Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds

Jérôme Lohéac

Université de Lorraine,
Institut Élie Cartan

Soutenance de Thèse

6 Décembre 2012

Problème de contrôlabilité

Soient X et U deux espaces et $F : X \times U \to X$. On considère le problème de Cauchy :

$$\dot{z} = F(z, u)\,, \qquad z(0) = \mathrm{z}_0 \in X\,. \tag{1}$$

Question

Soit $\mathrm{z}_1 \in X$, $\mathrm{z}_1 \neq \mathrm{z}_0$. *Existe-t-il* $T > 0$ *et* $u : [0, T] \to U$ *tels que la solution de* (1) *satisfasse :*

$$z(T) = \mathrm{z}_1 \ ?$$

Méthodes de résolution I

Pour la dimension finie :

- Cas des systèmes linéaires :
  - Méthode du rang de Kalman.
- Cas des systèmes non linéaires :
  - Méthode des crochets de Lie :
    - A. A. Agrachev et Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, 2004
  - Méthode du retour :
    - J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, 2007

Méthodes de résolution II

Pour la dimension infinie :

- Cas des systèmes linéaires :
  - Inégalités de Carleman :
    - M. Tucsnak et G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, 2009
- Cas des systèmes non linéaires :
  - Méthode du retour
  - ...

Problème de contrôlabilité en temps optimal I

On considère le problème de Cauchy :

$$\dot{z} = F(z, u)\,, \qquad z(0) = \mathrm{z}_0 \in X\,.$$

Soit $\mathrm{z}_1 \in X$, $\mathrm{z}_1 \neq 0$. On suppose qu'il existe un temps de contrôle T et un contrôle $u \in L^\infty([0, T], U)$ avec :

$$\|u(t)\|_U \leqslant 1 \qquad (t \in [0, T] \quad \text{p.p.})$$

satisfaisant :

$$z(T) = \mathrm{z}_1\,.$$

Problème de contrôlabilité en temps optimal II

Question

- *Existe-t-il un temps minimal* $T^\star > 0$ *et un contrôle* $u^\star \in L^\infty([0, T^\star], U)$ *avec* $\|u^\star\|_{L^\infty([0,T^\star],U)} \leqslant 1$ *tels que la solution du problème de Cauchy :*
$$\dot{z} = F(z, u^\star)\,, \qquad z(0) = \mathrm{z}_0\,,$$
satisfasse : $\quad z(T^\star) = \mathrm{z}_1$ *?*
- *Obtenir des conditions d'optimalité, principe du maximum de Pontryagin.*
- $u^\star$ *est il unique ?*
- $u^\star$ *est-il* bang-bang, *i.e.*
$$\|u^\star(t)\|_U = 1 \qquad (t \in [0, T^\star] \quad \text{p.p}) \ ?$$

Méthodes de résolution

Pour la dimension finie :

- Principe du maximum de Pontryagin :
  - A. D. Ioffe et V. M. Tihomirov,
    Theory of extremal problems, 1979
- Systèmes linéaires :
  - R. Bellman, I. Glicksberg, et O. Gross,
    On the "bang-bang" control problem, 1956

Pour la dimension infinie :

- Systèmes linéaires :
  - H. O. Fattorini,
    Infinite dimensional linear control systems, 2005

Soit $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe fortement continu généré par un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to X$ et soit $B \in \mathcal{L}(U, X)$ un opérateur de contrôle borné. On considère le système dynamique :

$$\dot{z} = Az + Bu\,, \qquad z(0) = \mathrm{z}_0 \in X\,, \tag{2}$$

avec $u \in L^2([0, T], U)$. La solution de (2) s'écrit :

$$z(t) = \mathbb{T}_t \mathrm{z}_0 + \Phi_t u \quad (t \in [0, T])\,,$$

où les applications $\Phi_t \in \mathcal{L}\big(L^2([0, t], U), X\big)$ sont les applications *entrée-sortie* :

$$\Phi_t u = \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} B u(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Définitions de contrôlabilité

Définition

Le couple (A, B) est dit :

- *approximativement contrôlable en temps τ* si $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est dense dans X ;
- *exactement contrôlable en temps τ* si $\operatorname{Im}\Phi_\tau = X$.

Définition

Soit $e \subset [0,\tau]$ un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive. Le couple (A, B) est dit approximativement contrôlable en temps τ depuis e si l'image de l'application $\Phi_{\tau,e} \in \mathcal{L}(L^2([0,\tau], U), X)$ définie par :

$$\Phi_{\tau,e}u = \int_e \mathbb{T}_{\tau-s}Bu(s)\,\mathrm{d}s \qquad (u \in L^2([0,\tau], U)),$$

est dense dans X.

2 Temps optimal pour des systèmes de dimension infinie
- Introduction
- Extension du principe du maximum de Pontryagin
- Application à l'équation de Schrödinger
- Conclusion et questions ouvertes

Ensemble atteignable avec des contrôles L^∞

Notons $R_t^\infty = \Phi_t\big(L^\infty([0,t],U)\big)$. On munit R_t^∞ de la norme :

$$\|z\|_{R_t^\infty} = \inf\{\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}\,,\ \Phi_t u = z\}\,.$$

La boule unité fermée de R_t^∞ est notée :

$$B_t^\infty(1) = \left\{\Phi_t u\,,\ u \in L^\infty([0,t],U)\,,\ \|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \leqslant 1\right\}\,.$$

Ensemble atteignable avec des contrôles L^∞

Notons $R_t^\infty = \Phi_t\left(L^\infty([0,t],U)\right)$. On munit R_t^∞ de la norme :

$$\|z\|_{R_t^\infty} = \inf\{\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}\,,\ \Phi_t u = z\}\,.$$

La boule unité fermée de R_t^∞ est notée :

$$B_t^\infty(1) = \left\{\Phi_t u\,,\ u \in L^\infty([0,t],U)\,,\ \|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \leqslant 1\right\}\,.$$

Si (A,B) est exactement contrôlable en tout temps $t>0$ et B est un opérateur de contrôle borné alors :

$$R_t^\infty = X \qquad (t>0)\,.$$

Principe du maximum

Théorème (J. L., M. Tucsnak)

On suppose que le couple (A, B) est exactement contrôlable en tout temps $\tau > 0$ et que $\mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1 \in X$, $\mathrm{z}_0 \neq \mathrm{z}_1$, sont tels qu'il existe $\tau > 0$ tel que $z_1 - \mathbb{T}_\tau \mathrm{z}_0 \in B_\tau^\infty(1)$.

Alors, il existe un temps minimal :

$$\tau^\star = \tau^\star(\mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1) = \min \{t > 0\,,\ z_1 - \mathbb{T}_t \mathrm{z}_0 \in B_t^\infty(1)\} > 0$$

et un contrôle en temps optimal $u^\star \in L^\infty([0, \tau^\star], U)$, avec $\|u^\star\|_{L^\infty([0,\tau^\star],U)} \leqslant 1$ envoyant z_0 sur z_1 en temps $\tau^\star$.

De plus, il existe $\eta \in X \setminus \{0\}$ tel que :

$$\langle B^* \mathbb{T}^*_{\tau^\star - t} \eta, u^\star(t) \rangle_U = \max_{\substack{\mathrm{v} \in U, \\ \|\mathrm{v}\|_U \leqslant 1}} \langle B^* \mathbb{T}^*_{\tau^\star - t} \eta, \mathrm{v} \rangle_U \qquad (t \in [0, \tau^\star] \quad \text{p.p.})\,.$$

Résultat d'accessibilité

Si A est un opérateur antiadjoint et si on suppose que $R_t^\infty = X$ pour tout $t > 0$.

Alors pour tout z_0, $\mathrm{z}_1 \in X$, $\mathrm{z}_0 \neq \mathrm{z}_1$ alors il existe $\tau > 0$ tel que :

$$\mathbb{T}_\tau \mathrm{z}_0 - \mathrm{z}_1 \in B_\tau^\infty(1)\,.$$

i.e. : il existe $\tau > 0$ et $u \in L^\infty([0,\tau], U)$ avec $\|u(t)\|_{L^\infty([0,\tau],U)} \leqslant 1$ tel que :

$$z_1 = \mathbb{T}_\tau \mathrm{z}_0 + \Phi_\tau u\,.$$

$u^\star$ est unique et bang-bang

Corollaire (J. L., M. Tucsnak)

Supposons que (A, B), z_0 et z_1 satisfont les hypothèses du théorème précédent.
On suppose de plus que le couple (A, B) est approximativement contrôlable en temps $\tau^\star$ depuis tout ensemble $e \subset [0, \tau^\star]$ de mesure strictement positive.

Alors le contrôle en temps optimal $u^\star \in L^\infty([0, \tau^\star], U)$, avec $\|u^\star\|_{L^\infty([0,\tau^\star],U)} \leqslant 1$, envoyant z_0 sur z_1 en temps $\tau^\star = \tau^\star(\mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1)$ est unique et bang-bang, i.e. :

$$\|u^\star(t)\|_U = 1 \qquad (t \in [0, \tau^\star] \quad p, p.)\,.$$

2. Temps optimal pour des systèmes de dimension infinie
   - Introduction
   - Extension du principe du maximum de Pontryagin
   - Application à l'équation de Schrödinger
   - Conclusion et questions ouvertes

Pour Schrödinger

Considérons le système :

$$\begin{aligned} \dot{z}(x,t) &= i(-\Delta + a(x))z(x,t) + u(x,t)\chi_{\mathcal{O}}(x) && (x \in \Omega \quad , \quad t \geqslant 0)\,, \\ z(x,t) &= 0 && (x \in \partial\Omega\,, \quad t \geqslant 0)\,, \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}$ est un ouvert de Ω.

Supposons que l'une des deux hypothèses ci-dessous ait lieu.

- H1 $\partial\Omega$ est de classe C^3, $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathcal{O}$ satisfait les conditions de l'optique géométrique ;
- H2 Ω est un domaine rectangulaire, $a \in \mathbb{R}$ est une constante et $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de Ω.

Preuve

Espaces et opérateurs

Notons $X = L^2(\Omega)$ et $U = L^2(\mathcal{O})$.

Par changement de variable, on peut supposer que $a \geqslant 0$.

A est l'opérateur de domaine $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ défini par :

$$Az = i(-\Delta + a(x))z \qquad (z \in \mathcal{D}(A)) .$$

$B \in \mathcal{L}(U, X)$ est l'opérateur de contrôle défini par :

$$Bu = \chi_{\mathcal{O}} u \qquad (u \in U) .$$

Preuve
Principe du maximum de Pontryagin

1. Sous l'une des hypothèses H1 ou H2, le couple (A, B) est exactement contrôlable en tout temps $\tau > 0$.
   - H1 N. Burq, *Contrôlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers*, 1997 et
     M. Tucsnak et G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, 2009
   - H2 S. Jaffard, *Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée*, 1988 ou
     V. Komornik, *On the exact internal controllability of a Petrovsky system*, 1992
2. Pour tout $z_0, z_1 \in X$, $z_0 \neq z_1$, il existe $\tau > 0$ tel que :
$$z_1 - \mathbb{T}_\tau z_0 \in B_\tau^\infty(1)\,.$$
A est antiadjoint et (A, B) est exactement contrôlable.

Montrons que (A, B) est approximativement contrôlable depuis tout ensemble $e \subset [0, \tau^\star]$ de mesure strictement positive.

De façon équivalente, montrons que si la solution z du problème :

$$\dot{z} = A^* z\,, \qquad z(0) = \mathrm{z}_0 \in X\,,$$

satisfait :

$$B^* z(t) = \chi_{\mathcal{O}} z(t) = 0 \qquad (t \in e),$$

alors :

$$\mathrm{z}_0 = 0.$$

Preuve II

$u^\star$ est bang-bang et unique

1. A^* est diagonalisable et $\sigma(A^*) \subset i(-\infty, 0]$.

Preuve II
$u^\star$ est bang-bang et unique

1. A^* est diagonalisable et $\sigma(A^*) \subset i(-\infty, 0]$.
2. $t \mapsto \chi_{\mathcal{O}} z(t)$ admet un prolongement analytique sur :

$$\{x + iy\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}_-^*\} \subset \mathbb{C}\,.$$

Preuve II

$u^\star$ est bang-bang et unique

1. A^* est diagonalisable et $\sigma(A^*) \subset i(-\infty, 0]$.
2. $t \mapsto \chi_{\mathcal{O}} z(t)$ admet un prolongement analytique sur :

$$\{x + iy\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}_-^*\} \subset \mathbb{C}\,.$$

3. Le théorème d'unicité de Privalov permet de conclure :

$$\chi_{\mathcal{O}} z(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Preuve II

$u^\star$ est bang-bang et unique

1. A^* est diagonalisable et $\sigma(A^*) \subset i(-\infty, 0]$.
2. $t \mapsto \chi_{\mathcal{O}} z(t)$ admet un prolongement analytique sur :

$$\{x + iy\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}_-^*\} \subset \mathbb{C}\,.$$

3. Le théorème d'unicité de Privalov permet de conclure :

$$\chi_{\mathcal{O}} z(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

4. La contrôlabilité exacte du couple (A, B) implique :

$$\mathrm{z}_0 = 0\,.$$

2 Temps optimal pour des systèmes de dimension infinie
- Introduction
- Extension du principe du maximum de Pontryagin
- Application à l'équation de Schrödinger
- Conclusion et questions ouvertes

Conclusion

- Le principe du maximum de Pontryagin est vérifié pour l'équation des plaques.
  La propriété bang-bang est une question ouverte.
- Les résultats restent vrais pour les opérateurs de contrôles admissibles.
  Montrer que l'équation de Schrödinger est contrôlable en tout temps avec des contrôles dans L^∞ n'agissant que sur la frontière du domaine est une question ouverte.

Conclusion

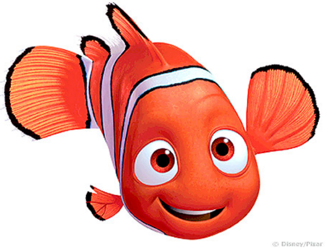
- Le principe du maximum de Pontryagin est vérifié pour l'équation des plaques.
  La propriété bang-bang est une question ouverte.
- Les résultats restent vrais pour les opérateurs de contrôles admissibles.
  Montrer que l'équation de Schrödinger est contrôlable en tout temps avec des contrôles dans L^∞ n'agissant que sur la frontière du domaine est une question ouverte.

- Forme de l'ensemble des temps de saut ?
- Calcul numérique du temps optimal et d'un contrôle en temps optimal ?
- Si l'espace des contrôles est non hilbertien ?

Motivations

Le problème de la nage est vu comme un problème de contrôle. Étant donnés deux points, le poisson peut-il aller de l'un à l'autre ?

Le déplacement du poisson est dû aux interactions fluide-structure.



Le fluide

Le nombre de Reynolds : $Re = \dfrac{\rho U L}{\mu}$.

$Re \ll 1$		$Re \gg 1$
Équations de Stokes	Équations de Navier-Stokes	Équations d'Euler (fluide parfait), turbulence

$\longrightarrow Re$

Exemples :

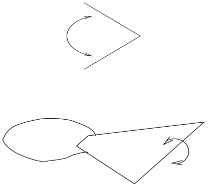
	$L\,(cm)$	$U\,(cm.s^{-1})$	$T\,(s)$	Re
Bactérie	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Spermatozoïde	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}
Poisson	50	100	0.5	5.10^{4}
Pigeon	25	10^{3}	5.10^{-1}	10^{5}

Les Déformations I

Toutes les déformations ne sont pas intéressantes du point de vue de la motilité.

Théorème (Coquille Saint Jacques, Purcell, 1977)

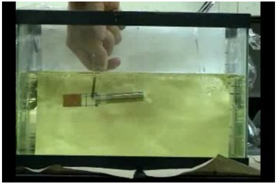
Pour une déformation réversible en temps, le déplacement du nageur est nul.



Pas de déplacement

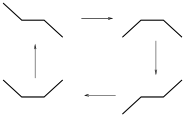
$\Rightarrow$

en fluide de Stokes

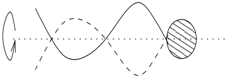


Expérience de Taylor

Les Déformations II



Nageur de Purcell



Déformation hélicoïdale

Déplacement

$\Rightarrow$

en fluide de Stokes

Expérience de Taylor

État de l'art I

- Modélisation de la nage :
  - Expériences :
    - G. Taylor,
      Analysis of the swimming of microscopic organisms, 1951
  - Mise en évidence de certaines particularités physiques :
    - E. M. Purcell,
      Life at low Reynolds number, 1977
    - S. Childress,
      Mechanics of swimming and flying, 1981
    - A. Shapere et F. Wilczek,
      Geometry of self-propulsion at low Reynolds number et *Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number*, 1989

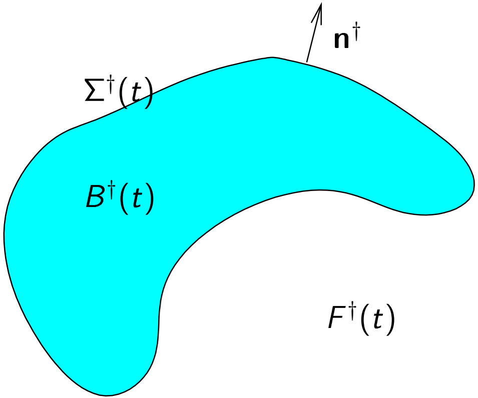
État de l'art II

- Résultats de contrôlabilité :
  - En fluide d'Euler :
    - T. Chambrion et A. Munnier, *Locomotion and control of a self-propelled shape-changing body in a fluid*, 2011
    - O .Glass et L. Rosier, *On the control of the motion of a boat*, 2011
  - En fluide de Navier-Stokes :
    - J.-P. Raymond, *Feedback stabilization of a fluid–structure model*, 2011
  - En fluide de Stokes :
    - F. Alouges, A. DeSimone et A. Lefebvre, *Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example*, 2008
    - J. San Martin, T. Takahashi et M. Tucsnak, *A control theoretic approach to the swimming of microscopic organisms*, 2007

3. Problème de la nage
   - Introduction
   - Problème physique
   - Déformations d'un nageur
   - Problème de dimension finie
   - Résultat de contrôlabilité
   - Conclusion et questions ouvertes

Domaine

Soit $B^\dagger(t)$ le domaine occupé par le nageur, $\Sigma^\dagger(t)$ sa frontière et $F^\dagger(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B^\dagger(t)}$ le domaine fluide.



Le fluide

Équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) + \nabla p - \nu\Delta\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0}\,, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0\,, \end{aligned} \tag{NS}$$

posées sur $\{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\,,\ x\in F^\dagger(t)\}$.

Le fluide

Équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) + \nabla p - \nu\Delta\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0}\,, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0\,, \end{aligned} \tag{NS}$$

posées sur $\{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\,,\ x\in F^\dagger(t)\}$.

Le fluide est au repos à l'infini et colle à la frontière du nageur, i.e. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_S$ sur $\Sigma^\dagger(t)$, où $\boldsymbol{v}_s$ est la vitesse du nageur.

Le fluide

Équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) + \nabla p - \nu\Delta\boldsymbol{u} &= \mathbf{0}\,, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0\,, \end{aligned} \tag{NS}$$

posées sur $\{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\,,\ x\in F^\dagger(t)\}$.

Le fluide est au repos à l'infini et colle à la frontière du nageur, i.e. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_S$ sur $\Sigma^\dagger(t)$, où $\boldsymbol{v}_s$ est la vitesse du nageur.

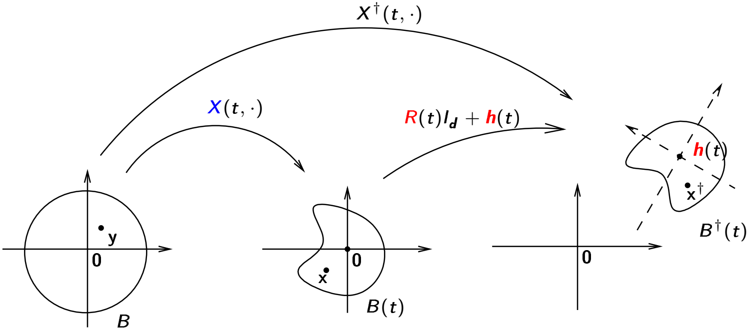
Soit $\sigma = \nu\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right) - pI_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$, le *tenseur de contraintes*.

La force exercée par le fluide sur le nageur est :

$$\int_{\Sigma^\dagger(t)} \sigma\mathbf{n}^\dagger\,\mathrm{d}\Gamma\,.$$

L'objet I

Le nageur est repéré par la position de son centre de masse $h \in \mathbb{R}^3$ et sa position angulaire $R \in SO(3)$.



L'objet II

La vitesse d'un point $x = X^\dagger(y,t)$ de $B^\dagger(t)$ est :

$$\boldsymbol{v}_S = \dot{\boldsymbol{h}}(t) + \omega(t) \wedge (x - \boldsymbol{h}(t)) + \boldsymbol{w}^\dagger(x,t)\,.$$

Avec $\boldsymbol{\omega}$ défini par :

$$\dot{R} = RA(\boldsymbol{\omega})$$

et $\boldsymbol{w}^\dagger$ la vitesse de déformation dans un système de coordonnées fixe :

$$\boldsymbol{w}^\dagger(x,t) = R(t)\partial_t X\left(X(.,t)^{-1}(R^T(t)(x - \boldsymbol{h}(t))), t\right)$$

L'objet III

Dans la configuration de référence, on choisit la densité de masse du nageur comme étant 1.

La déformation $X(t,\cdot)$ doit conserver :

- la masse :
$$\rho(t,\cdot)=\frac{1}{\left|\det\left(\operatorname{Jac}X(t,\cdot)\right)\right|}\circ X(t,\cdot)^{-1}\,;$$
- la position du centre de masse :
$$\mathbf{0}=\frac{1}{m}\int_{B(t)}\rho(x,t)x\,\mathrm{d}x\,;$$
- le moment angulaire du nageur :
$$\mathbf{0}=\int_{B(t)}\rho(x,t)x\wedge\partial_t X\left(X(.,t)^{-1}(x),t\right)\,\mathrm{d}x.$$

L'objet IV

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{h}} &= \int_{\Sigma^\dagger(t)} \sigma \mathbf{n}^\dagger \,\mathrm{d}\Gamma\,, \\ \frac{\mathrm{d}\, I\omega}{\mathrm{d}t} &= \int_{\Sigma^\dagger(t)} (x - \boldsymbol{h}) \wedge \sigma \mathbf{n}^\dagger \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}\right. \qquad \text{(PFD)}$$

Problème couplé

En variables adimensionnées, le passage formel à la limite $L \to 0$ aboutit au problème *quasi-statique* :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \boldsymbol{u} - \nabla p &=& \rho(\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\,, & \text{dans } F^\dagger(t)\,,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &=& 0\,, & \text{dans } F^\dagger(t)\,,\\ \\ \lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(x) = \mathbf{0}\,, \end{array}\right. \tag{S}$$

$$\boldsymbol{u}(t,x) = \dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{\omega}\wedge(x-\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}^\dagger(x,t)\,,\quad \text{sur } \Sigma^\dagger(t)\,, \tag{BC}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Sigma^\dagger(t)} \sigma\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma &=& m\ddot{\boldsymbol{h}}\,,\\ \displaystyle\int_{\Sigma^\dagger(t)} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})\wedge\sigma\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma &=& \dfrac{\mathrm{d}\,I\omega}{\mathrm{d}t}\,. \end{array}\right. \tag{CM}$$

Problème couplé

En variables adimensionnées, le passage formel à la limite $L \to 0$ aboutit au problème *quasi-statique* :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \boldsymbol{u} - \nabla p & = & \mathbf{0}\,, & \text{dans } F^\dagger(t)\,,\\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} & = & 0\,, & \text{dans } F^\dagger(t)\,,\\ \\ \displaystyle\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(x) = \mathbf{0}\,, \end{array}\right. \tag{S}$$

$$\boldsymbol{u}(t,x) = \dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (x - \boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}^\dagger(x,t)\,, \quad \text{sur } \Sigma^\dagger(t)\,, \tag{BC}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Sigma^\dagger(t)} \sigma \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma & = & \mathbf{0}\,,\\ \displaystyle\int_{\Sigma^\dagger(t)} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h}) \wedge \sigma \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Gamma & = & \mathbf{0}\,. \end{array}\right. \tag{CM}$$

Déformation du nageur

Considérons que la déformation du domaine s'écrit sous la forme :

$$X(t,x) = x + D_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i(t) D_i(x)\,,$$

avec $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons $c = \big(D_0, (D_1, \dots, D_n)\big)$ et

$$X_c(\mathbf{s}) = I_d + D_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i D_i\,.$$

On note $B_c(\mathbf{s}) = X_c(\mathbf{s})(B)$ et $F_c(\mathbf{s}) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_c(\mathbf{s})}$.

Déformation du nageur

Considérons que la déformation du domaine s'écrit sous la forme :

$$X(t,x) = x + D_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i(t) D_i(x)\,,$$

avec $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons $c = \big(D_0, (D_1, \dots, D_n)\big)$ et

$$X_c(\mathbf{s}) = I_d + D_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i D_i\,.$$

On note $B_c(\mathbf{s}) = X_c(\mathbf{s})(B)$ et $F_c(\mathbf{s}) = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_c(\mathbf{s})}$.

La vitesse de déformation du nageur est :

$$\boldsymbol{w}_c(\mathbf{s})(t,\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \dot{s}_i(t) \boldsymbol{w}_c^i(\mathbf{s})(\cdot)\,,$$

avec $\boldsymbol{w}_c^i(\mathbf{s}) = D_i \circ X_c(\mathbf{s})^{-1}$.

Espace de déformations

On note $D_0^1(\mathbb{R}^3)$ la composante connexe contenant 0 de :
$$\left\{D \in C_0^1(\mathbb{R}^3)^3\,,\ I_d + D \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^3\right\}.$$

Soit $c = \big(D_0, (D_1, \dots, D_n)\big) \in D_0^1(\mathbb{R}^3) \times \left(C_0^1(\mathbb{R}^3)^3\right)^n$ tel que :

- $\{D_1, \dots, D_n\}$ est une famille libre ;
- Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$: $\displaystyle\int_B D_i(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}$;
- Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$: $\displaystyle\int_B D_i(x) \wedge D_j(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}$;
- Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $\displaystyle\int_B (x + D_0(x)) \wedge D_i(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}$.

Un tel c sera appelé signature du nageur et on note $\mathcal{C}(n) \subset D_0^1(\mathbb{R}^3) \times \left(C_0^1(\mathbb{R}^3)^3\right)^n$ l'ensemble de ces éléments.

Paramètres de déformation

Pour $c \in \mathcal{C}(n)$, notons $\mathcal{S}(c)$ la composante connexe contenant $\mathbf{0}_n$ de l'ensemble :

$$\left\{(s_1, \ldots, s_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,, D_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i D_i \in D_0^1(\mathbb{R}^3)\right\}.$$

Force et Moment I

On définit l'opérateur bilinéaire :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(F) : \quad H^{\frac{1}{2}}(\partial F)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\partial F)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2) & \mapsto & \displaystyle\int_F \mathrm{D}(\boldsymbol{u}^1) : \mathrm{D}(\boldsymbol{u}^2)\,\mathrm{d}x\,, \end{array}$$

avec $(\boldsymbol{u}^i, p^i)$ la solution du problème de Stokes homogène :

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}^i + \nabla p^i &= \mathbf{0} && \text{dans } F\,, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}^i &= 0 && \text{dans } F\,, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v}^i && \text{sur } \Sigma\,. \end{aligned}$$

Force et Moment II

Notons $\boldsymbol{v}_0^1, \dots, \boldsymbol{v}_0^6$ les conditions limites :

$$\boldsymbol{v}_0^i(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i \in \{1,2,3\}, \\ \mathbf{e}_{i-3} \wedge x & \text{si } i \in \{4,5,6\}, \end{cases} \qquad (x \in \Sigma).$$

Soit $\boldsymbol{v}_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3$. Notons $(\boldsymbol{u}, p)$ la solution du problème de Stokes homogène associée. Nous avons :

$$\left(\varphi(F)(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_0^i)\right)_{i \in \{1,\dots,6\}} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Sigma \sigma(\boldsymbol{u}, p)\mathbf{n}\, \mathrm{d}\Gamma \\ \displaystyle\int_\Sigma \sigma(\boldsymbol{u}, p)\mathbf{n} \wedge x\, \mathrm{d}\Gamma \end{pmatrix}.$$

Représentation matricielle

Soit $c \in \mathcal{C}(n)$ et $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$, on note :

$$M_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\boldsymbol{v}_0^i, \boldsymbol{v}_0^j)\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,6\}}} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}) \quad \text{et}$$

$$N_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\boldsymbol{v}_0^i, \boldsymbol{w}_c^j(\mathbf{s}))\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in \mathcal{M}_{6,n}(\mathbb{R})\,.$$

Représentation matricielle

Soit $c \in \mathcal{C}(n)$ et $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$, on note :

$$M_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\boldsymbol{v}_0^i, \boldsymbol{v}_0^j)\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,6\}}} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}) \quad \text{et}$$

$$N_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\boldsymbol{v}_0^i, \boldsymbol{w}_c^j(\mathbf{s}))\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in \mathcal{M}_{6,n}(\mathbb{R})\,.$$

- $M_c(\mathbf{s})$ est symétrique définie positive.

Représentation matricielle

Soit $c \in \mathcal{C}(n)$ et $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(c)$, on note :

$$M_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\mathbf{v}_0^i, \mathbf{v}_0^j)\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,6\}}} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R}) \quad \text{et}$$

$$N_c(\mathbf{s}) = \Big(\varphi(F_c(\mathbf{s}))(\mathbf{v}_0^i, \mathbf{w}_c^j(\mathbf{s}))\Big)_{\substack{i\in\{1,\dots,6\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}} \in \mathcal{M}_{6,n}(\mathbb{R})\,.$$

- $M_c(\mathbf{s})$ est symétrique définie positive.
- $M_c(\mathbf{s})$ et $N_c(\mathbf{s})$ dépendent analytiquement de (c, s).

Système de dimension finie

On écrit (S), (BC) et (CM) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = -M_c(\mathbf{s})^{-1} N_c(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}}\,, \qquad (3)$$

avec $\boldsymbol{l} = R^\top \dot{\boldsymbol{h}}$ et $\boldsymbol{\omega}$ tel que $A(\boldsymbol{\omega}) = R^\top \dot{R}$.

Notons $\mathbf{Y}_c^i(\mathbf{s}) = -M_c(\mathbf{s})^{-1} N_c(\mathbf{s})\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^6$ et :
$\mathbf{Z}_c^i(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s}) = \left(R\mathbf{Y}_c^i(\mathbf{s})_1, RA(\mathbf{Y}_c^i(\mathbf{s})_2, \mathbf{e}_i\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^n$.
Ainsi, (3) devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{h}(t) \\ R(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{Z}_c^i(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s}) \qquad (t \in [0, T])\,. \qquad \text{(CFS)}$$

que l'on munit de conditions initiales :

$$\boldsymbol{h}(0) = \boldsymbol{h}_0\,, \quad R(0) = R_0\,, \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{0}\,.$$

Contrôlabilité en un point particulier

Notons $c = \big(0, (D_1, \ldots, D_4)\big) \in \mathcal{C}(4)$ avec :

$$\begin{aligned}
D_1(\rho,\theta,\phi) &= \chi(\rho)\mathrm{Re}\big(Y_{3,1}(\cos\theta,\phi)\big)\mathbf{e}_\rho\,,\\
D_2(\rho,\theta,\phi) &= \chi(\rho)\mathrm{Im}\big(Y_{3,1}(\cos\theta,\phi)\big)\mathbf{e}_\rho\,,\\
D_3(\rho,\theta,\phi) &= \chi(\rho)\mathrm{Re}\big(Y_{3,2}(\cos\theta,\phi)\big)\mathbf{e}_\rho\,,\\
D_4(\rho,\theta,\phi) &= \chi(\rho)\mathrm{Re}\big(Y_{4,2}(\cos\theta,\phi)\big)\mathbf{e}_\rho\,.
\end{aligned}$$

Avec ce choix de paramètres, on obtient :

$$\dim \mathrm{Lie}_{(\mathbf{0},I_3,\mathbf{0})}\{\mathbf{Z}_c^1, \ldots, \mathbf{Z}_c^4\} = 10\,.$$

J. Happel et H. Brenner,
Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media, 1965

Résultat principal

Théorème

Soient $\bar{D}_0 \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ *telle que* $\displaystyle\int_B \bar{D}_0(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}$ *et une fonction continue* $t \in [0,T] \mapsto \left(\bar{\boldsymbol{h}}(t), \bar{R}(t)\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$*. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $D_0 \in D_0^1(\mathbb{R}^3)$ *tel que :*

$$\int_B D_0(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{0}\,, \qquad \|\bar{D}_0 - D_0\|_{D_0^1(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon$$

et pour presque tout $(D_1,\dots,D_4) \in \left(C_0^1(\mathbb{R}^3)^3\right)^4$ *tel que* $(D_0,(D_1,\dots,D_4)) \in \mathcal{C}(4)$*, il existe une fonction* $t \in [0,T] \mapsto \boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^4$ *telle que la solution* $(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s})$ *de* (CFS) *satisfait :*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(|\bar{\boldsymbol{h}}(t) - \boldsymbol{h}(t)| + \|\bar{R}(t) - R(t)\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\right) < \varepsilon\,.$$

3 Problème de la nage

- Introduction
- Problème physique
- Déformations d'un nageur
- Problème de dimension finie
- Résultat de contrôlabilité
- **Conclusion et questions ouvertes**

Conclusion

- La forme du nageur peut aussi être contrôlée.
- En appliquant le Théorème de Fillipov, on a aussi l'existence d'un contrôle λ optimal.

Conclusion

- La forme du nageur peut aussi être contrôlée.
- En appliquant le Théorème de Fillipov, on a aussi l'existence d'un contrôle λ optimal.

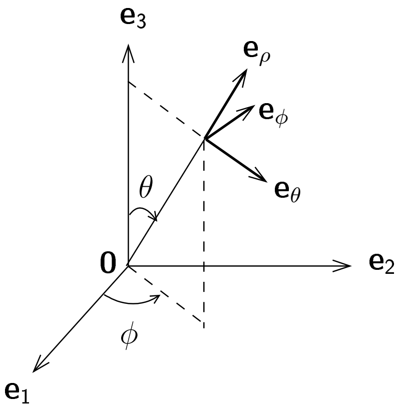
- Avec moins de quatre déformations de base ?
- Cas d'un fluide de Stokes (d'évolution) ou Navier-Stokes ?
- Contrôlabilité dans un domaine fluide borné ?

4 Nage en symétrie axiale

- Problème de contrôle
- Étude d'un problème simplifié
- Simulations numériques
- Conclusion et questions ouvertes

Système de coordonnées

On suppose que les déformations du nageur sont indépendantes de ϕ et n'ont pas de composantes suivant $\mathbf{e}_\phi$.



Système de coordonnées

Déformations élémentaires

On considère une déformation X_c du type :

$$X_c\big(\mathbf{s}(t)\big) = I_d + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i(t) D_i \,,$$

avec les déformations élémentaires :

$$D_i(\rho,\theta,\phi) = \rho\chi(\rho)P_{i+1}(\cos(\theta))\mathbf{e}_\rho$$

et $c = \big(0, (D_1, \dots, D_n)\big) \in \mathcal{C}(n)$.

Il existe $\varsigma > 0$ tel que pour tout $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\mathbf{s}| \leqslant \varsigma$ alors $X_c(\mathbf{s})$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EDO

La solution $(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s})$ de (CFS) munie de la condition initiale : $(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s})(0) = (\mathbf{0}, I_3, \mathbf{0})$,
satisfait : $\boldsymbol{h} = h\,\mathbf{e}_3$ et $R = I_3$.

EDO

La solution $(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s})$ de (CFS) munie de la condition initiale : $(\boldsymbol{h}, R, \mathbf{s})(0) = (\mathbf{0}, I_3, \mathbf{0})$,
satisfait : $\quad \boldsymbol{h} = h\,\mathbf{e}_3$ et $R = I_3$.

Le système (CFS) se récrit comme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} h \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{f}_c(\mathbf{s}), \boldsymbol{\lambda} \rangle \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} . \tag{CFSaxi}$$

On le munit des conditions initiales :

$$h(0) = 0\,, \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{0}\,. \tag{Claxi}$$

Contrôlabilité

Question

Étant donné $h_1 \neq 0$, *existe-t-il* $T > 0$ *et* $\boldsymbol{\lambda} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *tel que la solution* $(h, \mathbf{s})$ *du système* (CFSaxi)-(CIaxi) *satisfasse :*

- $h(T) = h_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(T) = \mathbf{0}\,;$
- $|\mathbf{s}(t)| \leqslant \varsigma \qquad (t \in [0, T])\,.$

Pour tout $n \geqslant 2$, la réponse est affirmative.

Contrôlabilité

Question

Étant donné $h_1 \neq 0$, *existe-t-il* $T > 0$ *et* $\boldsymbol{\lambda} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *tel que la solution* $(h, \mathbf{s})$ *du système* (CFSaxi)-(CIaxi) *satisfasse :*

- $h(T) = h_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{s}(T) = \mathbf{0}\,;$
- $|\mathbf{s}(t)| \leqslant \varsigma \qquad (t \in [0, T])\,.$

Pour tout $n \geqslant 2$, la réponse est affirmative.

De plus, en appliquant le théorème de Fillipov, ce contrôle peut être réalisé en un temps minimal, $T^\star > 0$. Avec l'hypothèse supplémentaire :

$$|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leqslant 1 \qquad (t \in [0, T])\,.$$

4. Nage en symétrie axiale
   - Problème de contrôle
   - Étude d'un problème simplifié
   - Simulations numériques
   - Conclusion et questions ouvertes

Simplification

Pour s petit, on écrit :

$$\boldsymbol{f}_c(\mathrm{s}) = \boldsymbol{f}_c(\mathbf{0}) + \nabla \boldsymbol{f}_c(\mathbf{0})\mathrm{s} + o(\mathrm{s}) = K_c \mathrm{s} + o(\mathrm{s})\,.$$

On a $K_c \neq K_c^\top$.

Simplification

Pour $\mathbf{s}$ petit, on écrit :

$$\boldsymbol{f}_c(\mathbf{s}) = \boldsymbol{f}_c(\mathbf{0}) + \nabla \boldsymbol{f}_c(\mathbf{0})\mathbf{s} + o(\mathbf{s}) = K_c \mathbf{s} + o(\mathbf{s}) \,.$$

On a $K_c \neq K_c^\top$.

On considère alors l'EDO approchée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} h \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle K_c \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda} \rangle \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} . \qquad \text{(Capp)}$$

On munit ce système de la condition initiale :

$$h(0) = 0 \,, \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{0} \,. \qquad \text{(Clapp)}$$

Théorème (J. L., J.-F. Scheid)

Soient $\lambda^* = \max\left\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \mathrm{sp}\left(\frac{1}{2}\left(K_c - K_c^\top\right)\right)\right\}$,
$d^* = \sqrt{\dfrac{2|h_1|}{\pi\lambda^*}}$ *et* $\tau = \dfrac{\pi\varsigma}{2}$.

$T^\star$ *est donné par :*
$$T^\star = \begin{cases} \pi d^* & \text{si } \varsigma \geqslant d^*\,, \\ \dfrac{\pi {d^*}^2}{2\varsigma} + \tau & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, un contrôle en temps optimal est :
$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \gamma_1(t)\mathbf{w}_1 + \gamma_2(t)\mathbf{w}_2 \qquad (t \in [0,\ T^\star])\,,$$

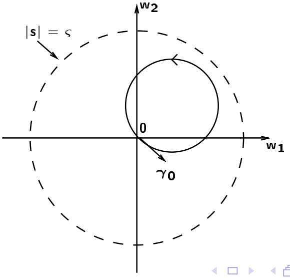
où $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ *sont deux vecteurs orthonormés tels que :*
$$\frac{1}{2}\left(K_c - K_c^\top\right)\mathbf{w}_1 = \lambda^*\mathbf{w}_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(K_c - K_c^\top\right)\mathbf{w}_2 = -\lambda^*\mathbf{w}_1\,.$$

Théorème (J. L., J.-F. Scheid, suite)

Soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$ *choisi de sorte que* $|\gamma_0| = 1$.
La fonction $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C^0([0,\, T^\star])^2$ *est définie par :*

- *si* $\varsigma \geqslant d^*$,

$$\gamma(t) = R\left(\mathrm{sg}(h_1)\frac{2\pi}{T^\star}\, t\right)\gamma_0 \qquad (t \in [0,\; T^\star])\,.$$



Caractérisation de $T^\star$ III

Contrôles en temps optimal

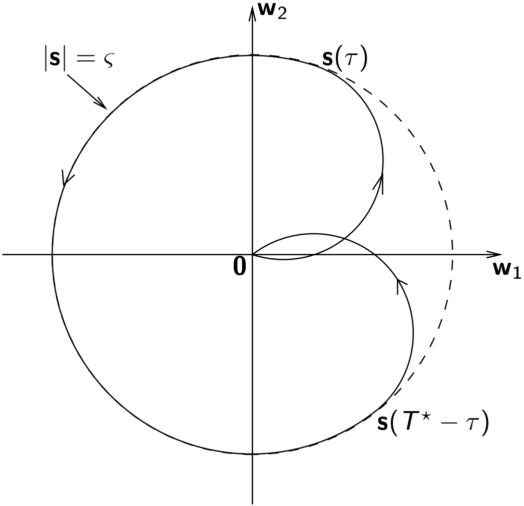
Théorème (J. L., J.-F. Scheid, suite)

- *si* $\varsigma < d^*$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} R\left(\frac{2\,\mathrm{sg}(h_1)}{\varsigma}\, t\right)\gamma_0 & (t \in [0,\, \tau))\,, \\ -R\left(\frac{\mathrm{sg}(h_1)}{\varsigma}\,(t-\tau)\right)\gamma_0 & (t \in [\tau,\ T^\star - \tau))\,, \\ R\left(\frac{\mathrm{sg}(h_1)}{\varsigma}\,(2t - 3(T^\star - \tau))\right)\gamma_0 & (t \in [T^\star - \tau,\ T^\star])\,. \end{cases}$$

Caractérisation de $T^\star$ IV

Contrôles en temps optimal



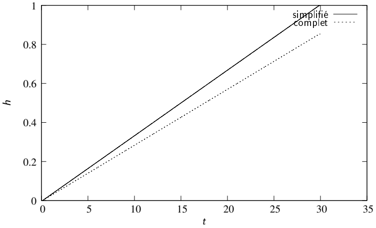
Idée de la preuve

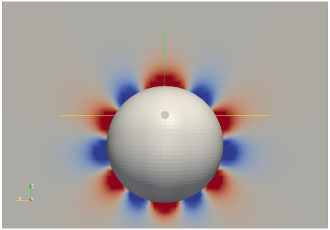
1. Seule la partie antisymétrique de K_c joue un rôle ;
2. K_c peut se diagonaliser par blocs 2×2 dans une base orthonormée ;
3. On intègre le principe du maximum de Pontryagin dans le cas $n = 2$;
4. On généralise au cas de dimension $n \geqslant 2$.

4. Nage en symétrie axiale
   - Problème de contrôle
   - Étude d'un problème simplifié
   - Simulations numériques
   - Conclusion et questions ouvertes

Simulation directe

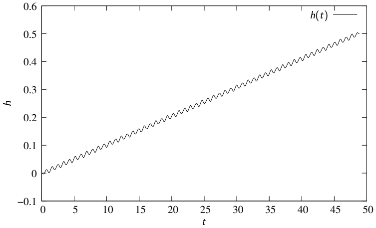
On utilise le contrôle en temps optimal obtenu pour le système simplifié comme entrée du système complet.

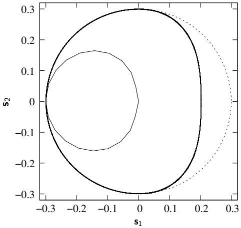


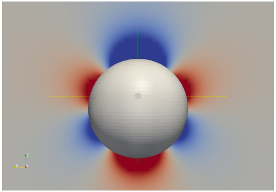


Système complet

Pour calculer un contrôle en temps optimal, on utilise une méthode directe initialisée avec le contrôle en temps optimal obtenu pour le système simplifié.







4 Nage en symétrie axiale
- Problème de contrôle
- Étude d'un problème simplifié
- Simulations numériques
- Conclusion et questions ouvertes

Conclusion

- Simulation numérique pour des formes éloignées d'une sphère.
- Simulation dans un fluide de Stokes (d'évolution) ou Navier-Stokes.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons :

- appliqué le principe du maximum de Pontryagin pour un système dynamique de dimension finie avec des contraintes sur l'état ;
- étendu ce principe à une certaine classe de systèmes de dimension infinie ;
- donné un résultat de contrôlabilité original pour la nage des micro-organismes.