



**HAL**  
open science

# Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds

Jérôme Lohéac

► **To cite this version:**

Jérôme Lohéac. Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds. Optimisation et contrôle [math.OA]. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0336 . tel-01749662v2

**HAL Id: tel-01749662**

**<https://theses.hal.science/tel-01749662v2>**

Submitted on 15 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds

## THÈSE

*présentée pour l'obtention du grade de*

**Docteur de l'Université de Lorraine**

**Spécialité : Mathématiques**

*par*

**Jérôme LOHÉAC**

Soutenue publiquement le 6 décembre 2012

devant le jury composé de :

<b>Emmanuel MAITRE</b>	Professeur, École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble	<i>Président du jury</i>
<b>Antonio DESIMONE</b>	Professeur, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati	<i>Rapporteur</i>
<b>Emmanuel TRÉLAT</b>	Professeur, Université Pierre-et-Marie-Curie	<i>Rapporteur</i>
<b>Olivier GLASS</b>	Professeur, Université Paris-Dauphine	<i>Examineur</i>
<b>Alexandre MUNNIER</b>	Maître de conférences, Université de Lorraine	<i>Examineur</i>
<b>Jean-Pierre RAYMOND</b>	Professeur, Université Paul-Sabatier, Toulouse	<i>Examineur</i>
<b>Jean-François SCHEID</b>	Maître de conférences, Université de Lorraine	<i>Co-directeur de thèse</i>
<b>Marius TUCSNAK</b>	Professeur, Université de Lorraine	<i>Directeur de thèse</i>



Contrôle en temps optimal et  
nage à bas nombre de Reynolds

Time optimal control and  
low Reynolds number swimming

Jérôme Lohéac\*

\* Institut Élie Cartan  
UMR 7502, INRIA, Nancy-Université, CNRS,  
POB239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France  
loheac@iecn.u-nancy.fr



## Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier Marius Tucsnak et Jean-François Scheid qui ont dirigé cette thèse. Merci à eux de m'avoir guidé dans le domaine de la recherche. Je remercie Marius Tucsnak pour m'avoir initié à la théorie du contrôle et je remercie Jean-François Scheid pour l'ouverture sur le domaine de la simulation numérique qu'il m'a apportée. Je les remercie aussi pour leur patience à mon égard et la pertinence de leurs questions sur mon travail.

Ma gratitude va à Antonio DeSimone et Emmanuel Trélat pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse.

Je remercie chaleureusement Olivier Glass, Emmanuel Maitre, Alexandre Munnier et Jean-Pierre Raymond pour leur participation à mon jury. Je remercie particulièrement Emmanuel Maitre pour avoir présidé mon jury de thèse.

Dans ce paragraphe, je ne pourrais oublier de remercier les membres de l'institut Élie-Cartan pour leur accueil chaleureux et leur convivialité. Parmi eux, je remercie spécialement les membres de l'équipe EDP, tout particulièrement, Mathieu Barandon, Bruno Pinçon, Karim Ramdani, Lionel Rosier, Mario Sigalotti (qui a maintenant quitté l'IECN) et Takéo Takahashi pour les cours qu'ils ont dispensés.

Je remercie aussi Thomas Chambrion, Sorin Micu (de Craiova), Alexandre Munnier et Jean-Claude Vivalda pour les discussions fructueuses que nous avons eues sur les problèmes de contrôle rencontrés.

J'en profite aussi pour remercier les membres du projet FLAMENCO, tout particulièrement Marc Junger, pour les discussions instructives que nous avons eues sur le problème de la natation plus précisément sur tout ce qui est lié à la réalisation pratique d'un nageur.

Mais aussi, que serait l'IECN sans ses doctorants ? Un grand merci donc à tous les doctorants que j'ai croisés pendant mon séjour à Nancy. Je pense bien sûr à Antoine, Armand, Arnaud, Giselaïn, Ibrahim, Julie, Julien, Li, Lucas, Mickael pour ceux qui sont encore à l'IECN. Je remercie aussi Bertrand, Erica, *Nicou*, Pauline, Yuning pour ceux qui m'ont accueilli lors de mon arrivée à Nancy. Merci aussi aux *petits loups* du repas de midi, les Gérémy's, les Mohamed's, Paul *le vosgien* et merci à mon co-bureau... non, je ne t'ai pas oublié, Romain, le maître des gifs !

Merci à tous pour les bons moments passés ensemble, notamment lors de ces pauses café interminables !

Mais je remercie aussi les professeurs qui m'ont initié au monde des mathématiques, mes enseignants de classe préparatoire, *JMF* et M. Michel, puis ceux croisés à l'ENSIMAG et à la faculté de Grenoble 1, en particulier J. Étienne, T. Gallay, E. Maitre, V. Perrier, P. Saramito... Sans oublier ceux croisés à l'antenne bretonne de l'ENS de Cachan, A. Debussche, M. Pierre, G. Vial...

Merci à tous pour ces cours instructifs et passionnants que vous avez donnés.

J'en profite aussi pour remercier les personnes non mathématiciennes que j'ai fréquentées durant ces trois années.

En particulier, je remercie les membres du cercle d'escrime de Vandœuvre qui m'ont accueilli en leur sein. Il y a bien sûr les Maîtres Lilianne, Gérard et Pascal mais aussi les *adversaires*.

Je pense aussi aux membres de l'aéro-club Albert Mangeot, notre chef pilote Stéphane, notre président *Jojo*, ainsi que les autres vélivoles.

Même si ces personnes n'ont pas contribué à mon travail de thèse, les fréquenter a été un réel plaisir et m'a permis de me changer les idées dans les moments d'interrogation

rencontrés lors de ces trois ans. Il en est de même pour mes amis proches. Qu'auraient été sans vous ces randonnées épiques, ces franches rigolades ou ces visites culturelles ?

Que serait ce paragraphe sans remerciement à ma famille ? Par ces mots, je remercie donc tout particulièrement mes parents, pour leur soutien et leur confiance permanents qui ont débuté dès ma plus tendre enfance et qui se sont poursuivis tout au long de cette thèse.







## Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties, le fil directeur étant la contrôlabilité en temps optimal.

Dans la première partie, après un rappel du principe du maximum de Pontryagin dans le cas des systèmes de dimension finie, nous mettrons en œuvre ce principe sur la cas d'un intégrateur non-holonyme connu sous le nom de système de Brockett pour lequel nous imposons des contraintes sur l'état. La difficulté de cette étude provient du fait que l'on considère un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état.

Après cet exemple, nous nous intéressons à une extension du principe du maximum de Pontryagin au cas des systèmes de dimension infinie. Plus précisément, l'extension que nous considérons s'applique au cas de systèmes exactement contrôlables en tout temps. Typiquement, ce résultat s'applique à l'équation de Schrödinger avec contrôle interne. Pour de tels systèmes, sous une condition de contrôlabilité approchée, depuis un ensemble de temps non négligeable, nous montrons l'existence d'un contrôle bang-bang.

Dans la seconde partie, nous étudions le problème de la nage à bas nombre de Reynolds. Une modélisation physique convenable nous permet de le formaliser comme un problème de contrôle.

Nous obtenons alors un résultat de contrôlabilité sur ce problème. Plus précisément, nous montrons que quelque soit la forme du nageur, celui-ci peut se déformer légèrement pour suivre une trajectoire imposée.

Nous étudions ensuite le cas d'un nageur à symétrie axiale. Les résultats de la première partie permettent alors la recherche d'un contrôle en temps optimal.

**Mots clés :** équations de Stokes, interaction fluide-structure, contrôlabilité, contrôlabilité en temps optimal, contrôle géométrique, principe du maximum de Pontryagin, système de Brockett, intégrateur non-holonyme, contrôle bang-bang, équation de Schrödinger.

## Abstract

This thesis is divided in two parts. The main tool of this work is time optimal control.

We first consider the Pontryagin maximum principle for control system of finite dimension. After that, we give an application of this principle for the Brockett integrator with state constraints.

Then, we study an extension of the Pontryagin maximum principle in the case of infinite dimensional systems. More precisely, this extension concerns the case of exactly controllable systems in any time. For instance, this can be the Schrödinger equation with internal control. Especially under some condition of approximate controllability, we can show the existence of a bang-bang control defined on a time set of positive measure.

In the second part, we study the problem of swimming at low Reynolds number. A convenient physical model allows us to formulate it under the form of a control problem. We then get a controllability result on this problem. More precisely, we will show that whatever the shape of the swimmer is, the swimmer can slightly modify its shape in order to steer any prescribed trajectory.

To complete this part, we consider the case of an axi-symmetric swimmer. The results of the first part allow us to find an optimal time control.

**Key words:** Stokes equations, fluid-structure interactions, controllability, time optimal control, geometrical control, Pontryagin's maximum principle, Brockett system, non-holonomic integrator, bang-bang control, Schrödinger equation.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>v</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>I Quelques contributions à la théorie du contrôle en temps optimal</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Rappels sur la contrôlabilité en dimension finie	6
1.1.1 Méthode des crochets de Lie	6
1.1.2 Méthode du retour	8
1.2 Existence d'un contrôle optimal	9
1.2.1 Cas général	10
1.2.2 Cas linéaire	13
1.3 Calcul numérique des contrôles optimaux	14
1.3.1 Les méthodes de tir	14
1.3.2 Méthodes directes	15
<b>2 Étude d'un système bilinéaire en dimension finie</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Résultats de contrôlabilité	20
2.3 Propriétés préliminaires de la solution optimale	21
2.4 Principe du maximum de Pontryagin	24
2.5 Solution optimale avec un contrôle de dimension deux	29
2.6 Solution optimale avec un contrôle de dimension $n$	37
2.7 Conclusion et perspectives	41
<b>3 Cas de la dimension infinie</b>	<b>43</b>
3.1 Introduction	43
3.2 Opérateurs de contrôle et d'observation	44
3.3 Contrôlabilité et observabilité en dimension infinie	46
3.3.1 Quelques notions de contrôlabilité en dimension infinie	46
3.3.2 Notions d'observabilité	47
3.3.3 Résultat de dualité	48
3.3.4 L'espace $R_t^\infty$	49
3.4 Résultats principaux	51
3.4.1 Résultat d'existence	51
3.4.2 Principe du maximum de Pontryagin	53
3.4.3 Caractère bang-bang des contrôles	55
3.5 Application à l'équation de Schrödinger	55

3.5.1	Lemmes de continuation unique . . . . .	55
3.5.2	Résultat pour l'équation de Schrödinger . . . . .	57
3.6	Conclusion et questions ouvertes . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Nage à bas nombre de Reynolds</b>	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Modélisation</b>	<b>69</b>
5.1	Équations du fluide . . . . .	70
5.2	Équations du nageur . . . . .	71
5.3	Passage en variables adimensionnées . . . . .	75
5.4	Le cas des micro-organismes . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Rappels sur le problème de Stokes</b>	<b>81</b>
6.1	Équations de Stokes en domaine extérieur . . . . .	81
6.2	Changement de variables . . . . .	82
6.2.1	Déformations du domaine . . . . .	82
6.2.2	Problème de Stokes dans le domaine déformé . . . . .	83
6.2.3	Régularité par rapport au domaine . . . . .	84
6.3	Solution en coordonnées sphériques . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Le problème de contrôle</b>	<b>93</b>
7.1	Modélisation . . . . .	94
7.1.1	Cinématique . . . . .	94
7.1.2	Changements de forme . . . . .	94
7.1.3	Le fluide . . . . .	95
7.1.4	Dynamique du problème . . . . .	96
7.1.5	Existence et stabilité . . . . .	97
7.1.6	Contraintes d'autopropulsion . . . . .	98
7.2	Signature du nageur . . . . .	103
7.2.1	Formulation du problème en terme de signatures . . . . .	103
7.2.2	Résultats de plongement . . . . .	104
7.2.3	Analyse des matrices $M_c(\mathbf{s})$ et $N_c(\mathbf{s})$ . . . . .	107
7.3	Problème de contrôle . . . . .	107
7.3.1	Signature d'un nageur contrôlable . . . . .	107
7.3.2	Construction d'une signature contrôlable . . . . .	110
7.4	Résultats de contrôlabilité . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Cas de la nage en symétrie axiale</b>	<b>119</b>
8.1	Résultats de contrôlabilité . . . . .	119
8.1.1	Système dans le cas d'une symétrie axiale . . . . .	119
8.1.2	Contrôlabilité . . . . .	122
8.1.3	Contrôlabilité en temps optimal . . . . .	125
8.2	Problème approché et contrôle en temps optimal . . . . .	126
8.3	Expérimentation numérique . . . . .	131
8.3.1	Approximation du problème de Stokes . . . . .	131
8.3.2	Recherche d'un contrôle en temps optimal . . . . .	133
	<b>Conclusion et perspectives sur le problème de la nage</b>	<b>141</b>





# Introduction générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la contrôlabilité et la contrôlabilité en temps optimal pour certains problèmes issus de la physique. Plus particulièrement, on considère deux types de problème ; le premier est formé des équations de Schrödinger et le second est celui modélisant la nage des micro-organismes. Ce dernier problème se ramène à un problème en dimension finie.

Nous avons choisi de diviser cette thèse en deux parties. En effet, même si les deux parties que nous avons considérées ne sont pas complètement indépendantes, la lecture et la compréhension de l'une peut se faire sans l'aide de l'autre.

La première partie est dédiée à l'étude du principe du maximum de Pontryagin. En particulier, nous donnerons une extension de ce principe au cas de systèmes de dimension infinie (pour des systèmes du type Schrödinger) et nous donnerons un exemple non trivial d'application de ce principe au cas d'un système de dimension finie provenant du problème de la nage.

La seconde partie reprend un des objectifs initiaux de cette thèse, c'est-à-dire :

”La natation des micro-organismes est-elle possible ?”

Pour répondre à cette question, nous avons modélisé le problème sous la forme d'un problème de contrôle. Le contrôle étant la déformation du nageur et la variable à contrôler étant sa position.

Nous donnons ci-dessus une introduction détaillée pour chacune de ces deux parties.

## Partie I : Quelques contributions à la théorie du contrôle en temps optimal

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal. Plus précisément, nous regardons le problème de contrôle en temps optimal qui se formule de la manière suivante :

**Problème.** Trouver le temps minimal  $T^* > 0$  tel que la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z(0) = z_0,$$

avec  $u$  une fonction de contrôle, satisfasse les contraintes suivantes :

- l'état final est imposé :  $z(T^*) = z_1$  ;
- les contraintes sur le contrôle :  $u(t) \in U$  pour  $t \in [0, T^*]$  ;
- les contraintes sur l'état :  $z(t) \in K$  pour  $t \in [0, T^*]$ .

Les données de ce problème sont la fonction  $f$ , les conditions initiales et finales  $z_0$  et  $z_1$  et les ensembles admissibles  $U$  et  $K$ , respectivement pour les variables de contrôle et



d'état. Dans tous les problèmes que nous avons étudiés,  $U$  est la boule unité fermée de l'espace des valeurs du contrôle.

Dans le Chapitre 1, nous rappelons des résultats de contrôlabilité dans le cadre de la dimension finie et nous donnons le principe du maximum de Pontryagin. Ce principe peut être trouvé dans les livres de Pontryagin [Pon89], Ioffe et Tiomirov [IT79], Trélat [Tré05] et Bonnard, Faubourg et Trélat [BFT06].

Dans le Chapitre 2, nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin à un système pouvant être vu comme une généralisation du système de Brockett [Bro82]. Cette généralisation a déjà été considérée dans les articles de Beals, Gaveau et Greiner [BGG00] et Prieur et Trélat [PT05]. Cependant, dans ces travaux, contrairement à notre étude, il n'y a pas de contraintes sur l'état du système. Le système que nous avons étudié provient de l'étude du problème de la natation à bas nombre de Reynolds. La difficulté de cet exemple provient du fait que l'on impose des contraintes sur la variable d'état (c'est-à-dire que  $K$  est un compact).

Dans le Chapitre 1, nous donnons aussi l'exemple particulier des systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, c'est-à-dire lorsque la fonction  $f$  est donnée par :

$$f(z, u) = Az + Bu,$$

avec  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ ,  $B$  une matrice de taille  $n \times d$ . L'état  $z$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , le contrôle  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $U$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^d$ . Pour ce type de système, nous rappelons les résultats de contrôlabilité classiques (condition du rang de Kalman). Aussi pour ce type de système, il est connu que le contrôle optimal  $u$  est *bang-bang*, c'est-à-dire que pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ , on a  $u(t) \in \partial U$ . Ce résultat peut être trouvé dans Bellman, Glicksberg et Gross [BGG56] et des développements sur ces types de problèmes peuvent être trouvés dans Krabs [Kra89] et les articles de Seidman et al. [Sei88, SY96, Sei08].

Dans le Chapitre 3, nous donnons une généralisation du principe du maximum de Pontryagin au cas de certains systèmes de dimension infinie. Dans notre cas,  $A$  devient l'opérateur de Schrödinger et  $B$  est un opérateur de contrôle admissible. L'originalité de l'étude provient du fait que l'on considère un opérateur de contrôle non nécessairement inversible. En effet, à notre connaissance, les extensions du principe du maximum de Pontryagin aux systèmes de type Schrödinger ne concernent que des opérateurs de contrôle inversibles. On réfère en particulier aux travaux de Fattorini [Fat05, Fat64, Fat77] et de Lions [Lio68]. La démonstration de ces extensions, comme la nôtre, reprend la preuve du principe du maximum de Pontryagin dans le cas de la dimension finie donné dans [BGG56]. De plus sous des hypothèses supplémentaires de contrôlabilité, nous pouvons montrer que le contrôle optimal est bang-bang, comme dans le cas de la dimension finie.

Un autre type d'extension du principe du maximum de Pontryagin à la dimension infinie concerne le cas des opérateurs paraboliques. En effet, le cas de ces opérateurs est différent du cas des opérateurs du type Schrödinger, car ils n'engendrent pas un groupe à un paramètre. Aussi, pour ces opérateurs, nous n'avons pas de résultat de contrôlabilité en temps arbitrairement petit. De manière générale, pour ce type d'opérateurs, on étudie le problème de contrôlabilité à 0. À notre connaissance, les seules extensions du principe du maximum de Pontryagin pour ce type d'opérateurs concernent le problème suivant :

**Problème.** Étant donné  $z_0$  et  $\varepsilon > 0$ , déterminer le temps minimal  $T^* > 0$  tel qu'il existe un contrôle  $u$  pour lequel la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z(0) = z_0,$$

satisfait :  $\|z(t)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \geq T^*$ .

Pour ce type de problème, on fait référence aux travaux de Wang et al. [WW07, Wan08, Wan04], Micu, Roventa et Tucsnaak [MRT12] et Phung et Wang [PW11].

Un autre type de problème fréquemment rencontré dans la littérature est celui de la régularité de la fonction qui à la condition initiale  $z_0$  associe le temps optimal  $T^*$ . Pour ce type de problème, on fait référence à Gozzi et Loreti [GL99].

## Partie II : Nage à bas nombre de Reynolds

Dans cette partie, nous étudions le cas de la nage des micro-organismes ou micro-robots. Le problème physique est le suivant :

*”Étant donné un corps déformable plongé dans un fluide, est-il possible de déformer ce corps de telle sorte que son centre de masse se déplace dans le fluide ?”*

Cette question est à la base du projet FLAMENCO (FLAgellar MEchanisms for Nano-robot COntrol) associant le CRAN (Centre de Recherche en Automatique de Nancy) et l’IECN. Ce projet est un projet de la Fédération de Recherche Charles Hermite, il est coordonné par M. Jungers du CRAN et J.-F. Scheid de l’IECN. L’objectif de ce projet est la construction d’un robot nageur contrôlable dans un fluide visqueux.

Le déplacement résulte de l’interaction fluide-structure à la frontière du nageur. En effet, en se déformant, le nageur crée un champ de vitesse dans le fluide et ce champ de vitesse engendre une force sur le nageur. C’est par ce biais que l’on souhaite déplacer le nageur. Aussi afin de faire de la *vraie* natation, le nageur doit vérifier certaines contraintes : ses déformations ne doivent pas contenir de déplacement rigide. En effet, si tel était le cas, cela signifierait que l’on applique une force extérieure sur le nageur. Il existe des travaux où l’on souhaite contrôler la position d’un objet dans un fluide par le biais de l’application d’un champ électromagnétique. Bien que proche de nos motivations, ce type de problème n’est pas étudié ici.

Dans notre étude, nous nous restreignons au cas des micro-nageurs, c’est-à-dire que leur grandeur caractéristique est de l’ordre de  $10^{-6} m$ . À cette échelle, les forces inertielles sont négligeables devant les forces de viscosité. Dans la modélisation effectuée au Chapitre 5, nous allons introduire le nombre de Reynolds,  $Re$ . Ce nombre positif et sans dimension mesure le rapport des magnitudes des forces d’inertie et de viscosité. Les équations que nous considérons sont obtenues pour la limite  $Re = 0$ .

Le fait que les forces inertielles soient négligées dans ce problème conduit à certains résultats contre intuitifs. Le résultat le plus surprenant est connu sous le nom du Théorème de la coquille Saint-Jacques et a été énoncé par Purcell [Pur77]. En voici les termes originaux :

*« There is a very funny thing about motion at low Reynolds number, which is the following. One special kind of swimming motion is what I call a reciprocal motion. That is to say, I change my body into a certain shape and then I go back to the original shape by going through the sequence in reverse. At low Reynolds number, everything reverses just fine. Time, in fact, makes no difference — only configuration. If I change quickly or slowly, the pattern of motion is exactly the same. »*

Une illustration de ce résultat correspond en effet au cas de la Coquille Saint-Jacques. Dans ce cas, les déformations de la coquille peuvent être décrites par un seul paramètre, l’angle  $\alpha$  d’ouverture de la coquille Saint-Jacques (c.f. Figure 1). Ainsi, se donner une déformation de la coquille Saint-Jacques c’est se donner une fonction  $t \in [0, T] \rightarrow \alpha(t) \in \mathbb{R}$ .

Cet angle est un paramètre réel et le théorème ci-dessus permet d'affirmer que si la fonction  $\alpha$  est telle que  $\alpha(0) = \alpha(T)$  alors la coquille Saint-Jacques est dans la même position à l'instant initial et final. Physiquement parlant, ce résultat est dû à l'absence d'inertie dans le système. Ainsi, si le nageur arrête de se déformer, alors tout mouvement est stoppé.

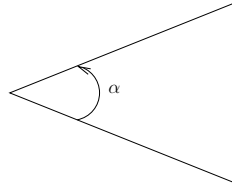


FIG. 1 – Mouvements de la coquille Saint-Jacques.

Pour pallier ce fait, on peut considérer des nageurs dont la déformation est non périodique ou périodique mais non réversible en temps. On note que pour obtenir la non réversibilité, la forme du nageur ne peut pas être décrite par un seul paramètre. Sur la Figure 2, on donne des exemples de nageurs ne vérifiant pas le théorème de la coquille Saint-Jacques.

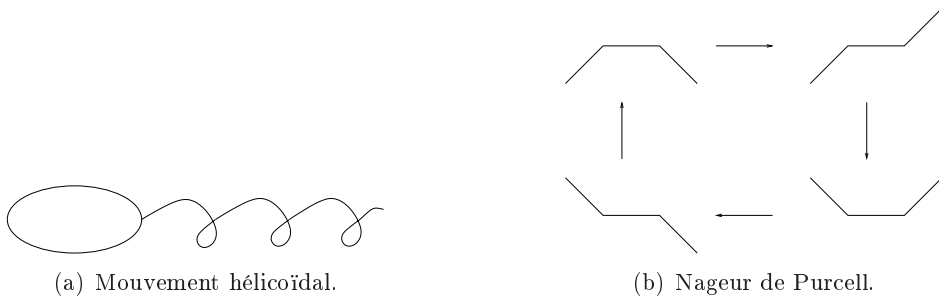


FIG. 2 – Déformation de nageurs non réversibles en temps.

Dans notre modélisation, nous considérons  $B$  la forme de référence du nageur, et pour tout temps  $t \geq 0$  un difféomorphisme  $X_t$  de  $B$  sur  $B_t$ . Nous considérons aussi la déformation  $X_t^\dagger = R(t)X_t + \mathbf{h}(t)$ , avec  $R(t)$  une matrice de rotation de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{h}(t)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .  $R$  et  $\mathbf{h}$  sont les inconnues du système et  $X$  est l'entrée du système. Le domaine occupé par le fluide,  $F_t^\dagger$ , est  $\mathbb{R}^3$  privé du domaine du nageur,  $B_t^\dagger = X_t^\dagger(B)$ .

Le système décrivant la nage à bas nombre de Reynolds est constitué des équations suivantes :

- les équations de Stokes stationnaires :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} - \nabla p &= \mathbf{0} && \text{dans } F_t^\dagger, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } F_t^\dagger, \end{aligned}$$

munies de la condition limite :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0};$$

- la condition limite sur la frontière du nageur :

$$\mathbf{u}(x) = \partial_t X_t^\dagger(x) \quad (x \in \partial B_t^\dagger);$$

– l'équilibre des forces et des moments :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(B_t^\dagger)(\mathbf{u}, p) &= \mathbf{0}, \\ \mathbb{T}(B_t^\dagger)(\mathbf{u}, p) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

où  $\mathbb{F}(B_t^\dagger)(\mathbf{u}, p)$  (resp.  $\mathbb{T}(B_t^\dagger)(\mathbf{u}, p)$ ) est la force (resp. le moment par rapport au point  $\mathbf{0}$ ) exercée par la viscosité induite par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et le champ de pression  $p$  sur le domaine  $B_t^\dagger$ .

Pour la modélisation de ce problème, on fait référence au séminaire de Purcell [Pur77], aux livres de Childress [Chi81], de Happel et Brenner [HB65] et au livre de Milne-Thomson [MT60]. Nous mentionnons ici les deux articles de Shapere et Wilczek [SW89b, SW89a].

Pour une bonne compréhension de ce système, il est nécessaire de comprendre les équations de Stokes posées en domaine extérieur. Pour ceci, on fait référence à Galdi [Gal97], Girault et Sequeria [GS91], Ladyzhenskaya [Lad69] et Jacob [Jac59].

Les équations de Stokes considérées sont linéaires par rapport à la condition limite, nous verrons que le système complet qui est a priori de dimension infinie se ramène à une équation différentielle ordinaire. Dans le but de montrer les résultats de contrôlabilité escomptés pour le nageur, nous allons utiliser les outils du contrôle géométrique, en particulier le Théorème de Chow. Pour les outils du contrôle géométrique utilisés, on fait référence aux livres de Agrachev et Sachkov [AS04], Trélat [Tré05] et Coron [Cor07]. Pour appliquer ce théorème, nous devons calculer des crochets de Lie, c'est-à-dire que nous devons dériver la force exercée par le fluide sur le nageur par rapport à la forme du nageur. Pour les résultats de régularité par rapport au domaine, on utilisera les résultats de Simon et al. [Sim91, BFCLS97, MS]. Ceci sera effectué dans le cas d'un nageur particulier dont la forme de référence est la sphère unité. Dans ce cas, nous utiliserons l'expression des solutions du problème de Stokes homogène donné par Lamb [Lam93]. On note que la forme des solutions est apparue originellement dans les travaux de Sampson [Sam91]. La forme de cette solution est aussi reportée dans le livre de Happel et Brenner [HB65] et dans les articles de Brenner [Bre64] et de Blake [Bla71, Bla73].

À la fin de cette partie, nous proposerons un schéma numérique pour le calcul des forces de viscosité. Ce schéma est particulièrement efficace dans le cas d'une sphère légèrement déformée. À l'aide de ce schéma, nous rechercherons numériquement un contrôle en temps optimal dans le cas où l'on considère un nageur à symétrie axiale.

Dans ce travail, nous n'avons considéré que le cas de la nage à bas nombre de Reynolds. Dans le cas du nombre de Reynolds infini, si l'on suppose de plus que le fluide est un fluide parfait, on fait référence aux travaux de Munnier et al. [Mun08, Mun09, MP10a, CM11, Mun10, CM10, MP10b]. Il est à noter que dans le cas du bas nombre de Reynolds et dans le cas du haut nombre de Reynolds avec un fluide parfait, les problèmes de la natation sont très similaires. En particulier, les résultats de contrôlabilité s'obtiennent par le même type de méthode et il existe aussi un "Théorème de la coquille Saint-Jacques".

Dans le cas du problème complet, où l'écoulement fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes, il n'existe, à notre connaissance, aucun résultat théorique sur la contrôlabilité du nageur, dans le cas où le nageur se déforme. Les seules études existantes concernent l'approche numérique ou expérimentale de ce problème. Pour ceci, on fait référence à San Martín, Scheid et al. [SMS08, SMSTT08, SMSTT05] et à Boyer et al. [KGB07, BPLV07, ERAH<sup>+</sup>08].

Cependant, il existe des résultats de contrôlabilité pour le problème proche qui est le contrôle de la position d'un solide dans un fluide régi par les équations de Navier-Stokes. On

réfère pour ce type de problème à Boulakia et Guerrero, [BG11], à Badra et Takahashi [BT11] et à Imanuvilov et Takahashi, [IT07].

Dans le cas du bas nombre de Reynolds, en plus des travaux précédemment cités, on fait référence aux travaux de Allouges, DeSimone et al. [ADH11, ADL08, ADH<sup>+</sup>10, DMDM11], Bonnivard [Bon], Sigalotti et Vivalda [SV10], San Martín, Takahashi et Tucsnak [SMTT07] et Michelin et Lauga [ML10].

# Notations

## Ensembles classiques

$\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$ ) est l'ensemble des réels (resp. complexes, entiers naturels et entiers relatifs).

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , on note  $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ , on note  $\mathbb{K}_+ = \mathbb{K} \cap [0, +\infty[$  et  $\mathbb{K}_- = \mathbb{K} \cap ]-\infty, 0]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbf{0}_n$  l'élément neutre de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $|x|$  la norme euclidienne de  $x$ . Par défaut, nous utiliserons cette norme.

## Applications linéaires

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels topologiques,

–  $\mathcal{L}(X, Y)$  est l'ensemble des applications linéaires continues de  $X$  dans  $Y$ .

$\mathcal{L}(X, X)$  sera noté  $\mathcal{L}(X)$ ;

– Soit  $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ , on définit

le noyau de  $P$  :  $\text{Ker } P = \{x \in X, Px = \mathbf{0}\} \subset X$ ,

l'image de  $P$  :  $\text{Im } P = \{Px, x \in X\} \subset Y$ .

## Matrices

$\mathbb{K}$  désignant un corps, pour  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $x \in \mathbb{K}^n$ , on note  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $x$ .

–  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est l'ensemble des matrices de taille  $n \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , on note  $M_{i,j}$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $M$ , avec  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ .

Lorsque  $m = n$ , on notera simplement cet ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

– Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

– on note  $M^\top$  (resp.  $M^*$ ) la matrice transposée (resp. adjointe) de  $M$ ;

– on définit la trace de  $M$  par :  $\text{Tr } M = \sum_{i=1}^n M_{ii}$ .

– On définit le produit scalaire  $\cdot : \cdot$  sur les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par

$$M : N = \text{Tr}(MN^\top) \quad (M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Muni de ce produit scalaire,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert.

– La matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $I_n$ .

– Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $\text{Orth}(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales,

$$\text{Orth}(n) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), R^\top R = I_n\}$$

et on note  $\text{SO}(n)$  l'ensemble des matrices de rotations de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\text{SO}(n) = \{R \in \text{Orth}(n), \det(R) = 1\}.$$

### Classes de fonctions

- Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Pour  $p \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ , on note  $C^p(E, F)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^p$  de  $E$  dans  $F$ . On note aussi  $C^\omega(E, F)$  l'ensemble des fonctions analytiques de  $E$  dans  $F$ . Lorsque  $E = F$  (topologiquement), on notera simplement  $C^p(E)$  ( $p = 0, 1, \dots, \infty$  ou  $\omega$ ).
- Soient  $T > 0$  et  $E$  un espace de Banach.  
 $C^\omega([0, T], E)$  (resp.  $C^p([0, T], E)$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) est l'ensemble des fonctions analytiques (resp. de classe  $C^p$ ) sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $E$ .  
 Soit  $E$  un ouvert ou une sous-variété plongée dans un espace euclidien.  $AC([0, T], E)$  est l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $E$ . Cet ensemble est muni de la norme :

$$\|f\|_{AC([0, T], E)} = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_E + \int_0^T \|\partial_t f(t)\|_E dt.$$

- Si  $E = \mathbb{R}$ , on écrira simplement  $C^\omega([0, T])$ ,  $C^p([0, T])$  ( $p = 1, 2, \dots, \infty$ ) et  $AC([0, T])$ .
- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  
 On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  à valeurs réelles et à support compact dans  $\Omega$ .  
 On rappelle ici quelques espaces de Sobolev classiques.  
 Pour  $p \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$  et  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on note  $W^{r, p}(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme :

$$\|f\|_{W^{r, p}(\Omega)} = \sum_{\ell=0}^r \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=\ell}} \|\partial_\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \quad (f \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

avec  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in \mathbb{R}_+^*, \\ \sup_{x \in \Omega} f(x) & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

- On note aussi  $L^p(\Omega) = W^{0, p}(\Omega)$  et  $H^r(\Omega) = W^{r, 2}(\Omega)$ .  
 Pour  $Z = L^p$ ,  $H^r$  ou  $W^{r, p}$ , on note  $Z_{loc}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $f|_K \in Z(K)$ .
- Pour tout ensemble de Banach  $E$ ,  $W^{1, 1}([0, T], E)$  est l'espace de Bochner-Sobolev (c.f. [Rou05, § 7.1, page 187]) constitué des fonctions Lebesgue-mesurables  $f : [0, T] \mapsto E$  telles que  $f, f' \in L^1([0, T], E)$  (la dérivée  $u'$  étant prise dans le sens des distributions). Il peut être montré que  $W^{1, 1}([0, T], E)$  s'injecte continument dans  $C([0, T], E)$  et que  $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds$  pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $f \in W^{1, 1}([0, T], E)$ . L'intégrale étant une intégrale de Bochner (généralisant le concept d'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach). L'espace  $W^{1, 1}([0, T], E)$  est muni de la norme  $\|f\|_{W^{1, 1}([0, T], E)} = \|f\|_{C([0, T], E)} + \int_0^T \|f'(s)\|_E ds$ .

## Opérateurs différentiels

Soit  $n \geq 1$  et soient  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  des fonctions suffisamment régulières, dans la base des coordonnées cartésiennes, on définit les opérateurs différentiels suivants :

- Gradient de la fonction  $\varphi$  :

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Gradient du champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  :

$$\nabla\mathbf{u} = (\nabla\mathbf{u}_1 \dots \nabla\mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

- Gradient symétrique du champ de vecteur  $\mathbf{u}$  :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top).$$

- Divergence du champ de vecteur  $\mathbf{u}$  :

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{Tr}(\nabla\mathbf{u}).$$

- Laplacien de la fonction  $\varphi$  :

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi).$$

- Laplacien du champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  :

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{u}_n \end{pmatrix}.$$

- Opérateur de convection :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$





Première partie

Quelques contributions à la théorie  
du contrôle en temps optimal



# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Rappels sur la contrôlabilité en dimension finie . . . . .	6
1.2	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	9
1.3	Calcul numérique des contrôles optimaux . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Étude d'un système bilinéaire en dimension finie</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Résultats de contrôlabilité . . . . .	20
2.3	Propriétés préliminaires de la solution optimale . . . . .	21
2.4	Principe du maximum de Pontryagin . . . . .	24
2.5	Solution optimale avec un contrôle de dimension deux . . . . .	29
2.6	Solution optimale avec un contrôle de dimension $n$ . . . . .	37
2.7	Conclusion et perspectives . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Cas de la dimension infinie</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Opérateurs de contrôle et d'observation . . . . .	44
3.3	Contrôlabilité et observabilité en dimension infinie . . . . .	46
3.4	Résultats principaux . . . . .	51
3.5	Application à l'équation de Schrödinger . . . . .	55
3.6	Conclusion et questions ouvertes . . . . .	58

---



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Rappels sur la contrôlabilité en dimension finie . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1	Méthode des crochets de Lie . . . . .	6
1.1.2	Méthode du retour . . . . .	8
<b>1.2</b>	<b>Existence d'un contrôle optimal . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	Cas général . . . . .	10
1.2.2	Cas linéaire . . . . .	13
<b>1.3</b>	<b>Calcul numérique des contrôles optimaux . . . . .</b>	<b>14</b>
1.3.1	Les méthodes de tir . . . . .	14
1.3.2	Méthodes directes . . . . .	15

---

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques concepts de base sur la contrôlabilité et la contrôlabilité en temps optimal. Les résultats sont issus des livres de Agrachev et Sachkov [AS04], Coron [Cor07], Ioffe et Tihomirov [IT79] et Tucsnak et Weiss [TW09]. On réfère aussi aux livres de Trélat [Tré05] et Bonnard, Faubourg et Trélat [BFT06].

Soient  $X$  et  $U$  deux espaces de Banach et  $f : X \times U \rightarrow X$ . On considère le système dynamique :

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) \quad (t \in [0, T]), \quad (1.0.1)$$

pour  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , muni d'une condition initiale de Cauchy :  $z(0) = z_0$ .

Dans ce système  $u(t)$  est le contrôle à l'instant  $t$  et  $z(t)$  est l'état du système à l'instant  $t$ . On peut aussi supposer que l'équation différentielle ordinaire (1.0.1) est posée sur une variété différentielle  $M$  plongée dans  $X$ . Dans ce cas, pour tout  $z \in M$ , on suppose que  $f(z, \cdot) : U \rightarrow T_z M$ , avec  $T_z M$  l'espace tangent à  $M$  en  $z$ , c'est-à-dire que  $f(\cdot, u)$  est un champ de vecteurs sur  $M$  pour tout  $u \in U$ .

On définit  $\Phi_T$ , la fonction entrée-sortie en temps  $T$ , qui associe au contrôle  $u$  la valeur de l'état à l'instant  $T$ . On notera aussi  $\mathcal{A}_T(z_0)$  l'image de  $\Phi_T$ , l'ensemble des points accessibles en temps  $T$  à partir de  $z_0$ .

Nous dirons que le système est contrôlable en temps  $T$  si  $\Phi_T$  est une application surjective, c'est-à-dire que pour tout  $z_1 \in X$ , il existe une fonction  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que  $z(T) = z_1$ . Nous dirons que le système est approximativement contrôlable en temps  $T$  si l'image de  $\Phi_T$  est dense dans  $X$ , c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $z_1 \in X$ , il existe une fonction  $u : [0, T] \rightarrow U$  telle que  $\|z(T) - z_1\|_X \leq \varepsilon$ .

## 1.1 Rappels sur la contrôlabilité en dimension finie

Dans cette section, on suppose que  $X = M$  est une variété  $C^\infty$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que le Théorème de plongement de Whitney permet de considérer que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

### 1.1.1 Méthode des crochets de Lie

Soient  $f$  et  $g$  deux champs de vecteurs lisses sur  $M$ . On définit le crochet de Lie de  $f$  et  $g$  par :

$$[f, g](z) = Dg_z f(z) - Df_z g(z) \quad (z \in M), \quad (1.1.1)$$

avec  $Dg_z f(z)$  la différentielle de  $g$  en  $z$  appliquée à  $f(z)$ .

Le crochet ainsi défini satisfait les propriétés requises pour un crochet de Lie, c'est-à-dire :

1. L'antisymétrie,  $[f, g] = -[g, f]$  ;
2. La linéarité,  $[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g] = \lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g]$  ;
3. L'identité de Jacobi,  $[f, [g, h]] = [[f, g], h] + [g, [f, h]]$ .

On appelle *algèbre de Lie* un espace vectoriel doté d'un produit interne satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 ci-dessus.

**Exemple 1.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du crochet :  $[A, B] = AB - BA$  ( $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) est une algèbre de Lie.

L'ensemble des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $M$  muni du crochet défini par (1.1.1) est une algèbre de Lie. Soit  $\mathcal{J} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$  une famille de champs de vecteurs lisses sur  $M$ , on note  $\text{Lie } \mathcal{J}$  la plus petite algèbre de Lie contenant  $\mathcal{J}$ . Pour tout  $z \in M$ , on note  $\text{Lie}_z \mathcal{J}$  l'espace vectoriel obtenu par l'évaluation de  $\text{Lie } \mathcal{J}$  en  $z$ . On a  $\text{Lie}_z \mathcal{J} \subset T_z M$ .

**Exemple 1.1.2.** On considère le système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  donné par :

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad (1.1.2)$$

où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$  ( $n, d \in \mathbb{N}^*$ ) sont deux matrices constantes,  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'état du système et  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  le contrôle. On définit  $f_0, f_1, \dots, f_d$  les champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$f_0(z) = Az \quad \text{et} \quad f_i(z) = b_i \quad (i \in \{1, \dots, d\}, \quad z \in \mathbb{R}^n),$$

où  $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^n$  sont les colonnes de  $B$ . En notant  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))^\top$ , on obtient que (1.1.2) se réécrit :

$$\dot{z} = f_0(z) + \sum_{i=1}^d u_i f_i(z).$$

Il est aisé de voir que  $\text{Lie}_0 \{f_0, \dots, f_d\} = \text{vect} \{A^k b_i, k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, d\}\}$  et ainsi, en utilisant le Théorème de Calley-Hamilton que :

$$\dim \text{Lie}_0 \{f_0, \dots, f_d\} = \text{rg} (B, AB, \dots, A^{n-1}B).$$

Ce résultat est à rapprocher de la condition du rang de Kalman, c'est-à-dire que si  $\text{rg} (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ , alors le système dynamique (1.1.2) est contrôlable.

Nous allons maintenant énoncer le résultat de contrôlabilité de Rashevski-Chow. Ce Théorème 1.1.3 est une conséquence du Théorème de l'orbite (c.f. [AS04, Theorem 5.1]). Pour plus de détails, on fait référence à [AS04, Theorem 5.9] ou [Cor07, Theorem 3.18].

**Théorème 1.1.3** (Rashevski-Chow). *Soient  $f_1, \dots, f_d$ ,  $d$  champs de vecteurs lisses sur  $M$ . Si pour tout  $z \in M$ , nous avons :*

$$\text{Lie}_z\{f_1, \dots, f_d\} = T_zM, \quad (1.1.3)$$

alors le système dynamique :

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^d u_i f_i(z), \quad (1.1.4)$$

est contrôlable en tout temps  $T > 0$ .

Si on suppose que le contrôle  $u$  est borné, alors il existe un temps  $T_0 \geq 0$  tel que le système est contrôlable en tout temps  $T > T_0$ .

**Exemple 1.1.4.** Sur  $\mathbb{R}^3$ , on considère le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_1 u_2 - z_2 u_1. \end{aligned}$$

Ce système est connu sous le nom d'intégrateur de Brockett. Une généralisation de ce système sera donnée dans le Chapitre 2. Pour ce système,  $u_1$  et  $u_2$  sont des contrôles à valeurs réelles.

On définit les deux champs de vecteurs  $f_1$  et  $f_2$  par :

$$f_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -z_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (z = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{R}^3).$$

Soit  $z \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$[f_1, f_2](z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\text{Vect}\{f_1(z), f_2(z), [f_1, f_2](z)\} = \mathbb{R}^3 = T_z\mathbb{R}^3$  et le Théorème 1.1.3 assure le résultat de contrôlabilité pour ce système.

On remarque que montrer la condition (1.1.3) revient à montrer qu'un déterminant est non nul. Il est alors trivial de montrer le corollaire suivant :

**Corollaire 1.1.5.** *Soient  $M$  une variété analytique et  $f_1, \dots, f_d$  des champs de vecteurs analytiques sur  $M$ . S'il existe  $z \in M$  tel que :*

$$\text{Lie}_z\{f_1, \dots, f_d\} = T_zM,$$

alors pour presque tous  $z_0, z_1 \in M$  et pour tout  $T > 0$ , il existe  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que la solution  $z$  du système dynamique (1.1.4) satisfait  $z(0) = z_0$  et  $z(T) = z_1$ .

Si on suppose que  $u$  est borné, alors pour presque tous  $z_0, z_1$  éléments de  $M$ , il existe  $T_0 \geq 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ , il existe  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que la solution  $z$  du système dynamique (1.1.4) satisfait  $z(0) = z_0$  et  $z(T) = z_1$ .



Il est aisé de vérifier que sous les hypothèses du Théorème 1.1.3, nous avons un résultat de suivi de trajectoire, c'est-à-dire que pour toute courbe  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u$  tel que la solution  $z$  du système dynamique (1.1.4) satisfait :

$$\|z(t) - \gamma(t)\|_M < \varepsilon \quad (t \in [0, T]).$$

La méthode des crochets de Lie est très bien adaptée au cas des systèmes de dimension finie, particulièrement pour le cas des équations différentielles ordinaires non linéaires. Cependant elle se généralise difficilement au cas des systèmes de dimension infinie. C'est pourquoi dans le paragraphe suivant, nous introduisons une autre méthode.

### 1.1.2 Méthode du retour

Pour plus de détails sur cette méthode, on fait référence à [Cor07, Chapitre 6].

Soit  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $f(\mathbf{0}_n, \mathbf{0}_d) = \mathbf{0}_n$ . On considère le système dynamique  $\dot{z} = f(z, u)$ .

On suppose que pour tout  $T > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction mesurable à variations bornées  $\bar{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\|\bar{u}\|_{L^\infty(0, T)} \leq \varepsilon$  et

- la solution maximale  $\bar{z}$  du problème de Cauchy

$$\dot{\bar{z}} = f(\bar{z}, \bar{u}), \quad \bar{z}(0) = \mathbf{0}_n,$$

satisfait  $\bar{z}(T) = \mathbf{0}_n$  ;

- le système linéarisé autour de  $(\bar{z}, \bar{u})$  est contrôlable en temps  $T$ .

Alors, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tous  $z_0, z_1$  dans  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant  $|z_0| < \eta, |z_1| < \eta$ , il existe un contrôle  $u \in L^\infty(0, T)^d$  pour lequel  $\|\bar{u} - u\|_{L^\infty(0, T)} \leq \varepsilon$  et la solution  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  du problème  $\dot{z} = f(z, u)$  muni de la condition initiale  $z(0) = z_0$  satisfasse  $z(T) = z_1$ .

En effet, nous avons le Théorème suivant (c.f. [Cor07, Theorem 3.6]) :

**Théorème 1.1.6.** *Soient  $t_0 < t_1$  deux réels et  $(\bar{x}, \bar{u}) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$  une trajectoire du système de contrôle  $\dot{x} = f(x, u)$ .*

*On suppose que le système linéarisé le long de la trajectoire  $t \mapsto (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  est contrôlable. Alors le système de contrôle (non linéaire) est localement contrôlable le long de la trajectoire  $t \mapsto (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ .*

**Exemple 1.1.7.** *Nous reprenons le système donné dans l'Exemple 1.1.4, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_1 u_2 - z_2 u_1. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

*On considère alors un contrôle  $\bar{u}$  tel que pour tout  $t \in [0, T]$ , on ait  $\bar{u}(T - t) = -u(t)$ . Il est aisé de vérifier que la solution  $\bar{z}$  du système (1.1.5) correspondante satisfait pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\bar{z}(T - t) = z(t)$ . Ainsi, si on munit (1.1.5) de la condition initiale  $\bar{z}(0) = \mathbf{0}_3$ , il est clair que  $\bar{z}(T) = \bar{z}(0) = \mathbf{0}_3$ .*

*On pose  $f(z, u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ z_1 u_2 - z_2 u_1 \end{pmatrix}$ , de sorte que (1.1.5) s'écrit  $\dot{z} = f(z, u)$ .*

*On obtient le système linéarisé correspondant en calculant  $A(t) = \partial_z f(\bar{z}(t), \bar{u}(t))$  ainsi que  $B(t) = \partial_u f(\bar{z}(t), \bar{u}(t))$  :*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{u}_2(t) & -\bar{u}_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\bar{z}_2(t) & \bar{z}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Le système linéarisé autour de  $(\bar{z}, \bar{u})$  s'écrit alors :

$$\dot{y} = Ay + Bv.$$

On rappelle alors le Théorème suivant (c.f. [Cor07, Theorem 1.18]) :

**Théorème 1.1.8.** Soient  $A : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$  ( $n, d \in \mathbb{N}^*$ ) deux applications continues.

Pour tout  $t \in [0, T]$ , on construit la suite de matrices  $(B_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$  par la formule de récurrence :

$$B_0(t) = B(t), \quad B_i(t) = B_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t) \quad (i \in \mathbb{N}^*).$$

Supposons que pour un certain  $\bar{t} \in [0, T]$ , on ait :

$$\text{Vect} \left\{ B_i(\bar{t})u, u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{R}^n,$$

alors, le système de linéaire  $\dot{y} = Ay + Bv$  est contrôlable en temps  $T$ .

**Retour à l'exemple 1.1.7.** Dans le cas du système (1.1.5), nous avons :

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \bar{u}_2(t) - \bar{z}_1(t) & \bar{z}_2(t) - \bar{u}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} & \text{Vect} \left\{ B_i(t)u, u \in \mathbb{R}^d, i \in \{1, 2\} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\bar{z}_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{z}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{u}_1(t) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $\bar{u} \neq 0$ , l'ensemble ci-dessus est  $\mathbb{R}^3$  en un certain temps  $t \in [0, T]$ . Nous en déduisons que la condition de contrôlabilité autour de  $\mathbf{0}_3$  est vérifiée pour ce système.

## 1.2 Existence d'un contrôle optimal

Soient  $M$  une variété lisse,  $K \subset M$ ,  $f(\cdot, v)$  un champ de vecteurs lisse sur  $M$  pour tout  $v \in U$  avec  $U \subset \mathbb{R}^d$ .

Pour  $u \in L^\infty([0, T], U)$ , on considère  $z_u$  la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}_u = f(z_u, u), \quad z_u(0) = z_0,$$

et les deux problèmes de minimisation suivants :

**Problème 1.2.1** (Minimisation d'une fonctionnelle). Étant donnés  $z_0$  et  $z_1$  dans  $M$ , minimiser une fonction réelle continue  $u \mapsto J(u)$  définie sur  $L^\infty([0, T], U)$  sous les contraintes :

- $u(t) \in U$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  ;
- $z_u(t) \in K$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  ;
- $z_u(T) = z_1$ .

**Problème 1.2.2** (Minimisation du temps). Étant donnés  $z_0$  et  $z_1$  dans  $M$ , minimiser le temps  $T \geq 0$  tel que l'on ait :

- $u(t) \in U$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  ;
- $z_u(t) \in K$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,
- $z_u(T) = z_1$ .

Il est trivial que le Problème 1.2.2 peut s'écrire sous la forme d'un problème du type Problème 1.2.1 par un changement de variable en temps. Dans ce cas, on rajoute une variable d'état ( $T$ ) au problème initial, la variété devient  $M \times \mathbb{R}$  et  $K$  devient  $K \times \mathbb{R}_+$ .

Les problèmes de contrôle en temps minimal sont des problèmes classiques pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires. Pour de tels systèmes, il est bien connu (c.f. Bellman, Glicksberg et Gross [BGG56]) qu'ils satisfont le principe du maximum de Pontryagin et qu'ils conduisent à un contrôle *bang-bang*. Nous allons présenter dans cette section deux approches.

Dans le paragraphe 1.2.1, on présentera le principe du maximum de Pontryagin pour des systèmes de dimension finie quelconques. Cependant la preuve de ce Principe dans le cas général est difficilement adaptable au cas de la dimension infinie.

C'est pourquoi, dans le paragraphe 1.2.2, nous donnons l'énoncé du principe du maximum de Pontryagin dans le cas particulier des systèmes affines de dimension finie. Le principal intérêt de ce "deuxième" principe du maximum de Pontryagin est que sa démonstration originelle due à Bellman, Glicksberg et Gross [BGG56] s'adapte facilement à certains problèmes de dimension infinie, comme nous le verrons dans le Chapitre 3.

Dans cette section, nous ne rappelons que le cas des systèmes autonomes. Des résultats similaires existent dans le cas non-autonome, on fait référence par exemple à [IT79].

### 1.2.1 Cas général

Dans ce paragraphe, nous allons donner un résultat d'existence d'un contrôle optimal (le Théorème de Filippov, c.f. [AS04, Chapitre 10] et [Ces83]). Nous donnerons aussi une condition nécessaire sur le contrôle optimal (le principe du maximum de Pontryagin, c.f. [Pon89, IT79]).

**Théorème 1.2.3** (Filippov). *On suppose que :*

- $U$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$  ;
- il existe un compact  $K$  de  $M$  tel que  $f(z, u) = 0$  pour tout  $z \notin K$  et tout  $u \in U$  ;
- pour tout  $z \in M$ , l'ensemble  $\{f(z, u), u \in U\}$  est convexe.

Alors, pour tout  $z \in M$  et tout  $t > 0$ , l'ensemble des points atteignables à partir de  $z$  en temps  $t$ ,  $\mathcal{A}_t(z)$ , est un compact de  $M$ .

Sous les hypothèses du Théorème 1.2.3, le Problème 1.2.2 admet une solution.

Nous allons maintenant donner le principe du maximum de Pontryagin dans sa forme générale. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

On se place dans le cas  $M = \mathbb{R}^n$  et on écrit la fonctionnelle  $J$  sous la forme :

$$J(u) = \int_0^T h(z(t), u(t)) dt,$$

où  $z$  est la solution d'un problème de Cauchy du type

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z(0) = z_0.$$

On considère de plus  $k$  fonctions  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i \in \{1, \dots, k\}$ ) et on suppose, comme dans le Théorème de Filippov, que  $U$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que les fonctions  $g_i$  et  $h$  sont dérivables.

Le problème de minimisation considéré est :

**Problème 1.2.4.** Étant donné  $z_1 \in \mathbb{R}^n$ , minimiser  $J(u) = \int_0^T h(z(t), u(t)) dt$  sous les contraintes :

- $z$  est solution du problème de Cauchy ci-dessus avec  $u \in L^\infty([0, T], U)$  ;
- $z(T) = z_1$  ;
- $g_i(z(t)) \leq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et tout  $t \in [0, T]$ .

Pour ce faire, on introduit le hamiltonien de ce système :

$$H(z, u, p, s_0) = \langle p, f(z, u) \rangle + s_0 h(z, u)$$

où  $p \in \mathbb{R}^n$  est la variable adjointe et  $s_0 \in \mathbb{R}$  est le multiplicateur de Lagrange associé au coût. On définit aussi :

$$\mathcal{H}(z, p, s_0) = \sup_{u \in U} H(z, u, p, s_0).$$

Nous avons le résultat suivant (c.f. [IT79, Theorem 1 Paragraphe 5.2.1]).

**Théorème 1.2.5** (principe du maximum sous forme hamiltonienne). *Soit  $u^*$  une solution optimale du Problème 1.2.4. On note  $z^*$  la solution du problème de Cauchy :*

$$\dot{z}^* = f(z^*, u^*), \quad z^*(0) = z_0.$$

Alors, il existe  $s_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $q_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^n$ , une fonction  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $k$  mesures régulières positives  $\eta_1, \dots, \eta_k$  dont les supports sont respectivement inclus dans les ensembles  $\{t \in [0, T], g_i(z^*(t)) = 0\}$  tels que :

1.  $s_0, q_0, q_1, p, \eta_1, \dots, \eta_k$  sont non tous nuls ;
2.  $p(0) = q_0$  et, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $p$  satisfait l'équation intégrale :

$$p(t) = -q_1 + \int_t^T \partial_z H(z^*(\sigma), u^*(\sigma), p(\sigma), s_0) d\sigma - \sum_{i=1}^k \int_t^T \partial_z g_i \circ z^* d\eta_i ;$$

3. pour presque tout  $t \in [0, T]$  :  $H(z^*(t), u^*(t), p(t), s_0) = \mathcal{H}(z^*(t), p(t), s_0)$ .

La transposition de ce théorème au cas du contrôle en temps optimal est donnée dans [IT79, Paragraphe 5.2.2]. Plus précisément, on définit pour ce problème le hamiltonien :

$$H(z, u, p, s_0) = \langle p, f(z, u) \rangle + s_0.$$

et on note toujours  $\mathcal{H}(z, p, s_0) = \sup_{u \in U} H(z, u, p, s_0)$ .

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 1.2.6.** *Soient  $T^* > 0$  le temps optimal et  $u^*$  un contrôle en temps optimal satisfaisant les contraintes du Problème 1.2.4. On note  $z^*$  la solution du problème de Cauchy :*

$$\dot{z}^* = f(z^*, u^*), \quad z^*(0) = z_0.$$

Alors, il existe  $s_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $q_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}^n$ , une fonction  $p : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $k$  mesures régulières positives  $\eta_1, \dots, \eta_k$  dont les supports sont respectivement inclus dans les ensembles  $\{t \in [0, T^*], g_i(z^*(t)) = 0\}$  tels que :

1.  $s_0, q_0, q_1, p, \eta_1, \dots, \eta_k$  sont non tous nuls ;

2.  $p(0) = q_0$  et, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $p$  satisfait l'équation intégrale :

$$p(t) = -q_1 + \int_t^{T^*} \partial_z H(z^*(s), u^*(s), p(s), s_0) ds - \sum_{i=1}^k \int_t^{T^*} \partial_z g_i \circ z^* d\eta_i ;$$

3. pour presque tout  $t \in [0, T^*]$  :  $H(z^*(t), u^*(t), p(t), s_0) = \mathcal{H}(z^*(t), p(t), s_0) = 0$ .

**Exemple 1.2.7.** On reprend ici le système de l'Exemple 1.1.4 :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_1 u_2 - z_2 u_1. \end{aligned}$$

On suppose que  $U$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^2$  (pour la norme euclidienne).

On considère pour ce problème qu'il n'y a pas de contrainte sur l'état. Ce qui revient à prendre par exemple les  $g_i$  identiquement égaux à  $-1$ .

Pour le problème de contrôle en temps optimal, le hamiltonien de ce système est :

$$H(z, u, p, s_0) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 (z_1 u_2 - z_2 u_1) + s_0 = u_1 (p_1 - p_3 z_2) + u_2 (p_2 - p_3 z_1) + s_0.$$

Ainsi, il est trivial que :

$$\mathcal{H}(z, p, s_0) = \sqrt{(p_1 - p_3 z_2)^2 + (p_2 - p_3 z_1)^2} + s_0.$$

Soient  $T^*$  le temps optimal et  $u^*$  un contrôle optimal. Par application du Théorème 1.2.6 on obtient l'existence de  $s_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^3$  et d'une fonction  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tels que :

1.  $s_0, q_0, q_1, p$  sont non tous nuls ;
2.  $p(0) = q_0$  et pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ ,  $p$  satisfait :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= -q_{11} - \int_t^{T^*} p_3(s) u_2^*(s) ds \\ p_2(t) &= -q_{12} + \int_t^{T^*} p_3(s) u_1^*(s) ds \\ p_3(t) &= -q_{13} \end{aligned}$$

3. pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ ,  $\sqrt{(p_1 - p_3 z_2^*)^2 + (p_2 - p_3 z_1^*)^2} = -s_0$ .

$$\text{Ainsi, si } s_0 \neq 0, \text{ on a : } u^* = \frac{1}{-s_0} \begin{pmatrix} p_1 - p_3 z_2^* \\ p_2 - p_3 z_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{p.p. sur } [0, T^*]).$$

On mentionne ici le cas affine qui sera détaillé dans le paragraphe suivant.

**Exemple 1.2.8.** Considérons le système dynamique introduit dans l'Exemple 1.1.2 :

$$\dot{z} = Ax + Bu,$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ ,  $z$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ( $n, d \in \mathbb{N}^*$ ).

De même que dans le cas précédent, on considère le problème de contrôle en temps optimal. On suppose que  $U$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  (pour la norme euclidienne) et qu'il n'y a pas de contrainte sur l'état. Le hamiltonien de ce système est :

$$H(z, u, p, s_0) = \langle p, Az + Bu \rangle + s_0.$$

On en déduit :

$$\mathcal{H}(z, p, s_0) = \langle p, Az \rangle + |B^* p| + s_0.$$

Soient  $T^*$  le temps optimal et  $u^*$  un contrôle optimal. Par application du Théorème 1.2.6, on obtient l'existence de  $s_0 \in \mathbb{R}_-$ ,  $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^3$  et d'une fonction  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que :

1.  $s_0, q_0, q_1, p$  sont non tous nuls ;
2.  $p(0) = q_0$  et pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ ,  $p$  satisfait :

$$p(t) = -q_1 + \int_t^{T^*} A^* p(s) ds ;$$

On obtient alors que  $p$  est solution du problème de Cauchy :

$$\dot{p} = -A^* p, \quad p(0) = q_0. \quad (1.2.1)$$

3. pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ , on a :

$$H(z^*(t), u^*(t), p(t), s_0) = \mathcal{H}(z^*(t), p(t), s_0) = 0. \quad (1.2.2)$$

On en déduit en particulier que pour tout  $t \in [0, T^*]$  tel que  $B^* p(t) \neq \mathbf{0}$ , on a :

$$u^*(t) = \frac{1}{|B^* p(t)|} B^* p(t).$$

## 1.2.2 Cas linéaire

Dans ce paragraphe, on considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$  ( $n, d \in \mathbb{N}^*$ ) deux matrices. On note  $z$  la variable d'état à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $u$  la variable de contrôle à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On note  $U$  la boule unité (pour la norme euclidienne) de  $\mathbb{R}^d$ . On ne considère ici que le problème de contrôle en temps optimal suivant :

**Problème 1.2.9.** Étant donnés  $z_0, z_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , existe-t-il un temps minimal  $T^* \geq 0$  tel que si  $T < T^*$ , alors il n'existe pas  $u \in L^\infty([0, T], U)$  pour lequel la solution  $z$  du système de Cauchy :

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z(0) = z_0,$$

satisfasse  $z(T) = z_1$  ?

Le résultat suivant est dû à Bellman, Glikhsberg et Gross [BGG56]. Ce résultat est reporté dans le livre de Fattorini [Fat05, Theorem 1.1.1].

**Théorème 1.2.10.** Soit  $T^*$  un temps optimal et  $u^* \in L^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^d)$  un contrôle en temps optimal. Alors, il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta \neq \mathbf{0}$  tel que  $u^*$  satisfasse pour presque tout  $t \in [0, T^*]$  :

$$\langle B^* \exp((T^* - t)A^*) \eta, u^*(t) \rangle = \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^d \\ \|v\| \leq 1}} \langle B^* \exp((T^* - t)A^*) \eta, v \rangle. \quad (1.2.3)$$

La preuve originelle donnée dans [BGG56] se généralise facilement au cas de la dimension infinie. Cette preuve est contenue dans celle du Théorème 3.4.4 et nous ne la donnons pas ici.

**Remarque 1.2.11.** On peut faire le lien avec l'Exemple 1.2.8. En effet, en notant  $\eta = q_1$ , on obtient que la solution du problème de Cauchy (1.2.1) est donnée par :

$$p(t) = \exp((T^* - t)A^*) \eta \quad (t \in [0, T^*]).$$

Ainsi, les équations (1.2.2) et (1.2.3) sont identiques.

### 1.3 Calcul numérique des contrôles optimaux

Pour cette section, on fait référence au livre de Trélat [Tré05].

Dans cette section, on considère, comme dans le paragraphe 1.2.1, le système dynamique défini par l'équation différentielle :

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z(0) = z_0.$$

Le problème de contrôle optimal considéré est le Problème 1.2.1. On rappelle que le Problème 1.2.2 peut se ramener au Problème 1.2.1.

#### 1.3.1 Les méthodes de tir

Les méthodes de tir sont basées sur une "intégration" du principe du maximum de Pontryagin.

On rappelle que le principe du maximum de Pontryagin assure l'existence de  $s_0, q_0, q_1, p$  non tous nuls pour lesquels on a pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$p(t) = -q_1 + \int_t^T \partial_z H(z^*(t), u^*(t), p(t), s_0) dt - \sum_{i=1}^k \int_t^T \partial_z g_i \circ z^* d\eta_i,$$

et de plus,

$$H(z^*(t), u^*(t), p(t), s_0) = \mathcal{H}(z^*(t), p(t), s_0).$$

Par conséquent, si pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $u^*(t)$  est déterminée de manière unique et si  $p$  est différentiable, on en déduit que  $r = \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}$  est solution d'une équation différentielle du type :

$$\dot{r} = F(r).$$

Les conditions initiales sur  $r$  étant  $r(0) = \begin{pmatrix} z_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ , où  $q_0$  est une inconnue du problème. On note alors  $r_{q_0}$  la solution de cette équation différentielle. La recherche de solutions au principe du maximum de Pontryagin se réduit à la recherche des points  $q_0$  satisfaisant :

$$r_{q_0}(T) \in z_1 \times \mathbb{R}^n.$$

En d'autres termes, cela revient à rechercher les zéros de la fonction  $G(q_0) = \|z_{q_0}(T) - z_1\|$  (avec les notations évidentes). La résolution numérique d'un tel système peut par exemple être effectuée via une méthode de Newton.

Cette méthode est appelée méthode de tir simple.

La méthode de tir multiple est basée sur le même principe. Cependant, pour cette méthode, on considère une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  de  $[0, T]$  et on effectue une méthode de tir simple sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Les inconnues de ce problème sont pour cette méthode  $n$  conditions "initiales" ( $q_0^0, \dots, q_0^{n-1}$ ) sur  $p$  et  $n - 1$  conditions "initiales" ( $z_0^1, \dots, z_0^{n-1}$ ) sur  $z$ . Ces conditions initiales doivent satisfaire des conditions de recollement aux instants  $t_1, \dots, t_n$ . Plus précisément, les contraintes suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{pmatrix} z_{q_0^i}(t_{i+1}) \\ p_{q_0^i}(t_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^{i+1} \\ q_0^{i+1} \end{pmatrix} \quad (i \in \{0, \dots, n-2\}) \quad \text{et} \quad z_{q_0^{n-1}} = z_1,$$

où l'on a noté  $\begin{pmatrix} z_{q_0^i} \\ p_{q_0^i} \end{pmatrix}$  la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{r} = F(r)$  posée sur  $[t_i, t_{i+1}]$  munie de la condition initiale  $\begin{pmatrix} z_{q_0^i}(t_i) \\ p_{q_0^i}(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0^i \\ q_0^i \end{pmatrix}$  (avec  $z_0^0 = z_0$ ).

L'intérêt de cette méthode est qu'elle est facilement parallélisable et que s'il y a un changement de régime à un instant  $\tilde{t}$  de  $]0, T[$  (par exemple un instant où la trajectoire atteint une contrainte) on peut plus facilement le mettre en évidence. En effet, la subdivision  $t_0, \dots, t_n$  de  $[0, T]$  n'est pas nécessairement fixée.

### 1.3.2 Méthodes directes

Contrairement aux méthodes de tir, on ne cherche pas à intégrer le principe du maximum de Pontryagin dans les méthodes directes. Pour ces méthodes, le problème de contrôle optimal est abordé directement.

Une méthode directe connue est la méthode basée sur les équations d'Hamilton-Jacobi. Cette méthode consiste à introduire une équation aux dérivées partielles du premier ordre satisfaite par la fonction que l'on cherche à minimiser. L'idée originelle de cette méthode vient de la recherche des chemins empruntés par les rayons lumineux dans un domaine hétérogène. Cependant, nous n'avons pas étudié ici cette méthode. Pour plus de détails, on fait référence à [Tré05, Chapitre 8] et [BCD97].

La méthode directe que nous avons intensivement utilisée est la méthode dite de "discrétisation totale". Cette méthode est basée sur une discrétisation de l'équation différentielle ordinaire sous-jacente au problème de contrôle.

Plus précisément, on considère  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$  une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ . Les inconnues du problème considéré sont  $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_n)$  et  $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_n)$ . Les éléments  $\tilde{u}_i$  (resp.  $\tilde{z}_i$ ) devant correspondre à une approximation de la valeur du contrôle  $u$  (resp. de l'état  $z$ ) aux temps  $t_i$ . On rappelle que la fonction à minimiser s'écrit sous la forme  $J(u, z) = \int_0^T h(z(t), u(t)) dt$ . Par une formule de quadrature, on construit une approximation numérique de cette intégrale  $\tilde{J}(\tilde{u}, \tilde{z})$ . On considère un schéma numérique d'intégration de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{z} = f(z, u)$ . Ce schéma numérique peut s'écrire sous la forme de l'équation :

$$\tilde{z} = \tilde{f}(t_1, \dots, t_n, \tilde{z}, \tilde{u}).$$

Le problème de minimisation discret est le suivant :

**Problème 1.3.1.** Étant donné  $z_1$ , minimiser  $\tilde{J}(\tilde{u}, \tilde{z})$  sous les contraintes :

- $\tilde{z}_0 = z_0$  et  $\tilde{z}_n = z_1$  ;
- $\tilde{z} = \tilde{f}(t_1, \dots, t_n, \tilde{z}, \tilde{u})$  ;
- $\tilde{u}_i \in U$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  ;
- $\tilde{z}_i \in K$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Ce problème de minimisation sous contraintes peut par exemple être résolu numériquement par une méthode du type point intérieur.





## Chapitre 2

# Étude d'un système bilinéaire en dimension finie

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Résultats de contrôlabilité . . . . .	20
2.3	Propriétés préliminaires de la solution optimale . . . . .	21
2.4	Principe du maximum de Pontryagin . . . . .	24
2.5	Solution optimale avec un contrôle de dimension deux . . . . .	29
2.6	Solution optimale avec un contrôle de dimension $n$ . . . . .	37
2.7	Conclusion et perspectives . . . . .	41

---

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un problème de contrôle en temps optimal d'un système non-holonome de dimension  $n + 1$ . Un système holonome est un système pour lequel, il existe une intégrale première. Plus précisément, si l'on considère le système dynamique :

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z(0) = z_0,$$

avec  $z$  la variable d'état et  $u$  la variable de contrôle, alors il existe une fonction  $F$  telle que  $F(z(t)) = 0$  quel que soit le contrôle  $u$ .

A contrario, un système non-holonome est un système pour lequel on ne peut pas construire d'intégrale première.

Le système non-holonome que nous allons considérer est une généralisation du système connu sous le nom d'intégrateur de Brockett [Bro82]. Il est aussi parfois appelé système de Heisenberg. Nous avons également rencontré ce type de système lors de la modélisation de la nage à bas nombre de Reynolds (voir Chapitre 8 et tout particulièrement la Section 8.2). Ceci a motivé notre intérêt pour l'étude d'un tel système.

Le problème de contrôle en temps optimal pour des systèmes non-holonomes a déjà été étudié dans la littérature. Des solutions explicites ont été données dans le cas  $n = 2$  lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur l'état. Pour ceci, on fait référence à Bloch [Blo03] où le problème est abordé via une approche lagrangienne. Nous référons aussi à Beals, Gaveau et Greiner [BGG00] ainsi qu'à Prieur et Trélat [PT05] où le problème de contrôle en temps optimal a été résolu via une description des géodésiques d'une variété sous-riemannienne.

À notre connaissance, il n'existe pas de descriptions des contrôles en temps optimal pour ce système lorsque des contraintes sur l'état du système sont imposées. L'objectif de ce chapitre est de donner une description des contrôles en temps optimal lorsque des contraintes sur l'état sont imposées. Ceci est fait via l'application du principe du maximum de Pontryagin étendu au cas des systèmes dont l'état est contraint. On réfère à Bonnans et Hermant [BH07], Harlt, Sethi et Vickson [HSV95] ou Ioffe et Tihomirov [IT79] pour plus de détails sur le principe du maximum de Pontryagin.

Le système non-holonyme que nous allons considérer est une généralisation multidimensionnelle de l'intégrateur de Brockett [Bro82]. La généralisation, en dimension supérieure, choisie diffère de celle donnée originellement dans [Bro82] mais suit celle donnée par Beals, Gaveau et Greiner [BGG00] pour des systèmes de Heisenberg de dimension  $2n + 1$ .

L'intérêt de ce chapitre est de construire un exemple de système non linéaire où le temps optimal et des contrôles optimaux peuvent être obtenus explicitement. Plus précisément, le problème de contrôle est linéaire par rapport à certaines variables d'état et par rapport aux contrôles. La difficulté majeure de cette étude provient du choix d'imposer des contraintes sur les variables d'état du système.

L'ensemble de ce chapitre reprend un travail en collaboration avec J.-F. Scheid, [LS12].

Dans tout ce chapitre, on suppose que  $n \geq 2$  est un entier et que  $M$  est une matrice réelle et non symétrique (i.e.  $M^T \neq M$ ) de taille  $n \times n$ .

On se fixe aussi une constante  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et un réel non nul  $\bar{y} \in \mathbb{R}^*$ .

Les notations récurrentes utilisées dans ce chapitre sont :

- $\mathbf{0}_n$  pour le vecteur nul de  $\mathbb{R}^n$  ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  ;
- $|\cdot|$  pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

De plus les variables à valeurs vectorielles seront notées en gras.

Le problème de contrôle optimal que l'on considère est le suivant :

**Problème de contrôle en temps optimal.** *Étant donné  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ , trouver le temps minimal  $T^* > 0$ , tel qu'il existe des fonctions  $(y, \mathbf{x}) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et une fonction de contrôle  $\mathbf{u} : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaisant le système d'équations différentielles ordinaires :*

$$\dot{y} = \langle M\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle, \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}, \quad (2.1.2)$$

*muni des conditions initiales et finales :*

$$(y(0), \mathbf{x}(0)) = (0, \mathbf{0}_n), \quad (2.1.3)$$

$$(y(T^*), \mathbf{x}(T^*)) = (\bar{y}, \mathbf{0}_n), \quad (2.1.4)$$

*et sujet à la contrainte sur le contrôle :*

$$|\mathbf{u}(t)| \leq 1 \quad (t \in [0, T^*]), \quad (2.1.5)$$

*et sur l'état :*

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \varsigma \quad (t \in [0, T^*]). \quad (2.1.6)$$

Dans ce problème de contrôle, les fonctions  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont les variables d'état du système tandis que  $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la variable de contrôle.

Les variables d'état sont soumises à la condition initiale (2.1.3) et à la condition finale (2.1.4) qui doit être atteinte en un temps  $T^*$  minimal.

La contrainte (2.1.5) sur les contrôles est nécessaire pour que le problème de contrôle en temps optimal ait un sens. Sans cette contrainte, il est trivial que si le système est contrôlable en un certain temps alors la linéarité du problème par rapport à  $\mathbf{u}$  implique qu'il l'est en tout temps  $T > 0$ . En effet, si  $\mathbf{u}$  est un contrôle en temps  $T$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}$  défini pour tout  $t \in [0, \frac{T}{2}]$  par  $\tilde{\mathbf{u}}(t) = 2\mathbf{u}(2t)$  est un contrôle en temps  $\frac{T}{2}$ .

Le choix de la condition finale (2.1.4) provient du problème de la nage (voir Chapitre 8). Dans ce travail, nous avons considéré le problème d'un corps déformable placé dans un fluide régi par les équations de Stokes stationnaires. Dans ce cadre,  $\mathbf{u}$  définit la vitesse des déformations du corps,  $\mathbf{x}$  les amplitudes de ces déformations et  $\mathbf{y}$  la position du centre de masse de l'objet. Le problème physique est alors de déplacer le centre de masse  $\mathbf{y}$  du nageur de 0 en  $\bar{\mathbf{y}}$  en un temps minimal tout en revenant à sa configuration initiale  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

La contrainte (2.1.6) sur les variables d'état est motivée par une condition physique venant de la nage des micro-organismes, on peut se référer pour plus de détails au Chapitre 8, dédié à ce sujet ou à l'article de Lohéac, Scheid et Tucsnak [LST].

Toutefois, ce système peut être considéré comme une généralisation possible du système de Brockett, fréquemment rencontré dans la littérature, [VTU, KN05, PT05] :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= x_1 u_2 - x_2 u_1, \\ \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2,\end{aligned}$$

correspondant à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ce chapitre est organisé comme suit.

Dans la Section 2.2, on utilise les résultats du chapitre 1 pour donner des résultats basiques sur la contrôlabilité et la contrôlabilité en temps optimal de ce système.

Dans la Section 2.3, on donne des propriétés générales sur les contrôles optimaux du système. En particulier, une propriété bang-bang sera établie pour le contrôle en temps optimal.

Puis dans la Section 2.4, nous utiliserons une approche hamiltonienne en prenant en compte les contraintes sur l'état et nous utiliserons le principe du maximum de Pontryagin (en dimension finie) afin d'obtenir des propriétés utiles sur le contrôle en temps optimal.

La Section 2.5 est dédiée à l'étude du cas particulier  $n = 2$ . En particulier, nous donnerons l'expression du temps optimal  $T^*$  ainsi que la forme de certains contrôles optimaux.

Finalement, dans la Section 2.6 on donne l'expression du temps optimal  $T^*$  et on exhibe des contrôles optimaux pour le cas général  $n \geq 2$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le Théorème 2.6.1. Dans ce résultat, nous montrons en particulier que le temps optimal est gouverné seulement par le plus grand des modules des valeurs propres de la partie antisymétrique de la matrice  $M$ . Les contrôles en temps optimal peuvent de plus être choisis dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  de dimension deux. Le principe de la démonstration de ce théorème est le suivant :

1. On commence par montrer que l'on peut supposer sans perte de généralité que la matrice  $M$  est antisymétrique ;
2. On calcule explicitement le temps optimal et des contrôles en temps optimal dans le cas  $n = 2$ . Pour ce faire, on intègre le principe du maximum de Pontryagin avec contraintes sur l'état ;
3. Finalement dans le cas  $n \geq 2$ , on se ramène au cas de la dimension  $n = 2$  en utilisant des principes d'invariances. Ces principes d'invariance sont principalement basés sur la diagonalisation par blocs  $2 \times 2$  des matrices antisymétriques.

## 2.2 Résultats de contrôlabilité

Dans cette section on donne les résultats de contrôlabilité pour le système non-holonyme (2.1.1)–(2.1.6) qui seront utiles pour l'étude du problème en contrôle optimal.

Pour une variable de contrôle  $\mathbf{u}$  donnée, le problème de Cauchy (2.1.1)–(2.1.3) admet une unique solution. Ce fait est immédiat. En effet, pour tout  $T > 0$  et tout  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$ , on définit les applications :

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M(t) = \int_0^t \langle M \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s) ds.$$

Il est alors trivial que pour tout  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$ , on a :

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M \in W^{1,\infty}([0, T]) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M \in W^{1,\infty}([0, T]^n)$$

et que  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M, \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M)$  est l'unique solution du système différentiel :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \langle M \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

muni de la condition initiale :

$$(y(0), \mathbf{x}(0)) = (0, \mathbf{0}_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Losqu'il n'y a pas de confusion, on note simplement  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}$  et  $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$  à la place de  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M$  et  $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M$ .

Le problème de contrôle associé au système différentiel (2.1.1)–(2.1.3) s'écrit :

**Problème 2.2.1** (Problème de contrôle).

Trouver un temps  $T > 0$  et un contrôle  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$  satisfaisant :

– la condition finale :

$$(\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}(T), \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(T)) = (\bar{y}, \mathbf{0}_n), \quad (2.2.1)$$

– la borne sur le contrôle :

$$|\mathbf{u}(t)| \leq 1 \quad (t \in (0, T) \text{ p.p.}), \quad (2.2.2)$$

– la contrainte sur l'état :

$$|\mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t)| \leq \varsigma \quad (t \in [0, T]). \quad (2.2.3)$$

En utilisant le Théorème de Chow, (c.f. Chapitre 1 ou [AS04, Cor07, Blo03]) on obtient un résultat de contrôlabilité pour le système (2.2.1)–(2.2.3) qui s'écrit comme suit :

**Proposition 2.2.2.** *Il existe  $T > 0$  et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$  tels que (2.2.1) est réalisé et les contraintes (2.2.2) et (2.2.3) sont vérifiées.*

Ce résultat peut être vu comme une généralisation de l'Exemple 3.20 du livre de Coron, [Cor07]. Pour la preuve de ce résultat, l'hypothèse faite sur la matrice  $M$  ( $M \neq M^\top$ ) est essentielle et le résultat est faux dans le cas d'une matrice symétrique. En particulier, dans le cas où la matrice  $M$  est symétrique, le système est holonome.

*Démonstration.* On note  $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  les  $n$  lignes de la matrice  $M$ . Soient

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} M_i P \mathbf{r} \\ \mathbf{0}_{i-1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{n-i} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R}). \quad P \text{ est telle que}$$

$P \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{x}$ . Il est alors clair que le système (2.1.1)–(2.1.2) se récrit :

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \mathbf{u}_i.$$

Soient  $i_1$  et  $i_2$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $M_{i_1, i_2} \neq M_{i_2, i_1}$ . Alors il est aisé de vérifier que pour tout  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on a  $[\mathbf{f}_{i_1}, \mathbf{f}_{i_2}](\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} M_{i_2, i_1} - M_{i_1, i_2} \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$ .

Ainsi, on a bien  $\text{Lie}_{\mathbf{r}} \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\} = \mathbb{R}^{n+1}$ . Par conséquent, le Théorème de Chow nous permet d'affirmer que le Problème de contrôle 2.2.1 admet une solution.  $\square$

La Proposition 2.2.2 nous permet de définir l'ensemble des contrôles  $\mathbf{u}$  solutions du système (2.2.1)–(2.2.3) en temps  $T > 0$ ,

$$\mathcal{U}_{\varsigma, \bar{y}}^T(M) = \left\{ \mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n, \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T)} \leq 1, \|\mathcal{X}_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0, T)} \leq \varsigma, \right. \\ \left. (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}(T), \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(T)) = (\bar{y}, \mathbf{0}_n) \right\}. \quad (2.2.4)$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note simplement  $\mathcal{U}^T$  cet ensemble.

En appliquant le Théorème de Filippov (c.f. Chapitre 1 ou [AS04, Ces83, HSV95]) au problème de contrôle en temps optimal, on obtient aisément le résultat suivant :

**Proposition 2.2.3.** *L'ensemble  $\{T > 0, \mathcal{U}_{\varsigma, \bar{y}}^T(M) \neq \emptyset\}$  admet un minimum,  $T_{\varsigma, \bar{y}}^*(M)$ .*

En d'autres termes, le problème de contrôle en temps optimal admet une solution. Nous disons que  $T_{\varsigma, \bar{y}}^*(M)$ , défini dans la Proposition 2.2.3, est le *temps optimal* et un contrôle  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^{T^*(M)}$  est appelé *contrôle en temps optimal*.

Le temps optimal  $T_{\varsigma, \bar{y}}^*(M)$  dépend de  $\varsigma$ ,  $\bar{y}$  et  $M$  mais lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous notons ce temps simplement par  $T^*(M)$  ou  $T^*$ .

On note aussi  $\mathcal{U}_{\varsigma, \bar{y}}^*(M)$  pour  $\mathcal{U}_{\varsigma, \bar{y}}^{T^*(M)}(M)$  et on fait, pour cette notation, les mêmes simplifications que celles énoncées pour  $T^*$ .

Un couple  $(T^*, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  est appelé *solution optimale* du système (2.2.1)–(2.2.3).

## 2.3 Propriétés préliminaires de la solution optimale

Dans ce paragraphe on donne quelques propriétés sur les solutions optimales du problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3). Ces propriétés seront très utiles dans la Section 2.4 lors de l'intégration du principe du maximum de Pontryagin.

Commençons par donner un résultat de "réversibilité en temps".

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $T > 0$  et  $\mathfrak{A}_T$  l'application définie sur  $L^\infty(0, T)^n$  par :*

$$(\mathfrak{A}_T \mathbf{u})(t) = \mathbf{u}(T - t) \quad (\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n, t \in [0, T] \text{ p.p.}).$$

Alors,  $\mathfrak{A}_T$  définit une bijection de  $\mathcal{U}_{\varsigma, \bar{y}}^T$  sur  $\mathcal{U}_{\varsigma, -\bar{y}}^T$ .

En d'autres termes, si  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^T$  est une solution du problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3), alors la fonction  $\tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T)^n$  définie par  $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(T - t)$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  est une solution du problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3) avec  $-\bar{y}$  au lieu de  $\bar{y}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{\bar{c}, \bar{y}}^M$ . On définit  $\tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T)^n$  par :

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(T - t) \quad (t \in [0, T]).$$

Il est alors évident que  $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0, T)} \leq 1$ . De plus, on a pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\mathcal{X}_{\tilde{\mathbf{u}}}^M(t) = \int_0^t \mathbf{u}(T - s) ds = \int_{T-t}^T \mathbf{u}(s) ds = \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M(T) - \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M(T - t) = -(\mathbf{J}_T \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M)(t)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\tilde{\mathbf{u}}}^M(t) &= \int_0^T \langle -M \mathcal{X}_{\tilde{\mathbf{u}}}^M(T - s), \mathbf{u}(T - s) \rangle ds = - \int_{T-t}^T \langle M \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds \\ &= (\mathbf{J}_T \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M)(t) - \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M(T) = (\mathbf{J}_T \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M)(t) - \bar{y}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.  $\square$

La Proposition suivante montre que la partie symétrique de  $M$  ne joue aucun rôle pour le problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3).

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $T > 0$ , on a :*

$$\mathcal{U}^T(M) = \mathcal{U}^T\left(\frac{1}{2}(M - M^\top)\right). \quad (2.3.1)$$

**Remarque 2.3.3.** *En d'autres termes, le résultat ci-dessus signifie qu'un contrôle  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^T$  est solution du problème (2.2.1)–(2.2.3) si et seulement si il est solution du problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3) où (2.1.1) est remplacé par :*

$$\dot{y} = \left\langle \frac{1}{2}(M - M^\top) \mathbf{x}, \mathbf{u} \right\rangle. \quad (2.3.2)$$

*Démonstration.* Soient  $M_S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$  et  $M_A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$ , la partie symétrique et la partie antisymétrique de la matrice  $M$ . Soit  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$ . On a bien évidemment  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M = \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^{M_A}$ . On note alors  $\mathbf{x} = \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^M$  et pour tout  $t \in [0, T]$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M(t) &= \int_0^t \langle M \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle ds = \int_0^t \langle M_A \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle ds + \int_0^t \langle M_S \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle ds \\ &= \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^{M_A}(t) + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle M_S \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle (s) ds = \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^{M_A}(t) + \frac{1}{2} \langle M_S \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que pour  $t = T$  on a  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}_n$ , nous obtenons :

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^M(T) = \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^{M_A}(T).$$

Ce qui donne le résultat.  $\square$

La Proposition suivante montre que les contrôles optimaux sont *bang-bang*, c'est-à-dire que la borne sur la norme du contrôle (2.2.2) est atteinte pour presque tout temps.

**Proposition 2.3.4.** *Soient  $T^* > 0$  et  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  une solution optimale du problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3). Alors  $\mathbf{u}$  satisfait pour presque tout  $t \in (0, T^*)$  :*

$$|\mathbf{u}(t)| = 1 \quad (2.3.3)$$

et

$$\mathbf{u}(t) \in \text{Ker}(M - M^\top)^\perp. \quad (2.3.4)$$

*Démonstration.* Nous allons montrer (2.3.3) par l'absurde. Pour ce faire, on suppose que  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  est un contrôle en temps optimal qui ne satisfait pas (2.3.3). On définit alors la fonction  $s \in W^{1,\infty}(0, T^*)$  par :

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{u}(r)| \, dr \quad (t \in [0, T^*]). \quad (2.3.5)$$

On note  $\tilde{T} = s(T^*)$ . Comme  $\bar{y} \neq 0$ , le contrôle optimal  $\mathbf{u}$  est nécessairement non identiquement nul et par conséquent,  $s$  est une fonction non constante et croissante sur  $[0, T^*]$ . Ainsi, nous avons  $\tilde{T} > 0$ .

De plus, comme  $|\mathbf{u}(t)| \leq 1$  pour presque tout  $t \in [0, T^*]$  et comme nous avons supposé que  $\mathbf{u}$  ne satisfait pas (2.3.3), on en déduit que  $\tilde{T} < T^*$ .

Comme  $s$  est une fonction croissante, elle admet un inverse à droite  $s_r : [0, \tilde{T}] \rightarrow [0, T^*]$ , c'est-à-dire que  $s_r$  satisfait  $s \circ s_r = I_{[0, \tilde{T}]}$ .

De plus,  $s_r$  est presque partout différentiable sur  $[0, \tilde{T}]$ . En effet,  $s_r$  est une fonction monotone, et ce résultat est une conséquence du Théorème de la limite monotone.  $s_r$  étant l'inverse à droite de  $s$ , nous avons presque partout sur  $[0, \tilde{T}]$ ,  $s' \circ s_r s'_r = 1$ . En dérivant (2.3.5), nous obtenons pour presque tout  $\sigma \in [0, \tilde{T}]$ ,  $|\mathbf{u}(s_r(\sigma))| s'_r(\sigma) = 1$  et par conséquent :

$$|\mathbf{u}(s_r(\sigma))| \neq 0 \quad (\sigma \in [0, \tilde{T}] \text{ p.p.}).$$

Nous pouvons maintenant définir les fonctions suivantes pour presque tout  $\sigma \in [0, \tilde{T}]$  :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\sigma) = \frac{\mathbf{u}(s_r(\sigma))}{|\mathbf{u}(s_r(\sigma))|}, \quad (2.3.6)$$

$$\tilde{y}(\sigma) = y(s_r(\sigma)), \quad (2.3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{x}(s_r(\sigma)), \quad (2.3.8)$$

où l'on a noté  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}}) \in W^{1,\infty}([0, T^*]) \times W^{1,\infty}([0, T^*])^n$ .

Nous allons maintenant prouver que  $\tilde{\mathbf{u}}$  est un contrôle du problème (2.2.1)–(2.2.3) en temps  $\tilde{T} < T^*$  ce qui sera en contradiction avec le fait que  $T^*$  est le temps optimal.

On commence par remarquer que  $\tilde{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, \tilde{T})^n$  et  $(\tilde{y}, \tilde{\mathbf{x}}) \in W^{1,\infty}(0, \tilde{T}) \times W^{1,\infty}(0, \tilde{T})^n$  et que pour presque tout  $\sigma \in [0, \tilde{T}]$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{d\sigma}(\sigma) &= \frac{1}{|\mathbf{u}(s_r(\sigma))|} \dot{y}(s_r(\sigma)) = \langle M\tilde{\mathbf{x}}(\sigma), \tilde{\mathbf{u}}(\sigma) \rangle, \\ \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\sigma}(\sigma) &= \frac{1}{|\mathbf{u}(s_r(\sigma))|} \dot{\mathbf{x}}(s_r(\sigma)) = \tilde{\mathbf{u}}(\sigma). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que  $(\tilde{y}, \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathcal{Y}_{\tilde{\mathbf{u}}}, \mathcal{X}_{\tilde{\mathbf{u}}})$ . Les contraintes (2.2.2) et (2.2.3) sont satisfaites par le contrôle  $\tilde{\mathbf{u}}$  et on a de plus :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= 0 & \text{et} & \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}_n, \\ \tilde{y}(\tilde{T}) &= y(T^*) = \bar{y} & \text{et} & \quad \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{T}) = \mathbf{x}(T^*) = \mathbf{0}_n. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons que  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^{\tilde{T}}$  avec  $\tilde{T} < T^*$  ce qui est absurde étant donné que, par définition,  $T^* = \min \{T > 0, \mathcal{U}^T \neq \emptyset\}$ . La propriété *bang-bang*, (2.3.3), est prouvée.

Nous allons maintenant montrer la propriété (2.3.4). Comme dans la démonstration de la Proposition 2.3.2, nous notons  $M_S$  la partie symétrique de  $M$  et  $M_A$  la partie anti-symétrique de  $M$ . Pour ce faire, nous allons utiliser la décomposition suivante de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(M_A) \oplus \text{Ker}(M_A)^\perp. \quad (2.3.9)$$



On écrit alors  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$  avec  $\mathbf{u}_0(t) \in \text{Ker}(M_A)$  et  $\mathbf{u}_1(t) \in \text{Ker}(M_A)^\perp$  pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ . On définit aussi  $\mathbf{x}_i = \mathcal{X}_{\mathbf{u}_i}$  pour  $i \in \{0, 1\}$ . Il est clair que l'on a pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$  avec  $\mathbf{x}_0(t) \in \text{Ker}(M_A)$  et  $\mathbf{x}_1(t) \in \text{Ker}(M_A)^\perp$ . En développant le produit scalaire de (2.1.1) avec la décomposition (2.3.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}(T^*) &= \int_0^{T^*} \langle M_S \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) \rangle dt + \int_0^{T^*} \langle M_A \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) \rangle dt \\ &= 0 + \int_0^{T^*} (\langle M_A \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}(t) \rangle + \langle M_A \mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_0(t) \rangle + \langle M_A \mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle) dt \\ &= \int_0^{T^*} \langle M_A \mathbf{x}_1(t), \mathbf{u}_1(t) \rangle dt \\ &= \mathcal{Y}_{\mathbf{u}_1}(T^*). \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}^*$ . Comme  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}_1$  sont deux contrôles optimaux, ils satisfont tous les deux la propriété *bang-bang*, (2.3.3) et par conséquent  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}_n$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  car  $|\mathbf{u}(t)|^2 = |\mathbf{u}_0(t)|^2 + |\mathbf{u}_1(t)|^2$ .

Ceci achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 2.3.5.** *Dans la démonstration ci-dessus, nous avons montré que le contrôle est bang-bang. La démonstration s'adapte aisément à tout système de contrôle en temps optimal linéaire par rapport à la variable de contrôle.*

## 2.4 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section, nous allons considérer l'approche hamiltonienne du problème afin d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité. Pour prendre en compte la contrainte sur l'état, on suit la procédure classique décrite dans [IT79, BH07, BSFdlV10, Cla90, BH75].

L'hamiltonien du système (2.2.1)–(2.2.3) pour le problème en temps minimal est donné par la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}, p_0, \mathbf{p}, s_0) &\mapsto \langle p_0 M \mathbf{x} + \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle + s_0. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Nous avons aussi besoin d'introduire l'espace des fonctions à variations bornées :

$$BV(0, T) = \left\{ p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable,} \right.$$

$$\left. \sup \left\{ \sum_{k=0}^n |p(t_{k+1}) - p(t_k)|, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, n \in \mathbb{N}^* \right\} < +\infty \right\}.$$

Pour une description précise et les propriétés des fonctions à variations bornées, on fait référence à [AFP00, EG92]). Nous rappelons seulement que pour toute fonction  $p \in BV(0, T)$  et pour tout  $t \in (0, T)$ , on peut définir les limites à droite et à gauche de  $p$  :

$$p(t^-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} p(t - \varepsilon), \quad p(t^+) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} p(t + \varepsilon).$$

et le saut de  $p$  en  $t \in [0, T]$  est :

$$[p](t) = p(t^+) - p(t^-).$$

Afin de prendre en compte la contrainte sur l'état, (2.2.3), nous introduisons la fonction  $g_\varsigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie pour tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ , par :

$$g_\varsigma(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|\boldsymbol{\xi}|^2 - \varsigma^2) & \text{si } \varsigma \in \mathbb{R}_+^*, \\ -1 & \text{si } \varsigma = +\infty. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Soient  $T = T^* > 0$  le temps optimal et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$  un contrôle optimal, on note  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}}) \in W^{1,\infty}([0, T])^{n+1}$  la trajectoire associée à ce contrôle. L'ensemble des temps pour lesquels la contrainte (2.2.3) est saturée est défini par :

$$E_\varsigma(\mathbf{u}) = \{t \in [0, T], |\mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t)| = \varsigma\}.$$

Par la suite on notera simplement  $E_\varsigma$  au lieu de  $E_\varsigma(\mathbf{u})$ .

Le principe du maximum de Pontryagin (c.f. [IT79, Section 5.2.1, Theorem 1] ou [BH07, Theorem 2.2]) assure l'existence de  $s_0 \leq 0$ ,  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p} \in BV(0, T)^n$  et d'une mesure borélienne positive et régulière  $\eta$  supportée par  $E_\varsigma$ , non tous nuls, tels que (2.2.1)–(2.2.3) soient vérifiées ainsi que les équations adjointes :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}_1 + \int_t^T p_0 M^\top \mathbf{u} dt - \int_{[t, T]} \nabla g_\varsigma(\mathbf{x}) d\eta \quad (t \in [0, T]), \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}_0. \quad (2.4.4)$$

De plus,  $\mathbf{u}$  est tel que le hamiltonien est maximal en tout temps :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p_0, \mathbf{p}, s_0) = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ |\mathbf{v}| \leq 1}} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, p_0, \mathbf{p}, s_0). \quad (2.4.5)$$

Étant donné que le hamiltonien et la fonction  $g_\varsigma$  représentant la contrainte sur l'état, (2.4.2), sont indépendants du temps, on obtient (c.f. [IT79, Section 5.2.2]) la condition supplémentaire :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, p_0, \mathbf{p}, s_0) = 0. \quad (2.4.6)$$

On remarque que la fonction  $\mathbf{p}$  peut être discontinue. En effet, dans l'équation adjointe (2.4.3), il y a une intégration par rapport à une mesure  $\eta$ , due à la présence d'une contrainte sur l'état du système.

Dans les lemmes suivants, nous allons donner des propriétés sur le contrôle optimal et les variables adjointes. Dans ces lemmes, nous considérons que  $T > 0$ ,  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T)^n$  et  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}}) \in W^{1,\infty}([0, T])^{n+1}$  satisfont le problème de contrôle (2.2.1)–(2.2.3). De plus, nous supposons que  $s_0 \leq 0$ ,  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\eta$  est une mesure régulière positive supportée par  $E_\varsigma(\mathbf{u}) = \{t \in [0, T], |\mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t)| = \varsigma\}$ , sont non tous nuls et satisfont (2.4.3)–(2.4.6).

**Lemme 2.4.1.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$s_0 < 0 \quad (2.4.7)$$

et  $\mathbf{u}, \mathbf{p} \in BV(0, T)^n$  satisfont :

$$\mathbf{u} = \frac{p_0 M \mathbf{x} + \mathbf{p}}{-s_0} \quad \text{dans } [0, T]. \quad (2.4.8)$$

*Démonstration.* Commençons par donner quelques propriétés sur l'ensemble  $E_\zeta$ .  $\mathbf{x}$  étant une fonction continue sur  $[0, T]$  et telle que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ , nous en déduisons que  $E_\zeta$  est un fermé de  $]0, T[$  et que  $[0, T] \setminus E_\zeta$  est un ensemble de mesure de Lebesgue positive.

Comme  $\eta$  est une mesure régulière, on déduit de (2.4.3) que  $\mathbf{p} \in BV(0, T)^n$  (et que  $\mathbf{p}$  est continue à gauche). De plus, le support de  $\eta$  étant inclus dans  $E_\zeta$ , on déduit de (2.4.3) que  $\mathbf{p}$  est presque partout différentiable sur l'ouvert  $[0, T] \setminus E_\zeta$  et on a :

$$\dot{\mathbf{p}} = -p_0 M^\top \mathbf{u} \quad \text{p.p. dans } (0, T) \setminus E_\zeta. \quad (2.4.9)$$

- Commençons par montrer (2.4.7), c'est-à-dire que  $s_0 < 0$ .

On suppose par l'absurde que  $s_0 = 0$ . Ainsi,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $p_0$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\eta$  sont non tous nuls et l'équation (2.4.6) devient :

$$0 = \langle p_0 M \mathbf{x} + \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{p.p. dans } [0, T]. \quad (2.4.10)$$

Soit  $\mathcal{A} = \{t \in [0, T], p_0 M \mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}_n\}$ . En utilisant le principe du maximum, (2.4.5) conduit à :

$$\mathbf{u}(t) = \frac{p_0 M \mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t)}{|p_0 M \mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t)|} \quad (t \in \mathcal{A} \text{ p.p.}).$$

Ainsi :

$$\langle p_0 M \mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t) \rangle \neq 0 \quad (t \in \mathcal{A} \text{ p.p.}).$$

Comme on a fait l'hypothèse que  $s_0 = 0$ , on obtient de (2.4.6) que  $\mathcal{A}$  est un ensemble négligeable et par conséquent que :

$$\mathbf{p} = -p_0 M \mathbf{x} \quad \text{p.p. dans } [0, T]. \quad (2.4.11)$$

L'équation ci-dessus conduit à :  $\mathbf{p} \in W^{1, \infty}([0, T])^n$ . En dérivant (2.4.11) et en comparant le résultat avec l'équation (2.4.9), nous obtenons :

$$\mathbf{0}_n = p_0 (M - M^\top) \mathbf{u} \quad \text{p.p. dans } [0, T] \setminus E_\zeta. \quad (2.4.12)$$

Nous allons maintenant prouver  $p_0 \neq 0$  (toujours sous l'hypothèse  $s_0 = 0$ ). En effet, dans ce cas, nous obtiendrons une contradiction avec (2.3.4) ( $\mathbf{u} \in \text{Ker}(M - M^\top)^\perp$ ). Pour ce faire, nous supposons par l'absurde que  $p_0 = 0$ . L'équation (2.4.11) implique dans ce cas que  $\mathbf{p} = \mathbf{0}_n$  dans  $[0, T]$ . Par conséquent, nous avons  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}_n$  et pour tout  $t \in [0, T]$ , on obtient de (2.4.3) que :

$$\mathbf{q}_1 = \int_t^T \nabla g_\zeta(\mathbf{x}) d\eta.$$

Comme  $T \notin E_\zeta$  (ainsi,  $\eta(\{T\}) = 0$ ) on obtient pour  $t = T$ , dans l'équation précédente,  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}_n$  et pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\int_t^T \nabla g_\zeta(\mathbf{x}) d\eta = \mathbf{0}_n. \quad (2.4.13)$$

Dans le cas  $\zeta = +\infty$ , il est trivial que  $\eta$  est nulle ( $E_\zeta = \emptyset$ ) et par conséquent,  $s_0$ ,  $p_0$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\eta$  sont tous nuls, d'où la contradiction et  $p_0 \neq 0$  dans le cas  $\zeta = +\infty$ .

Dans le cas  $0 < \zeta < +\infty$ , nous allons montrer que  $\eta$  est nulle et la même conclusion aura lieu. Comme  $\nabla g_\zeta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , l'équation (2.4.13) implique que pour tous  $t_0$  et  $t_1$  avec  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$ , nous avons :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x} d\eta = \mathbf{0}_n.$$

Si  $t_0$  appartient au support de  $\eta$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , la mesure de  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, T]$  est strictement positive. Étant donné que le support de  $\eta$  est inclus dans  $E_\varsigma$ , nous avons  $t_0 \in E_\varsigma$  et par conséquent  $|\mathbf{x}(t_0)| = \varsigma$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{x}$  est continue, nous obtenons l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que  $\langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle \geq \frac{\varsigma^2}{2}$  pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, T]$ . D'autre part, l'équation (2.4.13) conduit à :

$$0 = \int_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, T]} \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle d\eta \geq \frac{\varsigma^2}{2} \eta([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, T]).$$

Nous en déduisons alors que  $\eta([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, T]) = 0$  contredit le fait que  $t_0$  est dans le support de  $\eta$ . Par conséquent, le support de  $\eta$  est vide et  $\eta = 0$ . On obtient alors  $s_0, p_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}$  et  $\eta$  tous nuls. Ceci conduit à une contradiction.

Ainsi, sous l'hypothèse  $s_0 = 0$ , nous avons montré que  $p_0 \neq 0$ . La relation (2.4.12) conduit à  $\mathbf{u} \in \text{Ker}(M - M^\top)$  dans  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ , qui est un ensemble de mesure positive. Ceci contredit le résultat (2.3.4) ( $\mathbf{u} \in \text{Ker}(M - M^\top)^\perp$ ) de la Proposition 2.3.4. La preuve de  $s_0 < 0$  est achevée.

- Nous allons maintenant montrer (2.4.8).

Comme  $s_0 < 0$ , on déduit de (2.4.6) que  $p_0 M \mathbf{x}(t) + \mathbf{p}(t) \neq \mathbf{0}_n$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Ainsi, (2.4.5) implique :

$$\mathbf{u} = \frac{p_0 M \mathbf{x} + \mathbf{p}}{|p_0 M \mathbf{x} + \mathbf{p}|} \quad \text{p.p. dans } [0, T].$$

En écrivant la relation (2.4.6) avec l'expression de  $\mathbf{u}$  ci-dessus, nous obtenons (2.4.8). Comme  $\mathbf{p} \in BV(0, T)^n$  et  $\mathbf{x} \in W^{1, \infty}([0, T])^n$ , on déduit de (2.4.8) que  $\mathbf{u} \in BV(0, T)^n$ .  $\square$

**Lemme 2.4.2.** *Avec les mêmes notations, on a :  $\mathbf{u}, \mathbf{p} \in C^0(0, T) \cap (C^\infty([0, T] \setminus E_\varsigma))^n$  et*

$$\forall t \in [0, T], \quad \eta(\{t\}) = 0. \quad (2.4.14)$$

De plus :

$$\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \rangle = 0 \quad (t \in E_\varsigma). \quad (2.4.15)$$

**Remarque 2.4.3.** *Un instant  $\tau \in (0, T)$  tel que  $|\mathbf{x}(\tau)| = \varsigma$  et qu'il existe  $\varepsilon > 0$  pour lequel on a  $|\mathbf{x}(\tau - t)| < \varsigma$  pour tout  $t \in (0, \varepsilon]$  sera appelé un temps d'atteinte de la contrainte d'état.*

*La propriété (2.4.15) implique que la contrainte d'état (2.2.3) ne peut être atteinte que tangentiellement en  $\tau$ .*

*Démonstration.*

• On commence par prouver que  $\mathbf{u}$  est une fonction de régularité  $C^\infty$  sur  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ . De l'équation adjointe (2.4.3), on obtient que  $\mathbf{p}$  est de régularité  $W^{1, \infty}$  sur  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ . Par conséquent, (2.4.8) nous assure que  $\mathbf{u}$  est aussi de régularité  $W^{1, \infty}$  sur  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ . En dérivant (2.4.8) et (2.4.3), nous obtenons que  $\mathbf{u}$  satisfait l'équation différentielle ordinaire,

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{p_0}{-s_0} (M - M^\top) \mathbf{u} \quad \text{sur } [0, T] \setminus E_\varsigma.$$

On en déduit que  $\mathbf{u}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ . En utilisant (2.4.8), il est trivial que  $\mathbf{p}$  est aussi de régularité  $C^\infty$  sur  $[0, T] \setminus E_\varsigma$ .

• Nous allons maintenant montrer (2.4.14) et que  $\mathbf{u}, \mathbf{p} \in C^0([0, T])^n$ . Ces résultats sont triviaux dans le cas  $E_\varsigma = \emptyset$ .

On ne considère alors que le cas  $E_\varsigma \neq \emptyset$  (par conséquent  $0 < \varsigma < +\infty$ ).

Nous commençons par montrer que  $\mathbf{p} \in C^0([0, T]^n)$ .

Étant donné la forme de l'équation adjointe (2.4.3), il suffit de montrer que la fonction

$\mathbf{m} : t \mapsto \int_{[t, T]} \mathbf{x} d\eta$  est continue sur  $[0, T]$ .

On suppose par l'absurde que  $\mathbf{m}$  n'est pas continue sur  $[0, T]$ . La régularité de  $\eta$  impose que  $\mathbf{m} \in BV(0, T)$ . L'hypothèse de non continuité de  $\mathbf{m}$  implique l'existence d'un instant  $\tau \in [0, T]$  pour lequel  $[\mathbf{m}](\tau) = \mathbf{x}(\tau)\alpha$  avec  $\alpha = \eta(\{\tau\}) > 0$ . Remarquons que comme le support de  $\eta$  est inclus dans  $E_\varsigma$ , on a nécessairement  $\tau \in E_\varsigma$ , en particulier  $\tau \notin \{0, T\}$ . En utilisant (2.4.8) et (2.4.3), nous obtenons :

$$-s_0[\mathbf{u}](\tau) = [\mathbf{p}](\tau) = \alpha\mathbf{x}(\tau). \quad (2.4.16)$$

La relation (2.4.6) et l'expression (2.4.8) pour  $\mathbf{u}$ , conduit à :

$$|p_0 M\mathbf{x} + \mathbf{p}|^2 = s_0^2 \quad \text{dans } BV(0, T),$$

ce qui implique :

$$|p_0 M\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{p}(\tau^+)|^2 = |p_0 M\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{p}(\tau^-)|^2.$$

On déduit de l'expression précédente que :

$$2\langle p_0 M\mathbf{x}(\tau), [\mathbf{p}](\tau) \rangle + [|\mathbf{p}|^2](\tau) = 0. \quad (2.4.17)$$

L'utilisation de (2.4.8), (2.4.16) et de  $|\mathbf{x}(\tau)| = \varsigma$ , donne après quelques calculs que la relation (2.4.17) se réécrit :

$$-2s_0\alpha\langle \mathbf{u}(\tau^-), \mathbf{x}(\tau) \rangle + \varsigma^2\alpha^2 = 0. \quad (2.4.18)$$

Comme  $\alpha > 0$  (en particulier  $\alpha \neq 0$ ), nous obtenons  $\alpha = \frac{2s_0}{\varsigma^2}\langle \mathbf{u}(\tau^-), \mathbf{x}(\tau) \rangle$ . Par ailleurs, nous savons que  $\tau \in E_\varsigma$ , i.e.  $|\mathbf{x}(\tau)| = \varsigma$ .

Nous avons donc nécessairement  $\frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt}(\tau^-) \geq 0$ , conduisant à  $\langle \mathbf{u}(\tau^-), \mathbf{x}(\tau) \rangle \geq 0$  puis à  $\alpha = \frac{2s_0}{\varsigma^2}\langle \mathbf{u}(\tau^-), \mathbf{x}(\tau) \rangle \leq 0$ .

D'où la contradiction avec  $\alpha > 0$ .

Par conséquent,  $\mathbf{p}$  ne peut avoir de points de discontinuité et (2.4.8) nous assure qu'il en est de même pour  $\mathbf{u}$ . L'équation (2.4.3) conduit à  $[\mathbf{p}](t) = \eta(\{t\})\mathbf{x}(t)$  pour tout  $t \in (0, T)$ . Par conséquent, la continuité de  $\mathbf{p}$  implique (2.4.14).

- Nous pouvons maintenant prouver (2.4.15) ou de manière équivalente que :

$$\frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt}(\tau) = 0 \quad (\tau \in E_\varsigma).$$

On sait déjà que  $\mathbf{u} \in C^0([0, T]^n)$  et par conséquent que  $\mathbf{x} \in C^1([0, T]^n)$ . Soit  $\tau \in E_\varsigma$ , la formule de Taylor, au voisinage de  $\tau$  s'écrit :

$$|\mathbf{x}(\tau + \theta)|^2 = |\mathbf{x}(\tau)|^2 + \theta \frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt}(\tau) + o(\theta) = \varsigma^2 + \theta \frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt}(\tau) + o(\theta) \quad (\theta \rightarrow 0).$$

Ainsi, pour satisfaire la contrainte d'état (2.2.3) au voisinage de  $\tau$ , il est nécessaire que  $\frac{d}{dt}|\mathbf{x}(\tau)|^2 = 0$ . □

**Lemme 2.4.4.** *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}_n, \quad \mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}_n \quad \text{et} \quad p_0 \neq 0.$$

*Démonstration.*

• La preuve des propriétés  $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}_n$  et  $\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}_n$  est une conséquence directe de la continuité de  $\mathbf{u}$  et de la propriété de contrôle bang-bang (2.3.3). Comme  $\mathbf{u}$  est continue et bang-bang, nous avons  $|\mathbf{u}(t)| = 1$  pour tout  $t \in [0, T]$  et en particulier,  $|\mathbf{u}(0)| = |\mathbf{u}(T)| = 1$ . Mais comme  $\mathbf{p}$  est continue et  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}_n$ , nous obtenons, d'après (2.4.8), que  $\mathbf{u}(0) = \frac{1}{-s_0}\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{u}(T) = \frac{1}{-s_0}\mathbf{q}_1$ , d'où le résultat.

• Nous allons maintenant montrer que  $p_0 \neq 0$ .

Supposons que  $p_0 = 0$ .

On définit alors  $\tau = \sup\{t \in [0, T], |\mathbf{x}(\sigma)| < \varsigma \text{ pour tout } \sigma \in [0, t]\}$ . On remarque que  $\tau \in ]0, T]$ . L'équation adjointe (2.4.3) avec  $p_0 = 0$ , nous donne  $\mathbf{p}$  constant sur  $[0, \tau]$ . Par conséquent en utilisant (2.4.4) et (2.4.8), on obtient  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{q}_0}{-s_0}$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ . Ainsi, on a  $\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{q}_0}{-s_0}t$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ . Si  $\tau = T$ , nous avons  $\mathbf{x}(T) = T \frac{\mathbf{q}_0}{-s_0} \neq \mathbf{0}_n$  ce qui contredit la condition finale, (2.2.1), sur  $\mathbf{x}$ .

Si  $0 < \tau < T$ , nous avons  $\tau \in E_\varsigma$ . Cependant,  $\langle \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau) \rangle = \tau \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{s_0^2} \neq 0$  ce qui contredit (2.4.15). Ainsi, dans tous les cas, nous avons montré que  $p_0 \neq 0$ .  $\square$

Nous terminons cette section en donnant une forme explicite de contrôles optimaux dans la région où la contrainte sur l'état n'est pas saturée.

**Lemme 2.4.5.** *Pour tous  $t_0, t_1 > 0$  avec  $t_0 < t_1$  tels que  $|\mathcal{X}_\mathbf{u}| < \varsigma$  dans  $]t_0, t_1[$ , nous avons :*

$$\mathbf{u}(t) = \exp\left(\delta(t - t_0) \frac{M - M^\top}{2}\right) \mathbf{u}(t_0) \quad (t \in [t_0, t_1]), \quad (2.4.19)$$

avec  $\delta = \frac{2p_0}{-s_0} \neq 0$ .

*Démonstration.* La relation (2.4.3) et la régularité  $C^\infty$  de  $\mathbf{p}$  sur  $(t_0, t_1)$  nous donnent après différentiation :

$$\dot{\mathbf{p}} = -p_0 M^\top \mathbf{u} \quad \text{sur } [0, T] \setminus E_\varsigma.$$

Ainsi, en différenciant (2.4.8), nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{-s_0}(p_0 M \mathbf{u} - p_0 M^\top \mathbf{u}) = \frac{2p_0}{-s_0} \left( \frac{M - M^\top}{2} \right) \mathbf{u} \quad \text{sur } [0, T] \setminus E_\varsigma.$$

L'intégration de cette équation différentielle ordinaire conduit à (2.4.19).  $\square$

## 2.5 Solution optimale avec un contrôle de dimension deux

Dans cette section, nous allons étudier le cas d'un contrôle de dimension deux. Nous allons donner la forme explicite d'un contrôle dans le cas  $n = 2$ , ainsi qu'une description de l'état associé.

Nous commençons par remarquer que pour toute matrice carré  $M$  de dimension 2, sa partie antisymétrique est :

$$\frac{M - M^\top}{2} = \lambda J,$$

où  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Comme  $M$  est supposée être non symétrique, on a  $\lambda \neq 0$ .

On introduit aussi l'application :

$$\begin{aligned} R: \mathbb{R} &\rightarrow \text{SO}(2) \\ \theta &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons  $J = R(\frac{\pi}{2})$  et  $R(\theta) = \exp(\theta J)$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Le premier résultat de cette section donne la forme du contrôle optimal pour dans le cas où la contrainte sur l'état n'est pas saturée.

**Proposition 2.5.1.** *Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  un contrôle optimal pour le problème (2.2.1)–(2.2.3) (avec  $n = 2$ ). Nous notons  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}})$  l'état associé.*

*Alors, il existe  $\delta \neq 0$  tel que pour tous  $t_1 > t_0 > 0$  satisfaisant  $|\mathcal{X}_{\mathbf{u}}| < \varsigma$  sur  $]t_0, t_1[$ , on a pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  :*

$$\mathbf{u}(t) = R(\delta\lambda(t - t_0))\mathbf{u}(t_0), \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) - \frac{1}{\lambda\delta} J (R(\delta\lambda(t - t_0)) - I_2) \mathbf{u}(t_0), \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} y(t) = y(t_0) + \frac{1}{2} (\langle M_S \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_1) \rangle - \langle M_S \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle) \\ - \frac{1}{\delta} \langle \mathbf{u}(t_0), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) \rangle + \lambda \langle J \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle + \frac{t - t_0}{\delta}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

avec  $M_S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$  et  $\lambda \neq 0$  tel que  $\frac{1}{2}(M - M^\top) = \lambda J$ .

De plus, la trajectoire optimale de l'état associé  $t \in [t_0, t_1] \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$  est un paramétrage d'un arc de cercle de rayon  $\frac{1}{|\delta\lambda|}$  et de centre  $\mathbf{x}(t_0) - \frac{1}{\delta\lambda} J \mathbf{u}(t_0) \in \mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* L'expression (2.5.1), pour  $\mathbf{u}$ , est simplement l'expression (2.4.19) obtenue dans le Lemme 2.4.5 ramenée au cas  $n = 2$ .

En intégrant (2.5.1) entre les temps  $t_0$  et  $t \in (t_0, t_1)$  on obtient l'expression (2.5.2) pour  $\mathbf{x}$ . On montre maintenant l'expression (2.5.3) pour  $y$ . Pour ce faire, on intègre (2.1.1) entre les temps  $t_0$  et  $t \in (t_0, t_1)$  :

$$\begin{aligned} y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t \langle M \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds \\ &= \int_{t_0}^t \langle M_S \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds + \int_{t_0}^t \langle \lambda J \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds \\ &= \frac{1}{2} (\langle M_S \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_1) \rangle - \langle M_S \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle) + \int_{t_0}^t \langle \lambda J \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

En insérant les expressions (2.5.1), pour  $\mathbf{u}$ , et (2.5.2), pour  $\mathbf{x}$ , dans le dernier terme intégral de (2.5.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \langle \lambda J\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s) \rangle ds &= \int_{t_0}^t \left\langle \lambda J \left( \frac{-1}{\lambda\delta} J(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t_0)) + \mathbf{x}(t_0) \right), \mathbf{u}(s) \right\rangle ds \\ &= \int_{t_0}^t \left\langle \frac{1}{\delta} (\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}(t_0)) + \lambda J\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(s) \right\rangle ds \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^t |\mathbf{u}(s)|^2 ds - \frac{1}{\delta} \left\langle \mathbf{u}(t_0), \int_{t_0}^t \mathbf{u}(s) ds \right\rangle + \lambda \left\langle J\mathbf{x}(t_0), \int_{t_0}^t \mathbf{u}(s) ds \right\rangle \\ &= \frac{t - t_0}{\delta} - \frac{1}{\delta} \langle \mathbf{u}(t_0), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) \rangle + \lambda \langle J\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle \end{aligned}$$

En insérant cette dernière expression dans (2.5.4), nous obtenons (2.5.3).

Nous allons maintenant montrer que la trajectoire optimale,  $t \in (t_0, t_1) \mapsto \mathbf{x}(t)$  décrit un arc de cercle. Pour cela, on définit  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{x}(t_0) - \frac{1}{\delta\lambda} J\mathbf{u}(t_0) \in \mathbb{R}^2$  et nous obtenons pour tout  $t \in (t_0, t_1)$ ,

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}_0|^2 = \left| \frac{-1}{\delta\lambda} JR(\delta\lambda(t - t_0)) \mathbf{u}(t_0) \right|^2 = \frac{|\mathbf{u}(t_0)|^2}{|\delta\lambda|^2} = \frac{1}{|\delta\lambda|^2}.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 2.5.1.  $\square$

Dans le lemme suivant, nous allons donner une propriété pratique pour déterminer si la trajectoire suivie par les variables d'état est issue d'un contrôle optimal.

**Lemme 2.5.2.** *Soient  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $M = \lambda J$ ,  $T^*$  le temps optimal et  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  un contrôle en temps optimal. Alors,  $\{t \in [0, T^*], \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0}_2\} = \{0, T^*\}$ .*

*Démonstration.* Comme précédemment, on note  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}})$  les variables d'état associées au contrôle  $\mathbf{u}$ . Il est clair que  $\{0, T^*\} \subset \{t \in [0, T^*], \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}_2\}$ .

On suppose par l'absurde qu'il existe  $\sigma \in ]0, T^*[$  tel que  $\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{0}_2$ .

Il est aisé de remarquer que le contrôle défini par  $\tilde{\mathbf{u}} = J\mathbf{u}$  est aussi un contrôle en temps optimal,  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^*$ . En effet, soit  $(\tilde{y}, \tilde{\mathbf{x}}) = (y, J\mathbf{x})$ , on a alors :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = J\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{et par conséquent} \quad \dot{y} = \langle \lambda J\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \langle \lambda J(J\mathbf{x}), J\mathbf{u} \rangle = \langle \lambda J\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle = \dot{\tilde{y}}.$$

Ceci implique que  $(\mathcal{Y}_{\tilde{\mathbf{u}}}, \mathcal{X}_{\tilde{\mathbf{u}}}) = (\tilde{y}, \tilde{\mathbf{x}})$ . En particulier, nous avons  $\tilde{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{0}_2$  et  $\tilde{\mathbf{x}}(\sigma) = \mathbf{x}(\sigma)$ . Ainsi, en vertu du Principe de Bellman, il est clair que le contrôle  $\hat{\mathbf{u}}$  défini par :

$$\hat{\mathbf{u}} : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{cases} \mathbf{u}(t) & \text{si } t \leq \sigma \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) & \text{si } \sigma < t \leq T^* \end{cases}$$

est un contrôle en temps optimal pour le problème (2.2.1)–(2.2.3). En revanche, le contrôle  $\hat{\mathbf{u}}$  n'a pas la régularité  $C^\infty$  en  $\sigma$ , or  $\sigma \notin E_c$ , car  $|\mathcal{X}_{\hat{\mathbf{u}}}(\sigma)| = 0$  (c.f. Figure 2.1). Ceci est en contradiction avec la régularité obtenue dans le Lemme 2.4.2 d'où le résultat.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner la description complète du temps optimal et un contrôle optimal dans le cas  $n = 2$ . Ce résultat est un cas particulier du Théorème 2.6.1.



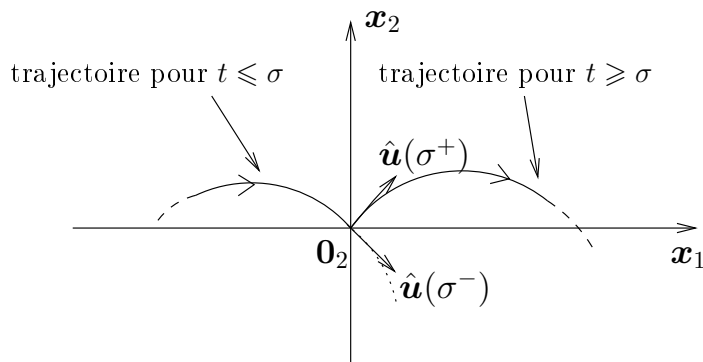


FIG. 2.1 – Contre-exemple montrant que la trajectoire optimale en  $\mathbf{x}$  ne peut passer par  $\mathbf{O}_2$  excepté aux temps initial et final.

**Proposition 2.5.3.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on définit les deux grandeurs :

$$d^* = \sqrt{\frac{2|\bar{y}|}{\pi|\lambda|}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi\varsigma}{2}, \quad (2.5.5)$$

avec  $\lambda \neq 0$  tel que  $\frac{1}{2}(M - M^\top) = \lambda J$ .

Alors le temps optimal  $T^*$  pour le problème (2.2.1)–(2.2.3) (avec matrice  $M$ ) est donné par :

$$T^* = \begin{cases} \pi d^* & \text{si } \varsigma \geq d^*, \\ \frac{\pi d^{*2}}{2\varsigma} + \tau & \text{si } 0 < \varsigma < d^*. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

De plus le contrôle  $\mathbf{u}$  défini ci-dessous est optimal.

• Pour  $\varsigma \geq d^*$ , on a :

$$\mathbf{u}(t) = R\left(\text{sign}(\bar{y})\frac{2\pi}{T^*}t\right)\mathbf{u}_0 \quad (t \in [0, T^*]). \quad (2.5.7)$$

• Pour  $\varsigma < d^*$ , on a :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} R\left(\frac{2\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}t\right)\mathbf{u}_0 & \text{si } t \in [0, \tau), \\ -R\left(\frac{\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}(t - \tau)\right)\mathbf{u}_0 & \text{si } t \in [\tau, T^* - \tau), \\ R\left(\frac{\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}(2t - 3(T^* - \tau))\right)\mathbf{u}_0 & \text{si } t \in [T^* - \tau, T^*]. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Dans les expressions (2.5.7) et (2.5.8), le vecteur  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$  est choisi tel que  $|\mathbf{u}_0| = 1$ .

**Remarque 2.5.4.**

• Dans le cas  $\varsigma \geq d^*$ , c'est-à-dire lorsque la borne sur l'état est suffisamment grande pour n'avoir aucune influence sur le contrôle, le résultat est le même pour  $\varsigma = +\infty$ . La contrôlabilité en temps optimal sans contrainte (cas  $\varsigma = +\infty$ ) a déjà été étudiée dans [PT05, BGG00].

Dans ce cas, la trajectoire associée  $t \in [0, T^*] \mapsto \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t)$  décrit un cercle de diamètre  $d^* \leq \varsigma$ .

• Dans le cas  $\varsigma < d^*$ , la trajectoire optimale associée  $t \in [0, T^*] \mapsto \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t)$  est composée de trois arcs de cercles. Un dessin de la trajectoire caractéristique pour  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}$  est reporté sur la Figure 2.2.

1. Le premier arc de cercle est parcouru entre les instant 0 et  $\tau$ . La trajectoire quitte  $\mathbf{O}_2$  à l'instant initial pour rejoindre (tangentiellement) la contrainte d'état à l'instant  $\tau$ .
2. Le second arc de cercle est décrit entre les instants  $\tau$  et  $T^* - \tau$ . Cet arc de cercle est de rayon  $\varsigma$  et est centré en  $\mathbf{O}_2$  (arc sur la contrainte d'état).
3. Le dernier arc de cercle est parcouru entre les instants  $T^* - \tau$  et  $T^*$ . La trajectoire quitte (tangentiellement) la contrainte sur l'état à l'instant  $T^* - \tau$  pour rejoindre la condition finale  $\mathbf{O}_2$  à l'instant  $T^*$ .

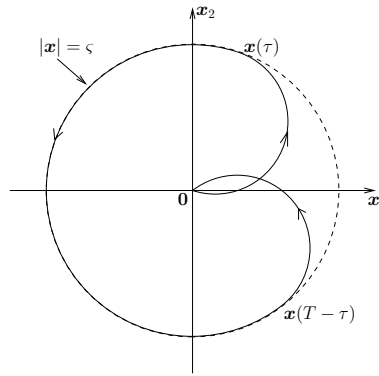


FIG. 2.2 – Trajectoire typique pour  $t \mapsto \mathcal{X}_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{x}$  dans le cas où la contrainte sur l'état est atteinte.

*Démonstration de la Proposition 2.5.3.* La preuve est organisée comme suit :

- dans un premier temps, nous allons montrer le résultat dans le cas  $\varsigma \geq d^*$  ;
- dans un second temps, nous montrerons le résultat pour le cas  $\varsigma < d^*$ .

La Proposition 2.3.2 nous permet de supposer sans perte de généralité que  $M = \lambda J$ . Soient  $T^*$  le temps optimal,  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  et  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}})$ .

• Afin de montrer le résultat dans le cas  $\varsigma \geq d^*$ , on commence par étudier le cas  $\varsigma = +\infty$ . Dans ce cas, on a évidemment que la contrainte sur l'état n'est jamais atteinte et par conséquent la Proposition 2.5.1 nous assure que le contrôle optimal  $\mathbf{u}$  a la forme suivante :

$$\mathbf{u}(t) = R(\delta \lambda t) \mathbf{u}_0 \quad (\forall t \in [0, T^*]),$$

avec  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\mathbf{u}_0| = 1$  et  $\delta \in \mathbb{R}^*$ .

L'état est décrit par la trajectoire associée définie dans  $[0, T^*]$  par :

$$y(t) = \frac{t}{\delta} - \frac{1}{\delta} \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{x}(t) \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(t) = \frac{-1}{\lambda \delta} J(R(\delta \lambda t) - I_2) \mathbf{u}_0 \quad (t \in [0, T^*]),$$

Pour atteindre l'état final (2.2.1), on a nécessairement :

$$\bar{y} = \frac{T^*}{\delta} \quad \text{et} \quad |\delta \lambda| T^* \in 2\pi \mathbb{N}^*.$$

Autrement dit, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$T^* = \sqrt{\frac{2k\pi|\bar{y}|}{|\lambda|}} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{T^*}{\bar{y}} = \text{sign}(\bar{y}) \sqrt{\frac{2k\pi}{|\lambda \bar{y}|}} \quad (2.5.9)$$

et l'on a (c.f. Proposition 2.5.1) :

$$\sup_{t \in [0, T^*]} |\mathbf{x}(t)| = \frac{1}{|\delta\lambda|} = \sqrt{\frac{2|\bar{y}|}{k\pi|\lambda|}} = \frac{d^*}{\sqrt{k}}. \quad (2.5.10)$$

Il est évident que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le contrôle  $\mathbf{u}$  obtenu est admissible et que le temps minimal sera obtenu pour  $k = 1$ . Ceci prouve le résultat  $T^* = \pi d^*$  et (2.5.7) dans le cas  $\varsigma = +\infty$ .

Ainsi, pour tout  $\varsigma \geq d^*$ , il est clair que le temps optimal est donné par  $T^* = \pi d^*$  et qu'un contrôle est donné par (2.5.7). En effet, si l'on note  $\mathbf{u}_\infty$  le contrôle donné par (2.5.7), on obtient que  $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{U}_{\bar{y}, +\infty}^*$  (par définition) et que  $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{U}_{\bar{y}, \varsigma}^{T^*, +\infty}$  pour  $\varsigma \geq d^*$ . Ceci prouve que  $T_{\bar{y}, \varsigma}^* \leq T_{\bar{y}, +\infty}^*$  pour tout  $\varsigma \geq d^*$ . Or il est trivial que  $\mathcal{U}_{\bar{y}, \varsigma}^* \subset \mathcal{U}_{\bar{y}, +\infty}^{T_{\bar{y}, \varsigma}^*, \varsigma}$ , ce qui prouve que  $T_{\bar{y}, \varsigma}^* \geq T_{\bar{y}, +\infty}^*$ . Par conséquent,  $T_{\bar{y}, \varsigma}^* = T_{\bar{y}, +\infty}^*$  et  $\mathbf{u}_\infty \in \mathcal{U}_{\bar{y}, \varsigma}^*$  pour tout  $\varsigma \geq d^*$ .

La trajectoire associée  $t \in [0, T^*] \mapsto \mathbf{x}(t)$  est un cercle de diamètre  $d^*$ .

• On considère maintenant le cas  $\varsigma < d^*$ . Dans un premier temps, nous allons montrer que la contrainte sur l'état est nécessairement atteinte en un temps  $\tau \in (0, T^*)$ . Puis nous allons calculer un contrôle en temps optimal.

1. Supposons par l'absurde que la contrainte sur l'état (2.2.3) ne soit jamais atteinte.

Dans ce cas, le temps optimal et les contrôles optimaux ont les mêmes expressions que celles calculées dans le cas  $\varsigma = +\infty$ . En particulier, l'expression du temps minimal, (2.5.9), et l'estimation (2.5.10) pour  $\mathbf{x}$  restent vraies pour  $k \geq 1$ . Comme  $\varsigma < d^*$ , l'estimation (2.5.10) implique que  $k \geq 2$ . Ainsi, au temps  $\sigma = \frac{T^*}{k} < T^*$ , nous avons  $\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{0}_2$ . Ceci est en contradiction avec le Lemme 2.5.2. Par conséquent, la contrainte sur l'état (2.2.3) est nécessairement atteinte et le Lemme 2.4.2 (voir aussi la Remarque 2.4.3) nous assure que la contrainte est atteinte tangentiellement.

2. On cherche maintenant à calculer un contrôle optimal.

• Dans un premier temps, nous allons montrer que toute trajectoire issue d'un contrôle optimal suit le chemin type suivant :

- (a) La contrainte sur l'état est atteinte (tangentiellement) au temps  $\tau = \frac{\pi\varsigma}{2}$  (i.e.  $|\mathbf{x}(\tau)| = \varsigma$  et  $\langle \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau^-) \rangle = 0$ );
- (b) La trajectoire pour  $\mathbf{x}$  reste sur la contrainte entre les temps  $\tau$  et  $T^* - \tau$ ;
- (c) Finalement, la contrainte sur l'état est quittée (tangentiellement) au temps  $T^* - \tau$  et la trajectoire rejoint l'état final  $(y(T^*), \mathbf{x}(T^*)) = (\bar{y}, \mathbf{0}_2)$ .

On rappelle que la Proposition 2.5.1 assure que la trajectoire suivie par  $\mathbf{x}$  est un arc de cercle dans la région où la contrainte sur l'état n'est pas saturée. Il est aussi clair que lorsque la trajectoire suivie par  $\mathbf{x}$  est sur la contrainte d'état, la trajectoire suivie est aussi un arc de cercle. Les équations (2.5.1) et (2.5.2) nous assurent que  $\mathbf{x}$  ne peut changer d'arc de cercle que lorsque la contrainte sur l'état est quittée ou atteinte.

Commençons par montrer que la trajectoire décrite par  $\mathbf{x}$  est bien celle annoncée en (a).

Soit  $\tilde{\tau} = \inf \{t \in [0, T^*], |\mathbf{x}(t)| = \varsigma \text{ et } \forall s \in [0, t], |\mathbf{x}(s)| < \varsigma\}$  le premier temps d'atteinte à la contrainte. Le premier item nous assure l'existence de  $\tilde{\tau}$ . Comme  $\mathbf{x}$  atteint la contrainte de manière tangentielle (c.f. Lemme 2.4.2 et Remarque 2.4.3),  $t \in [0, \tilde{\tau}] \mapsto \mathbf{x}(t)$  est une paramétrisation d'un demi-cercle de rayon  $\frac{\varsigma}{2}$ . De plus, comme  $|\mathbf{u}(t)| = 1$  pour tout  $t \in [0, \tilde{\tau}]$  et  $\mathbf{u}$  est continue, on en déduit que  $\tilde{\tau} = \frac{\pi\varsigma}{2} = \tau$ . Grâce à la Proposition 2.5.1, nous obtenons que le rayon du demi-cercle est  $\frac{1}{|\delta\lambda|} = \frac{\varsigma}{2}$ , et par conséquent :

$$\delta = \epsilon_0 \frac{2}{\lambda\varsigma}, \quad (2.5.11)$$

avec  $\epsilon_0 = \pm 1$ .

Nous allons maintenant montrer que la dernière partie de la trajectoire décrite par  $\mathbf{x}$  est bien celle annoncée en (c). Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que si la trajectoire suivie par  $\mathbf{x}$  quitte la contrainte en un temps  $\sigma$  alors nous avons nécessairement  $\sigma = T^* - \tau$  et la contrainte sur l'état ne sera plus atteinte. Les relations (2.5.1) et (2.5.2), pour  $\delta$  donné par (2.5.11), conduisent à :

$$\mathbf{x}(\sigma + \tau) = \mathbf{0}_2 \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}(t)| \neq 0 \quad (t \in [\sigma, \sigma + \tau]).$$

Par conséquent d'après le Lemme 2.5.2, nous obtenons  $\sigma + \tau = T^*$ .

Ainsi nous avons implicitement montré que la trajectoire  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  pour  $t \in [0, T]$ , est bien du type de celle annoncée par (a), (b) et (c).

• On cherche maintenant à calculer un contrôle optimal.

La relation (2.5.3), nous donne :

$$y(\tau) = y(T^*) - y(T^* - \tau) = \frac{\tau}{\delta} = \epsilon_0 \frac{\lambda \zeta^2 \pi}{4}. \quad (2.5.12)$$

Pour tout  $t \in [\tau, T^* - \tau]$ , nous avons  $|\mathbf{x}(t)| = \zeta$  et par conséquent  $\mathbf{x}$  doit être de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = R\left(\frac{\nu(t)}{\zeta}\right) \mathbf{x}(\tau) \quad (t \in [\tau, T^* - \tau]), \quad (2.5.13)$$

avec  $\nu \in W^{1,\infty}([\tau, T^* - \tau])$  une fonction inconnue. Nous avons :

$$\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\nu}(t) JR\left(\frac{\nu(t)}{\zeta}\right) \frac{\mathbf{x}(\tau)}{\zeta} \quad (t \in (\tau, T^* - \tau) \text{ p.p.}). \quad (2.5.14)$$

Comme  $|\mathbf{u}(t)| = 1$  pour tout  $t \in (0, T^*)$ , on a  $|\dot{\nu}| = 1$  sur  $(\tau, T^* - \tau)$  et comme  $\mathbf{u}$  est continue, on a  $\dot{\nu}$  constant. On note alors  $\epsilon_1 = \dot{\nu} = \pm 1$ .

Les relations (2.5.13) et (2.5.14) conduisent à :

$$\langle \lambda J \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \rangle = \lambda \zeta \epsilon_1 \quad (t \in (\tau, T^* - \tau)).$$

Ainsi :

$$y(T^* - \tau) - y(\tau) = \int_{\tau}^{T^* - \tau} \langle \lambda J \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \rangle dt = \lambda \zeta \epsilon_1 (T^* - 2\tau). \quad (2.5.15)$$

Par conséquent (2.5.12) et (2.5.15) donnent :

$$\begin{aligned} y(T^*) &= y(\tau) + (y(T^* - \tau) - y(\tau)) + (y(T^*) - y(T^* - \tau)) \\ &= \epsilon_0 \frac{\lambda \zeta^2 \pi}{4} + \lambda \zeta \epsilon_1 (T^* - 2\tau) + \epsilon_0 \frac{\lambda \zeta^2 \pi}{4} = \epsilon_0 \frac{\lambda \zeta^2 \pi}{2} + \lambda \zeta \epsilon_1 (T^* - \zeta \pi). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\bar{y} - \epsilon_0 \frac{\lambda \zeta^2 \pi}{2} = \lambda \zeta \epsilon_1 (T^* - \zeta \pi). \quad (2.5.16)$$

Comme la trajectoire suivie par  $\mathbf{x}$  est celle décrite par (a)–(c), on a  $T^* > \pi \zeta$ . Comme nous sommes dans le cas  $\zeta < d^* = \sqrt{\frac{2|\bar{y}|}{|\lambda|\pi}}$ , on obtient de (2.5.16) que  $\epsilon_1 = \text{sign}(\lambda \bar{y})$  puis que le minimum pour  $T^*$  est obtenu pour  $\epsilon_0 = \epsilon_1$ . Par conséquent, le temps minimal  $T^*$  est :

$$T^* = \frac{|\bar{y}|}{|\lambda|\zeta} + \frac{\pi \zeta}{2}.$$

Un calcul direct, montre que le contrôle donné par (2.5.8) est bien un contrôle en temps  $T^*$ .

La démonstration de la Proposition 2.5.3 est achevée. □

Un exemple de trajectoire optimale avec contrainte sur l'état est issu du problème de la nage en temps optimal. Dans ce cas on considère la matrice  $M = \frac{3}{35} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , obtenue de Shapere et Wilczek (c.f. [SW89a, LST]). Le résultat pour cette matrice est donné sur la Figure 2.3. De plus, nous avons tracé la trajectoire  $t \mapsto y(t)$  obtenue avec la matrice  $\frac{1}{2}(M - M^\top)$  à la place de  $M$  (on rappelle que les contrôles peuvent être choisis identiques pour ces deux matrices, c.f. Proposition 2.3.2).

Sur la Figure 2.4, nous avons représenté, pour la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et l'objectif  $\bar{y} = 1$ , l'évolution du temps optimal,  $T^*$ , en fonction de la contrainte sur l'état,  $\varsigma$ .

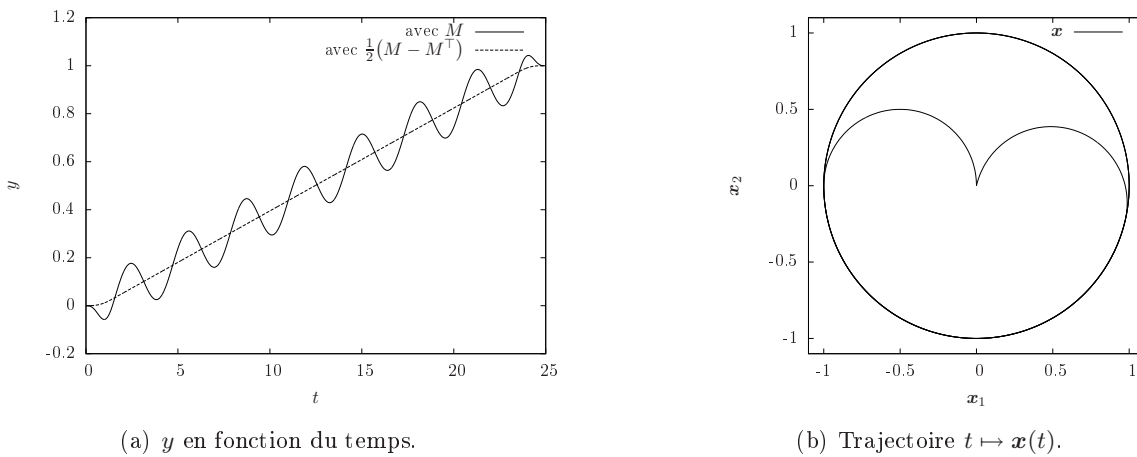


FIG. 2.3 – Cas  $n = 2$ . Trajectoire  $t \mapsto (y(t), \mathbf{x}(t))$ . La contrainte sur l'état est  $|\mathbf{x}(t)| \leq 1$ , l'objectif est  $\bar{y} = 1$  et  $M = \frac{3}{35} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

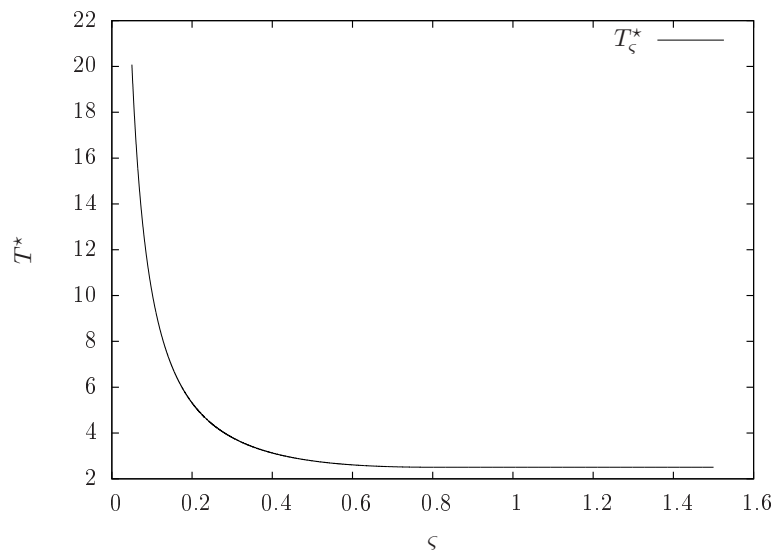


FIG. 2.4 – Temps optimal en fonction de  $\varsigma$  pour  $\bar{y} = 1$  et  $\lambda = 1$ .

## 2.6 Solution optimale avec un contrôle de dimension $n$

Dans cette section, nous allons considérer le cas  $n \geq 2$  avec  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M \neq M^\top$ . L'objectif de cette section est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $\lambda^*$  le plus grand module des valeurs propres de la partie anti-symétrique de la matrice  $M$  :*

$$\lambda^* = \max \left\{ |\lambda|, \lambda \in \text{sp} \left( \frac{1}{2}(M - M^\top) \right) \right\}.$$

On définit aussi les deux grandeurs :

$$d^* = \sqrt{\frac{2|\bar{y}|}{\pi\lambda^*}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi\varsigma}{2}.$$

Alors le temps optimal  $T^*$  associé au problème (2.2.1)–(2.2.3) est donné par :

$$T^* = \begin{cases} \pi d^* & \text{if } \varsigma \geq d^*, \\ \frac{\pi d^{*2}}{2\varsigma} + \tau & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

De plus le problème (2.2.1)–(2.2.3) admet pour contrôle optimal le contrôle  $\mathbf{u} \in C^0([0, T^*])^n$  donné par :

$$\mathbf{u}(t) = \gamma_1(t)\mathbf{w}_1 + \gamma_2(t)\mathbf{w}_2 \quad (t \in [0, T^*]), \quad (2.6.2)$$

avec  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  orthogonaux satisfaisant :

$$\frac{1}{2}(M - M^\top)\mathbf{w}_1 = \lambda^*\mathbf{w}_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(M - M^\top)\mathbf{w}_2 = -\lambda^*\mathbf{w}_1.$$

L'application  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C^0([0, T^*])^2$  est définie comme suit :

– Si  $\varsigma \geq d^*$ , nous avons :

$$\gamma(t) = R\left(\text{sign}(\bar{y})\frac{2\pi}{T^*}t\right)\gamma_0 \quad (t \in [0, T^*]). \quad (2.6.3)$$

– Si  $\varsigma < d^*$ , nous avons :

$$\gamma(t) = \begin{cases} R\left(\frac{2\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}t\right)\gamma_0 & \text{si } t \in [0, \tau), \\ -R\left(\frac{\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}(t - \tau)\right)\gamma_0 & \text{si } t \in [\tau, T^* - \tau), \\ R\left(\frac{\text{sign}(\bar{y})}{\varsigma}(2t - 3(T^* - \tau))\right)\gamma_0 & \text{si } t \in [T^* - \tau, T^*]. \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Dans les expressions précédentes,  $R(\theta)$  est la matrice de rotation de  $\mathbb{R}^2$  définie par  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et le vecteur  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$  est choisi tel que  $|\gamma_0| = 1$ .

Avant de montrer ce Théorème, nous allons introduire quelques notations et rappeler certains résultats de la Section 2.3 afin d'effectuer quelques simplifications sur la matrice  $M$  sans toutefois perdre de généralité.

On commence par noter que la Proposition 2.3.2 nous permet de supposer que  $M$  est une matrice antisymétrique. Comme le noyau de  $M$  ne joue aucun rôle dans le problème, on

peut de plus supposer que  $M$  est une matrice inversible (de taille  $2l$ ). Sous ces conditions, la matrice  $M$  peut être diagonalisée par bloc  $2 \times 2$  sous la forme d'une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l J \end{pmatrix}, \quad (2.6.5)$$

où  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $J = R(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ . On notera  $\mathbf{J}(\Lambda)$  la matrice définie par (2.6.5) avec  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ .

Il est clair que le temps optimal ne dépend que de l'objectif  $\bar{y}$ , la contrainte  $\varsigma$  et la séquence  $\Lambda$  (i.e.  $T^*(M) = T^*(\mathbf{J}(\Lambda))$ ). Par conséquent, nous noterons à présent  $T^*(\Lambda)$  le temps optimal (au lieu de  $T^*(M)$ ) et de même que dans la section précédente, on notera ce temps  $T^*$  lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Le même type de notation sera utilisé pour l'ensemble de contrôle  $\mathcal{U}$ .

Pour  $l \in \mathbb{N}^*$  on définit les applications :

$$\begin{aligned} \Pi_i^l : \mathbb{R}^{2l} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2l} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} v_{2i-1} \\ v_{2i} \end{pmatrix} \quad (i \in \{1, \dots, l\}). \end{aligned}$$

Avant de passer à la démonstration proprement dite du Théorème 2.6.1, nous allons donner quatre lemmes qui rendront cette démonstration quasi immédiate. Le premier lemme est un résultat de *monotonie* de l'application  $\Lambda \mapsto T^*(\Lambda)$ .

**Lemme 2.6.2.** *Soient  $l, \tilde{l} \in \mathbb{N}^*$  avec  $\tilde{l} \geq l$  et soient  $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, l\}} \in (\mathbb{R}_+^*)^l$  et  $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_{i \in \{1, \dots, \tilde{l}\}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\tilde{l}}$  deux séquences strictement positives et décroissantes vérifiant  $\tilde{\lambda}_i \geq \lambda_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Alors, on a :*

$$T^*(\tilde{\Lambda}) \leq T^*(\Lambda).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*(\Lambda)$  un contrôle optimal. On définit  $\tilde{\mathbf{u}} \in C^0([0, T^*(\Lambda)])^{2\tilde{l}}$  par

$$\Pi_i^{\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{u}}(t)) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}_i}} \Pi_i^l(\mathbf{u}(t)) & \text{si } i \leq l \\ \mathbf{0}_2 & \text{si } l < i \leq \tilde{l} \end{cases}$$

pour tout  $t \in [0, T^*(\Lambda)]$ . Soient  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{J}(\Lambda)}, \mathcal{X}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{J}(\Lambda)})$  (la trajectoire associée au contrôle  $\mathbf{u}$  avec la matrice  $\mathbf{J}(\Lambda)$ ) et  $(\tilde{y}, \tilde{\mathbf{x}}) = (\mathcal{Y}_{\tilde{\mathbf{u}}}^{\mathbf{J}(\tilde{\Lambda})}, \mathcal{X}_{\tilde{\mathbf{u}}}^{\mathbf{J}(\tilde{\Lambda})})$  (la trajectoire associée à  $\tilde{\mathbf{u}}$  avec la matrice  $\mathbf{J}(\tilde{\Lambda})$ ). Il est trivial que pour tout  $t \in [0, T^*(\Lambda)]$ , nous avons :

$$\Pi_i^{\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\tilde{\lambda}_i}} \Pi_i^l(\mathbf{x}(t)) & \text{si } i \leq l \\ \mathbf{0}_2 & \text{si } l < i \leq \tilde{l}. \end{cases}$$

Il est donc clair que pour tout  $t \in [0, T^*(\Lambda)]$  nous avons  $|\tilde{\mathbf{x}}(t)| \leq \varsigma$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(T^*(\Lambda)) = \mathbf{0}_{2\bar{l}}$  et

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \sum_{i=1}^{\bar{l}} \left\langle \tilde{\lambda}_i J \Pi_i^{\bar{l}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)), \Pi_i^{\bar{l}}(\tilde{\mathbf{u}}(t)) \right\rangle = \sum_{i=1}^l \left\langle \lambda_i J \Pi_i^l(\mathbf{x}(t)), \Pi_i^l(\mathbf{u}(t)) \right\rangle = \dot{y}(t).$$

Ainsi,  $\tilde{y}(t) = y(t)$  pour tout  $t \in [0, T^*(\Lambda)]$  et en particulier,  $\tilde{y}(T^*(\Lambda)) = \bar{y}$ . Par conséquent  $\tilde{\mathbf{u}}$  est un contrôle en temps  $T^*(\Lambda)$  pour le problème de contrôle obtenu avec la matrice  $\mathbf{J}(\tilde{\Lambda})$ . Ceci montre que  $T^*(\tilde{\Lambda}) \leq T^*(\Lambda)$ .  $\square$

Le Lemme suivant montre une propriété de *conservation des zéros*.

**Lemme 2.6.3.** *Soit  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Lambda = (\lambda, \dots, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^l$  et  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*(\Lambda)$  un contrôle en temps optimal tel que  $\Pi_k^l \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}_2$  pour  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Alors  $\Pi_k^l \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}_2$  pour tout  $t \in [0, T^*]$ .*

*Démonstration.* Comme précédemment, on définit  $(y, \mathbf{x}) = (\mathcal{Y}_u, \mathcal{X}_u)$ . On rappelle que le principe du maximum de Pontryagin assure l'existence de  $s_0, p_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$  et  $\eta$  non tous nuls tels que (2.2.1)–(2.2.3) et (2.4.3)–(2.4.6) aient lieu.

Les Lemmes 2.4.1 et 2.4.4 nous permettent d'affirmer que :

$$s_0 < 0, \quad p_0 \neq 0, \quad \mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0}_n.$$

De plus, le Lemme 2.4.2 nous assure que  $\mathbf{u}, \mathbf{p} \in C^0([0, T^*])^{2l}$ . Finalement, au temps  $t = 0$  et à la vue de (2.4.8), nous avons aussi  $\Pi_k^l \mathbf{p}(0) = \mathbf{0}_2$ , c'est-à-dire que  $\Pi_k^l \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}_2$  d'après (2.4.4). La continuité de  $\mathbf{p}$  et les relations (2.4.3)–(2.4.4) permettent d'aboutir à :

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1 - \int_0^{T^*} p_0 \mathbf{J}(\Lambda) \mathbf{u} \, dt - \int_0^{T^*} \mathbf{x} \, d\eta.$$

Ainsi l'équation (2.4.3) peut se récrire :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}_0 + \int_0^t p_0 \mathbf{J}(\Lambda) \mathbf{u} \, dt + \int_0^t \mathbf{x} \, d\eta \quad (t \in [0, T^*]). \quad (2.6.6)$$

$\mathbf{u}$  étant optimal, on obtient de (2.4.8) que :

$$-s_0 \mathbf{u} = p_0 \mathbf{J}(\Lambda) \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

Ainsi :

$$-s_0 \Pi_k^l \mathbf{u} = p_0 \Pi_k^l (\mathbf{J}(\Lambda) \mathbf{x}) + \Pi_k^l \mathbf{p} = p_0 \lambda J \Pi_k^l \mathbf{x} + \Pi_k^l \mathbf{p}.$$

En utilisant (2.6.6), on obtient pour tout  $t \in [0, T^*]$  :

$$\begin{aligned} -s_0 |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)|^2 &= \left\langle p_0 \lambda J \Pi_k^l \mathbf{x}(t) + \Pi_k^l \mathbf{p}(t), \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle p_0 \lambda J \Pi_k^l \mathbf{x}(t), \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle + \left\langle \Pi_k^l \mathbf{q}_0, \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \Pi_k^l \int_0^t p_0 \mathbf{J}(\Lambda) \mathbf{u} \, dt, \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle + \left\langle \Pi_k^l \int_0^t \mathbf{x} \, d\eta, \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant que  $\Pi_k^l \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}_2$  et  $\Pi_k^l \mathbf{x}(t) = \int_0^t \Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma) \, d\sigma$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -s_0 |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)|^2 &= \left\langle \int_0^t 2p_0 \lambda J \Pi_k^l \mathbf{u} \, dt, \Pi_k^l \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \int_0^t \Pi_k^l \mathbf{x} \, d\eta, \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle 2p_0 \lambda J \Pi_k^l \mathbf{u}(s), \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle \, ds + \int_0^t \int_0^s \left\langle \Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma), \Pi_k^l \mathbf{u}(t) \right\rangle \, d\sigma \, d\eta_s. \end{aligned}$$



En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} -s_0 |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)|^2 &\leq \int_0^t 2|p_0 \lambda| |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)| \, ds + \int_0^t \int_0^s |\Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma)| |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)| \, d\sigma \, d\eta_s \\ &\leq |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)| \left( \int_0^t 2|p_0 \lambda| |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| \, ds + \int_0^t \int_0^s |\Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma)| \, d\sigma \, d\eta_s \right). \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\eta([0, t]) < +\infty$ , il est clair, d'après [EG92, Theorem 1, Section 1.4], que l'on peut appliquer le Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} -s_0 |\Pi_k^l \mathbf{u}(t)| &\leq \int_0^t 2|p_0 \lambda| |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| \, ds + \int_0^t \int_0^t \chi_{[0, s]}(\sigma) |\Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma)| \, d\sigma \, d\eta_s \\ &\leq \int_0^t 2|p_0 \lambda| |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| \, ds + \int_0^t \eta([\sigma, T^*]) |\Pi_k^l \mathbf{u}(\sigma)| \, d\sigma \\ &\leq \int_0^t (2|p_0 \lambda| + \eta([0, T^*])) |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons obtenu :

$$|\Pi_k^l \mathbf{u}(t)| \leq \int_0^t \frac{2|p_0 \lambda| + \eta([0, T^*])}{-s_0} |\Pi_k^l \mathbf{u}(s)| \, ds \quad (t \in [0, T^*]).$$

On conclut que  $\Pi_k^l \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}_2$  pour tout  $t \in [0, T^*]$ , en appliquant le Lemme de Gronwall.  $\square$

Le résultat suivant montre une propriété d'invariance de  $\mathcal{U}^*$  par rapport à des matrices orthogonales particulières.

**Lemme 2.6.4.** *Soit  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Lambda = (\lambda, \dots, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^l$  et  $R \in \text{Orth}(2l)$  tels que  $R$  et  $\mathbf{J}(\Lambda)$  commutent. Si  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$  est un contrôle en temps optimal, alors  $R\mathbf{u}$  est aussi un contrôle optimal en temps, i.e.  $R\mathbf{u} \in \mathcal{U}^*$ .*

*Démonstration.* Comme précédemment, nous notons  $T^*$  le temps optimal et  $\mathbf{x} = \mathcal{X}_{\mathbf{u}}$  la trajectoire associée au contrôle  $\mathbf{u}$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{u}} = R\mathbf{u}$  et  $\tilde{\mathbf{x}} = R\mathbf{x}$ . On remarque que  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(T^*) = \mathbf{0}_{2l}$  et  $|\tilde{\mathbf{x}}(t)| = |\mathbf{x}(t)|$  pour tout  $t \in [0, T^*]$ .

Comme  $R$  et  $\mathbf{J}(\Lambda)$  commutent et comme  $R$  est une matrice orthogonale, nous obtenons que  $\langle \mathbf{J}(\Lambda)\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{J}(\Lambda)\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle$  et ainsi que  $\mathcal{Y}_{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ .

Par conséquent,  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^{T^*} = \mathcal{U}^*$  est un contrôle en temps optimal.  $\square$

Le lemme suivant met en évidence une matrice orthogonale  $R$  particulière qui satisfait le Lemme 2.6.4 et qui annule des composantes du contrôle.

**Lemme 2.6.5.** *Soit  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Lambda = (\lambda, \dots, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^l$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2l}$ . Il existe  $R \in \text{Orth}(2l)$  tel que  $R$  et  $\mathbf{J}(\Lambda)$  commutent et  $\Pi_i^l(R\mathbf{v}) = \mathbf{0}_2$  pour tout  $i \in \{2, \dots, l\}$ .*

*Démonstration.* Il est trivial que sans perte de généralité, on peut supposer que  $\lambda = 1$  et que par un argument de récurrence il suffit de montrer le résultat énoncé dans le cas  $l = 2$ . Soit  $\mathcal{R}$  l'application définie pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$  avec  $|\mathbf{v}| = 1$  par :

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \mathbf{v}^1 = \mathbf{0}_2, \\ \begin{pmatrix} |\mathbf{v}^1| I_2 & \frac{1}{|\mathbf{v}^1|} (\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle I_2 + \langle J\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle J) \\ \frac{-1}{|\mathbf{v}^1|} (\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle I_2 - \langle J\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle J) & |\mathbf{v}^1| I_2 \end{pmatrix} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\mathbf{v}^i = \Pi_i^2(\mathbf{v})$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

En utilisant la relation :

$$|\mathbf{v}^1|^2 \mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle \mathbf{v}^1 + \langle J\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle J\mathbf{v}^1,$$

il est possible de vérifier que pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$  avec  $|\mathbf{v}| = 1$  on a  $\mathcal{R}(\mathbf{v}) \in \text{Orth}(4)$ ,  $\mathcal{R}(\mathbf{v})$  et  $\mathbf{J}(1, 1)$  commutent et  $\Pi_2^2(\mathcal{R}(\mathbf{v})\mathbf{v}) = \mathbf{0}_2$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.6.1 dans le cas  $n$ -dimensionnel. Premièrement, et comme mentionné précédemment, le problème de contrôle initial (avec une matrice  $M$  quelconque) est équivalent à celui obtenu avec la matrice diagonale par blocs  $\mathbf{J}(\Lambda)$  définie par (2.6.5), où le vecteur  $\Lambda \in \mathbb{R}^l$  est composé des parties imaginaires positives des valeurs propres de  $\frac{1}{2}(M - M^\top)$ , prises avec leurs multiplicités et ordonnées par ordre décroissant.

Nous allons construire un contrôle optimal pour la matrice  $\mathbf{J}(\Lambda)$  à partir de la matrice  $\lambda^* J$  où  $\lambda^* = \max \Lambda$ .

En effet, pour  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^{T^*(\lambda^*)}(\lambda^* J)$ , on définit le contrôle  $\tilde{\mathbf{u}}$  de dimension  $2l$ , par :

$$\Pi_k^l \tilde{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t) & \text{si } k = 1 \\ \mathbf{0}_2 & \text{si } 2 \leq k \leq l \end{cases} \quad (t \in [0, T^*(\lambda^*)]).$$

il est clair que  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^{T^*(\lambda^*)}(\mathbf{J}(\Lambda))$ . Ainsi, pour montrer que le contrôle  $\tilde{\mathbf{u}}$  est un contrôle en temps optimal pour le problème (2.2.1)–(2.2.3), avec la matrice  $\mathbf{J}(\Lambda)$ , il suffit de montrer que  $T^*(\Lambda) = T^*(\lambda^*)$ .

Le Lemme 2.6.2, nous permet d'affirmer que :

$$T^*(\lambda^*) \geq T^*(\Lambda) \geq T^*(\Lambda^*),$$

où  $\Lambda^* = (\lambda^*, \dots, \lambda^*) \in \mathbb{R}^l$ .

Nous allons maintenant montrer que :  $T^*(\Lambda^*) \geq T^*(\lambda^*)$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^{T^*(\Lambda^*)}(\mathbf{J}(\Lambda^*))$ . Les Lemmes 2.6.4 et 2.6.5 assurent l'existence d'une matrice  $\mathbf{R} \in \text{Orth}(2l)$  telle que  $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}^{T^*(\Lambda^*)}(\mathbf{J}(\Lambda^*))$  et  $\Pi_k^l(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(0)) = \mathbf{0}_2$  pour tout  $k \in \{2, \dots, l\}$ . Ainsi, du Lemme 2.6.3, on obtient que  $\Pi_k^l(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{0}_2$  pour tout  $k \in \{2, \dots, l\}$  et  $t \in [0, T^*(\Lambda^*)]$ .

Finalement, il est trivial que  $\mathbf{u} = \Pi_1^l(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}) \in \mathcal{U}^{T^*(\Lambda^*)}(\lambda^* J)$ .

Par conséquent, nous avons  $T^*(\lambda^*) \leq T^*(\Lambda^*)$ .

Ceci montre que  $T^*(\lambda^*) = T^*(\Lambda) = T^*(\Lambda^*)$  et donne le résultat du Théorème 2.6.1.

## 2.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous sommes parvenus, en utilisant le principe du maximum de Pontryagin, à déterminer la solution en temps optimal d'un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état.

En particulier, le Théorème 2.6.1 obtenu, induit le fait remarquable suivant :

*Pour tout couple de matrices carrées non symétriques  $(M, \tilde{M})$ , nous avons :*

$$\max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(M - M^\top)\} < \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(\tilde{M} - \tilde{M}^\top)\} \Rightarrow T^*(M) < T^*(\tilde{M}),$$

*quelque soit la dimension des matrices  $M$  et  $\tilde{M}$ .*

Aussi, l'étude que nous avons effectuée dans le cas du système de Brockett et assez spécifique. Dans un premier temps, il pourrait être intéressant de modifier les contraintes sur le contrôle ou l'état. Une possibilité serait de modifier la norme utilisée. En effet, avec la norme euclidienne choisie, même si cela n'apparaît pas directement dans ce qui précède, la structure sous-riemannienne au problème joue un rôle important dans l'étude. Une autre extension possible est le choix d'une fonction coût différente.

Aussi, dans le cas général, une étude numérique du problème semble nécessaire à la compréhension des trajectoires optimales. Pour montrer les résultats de ce chapitre, nous sommes grandement inspirés de tests numériques. Comme des contraintes sur l'état étaient imposées, nous avons pour cela utilisé la méthode de discrétisation totale décrite dans le paragraphe 1.3.2.

# Chapitre 3

## Cas de la dimension infinie

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Opérateurs de contrôle et d'observation</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Contrôlabilité et observabilité en dimension infinie</b>	<b>46</b>
3.3.1	Quelques notions de contrôlabilité en dimension infinie	46
3.3.2	Notions d'observabilité	47
3.3.3	Résultat de dualité	48
3.3.4	L'espace $R_t^\infty$	49
<b>3.4</b>	<b>Résultats principaux</b>	<b>51</b>
3.4.1	Résultat d'existence	51
3.4.2	Principe du maximum de Pontryagin	53
3.4.3	Caractère bang-bang des contrôles	55
<b>3.5</b>	<b>Application à l'équation de Schrödinger</b>	<b>55</b>
3.5.1	Lemmes de continuation unique	55
3.5.2	Résultat pour l'équation de Schrödinger	57
<b>3.6</b>	<b>Conclusion et questions ouvertes</b>	<b>58</b>

---

### 3.1 Introduction

Les premières extensions aux systèmes de dimension infinie du principe du maximum de Pontryagin et du caractère *bang-bang* (c.f. chapitre 1 et Bellman, Glicksberg et Gross [BGG56]) ont été obtenues par Fattorini [Fat64]. Depuis les progrès effectués dans ce domaine ont été reportés dans les livres de Lions [Lio68] et Fattorini [Fat05]. En particulier, la propriété bang-bang du contrôle en temps optimal a été rapidement établie dans le cas d'opérateurs de contrôle inversible. Dans le cas de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, cela signifie implicitement que le contrôle est actif sur l'ensemble du domaine spatial de l'équation aux dérivées partielles. Le même problème avec un contrôle n'agissant que sur une partie du domaine spatial n'a été considéré que récemment, en particulier pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles paraboliques. Nous renvoyons par exemple aux résultats de Mizel et Seidman [MS97], Wang [Wan08], Phung et Wang [PW11] et Kunisch et Wang [KW11b].

La méthodologie usitée dans les travaux cités précédemment est généralement basée sur une notion de contrôlabilité à zéro avec des contrôles à support dans un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Or cette notion ne semble pas applicable pour des systèmes

réversibles en temps tels que ceux gouvernés par l'équation des ondes, de Schrödinger ou d'Euler-Bernoulli.

Le principal objectif de ce chapitre est d'étendre le principe du maximum de Pontryagin pour des systèmes réversibles en temps et avec un opérateur de contrôle non inversible. Nous verrons que sous réserve d'avoir contrôlabilité exacte en temps arbitrairement petit lorsque l'opérateur de contrôle est borné et sous réserve d'avoir contrôlabilité exacte avec des contrôles  $L^\infty$  en temps lorsque l'opérateur de contrôle est non borné, alors le principe du maximum de Pontryagin est valable dans sa forme usuelle. De plus si l'on suppose que le système est approximativement contrôlable avec des contrôles n'agissant que sur un ensemble d'instantants de mesure positive, alors les contrôles en temps optimal sont uniques et bang-bang.

Nous décrivons brièvement le plan de ce chapitre.

Dans la Section 3.3, on introduit quelques notions de contrôlabilité et d'observabilité en dimension infinie.

Nous poursuivons par la Section 3.4 où les résultats expliqués précédemment sont donnés. La Section 3.5 est dédiée à la mise en application des résultats de la Section 3.4 pour des systèmes gouvernés par les équations de Schrödinger et l'équation d'Euler-Bernoulli. Malheureusement nous n'avons pas trouvé d'exemple d'application faisant intervenir un opérateur de contrôle non borné.

Finalement, nous concluons ce chapitre par des problèmes ouverts.

Ce chapitre reprend l'article écrit en collaboration avec M. Tucsnak, [LT12].

## 3.2 Opérateurs de contrôle et d'observation

Dans cette section, on rappelle les définitions basiques de contrôlabilité et observabilité en dimension infinie. Pour plus de précisions sur ces définitions, on fait référence au livre de Tucsnak et Weiss [TW09].

On considère  $X$  et  $U$  deux espaces de Hilbert (séparables) identifiés avec leurs duaux respectifs. Le produit scalaire et la norme sur  $X$  (respectivement  $U$ ) sont notés  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  et  $\| \cdot \|_X$  (respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$  et  $\| \cdot \|_U$ ). On suppose de plus que l'opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ , avec  $\mathcal{D}(A) \subset X$  engendre un semi-groupe  $\mathbb{T}$  continu sur  $X$ . Ceci implique que le domaine  $\mathcal{D}(A)$  de  $A$  est dense dans  $X$  et que la résolvante  $\rho(A)$  de  $A$  n'est pas vide.

La première étape consiste à construire les espaces  $X_1$  et  $X_{-1}$  (c.f. [TW09, Propositions 2.10.1 et 2.10.2]).

**Proposition 3.2.1.** *Pour tout  $\beta \in \rho(A)$ , l'espace  $\mathcal{D}(A)$  muni de la norme :*

$$\|z\|_{X_1} = \|(\beta I - A)z\|_X \quad (z \in \mathcal{D}(A))$$

*est un espace de Hilbert noté  $X_1$ .*

*Les normes générées pour différents  $\beta \in \rho(A)$  sont équivalentes à la norme du graphe et l'inclusion  $X_1 \subset X$  est continue.*

On note  $X_1^d$  l'espace obtenu de la même manière que celle décrite dans la Proposition 3.2.1 pour  $A^*$  (l'adjoint de  $A$ ) et  $\bar{\beta} \in \rho(A^*)$ .

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $\beta \in \rho(A)$ , on note  $X_{-1}$  la complétion de  $X$  par rapport à la norme :*

$$\|z\|_{X_{-1}} = \|(\beta I - A)^{-1}z\|_X \quad (z \in X).$$

*Les normes générées pour différents  $\beta \in \rho(A)$  sont toutes équivalentes.*

*$X_{-1}$  est le dual de  $X_1^d$  par rapport à l'espace pivot  $X$ .*

On peut définir l'extension de  $A$  sur  $X$  et celle de  $\mathbb{T}$  sur  $X_{-1}$  (c.f. Propositions 2.10.3 et 2.10.4 du livre [TW09]).

**Proposition 3.2.3.** *Soient  $X_1$  et  $X_{-1}$  définis par les Propositions 3.2.1 et 3.2.2.  $A \in \mathcal{L}(X_1, X)$  admet une unique extension  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$  et de plus pour tout  $\beta \in \rho(A)$  on a :*

$$(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1), \quad (\beta I - \tilde{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1}, X)$$

et ces deux opérateurs sont unitaires. En particulier, on a  $\rho(A) \subset \rho(\tilde{A})$

**Proposition 3.2.4.** *On utilise ici les notations introduites dans la Proposition 3.2.3.*

*On suppose que  $A$  génère un semi-groupe  $\mathbb{T}$  fortement continu sur  $X$ . La restriction de  $\mathbb{T}_t$  à  $X_1$  (considéré comme opérateur dans  $\mathcal{L}(X_1)$ ) est l'image de  $\mathbb{T}_t \in \mathcal{L}(X)$  composée avec l'opérateur unitaire  $(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1)$ . Par conséquent, ces opérateurs forment un semi-groupe fortement continu sur  $X_1$ , dont le générateur infinitésimal est la restriction de  $A$  à  $\mathcal{D}(A^2)$ .*

*L'opérateur  $\tilde{\mathbb{T}}_t \in \mathcal{L}(X_{-1})$  est l'image de  $\mathbb{T}_t \in \mathcal{L}(X)$  composé avec l'opérateur unitaire  $(\beta I - \tilde{A}) \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ . Par conséquent ces opérateurs étendus forment un semi-groupe fortement continu  $\tilde{\mathbb{T}} = (\tilde{\mathbb{T}}_t)_{t \geq 0}$  sur  $X_{-1}$  dont le générateur est  $\tilde{A}$ .*

Par la suite, on omettra les  $\tilde{\phantom{x}}$ , par conséquent les extensions de  $A$  et  $\mathbb{T}$  seront encore notées  $A$  et  $\mathbb{T}$ .

Nous allons maintenant introduire le concept d'opérateur de contrôle admissible. Soient  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  un opérateur de contrôle,  $z_0 \in X$  et  $u \in L^2([0, \infty), U)$ . On considère le système décrit par l'équation :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad (3.2.1)$$

muni de la condition initiale :

$$z(0) = z_0. \quad (3.2.2)$$

Avec les notations précédemment introduites, la solution  $z$  du problème de Cauchy (3.2.1)–(3.2.2) est définie par :

$$z(t) = \mathbb{T}_t z_0 + \Phi_t u \quad (t \geq 0), \quad (3.2.3)$$

avec  $\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, t], U); X)$  défini par :

$$\Phi_t u = \int_0^t \mathbb{T}_{t-\sigma} B u(\sigma) d\sigma \quad (u \in L^2([0, \infty), U)). \quad (3.2.4)$$

On rappelle ici quelques définitions classiques issues du livre de Tucsnak et Weiss [TW09, Section 4.2]. Plus précisément, on rappelle ici la Définition 4.2.1 et la Proposition 4.2.2.

**Définition 3.2.5.** L'opérateur  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est un opérateur de contrôle admissible pour  $\mathbb{T}$  s'il existe  $\tau > 0$  tel que  $\text{Im } \Phi_\tau \subset X$ .

**Proposition 3.2.6.** *Si  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est un opérateur de contrôle admissible pour  $\mathbb{T}$ , alors pour tout  $t > 0$ , on a :*

$$\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), U), X).$$

Par la suite, on supposera que  $B$  est un opérateur de contrôle admissible.

Nous donnons maintenant le concept d'opérateur d'observation admissible. Plus précisément, on rappelle ici la Définition 4.3.1 et la Proposition 4.3.2 du livre [TW09].

Soit  $Y$  un espace de Hilbert et  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  un *opérateur d'observation* pour le semi-groupe  $\mathbb{T}$ . Pour  $\tau > 0$ , on considère l'opérateur  $\Psi_\tau$  défini par :

$$(\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C\mathbb{T}_t z_0 & \text{si } t \in [0, \tau], \\ 0 & \text{si } t > \tau, \end{cases} \quad (z_0 \in X_1, t \in [0, \infty)).$$

Les opérateurs  $\Psi_\tau$  sont appelés *opérateurs de sortie* pour le couple  $(A, C)$  et sont considérés comme éléments de  $\mathcal{L}(X_1, L^2([0, \infty), Y))$ .

**Définition 3.2.7.** L'opérateur  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  est un opérateur d'observabilité admissible pour  $\mathbb{T}$  s'il existe  $\tau > 0$  tel que  $\Psi_\tau$  admette une extension continue dans  $X$ .

**Proposition 3.2.8.** Si  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  est un opérateur d'observabilité admissible pour  $\mathbb{T}$ , alors pour tout  $t \geq 0$ , on a :

$$\Psi_t \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty), Y)) .$$

Les concepts d'opérateur de contrôle admissible et d'opérateur d'observation admissible sont duaux au sens du résultat suivant (c.f. [TW09, Theorem 4.4.3]) :

**Théorème 3.2.9.** Soit  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ .  $B$  est un opérateur de contrôle admissible pour  $\mathbb{T}$  si et seulement si  $B^*$  est un opérateur d'observabilité admissible pour  $\mathbb{T}^*$ .

### 3.3 Contrôlabilité et observabilité en dimension infinie

Dans cette section, nous allons introduire les concepts de contrôlabilité et d'observabilité nécessaires à notre étude.

On utilise les notations et définitions introduites dans la section précédente. Tout particulièrement, on rappelle que désormais,  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est un opérateur de contrôle admissible.

#### 3.3.1 Quelques notions de contrôlabilité en dimension infinie

On rappelle ci-dessous la Définition 11.1.1 du livre de Tucsnak et Weiss [TW09].

**Définition 3.3.1.** Soit  $\tau > 0$ , le couple  $(A, B)$  est dit :

- approximativement contrôlable en temps  $\tau$  si  $\text{Im } \Phi_\tau$  est dense dans  $X$  ;
- exactement contrôlable en temps  $\tau$  si  $\text{Im } \Phi_\tau = X$ .

Pour ce chapitre, nous aurons aussi besoin de la notion suivante :

**Définition 3.3.2.** Soit  $e \subset [0, \tau]$  un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive. Le couple  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $\tau$  depuis  $e$  si l'image de l'opérateur  $\Phi_{\tau, e} \in \mathcal{L}(L^2([0, \tau], U), X)$  défini par :

$$\Phi_{\tau, e} u = \int_e \mathbb{T}_{\tau-\sigma} B u(\sigma) d\sigma \quad (u \in L^2([0, \tau], U))$$

est dense dans  $X$ .

On introduit maintenant le concept de contrôle en temps optimal.

**Définition 3.3.3.** Soient  $z_0, z_1 \in X$  avec  $z_0 \neq z_1$ . Une fonction  $u^* \in L^\infty([0, \infty), U)$  est un contrôle en temps optimal pour le couple  $(A, B)$ , envoyant la condition initiale  $z_0$  sur la condition finale  $z_1$ , s'il existe  $\tau^* = \tau^*(z_0, z_1) > 0$  tel que :

1.  $z_1 = \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 + \Phi_{\tau^*} u^*$  et  $\|u^*\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq 1$  ;
2. Si  $\tau > 0$  est tel qu'il existe  $u \in L^\infty([0, \tau], U)$  avec :

$$z_1 = \mathbb{T}_\tau z_0 + \Phi_\tau u, \quad \|u\|_{L^\infty([0, \tau], U)} \leq 1,$$

alors  $\tau \geq \tau^*$ .

**Remarque 3.3.4.** On remarque que si l'opérateur de contrôle  $B$  est borné (i.e.  $B \in \mathcal{L}(U, X)$ ) et si le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en temps  $\tau$  alors  $\Phi_\tau(L^\infty([0, \tau], U)) = X$ . En d'autres termes on peut contrôler exactement le système en temps  $\tau$  avec des contrôles dans  $L^\infty([0, \tau], U)$  (au lieu de  $L^2([0, \tau], U)$  comme dans la Définition 3.3.1).

Pour montrer ce résultat, on définit le Gramien de contrôlabilité en temps  $\tau$  pour le couple  $(A, B)$  par :

$$R_\tau = \int_0^\tau \mathbb{T}_t B B^* \mathbb{T}_t^* dt \in \mathcal{L}(X),$$

Étant donné  $z_0 \in X$ , la contrôlabilité exacte en temps  $\tau$  du couple  $(A, B)$  implique que  $R_\tau$  est inversible et que la fonction  $u \in L^2([0, \tau], U)$  définie par :

$$u = \Phi_\tau^* R_\tau^{-1} z_0 \quad (t \in [0, T]), \quad (3.3.1)$$

satisfait  $\Phi_\tau u = z_0$ .

Par ailleurs, comme  $B$  est borné, on a d'après [TW09, Section 4.4] :

$$(\Phi_\tau^* w_0)(t) = B^* \mathbb{T}_{\tau-t}^* w_0 \quad (w_0 \in X, t \in [0, \tau]).$$

Les deux dernières formules impliquent que le contrôle défini par (3.3.1) s'écrit :

$$u(t) = B^* \mathbb{T}_{\tau-t}^* R_\tau^{-1} z_0 \quad (t \in [0, T]).$$

Ainsi, on a  $u \in C^0([0, \tau], U) \subset L^\infty([0, \tau], U)$ .

### 3.3.2 Notions d'observabilité

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les concepts d'observabilité nécessaires à notre étude. On utilise les notation introduites dans la Section 3.2. Plus précisément,  $Y$  est un espace de Hilbert et  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  est un opérateur d'observation admissible pour le semi-groupe  $\mathbb{T}$ .

Nous rappelons ci-dessous la Définition 6.1.1 du livre de Tucsnak et Weiss [TW09].

**Définition 3.3.5.** Soit  $\tau > 0$ , le couple  $(A, C)$  est dit :

- exactement observable en temps  $\tau$  si  $\Psi_\tau$  est borné inférieurement, c'est-à-dire, il existe  $C_\tau > 0$  (dépendant seulement de  $\tau$ ) tel que pour tout  $z \in X$  :

$$\|\Psi_\tau z\|_{L^2([0, \infty[, Y)} \geq C_\tau \|z\|_X.$$

- approximativement observable en temps  $\tau$  si  $\text{Ker } \Psi_\tau = \{0\}$ .



Il est trivial que la propriété d'exacte observabilité implique le caractère approximativement observable.

On introduit maintenant le concept d'observabilité depuis un ensemble de mesure positive.

**Définition 3.3.6.** Soient  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  un opérateur d'observation admissible pour  $\mathbb{T}$  et  $e \subset [0, \tau]$  un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive. On note :

$$\Psi_{\tau,e} \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \tau], U)), \quad \Psi_{\tau,e} = \chi_e \Psi_\tau,$$

la restriction des opérateurs de sortie à l'ensemble  $e$ , où  $\chi_e$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $e$ .

Par la suite, on notera  $\Psi_\tau^d$  (respectivement  $\Psi_{\tau,e}^d$ ) l'opérateur de sortie (respectivement sa restriction à un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive  $e \subset [0, \tau]$ ) pour le couple  $(A^*, B^*)$ , ce qui revient à poser :

$$(\Psi_\tau^d z_0)(t) = \begin{cases} B^* \mathbb{T}_t^* z_0 & \text{si } t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (z_0 \in X_1, t \in [0, \infty)) \quad (3.3.2)$$

et comme précédemment, on note,

$$\Psi_{\tau,e}^d \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty), U)), \quad \Psi_{\tau,e}^d = \chi_e \Psi_\tau^d.$$

Nous aurons aussi besoin du concept d'observabilité approchée à partir d'un ensemble temporel de mesure positive.

**Définition 3.3.7.** Pour  $\tau > 0$  et  $e \subset [0, \tau]$ , ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive, le couple  $(A, C)$  est approximativement observable depuis  $e$  si  $\text{Ker } \Psi_{\tau,e} = \{0\}$ .

### 3.3.3 Résultat de dualité

Nous avons le résultat de dualité suivant entre les concepts d'observabilité et de contrôlabilité (c.f. [TW09, Theorem 11.2.1]).

**Théorème 3.3.8.** Soient  $\tau > 0$  et  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  un opérateur de contrôle admissible pour  $\mathbb{T}$ , le semi-groupe généré par l'opérateur  $A$ .

- Le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en temps  $\tau$  si et seulement si le couple  $(A^*, B^*)$  est exactement observable en temps  $\tau$ .
- Le couple  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $\tau$  si et seulement si le couple  $(A^*, B^*)$  est approximativement observable en temps  $\tau$ .

Ce résultat reste vrai dans le cadre de la contrôlabilité et de l'observabilité approché depuis un ensemble mesurable en temps. Plus précisément, nous avons le résultat de dualité suivant :

**Proposition 3.3.9.** Soient  $\tau > 0$ ,  $e \subset [0, \tau]$  un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive et  $e' = \{\tau - t, t \in e\}$ . Alors, on a :

$$\Phi_{\tau,e} = (\Psi_{\tau,e'}^d)^* \mathbf{J}_\tau, \quad (3.3.3)$$

avec  $(\Psi_{\tau,e'}^d)^* \in \mathcal{L}(L^\infty([0, \tau]; U), X)$  le dual de l'opérateur  $\Psi_{\tau,e'}^d$ , et  $\mathbf{J}_\tau$  l'opérateur de réflexion sur  $L^2([0, \tau]; U)$ , défini par  $\mathbf{J}_\tau u(t) = u(\tau - t)$  ( $\mathbf{J}_\tau$  est autoadjoint et unitaire).

En particulier, le couple  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $\tau$  à partir d'un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive  $e \subset [0, \tau]$  (dans le sens de la Définition 3.3.2) si et seulement si :

$$\text{Ker } \Psi_{\tau, e'}^d = \{0\}.$$

**Remarque 3.3.10.** Si  $e = [0, \tau]$  alors (3.3.3) s'écrit classiquement :

$$\Phi_\tau = (\Psi_\tau^d)^* \mathbf{J}_\tau. \quad (3.3.4)$$

Le résultat de la Proposition 3.3.9 est une conséquence du résultat de dualité pour le cas  $e = [0, \tau]$ . On en donne ici la démonstration, inspirée de [MRT12, Proposition 2.4].

*Démonstration.* Soit  $v \in L^2([0, \infty), U)$  et  $z \in X_1$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \langle v(t), (\Psi_{\tau, e'}^d z)(t) \rangle_U dt &= \int_0^{+\infty} \langle \chi_{e'}(t)v(t), (\Psi_\tau^d z)(t) \rangle_U dt \\ &= \int_0^\tau \langle \chi_{e'}(t)v(t), B^* \mathbb{T}_t^* z \rangle_U \\ &= \int_0^\tau \langle \mathbb{T}_t B \chi_{e'}(t)v(t), z \rangle_{X_{-1}, X_1} dt \\ &= \int_0^\tau \langle \mathbb{T}_t B \chi_e v(\tau - t), z \rangle_{X_{-1}, X_1} dt \\ &= \langle \Phi_{\tau, e} \mathbf{J}_\tau v, z \rangle_{X_{-1}, X_1} \\ &= \langle \Phi_{\tau, e} \mathbf{J}_\tau v, z \rangle_X. \end{aligned}$$

L'équation (3.3.3) s'obtient alors par densité de  $X_1$  dans  $X$ .

De (3.3.3), il est trivial que le couple  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $\tau$  à partir d'un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive  $e \subset [0, \tau]$  si et seulement si  $\text{Ker } \Psi_{\tau, e'}^d = \{0\}$ .  $\square$

### 3.3.4 L'espace $R_t^\infty$

Pour tout  $t > 0$ , on note par  $R_t^\infty$  l'espace des états atteignables en temps pour le couple  $(A, B)$  avec des contrôles  $L^\infty$ , c'est-à-dire :

$$R_t^\infty = \Phi_t(L^\infty([0, t], U)). \quad (3.3.5)$$

**Lemme 3.3.11.** Pour tout  $t > 0$ ,  $R_t^\infty$ , muni de la norme :

$$\|x\|_{R_t^\infty} = \inf \{ \|u\|_{L^\infty([0, t], U)}, \Phi_t u = x \} \quad (x \in X), \quad (3.3.6)$$

est un espace de Banach.

Ce résultat s'obtient par une légère modification de la preuve du Lemme 2.1.1 du livre de Fattorini [Fat05]. Nous en donnons ici sa démonstration.

*Démonstration.* Tout d'abord, il est trivial que  $\|\cdot\|_{R_t^\infty}$  défini par (3.3.6) est bien une norme sur  $R_t^\infty$ .

Soit  $(y_n)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy de  $R_t^\infty$ . Il est clair que l'on peut extraire de cette suite une sous-suite encore notée  $(y_n)$  telle que  $\|y_{n+1} - y_n\|_{R_t^\infty} \leq 2^{-n}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , l'inégalité précédente montre qu'il existe  $v_n \in L^\infty([0, t], U)$  tel que

$y_{n+1} - y_n = \Phi_t v_n$  et  $\|v_n\|_{L^\infty([0,t],U)} \leq 2^{-(n-1)}$ .

On définit alors la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par récurrence,  $u_1 \in L^\infty([0,t],U)$  est tel que  $\Phi_t u_1 = y_1$  et pour tout  $n > 1$ , on pose  $u_{n+1} = u_n + v_n$ .

Ainsi pour tout  $n \geq 1$  et  $k \geq 0$ , on a :

$$\|u_{n+k} - u_n\|_{L^\infty([0,t],U)} \leq \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est une suite de Cauchy dans  $L^\infty([0,t],U)$ , donc  $(u_n)$  converge vers  $u \in L^\infty([0,t],U)$ . Comme  $\Phi_t$  est un opérateur continu et que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\Phi_t u_n = y_n$ , on obtient que la suite  $(y_n)$  converge vers  $y \in X$  et que  $y = \Phi_t u$ . Ainsi, la suite  $(y_n)$  est convergente dans  $R_t^\infty$ .  $\square$

**Proposition 3.3.12.** *Si  $0 \leq \sigma \leq t$ , alors :*

$$R_\sigma^\infty \subset R_t^\infty \subset X,$$

avec inclusions continues.

*Démonstration.* Il est évident que ces inclusions ont lieu. On montre seulement qu'elles sont continues. Pour ce faire, on considère  $x \in R_t^\infty$ , tel qu'il existe  $u \in L^\infty([0,t],U)$  avec  $x = \Phi_t u$ . Comme  $\Phi_t \in \mathcal{L}(L^2([0,t],U), X)$  on en déduit qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\|x\|_X \leq M \|u\|_{L^\infty([0,t],U)}$  pour tout  $u \in L^\infty([0,t],U)$  tel que  $\Phi_t u = x$ . On en déduit que :

$$\|x\|_X \leq M \inf_{\substack{u \in L^\infty([0,t],U) \\ \Phi_t u = x}} \|u\|_{L^\infty([0,t],U)} = M \|x\|_{R_t^\infty}.$$

Ainsi l'inclusion  $R_t^\infty \subset X$  est continue.

Pour montrer la continuité de l'inclusion  $R_\sigma^\infty \subset R_t^\infty$ , il suffit de remarquer que si  $x \in R_\sigma^\infty$  et  $u \in L^\infty([0,\sigma],U)$  sont tels que  $x = \Phi_\sigma u$  alors  $\tilde{u} \in L^\infty([0,t],U)$  défini pour presque tout  $s \in [0,t]$  par  $\tilde{u}(s) = \chi_{(t-\sigma,t)}(s)u(s-t+\sigma)$ , avec  $\chi_{(t-\sigma,t)}$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $(t-\sigma, t)$ , satisfait  $x = \Phi_t \tilde{u}$  et  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty([0,t],U)} = \|u\|_{L^\infty([0,\sigma],U)}$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.13.** *Soit  $\tau > 0$  tel que  $R_\tau^\infty = X$  alors les normes  $\|\cdot\|_{R_\tau^\infty}$  et  $\|\cdot\|_X$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* Soit  $\iota : R_\tau^\infty \rightarrow X$  l'opérateur identité. La Proposition 3.3.12 nous assure que  $\iota \in \mathcal{L}(R_\tau^\infty, X)$  et  $\iota$  est clairement bijective (dans le cas  $R_\tau^\infty = X$ ). En utilisant un Corollaire de l'application ouverte [Bre83, Corollaire II.6], on obtient que  $\iota^{-1} \in \mathcal{L}(X, R_\tau^\infty)$  ce qui donne le résultat.  $\square$

**Remarque 3.3.14.** *La Remarque 3.3.4 implique que si  $B$  est un opérateur de contrôle borné et que si le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en temps  $\tau > 0$  alors  $R_\tau^\infty = X$ . Ainsi, le résultat du Corollaire 3.3.13 a lieu si l'on suppose que  $B$  est un opérateur de contrôle borné et que le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable (au sens  $L^2$ ) en temps  $\tau$  au lieu de supposer directement que  $R_\tau^\infty = X$ .*

**Remarque 3.3.15.** *Si  $R_t^\infty = X$ , l'équivalence des normes nous permet de définir le coût du contrôle en temps  $t$  par*

$$C_t = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_{R_t^\infty}}{\|x\|_X} < +\infty \quad (t > 0). \quad (3.3.7)$$

*Il est facile de vérifier que l'application  $t \mapsto C_t$  est décroissante.*

### 3.4 Résultats principaux

Dans cette section, nous allons étendre le principe du maximum de Pontryagin, bien connu pour les systèmes de dimension finie, à une classe de systèmes de dimension infinie. Nous allons utiliser dans cette section les notations et résultats introduits dans la section 3.3. En particulier  $U$  est un espace de Hilbert représentant l'espace des valeurs des contrôles,  $X$  est un espace de Hilbert représentant l'espace des états,  $A$  est le générateur d'un semi-groupe  $\mathbb{T}$  fortement continu sur  $X$  et  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est un opérateur de contrôle admissible. De plus  $R_t^\infty$ , défini par (3.3.5), est l'espace des états atteignables avec des contrôles  $L^\infty$  en temps et pour tout  $t > 0$ , on définit la boule unité fermée de  $R_t^\infty$ ,

$$B_t^\infty(1) = \{ \Phi_t u, u \in L^\infty([0, t], U), \|u\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1 \}.$$

#### 3.4.1 Résultat d'existence

Avant de donner le principe du maximum de Pontryagin et le caractère *bang-bang* des contrôles optimaux, on mentionne le résultat d'existence de contrôles en temps optimal.

**Proposition 3.4.1.** *Avec les notations et hypothèses précédentes, on suppose que  $z_0, z_1 \in X$ ,  $z_0 \neq z_1$ , sont tels qu'il existe  $t > 0$  avec :*

$$z_1 - \mathbb{T}_t z_0 \in B_t^\infty(1),$$

alors il existe  $\tau^*(z_0, z_1) > 0$  tel que :

$$\tau^*(z_0, z_1) = \min\{t > 0, z_1 - \mathbb{T}_t z_0 \in B_t^\infty(1)\} > 0. \quad (3.4.1)$$

La preuve de ce résultat est une conséquence du Lemme 3.1.1 et du Théorème 3.1.2 du livre de Fattorini [Fat05].

*Démonstration.* Soit  $\tau^* = \inf\{t > 0, z_1 - \mathbb{T}_t z_0 \in B_t^\infty(1)\} > 0$ .

L'existence d'une suite minimisante  $(t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $(\zeta_n) \in X^{\mathbb{N}}$  et  $(u_n) \in (L^\infty([0, t_n], U))^{\mathbb{N}}$  avec  $\|u_n\|_{L^\infty([0, t_n], U)} \leq 1$  et  $\zeta_n - \mathbb{T}_{t_n} z_0 = \Phi_{t_n} u_n$ , satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \tau^*$  et  $\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z_1$  est claire (c.f. [Fat05, Lemme 3.1.1]).

pour tout  $x \in X$ , et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\langle x, \zeta_n - \mathbb{T}_{t_n} z_0 \rangle_X = \langle x, \Phi_{t_n} u_n \rangle_X = \int_0^{t_n} \langle B^* \mathbb{T}_{t_n - \sigma}^* x, u_n(\sigma) \rangle_U d\sigma. \quad (3.4.2)$$

Soit  $\bar{t} = \sup_{n \in \mathbb{N}} t_n$ , on redéfinit les contrôles  $u_n$  dans  $L^\infty([0, \bar{t}], U)$  en les prolongeant par 0

sur  $]t_n, \bar{t}]$ . On peut voir la suite  $(u_n)$  ainsi redéfinie comme une suite de  $L^1([0, \bar{t}], U)$ . On peut alors en extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément  $u^*$  de  $L^\infty([0, \bar{t}], U)$ . Comme  $\|u_n\|_{L^\infty([0, \bar{t}], U)} \leq 1$  pour tout  $n$ , on a  $\|u^*\|_{L^\infty([0, \bar{t}], U)} \leq 1$ .

On définit pour  $\sigma \in [0, \bar{t}]$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} B^* \mathbb{T}_{\tau^* - t}^* x & \text{si } \sigma \in [0, \tau^*], \\ 0 & \text{si } \sigma \in ]\tau^*, \bar{t}], \end{cases} \quad \chi_n(\sigma) = \begin{cases} B^* \mathbb{T}_{t_n - t}^* x & \text{si } \sigma \in [0, t_n], \\ 0 & \text{si } \sigma \in ]t_n, \bar{t}]. \end{cases}$$

La continuité de  $t \mapsto \mathbb{T}_t^* x$  implique que  $\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1([0, \bar{t}], U)} \chi$ . Avec cette notation, (3.4.2) se réécrit :

$$\langle x, \zeta_n - \mathbb{T}_{t_n} z_0 \rangle_X = \int_0^{\bar{t}} \langle \chi_n(\sigma), u_n(\sigma) \rangle_U d\sigma.$$

Par passage à la limite,  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\langle x, z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 \rangle_X = \int_0^{\bar{t}} \langle \chi(\sigma), u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma = \int_0^{\tau^*} \langle \chi(\sigma), u^*(\sigma) \rangle_U d\sigma = \langle x, \Phi_{\tau^*} u^* \rangle_X .$$

Par conséquent, on a  $z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 = \Phi_{\tau^*} u^*$ . Ce qui prouve que la borne inférieure est bien atteinte.  $\square$

De cette proposition, nous en déduisons le corollaire suivant :

**Corollaire 3.4.2.** *Avec les notations précédentes, on suppose que  $A$  est un opérateur anti-adjoint et que pour tout  $t > 0$ ,  $R_t^\infty = X$ . Alors pour tout  $z_0, z_1 \in X$ ,  $z_0 \neq z_1$ , il existe  $\tau^*(z_0, z_1) > 0$  tel que :*

$$\tau^*(z_0, z_1) = \min\{t > 0, z_1 - \mathbb{T}_t z_0 \in B_t^\infty(1)\} > 0 .$$

Un énoncé plus général de ce corollaire peut être trouvé dans [PWZ07].

*Démonstration.* Nous allons montrer que sous les hypothèses faites sur  $A$  et  $R_t^\infty$ , les hypothèses de la Proposition 3.4.1 sont satisfaites, c'est-à-dire que pour tout  $z_0, z_1 \in X$ ,  $z_0 \neq z_1$ , il existe  $t > 0$  et  $u \in L^\infty([0, t], U)$  avec  $\|u\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1$  tels que  $z_1 - \mathbb{T}_t z_0 = \Phi_t u$ .

Commençons par montrer le résultat pour  $z_1 = 0$ .

Soit  $M > 0$  tel que  $\|z_0\|_X \leq M$  et notons  $\alpha_0 = z_0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $B^X(\varepsilon)$  la boule ouverte de  $X$  de rayon  $\varepsilon$  centrée en 0. Soit  $\theta > 0$ . Du Corollaire 3.3.13, on en déduit qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B^X(2\varepsilon) \subset B_\theta^\infty(1)$ . On en déduit que pour tout  $\alpha_1 \in \mathbb{T}_\theta \alpha_0 + B^X(2\varepsilon)$ , il existe  $u_0 \in L^\infty([0, \theta], U)$  avec  $\|u_0\|_{L^\infty([0, \theta], U)} \leq 1$  tel que  $\alpha_1 = \mathbb{T}_\theta \alpha_0 + \Phi_\theta u_0$ .

Étant donné que nous avons supposé que  $A$  est un opérateur anti-adjoint, on en déduit que  $\mathbb{T}$  est un groupe d'isométries et en particulier, nous avons  $\|\mathbb{T}_\theta \alpha_0\|_X = \|\alpha_0\|_X$ . Ainsi, il est possible de choisir  $\alpha_1 = 0$  si  $\|\alpha_0\|_X \leq \varepsilon$  et  $\alpha_1$  tel que  $\|\alpha_1\|_X = \|\alpha_0\|_X - \varepsilon$  sinon. En itérant la construction à partir de  $\alpha_1$ , nous construisons une séquence  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  d'éléments de  $X$ , avec  $n$  le plus grand entier naturel tel que  $n\varepsilon < M$ , vérifiant :

1.  $\|\alpha_i\|_X \leq M - i\varepsilon$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  et  $\alpha_{n+1} = 0$ ;
2. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $u_i \in L^\infty([0, \theta], U)$  avec  $\|u_i\|_{L^\infty([0, \theta], U)} \leq 1$  tel que  $\alpha_{i+1} = \mathbb{T}_\theta \alpha_i + \Phi_\theta u_i$ .

On considère alors le contrôle  $u \in L^\infty([0, (n+1)\theta], U)$  défini par :

$$u(t) = u_i(t - i\theta) \quad (t \in [0, (n+1)\theta], \quad i \in \{1, \dots, n\}) .$$

Nous avons alors  $\|u\|_{L^\infty([0, (n+1)\theta], U)} \leq 1$  et  $\mathbb{T}_{(n+1)\theta} \alpha_0 + \Phi_{(n+1)\theta} u = 0$ . Ainsi, nous avons montré l'existence d'un temps  $t > 0$  dépendant uniquement de  $M$  pour lequel il existe un contrôle en temps  $t$  à 0 dont la norme infinie est inférieure à 1.

Considérons maintenant le cas  $z_1$  quelconque.

Soit  $M > \|z_0\|_X + \|z_1\|_X$  et soit  $t > 0$  un temps construit comme précédemment, c'est-à-dire un temps permettant d'avoir la propriété de contrôlabilité à 0 pour tout élément de  $B^X(M)$  avec des contrôles dont la norme infinie est inférieure ou égale à 1. On considère alors  $z_2 = \mathbb{T}_t^{-1} z_1$ , nous avons  $\|z_2\|_X = \|z_1\|_X$ . Ainsi, nous avons  $\|z_0 - z_2\|_X < M$  et il existe  $u \in L^\infty([0, t], U)$  avec  $\|u\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1$  tel que  $0 = \mathbb{T}_t(z_0 - z_2) + \Phi_t u$ . On en conclut qu'il existe  $u \in L^\infty([0, t], U)$  avec  $\|u\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1$  tel que  $z_1 = \mathbb{T}_t z_0 + \Phi_t u$  et par conséquent que nous sommes dans les conditions d'application de la Proposition 3.4.1. Ceci achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 3.4.3.** Dans le cas où  $A$  est anti-adjoint,  $B$  est un opérateur de contrôle borné, i.e.  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  et le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout temps, nous obtenons du Corollaire 3.4.2 l'existence d'un temps optimal. En effet, il suffit d'utiliser la Remarque 3.3.14 pour obtenir que  $R_t^\infty = X$  pour tout  $t > 0$ .

En d'autres termes  $\tau^*(z_0, z_1)$  est le temps minimal pour lequel  $z_0$  peut être envoyé en  $z_1$  en utilisant des contrôles tels que  $\|u(t)\| \leq 1$  pour presque tout  $T$ . Par conséquent tout contrôle  $u^* \in L^\infty([0, \tau^*(z_0, z_1)], U)$  vérifiant :

$$z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 = \Phi_{\tau^*} u^*, \quad (3.4.3)$$

est appelé *contrôle en temps optimal* pour le couple  $(A, B)$ .

### 3.4.2 Principe du maximum de Pontryagin

Un des résultats principaux de ce chapitre est l'extension du principe du maximum de Pontryagin pour une classe de systèmes de dimension infinie.

**Théorème 3.4.4.** On suppose que  $R_t^\infty = X$  pour tout  $t > 0$ .

Soient  $z_0, z_1 \in X$ ,  $z_0 \neq z_1$ , tels qu'il existe  $t > 0$  pour lequel,  $z_1 - \mathbb{T}_t z_0 \in B_t^\infty(1)$ .

Alors il existe un contrôle en temps optimal  $u^*$  envoyant  $z_0$  sur  $z_1$  en temps  $\tau^* = \tau^*(z_0, z_1)$ .

De plus, il existe  $\eta \in X$ ,  $\eta \neq 0$ , tel que :

$$\langle (\mathfrak{A}_{\tau^*} \Psi_{\tau^*}^d \eta)(t), u(t) \rangle_U = \max_{\substack{v \in U, \\ \|v\|_U \leq 1}} \langle (\mathfrak{A}_{\tau^*} \Phi_{\tau^*}^d \eta)(t), v \rangle_U \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}). \quad (3.4.4)$$

**Remarque 3.4.5.** Dans le cas où  $B$  est borné,  $B \in \mathcal{L}(U, X)$ , la Remarque 3.3.14 nous assure que le résultat du Théorème 3.4.4 reste valide sous l'hypothèse  $(A, B)$  exactement contrôlable en tout temps  $t > 0$  au lieu de l'hypothèse  $R_t^\infty = X$  en tout temps  $t > 0$ . Dans ce cas, (3.4.4) s'écrit directement :

$$\langle B^* \mathbb{T}_{\tau^* - t}^* \eta, u(t) \rangle_U = \max_{\substack{v \in U, \\ \|v\|_U \leq 1}} \langle B^* \mathbb{T}_{\tau^* - t}^* \eta, v \rangle_U \quad (t \in (0, \tau^*) \text{ p.p.}).$$

Avant de passer à la démonstration de ce Théorème, on rappelle un résultat de séparation. Ce résultat est une conséquence du Théorème de Hahn-Banach. Pour ce résultat, on fait référence à [BP86, Theorem 1.13].

**Théorème 3.4.6.** Soit  $C$  un convexe d'intérieur non vide d'un espace de Banach  $E$  alors tout point de  $\partial C$  est un point de support. C'est-à-dire que pour tout  $x_0 \in \partial C$ , il existe un élément  $\eta$  de  $E'$  (le dual de  $E$ ) tel que :

$$\langle \eta, x_0 \rangle_{E', E} \geq \langle \eta, x \rangle_{E', E} \quad (x \in C).$$

*Démonstration du Théorème 3.4.4.* L'existence d'un contrôle en temps optimal  $u^*$  est assurée par la Proposition 3.4.1. Afin de prouver le principe du maximum de Pontryagin, on commence par montrer comme Fattorini (c.f. [Fat05]) que  $z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 \in \partial B_{\tau^*}^\infty(1)$ .

La frontière est prise dans le sens de la topologie de  $R_{\tau^*}^\infty$  et par conséquent au sens de la topologie de  $X$  (c.f. Corollaire 3.3.13).

On suppose par l'absurde que  $z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 \notin \partial B_{\tau^*}^\infty(1)$ .

Ceci implique l'existence d'un réel  $r \in (0, 1)$  tel que  $\frac{1}{r}(z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0) \in B_{\tau^*}^\infty(1)$ , c'est-à-dire

l'existence de  $u_1 \in L^\infty([0, \tau^*], U)$ ,  $\|u_1\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq r < 1$  tel que  $z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 = \Phi_{\tau^*} u_1$ . Soit  $t < \tau^*$ , on a alors :

$$\begin{aligned} z_1 - \mathbb{T}_t z_0 &= \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 - \mathbb{T}_t z_0 + \Phi_{\tau^*} u_1 = \\ &= \Phi_t u_1 + \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 - \mathbb{T}_t z_0 + \int_0^t (\mathbb{T}_{\tau^*-\sigma} - \mathbb{T}_{t-\sigma}) B u_1(\sigma) d\sigma + \int_t^{\tau^*} \mathbb{T}_{\tau^*-\sigma} B u_1(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

On définit  $\varphi(t, \tau^*)$  par :

$$\varphi(t, \tau^*) = \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 - \mathbb{T}_t z_0 + \int_0^t (\mathbb{T}_{\tau^*-\sigma} - \mathbb{T}_{t-\sigma}) B u_1(\sigma) d\sigma + \int_t^{\tau^*} \mathbb{T}_{\tau^*-\sigma} B u_1(\sigma) d\sigma \quad (t \in [0, \tau^*]),$$

de sorte que :

$$z_1 - \mathbb{T}_t z_0 = \Phi_t u_1 + \varphi(t, \tau^*). \quad (3.4.5)$$

Il est aisé de vérifier que  $\lim_{t \rightarrow \tau^*} \varphi(t, \tau^*) = 0$  dans  $X$ . La Remarque 3.3.15 assure que  $\|\varphi(t, \tau^*)\|_{R_t^\infty} \leq C_t \|\varphi(t, \tau^*)\|_X$ , avec  $t \mapsto C_t$  une fonction décroissante. Ainsi pour  $t$  suffisamment proche de  $\tau^*$ , il existe un contrôle  $u_2 \in L^\infty([0, t], U)$  satisfaisant :

$$\|u_2\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1 - r \quad \text{et} \quad \Phi_t u_2 = \varphi(t, \tau^*).$$

La relation précédente et la relation (3.4.5) impliquent que :

$$z_1 - \mathbb{T}_t z_0 = \Phi_t u \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\infty([0, t], U)} \leq 1,$$

avec  $u = u_1 + u_2$ . Ceci contredit le fait que  $\tau^*$  est minimal au sens de (3.4.1). Nous avons ainsi montré que  $z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 \in \partial B_{\tau^*}^\infty(1)$ .

Comme  $B_{\tau^*}^\infty(1)$  est d'intérieur non vide et est un ensemble convexe, on obtient en utilisant le Théorème 3.4.6, l'existence de  $\eta \in X$ ,  $\eta \neq 0$  tel que :

$$\langle \eta, z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0 \rangle_X \geq \langle \eta, x \rangle_X \quad (x \in B_{\tau^*}^\infty(1)).$$

L'inégalité précédente combinée avec la Définition (3.4.3) du temps optimal implique :

$$\langle \eta, \Phi_{\tau^*} u^* \rangle_X \geq \langle \eta, \Phi_{\tau^*} v \rangle_X \quad (v \in L^\infty([0, \tau^*], U), \|v\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq 1). \quad (3.4.6)$$

En utilisant les égalités (3.3.2) et (3.3.4) on obtient :

$$\int_0^{\tau^*} \langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, u^*(t) \rangle_U dt \geq \int_0^{\tau^*} \langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, v(t) \rangle_U dt \quad (\|v\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq 1). \quad (3.4.7)$$

Le Lemme 2.2.1 de [Fat05] et le fait que  $t \mapsto B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta$  est  $U$ -faiblement mesurable donne :

$$\sup_{\substack{v \in L^\infty([0, \tau^*], U), \\ \|v\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq 1}} \int_0^{\tau^*} \langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, v(t) \rangle_U dt = \int_0^{\tau^*} \|B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta\|_U dt,$$

ainsi, nous obtenons :

$$\int_0^{\tau^*} \langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, u^*(t) \rangle_U dt = \int_0^{\tau^*} \|B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta\|_U dt.$$

Par ailleurs, il est clair que :

$$\langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, u^*(t) \rangle_U \leq \|B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta\|_U \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}).$$

L'estimation précédente et (3.4.7) impliquent :

$$\langle B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta, u^*(t) \rangle_U = \|B^* \mathbb{T}_{\tau^*-t}^* \eta\|_U \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}).$$

Ce qui donne (3.4.4). □

### 3.4.3 Caractère bang-bang des contrôles

Un autre résultat important de ce chapitre est que sous des hypothèses supplémentaires de contrôlabilité approchée, on obtient l'unicité et le caractère bang-bang du contrôle en temps optimal.

**Corollaire 3.4.7.** *En utilisant les notations et hypothèses du Théorème 3.4.4, et en supposant de plus que le couple  $(A, B)$  est approximativement contrôlable en temps  $\tau^*$  depuis n'importe quel ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure de Lebesgue positive. Alors il existe un unique contrôle en temps optimal  $u^*$  qui est bang-bang, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\|u^*(t)\|_U = 1 \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}). \quad (3.4.8)$$

*Démonstration.* Le Théorème 3.4.4 assure l'existence d'un contrôle en temps optimal et de plus il donne l'existence de  $\eta \in X$  avec  $\eta \neq 0$ , tel que (3.4.4) soit vérifié. Par ailleurs, l'hypothèse de contrôlabilité approchée en temps  $\tau^*$  depuis n'importe quel ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure de Lebesgue positive sur le couple  $(A, B)$  assure en utilisant la Proposition 3.3.9 que :

$$\Phi_{\tau^*}^* \eta \neq 0 \quad (\text{p.p. sur } [0, \tau^*]).$$

Ainsi (3.4.4) implique que le contrôle en temps optimal est donné par :

$$u^*(t) = \frac{1}{\|(\mathbf{R}_{\tau^*} \Psi_{\tau^*}^* \eta)(t)\|_U} (\mathbf{R}_{\tau^*} \Psi_{\tau^*}^* \eta)(t) \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}),$$

ce qui donne (3.4.8).

L'unicité de  $u^*$  provient du caractère strictement convexe de  $U$  ( $U$  est un espace de Hilbert) et du caractère bang-bang des contrôles en temps optimal.

En effet, on suppose par l'absurde qu'il existe deux contrôles en temps optimal  $u_1^* \neq u_2^*$ . Alors  $u^* = \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*) \in L^\infty([0, \tau^*], U)$  vérifie  $\|u^*\|_{L^\infty([0, \tau^*], U)} \leq 1$ ,  $\|u^*(t)\|_U < 1$  pour  $t$  dans un ensemble de mesure positive et  $\Phi_{\tau^*} u^* = z_1 - \mathbb{T}_{\tau^*} z_0$ . Ainsi  $u^*$  serait un contrôle en temps optimal qui ne satisfierait pas le caractère bang-bang, d'où la contradiction.  $\square$

## 3.5 Application à l'équation de Schrödinger

### 3.5.1 Lemmes de continuation unique

Le lemme suivant est un Lemme de continuation unique pour les séries harmoniques. Ce lemme est issu d'un résultat de continuation unique pour les fonctions holomorphes. Dans la littérature il existe sous des formes semblables, on fait par exemple référence à Reifler et Vogt [RV94] et Hante, Sigalotti et Tucsnak [HST].

**Lemme 3.5.1.** *Soient  $I \subset \mathbb{Z}$  un ensemble d'entiers,  $(\lambda_n)_{n \in I}$  une suite de réels bornée inférieurement (respectivement supérieurement),  $e \subset \mathbb{R}$  un ensemble réel de mesure de Lebesgue strictement positive et  $(a_n)_{n \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$  une suite sommable. On a alors*

$$\left( \forall t \in e, \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} = 0 \right) \Leftrightarrow \left( \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} = 0 \right).$$

*Démonstration.* On ne donne ici que la preuve pour le cas où  $(\lambda_n)$  est bornée inférieurement. Dans le cas où  $(\lambda_n)$  est bornée supérieurement, on se ramène au cas borné inférieurement par changement de variable  $t \mapsto -t$ .



On définit  $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} s > 0\}$  et la fonction :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n s} \end{array}.$$

Comme  $(a_n)$  est sommable et comme  $(\lambda_n)$  est bornée inférieurement, on a clairement que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}_+$  et continue jusqu'à sa frontière (l'axe réel). Étant donné que  $f$  s'annule sur  $e \subset \mathbb{R}$ , un ensemble de mesure positive, on obtient par le Théorème d'unicité de Privalov's, [Zyg59, Vol. II, Ch. XIV, Theorem 1.9], que  $f$  s'annule sur  $\overline{\mathbb{C}_+}$  et par conséquent s'annule sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Du Lemme précédent, on en déduit le résultat de continuation suivant :

**Lemme 3.5.2.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert,  $A_0$  un opérateur autoadjoint et diagonalisable sur  $X$  ayant pour domaine  $\mathcal{D}(A_0)$  et  $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ . On suppose de plus que le spectre  $\sigma(A_0)$  de  $A_0$  est borné inférieurement (resp. supérieurement). Soient  $z_0 \in X$ ,  $z \in C^0(\mathbb{R}, X)$  solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= iA_0 z(t) & (t \in \mathbb{R}), \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

et  $y \in C^0(\mathbb{R}, Y)$  donné par :

$$y(t) = Cz(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.5.2}$$

S'il existe un ensemble  $e \subset \mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive tel que  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in e$  alors  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Comme  $A_0$  est supposé être autoadjoint et diagonalisable, il existe une famille orthonormée de vecteurs propres  $(\varphi_n)_{n \in I}$  de  $A_0$ , avec  $I \subset \mathbb{Z}$ . Soit  $(i\lambda_n)_{n \in I}$  la suite de valeurs propres correspondante.

Comme  $A_0$  est autoadjoint, la suite  $(\lambda_n)$  est réelle et l'hypothèse faite sur  $\sigma(A_0)$  assure que la suite  $(\lambda_n)$  est bornée inférieurement (resp. supérieurement). La solution  $z$  de (3.5.1) s'écrit :

$$z(t) = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \varphi_n \quad (t \in \mathbb{R}),$$

avec  $a_n = \langle z_0, \varphi_n \rangle_X$  pour tout  $n \in I$ .

Ainsi,  $y$  défini par (3.5.2) s'écrit :

$$y(t) = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} C\varphi_n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour tout  $v \in Y$ , on a :

$$\langle y(t), v \rangle_Y = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \langle C\varphi_n, v \rangle_Y = \sum_{n \in I} a_n e^{i\lambda_n t} \langle C^*v, \varphi_n \rangle_X \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Comme  $(a_n)_n$  et  $(\langle C^*v, \varphi_n \rangle_X)_n$  sont de carré sommable, on obtient que la suite  $(a_n \langle C^*v, \varphi_n \rangle_X)_n$  est sommable.

De plus,  $\langle y(t), v \rangle_Y = 0$  pour tout  $t \in e$  et la suite  $(\lambda_n)_{n \in I}$  est bornée inférieurement (resp. supérieurement).

On est donc dans les conditions d'application du Lemme 3.5.1, ce qui nous donne  $\langle y(t), v \rangle_Y = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Finalement, cette propriété étant vérifiée pour tout  $v \in Y$ , on conclut que  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### 3.5.2 Résultat pour l'équation de Schrödinger

Nous donnons ici un exemple d'application du Théorème 3.4.4 et du Corollaire 3.4.7. Le système considéré ici est l'équation de Schrödinger avec contrôle interne :

$$\dot{z}(x, t) = -i\Delta z(x, t) + ia(x)z(x, t) + u(x, t)\chi_{\mathcal{O}}(x) \quad (x \in \Omega, \quad t \geq 0), \quad (3.5.3)$$

$$z(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0), \quad (3.5.4)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un domaine ouvert,  $\mathcal{O}$  est un ensemble ouvert de  $\Omega$ ,  $\chi_{\mathcal{O}}$  est la fonction caractéristique de  $\mathcal{O}$  et le contrôle  $u$  est supposé tel que  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq 1$  pour presque tout  $t \geq 0$ .

Commençons par donner la notion de conditions d'optique géométrique. Cette notion a été introduite par Bardos, Lebeau et Rauch, [BLR88, BLR92].

**Définition 3.5.3.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine de classe  $C^2$  et  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\Omega$ . On dit que  $\mathcal{O}$  satisfait les conditions d'optique géométrique s'il existe  $T > 0$  tel que tout rayon de  $\bar{\Omega}$  (voyageant à vitesse 1 et se réfléchissant suivant les lois de l'optique géométrique) issu de  $t = 0$  rencontre  $\mathcal{O}$  en un temps inférieur à  $T$ .

**Proposition 3.5.4.** *Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes ait lieu.*

1. *Le domaine  $\Omega$  est borné,  $\partial\Omega$  est de classe  $C^3$ ,  $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{O}$  satisfait la condition d'optique géométrique ;*
2. *Le domaine  $\Omega$  est rectangulaire,  $a$  est une constante réelle et  $\mathcal{O}$  est un ouvert non vide de  $\Omega$ .*

Alors pour tout  $z_0, z_1 \in L^2(\Omega)$ ,  $z_0 \neq z_1$ , il existe un unique contrôle en temps optimal  $u^*$  envoyant la solution de (3.5.3)-(3.5.4) de  $z_0$  (en  $t = 0$ ) à  $z_1$  (en  $t = \tau^* = \tau^*(z_0, z_1)$ ).

De plus, il existe  $\eta \in L^2(\Omega)$ ,  $\eta \neq 0$  tel que :

$$\int_{\mathcal{O}} w(x, t) \overline{u^*(x, t)} \, dx = \max_{\substack{v \in L^2(\mathcal{O}), \\ \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq 1}} \int_{\mathcal{O}} w(x, t) \overline{v(x)} \, dx \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ p.p.}), \quad (3.5.5)$$

avec  $w$  solution du problème adjoint :

$$\dot{w}(x, t) = -i\Delta w(x, t) + ia(x)w(x, t) \quad (x \in \Omega, \quad t \geq 0), \quad (3.5.6)$$

$$w(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0), \quad (3.5.7)$$

$$w(x, \tau^*) = \eta(x) \quad (x \in \Omega). \quad (3.5.8)$$

Finalement,  $u^*$  est bang-bang, c'est-à-dire :

$$\|u^*(\cdot, t)\| = 1 \quad (t \in [0, \tau^*] \text{ a.e.}). \quad (3.5.9)$$

*Démonstration.* Dans le cas de la première hypothèse, il suffit de considérer le cas  $a \geq 0$ . De même, dans le cas de la deuxième hypothèse, il suffit de considérer le cas  $a = 0$ . Ces simplifications sont le résultat des changements de variables :

1.  $z(x, t) \rightarrow \exp(-i\|a\|_{L^\infty(\Omega)}t)z(x, t)$  dans le premier cas ;
2.  $z(x, t) \rightarrow \exp(iat)z(x, t)$  dans le second cas.

Le résultat est la conséquence du Théorème 3.4.4 et du Corollaire 3.4.7, avec un choix d'espaces et d'opérateurs adaptés. Plus précisément, soient  $X = L^2(\Omega)$ ,  $U = L^2(\mathcal{O})$  et l'opérateur  $A$  défini par :

$$\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (3.5.10)$$

$$A\varphi = -i\Delta\varphi + ia(x)\varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}(A)). \quad (3.5.11)$$

L'opérateur  $A$  est clairement anti-adjoint et diagonalisable.

On définit l'opérateur de contrôle  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  par :

$$Bu = \chi_{\mathcal{O}}u \quad (u \in L^2(\mathcal{O})).$$

On remarque qu'avec les espaces et opérateurs définis précédemment, le système (3.5.3) s'écrit sous la forme  $\dot{z} = Az + Bu$ .

De plus, dans le but d'appliquer le Théorème 3.4.4, il suffit de vérifier que le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout temps  $\tau > 0$  (c.f. Remarque 3.4.5, dans le cas considéré,  $B$  est un opérateur borné).

Sous la première hypothèse, ce résultat est classique, il suffit par exemple de combiner les résultats obtenus par Burq, [Bur97] avec la Remarque 7.4.4 et le Théorème 6.7.2 de [TW09].

Sous la seconde hypothèse, la contrôlabilité exacte en tout temps du couple  $(A, B)$  a été prouvée par Jaffard [Jaf88] et Komornik [Kom92].

Par conséquent, nous sommes dans les conditions d'application du Théorème 3.4.4 et nous en déduisons (3.5.5).

Afin d'appliquer le Corollaire 3.4.7, nous devons vérifier que le couple  $(A^*, B^*)$  est approximativement observable depuis n'importe quel ensemble  $e \subset [0, \tau^*]$  de mesure de Lebesgue positive. En termes d'équation aux dérivées partielles, cela signifie que si une solution de (3.5.6) satisfait :

$$w(x, t) = 0 \quad (x \in \mathcal{O}, t \in e),$$

alors on obtient :

$$w(x, t) = 0 \quad (x \in \Omega, t \in \mathbb{R}).$$

On remarque que comme  $a \in L^\infty(\Omega)$ , l'opérateur  $A$ , défini par (3.5.10)–(3.5.11), s'écrit  $A = iA_0$  avec  $A_0$  un opérateur autoadjoint, diagonalisable dont le spectre est borné inférieurement. Par conséquent, nous sommes dans les conditions d'application du Lemme 3.5.2 ce qui nous permet de conclure que  $w(x, t) = 0$  pour  $x \in \mathcal{O}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

En utilisant la contrôlabilité exacte en tout temps du couple  $(A, B)$  (impliquant l'observabilité exacte en tout temps du couple  $(A^*, B^*)$ ), on en conclut que  $w(x, t) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Pour terminer, nous appliquons le Corollaire 3.4.7 pour obtenir (3.5.9).  $\square$

### 3.6 Conclusion et questions ouvertes

Les résultats obtenus dans la section précédente sont à notre connaissance les premiers établissant le principe du maximum de Pontryagin et la propriété bang-bang dans le cas de systèmes (de type Schrödinger) réversibles en temps avec des contrôles agissant dans un sous-ensemble strict du domaine spatial.

Si les contrôles agissent sur l'ensemble du domaine spatial, la méthode peut être aisément

appliquée au cas de l'équation des ondes ou d'Euler-Bernoulli, pour l'équation des plaques. Plus généralement, on peut adapter les résultats aux systèmes de la forme :

$$\ddot{w} + A_0 w = u, \quad (3.6.1)$$

où  $A_0$  est un opérateur positif sur un espace de Hilbert  $H$  et  $u$  est le contrôle. On peut aisément vérifier que le système (3.6.1) peut s'écrire sous la forme d'un système du premier ordre qui satisfait les hypothèses du Théorème 3.4.4 et du Corollaire 3.4.7.

Ainsi, nous avons le principe du maximum de Pontryagin et la propriété bang-bang des contrôles optimaux pour le problème de contrôle en temps optimal associé. Ce problème ayant déjà été traité par une méthode similaire dans Fattorini [Fat77] et Krabs [Kra89], nous ne donnons pas les détails ici.

On remarque qu'en choisissant  $H = L^2(\Omega)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est borné avec une frontière régulière et en choisissant  $A_0$  comme le Dirichlet-Laplacien (respectivement le carré du Dirichlet-Laplacien) dans  $\Omega$ , l'équation (3.6.1) devient l'équation des ondes (respectivement d'Euler-Bernoulli), avec un contrôle agissant sur tout le domaine  $\Omega$ . Nous référons aussi à Kunisch et Wachsmuth, [KW11a] pour une approche théorique et numérique du problème de contrôle en temps optimal pour l'équation des ondes.

Une question partiellement ouverte consiste à montrer le principe du maximum de Pontryagin et la propriété bang-bang des contrôles optimaux pour les systèmes gouvernés par l'équation des plaques avec un contrôle agissant sur un ouvert strictement inclus dans le domaine spatial. Cette question est particulièrement intéressante, en effet, la plupart des résultats de contrôle connus pour l'équation de Schrödinger admettent un équivalent pour l'équation d'Euler-Bernoulli (en particulier pour les conditions aux limites posées ou "hinged"). Or il n'est pas clair que ce soit le cas pour les problèmes de contrôle en temps optimal.

Plus précisément, considérons le cas unidimensionnel des équations des plaques avec un contrôle agissant sur une partie du domaine spatial. L'obstacle théorique pour obtenir la propriété bang-bang des contrôles en temps optimal résulte du fait que pour appliquer le Corollaire 3.4.7, on a besoin d'un résultat d'unicité semblable à celui du Lemme 3.5.1 avec la suite  $(\pm n^2)_{n \geq 1}$  qui admet un nombre infini de valeurs positives et négatives.

Ainsi même dans le cas unidimensionnel, la propriété d'unicité et de bang-bang des contrôles en temps optimal est une question ouverte.

Cependant, il est aisé de montrer que le principe du maximum de Pontryagin est valable. En effet, si l'on considère le système suivant :

$$\ddot{z}(x, t) = -\Delta^2 z(x, t) + \chi_{\mathcal{O}}(x) u(x, t) \quad (x \in \Omega, t \geq 0), \quad (3.6.2)$$

$$z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \geq 0), \quad (3.6.3)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un domaine ouvert borné,  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\Omega$ ,  $\chi_{\mathcal{O}}$  sa fonction caractéristique et  $u$  un contrôle satisfaisant  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq 1$  pour presque tout  $t \geq 0$ .

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.6.1.** *On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite.*

1. *Le domaine  $\Omega$  est borné,  $\partial\Omega$  est de classe  $C^2$  et  $\mathcal{O}$  satisfait les conditions d'optique géométrique ;*
2. *Le domaine  $\Omega$  est rectangulaire et  $\mathcal{O}$  est un ouvert non vide de  $\Omega$ .*

*Alors pour tous  $f_0, f_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et  $g_0, g_1 \in L^2(\Omega)$ , tels que  $(f_0, g_0) \neq (f_1, g_1)$ , il existe un contrôle en temps optimal  $u^* \in L^\infty([0, \tau^*], L^2(\mathcal{O}))$  envoyant la solution de*

(3.6.2)–(3.6.3) de la condition initiale  $(z(0), \dot{z}(0)) = (f_0, g_0)$  à la condition finale  $(z(\tau^*), \dot{z}(\tau^*)) = (f_1, g_1)$ . De plus, il existe  $(\eta_0, \eta_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$ , tel que  $(\eta_0, \eta_1) \neq (0, 0)$  et

$$\int_{\mathcal{O}} \dot{w}(x, t) \overline{u^*}(x, t) \, dx = \max_{\substack{v \in L^2(\mathcal{O}), \\ \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq 1}} \int_{\mathcal{O}} \dot{w}(x, t) \overline{v}(x) \, dx, \quad (3.6.4)$$

où  $w$  est la solution du problème adjoint :

$$\ddot{w}(x, t) = -\Delta^2 w(x, t) \quad (x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}), \quad (3.6.5)$$

$$w(x, t) = \Delta w(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}), \quad (3.6.6)$$

$$w(x, \tau^*) = \eta_0(x), \quad \dot{w}(x, \tau^*) = \eta_1(x) \quad (x \in \Omega). \quad (3.6.7)$$

*Démonstration.* La preuve de ce résultat est similaire à celle donnée dans la première partie de la démonstration de la Proposition 3.5.4. Plus précisément, il suffit d'appliquer le Théorème 3.4.4, avec un bon choix des espaces et opérateurs.

On considère les espaces fonctionnels  $X = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$  et  $U = L^2(\mathcal{O})$  et l'opérateur  $A$  défini par :

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \Delta f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$A \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ -\Delta^2 f \end{bmatrix} \quad \left( \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(A) \right).$$

L'opérateur de contrôle  $B \in \mathcal{L}(U, X)$  est défini par :

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{\mathcal{O}} u \end{bmatrix} \quad (u \in L^2(\mathcal{O})).$$

On remarque qu'avec ce choix d'espaces et d'opérateurs, le système (3.6.2)–(3.6.3) s'écrit sous la forme  $\dot{Z} = AZ + Bu$ , avec  $Z = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ .

Pour appliquer le Théorème 3.4.4, il suffit de vérifier que le couple  $(A, B)$  est exactement contrôlable en tout temps  $\tau > 0$ . Ce résultat classique est une conséquence du résultat (précédemment utilisé) de contrôlabilité exacte en tout temps pour l'équation de Schrödinger. On réfère par exemple à [TW09, Proposition 7.5.1] ou [Leb92, Section 5]). Par conséquent, nous sommes dans les conditions d'application de Théorème 3.4.4 et nous concluons que (3.6.4) est vérifiée.  $\square$

Un autre problème soulevé est l'étude des problèmes de contrôle avec des opérateurs de contrôle non bornés et des contrôles  $L^\infty$  en temps. En effet le résultat de contrôlabilité exacte en tout temps avec des contrôles  $L^2$  n'implique plus dans le cas des opérateurs de contrôle non bornés le résultat de contrôlabilité exacte pour des contrôles  $L^\infty$ .

Lors de cette étude, nous ne sommes pas parvenus à exhiber des exemples d'application du Théorème 3.4.4 et du Corollaire 3.4.7. En effet vérifier la propriété  $R_t^\infty = X$  pour tout  $t > 0$  est un problème ouvert même pour des cas simples tels que le système de Schrödinger unidimensionnel avec un contrôle frontière de type Dirichlet.

Mis à part les problèmes théoriques soulevés, l'analyse numérique du problème de contrôle en temps optimal pour des systèmes de dimension infinie est essentiellement un champ de recherche ouvert.

Une voie intéressante pour couvrir ce champ pourrait consister en l'adaptation des résultats pour l'approximation des contrôles de norme optimale au cas du temps optimal. Pour ces résultats on fait référence à Ervedoza et Zuazua, [EZ12] ainsi qu'aux travaux cités dans cet article.





## Deuxième partie

# Nage à bas nombre de Reynolds





# Table des matières

---

<b>4</b>	<b>Introduction</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Modélisation</b>	<b>69</b>
5.1	Équations du fluide . . . . .	70
5.2	Équations du nageur . . . . .	71
5.3	Passage en variables adimensionnées . . . . .	75
5.4	Le cas des micro-organismes . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Rappels sur le problème de Stokes</b>	<b>81</b>
6.1	Équations de Stokes en domaine extérieur . . . . .	81
6.2	Changement de variables . . . . .	82
6.3	Solution en coordonnées sphériques . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Le problème de contrôle</b>	<b>93</b>
7.1	Modélisation . . . . .	94
7.2	Signature du nageur . . . . .	103
7.3	Problème de contrôle . . . . .	107
7.4	Résultats de contrôlabilité . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Cas de la nage en symétrie axiale</b>	<b>119</b>
8.1	Résultats de contrôlabilité . . . . .	119
8.2	Problème approché et contrôle en temps optimal . . . . .	126
8.3	Expérimentation numérique . . . . .	131
	<b>Conclusion et perspectives sur le problème de la nage</b>	<b>141</b>

---



# Chapitre 4

## Introduction

La compréhension du mouvement des objets déformables (tels que les micro-organismes et les micro ou nano-robots) dans un fluide à bas nombre de Reynolds est un problème difficilement appréhendable de manière intuitive. En effet à cette taille, les forces inertielles du nageur sont négligeables et son déplacement est seulement dû aux forces de viscosité. En particulier, un résultat non intuitif a été mis en évidence expérimentalement par Taylor dans les années 50 puis montré par Purcell [Pur77] : si la déformation est périodique et réversible en temps (i.e. on parcourt la même séquence de déformations lorsque l'on inverse le temps), alors le nageur ne se déplace pas dans le fluide. Ce résultat est connu sous le nom du théorème de la coquille Saint-Jacques. Les différents états de déformation de la coquille Saint-Jacques sont décrits par un seul degré de liberté (l'angle entre les deux coquilles, compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ ) et par conséquent, la coquille Saint-Jacques n'a pas d'autre choix que de faire des mouvements réversibles en temps. Nous donnerons par la suite un énoncé rigoureux de ce théorème et nous donnerons des exemples de nageurs qui ne rentrent pas dans le cadre de ce théorème.

Par ailleurs, les nageurs que nous rencontrons habituellement dans la nature (tels que les poissons) nagent dans un fluide à plus haut nombre de Reynolds et dans ce cas, les forces inertielles ne sont plus négligeables devant les forces de viscosité.

Parmi les contributions originelles modélisant et analysant la nage à bas nombre de Reynolds, nous mentionnons les travaux de Taylor [Tay51], Lighthill [Lig52, Lig75], Purcell [Pur77] et Childress [Chi81]. Dans d'autres travaux plus récents tels que ceux de Shapere et Wilczek [SW89a], San Martín, Takahashi et Tucsnaak [SMTT07], Alouges, DeSimone et Lefebvre [ADL08], Alouges, DeSimone et Heltai [ADH11] et Lauga et Michelin [ML10], la nage a été considérée comme un problème de contrôle.

L'objectif de ce chapitre est de donner une approche mathématique rigoureuse à l'analyse et au contrôle d'un système modélisant la nage à bas nombre de Reynolds. L'idée est la suivante, afin de se mouvoir dans le fluide, le nageur se déforme avec une déformation  $X$ . Cette déformation engendre un mouvement du fluide autour du nageur créant ainsi une force visqueuse susceptible de pousser le nageur.

Plus précisément, les questions étudiées dans ce chapitre sont :

1. Contrôlabilité :

*Étant donné une position initiale et finale, est-il possible de trouver une déformation  $X$  telle que le nageur se déplace de la position initiale vers la position finale ?*

2. Contrôlabilité en temps optimal :

*Parmi toutes les déformations  $X$  solutions du problème de contrôle, en existe-t-il une qui réalise le déplacement en un temps minimal ?*

## 3. Suivi de trajectoire :

*Étant donné une trajectoire (prescrite dans l'espace des déformations rigides) pour la position du nageur, est-il possible de trouver une suite de déformations  $X$  telle qu'en tout temps, la position du nageur reste arbitrairement proche de la trajectoire prescrite ?*

L'approche du problème de la nage à bas nombre de Reynolds a été étudiée à notre connaissance dans les travaux de San Martín, Takahashi et Tucsnak [SMTT07] et Allouges, DeSimone et Heltai [ADH11]. Dans [SMTT07], le nageur est une boule tridimensionnelle et les contrôles sont des champs de vitesse tangentiels à la frontière du nageur. Ainsi la forme du nageur reste inchangée au cours du temps. Inversement, dans [ADH11] les auteurs considèrent un nageur formé par la réunion de trois boules. Ce nageur a été introduit par Najafi et Golestanian [NG05]. Dans ce cas, les déformations du nageur sont régies par les distances relatives entre ces trois sphères.

Les résultats principaux de cette thèse concernant le domaine de la nage à bas nombre de Reynolds sont les Théorèmes 7.4.1 et 7.4.2. Ces résultats indiquent que si la forme initiale du nageur est difféomorphe à la sphère unité, alors pour presque toute forme et presque toute déformations basiques que le nageur peut effectuer, la réponse aux trois questions données précédemment est positive. De plus, nous donnons l'exemple d'un nageur sphérique muni de quatre mouvements basiques qui répond affirmativement aux trois questions posées.

Cette partie est organisée comme suit. Dans un premier temps, nous allons donner la modélisation physique du problème de la nage. Après cela, nous ferons quelques rappels sur le problème de Stokes stationnaire posé en domaine extérieur. Le problème étant précisément posé et les outils nécessaires à sa résolution étant définis, nous donnerons une réponse aux trois questions précédentes. La réponse étant positive, nous examinerons le cas d'un nageur à symétrie axiale. Nous verrons que dans ce cas, le nageur ne peut se mouvoir que dans la direction de son axe de symétrie. Pour ce nageur, nous considérerons le problème de la nage en temps optimal. Pour finir, nous donnerons une résolution numérique du problème de contrôle en temps optimal pour le nageur à symétrie axiale introduit dans le chapitre précédent.

L'ensemble de ce travail reprend les articles écrits en collaboration avec J.-F. Scheid et M. Tucsnak, [LST] et avec A. Munnier, [LM12].

# Chapitre 5

## Modélisation

### Sommaire

---

5.1	Équations du fluide . . . . .	70
5.2	Équations du nageur . . . . .	71
5.3	Passage en variables adimensionnées . . . . .	75
5.4	Le cas des micro-organismes . . . . .	78

---

Dans ce chapitre, nous allons donner la modélisation physique du problème. Le nageur est représenté à tout instant par un domaine  $B^\dagger(t)$  de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que le nageur est seul dans le fluide et que le fluide occupe le reste de l'espace  $\mathbb{R}^3$  entier, c'est-à-dire que le domaine occupé par le fluide est l'ensemble  $F^\dagger(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^\dagger(t)}$ . Le nageur est sujet à une déformation  $X$ , dépendante du temps, qui est l'entrée du problème de contrôle. Cette déformation va induire un champ de vitesse dans le fluide qui entoure le nageur. Ce champ de vitesse crée une force qui s'applique sur le nageur, cette force va déplacer le nageur via une transformation rigide. Autrement dit, cette force va translater et tourner le nageur, la translation est donnée par le déplacement de son centre de masse  $\mathbf{h}(t)$  et la rotation est donnée par une matrice de rotation  $R(t)$ . Les grandeurs  $\mathbf{h}$  et  $R$  sont les variables que l'on souhaite contrôler.

Les équations reliant des grandeurs à la déformation sont obtenues par un couplage entre les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement du fluide, et le principe fondamental de la dynamique, qui décrit le mouvement rigide du nageur. Ce couplage est fait par le biais de la condition limite imposée aux équations de Navier-Stokes sur la frontière du nageur.

Les notations récurrentes utilisées dans ce chapitre ainsi que dans l'ensemble de cette partie sont les suivantes :

- $\mathbf{e}^\dagger = (\mathbf{e}_1^\dagger, \mathbf{e}_2^\dagger, \mathbf{e}_3^\dagger)$  est un référentiel fixe de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est un référentiel de  $\mathbb{R}^3$ , dépendant du temps, *attaché* au nageur. La matrice de passage entre ces deux référentiels est la matrice de rotation  $R(t)$ .
- le couple  $(\mathbf{h}(t), R(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  décrit la position, dans le repère  $\mathbf{e}^\dagger$  du nageur à l'instant  $t$  ;
- $B$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ , ce domaine sera la forme de référence du nageur ;
- $X(t, \cdot)$  est la déformation imposée au nageur ;
- $B(t) = X(t, \cdot)(B)$  est le domaine occupé par le nageur à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathbf{e}$ ,  $\Sigma(t) = \partial B(t)$  est la frontière du nageur dans le référentiel  $\mathbf{e}$  et  $F(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(t)}$  est le domaine fluide dans le référentiel  $\mathbf{e}$  ;
- la déformation du nageur dans le référentiel fixe galiléen est notée  $X^\dagger$ , cette défor-

mation se déduit de  $X$ ,  $\mathbf{h}$  et  $R$  par la relation :

$$X^\dagger(t, \cdot) = R(t)X(t) + \mathbf{h}(t);$$

- dans le référentiel fixe  $\mathbf{e}^\dagger$ , on note  $B^\dagger(t) = X^\dagger(t, \cdot)(B)$  le domaine occupé par le nageur,  $\Sigma^\dagger(t) = \partial B^\dagger(t)$  sa frontière et  $F^\dagger(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^\dagger(t)}$  le domaine occupé par le fluide.

## 5.1 Équations du fluide

Le fluide est décrit par sa masse volumique,  $\varrho_f > 0$  et sa viscosité,  $\mu > 0$ .

Le vecteur de pesanteur est noté :  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ .

A tout instant  $t$ , on définit dans le domaine fluide la vitesse :  $\mathbf{u}^\dagger$  et la pression :  $p^\dagger$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on a :

- $\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot) : F^\dagger(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;
- $p^\dagger(t, \cdot) : F^\dagger(t) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Le mouvement du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes, plus précisément, on suppose que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $x \in F^\dagger(t)$ , on a :

$$\varrho_f \left( \partial_t \mathbf{u}^\dagger(t, x) + (\mathbf{u}^\dagger(t, x) \cdot \nabla_x) \mathbf{u}^\dagger(t, x) \right) - \mu \Delta_x \mathbf{u}^\dagger(t, x) + \nabla_x p^\dagger(t, x) = \varrho_f \mathbf{g}, \quad (5.1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) = 0. \quad (5.1.1b)$$

On munit ces équations de conditions aux limites pour tout  $t \geq 0$  :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = \mathbf{0}. \quad (5.1.2)$$

Cette condition limite signifie que le fluide est au repos à l'infini (la limite étant prise dans un sens faible tel que décrit ultérieurement).

$$\mathbf{u}^\dagger(t, x) = \mathbf{v}(t, x) \quad (x \in \Sigma^\dagger(t)), \quad (5.1.3)$$

où pour tous  $t \geq 0$  et  $x \in \overline{B^\dagger(t)}$ ,  $\mathbf{v}(t, x) = \dot{X}^\dagger(t) \circ X^\dagger(t)^{-1}$  est la vitesse de déformation du domaine. La condition limite (5.1.3) signifie que le fluide adhère au nageur.

Pour un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et un champ scalaire  $p$  assez réguliers, on note le tenseur de Cauchy :

$$\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}_3,$$

où l'on a noté :  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)$ .

On suppose dans ce chapitre que  $\mathbf{u}^\dagger$  et  $p^\dagger$  sont suffisamment réguliers pour que l'on puisse définir la trace de  $\sigma(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot))$  sur  $\Sigma^\dagger(t)$ . On suppose de plus que  $B^\dagger(t)$  est de classe  $C^2$  et on note  $\mathbf{n}^\dagger(t, \cdot)$  la normale rentrante à  $B^\dagger(t)$ .

On définit alors la force exercée par le fluide sur  $B^\dagger(t)$  :

$$\mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) = \int_{\Sigma^\dagger(t)} \sigma(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \mathbf{n}^\dagger(t, \cdot) \, d\Gamma \quad (5.1.4)$$

et le moment exercé par le fluide sur  $B^\dagger(t)$  par rapport au point  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbb{T}_{x_0}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) = \int_{\Sigma^\dagger(t)} (x - x_0) \wedge \sigma(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \mathbf{n}^\dagger \, d\Gamma. \quad (5.1.5)$$

On note que :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_0(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) &= \mathbf{h}(t) \wedge \mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \\ &\quad + \mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

## 5.2 Équations du nageur

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique au système composé du nageur.

Comme introduit précédemment, le domaine représentant le nageur est noté  $B^\dagger(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Il s'agit de l'image de  $B$  par un certain difféomorphisme  $X^\dagger(t, \cdot)$ .

On construit  $X^\dagger$  par la procédure décrite ci-dessous.

Pour tout  $t \geq 0$ , on se donne une application  $D : \mathbb{R}_+ \times B \rightarrow \mathbb{R}^3$  (différentiable par rapport à sa première variable,  $t$ ) telle que l'application  $X(t, \cdot)$  définie par :

$$X(t, x) = x + D(t, x) \quad ((t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B),$$

soit pour tout  $t \geq 0$  un difféomorphisme de  $B$  sur  $B(t) = X(t, \cdot)(B)$ .

La fonction  $D$  est l'entrée du système.

Pour  $t \geq 0$ , soient  $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^3$  et  $R(t) \in \text{SO}(3)$  les grandeurs représentant la position du centre de masse du nageur et son orientation dans  $\mathbb{R}^3$ . Ces deux grandeurs sont inconnues. On définit la déformation du nageur dans le référentiel fixe  $\mathbf{e}^\dagger$  par :

$$X^\dagger(t, \cdot) = R(t)X(t, \cdot) + \mathbf{h}(t).$$

Nous définissons le référentiel attaché au nageur comme suit : tout point de coordonnées  $x$  dans le référentiel  $\mathbf{e}(t)$  a pour coordonnées  $R(t)x + \mathbf{h}(t)$  dans le référentiel  $\mathbf{e}^\dagger$ .

Les différents domaines sont représentés sur la Figure 5.1.

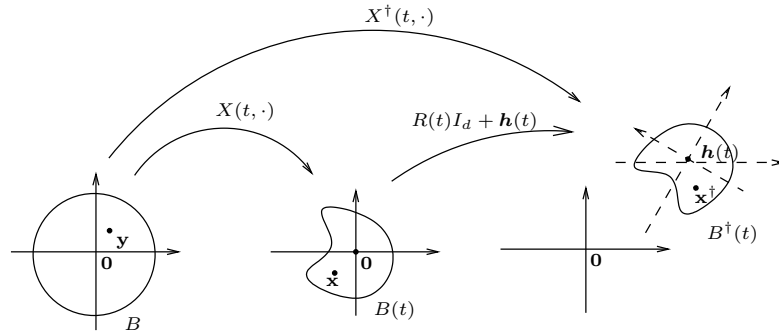


FIG. 5.1 – Représentation de  $X(t, \cdot)$ ,  $X^\dagger(t, \cdot)$ ,  $B(t)$  et  $B^\dagger(t)$ .

De plus, la déformation  $X^\dagger$  doit satisfaire les contraintes physiques suivantes :

1. Pour tout  $x \in B$ ,  $t \mapsto X^\dagger(t, x)$  est continue ;
2. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $X^\dagger(t, \cdot)$  est un difféomorphisme de  $B$  sur  $B^\dagger(t)$  ;
3. On suppose qu'il y a conservation locale de la masse, c'est-à-dire que si  $\rho_0 : B \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est la densité de masse du nageur dans sa forme de référence, alors à l'instant  $t$  la densité de masse  $\rho^\dagger(t, \cdot) : B^\dagger(t) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  du nageur dans sa configuration  $B^\dagger(t)$  est donnée par :

$$\rho^\dagger(t, \cdot) = \frac{\rho_0}{|\det(\text{Jac}X^\dagger(t, \cdot))|} \circ X^\dagger(t, \cdot)^{-1}. \quad (5.2.1)$$

Ainsi, la masse  $m_0$  du nageur est constante  $m_0 = \int_B \rho_0(x) dx = \int_{B^\dagger(t)} \rho^\dagger(t, x) dx$  ;

4. Sans force extérieure, la déformation  $X$  ne doit induire aucun déplacement rigide, c'est-à-dire que la quantité de mouvement et la quantité de mouvement angulaire



sont constants par rapport à la variable temporelle. Cette contrainte est appelée contrainte d'autopropulsion. Nous verrons dans la suite de cette partie qu'il n'est pas toujours nécessaire de l'imposer.

Si l'on suppose que  $t \mapsto R(t)$  est différentiable,  $R(t)$  étant une matrice de rotation, on a pour tout  $t \geq 0$  l'existence d'un vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$\dot{R}(t) = A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t), \quad (5.2.2)$$

Avec  $A(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ . Cette matrice est telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a  $A(\boldsymbol{\omega})x = \boldsymbol{\omega} \wedge x$ .

La vitesse d'un point  $x \in B^\dagger(t)$  du nageur est donnée par  $\mathbf{v}(t, x) = \dot{X}^\dagger(t, \cdot) \circ X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x)$ . Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= (\dot{R}(t)X(t, \cdot) + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t)\dot{D}(t, \cdot)) \circ X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x) \\ &= \dot{R}(t)R(t)^\top (X^\dagger(t, \cdot) - \mathbf{h}(t)) \circ X^\dagger(t, \cdot)^{-1} + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t)\dot{D}(t, \cdot) \circ X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x) \\ &= A(\boldsymbol{\omega}(t))(x - \mathbf{h}(t)) + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t)\dot{D}(t, X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

On suppose que  $\mathbf{h}(t)$  représente le centre de masse du nageur, c'est-à-dire que l'on a pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbf{h}(t) = \int_{B^\dagger(t)} x \rho^\dagger(t, x) dx.$$

La quantité de mouvement du nageur est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \int_{B^\dagger(t)} \mathbf{v}(t, x) \rho^\dagger(t, x) dx \\ &= A(\boldsymbol{\omega}(t)) \int_{B^\dagger(t)} (x - \mathbf{h}(t)) \rho^\dagger(t, x) dx \\ &\quad + m_0 \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t) \int_{B^\dagger(t)} \dot{D}(t, X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x)) \rho^\dagger(t, x) dx \\ &= m_0 \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t) \int_B \dot{D}(t, x) \rho_0(x) dx. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

La quantité de mouvement angulaire du nageur est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(t) &= \int_{B^\dagger(t)} x \wedge \mathbf{v}(t, x) \rho^\dagger(t, x) dx \\ &= \int_{B^\dagger(t)} \left( x \wedge (A(\boldsymbol{\omega}(t))(x - \mathbf{h}(t))) + x \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \right. \\ &\quad \left. + x \wedge \left( R(t)\dot{D}(t, X^\dagger(t, \cdot)^{-1}(x)) \right) \right) \rho^\dagger(t, x) dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(t) &= \int_{B^\dagger(t)} \left( (x - \mathbf{h}(t)) \wedge (\boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t))) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&\quad + \int_{B^\dagger(t)} \left( \mathbf{h}(t) \wedge (\boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t))) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&\quad + \int_{B^\dagger(t)} \left( (x - \mathbf{h}(t)) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&\quad + \int_{B(t)} \left( \mathbf{h}(t) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&\quad + \int_{B^\dagger(t)} \left( x \wedge (R(t)\dot{D}(t, X^{-1}(t, \cdot)(x))) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&= \int_{B^\dagger(t)} \left( (x - \mathbf{h}(t)) \wedge (\boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t))) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&\quad + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \\
&\quad + \int_{B^\dagger(t)} \left( x \wedge (R(t)\dot{D}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x))) \right) \rho^\dagger(t, x) \, dx \\
&= \int_B \left( R(t)X(t, x) \wedge (\boldsymbol{\omega}(t) \wedge R(t)X(t, x)) \right) \rho_0(x) \, dx \\
&\quad + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \\
&\quad + \int_B \left( X(t, x) \wedge R(t)\dot{D}(t, x) \right) \rho_0(x) \, dx
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(t) &= R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) \, dx + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t) \\
&\quad + R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge \dot{D}(t, x) \right) \rho_0(x) \, dx + \mathbf{h}(t) \wedge \int_B \dot{D}(t, x) \rho_0(x) \, dx. \quad (5.2.5)
\end{aligned}$$

Afin d'assurer les conditions d'autopropulsion, on impose que  $D$  satisfait :

$$\int_B \dot{D}(t, x) \rho_0(x) \, dx = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_B X(t, x) \wedge \dot{D}(t, x) \rho_0(x) \, dx = \mathbf{0}. \quad (5.2.6)$$

Ainsi, (5.2.4) et (5.2.5) deviennent :

$$\mathfrak{p}(t) = m_0 \dot{\mathbf{h}}(t), \quad (5.2.7)$$

$$\mathfrak{I}(t) = R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) \, dx + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \dot{\mathbf{h}}(t). \quad (5.2.8)$$

On obtient alors :

$$\dot{\mathfrak{p}}(t) = m_0 \ddot{\mathbf{h}}(t). \quad (5.2.9)$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{i}}(t) &= A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \\
&+ R(t) \left( \int_B \left( \dot{D}(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_B \left( X(t, x) \wedge ((R(t)^\top A(\boldsymbol{\omega}(t))^\top \boldsymbol{\omega}(t) + R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \dot{D}(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \right) \\
&+ m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \ddot{\mathbf{h}}(t)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{i}}(t) &= A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \\
&\quad + R(t) \int_B \left( X(t, x) \wedge (R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \\
&\quad + R(t) \int_B \left( \dot{D}(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge X(t, x)) \right. \\
&\quad \quad \left. + X(t, x) \wedge (R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \dot{D}(t, x)) \right) \rho_0(x) dx \\
&\quad + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \ddot{\mathbf{h}}(t). \tag{5.2.10}
\end{aligned}$$

On pose  $J(t) \in M_3(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$  :

$$\int_B \left( X(t, x) \wedge (z \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx = J(t)z, \tag{5.2.11}$$

Cette matrice s'écrit aussi sous la forme  $J(t) = \int_B |X(t, x)|^2 I_3 - X(t, x) \otimes X(t, x) dx$ .

On remarque alors que (sous les conditions d'autopropulsion) pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$  :

$$2 \int_B \left( \dot{D}(t, x) \wedge (z \wedge X(t, x)) \right) \rho_0(x) dx = \dot{J}(t)z.$$

De plus en développant le produit vectoriel, il apparaît que  $J(t)$  correspond bien à la matrice d'inertie du nageur à l'instant  $t$ .

Ainsi, (5.2.10) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{i}}(t) &= A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)J(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + R(t)J(t)R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + R(t)\dot{J}(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \\
&\quad + m_0 \mathbf{h}(t) \wedge \ddot{\mathbf{h}}(t). \tag{5.2.12}
\end{aligned}$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\mathbf{i}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \\ \mathbb{T}_0(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \end{pmatrix} + m_0 \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h}(t) \wedge \mathbf{g} \end{pmatrix}. \tag{5.2.13}$$

En écrivant le principe fondamental de la dynamique par rapport au point  $\mathbf{h}(t)$ , il est

évident que (5.2.13) se récrit :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_0 \ddot{\mathbf{h}}(t) \\ A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)J(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + R(t)J(t)R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + R(t)\dot{J}(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \\ \mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_0 \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

### 5.3 Passage en variables adimensionnées

Le système dynamique considéré est alors formé des équations (5.1.1a)–(5.1.3), (5.2.2) et (5.2.14). Dans cette sous section, nous allons faire apparaître les grandeurs adimensionnées décrivant le problème.

On se donne les grandeurs caractéristiques du problème :

1.  $G$ , la norme de  $\mathbf{g}$  ;
2.  $L > 0$ , la taille caractéristique du nageur ;
3.  $U > 0$ , la vitesse caractéristique du nageur ;
4.  $T > 0$ , un temps caractéristique ;
5.  $P \neq 0$ , une pression caractéristique.

On définit alors

– de nouvelles variables :

$$\tilde{x} = \frac{1}{L}x \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \frac{1}{T}t,$$

– de nouveaux opérateurs :

$$\tilde{\nabla} = L\nabla, \quad \tilde{\text{div}} = L \text{div}, \quad \tilde{\Delta} = L^2\Delta \quad \text{et} \quad \partial_{\tilde{t}} = T\partial_t,$$

– de nouveaux domaines :

$$\tilde{B}(\tilde{t}) = \frac{1}{L}B(t) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(\tilde{t}) = \frac{1}{L}F(t),$$

– de nouvelles inconnues :

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{L}\mathbf{h}, \quad \tilde{R} = R, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = T\boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\mathbf{u}}^\dagger = \frac{1}{U}\mathbf{u}^\dagger \quad \text{et} \quad \tilde{p}^\dagger = \frac{1}{P}p^\dagger,$$

– la nouvelle force de pesanteur :

$$\tilde{\mathbf{g}} = \frac{1}{G}\mathbf{g},$$

– la nouvelle entrée  $\tilde{D} : \mathbb{R}_+ \times \tilde{B}(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par la relation :

$$\tilde{D}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{L}D(t, x).$$

On définit alors  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X}^\dagger$  deux applications de  $\tilde{B}_0$  (avec  $\tilde{B}_0 = \frac{1}{L}B$ ) dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\tilde{X}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{L}X(t, x) \quad \text{et} \quad \tilde{X}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{L}X^\dagger(t, x).$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation de Navier-Stokes (5.1.1) devient pour tout  $\tilde{t} \in \mathbb{R}_+$  et  $\tilde{x} \in \tilde{F}(\tilde{t})$  :

$$\begin{aligned} \varrho_f \left( \frac{U}{T} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) \right) - \mu \frac{U}{L^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \frac{P}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \varrho_f G \tilde{\mathbf{g}}, \\ \frac{U}{L} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) &= 0, \end{aligned}$$

ainsi :

$$\frac{\varrho_f L^2}{\mu T} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger + \frac{\varrho_f L U}{\mu} (\tilde{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}}^\dagger - \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger + \frac{L P}{\mu U} \tilde{\nabla} \tilde{p}^\dagger = \frac{\varrho_f G L^2}{\mu U} \tilde{\mathbf{g}}. \quad (5.3.1a)$$

$$\tilde{\operatorname{div}} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger = 0. \quad (5.3.1b)$$

On introduit alors les grandeurs caractéristiques suivantes :

- un paramètre temporel :  $\tau = \frac{TU}{L}$  ;
- le nombre de Froude :  $F = \frac{U^2}{LG}$  ;
- le nombre de Reynolds :  $Re = \frac{\varrho_f U L}{\mu}$ .

De plus  $p^\dagger$  étant un multiplicateur pour la contrainte  $\operatorname{div} \mathbf{u}^\dagger = 0$ ,  $p^\dagger$  peut être défini à une constante multiplicative près.

On pose alors  $P = \frac{\mu U}{L}$  et avec ces nouveaux paramètres, (5.3.1a) se récrit :

$$Re(\tau^{-1} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger + (\tilde{\mathbf{u}}^\dagger \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}}^\dagger) - \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger + \tilde{\nabla} \tilde{p}^\dagger = Re F^{-1} \tilde{\mathbf{g}}.$$

La condition limite (5.1.2) s'écrit :

$$\lim_{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) = \mathbf{0}. \quad (5.3.2)$$

La condition limite (5.1.3) s'écrit pour tous  $\tilde{t} \in \mathbb{R}_+$  et  $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}(\tilde{t})$  :

$$\tau \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) = A(\tilde{\omega}(\tilde{t}))(\tilde{x} - \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})) + \frac{d\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} + \tilde{R}(\tilde{t}) \partial_{\tilde{t}} \tilde{D}(\tilde{t}, \tilde{X}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)^{-1}(\tilde{x})). \quad (5.3.3)$$

Concernant l'adimensionnement du fluide, on pose  $\varrho_s = \frac{m_0}{L^3}$  et on définit la nouvelle densité de masse du nageur  $\tilde{\rho}^\dagger$  par :

$$\tilde{\rho}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\varrho_s} \rho^\dagger(t, x).$$

De la définition de la matrice d'inertie (5.2.11), on définit de même la matrice d'inertie adimensionnée,  $\tilde{J}(\tilde{t})$  :

$$\tilde{J}(\tilde{t})z = \int_{\tilde{B}_0} (\tilde{X}(\tilde{t}, \tilde{x}) \wedge z \wedge \tilde{X}(\tilde{t}, \tilde{x})) \tilde{\rho}_0(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (5.3.4)$$

Ainsi, nous avons,  $\tilde{J}(\tilde{t}) = \frac{1}{\varrho_s L^5} J(t)$ .

On rappelle que le tenseur de Cauchy est défini par :

$$\sigma(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot))(x) = \mu(\nabla \mathbf{u}^\dagger(t, x) + \nabla \mathbf{u}^\dagger(t, x)^\top) + p^\dagger(t, x) I_3.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot))(x) &= \frac{\mu U}{L} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x})^\top \right) + P \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) I_3 \\ &= \frac{\mu U}{L} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x})^\top + \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) I_3 \right).\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la définition de la force et du moment, (5.1.4) et (5.1.5), on définit :

$$\tilde{\mathbb{F}}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) = \int_{\partial \tilde{B}^\dagger(\tilde{t})} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x})^\top + \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) I_3 \right) \tilde{\mathbf{n}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) d\tilde{\Gamma}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \\ = \int_{\partial \tilde{B}^\dagger(\tilde{t})} (\tilde{x} - \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})) \wedge \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x})^\top + \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) I_3 \right) \tilde{\mathbf{n}}^\dagger(\tilde{t}, \tilde{x}) d\tilde{\Gamma},\end{aligned}$$

avec  $\tilde{\mathbf{n}}^\dagger$  la normale rentrante à  $\tilde{B}^\dagger(\tilde{t})$ .

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) &= \mu U L \tilde{\mathbb{F}}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \\ \text{et } \mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) &= \mu U L^2 \tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)).\end{aligned}$$

Le principe fondamental de la dynamique (5.2.14) se récrit :

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_s L^4}{T^2} \left( \begin{array}{c} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} \\ A(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t})) \tilde{R}(\tilde{t}) \tilde{J}(\tilde{t}) \tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) + \tilde{R}(\tilde{t}) \tilde{J}(\tilde{t}) \tilde{R}(\tilde{t})^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} + \tilde{R}(\tilde{t}) \frac{d\tilde{J}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) \end{array} \right) \\ = \mu U L \left( \begin{array}{c} \tilde{\mathbb{F}}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \\ \tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \end{array} \right) + \varrho_s L^3 G \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_s L^3}{\mu U T^2} \left( \begin{array}{c} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} \\ A(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t})) \tilde{R}(\tilde{t}) \tilde{J}(\tilde{t}) \tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) + \tilde{R}(\tilde{t}) \tilde{J}(\tilde{t}) \tilde{R}(\tilde{t})^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} + \tilde{R}(\tilde{t}) \frac{d\tilde{J}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) \end{array} \right) \\ = \left( \begin{array}{c} \tilde{\mathbb{F}}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \\ \tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \end{array} \right) + \frac{\varrho_s L^2 G}{\mu U} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On définit alors le contraste de densité de masse :

$$C = \frac{\varrho_s}{\varrho_f}.$$

Ainsi, (5.2.14) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{CRe}{\tau^2} \left( \begin{array}{c} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} \\ A(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}))\tilde{R}(\tilde{t})\tilde{J}(\tilde{t})\tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) + \tilde{R}(\tilde{t})\tilde{J}(\tilde{t})\tilde{R}(\tilde{t})^\top \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} + \tilde{R}(\tilde{t})\frac{d\tilde{J}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\tilde{R}(\tilde{t})^\top \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}) \end{array} \right) \\ = \left( \begin{array}{c} \tilde{\mathbb{F}}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \\ \tilde{\mathbb{T}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\tilde{t})}(\tilde{B}^\dagger(\tilde{t}))(\tilde{\mathbf{u}}^\dagger(\tilde{t}, \cdot), \tilde{p}^\dagger(\tilde{t}, \cdot)) \end{array} \right) + \frac{CRe}{F} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.3.5) \end{aligned}$$

Finalement, en variables adimensionnées, la relation (5.2.2) devient :

$$\frac{d\tilde{R}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = A(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{t}))\tilde{R}(\tilde{t}). \quad (5.3.6)$$

Ainsi, en variables adimensionnées, le système d'équations décrivant la nage est donné par (5.3.1)–(5.3.6). C'est-à-dire pour tout  $t \geq 0$ , on a, en omettant les  $\tilde{\phantom{x}}$  :

$$Re \left( \tau^{-1} \partial_t \mathbf{u}^\dagger(t, x) + (\mathbf{u}^\dagger(t, x) \cdot \nabla) \mathbf{u}^\dagger(t, x) \right) - \Delta \mathbf{u}^\dagger(t, x) + \nabla p^\dagger(t, x) = \frac{Re}{F} \mathbf{g}, \quad (5.3.7a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = 0, \quad (5.3.7b)$$

pour tout  $x \in F^\dagger(t)$  et :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = \mathbf{0}, \quad (5.3.8)$$

$$\tau \mathbf{u}^\dagger(t, x) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t)) + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t) \dot{D}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x)) \quad (x \in \Sigma^\dagger(t)), \quad (5.3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{CRe}{\tau^2} \left( \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{h}}(t) \\ A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)J(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + R(t)J(t)R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + R(t)J(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \end{array} \right) \\ = \left( \begin{array}{c} \mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \\ \mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) \end{array} \right) + \frac{CRe}{F} \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.3.10) \end{aligned}$$

$$\dot{R}(t) = A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t). \quad (5.3.11)$$

## 5.4 Le cas des micro-organismes

Dans le cas de la nage, on a  $\varrho_f \simeq \varrho_s$ . Nous donnons dans le tableau 5.1 les différents ordres de grandeur des paramètres physiques pour certains types d'organismes. Ce tableau est tiré de la Table 1.1 du livre de Childress [Chi81].

**Remarque 5.4.1** (Remarque sur le tableau 5.1). *Dans le cas de la bactérie, nous ne sommes plus dans les conditions d'application des équations de Navier-Stokes. En effet, à cette échelle, le mouvement du fluide est plus proche d'un mouvement brownien que de celui décrit par les équations de Navier-Stokes.*

L'objet de l'étude concerne la nage de micro-organismes. Typiquement, nous nous plaçons dans le cas du protozoaire ou du spermatozoïde. Les ordres de grandeurs retenus

	$L$ (cm)	$U$ (cm/s)	$T$ (s)	$Re$	$\tau$
Bactérie	$10^{-5}$	$10^{-2} - 10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-1} - 10^{-2}$
Spermatozoïde	$10^{-2} - 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2} - 10^{-3}$	$10^{-1} - 10^{-2}$
Protozoaire cilié	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	1
Petite guêpe	0,06	$10^2$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	15	4
sauterelle	4	400	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^4$	5
Pigeon	25	$10^2 - 10^3$	0,2	$10^5$	4
Poisson moyen	50	$10^2$	0,5	$5 \cdot 10^4$	1

TAB. 5.1 – Estimation des paramètres  $\tau$  et  $Re$  pour différents types d'organismes en prenant  $\frac{\mu}{\rho_f} \simeq 0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$  pour l'air et  $\frac{\mu}{\rho_f} \simeq 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$  pour l'eau.

sont donc  $C \simeq 1$ ,  $F \simeq 1$ ,  $Re \simeq 0$  et  $\tau \simeq 1$  en passant à la limite formelle  $Re \rightarrow 0$ , le système d'équations (5.3.7)–(5.3.11) s'écrit pour tout  $t \geq 0$  :

$$-\Delta \mathbf{u}^\dagger(t, x) + \nabla p^\dagger(t, x) = \mathbf{0} \quad (x \in F^\dagger(t)), \quad (5.4.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = 0 \quad (x \in F^\dagger(t)), \quad (5.4.1b)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = \mathbf{0}, \quad (5.4.2)$$

$$\mathbf{u}^\dagger(t, x) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t)) + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t)\dot{D}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x)) \quad (x \in \Sigma^\dagger(t)), \quad (5.4.3)$$

$$\mathbb{F}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) = \mathbf{0}, \quad (5.4.4)$$

$$\mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(\mathbf{u}^\dagger(t, \cdot), p^\dagger(t, \cdot)) = \mathbf{0}, \quad (5.4.5)$$

$$\dot{R}(t) = A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t). \quad (5.4.6)$$

$\mathbb{F}$  et  $\mathbb{T}$  sont formellement définis par :

$$\mathbb{F}(B)(\mathbf{u}, p) = \int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_{x_0}(B)(\mathbf{u}, p) = \int_{\partial B} (x - x_0) \wedge \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\Gamma,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale rentrante à  $B$  et  $\sigma(\mathbf{u}, p) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) + pI_3$ .

Le système d'équations aux dérivées partielles (5.4.1) est appelé *équations de Stokes stationnaires*.

**Remarque 5.4.2.** Dans le cas  $Re \rightarrow +\infty$ , on choisit  $P = \frac{Re \mu U}{L}$  au lieu de  $P = \frac{\mu U}{L}$  et on obtient pour tout  $t \geq 0$  un système du type :

$$\partial_t \mathbf{u}^\dagger(t, x) + (\mathbf{u}^\dagger(t, x) \cdot \nabla) \mathbf{u}^\dagger(t, x) + \nabla p^\dagger(t, x) = \mathbf{g} \quad (x \in F^\dagger(t)),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = 0 \quad (x \in F^\dagger(t)),$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\dagger(t, x) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}^\dagger(t, x) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (x - \mathbf{h}(t)) + \dot{\mathbf{h}}(t) + R(t)\dot{D}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x)) \quad (x \in \Sigma^\dagger(t)),$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{h}}(t) \\ A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)J(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) + R(t)J(t)R(t)^\top \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) + R(t)\dot{J}(t)R(t)^\top \boldsymbol{\omega}(t) \end{array} \right) \\ & = \left( \begin{array}{c} \mathbb{F}(B^\dagger(t))(p^\dagger(t, \cdot)) \\ \mathbb{T}_{\mathbf{h}(t)}(B^\dagger(t))(p^\dagger(t, \cdot)) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{array} \right), \end{aligned}$$



$$\dot{R}(t) = A(\boldsymbol{\omega}(t))R(t),$$

avec  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{T}$  définis par :

$$\mathbb{F}(B)(p) = \int_{\partial B} p \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_{x_0} = \int_{\partial B} p(x - x_0) \wedge \mathbf{n} \, d\Gamma,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale rentrante à  $B$ .

# Chapitre 6

## Rappels sur le problème de Stokes

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Équations de Stokes en domaine extérieur</b>	<b>81</b>
<b>6.2</b>	<b>Changement de variables</b>	<b>82</b>
6.2.1	Déformations du domaine	82
6.2.2	Problème de Stokes dans le domaine déformé	83
6.2.3	Régularité par rapport au domaine	84
<b>6.3</b>	<b>Solution en coordonnées sphériques</b>	<b>88</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons introduire un cadre fonctionnel pour les équations de Stokes en domaine extérieur. Nous définirons ensuite de manière rigoureuse la force exercée par le fluide sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ , nous donnerons ensuite des résultats de régularité sur la fonctionnelle introduite. Nous terminerons ce chapitre en donnant une forme explicite des solutions de Stokes en coordonnées sphériques dans le cas où le domaine et la condition limite sont réguliers.

Dans ce chapitre (uniquement)  $B$  est un domaine ouvert borné (quelconque) de  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$  et  $\Sigma = \partial B$ .

### 6.1 Équations de Stokes en domaine extérieur

Commençons par introduire le cadre fonctionnel adapté au problème de Stokes extérieur. On définit la fonction de poids  $\theta$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$  par  $\theta(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$ . On introduit alors les espaces de Sobolev à poids :

$$W_0^1(F) = \{u \in \mathcal{D}'(F), \theta^{-1}u \in L^2(F) \text{ et } \nabla u \in L^2(F)^3\},$$
$$\overset{\circ}{W}_0^1(F) = \{u \in W_0^1(F), \gamma_\Sigma(u) = 0\},$$

où  $\gamma_\Sigma : W_0^1(F) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)$  est l'opérateur de trace classique. La norme considérée sur  $W_0^1$  est définie par :

$$\|u\|_{W_0^1(F)} = \|\theta^{-1}u\|_{L^2(F)} + \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(F)}.$$

Le dual de  $\overset{\circ}{W}_0^1(F)$  est noté  $W_0^{-1}(F)$ .  $W_0^{-1}(F)$  est la complétion de  $\mathcal{D}'(F)$  pour la norme :

$$\|u\|_{W_0^{-1}(F)} = \sup_{v \in \overset{\circ}{W}_0^1(F)} \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{W_0^1(F)}}.$$

Pour le résultat suivant, on se réfère à Girault et Sequeira [GS91]. Un résultat analogue est aussi établi dans Galdi [Gal94]. Dans ce cadre, les espaces considérés sont les espaces de Sobolev homogènes. Ces espaces diffèrent légèrement de ceux introduits ici. En effet, le gradient de la fonction est de carré intégrable mais la fonction est localement intégrable. On fait référence à [LST] où ce cadre fonctionnel est utilisé.

**Théorème 6.1.1.** *On suppose que  $\Sigma$  est connexe et Lipschitzien.*

*Alors pour tout  $(\mathbf{f}, g, \mathbf{v}_0) \in W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(\Sigma)^3$ , il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, p) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  tel que :*

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } F, \quad (6.1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } F, \quad (6.1.1b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (6.1.1c)$$

la solution devant être prise au sens faible, c'est-à-dire :

$$\int_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_F p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{W_0^{-1}(F)^3 \times \dot{W}_0^1(F)^3} \quad (\forall \mathbf{v} \in \dot{W}_0^1(F)^3), \quad (6.1.2a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } F, \quad (6.1.2b)$$

$$\gamma_\Sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.1.2c)$$

De plus, il existe une constante  $C_F > 0$  (dépendant seulement de  $F$ ) telle que :

$$\|\mathbf{u}\|_{W_0^1(F)^3} + \|p\|_{L^2(F)} \leq C_F (\|\mathbf{f}\|_{W_0^{-1}(F)^3} + \|g\|_{L^2(F)} + \|\mathbf{v}_0\|_{H^{1/2}(\Sigma)^3}).$$

Nous allons maintenant construire l'opérateur de force. Dans ce but, on définit l'opérateur bilinéaire symétrique :

$$\begin{aligned} \Phi_F : W_0^1(F)^3 \times W_0^1(F)^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &\mapsto \int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{D}(\mathbf{u}_2) \, dx. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Si l'on suppose que  $(\mathbf{u}_1, p_1) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  est une solution du problème de Stokes homogène, c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 &= \mathbf{0} \quad \text{dans } F, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0 \quad \text{dans } F, \end{aligned}$$

et si l'on suppose de plus que  $\mathbf{u}_2$  est solution du problème de Stokes homogène avec comme condition limite sur  $\Sigma$ ,  $\mathbf{u}_2|_\Sigma = \mathbf{w}$  avec  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i$  ou  $\mathbf{w} = I_d \wedge \mathbf{e}_i$  ( $i \in \{1, \dots, 3\}$ ). Alors, si  $\mathbf{u}_1$  et  $\Sigma$  sont suffisamment réguliers, on obtient par la formule de Green :

$$\Phi_F(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_\Sigma \langle \mathbf{w}, \sigma(\mathbf{u}_1, p_1) \mathbf{n} \rangle \, d\Gamma, \quad (6.1.4)$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Sigma$  orientée vers l'extérieur de  $F$  et  $\sigma(\mathbf{u}_1, p_1) = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}_1) - p_1 I_3$ .

## 6.2 Changement de variables

### 6.2.1 Déformations du domaine

Commençons par définir un ensemble de déformations admissibles du domaine. Soit  $C_0^1(\mathbb{R}^3)$  la complétion de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  pour la norme :

$$\|u\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (|u(x)| + |\nabla u(x)|) \quad (u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)).$$

Il est aisé de vérifier que :

$$C_0^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^3), \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |u(x)| = 0 \text{ et } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\nabla u(x)| = 0 \right\}.$$

On définit alors l'ensemble  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  comme étant l'ensemble des champs de vecteur sur  $\mathbb{R}^3$  dont chaque composante est un élément de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)$ .

Nous définissons maintenant le sous-espace de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  :

$$\tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3) = \{ D \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3, I_d + D \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^3 \}.$$

**Lemme 6.2.1.**  $\tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3)$  est un ouvert de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$ .

*Démonstration.* Soit  $\eta \in \tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3)$ . On va montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  avec  $\|\xi\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} < \varepsilon$ , on a  $\eta + \xi \in \tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3)$ . On remarque qu'il suffit de supposer que  $\eta$  est l'identité de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, on a  $\eta + \xi = \eta \circ (I_d + \eta^{-1}\xi)$  et la constante de Lipschitz de  $\eta$  est minorée.

Nous devons vérifier qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  avec  $\|\xi\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} < \varepsilon$ , on a  $I_d + \xi \in \tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3)$ . Il est trivial que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, nous avons que  $I_d + \xi$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^3$ .

Il suffit donc de montrer la surjectivité de  $I_d + \xi$ . Dans ce but, on applique le Théorème du point fixe de Banach à la fonction  $f = y - \xi$  (définie sur  $\mathbb{R}^3$  et avec  $y \in \mathbb{R}^3$  donné) qui est contractante (pour  $\varepsilon < 1$ ) sur  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Définition 6.2.2.** On note  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  la composante connexe de  $\tilde{D}_0^1(\mathbb{R}^3)$  contenant la fonction identiquement nulle.

## 6.2.2 Problème de Stokes dans le domaine déformé

On note pour tout  $\xi \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\Upsilon = I_d + \xi$ ,  $J_\xi = \det(\nabla \Upsilon)$  et on définit les matrices  $A_\xi = (\nabla \Upsilon^\top \nabla \Upsilon)^{-1} J_\xi$  et  $B_\xi = (\nabla \Upsilon^\top)^{-1} J_\xi$ .

La proposition suivante est un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Stokes stationnaire posée sur le domaine  $\Upsilon(B)$  ramenée sur le domaine  $B$  par le changement de variable  $\Upsilon^{-1}$ . Ce résultat rendra plus aisé la démonstration du résultat de régularité sur la solution du problème de Stokes par rapport à la forme du domaine.

**Proposition 6.2.3.** *On suppose que  $\Sigma$  est continu et Lipschitzien.*

*Alors pour tout  $\xi \in D_0^1(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$  et tout  $(\mathbf{f}, g, \mathbf{v}_0) \in W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(F)^3$ , le problème :*

$$\int_F \nabla \mathbf{U}_\xi A_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx - \int_F P_\xi B_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{V} \rangle_{W_0^{-1}(F)^3 \times \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3} \quad (\forall \mathbf{V} \in \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3), \quad (6.2.1a)$$

$$B_\xi : \nabla \mathbf{U}_\xi = g \quad \text{dans } F, \quad (6.2.1b)$$

$$\gamma_\Sigma(\mathbf{U}_\xi) = \mathbf{v}_0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (6.2.1c)$$

*admet une unique solution  $(\mathbf{U}_\xi, P_\xi) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$ .*

*De plus, il existe une constante  $C_F(\xi) > 0$  dépendant seulement de  $F$  et  $\xi$  telle que :*

$$\|\mathbf{U}_\xi\|_{W_0^1(F)^3} + \|P_\xi\|_{L^2(F)} \leq C_F(\xi) (\|\mathbf{f}\|_{W_0^{-1}(F)^3} + \|g\|_{L^2(F)} + \|\mathbf{v}_0\|_{H^{1/2}(\Sigma^3)}).$$

*Démonstration.* Soient  $F_\xi = \Upsilon(F)$ ,  $\Sigma_\xi = \Upsilon(\Sigma)$ ,  $g_\xi = g \circ \Upsilon^{-1}/(J_\xi \circ \Upsilon^{-1})$  et  $\mathbf{v}_\xi = \mathbf{v}_0 \circ \Upsilon^{-1}$ . On note  $\mathbf{f}_\xi$  la distribution de  $W_0^{-1}(F_\xi)^3$  définie par :

$$\langle \mathbf{f}_\xi, \varphi \rangle_{W_0^{-1}(F_\xi)^3 \times \overset{\circ}{W}_0^1(F_\xi)^3} = \langle \mathbf{f}, \varphi \circ \Upsilon \rangle_{W_0^{-1}(F)^3 \times \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3} \quad (\forall \varphi \in \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3).$$

Cette définition fait sens car il existe deux constantes  $\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi) > 0$  telles que :

$$\alpha_1(\xi) \|\varphi\|_{W_0^1(F_\xi)^3} \leq \|\varphi \circ \Upsilon\|_{W_0^1(F)^3} \leq \alpha_2(\xi) \|\varphi\|_{W_0^1(F_\xi)^3} \quad (\forall \varphi \in W_0^1(F_\xi)^3).$$

On remarque que lorsque  $\mathbf{f}$  est régulière (c'est-à-dire, pouvant être identifiée à une fonction de  $L_{loc}^1(F)^3$ ) alors, on obtient  $\mathbf{f}_\xi = \frac{1}{J_\xi \circ \Upsilon^{-1}} \mathbf{f} \circ \Upsilon^{-1}$ .

Il est aisé de vérifier que les propriétés de  $\xi$  assurent que l'application :

$$\begin{aligned} R_\xi : W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(F)^3 &\rightarrow W_0^{-1}(F_\xi)^3 \times L^2(F_\xi) \times H^{1/2}(F_\xi)^3 \\ (\mathbf{f}, g, \mathbf{v}_0) &\mapsto (\mathbf{f}_\xi, g_\xi, \mathbf{v}_\xi), \end{aligned}$$

est un isomorphisme bicontinu.

Soit  $(\mathbf{u}_\xi, p_\xi) = S_\xi(\mathbf{f}_\xi, g_\xi, \mathbf{v}_\xi)$  l'unique solution du problème de Stokes (6.1.2) posé sur  $F_\xi$ . L'opérateur  $S_\xi$  est ainsi un isomorphisme bicontinu de  $W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(F)^3$  sur  $W_0^1(F_\xi)^3 \times L^2(F_\xi)$ .

L'opérateur :

$$\begin{aligned} H_\xi : W_0^1(F_\xi)^3 \times L^2(F_\xi) &\rightarrow W_0^1(F)^3 \times L^2(F) \\ (\mathbf{v}, q) &\mapsto (\mathbf{V}, Q) = (\mathbf{v} \circ \Upsilon, q \circ \Upsilon), \end{aligned}$$

est lui aussi un isomorphisme bicontinu.

La solution du problème (6.2.1) est donnée via l'opérateur  $T_\xi = H_\xi \circ S_\xi \circ R_\xi$  et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{f}, g, \mathbf{h}) & \xrightarrow{T_\xi} & (\mathbf{U}_\xi, P_\xi) \\ R_\xi \downarrow & & \uparrow H_\xi \\ (\mathbf{f}_\xi, g_\xi, \mathbf{h}_\xi) & \xrightarrow{S_\xi} & (\mathbf{u}_\xi, p_\xi) \end{array}$$

Ce qui achève la démonstration. □

### 6.2.3 Régularité par rapport au domaine

Dans ce paragraphe, nous allons donner un résultat de régularité qui sera indispensable pour la démonstration des théorèmes principaux. En effet, pour montrer les résultats de contrôlabilité, nous allons utiliser la méthode des crochets de Lie. Le calcul de ces crochets nécessite de calculer certaines dérivées. Or dans le cas de la nage, nous aurons besoin de dériver les termes correspondants à la force exercée par le fluide sur le nageur par rapport au domaine occupé par le nageur.

On se place ici dans le cas particulier où  $B$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ . Comme précédemment, on note  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$ ,  $\Sigma = \partial B$  et  $\mathbf{n}$  est la normal unitaire à  $\Sigma$  dirigée vers l'intérieur de  $B$ .

Pour tout  $\xi \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ , on pose  $\Upsilon = I_d + \xi$ ,  $B_\xi = \Upsilon(B)$ ,  $F_\xi = \Upsilon(F)$  et  $\Sigma_\xi = \Upsilon(\Sigma)$ .

Soit  $\mathbf{q} = (\xi, \mathcal{W}) \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2$ , avec  $\mathcal{W} = (W^1, W^2) \subset (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2$  et soit

$\mathbf{w}_\xi^i = W^i(\Upsilon^{-1})$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

Avec ces notations, on définit pour tout  $\mathbf{q} \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2$  :

$$\varphi(\mathbf{q}) = \int_{F_\xi} \mathbf{D}(\mathbf{u}_\mathbf{q}^1) : \mathbf{D}(\mathbf{u}_\mathbf{q}^2) \, dx, \quad (6.2.2)$$

où pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\mathbf{u}_\mathbf{q}^i$  est tel qu'il existe une fonction  $p_\mathbf{q}^i \in L^2(\mathcal{F}_\xi)$  de sorte que le couple  $(\mathbf{u}_\mathbf{q}^i, p_\mathbf{q}^i) \in W_0^1(\mathcal{F}_\xi)^3 \times L^2(\mathcal{F}_\xi)$  soit solution du problème de Stokes :

$$-\Delta \mathbf{u}_\mathbf{q}^i + \nabla p_\mathbf{q}^i = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{F}_\xi, \quad (6.2.3a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\mathbf{q}^i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}_\xi, \quad (6.2.3b)$$

$$\mathbf{u}_\mathbf{q}^i = \mathbf{w}_\xi^i \quad \text{sur } \Sigma_\xi. \quad (6.2.3c)$$

L'équation (6.2.3a) doit être considérée au sens faible, c'est-à-dire,

$$\int_{\mathcal{F}_\xi} \nabla \mathbf{u}_\mathbf{q}^i : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Sigma_\xi} p_\mathbf{q}^i \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{v} \in \overset{\circ}{W}_0^1(\mathcal{F}_\xi)^3). \quad (6.2.4)$$

On note que dans le cas où les données sont suffisamment régulières, on obtient en utilisant la formule de Green :

$$2\varphi(\mathbf{q}) = \int_{\Sigma_\xi} \sigma(\mathbf{u}_\mathbf{q}^1, p_\mathbf{q}^1) \mathbf{u}_\mathbf{q}^2 \mathbf{n} \, d\Gamma,$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Sigma_\xi$  dirigée vers l'intérieur de  $B_\xi$ . On remarque alors qu'avec un choix convenable de  $\mathbf{u}_\mathbf{q}^2$  ce terme est une composante de la force ou du moment de la force exercée par le fluide sur le domaine  $B_\xi$ .

Nous avons le résultat de régularité suivant sur  $\varphi$  :

**Lemme 6.2.4.** *L'application  $\varphi : D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est analytique.*

*Démonstration.* Par le difféomorphisme  $\Upsilon$ , on ramène les intégrales de (6.2.4) sur le domaine fixe  $F$ . Ainsi, on obtient :

$$\int_F \nabla \mathbf{U}_\mathbf{q}^i A_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx - \int_F P_\mathbf{q}^i B_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{V} \in (\overset{\circ}{W}_0^1(F))^3), \quad (6.2.5a)$$

avec  $\mathbf{U}_\mathbf{q}^i = \mathbf{u}_\mathbf{q}^i \circ \Upsilon$ ,  $P_\mathbf{q}^i = p_\mathbf{q}^i \circ \Upsilon$ ,  $J_\xi = \det(\nabla \Upsilon)$ ,  $A_\xi = (\nabla \Upsilon^\top \nabla \Upsilon)^{-1} J_\xi$  et  $B_\xi = (\nabla \Upsilon^*)^{-1} J_\xi$ . (6.2.3b) et (6.2.3c) prennent la forme :

$$B_\xi : \nabla \mathbf{U}_\mathbf{q}^i = 0, \quad \text{dans } F, \quad (6.2.5b)$$

$$\mathbf{U}_\mathbf{q}^i = \mathbf{W}^i \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.2.5c)$$

On note  $C_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  l'espace de Banach des fonctions de classe  $C^0$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et à support compact. On définit  $\tilde{E}_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  comme étant l'adhérence de  $C_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  pour la norme sup.  $E_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$  est la composante connexe de l'ouvert  $\left\{ M \in \tilde{E}_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})), \det(I_d + M(x)) \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^3 \right\}$  contenant la fonction identiquement nulle.

Avec ces notations, l'application :

$$\begin{aligned} D_0^1(\mathbb{R}^3) &\rightarrow E_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \\ \xi &\mapsto A_\xi - I_3 \end{aligned}$$

est analytique. En effet, les applications :

$$\begin{aligned} D_0^1(\mathbb{R}^3) &\rightarrow E_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) & E_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) &\rightarrow E_0^0(\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) \\ \xi &\mapsto \nabla \Upsilon^\top \nabla \Upsilon - I_3 & A &\mapsto (I_3 + A)^{-1} - I_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_0^1(\mathbb{R}^3) &\rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^3) \\ \xi &\mapsto J_\xi - 1 \end{aligned}$$

sont analytiques.

Ainsi, pour  $i \in \{1, 2\}$ , on définit les fonctions analytiques

$$\begin{aligned} \Gamma^i : D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2 \times W_0^1(F)^3 \times L^2(F) &\rightarrow W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(\Sigma)^3 \\ (\mathbf{q}, \mathbf{U}, P) &\mapsto \begin{pmatrix} \langle A_\xi, \mathbf{U}, \cdot \rangle - \langle B_\xi, P, \cdot \rangle \\ B_\xi : \nabla \mathbf{U} \\ \gamma_\Sigma(\mathbf{U} - \mathbf{W}^i) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $\gamma_\Sigma : W^1(F)^3 \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)^3$  est l'opérateur de trace et

$$\begin{aligned} \langle A_\xi, \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle &= \int_F \nabla \mathbf{U} A_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx, \quad (\mathbf{U} \in (W^1(F))^3, \mathbf{V} \in W_0^1(F)^3), \\ \langle B_\xi, P, \mathbf{V} \rangle &= \int_F P B_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx, \quad (P \in L^2(F), \mathbf{V} \in W_0^1(F)^3). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème des fonctions implicites (dans sa version analytique entre espaces de Banach, c.f. [Whi65]) aux fonctions analytiques  $\Gamma^i$ .

On rappelle que l'on s'intéresse ici au seul résultat de régularité.

La Proposition 6.2.3, assure déjà que pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et tout  $\mathbf{q} \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2$ , il existe un unique couple  $(\mathbf{U}_\mathbf{q}^i, P_\mathbf{q}^i) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  tel que  $\Gamma^i(\mathbf{q}, \mathbf{U}_\mathbf{q}^i, P_\mathbf{q}^i) = \mathbf{0}$ .

Pour tout  $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ , la dérivée partielle  $\partial_{(\mathbf{U}, P)} \Gamma^i(\mathbf{q}, \mathbf{U}_\mathbf{q}^i, P_\mathbf{q}^i)$  peut être calculée.

Plus précisément, on a pour tout  $(\boldsymbol{\chi}, \pi) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(\Sigma)$ ,

$$\langle \partial_{(\mathbf{U}, P)} \Gamma^i(\mathbf{q}, \mathbf{U}_\mathbf{q}^i, P_\mathbf{q}^i), (\boldsymbol{\chi}, \pi) \rangle = \begin{pmatrix} \langle A_\xi, \boldsymbol{\chi}, \cdot \rangle - \langle B_\xi, \pi, \cdot \rangle \\ B_\xi : \nabla \boldsymbol{\chi} \\ \gamma_\Sigma(\boldsymbol{\chi}) \end{pmatrix}. \quad (6.2.6)$$

Soit  $(\mathbf{f}, \eta, \mathbf{g}) \in W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(F)^3$ , l'équation

$$\langle \partial_{(\mathbf{U}, P)} \Gamma^i(\mathbf{q}, \mathbf{U}_\mathbf{q}^i, P_\mathbf{q}^i), (\boldsymbol{\chi}, \pi) \rangle = (\mathbf{f}, \eta, \mathbf{g}),$$

est équivalente à :

$$\begin{aligned} \int_F \nabla \boldsymbol{\chi} A_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx - \int_F \pi B_\xi : \nabla \mathbf{V} \, dx &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{V} \rangle_{W_0^{-1}(F)^3 \times \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3} \quad (\forall \mathbf{V} \in \overset{\circ}{W}_0^1(F)^3), \\ B_\xi : \nabla \boldsymbol{\chi} &= \eta, \quad \text{dans } F, \\ \boldsymbol{\chi} &= \mathbf{g} \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 6.2.3, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution  $(\boldsymbol{\chi}, \pi)$  dans  $W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  telle que :

$$\|\boldsymbol{\chi}\|_{(W_0^1(F))^3} + \|\pi\|_{L^2(F)} \leq C(\xi) \left( \|\mathbf{f}\|_{W_0^{-1}(F)^3} + \|\eta\|_{L^2(F)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Sigma)^3} \right),$$

où la constante  $C(\xi) > 0$  ne dépend que de  $\xi$ .

Nous en déduisons que pour tout  $\mathbf{q} \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2$ ,  $\partial_{(\mathbf{U}, P)} \Gamma^i(\mathbf{q}, \mathbf{U}_{\mathbf{q}}^i, P_{\mathbf{q}}^i)$  est un isomorphisme continu de  $W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  sur  $W_0^{-1}(F)^3 \times L^2(F) \times H^{1/2}(\Sigma)^3$ .

Du théorème des fonctions implicites, dans sa version alanalytique, on déduit que les applications  $\mathbf{q} \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^2 \mapsto (\mathbf{U}_{\mathbf{q}}^i, P_{\mathbf{q}}^i) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  (pour  $i \in \{1, 2\}$ ) sont analytiques.

Pour achever la démonstration, il suffit d'observer que la fonction  $\varphi(\mathbf{q})$  introduite par (6.2.2) peut se récrire via un changement de variables comme :

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{1}{4} \int_F \left( \nabla \mathbf{U}_{\mathbf{q}}^1 \nabla \Upsilon^{-1} + (\nabla \mathbf{U}_{\mathbf{q}}^1 \nabla \Upsilon^{-1})^\top \right) : \left( \nabla \mathbf{U}_{\mathbf{q}}^2 \nabla \Upsilon^{-1} + (\nabla \mathbf{U}_{\mathbf{q}}^2 \nabla \Upsilon^{-1})^\top \right) J_\xi dx,$$

qui est clairement analytique par composition de fonctions analytiques.  $\square$

Nous donnons maintenant, une expression plus pratique pour le calcul de la dérivée dans le cas où les données sont suffisamment régulières.

**Lemme 6.2.5.** *Soit  $D \in (C_0^1(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3))^3$  et  $\mathbf{w}_0 \in C^\infty(\Sigma)^3$  (on rappelle que  $\Sigma$  est la frontière de la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  et que  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$ ).*

*Pour  $t \in \mathbb{R}$  suffisamment petit, on définit :*

$$\begin{aligned} X(t, x) &= x + tD(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3), \\ B(t) &= X(t, \cdot)(B), \quad \Sigma(t) = \partial B(t), \quad F(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(t)}, \\ \text{et } \mathbf{w}(t, x) &= \mathbf{w}_0(X(t, \cdot)^{-1}(x)) \quad (x \in \Sigma(t)). \end{aligned}$$

*On définit aussi  $(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot))$  et  $(\mathbf{u}^i(t, \cdot), p^i(t, \cdot)) \in W_0^1(F(t))^3 \times L^2(F(t))$  (pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ) les solutions du problème de Stokes (homogène) posé dans le domaine  $F(t)$  avec les conditions limites :*

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{w}(t, x) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^i(t, x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ x \wedge \mathbf{e}_{i-3} & \text{si } i \in \{4, 5, 6\}, \end{cases}$$

*pour tout  $x \in \Sigma(t)$ .*

*Nous avons alors pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$  :*

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{F(t)} \mathbf{D}(\mathbf{u}(t, x)) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i(t, x)) dx \right) \Big|_{t=0} = \int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}'_0(x)) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i(0, x)) dx,$$

*avec  $\mathbf{u}'_0(x) \in W_0^1(F)^3$  la solution du problème de Stokes (homogène) posé dans  $F$  muni de la condition limite :*

$$\mathbf{u}'_0(x) = -\nabla \mathbf{u}(0, x) D(x) \quad (x \in \Sigma). \quad (6.2.7)$$

*Démonstration.* Étant donné que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  suffisamment petit, le champ de vecteurs  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  est régulier (c.f. [Gal94, Theorem 4.1, ch. 5]), on obtient en utilisant [Sim91, Theorem 4], que la dérivée de  $t \mapsto \mathbf{u}(t, \cdot)$  en 0 est solution du problème de Stokes homogène posé dans le domaine  $F$  muni des conditions limites (6.2.7) (on note que cette condition limite est obtenue en différenciant l'équation  $\mathbf{u}(t, X(t, x)) = \mathbf{w}_0(x)$  ( $x \in \Sigma$ ) par rapport à  $t$  en  $t = 0$ ).

En utilisant le même argument que celui invoqué dans la démonstration du Lemme 6.3.1, nous obtenons :

$$2 \int_{F(t)} \mathbf{D}(\mathbf{u}(t, x)) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i(t, x)) dx = - \int_{\partial B(0, R)} \sigma(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot))(x) \tilde{\mathbf{u}}^i(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) d\Gamma.$$

La différentiation de cette relation par rapport à  $t$ , la linéarité de  $\sigma$  et la formule de Green, conduisent au résultat.  $\square$



### 6.3 Solution en coordonnées sphériques

Dans cette section, nous allons donner l'expression de la solution de l'équation de Stokes homogène en coordonnées sphériques. Pour plus de détails, on fait référence à Lamb [Lam93] et à Happel et Brenner [HB65].

On note  $(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$  les coordonnées sphériques. Elles sont définies de sorte que pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ , élément de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin(\theta) \cos(\phi), \\ x_2 &= \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \\ x_3 &= \rho \cos(\theta). \end{aligned}$$

En chaque point  $(\rho, \theta, \phi)$ , on définit le repère local  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  (c.f. Figure 6.1).

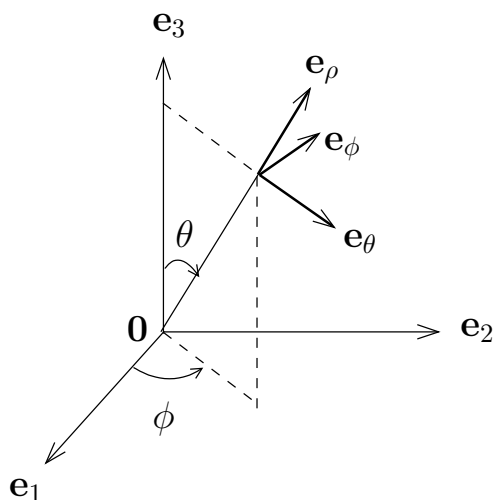


FIG. 6.1 – Coordonnées sphériques et repère local associé.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on nomme *harmonique sphérique rigide de degré  $-(n+1)$*  toute fonction ayant la forme :

$$(\rho, \theta, \phi) \mapsto \rho^{-(n+1)} \sum_{m=-n}^n \gamma_m Y_{n,m}(\cos \theta, \phi), \quad (6.3.1)$$

Avec  $\gamma_{-n}, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$  et  $Y_{n,m}$  les harmoniques sphériques de degré  $n \in \mathbb{N}$  sont d'ordre  $m \in \{-n, \dots, n\}$ . Pour un rappel sur les harmoniques sphériques, on fait référence à [Vla84].

Lamb a donné une décomposition de la solution  $(\mathbf{u}, p)$  de l'équation de Stokes autour d'un objet immergé de forme quelconque sous la forme suivante (c.f. [Lam93] et [HB65, Chapitre 3.2, p. 62]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \nabla \times (\chi_{-(n+1)} \rho \mathbf{e}_\rho) + \nabla \phi_{-(n+1)} - \frac{n-2}{2n(2n-1)} \rho^2 \nabla p_{-(n+1)} \right. \\ \left. + \frac{n+1}{n(2n-1)} p_{-(n+1)} \rho \mathbf{e}_\rho \right), \quad (6.3.2a) \end{aligned}$$

$$p = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{-(n+1)}, \quad (6.3.2b)$$

où  $p_{-(n+1)}$ ,  $\chi_{-(n+1)}$  et  $\phi_{-(n+1)}$  sont des harmoniques sphériques rigides de degré  $-(n+1)$ . Ces fonctions  $p_{-(n+1)}$ ,  $\chi_{-(n+1)}$  et  $\phi_{-(n+1)}$  (plus précisément les coefficients  $\gamma_m$  apparaissant dans (6.3.1)) sont à déterminer de sorte que les conditions limites sur la frontière de l'objet soient satisfaites.

Ceci peut être résolu en utilisant la méthodologie donnée par Brenner, [Bre64]. Nous donnons ici quelques détails sur cette méthodologie. On fait référence à cet article pour de plus amples détails.

Commençons par rappeler l'expression du gradient, de la divergence et du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \partial_\rho\varphi \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\partial_\theta\varphi \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\partial_\phi\varphi \mathbf{e}_\phi \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho^2}\partial_\rho(\rho^2\mathbf{u}_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{u}_\theta) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\partial_\phi\mathbf{u}_\phi, \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{u}_\phi) - \partial_\phi\mathbf{u}_\theta) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\mathbf{u}_\rho - \partial_\rho(\rho\mathbf{u}_\phi)\right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho\mathbf{u}_\theta) - \partial_\theta\mathbf{u}_\rho) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \rho(\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\rho) \cdot \mathbf{e}_\rho - \operatorname{div} \mathbf{u}) &= \rho\partial_\rho\mathbf{u}_\rho - \rho\left(\frac{1}{\rho^2}\partial_\rho(\rho^2\mathbf{u}_\rho) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{u}_\theta) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\partial_\phi\mathbf{u}_\phi\right) \quad (6.3.3a) \end{aligned}$$

$$= -2\mathbf{u}_\rho - \frac{1}{\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{u}_\theta) + \partial_\phi\mathbf{u}_\phi), \quad (6.3.3b)$$

$$\rho\nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{u}_\phi) - \partial_\phi\mathbf{u}_\theta). \quad (6.3.3c)$$

Soit  $\mathbf{v}_0$  une condition limite de Dirichlet sur la frontière de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On décompose alors les expressions de (6.3.3) en  $\rho = 1$  pour obtenir :

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} X_n, \quad (6.3.4a)$$

$$-2\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\theta) + \partial_\phi(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n, \quad (6.3.4b)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\partial_\theta(\sin\theta\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\phi) - \partial_\phi(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n, \quad (6.3.4c)$$

avec  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$  une somme d'harmoniques sphériques d'ordre  $n$ . En utilisant la forme des solutions en coordonnées sphériques, (6.3.2), on en déduit que les harmoniques sphériques

rigides  $p_{-(n+1)}$ ,  $\phi_{-(n+1)}$  et  $\chi_{-(n+1)}$  vérifient en  $\rho = 1$  :

$$\begin{aligned} p_{-(n+1)} &= \frac{2n-1}{n+1}((n+2)X_n + Y_n), \\ \phi_{-(n+1)} &= \frac{1}{2(n+1)}(nX_n + Y_n), \\ \chi_{-(n+1)} &= \frac{1}{n(n+1)}Z_n. \end{aligned}$$

Ceci permet de calculer complètement la solution du problème de Stokes dans le cas où le domaine est l'extérieur de la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ .

Un des intérêts de l'écriture de la solution de l'équation de Stokes sous la forme (6.3.2) est que certaines valeurs de  $\Phi_F$  peuvent être aisément calculées. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 6.3.1.** *Soit  $B$  un domaine ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$  et  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ .*

*Soit  $(\mathbf{u}, p) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  solution des équations de Stokes données sous la forme (6.3.2) telle qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  pour lequel  $\chi_{-(n+1)} = \phi_{-(n+1)} = p_{-(n+1)} = 0$  pour tout  $n > n_0$ .*

*Pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , soit  $(\mathbf{u}^i, p^i) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  la solution des équations de Stokes homogènes avec conditions limites :*

$$\mathbf{u}^i(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ x \wedge \mathbf{e}_{i-3} & \text{si } i \in \{4, 5, 6\}, \end{cases} \quad (x \in \partial B).$$

*Nous obtenons la relation suivante :*

$$2 \left( \int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i) dx \right)_{i=1, \dots, 6} = \begin{pmatrix} -4\pi \nabla(\rho^3 p_{-2}) \\ -8\pi \nabla(\rho^3 \chi_{-2}) \end{pmatrix}. \quad (6.3.6)$$

*Démonstration.* Pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , on définit le champ de vecteur  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  par :

$$\tilde{\mathbf{u}}^i(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ x \wedge \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{4, 5, 6\}, \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Comme  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^6$  et  $\mathbf{u}$  sont réguliers, nous avons :

$$2 \int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i) dx = \int_{\partial S} \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\partial S} \sigma(\mathbf{u}, p) \tilde{\mathbf{u}}^i \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale rentrante à  $\partial B$ .

Soit  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^3$  la boule de rayon  $r$  contrée en 0 de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $r$  est suffisamment grand de sorte que  $B \subset B(0, r)$ . On note alors  $F_r = F \cap B(0, r)$ .

En utilisant la formule de Green, nous obtenons pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$  :

$$\int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u}, p) \tilde{\mathbf{u}}^i \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\partial B(0, R)} \sigma(\mathbf{u}, p) \tilde{\mathbf{u}}^i \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à  $F_r$ .

On utilise alors l'orthogonalité  $L^2$  des harmoniques sphériques pour obtenir (6.3.6).  $\square$

Nous donnons maintenant la forme des solutions dans le cas où le domaine et la condition limite sur  $\Sigma$  sont à symétrie axiale par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_3$ . Cette forme peut être obtenue en utilisant la forme donnée par (6.3.2) ou directement en construisant la fonction courant de Stokes. Cette dernière méthode est détaillée dans le Chapitre 4, "Axisymmetrical Flow" du livre [HB65], plus précisément dans les paragraphes 4.2 à 4.7, 4.13 à 4.16 et 4.23.

Pour tout champ de vecteur  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on note  $\mathbf{u}_\rho$ ,  $\mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_\phi$  ses composantes dans le repère local  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ . C'est-à-dire que  $\mathbf{u}_\rho(x) = \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{e}_\rho(x) \rangle$ ,  $\mathbf{u}_\theta(x) = \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{e}_\theta(x) \rangle$  et  $\mathbf{u}_\phi(x) = \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{e}_\phi(x) \rangle$ .

Dans le cas où le domaine  $B$  et la condition limite sont suffisamment réguliers, nous obtenons :

$$\mathbf{u}_\rho(\rho, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \rho^{n-2} + \beta_n \rho^{-n-1} + \gamma_n \rho^n + \delta_n \rho^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta), \quad (6.3.7a)$$

$$\mathbf{u}_\theta(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n\alpha_n \rho^{n-2} - (n-1)\beta_n \rho^{-n-1} + (n+2)\gamma_n \rho^n - (n-3)\delta_n \rho^{-n+1}) \frac{J_n(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (6.3.7b)$$

$$\mathbf{u}_\phi(\rho, \theta, \phi) = 0, \quad (6.3.7c)$$

avec  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ ,  $(\gamma_n)$  et  $(\delta_n)$  des suites à valeurs réelles à déterminer en fonction des conditions limites. Les fonctions  $P_n$  sont les polynômes de Legendre et les fonctions  $J_n$  sont définies pour tout  $\zeta \in [-1, 1]$  par :

$$J_n(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -\zeta & \text{si } n = 1, \\ \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Dans le cas où l'on est en domaine extérieur et que l'on recherche une solution bornée à l'infini, (6.3.7a) et (6.3.7b) deviennent :

$$\mathbf{u}_\rho(\rho, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n \rho^{-n-1} + \delta_n \rho^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta), \quad (6.3.8a)$$

$$\mathbf{u}_\theta(\rho, \theta, \phi) = - \sum_{n=0}^{+\infty} ((n-1)\beta_n \rho^{-n-1} + (n-3)\delta_n \rho^{-n+1}) \frac{J_n(\cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (6.3.8b)$$

Dans ce cas, les réels  $\alpha_n$  et  $\gamma_n$  sont nuls.

Le Lemme 6.3.1 s'écrit dans le cas à symétrie axiale par rapport à  $\mathbf{e}_3$  :

**Lemme 6.3.2.** Soient  $B$  un domaine ouvert lisse de  $\mathbb{R}^3$  et  $F = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$ .

Soit  $(\mathbf{u}, p) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  solution des équations de Stokes données sous la forme (6.3.7) tel qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  pour lequel  $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \delta_n = 0$  pour tout  $n > n_0$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , on note  $(\mathbf{u}^i, p^i) \in W_0^1(F)^3 \times L^2(F)$  la solution des équations de Stokes homogènes avec la condition aux limites :

$$\mathbf{u}^i(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ x \wedge \mathbf{e}_{i-3} & \text{si } i \in \{4, 5, 6\}, \end{cases} \quad (x \in \partial B).$$

*Nous obtenons la relation suivante :*

$$2 \left( \int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}(x)) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^i(x)) \, dx \right)_{i=1, \dots, 6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8\pi\delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.9)$$

*En particulier, lorsque  $B$  est la sphère unité :*

$$\int_F \mathbf{D}(\mathbf{u}^3(x)) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^3(x)) \, dx = -6\pi.$$

# Chapitre 7

## Le problème de contrôle

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Modélisation</b>	<b>94</b>
7.1.1	Cinématique	94
7.1.2	Changements de forme	94
7.1.3	Le fluide	95
7.1.4	Dynamique du problème	96
7.1.5	Existence et stabilité	97
7.1.6	Contraintes d'autopropulsion	98
<b>7.2</b>	<b>Signature du nageur</b>	<b>103</b>
7.2.1	Formulation du problème en terme de signatures	103
7.2.2	Résultats de plongement	104
7.2.3	Analyse des matrices $M_c(\mathbf{s})$ et $N_c(\mathbf{s})$	107
<b>7.3</b>	<b>Problème de contrôle</b>	<b>107</b>
7.3.1	Signature d'un nageur contrôlable	107
7.3.2	Construction d'une signature contrôlable	110
<b>7.4</b>	<b>Résultats de contrôlabilité</b>	<b>112</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons donner une réponse positive aux questions posées dans l'introduction, c'est-à-dire que nous allons montrer que presque tout nageur peut être contrôlé exactement et peut suivre une trajectoire prescrite. Les résultats obtenus sont donnés dans les Théorèmes 7.4.1 et 7.4.2.

Le Théorème 7.4.1 établit que n'importe quel nageur (caractérisé par sa forme au repos) peut suivre à  $\varepsilon$  près une trajectoire rigide prescrite, tout lui prescrivant à  $\varepsilon$  une déformation imposée. Ceci signifie que si l'on prescrit une déformation du nageur, alors, il est possible de rajouter de petites déformations à celle imposée, de sorte que le nageur suive aussi une trajectoire rigide. Dans le cadre de ce théorème, toutes les déformations admissibles sont autorisées pour le nageur.

Dans le Théorème 7.4.2, contrairement au théorème précédent, on suppose que les déformations sont choisies dans un espace de dimension finie. Ce théorème affirme que pour tout nageur (caractérisé par sa forme au repos) on peut trouver un nageur proche et une famille de quatre déformations de base dont une combinaison linéaire (dépendant du temps) permet de suivre une trajectoire rigide à  $\varepsilon$  près.

Nous terminerons ce chapitre en donnant un résultat d'existence d'un contrôle optimal (Théorème 7.4.3). Ce résultat est établi dans le cas où le nageur est contrôlable, où la déformation du nageur est choisie dans un espace de dimension finie et où la vitesse de déformation est bornée. Ce résultat s'obtient en utilisant le Théorème de Filippov.

Le schéma de la démonstration du Théorème 7.4.2 est basé sur la méthode des crochets de Lie et le théorème de Chow. La première étape est de reformuler le problème de la nage comme un problème de contrôle en dimension finie. On montre ensuite que pour un nageur particulier (la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ ), on peut choisir quatre contrôles rendant ce nageur contrôlable. L'intérêt de considérer la sphère unité vient du fait que la solution du problème de Stokes peut être explicitement calculée en utilisant les résultats rappelés dans la Section 6.3. Une fois que nous avons montré que la sphère munie de quatre déformations bien choisies est contrôlable, nous étendons ce résultat à presque toutes les formes isotopes à la sphère par analyticité.

Le Théorème 7.4.1 reprend les mêmes idées. Pour le montrer, on se place sur une subdivision de l'intervalle en temps et on construit des contrôles sur chaque subdivision. Ces contrôles seront construits de sorte qu'ils se recollent bien en chaque point de la subdivision.

Ce chapitre fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec A. Munnier [LM12]. Afin de conserver une cohérence dans les notations de cette partie, certaines notations de l'article ont été modifiées.

## 7.1 Modélisation

### 7.1.1 Cinématique

On suppose que le nageur est le seul corps dans le fluide et que le fluide occupe tout le reste de l'espace. Ainsi l'ensemble contenant le nageur et le fluide est identifié à  $\mathbb{R}^3$ . Dans l'approche que nous allons introduire, deux repères seront nécessaires.

Le premier,  $\mathbf{e}^\dagger = (\mathbf{e}_1^\dagger, \mathbf{e}_2^\dagger, \mathbf{e}_3^\dagger)$  est un repère fixe galiléen.

Le second  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est le repère mobile attaché au nageur.

En tout temps  $t \geq 0$ , il existe une matrice de rotation  $R(t) \in \text{SO}(3)$  et un vecteur  $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^3$  tels que pour tout point ayant pour coordonnées  $x^\dagger = (x_1^\dagger, x_2^\dagger, x_3^\dagger)^\top$  dans le repère  $\mathbf{e}^\dagger$  et  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$  dans le repère  $\mathbf{e}$ , on a la relation :

$$x^\dagger = R(t)x + \mathbf{h}(t).$$

Ainsi, le vecteur  $\mathbf{h}(t)$  fournit la position du nageur et la matrice  $R(t)$  son orientation.

Le déplacement rigide du nageur donné par  $t \mapsto (\mathbf{h}(t), R(t))$  est alors l'inconnue du problème.

On définit ci-dessous :

1. la vitesse rigide du nageur dans le repère mobile  $\mathbf{e}$  par la vitesse de  $\mathbf{h}(t)$  :

$$\mathbf{l}(t) = R(t)^\top \dot{\mathbf{h}}(t);$$

2. sa vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$  définie de sorte que l'on ait l'identité :

$$A(\boldsymbol{\omega}(t)) = R(t)^\top \dot{R}(t).$$

### 7.1.2 Changements de forme

Sauf indication contraire, toutes les grandeurs seront exprimées dans le repère mobile  $\mathbf{e}$ .

Dans la modélisation choisie, le domaine occupé par le nageur au cours du temps est l'image de la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  par un difféomorphisme isotope à l'identité de  $\mathbb{R}^3$ ,

dépendant du temps et tendant vers l'identité en l'infini.  
Les difféomorphismes ainsi considérés sont de la forme :

$$X(t, x) = x + D(t, x) \quad (t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3),$$

où  $D(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \geq 0$ . On rappelle que  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  a été introduit dans la Définition 6.2.2.

Sous ces conditions, les changements de forme du nageur se déduisent de la donnée de la fonction  $D$ .

Le domaine occupé à l'instant  $t$  dans le référentiel mobile  $\mathbf{e}$  est  $B(t) = X(t, \cdot)(B)$  et sa déformation est représentée par  $\mathbf{w}(t, x) = \dot{X}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x))$ .

On notera  $\Sigma = \partial B$ , la frontière de la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma(t) = \partial B(t) = X(t, \cdot)(\Sigma)$ , l'interface fluide-nageur et  $\mathbf{n}(t, \cdot)$ , la normale à  $\Sigma(t)$  dirigée vers l'intérieur de  $B(t)$ . Le domaine fluide dans le référentiel mobile  $\mathbf{e}$  est  $F(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(t)}$ .

### 7.1.3 Le fluide

Le fluide entourant le nageur est gouverné par les équations de Stokes stationnaires. Celles-ci s'écrivent pour tout temps  $t \geq 0$  dans le référentiel du nageur  $\mathbf{e}$  :

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u}(t, x) + \nabla p(t, x) &= \mathbf{0} & (x \in F(t)), \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) &= 0 & (x \in F(t)), \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide,  $\mathbf{u}$  la vitesse eulérienne du fluide et  $p$  la pression du fluide. Ces équations sont munies de la condition limite de non glissement :

$$\mathbf{u}(t, x) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge x + \mathbf{l}(t) + \mathbf{w}(t, x) \quad (t \geq 0, \quad x \in \Sigma(t)).$$

Les équations de Stokes stationnaires étant linéaires, par rapport à la condition limite sur  $\Sigma(t)$ , nous introduisons les vitesses et pressions élémentaires,  $(\mathbf{u}^i, p^i)$  pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$  et  $(\mathbf{u}^d, p^d)$ , définies comme étant les solutions des équations de Stokes stationnaires avec les conditions limites :

$$\mathbf{u}^i(t, x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathbf{e}_{i-3} \wedge x & \text{si } i \in \{4, 5, 6\}, \end{cases} \quad (t \geq 0, \quad x \in \Sigma(t))$$

et

$$\mathbf{u}^d(t, x) = \mathbf{w}(t, x) \quad (t \geq 0, \quad x \in \Sigma(t)).$$

Par conséquent la vitesse  $\mathbf{u}$  se décompose sous la forme :

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{l}_i(t) \mathbf{u}^i(t, x) + \sum_{i=4}^6 \omega_{i-3}(t) \mathbf{u}^i(t, x) + \mathbf{u}^d(t, x) \quad (t \geq 0, \quad x \in F(t)), \quad (7.1.1a)$$

ainsi que la pression  $p$  :

$$p(t, x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{l}_i(t) p^i(t, x) + \sum_{i=4}^6 \omega_{i-3}(t) p^i(t, x) + p^d(t, x) \quad (t \geq 0, \quad x \in F(t)). \quad (7.1.1b)$$

On rappelle que toutes les solutions  $(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot))$  des problèmes de Stokes stationnaires précédemment introduites sont cherchées dans l'espace de Sobolev  $W_0^1(F(t))^3 \times L^2(F(t))$ . En particulier, rechercher  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  dans l'espace  $W_0^1(F(t))^3$  est une façon d'imposer en un sens faible que  $\mathbf{u}(t, x)$  tend vers  $\mathbf{0}$  lorsque  $|x|$  tend vers  $+\infty$ .



### 7.1.4 Dynamique du problème

Nous avons vu dans le Chapitre 5 que les effets inertiels n'ont qu'une influence négligeable sur le mouvement du nageur. Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique se réduit aux équations d'équilibre de force et de moment :

$$\int_{\Sigma(t)} \sigma(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot))(x) \mathbf{n}(t, x) \, d\Gamma = \mathbf{0}$$

$$\text{et} \quad \int_{\Sigma(t)} \sigma(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot))(x) \mathbf{n}(t, x) \wedge x \, d\Gamma = \mathbf{0}, \quad (7.1.2)$$

où  $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu D(\mathbf{u}) - pI_3$  est le tenseur de force de Cauchy. Ce tenseur de force étant linéaire par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $p$ , la décomposition (7.1.1), conduit à :

$$\sigma(\mathbf{u}(t, \cdot), p(t, \cdot)) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{l}_i(t) \sigma(\mathbf{u}^i(t, \cdot), p^i(t, \cdot)) + \sum_{i=4}^6 \boldsymbol{\omega}_{i-3}(t) \sigma(\mathbf{u}^i(t, \cdot), p^i(t, \cdot)) + \sigma(\mathbf{u}^d(t, \cdot), p^d(t, \cdot)).$$

Ainsi, les équations (7.1.2) s'écrivent de manière plus compacte :

$$M(t) \begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} + N(t) = \mathbf{0}, \quad (7.1.3)$$

où  $M(t) \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  est définie pour tout  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  par :

$$M_{i,j}(t) = \Phi_{F(t)}(\mathbf{u}^i(t, \cdot), \mathbf{u}^j(t, \cdot)) \quad (i, j \in \{1, \dots, 6\})$$

et  $N(t) \in \mathbb{R}^6$  a pour coordonnées :

$$N(t) = \Phi_{F(t)}(\mathbf{u}^d(t, \cdot), \mathbf{u}^i(t, \cdot)) \quad (i \in \{1, \dots, 6\}).$$

On rappelle que  $\Phi$  est définie par (6.1.3) et que la formule de Green assure bien la cohérence avec cette définition de  $M$  et  $N$  (c.f. (6.1.4)).

De la symétrie de  $\Phi_F$ , nous en déduisons que  $M(t)$  est une matrice symétrique définie positive (pour tout  $t$ ).

Par conséquent, le mouvement rigide du nageur est donné par la relation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} = -M(t)^{-1} N(t) \quad (t \in [0, T]). \quad (7.1.4a)$$

Pour déterminer le mouvement rigide du nageur dans le référentiel fixe  $\mathbf{e}$ , on complète l'équation (7.1.4a) par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}(t) &= R(t) \mathbf{l}(t) & (t \in [0, T]), \\ \dot{R}(t) &= R(t) A(\boldsymbol{\omega}(t)) & (t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (7.1.4b)$$

Ces équations différentielles ordinaires sont complétées avec des conditions initiales de Cauchy.

Pour l'instant, le contrôle du système est identifié à la fonction  $D$ .

On remarque que la dépendance de la dynamique du problème est fortement non linéaire par rapport au contrôle. En effet,  $D$  représente les changements de forme du nageur et par conséquent aussi la déformation du domaine fluide dans lequel sont posées les équations de Stokes. Ainsi la dépendance des matrices  $M$  et  $N$  par rapport à  $D$  est non triviale.

Des équations (7.1.4), on déduit :

**Proposition 7.1.1.** *La dynamique du nageur est indépendante de la viscosité  $\mu$  du fluide. En d'autres termes, les mêmes changements de forme produisent le même déplacement rigide du nageur, quelque soit la viscosité du fluide.*

*Démonstration.* Soient  $\mu > 0$  et  $\tilde{\mu} > 0$  deux viscosités. Si  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution de Stokes stationnaire pour le problème de Stokes avec viscosité  $\mu$  alors  $(\mathbf{u}, \frac{\tilde{\mu}}{\mu}p)$  est solution du problème de Stokes avec viscosité  $\tilde{\mu}$ .

Étant donné que les équations (7.1.4) ne dépendent que des vitesses  $\mathbf{u}^i$  et  $\mathbf{u}^d$ , on en déduit le résultat.  $\square$

Par conséquent, nous considérons par la suite le seul cas  $\mu = 1$ .

### 7.1.5 Existence et stabilité

Le résultat suivant assure le caractère bien posé du système (7.1.4). Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par Dal Masso, DeSimone et Morandotti [DMDM11].

**Proposition 7.1.2.** *Pour tout  $T > 0$ , toute fonction  $D \in W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  (resp. de classe  $C^p$ ,  $p = 1, \dots, \infty, \omega$ ) et toute condition initiale  $(\mathbf{h}(0), R(0)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ , le système (7.1.4) admet une unique solution  $t \in [0, T] \mapsto (\mathbf{h}(t), R(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  (au sens de Carathéodory) absolument continue sur  $[0, T]$  (resp. de classe  $C^p$ ).*

*Démonstration.* Soit  $D \in W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  un contrôle, on définit  $X : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par :  $X(t, x) = x + D(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ .

En utilisant la notation du Lemme 6.2.4, en tout temps  $t$  les entrées de la matrice  $M(t)$  sont de la forme  $\varphi(\mathbf{q})$  avec  $\mathbf{q} = (D(t, \cdot), \mathcal{W})$  et

$$\mathcal{W} = (W^1, W^2) \in (\{\mathbf{e}_i, i \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{\mathbf{e}_i \wedge X(t, \cdot), i \in \{1, 2, 3\}\})^2.$$

On déduit du Lemme 6.2.4 que  $t \in [0, T] \mapsto M(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est absolument continue. Pour obtenir l'expression des éléments du vecteur  $N(t)$ , il suffit de prendre  $W^2 = \dot{D}(t, \cdot)$ . On en conclut que  $t \in [0, T] \mapsto N(t) \in \mathbb{R}^6$  est un élément de  $L^1([0, T], \mathbb{R}^6)$ . L'existence de solution est directe. En effet,  $t \in [0, T] \mapsto M(t)^{-1}N(t) \in \mathbb{R}^6$  est un élément de  $L^1([0, T], \mathbb{R}^6)$  et le théorème d'existence de Carathéodory peut s'appliquer à (7.1.4b). L'unicité s'obtient par une inégalité de Grönwall. Les résultats de régularité énoncés sont évidents.  $\square$

Le résultat suivant montre que la fonction entrée-sortie est continue ou en d'autres termes, que le système de contrôle est stable par rapport au contrôle  $D$ .

**Proposition 7.1.3.** *Soit  $(D_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))^{\mathbb{N}}$  une suite de contrôles convergeant vers une fonction  $\bar{D}$ .*

*Pour  $(\mathbf{h}_0, R_0) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  donné, on note par  $(\bar{\mathbf{h}}, \bar{R}) \in AC([0, T], \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))$  (resp.  $(\mathbf{h}_j, R_j) \in AC([0, T], \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ) la solution dans du système (7.1.4) avec le contrôle  $\bar{D}$  (resp.  $D_j$ ) et la condition initiale  $(\mathbf{h}_0, R_0)$ . Alors  $(\mathbf{h}_j, R_j)$  converge dans  $AC([0, T], \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))$  vers  $(\bar{\mathbf{h}}, \bar{R})$ .*

*Démonstration.* De même que dans l'énoncé de la Proposition, on note,  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{l}} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix}$  (resp.  $\begin{pmatrix} \mathbf{l}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix}$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ ) le terme de gauche de l'identité (7.1.4a) pour le contrôle  $\bar{D}$  (resp.  $D_j$ ). Il est clair que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{l}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{l}} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} \quad \text{dans } L^1([0, T], \mathbb{R}^6).$$

En intégrant (7.1.4b) sur  $[0, t]$  (pour  $t \in [0, T]$ ), on obtient l'estimation :

$$\|\bar{R}(t) - R_j(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \leq \int_0^t \|\bar{R}(s) - R_j(s)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} |\bar{\omega}(s)| + |\omega_j(s) - \bar{\omega}(s)| ds.$$

Le Lemme de Grönwall nous permet de conclure que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} R_j = \bar{R} \quad \text{dans } C([0, T], \mathcal{M}_3(\mathbb{R})).$$

On utilise alors de nouveau l'équation différentielle ordinaire pour montrer que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \dot{R}_j = \dot{\bar{R}} \quad \text{dans } L^1([0, T], \mathcal{M}_3(\mathbb{R})).$$

Il est alors aisé de vérifier la convergence de  $\mathbf{h}_j$  vers  $\bar{\mathbf{h}}$ . □

### 7.1.6 Contraintes d'autopropulsion

Pour rendre notre modèle plus réaliste, les changements de forme du nageur, au lieu d'être prescrits, devraient résulter de l'interaction entre les forces internes générées par le nageur et les forces hydrodynamiques exercées par le fluide à la surface du nageur. Dans ce but, les systèmes d'équations différentielles ordinaires (7.1.4) devraient être complétés par un ensemble d'équations (typiquement les équations aux dérivées partielles représentant l'élasticité) permettant d'obtenir la déformation à partir de forces internes prescrites.

Dans l'objectif de contourner cette difficulté tout en conservant un modèle physiquement réaliste, nous imposons des contraintes sur les déformations. Celles-ci ont pour but d'assurer que le centre de masse et le moment d'inertie sont invariants dans le repère du nageur.

Nous avons le résultat d'invariance par rapport à des déformations rigides :

**Proposition 7.1.4.** *Soient  $D, \tilde{D} \in W^{1,\infty}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  deux fonctions de contrôle telles que les fonctions  $X$  et  $\tilde{X}$  définies par :*

$$X(t, x) = x + D(t, x) \quad \text{et} \quad \tilde{X}(t, x) = x + \tilde{D}(t, x) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3)$$

sont identiques à un déplacement rigide près.

Plus précisément, on suppose que pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe  $(\mathbf{r}(t), Q(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  tel que  $(\mathbf{r}(0), Q(0)) = (\mathbf{0}, I_3)$  et :

$$\tilde{X}(t, x) = Q(t)X(t, x) + \mathbf{r}(t) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3).$$

Ainsi, en notant par :

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \\ t &\mapsto (\mathbf{h}(t), R(t)) \end{aligned}$$

une solution du système (7.1.4) muni d'une condition initiale  $(\mathbf{h}_0, R_0) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ , on obtient que la fonction :

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \\ t &\mapsto (\tilde{\mathbf{h}}(t), \tilde{R}(t)) = (\mathbf{h}(t) - R(t)Q(t)^\top \mathbf{r}(t), R(t)Q(t)^\top) \end{aligned}$$

est une solution du même problème de Cauchy avec le contrôle  $\tilde{D}$ .

En particulier, on a pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\tilde{R}(t)\tilde{X}(t, \cdot) + \tilde{\mathbf{h}}(t) = R(t)X(t, \cdot) + \mathbf{h}(t). \quad (7.1.5)$$

La relation (7.1.5) signifie que dans les deux cas la position du nageur est identique.

*Démonstration.* On note  $\mathbf{u}^i$  (resp.  $\tilde{\mathbf{u}}^i$ ), pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , les champs de vitesse élémentaires obtenus pour la fonction de contrôle  $D$  (resp.  $\tilde{D}$ ). On peut vérifier que pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , on a :

$$\mathbf{u}^i(t, x) = Q(t)^\top \tilde{\mathbf{u}}^i(t, Q(t)x + \mathbf{r}(t)) \quad (t \in [0, T] \quad x \in F(t)).$$

On en déduit :

$$M(t) = \mathbf{Q}(t)^\top \tilde{M}(t) \mathbf{Q}(t) \quad (t \in [0, T]),$$

où les éléments de  $M(t)$  (resp.  $\tilde{M}(t)$ ) ont été calculés à partir des vitesses élémentaires  $\mathbf{u}^i(t, \cdot)$  (resp.  $\tilde{\mathbf{u}}^i(t, \cdot)$ ) et  $\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & Q(t) \end{pmatrix} \in \text{SO}(6)$ .

En notant  $\mathbf{w}(t, \cdot) = \partial_t X(t, \cdot) \circ X(t, \cdot)^{-1}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}(t, \cdot) = \partial_t \tilde{X}(t, \cdot) \circ \tilde{X}(t, \cdot)^{-1}$  les vitesses de déformation du nageur, on obtient la relation :

$$\mathbf{w}(t, x) + \boldsymbol{\chi}(t) \wedge x + \boldsymbol{\zeta} = Q(t)^\top \tilde{\mathbf{w}}(t, Q(t)x + \mathbf{r}(t)) \quad (t \in [0, T] \quad x \in \mathbb{R}^3),$$

où  $\boldsymbol{\chi}$  et  $\boldsymbol{\zeta}$  sont définis par :

$$A(\boldsymbol{\chi}(t)) = Q(t)^\top \dot{Q}(t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta}(t) = Q(t)^\top \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Avec les notations évidentes pour  $N$  et  $\tilde{N}$ , on en déduit :

$$N(t) + M(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}(t) \\ \boldsymbol{\chi}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(t)^\top \tilde{N}(t).$$

En posant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} = -M(t)^{-1} N(t) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{l}}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{pmatrix} = -\tilde{M}(t)^{-1} \tilde{N}(t),$$

on obtient la relation :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{l}}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) - \boldsymbol{\zeta}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\chi}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in [0, T]).$$

Il suffit alors d'intégrer cette relation, en prenant en compte que  $(\mathbf{r}(0), Q(0)) = (\mathbf{0}, I_d)$  pour obtenir la conclusion de la proposition.  $\square$

Si l'on applique la Proposition 7.1.4 dans le cas où  $D$  est une fonction constante en temps (la frontière du nageur dans son repère associé est inchangée au cours du temps et est  $\Sigma(t) = X(0, \cdot)(\Sigma)$ ), tout changement de forme du nageur se réduisant à une déformation rigide,  $Q(t)I_d + \mathbf{r}(t)$  produira un déplacement  $(-Q(t)^\top \mathbf{r}(t), Q(t)^\top)$ . Mais si l'on calcule le déplacement global du nageur, on obtient  $Q(t)^\top (Q(t)X(0, x) + \mathbf{r}(t)) - Q(t)^\top \mathbf{r}(t) = X(0, x)$  pour tout  $x \in \Sigma$  et tout  $t \in [0, T]$ . Ceci signifie que le nageur est sans mouvement, la déformation du nageur est contrebalancée par le déplacement rigide induit par le fluide. Afin d'éviter ceci, nous ajoutons les contraintes suivantes sur les déformations. Ces contraintes assurent entre autre les *conditions d'autopropulsion* données dans la Section 5.2 :

$$\int_B \rho_0(x) X(t, x) dx = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_B \rho_0(x) \dot{X}(t, x) \wedge X(t, x) dx = \mathbf{0} \quad (t \in [0, T]), \quad (7.1.6)$$

avec  $\rho_0$  une fonction réelle, positive et non identiquement nulle définie sur  $B$ .

Dans le cas d'un nombre de Reynolds non négligeable ou très grand, ces mêmes conditions sont imposées (c.f. [SMS08] pour le cas nombre de Reynolds non négligé et [CM11] pour le cas du très haut nombre de Reynolds).

Imposer de telles contraintes revient au choix d'une jauge, tel que décrit dans [SW89b].

Sans ces conditions, le sens des inconnues  $\mathbf{h}$  et  $R$  serait perdu et il serait alors aisé de résoudre le problème de contrôle.

**Remarque 7.1.5.** *Cependant, si la fonction de contrôle  $D$  est telle que  $D(0, \cdot) = D(T, \cdot)$  et si l'on souhaite seulement contrôler la position finale du nageur, le fait d'imposer des conditions sur le contrôle est inutile. Ce résultat est décrit dans [LST].*

L'existence de déformations  $X$  satisfaisant les équations (7.1.6) est assurée par la proposition suivante :

**Proposition 7.1.6.** *Pour toute fonction  $D \in W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  telle que :*

$$\int_B \rho_0(x) X(0, x) dx = \mathbf{0},$$

avec  $X(t, x) = x + D(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ , il existe une fonction  $\tilde{D} \in W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  satisfaisant les contraintes (7.1.6) et un unique déplacement rigide absolument continu :

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \\ t &\mapsto (\mathbf{r}(t), Q(t)), \end{aligned}$$

tel que  $(\mathbf{r}(0), Q(0)) = (\mathbf{0}, I_3)$  et

$$\tilde{X}(t, x) = (Q(t)X(t, x) + \mathbf{r}(t)) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \Sigma),$$

avec  $\tilde{X}(t, x) = x + \tilde{D}(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ .

En d'autres termes, cette proposition assure que n'importe quelle fonction de  $W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  satisfaisant les contraintes (7.1.6) à l'instant initial peut être rendue admissible (dans le sens où elle satisfait (7.1.6) en tout temps) via une composition avec un déplacement rigide.

*Démonstration.* Pour tout  $t \in [0, T]$ , on pose :

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m_0} \int_B \rho_0(x) X(t, x) dx,$$

avec  $m_0 = \int_B \rho_0(x) dx$ .  $\bar{\mathbf{r}}$  est absolument continue sur  $[0, T]$  et on définit :

$$\bar{X}(t, x) = X(t, x) - \bar{\mathbf{r}}(t) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3).$$

La matrice  $J(t) = \int_B \rho_0(x) (|\bar{X}(t, x)|^2 I_3 - \bar{X}(t, x) \otimes \bar{X}(t, x)) dx$  est symétrique définie positive. En effet, pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a  $\langle J(t)x, x \rangle = \int_B \rho_0(x) |\bar{X}(t, x)|^2 dx$ .

On définit alors  $\chi \in L^1([0, T], \mathbb{R}^3)$  par :

$$\chi(t) = J(t)^{-1} \int_B \rho_0(x) \partial_t \bar{X}(t, x) \wedge \bar{X}(t, x) dx.$$

La fonction absolument continue  $Q : [0, T] \rightarrow \text{SO}(3)$  est obtenue en résolvant sur  $[0, T]$  le problème de Cauchy :

$$\dot{Q}(t) = Q(t)A(\chi(t)), \quad Q(0) = I_3.$$

La solution, prise au sens de Carathéodory, est unique via une inégalité de Gronwall. On pose alors pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\mathbf{r}(t) = -Q(t)\bar{\mathbf{r}}(t).$$

La fonction  $\hat{X} \in W^{1,1}([0, T], C^1(\mathbb{R}^3)^3)$  définie par :

$$\hat{X}(t, x) = Q(t)X(t, x) + \mathbf{r}(t) \quad ((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3),$$

satisfait les conditions d'autopropulsion (7.1.6).

Cependant,  $x \mapsto \hat{X}(t, x) - x$  n'est pas nécessairement à valeurs dans  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$ . En effet,

$$\hat{X}(t, x) = Q(t)x + \mathbf{r}(t) + o(1) \quad (\text{pour } |x| \rightarrow +\infty).$$

Pour pallier ce problème, on pose  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux boules ouvertes de  $\mathbb{R}^3$  telles que :

$$\bigcup_{t \in [0, T]} \hat{X}(t, \cdot)(\bar{B}) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \bar{\Omega} \subset \Omega'.$$

On considère alors la fonction de troncature  $\zeta : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\zeta|_{\Omega} = 1$  et  $\zeta|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}'} = 0$  et on définit  $\tilde{X}$  comme étant la solution du problème de Cauchy posé sur  $[0, T]$  :

$$\dot{\tilde{X}}(t, x) = \zeta(x)\dot{\hat{X}}(t, x) + (1 - \zeta(x))\dot{D}(t, x), \quad \tilde{X}(0, x) = X(0, x) \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

On obtient alors que  $\tilde{X}$  satisfait les conditions d'autopropulsion (7.1.6) et  $x \mapsto \tilde{X}(t, x) - x$  est un élément de  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .  $\square$

**Définition 7.1.7.** Pour  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0 > 0$ , on note par  $\mathcal{A}_{\rho_0}$  le sous-ensemble (fermé et non vide) des fonctions de  $W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  satisfaisant les conditions d'autopropulsion (7.1.6).

Nous avons le résultat de densité suivant sur  $\mathcal{A}_{\rho_0}$ .

**Lemme 7.1.8.** Pour tout  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0$  positive et non identiquement nulle, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $D \in \mathcal{A}$ , il existe  $\bar{D} \in C^\omega([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{A}_{\rho_0}$  tel que :

$$\|\bar{D} - D\|_{W^{1,1}([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3))} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{D}(0, \cdot) = D(0, \cdot).$$

En particulier  $C^\omega([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{A}_{\rho_0}$  est dense dans  $\mathcal{A}_{\rho_0}$ .

*Démonstration.* Soit  $D \in \mathcal{A}_{\rho_0}$ . Comme précédemment, on note  $X(t, x) = x + D(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ .

Étant donné que  $C^\omega([0, T], C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)$  est dense dans  $L^1([0, T], C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)$ , on peut toujours choisir un élément  $\zeta \in C^\omega([0, T], C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)$  tel que  $\|\zeta - \dot{D}\|_{L^1([0, T], C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)}$  soit aussi petit que nécessaire.

On définit la fonction  $\tilde{D} \in C^\omega([0, T], C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)$  par :

$$\tilde{D}(t, x) = D(0, x) + \int_0^t \zeta(s, x) ds \quad ((t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3).$$

La norme  $\|\tilde{D} - D\|_{W^{1,1}([0,T],D_0^1(\mathbb{R}^3))}$  peut toujours être rendue aussi petite que souhaité. En suivant les lignes de la démonstration de la Proposition 7.1.6, on définit :

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{\int_B \rho_0(x) dx} \int_B \rho_0(x) \tilde{X}(t,x) dx, \quad \hat{X}(t,\cdot) = \tilde{X}(t,\cdot) - \tilde{\mathbf{r}}(t)$$

$$\text{et} \quad \hat{J}(t) = \int_B \rho_0(x) (|\hat{X}(t,x)|^2 I_3 - \hat{X}(t,x) \otimes \hat{X}(t,x)) dx,$$

$\hat{J}(t)$  est ici une matrice symétrique définie positive pour tout  $t \in [0, T]$ .

On définit aussi :

$$\hat{\chi}(t) = \hat{J}(t)^{-1} \int_B \rho_0(x) \partial_t \hat{X}(t,x) \wedge \hat{X}(t,x) dx.$$

On introduit la matrice :

$$J(t) = \int_B \rho_0(x) (|X(t,x)|^2 I_3 - X(t,x) \otimes X(t,x)) dx.$$

En remarquant de nouveau que la quantité  $\|\tilde{D} - D\|_{W^{1,1}([0,T],D_0^1(\mathbb{R}^3))}$  peut être choisie arbitrairement petite, on conclut que  $\|\tilde{\mathbf{r}}\|_{W^{1,1}([0,T],\mathbb{R}^3)}$  peut être pris arbitrairement petit.

Il en est de même pour  $\|\hat{J}(t)^{-1} - J(t)^{-1}\|_{C^0([0,T],\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$  et pour  $\|\hat{\chi}\|_{L^1([0,T],\mathbb{R}^3)}$ .

On en déduit que  $\|Q - I_3\|_{W^{1,1}([0,T],\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$ , peut aussi être arbitrairement petit, où  $Q$  est la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{Q}(t) = Q(t)\hat{\chi}(t), \quad Q(0) = I_3.$$

On pose alors  $X^*(t,x) = Q(t)\hat{X}(t,x)$  pour tout  $(t,x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ .

Ainsi nous obtenons que  $X^*$  satisfait (7.1.6) sans avoir nécessairement que  $D^*(t,\cdot) = X^*(t,\cdot) - I_d$  soit un élément de  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . En effet,  $X^*(t,x)$  est de l'ordre de  $Q(t)(x - \tilde{\mathbf{r}}(t))$ , lorsque  $|x|$  tend vers  $+\infty$ .

Cependant il existe une fonction  $C^\infty$  à support compact  $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , rendant la quantité  $\|\xi(D^* - D)\|_{W^{1,1}([0,T],D_0^1(\mathbb{R}^3))}$  arbitrairement petite.

En effet, soient  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux boules de  $\mathbb{R}^3$  telles que  $\bigcup_{t \in [0,T]} X^*(t,\cdot)(\bar{B}) \subset \Omega$  et  $\bar{\Omega} \subset \Omega'$ , on

définit alors par  $\xi$  la fonction de troncature (à valeurs dans  $[0, 1]$ ) telle que  $\xi = 1$  dans  $\Omega$  et  $\xi = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}'$ .

Enfin, on introduit  $\bar{X}$  le flot associé au problème de Cauchy :

$$\dot{\bar{X}}(t,x) = \xi(x)\dot{D}^*(t,x) + (1 - \xi(x))\dot{D}(t,x), \quad \bar{X}(0,x) = X(0,x) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

et on note pour tout  $(t,x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{D}(t,x) = \bar{X}(t,x) - x$ .

Alors  $\|D - \bar{D}\|_{W^{1,1}([0,T],D_0^1(\mathbb{R}^3))}$  tend vers 0 lorsque  $\|\xi(\dot{D}^* - \dot{D})\|_{L^1([0,T],C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)}$  tend vers 0.  $\square$

**Remarque 7.1.9.** *Les résultats de ce paragraphe restent vrais dans le cas où  $\rho_0$  est la distribution  $\delta_\Sigma$  supportée par  $\Sigma$ . Ce choix de jauge a été fait dans l'article [LM12]. Plus précisément,  $\rho_0$  peut être choisi sans difficulté dans le dual des fonctions à variations bornées sur  $B$ .*

## 7.2 Signature du nageur

### 7.2.1 Formulation du problème en terme de signatures

La *signature du nageur* est un ensemble de paramètres définissant la déformation du nageur comme la combinaison d'un nombre fini de mouvements de base.

**Définition 7.2.1.** Soit  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0$  positive et non identiquement nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  le sous-espace de  $D_0^1(\mathbb{R}^3) \times (C_0^1(\mathbb{R}^3))^n$  constitué des couples  $c = (D_0, \mathcal{D})$  tels que, en notant  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$ , les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble  $\{\langle D_i|_{\Sigma}, \mathbf{e}_k \rangle, i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, 2, 3\}\}$  est une famille libre de  $C^1(\Sigma)$  ;
2. Pour tout  $D, D' \in \{D_0, \dots, D_n\}$ , on a :

$$\int_B \rho_0(x) D(x) dx = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_B \rho_0(x) D(x) \wedge D'(x) dx = \mathbf{0}.$$

On nommera signature du nageur tout élément  $c$  de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ .

Comme  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  est ouvert dans  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  (c.f. Lemme 6.2.1 et Définition 6.2.2), pour tout  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ , l'ensemble suivant est ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\left\{ (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)^\top \in \mathbb{R}^n, D_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \right\}.$$

On notera  $\mathcal{S}(c)$  la composante connexe de cet ensemble contenant  $\mathbf{0}$ .

**Définition 7.2.2.** Soit  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho$  positive et non identiquement nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appellera signature complète du nageur tout couple  $\mathbf{c} = (c, \mathbf{s})$  tel que  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  et  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$ . L'ensemble de tous ces couples sera noté  $\mathfrak{C}_{\rho_0}(n)$ .

On peut maintenant reformuler le problème de la nage en terme de signatures. Soient  $n > 0$  et  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ , avec  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$ . Pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$  ( $\mathbf{c} = (c, \mathbf{s}) \in \mathfrak{C}(n)$ ), on note :

$$X_c(\mathbf{s}) = I_d + D_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i.$$

Le domaine occupé par le nageur dans la "configuration  $\mathbf{s}$ " est alors  $B_c(\mathbf{s}) = X_c(\mathbf{s})(B)$  et le domaine fluide est  $F_c(\mathbf{s}) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_c(\mathbf{s})}$ .

On remarque qu'avec cette construction, les changements de forme sur un intervalle de temps  $[0, T]$  sont donnés via une fonction absolument continue  $\mathbf{s} : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(c)$  de sorte que  $\dot{\mathbf{s}} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ .

Pour  $t \in [0, T]$ , la vitesse lagrangienne d'un point  $x \in B$  est  $\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{s}}_i(t) D_i(x)$  tandis que la

vitesse eulérienne d'un point  $x \in B_c(\mathbf{s}(t))$  est  $\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{s}}_i(t) \mathbf{w}_i(x)$ , avec  $\mathbf{w}_i = D_i \circ X_c(\mathbf{s}(t))^{-1}$

(pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

L'hypothèse 2 de la Définition 7.2.1, assure que les contraintes d'autopropulsion (7.1.6) sont automatiquement satisfaites.

Les vitesses et pressions élémentaires du fluide correspondant aux déplacements rigides ne dépendent que de la signature complète du nageur. Par conséquent nous les noterons



$\mathbf{u}^i(c, \mathbf{s})$  et  $p^i(c, \mathbf{s})$  par la suite. Cette remarque reste vraie pour la matrice  $M(t)$  que nous noterons dès à présent  $M_c(\mathbf{s})$ .

La vitesse et la pression élémentaires du fluide liées à la déformation du nageur peuvent maintenant être décomposées sous la forme :

$$\mathbf{u}^d = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{s}}_i \mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s}) \quad \text{et} \quad p^d = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{s}}_i p_i^d(c, \mathbf{s}).$$

Dans cette somme, chaque couple  $(\mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s}), p_i^d(c, \mathbf{s}))$  est solution du problème de Stokes posé dans le domaine  $F_c(\mathbf{s}(t)) = \mathbb{R}^3 \setminus B_c(\mathbf{s}(t))$ , avec la condition aux limites  $\mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s}) = \mathbf{w}_i$  sur  $\Sigma_c(\mathbf{s}(t)) = \partial B_c(\mathbf{s}(t))$ .

Soit  $N_c(\mathbf{s}) \in \mathcal{M}_{6,n}$  la matrice dont les entrées sont :

$$[N_c(\mathbf{s})]_{i,j} = \Phi_{F_c(\mathbf{s})}(\mathbf{u}^i(c, \mathbf{s}), \mathbf{u}_j^d(c, \mathbf{s})) \quad ((i, j) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, n\}).$$

L'équation (7.1.4a) de la dynamique du nageur peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} = -M_c(\mathbf{s}(t))^{-1} N_c(\mathbf{s}(t)) \dot{\mathbf{s}}, \quad (t \in (0, T)). \quad (7.2.1)$$

## 7.2.2 Résultats de plongement

Dans ce paragraphe, on se fixe  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0$  positive et non identiquement nulle. Nous allons maintenant donner des propriétés sur les ensembles  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  et  $\mathfrak{C}_{\rho_0}(n)$ .

**Théorème 7.2.3.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est une sous-variété analytique plongée de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$  de codimension  $\frac{3}{2}(n+2)(n+1)$ .*

Pour les définitions et principales propriétés des fonctions analytiques sur des espaces de Banach, on fait référence à [Whi65].

*Démonstration.* Pour tout  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ , avec  $\mathcal{D} = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n)$ , on note  $\tilde{D}_0 = I_d + D_0$ .

On définit pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  les fonctions  $\Lambda_k : C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n \rightarrow \mathbb{R}^{3(n+1-k)}$  par :

$$\Lambda_k(c) = \begin{pmatrix} \int_B \rho_0(x) \tilde{D}_k(x) dx \\ \int_B \rho_0(x) \tilde{D}_k(x) \wedge \tilde{D}_{k+1}(x) dx \\ \vdots \\ \int_B \rho_0(x) \tilde{D}_k(x) \wedge \tilde{D}_n(x) dx \end{pmatrix}$$

Chaque fonction  $\Lambda_k$  est analytique. Il en est donc de même pour la fonction :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \vdots \\ \Lambda_n \end{pmatrix} : C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

avec  $N = \frac{3}{2}(n+2)(n+1)$ .

Afin de montrer que  $\partial_c \Lambda(c)$  (la différentielle de  $\Lambda$  au point  $c$ ) est surjective pour tout

$c \in \mathcal{C}(n)$ , on suppose qu'il existe  $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$  vecteurs  $\alpha_i^j \in \mathbb{R}^3$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ) tels que :

$$\sum_{i=0}^n \langle \alpha_i, \partial_c \Lambda(c) \cdot c^h \rangle = \mathbf{0}, \quad \forall c^h \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n, \quad (7.2.2)$$

avec  $\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^i \\ \alpha_i^{i+1} \\ \vdots \\ \alpha_i^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3(n+1-i)}$  (pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ).

On note  $c^h = (D_0^h, \mathcal{D}^h) \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$  avec  $\tilde{D}_0^h = I_d + D_0^h$  et  $\mathcal{D}^h = (\tilde{D}_1^h, \dots, \tilde{D}_n^h)$ . En réorganisant les termes de la somme apparaissant dans l'équation (7.2.2), nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^n \int_B \rho_0(x) \left\langle \tilde{D}_k^h(x), \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^k \wedge \tilde{D}_j(x) + \alpha_k^k - \sum_{j=k+1}^n \alpha_k^j \wedge \tilde{D}_j(x) \right\rangle dx = \mathbf{0}.$$

Comme cette identité doit être vérifiée pour tout  $(D_0^h, \mathcal{D}^h) \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^3$ , on en déduit que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  :

$$\int_B \rho_0 \left( \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^k \wedge \tilde{D}_j(x) + \alpha_k^k - \sum_{j=k+1}^n \alpha_k^j \wedge \tilde{D}_j(x) \right) dx = \mathbf{0}. \quad (7.2.3)$$

On en déduit que  $\alpha_k^k = \mathbf{0}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ . En considérant l'hypothèse 2 de la Définition 7.2.1, l'identité (7.2.3) avec  $k = 0$  implique que  $\alpha_0^j = \mathbf{0}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, il ne reste plus de termes faisant intervenir  $\tilde{D}_0$  dans les autres équations et en invoquant de nouveau l'hypothèse 2, nous obtenons que  $\alpha_i^j = \mathbf{0}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . Par conséquent, l'égalité (7.2.2) implique que  $\alpha_i = \mathbf{0}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  et l'application  $\partial_c \Lambda(c)$  est surjective pour tout  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ .

Comme  $\Lambda$  est analytique, l'espace linéaire  $X = \text{Ker } \partial_c \Lambda(c)$  est fermé.

Soit  $Y$  un supplémentaire algébrique de  $X$  dans  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ . On note  $P_Y$  la projection linéaire sur  $Y$  suivant  $X$ .

On remarque que  $Y$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^N$  et par conséquent est de dimension finie (donc fermé) dans  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ .

On définit l'application analytique  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^N$  par  $f(x, y) = \Lambda(c + x + y)$ .

L'application  $\partial_y f(0, 0) = \partial_c \Lambda(c) \circ P_Y$  étant surjective, le théorème des fonctions implicites (c.f. [Whi65] pour une version analytique dans les espaces de Banach) assure l'existence d'un voisinage ouvert  $\mathcal{O}_X$  de 0 dans  $X$ , d'un voisinage ouvert  $\mathcal{O}_Y$  de 0 dans  $Y$  et d'une fonction analytique  $g : \mathcal{O}_X \rightarrow Y$  telle que  $g(0) = 0$  et pour tout  $(x, y) \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes

1.  $f(x, y) = 0$  (en d'autres termes,  $c + x + y \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ ),
2.  $y = g(x)$ .

La fonction analytique  $g$  donne un paramétrage local de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  dans un voisinage de  $c$ .

Afin de montrer que  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est connexe par arcs, on considère deux éléments  $\tilde{c} = (\tilde{D}_0, \tilde{\mathcal{D}})$  et  $\hat{c} = (\hat{D}_0, \hat{\mathcal{D}})$  de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ .

On note  $\tilde{X} = I_d + \tilde{D}_0$ ,  $\tilde{\mathcal{D}} = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n)$  et  $\hat{X} = I_d + \hat{D}_0$ ,  $\hat{\mathcal{D}} = (\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_n)$ .

$D_0^1(\mathbb{R}^3)$  est un ouvert connexe (c.f. Définition 7.1.7), ceci implique qu'il est toujours possible de choisir un chemin  $t : [0, 1] \mapsto \bar{D}(t) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  continu et linéaire par morceaux tel que  $\bar{D}(0) = \tilde{D}_0$  et  $\bar{D}(1) = \hat{D}_0$ .

En effet, soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $t \mapsto \bar{D}(t)$  est linéaire sur chaque sous-intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ). On note  $\bar{X}(t) = I_d + \bar{D}(t)$ ,  $\bar{D}^j = \bar{D}(t_j)$ ,  $\bar{X}^j = I_d + \bar{D}^j$  (pour  $j \in \{0, \dots, k\}$ ).

Étant donné que  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  est un espace de Banach de dimension infinie, il est toujours possible de trouver par induction  $W_1, \dots, W_n \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  tels que :

1. Les familles :

$$\begin{aligned} & \{ \langle W_1|_{\Sigma}, e_k \rangle, \dots, \langle W_n|_{\Sigma}, e_k \rangle, \langle \tilde{D}_1|_{\Sigma}, e_k \rangle, \dots, \langle \tilde{D}_n|_{\Sigma}, e_k \rangle, k \in \{1, 2, 3\} \} \\ & \text{et } \{ \langle W_1|_{\Sigma}, e_k \rangle, \dots, \langle W_n|_{\Sigma}, e_k \rangle, \langle \hat{D}_1|_{\Sigma}, e_k \rangle, \dots, \langle \hat{D}_n|_{\Sigma}, e_k \rangle, k \in \{1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

soient libres dans  $C_0^1(\mathbb{R}^3)$  ;

2. Pour tout couple d'éléments  $(V, V')$ , pris dans une même famille on ait :

$$\begin{aligned} \int_B \rho_0(x) V(x) dx = \mathbf{0}, \quad \int_B \rho_0(x) V(x) \wedge V'(x) dx = \mathbf{0} \\ \text{et } \int_B \rho_0(x) \bar{X}^j(x) \wedge V(x) dx = \mathbf{0} \quad (j \in \{1, \dots, k\}). \end{aligned}$$

On définit la fonction  $t \in [0, 1] \mapsto D_i(t) \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  par :

$$D_i(t) = \begin{cases} (1 - 2t)\tilde{D}_i + 2tW_i & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2t)W_i + (2t - 1)\hat{D}_i & \text{si } t \in ]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

et on note  $\mathcal{D}(t) = (D_1(t), \dots, D_n(t)) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ .

Ainsi, la fonction  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(n)$  donnée pour tout  $t \in [0, 1]$  par :

$$c(t) = \begin{cases} (\tilde{D}_0, \mathcal{D}(\frac{3t}{2})) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}], \\ (D_0(3t - 1), \mathcal{D}(\frac{1}{2})) & \text{si } t \in ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ (\hat{D}_0, \mathcal{D}(\frac{3t-1}{2})) & \text{si } t \in ]\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

est une fonction continue telle que  $c(0) = \tilde{c}$  et  $c(1) = \hat{c}$ . □

La démonstration du Corollaire suivant est similaire à celle du Théorème 7.2.3.

**Corollaire 7.2.4.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'ensemble  $\mathfrak{C}(n)$  est une sous-variété analytique plongée de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n \times \mathbb{R}^n$  de codimension  $\frac{3}{2}(n+2)(n+1)$ .*

On note par  $\Pi$  la projection de  $\mathcal{C}(n)$  sur  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  définie par  $\Pi(c) = D_0$  pour tout  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}(n)$ . Le corollaire suivant est une conséquence directe des arguments utilisés dans la démonstration du Théorème 7.2.3.

**Corollaire 7.2.5.** *Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $D_0 \in \Pi(\mathcal{C}(n))$ , la section  $\Pi^{-1}(\{D_0\})$  est une sous-variété analytique plongée de  $\{D_0\} \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$  (identifiée à  $(C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ ) de codimension  $\frac{3}{2}n(n+3)$ .*

### 7.2.3 Analyse des matrices $M_c(\mathbf{s})$ et $N_c(\mathbf{s})$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le Théorème suivant :

**Théorème 7.2.6.** *Soit  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0$  positive et non identiquement nulle.*

*Pour tout entier  $n \geq 1$ , les applications :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\rho_0}(n) &\rightarrow \mathcal{M}_6(\mathbb{R}) & \text{et} & & \mathfrak{C}_{\rho_0}(n) &\rightarrow \mathcal{M}_{6,n}(\mathbb{R}) \\ (c, \mathbf{s}) &\mapsto M_c(\mathbf{s}) & & & (c, \mathbf{s}) &\mapsto N_c(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

*sont analytiques.*

*Démonstration.* Pour tout  $\mathbf{c} = (c, \mathbf{s}) \in \mathfrak{C}_{\rho_0}(n)$ , nous écrivons, comme précédemment,  $c = (D_0, (D_1, \dots, D_n))$ . Pour montrer l'analyticité de  $\mathbf{c} \mapsto M_c(\mathbf{s})$ , il suffit d'appliquer le Lemme 6.2.4 avec  $\xi = D_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i$  et  $W^1, W^2 \in \{\mathbf{e}_i, i \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{\mathbf{e}_i \wedge \Upsilon, i \in \{1, 2, 3\}\}$ .

Pour prouver l'analyticité de  $\mathbf{c} \mapsto N_c(\mathbf{s})$ , il suffit de l'appliquer avec  $\xi = \vartheta + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i$ ,  $W^1 \in \{\mathbf{e}_i \wedge \Upsilon, i \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{\mathbf{e}_i \wedge \Upsilon, i \in \{1, 2, 3\}\}$  et  $W^2 \in \{D_1, \dots, D_n\}$ , où, comme dans le Lemme 6.2.4, nous avons noté  $\Upsilon = I_d + \xi$ .  $\square$

## 7.3 Problème de contrôle

### 7.3.1 Signature d'un nageur contrôlable

Soit  $\rho_0 \in L^1(B)$  avec  $\rho_0$  positive et non identiquement nulle et soit  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  fixé (pour un  $n \geq 1$  donné). On rappelle que  $\mathcal{S}(c)$  est le sous-espace connexe de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\mathbf{0}$  tel que  $(c, \mathbf{s}) \in \mathfrak{C}_{\rho_0}(n)$ .

Soit  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on peut voir la fonction  $t \in [0, T] \mapsto \mathbf{s}(t) \in \mathcal{S}(c)$

comme la solution de l'équation différentielle ordinaire  $\dot{\mathbf{s}}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \mathbf{f}_i$  où les fonctions

$\lambda_i : t \in [0, T] \mapsto \lambda_i(t) \in \mathbb{R}$  sont les nouveaux contrôles. On peut alors récrire les équations de la dynamique du nageur (7.2.1) comme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \begin{pmatrix} -M_c(\mathbf{s}(t))^{-1} N_c(\mathbf{s}(t)) \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_i \end{pmatrix} \quad (t \in (0, T)). \quad (7.3.1)$$

On remarque alors que  $\mathbf{s}$  ne joue plus le rôle de contrôle mais apparaît comme une variable d'état du système et que  $c \in \mathcal{C}(n)$  est un paramètre de la dynamique du nageur. À la vue de (7.3.1), on introduit naturellement pour tout  $(c, \mathbf{s}) \in \mathfrak{C}_{\rho_0}(n)$ , les champs de vecteurs :

$$\mathbf{Y}_i(c, \mathbf{s}) = -M_c(\mathbf{s})^{-1} N_c(\mathbf{s}) \mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^6 \quad (7.3.2)$$

et pour  $((c, \mathbf{s}), \mathbf{h}, R) \in \mathfrak{C}_{\rho_0}(n) \times \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ , on introduit le champ de vecteur :

$$\mathbf{Z}_c^i(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) = (R\mathbf{Y}_i^1(c, \mathbf{s}), R\mathbf{A}(\mathbf{Y}_i^2(c, \mathbf{s})), \mathbf{f}_i) \in \mathbb{R}^3 \times \text{T}_R\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^n,$$

où nous avons noté  $\mathbf{Y}_i = (\mathbf{Y}_i^1, \mathbf{Y}_i^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

Ainsi, les équations (7.3.1) et (7.1.4b) peuvent être écrites sous la forme d'un seul système différentiel :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{h}(t) \\ R(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \mathbf{Z}_c^i(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) \quad (t \in [0, T]). \quad (7.3.3)$$

On note  $\mathcal{V}(c) = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathcal{S}(c)$ .  $\mathcal{V}(c)$  est une variété analytique connexe. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et pour tout  $(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) \in \mathcal{V}(c)$ , on a :

$$\mathbf{Z}_c^i(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^3 \times \text{T}_R \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^n = \text{T}_{(\mathbf{h}, R, \mathbf{s})} \mathcal{V}(c).$$

On remarque que les applications  $\mathbf{Z}_c^1, \dots, \mathbf{Z}_c^n$  sont des champs de vecteurs analytiques sur  $\mathcal{V}(c)$  constants en  $\mathbf{h}$ .

On définit  $\mathcal{Z}(c)$  comme étant la famille des champs de vecteurs  $(\mathbf{Z}_c^i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  sur  $\mathcal{V}(c)$ .

**Lemme 7.3.1.** *Soient  $n \geq 1$  et  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  la signature d'un nageur. S'il existe  $\zeta \in \mathcal{V}(c)$  tel que  $\dim \text{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6 + n$ , alors l'orbite engendrée par  $\mathcal{Z}(c)$  obtenue à partir de tout point  $\zeta \in \mathcal{V}(c)$  est la variété  $\mathcal{V}(c)$ .*

*Démonstration.* On peut appliquer le Théorème de Rashevsky-Chow (c.f. [AS04]).

Si nous avons  $\text{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = \text{T}_\zeta \mathcal{V}(c)$  pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}(c)$  (ou plus précisément pour tout  $(R, \mathbf{s}) \in \text{SO}(3) \times \mathcal{S}(c)$  puisque  $\mathbf{Z}_c^i$  est indépendant de  $\mathbf{h}$ ), alors l'orbite de  $\mathcal{Z}(c)$  à partir de tout point de  $\mathcal{V}(c)$  est égale à la variété  $\mathcal{V}(c)$  entière.

Nous allons donc calculer le crochet de Lie  $[\mathbf{Z}_c^i, \mathbf{Z}_c^j](\mathbf{h}, R, \mathbf{s})$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathcal{S}(c)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_c^i, \mathbf{Z}_c^j](\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) = & \begin{pmatrix} R(\mathbf{Y}_i^1 \wedge \mathbf{Y}_j^2 - \mathbf{Y}_j^1 \wedge \mathbf{Y}_i^2)(c, \mathbf{s}) \\ RA((\mathbf{Y}_i^1 \wedge \mathbf{Y}_j^1)(c, \mathbf{s})) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} R(\partial_{s_i} \mathbf{Y}_j^2 - \partial_{s_j} \mathbf{Y}_i^2)(c, \mathbf{s}) \\ RA((\partial_{s_i} \mathbf{Y}_j^1 - \partial_{s_j} \mathbf{Y}_i^1)(c, \mathbf{s})) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7.3.4) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les notations introduites par (7.3.2).

Par induction, nous pouvons montrer que les crochets de Lie à tout ordre en tout point

$\zeta \in \mathcal{Z}(c)$  ont la même forme générale, c'est-à-dire la matrice  $\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$  multipliée par

un élément de  $\text{T}_{(\mathbf{0}, I_3, \mathbf{s})} \mathcal{V}(c)$ .

On en déduit que la dimension de l'algèbre de Lie en tout point de  $\mathcal{M}(c)$  ne dépend que de  $\mathbf{s}$ . Le Théorème de l'orbite (c.f. [AS04]) assure que la dimension de l'algèbre de Lie est constante sur chaque orbite.

En raison de la forme particulière des champs de vecteurs  $\mathbf{Z}_c^i$  (dont les  $n$  dernières composantes forment une base de  $\mathbb{R}^n$ ), la projection des orbites sur  $\mathcal{S}(c)$  est  $\mathcal{S}(c)$  entier. En d'autres termes, pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$  et pour tout orbite de  $\mathcal{V}(c)$ , il existe un point de l'orbite dont les  $n$  dernières composantes sont  $\mathbf{s}$ .

On utilise maintenant l'hypothèse qu'il existe un point  $\zeta = (\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) \in \mathcal{V}(c)$  tel que  $\dim \text{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6 + n$ .

Le théorème de l'orbite implique alors qu'il existe au moins un point  $(\mathbf{h}_\mathbf{s}, R_\mathbf{s}, \mathbf{s}) \in \mathcal{V}(c)$  tel que  $\dim \text{Lie}_{(\mathbf{h}_\mathbf{s}, R_\mathbf{s}, \mathbf{s})} \mathcal{Z}(c) = 6 + n$ . Comme la dimension de l'algèbre de Lie est indépendante des variables  $\mathbf{h}$  et  $R$ , on en conclut que  $\dim \text{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6 + n$  pour tout  $\zeta \in \mathcal{V}(c)$ .  $\square$

**Définition 7.3.2.** Soit  $n \geq 1$ . On dit que  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est contrôlable s'il existe  $\zeta \in \mathcal{V}(c)$  tel que  $\dim \text{Lie}_\zeta \mathcal{Z}(c) = 6 + n$ .

Il est évident que pour que  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  soit contrôlable, on doit avoir  $n \geq 2$ . En particulier, nous avons le Théorème de la coquille Saint-Jacques (c.f. [Pur77]) :

**Théorème 7.3.3** (Coquille Saint-Jacques). *Soit  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(1)$ , on note  $c = (D_0, D_1)$  et soient  $T > 0$  et  $\mathbf{s} : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(c)$  une fonction absolument continue telle que  $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(T)$ . Alors toute solution  $(\mathbf{h}, R)$  du système (7.3.3) satisfait :*

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(T) \quad \text{et} \quad R(0) = R(T).$$

*Démonstration.* On rappelle que le système (7.3.3) est construit à partir du système (7.3.1). Ce dernier se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} = -\dot{\mathbf{s}}(t)M_c(\mathbf{s}(t))^{-1}N_c(\mathbf{s}(t)) \quad (t \in (0, T)). \quad (7.3.5)$$

Dans le cas considéré,  $\mathbf{s}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^1$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  les fonctions analytiques définies sur  $\mathcal{S}(c) \subset \mathbb{R}$  par :

$$P_i(s) = \int_0^s \mathbf{Y}_i(c, \mathbf{s}) \quad (s \in \mathcal{S}(c)),$$

avec  $-M_c(\mathbf{s})^{-1}N_c(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(c, \mathbf{s}) \\ \mathbf{Y}_2(c, \mathbf{s}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Ainsi, (7.3.5) se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{s}(t)) \\ P_2(\mathbf{s}(t)) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la solution  $(\mathbf{h}, R)$  du système (7.3.3) satisfait pour  $t \in [0, T]$  :

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = R(t) \frac{dP_1(\mathbf{s}(t))}{dt}, \quad (7.3.6a)$$

$$\dot{R}(t) = R(t)A \left( \frac{dP_2(\mathbf{s}(t))}{dt} \right). \quad (7.3.6b)$$

On note  $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{R})$  la solution du système :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{h}}(s)}{ds} &= \tilde{R}(s) \frac{dP_1(s)}{ds}, \\ \frac{d\tilde{R}(s)}{ds} &= \tilde{R}(s)A \left( \frac{dP_2(s)}{ds} \right). \end{aligned}$$

satisfaisant la condition :

$$(\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{s}(0)), \tilde{R}(\mathbf{s}(0))) = (\mathbf{h}(0), R(0)).$$

Alors il est clair que  $(\mathbf{h}, R) = (\tilde{\mathbf{h}} \circ \mathbf{s}, \tilde{R} \circ \mathbf{s})$ . Par conséquent, on a :

$$(\mathbf{h}(0), R(0)) = (\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{s}(0)), \tilde{R}(\mathbf{s}(0))) = (\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{s}(T)), \tilde{R}(\mathbf{s}(T))) = (\mathbf{h}(T), R(T)).$$

□

Une preuve du résultat suivant peut être trouvée dans [CM11].

**Proposition 7.3.4.** *Soient  $n \geq 2$  et  $c \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  contrôlable. On note  $c = (D_0, \mathcal{D})$ ,*

*$\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$  et  $X_c(\mathbf{s}) = I_d + D_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i$  pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$ .*

*Alors pour toute fonction continue  $t \in [0, T] \mapsto (\bar{\mathbf{h}}(t), \bar{R}(t), \bar{\mathbf{s}}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathcal{S}(c)$  et*

pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n$  fonctions de classe  $C^1$ ,  $\lambda_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) telles que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( |\bar{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{h}(t)| + \|\bar{R}(t) - R(t)\|_{M(3)} + \|X_c(\bar{\mathbf{s}}(t)) - X_c(\mathbf{s}(t))\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \right) < \varepsilon,$$

$$\mathbf{h}(T) = \bar{\mathbf{h}}(T), \quad R(T) = \bar{R}(T) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(T) = \bar{\mathbf{s}}(T),$$

où  $t \in [0, T] \mapsto (\mathbf{h}(t), R(t), \mathbf{s}(t)) \in \mathcal{V}(c)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire (7.3.3) avec données initiales de Cauchy :

$$\mathbf{h}(0) = \bar{\mathbf{h}}(0) \in \mathbb{R}^3, \quad R(0) = \bar{R}(0) \in \text{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(0) = \bar{\mathbf{s}}(0) \in \mathcal{S}(c).$$

On donne ici quelques propriétés élémentaires qui seront utiles ultérieurement.

**Proposition 7.3.5.** *Soit  $n \geq 2$ .*

1. Si  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est contrôlable, avec  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ , alors tout  $c^+ = (D_0, \mathcal{D}^+) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n+1)$  avec  $\mathcal{D}^+ = (D_1, \dots, D_n, D_{n+1}) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^{n+1}$  (pour tout  $D_{n+1} \in C_0^m(\mathbb{R}^3)^3$ ) est aussi contrôlable.
2. Si  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est contrôlable, avec  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ , alors pour tout  $D^* \in \{D_0 + \sum_{i=1}^n s_i D_i, s \in \mathcal{S}(c)\}$ , l'élément  $c^* = (D^*, \mathcal{D})$  est un élément de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  et est aussi contrôlable.
3. Si  $c = (D_0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  est contrôlable, alors tous les points contrôlables de la section  $\Pi^{-1}(\{D_0\})$  forment un ouvert dense de  $\Pi^{-1}(\{D_0\})$  (pour la topologie induite).
4. Si  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  contient un élément contrôlable, alors pour tout  $k \geq n$ , l'ensemble des éléments contrôlables de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(k)$  est un ouvert dense de  $\mathcal{C}_{\rho_0}(k)$  (pour la topologie induite).

*Démonstration.* Les deux premières assertions sont triviales.

Montrons le troisième point.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{E}_k$  comme étant l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\mathcal{V}(c)$  obtenus par des crochets de Lie d'ordre inférieur ou égal à  $k$  des éléments de  $\mathcal{Z}(c)$ . On considère les déterminants des différentes familles de  $6+n$  éléments de  $\mathcal{E}_k$  comme des fonctions analytiques en  $\mathcal{D}$  (les autres variables  $D_0$  et  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  étant fixées).

Comme  $c$  est contrôlable, il existe au moins un  $k$  et une famille de  $6+n$  éléments de  $\mathcal{E}_k$  dont le déterminant est non nul. En effet, le Corollaire 7.2.5 et les propriétés basiques sur les fonctions analytiques (c.f. [Whi65]) assurent que le déterminant ne peut s'annuler que dans un ensemble fermé d'intérieur vide de la section  $\Pi^{-1}(\{D_0\})$  (muni de la topologie induite).

La démonstration du dernier point est similaire. □

### 7.3.2 Construction d'une signature contrôlable

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur le calcul des crochets de Lie du premier ordre,  $[\mathbf{Z}_c^i, \mathbf{Z}_c^j](\mathbf{h}, R, \mathbf{s})$  au point  $(\mathbf{h}, R, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, I_3, \mathbf{0})$ , pour  $c = (0, \mathcal{D}) \in \mathcal{C}_{\rho_0}(4)$  (ainsi la forme du nageur au repos est la sphère unité).

Comme précédemment, on note  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$  ( $D_1, \dots, D_n$  seront spécifiés ultérieurement) et  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_4) \in \mathcal{S}(c)$ .

Afin de simplifier les calculs des crochets de Lie, nous allons utiliser les coordonnées sphériques et la forme des solutions introduite dans la Section 6.3.

Un des intérêts de l'écriture de la solution de l'équation de Stokes sous la forme (6.3.2) est que les coefficients des matrices  $M_c(\mathbf{s})$  et  $N_c(\mathbf{s})$  peuvent être facilement déterminés. Pour ceci, on se réfère au Lemme 6.3.1.

Lorsque le nageur est au repos (boule unité) et que les conditions limites pour  $\mathbf{u}$  sont  $\mathbf{e}_i$  ou  $\mathbf{e}_i \wedge x$ , les composantes des vecteurs de (6.3.6) sont les éléments de la matrice  $M_c(\mathbf{0})$ .

Nous obtenons alors par le Lemme 6.3.1 que  $M_c(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 8\pi I_3 & 0 \\ 0 & 4\pi I_3 \end{pmatrix}$ .

De même, si la condition limite est  $\mathbf{u} = D_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) sur la frontière du nageur, les composantes des vecteurs de (6.3.6) sont les éléments de la matrice  $N_c(\mathbf{0})$ .

Soient maintenant les champs de vecteur  $D_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$  définis par les formules  $D_i(\rho, \theta, \phi) = V_i(\rho, \theta, \phi)\mathbf{e}_\rho$  avec :

$$V_1(\rho, \theta, \phi) = \chi(\rho) \operatorname{Re} (Y_{3,1}(\cos \theta, \phi)) , \quad (7.3.7a)$$

$$V_2(\rho, \theta, \phi) = \chi(\rho) \operatorname{Im} (Y_{3,1}(\cos \theta, \phi)) , \quad (7.3.7b)$$

$$V_3(\rho, \theta, \phi) = \chi(\rho) \operatorname{Re} (Y_{3,2}(\cos \theta, \phi)) , \quad (7.3.7c)$$

$$V_4(\rho, \theta, \phi) = \chi(\rho) \operatorname{Re} (Y_{4,2}(\cos \theta, \phi)) , \quad (7.3.7d)$$

où  $\chi$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact sur  $[0, +\infty[$  avec  $\chi(1) = 1$ .

Avec ces champs de déformation, nous obtenons  $N_c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

En considérant l'identité (7.3.4), nous avons à calculer pour tous  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{s}_i} \mathbf{Y}_j(c, \mathbf{s}) - \partial_{\mathbf{s}_j} \mathbf{Y}_i(c, \mathbf{s}) &= M_c(\mathbf{s})^{-1} \left[ (\partial_{\mathbf{s}_j} M_c(\mathbf{s}) \mathbf{Y}_i(c, \mathbf{s}) - \partial_{\mathbf{s}_i} M_c(\mathbf{s}) \mathbf{Y}_j(c, \mathbf{s})) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\mathbf{s}_j} N_c(\mathbf{s}) \mathbf{f}_i - \partial_{\mathbf{s}_i} N_c(\mathbf{s}) \mathbf{f}_j) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Pour déterminer complètement ces crochets de Lie, il faut donc calculer les dérivées partielles des matrices  $M_c$  et  $N_c$ . Ceci est réalisé en appliquant le Lemme 6.2.5 avec les champs de déformation  $D_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) définis par (7.3.7) et nous obtenons (à l'aide du logiciel de calcul formel `maxima`<sup>1</sup>) :

$$\partial_{\mathbf{s}_i} M_c(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = 0 \quad (i \in \{1, \dots, 4\})$$

et

$$\partial_{\mathbf{s}_1} N_c(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{2^2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\mathbf{s}_2} N_c(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>Voir le lien : <http://www.iecn.u-nancy.fr/~loheac/>, rubrique codes.



$$\partial_{\mathbf{s}_3} N_c(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2^{\frac{7}{2}}} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{5}}{2^{\frac{7}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\mathbf{s}_4} N_c(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = 0.$$

On se fixe dès à présent  $\rho_0 = 1$  et on note  $\mathcal{C}(n)$  l'ensemble  $\mathcal{C}_1(n)$ . On déduit des calculs précédents et du quatrième point de la Proposition 7.3.5, le résultat suivant :

**Proposition 7.3.6.** *Pour tout  $n \geq 4$ , l'ensemble des points contrôlables de  $\mathcal{C}(n)$  est un ouvert dense de  $\mathcal{C}(n)$ .*

## 7.4 Résultats de contrôlabilité

Comme précédemment, on se fixe  $\rho_0 = 1$  et on note  $\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}_{\rho_0}(n)$ .

Nous énonçons maintenant deux résultats de contrôlabilité pour le système (7.1.4).

**Théorème 7.4.1** (Nage synchronisée). *Soient les données suivantes :*

1. *une fonction  $\bar{D} \in \mathcal{A}$  (la forme de référence du nageur) ;*
2. *une fonction continue  $t \in [0, T] \mapsto (\bar{\mathbf{h}}(t), \bar{R}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  (la trajectoire de référence à suivre).*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $t \in [0, T] \mapsto D(t, \cdot) \in \mathcal{A}$  (les changements de forme réels), (pouvant être choisie analytique) telle que :*

$$D(0, \cdot) = \bar{D}(0, \cdot), \quad D(T, \cdot) = \bar{D}(T, \cdot) \quad \text{et}$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( |\bar{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{h}(t)| + \|\bar{R}(t) - R(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|\bar{D}(t, \cdot) - D(t, \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \right) < \varepsilon,$$

*où  $t \in [0, T] \mapsto (\mathbf{h}(t), R(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  est l'unique solution au système (7.1.4) associé au contrôle  $D$  et muni des conditions initiales  $\mathbf{h}(0) = \bar{\mathbf{h}}(0)$  et  $R(0) = \bar{R}(0)$ .*

On rappelle que  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des déformations admissibles introduit dans la Définition 7.1.7.

Ce théorème assure que n'importe quel nageur tridimensionnel peut suivre à  $\varepsilon$  près n'importe quelle déformation tout en suivant (à  $\varepsilon$  près) un chemin rigide prescrit.

Ce résultat peut sembler surprenant. En effet, les déformations du nageur sont a priori les contrôles du système, or le Théorème 7.4.1 affirme que ce "contrôle" peut être prescrit (à  $\varepsilon$  près).

L'astuce provient de la contrôlabilité approchée. En effet, nous allons montrer que l'ajout, à la déformation prescrite, de déformations du nageur arbitrairement petites suffit à contrôler le mouvement rigide du nageur.

Dans le cas où aucune déformation du nageur n'est prescrite, nous avons le résultat :

**Théorème 7.4.2** (Nage libre). *Soient les données suivantes :*

1. Une fonction  $\bar{D}_0 \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\int_B \bar{D}_0(x) dx = \mathbf{0}$  (la forme de référence du nageur au repos) ;
2. Une fonction continue  $t \in [0, T] \mapsto (\bar{\mathbf{h}}(t), \bar{R}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  (la trajectoire de référence).

Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $D_0 \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  (la forme réelle au repos) telle que :

$$\int_B (x + D_0(x)) dx = \mathbf{0}, \quad \|\bar{D}_0 - D_0\|_{D_0^1(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon$$

et pour presque tout quadruplet  $(D_1, \dots, D_4) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^4$  satisfaisant :

$$\int_B D_i(x) dx = \mathbf{0}, \quad \int_B (x + D_0(x)) \wedge D_i(x) dx = \mathbf{0}$$

$$\text{et } \int_B D_i(x) \wedge D_j(x) dx = \mathbf{0} \quad (i, j \in \{1, \dots, 4\}),$$

il existe une fonction  $t \in [0, T] \mapsto \mathbf{s}(t) = (\mathbf{s}_1(t), \dots, \mathbf{s}_4(t))^\top \in \mathbb{R}^4$  (pouvant être choisie analytique) telle qu'en prenant  $D(t, \cdot) = D_0 + \sum_{i=1}^4 \mathbf{s}_i(t) D_i \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  comme contrôle dans la dynamique (7.1.4), nous obtenons :

$$\sup_{t \in [0, T]} (|\bar{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{h}(t)| + \|\bar{R}(t) - R(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) < \varepsilon,$$

où  $t \in [0, T] \mapsto (\mathbf{h}(t), R(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire (7.1.4) munie des conditions initiales  $\mathbf{h}(0) = \bar{\mathbf{h}}(0)$  et  $R(0) = \bar{R}(0)$ .

En d'autres termes, ce théorème assure qu'à une perturbation près sur la forme du nageur au repos, n'importe quel nageur tridimensionnel peut nager par le biais de quatre mouvements de base acceptables.

La démonstration de ces deux résultats est basée sur les idées suivantes :

1. On identifie une famille de paramètres nécessaire pour caractériser le nageur et sa nage. Ces paramètres sont la signature du nageur précédemment introduite. Ils correspondent à la forme au repos du nageur et à un nombre fini de mouvements basiques satisfaisant les contraintes d'autopropulsion (7.1.6). On rappelle que l'ensemble des signatures  $\mathcal{C}(n)$  est une sous-variété connexe (de dimension infinie) d'un espace de Banach.
2. Le fait que le nageur est capable de suivre approximativement n'importe quelle trajectoire rigide donnée (tout en restant proche d'une fonction de forme imposée) sera une conséquence du Théorème des zéros isolés pour les fonctions analytiques. Cette fonction analytique est le déterminant de certains champs de vecteurs et de certains de leurs crochets de Lie. Nous utiliserons alors les résultats classiques du contrôle géométrique.
3. Par un calcul direct, nous montrerons qu'au moins un nageur répond au problème de contrôle. C'est-à-dire qu'il existe une signature de nageur contrôlable. Les propriétés élémentaires des fonctions analytiques nous permettront de conclure que presque toutes les signatures sont contrôlables.

Nous allons voir que la démonstration du Théorème 7.4.2 est contenue dans celle du Théorème 7.4.1. Par conséquent, nous ne donnerons que celle de ce dernier.

*Démonstration du Théorème 7.4.1.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $c \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \times (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$ , avec  $c = (D_0, \mathcal{D})$  et  $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$ , on note :

$$\|c\|_{\mathcal{C}(n)} = \sum_{i=0}^n \|D_i\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}.$$

Soient  $\varepsilon > 0$  et les fonctions définies dans l'énoncé du Théorème,

$$t \in [0, T] \mapsto \bar{D}(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3), \quad t \in [0, T] \mapsto (\bar{\mathbf{h}}(t), \bar{R}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3).$$

Le Lemme 7.1.8 assure que l'on peut supposer que  $\bar{D} \in C^\omega([0, T], D_0^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{A}$  car cet ensemble est un sous-espace dense de  $\mathcal{A}$ .

La démonstration de ce Théorème est divisée en trois points :

- Le premier point est une perturbation de la forme au repos du nageur afin de le rendre contrôlable.
- Le deuxième donne la construction d'un contrôle continu (et  $C^1$  par morceaux), ce contrôle est obtenu en construisant une subdivision adaptée de  $[0, T]$ .
- Le dernier point est une régularisation du contrôle construit lors de la deuxième étape.

Soit  $\delta > 0$  fixé ultérieurement.

• **Perturbation initiale du nageur.**

Dans cette partie, nous allons montrer que le nageur est capable de modifier légèrement sa forme au repos pour devenir contrôlable.

Soient  $\bar{D}_0^1 = \bar{D}(0, \cdot)$  et  $\bar{D}_1^1 = \partial_t \bar{D}(0, \cdot)$ , deux éléments de  $C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$ . Il est toujours possible de trouver trois éléments  $\bar{D}_2^1, \bar{D}_3^1, \bar{D}_4^1 \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3$  tels que les contraintes d'autopropulsion (7.1.6) soient satisfaites et tels que  $\bar{c}^1 = (\bar{D}_0^1, (\bar{D}_1^1, \dots, \bar{D}_4^1)) \in \mathcal{C}(4)$ .

La Proposition 7.3.6 assure de plus que pour tout  $\delta > 0$  il est possible de trouver un élément  $c^1 = (D_0^1, (D_1^1, D_2^1, D_3^1, D_4^1)) \in \mathcal{C}(4)$  contrôlable tel que  $\|\bar{c}^1 - c^1\|_{\mathcal{C}(4)} < \delta$ . De plus,  $c^1$  peut être choisi de sorte qu'il existe une fonction admissible (i.e. satisfaisant (7.1.6)) et régulière,  $t \in [-1, 0] \mapsto D^0(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $D^0(-1, \cdot) = \bar{D}_0^1$  et  $D^0(0, \cdot) = D_0^1$ . C'est-à-dire que le nageur peut modifier sa forme de  $\bar{D}_0^1$  vers  $D_0^1$ , via un mouvement satisfaisant les contraintes d'autopropulsion sur l'intervalle de temps  $[-1, 0]$ .

Plus précisément, soit  $\hat{c}^1 = (\hat{D}_0^1, \hat{D}_1^1) \in \mathcal{C}(4)$  un point contrôlable tel que  $\|\bar{c}^1 - \hat{c}^1\|_{\mathcal{C}(4)}$  soit petit. On définit alors pour tout  $t \in [-1, 0]$ ,  $\tilde{D}^0(t, \cdot) = \bar{D}_0^1 + (1+t)(\hat{D}_0^1 - \bar{D}_0^1)$ . Comme  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  est ouvert, on obtient que pour  $\|\hat{D}_0^1 - \bar{D}_0^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}$  suffisamment petit,  $\tilde{D}^0(t, \cdot)$  est un élément de  $D_0^1(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \in [-1, 0]$ .

À ce stade, nous avons défini un chemin reliant la forme initiale représentée par  $\bar{D}_0^1$  vers la forme représentée par  $\hat{D}_0^1$ . Cependant, ce chemin n'est pas nécessairement un chemin admissible (au sens où  $\tilde{D}^0$  n'est pas nécessairement un élément de  $\mathcal{A}$ ). Toutefois, la Proposition 7.1.6 assure l'existence d'une fonction  $Q_0 \in AC([-1, 0], \text{SO}(3))$  et un fonction de forme admissible  $D^0 \in W^{1,1}([-1, 0], D_0^1(\mathbb{R}^3))$  telle que  $t \mapsto X^0(t, \cdot)$ , est un chemin reliant  $\bar{X}^1$  (en  $t = -1$ ) à un certain  $X^1$  (en  $t = 0$ ) satisfaisant  $X^1 = Q_0(0)\hat{X}^1$ . Ici, on a défini  $X^0$  pour tout  $t \in [-1, 0] \times \mathbb{R}^3$  par  $X^0(t, x) = x + D^0(t, x)$  et  $\bar{X}^1$  par  $\bar{X}^1(x) = x + \bar{D}_0^1(x)$  (pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ).

Une lecture attentive de la démonstration de la Proposition 7.1.6 permet d'affirmer que  $\|Q_0 - I_3\|_{C([-1, 0], \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$  et  $\|D^0 - \bar{D}_0^1\|_{W^{1,1}([-1, 0], D_0^1(\mathbb{R}^3))}$  tendent vers 0 (ici  $\bar{D}_0^1$  est vu comme

une fonction constante en temps) quand  $\|\hat{D}^1 - \bar{D}^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}$  tend vers 0.

On pose alors :

$$D_0^1 = X^1 - I_d \quad \text{et} \quad D_i^1 = Q_0(0)\hat{D}_i^1 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\}$$

et on observe que l'élément  $c^1 = (D_0^1, D_1^1, \dots, D_4^1) \in \mathcal{C}(4)$  ainsi construit convient.

De plus, la Proposition 7.1.2 assure que  $\|\hat{D}_0^1 - \bar{D}_0^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}$  peut toujours être choisi suffisamment petit de sorte que le contrôle  $D^0$  engendre un déplacement rigide  $t \in [-1, 0] \mapsto (\mathbf{h}_0(t), R_0(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  satisfaisant :

$$\sup_{t \in [-1, 0]} \left( |\mathbf{h}_0(t) - \bar{\mathbf{h}}(0)| + \|R_0(t) - \bar{R}(0)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|D^0(t, \cdot) - \bar{D}_0^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \right) < \frac{\delta}{4}.$$

Finalement, on remarque que cette étape de perturbation initiale effectuée sur l'intervalle  $[-1, 0]$  peut être ramenée sur un intervalle en temps arbitrairement petit par le biais d'un changement d'échelle en temps.

• **Construction d'un contrôle continu et  $C^1$  par morceaux.**

On reprend ici les notations du point précédent, en particulier pour les éléments  $\bar{c}^1$  et  $c^1$  de  $\mathcal{C}(4)$ .

Comme la fonction  $t \mapsto \partial_t \bar{D}(t, \cdot)$  est continue sur l'intervalle compact  $[0, T]$ , elle est uniformément continue. Ainsi, pour tout  $\nu > 0$ , il existe  $\delta_\nu > 0$  tel que  $|t - t'| \leq \delta_\nu$  implique  $\|\partial_t \bar{D}(t, \cdot) - \partial_t \bar{D}(t', \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} < \nu$ .

On construit alors une subdivision  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = T$  de l'intervalle  $[0, T]$  telle que  $|t_{j+1} - t_j| < \delta_\nu$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .

On se concentre sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ . Pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ , nous avons l'estimation :

$$\begin{aligned} \|\bar{D}(t, \cdot) - (D_0^1 + (t - t_1)D_1^1)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} &\leq \|\bar{D}(t, \cdot) - (\bar{D}_0^1 + (t - t_1)\bar{D}_1^1)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \\ &\quad + \|\bar{D}_0^1 - D_0^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} + (t - t_1)\|\bar{D}_1^1 - D_1^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}. \end{aligned}$$

D'une part, nous avons pour tout  $t \in [t_1, t_2]$  :

$$\|\bar{D}(t, \cdot) - (\bar{D}_0^1 + (t - t_1)\bar{D}_1^1)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} < \nu|t - t_1|.$$

D'autre part, on peut supposer sans restriction que  $\delta_\nu < 1$ . Ainsi pour tout  $t \in [t_1, t_2]$  :

$$\|\bar{D}_0^1 - D_0^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} + (t - t_1)\|\bar{D}_1^1 - D_1^1\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Notons  $\bar{D}_0^2 = \bar{D}(t_2, \cdot)$ . Il est toujours possible de compléter  $\bar{D}_1^2 = \partial_t \bar{D}(t_2, \cdot)$  par les champs de vecteurs  $\bar{D}_2^2, \bar{D}_3^2$  et  $\bar{D}_4^2$  de sorte que  $\bar{c}^2 = (\bar{D}_0^2, (\bar{D}_1^2, \dots, \bar{D}_4^2)) \in \mathcal{C}(4)$ .

On définit aussi  $D_0^2 = D_0^1 + (t_2 - t_1)D_1^1$ .

Pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ , la Proposition 7.3.5 assure que la signature du nageur donnée par  $c^1(t) = (D_0^1 + (t - t_1)D_1^1, \mathcal{D}^1)$  est contrôlable. En particulier, pour  $t = t_2$ , il existe un entier  $k$  et une famille de dix champs de vecteurs (dix est la dimension de  $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathcal{S}(c^1(t_2))$ ) de  $\mathcal{E}_k$  (l'ensemble des crochets de Lie d'ordre inférieur ou égal à  $k$ ) tels que le déterminant de cette famille est non nul.

Le Corollaire 7.2.5 assure que l'ensemble  $\Pi^{-1}(\{D_0^2\})$  est une sous-variété analytique de  $(C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^4$ . Par conséquent ce déterminant (vu comme une fonction analytique en  $\mathcal{D}^1$ ) s'annule au plus sur un sous-ensemble fermé d'intérieur vide de  $\Pi^{-1}(\{D_0^2\})$  (pour la topologie induite). Il est donc possible de trouver  $\mathcal{D}^2 \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^4$  tel que la signature du nageur  $c^2 = (D_0^2, \mathcal{D}^2)$  est contrôlable et :

$$\|\bar{c}^2 - c^2\|_{\mathcal{C}(4)} < \left( \frac{\delta}{2} + \nu(t_2 - t_1) \right) + \frac{\delta}{4}.$$

Par récurrence, on peut construire  $\bar{c}^j$  et  $c^j$  ( $j \in \{1, \dots, k\}$ ) tels que :

1.  $\|\bar{c}^j - c^j\|_{\mathcal{C}(4)} \leq \frac{\delta}{2} + \sum_{i=2}^k \left( \frac{\delta}{2^i} + \nu(t_i - t_{i-1}) \right) < \delta + \nu T$ ;
2. Toutes les signatures de nageurs,  $c^j$ , sont contrôlables.

On choisit maintenant  $\delta$  et  $\nu$  de sorte que  $\delta + \nu T < \frac{\varepsilon}{4}$  et on définit la fonction continue et affine par morceaux,  $t \in [0, T] \mapsto \bar{D}(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ , par :

$$\bar{D}(t, \cdot) = D_0^j + (t - t_j)D_1^j \quad (t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j \in \{1, \dots, k-1\}).$$

On remarque que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\|\bar{D}(t, \cdot) - \tilde{D}(t, \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

La Définition 7.3.2 et la Proposition 7.3.4 assurent que sur tout intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ), il existe quatre fonctions  $\lambda_1^j, \dots, \lambda_4^j \in C^1([t_j, t_{j+1}], \mathbb{R})$  telles que la solution  $(\mathbf{h}^j, R^j, \mathbf{s}^j) : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^4$  de l'équation différentielle ordinaire (7.3.3) munie des champs de vecteurs  $\mathbf{Z}_{c^j}^i(\mathbf{h}^j, R^j, \mathbf{s}^j)$  et des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^1(t_1) &= \mathbf{h}^0(0), \quad R^1(t_1) = R^0(0), \\ \mathbf{h}^j(t_j) &= \bar{\mathbf{h}}(t_j), \quad R^j(t_j) = \bar{R}(t_j) \quad (\text{pour } j \in \{2, \dots, k-1\}) \quad \text{et} \\ \mathbf{s}^j(t_j) &= \mathbf{0} \quad (\text{pour } j \in \{1, \dots, k-1\}), \end{aligned}$$

satisfait :

1.  $\sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} (|\bar{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{h}^j(t)| + \|\bar{R}(t) - R^j(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|\bar{D}(t, \cdot) - D^j(t, \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3}) < \frac{\varepsilon}{4}$ ,  
avec  $D^j(t, \cdot) = D_0^j + \sum_{i=1}^4 \mathbf{s}_i^j(t)D_i^j$ ;
2.  $\mathbf{h}^j(t_{j+1}) = \bar{\mathbf{h}}(t_{j+1})$ ,  $R^j(t_{j+1}) = \bar{R}(t_{j+1})$  et  $\mathbf{s}^j(t_{j+1}) = (t_{j+1} - t_j, 0, 0, 0)^\top$ .

Munies de ces données, les fonctions  $t \in [-1, T] \mapsto \check{D}(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\check{\mathbf{h}} : [-1, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\check{R} : [-1, T] \rightarrow \text{SO}(3)$  définies par :

$$\check{D}(t, \cdot) = D^j(t, \cdot), \quad \check{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}^j(t) \quad \text{et} \quad \check{R}(t) = R^j(t) \quad (t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j \in \{0, \dots, k-1\})$$

(où l'on a noté  $t_0 = -1$ ) sont continues et  $C^1$  par morceaux.

• **Régularisation de la fonction de contrôle.**

Par un changement de variable évident en temps, nous obtenons un contrôle, toujours noté  $\check{D}$ , sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Nous rappelons que le premier intervalle en temps  $[-1, 0]$  peut être réduit autant que nécessaire de sorte que l'estimation :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( |\bar{\mathbf{h}}(t) - \check{\mathbf{h}}(t)| + \|\bar{R}(t) - \check{R}(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|\bar{D}(t, \cdot) - \check{D}(t, \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

reste vraie après le changement de variable en temps.

Nous utilisons alors le Lemme 7.1.8 et la Proposition 7.1.2 pour conclure à l'existence d'une fonction analytique  $t \in [0, T] \mapsto D(t, \cdot) \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (7.1.6) et telle que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( |\mathbf{h}(t) - \check{\mathbf{h}}(t)| + \|R(t) - \check{R}(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|D(t, \cdot) - \check{D}(t, \cdot)\|_{C_0^1(\mathbb{R}^3)^3} \right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

avec  $(\mathbf{h}, R) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$  la solution du système (7.1.4) muni de la condition initiale  $(\mathbf{h}(0), R(0)) = (\bar{\mathbf{h}}(0), \bar{R}(0))$  et du contrôle  $D$ .

Ceci achève la démonstration. □

Nous nous concentrons maintenant sur la contrôlabilité en temps optimal du problème. Pour cela, nous allons rechercher le contrôle  $D$  sous la forme d'une combinaison linéaire finie de déformations élémentaires, c'est-à-dire sous la forme :

$$D(t, \cdot) = D_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i(t) D_i \quad (t \in [0, T]), \quad (7.4.1)$$

avec :

- $t \in [0, T] \mapsto \mathbf{s}(t) = (\mathbf{s}_1(t), \dots, \mathbf{s}_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$  est un élément de  $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  ;
- $\int_B D(t, x) dx = \mathbf{0}$  ;
- $(D_1, \dots, D_n) \in (C_0^1(\mathbb{R}^3)^3)^n$  est une famille de  $n$  champs de vecteurs fixée satisfaisant pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\int_B D_i(x) dx = \mathbf{0}, \quad \int_B (x + D_0(x)) \wedge D_i(x) dx = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \int_B D_i(x) \wedge D_j(x) dx = \mathbf{0}.$$

Nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 7.4.3** (Existence d'un contrôle optimal). *On se donne une fonction continue  $J : \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \times D_0^1(\mathbb{R}^3) \times C_0^1(\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , convexe par rapport à sa troisième variable.*

*Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Soient  $(\mathbf{h}_0, R_0, D_0)$  et  $(\mathbf{h}_1, R_1, D_1)$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3) \times D_0^1(\mathbb{R}^3)$  tels qu'il existe une fonction  $D$  satisfaisant :*

1.  $D$  a la forme donnée dans (7.4.1) avec  $s(t) \in \mathcal{K}$  pour presque tout  $t \in [0, T]$  ;
2.  $D(0, \cdot) = D_0, D(T, \cdot) = D_1$  ;
3.  $D$  envoie la condition initiale  $(\mathbf{h}_0, R_0)$  (en  $t = 0$ ) vers la condition finale  $(\mathbf{h}_1, R_1)$  (en  $t = T$ ), par le biais du système dynamique (7.1.4).

*Alors parmi toutes les fonctions de contrôle satisfaisant les trois conditions énoncées, il existe un contrôle optimal  $D^*$  minimisant le coût :*

$$\int_0^T J(\mathbf{h}(t), R(t), D(t, \cdot), \dot{D}(t, \cdot)) dt.$$

Ce résultat est une conséquence directe du Théorème de Filippov (c.f. [AS04, Chap. 10]).



# Chapitre 8

## Cas de la nage en symétrie axiale

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Résultats de contrôlabilité . . . . .</b>	<b>119</b>
8.1.1	Système dans le cas d'une symétrie axiale . . . . .	119
8.1.2	Contrôlabilité . . . . .	122
8.1.3	Contrôlabilité en temps optimal . . . . .	125
<b>8.2</b>	<b>Problème approché et contrôle en temps optimal . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>8.3</b>	<b>Expérimentation numérique . . . . .</b>	<b>131</b>
8.3.1	Approximation du problème de Stokes . . . . .	131
8.3.2	Recherche d'un contrôle en temps optimal . . . . .	133

---

Dans ce chapitre, nous reprenons les résultats du chapitre précédent dans le cas d'un nageur à symétrie axiale. L'ensemble de ce chapitre est principalement issu de l'article écrit en collaboration avec J.-F. Scheid et M. Tucsnak, [LST]. Aussi, certaines notations ont été modifiées dans le but de conserver la cohérence avec les chapitres précédents.

Dans ce chapitre, nous donnons la version en symétrie axiale des résultats du Chapitre 7. Aussi, il est à noter que dans le cas considéré la démonstration de la contrôlabilité est plus élémentaire que dans le chapitre précédent. Nous donnerons en particulier un résultat de contrôlabilité en temps optimal.

Nous donnerons aussi des résultats sur le temps optimal pour un système approchant le système modélisant la nage. Ce système approché reste proche du système de la nage tant que l'amplitude des déformations reste petite. Ceci motive l'ajout d'une contrainte sur les déformations au problème de contrôle.

Nous terminerons alors ce chapitre par une étude numérique du problème de contrôle en temps optimal. Pour cela, nous donnerons une méthode numérique pour le calcul de la solution du problème de Stokes en domaine extérieur, puis une méthode pour la recherche d'un contrôle en temps optimal. Cette méthode utilisera les résultats obtenus dans le Chapitre 2.

### 8.1 Résultats de contrôlabilité

#### 8.1.1 Système dans le cas d'une symétrie axiale

Dans cette section et dans la suite de ce chapitre, on suppose que la forme au repos du nageur est la sphère unité  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  et que sa densité de masse est constante ( $\rho_0 = 1$ ). De plus, nous ne considérons plus que des déformations à symétrie axiale  $X(t, \cdot)$  de la sphère unité.



Plus précisément, via l'utilisation de coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$  (c.f. Fig. 8.1),  $X$  s'écrit sous la forme :

$$X(t, x) = (1 + \chi(|x|) r(t, \cos \theta(x))) x \quad (t \in [0, T], x \in B), \quad (8.1.1)$$

avec  $\chi : [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $]0, +\infty[$  avec  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $\{1\}$ ,  $r \in C^\infty([0, T] \times [-1, 1], \mathbb{R})$  et  $\theta$  la fonction qui associe à  $x \in \mathbb{R}^3$  son angle correspondant  $\theta(x) \in [0, \pi]$  (c.f. Fig. 8.1).

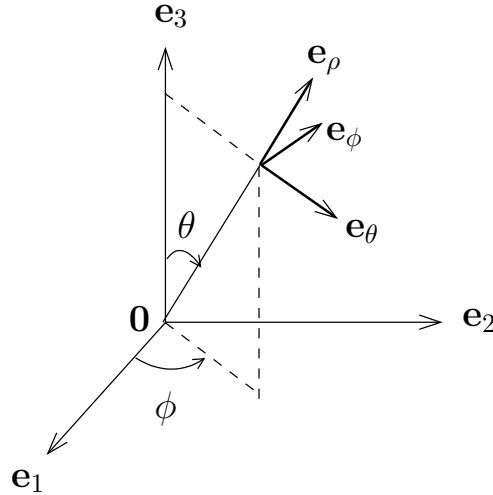


FIG. 8.1 – Rappel des coordonnées sphériques utilisées.

On note par  $\text{Jac } X(t, \cdot)$  le déterminant de la matrice Jacobienne du champ  $X(t, \cdot)$  et par  $\rho(t, \cdot)$  le champ de densité de masse sur  $B(t) = X(t, \cdot)(B)$ . Comme dans le chapitre précédent, on définit  $\rho$  par :

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\text{Jac}(X(t, \cdot))(X(t, \cdot)^{-1}(x))} \quad (x \in B(t)). \quad (8.1.2)$$

Soient  $(P_i)_{i \geq 0}$  les polynômes de Legendre. On rappelle que ces polynômes forment une base orthogonale de  $L^2([-1, 1])$ . Le résultat suivant indique que la déformation définie par (8.1.1) satisfait les conditions d'autopropulsion (7.1.6), sous certaines hypothèses sur  $r$ .

**Proposition 8.1.1.** *On suppose que pour tout  $t \in [0, T]$  on a  $r(t, \cdot)$  orthogonal à  $\{P_0, P_1\}$  (au sens  $L^2$ ) et que*

$$r(t, \zeta) > -1 \quad (t \in [0, T], \zeta \in [-1, 1]). \quad (8.1.3)$$

Alors, les propriétés suivantes ont lieu :

- Pour tout  $t \in [0, T]$ , le champ de déformation  $X(t, \cdot)$  est un difféomorphisme de  $B$  sur  $X(t, \cdot)(B)$  et

$$0 < \text{Jac } X(t, \cdot)(x) \quad (t \in [0, T], x \in B). \quad (8.1.4)$$

De plus,  $X(t, \cdot)(B)$  est un domaine borné à frontière Lipschitzienne pour tout  $t \in [0, T]$ .

- Le centre de masse est fixe :

$$0 = \int_{B(t)} \rho(t, x) x \, dx \quad (t \in [0, T]). \quad (8.1.5)$$

– *Le moment angulaire est constant :*

$$0 = \int_{B(t)} \rho(t, x) \dot{X}(t, X(t, \cdot)^{-1}(x)) \wedge x \, dx \quad (t \in [0, T]). \quad (8.1.6)$$

La démonstration de cette proposition résulte de l'orthogonalité  $L^2$  des polynômes de Legendre. Cependant, nous ne la donnerons pas ici. En effet, ce résultat n'est pas important pour le reste de l'étude dans ce chapitre car nous allons imposer que la déformation du nageur est périodique. Nous rentrons alors dans le cadre de la Remarque 7.1.5.

Les relations (8.1.5) et (8.1.6) correspondent aux conditions d'autopropulsion. On rappelle que ces conditions sont naturelles dans le cas de la nage dans un fluide dont le nombre de Reynolds est non négligeable.

Dans notre cas, i.e. cas Reynolds nul et  $t \mapsto X(t, \cdot)$  périodique, ces conditions sont inutiles pour le problème de contrôle que nous allons considérer. Pour une démonstration de ce fait, on se réfère à la Proposition 7.1.4.

En d'autres termes, le problème de contrôle considéré est indépendant du choix de la jauge. Ainsi, La Proposition 8.1.1 ci-dessus n'a d'autre intérêt que de donner un sens physique aux variables du problème. Cependant, l'hypothèse (8.1.3) est importante. En effet, elle assure que  $X(t, \cdot)$  est un difféomorphisme de la boule unité.

Il est évident que la symétrie axiale implique que  $R(t)$  est constant et que  $\mathbf{h}(t)$  est porté par  $\mathbf{e}_3$  (l'axe de symétrie) pour tout  $t$ . On note alors  $\mathbf{h}(t) = h(t)\mathbf{e}_3$ .

Suite à ces remarques, le pendant en symétrie axiale du système dynamique (7.1.3) est le suivant :

$$0 = M(t)\dot{h}(t) + N(t). \quad (8.1.7)$$

Dans ce cas  $M(t)$  et  $N(t)$  sont des scalaires. Plus précisément, on a, avec les notations du paragraphe 7.1.4,

$$M(t) = \Phi_{F(t)}(\mathbf{u}^3(t, \cdot)\mathbf{u}^3(t, \cdot)) \quad \text{et} \quad N(t) = \Phi_{F(t)}(\mathbf{u}^3(t, \cdot), \mathbf{u}^d(t, \cdot)). \quad (8.1.8)$$

On rappelle que  $\Phi$  est définie par (6.1.3) et que  $\mathbf{u}^3(t, \cdot) \in W_0^1(F(t))^3$  (resp.  $\mathbf{u}^d(t, \cdot) \in W_0^1(F(t))^3$ ) est la solution du problème de Stokes homogène posé sur  $F(t)$  muni de la condition limite  $\mathbf{u}^3(t, x) = \mathbf{e}_3$  (resp.  $\mathbf{u}^d(t, x) = \partial_t X(t, \cdot)(X(t, x)^{-1})$ ) pour tout  $x \in \partial B(t)$ . Comme dans le cas général,  $M(t)$  est non nul. Il est clair que  $M(t)$  et  $N(t)$  sont indépendantes de  $h(t)$  et comme il n'y a pas de rotation dans ce système, les équations (7.1.4b) "disparaissent" dans le cas à symétrie axiale.

On munit l'équation différentielle (8.1.7) de la condition initiale :

$$h(0) = 0. \quad (8.1.9)$$

L'existence d'une solution  $h$  au système (8.1.7) et (8.1.9) et son unicité sont élémentaires.

**Lemme 8.1.2.** *On suppose que la fonction régulière  $r$  satisfait (8.1.3). Alors il existe une unique solution  $h \in C^\infty([0, T], \mathbb{R})$  au système (8.1.7), (8.1.9).*

Ce Lemme est le pendant en symétrie axiale de la Proposition 7.1.2. Sa démonstration est aisée.

*Démonstration.* En utilisant la Proposition 8.1.1 et le Théorème 7.2.6, nous obtenons que l'application :

$$t \mapsto \frac{N(t)}{M(t)},$$

est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T]$ .

Par conséquent, il existe une unique solution  $h \in C^\infty([0, T], \mathbb{R})$  au système (8.1.7), (8.1.9) qui est donnée par :

$$h(t) = - \int_0^t \frac{N(\tau)}{M(\tau)} d\tau \quad (t \in [0, T]). \quad (8.1.10)$$

□

### 8.1.2 Contrôlabilité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer la contrôlabilité du problème suivant :

**Problème 8.1.3.** Étant donné  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , existe-t-il  $T > 0$  et une fonction de classe  $C^\infty$   $t \in [0, T] \mapsto r(t, \cdot) \in C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$  tels que la solution du problème (8.1.7), (8.1.9) satisfait :

- $h(T) = h_1$  ;
- $r(0, \cdot) = r(T, \cdot) = 0$  ;
- Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $r(t, \cdot) \in \{P_0, P_1\}^\perp$  et  $\inf_{(t,x) \in [0,T] \times [-1,1]} r(t, x) > -1$  ;
- Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\zeta \in [-1, 1]$ ,  $|\dot{r}(t, \zeta)| < 1$ .

La deuxième condition signifie que l'on recherche une déformation du nageur *périodique*.

Comme dans le chapitre précédent, afin de montrer le résultat de contrôlabilité, nous allons nous ramener temporairement à un système de dimension finie pour lequel la forme du nageur, qui apparaissait jusqu'à présent comme un contrôle du système, apparaît maintenant comme une variable d'état du système. Dans ce but, nous définissons :

$$D_i(x) = \chi(|x|)P_{i+1}(\cos \theta(x))x \quad (i \geq 1, x \in B), \quad (8.1.11)$$

où  $\chi : [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $]0, +\infty[$  avec  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $\{1\}$ ,  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont les polynômes de Legendre et  $(\rho(x), \theta(x), \phi(x)) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$  sont les coordonnées sphériques associées au point  $x$  (c.f. Fig. 8.1). On note que toute sous-famille finie de  $\{D_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les hypothèses de la Définition 7.2.1.

Pour la suite de ce chapitre, on se donne pour  $n \in \mathbb{N}^*$  l'élément :

$$c = (0, (D_1, \dots, D_n)) \in \mathcal{C}(n). \quad (8.1.12)$$

On rappelle que  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  a été introduit dans la Définition 7.2.1 et que  $\mathcal{C}(n)$  est l'ensemble  $\mathcal{C}_{\rho_0}(n)$  pour  $\rho_0 = 1$ .

En utilisant les notations du paragraphe 7.2.1, on note pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$  :

$$X_c(\mathbf{s}, x) = x + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

et on note  $M_c(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^*$  et  $N_c(\mathbf{s}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  les forces hydrodynamiques obtenues dans la "configuration  $\mathbf{s}$ ". Plus précisément,  $M_c(\mathbf{s})$  et  $N_c(\mathbf{s})$  sont définies par :

$$M_c(\mathbf{s}) = \Phi_{F_c(\mathbf{s})}(\mathbf{u}^3(c, \mathbf{s})\mathbf{u}^3(c, \mathbf{s}))$$

et  $[N_c(\mathbf{s})]_{1,i} = \Phi_{F_c(\mathbf{s})}(\mathbf{u}^3(c, \mathbf{s}), \mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s})) \quad (i \in \{1, \dots, n\}), \quad (8.1.13)$

où comme dans le chapitre précédent, nous avons noté  $F_c(\mathbf{s}) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_c(\mathbf{s})}$ , avec  $B_c(\mathbf{s}) = X_c(\mathbf{s}, \cdot)(B)$  et  $(\mathbf{u}^3(c, \mathbf{s}), p^3(c, \mathbf{s}))$  (resp.  $(\mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s}), p_i^d(c, \mathbf{s}))$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ )

est la solution dans  $W_0^1(F_c(\mathbf{s})) \times L^2(F_c(\mathbf{s}))$  du problème de Stokes homogène posé sur  $F_c(\mathbf{s})$  muni de la condition limite  $\mathbf{u}^3(c, \mathbf{s}) = \mathbf{e}_3$  (resp.  $\mathbf{u}_i^d(c, \mathbf{s}) = D_i \circ X_c(\mathbf{s})^{-1}$ ) sur  $\partial B_c(\mathbf{s})$ .

Nous allons maintenant transcrire un résultat dû à Shapere et Wilczek [SW89a, Équation (2.12)]. Ce résultat donne l'expression de la première dérivée de la force hydrodynamique de Stokes par rapport à la forme du domaine. Pour obtenir ce résultat, on utilise en particulier les formules asymptotiques données par Lighthill [Lig52].

Plus précisément, on a pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit et pour tout  $\mathbf{s} : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}(c)$ , différentiable, avec  $|\mathbf{s}(t)| < \varepsilon$  pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\frac{N_c(\varepsilon \tilde{\mathbf{s}}) \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{s}}}}{M_c(\varepsilon \tilde{\mathbf{s}})} = \varepsilon^2 \langle M^{SW} \tilde{\mathbf{s}}, \dot{\tilde{\mathbf{s}}} \rangle + o(\varepsilon^2) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (8.1.14)$$

avec  $\mathbf{s} = \varepsilon \tilde{\mathbf{s}}$ ,  $M_c$  et  $N_c$  définis par (8.1.13) et  $M^{SW} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice définie par :

$$[M^{SW}]_{i,j} = \begin{cases} \frac{(i+1)^2}{(2i+1)(2i+3)} & \text{si } j = i-1, \\ \frac{-i^2+2i+5}{(2i+3)(2i+5)} & \text{si } j = i+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}). \quad (8.1.15)$$

Ceci permet d'énoncer le résultat suivant :

**Proposition 8.1.4.** *Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $c \in \mathcal{C}(n)$  défini par (8.1.12).*

*Alors pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons :*

$$N(\mathbf{0})^\top = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left( \partial_{s_1} \frac{N_c^\top}{M_c}, \dots, \partial_{s_n} \frac{N_c^\top}{M_c} \right) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = M^{SW} \in M_n(\mathbb{R}),$$

où  $M^{SW} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice définie par (8.1.15).

Nous pouvons maintenant donner le résultat de contrôlabilité pour le Problème 8.1.3. On rappelle que l'objectif est de déplacer le centre de masse du nageur, positionné à l'instant initial en  $\mathbf{0}$ , en un point  $h_1 \mathbf{e}_3$ . De plus, à la fin de ce déplacement, on souhaite que la forme du nageur soit sa forme au repos (la sphère unité).

**Théorème 8.1.5.** *Pour tout  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , il existe  $T > 0$  et une fonction de classe  $C^\infty$   $t \in [0, T] \mapsto r(t, \cdot) \in C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$  tel que la solution  $h$  du problème (8.1.7), (8.1.9) satisfait :*

- $h(T) = h_1$  ;
- $r(0, \cdot) = r(T, \cdot) = 0$  ;
- Pour tout  $t \in [0, t]$ ,  $r(t, \cdot) \in \{P_0, P_1\}^\perp$  et  $\inf_{(t,x) \in [0,T] \times [-1,1]} r(t, x) > -1$  ;
- Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $\zeta \in [-1, 1]$ ,  $|\dot{r}(t, \zeta)| < 1$ .

La dernière contrainte implique que la vitesse de déformation du domaine est inférieure à 1.

Pour prouver ce résultat, nous allons procéder de la même manière que pour la preuve du Théorème 7.4.1, c'est-à-dire que nous allons nous ramener à un espace de contrôles de dimension finie, l'objectif étant d'appliquer le Théorème de Chow (c.f. [Tré05, Proposition 5.14] ou [Jur97]).

Du fait qu'on impose moins de contraintes que dans le Théorème 7.4.1 et qu'il n'y a pas de rotation, la démonstration de ce résultat est plus simple.

*Démonstration.* On commence par considérer le cas  $n = 2$ . On définit alors, à l'aide de (8.1.11),  $c = (0, (D_1, D_2)) \in \mathcal{C}(2)$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$ , on a :

$$X_c(\mathbf{s})(x) = x + \mathbf{s}_1 D_1(x) + \mathbf{s}_2 D_2(x) \quad (x \in B).$$

Si l'on voit maintenant  $\mathbf{s}$  comme une variable d'état et non plus comme un contrôle du système, le nouveau contrôle étant  $\boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{s}}$ , on peut alors récrire le système dynamique sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\frac{N_c(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda}}{M_c(\mathbf{s})}, \\ \dot{\mathbf{s}} &= \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

Le système ci-dessus peut se récrire sous la forme condensée :

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\lambda}_1 \mathbf{Z}_c^1(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\lambda}_2 \mathbf{Z}_c^2(\mathbf{z}), \quad (8.1.16)$$

où  $\mathbf{z} = (h, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)^\top \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}(c)$  et  $(\mathbf{Z}_c^i)_{i \in \{1,2\}}$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}(c)$  définis par :

$$\mathbf{Z}_1(h, \mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{-[N_c(\mathbf{s})]_1}{M_c(\mathbf{s})} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_2((h, \mathbf{s})) = \begin{pmatrix} \frac{-[N_c(\mathbf{s})]_2}{M_c(\mathbf{s})} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((h, \mathbf{s}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}(c)).$$

La Proposition 8.1.4 nous permet d'affirmer que :

$$D\mathbf{Z}_c^i|_{\mathbf{z}=0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_j \end{pmatrix} = (\langle M^{SW} \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle, 0, \dots, 0)^\top \quad (i, j \in \{1, 2\}),$$

avec  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et la matrice  $M^{SW} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est définie par (8.1.15) et prend la forme suivante dans le cas  $n = 2$  :

$$M^{SW} = \frac{3}{35} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous obtenons que :

$$[\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2](0, \mathbf{0}) = (\langle M^{SW} \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle - \langle M^{SW} \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle, 0, 0)^\top = \frac{3}{35}(1, 0, 0)^\top.$$

Par conséquent, il est clair que :

$$\dim \text{Lie}_{(0,0)}\{\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2\} = 3.$$

Comme  $\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2$  et  $[\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2]$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{z} \in \{0\} \times ]-\varepsilon, \varepsilon[^2$ ,  $\dim \text{Lie}_{\mathbf{z}}\{\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2\} = 3$ . En utilisant le fait que  $\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2$  et  $[\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2]$  sont des fonctions indépendantes de  $h$  (la première composante de  $\mathbf{z}$ ), on déduit que :

$$\dim \text{Lie}_{\mathbf{z}}\{\mathbf{Z}_c^1, \mathbf{Z}_c^2\} = 3 \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon[^2).$$

On conclut en utilisant le Théorème Chow dans un voisinage de  $\mathbb{R} \times \{(0, 0)^\top\}$ .  $\square$

### 8.1.3 Contrôlabilité en temps optimal

Nous allons maintenant étudier la contrôlabilité en temps optimal. De même que dans le Théorème 7.4.3, nous allons nous ramener à un espace de contrôles de dimension finie  $n \geq 2$ . Plus précisément comme dans la preuve du Théorème 8.1.5, nous considérons le problème de contrôle en temps optimal suivant :

**Problème 8.1.6.** Étant donnés  $c \in \mathcal{C}(n)$  (défini par (8.1.12)),  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , trouver le temps minimal  $T^* > 0$  tel qu'il existe  $\lambda \in L^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^n)$  pour lequel :

- $|\lambda(t)| \leq 1$  pour presque tout  $t \in [0, T^*]$ ;
- La solution  $(h, \mathbf{s})$  du système :

$$\dot{h} = -\frac{N_c(\mathbf{s})\lambda}{M_c(\mathbf{s})}, \quad (8.1.17a)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \lambda, \quad (8.1.17b)$$

muni de la condition initiale :

$$(h(0), \mathbf{s}(0)) = (0, \mathbf{0}), \quad (8.1.18)$$

satisfait :

- $h(T^*) = h_1$  et  $\mathbf{s}(T^*) = \mathbf{0}$ ;
- Pour tout  $t \in [0, T^*]$ ,  $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{S}(c) \cap \overline{B(0, \varsigma)}$ , si  $\varsigma < +\infty$  et  $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{S}(c)$ , sinon.

Il est à noter que pour  $\varsigma > 0$  suffisamment petit, nous avons  $\mathcal{S}(c) \cap \overline{B(0, \varsigma)} = \overline{B(0, \varsigma)}$ . Dans ce qui suit, nous allons considérer que  $\varsigma > 0$  est suffisamment petit de sorte que cette égalité ait lieu. Le fait d'imposer une contrainte  $\varsigma$  sur les variables d'état représentant la déformation du nageur est motivé par le fait que l'on souhaite avoir des petites déformations. De plus, comme nous allons étudier numériquement ce problème, il est plus évident de supposer que les variables représentant la déformation sont à valeurs dans une boule fermée plutôt que dans l'ouvert  $\mathcal{S}(c)$ .

Une conséquence de la démonstration du Théorème 8.1.5 est le corollaire suivant :

**Corollaire 8.1.7.** *Pour tous  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathcal{C}(n)$  (défini par (8.1.12)),  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et  $h_1 \in \mathbb{R}$ , il existe  $T > 0$  et  $\lambda \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$  tels que la solution  $(h, \mathbf{s})$  du problème de Cauchy (8.1.17)–(8.1.18) satisfait :*

$$h(T) = h_1, \quad \mathbf{s}(T) = \mathbf{0}, \quad (8.1.19)$$

avec la contrainte sur la variable de contrôle :

$$|\lambda(t)| \leq 1 \quad (t \in [0, T]) \quad (8.1.20)$$

et la contrainte sur l'état :

$$|\mathbf{s}(t)| \leq \varsigma \quad (t \in [0, T]). \quad (8.1.21)$$

**Remarque 8.1.8.** *Le Corollaire 8.1.7 assure que deux entrées scalaires suffisent à contrôler le nageur. Or le Théorème de la coquille Saint-Jacques (c.f. [Pur77]), affirme que deux contrôles scalaires sont nécessaires. Ainsi, le résultat du Corollaire 8.1.7 est, en un certain sens, optimal.*

Nous allons maintenant appliquer le Théorème de Filippov pour montrer l'existence d'un contrôle en temps optimal.

**Proposition 8.1.9.** *Pour tous  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathcal{C}(n)$  (défini par (8.1.12)) et  $h_1 \in \mathbb{R}^*$  et pour tout  $\varsigma > 0$  suffisamment petit, il existe un temps minimal  $T^* > 0$  et un contrôle  $\lambda \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$  satisfaisant le problème de contrôle en temps optimal 8.1.6.*

*Démonstration.* L'existence d'une solution au problème de contrôle (pour  $n \geq 2$ ) est assurée par le Corollaire 8.1.7. C'est-à-dire qu'il existe un temps de contrôle  $\bar{T} \in \mathbb{R}_+^*$  et un contrôle et temps  $\bar{\lambda} \in C^\infty([0, \bar{T}], \mathbb{R}^n)$  avec  $\|\bar{\lambda}\|_{L^\infty([0, \bar{T}], \mathbb{R}^n)} \leq 1$  tels que la solution  $(\bar{h}, \bar{s})$  du système dynamique associé satisfait  $\bar{h}(\bar{T}) = h_1$ ,  $\bar{s}(\bar{T}) = \mathbf{0}$  et pour tout  $t \in [0, \bar{T}]$ ,  $\|\bar{s}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varsigma$ .

Pour prouver l'existence d'un temps optimal  $T^*$ , nous allons utiliser le Théorème de Filippov (c.f. [HSV95, Ces83, AS04]).

Tout d'abord, la linéarité du problème de contrôle par rapport aux variables de contrôle permet de dire que l'ensemble :

$$\mathcal{A}(\mathbf{s}, t) = \{(\langle \mathbf{f}(\mathbf{s}), \boldsymbol{\lambda} \rangle, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ avec } |\boldsymbol{\lambda}|_2 \leq 1\}$$

est convexe pour tout  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\mathbf{s}|_2 \leq \varsigma$  et pour tout  $t \in [0, \bar{T}]$ .

Dans la définition de l'ensemble  $\mathcal{A}(\mathbf{s}, t)$ , on a noté  $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \frac{N_c(\mathbf{s})^\top}{M_c(\mathbf{s})} \in \mathbb{R}^n$ . Les résultats de régularité obtenus (dans le cas général) sur les matrices  $M_c(\mathbf{s})$  et  $N_c(\mathbf{s})$  et le résultat de positivité obtenu sur  $M_c(\mathbf{s})$  assurent que  $\mathbf{f}$  est une fonction continue ( $\mathbf{f}$  est même analytique) en  $\mathbf{s}$ . Ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, \bar{T}]$ , on a  $|\mathbf{f}(\mathbf{s}(t))| \leq C$ . De plus, comme  $|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leq 1$ , on en déduit une borne uniforme sur  $\bar{h}$ . En effet, pour tout  $t \in [0, \bar{T}]$ , on a :

$$|\bar{h}(t)| = \left| \int_0^t \langle \mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau)), \boldsymbol{\lambda}(\tau) \rangle d\tau \right| \leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau))| |\boldsymbol{\lambda}(\tau)| d\tau \leq C\bar{T}.$$

Par conséquent les variables d'état et de contrôle sont uniformément bornées sur  $[0, \bar{T}]$ . Ainsi, nous pouvons appliquer le Théorème de Filippov-Cesari (c.f. [HSV95, Theorem 3.1] ou [Ces83, Theorem 9.3]) pour conclure à l'existence d'un temps optimal  $T^*$  et d'un contrôle optimal  $\lambda$ .  $\square$

## 8.2 Problème approché et contrôle en temps optimal

Dans cette section, nous allons approcher le système dynamique sous-jacent au problème de contrôle optimal (dans le cas de la nage en symétrie axiale). Pour le système approché que nous allons considérer, nous allons voir que le temps optimal et un contrôle en temps optimal peuvent être explicitement donnés. Aussi, dans cette section, nous allons utiliser les résultats obtenus dans le Chapitre 2. Nous étudierons alors la limite du temps optimal lorsque la dimension de l'espace des contrôles ( $n \geq 2$ ) tend vers  $+\infty$ .

Nous allons utiliser dans cette section les notations du paragraphe 8.1.3 précédent. On rappelle le problème de contrôle considéré :

**Problème 8.2.1.** Étant donnés  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathcal{C}(n)$  (défini par (8.1.12)),  $\varsigma > 0$  suffisamment petit et  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , existe-t-il  $T > 0$  et  $\lambda \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$  avec :

$$|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leq 1 \quad (t \in [0, T]), \quad (8.2.1)$$

tel que la solution  $(h, \mathbf{s})$  du système dynamique :

$$\dot{h} = \langle \mathbf{f}(\mathbf{s}), \boldsymbol{\lambda} \rangle, \quad (8.2.2)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (8.2.3)$$

muni de la condition initiale :

$$(h(0), \mathbf{s}(0)) = (0, \mathbf{0}), \quad (8.2.4)$$

satisfait :

$$(h(T), \mathbf{s}(T)) = (h_1, \mathbf{0}) \quad (8.2.5)$$

et

$$|\mathbf{s}(t)| \leq \varsigma \quad (t \in [0, T]). \quad (8.2.6)$$

On remarque que pour  $\varsigma$  petit, via la Proposition 8.1.4, on obtient :

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} + M_n^{SW} \mathbf{s} + o(|\mathbf{s}|),$$

où  $M_n^{SW} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice définie par (8.1.15). On rappelle que cette matrice n'est pas une matrice symétrique.

Le modèle simplifié que nous allons considérer consiste à remplacer l'équation (8.2.2) par :

$$\dot{h} = \langle M_n^{SW} \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda} \rangle.$$

Ainsi, nous nous ramenons au problème étudié dans le Chapitre 2.

Le problème simplifié considéré est alors :

**Problème 8.2.2.** Étant donné  $n \geq 2$ ,  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ , l'objectif est de déterminer le temps minimal  $T_n^*$  pour lequel il existe  $\boldsymbol{\lambda} \in L^\infty([0, T_n^*], \mathbb{R}^n)$  tel que :

$$|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leq 1 \quad (t \in (0, T_n^*) \text{ p.p.}) \quad (8.2.7)$$

et tel que la solution  $(h, \mathbf{s}, h) \in W^{1,\infty}([0, T_n^*], \mathbb{R}) \times W^{1,\infty}([0, T_n^*], \mathbb{R}^n)$  du système :

$$\dot{h} = \langle M_n^{SW} \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \quad (8.2.8)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (8.2.9)$$

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{0}, \quad (8.2.10)$$

satisfait :

$$h(T_n^*) = h_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(T_n^*) = \mathbf{0} \quad (8.2.11)$$

et pour tout  $t \in [0, T_n^*]$  :

$$|\mathbf{s}(t)| \leq \varsigma. \quad (8.2.12)$$

On rappelle que la solution du Problème 8.2.2 est donnée par le Théorème 2.6.1 du Chapitre 2. On en donne ici un énoncé, sous forme de lemme, adapté aux notations de cette partie. Aussi, l'étude qui va suivre ne concerne que le temps optimal. Par conséquent, on ne rappelle pas la forme des contrôles en temps optimal obtenue dans le Théorème 2.6.1.

**Lemme 8.2.3.** Soit  $\lambda_n^*$  le plus grand module des valeurs propres de la partie antisymétrique de la matrice  $M_n^{SW}$  :

$$\lambda_n^* = \max \left\{ |\lambda|, \lambda \in \text{sp} \left( \frac{1}{2} (M_n^{SW} - M_n^{SW\top}) \right) \right\}.$$

On définit les deux grandeurs :

$$d_n^* = \sqrt{\frac{2|h_1|}{\pi\lambda_n^*}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi\varsigma}{2}.$$



Alors le temps optimal  $T_n^*$  associé au problème (8.2.7)-(8.2.12) est donné par :

$$T_n^* = \begin{cases} \pi d_n^* & \text{si } \varsigma \geq d^*, \\ \frac{\pi d_n^{*2}}{2r} + \tau & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.2.13)$$

Nous allons maintenant étudier la limite de  $T_n^*$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ceci revient à étudier la dépendance de  $\lambda_n^*$  par rapport à la taille de la matrice  $M_n^{SW}$ . Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 8.2.4.** Soit  $\varsigma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  et  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ . On définit les deux grandeurs :

$$d^* = 2\sqrt{\frac{|h_1|}{\pi}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi\varsigma}{2}.$$

Alors l'application  $n \mapsto T_n^*$  (où  $T_n^*$  est donné par (8.2.13)) est décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n^* = \begin{cases} \pi d^* & \text{si } \varsigma \geq d^*, \\ \frac{\pi d^{*2}}{2r} + \tau & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.2.14)$$

*Démonstration.* En utilisant l'expression (8.1.15) de la matrice  $M_n^{SW}$ , on obtient que sa partie antisymétrique  $A_n = \frac{1}{2}(M_n^{SW} - M_n^{SW\top}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice bidiagonale donnée par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & & & 0 \\ -a_2 & 0 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{n-1} & 0 & a_n \\ 0 & & & -a_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.2.15)$$

avec

$$a_k = \frac{-2k^2 + 2k + 1}{2(2k + 1)(2k + 3)} \quad (k \in \{2, \dots, n\}).$$

Étant donné la forme de  $T_n^*$  dans le Lemme 8.2.3, montrer les résultats de la proposition revient à montrer que  $(\lambda_n^*)$  est croissante et à calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^*$ .

Commençons par montrer que  $(\lambda_n^*)$  est croissante par rapport à  $n$ .

On remarque que pour tout  $n \geq 2$ ,  $iA_n$  est une matrice hermitienne et par conséquent que toutes ses valeurs propres  $\mu_1^n, \dots, \mu_n^n$  sont réelles. On peut supposer que ces valeurs propres sont ordonnées dans l'ordre croissant, ainsi,  $\mu_n^n = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \mu_j^n$ . De plus, on peut voir que si  $\mu$  est une valeur propre de  $iA_k$  alors  $-\mu$  en est aussi une. Ceci implique que  $\mu_n^n \geq 0$  pour tout  $n \geq 2$  et par conséquent que  $\mu_n^n = \lambda_n^*$ . Le *principe d'inclusion* (c.f. [HJ85, Theorem 4.3.15]) donne :

$$\mu_k^k \leq \mu_n^n \quad \text{pour tout } 2 \leq k \leq n. \quad (8.2.16)$$

Ainsi, nous avons  $\lambda_{n-1}^* \leq \lambda_n^*$  pour tout  $n \geq 3$ . Nous avons donc le résultat de décroissance sur  $n \mapsto \lambda_n^*$ .

Nous allons maintenant montrer que  $\lambda_n^*$  tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Dans ce but, nous commençons par montrer que :

$$\frac{2}{n} \sum_{k=2}^n |a_k| \leq \lambda_n^* \leq \frac{1}{2} \quad (n \geq 2). \quad (8.2.17)$$

• La borne supérieure est obtenue en appliquant le Théorème de Gershgorin (c.f. [HJ85, Theorem 6.1.1]) pour une localisation des valeurs propres de  $A_n$ . Plus précisément, les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $A_n$  sont telles que :

$$|\lambda| \leq \max(|a_2|, |a_2| + |a_3|, \dots, |a_{n-1}| + |a_n|, |a_n|) = |a_{n-1}| + |a_n| \leq \frac{1}{2}.$$

Ceci permet d'obtenir :

$$\lambda_n^* \leq \frac{1}{2}.$$

• La borne inférieure sur  $\lambda_n^*$  se déduit du Théorème de Rayleigh-Ritz (c.f. [HJ85, Theorem 4.2.2]) appliqué à la matrice hermitienne  $iA_n$ . Le maximum des modules des valeurs propres de cette matrice,  $\lambda_n^*$  est caractérisé par :

$$\lambda_n^* = \mu_n^n = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\mathbf{v}^* A_n \mathbf{v}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}}. \quad (8.2.18)$$

Choisissons  $\mathbf{v} = (v_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$  défini par :

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ i & \text{si } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ -1 & \text{si } k \equiv 3 \pmod{4}, \\ -i & \text{si } k \equiv 4 \pmod{4}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbf{v}^* A_n \mathbf{v} = - \sum_{k=2}^n a_k \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^* \mathbf{v} = n.$$

L'équation (8.2.18) et le fait que  $a_k \leq 0$  pour tout  $k \in \{2, \dots, n\}$  conduit à :

$$\lambda_n^* \geq \frac{\mathbf{v}^* A_n \mathbf{v}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n |a_k|.$$

Ainsi, l'estimation (8.2.17) est montrée.

Pour finir, nous allons montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n |a_k| = 1$ . Soit :

$$\mathcal{S}_n = 1 - \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n |a_k|.$$

On a :

$$\mathcal{S}_n = \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{2} - |a_k| \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(12k+5)}{(2k+1)(2k+3)}$$

et ainsi :

$$|\mathcal{S}_n| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(12k+5)}{4k^2} = \frac{6}{n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}. \quad (8.2.19)$$

Il est aisé de vérifier que le membre de droite de l'égalité (8.2.19) tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_n = 0$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n |a_k| = 1$ .

L'encadrement (8.2.17) permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^* = \frac{1}{2}$ .

Ceci achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 8.2.5.** *La décroissance de  $n \mapsto T_n^*$  peut être montrée plus aisément.*

*En effet, si pour tout  $n \geq 2$ , on note  $U_n$  l'ensemble des valeurs pouvant être prises par le contrôle  $\lambda$  ( $U_n$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ). Alors, on a pour tout  $n \geq 3$ ,  $U_{n-1} \subset U_n$  (ici,  $U_{n-1}$  est vu comme  $U_n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ). Ainsi, un contrôle pour le problème "de dimension  $n-1$ " le sera aussi (en un temps de contrôle identique) pour le problème "de dimension  $n$ ". Par conséquent, le temps optimal ne peut être que décroissant.*

Ci-dessus, on a montré de manière rigoureuse que le temps optimal  $T_n^*$  est une fonction décroissante du nombre de modes de déformation  $n$ . On peut le vérifier numériquement. Ceci est reporté sur la Figure 8.2 où les valeurs propres de  $\frac{1}{2}(M_n^{SW} - (M_n^{SW})^\top)$  ont été calculées numériquement avec la librairie ARPACK de MATLAB.

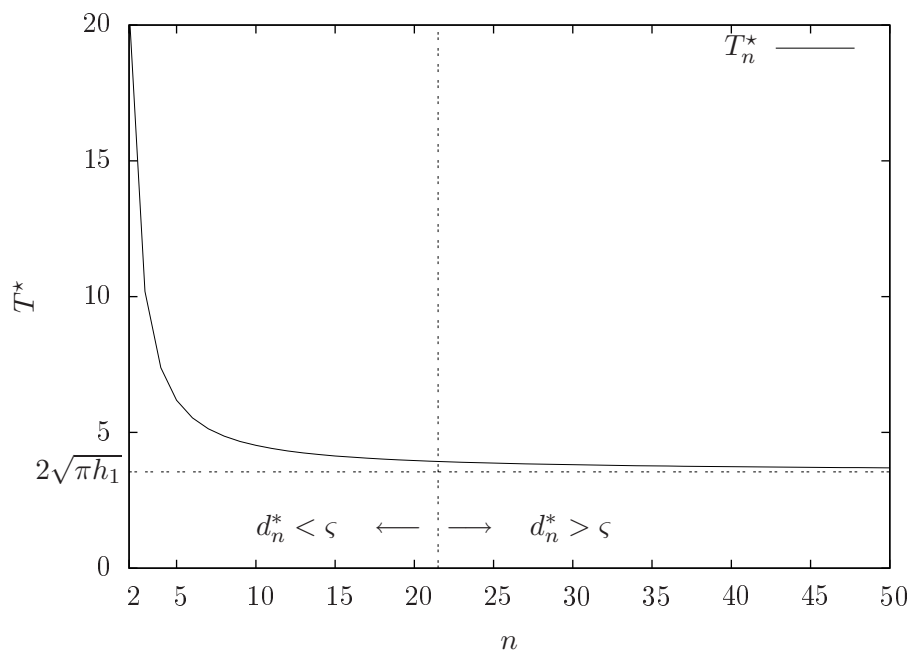


FIG. 8.2 – Temps optimal par rapport au nombre de modes de déformation  $n$  pour le problème de contrôle simplifié avec  $\zeta = 1.25$ . Convergence vers la valeur limite  $2\sqrt{\pi|h_1|}$  avec  $h_1 = 1$ .

## 8.3 Expérimentation numérique

### 8.3.1 Approximation du problème de Stokes

L'objet de ce paragraphe est de présenter une méthode rapide et efficace pour le calcul numérique de la solution de Stokes dans le cas d'une sphère légèrement déformée. Plus précisément, dans cette méthode, nous utiliserons l'expression de la solution du problème de Stokes homogène donnée dans le paragraphe 6.3, le problème revenant à déterminer les coefficients apparaissant dans la série. Pour ce faire, nous allons construire, par une méthode du type collocation, un système surdéterminé que nous résolvons par une méthode des moindres carrés.

Il existe d'autres méthodes dans la littérature pour la résolution du problème de Stokes extérieur. En particulier, la méthode d'intégrale de frontière. Pour cette méthode, on fait référence au livre de Pozrikidis [Poz92] et pour le cas à symétrie axiale, on fait référence à Allouges, DeSimone et Heltai [ADH11].

Une autre méthode peut être d'utiliser les éléments finis. Dans ce cas, nous considérerons un domaine fluide "grand". Cette méthode nécessite de remailler le domaine à chaque pas de temps. Pour éviter ceci, il est possible d'utiliser des méthodes de type monobloc, c.f. [SMSTT08]. Cependant ce type de méthode n'est pas très bien adapté au cas des problèmes posés en domaine extérieur. En effet, pour bien capturer le fait que le domaine est infini, cela nécessiterait d'imposer des conditions aux limites artificielles sur le bord du domaine fluide. Ceci est un problème en soit et n'est pas l'objet de cette thèse.

Un autre problème valable pour les deux méthodes citées précédemment est qu'il est difficile avec ces méthodes de capturer de petites perturbations du domaine. Ceci est lié au fait que la frontière est maillée et par conséquent la géométrie du domaine est difficile à capturer (ceci est particulièrement le cas dans la méthode monobloc).

Nous reprenons la forme des solutions du problème de Stokes extérieur dans le cas de la symétrie axiale et en coordonnées sphériques donnée par (6.3.7), dans la Section 6.3. On rappelle ci-dessous les expressions données par (6.3.8).

$$\mathbf{u}_\rho(\rho, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n \rho^{-n-1} + \delta_n \rho^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta), \quad (8.3.1a)$$

$$\mathbf{u}_\theta(\rho, \theta, \phi) = - \sum_{n=0}^{+\infty} ((n-1)\beta_n \rho^{-n-1} + (n-3)\delta_n \rho^{-n+1}) \frac{J_n(\cos \theta)}{\sin \theta}. \quad (8.3.1b)$$

où les réels  $\beta_n$  et  $\delta_n$  sont à déterminer. Ces expressions correspondent au cas où l'on cherche une solution au problème de Stokes homogène posé en domaine extérieur avec une limite bornée à l'infini, une frontière lisse et une condition limite régulière. On rappelle, c.f. Section 6.3, que la force appliquée par le fluide sur l'objet est dirigée suivant l'axe de symétrie  $\mathbf{e}_3$  et a pour expression :  $-4\pi\delta_2\mathbf{e}_3$ .

Soit  $r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse avec  $r > -1$  de sorte que l'application :

$$\begin{aligned} X_r : B &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto (1 + r(\cos \theta(\mathbf{x}))) \mathbf{x}, \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $B_r = X_r(B)$ , avec comme précédemment  $B$  la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ .

Dans le système de coordonnées sphériques,  $X_r$  s'écrit :

$$X_r(\rho, \theta, \phi) = (1 + r(\cos \theta))\rho \mathbf{e}_\rho.$$

On considère aussi  $\mathbf{w} : \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}^3$  une "condition limite" posée sur  $\partial B_r$ . On suppose de plus que  $\mathbf{w}$  est à symétrie axiale par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_3$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{w}$  est indépendant de la coordonnée  $\phi$  et que  $\mathbf{w}$  n'a pas de composante suivant l'axe  $\mathbf{e}_\phi$ .

L'objectif de ce paragraphe est la recherche d'une solution  $\mathbf{u}$  s'écrivant sous la forme (8.3.1) telle que :

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (8.3.2)$$

et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial B_r). \quad (8.3.3)$$

L'équation (8.3.3) se récrit en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{u}_\rho(1+r(\cos\theta), \theta) = \langle \mathbf{w}(1+r(\cos\theta), \theta), \mathbf{e}_\rho(\theta) \rangle \quad (\theta \in [0, \pi]), \quad (8.3.4a)$$

$$\mathbf{u}_\theta(1+r(\cos\theta), \theta) = \langle \mathbf{w}(1+r(\cos\theta), \theta), \mathbf{e}_\theta(\theta) \rangle \quad (\theta \in [0, \pi]). \quad (8.3.4b)$$

Dans les équations précédentes, on remarque que l'on a omis la dépendance en  $\phi$ . En effet, dans le cas de la symétrie axiale, il suffit de résoudre le problème sur un demi-plan de  $\mathbb{R}^3$  contenant l'axe  $(\mathbf{0}, \mathbf{e}_3)$ .

Pour avoir la condition à l'infini (8.3.2), il est nécessaire d'avoir  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Ainsi, (8.3.1) se récrit :

$$\mathbf{u}_\rho(\rho, \theta, \phi) = -\beta_1 \rho^{-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} (\beta_n \rho^{-n-1} + \delta_n \rho^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta), \quad (8.3.5a)$$

$$\mathbf{u}_\theta(\rho, \theta, \phi) = \left( \beta_0 \rho^{-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} ((n-1)\beta_n \rho^{-n-1} + (n-3)\delta_n \rho^{-n+1}) J_n(\cos \theta) \right) \frac{1}{\sin \theta}. \quad (8.3.5b)$$

L'objectif est alors de calculer les coefficients  $\beta_n$  pour  $n \geq 0$  et  $\delta_n$  pour  $n \geq 2$ . Pour ce faire, nous considérons une subdivision  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n_\theta} < \theta_{n_\theta+1} = \pi$  de l'intervalle  $[0, \pi]$ , pour  $n_\theta \in \mathbb{N}^*$ . Étant donné que nous avons supposé suffisamment de régularité, les expressions suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{w}(\varrho(\theta_i), \theta_i), \mathbf{e}_\varrho(\theta_i) \rangle \\ &= -\beta_1 \varrho(\theta_i)^{-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} (\beta_n \varrho(\theta_i)^{-n-1} + \delta_n \varrho(\theta_i)^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta_i), \end{aligned} \quad (8.3.6a)$$

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_i) \langle \mathbf{w}(\varrho(\theta_i), \theta_i), \mathbf{e}_\theta(\theta_i) \rangle \\ &= \beta_0 \varrho(\theta_i)^{-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} ((n-1)\beta_n \varrho(\theta_i)^{-n-1} + (n-3)\delta_n \varrho(\theta_i)^{-n+1}) J_n(\cos \theta_i), \end{aligned} \quad (8.3.6b)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n_\theta\}$  et avec  $\varrho(\theta) = 1 + r(\cos \theta)$ .

Numériquement, on se donne  $N > 2$  et on cherche des réels  $\beta_0, \dots, \beta_N$  et  $\delta_2, \dots, \delta_N$  et une solution du système des moindres carrés donné par l'ensemble des  $2n_\theta$  équations linéaires en l'inconnue  $(\beta_0, \dots, \beta_N, \delta_2, \dots, \delta_N)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$  :

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{w}(\varrho(\theta_i), \theta_i), \mathbf{e}_\varrho(\theta_i)(\theta_i) \rangle \\ &= -\beta_1 \varrho(\theta_i)^{-2} - \sum_{n=2}^N (\beta_n \varrho(\theta_i)^{-n-1} + \delta_n \varrho(\theta_i)^{-n+1}) P_{n-1}(\cos \theta_i), \end{aligned} \quad (8.3.7a)$$

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_i) \langle \mathbf{w}(\varrho(\theta_i), \theta_i), \mathbf{e}_\theta(\theta_i) \rangle \\ &= \beta_0 \varrho(\theta_i)^{-1} - \sum_{n=2}^N ((n-1)\beta_n \varrho(\theta_i)^{-n-1} + (n-3)\delta_n \varrho(\theta_i)^{-n+1}) J_n(\cos \theta_i), \end{aligned} \quad (8.3.7b)$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, n_\theta\}$ .

Pour ce type de système, nous n'avons pas étudié la convergence théorique de la solution approchée lorsque l'on fait tendre les paramètres  $N$  et  $n$  vers  $+\infty$ . Cependant, nous obtenons des solutions numériques acceptables lorsque les déformations ne sont pas trop grandes. Dans la pratique la borne sur l'amplitude des déformations est de l'ordre de  $\frac{1}{2}$ .

Pour vérifier numériquement notre méthode, nous avons vérifié numériquement que la solution dans le cas d'une sphère et avec une condition limite du type polynôme de Legendre est bien celle escomptée. De plus nous avons traité le cas de petites perturbations et vérifié que la variation par rapport à l'ordre de la perturbation est la même que celle donnée dans [HB65, Ch. 4.25, "Flow past en Approximate Sphere"]. En effet, dans le cas de cette section du livre de Happel et Brenner, on définit  $\varrho$  pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  par :

$$\varrho(\theta) = 1 - \varepsilon \cos^2 \theta,$$

c'est-à-dire que  $r(\theta) = -\varepsilon \cos^2 \theta$ , avec  $\varepsilon \geq 0$  petit. Les conditions limites sur la frontière du domaine sont  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3$ . Dans ce cas, la force exercée par le fluide sur la sphère déformée est donnée par l'expression :

$$6\pi \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon\right) \mathbf{e}_3.$$

Dans le cas d'une sphère parfaite, nous rappelons que la force avec la même condition limite est  $6\pi$ . Ainsi, la dérivée du terme de force par rapport à  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$  est  $\frac{-6\pi}{5}$ . Nous avons donc vérifié numériquement que l'on retrouvait bien cette valeur.

Il apparaît donc cohérent d'utiliser ce schéma numérique dans le cas de petites perturbations de la sphère unité.

### 8.3.2 Recherche d'un contrôle en temps optimal

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en œuvre la méthode directe de discrétisation totale, introduite dans le paragraphe 1.3.2, pour la recherche numérique d'un contrôle en temps optimal.

On rappelle que dans le paragraphe précédent, nous avons construit un "solveur" de Stokes en symétrie axiale pour une sphère perturbée. Ce solveur permet entre autre d'obtenir aisément la force exercée par le fluide sur le nageur. On rappelle que ce solveur prend comme arguments un paramètre  $n_\theta$  (le nombre de points de collocation), un paramètre  $N$  (le nombre de termes dans la série), une condition au bord  $\mathbf{w}$  et la forme du domaine  $r$ . On se fixe  $c \in \mathcal{C}(n)$  une signature du nageur du type  $c = (0, (D_1, \dots, D_n))$  avec  $D_1, \dots, D_n$  à symétrie axiale. Plus précisément, on suppose que  $D_1, \dots, D_n$  sont définis en coordonnées sphériques par :

$$D_i(\rho, \theta, \phi) = \rho r_i(\cos \theta) \quad ((\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[, \quad i \in \{1, \dots, n\}),$$

avec  $r_1, \dots, r_n$  des fonctions lisses de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Le domaine est caractérisé par le paramètre de forme  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$ , en effet, on a :

$$r(\zeta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i r_i(\zeta) \quad (\zeta \in [-1, 1]).$$

On note  $\mathbb{F}^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s}, \mathbf{w})$  la force obtenue par ce solveur. D'autre part, la condition limite  $\mathbf{w}$  est du type :

$$\mathbf{w} = \dot{h}\mathbf{e}_3 + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{s}}_i D_i \circ X_c(\mathbf{s})^{-1},$$

où nous avons noté comme précédemment,  $X_c(\mathbf{s}) = I_d + \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i D_i$ . Par linéarité du terme de force, on observe qu'alors  $n + 1$  problèmes de Stokes sont à résoudre. Ce sont les problèmes de Stokes homogènes avec les conditions aux limites  $D_1 \circ X_c(\mathbf{s})^{-1}, \dots, D_n \circ X_c(\mathbf{s})^{-1}$  et  $\mathbf{e}_3$ . On note alors  $\mathbf{F}_i^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s})$  (pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ ) les termes de force résultant de chacun de ces problèmes. Plus précisément, on a :

$$\mathbf{F}_i^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \mathbb{F}^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s}, \mathbf{e}_3) & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{F}^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s}, D_i \circ X_s^{-1}) & \text{si } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Nous noterons aussi :

$$\mathbf{f}_i^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{F}_i^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s})}{\mathbf{F}_0^{c,n_\theta,N}(\mathbf{s})} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons  $\mathbf{f}_i$  ces opérateurs.

Le problème approché considéré est le suivant :

**Problème 8.3.1.** Étant donné  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varsigma > 0$ ,  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathcal{C}(n)$  et les deux paramètres  $N > 2$  et  $n_\theta \in \mathbb{N}^*$ , trouver le temps minimal  $T^* > 0$  tel qu'il existe une fonction  $\boldsymbol{\lambda} : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisfaisant  $|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T^*]$ , pour laquelle la solution  $(h, \mathbf{s})$  du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{f}_i(\mathbf{s}), & h(0) &= 0, \\ \dot{\mathbf{s}} &= \boldsymbol{\lambda}, & \mathbf{s}(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

satisfait :

- $h(T^*) = h_1$  et  $\mathbf{s}(T^*) = \mathbf{0}$  ;
- $|\mathbf{s}(t)| \leq \varsigma$  pour tout  $t \in [0, T^*]$ .

Comme des contraintes sur l'état du système sont présentes dans ce problème, il est plus aisé de mettre en œuvre une méthode directe pour la résolution numérique de ce problème. En effet, la mise en œuvre d'une méthode de tir nécessiterait de connaître a priori la forme des trajectoires optimales. Or ceci semble délicat à obtenir étant donné la forte non linéarité du problème par rapport à la variable d'état  $\mathbf{s}$ .

Dans le Chapitre 1, nous avons présenté la méthode de *discrétisation totale*. On rappelle que cette méthode est basée sur un schéma en temps pour la résolution du système dynamique sous-jacent au problème de contrôle. Dans le système considéré, nous allons utiliser une méthode d'Euler explicite.

Plus précisément, on considère une subdivision uniforme  $0 = t_0 < \dots < t_{n_t} = 1$  de l'intervalle  $[0, T^*]$ , pour  $n_t \in \mathbb{N}^*$ . On a alors  $t_{j+1} - t_j = \frac{T^*}{n_t}$  pour tout  $j \in \{0, \dots, n_t\}$ .

Soit  $\boldsymbol{\lambda}^j$  l'évaluation de  $\boldsymbol{\lambda}$  à l'instant  $t_j$ . On considère aussi les inconnues  $h^0, \dots, h^{n_t} \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{s}^0, \dots, \mathbf{s}^{n_t} \in \mathbb{R}^n$ . Ces inconnues sont telles que :

$$\begin{aligned} h^{j+1} &= h^j + \frac{T^*}{n_t} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\lambda}_i^j \mathbf{f}_i(\mathbf{s}^j), \\ \mathbf{s}^{j+1} &= \mathbf{s}^j + \frac{T^*}{n_t} \boldsymbol{\lambda}^j, \end{aligned} \quad (j \in \{0, \dots, n_t - 1\}) \quad (8.3.8a)$$

et

$$h^0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{s}^0 = \mathbf{0}. \quad (8.3.8b)$$

Le Problème 8.3.1 s'écrit avec le schéma d'Euler explicite :

**Problème 8.3.2.** Étant donné  $h_1 \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varsigma > 0$ ,  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathcal{C}(n)$  et les deux paramètres  $N > 2$  et  $n_\theta \in \mathbb{N}^*$ , minimiser  $T^*$  sous les contraintes :

- $T^* > 0$ ;
- il existe  $\boldsymbol{\lambda}^0, \dots, \boldsymbol{\lambda}^{n_t} \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\boldsymbol{\lambda}^j| \leq 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n_t\}$  tel que la solution  $(h^0, \dots, h^{n_t}, \mathbf{s}^0, \dots, \mathbf{s}^{n_t})$  du système (8.3.8) satisfasse :
  1.  $h^{n_t} = h_1$  et  $\mathbf{s}^{n_t} = \mathbf{0}$ ;
  2.  $|\mathbf{s}^j| \leq \varsigma$  pour tout  $j \in \{0, \dots, n_t\}$ .

On remarque que les contraintes ne portent pas sur les inconnues  $h^1, \dots, h^{n_t-1}$ , et que les variables  $\mathbf{s}^j$  peuvent être calculées indépendamment des variables  $h^j$ . Ainsi dans la mise en œuvre pratique de ce problème de minimisation, nous calculons  $h^{n_t}$  par la méthode des trapèzes. En effet, on a  $h(T) = \int_0^T \langle \mathbf{f}(\mathbf{s}), \boldsymbol{\lambda} \rangle dt$ . Ceci permet de réduire le nombre de variables dans le problème de minimisation.

Ce type de problème de minimisation sous contraintes peut être abordé par une méthode du type point intérieur. Aussi pour sa résolution, nous avons utilisé la librairie `Ipopt`, [WB06], interfacée avec `MATLAB`. Il est aussi possible d'utiliser la fonction `fmincon` de `MATLAB`<sup>1</sup>. L'étape d'initialisation de l'algorithme est faite à l'aide du calcul effectué dans le Chapitre 2.

En effet, on initialise l'algorithme avec la solution calculée analytiquement dans le Chapitre 2, en prenant comme matrice  $M$  le gradient du vecteur  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)^\top$  en  $\mathbf{0}$ .

La fin de ce paragraphe est consacrée à des exemples numériques.

Pour ce faire, nous considérons  $c = (0, (D_1, D_2)) \in \mathcal{C}(2)$  avec  $D_0$  et  $D_1$  tels que pour tout  $x \in \Sigma$ , on a :

$$D_1(x) = P_2(\cos \theta(x)) \mathbf{e}_\rho(\theta(x)) \quad \text{et} \quad D_2 = P_3(\cos \theta(x)) \mathbf{e}_\rho(\theta(x)),$$

avec  $P_2$  et  $P_3$  les deuxièmes et troisièmes polynômes de Legendre.

Nous commençons par vérifier que lorsque  $\varsigma$  tend vers 0, le contrôle en temps optimal obtenu à partir de la matrice de Shapere et Wilczek,  $M^{SW}$ , tend bien vers un contrôle pour le système complet.

Soit  $h_1$  un objectif pour la position du centre de masse. On note  $\bar{T}$  le temps optimal et  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$  un contrôle en temps optimal pour le problème simplifié (avec la matrice de Shapere et Wilczek) et on note  $(\bar{h}, \bar{\mathbf{s}})$  la solution du système dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{h}} &= \langle M^{SW} \bar{\mathbf{s}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \rangle, \\ \dot{\bar{\mathbf{s}}} &= \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \end{aligned}$$

muni des conditions initiales :

$$(\bar{h}(0), \bar{\mathbf{s}}(0)) = (0, \mathbf{0}_2).$$

et l'on note  $(h^j, \mathbf{s}^j)_{j \in \{0, \dots, n_t\}}$  la solution du système (8.3.8) avec comme entrée  $\boldsymbol{\lambda}^j = \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\frac{jT}{n_t+1})$  pour  $j \in \{0, \dots, n_t\}$ . Pour que le schéma d'Euler explicite n'induisse pas d'erreur, on se donne  $n_t \in \mathbb{N}^*$  de sorte que  $\frac{1}{n_t} < \frac{\varsigma}{7}$ .

<sup>1</sup>Voir le lien : <http://www.iecn.u-nancy.fr/~loheac/>, rubrique codes.



Sur la Figure 8.3, nous avons représenté en échelle log – log la convergence de  $h^{n_t}$  vers  $h_1$ .

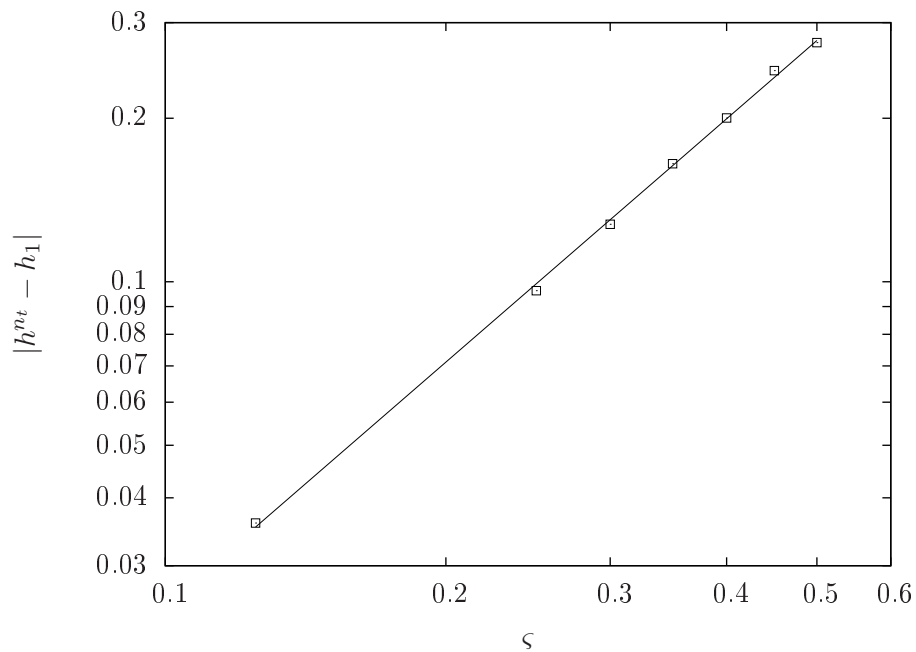


FIG. 8.3 – Représentation en échelle log – log de la convergence de  $h^{n_t}$  vers  $h_1$ , dans le cas  $n = 2$ , lorsque  $\varsigma$  tend vers 0. On a choisi  $h_1 = \frac{1}{2}$ . La pente de la droite obtenue par régression linéaire est de l'ordre de 1.5.

Sur la Figure 8.4, nous avons représenté l'écart entre les valeurs de  $\bar{h}$  et  $(h^j)_{j \in \{0, \dots, n_t\}}$ .

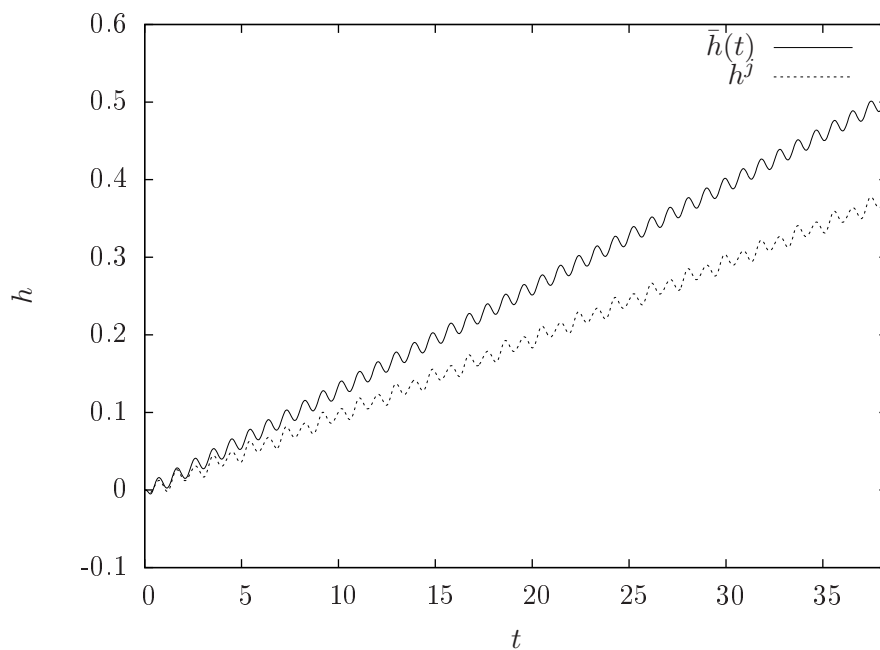


FIG. 8.4 – Tracé de  $\bar{h}$  et  $(h^j)$  pour  $h_1 = \frac{1}{2}$  et  $\varsigma = 0.3$ , dans le cas  $n = 2$ .

Nous donnons maintenant des solutions du Problème 8.3.2. Comme précédemment, on se fixe  $h_1 = \frac{1}{2}$  et l'algorithme de recherche du minima est initialisé avec le contrôle donné par :

$$\lambda^j = \bar{\lambda} \left( \frac{j\bar{T}}{n_t + 1} \right).$$

Une solution numérique obtenue avec la méthode de discrétisation totale est représentée sur la Figure 8.5.

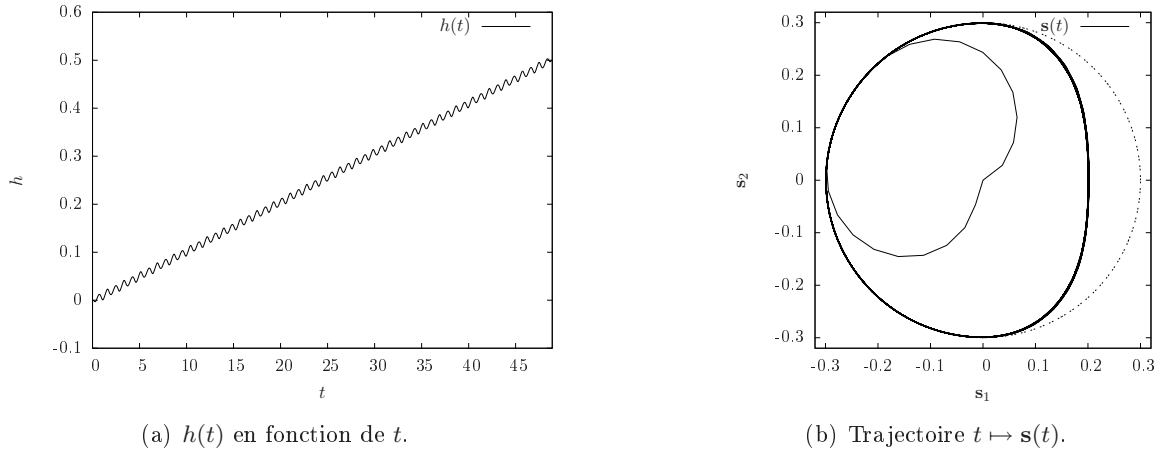


FIG. 8.5 – Trajectoire  $t \mapsto (h(t), \mathbf{s}(t))$  avec  $n = 2$ ,  $h_1 = \frac{1}{2}$  et  $\varsigma = 0.3$ .

Sur les Figures 8.6 et 8.7, nous avons représenté les déformations du nageur sur une période.

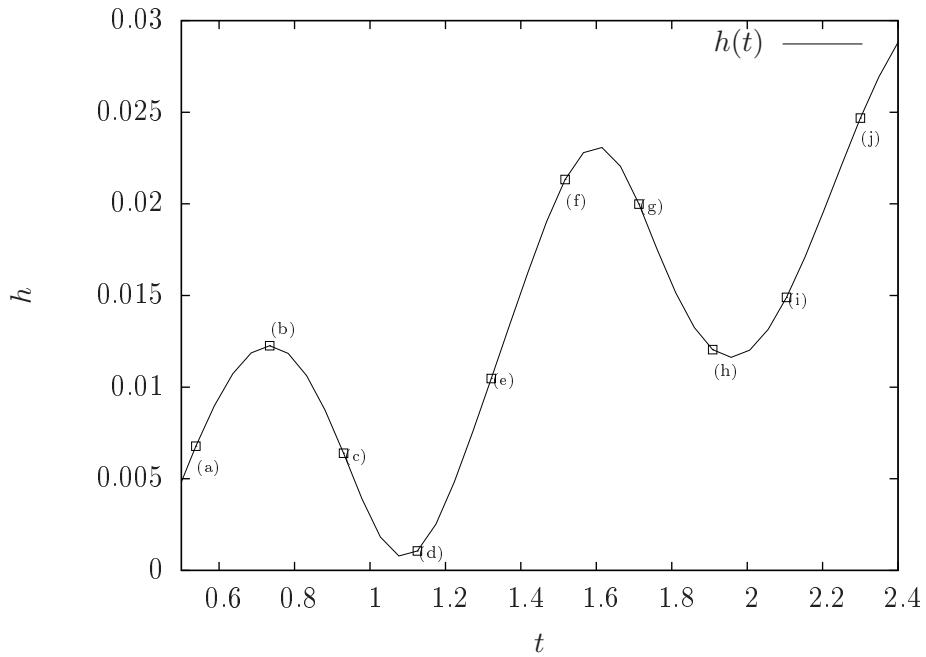


FIG. 8.6 – Position du centre de masse du nageur entre les instants  $t_0 = 0.5384$  et  $t_1 = 2.3002$  (correspondant à une période) obtenue avec  $h_1 = \frac{1}{2}$  et  $\varsigma = 0.3$ , dans le cas  $n = 2$ . Les référence (a)–(j) correspondent aux déformations représentées sur la Figure 8.7.

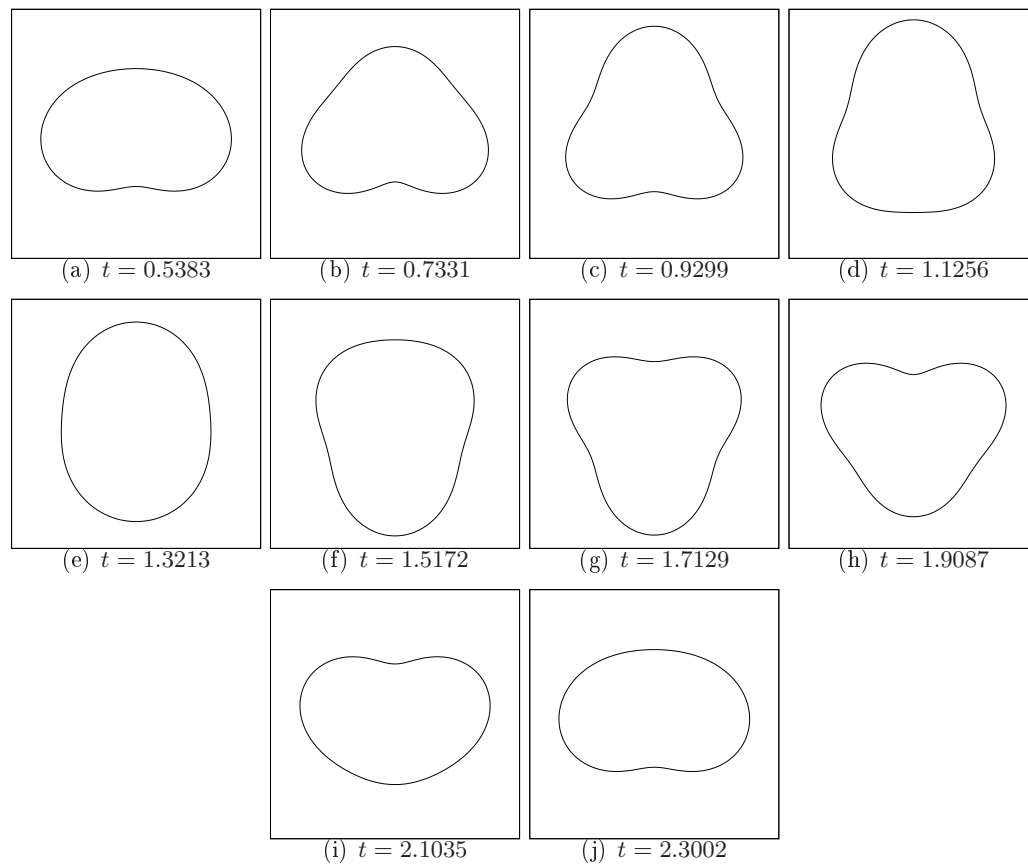


FIG. 8.7 – Forme du nageur entre les instants  $t_0 = 0.5384$  et  $t_1 = 2.3002$  obtenue avec  $h_1 = \frac{1}{2}$  et  $\varsigma = 0.3$ , dans le cas  $n = 2$ .

Pour finir, nous donnons sur la Figure 8.8 une illustration de la déformation du nageur, en un temps proche de celui correspondant à la déformation (g) de la Figure 8.7, avec la reconstruction du champ de vitesse et du champ de pression, dans le cas de deux déformations et avec le contrôle obtenu par l'algorithme de minimisation.

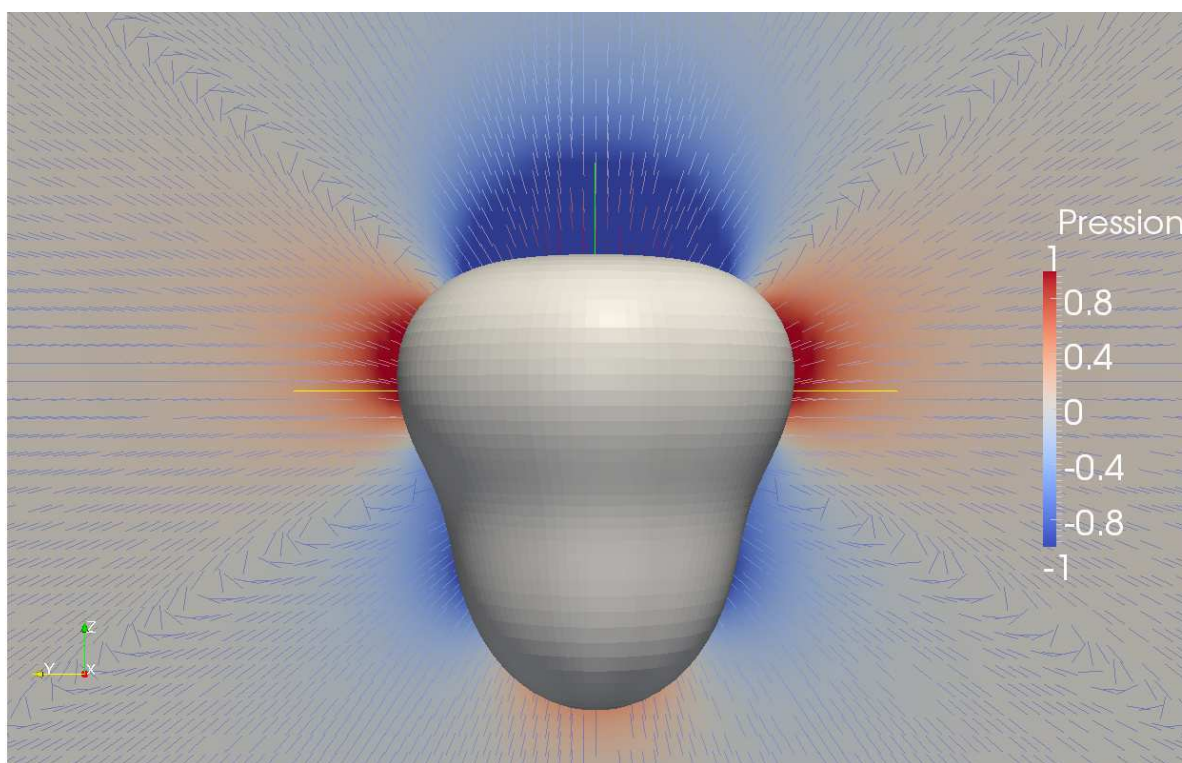


FIG. 8.8 – Déformation du nageur et représentation du champ de pression et de vitesse dans le fluide.



# Conclusion et perspectives sur le problème de la nage

Dans cette partie, nous avons montré que tout micro-nageur 3D est capable de nager, c'est-à-dire non seulement de se mouvoir dans le fluide, mais aussi de suivre une trajectoire prescrite.

De plus, ceci peut être effectué par le moyen de mouvements arbitrairement petits rajoutés à un mouvement prescrit.

Lorsque les changements de forme sont exprimés comme une combinaison linéaire finie de déformations élémentaires et qu'aucune modification arbitraire de la forme n'est prescrite, nous avons montré que seul quatre déformations élémentaires sont requises pour que le nageur soit capable de suivre n'importe quelle trajectoire rigide prescrite. Dans ce cas, lorsque la vitesse de déformation est à valeurs dans un compact, un contrôle optimal existe pour une grande variété de fonctions de coût. De plus dans le cas à symétrie axiale, nous sommes parvenus à calculer numériquement des contrôles en temps optimal avec des contraintes sur l'amplitude des déformations.

Dans cette partie, nous avons montré qu'avec quatre déformations de base prescrites (deux dans la cas d'un nageur à symétrie axiale), nous sommes capables de contrôler le nageur à bas nombre de Reynolds. Il est naturel de se demander si cela est possible avec moins de quatre déformations. Nous savons que deux déformations de base sont nécessaires. En effet dans le cas où une seule déformation est prescrite, nous rentrons dans le cadre du Théorème de la coquille Saint-Jacques et par conséquent le nageur ne peut être contrôlable. Aussi, si l'on ne prescrit que deux déformations de base, pour montrer le résultat de contrôlabilité, un calcul sur la dimension nous permet d'affirmer qu'il est nécessaire de calculer des crochets de Lie d'ordre trois. C'est-à-dire qu'il serait nécessaire de calculer des dérivées de formes jusqu'à l'ordre trois. Ceci est en cours d'étude avec l'aide du logiciel de calcul formel `maxima`.

Dans toute cette partie, nous avons considéré que le nageur était seul dans le domaine et que le domaine fluide occupait l'espace  $\mathbb{R}^3$  entier.

Dans le cas où le domaine fluide est borné, on peut envisager d'adapter la méthode utilisée dans ce travail. Cependant, il est à noter que dans ce cas, les forces ne sont plus indépendantes de la position du nageur. Ceci rajoute un peu de complexité au problème, mais pourrait aussi permettre de pouvoir contrôler le nageur avec moins de déformations de base prescrites. En effet, dans ce cas, la dérivée par rapport à la position du centre de masse du nageur n'est plus nécessairement nulle.

Dans le cas où l'on considère plusieurs nageurs, la méthode utilisée ne s'applique plus. En effet, dans ce cas, l'ensemble formé par les nageurs n'est pas un difféomorphisme de la boule unité. Cependant une idée pour aborder ce problème est de considérer que les nageurs sont éloignés. Ainsi l'influence d'un nageur sur l'autre peut être négligée. La conclusion suivrait alors par analyticité.

Une autre question à plus longue échéance est celle de la contrôlabilité lorsque l'on ne se place pas dans le cadre d'un nombre de Reynolds nul ou infini. Pour ce problème, nous pensons procéder par étapes. En effet, le fait que l'on se soit placé à bas nombre de Reynolds a induit la disparition de tous les termes d'inertie (tant pour le fluide que pour le nageur).

Une première étape est de conserver l'inertie du nageur, c'est-à-dire que l'on conserve une dérivée seconde pour la position et l'orientation du nageur. Avec cette modélisation, on reste dans le cadre du contrôle géométrique. La démonstration de la contrôlabilité pour ce problème est un travail en cours avec J.-C. Vivalda.

Une fois ce résultat de contrôlabilité montré, nous pouvons rajouter le terme inertiel des équations de Navier-Stokes négligé dans les équations de Stokes stationnaires. Dans un premier temps, nous pensons uniquement rajouter la partie linéaire du terme inertiel, c'est-à-dire considérer les équations de Stokes d'évolution. Pour montrer le résultat de contrôlabilité pour ce système, il n'est plus envisageable de considérer les outils du contrôle géométrique. Une parade est alors d'utiliser la méthode du retour décrite au Chapitre 1. En effet, le fait de pouvoir calculer un contrôle dans le cas sans inertie nous permettrait de construire des trajectoires particulières et l'utilisation de la méthode du retour le long de ces trajectoires nous permettrait de montrer le résultat de contrôlabilité avec un fluide régi par les équations de Stokes d'évolution.

La dernière étape est le rajout du terme non linéaire des équations de Navier-Stokes. Pour montrer un résultat de contrôlabilité dans ce cas, nous pensons utiliser un résultat de perturbation. En effet, les équations de Navier-Stokes peuvent être vues (au moins pour un nombre de Reynolds petit) comme une perturbation des équations de Stokes d'évolution.

Une dernière question est d'ordre numérique. En effet, nous avons donné une méthode numérique construite à la main qui semble assez efficace pour les questions posées dans cette étude. Cependant, pour être complet, il est nécessaire de montrer un résultat de convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Aussi, cette méthode se révèle inefficace dans le cas où le domaine est trop déformé. Il semble alors intéressant de développer une méthode numérique efficace pour le calcul de la force exercée par le fluide sur le nageur dans des domaines très différents d'une sphère. Comme un des principaux intérêts de la nage est la résolution d'un problème de contrôle, il est nécessaire que cette méthode soit rapide. En effet, dans les méthodes de recherche d'un contrôle exposées (méthodes de tir ou méthodes directes), la fonction calculant les termes de forces sera appelée un grand nombre de fois. À notre connaissance, les méthodes d'intégrale frontière seraient particulièrement adaptées pour la résolution de ce problème. Cependant, comme l'objectif *ultime* de la nage est la contrôlabilité du nageur placé dans les équations de Navier-Stokes, une méthode de type intégrale frontière pour la résolution du domaine fluide est difficile à mettre en œuvre. En effet le terme de dérivation matérielle nécessite d'aller rechercher (pour le schéma en temps) la valeur de la vitesse à la position occupée précédemment par le point matériel. Or cette position n'est pas évidente à obtenir dans le cas de la méthode des intégrales frontières. Plus précisément, le calcul de cette position nécessiterait de construire le champ de vitesse dans le domaine fluide et cette étape de reconstruction est coûteuse.

Ainsi, dans le cas des équations de Navier-Stokes ou de Stokes d'évolution, la méthode qui semble la plus adaptée est la méthode des éléments finis.

# Bibliographie

- [ADH<sup>+</sup>10] F. Alouges, A. DeSimone, L. Heltai, A. Lefebvre, and B. Merlet. Optimally swimming Stokesian robots. July 2010.
- [ADH11] François Alouges, Antonio DeSimone, and Luca Heltai. Numerical strategies for stroke optimization of axisymmetric microswimmers. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 21(2) :361–387, 2011.
- [ADL08] François Alouges, Antonio DeSimone, and Aline Lefebvre. Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example. *J. Nonlinear Sci.*, 18(3) :277–302, 2008.
- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [AS04] Andrei A. Agrachev and Yuri L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.
- [BCD97] Martino Bardi and Italo Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.
- [BFCLS97] Juan Antonio Bello, Enrique Fernández-Cara, Jérôme Lemoine, and Jacques Simon. The differentiability of the drag with respect to the variations of a Lipschitz domain in a Navier-Stokes flow. *SIAM J. Control Optim.*, 35(2) :626–640, 1997.
- [BFT06] Bernard Bonnard, Ludovic Faubourg, and Emmanuel Trélat. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, volume 51 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [BG11] Muriel Boulakia and Sergio Guerrero. Local null controllability of a fluid-solid interaction problem in dimension 3. Rapport de recherche, 2011.
- [BGG56] R. Bellman, I. Glicksberg, and O. Gross. On the “bang-bang” control problem. *Quart. Appl. Math.*, 14 :11–18, 1956.
- [BGG00] Richard Beals, Bernard Gaveau, and Peter C. Greiner. Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(7) :633–689, 2000.
- [BH75] Arthur E. Bryson, Jr. and Yu Chi Ho. *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C., 1975. Optimization, estimation, and control, Revised printing.



- [BH07] J. Frédéric Bonnans and Audrey Hermant. Well-posedness of the shooting algorithm for state constrained optimal control problems with a single constraint and control. *SIAM J. Control Optim.*, 46(4) :1398–1430 (electronic), 2007.
- [Bla71] J. R. Blake. A spherical envelope approach to ciliary propulsion. *J. Fluid Mech.*, 46 :199–208, 1971.
- [Bla73] J. R. Blake. A finite model for ciliated micro-organisms. *Journal of Biomechanics*, 6 :133–140, 1973.
- [Blo03] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. With the collaboration of J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, With scientific input from P. S. Krishnaprasad, R. M. Murray and D. Zenkov, Systems and Control.
- [BLR88] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Un exemple d’utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation de problèmes hyperboliques. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, (Special Issue) :11–31 (1989), 1988. Nonlinear hyperbolic equations in applied sciences.
- [BLR92] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control. and Optim.*, 30 :1024–1065, 1992.
- [Bon] Matthieu Bonnard. On the Stability of Self-Propelled Bodies with Respect to their Shape Motion.
- [BP86] V. Barbu and Th. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*, volume 10 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, romanian edition, 1986.
- [BPLV07] F. Boyer, M. Porez, A. Leroyer, and M. Visonneau. Fast dynamics of an Eel-like robot, comparisons with navier-stokes simulations. Technical report, 2007.
- [Bre64] Howard Brenner. The stokes resistance of a slightly deformed sphere. *Chemical Engineering Science*, 19(8) :519 – 539, 1964.
- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Bro82] R. W. Brockett. Control theory and singular Riemannian geometry. In *New directions in applied mathematics (Cleveland, Ohio, 1980)*, pages 11–27. Springer, New York, 1982.
- [BSFdIV10] Joseph Frédéric Bonnans and Constanza Sánchez-Fernández de la Vega. Optimal control of state constrained integral equations. *Set-Valued Var. Anal.*, 18(3-4) :307–326, 2010.
- [BT11] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Stabilization of parabolic nonlinear systems with finite dimensional feedback or dynamical controllers : application to the Navier-Stokes system. *SIAM J. Control Optim.*, 49(2) :420–463, 2011.
- [Bur97] N. Burq. Contrôlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptot. Anal.*, 14(2) :157–191, 1997.
- [Ces83] Lamberto Cesari. *Optimization—theory and applications*, volume 17 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1983. Problems with ordinary differential equations.

- [Chi81] Stephen Childress. *Mechanics of swimming and flying*, volume 2 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [Cla90] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edition, 1990.
- [CM10] Thomas Chambrion and Alexandre Munnier. Generalized Scallop Theorem for Linear Swimmers. August 2010.
- [CM11] Thomas Chambrion and Alexandre Munnier. Locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid. *J. Nonlinear Sci.*, 21(3) :325–385, 2011.
- [Cor07] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [DMDM11] Gianni Dal Maso, Antonio DeSimone, and Marco Morandotti. An existence and uniqueness result for the motion of self-propelled microswimmers. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(3) :1345–1368, 2011.
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [ERAH<sup>+</sup>08] M. El Rafei, M. Alamir, G. Hafidi, N. Marchand, M. Porez, and F. Boyer. Motion control of a three-dimensional Eel-like robot. 2008.
- [EZ12] S Ervedoza and Enrique Zuazua. The wave equation : Control and numerics. In *Control of Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, CIME Subseries. 2012. to appear.
- [Fat64] H. O. Fattorini. Time-optimal control of solutions of operational differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 2 :54–59, 1964.
- [Fat77] H. O. Fattorini. The time optimal problem for distributed control of systems described by the wave equation. In *Control theory of systems governed by partial differential equations (Conf. Naval Surface Weapons Center, Silver Spring, Md., 1976)*, pages 151–175. Academic Press, New York, 1977.
- [Fat05] H. O. Fattorini. *Infinite dimensional linear control systems*, volume 201 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. The time optimal and norm optimal problems.
- [Gal94] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. Linearized steady problems.
- [Gal97] Giovanni P. Galdi. On the steady, translational self-propelled motion of a symmetric body in a Navier-Stokes fluid. In *Classical problems in mechanics*, volume 1 of *Quad. Mat.*, pages 97–169. Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 1997.
- [GL99] Fausto Gozzi and Paola Loreti. Regularity of the minimum time function and minimum energy problems : the linear case. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1195–1221 (electronic), 1999.
- [GS91] Vivette Girault and Adélia Sequeira. A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 114(4) :313–333, 1991.

- [HB65] John Happel and Howard Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [HJ85] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [HST] Falk Hante, Mario Sigalotti, and Marius Tucsnak. On conditions for asymptotic stability of dissipative infinite-dimensional systems with intermittent damping.
- [HSV95] Richard F. Hartl, Suresh P. Sethi, and Raymond G. Vickson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Rev.*, 37(2) :181–218, 1995.
- [IT79] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov. *Theory of extremal problems*, volume 6 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.
- [IT07] Oleg Imanuvilov and Takéo Takahashi. Exact controllability of a fluid-rigid body system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(4) :408–437, 2007.
- [Jac59] Caius Jacob. *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Préface de Henri Villat. Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucharesst, 1959.
- [Jaf88] Stéphane Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(14) :759–762, 1988.
- [Jur97] Velimir Jurdjevic. *Geometric control theory*, volume 52 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [KGB07] W. Khalil, G. Gallot, and F. Boyer. Dynamic modeling and simulation of a 3-D serial Eel like robot. 37 :1259–1268, 2007.
- [KN05] A. M. Kovalev and V. N. Nespornyĭ. Impulsive-discontinuous stabilization of the Brockett integrator. *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, (5) :5–15, 2005.
- [Kom92] V. Komornik. On the exact internal controllability of a Petrowsky system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(4) :331–342, 1992.
- [Kra89] W. Krabs. On time-minimal distributed control of vibrations. *Appl. Math. Optim.*, 19(1) :65–73, 1989.
- [KW11a] Karl Kunisch and D Wachsmuth. Time optimal control of the wave equation, its regularization and numerical realization. *SFB-Report*, 2011-017 :1203–1215, 2011.
- [KW11b] Karl Kunisch and Lijuan Wang. Time optimal control of the heat equation with pointwise control constraints. *preprint*, 2011.
- [Lad69] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
- [Lam93] Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, sixth edition, 1993. With a foreword by R. A. Caflisch [Russel E. Caflisch].
- [Leb92] G. Lebeau. Contrôle de l'équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.

- [Lig52] M. J. Lighthill. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 :109–118, 1952.
- [Lig75] James Lighthill. *Mathematical biofluidynamics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975. Based on the lecture course delivered to the Mathematical Biofluidynamics Research Conference of the National Science Foundation held from July 16–20, 1973, at Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 17.
- [Lio68] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.
- [LM12] Jérôme Lohéac and Alexandre Munnier. Controllability of 3D Low Reynolds Swimmers. February 2012.
- [LS12] Jérôme Lohéac and Jean-François Scheid. Time optimal control for a non-holonomic system with state constraint. June 2012.
- [LST] Jérôme Lohéac, Jean-François Scheid, and Marius Tucsnak. Controllability and time optimal control for low reynolds numbers swimmers. *Acta Applicandae Mathematicae*, pages 1–26. 10.1007/s10440-012-9760-9.
- [LT12] Jérôme Lohéac and Marius Tucsnak. Maximum principle and bang-bang property of time optimal controls for Schrödinger type systems. April 2012.
- [ML10] Sébastien Michelin and Eric Lauga. Efficiency optimization and symmetry-breaking in a model of ciliary locomotion. *Physics of fluids*, 22 :111901, 2010.
- [MP10a] Alexandre Munnier and Bruno Pinçon. Locomotion of articulated bodies in an ideal fluid : 2D model with buoyancy, circulation and collisions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(10) :1899–1940, 2010.
- [MP10b] Alexandre Munnier and Bruno Pinçon. Locomotion of articulated bodies in an ideal fluid : 2d model with buoyancy, circulation and collisions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(10) :1899–1940, 2010. Prépublication IECN 2009/19 Prépublication IECN 2009/19.
- [MRT12] Sorin Micu, Ionel Roventa, and Marius Tucsnak. Time optimal boundary controls for the heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 263(1) :25–49, 2012.
- [MS] François Murat and Jacques Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Pré-publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, no 76015, Université de Paris 6 (1976), 222 pages.
- [MS97] Victor J. Mizel and Thomas I. Seidman. An abstract bang-bang principle and time-optimal boundary control of the heat equation. *SIAM J. Control Optim.*, 35(4) :1204–1216, 1997.
- [MT60] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical hydrodynamics*. 4th ed. The Macmillan Co., New York, 1960.
- [Mun08] Alexandre Munnier. On the self-displacement of deformable bodies in a potential fluid flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(11) :1945–1981, 2008.
- [Mun09] Alexandre Munnier. Locomotion of deformable bodies in an ideal fluid : Newtonian versus Lagrangian formalisms. *J. Nonlinear Sci.*, 19(6) :665–715, 2009.
- [Mun10] Alexandre Munnier. Passive and Self-propelled Locomotion of an Elastic Swimmer in a Perfect Fluid. 40 pages, August 2010.

- [NG05] Ali Najafi and Ramin Golestanian. Propulsion at low Reynolds number. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(14) :S1203, 2005.
- [Pon89] L. S. Pontryagin. *Printsip maksimuma v optimalnom upravlenii*. “Nauka”, Moscow, 1989.
- [Poz92] C. Pozrikidis. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [PT05] C. Prieur and E. Trélat. Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback. *Math. Control Signals Systems*, 17(3) :201–216, 2005.
- [Pur77] E. M. Purcell. Life at low Reynolds number. *American Journal of Physics*, 45 :3–11, June 1977.
- [PW11] Kim Dang Phung and Gengsheng Wang. An observability for parabolic equations from a measurable set in time. *preprint*, 2011.
- [PWZ07] Kim Dang Phung, Gengsheng Wang, and Xu Zhang. On the existence of time optimal controls for linear evolution equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 8(4) :925–941 (electronic), 2007.
- [Rou05] Tomáš Roubíček. *Nonlinear partial differential equations with applications*, volume 153 of *International Series of Numerical Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [RV94] Frank Reifler and Andrew Vogt. Unique continuation of some dispersive waves. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(7-8) :1203–1215, 1994.
- [Sam91] R. A. Sampson. On Stokes’s current function. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 182 :449–518, 1891.
- [Sei88] Thomas I. Seidman. How violent are fast controls? *Math. Control Signals Systems*, 1(1) :89–95, 1988.
- [Sei08] Thomas I. Seidman. How violent are fast controls. III. *J. Math. Anal. Appl.*, 339(1) :461–468, 2008.
- [Sim91] Jacques Simon. Domain variation for drag in Stokes flow. In *Control theory of distributed parameter systems and applications (Shanghai, 1990)*, volume 159 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 28–42. Springer, Berlin, 1991.
- [SMS08] J. San Martín and J.-F. Scheid. A numerical study of a fish-like swimming model for incompressible Navier-Stokes fluid. 2008.
- [SMSTT05] Jorge San Martín, Jean-François Scheid, Takéo Takahashi, and Marius Tucsnak. Convergence of the Lagrange-Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(4) :1536–1571 (electronic), 2005.
- [SMSTT08] Jorge San Martín, Jean-François Scheid, Takéo Takahashi, and Marius Tucsnak. An initial and boundary value problem modeling of fish-like swimming. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 188(3) :429–455, 2008.
- [SMTT07] Jorge San Martín, Takéo Takahashi, and Marius Tucsnak. A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms. *Quart. Appl. Math.*, 65(3) :405–424, 2007.

- [SV10] Mario Sigalotti and Jean-Claude Vivalda. Controllability properties of a class of systems modeling swimming microscopic organisms. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(4) :1053–1076, 2010.
- [SW89a] Alfred Shapere and Frank Wilczek. Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 198 :587–599, 1989.
- [SW89b] Alfred Shapere and Frank Wilczek. Geometry of self-propulsion at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 198 :557–585, 1989.
- [SY96] Thomas I. Seidman and Jiongmin Yong. How violent are fast controls? II. *Math. Control Signals Systems*, 9(4) :327–340, 1996.
- [Tay51] Geoffrey Taylor. Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 209 :447–461, 1951.
- [Tré05] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].
- [TW09] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Vla84] V. S. Vladimirov. *Equations of mathematical physics*. "Mir", Moscow, 1984. Translated from the Russian by Eugene Yankovsky [E. Yankovskii].
- [VTU] S. A. Vdovin, A. M. Taras'ev, and V. N. Ushakov. Construction of the attainability set of the Brockett integrator. *Prikl. Mat. Mekh.*
- [Wan04] Gengsheng Wang. The existence of time optimal control of semilinear parabolic equations. *Systems Control Lett.*, 53(3-4) :171–175, 2004.
- [Wan08] Gengsheng Wang.  $L^\infty$ -null controllability for the heat equation and its consequences for the time optimal control problem. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4) :1701–1720, 2008.
- [WB06] Andreas Wächter and Lorenz T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Math. Program.*, 106(1, Ser. A) :25–57, 2006.
- [Whi65] E. F. Whittlesey. Analytic functions in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 :1077–1083, 1965.
- [WW07] Gengsheng Wang and Lijuan Wang. The bang-bang principle of time optimal controls for the heat equation with internal controls. *Systems Control Lett.*, 56(11-12) :709–713, 2007.
- [Zyg59] A. Zygmund. *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II*. Cambridge University Press, New York, 1959.







## Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties, le fil directeur étant la contrôlabilité en temps optimal.

Dans la première partie, après un rappel du principe du maximum de Pontryagin dans le cas des systèmes de dimension finie, nous mettons en œuvre ce principe sur le cas d'un intégrateur non-holonyme connu sous le nom de système de Brockett pour lequel nous imposons des contraintes sur l'état. La difficulté de cette étude provient du fait que l'on considère un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état.

Après cet exemple, nous nous intéressons à une extension du principe du maximum de Pontryagin au cas des systèmes de dimension infinie. Plus précisément, l'extension que nous considérons s'applique au cas de systèmes exactement contrôlables en tout temps. Typiquement, ce résultat s'applique à l'équation de Schrödinger avec contrôle interne. Pour de tels systèmes, sous une condition de contrôlabilité approchée, depuis un ensemble de temps non négligeable, nous montrons l'existence d'un contrôle bang-bang.

Dans la seconde partie, nous étudions le problème de la nage à bas nombre de Reynolds. Une modélisation physique convenable nous permet de le formaliser comme un problème de contrôle.

Nous obtenons alors un résultat de contrôlabilité sur ce problème. Plus précisément, nous montrons que quelque soit la forme du nageur, celui-ci peut se déformer légèrement pour suivre une trajectoire imposée.

Nous étudions ensuite le cas d'un nageur à symétrie axiale. Les résultats de la première partie permettent alors la recherche d'un contrôle en temps optimal.

**Mots clefs :** équations de Stokes, interaction fluide-structure, contrôlabilité, contrôlabilité en temps optimal, contrôle géométrique, principe du maximum de Pontryagin, système de Brockett, intégrateur non-holonyme, contrôle bang-bang, équation de Schrödinger.

## Abstract

This thesis is divided in two parts. The main tool of this work is time optimal control.

We first consider the Pontryagin maximum principle for control system of finite dimension. After that, we give an application of this principle for the Brockett integrator with state constraints.

Then, we study an extension of the Pontryagin maximum principle in the case of infinite dimensional systems. More precisely, this extension concerns the case of exactly controllable systems in any time. For instance, this can be the Schrödinger equation with internal control. Especially under some condition of approximate controllability, we can show the existence of a bang-bang control defined on a time set of positive measure.

In the second part, we study the problem of swimming at low Reynolds number. A convenient physical model allows us to formulate it under the form of a control problem. We then get a controllability result on this problem. More precisely, we will show that whatever the shape of the swimmer is, the swimmer can slightly modify its shape in order to steer any prescribed trajectory.

To complete this part, we consider the case of an axi-symmetric swimmer. The results of the first part allow us to find an optimal time control.

**Key words:** Stokes equations, fluid-structure interactions, controllability, time optimal control, geometrical control, Pontryagin's maximum principle, Brockett system, non-holonomic integrator, bang-bang control, Schrödinger equation.