Matrices polynomiales et égalisation de canal

Sylvie Icart

Université de Nice Sophia Antipolis
Laboratoire I3S
Polytech' Nice-Sophia

1er mars 2013

Parcours

- MCF 61^e section, UNS Laboratoire I3S depuis 1991
  Polytech' Dépt Electronique -ESINSA (depuis 1999)
  12 mois de CRCT en 2011-12
  Département EEA, UFR Sciences (1991-99)
- Post-Doctorat INRIA Sophia (1991)
- Doctorat LAN Université de Nantes (1987-90)
- DEA Automatique et Informatique Industrielle (1987)
- Ingénieur ENSM, spécialité Automatique (1987)

Enseignement

- Logique et Electronique: TP ESINSA 1 & MEEA
- Traitement du Signal: C, TD, TP LEEA & MEEA, CiP2
- Mathématiques: Algèbre et Outils Mathématiques pour l'Ingénieur C,TD CiP1
- Automatique: C,TD,TP MEEA & Elec3 & Elec4
- Systèmes multivariables : DEA Aravis

Responsabilités administratives

- Responsabilité des Stages Techniciens (1999-2009)
- Responsabilité de l'option TNS (2006-09)
- Responsabilité des stages de fin d'études (2009-)

Responsabilités administratives

- Responsabilité des Stages Techniciens (1999-2009)
  70 étudiants, 8 semaines de stage minimum
  bourses, conventions, rapports, soutenances
  aucun support administratif
- Responsabilité de l'option TNS (2006-09)
- Responsabilité des stages de fin d'études (2009-)

Responsabilités administratives

- Responsabilité des Stages Techniciens (1999-2009)
  70 étudiants, 8 semaines de stage minimum
  bourses, conventions, rapports, soutenances
  aucun support administratif
- Responsabilité de l'option TNS (2006-09)
  15^{aine} étudiants, 3 semestres
  maquette pédagogique, edt
  intervenants industriels et académiques (>20)
  prix TI
- Responsabilité des stages de fin d'études (2009-)

Responsabilités administratives

- Responsabilité des Stages Techniciens (1999-2009)
  70 étudiants, 8 semaines de stage minimum
  bourses, conventions, rapports, soutenances
  aucun support administratif
- Responsabilité de l'option TNS (2006-09)
  15^{aine} étudiants, 3 semestres
  maquette pédagogique, edt
  intervenants industriels et académiques (>20)
  prix TI
- Responsabilité des stages de fin d'études (2009-)
  40-70 étudiants, 5 à 6 mois de stage
  relations avec les entreprises
  devenir des étudiants nouvellement diplômés

Activités de Recherche

- Commande multivariable, découplage (thèse)
- Commande d'un bras de robot flexible (post-doctorat)
- Traitement du signal, représentation temps-fréquence (thèse O. Lemoine)
- Égalisation à erreur bornée et dans le domaine spectral
- Égalisation aveugle multicapteur (GDR & Dea R. Gautier & thèse L. Rota)
- Tenseurs et égalisation (thèse M. Sørensen)

Activités de Recherche

- Commande multivariable, découplage (thèse)
- Commande d'un bras de robot flexible (post-doctorat)
- Traitement du signal, représentation temps-fréquence (thèse O. Lemoine)
- Égalisation à erreur bornée et dans le domaine spectral
- Égalisation aveugle multicapteur (GDR & Dea R. Gautier & thèse L. Rota)
- Tenseurs et égalisation (thèse M. Sørensen)

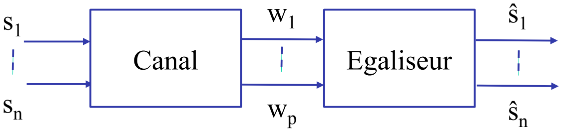
Point commun: algèbre linéaire et multi-linéaire
Focus: systèmes multivariables
Application: égalisation

Encadrements

- Thèse O. Lemoine "Détection de signaux non stationnaires par représentation temps-fréquence", dirigée par G. Alengrin, octobre 1995 (30%).
- Dea R. Gautier: "Séparation de mélanges convolutifs", juillet 1995.
- Dea A. Ansori "Simulation d'une chaîne de communication à l'aide du logiciel Matlab", juin 1996.
- Thèse L. Rota "Égalisation aveugle de systèmes multi-utilisateurs", décembre 2004, co-direction avec P. Comon (50%).
- Thèse M. Sørensen "Tensor Tools with Application in Signal Processing", juin 2010, co-direction avec L. Deneire et L. De Lathauwer (30%).

Position du problème

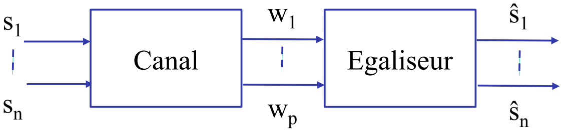
n émetteurs *p* récepteurs



Egalisation aveugle multivariable : le canal et les sources sont inconnues

Position du problème

n émetteurs p récepteurs



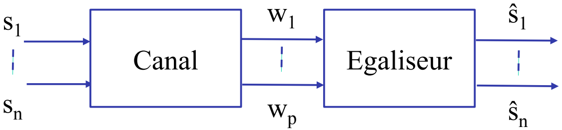
Egalisation aveugle multivariable : le canal et les sources sont inconnues

Hypothèses

- sources blanches et i.i.d
- autant de sources que d'observations (dans la suite)
- canal: linéaire, invariant dans le temps
  mélange instantané : $\boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
  mélange convolutif FIR: $\boldsymbol{C}(z)$ est une matrice polynomiale

Position du problème

n émetteurs p récepteurs



Egalisation aveugle multivariable : le canal et les sources sont inconnues

Hypothèses

- sources blanches et i.i.d
- autant de sources que d'observations (dans la suite)
- canal: linéaire, invariant dans le temps
  mélange instantané : $\boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
  mélange convolutif FIR: $\boldsymbol{C}(z)$ est une matrice polynomiale

La solution du problème n'est pas unique: on égalise à $\boldsymbol{\Delta}(z)\boldsymbol{P}$ près où $\boldsymbol{\Delta}(z)$ matrice diagonale de retards et $\boldsymbol{P}$ est une permutation

Matrice polynomiale

- un polynôme... avec des coefficients matriciels

$$\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}, \boldsymbol{M}_k \in \mathbb{C}^{n\times n}, k \in \mathbb{N}$$

- ou... une matrice avec des coefficients polynomiaux

$$\boldsymbol{M}(z) = (m_{ij}(z)) \text{ avec } m_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} m_{ijk} z^{-k}$$

Matrice polynomiale

- un polynôme... avec des coefficients matriciels

$$\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}, \boldsymbol{M}_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, k \in \mathbb{N}$$

- ou... une matrice avec des coefficients polynomiaux

$$\boldsymbol{M}(z) = (m_{ij}(z)) \text{ avec } m_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} m_{ijk} z^{-k}$$

i et j indices 'spatiaux' et k indice temporel

ordre de $\boldsymbol{M}$: plus grand indice k tel que $\boldsymbol{M}_k \neq \boldsymbol{0}$ ou $m_{ijk} \neq 0$.

Matrices polynomiales de Laurent

l'indice temporel peut être positif ou négatif (matrice spectrale)

$$\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=m}^{p} \boldsymbol{M}_k z^k, \boldsymbol{M}_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, m, p \in \mathbb{Z}, m \leq p$$

matrices L-unimodulaires: éléments inversibles de $\mathbb{C}^{n \times n}[z, z^{-1}]$:

$$\det(\boldsymbol{M}(z)) = az^{\alpha}, a \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{Z}$$

Matrices polynomiales de Laurent

l'indice temporel peut être positif ou négatif (matrice spectrale)

$$\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=m}^{p} \boldsymbol{M}_k z^k, \boldsymbol{M}_k \in \mathbb{C}^{n\times n}, m, p \in \mathbb{Z}, m \leq p$$

matrices L-unimodulaires: éléments inversibles de $\mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$:

$$\det(\boldsymbol{M}(z)) = az^{\alpha}, a \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{Z}$$

opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes :

$$\begin{array}{rcl} \underline{c}_j(z) & \leftarrow & \alpha(z)\underline{c}_j(z), \alpha \neq 0 \\ \underline{c}_j(z) & \leftrightarrow & \underline{c}_{j'}(z) \\ \underline{c}_j(z) & \leftarrow & \underline{c}_j(z) + \alpha(z)\underline{c}_{j'}(z) \end{array}$$

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*,$

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*$,
sur le cercle unité: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(z)$.

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*,$

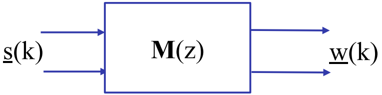
sur le cercle unité: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(z).$

Matrice para-hermitienne: $\boldsymbol{M}(z) = \widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*$,

sur le cercle unité: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(z)$.

Matrice para-hermitienne: $\boldsymbol{M}(z) = \widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$

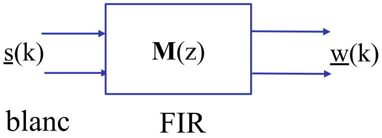


$$\boldsymbol{\Gamma}_w(z) = \boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{\Gamma}_s(z)\boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*})$$

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*,$

sur le cercle unité: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(z).$

Matrice para-hermitienne: $\boldsymbol{M}(z) = \widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$

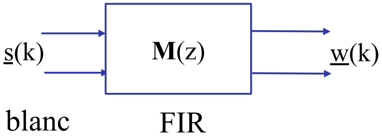


$$\boldsymbol{\Gamma}_w(z) = \boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{\Gamma}_s(z)\boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}) = \boldsymbol{M}(z)\widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$$

Paraconjugaison: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*,$

sur le cercle unité: $\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{M}^H(z).$

Matrice para-hermitienne: $\boldsymbol{M}(z) = \widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$



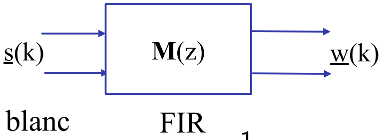
$$\boldsymbol{\Gamma}_w(z) = \boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{\Gamma}_s(z)\boldsymbol{M}^H(\frac{1}{z^*}) = \boldsymbol{M}(z)\widetilde{\boldsymbol{M}}(z)$$

Matrice para-unitaire: $\boldsymbol{M}(z)\widetilde{\boldsymbol{M}}(z) = \boldsymbol{I}$

Paraconjugaison: $\widetilde{M}(z) = M^H(\frac{1}{z^*}), \forall z \in \mathbb{C}^*$,

sur le cercle unité: $\widetilde{M}(z) = M^H(z)$.

Matrice para-hermitienne: $M(z) = \widetilde{M}(z)$



$$\Gamma_w(z) = M(z)\Gamma_s(z)M^H(\frac{1}{z^*}) = M(z)\widetilde{M}(z)$$

Matrice para-unitaire: $M(z)\widetilde{M}(z) = I$

si, de plus, $\underline{w}$ blanc

$$\Gamma_w(z) = M(z)\Gamma_s(z)M^H(\frac{1}{z^*}) = M(z)\widetilde{M}(z) = I$$

Factorisation d'une matrice para-unitaire FIR

si $\boldsymbol{H}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z^{-1}]$ et $\boldsymbol{H}(z)\widetilde{\boldsymbol{H}}(z) = \boldsymbol{I}$ [Vai] alors

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_1 \ldots \boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_{N-1}\boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_N$$

$\boldsymbol{Q}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaires et $\boldsymbol{Z}(z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Q}_i$ produit de $n(n-1)/2$ rotations de Givens

$$\boldsymbol{U}(i,j,\theta,\phi) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \vdots & \boldsymbol{0} & \vdots & \boldsymbol{0} \\ \cdots & \cos\theta & \cdots & \sin\theta e^{\jmath\phi} & \cdots \\ \boldsymbol{0} & \vdots & \boldsymbol{I}_{n_2} & \vdots & \boldsymbol{0} \\ \cdots & -\sin\theta e^{-\jmath\phi} & \cdots & \cos\theta & \cdots \\ \boldsymbol{0} & \vdots & \boldsymbol{0} & \vdots & \boldsymbol{I}_{n_3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

Factorisation d'une matrice para-unitaire FIR

si $\boldsymbol{H}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z^{-1}]$ et $\boldsymbol{H}(z)\widetilde{\boldsymbol{H}}(z) = \boldsymbol{I}$ [Vai] alors

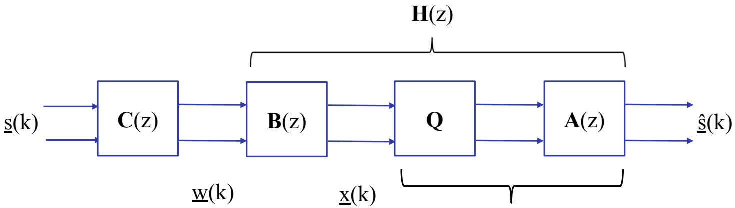
$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_1 \ldots \boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_{N-1}\boldsymbol{Z}(z)\boldsymbol{Q}_N$$

$\boldsymbol{Q}_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaires et $\boldsymbol{Z}(z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Q}_i$ produit de $n(n-1)/2$ rotations de Givens

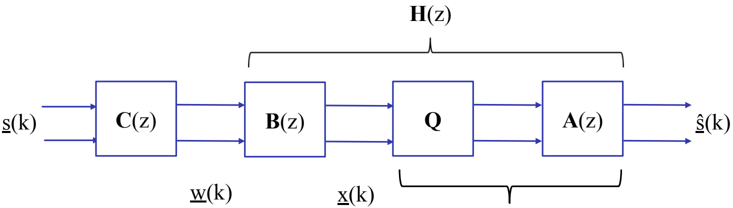
N degré de Mc Millan de $\boldsymbol{H}(z)$

$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}(z)$ avec $\boldsymbol{Q}$ unitaire.



On définit un critère de contraste:

$$\Upsilon = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ii,ii}^{\hat{s}}$$



On définit un critère de contraste:

$$\Upsilon = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Gamma^{\hat{s}}_{ii,ii}$$

les cumulants de $\underline{\hat{s}}$ s'expriment à partir de ceux de $\underline{x}$:

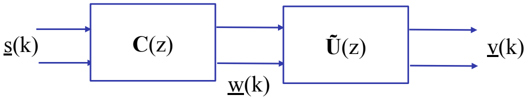
$$\Gamma^{\hat{s}}_{ii,ii} = \sum_{abcd} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{prst} a_{iq}(\tau_1) a^*_{ir}(\tau_2) a_{is}(\tau_3) a^*_{it}(\tau_4) q_{pa} q^*_{rb} q_{sc} q^*_{td} \Gamma^{x}_{ac,bd}(\boldsymbol{\tau}).$$

Pour maximiser le contraste, on cherche les $\frac{n(n-1)}{2}$ paires d'angles (θ, ϕ) de $\boldsymbol{Q}$ qui maximisent Υ [ICR09].

Diagonalisation d'une matrice para-hermitienne

- Motivation :
  soit $\mathbf{\Gamma}(z)$ la matrice spectrale des observations, $\mathbf{\Gamma}(z) = \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(z)$, supposons qu'il existe $\boldsymbol{U}(z)$ para-unitaire tq

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \boldsymbol{U}(z)\mathbf{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) \text{ avec } \mathbf{\Lambda}(z) \text{ diagonale}$$

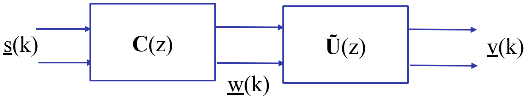


$$\mathbf{\Gamma}_v(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\mathbf{\Gamma}_w(z)\boldsymbol{U}(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z)\mathbf{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z) = \mathbf{\Lambda}(z)$$

Diagonalisation d'une matrice para-hermitienne

- Motivation :
  soit $\boldsymbol{\Gamma}(z)$ la matrice spectrale des observations, $\boldsymbol{\Gamma}(z) = \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(z)$,
  supposons qu'il existe $\boldsymbol{U}(z)$ para-unitaire tq

$$\boldsymbol{\Gamma}(z) = \boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) \text{ avec } \boldsymbol{\Lambda}(z) \text{ diagonale}$$



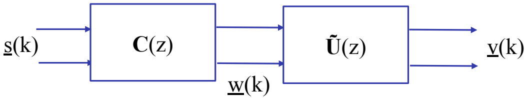
$$\boldsymbol{\Gamma}_v(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{\Gamma}_w(z)\boldsymbol{U}(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{\Lambda}(z)$$

- Analogie:
  toute matrice hermitienne est diagonalisable par une matrice unitaire

Diagonalisation d'une matrice para-hermitienne

- Motivation :
  soit $\mathbf{\Gamma}(z)$ la matrice spectrale des observations, $\mathbf{\Gamma}(z) = \widetilde{\mathbf{\Gamma}}(z)$,
  supposons qu'il existe $\boldsymbol{U}(z)$ para-unitaire tq

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \boldsymbol{U}(z)\mathbf{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) \text{ avec } \mathbf{\Lambda}(z) \text{ diagonale}$$



$$\mathbf{\Gamma}_v(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\mathbf{\Gamma}_w(z)\boldsymbol{U}(z) = \widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z)\mathbf{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z) = \mathbf{\Lambda}(z)$$

- Analogie:
  toute matrice hermitienne est diagonalisable par une matrice unitaire
- Problème :
  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ est un anneau et pas un corps donc $\mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ est une module et pas un espace vectoriel !

Valeurs propres d'une matrice polynomiale

- valeurs propres de $\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}$ [Lancaster]

$$\text{racines de } \det\left(\sum_{k=0}^{\ell} \lambda^k \boldsymbol{M}_k\right) = 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

Valeurs propres d'une matrice polynomiale

- valeurs propres de $\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}$ [Lancaster]

$$\text{racines de } \det(\sum_{k=0}^{\ell} \lambda^k \boldsymbol{M}_k) = 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

- Décomposition en valeurs propres polynomiale PEVD [McWhirter]: Soit $\boldsymbol{M}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$, on cherche les L-polynômes $\lambda(z)$ et les vecteurs L-polynomiaux $\underline{v}(z)$ tq

$$\boldsymbol{M}(z)\underline{v}(z) = \lambda(z)\underline{v}(z), \forall z$$

soit $\boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)$

Valeurs propres d'une matrice polynomiale

- valeurs propres de $\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}$ [Lancaster]

$$\text{racines de } \det(\sum_{k=0}^{\ell} \lambda^k \boldsymbol{M}_k) = 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

- Décomposition en valeurs propres polynomiale PEVD [McWhirter]: Soit $\boldsymbol{M}(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}[z, z^{-1}]$, on cherche les L-polynômes $\lambda(z)$ et les vecteurs L-polynomiaux $\underline{v}(z)$ tq

$$\boldsymbol{M}(z)\underline{v}(z) = \lambda(z)\underline{v}(z), \forall z$$

soit $\boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)$
Problème:
rien ne garantit une solution polynomiale (ni même rationnelle).
Cas d'une matrice para-hermitienne:
vecteurs propres "orthonormaux": $\widetilde{\underline{v}}_i(z)\underline{v}_j(z) = \delta_{ij}$ soit $\widetilde{\boldsymbol{U}}(z)\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{I}$

Conjecture:

Soit $\boldsymbol{H}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ une matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$) alors

- $\exists\ \boldsymbol{U}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$),
- $\exists\ \boldsymbol{\Lambda}(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ diagonale tq:

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z),\ \forall z$$

Exemple:

Soit $\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2z^{-1} + 6 - 2z \end{bmatrix}$, alors il n'existe pas de solution !

Polynômes invariants d'une matrice L-polynomiale

Forme de L-Smith (théorème de la base adaptée):

Soit $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$, $\exists$ $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ L-unimodulaires tq

$$\boldsymbol{U}_1(z)\boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{U}_2(z) = \boldsymbol{\Lambda}(z)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1(z) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r(z) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

- λ_i *unique à une multiplication par un monôme près.*
- λ_i divise λ_{i+1}.
- r rang normal de $\boldsymbol{M}$.

$\boldsymbol{M} \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{P}$ ssi elles ont même forme de L-Smith.

Polynômes invariants d'une matrice L-polynomiale

Forme de L-Smith (théorème de la base adaptée):
Soit $\boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$, $\exists\ \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ L-unimodulaires tq

$$\boldsymbol{U}_1(z)\boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{U}_2(z) = \boldsymbol{\Lambda}(z)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1(z) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r(z) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

- λ_i *unique à une multiplication par un monôme près.*
- λ_i divise λ_{i+1}.
- r rang normal de $\boldsymbol{M}$.

$\boldsymbol{M} \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{P}$ ssi elles ont même forme de L-Smith.
Pour assurer l'unicité des polynômes invariants:
λ_i L-monic i.e. polynôme monic n'ayant pas 0 comme racine

Calcul pratique des L-polynômes invariants $\lambda_i(z)$:

$$\lambda_i(z) = \frac{\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))}{\Delta_{i-1}(\boldsymbol{M}(z))}$$

$\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))$ pgcd L-normalisé des mineurs $i \times i$ de $\boldsymbol{M}$ (pas de racine en 0, coefficient du terme de plus haut degré =1)

Calcul pratique des L-polynômes invariants $\lambda_i(z)$:

$$\lambda_i(z) = \frac{\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))}{\Delta_{i-1}(\boldsymbol{M}(z))}$$

$\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))$ pgcd L-normalisé des mineurs $i \times i$ de $\boldsymbol{M}$ (pas de racine en 0, coefficient du terme de plus haut degré =1)
pgcd: il faut être sur un anneau euclidien et donc définir un "degré" pour un polynôme de Laurent.
soit $p(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$,

$$p(z) = \sum_{i=m}^{\ell} p_i z^i \text{ avec } m, \ell \in \mathbb{Z}, m \leq \ell, p_i \in \mathbb{C}, p_m p_\ell \neq 0$$

L-degré de p : $d(p) = \ell - m$

Calcul pratique des L-polynômes invariants $\lambda_i(z)$:

$$\lambda_i(z) = \frac{\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))}{\Delta_{i-1}(\boldsymbol{M}(z))}$$

$\Delta_i(\boldsymbol{M}(z))$ pgcd L-normalisé des mineurs $i \times i$ de $\boldsymbol{M}$ (pas de racine en 0, coefficient du terme de plus haut degré =1)
pgcd: il faut être sur un anneau euclidien et donc définir un "degré" pour un polynôme de Laurent.
soit $p(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$,

$$p(z) = \sum_{i=m}^{\ell} p_i z^i \text{ avec } m, \ell \in \mathbb{Z}, m \leq \ell, p_i \in \mathbb{C}, p_m p_\ell \neq 0$$

L-degré de p : $d(p) = \ell - m$
si $p \in \mathbb{C}[z], d(p) = \deg(p)$ ssi $z = 0$ n'est pas zéro de p.

Exemples

$$\boldsymbol{A}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & z \end{bmatrix},$$

$\gcd\{z, z, z\} = z, \det \boldsymbol{A}(z) = z^2$, d'où $\boldsymbol{A}(z) \overset{S}{\sim} z\boldsymbol{I}$

L-gcd$\{z, z, z\} = 1$, L-gcd$\{z^2\} = 1$, soit $\boldsymbol{A}(z) \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{I}$.

Exemples

$$\boldsymbol{A}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & z \end{bmatrix},$$

$\gcd\{z, z, z\} = z, \det \boldsymbol{A}(z) = z^2$, d'où $\boldsymbol{A}(z) \overset{S}{\sim} z\boldsymbol{I}$
L-gcd$\{z, z, z\} = 1$, L-gcd$\{z^2\} = 1$, soit $\boldsymbol{A}(z) \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{B}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z-1 & z \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}(z) \overset{S}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}$$

Exemples

$$\boldsymbol{A}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & z \end{bmatrix},$$

$\gcd\{z, z, z\} = z, \det \boldsymbol{A}(z) = z^2$, d'où $\boldsymbol{A}(z) \overset{S}{\sim} z\boldsymbol{I}$
L-gcd$\{z, z, z\} = 1$, L-gcd$\{z^2\} = 1$, soit $\boldsymbol{A}(z) \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{B}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z-1 & z \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B}(z) \overset{S}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{B}(z) \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{U}_1(z)\boldsymbol{B}(z)\boldsymbol{U}_2(z) = \boldsymbol{I}$ avec

$$\boldsymbol{U}_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -z^{-1} + z^{-2} & z^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{U}_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (non uniques).}$$

Propriétés des L-polynômes invariants

- Matrice L-unimodulaire ($\det(\boldsymbol{U}) = az^{\alpha}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$

- Matrice para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$

- Matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$): λ_i auto-inversif

$$\lambda_i(z) = e^{\jmath\theta_i} z^{m_i} \widetilde{\lambda}_i(z) \text{ avec } \theta_i \in \mathbb{R}, m_i = \deg(\lambda_i)$$

Propriétés des L-polynômes invariants

- Matrice L-unimodulaire ($\det(\boldsymbol{U}) = az^{\alpha}$): $\lambda_i(z) = 1,\ \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z) = az^{\alpha} = \det \boldsymbol{U}_1(z) \det \boldsymbol{\Lambda}(z) \det \boldsymbol{U}_2(z)$,
  donc $\det \boldsymbol{\Lambda}(z) = cz^{\beta}$, mais λ_i L-monic, donc $\lambda_i(z) = 1, \forall i$.
- Matrice para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$
- Matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$): λ_i auto-inversif

$$\lambda_i(z) = e^{\jmath\theta_i} z^{m_i} \widetilde{\lambda}_i(z) \text{ avec } \theta_i \in \mathbb{R}, m_i = \deg(\lambda_i)$$

Propriétés des L-polynômes invariants

- Matrice L-unimodulaire ($\det(\boldsymbol{U}) = az^{\alpha}$): $\lambda_i(z) = 1,\ \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z) = az^{\alpha} = \det \boldsymbol{U}_1(z) \det \boldsymbol{\Lambda}(z) \det \boldsymbol{U}_2(z)$,
  donc $\det \boldsymbol{\Lambda}(z) = cz^{\beta}$, mais λ_i L-monic, donc $\lambda_i(z) = 1, \forall i$.
- Matrice para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) = 1 = cz^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(z) c^* z^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} \widetilde{\lambda}_i(z)$
  donc λ_i inversible, mais λ_i L-monic, d'où $\lambda_i = 1$.
- Matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$): λ_i auto-inversif

$$\lambda_i(z) = e^{\jmath\theta_i} z^{m_i} \widetilde{\lambda}_i(z) \text{ avec } \theta_i \in \mathbb{R}, m_i = \deg(\lambda_i)$$

Propriétés des L-polynômes invariants

- Matrice L-unimodulaire ($\det(\boldsymbol{U}) = az^{\alpha}$): $\lambda_i(z) = 1, \ \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z) = az^{\alpha} = \det \boldsymbol{U}_1(z) \det \boldsymbol{\Lambda}(z) \det \boldsymbol{U}_2(z)$,
  donc $\det \boldsymbol{\Lambda}(z) = cz^{\beta}$, mais λ_i L-monic, donc $\lambda_i(z) = 1, \forall i$.
- Matrice para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) = 1 = cz^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(z) c^* z^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} \widetilde{\lambda}_i(z)$
  donc λ_i inversible, mais λ_i L-monic, d'où $\lambda_i = 1$.

matrice para-unitaire $\overset{LS}{\sim}$ matrice L-unimodulaire

- Matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$): λ_i auto-inversif

$$\lambda_i(z) = e^{\jmath\theta_i} z^{m_i} \widetilde{\lambda}_i(z) \text{ avec } \theta_i \in \mathbb{R}, m_i = \deg(\lambda_i)$$

Propriétés des L-polynômes invariants

- Matrice L-unimodulaire ($\det(\boldsymbol{U}) = az^{\alpha}$): $\lambda_i(z) = 1$, $\forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z) = az^{\alpha} = \det \boldsymbol{U}_1(z) \det \boldsymbol{\Lambda}(z) \det \boldsymbol{U}_2(z)$,
  donc $\det \boldsymbol{\Lambda}(z) = cz^{\beta}$, mais λ_i L-monic, donc $\lambda_i(z) = 1, \forall i$.
- Matrice para-unitaire ($\boldsymbol{U}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{I}$): $\lambda_i(z) = 1, \forall i$
  $\det \boldsymbol{U}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) = 1 = cz^{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(z) c^* z^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} \widetilde{\lambda}_i(z)$
  donc λ_i inversible, mais λ_i L-monic, d'où $\lambda_i = 1$.

matrice para-unitaire $\overset{LS}{\sim}$ matrice L-unimodulaire

- Matrice para-hermitienne ($\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$): λ_i auto-inversif

$$\lambda_i(z) = e^{\jmath\theta_i} z^{m_i} \widetilde{\lambda}_i(z) \text{ avec } \theta_i \in \mathbb{R}, m_i = \deg(\lambda_i)$$

$\boldsymbol{\Lambda}_{\widetilde{H}} \overset{LS}{\sim} \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}_H}$ mais $\boldsymbol{\Lambda}_{\widetilde{H}}$ n'est pas la L-forme de Smith de $\boldsymbol{H}$
car $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}_H} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z^{-1}]$ (alors que $\boldsymbol{\Lambda}_H = \boldsymbol{\Lambda}_{\widetilde{H}} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z]$)

Ordre vs Degré

- Ordre défini pour des matrices polynomiales [Kailath, Vaidyanathan],
- Degré défini pour des matrices rationnelles propres : somme des degrés des dénominateurs de la forme de Smith McMillan, nombre de retards minimum pour "implémenter" $\boldsymbol{M}(z)$.

Ordre vs Degré

- Ordre défini pour des matrices polynomiales [Kailath, Vaidyanathan],
- Degré défini pour des matrices rationnelles propres : somme des degrés des dénominateurs de la forme de Smith McMillan, nombre de retards minimum pour "implémenter" $\boldsymbol{M}(z)$.

Exemple:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{1+z^2}{z^2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_{-2}z^{-2} + \boldsymbol{H}_{-1}z^{-1} + \boldsymbol{H}_0, \text{ ordre de } \boldsymbol{H}(z) = 2$$

Ordre vs Degré

- Ordre défini pour des matrices polynomiales [Kailath, Vaidyanathan],
- Degré défini pour des matrices rationnelles propres : somme des degrés des dénominateurs de la forme de Smith McMillan, nombre de retards minimum pour "implémenter" $\boldsymbol{M}(z)$.

Exemple:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{1+z^2}{z^2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_{-2} z^{-2} + \boldsymbol{H}_{-1} z^{-1} + \boldsymbol{H}_0, \text{ ordre de } \boldsymbol{H}(z) = 2$$

Soit $\boldsymbol{N}(z) = z^2 \boldsymbol{H}(z)$ polynomiale.

Ordre vs Degré

- Ordre défini pour des matrices polynomiales [Kailath, Vaidyanathan],
- Degré défini pour des matrices rationnelles propres : somme des degrés des dénominateurs de la forme de Smith McMillan, nombre de retards minimum pour "implémenter" $\boldsymbol{M}(z)$.

Exemple:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \\ \frac{1}{z} & \frac{1+z^2}{z^2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_{-2}z^{-2} + \boldsymbol{H}_{-1}z^{-1} + \boldsymbol{H}_0, \text{ ordre de } \boldsymbol{H}(z) = 2$$

Soit $\boldsymbol{N}(z) = z^2\boldsymbol{H}(z)$ polynomiale.

Forme de Smith de $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z(1+z^2) - z^2 \end{bmatrix}$

Ordre vs Degré

- Ordre défini pour des matrices polynomiales [Kailath, Vaidyanathan],
- Degré défini pour des matrices rationnelles propres : somme des degrés des dénominateurs de la forme de Smith McMillan, nombre de retards minimum pour "implémenter" $\boldsymbol{M}(z)$.

Exemple:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z} & \frac{1+z^2}{z^2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_{-2}z^{-2} + \boldsymbol{H}_{-1}z^{-1} + \boldsymbol{H}_0, \text{ ordre de } \boldsymbol{H}(z) = 2$$

Soit $\boldsymbol{N}(z) = z^2\boldsymbol{H}(z)$ polynomiale.

Forme de Smith de $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z(1+z^2) - z^2 \end{bmatrix}$

Forme de Smith McMillan de $\boldsymbol{H}(z)$: $\boldsymbol{SM}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-z+z^2}{z} \end{bmatrix}$ (non causale)

degré de McMillan de $\boldsymbol{H}(z)$ est 2+1=3.

L-degré

- L-degré d'un polynôme de Laurent:

  soit $p(z) = \sum_{i=m}^{\ell} p_i z^i$, L-degré de p : $d(p) = \ell - m$

L-degré

- L-degré d'un polynôme de Laurent:

  soit $p(z) = \sum_{i=m}^{\ell} p_i z^i$, L-degré de p : $d(p) = \ell - m$

- L-degré d'une matrice polynomiale de Laurent:

  soit $\boldsymbol{H}(z) = \sum_{k=m}^{p} \boldsymbol{H}_k z^k, m \leq p, \boldsymbol{H}_m$ et $\boldsymbol{H}_p \neq \boldsymbol{0}$.

  - $\boldsymbol{\Xi}(z) = z^{-m}\boldsymbol{H}(z)$ matrice polynomiale (en z) associée
  - $\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}(z) = z^{-p}\boldsymbol{H}(z)$ matrice causale associée (polynomiale en z^{-1})

ordre de $\boldsymbol{H}$: ordre de $\boldsymbol{\Xi}$, soit $p - m$

L-degré de $\boldsymbol{H}$: degré de McMillan de $\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}$.

L-degré

- L-degré d'un polynôme de Laurent:

  soit $p(z) = \sum_{i=m}^{\ell} p_i z^i$, L-degré de p : $d(p) = \ell - m$

- L-degré d'une matrice polynomiale de Laurent:

  soit $\boldsymbol{H}(z) = \sum_{k=m}^{p} \boldsymbol{H}_k z^k, m \leq p, \boldsymbol{H}_m$ et $\boldsymbol{H}_p \neq \boldsymbol{0}$.

  - $\boldsymbol{\Xi}(z) = z^{-m}\boldsymbol{H}(z)$ matrice polynomiale (en z) associée
  - $\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}(z) = z^{-p}\boldsymbol{H}(z)$ matrice causale associée (polynomiale en z^{-1})

ordre de $\boldsymbol{H}$: ordre de $\boldsymbol{\Xi}$, soit $p - m$
L-degré de $\boldsymbol{H}$: degré de McMillan de $\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}$.

Exemple: $\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^{-1} + z \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}_{-1} z^{-1} + \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1 z$, ordre 2

$\overline{\overline{\boldsymbol{H}}}(z) = z^{-1}\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & z^{-1} \\ z^{-1} & 1 + z^{-2} \end{bmatrix}$ L-degré 3

Exemple d'une matrice para-hermitiennne non-diagonalisable

Soit $\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2z^{-1} + 6 - 2z \end{bmatrix}, \boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}, \det \boldsymbol{H}(z) = -2z^{-1} + 5 - 2z$

L- forme de Smith : $\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{5}{2}z + z^2 \end{bmatrix}$

Supposons $\exists$ $\boldsymbol{U}$ para-unitaire tq $\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$; $\boldsymbol{S} \overset{LS}{\approx} \boldsymbol{\Lambda}$,
alors L-gcd$\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1$ et $\lambda_1(z)\lambda_2(z) = c' z^{\alpha'} \det \boldsymbol{H}(z)$.

Exemple d'une matrice para-hermitiennne non-diagonalisable

Soit $\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2z^{-1} + 6 - 2z \end{bmatrix}, \boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}, \det \boldsymbol{H}(z) = -2z^{-1} + 5 - 2z$

L- forme de Smith : $\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{5}{2}z + z^2 \end{bmatrix}$

Supposons $\exists$ $\boldsymbol{U}$ para-unitaire tq $\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$; $\boldsymbol{S} \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{\Lambda}$,
alors L-gcd$\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1$ et $\lambda_1(z)\lambda_2(z) = c'z^{\alpha'} \det \boldsymbol{H}(z)$.
Mais si des λ_i polynomiaux existent, alors ils sont para-hermitiens, donc (à une permutation près):
$\lambda_1(z) = c, c \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_2(z) = dz^{\beta}(1 - \frac{5}{2}z + z^2)$.

Exemple d'une matrice para-hermitiennne non-diagonalisable

Soit $\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2z^{-1} + 6 - 2z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \widetilde{\boldsymbol{H}}$, $\det \boldsymbol{H}(z) = -2z^{-1} + 5 - 2z$

L- forme de Smith : $\boldsymbol{S}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{5}{2}z + z^2 \end{bmatrix}$

Supposons $\exists$ $\boldsymbol{U}$ para-unitaire tq $\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$; $\boldsymbol{S} \overset{LS}{\sim} \boldsymbol{\Lambda}$,
alors L-gcd$\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1$ et $\lambda_1(z)\lambda_2(z) = c' z^{\alpha'} \det \boldsymbol{H}(z)$.
Mais si des λ_i polynomiaux existent, alors ils sont para-hermitiens, donc (à une permutation près):
$\lambda_1(z) = c, c \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_2(z) = dz^{\beta}(1 - \frac{5}{2}z + z^2)$.

Paramètrons $\boldsymbol{H}(z)\underline{v}(z) = c\underline{v}(z), c \in \mathbb{R}^*$, ceci aboutit à un système sans solution.

Il n'existe pas de matrice polynomiale para-unitaire tq $\widetilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$.

Approximation polynomiale de la PEVD

Pas de solution exacte: on relâche les hypothèses

Proposition

Soit $\boldsymbol{A} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ continue, alors
$\exists$ $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ continues tq $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^H = \boldsymbol{I}$ sur $\mathcal{C}$ et

$$\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{\Sigma}(z)\boldsymbol{U}^H(z), \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}\{\sigma_i\}$ et $\sigma_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), i = 1$ à n.

Approximation polynomiale de la PEVD

Pas de solution exacte: on relâche les hypothèses

Proposition

Soit $\boldsymbol{A} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continue, alors
$\exists$ $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ continues tq $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^H = \boldsymbol{I}$ sur $\mathcal{C}$ et

$$\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{\Sigma}(z)\boldsymbol{U}^H(z), \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}\{\sigma_i\}$ et $\sigma_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), i = 1$ à n.

Soit $$\sigma(z) = \sup_{\underline{u},\underline{v}\in\mathcal{C}_1} \Re\left(\underline{u}(z)^H \boldsymbol{A}(z)\underline{v}(z)\right) \tag{1}$$
où $\mathcal{C}_1 = \{\underline{w} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ continue tq $\underline{w}^H(z)\underline{w}(z) = 1, \forall z \in \mathcal{C}\}$
σ est une fonction continue ($\mathcal{C}_1$ compact).

Approximation polynomiale de la PEVD

Pas de solution exacte: on relâche les hypothèses

Proposition

Soit $\boldsymbol{A} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ continue, alors
$\exists$ $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ continues tq $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^H = \boldsymbol{I}$ sur $\mathcal{C}$ et

$$\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{\Sigma}(z)\boldsymbol{U}^H(z),\ \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}\{\sigma_i\}$ et $\sigma_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), i = 1$ à n.

Soit $$\sigma(z) = \sup_{\underline{u},\underline{v}\in\mathcal{C}_1} \Re\left(\underline{u}(z)^H \boldsymbol{A}(z)\underline{v}(z)\right) \quad (1)$$
où $\mathcal{C}_1 = \{\underline{w} : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ continue tq $\underline{w}^H(z)\underline{w}(z) = 1, \forall z \in \mathcal{C}\}$
σ est une fonction continue ($\mathcal{C}_1$ compact).
Ensuite, on procède par déflation:
$\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{A} - \sigma_1 \underline{v}_1 \underline{u}_1^H$ avec $(\sigma_1, \underline{v}_1, \underline{u}_1)$ solution de (1). $\square$

Proposition

Soit $\boldsymbol{H}(z)$ une matrice para-hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}$ qui s'écrit $\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{A}^H(z)$ avec $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^{n\times n})$
alors $\exists \boldsymbol{V} \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^{n\times n})$ tq $\boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{V}^H(z) = \boldsymbol{I}$ sur $\mathcal{C}$ et

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\boldsymbol{V}(z)^H, \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}, \lambda_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \lambda_i \geq 0, i = 1$ à n.

Proposition

Soit $\boldsymbol{H}(z)$ une matrice para-hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}$ qui s'écrit $\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{A}^H(z)$ avec $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^{n\times n})$
alors $\exists \boldsymbol{V} \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^{n\times n})$ tq $\boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{V}^H(z) = \boldsymbol{I}$ sur $\mathcal{C}$ et

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{V}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\boldsymbol{V}(z)^H, \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}, \lambda_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \lambda_i \geq 0, i = 1$ à n.

Considérons la "SVD" de $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V\Sigma U}^H$, avec $\boldsymbol{VV}^H = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{UU}^H = \boldsymbol{I}$.
Alors, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V\Sigma U}^H\boldsymbol{U\Sigma}^H\boldsymbol{V}^H = \boldsymbol{V\Sigma\Sigma}^H\boldsymbol{V}^H$.
Soit $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Sigma\Sigma}^H$, $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonale avec $\lambda_i(z) = |\sigma_i(z)|^2 \geq 0, \forall z \in \mathcal{C}$. $\square$

Enfin, comme l'ensemble des polynômes de Laurent sur $\mathcal{C}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}^{n\times n}$, on a

Proposition

Soit $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ une matrice para-hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}$, $\exists n$ vecteurs L-polynomiaux $\underline{v}_i \in \mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$ et n L-polynômes λ_i positifs sur $\mathcal{C}$ tq

$$\boldsymbol{H}(z)\underline{v}_i(z) \approx \lambda_i(z)\underline{v}_i(z)$$

avec $\underline{v}_i(z)^H\underline{v}_j(z) \approx \delta_{ij}, \forall z \in \mathcal{C}$.

Enfin, comme l'ensemble des polynômes de Laurent sur $\mathcal{C}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}^{n\times n}$, on a

Proposition

Soit $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{n\times n}[z, z^{-1}]$ une matrice para-hermitienne définie positive sur $\mathcal{C}$, $\exists n$ vecteurs L-polynomiaux $\underline{v}_i \in \mathbb{C}^{n}[z, z^{-1}]$ et n L-polynômes λ_i positifs sur $\mathcal{C}$ tq

$$\boldsymbol{H}(z)\underline{v}_i(z) \approx \lambda_i(z)\underline{v}_i(z)$$

avec $\underline{v}_i(z)^H\underline{v}_j(z) \approx \delta_{ij}, \forall z \in \mathcal{C}$.

Ce résultat prouve la conjecture de [McWhirter].
On ne sait rien sur les degrés des $\lambda_i(z)$ et $\underline{v}_i(z)$.
Les exemples montrent que la maximisation de $\Re\left(\underline{u}(z)^H\boldsymbol{A}(z)\underline{v}(z)\right)$ sur $\mathcal{C}$ doit être faite judicieusement.

Conclusion et perspectives

- rôle des matrices polynomiales dans l'égalisation
- la PEVD exacte est un problème ouvert
- à quelle condition une matrice polynomiale est-elle diagonalisable (ordre-degré)?

Conclusion et perspectives

- rôle des matrices polynomiales dans l'égalisation
- la PEVD exacte est un problème ouvert
- à quelle condition une matrice polynomiale est-elle diagonalisable (ordre-degré)?
- lien entre matrices polynomiales et tenseurs :

$$\boldsymbol{M}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{M}_k z^{-k}, \boldsymbol{M}_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\boldsymbol{M}(z) = (m_{ij}(z)) \text{ avec } m_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} m_{ijk} z^{-k}$$

- Si $\boldsymbol{H}(z)$ est L-polynomiale para-hermitienne, alors

$$\boldsymbol{H}(z) = \sum_{k=-d}^{d} \boldsymbol{H}_k z^k$$

$$\boldsymbol{H}_{-k} = \boldsymbol{H}_k^H, \forall k$$

- si $\boldsymbol{U}$ para-unitaire d'ordre ℓ, $\boldsymbol{U}(z) = z^m \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{U}_k z^k$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\ell} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{U}_k^H = \boldsymbol{I} \\ \sum_{j=k}^{\ell} \boldsymbol{U}_j \boldsymbol{U}_{j-k}^H = \mathbf{0} \ \forall \mathbf{k} \in \{\mathbf{1}, \ldots, \ell\} \end{cases}$$

- Réécrire les équations polynomiales en terme de tenseur d'ordre 3 :

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{U}(z)\boldsymbol{\Lambda}(z)\widetilde{\boldsymbol{U}}(z) \text{ avec } \boldsymbol{\Lambda}(z) \text{ diagonale}$$

- Problème contraint : contraintes orthogonalité, $\boldsymbol{H}_{-k} = \boldsymbol{H}_k^H$
- lien avec la HOSVD ?

S. Icart, P. Comon, and L. Rota. *Blind paraunitary equalization. Signal Processing*, 89(3) : pages 283-290, mars 2009.

M. Sørensen, L. De Lathauwer, S. Icart, and L. Deneire. *On Jacobi-type methods for blind equalization of paraunitary channels*. Signal Processing, 92(3): pages 617-624, 2012.

M. Sørensen, L. De Lathauwer, P. Comon, S. Icart, and L. Deneire. *Canonical polyadic decomposition with a columnwise orthonormal factor matrix*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 33(4) : pages 1190-1213, 2012.

S. Icart and P. Comon. *Some properties of Laurent polynomial matrices*, In 9th IMA International Conference on Mathematics in Signal Processing, Birmingham, dec 2012.