 101$

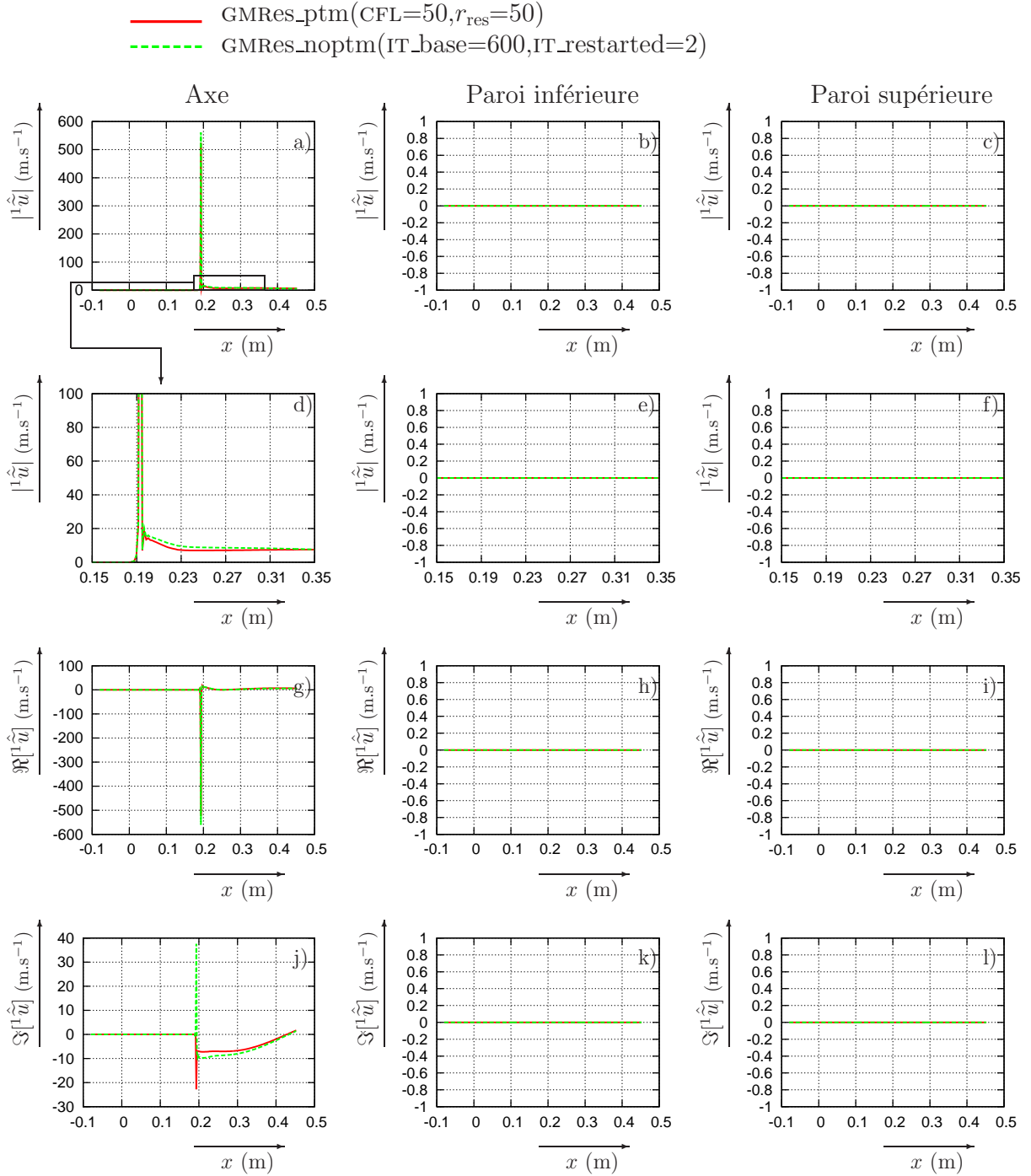


FIG. C.5 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de vitesse  $\hat{u}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{\text{res}}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 101$

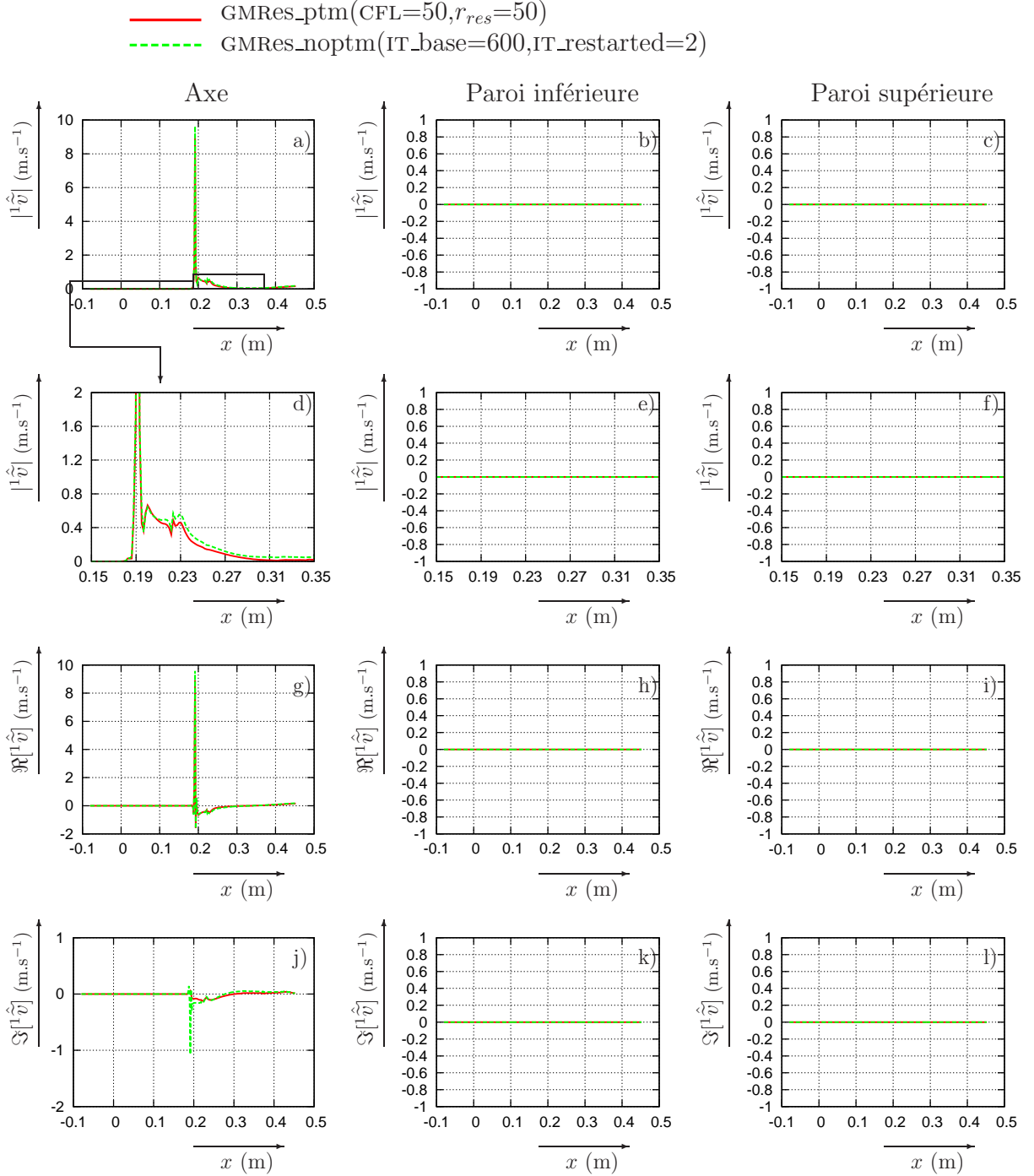


FIG. C.6 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de vitesse  $\hat{v}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution GMRes\_ptm(CFL=50,  $r_{res}=50$ ) et GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32] sur un maillage  $N_i \times N_j = 301 \times 101$

### C.2.2 Résultats sur le maillage *Grid\_B*

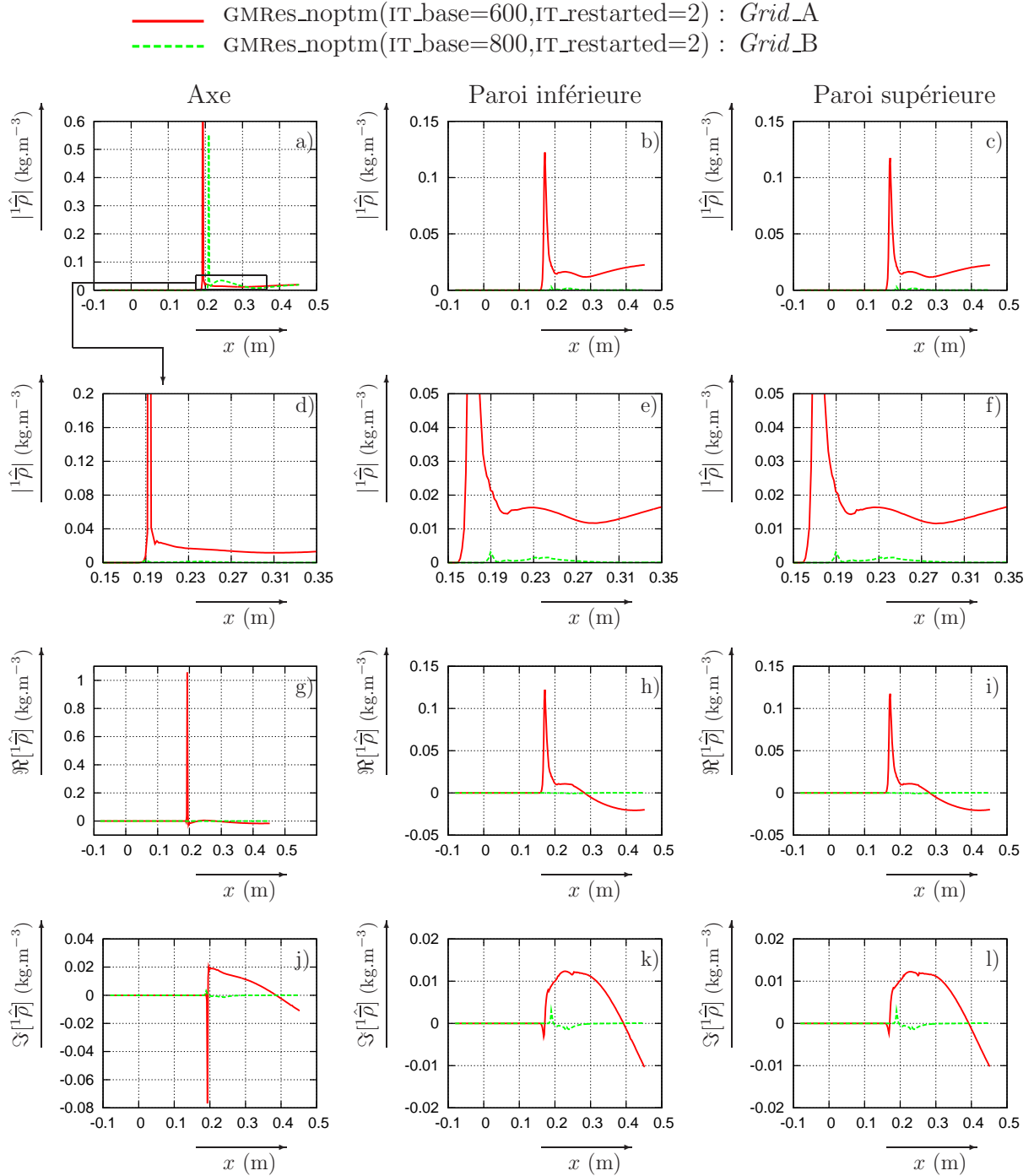


FIG. C.7 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la masse volumique  $\hat{\rho}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution sur le maillage *Grid\_A* GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) et sur le maillage *Grid\_B* GMRes\_noptm(IT\_base=800, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32]

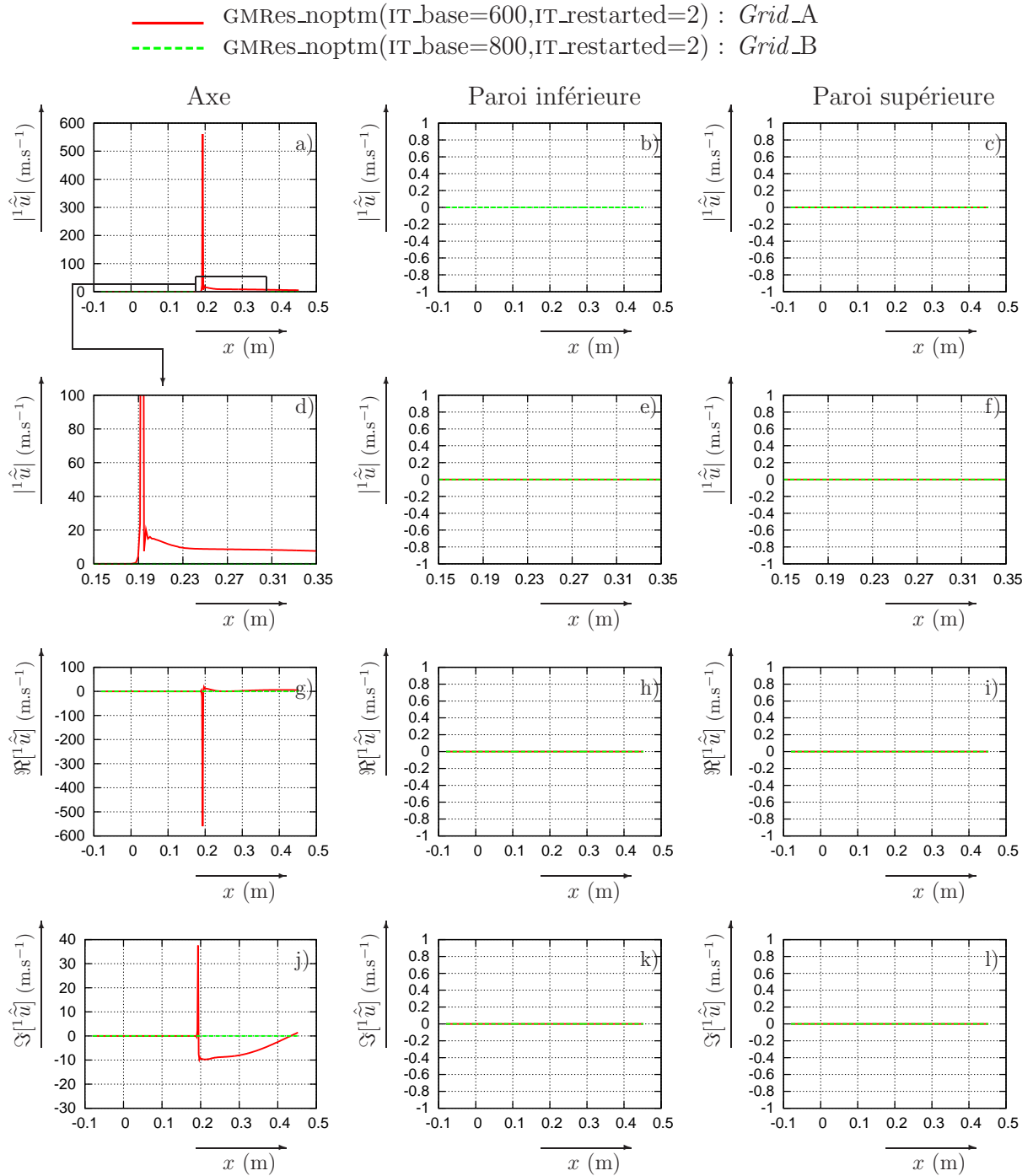


FIG. C.8 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la vitesse  $\hat{u}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution sur le maillage *Grid\_A* GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) et sur le maillage *Grid\_B* GMRes\_noptm(IT\_base=800, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32]



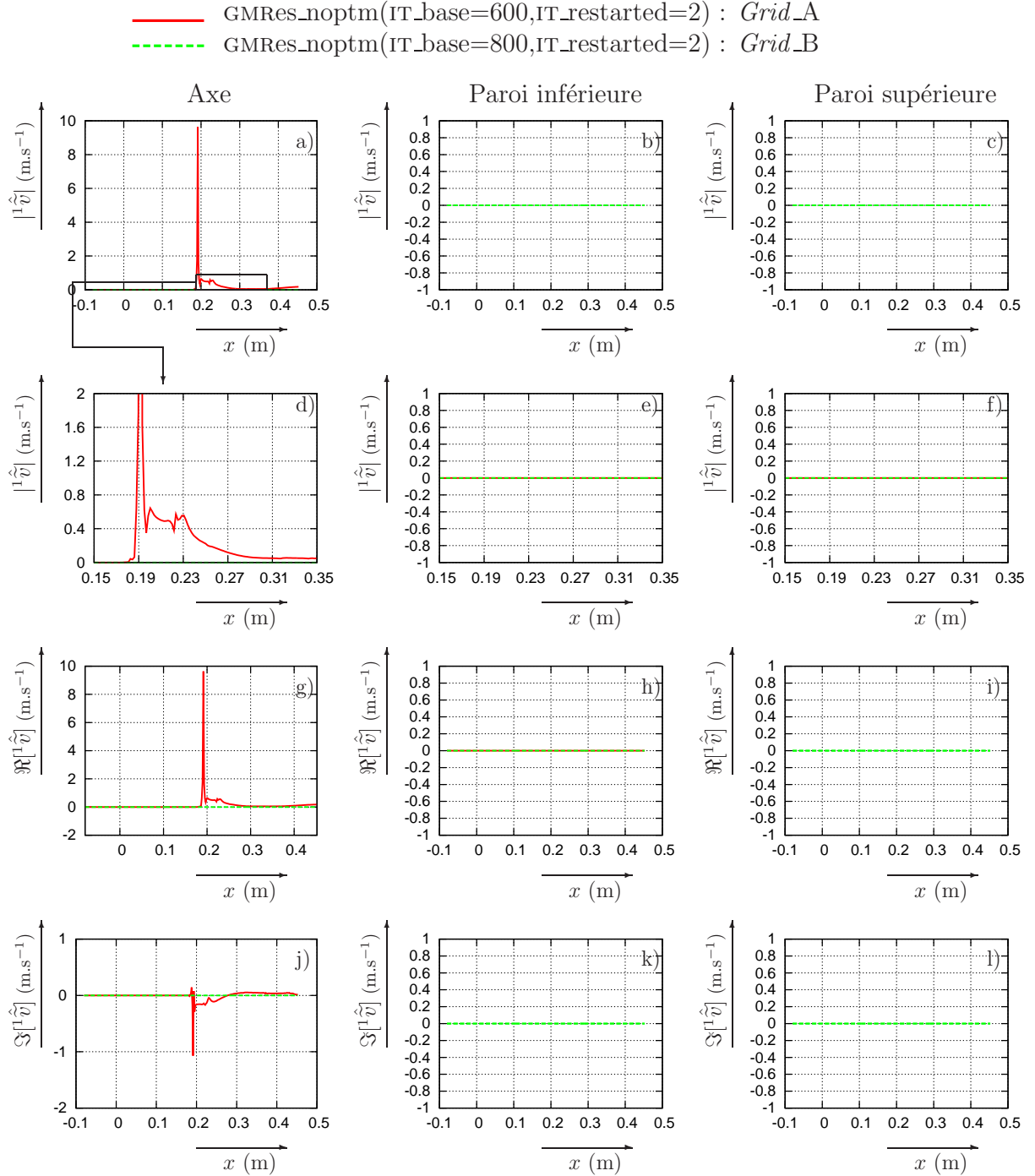


FIG. C.9 – Comparaison de l'évolution des fluctuations de la vitesse  $\hat{v}$  à l'axe, sur les parois inférieure et supérieure de la tuyère entre une résolution sur le maillage *Grid\_A* GMRes\_noptm(IT\_base=600, IT\_restarted=2) et sur le maillage *Grid\_B* GMRes\_noptm(IT\_base=800, IT\_restarted=2) issues de la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement transsonique dans une tuyère symétrique [32]

# Bibliographie

- [1] T. C. Adamson, Jr, A. F. Messiter, and M. S. Liou. Large amplitude shock-wave motion in 2-D transonic channel flow. *AIAA J.*, 16 :1240–1247, 1978.
- [2] A. Agarwal, P. J. Morris, and R. Mani. Calculation of sound propagation in nonuniform flows : Suppression of instability waves. *AIAA J.*, 42(1) :80–88, January 2004.
- [3] W. K. Anderson, J. L. Thomas, and B. Van Leer. Comparison of finite-volume flux-vector-splittings for the euler equations. *AIAA J.*, 24(9) :1453–1460, September 1986.
- [4] W.K. Anderson and D.L. Bonhaus. Arfoil design on unstructured grids for turbulent flows. *AIAA J.*, 37(2) :185–191, February 1999.
- [5] W.K. Anderson and V. Venkatakrisnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. AIAA Paper 1996–1941, 1996.
- [6] J.C. Newman and A.C. Taylor, R.W. Barnwell, P.A. Newman, and G.J.W Hou. Overview of sensitivity analysis and shape optimization for complex aerodynamic configurations. *J. of Aircraft*, 36(1) :87–96, January-February 1999.
- [7] O. Baysal and M. E. Eleshaky. Aerodynamic design optimization using sensitivity analysis and computational fluid dynamics. *AIAA J.*, 30(3) :718–725, March 1992.
- [8] O. Baysal and E. Eleshaky. Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible euler equations. *J. Fluid Engrg.*, 113 :681–688, December 1991.
- [9] O. Baysal and K. Ghavour. Continous adjoint sensitivities for optimization with general cost functionals on unstructured meshes. *AIAA J.*, 39 :48–55, 2001.
- [10] M. Blanco and W. Zingg. Fast newton-krylov method for unstructured grids. *AIAA J.*, 16 :607–611, April 1998.
- [11] G.W. Burgreen and O. Baysal. Aerodynamic shape optimization using preconditioned conjugate gradient methods. *AIAA J.*, 32 :2145–2152, 1994.
- [12] G.W. Burgreen and O. Baysal. Three-dimensional aerodynamic shape optimization using discrete sensitivity analysis. *AIAA J.*, 34 :1761–1770, 1996.
- [13] G.W. Burgreen, O. Baysal, and M.E. Eleshaky. Improving the efficiency of aerodynamic shape optimization. *AIAA J.*, 32 :69–76, 1994.
- [14] M. S. Campobasso and M. B. Giles. Effects of flow instabilities on the linear analysis of turbomachinery aeroelasticity. *J. Prop. Power*, 19(2) :250–259, March 2003.
- [15] M. S. Campobasso and M. B. Giles. Stabilization of linear flow solver for turbomachinery aeroelasticity using recursive projection method. *AIAA J.*, 42(9) :1765–1774, September 2004.
- [16] S. R. Chakravarthy. Euler equations — implicit schemes and boundary conditions. *AIAA J.*, 21(5) :699–706, May 1983.

- [17] J. C. Chassaing. *Aérodynamique 3-D et Aéroélasticité Non-Linéaire et Linéarisée en Temps*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], January 2002.
- [18] J. C. Chassaing, G. A. Gerolymos, and I. Vallet. Efficient and robust Reynolds-stress model computation of 3-D compressible flows. *AIAA J.*, 41(5) :763–773, May 2003.
- [19] J-C Chassaing and G.A. Gerolymos. Compressor flutter analysis using time-nonlinear and time-linearized 3-d navier-stokes methods. In P. Ferrand and S. Aubert PUG 2002, editors, *ISUAAAT'2000 conference in Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. ISUAAAT, 2000.
- [20] J-C Chassaing and G.A. Gerolymos. Time-linearized time-harmonic 3-d navier stokes shock-capturing schemes. AIAA-CEAS10, Aeroacoustics Conference, May 2004.
- [21] J-C Chassaing and G.A. Gerolymos. Time-linearized time-harmonic 3-d navier stokes shock-capturing schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007. in print.
- [22] J.C. Chassaing, G.A. Gerolymos, and J.G. Jérémiasz. GMRES solution of compressible linearized navier-stokes equations without pseudo-time-marching. AIAA Paper 2006-0688, 2006.
- [23] T. Chen, P. Vasanthakumar, and L. He. Unsteady blade row interaction using nonlinear harmonic approach. *J. Prop. Power*, 17(3) :651–658, May 2001.
- [24] T.J. Choi, C.H. Amon, T.I.P. Shih, and N. Trigui. Cfd shape optimization based on an adjoint variable formulation of the compressible navier-stokes equations.
- [25] W. S. Clark. *Investigation of Unsteady Viscous Flows in Turbomachinery Using a Linearized Navier-Stokes Analysis*. Ph.D., Duke University, Durham [NC, USA], April 1998.
- [26] W. S. Clark and K. C. Hall. A time-linearized Navier-Stokes analysis of stall flutter. *ASME J. Turbom.*, 122(3) :467–476, July 2000.
- [27] T. J. Coakley. Implicit upwind methods for the compressible navier-stokes equations. *AIAA J.*, 23(3) :374–380, March 1985. (also NASA TM 85899).
- [28] M.S. Compabosso, M.C. Duta, and M.B. Giles. Adjoint calculation of sensitivities of turbomachinery objective functions. *J. Prop. Power*, 19 :693–703, 2003.
- [29] M.S. Compabosso and M.B. Giles. Stabilizing linear harmonic flow solvers for turbomachinery aeroelasticity with complex iterative algorithms. *AIAA J.*, 44(5) :1048–1059, May 2006.
- [30] J.C. Culioli. *Introduction à l'Optisation*. ellipses, Paris, F, 1994.
- [31] A. Dadone and B. Grossman. Fast convergence of viscous airfoil design problems. *AIAA J.*, 40 :1997–2005, 2002.
- [32] J. M. Détery. Experimental investigation of turbulence properties in transonic shock/boundary-layer interactions. *AIAA J.*, 21 :180–185, 1983. (also AIAA Paper 81-1245, 1981).
- [33] J.E. Dennis and R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations*. Prentice-hall, new jersey edition, 1983.
- [34] L. Dubuc, F. Cantariti, M. Woodgate, B. Gribben, K. J. Badcock, and B. E. Richards. Solution of the unsteady euler equations using an implicit dual-time method. *AIAA J.*, 36(8) :1417–1424, August 1998.
- [35] J. Elliot and J. Peraire. Aerodynamic optimization on unstructured meshes with viscous effects. AIAA Paper 1997-1849, 1997.
- [36] Eyal and M.D. Salas. Admitting the inadmissible : Adjoint formulation for incomplete cost functionals in aerodynamic optimization. Icase Report 1997-0069, 1997.
- [37] S. Eyi and K.D. Lee. Effect of sensitivity calculation on navier-stokes design optimization. AIAA Paper 1994-0060, 1994.

- [38] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles – i – formes générales. *J. Méc.*, 4 :361–390, 1965.
- [39] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles – ii – méthode des vitesses moyennes ; méthode des vitesses moyennes pondérées par la masse volumique. *J. Méc.*, 4 :391–421, 1965.
- [40] R. Fletcher. Conjugate gradients methods for indefinite systems. In New York Springer Verlag, editor, *Proceedings of the Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis 1974*, pages 73–89. ASME, 1975.
- [41] V. Frayssé, L. Giraud, and S. Gratton. A set of flexible-gmres routines for real and complexe arithmetics. Technical reports tr/pa/98/20, CERFACS, Toulouse [F], 1998.
- [42] R.W. Freund. A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-hermitian linear systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(2) :470–482, March 1993.
- [43] J. Gastis and D.W. Zingg. A fully coupled newton-krylov algorithm for aerodynamic optimization. AIAA Paper 2003–3956, June 2003.
- [44] G. A. Gerolymos. Numerical integration of the 3-D euler equations for flutter analysis of axial flow compressors. *Int. J. Turbo Jet Eng.*, 7 :131–142, 1990.
- [45] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Implicit computation of the 3-D compressible Navier-Stokes equations using  $k - \varepsilon$  turbulence closure. *AIAA J.*, 34(7) :1321–1330, July 1996.
- [46] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Near-wall Reynolds-stress 3-D transonic flows computation. *AIAA J.*, 35(2) :228–236, February 1997.
- [47] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Wall-normal-free near-wall Reynolds-stress closure for 3-D compressible separated flows. *AIAA J.*, 39(10) :1833–1842, October 2001.
- [48] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Mean-flow-multigrid for implicit reynolds-stress-model computations. *AIAA J.*, 43, 2005. (accepted feb 2005 ; in print).
- [49] M. B. Giles and N. A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. *Flow Turb. Comb.*, 65 :393–415, 2000.
- [50] M.B. Giles, M.C. Duta, J.D. Muller, and N.A. Pierce. Algorithm developments for discrete adjoint methods. *AIAA J.*, 41 :198–205, 2003.
- [51] M.B. Giles and N.A. Pierce. Adjoint equations in cfd : Duality boundary conditions and solution behaviour. AIAA Paper 1997–1850, 1997.
- [52] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore [MD, USA], 1989.
- [53] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*, pages 150–152. The John Hopkins University Press, Baltimore [MD, USA], 1989.
- [54] P. Guezaine. Newton-krylov strategy for compressible turbulent flow on unstructured meshes. *AIAA J.*, 39(3) :528–531, Marsh 2000.
- [55] M.M. Gupta and R.P. Manohar. Direct solution of the biharmonic equation using noncoupled approach. *J. Comp. Phys.*, 33 :236–248, 1979.
- [56] K. C. Hall and W. S. Clark. Linearized Euler predictions of unsteady aerodynamic loads in cascades. *AIAA J.*, 31(3) :540–550, March 1993.
- [57] K. C. Hall, W. S. Clark, and C. B. Lorence. A linearized Euler analysis of unsteady transonic flows in turbomachinery. *ASME J. Turbom.*, 116(3) :477–488, July 1994.
- [58] K. C. Hall and E. F. Crawley. Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized euler equations. *AIAA J.*, 27(6) :777–787, June 1989.

- [59] K. C. Hall and C. B. Lorence. Calculation of 3-D unsteady flows in turbomachinery using the linearized harmonic Euler equations. *ASME J. Turbom.*, 115 :800–809, 1993.
- [60] K. C. Hall, J. P. Thomas, and W. S. Clark. Computation of unsteady nonlinear flow in cascades using a harmonic balance technique. *AIAA J.*, 40(5) :879–886, May 2002.
- [61] K. Hanjalić and B. E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52 :609–638, 1972.
- [62] E. Hardee, H.H. Chang, K.K. Choi, X. Yu, and I. Grindeanu. A cad-based design sensitivity analysis and optimization for structural shape design applications. AIAA Paper 1996–3990, 1996.
- [63] R. Haugeard. *Aérodynamique 3-D Instationnaire des Turbomachines linéarisée en temps*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], January 1996.
- [64] L. He and W. Ning. Efficient approach for analysis of unsteady viscous flows in turbomachines. *AIAA J.*, 36(11) :2005–2012, November 1998.
- [65] G. W. Hedstrom. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. *J. Comp. Phys.*, 30 :222–237, 1979.
- [66] S. Hiernaux and J.A. Essers. Aerodynamique shape optimization using navier-stokes equations and optimal control theory. AIAA Paper 1999–3297, 1999.
- [67] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 1. John Wiley and Sons, New York [NY, USA], 1 edition, 1988.
- [68] D. Holmes and B. Lorence. Three-dimensional linearized navier-stokes calculations fo flutter and forced response. In T. H. Fransson, editor, *Proceedings of the 8th International Symposium held in Stockholm, Sweeden*, pages 20·7–20·12. Kluwer Academic Publishers, September 1997.
- [69] M. Imhof. *Aérodynamique Numérique Turbulente Linéarisée en Temps*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], October 2000.
- [70] A. Jameson. Solution of the euler equations for 2-d transonic flow by a multigrid method. *Appl. Math. Comp.*, 13 :327–355, 1983.
- [71] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, pages 223–260, 1988.
- [72] A. Jameson. Time-dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. AIAA Paper 1991–1596, 1991.
- [73] A. Jameson. Aerodynamic shape optimisation using the adjoint method. Lecture Series at Von Karàn Institute, February 1993.
- [74] A. Jameson. Re-engendering the design process through computation. *J. of Aircraft*, 36 :36–50, 1999.
- [75] A. Jameson, J.J. Alonso, J.J. Reuthers, L. Martinelli, and J.C. Vassenberg. Aerodynamic shape optimization based on control theory. AIAA Paper 1998–2538, 1998.
- [76] A. Jameson, N.A. Pierce, and L. Martelli. Optimum aerodynamic design using the navier-stokes equations part 1. AIAA Paper 1997–0101, 1997.
- [77] A. Jameson, N.A. Pierce, and L. Martelli. Optimum aerodynamic design using the navier-stokes equations part 2. AIAA Paper 1997–0101, 1997.
- [78] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a 2-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15(15) :301–314, 1972.
- [79] C.S. Kim, C. Kim, and O.H. Rho. Sensitivity analysis for the navier-stokes equations with two-equation turbulence models. *AIAA J.*, 39(5) :838–845, May 2001.

- [80] V.M. Korivi, P.A. Newman, and A.C. Taylor. Aerodynamic optimization using sensitivity derivatives from a three-dimensional supersonic euler code. *J. of Aircraft*, 35(3) :405–411, May-June 1998.
- [81] E. Kreiselmaier and B. Laschka. Small disturbance euler equations : Efficient and accurate tool for unsteady load prediction. *J. of Aircraft*, 37(5) :770–778, September 2000.
- [82] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Research of the National Bureau of Standards J.*, 42 :255–282, 1950.
- [83] C. Lanczos. Solution systèmes of linear equations by minimized itérations. *Research of the National Bureau of Standards J.*, 49 :33–53, 1952.
- [84] E. Laporte and P. Le Tallec. Shape optimization in unsteady flows. INRIA Report 3693, May 1999.
- [85] B. E. Launder and S. P. Li. On the elimination of wall-topography parameters from 2-moment closure. *Phys. Fluids*, 6 :999–1006, 1994.
- [86] B. E. Launder and B. I. Sharma. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flows near a spinning disk. *Lett. Heat Mass Transf.*, 1 :131–138, 1974.
- [87] B. E. Launder and N. Shima. 2-moment closure for the near-wall sublayer : Development and application. *AIAA J.*, 27(10) :1319–1325, October 1989.
- [88] M. P. Leclercq and P. L. Stoufflet. Characteristic multigrid method application to solve the euler equations with unstructured and unnested grids. *J. Comp. Phys.*, 104 :329–346, 1993.
- [89] D. R. Lindquist and M. B. Giles. Validity of linearized unsteady Euler equations with shock-capturing. *AIAA J.*, 32(1) :46–53, January 1994. (also AIAA Paper 91–1598, 1991).
- [90] J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971. Translated by S.K. Mitter.
- [91] F. Liu and X. Zheng. Staggered finite-volume scheme for solving cascade flow with a  $k - \omega$  turbulence model. *AIAA J.*, 32(8) :1589–1597, August 1994.
- [92] J. L. Lumley. Towards a turbulence constitutive relation. *J. Fluid Mech.*, 41(7) :413–434, 1970.
- [93] J. L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.*, 18 :123–176, 1978.
- [94] H. Luo, J.D. Baum, and R. Lohner. A fast, matrix-free implicit method for compressible flows on unstructured grids. *J. of Computational Physics*, 146 :664–690, 1998.
- [95] L.M. Manzano, J.V. Lassaline, P. Wong, and D.W. Zingg. A newton-krylov algorithm for the euler equations using unstructured grids. AIAA Paper 2003–0274, 2003.
- [96] D. J. Mavriplis. An assessment of linear versus nonlinear multigrid methods for unstructured mesh solvers. *J. Comp. Phys.*, 175(1) :302–325, January 2002. (also AIAA Paper 2001–2573, 2001).
- [97] P.R. McHgh and D.A. Knoll. Comparison of standard and matrix-free implementations if several newton krylov solvers. *AIAA J.*, 32(12) :2394–2399, December 1994.
- [98] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied Shape Optimization for Fluids*. Oxford Science Publications, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP, 2001. Reprinted in 2005.
- [99] M.E. Mortenson. *Geometric Modeling*. Wiley Computer Publishing, 605 Third Avenue, New York, second edition, 1997.
- [100] L. Mottura, L. Vigevano, and M. Zaccanti. Factorized implicit upwind methods applied to inviscid flows at high mach number. *AIAA J.*, 38(10) :1846–1852, October 2000.
- [101] S.K. Nadarajah and A. Jameson. A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. AIAA Paper 2000–0667, 2000.

- [102] D. Naot, A. Shavit, and M. Wolfshtein. Interactions between components of the turbulent velocity correlation tensor due to pressure fluctuations. *Israel J. Techn.*, 8(3) :259–269, 1970.
- [103] M. Nemec and D. Zingg. Multipoint and multi-objective aerodynamic shape optimization. *AIAA J.*, 40(6) :1146–1154, June 2002.
- [104] R. H. Ni and F. Sisto. Numerical computation of nonstationary aerodynamics for flat plate cascades in compressible flow. *ASME J. Eng. Power*, 98 :165–170, 1976.
- [105] E.J. Nielsen, J. Lu, M.A. Park, and D.L. Darmofal. An implicit, exact dual adjoint solution method for turbulent flows on unstructured grids. *Computers & Fluids*, 33(9) :1131–1155, 2002.
- [106] W. Ning and L. He. Computation of unsteady flows around oscillating blades using linear and nonlinear harmonic euler methods. *ASME J. Turbom.*, 120(3) :508–514, July 1998.
- [107] F. Olawsky, F. Infed, and M. Auweter-Kurtz. Preconditioned newtown method for computing supersonic and hypersonic nonequilibrium flows. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 41(6) :907–914, November-December 2004.
- [108] O. Onur and S. Eyi. Effects of th jacobian evaluation on newtons solution of the euler equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 :211–231, 2005.
- [109] P. Ott, A. Bölcs, and T. H. Fransson. Experimental and numerical study of the time-dependent pressure response of a shock-wave oscillating in a nozzle. *ASME J. Turbom.*, 117(1) :106–114, January 1995.
- [110] B.N. Parlett, D.R. Taylor, and Z.S. Liu. A look-ahead lanczos algorithm for nonsymmetric matrices. *Mathematics of Computation*, 44 :105–124, 1985.
- [111] D. Prasad and J. M. Verdon. A 3-d linearized euler analysis of classical wake/stator interactions : Validation and unsteady response predictions. *Int. J. Aeroacoustics*, 1(2) :137–163, 2002.
- [112] A. Pueyo and D.W. Zingg. Efficient newton-krylov solver for aerodynamic computation. *AIAA J.*, 36(11) :1991–1997, November 1998.
- [113] P.P. Rao and P.J. Morris. Use of finite element methods in frequency domaine aeroacoustics. *AIAA J.*, 44(7) :1643–1652, July 2006.
- [114] S.E. Rogers. Comparison of implicit schemes for the incompressible navier-stokes equations. *AIAA J.*, 33(11) :2066–2072, November 1995. (also AIAA paper 95–0567, 1995).
- [115] J. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz — 2. Mitteilung. *Z. Phys.*, 131 :51–77, 1951.
- [116] A. Ruhe. Implementation aspects of band lanczos algorithms for computation of eigenvalue of large sparse symmetrix matrix. *Mathematics of Computation*, 33 :680–687, 1979.
- [117] Y. Saad. Sparskit a basic tool-kit for sparse matrix computations. url : <http://www-users.cs.umn.edu/saad/software/home.html>.
- [118] Y. Saad. GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7 :856–869, 1986.
- [119] Y. Saad. Analysis of augmented krylov subspace methods. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(2) :435–449, April 1997.
- [120] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Matrix*. 2. edition, 2000.
- [121] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- [122] H. Sadok. *Méthodes de projection pour les systèmes linéaires et non linéaires*. Doctorat, Université Lille 1, Lille [F], 1981.

- [123] L. Sbardella and M. Imregun. Linearized unsteady viscous turbomachinery flows using hybrid grids. *ASME J. Turbom.*, 123(3) :568–582, July 2001.
- [124] L.L. Sherman, A.C. Taylor, L.L. Green, P.A. Newman and G.J.W. Hou, and V.M. Korivi. First and second order aerodynamic sensitivity derivatives via automatic differentiation with incremental iterative methods. AIAA Paper 1994–4262, 1994.
- [125] G.M. Shroff and H.B. Keller. Stabilization of unstable procedures : the recursive projection method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(4) :1099–1120, August 1993.
- [126] V. Simoncini and E. Gallopoulos. An alternative method for nonsymmetric systems with multiple right-hand sides. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(4) :917–933, July 1995.
- [127] V. Simoncini and E. Gallopoulos. Convergence properties of block gmres and matrix polynomials. *Linera Algebra and its Applivations*, 241(3) :787–802, 1996.
- [128] B. Soemoarwoto. The variational method for aerodynamic optimization using the navier-stokes equations. Icase Report 1997–0071, 1997.
- [129] P. Sonneveld. Cgs, a fast lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 10(1) :36–53, 1989.
- [130] A. Soullaimani, N. Ben Salah, and Y. Saad. Enhanced gmres acceleration techniques for some cfd problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 16(1) :1–20, 2002.
- [131] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A 1-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Rech. Aérop.*, 1994-1(1) :5–21, January 1994. (also AIAA Paper 92–0439).
- [132] P. D. Sparis. A method for generating boundary-orthogonal curvilinear coordinate systems using the biharmonic equation. *J. Comp. Phys.*, 61 :445–462, 1985.
- [133] K. Sreenivas and D. L. Witfield. Time- and frequency-domain numerical simulation of linearized Euler equations. *AIAA J.*, 36(6) :968–975, June 1998.
- [134] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux-vector-splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J. Comp. Phys.*, 40 :263–293, 1981.
- [135] G. Tsanga. *Aérodynamique Numérique 3-D des Turbomachines Axiales Multiétages avec Fermeture  $k - \epsilon$  Bas-Reynolds*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], January 1997.
- [136] V. Valentin. *Optimisation Aérodynamique des Aubages dans les Turbomachines Axiales Multiétages*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], June 2002.
- [137] I. Vallet. *Aérodynamique Numérique 3-D Instionnaire avec Fermeture Bas-Reynolds au Second Ordre*. Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris [F], December 1995.
- [138] I. Vallet. Reynolds-stress modeling of 3-d secondary flows with emphasis on turbulent diffusion closure. *J. of Applied Mechanics*, 2007. in press.
- [139] G. D. Van Albada, B. Van Leer, and W. W. Roberts, Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astron. Astroph.*, 108 :76–84, 1982.
- [140] B. Van Leer. Flux-vector-splitting for the euler equations. Number 170 in *Lect. Notes Phys.*, pages 507–512. Springer, 1982.
- [141] G.N. Vanderplaast. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill, 1984.
- [142] V. Venkatakrishnan and D.J. Mavriplis. Implicit solvers for unstructured meshes. *J. of Computational physics*, 105 :83–91, 1993.
- [143] H.A. Van Der Vorst. Bi-cgstab : a fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2) :631–644, March 1992.



- [144] G.A. Wrenn. An indirect method for numerical optimization using the kreisselmeier-steinhauser function. NASA CR-4220, March 1989.



# Méthodes de Krylov pour les Equations de Navier-Sokes Non Linéaires, Linéarisées et pour l'Optimisation Aérodynamique

Résumé : La résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées compressibles est de plus en plus utilisée pour deux types de problèmes : 1) des résolutions linéarisées et harmoniques en temps pour des problèmes d'aéroélasticité et d'aéroacoustique et 2) pour des exercices d'optimisation par la méthode du gradient. Les algorithmes proposés sont généralement basés sur une approche dite « *pseudo-time-marching* » dont la ressemblance avec les résolutions des équations de Navier-Stokes non linéaires a souvent été décrite comme un avantage car elle simplifie le développement numérique. L'utilisation croissante de ces méthodes a amené à la découverte de problèmes de stabilité numérique lorsque ces équations sont résolues autour d'un champ stationnaire comportant un point d'inflexion dans les profils de vitesse sur des maillages fins. Le but de ce doctorat est de développer une méthode sans intégration pseudo-temporelle pour stabiliser la résolution des équations de Navier-Stokes 2D linéarisées pour les deux problèmes précités. Les systèmes linéaires ainsi obtenus sont résolus par une méthode itérative de type GMRes avec redémarrage préconditionné par une factorisation approchée ILU0. Les résultats numériques sont comparés, lorsque cela est possible, à une approche classique AF-ADI ou GMRes avec intégration pseudo-temporelle, pour des calculs 2D haut subsonique et transsonique relatif à la propagation d'une perturbation harmonique à l'aval d'une tuyère. Notre méthode de résolution a aussi été testée et validée pour deux exercices d'optimisation, où les systèmes linéaires issus des méthodes directe et adjointe ont été résolus par l'algorithme classique GMRes et par l'algorithme MGMRes permettant de résoudre simultanément des problèmes ayant la même matrice mais plusieurs vecteurs à droite. De plus, une méthode des équations de Navier-Stokes non linéaires par une résolution pseudo-Newton-GMRes faiblement couplée a été développée et validée dans le cas d'un écoulement haut subsonique et transsonique dans une tuyère 2D et les résultats en termes de performance de résolution ont été comparés à une résolution pseudo-Newton-AF-ADI.

MOTS CLÉS : GMRes, Navier-Stokes non linéaire, Navier-Stokes harmoniques et linéarisées en temps, optimisation aérodynamique

## Krylov Methods for Nonlinear and Linearized Navier-Sokes Equations and Aerodynamic Optimization

Abstract : Linearized 3-D compressible Navier-Stokes solvers are increasingly used, for two different applications : 1) time-linearized time-harmonic computations for aeroelasticity and aeroacoustics, and 2) for gradient approaches to design. The proposed algorithms are traditionally based on a pseudo-time approach, and the resemblance of the linearized algorithm with standard nonlinear Navier-Stokes problems has often been cited as an advantage, simplifying code development. The increasing use of these methods brought forward problems of numerical instability, when dealing with unstable mean-velocity profiles in fine grids. The purpose of this Ph. D. is to investigate a non-pseudo-time-marching solution method for the stabilization of time-linearized compressible 2-D Navier-Stokes computations. The resulting linear system is solved using a non-pseudo-time-marching restarted GMRes procedure with ILU0 preconditioner. Numerical results are compared, when it is possible, with classical AF-ADI or GMRes pseudo-time-marching approaches for the computation of a 2-D subsonic and transonic channel flow response to a back-pressure harmonic perturbation at the exit of the nozzle. The approach has also been tested for two subsonic channel design exercises, where the direct and adjoint method linear systems were solved using the classical GMRes solver or with a multiple right hand side GMRes solver. Moreover a non-fully pseudo-Newton-GMRes solver for nonlinear Navier-Stokes has been developed and compared with a pseudo-Newton-AF-ADI solver for a 2-D subsonic and transonic nozzle.

KEY WORDS : GMRes, Nonlinear Navier-Stokes, time-linearized time-harmonic Navier-Stokes, Aerodynamic Optimization