



**HAL**  
open science

# Méthode multiéchelle et réduction de modèle pour la propagation d'incertitudes localisées dans les modèles stochastiques

Elias Safatly

► **To cite this version:**

Elias Safatly. Méthode multiéchelle et réduction de modèle pour la propagation d'incertitudes localisées dans les modèles stochastiques. Analyse numérique [math.NA]. Université de Nantes; Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2012. Français. NNT: . tel-00798526

**HAL Id: tel-00798526**

**<https://theses.hal.science/tel-00798526>**

Submitted on 8 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

École Doctorale

Science Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Année 2012

Méthode multiéchelle et réduction de modèle pour la  
propagation d'incertitudes localisées dans les modèles  
stochastiques.

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces

Spécialité : Calcul scientifique

*Présentée*

*et soutenue publiquement par :*

**Elias Emile SAFATLY**

*Le 2 octobre 2012, devant le jury ci-dessous*

Président	Olivier ALLIX	Professeur, ENS de Cachan
Rapporteurs	Olivier LE MAÎTRE Alexei LOZINSKI	Directeur de Recherche, CNRS Professeur, Université de Besançon
Examineurs	Olivier ALLIX Mathilde CHEVREUIL Frédéric FEYEL Anthony NOUY	Professeur, ENS de Cachan Maître de conférences, Université de Nantes Maître de recherches, ONERA Professeur, École Centrale de Nantes

*Directeur de thèse* Anthony NOUY  
*Co-encadrante* Mathilde CHEVREUIL

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles stochastiques</b>	<b>10</b>
1.1 Cadre d'étude probabiliste . . . . .	10
1.2 Méthodes de représentation sur des bases de fonctions . . . . .	12
1.3 Méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin . . . . .	15
1.4 Solveurs itératifs . . . . .	20
1.5 Réduction de modèle et représentations séparées . . . . .	21
1.6 Problèmes à géométrie aléatoire . . . . .	23
<b>2 Méthodes multi-échelles avec patches pour les incertitudes localisées</b>	<b>26</b>
2.1 Problèmes avec des variabilités localisées . . . . .	28
2.2 Méthodes de patches . . . . .	30
2.3 Méthode de patches et algorithme itératif global-local . . . . .	37
2.4 Approximation de la solution pour les problèmes global et local . . . . .	41
2.5 Plusieurs patches avec des variabilités indépendantes . . . . .	46
2.6 Conclusion . . . . .	47
<b>3 Analyse de l'algorithme itératif global-local</b>	<b>48</b>
3.1 Analyse de convergence . . . . .	49
3.2 Études numériques des paramètres de l'algorithme . . . . .	52
3.3 Robustesse de l'algorithme en fonction des approximations . . . . .	69
3.4 Approximation des solutions locales dans des sous-espaces . . . . .	72
3.5 Conclusion . . . . .	76
<b>4 Approximation séparée pour la méthode multiéchelle</b>	<b>79</b>
4.1 Solutions des problèmes globaux et locaux avec méthodes d'approximation de tenseurs . . . . .	80
4.2 Illustration sur un problème à grande dimension stochastique . . . . .	84
4.3 Conclusion . . . . .	91
<b>5 Approximations des problèmes définis sur des géométries aléatoires</b>	<b>94</b>
5.1 Formulation du problème et méthode de domaine fictif . . . . .	95
5.2 Proper Generalized Decomposition . . . . .	100
5.3 Représentations séparées des fonctions indicatrices . . . . .	111
5.4 Exemple : domaine avec deux frontières sinusoïdales aléatoires . . . . .	124

5.5	Conditions de Dirichlet sur une frontière aléatoire : méthode des fonctions caractéristiques . . . . .	130
5.6	Conclusion . . . . .	133
<b>Conclusion et Perspectives</b>		<b>135</b>
<b>A Convergence des solutions des formulations sur domaine fictif associées aux fonctions indicatrices approximées</b>		<b>139</b>
A.1	Convergence des solutions des problèmes régularisés . . . . .	139
A.2	Convergence des solutions associées à des fonctions indicatrices approximées .	143
<b>B Convergence des représentations séparées des fonctions indicatrices</b>		<b>147</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>158</b>

# Remerciements

Il m'a été donné de rencontrer, une personne qui allait être pour moi une présence, de celles qui marquent chez un être humain une part essentielle de sa richesse d'humanité. C'est avec une telle qualité de présence, toujours bienveillante et attentive, que Mr. Anthony NOUY a donné réalité à mon désir d'explorer un passionnant domaine entre les mathématiques et la mécanique. Il a cru en moi et m'a apporté un soutien infiniment précieux tout au long de cette aventure, que j'ai eu la possibilité de mener et d'achever grâce à lui. Je suis très heureux d'avoir eu la chance de bénéficier au niveau scientifique et humain de sa grande expérience, de son recul et sa vision mathématique, ainsi que de son immense culture. Je souhaite ici le remercier pour son amitié et lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Je tiens à adresser aussi mes chaleureux remerciements à ma co-encadrante de thèse Mme. Mathilde CHEVREUIL. Elle m'a transmis la passion de la recherche et n'a eu de cesse de m'encourager et de me soutenir durant ces trois années. J'ai pu apprécier non seulement sa dimension scientifique, mais aussi sa dimension humaine. J'en profite pour lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Je remercie très vivement les professeurs qui se sont intéressés de près à mon travail : Olivier LE MAÎTRE et Alexei LOZINSKI qui ont bien voulu en être les rapporteurs et se sont soigneusement acquittés de cette tâche ; Olivier ALLIX et Frédéric FEYEL qui m'ont fait l'honneur et le plaisir d'être membres du jury de ma thèse.

L'environnement à la fois convivial et scientifique au sein du labora-

toire GeM, dans l'école centrale de Nantes et dans l'université de Nantes, m'a offert un cadre de travail particulièrement agréable et enrichissant. Merci tout particulièrement à Mr. Arnaud POITOU le directeur de l'école centrale de Nantes qui m'a aidé pour trouver ce sujet de doctorat et pour venir en France.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à ma famille : mon père Emile, ma mère Najah, ma soeur Lise, mon frère Mario et mon beau frère Zareh, grâce à eux mon séjour en France et la poursuite de mes études jusqu'à ce stade ont été possibles. Je les remercie de tout mon coeur pour leur amour et leur soutien discret et essentiel. C'est avec leurs encouragements que j'ai pu accomplir ce travail de thèse. Il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux, et à quel point je les aime. Je pense également à ma grande famille, ma grand mère, mes tantes, Hanane et sa famille et à tous ceux que je ne nomme pas, mais qui se reconnaîtront.

Je veux dédier cette thèse aussi aux père Touma, père Younen, père Nicolas, mère Févronia, mère Mariame et Mme. Irène qui m'ont accompagné par leurs prières et leurs conseils, à l'association : "Mouvement de la Jeunesse Orthodoxe" et aussi aux quelques amis que j'ai eu la chance d'avoir à mes côtés, qui m'ont soutenu tout au long de ces années de travail. Pour mon ami Eddie qui m'a aidé de trouver cette thèse et pour mon ami d'enfance Rami.

Enfin, pour ma petite fleur Layal, qui m'a fait le merveilleux cadeau de sa douce présence à mes côtés, et dont la proximité si chère à mon coeur m'a été une immense source de vie et de joie au quotidien. Elle a traversé si courageusement avec moi la pénible épreuve des longs mois de distance, m'assurant tous les jours de son amour, sa tendresse et de son support avec une admirable générosité. Je la dédie cette thèse à elle et à ma belle famille avec tout mon amour.

# Introduction

Les méthodes pour la quantification et la propagation des incertitudes basées sur des approches fonctionnelles ont émergé ces deux dernières décennies (voir [Maître et Knio, 2010] et les articles de review [Matthies, 2008; Nouy, 2009; Xiu, 2009]). Elles consistent à représenter les grandeurs incertaines (aléatoires) comme des fonctions de paramètres caractérisant les incertitudes d'entrée d'un modèle stochastique. Cette vision fonctionnelle, combinée à la théorie de l'approximation et à l'analyse numérique, a conduit au développement de méthodes numériques appelées méthodes spectrales stochastiques, qui permettent la propagation des incertitudes à travers le modèle et fournissent une représentation explicite de la solution en fonction des paramètres d'entrée. Des travaux récents ont été consacrés à la propagation des incertitudes dans les modèles stochastiques multi-échelles en utilisant ces approches fonctionnelles. Dans le cas de milieux hétérogènes aléatoires permettant une séparation d'échelles, plusieurs méthodes d'upscaling et d'homogénéisation ont été introduites [Sarkar *et al.*, 2009; Xu, 2007; Xu *et al.*, 2009; Ganapathysubramanian et Zabaras, 2009; Ma et Zabaras, 2011]. Cependant, la propagation des incertitudes dans les modèles stochastiques multi-échelle reste aujourd'hui une question difficile puisqu'il en découle des problèmes stochastiques de grande dimension. Cette grande dimensionnalité doit donc être correctement traitée. Par ailleurs, les approches numériques mono-échelles souffrent clairement de la complexité des solutions multi-échelles qui présentent un contenu spectral très riche.

Dans ce mémoire, on se concentre sur les problèmes multi-échelles avec des incertitudes localisées (sur l'opérateur, les termes source ou la géométrie). En présence de nombreuses sources d'incertitudes localisées, des

approches spécifiques doivent être développées afin de traiter la grande dimensionnalité et la complexité des modèles multi-échelles associés. Au niveau déterministe, des méthodes dédiées ont répondu à la demande du couplage de modèles numériques à des échelles différentes et certaines d’entre elles ont été étendues aux modèles stochastiques. Parmi ces méthodes déterministes, on peut distinguer les méthodes mono-modèle basées sur un maillage adaptatif ou des techniques d’enrichissement [Stein et Ohnibus, 1997; Düster *et al.*, 2007; Melenk et Babuška, 1996; Moës *et al.*, 1999] et les méthodes multi-modèles basées sur les patches comme les algorithmes itératifs global-local proposés dans [Gendre *et al.*, 2009; Gendre *et al.*, 2011; Lozinski, 2010; Lozinski et Pironneau, 2011; Hager *et al.*, 2012] ou les “méthodes de bridging” proposées dans [Brezzi *et al.*, 2001; Wagner et Liu, 2003; Xiao et Belytschko., 2004] ou dans [Ben Dhia et Rateau, 2001; Ben Dhia, 1998] avec la méthode Arlequin. Cette dernière a été étendue au cadre stochastique dans [Chamoïn *et al.*, 2008; Cottureau *et al.*, 2011] pour le couplage déterministe-stochastique dans un contexte d’homogénéisation.

On propose ici une méthode dédiée basée sur une méthode de décomposition de domaine multi-échelle qui exploite le caractère localisé des incertitudes. Elle appartient à la classe des méthodes itératives global-local mentionnées ci-dessus. Un algorithme itératif efficace est proposé et requiert la solution d’une séquence de problèmes globaux simples à l’échelle macro, utilisant éventuellement un opérateur déterministe, et de problèmes locaux à l’échelle micro pour lesquels nous avons la possibilité d’utiliser des espaces d’approximation fins. La séparation des échelles améliore le conditionnement du problème. Afin de gérer la grande dimensionnalité qui découle de ces problèmes multi-échelles avec de nombreuses sources d’incertitudes, les problèmes globaux et locaux sont résolus à l’aide de méthodes d’approximation de tenseurs permettant la représentation de fonctions de nombreux paramètres aléatoires. Les propriétés de convergence de ces méthodes d’approximation de tenseurs, qui sont fortement liées aux décompositions spectrales, bénéficient de la séparation des échelles. Différents formats de représentations séparées peuvent être exploités [Hackbusch, 2012]. Ici, les décompositions classiques cano-



niques et les décompositions hiérarchiques canoniques comme dans [Nouy, 2010b; Chevreuil et Nouy, 2012] sont introduites, ces dernières donnant des représentations de rangs très faibles. Dans ce travail, une technique de résolution dédiée basée sur la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) est utilisée pour la construction des représentations tensorielles. Cette dernière méthode consiste à rechercher une décomposition en variables séparées de la solution *a priori*. Elle peut être vue comme une méthode de réduction de modèle. Elle permet le découplage de problèmes déterministes et stochastiques autorisant dans certains cas l'utilisation de solveurs déterministes classiques bien maîtrisés (voir [Ammar *et al.*, 2006; Beylkin et Mohlenkamp, 2005; Chinesta *et al.*, 2010; Falco et Nouy, 2011; Falco et Nouy, 2012; Ladevèze *et al.*, 2010; Nouy, 2008; Nouy et Le Maître, 2009; Nouy, 2010a]). On note que les méthodes PGD ont également été étendues à la quantification des incertitudes pour les modèles paramétriques de grandes dimensions [Doostan et Iaccarino, 2009; Nouy, 2010b].

Différents types d'incertitudes sont considérés au niveau micro. elles peuvent être associées à une variabilité dans les opérateurs ou dans les termes source, ou même à une variabilité géométrique. Concernant le dernier cas, plusieurs travaux ont été récemment consacrés à la résolution de problèmes où l'aléa porte sur la géométrie. Cette problématique est par exemple rencontrée dans de nombreuses applications en mécanique : modélisation des aléas sur un procédé de fabrication, sur la géométrie de la micro-structure d'un matériau hétérogène, fissuration, etc. Il existe principalement deux alternatives pour prendre en compte les incertitudes géométriques et résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles définies sur un domaine incertain. La première consiste à introduire une transformation aléatoire vers un domaine de référence déterministe (voir [Xiu et Tartakovsky, 2006; Mohan *et al.*, 2011]). La seconde est basée sur un prolongement des fonctions sur un domaine fictif incluant toutes les réalisations possibles de la géométrie (voir [Canuto et Kozubek, 2007; Nouy *et al.*, 2008; Nouy *et al.*, 2011]). C'est cette deuxième approche qui est retenue pour reformuler les problèmes locaux en utilisant des méthodes de domaine fictif afin de formuler le problème sur un espace produit tensoriel. La formulation du problème initial est alors faite

sur un domaine fixe, ce qui rend possible une reformulation faible du problème stochastique dans un espace produit tensoriel (produit de l'espace de fonctions déterministes et de l'espace des fonctions stochastiques) et ainsi l'utilisation de méthodes d'approximation de tenseurs. La reformulation du problème dépend du type de conditions aux limites. Dans ce mémoire, on traite les cas des conditions de Neumann et de Dirichlet.

**Le chapitre 1** présente un état de l'art des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles. Le cadre probabiliste y est tout d'abord présenté, ainsi que les méthodes fonctionnelles pour la propagation des incertitudes. On insiste sur les méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin qui seront utilisées par la suite. Il en suit un aperçu des difficultés associées à la résolution avec des solveurs classiques du système d'équations de grande dimension qui en résulte et la nécessité d'introduire des représentations séparées des fonctions pour une résolution efficace des équations aux dérivées partielles stochastiques. À l'occasion, le principe de la méthode Proper Generalized Décomposition (PGD) pour la construction de ces représentations séparées est introduit brièvement. Enfin, les méthodes existantes pour résoudre les problèmes à géométrie aléatoire avec les méthodes spectrales stochastiques sont évoquées dans un dernier paragraphe.

**Le chapitre 2** décrit différentes méthodes multi-échelles avec patches pour les incertitudes localisées. La formulation du problème étudié est d'abord présentée avant d'introduire dans le deuxième paragraphe les différentes méthodes de patches de superposition, de couplage à l'interface et de couplage volumique. On propose ensuite une méthode de patches et son algorithme itératif global-local, inspirée d'une méthode proposée dans [Lozinski, 2010], dédiée à notre contexte d'incertitudes localisées. Dans un paragraphe suivant, on introduit les approximations des solutions pour les problèmes global et local de l'algorithme itératif. Enfin, on formule le problème avec plusieurs patches avec variabilités indépendantes.

**Le chapitre 3** est dédié à l'analyse de l'algorithme itératif global-local proposé. Une preuve de convergence de l'algorithme est fournie et des

exemples numériques sans et avec variabilités géométriques illustrent les bonnes propriétés de l'algorithme. Une analyse fine du comportement de l'algorithme en fonction des différents paramètres est menée et permet de conclure sur un paramétrage idéal. On mène ensuite une analyse de robustesse de l'algorithme en fonction des approximations. Enfin, on exploite le caractère localisé des incertitudes en introduisant des approximations des solutions locales dans des sous espaces (solutions locales dépendant uniquement de certains paramètres aléatoires). On justifie par des exemples numériques la possibilité d'adopter des telles approximations.

**Le chapitre 4** est consacré aux approximations séparées pour la méthode multiéchelle en grande dimension. On y présente les différents formats d'approximation de tenseurs pour les solutions des problèmes globaux et locaux ainsi qu'un algorithme glouton pour construire la décomposition de tenseurs : la méthode Proper Generalized Decomposition. Enfin, un exemple numérique en grande dimension avec un grand nombre de variabilités (géométriques et non géométriques) illustre les résultats de convergence de l'algorithme itératif global-local dans lequel les problèmes globaux et locaux sont résolus avec les méthodes d'approximation de tenseurs.

**Le chapitre 5** présente plus en détail les méthodes de résolution des problèmes définis sur des domaines aléatoires, avec des approches de type domaine fictif permettant la reformulation du problème sur des espaces produits tensoriel et l'utilisation de méthodes d'approximation de tenseurs. Dans le cas des conditions de Neumann sur frontières aléatoires, on détaille les difficultés liées à la représentation séparée des fonctions indicatrices introduites pour la reformulation du problème sur domaine fictif. On y propose des outils pour la construction de la représentation séparée préservant la positivité et permettant ainsi d'assurer le caractère bien posé des problèmes associés aux fonctions indicatrices approchées. Dans le cas des conditions de Dirichlet sur frontières aléatoires, on introduit la méthode des fonctions caractéristiques. Des exemples numériques illustrent ces différentes méthodes.

# Chapitre 1

## Méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles stochastiques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Cadre d'étude probabiliste . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1.1	Modélisation probabiliste des incertitudes . . . . .	11
1.1.2	Discrétisation des incertitudes . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Méthodes de représentation sur des bases de fonctions . . . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1	Régression . . . . .	13
1.2.2	Méthode de projection . . . . .	14
1.2.3	Méthodes de Galerkin au niveau stochastique . . . . .	15
<b>1.3</b>	<b>Méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin . . . . .</b>	<b>15</b>
1.3.1	Équations aux dérivées partielles stochastiques . . . . .	16
1.3.2	Approximation au niveau déterministe . . . . .	18
1.3.3	Approximation de Galerkin au niveau stochastique . . . . .	19
<b>1.4</b>	<b>Solveurs itératifs . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Réduction de modèle et représentations séparées . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.6</b>	<b>Problèmes à géométrie aléatoire . . . . .</b>	<b>23</b>

---

### 1.1 Cadre d'étude probabiliste

On s'intéresse dans ce chapitre aux méthodes de prédiction de la réponse de modèles incertains caractérisés par des équations différentielles ou équations aux dérivées partielles. La réponse  $u$  est solution d'un ensemble d'équations noté formellement

$$\mathcal{A}(u) = b$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur différentiel et  $b$  un second membre reflétant les termes sources. On cherche alors à caractériser l'incertitude sur la solution  $u$  connaissant les éventuelles incertitudes sur  $\mathcal{A}$  et  $b$ .

### 1.1.1 Modélisation probabiliste des incertitudes

On distingue deux types d'incertitudes selon la nature de l'information à laquelle elles sont liées. Si les incertitudes sont associées à des informations imprécises provenant d'observations incomplètes ou d'une méconnaissance du modèle, on les appelle les incertitudes épistémiques. Toute amélioration de la connaissance du modèle permet de réduire ces incertitudes. Si les incertitudes sont liées à la variabilité naturelle des phénomènes étudiés et sont irréductibles, on les appelle incertitudes intrinsèques. On peut distinguer plusieurs types de description des incertitudes : la méthode des intervalles [Ben-Haim et Elishakoff, 1990], la théorie des ensembles flous [Zadeh, 1978; Elishakoff, 1999], la théorie de l'évidence [Shafer, 1976], et les approches probabilistes ou stochastiques [Gardiner, 1985]. Ces dernières, qui reposent sur la théorie des probabilités [Loève, 1977; Loève, 1978], sont de loin les plus répandues.

Dans ce mémoire, nous adoptons une approche probabiliste de modélisation des incertitudes. La modélisation des incertitudes consiste alors à définir un espace de probabilité  $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta, P)$ , où  $\Theta$  désigne l'espace des événements élémentaires,  $\mathcal{B}_\Theta$  une  $\sigma$ -algèbre définie sur  $\Theta$  et  $P$  une mesure de probabilité. L'incertitude (ou aléa) sur le modèle pourra être formalisée de la façon suivante :

$$\mathcal{A}(u(\theta); \theta) = b(\theta) \tag{1.1}$$

où  $\theta \in \Theta$ . La réponse  $u$  du modèle aléatoire sera donc une variable aléatoire, à valeur dans un certain espace fonctionnel, devant vérifier presque sûrement (1.1).

### 1.1.2 Discrétisation des incertitudes

La description mathématique des incertitudes demande *a priori* de définir un espace de probabilité de dimension infinie. Cependant, dans de nombreuses applications physiques, les incertitudes peuvent être correctement modélisées par un ensemble fini de variables aléatoires. Les incerti-

tudes sur le modèle sont donc modélisées par un nombre fini de variables aléatoires scalaires ou de processus (ou champs) stochastiques discrétisés. On se ramènera donc en pratique à définir un contenu probabiliste à partir d'un nombre fini de variables aléatoires  $\xi : \theta \in \Theta \mapsto \xi(\theta) \in \Xi \in \mathbb{R}^{N_\xi}$ , définissant un nouvel espace de probabilité de dimension finie  $(\Xi, \mathcal{B}_\Xi, P_\xi)$ , où  $\Xi = \xi(\Theta)$ . Pour la simplicité on notera dans la suite  $\mathcal{B}_\Xi := \mathcal{B}$ .

Une variable aléatoire pourra alors être considérée comme une fonction mesurable définie sur  $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$ . La réponse du modèle  $u$  sera donc naturellement cherchée comme une fonction de  $\xi$  et devra satisfaire presque sûrement le système d'équations :

$$\mathcal{A}(u(\xi); \xi) = b(\xi) \quad (1.2)$$

## 1.2 Méthodes de représentation sur des bases de fonctions

Il existe plusieurs méthodes de calcul permettant la résolution du problème stochastique (1.2). Le choix de la méthode de calcul dépend en général de la nature de la quantité d'intérêt et du type d'information probabiliste recherchée : moments statistiques, probabilité d'événements, densité de probabilité ... On introduit ici uniquement les méthodes qui consistent à représenter complètement la quantité d'intérêt sur une base de fonctions, classiquement appelées méthodes spectrales stochastiques [Ghanem et Spanos, 1991; Maître et Knio, 2010; Nouy, 2009]. On pose  $J(u)$  la quantité d'intérêt fonction de la solution du modèle. Connaissant une représentation fonctionnelle de  $J(u)$  suffisamment précise, on peut alors opérer un post-traitement rapide de la solution (évaluation de réalisations, calcul de gradients, ...) et en déduire des informations probabilistes reliées à la quantité d'intérêt  $J(u(\xi); \xi)$  telles que ses moments statistiques, voire une description complète et relativement précise de sa loi de probabilité.

Soit  $u$  la solution du problème stochastique et  $J(u)$  la quantité d'intérêt. On introduit une représentation fonctionnelle de  $J(u)$  qui peut être écrite de la façon suivante :

$$J(u(\xi); \xi) = \sum_{\alpha \in I_P} J_\alpha H_\alpha(\xi) \quad (1.3)$$

où  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I_P}$  désigne une base de fonctions et  $I_P$  est un ensemble d'indices tel que  $I_P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_P\}$ . La base de fonctions introduite peut être un chaos polynomial ou ses généralisations [Ghanem et Spanos, 1991; Xiu et Karniadakis, 2002], des bases polynomiales par morceaux (éléments finis classique [Deb *et al.*, 2001] ou multi-ondelettes [Le Maître *et al.*, 2004]), des bases d'interpolation de Lagrange ...

Dans la suite, trois méthodes sont présentées pour le calcul de la représentation : la méthode de régression et la méthode de projection qui sont des techniques "non intrusives", et la méthode de Galerkin qui sera détaillée dans la suite. Les méthodes "non intrusives" sont très attractives car elles ne requièrent que l'utilisation d'un code de calcul déterministe, tandis que la méthode de Galerkin demande le développement d'un code, ou, tout du moins, l'adaptation d'un code existant.

### 1.2.1 Régression

Une première méthode consiste à définir les coefficients  $\{J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_P}\}$  de la décomposition de  $J(u(\xi); \xi) = \sum_{\alpha \in I_P} J_\alpha H_\alpha(\xi)$  par une méthode de régression [Berveiller *et al.*, 2006].

On suppose que les solutions  $u(\xi_k)$  ont été calculées pour un ensemble de  $M$  réalisations  $\xi_k$  en résolvant l'ensemble des problèmes :

$$\mathcal{A}(u(\xi_k); \xi_k) = b(\xi_k) \quad k = 1, \dots, M \quad (1.4)$$

On peut déduire les valeurs des quantités d'intérêt associées  $J(u(\xi_k))$ . Les coefficients  $J_\alpha$  sont alors définis de la façon suivante :

$$\{J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_P}\} = \arg \min_{J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_P}} \sum_{k=1}^M w_k (J(u(\xi_k)) - \sum_{\alpha \in I_P} J_\alpha H_\alpha(\xi_k))^2 \quad (1.5)$$

où  $w_k$  représente le poids associé au point  $\xi_k$ .

On considère le cas où la quantité d'intérêt est un scalaire et on note  $\mathbf{J} = (J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_P})$  le vecteur des composantes. Ce vecteur est alors solution d'un système linéaire :

$$\mathbf{R}\mathbf{J} = \mathbf{r}$$

où  $(\mathbf{R})_{ij} = \sum_{k=1}^M w_k H_{\alpha_i}(\xi_k) H_{\alpha_j}(\xi_k)$  et  $(\mathbf{r})_j = \sum_{k=1}^M H_{\alpha_j}(\xi_k) J(u(\xi_k)) w_k$

Cette méthode de régression est donc non intrusive car elle ne nécessite qu'un code de calcul déterministe. Elle ne s'appuie que sur  $M$  calculs déterministes afin de calculer les quantités  $J(u(\xi_k))$  pour  $k = 1, \dots, M$ . La difficulté de cette méthode réside dans le choix des points  $\xi_k$  et des poids  $w_k$ , car si ces éléments sont mal choisis, ou en nombre insuffisant, le système linéaire peut être mal conditionné voire singulier, et conduire à de mauvaises approximations de la quantité d'intérêt. On note que différents choix ont été proposés comme les tirages pseudo-aléatoires, les tirages quasi-aléatoires, ou les points de quadratures de Gauss complètes ou creuses. On pourra trouver une étude détaillée de ces différents choix (précision de la solution, impact sur le conditionnement du système, ...) dans [Berveiller, 2005].

### 1.2.2 Méthode de projection

La méthode de projection [Keese et Mathhies, 2003; Le Maître *et al.*, 2002] consiste à définir l'approximation  $J(u(\xi); \xi) = \sum_{\alpha \in I_P} J_\alpha H_\alpha(\xi)$  comme la projection de  $J$  sur le sous-espace de  $L^2_{P_\xi}(\Xi)$  engendré par les fonctions  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I_P}$ . La projection est définie au sens du produit scalaire naturel de  $L^2_{P_\xi}(\Xi)$  :

$$\langle v, w \rangle_{L^2_{P_\xi}(\Xi)} = \mathbb{E}(v(\xi)w(\xi)) = \int_{\Xi} v(y)w(y) dP_\xi(y)$$

où  $\mathbb{E}(\cdot)$  est l'espérance mathématique définie par

$$\mathbb{E}(v) = \int_{\Xi} v(y) dP_\xi(y)$$

Les coefficients de la fonctionnelle  $J$  sont alors définis de la manière suivante :

$$J_\alpha = \langle J, H_\alpha \rangle_{L^2_{P_\xi}(\Xi)} = \mathbb{E}(J(u(\xi), \xi) H_\alpha(\xi))$$

Ce calcul d'espérance ou de l'intégrale sur  $\Xi$  est effectué par une technique d'intégration numérique :

$$J_\alpha = \sum_{k=1}^M w_k J(u(y_k), y_k) H_\alpha(y_k)$$



où les  $y_k$  sont les points d'intégration (événements élémentaires particuliers) et les  $w_k$  sont les poids d'intégration associés. La méthode de projection est une méthode non intrusive car elle nécessite un code de calcul déterministe. Les calculs peuvent alors être simplement parallélisés. Cependant, les coûts de calculs sont généralement élevés car la méthode peut demander un grand nombre de points d'intégration pour bien calculer les coefficients de la décomposition. Afin de limiter le nombre de points d'intégration, il sera souvent nécessaire d'utiliser des méthodes de quadrature creuse en grande dimension stochastique [Matthies et Keese, 2005; Smolyak, 1963].

### 1.2.3 Méthodes de Galerkin au niveau stochastique

Les approches de type Galerkin au niveau stochastique [Ghanem et Spanos, 1991; Matthies et Keese, 2005] permettent généralement une bonne maîtrise de l'approximation (existence d'estimateurs d'erreur *a priori* et *a posteriori* [Frauenfelder *et al.*, 2005; Ladevèze et Florentin, 2006; Mathelin et Maître, 2006; Mathelin et Maître, 2007]). Elles sont souvent plus robustes et plus efficaces que les approches non intrusives. Cependant, elles nécessitent en général une bonne connaissance des équations décrivant le modèle physique et l'élaboration de solveurs spécifiques pour une classe de problèmes donnée. Son utilisation demande de créer ou d'adapter un code de calcul. De plus, la résolution de problèmes en grande dimension stochastique conduit à des coûts de calcul élevés mais également à des problèmes de stockage mémoire. Ces approches sont détaillées dans la section suivante 1.3.

## 1.3 Méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin

Les méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin fournissent une démarche générale pour la prédiction de la réponse d'une grande classe de modèles régis par des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). Ces approches suivent le même principe que les approches de Galerkin au niveau déterministe. Elles définissent une approximation de

la solution, représentée sur une certaine base d'approximation, en s'appuyant sur une formulation faible du problème stochastique (1.2). Après un bref rappel de quelques éléments d'analyse des EDPS, on exposera les principes de base de ces approches et les techniques de résolution associées.

### 1.3.1 Équations aux dérivées partielles stochastiques

#### 1.3.1.1 Formulation forte du problème

Les équations aux dérivées partielles stochastiques peuvent généralement se ramener à la recherche d'une variable aléatoire  $u$ , définie sur un espace de probabilité  $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$ , et vérifiant presque sûrement un ensemble d'équations, notées formellement :

$$\mathcal{A}(u(\xi); \xi) = b(\xi) \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur différentiel, éventuellement non-linéaire, et où  $b$  désigne les termes sources de l'équation.

#### 1.3.1.2 Espaces de fonctions

Dans ce paragraphe on définit les espaces et les outils nécessaires pour les formulations de ce problème et pour la suite de ce mémoire. Pour un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  équipé d'une norme  $|\cdot|$  associé à un produit scalaire, on note  $\mathcal{H}^\Xi$  l'espace de Bochner, espace des fonctions de carré intégrable définies sur l'espace mesurable  $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H}^\Xi = L_{P_\xi}^2(\Xi; \mathcal{H}) = \{v : y \in \Xi \mapsto v(y) \in \mathcal{H} ; \mathbb{E}(|v(\xi)|^2) < +\infty\}$$

L'espace de Bochner  $\mathcal{H}^\Xi$  est un espace de Hilbert quand il est équipé de la norme suivante :

$$\|v\| = \mathbb{E}(|v(\xi)|^2)^{1/2}$$

Pour  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ , on utilise les notations  $\mathcal{S} := \mathbb{R}^\Xi = L_{P_\xi}^2(\Xi; \mathbb{R}) := L_{P_\xi}^2(\Xi)$ . On note que  $\mathcal{H}$  peut être un espace aléatoire, c'est-à-dire qu'il dépend de  $\xi$  (*e.g.* c'est le cas d'un espace de fonctions défini sur un domaine incertain). Dans le cas où  $\mathcal{H}$  est déterministe, l'espace de Bochner peut être identifié

à l'espace de tenseurs de Hilbert  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}$  :

$$\mathcal{H}^\Xi = L^2_{P_\xi}(\Xi; \mathcal{H}) \simeq \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}$$

### 1.3.1.3 Formulation faible au niveau déterministe

La formulation faible au niveau déterministe du problème (1.6) s'écrit : trouver une variable aléatoire  $u$  à valeurs dans un espace fonctionnel  $\mathcal{V}$  vérifiant presque sûrement :

$$a(u(\xi), v; \xi) = b(v; \xi) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (1.7)$$

où  $a(\cdot, \cdot; \xi)$  est une forme sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  et où  $b(\cdot; \xi)$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{V}$ . La solution aléatoire  $u(\xi)$  du problème (1.7) est une solution forte au niveau stochastique. Une analyse mathématique classique sur l'étude des propriétés des formes  $a$  et  $b$  (voir [Brézis, 1983] et [Riesz et Sz.-Nagy, 1990]) permet alors de juger l'existence et l'unicité d'une telle solution.

### 1.3.1.4 Formulation faible au niveau stochastique

Pour de nombreux modèles, la solution est une variable aléatoire du second ordre. On recherche alors classiquement une solution du problème (1.7) dans l'espace  $\mathcal{V}^\Xi = L^2_{P_\xi}(\Xi; \mathcal{V})$  des variables aléatoires du second ordre à valeurs dans l'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$ . La formulation faible du problème (1.7) s'écrit : trouver  $u \in \mathcal{V}^\Xi$  tel que

$$A(u, v) = B(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\Xi \quad (1.8)$$

avec

$$A(u, v) := \mathbb{E}(a(u(\xi), v(\xi); \xi)) = \int_{\Xi} a(u(y), v(y); y) dP_\xi(y) \quad (1.9)$$

$$B(v) := \mathbb{E}(b(v(\xi); \xi)) = \int_{\Xi} b(v(y); y) dP_\xi(y) \quad (1.10)$$

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (1.8) fait encore appel à une analyse mathématique des propriétés des formes  $A$  et  $B$  (voir [Besold, 2000; Babuška et Chleboun, 2002; Frauenfelder et al., 2005; Matthies et Keese, 2005; Soize, 2006]). Notons que dans le cas

d'un espace  $\mathcal{V}$  *indépendant de l'événement élémentaire*, on peut assimiler l'espace fonctionnel  $\mathcal{V}^\Xi$  à un espace produit tensoriel :

$$\mathcal{V}^\Xi = L^2_{F_\xi}(\Xi; \mathcal{V}) \simeq \mathcal{V} \otimes \mathcal{S}$$

### 1.3.2 Approximation au niveau déterministe

#### 1.3.2.1 Formulation forte du problème semi-discrétisé

Les techniques d'approximation classiques au niveau déterministe aboutissent classiquement à la résolution du problème semi-discrétisé suivant : trouver une variable aléatoire  $\mathbf{u}(\xi)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (ou vecteur aléatoire) vérifiant presque sûrement

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}(\xi); \xi) = \mathbf{b}(\xi) \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{A}(\cdot; \xi)$  est un opérateur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et où  $\mathbf{b}(\xi)$  est un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Approches de Galerkin au niveau déterministe.** Les méthodes de Galerkin classiques (éléments finis, méthodes spectrales, ...) s'appuient sur une formulation faible au niveau déterministe (équation (1.7)). Dans le cas où l'espace  $\mathcal{V}$  est indépendant de  $\xi$ , on peut introduire un espace d'approximation  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$  de dimension  $n$ . L'approximation de Galerkin du problème (1.7), variable aléatoire  $u_n(\xi)$  à valeurs dans  $\mathcal{V}_n$ , satisfait alors presque sûrement

$$a(u_n(\xi), v_n; \xi) = b(v_n; \xi) \quad \forall v_n \in \mathcal{V}_n$$

En notant,  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  une base de fonctions de  $\mathcal{V}_n$  et en notant  $\mathbf{u}(\xi) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des composantes de  $u_n$  sur cette base, on définit naturellement l'opérateur et le second membre discrétisé de (1.11) par :

$$(\mathbf{A}(\mathbf{u}; \xi))_i = a(u_n, \varphi_i; \xi), \quad (\mathbf{b}(\xi))_i = b(\varphi_i; \xi) \quad (1.12)$$

Dans le cas d'un problème linéaire,  $\mathbf{A}$  est une matrice aléatoire dont les composantes s'expriment :

$$(\mathbf{A}(\xi))_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i; \xi)$$

### 1.3.2.2 Formulation faible du problème semi-discrétisé

Une formulation faible du problème semi-discrétisé au niveau stochastique s'écrit de la manière suivante :

trouver  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}$  tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S} \quad (1.13)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbb{E}(\mathbf{v}(\xi)^T \mathbf{A}(\mathbf{u}(\xi); \xi)), \quad \mathbf{B}(\mathbf{v}) = \mathbb{E}(\mathbf{v}(\xi)^T \mathbf{b}(\xi)) \quad (1.14)$$

### 1.3.3 Approximation de Galerkin au niveau stochastique

#### 1.3.3.1 Définition de l'approximation

Les méthodes spectrales stochastiques de type Galerkin partent de la formulation faible du problème (1.13). Elles introduisent un espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$  et définissent une approximation  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$  de la manière suivante :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P \quad (1.15)$$

ou encore, en revenant aux définitions (1.14) de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}^T \mathbf{R}(\mathbf{u})) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$$

avec  $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\xi); \xi) = \mathbf{b}(\xi) - \mathbf{A}(\mathbf{u}(\xi); \xi)$ . L'équation précédente assure donc l'annulation de la projection orthogonale du résidu  $\mathbf{R}(u)$  sur  $\mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$ . C'est bien une vérification faible et approchée de l'équation (1.11). Des analyses mathématiques classiques permettent de préciser le sens et les propriétés de l'approximation de Galerkin, solution du problème (1.15) : convergence, stabilité, erreur *a priori*.

#### 1.3.3.2 Système d'équations à résoudre

En notant  $\{H_\alpha\}_{\alpha=1}^P$  une base de  $\mathcal{S}_P$  [Ghanem et Spanos, 1991; Xiu et Karniadakis, 2002], la solution  $u \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$  sera donc recherchée sous la forme d'une décomposition :

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{\alpha=1}^P \mathbf{u}_\alpha H_\alpha(\xi) ; \mathbf{u}_\alpha \in \mathbb{R}^n$$

Le problème (1.15) se ramène alors au système d'équations suivant :

$$\mathbb{E}(H_\alpha(\xi) \mathbf{A}(\sum_{\beta=1}^P \mathbf{u}_\beta H_\beta(\xi); \xi)) = \mathbb{E}(\mathbf{b}(\xi) H_\alpha(\xi)), \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, P\} \quad (1.16)$$

C'est un système de  $n \times P$  équations, éventuellement non-linéaires. En notant  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nP}$  le vecteur par bloc réunissant les composantes  $\mathbf{u}_\alpha := (\mathbf{u})_\alpha$ , on peut remettre le système (1.16) sous la forme d'un système d'équations par bloc :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \quad (1.17)$$

avec

$$(\mathbf{A}(\mathbf{u}))_\alpha = \mathbb{E}(H_\alpha \mathbf{A}(\sum_{\beta=1}^P \mathbf{u}_\beta H_\beta)), \quad (\mathbf{b})_\alpha = \mathbb{E}(\mathbf{b} H_\alpha) \quad (1.18)$$

**Remarque 1.1** *Dans les cas des solutions peu régulières, les propriétés de convergence de ces approches sont détériorées. Une possibilité consiste alors à utiliser des bases de représentation adaptées telles que les éléments finis ou multi-ondelettes [Deb et al., 2001; Babuska et al., 2005; Le Maître et al., 2004]. Dans ce mémoire, on utilise une base éléments finis stochastiques dans certaines applications avec des solutions peu régulières. Un bon espace d'approximation ne peut généralement pas être choisi sans des critères d'estimation d'erreur. Ce type d'approche n'est donc souvent viable que dans un cadre d'approximation adaptative.*

## 1.4 Solveurs itératifs

Dans le cas de problèmes linéaires, l'équation (1.17) revient à la résolution d'un système linéaire<sup>1</sup>. La matrice associée est en général de très grande taille et creuse. Ce caractère creux provient de la structure creuse

---

1. Dans le cas de problèmes non-linéaires, on introduira classiquement des méthodes itératives conduisant à la résolution d'une succession de problèmes linéaires du type (1.17)

des matrices associées au problème déterministe (matrices éléments finis). Il vient également des propriétés d'orthogonalité des fonctions de base de  $\mathcal{S}_P$ . Pour de tels systèmes, les méthodes de résolution directe (du type factorisation LU ou des variantes) ne sont pas bien adaptées car on aboutit souvent à des matrices à structure bande pour lesquelles le taux de remplissage reste élevé. On préfère alors utiliser une méthode itérative qui consiste à approcher (plutôt qu'à calculer exactement) la solution par une séquence  $(\mathbf{u}^k)_{k \geq 1}$  jusqu'à satisfaire un certain critère de convergence. Pour la construction de la séquence, les méthodes itératives classiques utilisent les résidus  $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^k$ . Ces méthodes itératives ne demandent donc pas le stockage explicite de la matrice  $\mathbf{A}$ . On peut citer par exemple les méthodes de type Krylov (*e.g.* Gradient Conjugué, Conjugate Gradient Square) [Vorst, 2003; Sonneveld, 1989; Fokkema *et al.*, 1996].

Deux considérations interviennent dans l'évaluation d'une méthode itérative. La première est la vitesse de convergence, la deuxième est le coût par itération. En général, l'amélioration de la vitesse de convergence induit une augmentation du coût par itération. Le coût total étant égal au produit du nombre d'itérations effectuées par le coût d'une itération, la sélection d'une méthode de résolution itérative relève souvent d'un compromis entre ces deux considérations. On peut trouver dans [Pellissetti et Ghanem, 2000; Keese et Mathhies, 2005; Ghanem, 1999] une application des méthodes itératives de type Krylov au contexte des approches spectrales stochastiques, avec l'introduction de préconditionneurs adaptés.

## 1.5 Réduction de modèle et représentations séparées

L'approximation de Galerkin au niveau stochastique décrite dans la section 1.3.3 permet d'obtenir des solutions numériques d'une grande précision. La solution approximée  $u$  est cherchée dans l'espace  $\mathcal{V}_n \otimes \mathcal{S}_P$  où  $\mathcal{V}_n$  est un espace d'approximation déterministe de dimension  $n$  et  $\mathcal{S}_P$  est un espace d'approximation stochastique de dimension  $P$ . Cela conduit alors à la résolution de problèmes de taille  $n \times P$ . Mais pour des applications complexes, si on cherche des prédictions précises, ces approches nécessitent souvent une discrétisation fine au niveau déterministe ( $n$  grand) ou

stochastique ( $P$  grand). On aura donc un problème de très grande taille ( $n \times P$ ) à résoudre, ce qui nécessitent un temps de calcul important et de grandes capacités de stockage en mémoire.

Une première approche pour limiter le coût de calcul consiste à choisir l'espace d'approximation stochastique  $\mathcal{S}_P$ , de telle façon que le développement de la solution soit précis, tout en minimisant le nombre de termes  $P$  dans le développement.

Une autre approche consiste à conserver une formulation du problème sur un espace d'approximation très riche, non nécessairement adapté à la solution recherchée, et à opérer une réduction de ce modèle en construisant des bases réduites de manière intelligente pour approcher la solution sous la forme d'une représentation séparée  $u_m(\xi) = \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i(\xi)$  avec un faible rang  $m$ . Parmi les méthodes possibles, on s'intéressera plus particulièrement aux famille de méthodes "Proper Generalized Decomposition" (PGD) [Ammar *et al.*, 2006; Beylkin et Mohlenkamp, 2005; Chinesta *et al.*, 2010; Falco et Nouy, 2011; Falco et Nouy, 2012; Ladevèze *et al.*, 2010; Nouy, 2007; Nouy, 2008; Nouy et Le Maître, 2009; Nouy, 2010a].

Les méthodes PGD permettent la construction d'une représentation séparée de la solution  $u$  de problèmes définis sur des espaces produit tensoriel. Les méthodes PGD peuvent être interprétées comme des généralisations des méthodes de décomposition en valeurs singulières de tenseurs pour la construction *a priori* d'une représentation séparée  $u_m$  de la solution  $u$  (c'est à dire sans calculer  $u$  *a priori*)<sup>2</sup>.

Plusieurs définitions de PGD ont été proposées. Les PGD standards sont basées sur une construction progressive de la suite  $u_m$  : connaissant  $u_{m-1}$ , calcul d'une correction  $u_m - u_{m-1}$  de rang 1. Plusieurs critères ont été proposés pour le calcul de la correction. On peut notamment citer le critère de minimum de résidu ou le critère de Galerkin. La PGD progressive basée sur le critère du minimum de résidu est robuste dans

---

2. On notera que l'approximation de tenseurs utilisant ces représentations séparées a été largement étudiée au cours des dernières années dans différentes communautés et différents formats d'approximation et algorithmes associés ont été proposés pour l'approximation de tenseurs d'ordre élevé (voir [Kolda et Bader, 2009; Hackbusch, 2012]).



le sens où la séquence  $u_m$  converge de manière monotone par rapport à la norme du résidu. Par contre, pour des normes standards du résidu, la convergence de la solution est souvent lente vis-à-vis de normes usuelles. La PGD progressive basée sur le critère de Galerkin possède un avantage important car elle repose sur des formulations classiques de problèmes, elle exige moins d’efforts de calcul et conduit classiquement à de meilleures propriétés de convergence de la solution en fonction de normes standards. Par contre, la convergence de cette méthode n’est pas garantie pour les problèmes non-symétriques et la séquence  $u_m$  peut diverger pour certains problèmes.

Une amélioration possible de ces PGD progressives consiste à introduire des mises à jour des approximations [Nouy, 2008; Nouy, 2010b; Nouy, 2007]. Pour de nombreuses applications, ces mises à jour permettent de récupérer de bonnes propriétés de convergence des représentations séparées. Par contre, ces étapes de mise à jour peuvent être coûteuses et même inabordable pour certaines applications.

Dans la suite de ce mémoire, on se restreindra à l’utilisation de la PGD progressive basée sur le critère de Galerkin. Pour les problèmes symétriques traités dans ce mémoire, associés à la minimisation d’une fonctionnelle convexe, la convergence de cette méthode est garantie [Falco et Nouy, 2012]<sup>3</sup>. Cette méthode et les algorithmes associés seront détaillés dans le chapitre 4. Des formats d’approximation adaptés au contexte de cette thèse et des algorithmes associés seront alors introduits.

## 1.6 Problèmes à géométrie aléatoire

Dans les sections précédentes, on a abordé les différentes formulations des problèmes ayant un contenu probabiliste provenant du terme source ou bien de l’opérateur. On s’intéresse dans cette section à la prise en compte d’incertitudes géométriques. En effet, les problèmes définis sur un domaine aléatoire présentent un intérêt dans de nombreux domaines. Par exemple, dans le domaine de calcul des structures, diverses applications nécessitent la modélisation d’aléas géométriques : modélisation des incer-

---

3. Notons que cette approche de Galerkin équivaut alors à une approche par minimum de résidu avec une norme de résidu dépendant de l’opérateur du problème.

titudes liées à un procédé de fabrication, homogénéisation de matériaux multi-phasés aléatoires, impact d'une fissure aléatoire sur la tenue d'une structure [Nouy *et al.*, 2007].

Dans les formulations des problèmes à géométrie aléatoire, la solution  $u(\xi)$  est une variable aléatoire à valeur dans un espace  $\mathcal{V}(\xi)$  qui dépend de la réalisation  $\xi$ , contrairement à l'hypothèse classique introduite dans la section 1.3.2.1. L'espace  $\mathcal{V}^\Xi$  ne peut donc plus être écrit sous forme de produit tensoriel de deux espaces déterministe et stochastique. Le problème est alors de pouvoir définir un espace d'approximation de  $\mathcal{V}^\Xi$  pour la résolution approchée du problème (1.8).

Une première manière de résoudre des problèmes stochastiques définis sur des domaines aléatoires  $\Omega(\xi)$ , est d'utiliser des méthodes non-intrusives (de type Monte Carlo) avec remaillage. Ces méthodes consistent à résoudre un ensemble de problèmes déterministes pour des événements élémentaires particuliers en remaillant à chaque fois la réalisation correspondante du domaine aléatoire (domaine déterministe). Cependant, pour obtenir des bons résultats, ces méthodes demandent de nombreux calculs déterministes nécessitant à chaque fois la construction d'un nouveau maillage conforme à la géométrie, ce qui rend ces méthodes assez coûteuses. De plus, elles ne conduisent pas à une description explicite de la solution en fonction des variables décrivant l'aléa sur la géométrie.

Différentes alternatives ont été introduites afin de résoudre des équations aux dérivées partielles stochastiques définies sur un domaine aléatoire en se basant sur les méthodes spectrales stochastiques et en évitant les problèmes de remaillages. Elles sont basées sur des méthodes de mappings aléatoires [Xiu et Tartakovsky, 2006] ou des méthodes de domaine fictif [Canuto et Kozubek, 2007; Canuto et Fransos, 2008; Nouy *et al.*, 2008; Nouy *et al.*, 2011].

**Méthode de mapping aléatoire.** Cette méthode consiste à introduire un mapping bijectif  $\Upsilon(\cdot, \xi)$  entre un domaine déterministe de référence  $\Omega^0$  et  $\Omega(\xi)$  :

$$\Upsilon(\cdot, \xi) : x^0 \in \Omega^0 \mapsto x = \Upsilon(x^0, \xi) \in \Omega(\xi)$$

Le domaine aléatoire  $\Omega(\xi)$  est alors complètement caractérisé à l'aide du mapping aléatoire  $\Upsilon$  et de son domaine de référence déterministe  $\Omega^0$ . Le problème initial peut alors être reformulé sur  $\Omega^0$ , ce qui permet de retrouver une structure produit tensoriel de l'espace de travail et ainsi d'appliquer les méthodes d'approximation stochastiques standards (utilisant un unique maillage du domaine de référence). L'avantage de cette méthode est donc qu'elle ne demande pas un remaillage. En plus, elle permet d'obtenir la description complète de la solution stochastique. Cependant, la difficulté réside dans la construction du mapping  $\Upsilon$ . Cette construction n'est pas triviale et demande le développement de techniques numériques dédiées. De plus, ces méthodes ne permettent pas de traiter des problèmes sur un domaine aléatoire complexe à cause des restrictions imposées sur la régularité des mappings. Enfin, le cas de variables aléatoires avec des plages de variation importantes peut éventuellement conduire à un problème mal posé (éléments finis dégénérés).

**Méthodes de domaines fictifs.** Afin de retrouver une structure produit tensoriel de l'espace de travail et ainsi de pouvoir mettre en oeuvre les méthodes d'approximation classiques, une autre possibilité consiste à reformuler le problème sur un domaine fictif déterministe englobant le domaine physique, en considérant un prolongement de la solution sur ce domaine. La difficulté est ici de proposer des reformulations consistantes pour différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, mixtes) [Ramière *et al.*, 2007a]. Après reformulation, l'utilisation d'un unique maillage du domaine fictif permet ainsi d'éviter les problèmes de remaillage. Ces méthodes aboutissent à une description complète de la solution stochastique définie sur le domaine fictif. Ce sont ces méthodes qui ont été privilégiées dans ce travail. Ces méthodes seront détaillées dans le chapitre 5 pour des problèmes de diffusion et pour différents types de conditions aux limites (Neumann, Dirichlet). On proposera pour ces méthodes des algorithmes de résolution efficaces basés sur l'utilisation de représentations séparées.

## Chapitre 2

# Méthodes multi-échelles avec patches pour les incertitudes localisées

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Problèmes avec des variabilités localisées</b>	<b>28</b>
2.1.1	Formulation faible initiale du problème	28
2.1.2	Patch contenant des variabilités localisées	29
2.1.3	Reformulation avec multiplicateur de Lagrange	29
<b>2.2</b>	<b>Méthodes de patches</b>	<b>30</b>
2.2.1	Méthodes de superposition	31
2.2.2	Méthodes de couplage à l'interface	32
2.2.3	Méthodes de couplage volumique	35
<b>2.3</b>	<b>Méthode de patches et algorithme itératif global-local</b>	<b>37</b>
2.3.1	Reformulation multi-modèle dans la zone du patch	37
2.3.2	Algorithme global-local	39
2.3.3	Prolongement dans le patch fictif défini de manière unique	40
<b>2.4</b>	<b>Approximation de la solution pour les problèmes global et local</b>	<b>41</b>
2.4.1	Espaces d'approximation	41
2.4.2	Problème global	42
2.4.3	Problèmes locaux avec opérateur et second membre incertains	43
2.4.4	Problèmes locaux avec des variabilités géométriques	43
<b>2.5</b>	<b>Plusieurs patches avec des variabilités indépendantes</b>	<b>46</b>
2.5.1	Introduction de plusieurs patches	46
2.5.2	Problèmes locaux	46
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>

---

Dans ce chapitre, nous introduisons une méthode de décomposition de domaine multi-échelle pour les incertitudes localisées. La décomposition de domaine renvoie généralement à la décomposition d'une équation aux dérivées partielles, ou d'une approximation de celle-ci, en des problèmes couplés sur des sous-domaines formant une partition du domaine d'origine [Chan et Mathew, 1994; Smith *et al.*, 1996; Wohlmuth, 2001; Farhat

et Roux, 1991; Farhat *et al.*, 1996; Xu, 1992; Xu et Zou, 1998; A. Toselli, 2005]. Ici nous nous intéressons uniquement aux méthodes permettant de prendre en compte des variabilités localisées dans le domaine. Ces problèmes sont des problèmes multi-échelles qui nécessitent une séparation des échelles afin d’avoir la possibilité de raffiner le maillage dans des endroits spécifiques du domaine et de prendre en compte efficacement un ensemble de phénomènes physiques de natures différentes, interagissant, mais intervenant à différentes échelles. Les méthodes multi-échelles avec patch sont des méthodes adaptées à notre besoin puisqu’elles permettent de faire des zooms localement sur le domaine. Parmi ces méthodes on peut distinguer :

- les méthodes de superposition qui consiste à apporter une correction fine à une solution grossière. On citera la méthode des patches d’éléments finis [Lions et Pironneau, 1999; Glowinski *et al.*, 2005] ou une amélioration de celle-ci, la méthodes des patches harmoniques [He *et al.*, 2007],
- les méthodes de couplage à l’interface comme la méthode Chimère [Brezzi *et al.*, 2001; Hecht *et al.*, 2009] ou la méthode semi-Schwarz [Hecht *et al.*, 2009] et la méthode semi-Schwarz-Lagrange [Lozinski, 2010] qui est un algorithme qu’on retrouve également dans [Hager *et al.*, 2012; Gendre *et al.*, 2011].
- les méthodes de couplage volumique telles la méthode Arlequin [Dhia *et Rateau*, 2005; Cottureau *et al.*, 2011].

Ces méthodes seront présentées dans la section 2.2 en se basant sur le problème modèle stochastique de la section 2.1.

La méthode retenue ici, et détaillée dans la section 2.3, est un algorithme itératif global-local inspiré de la méthode semi-Schwarz-Lagrange qui tire parti du caractère localisé des incertitudes et dans lequel le problème global est un problème très simple avec opérateur déterministe, reportant ainsi les difficultés sur les problèmes locaux. Notons que dans [Gendre *et al.*, 2011], des algorithmes plus efficaces ont été proposés. Ces améliorations ne seront pas considérées dans ce mémoire. Par ailleurs nous nous intéressons également aux problèmes avec aléas géométriques qui nécessitent une reformulation des problèmes locaux sur un domaine fictif. Les formulations présentées dans la section 2.4 permettent de prendre en

compte des conditions aux limites de type Neumann ou Dirichlet sur des frontières internes aléatoires. Enfin, dans la partie 2.5, la méthode est naturellement étendue au cas de plusieurs patches.

## 2.1 Problèmes avec des variabilités localisées

On considère un problème de diffusion défini sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (K\nabla u) &= f \quad \text{sur } \Omega, \\ K\nabla u \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec  $K$  un paramètre de diffusion,  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  les frontières de Dirichlet et de Neumann respectivement. On note  $\xi$  un ensemble des paramètres aléatoires, ayant des valeurs dans  $\Xi$ , modélisant les incertitudes sur la géométrie, le terme source et le coefficient de diffusion. On note par  $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$  l'espace de probabilité associé, où  $P_\xi$  est la mesure de probabilité de  $\xi$ .

### 2.1.1 Formulation faible initiale du problème

On introduit l'espace de Hilbert  $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  équipé de la norme  $|u|_\Omega = (\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u)^{1/2}$ . Soit  $\mathcal{V}^\Xi = L^2_{P_\xi}(\Xi; \mathcal{V})$  l'espace de Hilbert équipé de la norme  $\|\cdot\|_\Omega = \mathbb{E}(|\cdot|_\Omega^2)^{1/2}$ . Dans la suite de ce chapitre et pour simplifier les notations, on omet la mesure dans les intégrations spatiales. On introduit la formulation faible classique du problème (2.1) :

$$u \in \mathcal{V}^\Xi, \quad a_\Omega(u, \delta u) = \ell_\Omega(\delta u) \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}^\Xi \tag{2.2}$$

où, pour un domaine quelconque  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , on note :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{O}}(v, \delta v) &= \mathbb{E} \left( \int_{\mathcal{O}} K \nabla v \cdot \nabla \delta v \right) = \int_{\Xi} \int_{\mathcal{O}} K \nabla v \cdot \nabla \delta v dP_\xi \\ \ell_{\mathcal{O}}(v) &= \mathbb{E} \left( \int_{\mathcal{O}} f v \right) = \int_{\Xi} \int_{\mathcal{O}} f v dP_\xi \end{aligned}$$

On introduit la notation  $\Omega * \Xi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \Xi; x \in \Omega(y)\}$ . On note que dans le cas d'un domaine déterministe  $\Omega$ , on a simplement  $\Omega * \Xi = \Omega \times \Xi$ .

le problème (2.2) est bien posé si  $f \in L^2_{P_\xi}(\Omega)^\Xi$  et si  $K$  est uniformément borné et elliptique sur  $\Omega * \Xi$ , *i.e.* Il existe des constantes  $K_{inf} > 0$  et  $K^{sup} > 0$  telles qu'on a presque partout sur  $\Omega * \Xi$

$$K_{inf}|\zeta|^2 \leq \zeta \cdot K(x, y)\zeta \leq K^{sup}|\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d. \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Patch contenant des variabilités localisées

On considère que le coefficient de diffusion  $K$ , le terme source  $f$  ou le domaine  $\Omega$  sont incertains seulement sur une partie  $\Lambda \subset \Omega$ .  $\Lambda$  est appelé un patch. La frontière  $\partial\Lambda$  de ce patch contient l'éventuelle partie incertaine de la frontière  $\partial\Omega$ . Cela signifie que  $\Lambda$  dépend éventuellement de  $\xi$  et est tel que

$$\Omega(\xi) = (\Omega \setminus \Lambda) \cup \Lambda(\xi)$$

avec  $\Omega \setminus \Lambda$  déterministe. On note  $\Gamma = \partial(\Omega \setminus \Lambda) \cap \partial\Lambda$  l'interface déterministe entre  $\Omega \setminus \Lambda$  et le patch  $\Lambda$  (voir figure 2.1). On considère alors que

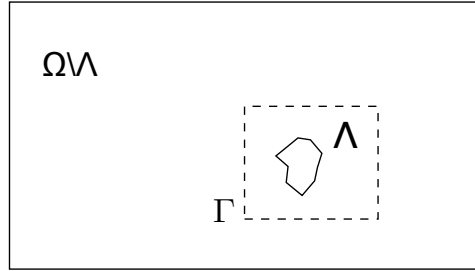


FIGURE 2.1 – Le patch  $\Lambda \subset \Omega$  contenant des variabilités localisées et l'interface  $\Gamma = \partial(\Omega \setminus \Lambda) \cap \partial\Lambda$ .

$$K(x, \xi) = \begin{cases} K_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Lambda \\ K(x, \xi) & \text{pour } x \in \Lambda(\xi) \end{cases}, \quad f(x, \xi) = \begin{cases} f_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Lambda \\ f(x, \xi) & \text{pour } x \in \Lambda(\xi) \end{cases}$$

### 2.1.3 Reformulation avec multiplicateur de Lagrange

On introduit la séparation suivante de la solution  $u$  :

$$u = \begin{cases} U & \text{sur } \Omega \setminus \Lambda \\ w & \text{sur } \Lambda \end{cases}$$

avec les conditions de continuité suivantes sur  $\Gamma$  interprétées au sens faible :

$$w = U \quad \text{et} \quad (K\nabla U) \cdot n = (K\nabla w) \cdot n \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où  $n$  désigne la normale unité extérieure à  $\partial\Lambda$ . On considère que  $\Gamma \cap \Gamma_D = \emptyset$  et on sépare la frontière de Dirichlet  $\Gamma_D$  en frontière de Dirichlet du patch  $\Gamma_D^\Lambda = \Gamma_D \cap \partial\Lambda$  (frontière interne éventuelle du patch) et la partie complémentaire  $\Gamma_D^{\Omega \setminus \Lambda} = \Gamma_D \setminus \Gamma_D^\Lambda$ . On introduit ensuite les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{U \in H^1(\Omega \setminus \Lambda) ; U = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\Omega \setminus \Lambda}\} \\ \mathcal{W} &= \{w \in H^1(\Lambda) ; w = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\Lambda\} \\ \mathcal{M} &= H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

et les espaces de Bochner associés  $\mathcal{U}^\Xi$ ,  $\mathcal{W}^\Xi$  et  $\mathcal{M}^\Xi$ .

Le problème (2.2) est donc équivalent à trouver  $(U, w, \lambda) \in \mathcal{U}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$  tel que pour tout  $(\delta U, \delta w, \delta \lambda) \in \mathcal{U}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ ,

$$\begin{cases} a_{\Omega \setminus \Lambda}(U, \delta U) + b_\Gamma(\lambda, \delta U) = \ell_{\Omega \setminus \Lambda}(\delta U) \\ a_\Lambda(w, \delta w) - b_\Gamma(\lambda, \delta w) = \ell_\Lambda(\delta w) \\ b_\Gamma(\delta \lambda, U - w) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$b_\Gamma(\lambda, v) = \mathbb{E} \left( \int_\Gamma \lambda v \right) \quad (2.5)$$

$\lambda$  représente un multiplicateur de Lagrange assurant la continuité de  $u$  au sens faible sur l'interface  $\Gamma$ .

## 2.2 Méthodes de patches

Nous présentons dans cette section plusieurs méthodes de la littérature qui rentrent dans le cadre des méthodes de patches. Les méthodes de patches et les algorithmes associés permettent de coupler une approximation grossière définie sur le domaine  $\Omega$  (ou une approximation de ce domaine) et des approximations plus fines sur le patch  $\Lambda$ .



Dans la suite, on introduit des maillages éléments finis  $\mathcal{T}_H^\Omega$  (grossier) et  $\mathcal{T}_h^\Lambda$  (fin) de  $\Omega$  et  $\Lambda$  respectivement et on introduit des espaces d'approximation éléments finis correspondants  $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ .

Notons que dans le cas où le patch  $\Lambda$  contient un détail géométrique, alors de domaine  $\Omega$  contient également ce détail et on devra en pratique approcher le domaine  $\Omega$  par une approximation grossière  $\Omega_H$  sur lequel sera défini le maillage  $\mathcal{T}_H^\Omega$ . Pour simplifier la présentation des méthodes de la littérature, nous considérons ici que le domaine  $\Omega$  coïncide avec le domaine du maillage  $\mathcal{T}_H^\Omega$ .

## 2.2.1 Méthodes de superposition

### 2.2.1.1 Méthode des patchs d'éléments finis

La méthode des patchs d'éléments finis [Lozinski, 2010; Glowinski *et al.*, 2005; Lions et Pironneau, 1999] est une méthode de superposition qui consiste à écrire  $u$  comme la somme d'une approximation grossière  $U_H$  définie sur  $\Omega$  et d'une approximation fine localisée  $u_h$  définie sur  $\Lambda$  et qui s'annule sur  $\partial\Lambda$ . On introduit pour cela les espaces d'approximation grossier  $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$  et fin  $\mathcal{W}_{0h} \subset \mathcal{W}_0$ , avec  $\mathcal{W}_0 = \{w \in \mathcal{W}; w = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ . L'approximation résultante de  $u$  est alors  $u_{Hh} = U_H + u_h$ , avec  $U_H \in \mathcal{V}_H^\Xi$  et  $u_h \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  tels que :

$$a_\Omega(U_H + u_h, \delta U_H + \delta u_h) = \ell_\Omega(\delta U_H + \delta u_h) \quad \forall (\delta U_H, \delta u_h) \in (\mathcal{V}_H^\Xi, \mathcal{W}_{0h}^\Xi). \quad (2.6)$$

On introduit alors l'algorithme itératif suivant qui permet de découpler la résolution de problèmes globaux et de problèmes locaux. On commence par initialiser  $u_h^0 \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  puis on définit une séquence d'approximations  $\{(U_H^n, u_h^n)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  de la manière suivante :

– on calcule  $U_H^n \in \mathcal{V}_H^\Xi$  tel que :

$$a_\Omega(U_H^n, \delta U_H) = \ell_\Omega(\delta U_H) - a_\Omega(u_h^{n-1}, \delta U_H) \quad \forall \delta U_H \in \mathcal{V}_H^\Xi \quad (2.7)$$

– on calcule  $u_h^n \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  tel que :

$$a_\Lambda(u_h^n, \delta u_h) = \ell_\Lambda(\delta u_h) - a_\Lambda(U_H^n, \delta u_h) \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi \quad (2.8)$$

L'approximation de la solution exacte  $u$  du problème (2.1) à l'itération  $n$  est donnée par  $u_{Hh}^n = U_H^n + u_h^n$ .

### 2.2.1.2 Méthode des patches harmoniques

La méthode des patches d'éléments finis discutée dans le paragraphe précédent possède un faible taux de convergence pour certains couples de maillages  $\mathcal{T}_H^\Omega$  et  $\mathcal{T}_h^\Lambda$  non imbriqués. La méthode des patches harmoniques [Lozinski, 2010] permet d'accélérer cette méthode en résolvant un problème supplémentaire à chaque itération. On pose tout d'abord  $\mathcal{V}_{H,\Lambda} = \{V_H \in \mathcal{V}_H; \text{supp}(V_H) \subset \Lambda\}$ . En d'autres termes,  $\mathcal{V}_{H,\Lambda}$  est le sous-espace de  $\mathcal{V}_H$  qui contient les fonctions dont le support est contenu dans  $\Lambda$ . L'algorithme est alors le suivant : après initialisation de  $u_h^0 \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi$ , on définit une séquence d'approximations  $\{(U_H^n, V_H^n, u_h^n)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{V}_{H,\Lambda}^\Xi \times \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  de la manière suivante :

- on calcule  $V_H^n \in \mathcal{V}_{H,\Lambda}^\Xi$  tel que :

$$a_\Omega(V_H^n, \delta V_H) = \ell_\Omega(\delta V_H) - a_\Omega(u_h^{n-1}, \delta V_H) \quad \forall \delta V_H \in \mathcal{V}_{H,\Lambda}^\Xi \quad (2.9)$$

- on calcule  $U_H^n \in \mathcal{V}_H^\Xi$  tel que :

$$a_\Omega(U_H^n, \delta U_H) = \ell_\Omega(\delta U_H) - a_\Omega(u_h^{n-1}, \delta U_H) - a_\Omega(V_H^n, \delta U_H) \quad \forall \delta U_H \in \mathcal{V}_H^\Xi \quad (2.10)$$

- on calcule  $u_h^n \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi$  tel que :

$$a_\Lambda(u_h^n, \delta u_h) = \ell_\Lambda(f \delta u_h) - a_\Lambda(U_H^n, \delta u_h) \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi \quad (2.11)$$

De la même façon que dans la méthode des patches d'éléments finis, l'approximation à l'itération  $n$  de la solution exacte  $u$  du problème (2.1) est donnée par  $u_{Hh}^n = U_H^n + u_h^n$ . Dans le cas des maillages non imbriqués cette méthode apporte une amélioration de la convergence par rapport à la méthode des patches d'éléments finis. Les problèmes supplémentaires pour calculer les  $V_H^n$  sont peu coûteux si la taille de  $\Lambda$  n'est que légèrement supérieure à la taille d'un élément du maillage grossier, c'est-à-dire si la dimension de  $\mathcal{V}_{H,\Lambda}$  est faible.

### 2.2.2 Méthodes de couplage à l'interface

Dans le domaine des méthodes de couplage à l'interface, on peut citer la méthode Chimère [Brezzi *et al.*, 2001; Hecht *et al.*, 2009], la méthode semi-Schwartz et la méthode semi-Schwartz-Lagrange. Ici, on se contente de présenter la méthode semi-Schwartz et la méthode semi-Schwartz-Lagrange.

### 2.2.2.1 Méthode semi-Schwarz

Dans la méthode semi-Schwarz (voir [Lozinski, 2010]), on considère une approximation grossière  $U_H$  de  $u$ , en introduisant un espace d'approximation  $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$ , et une approximation fine  $w_h$  de  $u$  dans le patch, en introduisant un espace d'approximation  $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ . L'approximation résultante de  $u$  sera alors définie par

$$u_{Hh} = \begin{cases} U_H |_{\Omega \setminus \Lambda} & \text{sur } \Omega \setminus \Lambda \\ w_h & \text{sur } \Lambda \end{cases}$$

L'algorithme de la méthode semi-Schwarz est le suivant. On commence par initialiser  $U_H^0 \in \mathcal{V}_H^\Xi$  et  $w_h^0 \in \mathcal{W}_h^\Xi$ . On définit ensuite une séquence  $\{(U_H^n, w_h^n)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{W}_h^\Xi$  de la manière suivante :

– on calcule  $U_H^n \in \mathcal{V}_H^\Xi$  tel que :

$$a_\Omega(U_H^n, \delta U_H) = \ell_\Omega(\delta U_H) + a_\Lambda(U_H^{n-1} - w_h^{n-1}, \delta U_H) \quad \forall \delta U_H \in \mathcal{V}_H^\Xi \quad (2.12)$$

– on calcule  $w_h^n \in \mathcal{W}_h^\Xi$  tel que

$$a_\Lambda(w_h^n, \delta u_h) = \ell_\Lambda(\delta u_h) \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{W}_{0h}^\Xi \quad (2.13)$$

et

$$w_h^n |_{\partial \Lambda} = r_h U_H^n |_{\partial \Lambda} \quad (2.14)$$

où  $r_h$  est un projecteur (ou interpolateur nodal) qui permet la projection des solutions définies sur le maillage  $\mathcal{T}_H^\Lambda$  vers le maillage  $\mathcal{T}_h^\Omega$ .

Notons que dans le cas où les maillages  $\mathcal{T}_H^\Omega$  et  $\mathcal{T}_h^\Lambda$  sont imbriqués, on peut montrer que la méthode des patches d'éléments finis peut se ramener à la méthode semi-Schwartz si on remplace  $u_h$  par  $w_h - U_H |_\Lambda$ . Mais en général, la relation entre l'algorithme de la méthode semi-Schwarz et la méthode des patches d'éléments finis dépend de la définition du projecteur  $r_h$ . Dans [Hecht *et al.*, 2009], on voit en pratique que la performance de l'algorithme semi-Schwarz se situe entre celle de l'algorithme des patches éléments finis et celle des patches harmoniques. L'avantage de l'algorithme semi-Schwarz devant l'algorithme des patches harmoniques est qu'on n'introduit pas de problème auxiliaire. Un avantage par rapport à

l'algorithme des patches d'éléments finis est que le terme  $a_\Lambda(U_H^n, \delta u_h)$  ne figure pas dans l'algorithme, terme qui nécessite une gestion simultanée des maillages grossier et fin dans toute la zone  $\Lambda$ . Notons que cette méthode est appelée semi-Schwarz car elle introduit un passage d'information de  $U_H$  à  $w_h$  à l'aide de l'opérateur  $r_h$  mais elle n'introduit pas un passage d'information dans l'autre sens comme c'est le cas dans la méthode de Schwarz (voir [Steger et Benek, 1983]).

### 2.2.2.2 Méthode semi-Schwarz-Lagrange

L'idée de cette méthode est de ré-écrire la méthode semi-Schwarz en introduisant une variable auxiliaire interprétée comme un multiplicateur de Lagrange garantissant de manière faible la continuité à l'interface  $\Gamma$ . On interprète pour cela le terme  $a_\Lambda(w_h^n, \delta U_H) = \mathbb{E}(\int_\Lambda K \nabla w_h^n \cdot \nabla \delta U_H)$  comme  $\mathbb{E}(\int_\Gamma \lambda_h^n \delta U_H)$ , où  $\lambda_h^n \in \mathcal{M}^\Xi$  est un flux défini sur l'interface  $\Gamma$ . Si on introduit un espace d'approximation  $\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}$  (en pratique pris comme la trace sur  $\Gamma$  des fonctions de  $\mathcal{W}_h$ ) et qu'on ré-interprète l'équation de couplage  $w_h^n = r_h U_H^n$  de la manière suivante :

$$b_\Gamma(\delta \lambda_h, U_H^n - w_h^n) = 0 \quad \forall \delta \lambda_h \in \mathcal{M}_h^\Xi$$

alors on aboutit à l'algorithme suivant. On commence par initialiser  $U_H^0 \in \mathcal{V}_H^\Xi$  et  $w_h^0 \in \mathcal{W}_h^\Xi$ . On définit ensuite une séquence  $\{(U_H^n, w_h^n, \lambda_h^n)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{W}_h^\Xi \times \mathcal{M}_h^\Xi$  de la manière suivante :

– on calcule  $U_H^n \in \mathcal{V}_H^\Xi$  tel que :

$$a_\Omega(U_H^n, \delta U_H) = \ell_{\Omega \setminus \Lambda}(\delta U_H) + a_\Lambda(U_H^{n-1}, \delta U_H) - b_\Gamma(\lambda_h^{n-1}, \delta U_H) \quad \forall \delta U_H \in \mathcal{V}_H^\Xi \quad (2.15)$$

– on calcule  $w_h^n \in \mathcal{W}_h^\Xi$  et  $\lambda_h^n \in \mathcal{M}_h^\Xi$  tels que :

$$a_\Lambda(w_h^n, \delta u_h) = \ell_\Lambda(\delta u_h) + b_\Gamma(\lambda_h^n, \delta u_h) \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{W}_h^\Xi \quad (2.16)$$

$$b_\Gamma(\delta \lambda_h, U_H^n - w_h^n) = 0 \quad \forall \delta \lambda_h \in \mathcal{M}_h^\Xi \quad (2.17)$$

Dans le cas de maillages non imbriqués, cet algorithme présente de meilleures propriétés que la méthode semi-Schwarz et que les méthodes de patches d'éléments finis citées précédemment. Elle présente également l'avantage de ne coupler les modèles globaux et locaux que sur la frontière  $\Gamma$ .

Cet algorithme est à la base de la méthode proposée dans cette thèse. Cette approche permet en fait d'envisager de modifier les problèmes globaux afin d'obtenir des problèmes simplifiés. Plus concrètement, les formes  $a_\Omega$  et  $a_\Lambda$  dans l'équation (2.15) peuvent être remplacées (de manière consistante) par des formes associées à des opérateurs différents (*e.g.* remplacement d'un milieu hétérogène par un milieu homogène dans le patch) et des géométries différentes (suppression des détails géométriques dans les domaines  $\Omega$  et  $\Lambda$ ). Cette souplesse va être exploitée dans le cadre de cette thèse afin de simplifier la nature des problèmes globaux et de reporter toute la difficulté dans la résolution des problèmes locaux. Notons qu'on retrouve ce principe et des algorithmes similaires dans [Hager *et al.*, 2012; Gendre *et al.*, 2011].

### 2.2.3 Méthodes de couplage volumique

Dans le domaine des méthodes de couplage dans le volume, on peut citer la méthode Arlequin [Dhia *et Rateau*, 2005; Cottoreau *et al.*, 2011].

La méthode Arlequin repose sur le couplage de différents sous-domaines dans une zone de recouvrement appelée zone de collage (voir [Dhia *et Rateau*, 2005; Cottoreau *et al.*, 2011]). La continuité est assurée au sens faible dans cette zone de collage à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. La définition des espaces d'approximation et la définition du couplage n'est pas aisée et de mauvais choix peuvent conduire à des problèmes de conditionnement ou à de mauvaises solutions. On présente ici la formulation de la méthode Arlequin.

On cherche ici une approximation grossière  $U_H$  définie sur le domaine  $\Omega$  et une approximation fine  $w_h$  définie sur le domaine  $\Lambda$ , ces approximations étant respectivement associées à des espaces d'approximation  $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ . On note  $\varsigma \subset \Lambda$  la zone de collage (voir figure 2.2). On introduit l'espace  $\mathcal{C} = H^1(\varsigma)$  et un espace d'approximation  $\mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}$ , typiquement choisi comme la restriction à  $\varsigma$  des fonctions de  $\mathcal{W}_h$ . On introduit un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_h \in \mathcal{C}_h^\Xi$ . Les approximations  $(U_H, w_h, \lambda_h) \in \mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{W}_h^\Xi \times \mathcal{C}_h^\Xi$  sont alors définies telles que pour tout  $(\delta U_H, \delta w_h, \delta \lambda_h) \in$

$\mathcal{V}_H^\Xi \times \mathcal{W}_h^\Xi \times \mathcal{C}_h^\Xi$ ,

$$\begin{cases} a_\Omega^1(U_H, \delta U_H) + b_\varsigma(\lambda_h, \delta U_H) = \ell_\Omega^1(\delta U_H) \\ a_\Lambda^2(w_h, \delta w_h) - b_\varsigma(\lambda_h, \delta w_h) = \ell_\Lambda^2(\delta w_h) \\ b_\varsigma(\delta \lambda, U_H - w_h) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

où pour un sous-domaine  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , on note

$$a_{\mathcal{O}}^i(v, \delta v) = \mathbb{E} \left( \int_{\mathcal{O}} \alpha_i K \nabla v \cdot \nabla \delta v \right) \quad \text{et} \quad \ell_{\mathcal{O}}^i(v) = \mathbb{E} \left( \int_{\mathcal{O}} \alpha_i f v \right)$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ , et où

$$b_\varsigma(v, \lambda) = \mathbb{E} \left( \int_{\varsigma} p_0 \lambda v + p_1 \nabla \lambda \delta \nabla v \right) \quad (2.19)$$

avec  $p_1$  et  $p_2$  deux constantes permettant de définir différents types de couplage. Les deux constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , définies respectivement sur  $\Omega$  et  $\Lambda$ , doivent être choisies telles que :

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0 \\ \alpha_1 = 1 \text{ sur } \Omega \setminus \Lambda \\ \alpha_2 = 1 \text{ sur } \Lambda \setminus \varsigma \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ sur } \Lambda \end{cases}$$

Le problème (2.18) peut être vu comme un système d'équations couplées, constitué d'une équation globale définie sur  $\Omega$ , d'une équation locale définie sur le patch, et d'une équation de couplage dans la zone de collage. Les équations locale et globale font intervenir des opérateurs et termes source dépendant des fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . La résolution du système demande donc le calcul de matrices éléments finis non standards dépendant de ces fonctions. Une difficulté réside notamment dans le calcul des matrices de couplage qui demande la gestion simultanée des maillages dans la région de couplage. Notons que contrairement aux méthodes présentées précédemment, la méthode Arlequin n'est pas une méthode itérative. Le système (2.18) est classiquement résolu directement. Bien sûr, on peut imaginer l'utilisation d'algorithmes itératifs pour la résolution de ce système. L'introduction d'un algorithme efficace permettant de découpler la résolution de problèmes globaux et de problèmes locaux n'est cependant

pas trivial. De plus, ces problèmes globaux et locaux feraient *a priori* intervenir des opérateurs et termes source qui ne sont pas associés au modèle initial, ce qui peut constituer un inconvénient dans l'implémentation de ces méthodes dans des codes de calcul existants.

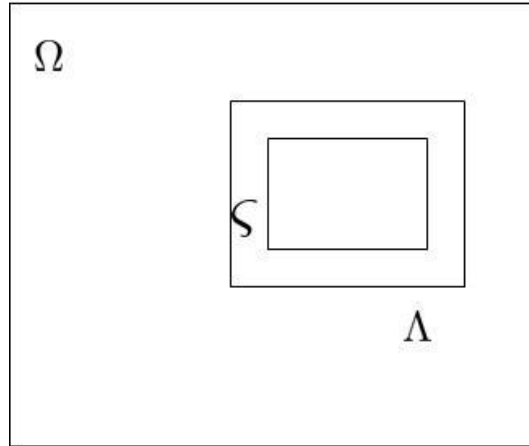


FIGURE 2.2 – Les domaines  $\Omega$  et  $\Lambda$  et la zone de collage  $\varsigma$ .

## 2.3 Méthode de patchs et algorithme itératif global-local

On présente à présent une méthode de patchs et son algorithme itératif global-local inspirés de la version multi-modèle de la méthode semi-Schwarz-Lagrange [Lozinski, 2010]. Cet algorithme et son analyse théorique et numérique (présentée dans le chapitre suivant) constituent la première contribution de cette thèse.

### 2.3.1 Reformulation multi-modèle dans la zone du patch

Dans le cas où  $\Lambda$  contient des détails géométriques, c'est-à-dire si  $\partial\Lambda \setminus \Gamma \neq \emptyset$ , on introduit un patch fictif  $\tilde{\Lambda} \supset \Lambda$  tel que  $\partial\tilde{\Lambda} = \Gamma$ , ce qui signifie que  $\tilde{\Lambda}$  est déterministe et ne contient pas de frontières internes (pas de détails géométriques), voir figure 2.3. On note alors

$$\tilde{\Omega} = (\Omega \setminus \Lambda) \cup \tilde{\Lambda},$$

qui est un domaine fictif déterministe contenant  $\Omega$  et tel que  $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Lambda} = \Omega \setminus \Lambda$ .

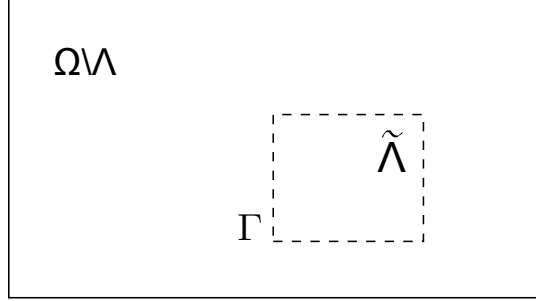


FIGURE 2.3 – Patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  tel que  $\partial\tilde{\Lambda} = \Gamma$

On considère maintenant un prolongement de la fonction  $U$  de  $\Omega \setminus \Lambda$  vers  $\tilde{\Omega}$ . On introduit sur  $\tilde{\Omega}$  un champ de diffusion fictif  $\tilde{K}$  tel que

$$\tilde{K} = K \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus \Lambda \quad (2.20)$$

et tel qu'il vérifie presque partout sur  $\tilde{\Omega} \times \Xi$

$$\tilde{K}_{inf} |\zeta|^2 \leq \zeta \cdot \tilde{K}(x, y) \zeta \leq \tilde{K}^{sup} |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad (2.21)$$

pour certaines constantes  $\tilde{K}^{sup} \geq \tilde{K}_{inf} > 0$ . On introduit alors le nouvel espace de fonction  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  avec

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U \in H^1(\tilde{\Omega}) ; U = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\Omega \setminus \Lambda}\}$$

Pour un sous ensemble  $\mathcal{O} \subset \tilde{\Omega}$ , on définit une forme bilinéaire  $c_{\mathcal{O}} : \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \mathbb{R}$  associée à un coefficient de diffusion fictif :

$$c_{\mathcal{O}}(U, \delta U) = \mathbb{E} \left( \int_{\mathcal{O}} \tilde{K} \nabla U \cdot \nabla \delta U \right)$$

On remarque que par la condition (2.20) sur  $\tilde{K}$ , on a

$$a_{\Omega \setminus \Lambda}(U, \delta U) = c_{\Omega \setminus \Lambda}(U, \delta U) = c_{\tilde{\Omega}}(U, \delta U) - c_{\tilde{\Lambda}}(U, \delta U) \quad (2.22)$$

Le problème (2.18) peut être reformulé de la façon suivante : trouver  $(U, w, \lambda) \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$  tel que pour tout  $(\delta U, \delta w, \delta \lambda) \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ ,

$$\begin{cases} c_{\tilde{\Omega}}(U, \delta U) - c_{\tilde{\Lambda}}(U, \delta U) + b_\Gamma(\lambda, \delta U) = \ell_{\Omega \setminus \Lambda}(\delta U) \\ a_\Lambda(w, \delta w) - b_\Gamma(\lambda, \delta w) = \ell_\Lambda(\delta w) \\ b_\Gamma(\delta \lambda, U - w) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$



On note que le problème (2.23) ne définit pas le prolongement de  $U$  dans le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$ . En d'autres termes, le problème reformulé sur  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$  admet un nombre infini de solutions. Comme on le verra, un prolongement particulier résulte de la définition de l'algorithme suivant, qui correspond à la considération de la formulation (2.23) dans des sous-espaces convenables de  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ .

### 2.3.2 Algorithme global-local

On introduit maintenant l'algorithme itératif suivant qui définit une suite  $\{(U_n, w_n, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ . On commence par  $w_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$  et  $U_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$ , on définit  $(U_n, w_n, \lambda_n)$  comme suit.

**Étape globale.** On calcule  $\hat{U}_n \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  tel que  $\forall \delta U \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$ ,

$$c_{\tilde{\Omega}}(\hat{U}_n, \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(U_{n-1}, \delta U) - b_{\Gamma}(\lambda_{n-1}, \delta U) + \ell_{\Omega \setminus \Lambda}(\delta U) \quad (2.24)$$

On introduit ensuite une relaxation

$$U_n = \rho \hat{U}_n + (1 - \rho)U_{n-1}$$

avec  $\rho > 0$ . L'étape globale (2.24) est un problème défini sur le domaine  $\tilde{\Omega}$ , avec un paramètre de diffusion arbitraire  $\tilde{K}$  dans  $\tilde{\Lambda}$  et qui ne contient aucun détail géométrique dans  $\tilde{\Lambda}$ . Le terme  $\lambda_{n-1}$  apparaît comme un terme source imposé sur une surface interne dans  $\tilde{\Omega}$ .

**Étape locale.** On calcule alors  $(w_n, \lambda_n) \in \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$  tel que pour tout  $(\delta w, \delta \lambda) \in \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ ,

$$\begin{cases} a_{\Lambda}(w_n, \delta w) - b_{\Gamma}(\lambda_n, \delta w) = \ell_{\Lambda}(\delta w) \\ b_{\Gamma}(\delta \lambda, w_n) = b_{\Gamma}(\delta \lambda, U_n) \end{cases} \quad (2.25)$$

L'étape locale (2.25) est un problème défini sur le patch, avec le vrai paramètre matériel  $K$  et les vrais détails géométriques.  $\lambda_n$  peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange qui assure dans un sens faible  $w_n = U_n$  sur  $\Gamma$ .

**Remarque 2.1** *On note que le problème local (2.25) peut être reformulé en introduisant un changement de variable  $w_n = U_n^\diamond + z_n$ , avec  $U_n^\diamond \in \mathcal{W}^\Xi$*

satisfaisant  $b(\delta\lambda, U_n^\diamond - U_n) = 0$  pour tout  $\delta\lambda \in \mathcal{M}^\Xi$  (i.e.  $U_n^\diamond = U_n$  sur  $\Gamma$  dans un sens faible), et avec

$$z_n \in \mathcal{W}_0^\Xi = \{z \in \mathcal{W}^\Xi ; z = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Le problème local (2.25) peut être reformulé comme suit

$$a_\Lambda(z_n, \delta w) = \ell_\Lambda(\delta w) - a_\Lambda(U_n^\diamond, \delta w) \quad \forall \delta w \in \mathcal{W}_0^\Xi \quad (2.26)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_n$  est alors obtenu de la première équation (2.25).

### 2.3.3 Prolongement dans le patch fictif défini de manière unique

Le prolongement de  $U_n$  dans le patch fictif est défini de façon unique par l'initialisation  $U_0$ . De (2.24), on a pour tout  $\delta U \in H_0^1(\tilde{\Lambda}) \otimes L_{P_\xi}^2(\Xi)$ ,

$$c_{\tilde{\Lambda}}(\hat{U}_n, \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(U_{n-1}, \delta U)$$

et donc

$$c_{\tilde{\Lambda}}(U_n, \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(\rho \hat{U}_n + (1 - \rho)U_{n-1}, \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(U_{n-1}, \delta U)$$

On a donc pour tout  $\delta U \in H_0^1(\tilde{\Lambda}) \otimes L_{P_\xi}^2(\Xi)$ ,

$$c_{\tilde{\Lambda}}(U_n, \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(U_0, \delta U)$$

pour tout  $n \geq 1$ . Avec  $U_0 = 0$ , on obtient que toutes les itérations  $U_n \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  appartiennent au sous espace  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \subset \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  défini par

$$\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi = \left\{ U \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi ; c_{\tilde{\Lambda}}(U, \delta U) = 0 \text{ pour tout } \delta U \in H_0^1(\tilde{\Lambda}) \otimes L_{P_\xi}^2(\Xi) \right\}$$

$U_n$  peut être interprété comme l'unique prolongement analytique dans  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  de  $U_n \in \mathcal{U}^\Xi$ . La restriction de  $U_n$  sur  $\tilde{\Lambda}$  est alors définie de manière unique par la trace de  $U_n$  sur  $\Gamma$ . Le problème (2.23) apparaît bien posé dans le sous espace  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi \subset \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ , ce qui donne un sens au prolongement de la solution  $U$ . Dans la suite, on utilise la définition suivante pour  $U$ .

**Définition 2.1** On note  $U \in \tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \subset \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  le prolongement de la solution  $U \in \mathcal{U}^\Xi$  de (2.18). Ce prolongement est tel que  $(U, \lambda, w) \in \tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$  est la solution unique de l'équation (2.23) pour tout  $(\delta U, \delta w, \delta \lambda) \in \tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi$ .

## 2.4 Approximation de la solution pour les problèmes global et local

### 2.4.1 Espaces d'approximation

On introduit un maillage éléments finis  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Omega}}$  de  $\tilde{\Omega}$  et on introduit un espace éléments finis associé  $\tilde{\mathcal{U}}_H \subset \tilde{\mathcal{U}}$ . On introduit également un espace d'approximation éléments finis  $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$  associé au maillage  $\mathcal{T}_h^\Lambda$  du patch  $\Lambda$ . On suppose que l'interface  $\Gamma$  est incluse dans la frontière du maillage  $\mathcal{T}_h^\Lambda$ .

Dans tout ce mémoire, on considérera que l'interface  $\Gamma$  est également conforme au maillage grossier  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Omega}}$  (*i.e.* est contenue dans la frontière des éléments de  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Omega}}$ ). Notons cependant que la formulation autorise le cas où l'interface  $\Gamma$  n'est pas conforme au maillage grossier. On introduira donc par la suite un maillage  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Omega}} = \mathcal{T}_H^{\Omega \setminus \Lambda} \cup \mathcal{T}_H^{\tilde{\Lambda}}$ , avec  $\mathcal{T}_H^{\Omega \setminus \Lambda}$  un maillage de  $\Omega \setminus \Lambda$  et  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Lambda}}$  un maillage de  $\tilde{\Lambda}$ , tels que l'interface  $\Gamma$  coïncide avec l'intersection entre les frontières des maillages  $\mathcal{T}_H^{\Omega \setminus \Lambda}$  et  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Lambda}}$ . On pourra cependant considérer des maillages  $\mathcal{T}_H^{\tilde{\Omega}}$  et  $\mathcal{T}_h^\Lambda$  non conformes sur  $\Gamma$ .

On introduit également un espace d'approximation  $\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}$  pour le multiplicateur de Lagrange. Cet espace peut être simplement choisi comme la trace sur  $\Gamma$  de l'espace d'approximation  $\mathcal{W}_h$ . On pourra trouver dans [Wohlmuth, 2001] une meilleure construction de l'espace d'espaces d'approximation  $\mathcal{M}_h$  pour le cas de maillages non conformes.

Par la suite, pour un espace d'approximation éléments finis  $\mathcal{H}$  de dimension  $N$  et de base  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ , un élément  $v \in \mathcal{H}$  sera associé au vecteur  $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  tel que  $v = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$ . Un élément  $v \in \mathcal{H}^\Xi$  sera associé au vecteur aléatoire  $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^N \in (\mathbb{R}^N)^\Xi$ , tel que  $v(\xi) = \sum_{i=1}^N v_i(\xi) \varphi_i$ . On introduit alors les matrices et les vecteurs éléments finis tels que

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{O}}(U, V) &= \mathbb{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{C}_{\mathcal{O}} \mathbf{U}), & a_{\mathcal{O}}(U, V) &= \mathbb{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{A}_{\mathcal{O}} \mathbf{U}), \\ \ell_{\mathcal{O}}(V) &= \mathbb{E}(\mathbf{V}^T \mathbf{L}_{\mathcal{O}}). \end{aligned}$$

Pour la forme bilinéaire de couplage à l'interface  $b_\Gamma(\cdot, \cdot)$  on distingue la

forme bilinéaire quand elle est définie sur  $\mathcal{M}_h^\Xi \times \widetilde{\mathcal{U}}_H^\Xi$  ou sur  $\mathcal{M}_h^\Xi \times \mathcal{W}_h^\Xi$  :

$$\begin{aligned} b_\Gamma(\lambda, V) &= \mathbb{E}(\mathbf{V}^T \widetilde{\mathbf{B}}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{pour } V \in \widetilde{\mathcal{U}}_H^\Xi \\ b_\Gamma(\lambda, w) &= \mathbb{E}(\mathbf{w}^T \mathbf{B}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{pour } w \in \mathcal{W}_h^\Xi \end{aligned}$$

On introduit également un espace d'approximation (e.g. espace de polynômes, espace éléments finis)

$$\mathcal{S}_P = \left\{ v(\xi) = \sum_{k=1}^P v_k \Psi_k(\xi) \right\} \subset \mathcal{S}$$

Un élément  $v \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_P$  peut alors être écrit  $v = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^P v_{k,i} \varphi_i \otimes \Psi_k$ , et identifié avec un élément  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathcal{S}_P$  tel que  $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^P \mathbf{v}_k \otimes \Psi_k$ , avec  $\mathbf{v}_k = (v_{k,i})_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ .

### 2.4.2 Problème global

Le problème global approximé consiste à trouver  $\hat{U}_n \in \widetilde{\mathcal{U}}_H \otimes \mathcal{S}_P$  tel que  $c_{\widetilde{\Omega}}(\hat{U}_n, \delta U) = c_{\widetilde{\Lambda}}(U_{n-1}, \delta U) - b_\Gamma(\lambda_{n-1}, \delta U) + \ell_{\Omega \setminus \Lambda}(\delta U) \quad \forall \delta U \in \widetilde{\mathcal{U}}_H \otimes \mathcal{S}_P$ .

Il se réduit au système d'équations :

$$\mathbb{E}(\delta \mathbf{U}^T \mathbf{C}_{\widetilde{\Omega}} \hat{U}_n) = \mathbb{E}(\delta \mathbf{U}^T \mathbf{d}) \quad \forall \delta \mathbf{U} \in \mathbb{R}_U^N \otimes \mathcal{S}_P,$$

avec

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}_{\widetilde{\Lambda}} \mathbf{U}_{n-1} - \widetilde{\mathbf{B}}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_{n-1} + \mathbf{L}_{\Omega \setminus \Lambda},$$

Si le paramètre de diffusion fictif  $\widetilde{K}$  ne dépend pas des paramètres incertains  $\xi$ , la matrice éléments finis  $\mathbf{C}_{\widetilde{\Omega}} \in \mathbb{R}^{N_U \times N_U}$  ne dépend pas non plus des paramètres incertains. Si  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}_U^N \otimes \mathcal{S}_P$  est donné sous la forme

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i \otimes \gamma_i,$$

avec  $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{N_U}$  et  $\gamma_i \in \mathcal{S}_P$ , on obtient alors directement une représentation séparée de la solution  $\hat{U}_n$  sous la forme

$$\hat{U}_n = \sum_{i=1}^m (\mathbf{C}_{\widetilde{\Omega}}^{-1} \mathbf{d}_i) \otimes \gamma_i$$

Le problème global peut être vu comme un problème déterministe, qui nécessite la résolution d'un ensemble de systèmes d'équations ayant tous une seule et même matrice éléments finis.

### 2.4.3 Problèmes locaux avec opérateur et second membre incertains

Le problème local approximé consiste à trouver  $(w_n, \lambda_n) \in (\mathcal{W}_h \otimes \mathcal{S}_P) \times (\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{S}_P)$  tel que

$$\begin{cases} a_\Lambda(w_n, \delta w) - b_\Gamma(\lambda_n, \delta w) = \ell_\Lambda(\delta w) & \forall \delta w \in \mathcal{W}_h \otimes \mathcal{S}_P \\ b_\Gamma(\delta \lambda, w_n) = b_\Gamma(\delta \lambda, U_n) & \forall \delta \lambda \in \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{S}_P \end{cases} \quad (2.27)$$

Il se réduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{A}_\Lambda \mathbf{w}_n) - \mathbb{E}(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{B}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}_n) = \mathbb{E}(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{L}_\Lambda) & \forall \delta \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_w} \otimes \mathcal{S}_P \\ \mathbb{E}(\delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}_\Gamma^T \mathbf{w}_n) = \mathbb{E}(\delta \boldsymbol{\lambda}^T \widetilde{\mathbf{B}}_\Gamma \mathbf{U}_n) & \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_\lambda} \otimes \mathcal{S}_P \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$\mathbb{E} \left( \begin{pmatrix} \delta \mathbf{w} \\ \delta \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\Lambda & -\mathbf{B}_\Gamma \\ -\mathbf{B}_\Gamma^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_n \\ \boldsymbol{\lambda}_n \end{pmatrix} \right) = \mathbb{E} \left( \begin{pmatrix} \delta \mathbf{w} \\ \delta \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{L}_\Lambda \\ -\widetilde{\mathbf{B}}_\Gamma^T \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \right)$$

En suivant la remarque 2.1, on note que le problème (2.27) peut être reformulé en introduisant un changement de variable  $w_n = U_n^\diamond + z_n$ , avec  $U_n^\diamond \in \mathcal{W}_h \otimes \mathcal{S}_P$  un prolongement de  $U_n$  de  $\Gamma$  vers  $\Lambda$  tel que

$$b_\Gamma(\delta \lambda, U_n^\diamond - U_n) = 0 \quad \forall \delta \lambda \in \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{S}_P$$

et  $z_n \in \mathcal{W}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P$ , avec  $\mathcal{W}_{h,0} = \{z \in \mathcal{W}_h ; z = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ .  $z_n$  est alors solution de

$$a_\Lambda(z_n, \delta z) = \ell_\Lambda(\delta z) - a_\Lambda(U_n^\diamond, \delta z) \quad \forall \delta z \in \mathcal{W}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P \quad (2.28)$$

$\lambda_n$  est alors obtenu dans une étape de post-traitement en utilisant la première équation de (2.27).

### 2.4.4 Problèmes locaux avec des variabilités géométriques

La méthode de résolution présentée dans la section 2.4.3 est valide quand le patch contient des détails géométriques avec une frontière interne déterministe  $\Gamma^\Lambda := \partial\Lambda \setminus \Gamma$ . Il suffit d'introduire un espace d'approximation conforme  $\mathcal{W}_h$  dans  $\mathcal{W}$ . Cependant, si le patch  $\Lambda$  contient des détails géométriques incertains, cela signifie la présence d'une frontière interne incertaine  $\Gamma^\Lambda(\xi)$ . La construction précédente des espaces d'approximation

n'est donc pas possible puisque  $\mathcal{W}^\Xi$  n'a pas la structure produit tensoriel comme cela a été mentionné dans la section 1.6. Pour résoudre ce problème on utilise la méthode des domaines fictifs [Canuto et Kozubek, 2007; Nouy *et al.*, 2008; Nouy *et al.*, 2011]. On présente ici deux types de reformulations basées sur l'introduction d'un domaine fictif, les différentes formulations dépendant du type de conditions aux limites, Dirichlet ou Neumann, qui sont imposées sur la frontière interne  $\Gamma^\Lambda$ .

#### 2.4.4.1 Domaine fictif et espaces d'approximations

Dans le contexte présent, un choix naturel consiste à prolonger la fonction  $w$  sur le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$ . On considère alors les fonctions  $w$  dans  $\tilde{\mathcal{W}}^\Xi$ , avec  $\tilde{\mathcal{W}} = H^1(\tilde{\Lambda})$ . L'espace des fonctions  $\tilde{\mathcal{W}}^\Xi$  peut maintenant être identifié avec un espace produit tensoriel  $\tilde{\mathcal{W}} \otimes \mathcal{S}$  et les espaces d'approximation peuvent être introduits comme dans la section 2.4.1, c'est-à-dire en introduisant un espace d'approximation élément fini  $\tilde{\mathcal{W}}_h \subset \tilde{\mathcal{W}}$  (associé à un maillage  $\mathcal{T}_h^{\tilde{\Lambda}}$ ) et l'espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ . On introduit aussi l'espace des fonctions  $\tilde{\mathcal{W}}_0 = \{v \in \tilde{\mathcal{W}} ; v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$  et l'espace élément fini correspondant  $\tilde{\mathcal{W}}_{h,0} \subset \tilde{\mathcal{W}}_h$ .

#### 2.4.4.2 Conditions aux limites internes de type Neumann

On considère que  $\Gamma^\Lambda$  est une frontière de Neumann avec des données homogènes. Le problème local peut alors être formulé sur le domaine fictif comme suit : trouver  $(w_n, \lambda_n) \in (\tilde{\mathcal{W}}_h \otimes \mathcal{S}_P) \times (\mathcal{M}_h \otimes \mathcal{S}_P)$  tel que

$$\begin{cases} d_{\tilde{\Lambda}}(w_n, \delta w) - b_\Gamma(\lambda_n, \delta w) = h_{\tilde{\Lambda}}(\delta w) & \forall \delta w \in \tilde{\mathcal{W}}_h \otimes \mathcal{S}_P \\ b_\Gamma(\delta \lambda, w_n) = b_\Gamma(\delta \lambda, U_n) & \forall \delta \lambda \in \mathcal{M}_h \otimes \mathcal{S}_P, \end{cases} \quad (2.29)$$

où les formes bilinéaire  $d_{\tilde{\Lambda}}$  et linéaire  $h_{\tilde{\Lambda}}$  sont définies par

$$\begin{aligned} d_{\tilde{\Lambda}}(w, \delta w) &= \mathbb{E} \left( \int_{\tilde{\Lambda}} K I_\Lambda \nabla w \cdot \nabla \delta w, \right) \\ h_{\tilde{\Lambda}}(\delta w) &= \mathbb{E} \left( \int_{\tilde{\Lambda}} I_\Lambda f \delta w. \right) \end{aligned}$$

avec  $I_\Lambda : \tilde{\Lambda} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction indicatrice du domaine  $\Lambda * \Xi = \{(x, y) \in \tilde{\Lambda} \times \Xi ; x \in \Lambda(y)\}$ , tel que  $I_\Lambda(x, y) = 1$  si  $x \in \Lambda(y)$  et  $I_\Lambda(x, y) = 0$  si  $x \notin \Lambda(y)$ .

Avec un changement de variable approprié  $w_n = U_n^\diamond + z_n$ , on peut formuler le problème local sur  $z_n \in \widetilde{\mathcal{W}}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P$  tel que

$$d_{\tilde{\Lambda}}(z_n, \delta w) = h_{\tilde{\Lambda}}(\delta w) - d_{\tilde{\Lambda}}(U_n^\diamond, \delta w) \quad \forall \delta w \in \widetilde{\mathcal{W}}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P \quad (2.30)$$

Pour plus de détails sur la solution numérique de ces problèmes, voir le chapitre 5 et [Nouy *et al.*, 2008; Nouy *et al.*, 2011].

### 2.4.4.3 Conditions aux limites internes de type Dirichlet

On considère maintenant le cas où  $\Gamma^\Lambda$  est une frontière de Dirichlet avec des données homogènes. On propose ici une reformulation basée sur l'utilisation d'une méthode des fonctions caractéristiques [Babuska *et al.*, 2003]. On introduit une fonction caractéristique  $\psi : \tilde{\Lambda} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- (c1)  $\psi(x, \xi) > 0$  pour  $x \in \Lambda(\xi)$
- (c2)  $\psi(x, \xi) = 0$  pour  $x \in \Gamma^\Lambda(\xi)$
- (c3)  $|\nabla \psi(x, \xi)| \neq 0$  pour  $x \in \Gamma_\Lambda(\xi)$

Une fonction  $(\psi z)$  avec  $z \in \widetilde{\mathcal{W}}_h \otimes \mathcal{S}_P$  vérifie les conditions aux limites de Dirichlet sur  $\Gamma^\Lambda$ . On introduit ensuite un changement de variable  $w_n = U_n^\diamond + \psi z_n$ , avec  $U_n^\diamond = U_n$  au sens faible sur  $\Gamma$ , et avec  $z_n = 0$  sur  $\Gamma$ . On cherche ensuite une approximation du problème local sous la forme

$$w_n = U_n^\diamond + \psi z_n,$$

avec  $z_n \in \widetilde{\mathcal{W}}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P$  tel que

$$d_{\tilde{\Lambda}}(\psi z_n, \psi \delta z) = h_{\tilde{\Lambda}}(\psi \delta z) - d_{\tilde{\Lambda}}(U_n^\diamond, \psi \delta z) \quad \forall \delta z \in \widetilde{\mathcal{W}}_{h,0} \otimes \mathcal{S}_P \quad (2.31)$$

avec  $d_{\tilde{\Lambda}}$  et  $h_{\tilde{\Lambda}}$  les prolongements de  $a_\Lambda$  et  $\ell_\Lambda$  sur le patch fictif :

$$d_{\tilde{\Lambda}}(w, \delta w) = \mathbb{E} \left( \int_{\tilde{\Lambda}} K^\diamond \nabla w \cdot \nabla \delta w \right), \quad h_{\tilde{\Lambda}}(\delta w) = \mathbb{E} \left( \int_{\tilde{\Lambda}} f^\diamond \delta w \right)$$

$K^\diamond$  et  $f^\diamond$  sont des prolongements sur  $\tilde{\Lambda}$  de  $K$  et  $f$  respectivement. On détaillera cette approche dans la section 5.5 du chapitre 5.

## 2.5 Plusieurs patches avec des variabilités indépendantes

On examine maintenant l'introduction de plusieurs patches contenant des incertitudes qui sont (statistiquement) indépendantes entre les patches.

### 2.5.1 Introduction de plusieurs patches

Le patch  $\Lambda$  peut être considéré comme l'union disjointe de  $N_\Lambda$  patches  $\{\Lambda_s\}_{s=1}^{N_\Lambda}$ . On suppose que l'ensemble des paramètres  $\xi$  peut être divisé en sous-ensembles disjoints de paramètres  $\xi_s$  à valeurs dans  $\Xi^s \subset \mathbb{R}^{d_s}$ ,  $s = (1 \dots N_\Lambda)$ , tel que  $\Lambda_s$  dépendent seulement de  $\xi_s$ , *i.e.*

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_1(\xi_1) \cup \dots \cup \Lambda_{N_\Lambda}(\xi_{N_\Lambda}),$$

et le champ aléatoire  $K$  et le terme source  $f$  dépendent aussi seulement de  $\xi_s$  dans le sous domaine  $\Lambda_s$ , *i.e.*

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= K_s(x, \xi_s) \quad \text{pour } x \in \Lambda_s(\xi_s) \\ f(x, \xi) &= f_s(x, \xi_s) \quad \text{pour } x \in \Lambda_s(\xi_s) \end{aligned}$$

pour  $s = 1, \dots, N_\Lambda$ .

### 2.5.2 Problèmes locaux

On note  $\Gamma_s = \Gamma \cap \partial\Lambda_s$  et  $\Gamma_D^{\Lambda_s} = \Gamma_D \cap \partial\Lambda_s$ . On introduit ensuite

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_s &= \{w \in H^1(\Lambda_s) ; w = 0 \text{ on } \Gamma_D^{\Lambda_s}\}, \\ \mathcal{M}_s &= H^{-1/2}(\Gamma_s), \end{aligned}$$

et les espaces de Bochner correspondant  $\mathcal{W}_s^\Xi$  et  $\mathcal{M}_s^\Xi$ . On a

$$\mathcal{M}^\Xi = \times_{s=1}^{N_\Lambda} \mathcal{M}_s^\Xi, \quad \mathcal{W}^\Xi = \times_{s=1}^{N_\Lambda} \mathcal{W}_s^\Xi,$$

tels qu'une fonction  $\lambda \in \mathcal{M}^\Xi$  (resp.  $w \in \mathcal{W}^\Xi$ ) soit considérée comme une collection de solutions locales  $\lambda^s \in \mathcal{M}_s^\Xi$  (resp.  $w^s \in \mathcal{W}_s^\Xi$ ). L'étape locale est composée de  $N_\Lambda$  problèmes indépendants sur les patches  $\Lambda_s$ , qui peuvent



être résolu en parallèle. Dans l'itération  $n$ , en notant  $w_n = \{w_n^s\}_{s=1}^{N_\Lambda}$  et  $\lambda_n = \{\lambda_n^s\}_{s=1}^{N_\Lambda}$ , on a pour tout  $s = 1 \dots N_\Lambda$ ,

$$\begin{cases} a_{\Lambda_s}(w_n^s, \delta w) - b_{\Gamma_s}(\lambda_n^s, \delta w) = \ell_{\Lambda_s}(\delta w) \\ b_{\Gamma_s}(\delta \lambda, w_n^s) = b_{\Gamma_s}(\delta \lambda, U_n) \end{cases} \quad \forall (\delta \lambda, \delta w) \in \mathcal{M}_s^\Xi \times \mathcal{W}_s^\Xi \quad (2.32)$$

Pour les patches contenant des détails géométriques, les méthodes d'approximation présentées dans la section 2.4.4 peuvent être appliquées.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a proposé une méthode multiéchelle stochastique qui exploite le caractère localisé des aléas. Un algorithme itératif associé a été proposé. Cet algorithme nécessite la résolution d'une suite de problèmes globaux et de problèmes locaux, ces derniers étant définis sur un patch (ou une collection de patches) contenant les variabilités du modèle. L'avantage de cet algorithme est qu'il permet d'introduire des problèmes globaux très simples : définition des problèmes sur un domaine déterministe fixé ne tenant pas compte des détails géométriques aléatoires, remplacement d'un milieu aléatoire hétérogène par un milieu homogène déterministe (conduisant à un problème global à opérateur déterministe). Dans le cas de problèmes à variabilité géométrique localisée, on a introduit des reformulations des problèmes locaux en utilisant la méthode des domaines fictifs (pour des conditions aux limite de type Dirichlet ou Neumann). Les méthodes de résolution dédiées à ce type de problème seront détaillées dans le chapitre 5.5.

## Chapitre 3

# Analyse de l'algorithme itératif global-local

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Analyse de convergence . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>3.2</b>	<b>Études numériques des paramètres de l'algorithme . . . . .</b>	<b>52</b>
3.2.1	Exemple avec champ de diffusion aléatoire localement hétérogène . . . . .	52
3.2.2	Exemples avec frontière interne aléatoire . . . . .	63
<b>3.3</b>	<b>Robustesse de l'algorithme en fonction des approximations . . . . .</b>	<b>69</b>
3.3.1	Perturbations de l'algorithme . . . . .	69
3.3.2	Illustration de la robustesse de l'algorithme . . . . .	70
<b>3.4</b>	<b>Approximation des solutions locales dans des sous-espaces . . . . .</b>	<b>72</b>
3.4.1	Exemple avec champ de diffusion localement hétérogène aléatoire . . . . .	72
3.4.2	Exemple avec deux frontières internes avec conditions aux limites de Dirichlet . .	73
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>76</b>

---

Dans le chapitre 2 un algorithme itératif basé sur une méthode de zoom numérique avec recouvrement a été introduit. Ce chapitre est consacré à l'analyse de la convergence de cet algorithme. La convergence de l'algorithme est démontrée sous certaines conditions sur les paramètres de l'algorithme. Différents exemples numériques permettent d'illustrer l'influence des divers paramètres de l'algorithme sur la convergence de celui-ci. Une analyse théorique de l'impact de perturbations sur l'algorithme (dues à des approximations) est également menée. Enfin, on propose une étude sur l'approximation des solutions locales dans des sous espaces d'approximations (éliminant la dépendance en des variables aléatoires).

### 3.1 Analyse de convergence

On introduit l'application  $\Phi : \mathcal{M}^\Xi \times \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  tel que  $\Phi(\beta, V) \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  est solution de :

$$c_{\tilde{\Omega}}(\Phi(\beta, V), \delta U) = c_{\tilde{\Lambda}}(V, \delta U) - b_\Gamma(\beta, \delta U) \quad \forall \delta U \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \quad (3.1)$$

On introduit aussi les applications  $\Psi : \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \mathcal{M}^\Xi$  et  $\psi : \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \mathcal{W}^\Xi$  telles que le couple  $(\Psi(V), \psi(V)) \in \mathcal{M}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi$  est solution de :

$$\begin{cases} a_\Lambda(\psi(V), \delta w) - b_\Gamma(\Psi(V), \delta w) = 0 \\ b_\Gamma(\delta \lambda, \psi(V)) = b_\Gamma(\delta \lambda, V) \end{cases} \quad \forall (\delta w, \delta \lambda) \in \mathcal{W}^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi \quad (3.2)$$

Soit  $(U, \lambda, w) \in \tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \times \mathcal{M}^\Xi \times \mathcal{W}^\Xi$  la solution exacte de (2.23). Avec les définitions ci-dessus, l'algorithme global-local est équivalent à :

$$\begin{aligned} \hat{U}_n - U &= \Phi(\lambda_{n-1} - \lambda, U_{n-1} - U) \\ U_n - U &= \rho(\hat{U}_n - U) + (1 - \rho)(U_{n-1} - U) \\ (\lambda_n - \lambda, w_n - w) &= (\Psi(U_n - U), \psi(U_n - U)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Posons  $E_n = U_n - U$  l'erreur à l'itération  $n$ . On a

$$E_n = \rho\Phi(\Psi(E_{n-1}), E_{n-1}) + (1 - \rho)E_{n-1} := B_\rho(E_{n-1}) \quad (3.4)$$

avec l'opérateur d'itération  $B_\rho$  défini par

$$B_\rho(V) = \rho\Phi(\Psi(V), V) + (1 - \rho)V \quad (3.5)$$

**Lemme 3.1** *L'opérateur d'itération  $B_\rho : \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  défini dans (3.5) est tel que*

$$B_\rho = I - \rho A$$

avec  $A : \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  tel que  $A(V) \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi$  est solution de

$$c_{\tilde{\Omega}}(A(V), \delta V) = b_\Gamma(\Psi(V), \delta V) + a_{\Omega \setminus \Lambda}(V, \delta V) \quad \forall \delta V \in \tilde{\mathcal{U}}^\Xi \quad (3.6)$$

**Preuve.** De la définition (3.5) de  $B_\rho$ , on peut déduire

$$A(V) = V - \Phi(\Psi(V), V)$$

De (3.1), on a  $\Phi(\Psi(V), V) \in \widetilde{\mathcal{U}}^\Xi$  définie par l'équation suivante :

$$c_{\widetilde{\Omega}}(\Phi(\Psi(V), V), \delta V) = -b_\Gamma(\Psi(V), \delta V) + c_{\widetilde{\Lambda}}(V, \delta V) \quad \forall \delta V \in \widetilde{\mathcal{U}}^\Xi \quad (3.7)$$

En utilisant (2.22), on obtient l'expression désirée (3.6).  $\blacksquare$

On note que  $U$  et les itérés  $U_n$  appartiennent au sous espace  $\widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \subset \widetilde{\mathcal{U}}^\Xi$  de telle sorte que seule la restriction dans  $\mathcal{U}_*^\Xi$  de l'opérateur  $A$  défini dans (3.6) doive être analysée.

**Lemme 3.2** *L'opérateur  $A : \widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \rightarrow \widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$  est symétrique, continu et coercif.*

**Preuve.** Puisque  $\widetilde{K}$  est uniformément borné et elliptique, on peut équiper l'espace de Hilbert  $\widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \subset \widetilde{\mathcal{U}}^\Xi$  du produit scalaire

$$\langle U, V \rangle_{\widetilde{\Omega}, \widetilde{K}} = c_{\widetilde{\Omega}}(U, V) = \mathbb{E} \left( \int_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{K} \nabla U \cdot \nabla V \right)$$

et de la norme associée  $\|V\|_{\widetilde{\Omega}, \widetilde{K}} = \sqrt{c_{\widetilde{\Omega}}(V, V)}$ . D'après les propriétés de  $\widetilde{K}$ ,  $\|\cdot\|_{\widetilde{\Omega}, \widetilde{K}}$  est équivalente à  $\|\cdot\|_{\widetilde{\Omega}}$ . De (3.6), l'opérateur  $A$  est tel que

$$\langle A(U), V \rangle_{\widetilde{\Omega}, \widetilde{K}} = c_{\widetilde{\Omega}}(A(U), V) = b_\Gamma(\Psi(U), V) + a_{\Omega \setminus \Lambda}(U, V)$$

En utilisant comme fonctions test  $(\delta\lambda, \delta w) = (\Psi(U), \psi(U))$  dans l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{cases} a_\Lambda(\psi(V), \psi(U)) = b_\Gamma(\Psi(V), \psi(U)) \\ b_\Gamma(\Psi(U), \psi(V)) = b_\Gamma(\Psi(U), V) \end{cases} \quad (3.8)$$

Les équations (3.8) sont aussi vérifiées si on permute  $U$  et  $V$ . On obtient alors

$$b_\Gamma(\Psi(U), V) = b_\Gamma(\Psi(U), \psi(V)) = a_\Lambda(\psi(U), \psi(V)) = b_\Gamma(\Psi(V), U) \quad (3.9)$$

où on a utilisé la symétrie de  $a_\Lambda$ . Cela prouve que l'opérateur  $A$  est symétrique. La continuité de  $A$  découle directement de sa définition comme la solution du problème variationnel (3.6) on a donc une forme bilinéaire symétrique continue est coercive. De plus,

$$b_\Gamma(\Psi(U), U) = a_\Lambda(\psi(U), \psi(U)) \geq 0,$$

et donc

$$\langle A(U), U \rangle_{\tilde{\Omega}, \tilde{K}} \geq a_{\Omega \setminus \Lambda}(U, U) \gtrsim \|U\|_{\Omega \setminus \Lambda}^2,$$

où la dernière inégalité est obtenue à partir de la propriété de coercivité de  $a_{\Omega \setminus \Lambda}$  sur  $\mathcal{U}^\Xi$ . Finalement, il reste à voir que sur  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$ ,  $\|\cdot\|_{\Omega \setminus \Lambda}$  définit une norme qui est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\tilde{\Omega}}^1$ , et donc :

$$\langle A(U), U \rangle_{\tilde{\Omega}, \tilde{K}} \gtrsim \|U\|_{\tilde{\Omega}}^2 \gtrsim \|U\|_{\tilde{\Omega}, \tilde{K}}^2$$

ce qui prouve que  $A$  est coercive sur le sous-espace  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$  de  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi$ . ■

On a finalement le résultat de convergence suivant.

**Theorème 3.1** *La suite  $U_n$  converge vers  $U$  pour un paramètre de relaxation suffisamment petit  $\rho > 0$ .*

**Preuve.** Puisque  $A$  est symétrique, continu et coercif, on a

$$\|B_\rho(U) - B_\rho(V)\|^2 = \|U - V - \rho(A(U) - A(V))\|^2 \quad (3.10)$$

$$\leq (1 - 2\rho\alpha_A + \rho^2 C_A^2) \|U - V\|^2 \quad (3.11)$$

avec  $\alpha_A$  et  $C_A$  respectivement les constantes de coercivité et de continuité de l'opérateur  $A$ . En choisissant  $0 < \rho < \frac{2\alpha_A}{C_A^2}$ , on a  $\rho_B = (1 - 2\rho\alpha_A + \rho^2 C_A^2)^{1/2} < 1$  et donc,  $B_\rho$  est une application contractante de constante de contractivité  $\rho_B$ . L'erreur  $\varepsilon_n = \|U_n - U\|$  vérifie alors

$$\varepsilon_n = \|B_\rho(U_{n-1}) - B_\rho(U)\| \leq \rho_B \varepsilon_{n-1} \leq \rho_B^n \varepsilon_0$$

ce qui entraîne  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . ■

**Remarque 3.1** *On note que si  $\tilde{K} = K$  sur  $\tilde{\Lambda}$  et si  $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ , on a  $A = I$ , de sorte que  $B_\rho = (1 - \rho)I$ , ce qui entraîne la convergence pour  $0 < \rho < 2$ . C'est aussi vrai dans le cadre discrétisé en utilisant la méthode de projection de Galerkin, quand l'espace d'approximation dans  $\mathcal{W}^\Xi$  est la restriction sur  $\tilde{\Lambda}$  des fonctions des espaces d'approximation dans  $\tilde{\mathcal{U}}^\Xi$ .*

---

1. L'équivalence sur  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$  des normes  $\|\cdot\|_{\Omega \setminus \Lambda}$  et  $\|\cdot\|_{\tilde{\Omega}}$  s'obtient en utilisant le fait que  $\tilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$  contient des fonctions  $U$  dont la restriction à  $\tilde{\Lambda}$  est le prolongement harmonique de la restriction de  $U$  à  $\Omega \setminus \Lambda$ , et en utilisant la continuité des opérateurs de trace de  $H^1(\Omega \setminus \Lambda)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et de  $H^1(\tilde{\Lambda})$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

**Remarque 3.2** *On note que la solution finale ne dépend pas du choix de  $\tilde{K}$ . Cependant ce choix influence le comportement de l'algorithme itératif (il affecte les propriétés spectrales de l'opérateur  $A$ ). Cela sera illustré dans les exemples numériques. Un choix pratique consiste à prendre pour  $\tilde{K}$  un champ déterministe, entraînant un problème global avec l'opérateur déterministe. Un choix naturel qui donne de bonnes propriétés de convergence consiste à prendre pour  $\tilde{K}$  le champ moyen*

$$\tilde{K}(x) = \mathbb{E}(K(x, \xi))$$

*Cependant, nous verrons dans les exemples numériques qu'une large plage de valeurs du coefficient de diffusion fictif  $\tilde{K}$  donne de bonnes propriétés de convergence, apportant de la flexibilité dans la définition des problèmes globaux.*

## 3.2 Études numériques des paramètres de l'algorithme

### 3.2.1 Exemple avec champ de diffusion aléatoire localement hétérogène

#### 3.2.1.1 Description de l'exemple et espaces d'approximation

On considère le problème de diffusion (2.1) sur  $\Omega = \{(0, 5) \times (0, 5)\}$  avec  $f = 1$ ,  $\Gamma_D = \partial\Omega$  et  $\Gamma_N = \emptyset$ . On définit  $\Lambda$  comme l'union de 4 patchs disjoints  $\Lambda = \cup_{s=1}^4 \Lambda_s$  représentés dans la figure 3.1 où  $\Lambda_s$  pour  $s = 1, \dots, 4$  sont des domaines carré de longueur  $L = 1$  et de centres  $c_s$  tels que :  $c_1 = (3.5, 3.5)$ ,  $c_2 = (1.5, 1)$ ,  $c_3 = (1.5, 2.5)$ ,  $c_4 = (3.5, 1)$ . On considère le champ de diffusion

$$K(x, \xi) = \begin{cases} K_0 = 1 \text{ pour } x \in \Omega \setminus \Lambda \\ K_s(x, \xi_s) = 1 + \xi_s k_s(x) \text{ pour } x \in \Lambda_s, \text{ pour } s = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$\text{avec } k_s(x) = \begin{cases} \alpha \exp\left(-2\frac{|x-c_s|^2}{0.25^2}\right), \alpha \in \mathbb{R}, & \text{si } \max(x - c_s) < 0.25. \\ 0, & \text{si } \max(x - c_s) \geq 0.25. \end{cases} \text{ et avec}$$

$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_4\}$  un ensemble de variables aléatoires uniformes indépendantes à valeur dans  $\Xi = \times_{s=1}^4 \Xi_s = (0, 1)^4$ . Ici on a  $\tilde{\Omega} = \Omega$  et  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ .

Au niveau spatial, on introduit les espaces d'approximation éléments finis imbriqués  $\tilde{\mathcal{U}}_H$  et  $\mathcal{W}_h^s$  pour  $s = 1, \dots, 4$ . Comme cela est illustré sur la

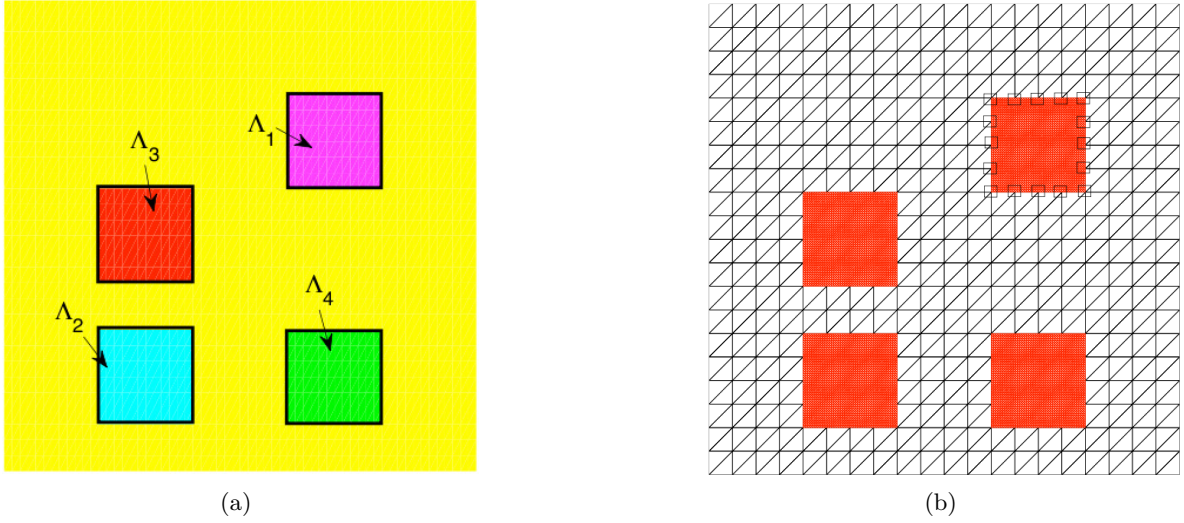


FIGURE 3.1 – Description du problème de diffusion. (a) Domaine  $\Omega$  et patches  $\Lambda_1 = (3, 4) \times (3, 4)$ ,  $\Lambda_2 = (1, 2) \times (0.5, 1.5)$ ,  $\Lambda_3 = (1, 2) \times (2, 3)$ ,  $\Lambda_4 = (3, 4) \times (0.5, 1.5)$ . (b) Maillages éléments finis imbriqués (les symboles  $\square$  indiquent les noeuds communs de  $\mathcal{T}_H^\Omega$  et  $\mathcal{T}_h^{\Lambda_s}$  sur l'interface  $\Gamma_1$ ).

figure 3.1, on utilise des maillages réguliers  $\mathcal{T}_H^\Omega$  et  $\mathcal{T}_h^{\Lambda_s}$  composés d'éléments triangulaires de dimensions respectives  $H = 0.25$  et  $h = 0.025$  dans  $\Omega$  et  $\Lambda_s$  conduisant aux espaces d'approximations de dimensions  $\dim \tilde{\mathcal{U}}_H = 441$  et  $\dim \mathcal{W}_h^s = 1681$  pour  $s = 1, \dots, 4$ .

Au niveau stochastique, on introduit un espace d'approximation  $\mathcal{S}_P$  avec des polynômes de Legendre de degré  $p = 3$  ce qui donne une dimension  $P = 35$  pour l'espace d'approximation stochastique.

### 3.2.1.2 Illustration des quantités d'intérêt probabilistes

Cette section illustre dès à présent les statistiques de la solution qui nous serviront à la compréhension de l'algorithme itératif global-local par la suite. La Figure 3.2 montre la moyenne et la variance de la solution globale  $U$  et celles de la solution reconstituée  $u$ .  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\mathbb{V}(Y)$  sont l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $Y$ . Les variances ont de faibles valeurs et sont capturées par les solutions locales dans les patches.

Afin de quantifier l'impact d'une variable aléatoire sur la variance de la solution, on introduit les indices de sensibilité suivants :

$$S_s(u)(x) = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(u(x, \xi) | \xi_s))}{\mathbb{V}(u(x, \xi))}, \quad \tilde{S}_s(u)(x) = \frac{\mathbb{V}(\mathbb{E}(u(x, \xi) | \xi_s))}{\sup_{y \in \Omega} \mathbb{V}(u(y, \xi))}$$

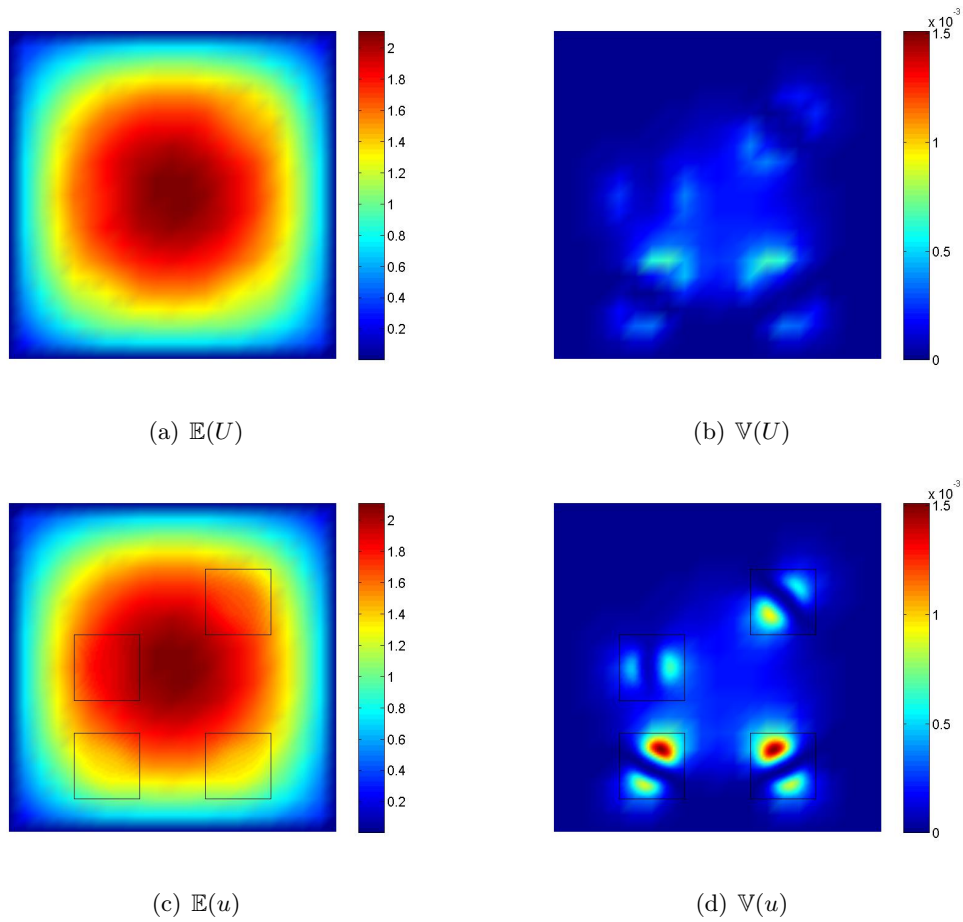
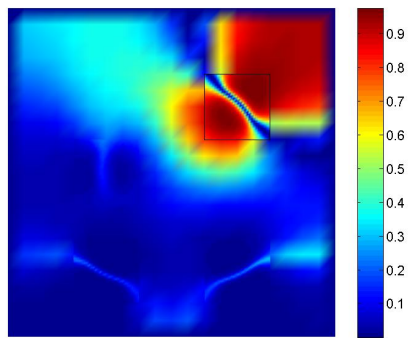


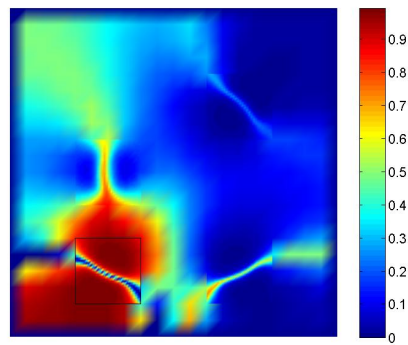
FIGURE 3.2 – Moyennes et variances de la solution globale  $U$  (a et b) et de la solution reconstituée  $u$  (c et d). La frontière  $\Gamma$  est affichée avec des lignes noires.

On note que  $S_s(u)(x)$  sont les indices classiques de Sobol tels que  $\sum_s S_s(u)(x) = 1$  pour tout  $x$  comme cela peut être observé sur la figure 3.3, tandis que les indices  $\tilde{S}_s(u)(x)$  sont introduits pour illustrer la zone d'influence d'un ensemble de variables aléatoires  $\xi_s$  du patch  $\Lambda_s$  sur la solution  $u$ . Ils sont tels que  $\sum_s \tilde{S}_s(u)(x) = \frac{\mathbb{V}(u(x, \xi))}{\sup_{y \in \Omega} \mathbb{V}(u(y, \xi))}$ . Ces indices sont tracés dans la figure 3.4 pour les quatre patches. Dans cet exemple, on peut voir que la solution est sensible à une variable aléatoire  $\xi_s$  essentiellement dans le patch  $\Lambda_s$ . L'impact des incertitudes sur la solution  $u$  est donc localisé et les dimensions des patches  $\Lambda_s$  peuvent être choisies de façon à contenir l'essentiel de l'impact des variables d'entrée sur la solution  $u$ .

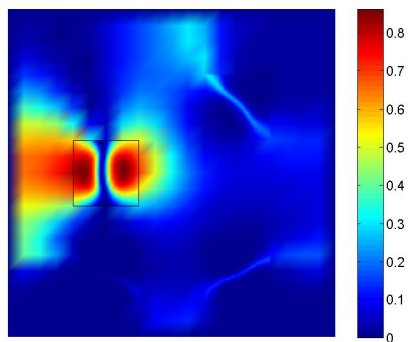




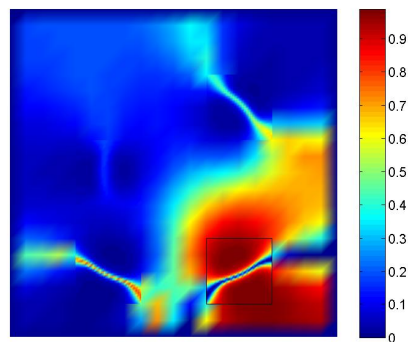
(a)  $S_1(u)$



(b)  $S_2(u)$



(c)  $S_3(u)$



(d)  $S_4(u)$

FIGURE 3.3 – Indices de sensibilité de Sobol  $S_s(u)$  pour  $s = 1, 2, 3, 4$ .

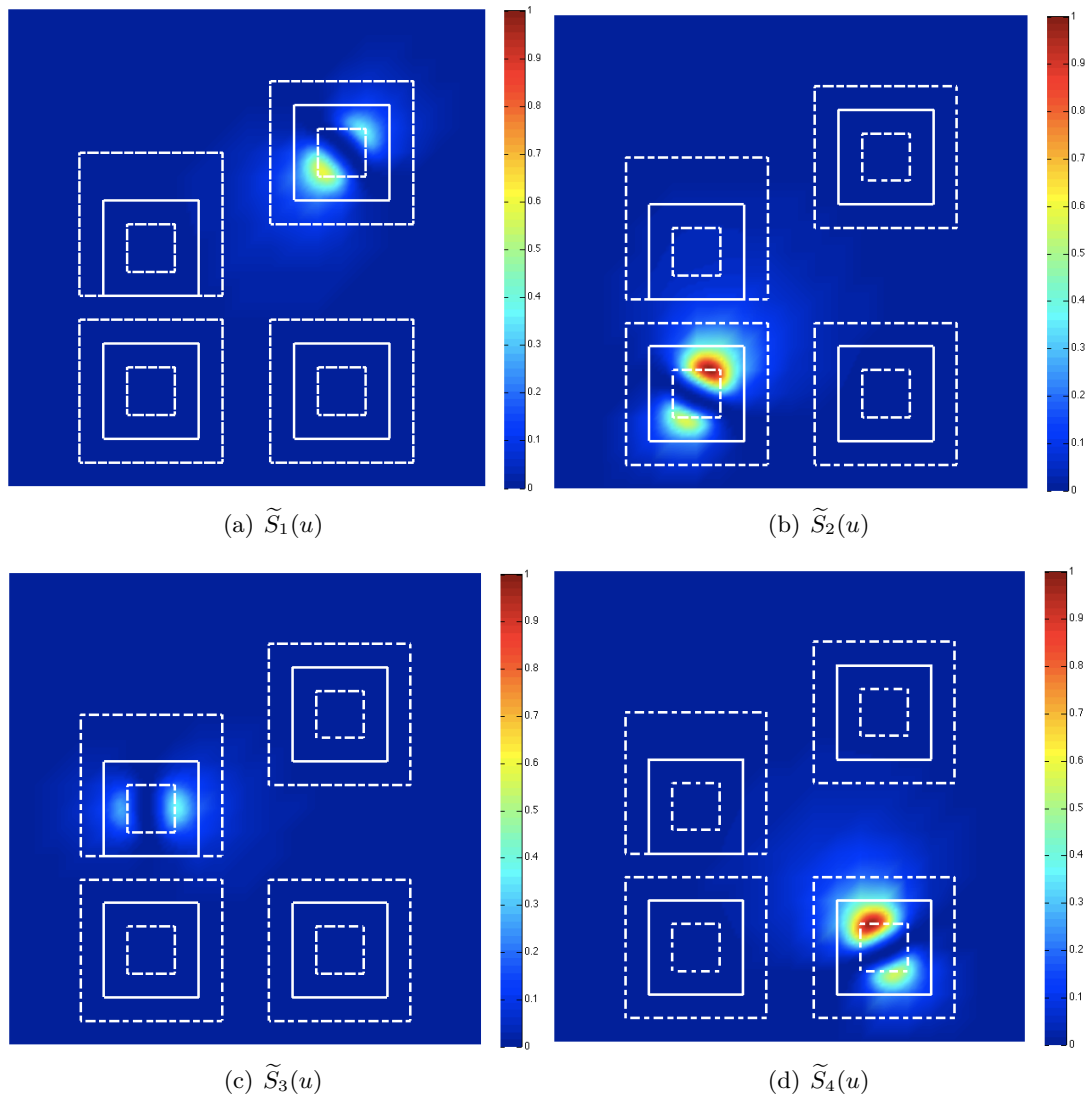


FIGURE 3.4 – Indices de sensibilité  $\tilde{S}_s(u)$  pour  $s = 1, 2, 3, 4$ . En traits blancs : la frontière  $\Gamma$  pour 3 dimensions différentes de patches,  $L = 1$  en trait continu et  $L = 0.5, 1.5$  en traits pointillés.

### 3.2.1.3 Influence du paramètre de relaxation sur la convergence

On note  $U$  la solution de référence globale obtenue par la résolution directe du système et  $U_n$  la solution globale obtenue avec l'algorithme itératif global-local, on introduit l'indicateur d'erreur

$$\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U) = \frac{\|U - U_n\|_{0, \Omega \setminus \Lambda}}{\|U\|_{0, \Omega \setminus \Lambda}} \quad (3.12)$$

avec  $\|\cdot\|_{0, \Omega \setminus \Lambda}$  la norme naturelle sur  $L^2_{P_\xi}(\Xi; L^2(\Omega \setminus \Lambda))$  définie par

$$\|u\|_{\Omega \setminus \Lambda}^2 = \int_{\Xi} \int_{\Omega \setminus \Lambda} u^2 dx dP_\xi(y).$$

On analyse tout d'abord l'influence du paramètre de relaxation  $\rho$  sur la convergence de l'algorithme itératif. Le paramètre de relaxation optimal de l'algorithme itératif global-local peut être estimé par (voir [Xu, 1992])

$$\rho^{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}$$

où  $\lambda_{min}(A)$  et  $\lambda_{max}(A)$  sont les valeurs propres minimale et maximale de l'opérateur  $A(V) = V - \Phi(\Psi(V), V)$  défini dans (3.6). En pratique,  $\lambda_{max}(A)$  est estimée en utilisant quelques itérations de puissance (typiquement 2 ou 3), chaque itération de puissance requiert la solution d'un problème local (pour calculer  $\Psi(V)$ ) et un problème global (pour calculer  $\Phi(\Psi(V), V)$ ). Comme il est difficile de déterminer  $\lambda_{min}(A)$ , dans la suite le paramètre de relaxation optimal est approximé par :

$$\rho^{opt} \approx \rho^* = \frac{1}{\lambda_{max}(A)}.$$

Cette approximation est assez pertinente si l'opérateur  $A$  est bien conditionné, ce qui signifie que  $\lambda_{min}(A)$  et  $\lambda_{max}(A)$  sont du même ordre de grandeur.

L'algorithme itératif est effectué en utilisant un coefficient fictif  $\tilde{K} = 1$  sur  $\tilde{\Lambda}$ , ce qui correspond à un problème global ne voyant aucune hétérogénéité. La figure 3.5 montre l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations pour  $\alpha = \{-0.9, 10, 30, 100\}$  et pour différentes

valeurs du paramètre de relaxation  $\rho$ . On observe dans tous les cas que le paramètre de relaxation optimal approché  $\rho^*$  donne presque toujours une convergence optimale, la convergence optimale étant en réalité obtenue pour le paramètre de relaxation optimal  $\rho^{opt}$ . On observe que l'algorithme converge rapidement (erreur relative inférieure à  $10^{-5}$  pour  $n \leq 10$ ) pour les différents niveaux d'hétérogénéité.

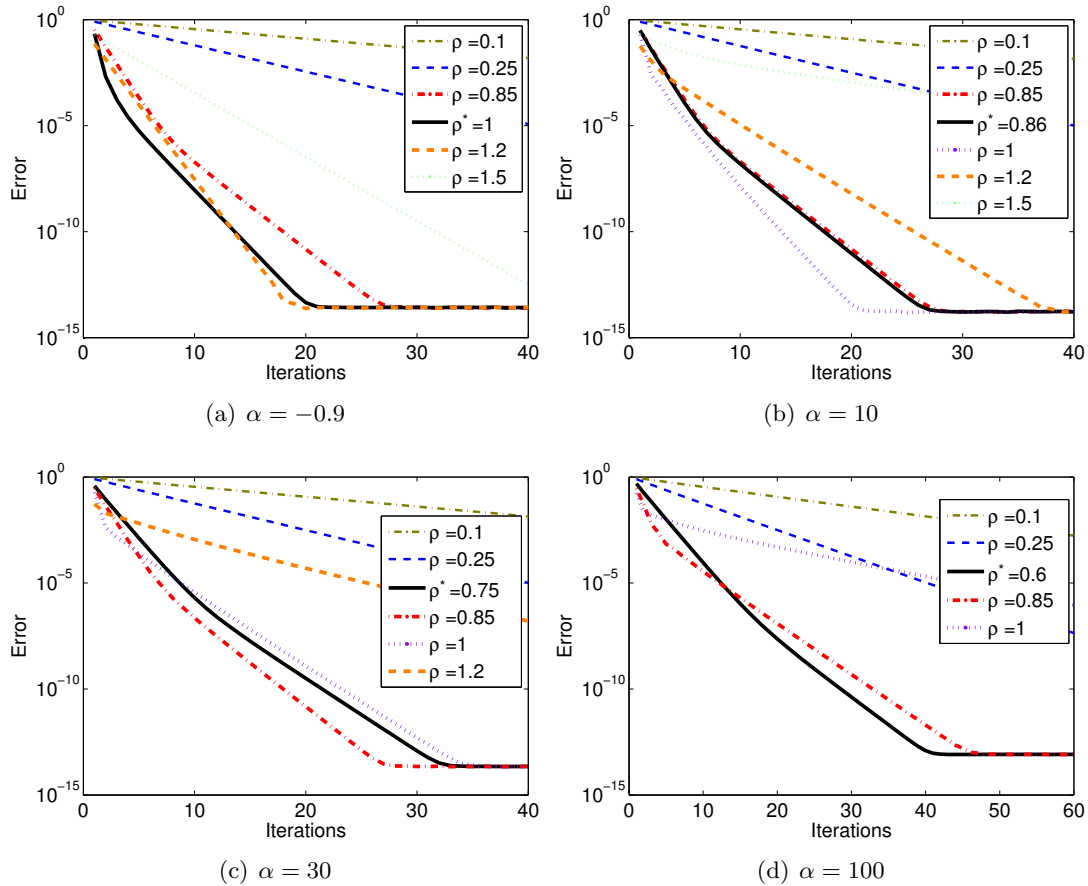


FIGURE 3.5 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour  $\alpha = \{-0.9, 10, 30, 100\}$ , pour différentes valeurs du paramètre de relaxation  $\rho$ .

La figure 3.6 rassemble les courbes de convergence précédentes obtenues avec le paramètre optimal approché  $\rho^*$  respectivement pour  $\alpha = \{-0.9, 10, 30, 100\}$  afin de montrer l'influence de l'amplitude des coefficients de diffusion dans les patches sur la convergence de l'algorithme. On voit que la convergence se dégrade lorsque  $\alpha$  augmente, c'est-à-dire lorsque le rapport entre l'amplitude maximale du champ de diffusion  $K_s$  et

le champ fictif  $\widetilde{K}$  dans les patches augmente. Ainsi, la question qui se pose ici est : peut-on agir sur le champ fictif  $\widetilde{K}$  afin d'améliorer la convergence ?

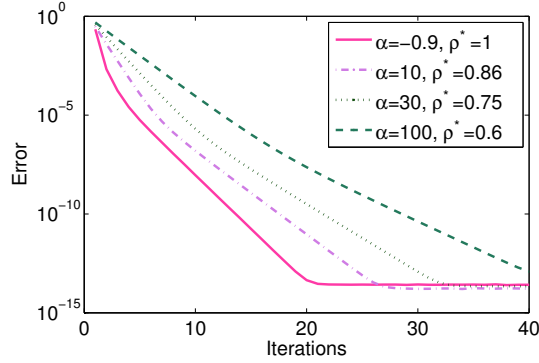


FIGURE 3.6 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour plusieurs valeurs du paramètre  $\alpha$ .

### 3.2.1.4 Influence du champ de diffusion fictif sur la convergence

En remarquant que  $\widetilde{K}$  agit comme une sorte de préconditionneur de l'algorithme itératif, on peut étudier son influence sur la convergence de l'algorithme. On introduit donc un champ de diffusion fictif de la forme :

$$\widetilde{K}_s(x, \xi_s) = 1 + \beta k_s(x) \text{ pour } x \in \widetilde{\Lambda}_s, \text{ pour } s = 1, \dots, 4,$$

avec  $\beta \in \mathbb{R}$ .  $\beta = 0$  correspond au cas  $\widetilde{K} = 1$  étudié précédemment où le problème global ne voit aucune hétérogénéité dans le champ de diffusion, et  $\beta = 0.5$  revient à choisir l'espérance du champ de diffusion pour champ fictif dans le problème global.

La figure 3.7 illustre la convergence de la solution  $U_n$  vers la solution de référence  $U$ , pour  $\alpha = \{-0.9, 10, 30, 100\}$  et pour différentes valeurs de  $\beta$ . Pour chacune de ces valeurs,  $u$  est calculée en utilisant soit le paramètre de relaxation optimal approché  $\rho = \rho^*$  (courbes continues), soit  $\rho = 1$  (courbes pointillées). D'une part, on observe que pour  $\alpha = 100$ , l'algorithme global-local avec  $\rho = 1$  souffre des grandes hétérogénéités lorsque  $\beta$  est fixé à 0. Une bonne convergence peut être rétablie en augmentant  $\beta$  à 0.3, ou tout du moins pas au-delà de 0.5. D'autre part, il apparaît que l'utilisation du paramètre de relaxation optimal approché assure un bon taux de convergence quelle que soit la valeur de  $\beta$  choisie dans l'intervalle

$[0, 0.5]$  et ce peu importe l'amplitude de l'hétérogénéité. Nous retenons donc finalement  $\beta = 0$  et  $\rho^*$  comme choix idéal pour exécuter l'algorithme itératif global-local avec  $\beta = 0$  et  $\rho^*$ . En effet ce paramétrage donne de bonnes propriétés de convergence et conduit à un problème global simple sans hétérogénéités localisées.

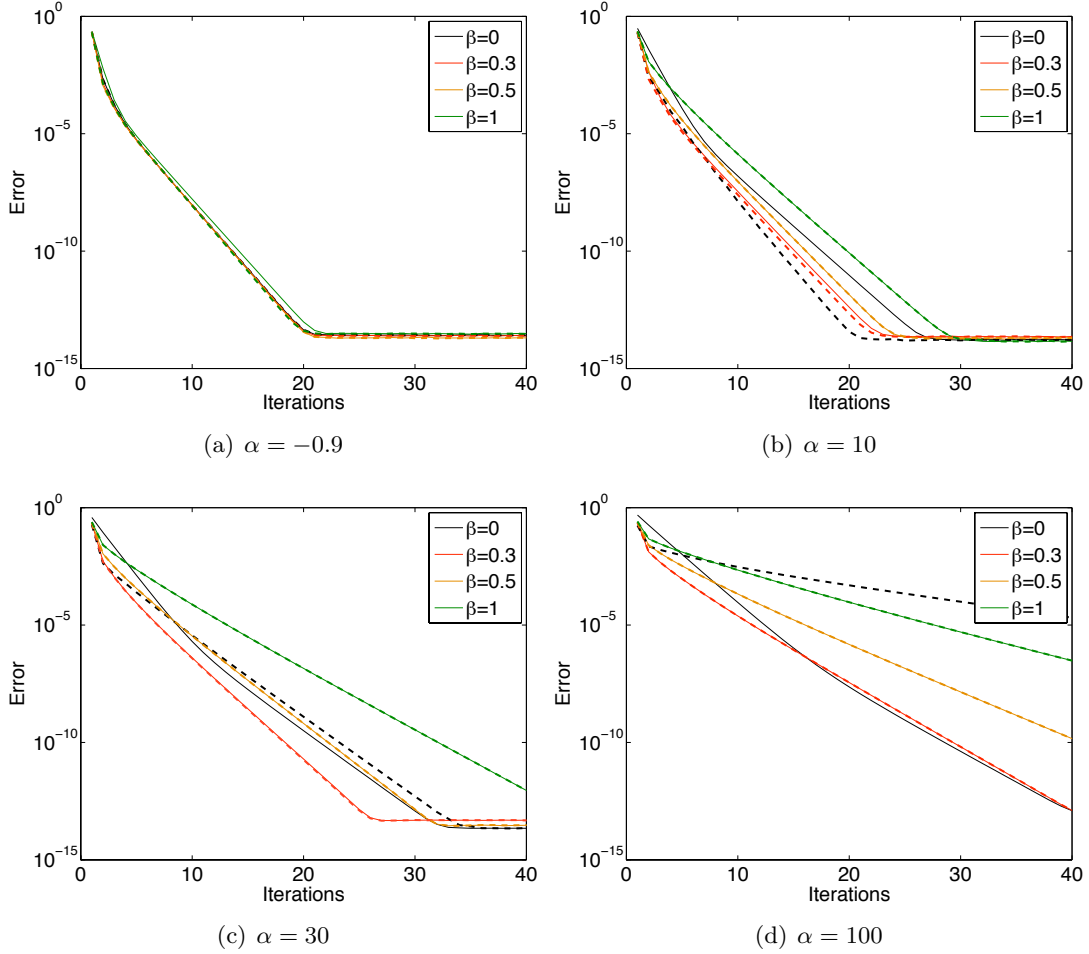


FIGURE 3.7 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour l'algorithme itératif global-local pour plusieurs valeurs de  $\beta$  et avec  $\rho = 1$  (lignes pointillées) ou  $\rho^* = \frac{1}{\lambda_{max}(A)}$  (lignes continues).

### 3.2.1.5 Influence de la taille des patches

#### Influence sur la convergence de l'algorithme itératif global-local.

On étudie maintenant l'influence de la taille des patches sur la convergence de l'algorithme itératif global-local. L'algorithme itératif global-

local est appliqué avec des patches  $\Lambda_s$  de côté de différentes longueurs  $L = \{0.5, 1, 1.5\}$ . L'algorithme itératif est appliqué pour chacune des dimensions de patch en utilisant à chaque fois le paramètre de relaxation optimal approximé  $\rho^*$ . La figure 3.8 montre la convergence de  $U_n$  vers  $U$ . On voit que pour  $L \geq 1$ , on a le même taux de convergence tandis que ce dernier se dégrade légèrement pour  $L = 0.5$ . En effet, au regard de la figure 3.4, on observe que  $L \geq 1$  correspond à des patches contenant la quasi totalité de la région fortement influencée par  $\xi_s$  tandis que pour  $L = 0.5$  les indices de sensibilité  $\tilde{S}_s(u)$  ont des valeurs encore élevées en dehors des patches.

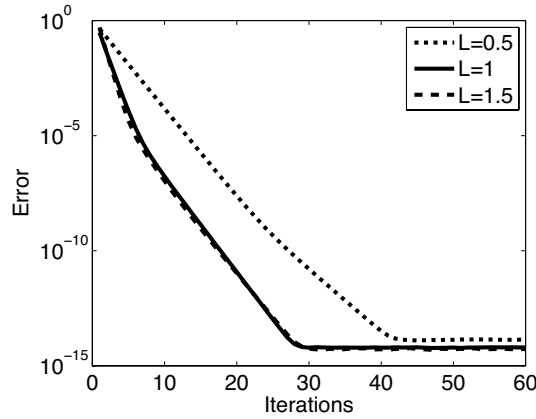


FIGURE 3.8 – Convergence de la solution de l'algorithme global-local : évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour 3 dimensions de patch.

**Influence sur le contenu spectral des solutions.** On étudie maintenant l'influence des dimensions des patches sur le rang de la décomposition de Karhunen-Loève des solutions. Soient  $u_m$ ,  $U_{n,m}$  et  $w_{n,m}^s$  les décompositions de rang  $m$  de  $u$ ,  $U_n$  et  $w_n^s$  respectivement. La figure 3.9 montre l'évolution de  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u)$ ,  $\varepsilon_{\Omega}(U_{60,m}; U_{60})$  et  $\varepsilon_{\Lambda_s}(w_{60,m}^s; w_{60}^s)$  pour  $s = 1, \dots, 4$  en fonction du rang  $m$ . Pour une tolérance donnée, la séparation des échelles opérée avec l'algorithme itératif global-local permet d'obtenir des itérés  $U_{60}$  et  $w_{60}^s$  qui peuvent être décomposés avec des rangs plus faibles que le rang de la solution totale  $u$ . Les indicateurs d'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(U_{60,m}; U_{60})$  liés aux solutions globales obtenues pour  $L = 0.5, 1, 1.5$  sont rassemblées dans la figure 3.9(d). On voit que le choix de patches suffisamment grands tels que  $L \geq 1$  diminue le rang des décompositions des solutions globales. Cette

observation est en bon accord avec ce qui a été présenté précédemment : le choix d'un patch suffisamment large, autrement dit qui contient l'essentiel des zones influencées par les hétérogénéités aléatoires, améliore la convergence de l'algorithme itératif global-local et la décomposition spectrale des solutions de l'algorithme itératif. Cette propriété sera exploitée quand on introduira les approximations de tenseurs dans la section 4.1.

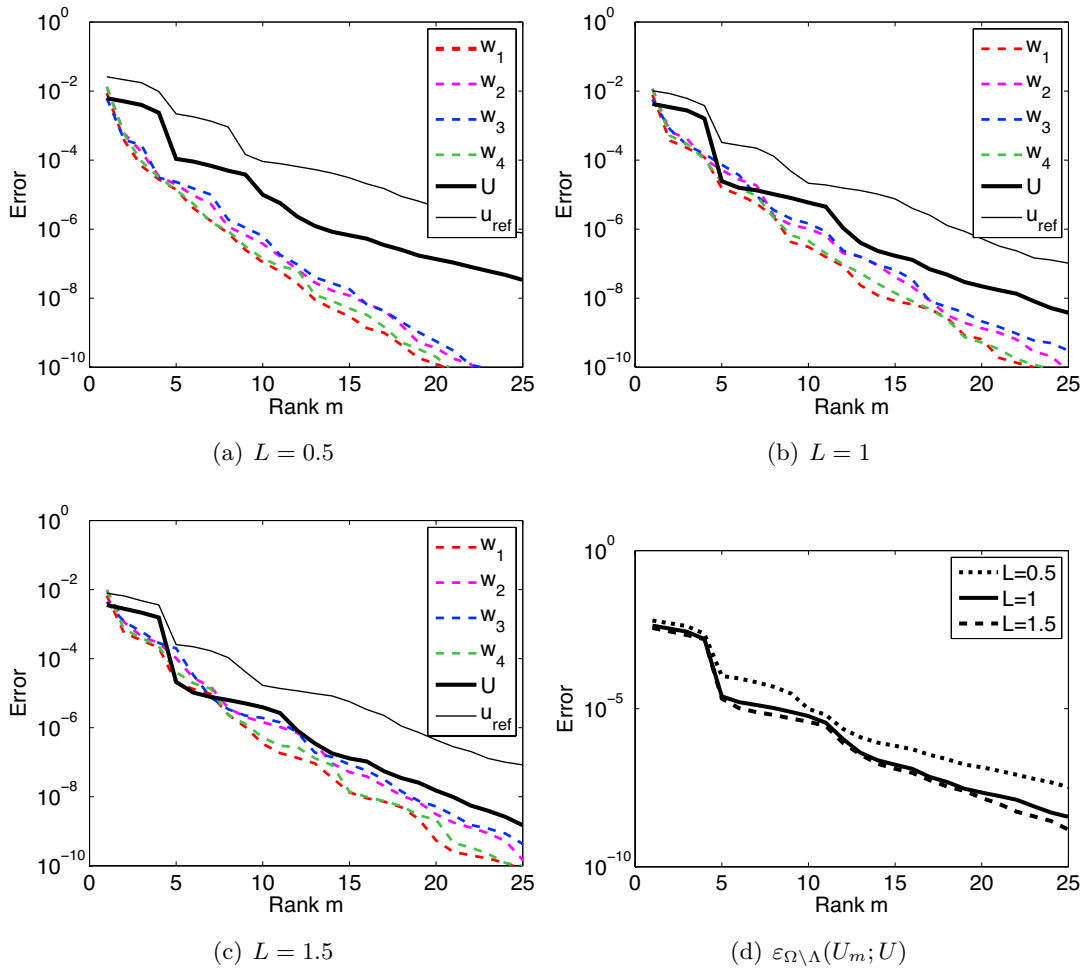


FIGURE 3.9 – Décompositions spectrales de  $u$  et des solutions  $U_{60}$  et  $w_{60}^s$  à l'itération  $n = 60$ . Évolutions de  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u)$ ,  $\varepsilon_{\Omega}(U_{60,m}; U_{60})$  et  $\varepsilon_{\Lambda_s}(w_{60,m}^s; w_{60}^s)$  pour  $s = 1, \dots, 4$  en fonction du rang  $m$  pour différentes tailles de patch : (a)  $L = 0.5$ , (b)  $L = 1$  et (c)  $L = 1.5$ . (d) Évolution de  $\varepsilon_{\Omega}(U_{60,m}; U_{60})$  en fonction du rang  $m$  pour les trois dimensions de patch.



### 3.2.2 Exemples avec frontière interne aléatoire

#### 3.2.2.1 Frontière interne avec conditions aux limites de Dirichlet

**Description de l'exemple et espaces d'approximation.** On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\nabla u) &= 1 \quad \text{sur } \Omega(\xi) \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D(\xi) = \partial\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\Omega(\xi)$  est un domaine aléatoire avec des conditions de Dirichlet homogènes sur une frontière circulaire  $\Gamma_D^{\Lambda}(\xi)$  de centre  $c = (3, 3)$  et de rayon aléatoire  $r(\xi) = 0.5 + 0.1\xi$  où  $\xi$  est une variable aléatoire uniforme sur  $\Xi = (0, 1)$ .

La solution  $u$  est calculée en utilisant la stratégie multi-échelle avec patches. On introduit le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  et le domaine fictif  $\tilde{\Omega}$  tels que

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 5) \times (0, 5) \\ \Omega(\xi) &= (\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\Lambda}) \cup \Lambda(\xi) \\ \Lambda(\xi) &= \tilde{\Lambda} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2; |x - c| \leq r(\xi)\} \\ \partial\Lambda(\xi) &= \partial\tilde{\Lambda} \cup \Gamma_D^{\Lambda}(\xi) \end{aligned}$$

où  $\tilde{\Lambda}$  est un domaine carré centré en  $c$  et de côté  $L$  (voir figure 3.10).

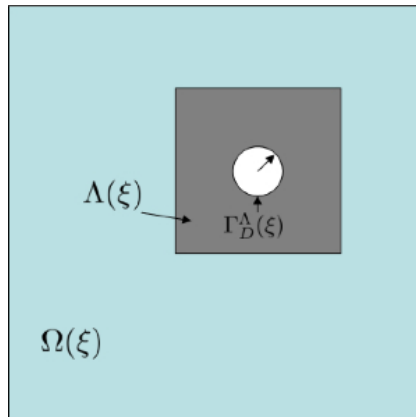


FIGURE 3.10 – Description du problème de diffusion avec frontière interne aléatoire de Dirichlet, illustration des domaines

Le problème global est défini sur un domaine  $\tilde{\Omega}$  ne contenant pas de détails géométriques. Le problème local sur  $\Lambda(\xi)$  est reformulé sur le patch

fictif  $\tilde{\Lambda}$  en utilisant une méthode des fonctions caractéristiques comme cela a été décrit dans la section 2.4.4. La fonction caractéristique est choisie comme étant une fonction level-set aléatoire dont l'iso-zero dans le patch  $\tilde{\Omega}$  définit la frontière aléatoire  $\Gamma_D^\Lambda(\xi)$  :

$$\psi(x, \xi) = r(\xi) - |x - c|$$

Des espaces d'approximation éléments finis imbriqués  $\tilde{\mathcal{U}}_H$  et  $\tilde{\mathcal{W}}_h$  sont introduits en utilisant des maillages réguliers avec des éléments de dimensions  $H = 0.25$  et  $h = 0.07$  sur  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Lambda}$  respectivement. On introduit aussi un espace d'approximation stochastique  $\mathcal{S}_P$  avec 10 éléments finis de degré 2. La dimension de  $\mathcal{S}_P$  est  $P = 30$ .

**Influence de la taille du patch.** Pour l'analyse de convergence de l'algorithme itératif, on propose d'étudier les résultats pour 4 longueurs différentes du côté du patch  $\tilde{\Lambda}$  :  $L = \{1.5, 2, 3, 3.5\}$ . La figure 3.11 montre la convergence de l'algorithme global-local pour ces 4 dimensions du patch et pour un coefficient de diffusion égal à 1,  $\tilde{K} = 1$  dans  $\tilde{\Lambda}$ , ou égal à l'espérance du rapport des mesures des patches,  $\tilde{K} = \frac{\mathbb{E}(\text{mes}(\Lambda))}{\text{mes}(\Lambda)}$  dans  $\tilde{\Lambda}$ . On observe que le choix du champ fictif  $\tilde{K} = \frac{\mathbb{E}(\text{mes}(\Lambda))}{\text{mes}(\Lambda)}$  dans  $\tilde{\Lambda}$  n'améliore que très légèrement la convergence de l'algorithme itératif global-local. Par contre, une forte amélioration du taux de convergence est obtenue lorsqu'on augmente la taille du patch.

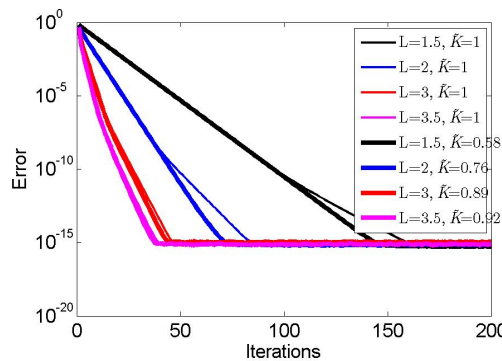


FIGURE 3.11 – Evolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U; U_n)$  avec  $\tilde{K} = 1$  et  $\tilde{K} = \frac{\mathbb{E}(\text{mes}(\Lambda))}{\text{mes}(\Lambda)}$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour différentes tailles de patch.

En effet, au vu de la figure 3.12, on voit qu'au fur et à mesure que la dimension du patch augmente, ce dernier contient une proportion de

plus en plus importante de la zone influencée par la présence du trou aléatoire jusqu'à finalement comprendre la quasi-totalité de la zone impactée. Simultanément, les taux de convergence augmentent jusqu'à atteindre le taux de convergence optimal pour une dimension du patch telle qu'il contient les effets essentiels du trou aléatoire. Le comportement de l'algorithme itératif global-local est ici semblable à celui observé avec des hétérogénéités localisées sur le champ de diffusion dans la section 3.2.1.5.

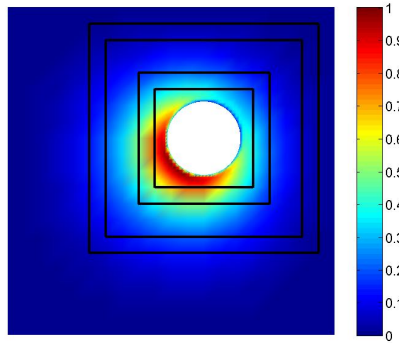


FIGURE 3.12 – Indice de sensibilité  $S(u)$ . En traits noirs, patchs avec côtés de longueur  $L = \{1.5, 2, 3, 3.5\}$ .

De même que pour l'exemple numérique précédent, on trace dans la figure 3.13 l'évolution de  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(u_m; u)$ ,  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_{200,m}; U_{200})$  et  $\varepsilon_{\tilde{\Lambda}_s}(w_{200,m}; w_{200})$  en fonction du rang  $m$  où  $u_m$ ,  $U_{200,m}$  et  $w_{200,m}$  sont les décompositions de Karhunen-Loève de rang  $m$  de  $u$ ,  $U_{200}$  et  $w_{200}$  respectivement. On observe de nouveau que  $u$  a un contenu spectral riche comparé à ceux de la solution locale  $w_{200}$  et de la solution globale  $U_{200}$ . La vitesse de convergence des décompositions est également améliorée en augmentant la dimension du patch.

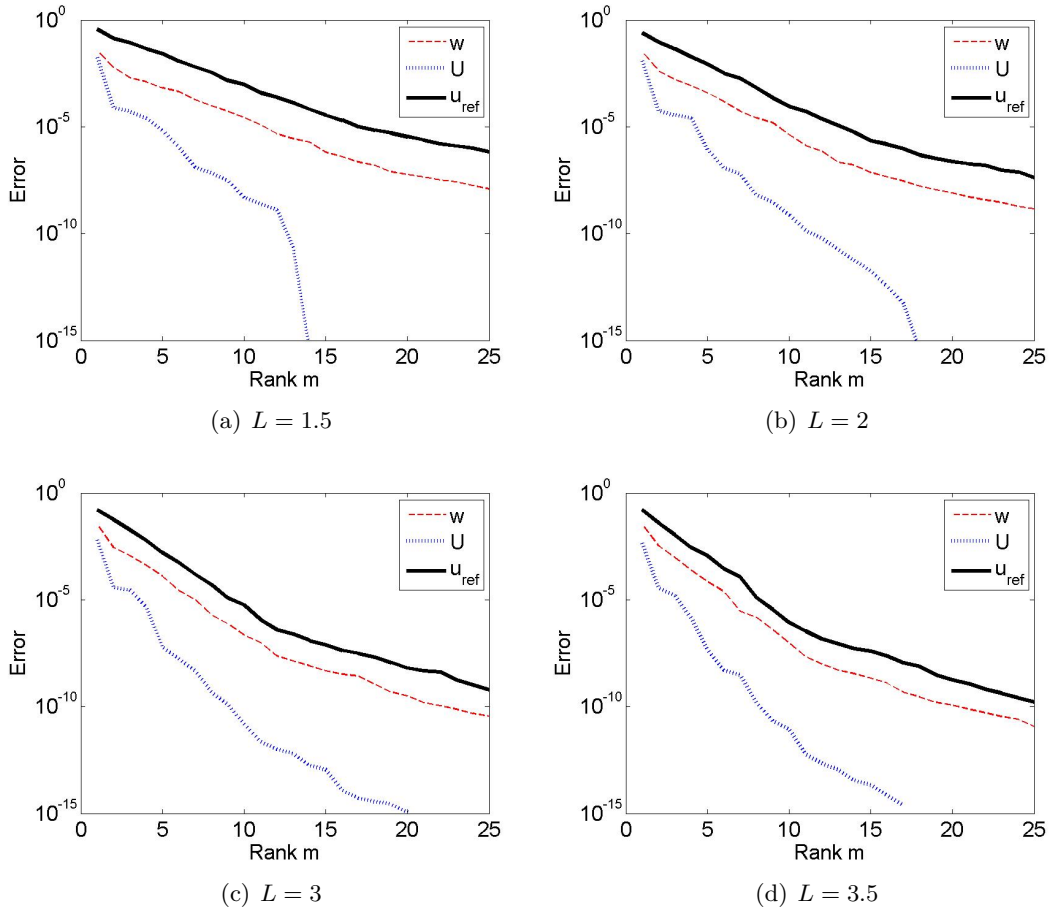


FIGURE 3.13 – Décompositions spectrales de  $u$  et des solution  $U_{200}$  et  $w_{200}^s$  dans l'itération  $n = 200$ . Évolutions de  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(u_m; u)$ ,  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_{200,m}; U_{200})$  et  $\varepsilon_{\tilde{\Lambda}_s}(w_{200,m}^s; w_{200}^s)$  en fonction du rang  $m$  pour la dimension du patch (a)  $L = 1.5$ , (b)  $L = 2$ , (c)  $L = 3$  et (d)  $L = 3.5$ .

### 3.2.2.2 Frontière interne avec conditions aux limites de Neumann

**Description de l'exemple et espaces d'approximation.** On reprend ici le même problème que dans la section 3.2.2.1 avec cette fois-ci une condition aux limites de Neumann sur la frontière interne aléatoire :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\nabla u) &= 1 \quad \text{sur } \Omega(\xi) \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N(\xi) = \partial\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

La solution  $u$  est calculée en utilisant la stratégie multi-échelle avec un patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  carré de côté  $L = 2$ . Le problème global est défini sur le domaine  $\tilde{\Omega}$  ne contenant pas de détails géométriques. Le problème local sur  $\Lambda(\xi)$  est reformulé sur le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  en utilisant une méthode avec une fonction indicatrice comme cela a été décrit dans la section 2.4.4. La fonction indicatrice est choisie comme étant une fonction d'une level-set aléatoire  $\phi(x, \xi) = |x - c| - r(\xi)$  dont l'iso-zero dans le patch  $\tilde{\Omega}$  définit la frontière aléatoire  $\Gamma_N^\Lambda(\xi) : I_\Lambda(x, \xi) = H(-\phi(x, y))$ .

Plus de détails sur les fonctions indicatrices seront donnés dans le chapitre 5. Les espaces d'approximation  $\tilde{\mathcal{U}}_H$ ,  $\tilde{\mathcal{W}}_h$  et  $S_P$  sont ceux introduits dans l'exemple de Dirichlet de la section 3.2.2.1.

**Convergence de l'algorithme global-local.** La figure 3.14 montre la convergence de l'algorithme itératif global-local pour un coefficient de diffusion  $\tilde{K} = 1$  dans  $\tilde{\Lambda}$  et un paramètre de relaxation  $\rho = \rho^* = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$ . On observe à nouveau une bonne convergence de l'algorithme. La figure 3.15

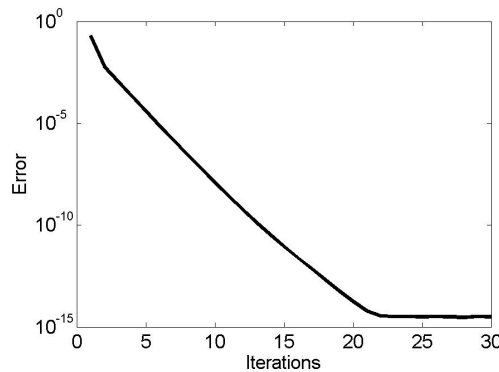


FIGURE 3.14 – Evolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U; U_n)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$ .

illustre la solution de référence  $u$  et l'itéré  $u_{30}$  de l'algorithme. La conver-

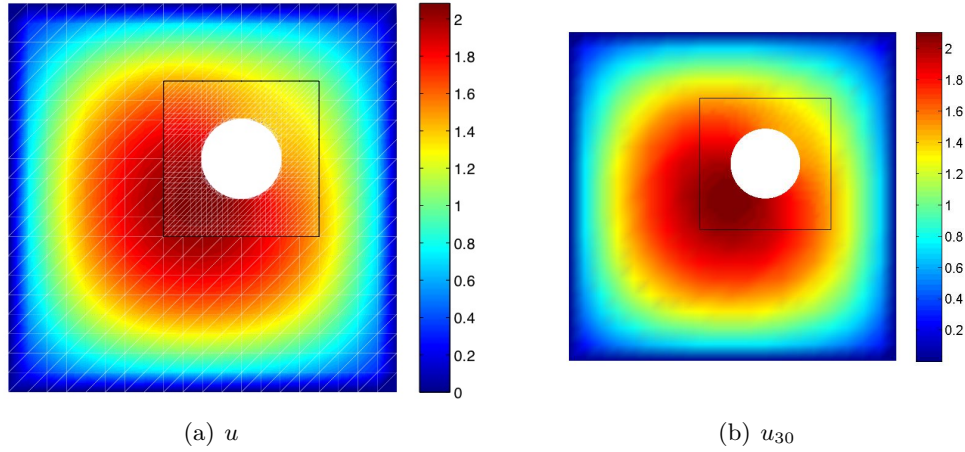


FIGURE 3.15 – Solution de référence  $u$  et  $u_{30}$  de l'algorithme global-local.

gence sur l'exemple de Neumann s'avère plus rapide que sur l'exemple de Dirichlet (précision  $10^{-15}$  atteinte en 22 itérations pour Neumann et 75 itérations pour Dirichlet avec  $L = 2$  et un paramétrage identique de l'algorithme). Ce résultat est à mettre en parallèle des cartes d'indices de sensibilité des figures 3.12 et 3.16 qui montrent une plus grande zone impactée pour le cas d'une frontière interne de Dirichlet que pour le cas d'une frontière interne de Neumann.

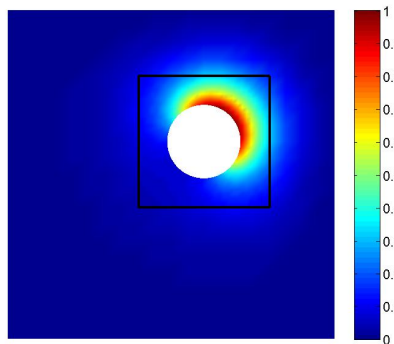


FIGURE 3.16 – Indice de sensibilité  $S(u)$ .

### 3.3 Robustesse de l'algorithme en fonction des approximations

#### 3.3.1 Perturbations de l'algorithme

On suppose que des approximations sont introduites dans les différentes étapes de la résolution. Elles définissent une suite approchée  $U_n^\epsilon \in \widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi$  telle que

$$U_n^\epsilon - U = B_\rho^\epsilon(U_{n-1}^\epsilon - U), \quad (3.15)$$

où  $B_\rho^\epsilon$  est une approximation raisonnable de l'opérateur d'itération  $B_\rho$ . On suppose que

$$B_\rho^\epsilon(U_{n-1}^\epsilon - U) = B_\rho(U_{n-1}^\epsilon - U) + \delta U_n^\epsilon,$$

où la perturbation  $\delta U_n^\epsilon$  vérifie

$$\|\delta U_n^\epsilon\| \leq \epsilon \|U\| + \epsilon^* \|U_{n-1}^\epsilon - U\|$$

$\epsilon$  est associé à une tolérance relative à la norme de la solution, et  $\epsilon^*$  est associé à une tolérance relative à l'erreur courante.  $\epsilon^*$  apparaît typiquement quand on formule les problèmes global et local sur les incréments  $(U_n^\epsilon - U_{n-1}^\epsilon)$  et  $(\lambda_n^\epsilon - \lambda_{n-1}^\epsilon)$  et quand on utilise des solveurs avec une tolérance prescrite de l'ordre de  $\epsilon^*$ .  $\epsilon$  apparaît typiquement quand les problèmes global et local ne sont pas formulés sur des incréments et quand on utilise des solveurs avec une tolérance prescrite de l'ordre de  $\epsilon$ . Cette erreur  $\epsilon$  peut apparaître aussi quand on introduit quelques approximations additionnelles des itérés, typiquement quand on introduit des décompositions spectrales afin de “compresser” les représentations des itérés (voir section 4.1). On fournit à présent un résultat donnant le comportement de l'algorithme en fonction de ces deux types d'erreurs.

**Theorème 3.2** *On suppose que*

$$\begin{aligned} \|B_\rho^\epsilon(V) - B_\rho(V)\| &\leq \epsilon \|U\| + \epsilon^* \|V\| \\ \text{pour tout } V \in \widetilde{\mathcal{U}}_*^\Xi \text{ tel que } \|V\| &\leq \eta \|U\|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec  $\eta > 1$ ,  $\epsilon^* < 1 - \rho_B$  et  $\epsilon \leq \eta(1 - \rho_B - \epsilon^*)$ . On suppose que  $\|U_0^\epsilon - U\| \leq \eta \|U\|$ . La suite  $U_n^\epsilon$  est telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|U_n^\epsilon - U\| \leq \gamma(\epsilon) \|U\|,$$

avec  $\gamma(\epsilon) \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Cela signifie que la suite  $U_n^\epsilon$  tend vers un  $\gamma(\epsilon)$ -voisinage de la solution  $U$ .

**Preuve.** On note  $E_n^\epsilon = U_n^\epsilon - U$ . On a  $\|E_0^\epsilon\| \leq \eta\|U\|$ . On suppose que  $\|E_m^\epsilon\| \leq \eta\|U\|$  pour tout  $m < n$ . Donc,

$$\begin{aligned}\|E_n^\epsilon\| &= \|B_\rho^\epsilon(E_{n-1}^\epsilon)\| \\ &\leq \|B_\rho^\epsilon(E_{n-1}^\epsilon) - B_\rho(E_{n-1}^\epsilon)\| + \|B_\rho(E_{n-1}^\epsilon)\| \\ &\leq \epsilon\|U\| + (\rho_B + \epsilon^*)\|E_{n-1}^\epsilon\|\end{aligned}$$

Comme  $\epsilon \leq \eta(1 - \rho_B - \epsilon^*)$ , on obtient  $\|E_n^\epsilon\| \leq \eta\|U\|$  pour tout  $n$ . Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\|E_n^\epsilon\| &\leq \frac{\epsilon(1 - (\rho_B + \epsilon^*)^n)}{1 - (\rho_B + \epsilon^*)}\|U\| + (\rho_B + \epsilon^*)^n\|E_0^\epsilon\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 - \rho_B - \epsilon^*}\|U\| + (\rho_B + \epsilon^*)^n\|E_0^\epsilon\|,\end{aligned}$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|E_n^\epsilon\| \leq \frac{\epsilon}{1 - \rho_B - \epsilon^*}\|U\| := \gamma(\epsilon)\|U\|,$$

avec  $\gamma(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 - \rho_B - \epsilon^*} \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . ■

**Remarque 3.3** *On note que lorsque  $\epsilon$  est de l'ordre de la précision machine, alors la suite  $U_n^\epsilon$  converge vers la solution  $U$  jusqu'à la précision machine à un facteur près pour n'importe quelle valeur de  $\epsilon^*$ . C'est le cas quand on résout les problèmes global et local formulés sur des incréments avec une tolérance  $\epsilon^*$ , et quand les erreurs additionnelles sont de l'ordre de la précision machine. La suite  $U_n^\epsilon$  converge aussi vers la solution  $U$  jusqu'à la précision machine lorsqu'on résout les problèmes locaux formulés sur les incréments avec une tolérance  $\epsilon^*$ , et que les problèmes globaux sont résolus à la précision machine, ce qui est faisable si le problème global a un opérateur déterministe.*

### 3.3.2 Illustration de la robustesse de l'algorithme

La robustesse de l'algorithme itératif global-local en fonction des approximations est illustrée sur l'exemple de diffusion à quatre patches de la section 3.2.1.1.



Les problèmes globaux, pour lesquels les opérateurs déterministes sont déterministes, sont résolus avec une précision machine alors que les problèmes locaux sont résolus en utilisant un algorithme CGS (Conjugate Gradient Squared) avec une tolérance donnée. La figure 3.17(a) montre la convergence de la suite  $U_n$  calculée avec l'algorithme itératif global-local pour différentes tolérances du solveur CGS, vers la solution de référence  $U$  calculée à la précision machine. L'algorithme itératif converge jusqu'à ce que l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  se stabilise autour de la tolérance imposée par le solveur, montrant ainsi la robustesse de l'algorithme itératif global-local en fonction des approximations.

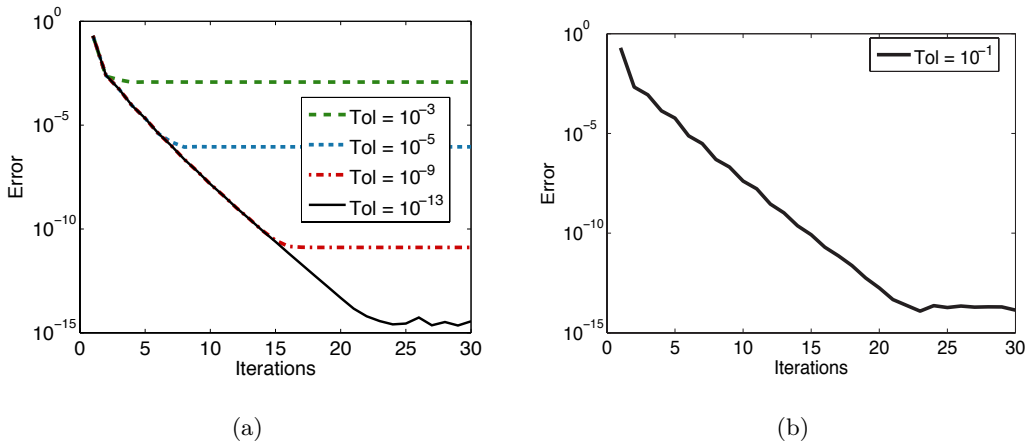


FIGURE 3.17 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  avec  $\alpha = 10$ ,  $\tilde{K} = 1$ ,  $\rho = 1$ . (a) Problèmes locaux résolus avec un solveur CGS avec différentes tolérances et (b) Problèmes locaux formulés sur les incréments et résolus avec un solveur CGS avec une tolérance 0.1.

Le problème local est maintenant formulé sur l'incrément  $\delta z_n = z_n - z_{n-1}$  et est résolu avec un solveur CGS avec une tolérance 0.1. Dans la figure 3.17(b), on voit que la solution  $u$  converge vers la solution de référence jusqu'à que la précision machine soit atteinte comme cela était attendu selon la section 3.3.

## 3.4 Approximation des solutions locales dans des sous-espaces

Jusqu'à présent nous avons considéré la dépendance des solutions globales et locales en toutes les variables aléatoires du problème. Dans les exemples vus jusqu'ici, l'impact d'une source d'incertitudes localisée dans un patch se localise au voisinage de la source d'incertitude, c'est-à-dire dans le patch ou autour. Dans cette section, nous allons donc considérer que les solutions locales dépendent uniquement des variables aléatoires locales, en d'autres termes que la solution locale  $w_n^s$  dans le patch  $\Lambda_s$  ne dépend que de l'ensemble des variables aléatoires  $\xi_s$  associées aux incertitudes localisées dans le patch  $\Lambda_s$ . Cette approximation permet de réduire le coût de la résolution des problèmes stochastiques locaux.

### 3.4.1 Exemple avec champ de diffusion localement hétérogène aléatoire

On considère de nouveau l'exemple de diffusion à quatre patches de la section 3.2.1.1. On introduit des espaces d'approximation stochastiques  $\mathcal{S}_{s,P_s}$  pour chacune des dimensions stochastiques  $s = \{1, \dots, 4\}$  avec des polynômes de Legendre de degré  $p = 3$ , ce qui donne une dimension  $P_s = 4$ . On introduit également l'espace d'approximation stochastique  $\mathcal{S}_P$  résultant de la tensorisation creuse des sous-espaces  $\mathcal{S}_{s,P_s}$  telle que  $P=35$ . Le paramétrage de l'algorithme itératif global-local est choisi tel que  $\alpha = 10$ ,  $\tilde{K} = 1$  et  $\rho = 1$ . À chaque itération de l'algorithme, la solution globale  $U_n$  est cherchée dans  $\tilde{\mathcal{U}}_H \otimes \mathcal{S}_P$  et les solutions locales  $w_n^s$  sont cherchées soit dans  $\mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_P$  soit dans le sous-espace  $\mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_{s,P_s} \subset \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_P$ <sup>2</sup>. Dans le second cas, on suppose que la solution locale  $w_n^s$  ne dépend que des variables aléatoires  $\xi_s$  associées au patch  $\Lambda_s$ . La figure 3.18 montre la convergence de  $U_n$  vers la solution de référence  $U$  avec  $w_n^s \in \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_P$  (traits mixtes noirs) ou  $w_n^s \in \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_{s,P_s}$  (trait continu bleu). Au départ, l'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  décroît avec le même taux de convergence, puis elle stagne à  $10^{-3}$  dans le cas où la solution locale  $w_n^s$  est cherchée dans le sous-espace d'approximation  $\mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_{s,P_s}$ , qui correspond à l'erreur due à

---

2. On introduit ici un abus de notation en considérant  $\mathcal{S}_s$  (ensemble de fonctions de  $\xi_s$ ) comme un sous-espace de  $\mathcal{S}$  (ensemble de fonctions de  $\xi$ ).

l'approximation introduite dans les problèmes locaux. Finalement pour une tolérance cible supérieure à  $10^{-3}$ , le problème peut être résolu avec des problèmes locaux moins coûteux tout en gardant le même taux de convergence de l'algorithme itératif global-local.

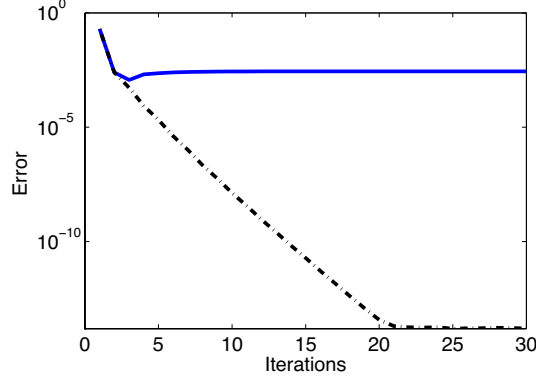


FIGURE 3.18 – Evolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  pour  $\alpha = 10$ ,  $\tilde{K} = 1$  et  $\rho = 1$ . (Traits mixtes noirs)  $w_n^s \in \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_P$ , (trait continu bleu)  $w_n^s \in \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_{s, P_s} \subset \mathcal{W}_h^s \otimes \mathcal{S}_P$ .

### 3.4.2 Exemple avec deux frontières internes avec conditions aux limites de Dirichlet

#### 3.4.2.1 Description de l'exemple et espaces d'approximation

On considère maintenant un problème ayant deux frontières aléatoires internes de Dirichlet. Ce problème nous permet d'étudier l'influence de la distance entre les détails géométriques, et donc de la distance entre les zones impactées par les sources d'incertitudes localisées, sur la convergence de l'algorithme itératif global-local lorsque les solutions locales sont approximées par des fonctions ne dépendant que des variables aléatoires  $\xi_s$  localisées dans le même patch. Le problème est le suivant :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\nabla u) &= 1 \quad \text{sur } \Omega(\xi) \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D(\xi) = \partial\Omega(\xi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où  $\Omega(\xi)$  est un domaine aléatoire avec des conditions de Dirichlet homogènes sur deux frontières circulaires  $\Gamma_D^{\Lambda_1}(\xi)$  et  $\Gamma_D^{\Lambda_2}(\xi)$ . On considère trois positions distinctes des centres des deux cercles :  $c_1^1 = (1, 9)$  et  $c_2^1 = (9, 1)$  dans les patches  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  respectivement, puis  $c_1^2 = (3, 7)$  et  $c_2^2 = (7, 3)$

et enfin  $c_1^3 = (4, 6)$  et  $c_2^3 = (6, 4)$  (voir figure 3.19). Les cercles dans les patches  $\Lambda_s$  ont des rayons aléatoires  $r_s(\xi) = 0.2 + 0.1\xi_s$  où  $\xi_s$  avec  $\xi_s$  pour  $s \in \{1, 2\}$  des variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $\Xi_1 = (0, 1)$  et  $\Xi_2 = (0, 1)$  respectivement.

On utilise l'algorithme global-local avec une approximation des solutions locales : pour chaque patch, on approche la solution locale par une fonction des variables aléatoires associées au patch. On introduit le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  et le domaine fictif  $\tilde{\Omega}$  tels que

$$\begin{aligned}\Omega &= (0, 10) \times (0, 10) \\ \Omega(\xi) &= (\tilde{\Omega} \setminus \cup_{s \in \{1, 2\}} \tilde{\Lambda}_s) \cup_{s \in \{1, 2\}} \Lambda_s(\xi_s) \\ \Lambda_s(\xi) &= \tilde{\Lambda}_s \setminus (\{x \in \mathbb{R}^2; |x - c_s^t| \leq r(\xi)\}) \\ \partial\Lambda_s(\xi) &= \partial\tilde{\Lambda}_s \cup \Gamma_D^{\Lambda_s}(\xi)\end{aligned}$$

où  $\tilde{\Lambda}_s$  est un domaine carré centré en  $c_s^t$ , avec  $t \in \{1, 2, 3\}$ , et de côté  $L = 2$ . L'indice  $t$  fait référence aux différents cas de la position des centres des patches  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ .

Le problème global est défini sur le domaine  $\tilde{\Omega}$  qui ne contient pas de détails géométriques. Le problème local sur  $\Lambda_s(\xi)$  est reformulé sur le patch fictif  $\tilde{\Lambda}$  en utilisant une méthode des fonctions caractéristiques selon la méthode décrite dans la section 2.4.4. Les fonctions caractéristiques  $\psi^s(x, \xi_s)$  sont choisies comme les opposées des fonctions level-set dont les iso-zéro dans les patches  $\tilde{\Lambda}_s$  définissent les frontières aléatoires dans  $\tilde{\Lambda}_s$ .

Des espaces d'approximation éléments finis non imbriqués  $\tilde{\mathcal{U}}_H$  et  $\tilde{\mathcal{W}}_h$  sont introduits en utilisant des maillages réguliers avec des éléments de dimensions  $H = 0.5$  et  $h = 0.07$  sur  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Lambda}$  respectivement. Les dimensions de chacun des espaces est  $\dim \tilde{\mathcal{U}}_h = 441$  et  $\dim \mathcal{W}_h^s = 900$ ,  $s \in \{1, 2\}$  (voir la figure 3.19). On introduit pour chaque dimension stochastique  $s \in \{1, 2\}$  un espace d'approximation stochastique  $\mathcal{S}_{s, P_s}$  avec des polynômes par morceaux de degré  $p = 3$  et une partition uniforme de  $\Xi_s$  en 3 éléments conduisant à une dimension de l'espace d'approximation  $P_s = 9$  pour  $s \in \{1, 2\}$ . On introduit également l'espace d'approximation  $\mathcal{S}_P$  résultant de la tensorisation creuse des espaces  $\mathcal{S}_{s, P_s}$ , telle que  $P = 45$ .

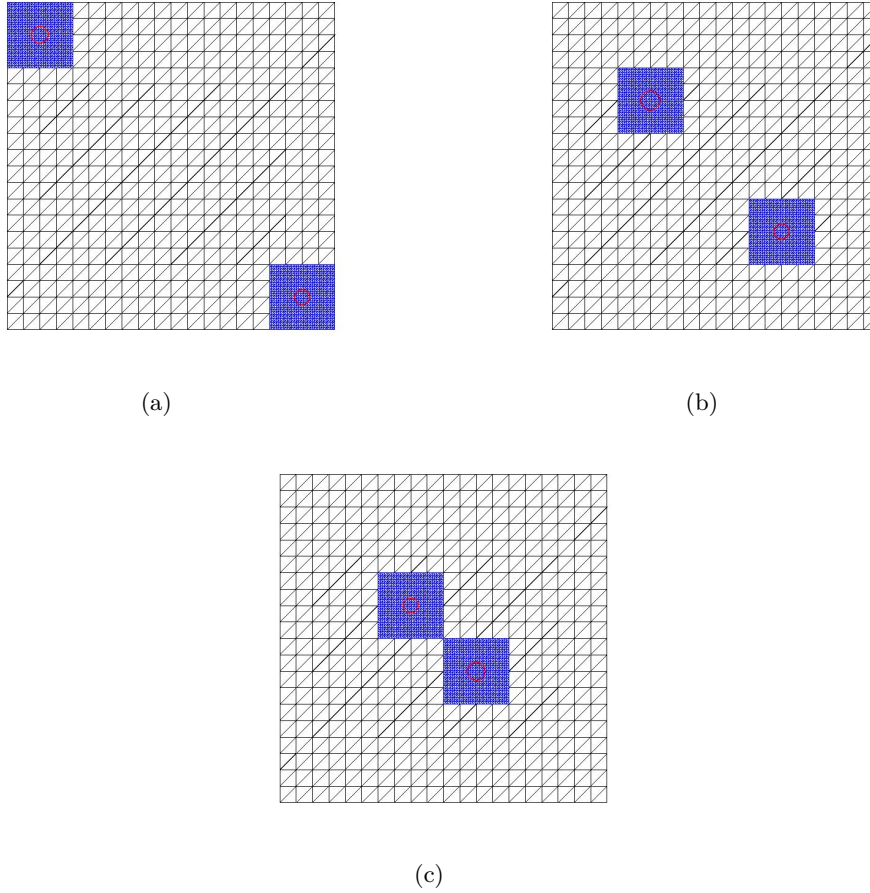


FIGURE 3.19 – Exemple de diffusion avec deux frontières internes de Dirichlet. Illustration des domaines et des maillages éléments finis. (a)  $c_1^1 = (1, 9)$  et  $c_2^1 = (9, 1)$ , (b)  $c_1^2 = (3, 7)$  et  $c_2^2 = (7, 3)$ , (c)  $c_1^3 = (4, 6)$  et  $c_2^3 = (6, 4)$ .

### 3.4.2.2 Analyse de convergence

L'algorithme itératif global-local est utilisé pour la résolution du problème avec  $\tilde{K} = 1$  et un paramètre de relaxation  $\rho = \rho^* = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$ . Ce dernier vaut  $\{0.8, 0.45, 0.3\}$  pour les positions respectives  $t = \{1, 2, 3\}$  des centres des patches. Les itérés globaux  $U_n$  est cherchée dans l'espace d'approximation  $\tilde{\mathcal{U}}_H \otimes \mathcal{S}_P$  et les itérés locaux  $w_n^s$  sont cherchées dans les sous-espaces d'approximation respectifs  $\tilde{\mathcal{W}}_h \otimes \mathcal{S}_{s, P_s} \subset \tilde{\mathcal{W}}_h \otimes \mathcal{S}_P$ , c'est-à-dire qu'on ne considère pour la solution locale  $w_n^s$  qu'une dépendance en les variables aléatoires  $\xi_s$  du patch correspondant  $\Lambda_s(\xi_s)$ .

La figure 3.20 montre la convergence de  $U_n$  vers la solution de référence  $U$ . L'erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  décroît jusqu'à un palier qui correspond à l'erreur

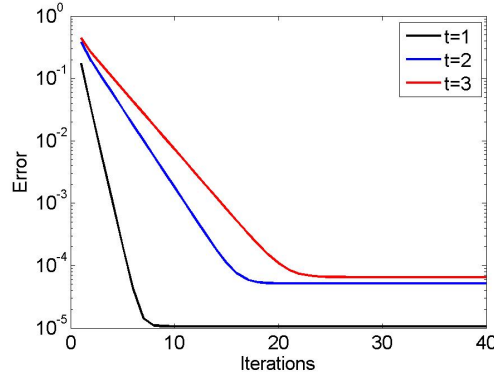


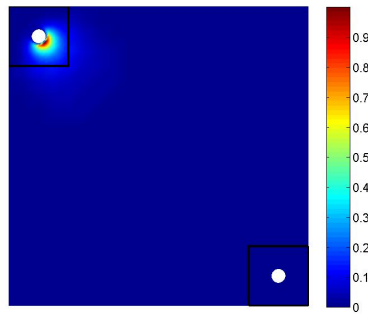
FIGURE 3.20 – Evolution de l’indicateur d’erreur  $\varepsilon_{\Omega \setminus \Lambda}(U_n; U)$  en fonction du nombre d’itérations  $n$  pour les 3 positions possibles des patchs. Les solutions locales localisées dans le patch  $\Lambda_s$  dépendent seulement des variables aléatoires associées à ce patch.

d’approximation. Cette erreur d’approximation augmente à mesure que les patchs se rapprochent, ce qui traduit une sensibilité croissante de la solution locale du patch 1 (respectivement 2) à la variable  $\xi_2$  (respectivement 1). En effet, la figure 3.21 montre que la zone influencée par une variable d’entrée  $\xi_s$  s’étale au-delà des limites du patchs  $\Lambda_s$ . De plus cette zone s’agrandit lorsque les patchs se rapprochent ce qui engendre parallèlement une dégradation du taux de convergence de l’algorithme.

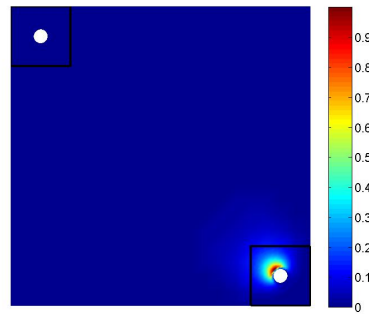
### 3.5 Conclusion

Ce chapitre a visé à démontrer la convergence de l’algorithme itératif global-local proposé dans le chapitre 2 et à l’illustrer au travers de divers exemples numériques. Au terme des différentes études sur les paramètres de l’algorithme, on a montré qu’une configuration simple et efficace de l’algorithme est possible. Celle-ci consiste à choisir pour le problème global un problème simple sans hétérogénéité et avec un opérateur déterministe, et à utiliser le paramètre de relaxation optimal de l’algorithme. Une approximation du paramètre optimal est proposée et conserve les bonnes propriétés de convergence de l’algorithme.

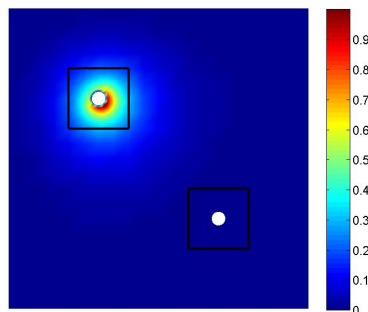
La taille des patchs a également une grande influence sur le comportement de l’algorithme. Pour une bonne convergence, les patchs doivent être choisis suffisamment grands pour contenir la zone impactée par les sources d’incertitudes localisées mais trop grande afin de limiter le coût de



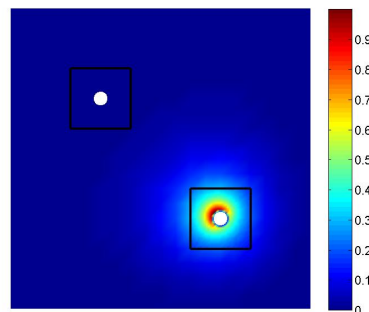
(a)  $\tilde{S}_1(u), t = 1$



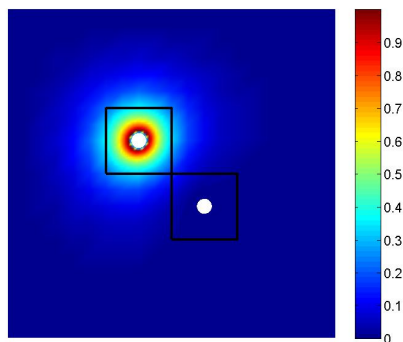
(b)  $\tilde{S}_2(u), t = 1$



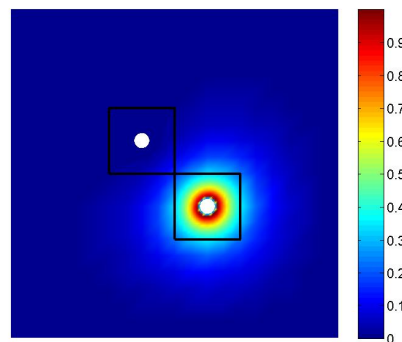
(c)  $\tilde{S}_1(u), t = 2$



(d)  $\tilde{S}_2(u), t = 2$



(e)  $\tilde{S}_1(u), t = 3$



(f)  $\tilde{S}_2(u), t = 3$

FIGURE 3.21 – Indices de sensibilité  $\tilde{S}_s(u)$  pour  $s = 1, 2$ . En traits blancs : la frontière  $\Gamma$  pour 3 positions différentes de patches, correspondant à  $t \in \{1, 2, 3\}$ .

calcul des problèmes locaux. L'introduction d'indices de sensibilité permet cette mesure de la sensibilité de la solution aux variables aléatoires d'entrée et la visualisation de la zone impactée. Sur les exemples étudiés

dans ce chapitre, les incertitudes introduites dans le modèle ont un impact relativement localisé sur la solution. Ainsi la séparation des échelles permet d'exploiter pleinement le caractère localisé des incertitudes en autorisant d'une part l'introduction d'espaces d'approximation très fins au niveau spatial pour les problèmes locaux et d'autre part l'introduction de sous-espaces d'approximation au niveau stochastique toujours pour les problèmes locaux. L'approximation des solutions locales sur des sous-espaces consiste à considérer qu'une solution locale définie sur un patch ne dépend que des variables aléatoires associées à ce patch. Cela permet d'alléger le coût de la résolution des problèmes locaux.

Enfin, la séparation des échelles profite également à la décomposition spectrale des solutions globale et locales (comme cela a été illustré au travers des exemples numériques) et facilite ainsi l'utilisation de méthodes basées sur l'approximation de tenseurs pour la résolution des problèmes global et locaux, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 4

# Approximation séparée pour la méthode multiéchelle

### Sommaire

---

<b>4.1 Solutions des problèmes globaux et locaux avec méthodes d’approximation de tenseurs</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1.1 Structure produit tensoriel des espaces des fonctions stochastiques . . . . .	80
4.1.2 Espaces produits tensoriels et approximation de tenseurs . . . . .	81
4.1.3 Un algorithme glouton pour la décomposition de tenseurs (Proper Generalized Decomposition) . . . . .	82
4.1.4 Stratégies pour la résolution des étapes globales et locales . . . . .	84
<b>4.2 Illustration sur un problème à grande dimension stochastique</b> . . . . .	<b>84</b>
4.2.1 Description du problème . . . . .	84
4.2.2 Approximation tensorielle des solutions locales . . . . .	87
4.2.3 Illustrations des quantités d’intérêt probabilistes . . . . .	91
<b>4.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>91</b>

---

Après avoir analysé la convergence de l’algorithme itératif global-local dans le chapitre 3, on s’intéresse maintenant aux problèmes à grande dimension stochastique et qui nécessitent la résolution de problèmes globaux et locaux dépendant de nombreux paramètres. Pour cela les problèmes globaux et locaux sont résolus à l’aide de méthodes d’approximation de tenseurs (utilisation de représentations séparées). Les propriétés de convergence de ces méthodes basées sur l’approximation de tenseurs, qui sont très liées aux décompositions spectrales des solutions, bénéficient ici de la séparation des échelles. Différents formats d’approximation de tenseurs peuvent être introduits (voir [Kolda et Bader, 2009; Hackbusch, 2012]). On s’intéresse ici aux décompositions classiques canoniques et aux décompositions hiérarchiques canoniques comme dans [Nouy, 2010b; Chevreuil et Nouy, 2012]. On note que l’avantage des décompositions hiérarchiques

canoniques est qu'elles fournissent des représentations des solutions de rangs très faibles. Dans ce chapitre, on précise tout d'abord la structure produit tensoriel des espaces des fonctions stochastiques et on présente des méthodes d'approximation de tenseurs. La méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) pour la construction *a priori* des approximations de tenseurs est ensuite présentée dans sa version d'algorithme glouton. Des stratégies pour la résolution des étapes globales et locales de l'algorithme multi-échelle sont introduites. Enfin, ces méthodes sont appliquées à un problème en grande dimension avec variabilités géométriques. Cette dernière illustration montre la pertinence de l'utilisation des méthodes d'approximation de tenseurs et en particulier des décompositions hiérarchiques.

## 4.1 Solutions des problèmes globaux et locaux avec méthodes d'approximation de tenseurs

### 4.1.1 Structure produit tensoriel des espaces des fonctions stochastiques

Si  $\mathcal{H}$  est un espace déterministe, alors

$$\mathcal{H}^\Xi = \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}$$

avec  $\mathcal{S} = L^2_{P_\xi}(\Xi)$ . Un élément dans  $\mathcal{H}^\Xi$  peut alors être interprété comme un tenseur d'ordre 2. Lorsque que l'ensemble des variables aléatoires  $\xi$  est une collection de  $N_\Lambda$  ensembles indépendants  $\xi_s$  de variables aléatoires, alors la mesure de probabilité  $P_\xi = P_{\xi_1} \otimes \dots \otimes P_{\xi_{N_\Lambda}}$ , et l'espace  $\mathcal{S}$  a la structure produit tensoriel suivante :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda}$$

avec  $\mathcal{S}_s = L^2_{P_{\xi_s}}(\Xi_s)$ . C'est cette structure de produit tensoriel des espaces des fonctions stochastiques qui est exploitée ici.

### 4.1.2 Espaces produits tensoriels et approximation de tenseurs

Pour un espace produit tensoriel  $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_d$  (voir définition dans [Hackbusch, 2012]), on note  $\mathcal{R}_1(V)$  l'ensemble des éléments de rang 1 :

$$\mathcal{R}_1(V) = \left\{ \bigotimes_{k=1}^d v^k \in V ; v^k \in V_k, 1 \leq k \leq d \right\}$$

et  $\mathcal{R}_m(V)$  l'ensemble des éléments de rang  $m$  :

$$\mathcal{R}_m(V) = \left\{ \sum_{i=1}^m v_i ; v_i \in \mathcal{R}_1(V), 1 \leq i \leq m \right\}$$

Pour le cas de l'espace de fonctions  $\mathcal{H}^\Xi$ , avec  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, différents types d'approximations d'un élément  $u \in \mathcal{H}^\Xi$  peuvent être obtenus, en utilisant différentes structures de cet espace produit tensoriel.

**Décomposition canonique d'ordre 2** Considérant  $\mathcal{H}^\Xi = \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}$ , on peut introduire la décomposition  $u_m \in \mathcal{R}_m(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S})$  de rang  $m$  qui s'écrit :

$$u_m = \sum_{i=1}^m Z_i \otimes \phi_i \quad \text{avec } Z_i \in \mathcal{H} \text{ et } \phi_i \in \mathcal{S}. \quad (4.1)$$

Cette décomposition ne contourne pas la malédiction de la dimensionnalité associée à l'approximation des fonctions dans  $\mathcal{S}$ .

**Décomposition canonique d'ordre  $(N_\Lambda + 1)$**  Considérant  $\mathcal{H}^\Xi = \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda}$ , on peut introduire la décomposition canonique de rang  $m$ ,  $u_m \in \mathcal{R}_m(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$ , qui s'écrit :

$$u_m = \sum_{i=1}^m Z_i \otimes \phi_i^1 \otimes \dots \otimes \phi_i^{N_\Lambda} \quad \text{avec } Z_i \in \mathcal{H} \text{ et } \phi_i^s \in \mathcal{S}_s \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1** *On note qu'une représentation canonique de rang  $m$  peut être vue comme une approximation d'un élément  $u \in \mathcal{H}^\Xi$  sur une base de dimension  $m$  composée des fonctions stochastiques  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  qui sont telles que  $\phi_i(\xi) = \phi_i^1(\xi_1) \dots \phi_i^{N_\Lambda}(\xi_{N_\Lambda})$ .*

**Décomposition canonique hiérarchique** Une représentation canonique hiérarchique de  $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{S}$  peut également être introduite comme suit :

$$u_m = \sum_{i=1}^m Z_i \otimes \phi_i, \quad \text{avec } Z_i \in \mathcal{H} \text{ et } \phi_i \in \mathcal{R}_{r_i}(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda}) \quad (4.3)$$

Cette représentation canonique hiérarchique peut être vue comme une approximation de la représentation canonique séparée d'ordre 2 (4.1). Avec des approximations  $\phi_i$  de rang  $r_i$  suffisamment précises, la meilleure approximation de rang  $m$  (4.3) est proche de la meilleure approximation de rang  $m$  (4.1) et est très souvent bien meilleure que la décomposition (4.2). Cela sera illustré dans un exemple numérique. Dans la suite, on introduit les notations suivantes pour les représentations hiérarchiques :

$${}_H\mathcal{R}_1^r(\mathcal{H}^\Xi) = \{Z \otimes \phi; Z \in \mathcal{H}, \phi \in \mathcal{R}_r(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})\} \subset \mathcal{R}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S})$$

et

$${}_H\mathcal{R}_m^r(\mathcal{H}^\Xi) = {}_H\mathcal{R}_1^{r_1}(\mathcal{H}^\Xi) + \dots + {}_H\mathcal{R}_1^{r_m}(\mathcal{H}^\Xi) \subset \mathcal{R}_m(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S})$$

### 4.1.3 Un algorithme glouton pour la décomposition de tenseurs (Proper Generalized Decomposition)

On présente maintenant une méthodologie pour la construction progressive d'une approximation de tenseur de la solution d'un problème variationnel (problème global ou problèmes locaux de l'algorithme global-local), sous la forme (4.1), (4.2) ou (4.3). On considère alors un problème qui admet la forme variationnelle générique suivante :

$$u \in \mathcal{H}^\Xi, \quad A(u, \delta u) = L(\delta u) \quad \forall \delta u \in \mathcal{H}^\Xi$$

avec  $A$  est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive et  $L$  une forme linéaire continue. Le problème est alors équivalent à :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{H}^\Xi} \mathcal{J}(v), \quad \text{avec } \mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - L(v).$$

On présente maintenant une construction progressive des décompositions de type (4.1), (4.2) ou (4.3). On suppose que  $u_{m-1}$  est connue et on note  $\mathcal{X}$  le sous ensemble d'approximation  $\mathcal{R}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S})$ ,  $\mathcal{R}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$

ou  ${}_H\mathcal{R}_1^{r_m}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$  (respectivement pour les décompositions de type (4.1), (4.2) ou (4.3)). On définit alors un nouvel élément  $v_m \in \mathcal{X}$  tel que

$$\mathcal{J}(u_{m-1} + v_m) \approx \min_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{J}(u_{m-1} + z)$$

où le symbole  $\approx$  signifie qu'on calcule une approximation d'un élément optimal dans  $\mathcal{X}$ , et on définit  $u_m = u_{m-1} + v_m$ .

**Algorithmes de minimisation** En pratique, on calcule une approximation de  $v_m$  en utilisant des algorithmes de minimisation alternée. Pour  $\mathcal{X} = \mathcal{R}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S})$  (resp.  $\mathcal{X} = \mathcal{R}_1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$ ), on obtient un élément  $v_m = Z_m \otimes \phi_m$  (resp.  $v_m = Z_m \otimes \phi_m^1 \otimes \dots \otimes \phi_m^{N_\Lambda}$ ) en minimisant alternativement sur  $Z_m \in \mathcal{H}$  et  $\phi_m \in \mathcal{S}$  (resp.  $Z_m \in \mathcal{H}$ ,  $\phi_m^1 \in \mathcal{S}_1$ , ...,  $\phi_m^{N_\Lambda} \in \mathcal{S}_{N_\Lambda}$ ). Pour  $\mathcal{X} = {}_H\mathcal{R}_1^{r_m}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$ , on obtient une approximation  $v_m = Z_m \otimes \phi_m$  par un algorithme de minimisation alternée qui consiste à résoudre alternativement :

- un problème de minimisation sur  $\mathcal{H}$  :

$$Z_m = \arg \min_{Z \in \mathcal{H}} \mathcal{J}(u_{m-1} + Z \otimes \phi_m)$$

- un problème de minimisation sur  $\mathcal{S}$  :

$$\phi_m \approx \arg \min_{\phi \in \mathcal{S}} \mathcal{J}(u_{m-1} + Z_m \otimes \phi)$$

où le symbole  $\approx$  signifie que ce problème est approximé en utilisant un second algorithme d'approximation de tenseurs, conduisant à une approximation  $\phi_{m,r_m} \in \mathcal{R}_1^{r_m}(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$  de  $\phi_m$  de rang  $r_m$ , avec  $r_m$  dépendant de la précision désirée. Cette approximation  $\phi_{m,r_m}$  est construite progressivement en commençant par  $\phi_{m,0} = 0$  et en définissant  $\phi_{m,r} = \phi_{m,r-1} + \varphi_{m,r}$ , avec  $\varphi_{m,r} \in \mathcal{R}_1(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$  tel que

$$\varphi_{m,r} \in \arg \min_{\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})} \mathcal{J}(u_{m-1} + Z_m \otimes (\phi_{m,r-1} + \varphi)).$$

Ces problèmes de minimisation sur  $\mathcal{R}_1(\mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{N_\Lambda})$  sont de nouveau résolus avec un algorithme de minimisation alternée consistant à minimiser successivement sur les espaces  $\mathcal{S}_s$ ,  $1 \leq s \leq N_\Lambda$ . Pour plus de détails sur ces algorithmes, voir [Nouy, 2010b].

#### 4.1.4 Stratégies pour la résolution des étapes globales et locales

Les problèmes global (2.24) et locaux (2.25) dans l’algorithme itératif global-local peuvent être formulés sur les itérés ou sur les incréments comme cela a été évoqué dans la section 3.3. Cela conduit à deux stratégies.

**Première stratégie : formulations sur les itérés** Les problèmes global et locaux sont formulés sur les itérés. Les problèmes locaux sont résolus en utilisant des méthodes d’approximation de tenseurs avec une tolérance donnée  $\epsilon$ . Le problème global est résolu exactement ou bien en utilisant l’algorithme glouton pour la décomposition de tenseurs selon que l’opérateur est déterministe ou non. Cela correspond à  $\epsilon^* = 0$  et  $\epsilon > 0$  dans le théorème 3.2. L’erreur sur la solution tend donc vers la précision donnée de la décomposition de tenseurs.

**Deuxième stratégie : formulations sur les incréments** Une deuxième possibilité consiste à résoudre les problèmes locaux reformulés sur les incréments avec des méthodes d’approximation de tenseurs. L’algorithme glouton est alors utilisé pour la construction de la décomposition de l’incrément soit en fixant une tolérance grossière  $\epsilon^*$ , soit un fixant un rang faible de la décomposition. Dans le dernier cas, la précision  $\epsilon^*$  dépend de l’itération  $n$  et peut se détériorer avec l’itération  $n$ . À chaque itération, les solutions sont tronquées avec une tolérance de  $\epsilon$  afin de maintenir des représentations séparées de faible rang (en utilisant des algorithmes classiques pour les décompositions canoniques [Hackbusch, 2012] et des algorithmes dédiés pour les décompositions hiérarchiques canoniques).

## 4.2 Illustration sur un problème à grande dimension stochastique

### 4.2.1 Description du problème

On considère le problème de diffusion (2.1) avec  $f = 1$ ,  $\Gamma_D = \partial\Omega(\xi)$  et  $\Gamma_N = \emptyset$ . On définit sept patchs carrés  $\Lambda_s(\xi_s)$ ,  $s = 1, \dots, 7$ , représentés dans la figure 4.1. Les patchs  $\Lambda_s(\xi_s)$  ont des côtés de longueur  $L = 2$

et des centres respectifs  $c_1 = (2, 2)$ ,  $c_2 = (5, 2)$ ,  $c_3 = (8, 2)$ ,  $c_4 = (2, 6)$ ,  $c_5 = (5, 8)$ ,  $c_6 = (8, 6)$  et  $c_7 = (1, 9)$ .

Le coefficient de diffusion est incertain sur les patchs  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_3$  et  $\Lambda_5$ . On considère

$$K = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_5) \\ 1 + \sum_{k=1}^5 \xi_s^k \kappa_s^k(x) & \text{pour } x \in \Lambda_s, \text{ pour } s \in \{1, 3\} \\ 1 + \xi_5 I(x) & \text{pour } x \in \Lambda_5 \end{cases}$$

avec

$$\kappa_s(x) = 10 \exp\left(-2 \frac{|x - a_s^k|^2}{0.25^2}\right), \quad s \in \{1, 3\},$$

et

$$I(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in D_5 = (4.5, 5.5) \times (7.5, 8.5) \\ 0 & \text{si } x \in \Lambda_5 \setminus D_5 \end{cases}$$

où  $a_s^k$ , pour  $s \in \{1, 3\}$  et pour  $k \in \{1, \dots, 5\}$ , est un point dans le patch  $\Lambda_s$  et où les  $\xi_1^k$ ,  $\xi_3^k$  et  $\xi_5$  sont des variables aléatoires uniformes indépendantes sur  $\Xi_1^k = (0, 1)$ ,  $\Xi_3^k = (0, 1)$  et  $\Xi_5 = (0, 1)$  respectivement. On note  $\Xi_1 = \times_{k=1}^5 \Xi_1^k \subset \mathbb{R}^5$ ,  $\Xi_3 = \times_{k=1}^5 \Xi_3^k \subset \mathbb{R}^5$  et  $\Xi_5 \subset \mathbb{R}$  les ensembles des événements élémentaires associés aux patchs  $\Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1$ ,  $\Lambda_3 = \tilde{\Lambda}_3$  et  $\Lambda_5 = \tilde{\Lambda}_5$  respectivement.

Le domaine  $\Omega(\xi)$  présente aussi des variabilités géométriques avec des conditions de Dirichlet homogènes sur des frontières circulaires internes. On note  $s_D = \{2, 4, 6, 7\}$  l'ensemble des indices des patchs ayant des frontières de Dirichlet internes. Les patchs  $\Lambda_2(\xi)$  et  $\Lambda_4(\xi)$  présentent des frontières circulaires de rayons aléatoires  $r_s = 0.3 + 0.1 \xi_s$  et de centres en  $c_s$ , pour  $s = 2, 4$ . Dans le patch  $\Lambda_6(\xi)$  on définit une frontière circulaire ayant un rayon  $r_6 = 0.3$  et un centre aléatoire  $(8 + 0.1\xi_6, 6)$ . Finalement, dans le patch  $\Lambda_7(\xi)$  on considère un coin en arc de cercle de centre  $(1 + 0.5\xi_7, 9 - 0.5\xi_7)$  et de rayon  $r_7 = 1 + 0.5\xi_7$ .  $\xi_s$  pour  $s \in s_D$  sont des variables aléatoires uniformes distribuées identiquement sur  $\Xi_s = (0, 1)$ .

On introduit des patchs fictifs  $\tilde{\Lambda}_2$ ,  $\tilde{\Lambda}_4$ ,  $\tilde{\Lambda}_6$  et  $\tilde{\Lambda}_7$  et domaine fictif  $\tilde{\Omega}$  tels que  $\tilde{\Omega} = (0, 10) \times (0, 10)$  et  $\Omega(\xi) = (\tilde{\Omega} \setminus \cup_{s \in s_D} \tilde{\Lambda}_s) \cup_{s \in s_D} \Lambda_s(\xi_s)$ .

Le problème global est défini sur le domaine  $\tilde{\Omega}$  qui ne contient aucun détail géométrique et il est associé à un coefficient de diffusion déterministe  $\tilde{K} = 1$  sur  $\tilde{\Omega}$ . Le problème global a donc un opérateur déterministe.

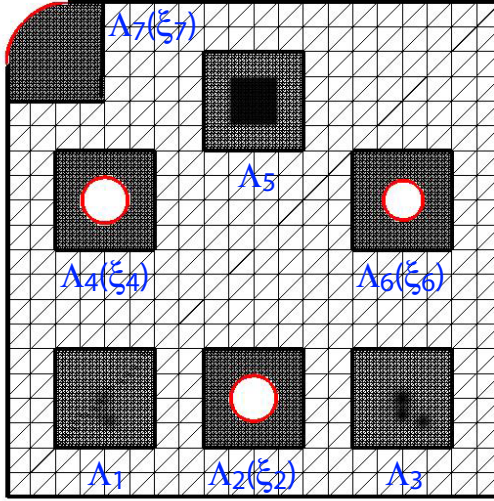


FIGURE 4.1 – Problème de diffusion avec 7 patches

Les problèmes locaux sur  $\Lambda_s(\xi)$  avec  $s \in s_D$  sont résolus en utilisant la méthode des fonctions caractéristiques. Les fonctions caractéristiques  $\psi^s(x, \xi_s)$  sont choisies comme les opposées des fonctions level-set dont les iso-zéro dans les patch  $\tilde{\Lambda}_s$  (pour  $s \in s_D$ ) définissent les frontières aléatoires dans  $\tilde{\Lambda}_s$  respectivement. Des espaces d'approximation éléments finis non-imbriqués  $\tilde{\mathcal{U}}_H$  et  $\tilde{\mathcal{W}}_h$  sont introduits en utilisant des maillages réguliers avec des éléments ayant des dimensions  $H = 0.5$  et  $h \approx 0.07$  sur  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Lambda}$  respectivement. Les dimensions des espaces d'approximations  $\tilde{\mathcal{U}}_H$  et  $\tilde{\mathcal{W}}_h^s$  (pour  $s = 1, \dots, 7$ ) sont 441 et 900 respectivement. On introduit l'espace d'approximation stochastique  $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{1,P_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{7,P_7}$ , où pour  $s \in s_D$ ,  $\mathcal{S}_{s,P_s}$  est un espace de polynômes par morceaux avec degré 3 sur une partition uniforme de  $\Xi_s$  (conduisant à des dimensions  $P_s = 24$  pour  $s \in s_D$ ), et où pour  $s \notin s_D$ ,  $\mathcal{S}_{s,P_s}$  est un espace de polynômes multidimensionnels de degré 3 (conduisant à des dimensions  $P_1 = P_3 = 56$  et  $P_5 = 4$ ). Il en résulte une dimension  $\dim(\mathcal{S}_P) \approx 4.2 \cdot 10^9$ .

Les solutions des problèmes global et locaux sont approximés dans des formats de tenseurs canoniques ou canoniques hiérarchiques. Le problème global est résolu exactement car il est associé à un opérateur déterministe,



tandis que les problèmes locaux sont résolus en utilisant les constructions progressives présentées dans la section 4.1.3.

## 4.2.2 Approximation tensorielle des solutions locales

### 4.2.2.1 Décomposition canonique

Ici, les décompositions canoniques des solutions locales (dans  $\mathcal{R}_m(\widetilde{\mathcal{W}}_h^s \otimes \mathcal{S}_{1,P_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{7,P_7})$ ) sont construites en utilisant l'algorithme glouton présenté dans la section 4.1.3. Lorsque la solution locale est formulée sur l'itéré  $z_n$  à l'itération  $n$ , le problème est résolu avec une tolérance prescrite  $\epsilon = 5.10^{-3}$  sur le résidu. Quand le problème local est formulé sur l'incrément  $\delta z_n$ , on utilise une tolérance grossière  $\epsilon^* = 0.1$  sur le résidu. À chaque itération, l'itéré global  $U_n$  et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_n^s$  sont compressés en utilisant un algorithme classique de décomposition canonique de tenseurs (afin de réduire leur rang de décomposition). Pour cette étape de compression, on utilise une tolérance  $\epsilon = 5.10^{-3}$ .

Afin d'illustrer la robustesse de la méthode en fonction des approximations, l'erreur de stagnation  $\varepsilon_{\widetilde{\Omega}}(U_{n-1}; U_n)$  est tracée en fonction de l'itération  $n$  dans la figure 4.2. Le paramètre de relaxation de l'algorithme itératif global-local est  $\rho = 0.2 \approx \rho^* = \frac{1}{\lambda_{max}(A)}$ . On voit que pour les deux formulations, sur la solution ou sur l'incrément, l'erreur diminue vers la précision  $5.10^{-3}$  introduite dans les décompositions des tenseurs. On note que lorsque les problèmes locaux sont formulés sur l'incrément, on continue de voir une stagnation de l'algorithme itératif global-local due aux erreurs additionnelles introduites dans la compression des itérés globaux et des multiplicateurs de Lagrange (correspondant à une erreur de type  $\epsilon$  dans le théorème 3.2).

La figure 4.3 montre un échantillon aléatoire des solutions obtenues à l'itération  $n = 14$ . Dans un souci de clarté, l'indice  $n$  qui se réfère à l'itération a été omis dans la légende de la figure et  $v_m$  désigne ici une décomposition de rang  $m$  d'une quantité  $v$ . Cette notation est adoptée dans la suite de cette section seulement. On voit que les solutions locales dans les patches avec les frontières de Dirichlet aléatoires ont des rangs plus élevés que celles des patches avec des coefficients de diffusion aléatoires.

On analyse maintenant la convergence des décompositions de tenseurs

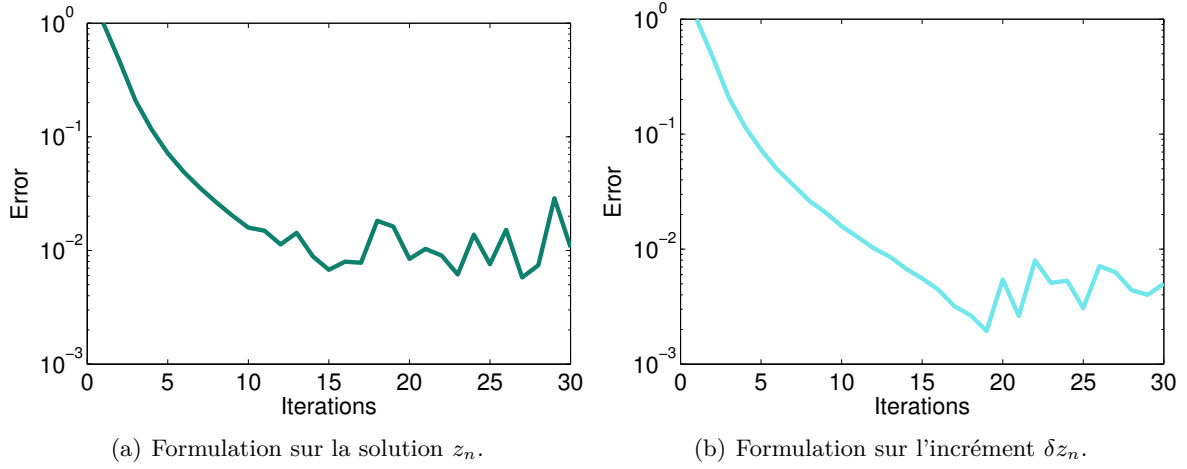


FIGURE 4.2 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_{n-1}, U_n)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  en utilisant une tolérance prescrite  $\epsilon = 5.10^{-3}$  sur la représentation canonique des solutions globales. Pour les problèmes locaux : (a) formulation sur la solution  $z_n$ , approximation canonique avec une tolérance prescrite  $\epsilon = 5.10^{-3}$ , (b) formulation sur l'incrément  $\delta z_n$ , approximation canonique avec une tolérance prescrite  $\epsilon^* = 0.1$ .

canoniques  $U_m$  et  $w_m^s$  de rang  $m$  des itérés globaux  $U$  et locaux  $w^s$  à l'itération  $n = 14$ . La figure 4.4 montre l'évolution de  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_m; U)$  et  $\varepsilon_{\tilde{\Lambda}_s}(w_m^s; w^s)$  en fonction du rang  $m$ . Les solutions locales dans les patches ayant une géométrie aléatoire ont systématiquement des rangs plus élevés que ceux de  $U$  et des solutions locales dans les autres patches avec champ de diffusion aléatoire. Cependant, en opérant une séparation des échelles, la méthode multi-échelle avec patches a participé à la réduction des rangs des décompositions tensorielles des solutions locales et globale et contribue ainsi à la bonne performance de la méthode dans son ensemble.

#### 4.2.2.2 Décomposition canonique hiérarchique

On introduit maintenant des décompositions canoniques hiérarchiques pour la résolution des problèmes locaux, qui sont ici formulés sur les itérées (et non sur les incréments). Les approximations dans  ${}_H\mathcal{R}_m^r(\tilde{\mathcal{W}}_h^s \otimes \mathcal{S}^P)$  sont construites en utilisant l'algorithme glouton présenté dans la section 4.1.3. La tolérance est fixée à  $5.10^{-3}$  sur le résidu aux deux niveaux d'approximation dans la décomposition canonique hiérarchique. À chaque itération les itérés globaux  $U_n$  sont également comprimés dans  ${}_H\mathcal{R}_m^r(\tilde{\mathcal{U}}_H \otimes \mathcal{S}^P)$  avec une tolérance  $\epsilon = 5.10^{-3}$  à chaque niveau d'approximation de la décom-

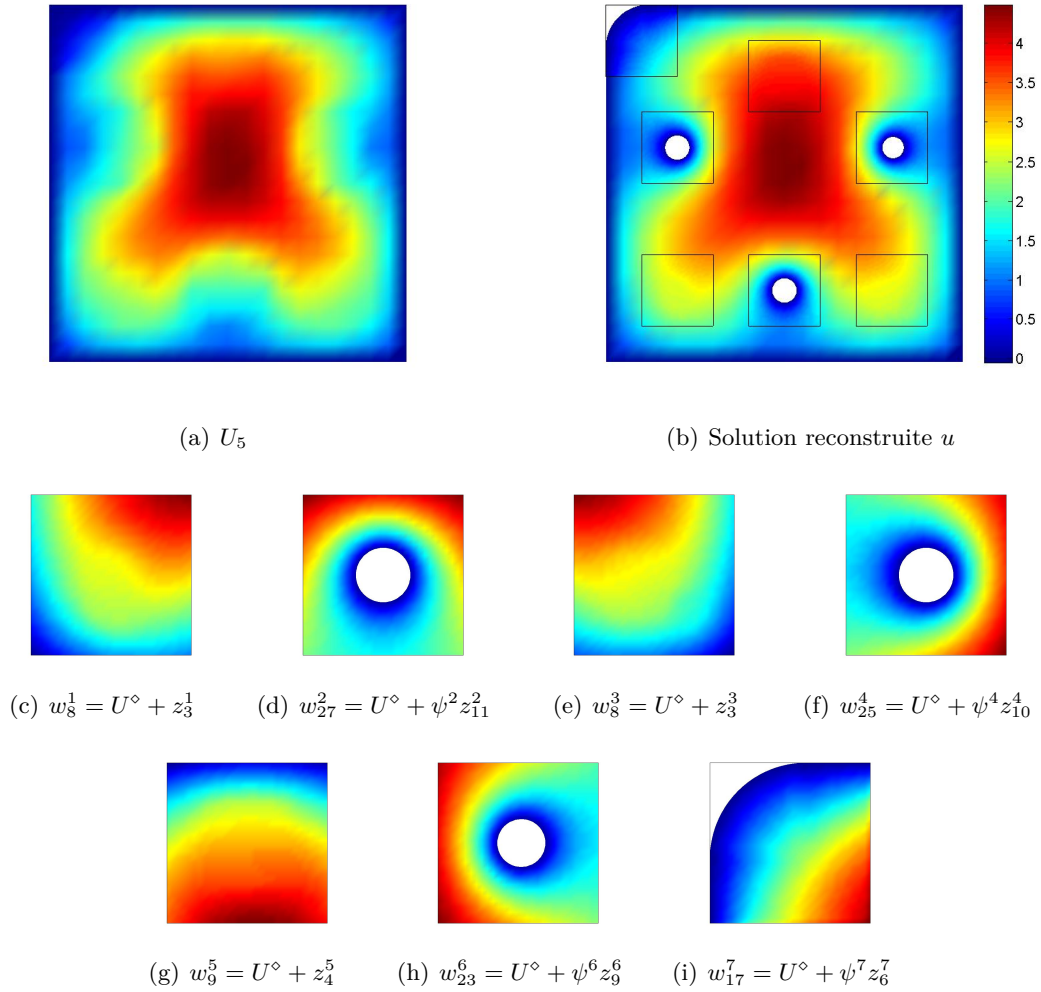


FIGURE 4.3 – Échantillon aléatoire de la solution globale  $U$ , des solutions locales  $w^s$  pour  $s = 1, \dots, 7$  et de la solution reconstruite  $u$  à l'itération  $n = 14$ .

position canonique hiérarchique. La figure 4.5 illustre la convergence de l'algorithme itératif global-local et de nouveau on observe une très bonne convergence avec une erreur inférieure à la tolérance prescrite  $5 \cdot 10^{-3}$ . Cela est dû au fait que les décompositions canoniques hiérarchiques convergent très rapidement (comme illustré ci-dessous) et que la précision effective des décompositions de faibles rangs qui en résultent est inférieure à la tolérance prescrite.

La figure 4.6 montre les rangs  $m$  des solutions locales  $z^s$  en fonction des itérations  $n$  en utilisant la décomposition canonique ou la décomposition canonique hiérarchique. La décomposition hiérarchique montre une amé-

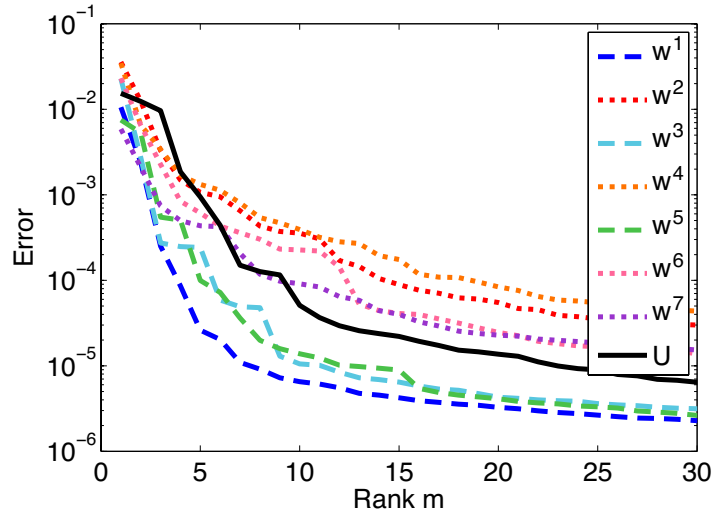


FIGURE 4.4 – Évolutions de  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_m; U)$  et  $\varepsilon_{\tilde{\Lambda}^s}(w_m^s; w^s)$  pour  $s = 1, \dots, 7$  en fonction du rang  $m$ .  $U_m$  et  $w_m^s$  sont les décompositions canoniques de rangs  $m$  des solutions à l'itération  $n = 14$ . (Traits interrompus) patches avec des champs de diffusion aléatoire et (Pointillés) patches avec des frontières internes de Dirichlet aléatoire.

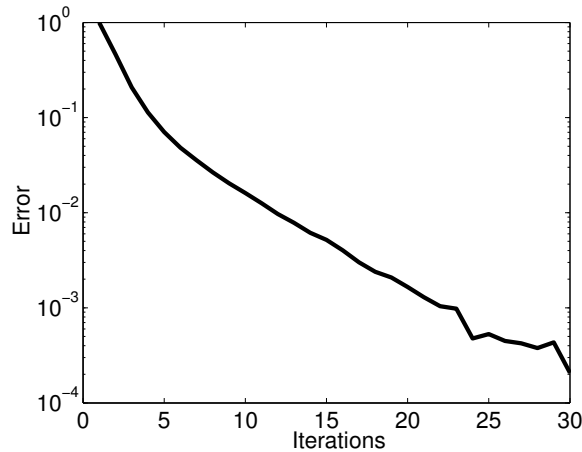


FIGURE 4.5 – Évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(U_{n-1}, U_n)$  en fonction du nombre d'itérations  $n$  avec décomposition canonique hiérarchique des solutions globale et locales (avec une tolérance prescrite  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

lioration significative sur le rang des solutions locales  $z^s$ . En effet, alors que les décompositions canoniques atteignent des rangs  $m = 4$  dans les patches avec des champs de diffusion ou  $m = 12$  pour les patches avec des frontières de Dirichlet, les décompositions hiérarchiques ont des rangs très petits 1 ou 2. Ayant ces représentations de rangs faibles, les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda^s$  ont également des faibles rangs et n'ont pas besoin

d'être compressés pour des raisons d'efficacité. Par conséquent, aucune erreur supplémentaire n'est introduite.

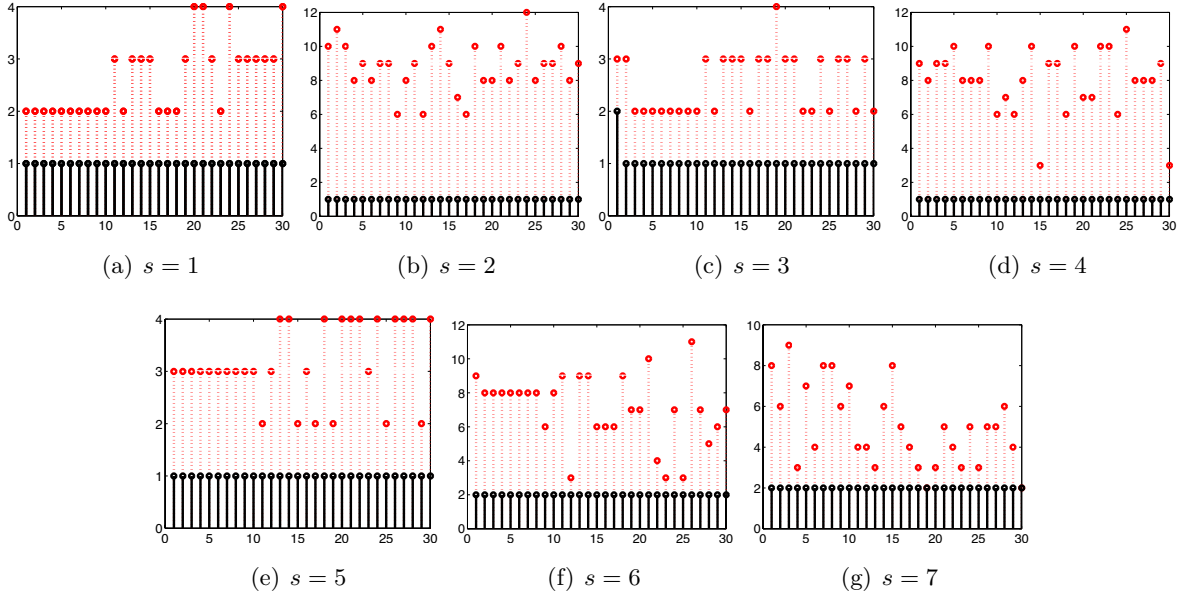


FIGURE 4.6 – Les rangs des solutions locales  $z^s$  pour les patches  $s = 1, \dots, 7$  : (rouge) décomposition canonique (noir) décomposition canonique hiérarchique.

### 4.2.3 Illustrations des quantités d'intérêt probabilistes

La figure 4.7 montre l'espérance et la variance de la solution globale  $U$  et celles de la solution reconstruite  $u$ . Les variances ont de faibles valeurs et sont capturées par les solutions locales dans les patches.

La figure 4.8 montre les indices de sensibilités  $\tilde{S}_s(u)$ . Ils sont localisés dans le patch, on voit que leurs amplitudes varient selon le type d'incertitude.

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre différents formats d'approximation de tenseurs ont été utilisés pour la résolution des problèmes global et locaux en grande dimension stochastique. Deux stratégies se sont révélées efficaces : d'une part la décomposition canonique sur les incréments qui permet de n'avoir

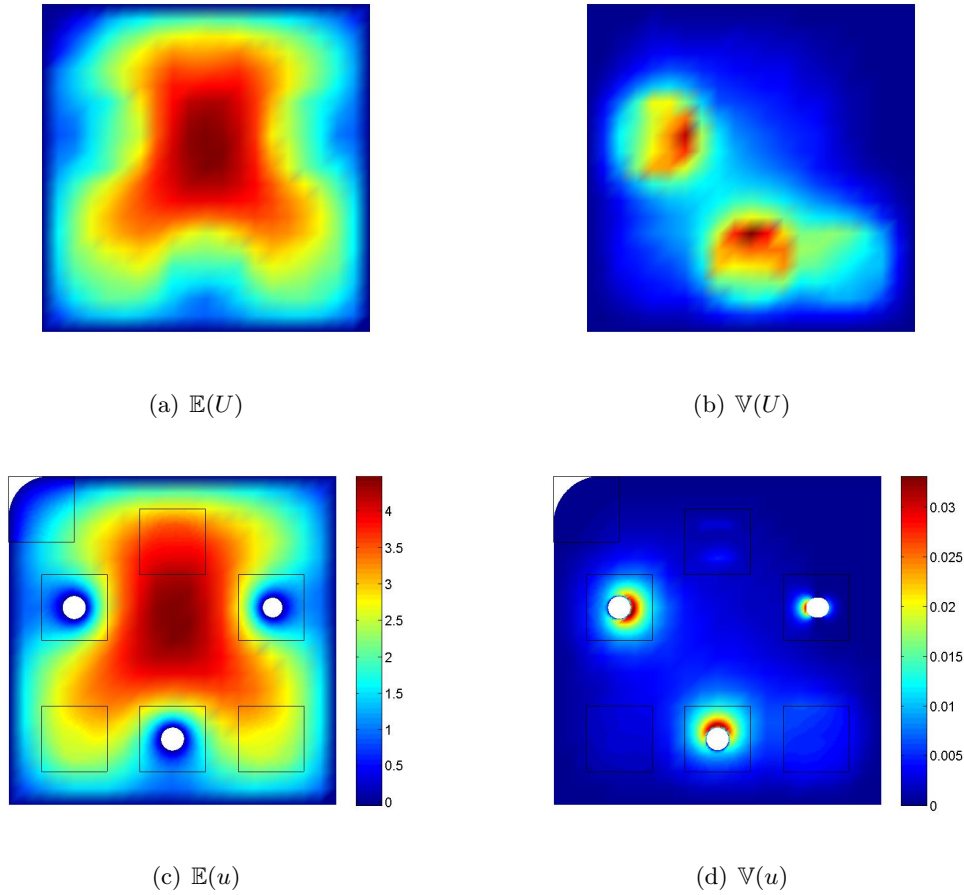


FIGURE 4.7 – L’espérance et la variance de la solution globale  $U$  (a et b) et de la solution reconstruite  $u$  (c et d). La frontière  $\Gamma$  est matérialisée par les lignes noires.

à calculer que des décompositions de rang faible sur les incréments des solutions locales, d’autre part la décomposition canonique hiérarchique sur les solutions locales et la solution globale. La première stratégie requiert néanmoins une re-compression des quantités au format canonique qui peuvent présenter des rangs relativement élevés. La deuxième stratégie qui introduit quant à elle le format hiérarchique, permet le calcul d’approximations séparées des solutions, y compris locales, de rangs très faibles et se révèle donc particulièrement efficace. La séparation des échelles dans l’algorithme itératif global-local contribue largement à l’efficacité des méthodes d’approximation de tenseur. En effet comme cela a été illustré sur l’exemple de la section 3.2.1.5 figure 3.9, les solutions locales et globale ont un contenu spectral plus faible que la solution complète  $u$ , ce

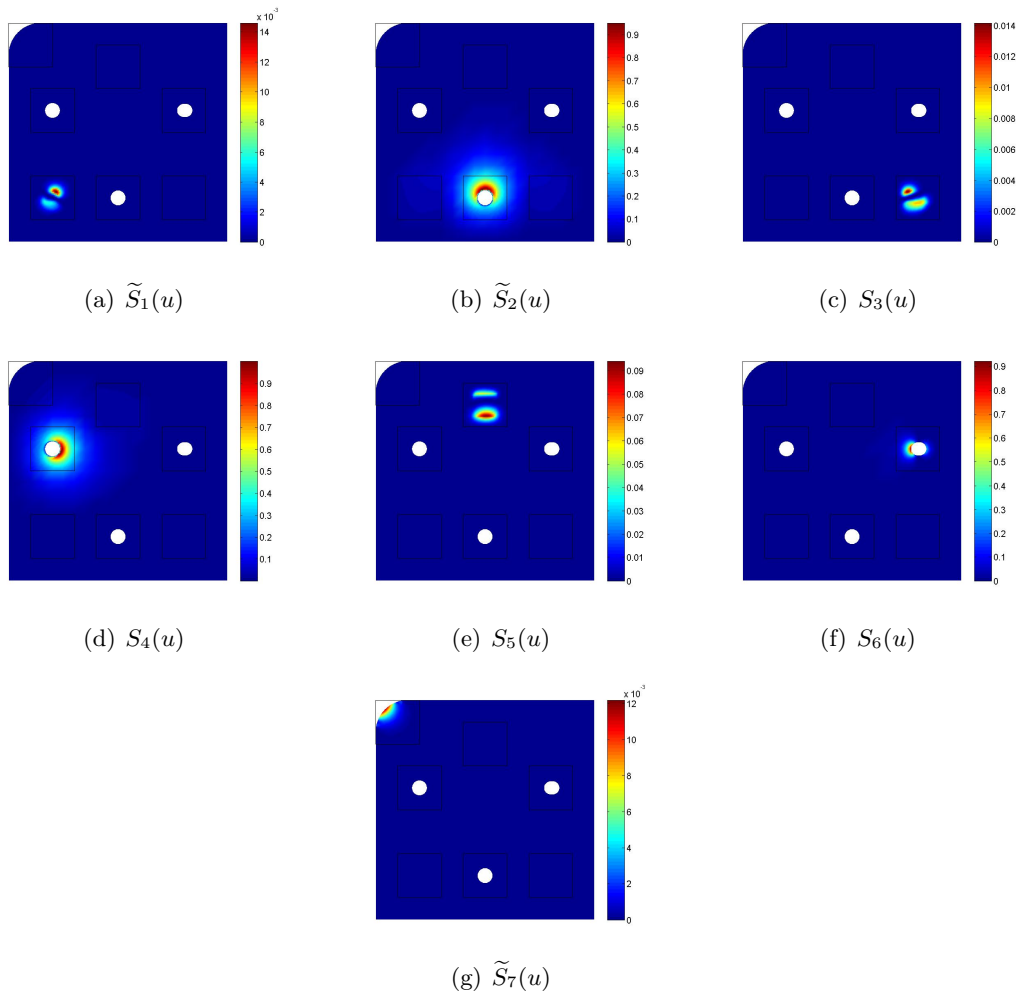


FIGURE 4.8 – Indices de sensibilité  $\tilde{S}_s(u)$  pour  $s = 1, 2, 7$ .

qui conduit à des décompositions canoniques hiérarchiques des solutions locales et globale de rangs faibles.

## Chapitre 5

# Approximations des problèmes définis sur des géométries aléatoires

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Formulation du problème et méthode de domaine fictif</b>	<b>95</b>
5.1.1	Équations aux dérivées partielles définies sur des domaines aléatoires	95
5.1.2	Formulation sur un domaine fictif et conditions de Neumann sur une frontière aléatoire	97
<b>5.2</b>	<b>Proper Generalized Decomposition</b>	<b>100</b>
5.2.1	Approximation de la solution	100
5.2.2	Définition de la PGD progressive	100
5.2.3	Algorithme alterné	102
5.2.4	Illustration	105
<b>5.3</b>	<b>Représentations séparées des fonctions indicatrices</b>	<b>111</b>
5.3.1	Reformulation du problème avec des fonctions indicatrices approximées	111
5.3.2	Représentations séparées de $I_s$	112
5.3.3	Illustration	117
<b>5.4</b>	<b>Exemple : domaine avec deux frontières sinusoïdales aléatoires</b>	<b>124</b>
5.4.1	Description du problème	124
5.4.2	Application de la PGD	125
<b>5.5</b>	<b>Conditions de Dirichlet sur une frontière aléatoire : méthode des fonctions caractéristiques</b>	<b>130</b>
5.5.1	Méthode des fonctions caractéristiques	130
5.5.2	Reformulation du problème	130
5.5.3	Approximation	131
5.5.4	Illustration	131
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>

---

Ce chapitre traite des problèmes définis sur une géométrie aléatoire. Afin de mettre en place les méthodes spectrales stochastiques et donc de travailler dans un espace produit tensoriel, on utilise la méthode des domaines fictifs [[Canuto et Kozubek, 2007](#); [Ramière et al., 2007a](#); [Nouy](#)



*et al.*, 2008], dans le cas des frontières aléatoires de Dirichlet et de Neumann. Dans la section 5.1, on introduit une formulation domaine fictif des équations aux dérivées partielles définies sur des domaines incertains, où on traitera tout d’abord le cas des conditions de Neumann sur une frontière aléatoire. Dans la section 5.2, on applique la méthode PGD pour la construction d’une représentation séparée de la solution sans la connaître a priori et on illustre la méthode sur un exemple dédié. Afin d’avoir une application efficace de la PGD, on introduit une approximation séparée des formes bilinéaires et linéaires qui constituent les membres de la formulation faible du problème. Ces formes doivent avoir un faible rang de décomposition afin d’obtenir une bonne efficacité. Pour cela, dans la section 5.3, on introduit une représentation séparée de la fonction indicatrice du domaine aléatoire. Une régularisation de la fonction indicatrice est introduite afin d’améliorer la convergence de sa décomposition. En plus, afin de garder un problème bien posé, on introduit une nouvelle approche qui consiste à décomposer la fonction indicatrice sous contrainte de positivité. Dans la section 5.4, un second exemple illustre la méthodologie proposée. Finalement, dans la section 5.5, on introduit la formulation domaine fictif avec des conditions de Dirichlet sur une frontière aléatoire, avec un exemple associé.

## 5.1 Formulation du problème et méthode de domaine fictif

### 5.1.1 Équations aux dérivées partielles définies sur des domaines aléatoires

On considère ici une simple équation aux dérivées partielles définie sur un domaine aléatoire  $\Omega(\xi)$  :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega(\xi) \\ \nabla u \cdot n &= 0 & \text{sur } \Gamma_N(\xi) \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_D(\xi) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont les frontières de Dirichlet et de Neumann respectivement, avec  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  et  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ . On suppose que pour chaque

$\xi \in \Xi$ , le domaine  $\Omega(\xi)$  est borné et connexe et sa frontière  $\partial\Omega(\xi)$  est suffisamment régulière. La formulation faible au niveau spatial et forte au niveau stochastique s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u(\xi) \in \mathcal{V}(\xi) \text{ tel que} \\ &a(u(\xi), v; \xi) = \ell(v; \xi) \quad \forall v \in \mathcal{V}(\xi) \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec

$$a(u, v; \xi) = \int_{\Omega(\xi)} \nabla v \cdot \nabla u \, dx, \quad \ell(v; \xi) = \int_{\Omega(\xi)} v f \, dx \quad (5.3)$$

et où

$$\mathcal{V}(\xi) = \{v \in H^1(\Omega(\xi)) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D(\xi)\}$$

On introduit maintenant l'espace des fonctions

$$\mathcal{V}^\Xi = \{v : y \in \Xi \mapsto v(y) \in \mathcal{V}(y) ; \int_{\Xi} \|v(y)\|_{\mathcal{V}(y)}^2 dP_\xi(y) < \infty\} := L_{P_\xi}^2(\Xi; \mathcal{V})$$

avec

$$\|v(y)\|_{\mathcal{V}(y)}^2 = \int_{\Omega(y)} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) \, dx.$$

On note  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\Xi}$  la norme sur  $\mathcal{V}^\Xi$  définie par

$$\|v\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 = \int_{\Xi} \|v(y)\|_{\mathcal{V}(y)}^2 dP_\xi(y).$$

La formulation stochastique faible s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in \mathcal{V}^\Xi \text{ tel que} \\ &A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\Xi \end{aligned} \quad (5.4)$$

où

$$A(u, v) = \int_{\Xi} a(u, v; y) dP_\xi(y) = \int_{\Xi} \int_{\Omega(y)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dP_\xi(y) \quad (5.5)$$

$$L(v) = \int_{\Xi} \ell(v; y) dP_\xi(y) = \int_{\Xi} \int_{\Omega(y)} f v \, dx \, dP_\xi(y) \quad (5.6)$$

## 5.1.2 Formulation sur un domaine fictif et conditions de Neumann sur une frontière aléatoire

On introduit une reformulation du problème (5.4) sur un domaine fictif déterministe. Pour la simplicité, on considère une simple équation de diffusion avec des conditions de Dirichlet homogènes, sachant que les résultats peuvent être étendus naturellement aux équations de diffusion/réaction pour différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann ou Robin) (voir [Glowinski *et al.*, 1996; Ramière *et al.*, 2007a; Ramière *et al.*, 2007b]).

### 5.1.2.1 Introduction du domaine fictif

On considère dans un premier temps le cas où  $\Gamma_D$  est déterministe et  $\Gamma_N(\xi)$  est aléatoire. Le cas où  $\Gamma_D$  est aléatoire sera étudié en section 5.5. On introduit un domaine fictif déterministe  $\tilde{\Omega}$  tel que  $\cup_{y \in \Xi} \Omega(y) \subset \tilde{\Omega}$  et tel que  $\Gamma_D = \tilde{\Gamma}_D \subset \partial\tilde{\Omega}$ , où la frontière du domaine fictif  $\partial\tilde{\Omega}$  est partagée en deux ensembles déterministes disjoints  $\tilde{\Gamma}_N$  et  $\tilde{\Gamma}_D$  (voir figure 5.1)<sup>1</sup>.

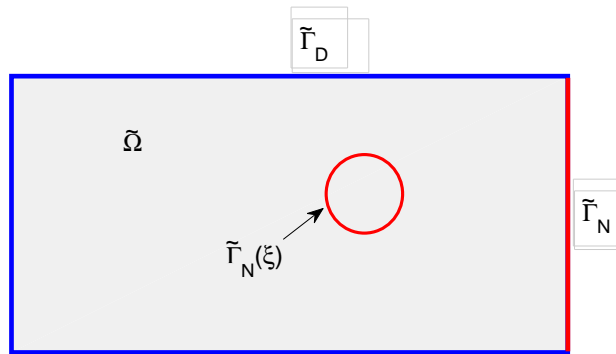


FIGURE 5.1 – Domaine fictif

1. On note que le choix des conditions aux limites sur  $\partial\tilde{\Omega} \setminus \partial\Omega(\xi)$  est arbitraire. Ce choix a peu d'influence sur la solution si la frontière du domaine fictif est suffisamment éloignée de la frontière réelle.

### 5.1.2.2 Fonctions indicatrices

On introduit une fonction  $I^\eta : \widetilde{\Omega} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $0 \leq \eta \leq 1$ , définie par

$$I^\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega(y) \\ \eta & \text{si } x \notin \Omega(y) \end{cases} \quad (5.7)$$

$I^0(\cdot, y)$  correspond à la fonction indicatrice classique du domaine  $\Omega(y)$ , notée  $I$  dans la suite. La fonction  $I^\eta$  est exprimée en fonction de  $I$  :

$$I^\eta = I + \eta(1 - I) = \eta + (1 - \eta)I \quad (5.8)$$

En pratique, on introduit une fonction  $\phi : \widetilde{\Omega} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$I(x, y) = H(-\phi(x, y)), \quad (5.9)$$

où  $H$  est la fonction heaviside définie par  $H(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$ . Ici, on

utilise pour  $\phi(x, \xi)$  une fonction level-set aléatoire dont l'iso-zero dans  $\widetilde{\Omega}$  caractérise la frontière aléatoire  $\Gamma_N(\xi)$ .

### 5.1.2.3 Reformulation du problème

Le problème (5.2) est reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u^\eta(\xi) \in \widetilde{\mathcal{V}} \text{ tel que} \\ &a^\eta(u^\eta(\xi), v; \xi) = \ell(v; \xi) \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où

$$a^\eta(u, v; \xi) = \int_{\widetilde{\Omega}} I^\eta \nabla v \cdot \nabla u \, dx, \quad (5.11)$$

$$\ell(v; \xi) = \int_{\widetilde{\Omega}} I v f \, dx \quad (5.12)$$

et où  $\widetilde{\mathcal{V}}$  est un espace de fonctions déterministes

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{v \in H^1(\widetilde{\Omega}); v = 0 \text{ sur } \widetilde{\Gamma}_D\}$$

La formulation déterministe correspondante à la formulation ci-dessus appartient à la famille des reformulations proposées dans [Glowinski *et al.*, 1996]. On introduit maintenant l'espace des fonctions

$$\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \{v : y \in \Xi \mapsto v(y) \in \widetilde{\mathcal{V}}; \int_{\Xi} \|v(y)\|_{\widetilde{\mathcal{V}}}^2 dP_\xi(y) < \infty\} = L_{P_\xi}^2(\Xi; \widetilde{\mathcal{V}})$$

avec

$$\|v\|_{\widetilde{\mathcal{V}}}^2 = \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Puisque  $\widetilde{\mathcal{V}}$  est déterministe, on a  $\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = L_{P_\xi}^2(\Xi; \widetilde{\mathcal{V}}) \simeq \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S} := L_{P_\xi}^2(\Xi)$ .  $\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi$  est équipé de la norme suivante :

$$\|v\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 = \int_{\Xi} \|v(y)\|_{\widetilde{\mathcal{V}}}^2 dP_\xi(y) = \int_{\Xi} \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla v(x, y)|^2 d\mu(x, y)$$

où  $\mu$  est la mesure produit sur  $\mathbb{R}^d \times \Xi$ , telle que  $d\mu(x, y) = dx dP_\xi(y)$ . On aura donc la formulation stochastique faible du problème (5.10) comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\eta \in \widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \text{ tel que} \\ A^\eta(u^\eta, v) = L(v) \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.13)$$

où  $A^\eta$  et  $L$  sont des formes bilinéaires et linéaires continues sur  $\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$ , définies par

$$A^\eta(u, v) = \int_{\Xi} a^\eta(u, v; y) dP_\xi(y) = \int_{\widetilde{\Omega} \times \Xi} I^\eta \nabla v \cdot \nabla u d\mu \quad (5.14)$$

$$L(v) = \int_{\Xi} \ell(v; y) dP_\xi(y) = \int_{\widetilde{\Omega} \times \Xi} I v f d\mu \quad (5.15)$$

En utilisant (5.8), la forme bilinéaire  $A^\eta$  est exprimée en fonction de la fonction indicatrice classique  $I$  comme suit :

$$A^\eta(u, v) = \eta \int_{\widetilde{\Omega} \times \Xi} \nabla v \cdot \nabla u d\mu + (1 - \eta) \int_{\widetilde{\Omega} \times \Xi} I \nabla v \cdot \nabla u d\mu \quad (5.16)$$

Pour  $\eta > 0$ ,  $A^\eta$  est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur  $\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$ . Donc, il existe une solution unique du problème (5.13) caractérisée par :

$$u^\eta = \arg \min_{v \in \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}} \frac{1}{2} A^\eta(v, v) - L(v)$$

La convergence de  $u^\eta$  quand  $\eta \rightarrow 0$  est analysée dans l'annexe A. Dans la suite, on considère que  $u^\eta$ , la solution de (5.13), est notre solution de référence, avec  $\eta$  choisi suffisamment petit tel que  $u^\eta$  fournit une bonne approximation de la solution  $u$  du problème (5.4).

## 5.2 Proper Generalized Decomposition

### 5.2.1 Approximation de la solution

On considère la solution du problème (5.13) avec la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD). L'idée est donc de trouver une approximation de la solution  $u^\eta \in \tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$  de (5.13) sous la forme :

$$u^\eta \approx u_m = \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i, \quad w_i \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad \lambda_i \in \mathcal{S} \quad (5.17)$$

où  $u_m$  est la représentation séparée de rang  $m$  de  $u^\eta$ . Cela peut être interprété comme une construction simultanée des bases réduites des fonctions spatiales  $\{w_i\}_{i=1}^m$  et des fonctions stochastiques  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ , qui sont optimales (dans un sens à préciser) pour la représentation de la solution  $u^\eta$ . Dans la suite on présente la définition progressive de la PGD appliquée au problème (5.13) (voir [Nouy, 2007; Nouy, 2008; Nouy, 2009; Nouy, 2010a]). On note que la suite construite  $u_m$  dépend du paramètre  $\eta$  qui sera omis afin de simplifier les notations.

### 5.2.2 Définition de la PGD progressive

**Définition 5.1** *La PGD progressive  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de la solution  $u^\eta$  du problème (5.13) est définie par*

$$u_m = u_{m-1} + w_m \lambda_m$$

avec  $u_0 = 0$  et

$$(w_m, \lambda_m) \in \arg \min_{w \in \tilde{\mathcal{V}}, \lambda \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} A^\eta(w\lambda, w\lambda) - L(w\lambda) + A^\eta(u_{m-1}, w\lambda) \quad (5.18)$$

La définition 5.1 est équivalente à<sup>2</sup>

$$(w_m, \lambda_m) \in \arg \min_{w \in \tilde{\mathcal{V}}, \lambda \in \mathcal{S}} \|u^\eta - u_{m-1} - w\lambda\|_{A^\eta}^2 \quad (5.19)$$

où  $u^\eta$  est la solution de (5.13) et  $\|\cdot\|_{A^\eta}$  est la norme sur  $\tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$  induite par  $A^\eta$ , définie par

$$\|v\|_{A^\eta}^2 = A^\eta(v, v).$$

Un nouveau couple de fonctions  $(w_m, \lambda_m) \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{S}$  est alors défini comme un couple qui minimise la distance entre  $u_m$  et  $u^\eta$ , au sens de la norme induite par  $A^\eta$ .

On introduit l'application  $F_m : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$  définie par

$$F_m(\lambda) = \arg \min_{w \in \tilde{\mathcal{V}}} \frac{1}{2} A^\eta(w\lambda, w\lambda) - L(w\lambda) + A^\eta(u_{m-1}, w\lambda) \quad (5.20)$$

et l'application  $F_m^\diamond : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{S}$  définie par

$$F_m^\diamond(w) = \arg \min_{\lambda \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} A^\eta(w\lambda, w\lambda) - L(w\lambda) + A^\eta(u_{m-1}, w\lambda). \quad (5.21)$$

On a les propriétés suivantes :

$$\|u^\eta - u_{m-1} - wF_m^\diamond(w)\|_{A^\eta}^2 = \|u^\eta - u_{m-1}\|_{A^\eta}^2 - r_m^\diamond(w) \quad (5.22)$$

avec  $r_m^\diamond(w) = \|wF_m^\diamond(w)\|_{A^\eta}^2$ , et

$$\|u^\eta - u_{m-1} - F_m(\lambda)\lambda\|_{A^\eta}^2 = \|u^\eta - u_{m-1}\|_{A^\eta}^2 - r_m(\lambda) \quad (5.23)$$

avec  $r_m(\lambda) = \|F_m(\lambda)\lambda\|_{A^\eta}^2$ . On a alors le théorème suivant, qui est un cas particulier d'un résultat de convergence général de la PGD progressive dans des espaces produits tensoriels de Hilbert [Falco et Nouy, 2011].<sup>3</sup>

**Theorème 5.1** *La PGD progressive  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  converge fortement avec  $m$  vers la solution  $u^\eta$  du problème (5.13) (pour un  $\eta$  fixé). On a*

$$\|u^\eta - u_m\|_{A^\eta}^2 = \|u^\eta\|_{A^\eta}^2 - \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (5.24)$$

2. On note qu'il existe une infinité de solutions au problème de minimisation (5.19). Si une normalisation de  $w_m$  (ou  $\lambda_m$ ) est ajoutée, il peut exister encore différents minimiseurs  $(w_m, \lambda_m)$ .

3. On note que pour  $\eta = 0$ , la forme bilinéaire  $A^\eta$  définit seulement une pseudo-norme sur l'espace de tenseurs de Hilbert. Cependant, le théorème 5.1 est toujours valide et la convergence de la représentation séparée peut être prouvée au sens de la pseudo-norme.

où  $\sigma_m$  est définie par

$$\sigma_m^2 = \max_{w \in \tilde{\mathcal{V}}} r_m^\diamond(w) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}} r_m(\lambda) \quad (5.25)$$

**Remarque 5.1 (Approximation)** *En pratique, on introduit les espaces d'approximation  $\tilde{\mathcal{V}}_N \subset \tilde{\mathcal{V}}$  et  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$  et on construit une suite PGD  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  qui converge vers l'approximation de Galerkin  $u_{N,P}^\eta$  dans  $\tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  de la solution  $u^\eta$  du problème (5.13).*

La construction de la PGD progressive peut être interprétée comme une succession de pseudo problèmes aux valeurs propres sur l'opérateur  $T_m^\diamond(w) = r_m^\diamond(w)F_m \circ F_m^\diamond(w)$ .  $r_m^\diamond$  est interprété comme un pseudo quotient de Rayleigh, qui est maximisé par la fonction optimale  $w_m$ , appelée la pseudo fonction propre dominante de  $T_m^\diamond$ . D'une façon équivalente, elle peut être interprétée comme une succession de pseudo problèmes aux valeurs propres sur l'opérateur  $T_m(\lambda) = r_m(\lambda)F_m^\diamond \circ F_m(\lambda)$ .  $r_m$  est interprété comme un pseudo quotient de Rayleigh, qui est maximisé par la fonction optimale  $\lambda_m$ , appelée la pseudo fonction propre dominante de  $T_m$ . Les valeurs  $\sigma_m$  sont alors interprétées comme des valeurs singulières d'une décomposition en valeurs singulières progressive (généralisée) de  $u^\eta$ , aussi nommée décomposition spectrale généralisée (voir [Nouy, 2007; Falco et Nouy, 2011]).

### 5.2.3 Algorithme alterné

A partir d'une fonction initiale  $\lambda^0 \in \mathcal{S}$ , on construit les suites  $\{w^k\}_{k \geq 1} \subset \tilde{\mathcal{V}}$  et  $\{\lambda^k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{S}$ , définies par

$$w^{k+1} = F_m(\lambda^k), \quad \lambda^{k+1} = F_m^\diamond(w^{k+1}).$$

L'algorithme peut être interprété comme un algorithme de minimisation alternée pour résoudre le problème d'optimisation (5.18). Il peut être aussi interprété comme un algorithme de puissance<sup>4</sup> pour trouver la pseudo fonction propre dominante de l'opérateur  $T_m^\diamond$ , ou d'une façon équivalente de  $T_m$  (voir [Nouy, 2008]). En pratique, seulement peu d'itérations (3 ou 4) sont suffisantes pour obtenir une bonne approximation d'un couple optimal  $(w_m, \lambda_m)$ .

---

4. On a  $w^{k+1} \propto \underbrace{T_m^\diamond \circ \dots \circ T_m^\diamond}_{k \text{ fois}}(w^1)$  et  $\lambda^{k+1} \propto \underbrace{T_m \circ \dots \circ T_m}_{k \text{ fois}}(\lambda^1)$



### 5.2.3.1 Application de l'application $F_m$ (problème spatial)

Pour un  $\lambda \in \mathcal{S}$  donné,  $w = F_m(\lambda)$  est la solution du problème suivant :

$$w \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad a_\lambda(w, w^*) = l_\lambda(w^*) \quad \forall w^* \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (5.26)$$

avec

$$a_\lambda(w, w^*) = \int_{\tilde{\Omega}} \kappa \nabla w \cdot \nabla w^* dx, \quad (5.27)$$

$$l_\lambda(w^*) = \int_{\tilde{\Omega}} g w^* dx - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\tilde{\Omega}} \kappa_i \nabla w_i \cdot \nabla w^* dx, \quad (5.28)$$

et

$$\kappa(x) = \int_{\Xi} I^\eta(x, y) \lambda(y)^2 dP_\xi(y) = \mathbb{E}(I^\eta(x, \xi) \lambda(\xi)^2) \quad (5.29)$$

$$g(x) = \int_{\Xi} I(x, y) f(x, y) \lambda(y) dP_\xi(y) = \mathbb{E}(I(x, \xi) f(x, \xi) \lambda(\xi)) \quad (5.30)$$

$$\kappa_i(x) = \int_{\Xi} I^\eta(x, y) \lambda(y) \lambda_i(y) dP_\xi(y) = \mathbb{E}(I^\eta(x, \xi) \lambda(\xi) \lambda_i(\xi)) \quad (5.31)$$

**Interprétation.** Le problème (5.26) apparaît comme une équation de diffusion classique sur  $\tilde{\Omega}$  dont la formulation forte est :

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla w) = g + \sum_{i=1}^{m-1} \nabla \cdot (\kappa_i \nabla w_i) \quad \text{sur } \tilde{\Omega}$$

$$\kappa \nabla w \cdot n = - \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_i \nabla w_i \cdot n \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_N$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_D$$

$\kappa$  apparaît comme un coefficient de diffusion non homogène d'un matériau virtuel. On considère que  $\lambda$  est normalisée, *i.e.*  $\|\lambda\|^2 = \mathbb{E}(\lambda^2) = 1$ . Notant  $\Xi_x = \{y \in \Xi; x \in \Omega(y)\}$ , on a

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \int_{\Xi_x} \lambda^2 dP_\xi + \eta \int_{\Xi \setminus \Xi_x} \lambda^2 dP_\xi \\ &= 1 + (\eta - 1) \int_{\Xi \setminus \Xi_x} \lambda^2 dP_\xi = \eta + (1 - \eta) \int_{\Xi_x} \lambda^2 dP_\xi \end{aligned}$$

On a  $\kappa(x) = 1$  (resp.  $\eta$ ) pour  $x$  tel que  $P_\xi(\Xi_x) = 1$  (resp. 0), *i.e.* si le point  $x$  est presque sûrement à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du domaine. Pour  $x$  tel que  $0 < P_\xi(\Xi_x) < 1$ , on a  $\eta < \kappa(x) < 1$  (comme  $\eta < 1$ ).

**Approximation.** En pratique, on introduit un espace d'approximation élément fini classique  $\tilde{\mathcal{V}}_N \subset \tilde{\mathcal{V}}$  et une approximation  $w_N$  de  $w$  définie par :

$$w_N \in \tilde{\mathcal{V}}_N, \quad a_\lambda(w_N, w^*) = l_\lambda(w^*) \quad \forall w^* \in \tilde{\mathcal{V}}_N \quad (5.32)$$

### 5.2.3.2 Application de l'application $F_m^\diamond$ (équation stochastique algébrique)

Pour un  $w \in \tilde{\mathcal{V}}$  donné,  $\lambda = F_m^\diamond(w)$  est la solution du problème suivant :

$$\lambda \in \mathcal{S}, \quad a_w(\lambda, \lambda^*) = l_w(\lambda^*) \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{S} \quad (5.33)$$

avec

$$a_w(\lambda, \lambda^*) = \mathbb{E}(\lambda^* \alpha \lambda), \quad (5.34)$$

$$l_w(\lambda^*) = \mathbb{E}(\lambda^* (\beta - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i)), \quad (5.35)$$

où

$$\alpha(y) = \int_{\tilde{\Omega}} I^\eta(x, y) \nabla w(x) \cdot \nabla w(x) dx \quad (5.36)$$

$$\beta(y) = \int_{\tilde{\Omega}} I(x, y) f(x, y) w(x) dx \quad (5.37)$$

$$\alpha_i(y) = \int_{\tilde{\Omega}} I^\eta(x, y) \nabla w(x) \cdot \nabla w_i(x) dx \quad (5.38)$$

**Approximation.** En pratique, on introduit un espace d'approximation élément fini stochastique  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$  et une approximation  $\lambda_P$  de  $\lambda$  définie par :

$$\lambda_P \in \mathcal{S}_P, \quad a_w(\lambda_P, \lambda^*) = l_w(\lambda^*) \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{S}_P \quad (5.39)$$

## 5.2.4 Illustration

### 5.2.4.1 Description du problème

On considère l'équation de Poisson (5.1) avec  $f = 1$  et un domaine  $\Omega(\xi) = (0, 2) \times (0, 1) \setminus D(\xi)$ , où  $D(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - c(\xi)| \leq R\}$  est un domaine circulaire aléatoire de rayon  $R = 0.2$  et de centre  $c(\xi) = (1.4\xi + 0.3, 0.5)$ , où  $\xi$  est une variable uniforme sur  $\Xi = (0, 1)$  (voir figure 5.2). On considère le domaine fictif  $\tilde{\Omega} = (0, 2) \times (0, 1)$  tel que  $\Omega(\xi) = \tilde{\Omega} \setminus D(\xi)$ . On considère des conditions de Dirichlet homogènes sur  $\Gamma_D = \partial\tilde{\Omega}$  et des conditions de Neumann homogènes sur  $\Gamma_N(\xi) = \partial D(\xi)$ . On a  $\tilde{\Gamma}_D = \partial\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\Gamma}_N = \emptyset$ . Le cercle est caractérisé par l'iso-zero dans  $\tilde{\Omega}$  de la fonction level-set  $\phi(x, \xi) = R - |x - c(\xi)|$ .

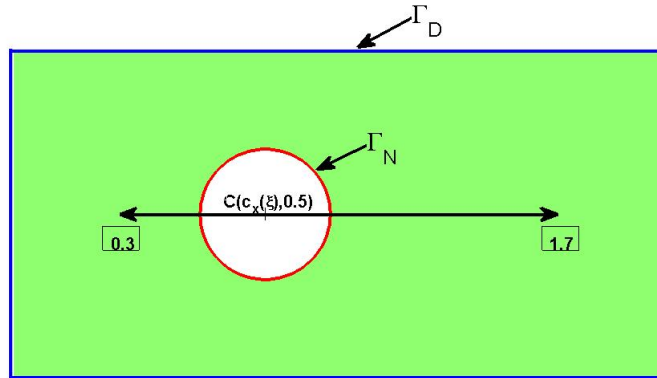


FIGURE 5.2 – Exemple.

Un espace d'approximation élément fini  $\tilde{\mathcal{V}}_N$  est introduit avec un maillage régulier composé de 3660 éléments triangulaires ( $N = 1740$ ). On introduit aussi un espace d'approximation éléments finis de degré 2  $\mathcal{S}_P$  associé à une partition uniforme de  $\Xi$  en 20 éléments ( $P=60$ ). Dans la suite, la solution  $u_{N,P}^\eta \in \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  du problème (5.13) sera simplement notée  $u^\eta$ .

### 5.2.4.2 Analyse de la méthode des domaines fictifs

On commence par une analyse de la convergence de la méthode des domaines fictifs en fonction de  $\eta$ . La solution  $u^\eta$  de (5.13) est comparée avec la solution  $u$  du problème initial (5.4) en introduisant l'indicateur

d'erreur :

$$\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta}; u) = \frac{\|u - u^{\eta}\|_{\Omega}}{\|u\|_{\Omega}} \quad (5.40)$$

avec  $\|\cdot\|_{\Omega}$  la norme naturelle sur  $L^2_{P_{\xi}}(\Xi; L^2(\Omega))$  définie par

$$\|u\|_{\Omega}^2 = \int_{\Xi} \int_{\Omega(y)} u^2 dx dP_{\xi}(y).$$

La convergence de  $u^{\eta}$  est illustrée dans la figure 5.3. On observe une convergence linéaire de  $u^{\eta}$  en fonction de  $\eta$ . Cette convergence linéaire illustre les résultats de convergence obtenus en annexe A.

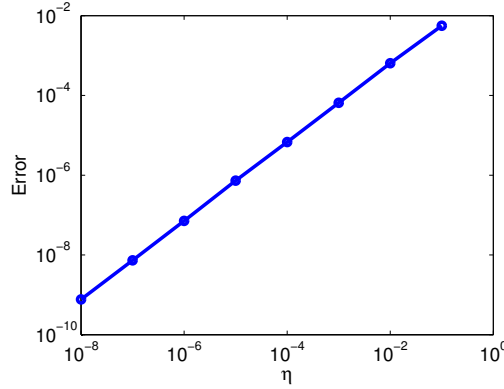


FIGURE 5.3 – Convergence de la solution de la méthode des domaines fictifs : évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta}; u)$  en fonction de  $\eta$ .

Afin d'étudier la condition de transmission sur la frontière  $\Gamma_N$  (mentionnée dans la remarque 4 de l'annexe A), on introduit l'indicateur suivant :

$$i_{BC}(\eta) = \frac{\left\| \frac{1}{mes(\Gamma_N)^{1/2}} \frac{\partial u^{\eta}}{\partial n} \right\|_{\Gamma_N}}{\left\| \frac{1}{mes(\Omega)^{1/2}} \nabla u^{\eta} \right\|_{\Omega}} \quad (5.41)$$

où  $n$  est la normale unité sur  $\Gamma_N$ .  $i_{BC}(\eta)$  est évaluée pour plusieurs maillages spatiaux et est illustrée dans la figure 5.4.

On observe que quand  $\eta$  tend vers 0, la condition de Neumann homogène est de mieux en mieux satisfaite jusqu'à un plateau dû à l'approximation élément fini.

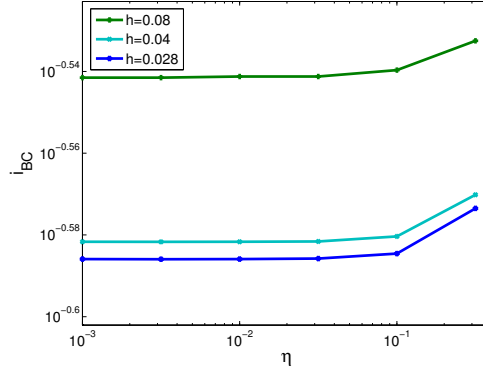


FIGURE 5.4 – Evaluation de la condition de transmission sur  $\Gamma_N$  : évolution de l’indicateur  $i_{BC}(\eta)$  en fonction de  $\eta$  pour différentes tailles  $h$  des éléments du maillage spatial.

### 5.2.4.3 Convergence de la PGD

On adopte maintenant une formulation domaine fictif avec  $\eta = 0.01$  et on considère comme solution de référence l’approximation de Galerkin  $u^\eta \in \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  du problème (5.13).

La PGD progressive  $u_m$  est comparée à la solution de référence  $u^\eta \in \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  avec l’indicateur d’erreur  $\varepsilon_\Omega(u_m; u^\eta)$ . La convergence de la PGD est illustrée dans la figure 5.5. On observe une convergence rapide de la PGD et l’erreur  $\varepsilon_\Omega(u_m; u^\eta) = 10^{-2}$  est atteinte avec un faible rang  $m = 10$ . Les figures 5.6 et 5.7 illustrent respectivement les premières

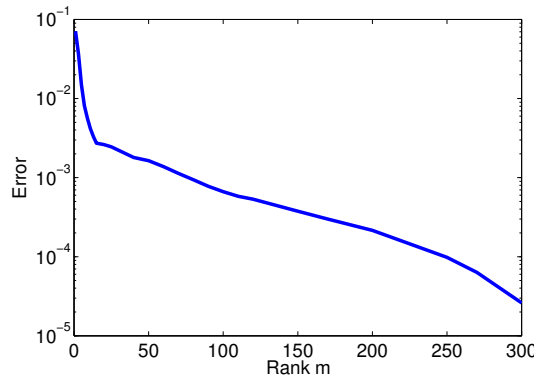


FIGURE 5.5 – Convergence de la PGD progressive : évolution de l’indicateur d’erreur  $\varepsilon_\Omega(u_m; u^\eta)$  en fonction de  $m$ .

fonctions déterministes  $w_i$  et fonctions paramétriques  $\lambda_i$  de la PGD. La

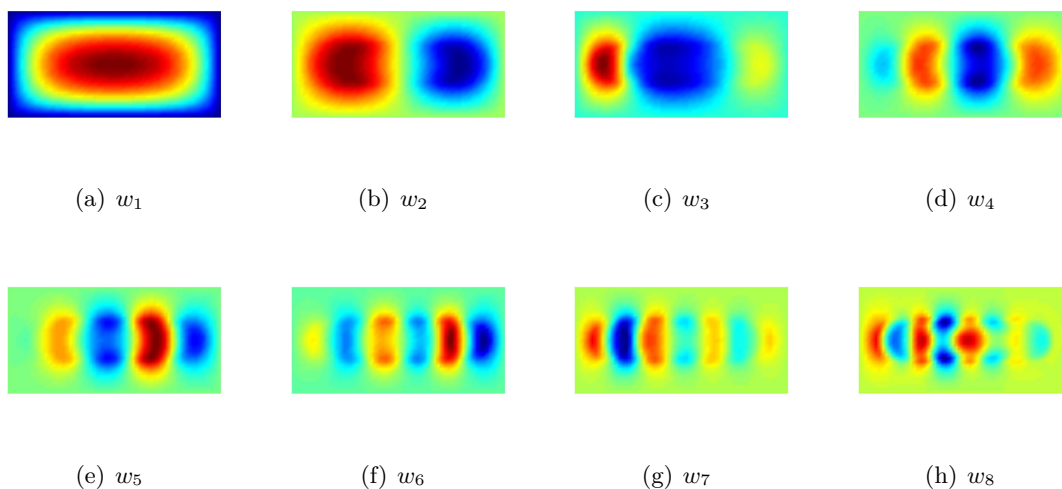


FIGURE 5.6 – Les premiers vecteurs déterministes  $w_i$  de la PGD.

figure 5.8 illustre les premiers coefficients de diffusion  $\kappa(x) = \mathbb{E}(I^\eta \lambda_i^2)$  du matériau virtuel. Les régions noires correspondent à  $\kappa = 1$  et les régions blanches correspondent à  $\kappa = \eta$ . On vérifie que  $\kappa(x) = 1$  pour les points  $x$  presque sûrement dans le domaine aléatoire  $\Omega(\xi)$ . La figure 5.9 illustre la solution de référence  $u^\eta$  et  $u_m$  pour quelques valeurs du rang  $m$ , évaluées pour  $\xi = 0.5$ . De nouveau, elle illustre la bonne convergence de la PGD vers la solution de référence. Finalement, la figure 5.10 illustre la solution de référence  $u^\eta$  et l'approximation PGD  $u_{60}$  pour plusieurs réalisations de  $\xi$ . Une PGD progressive de rang 60 nous donne une approximation précise pour toutes ces réalisations.

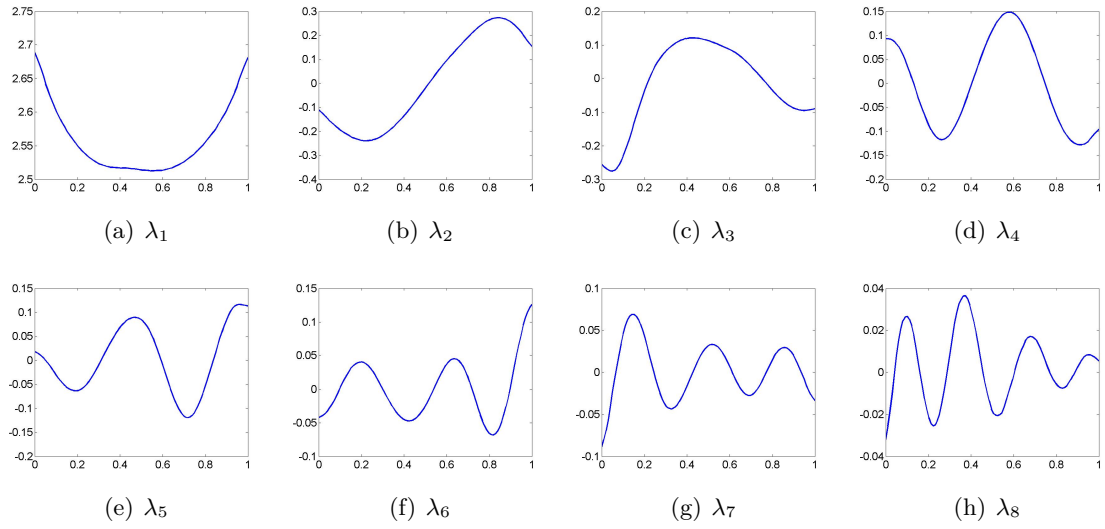


FIGURE 5.7 – Les premières fonctions paramétriques  $\lambda_i(\xi)$  de la PGD.

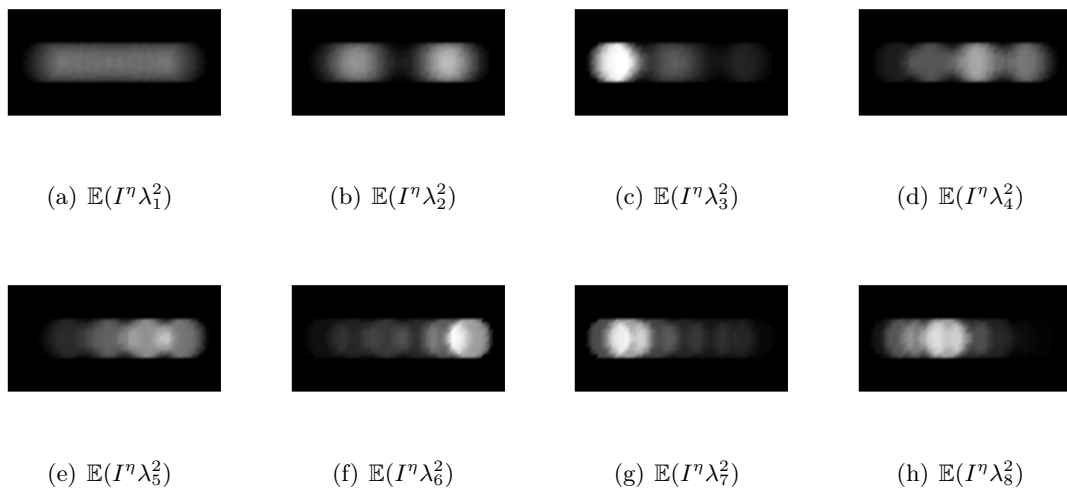


FIGURE 5.8 – Les premiers coefficients de diffusion  $\kappa = \mathbb{E}(I^n \lambda_i^2)$  du matériau virtuel.

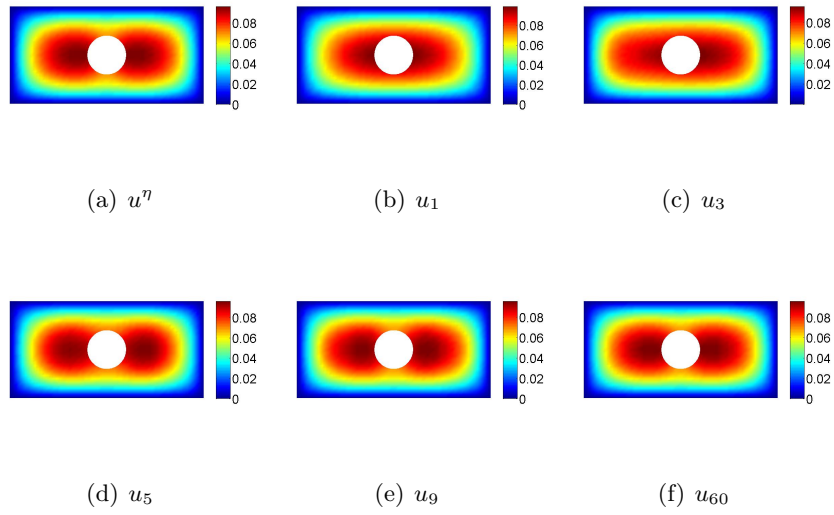


FIGURE 5.9 – Comparaison entre  $u^\eta(\cdot, \xi)$  et  $u_m(\cdot, \xi)$  pour  $\xi = 0.5$ .

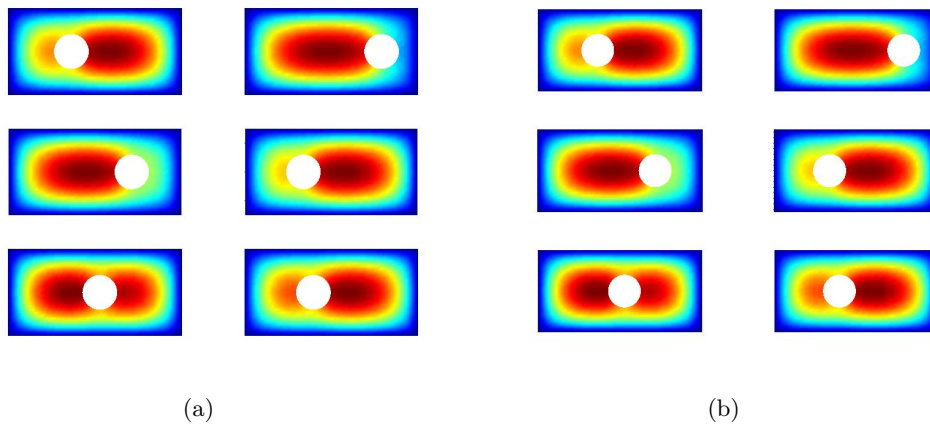


FIGURE 5.10 – Comparaison entre  $u^\eta(\cdot, \xi)$  (a) et  $u_{60}(\cdot, \xi)$  (b) pour 6 réalisations de  $\xi$ .



### 5.3 Représentations séparées des fonctions indicatrices

La méthode PGD appliquée sur le problème (5.13) n'est pas suffisamment efficace si les formes bilinéaire  $A^\eta$  et linéaire  $L$  n'ont pas des représentations séparées. En pratique, quand les espaces d'approximation  $\widetilde{\mathcal{V}}_N \subset \widetilde{\mathcal{V}}$  et  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$  sont introduits, les résolutions des problèmes dans l'algorithme PGD nécessitent une bonne intégration des formes bilinéaire et linéaire, ce qui limite l'utilisation de la méthode à des espaces d'approximation grossiers au niveau stochastique et déterministe. Ce point a également été le point de limitation de l'approche d'approximation directe de Galerkin introduite dans [Nouy *et al.*, 2008], où des techniques spécifiques d'intégration (calcul coûteux) ont été proposées.

On propose ici d'introduire une approximation convenable de la fonction indicatrice  $I$ , pour obtenir une représentation séparée des formes bilinéaire et linéaire afin d'obtenir un gain significatif avec la méthode PGD comparée à un calcul classique de l'approximation de Galerkin du problème (5.13).

#### 5.3.1 Reformulation du problème avec des fonctions indicatrices approximées

On introduit la représentation séparée de rang  $s$  de la fonction indicatrice  $I$  :

$$I(x, \xi) \approx I_s(x, \xi) = \sum_{i=1}^s g_i(x) \chi_i(\xi) \quad (5.42)$$

et on introduit le problème associé :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^{\eta,s} \in \widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \text{ tel que} \\ A_s^\eta(u^{\eta,s}, v) = L_s^\eta(v) \quad \forall v \in \widetilde{\mathcal{V}}^\Xi = \widetilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.43)$$

où  $A_s^\eta$  et  $L_s^\eta$  sont les approximations des formes bilinéaire et linéaire  $A^\eta$  et  $L$ , obtenues en remplaçant  $I$  par  $I_s$  dans les équations (5.16) et (5.15) :

$$A_s^\eta(u, v) = \eta \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu + (1 - \eta) \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} I_s \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu \quad (5.44)$$

$$L_s^\eta(v) = \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} I_s f^\eta v \, d\mu \quad (5.45)$$

où  $f^\eta$  est un prolongement de  $f$  sur  $\tilde{\Omega} \times \Xi$  qui peut possiblement dépendre du paramètre  $\eta$ .

Deux problèmes importants doivent être considérés : la représentation séparée (5.42) doit être telle que (i) le problème (5.43) est bien posé et (ii)  $u^{\eta, s}$  est une “bonne approximation” de la solution  $u^\eta$  du problème (5.13). Ces deux problèmes sont résolus s’il existe un entier  $s'$  tel que pour tout  $s \geq s'$ , on a (presque sûrement)

$$\alpha \leq I_s(x, \xi) \leq \beta \quad (5.46)$$

où  $\beta$  est une constante et  $\alpha$  est une constante telle que

$$\alpha > \frac{-\eta}{1 - \eta} \quad (5.47)$$

Sous les conditions (5.46) et (5.47), (i)  $A_s^\eta$  est continue et coercive donc (5.43) est bien posé, et (ii) la solution  $u^{\eta, s}$  converge avec  $s$  vers la solution  $u^\eta$  du problème (5.13). Ce résultat de convergence est prouvé en annexe A, théorème (A.2).

Notons que dans le problème (5.43), on utilise un prolongement  $f^\eta$  de  $f$  sur  $\tilde{\Omega} \times \Xi$  et la suite  $\{u^{\eta, s}\}_{s \geq 1}$  dépend de ce prolongement. Pour un  $\eta$  fixé, la convergence de la suite  $u^\eta$  est garantie pour n’importe quel choix de ce prolongement mais les propriétés de convergence peuvent être influencées par ce choix. Le théorème (A.2) donne une condition suffisante sur ce prolongement  $f^\eta$  pour obtenir des propriétés de convergence dépendant seulement de la convergence de la suite des fonctions indicatrices approximées  $\{I_s\}_{s \geq 1}$ .

### 5.3.2 Représentations séparées de $I_s$

On examine maintenant le problème de la construction de la représentation séparée (5.42) de  $I_s$  vérifiant (5.46). On présente deux alternatives.

La première est la décomposition de Karhunen-Loève, pour laquelle des hypothèses restrictives sur  $I$  sont nécessaires. La deuxième est une définition originale des représentations séparées sous contraintes, qui peut être considérée comme une généralisation de la décomposition de Karhunen-Loève afin d'imposer des contraintes.

### 5.3.2.1 Décomposition de Karhunen-Loève de la fonction indicatrice

La représentation séparée  $I_s$  peut être définie comme une décomposition de Karhunen-Loève classique de  $I$ , définie par

$$\|I - I_s\|_{\tilde{\Omega}}^2 = \min_{\substack{g_1, \dots, g_s \in L^2(\tilde{\Omega}) \\ \chi_1, \dots, \chi_s \in L^2_{P_\xi}(\Xi)}} \|I - \sum_{i=1}^s g_i \chi_i\|_{\tilde{\Omega}}^2 \quad (5.48)$$

où  $\|\cdot\|_{\tilde{\Omega}}$  est la norme usuelle sur  $L^2_{\mu}(\tilde{\Omega} \times \Xi)$ , définie par

$$\|I\|_{\tilde{\Omega}}^2 = \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} I^2 d\mu$$

On note  $c_I : \overline{\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de corrélation de  $I$ , définie par

$$c_I(x, x') = \int_{\Xi} I(x, y) I(x', y) dP_{\xi}(y) = \mathbb{E}(I(x, \xi) I(x', \xi))$$

Les fonctions  $g_i$  sont les solutions du problème aux valeurs propres

$$\int_{\tilde{\Omega}} c_I(x, x') g_i(x') dx' = \gamma_i g_i(x) \quad (5.49)$$

Les fonctions propres  $\{g_i\}_{i \geq 1}$  forment une base de  $L^2_{\mu}(\tilde{\Omega} \times \Xi)$  et sont orthogonales pour le produit scalaire naturel dans  $L^2_{\mu}$ . Si les  $g_i$  sont normalisées, les fonctions associées  $\chi_i$  sont obtenues par

$$\chi_i(y) = \int_{\tilde{\Omega}} I(x, y) g_i(x) dx$$

La suite  $I_s$  converge vers  $I$  dans  $L^2_{\mu}$  mais cela ne garantit pas la propriété (5.46). Mais, sous des hypothèses convenables sur la fonction  $I$ , discutées

en annexe B, on a une convergence uniforme de  $I_s$  vers  $I$ , *i.e.*<sup>5</sup>

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|I - I_s\|_{L_{P_\xi}^\infty(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))} = 0$$

ce qui signifie que, pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $s'(\epsilon)$  tel que pour  $s \geq s'(\epsilon)$ , on a (presque partout et presque sûrement)

$$|I - I_s| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon \leq I_s \leq 1 + \epsilon$$

ce qui implique les propriétés désirées (5.46) et (5.47) pour  $\epsilon < \frac{\eta}{1-\eta}$ . L'utilisation d'une décomposition de Karhunen-Loève classique de  $I$  est donc théoriquement possible, sous la condition de choisir un rang suffisamment élevé afin de satisfaire la propriété (5.46). Mais, en pratique, la convergence  $L^\infty$  est très lente et on a besoin d'un rang très élevé afin d'atteindre une précision  $\epsilon < \frac{\eta}{1-\eta}$  quand on utilise des petites valeurs de  $\eta$  (comme illustré plus loin).

### 5.3.2.2 Représentation séparée sous contraintes de la fonction indicatrice

On introduit maintenant une définition de la représentation séparée (5.42) qui tente de préserver la contrainte (5.46) pour n'importe quel rang  $s$ . Une analyse détaillée de cette définition peut être trouvée dans [Nouy et Falco, 2012].

On propose de remplacer la définition (5.48) de la décomposition classique de Karhunen-Loève par la définition suivante. Commencant par  $I_0 = 0$ , on définit pour  $s \geq 1$ ,

$$(g_s, \chi_s) \in \arg \min_{\substack{g \in L^2(\tilde{\Omega}) \\ \chi \in L_{P_\xi}^2(\Xi)}} \frac{1}{2} \|I - I_{s-1} - g\chi\|_{\tilde{\Omega}}^2 + F(I_{s-1} + g\chi) \quad (5.50)$$

où  $F(I)$  est une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et coercive sur  $V = L^2(\tilde{\Omega}) \otimes L_{P_\xi}^2(\Xi)$  qui prend des valeurs élevées pour les fonctions non admissibles  $I$ , *i.e.* qui ne vérifient pas (5.46).

On introduit la fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par  $J(z) =$

---

5.  $\|I\|_{L_{P_\xi}^\infty(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))} = P_\xi - \text{ess sup}_{\xi \in \Xi} \|I(x, \cdot)\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}$ , avec  $P_\xi - \text{ess sup}_{\xi \in \Xi} f(\xi) = \inf\{a \in \mathbb{R}; P_\xi(\{y \in \Xi; f(y) > a\}) = 0\}$

$\frac{1}{2}\|I - z\|_{\tilde{\Omega}}^2 + F(z)$ . A partir des propriétés de  $F$  et de la norme  $\|\cdot\|_{\tilde{\Omega}}$ ,  $J$  est une fonctionnelle semi-continue inférieurement, strictement convexe et coercive sur  $V$ . Soit  $\mathcal{R}_1 = \{g\chi; g \in L^2(\tilde{\Omega}), \chi \in L^2_{P_\xi}(\Xi)\} \subset V$  l'ensemble des tenseurs de rang un dans l'espace produit tensoriel de Hilbert  $V$ . L'équation (5.50) définit  $z_s = g_s\chi_s \in \mathcal{R}_1$  tel que :

$$J(I_{s-1} + z_s) = \min_{z \in \mathcal{R}_1} J(I_{s-1} + z) \quad (5.51)$$

L'existence d'un minimiseur  $z_s \in \mathcal{R}_1$  est assurée par les propriétés de  $J$  et par le fait que  $\mathcal{R}_1$  est faiblement fermé dans  $V$  [Falco et Nouy, 2011].

**Choix de la fonctionnelle  $F$ .** Dans le contexte actuel, on choisit

$$F(I) = \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} f(I(x, y)) d\mu(x, y) \quad (5.52)$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est une fonction convexe, semi-continue inférieurement et coercive qui vaut 0 dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  et prend des valeurs élevées à l'extérieur de cet intervalle. Idéalement, on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ +\infty & \text{si } x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

mais en pratique, on choisira une régularisation deux fois différentiable de cette fonction :

$$f(x) = \epsilon^{-1} (\max(x - \beta, 0)^2 + \max(\alpha - x, 0)^2) \quad (5.53)$$

**Algorithme.** Afin de chercher un minimiseur  $z_s = g_s\chi_s$  du problème (5.51), on peut utiliser une procédure de minimisation alternée consistant à résoudre des problèmes successifs de type  $\min_g J(I_{s-1} + g\chi)$  pour un  $\chi$  fixé, et  $\min_\chi J(I_{s-1} + g\chi)$  pour un  $g$  fixé. Chaque sous-problème est un problème d'optimisation non linéaire dont l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\langle J'(I_{s-1} + g\chi), g^*\chi \rangle = 0 \quad \forall g^*, \quad (5.54)$$

$$\langle J'(I_{s-1} + g\chi), g\chi^* \rangle = 0 \quad \forall \chi^*, \quad (5.55)$$

où

$$\begin{aligned} \langle J'(I_{s-1} + g\chi), g^* \chi^* \rangle &= (g\chi + I_{s-1} - I, g^* \chi^*) + \langle F'(I_{s-1} + g\chi), g^* \chi^* \rangle \\ &= \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} (g\chi + I_{s-1} - I) g^* \chi^* d\mu + \int_{\tilde{\Omega} \times \Xi} f'(I_{s-1} + g\chi) g^* \chi^* d\mu \end{aligned} \quad (5.56)$$

Les équations d'Euler-Lagrange (5.54) et (5.55) sont des équations non linéaires qui peuvent être résolues avec une méthode de Newton.

**Version algébrique.** En pratique, la fonction indicatrice est approximée sur une base de dimension finie :

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p I_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y). \quad (5.57)$$

Si on choisit pour  $\varphi_i$  et  $\psi_j$  des bases d'interpolation,  $I_{ij}$  correspond à la valeur de la fonction indicatrice en un point donné  $x_i$  et pour une valeur donnée  $y_j$  du paramètre. Ensuite on transforme le point de vue continu en un point de vue discret, qui consiste en une décomposition sous contraintes de la matrice  $(I_{ij})$ , définie par

$$(g_s, \chi_s) \in \arg \min_{\substack{g \in \mathbb{R}^n \\ \chi \in \mathbb{R}^p}} \frac{1}{2} \|I - I_{s-1} - g\chi^T\|_2^2 + F(I_{s-1} + g\chi^T) \quad (5.58)$$

avec  $\|I\|_2^2 = \sum_{i,j} I_{ij}^2$  et  $F(I) = \sum_{i,j} f(I_{ij})$ . Avec cette formulation, on essaie d'imposer des contraintes sur les valeurs de  $(I_s)_{ij}$  ce qui est équivalent à imposer la contrainte (5.46) aux points d'interpolation.

**Définition alternative.** Plutôt que la définition progressive (5.50), on peut aussi adopter la définition directe suivante :

$$J(I_s) = \min_{\substack{g_1, \dots, g_s \in L^2(\tilde{\Omega}) \\ \chi_1, \dots, \chi_s \in L^2_{P_\xi}(\Xi)}} J\left(\sum_{i=1}^s g_i \chi_i\right) \quad (5.59)$$

qui conduit en pratique à des meilleures propriétés de convergence de la suite  $I_s$ . Une procédure de minimisation alternée peut aussi être utilisée pour la résolution de ce problème d'optimisation. Cependant, la construction de  $I_s$  entraîne des coûts de calcul plus élevés que la définition progressive.

### 5.3.3 Illustration

On considère ici le même problème qu'en section 5.2.4 (avec  $\eta = 0.01$ ). On choisit un prolongement  $f^\eta = 1$  sur tout le domaine fictif  $\tilde{\Omega}$ . Une approximation de la fonction indicatrice sous la forme (5.57) est introduite où on choisit pour  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  une base élément fini linéaire associée au maillage de  $\tilde{\Omega}$  ( $n = 1740$ ) et pour  $\{\psi_j\}_{j=1}^p$  une base d'interpolation linéaire associée à une grille uniforme de  $\Xi$  composée de 61 points ( $p = 61$ ).  $I_{ij}$  correspond à la valeur de la fonction indicatrice en un point donné  $x_i$  et pour une valeur donnée  $y_j$  du paramètre. Afin d'analyser la convergence de la représentation séparée de la fonction indicatrice, on introduit l'indicateur d'erreur suivant :

$$\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(I; I^*) = \frac{\|I - I^*\|_{\tilde{\Omega}}}{\|I^*\|_{\tilde{\Omega}}}$$

La solution est recherchée ici dans l'espace d'approximation introduit pour la fonction indicatrice approximée, avec ainsi  $N = n = 1740$  et  $P = p = 61$ .

#### 5.3.3.1 Représentation séparée sans contraintes et problème mal posé

On note  $I_s$  la représentation séparée sans contraintes de  $I$ .  $u^\eta$  et  $u^{\eta,s}$  sont respectivement les solutions des problèmes (5.13) avec  $I$  et du problème (5.43) avec  $I_s$ . La figure 5.11(a) illustre la convergence de la représentation séparée sans contraintes  $I_s$  en fonction  $s$  et la figure 5.11(b) illustre les valeurs maximales et minimales de  $I_s$ , ainsi que la valeur critique  $\frac{-\eta}{1-\eta}$ . On note que dans le cas de dimension finie, la représentation séparée  $I_s$  est égale à  $I$  pour  $s \geq \min(n, p) = 61$ . On observe que la condition  $I_s(x, \xi) > \frac{-\eta}{1-\eta}$  n'est pas vérifiée pour  $s < 61$ . Donc, le problème associé (5.43) est mal posé pour  $s < 61$ . On observe l'impact du problème mal posé dans la figure 5.12, qui illustre le comportement erratique de la suite  $u^{\eta,s} \in \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  (grande différence entre solutions consécutives  $u^{\eta,s}$  et  $u^{\eta,s+1}$  associées à des fonctions très proches  $I_s$  et  $I_{s+1}$ ). On note que dans un cadre continu (dans  $\tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$ ), en remplaçant  $I$  par  $I_s$ , la solution  $u^{\eta,s}$  n'existe pas. Si on utilise la méthode PGD pour calculer la solution du problème (5.43) en utilisant  $I_s$  avec  $s = 20 < 61$  tel que le problème

est mal posé, on observe une divergence de la PGD, comme l'illustre la figure 5.13.

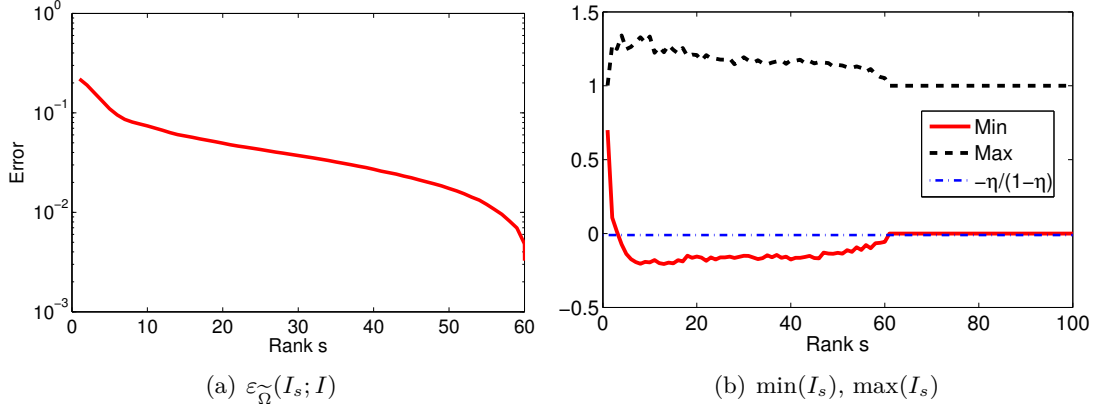


FIGURE 5.11 – Séparation sans contraintes : évolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(I_s; I)$  en fonction de  $s$  (a) et valeurs maximales et minimales de  $I_s$  (b).

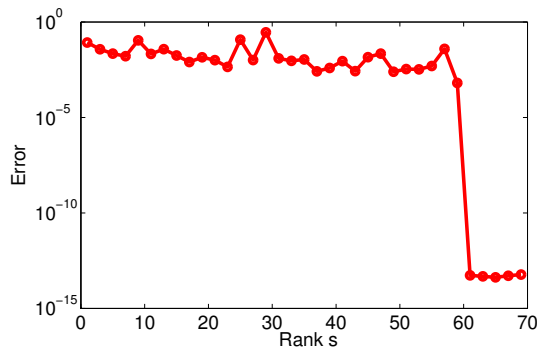


FIGURE 5.12 – Séparation sans contraintes : l'erreur en solution  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,s}; u^{\eta})$  en fonction du rang  $s$  de  $I_s$ .

### 5.3.3.2 Séparation sous contraintes

On considère maintenant la représentation séparée sous contraintes  $I_s$  de  $I$  avec une fonctionnelle  $F$  définie par (5.52) et (5.53), et dépendant du paramètre  $\epsilon > 0$ . On fixe les bornes supérieures et inférieures désirées :  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ . La figure 5.14 montre la convergence  $L^2$  de  $I_s$  vers  $I$ , pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . On voit que l'augmentation de la valeur de  $\epsilon$  entraîne une convergence lente de  $I_s$ . Cependant, comme illustré dans la figure 5.15, la représentation séparée sous contraintes vérifie les contraintes désirées de plus en plus rapidement quand  $\epsilon$  augmente. Avec



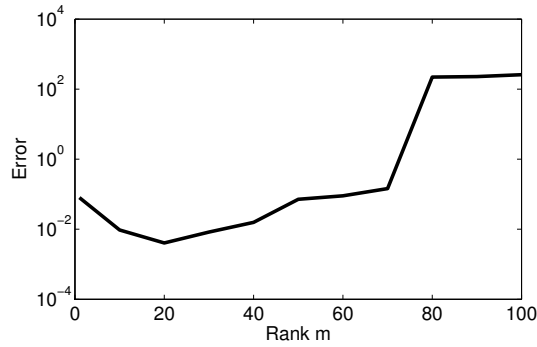


FIGURE 5.13 – Séparation sans contraintes : évolution de l’erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u^{\eta})$  en fonction de  $m$  où  $u_m$  est la PGD progressive de rang  $m$  en remplaçant  $I$  par  $I_s$  avec  $s = 20$ .

$\epsilon = 1000$  (resp.  $\epsilon = 200$ ), la condition  $I_s(x, \xi) > \frac{-\eta}{1-\eta}$  est satisfaite pour  $s > 9$  (resp.  $s > 41$ ). Un problème bien posé peut alors être obtenu avec un faible rang de  $I_s$  en choisissant un paramètre  $\epsilon$  suffisamment élevé.

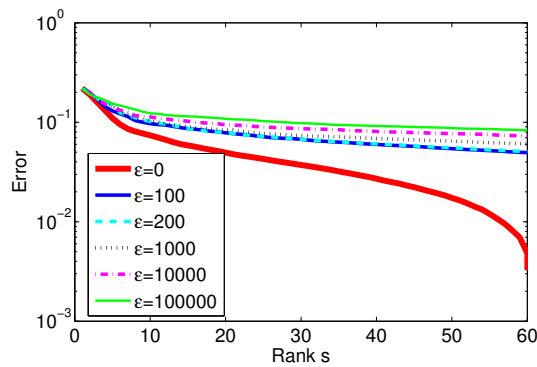


FIGURE 5.14 – Séparation sous contraintes : évolution de l’indicateur d’erreur  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(I_s; I)$  en fonction de  $s$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

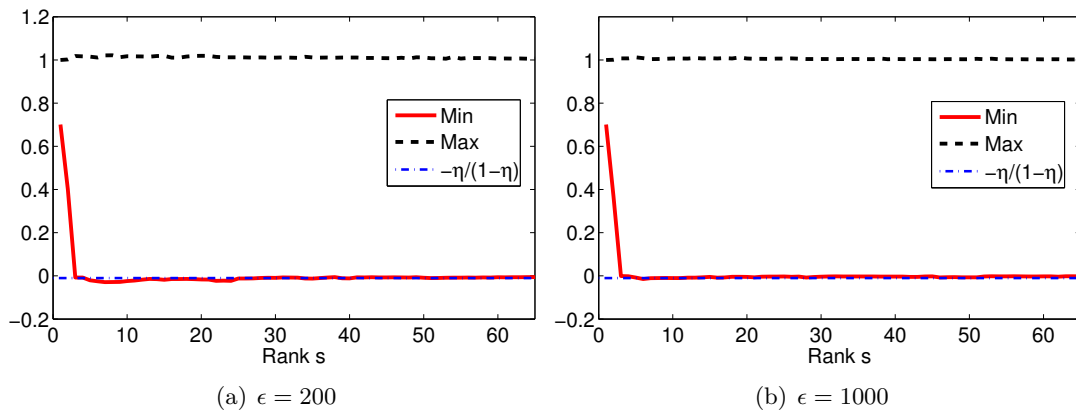


FIGURE 5.15 – Séparation sous contraintes : Valeurs maximales et minimales  $I_s$  pour  $\epsilon = 200$  (a) et  $\epsilon = 1000$  (b).

### 5.3.3.3 Régularisation de la fonction indicatrice

On introduit maintenant une version régularisée  $I^r$  de la fonction indicatrice  $I$ , et on note  $u^{\eta,r}$  la solution associée de (5.13). Le but de cette régularisation est d'améliorer les propriétés de convergence des représentations séparées. On définit la régularisation par  $I^r = F^r(I)$ , où  $F^r$  est une fonction sinus tronquée définie par :

$$F^r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \sin(\frac{\pi x}{2l})) & \text{si } -l \leq x \leq l \\ 0 & \text{si } x < -l \\ 1 & \text{si } x > l \end{cases} \quad (5.60)$$

La figure 5.16 montre l'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r}; u^{\eta})$  en fonction du paramètre  $l$  de la fonction  $F^r$ . On choisit maintenant  $l = 0.1$ , qui correspond à l'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r}; u^{\eta}) \leq 10^{-2}$ . L'approximation séparée de rang  $s$  de  $I^r$  est notée  $I_s^r$ , et la solution correspondante est notée  $u^{\eta,r,s}$  (solution de (5.43) avec  $I_s$  remplacée par  $I_s^r$ ). La figure 5.17 illustre l'amélioration significative

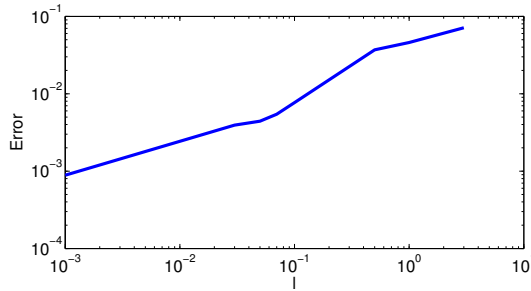


FIGURE 5.16 – Fonction indicatrice régularisée. l'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r}; u^{\eta})$  en fonction de  $l$ .

en fonction de  $s$  des représentations séparées (sans contraintes ou avec contrainte  $\epsilon = 1000$ ) quand on introduit la régularisation de la fonction indicatrice. La figure 5.18 montre les valeurs maximales et minimales des représentations séparées  $I_s^r$ . On observe que pour la décomposition sans contraintes, la condition  $I_s^r(x, \xi) > \frac{-\eta}{1-\eta}$  est atteinte pour  $s > 22$ . On rappelle que sans régularisation, cette condition n'était pas remplie pour  $s < 61$ . En ce qui concerne la décomposition avec contraintes, la condition est satisfaite pour un faible rang  $s = 9$ . De cette étude, on déduit que l'utilisation de la régularisation combinée avec la représentation séparée sous contraintes permet d'obtenir une bonne convergence des représenta-

tions séparées  $I_s^r$  et un problème bien posé avec un rang trais faible de décomposition.

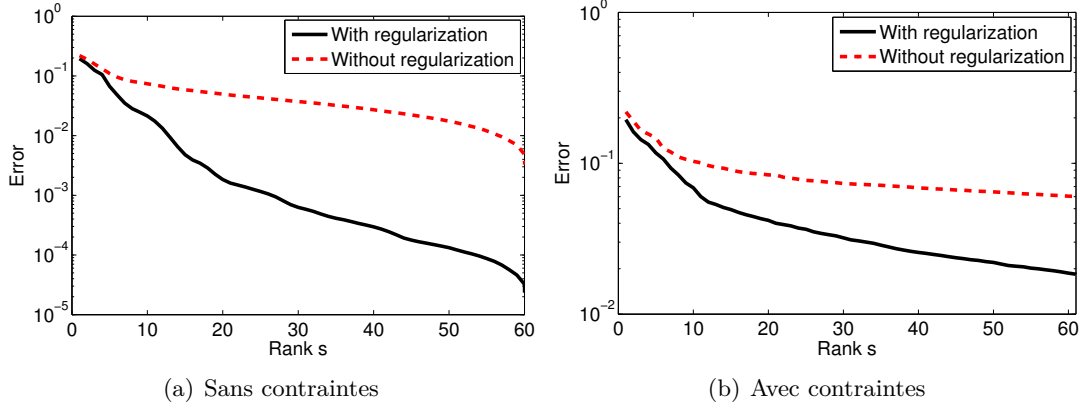


FIGURE 5.17 – Influence de la régularisation ( $l = 0.1$ ) sur la convergence des représentations séparées : indicateurs d'erreur  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(I_s; I)$  et  $\varepsilon_{\tilde{\Omega}}(I_s^r; I^r)$  pour des séparations sans contraintes (a) et des séparations avec contraintes avec  $\epsilon = 1000$  (b).

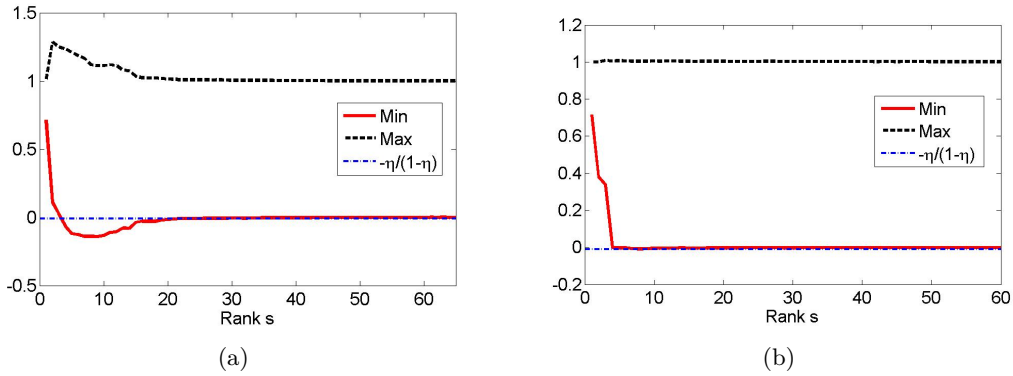


FIGURE 5.18 – Valeurs maximales et minimales de  $I_s^r$  pour une décomposition sans contraintes (a) et une décomposition avec contraintes avec  $\epsilon = 1000$  (b).

Dans la suite on utilise une décomposition sous contraintes  $I_s^r$  de la fonction indicatrice régularisée  $I^r$  en utilisant  $\epsilon = 1000$  et  $l = 0.1$ . La figure 5.19 montre la convergence en fonction de  $s$  de  $u^{\eta,r,s}$  vers  $u^{\eta,r}$ . Pour  $s = 39$ , on obtient une erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r,s}; u^{\eta,r})$  plus petite que  $10^{-2}$ .

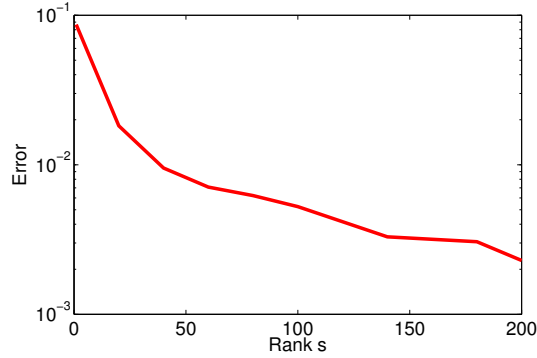


FIGURE 5.19 – L’indicateur d’erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r,s}; u^{\eta,r})$  en fonction de  $s$ , où  $u^{\eta,r,s}$  est la solution associée avec une représentation séparée sous contraintes  $I_s^r$  (avec  $\epsilon = 1000$ ) de la fonction régularisée  $I^r$  (avec  $l = 0.1$ ).

### 5.3.3.4 Application de la PGD

On applique maintenant la PGD progressive sur le problème (5.43) avec  $I_s^r$ , une représentation séparée de la fonction indicatrice régularisée  $I^r$  de  $I$ . On utilise un paramètre de régularisation  $l = 0.1$  correspondant à une erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r}; u^{\eta}) \leq 10^{-2}$  et on effectue une représentation séparée sous contraintes avec  $\epsilon = 1000$  et un rang  $s = 39$ , qui correspond à une erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u^{\eta,r,s}; u^{\eta,r}) \leq 10^{-2}$ . Cette représentation assure un problème bien posé. Dans la suite, on note  $u_m$  l’approximation PGD (progressive) de rang  $m$  de  $u^{\eta,r,s}$ , associée à la fonction indicatrice  $I_s^r$ . La figure 5.20 illustre la convergence en fonction de  $m$  de  $u_m$  vers  $u^{\eta,r,s}$ . On note que  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u^{\eta,r,s}) \leq 10^{-2}$  est satisfait avec un rang très faible  $m = 8$ .

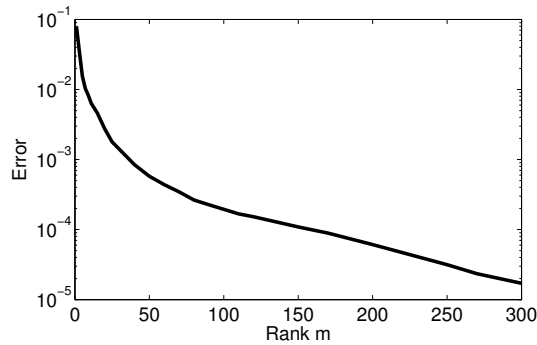


FIGURE 5.20 – Convergence de la PGD progressive appliquée au problème associé à la fonction indicatrice approximée  $I_s^r$  (représentation séparée sous contraintes de la fonction indicatrice régularisée avec  $\epsilon = 1000$ ,  $s = 39$ , et  $l = 0.1$ ) : évolution de l’indicateur d’erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u^{\eta,r,s})$  en fonction de  $m$ .

## 5.4 Exemple : domaine avec deux frontières sinusoidales aléatoires

### 5.4.1 Description du problème

La méthodologie générale est maintenant appliquée sur le problème de Poisson (5.1) avec  $f = 1$  et un domaine aléatoire  $\Omega(\xi)$  délimité par deux lignes verticales et deux courbes sinusoidales aléatoires (voir Figure 5.21).

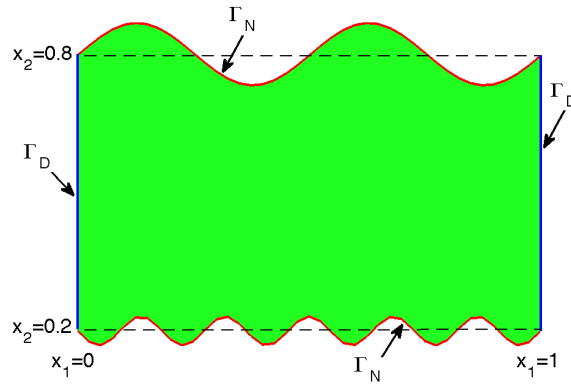


FIGURE 5.21 – Domaine avec deux frontières sinusoidales aléatoires : géométrie et conditions aux limites.

Le domaine est caractérisé par

$$\Omega(\xi) = \{x = (x_1, x_2) \in (0, 1) \times \mathbb{R}; f_{inf}(x_1, \xi_2) < x_2 < f_{sup}(x_1, \xi_1)\}$$

avec

$$f_{sup}(x_1, \xi_1) = 0.8 + 0.2 \frac{\sin(12\pi x_1 \xi_1)}{6\xi_1 + 1}$$

$$f_{inf}(x_1, \xi_2) = 0.2 + 0.2 \frac{\sin(12\pi x_1 \xi_2)}{6\xi_2 + 1}$$

et où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont deux variables uniformes indépendantes sur  $\Xi_1 = (0, 1)$  et  $\Xi_2 = (0, 1)$  respectivement. La frontière de Dirichlet homogène  $\Gamma_D$  est composée des arêtes verticales  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 1$ . La frontière de Neumann aléatoire  $\Gamma_N(\xi)$  est composée de deux courbes sinusoidales  $x_2 = f_{sup}(x_1, \xi_1)$  et  $x_2 = f_{inf}(x_1, \xi_2)$ .

On introduit un domaine fictif carré  $\widetilde{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1)$ . On choisit pour  $\widetilde{\Gamma}_D$  les arrêtes verticales  $\{0\} \times (0, 1)$  et  $\{1\} \times (0, 1)$ , et pour  $\widetilde{\Gamma}_N$  les arrêtes horizontales  $(0, 1) \times \{0\}$  et  $(0, 1) \times \{1\}$ . Les deux courbes sinusoïdales sont respectivement caractérisées par l'iso-zéro de deux level-sets indépendantes

$$\phi_1(x, \xi_1) = x_2 - f_{sup}(x_1, \xi_1), \quad \phi_2(x, \xi_2) = f_{inf}(x_1, \xi_2) - x_2,$$

et le domaine  $\Omega(\xi)$  est caractérisé par

$$\Omega(\xi) = \{x \in \widetilde{\Omega}; \phi(x, \xi) < 0\}, \quad \phi(x, \xi) = \max\{\phi_1(x, \xi_1), \phi_2(x, \xi_2)\}.$$

On introduit un espace d'approximation élément fini  $\widetilde{\mathcal{V}}_N$ , avec un maillage régulier composé de 7200 éléments triangulaires et  $N = 3721$  noeuds, notés  $\{x_i\}_{i=1}^N$ . L'espace d'approximation  $\mathcal{S}_P$  est obtenu par la tensorisation des bases d'interpolation linéaires par morceaux associées à des grilles uniformes de  $\Xi_1$  et de  $\Xi_2$ , chaque grille contenant 101 points. La grille d'interpolation résultante sur  $\Xi_1 \times \Xi_2$  est composée de  $P = 101 \times 101 = 10201$  points, notés  $\{\xi^k\}_{k=1}^P$ . On choisit un paramètre  $\eta = 0.01$  et un prolongement  $f^\eta = 1$  sur  $\widetilde{\Omega}$ .

## 5.4.2 Application de la PGD

### 5.4.2.1 Représentation séparée de la fonction indicatrice

La fonction indicatrice de  $\Omega(\xi)$  peut être écrite  $I(x, \xi) = H(-\phi(x, \xi))$ . Si on applique directement à cette fonction la decomposition de Karhunen-Loève (sous contraintes ou non) on peut observer une convergence très lente. Afin de diminuer la complexité de la représentation de  $I$  (et donc le rang des représentations séparées des formes bilinéaire et linéaire), on décompose le domaine  $\Omega(\xi)$  en deux sous domaines  $\Omega_1(\xi_1) \subset \widetilde{\Omega}_1 = (0, 1) \times (0.5, 1)$  et  $\Omega_2(\xi_2) \subset \widetilde{\Omega}_2 = (0, 1) \times (0, 0.5)$ . Ainsi, on peut introduire deux fonctions indicatrices  $I_1 : \widetilde{\Omega}_1 \times \Xi_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $I_2 : \widetilde{\Omega}_2 \times \Xi_2 \rightarrow \mathbb{R}$  associées aux domaines  $\Omega_1(\xi_1)$  et  $\Omega_2(\xi_2)$  respectivement. Les formes bilinéaires et linéaires peuvent alors être obtenues en décomposant l'intégrale sur  $\widetilde{\Omega}$  en intégrales sur  $\widetilde{\Omega}_1$  et  $\widetilde{\Omega}_2$ . Afin d'améliorer les propriétés de convergence de leurs représentations séparées, les fonctions indicatrices sont régularisées comme décrit dans la section 5.3.3.3. En ce qui concerne le paramètre  $l$

de la fonction de régularisation  $F^r$  introduite dans (5.60), on propose de choisir  $l = \frac{L}{10}$ , où  $L$  est la longueur caractéristique du problème étudié défini par

$$L = \max_{i \in \{1 \dots N\}} \left( \max_{j \in \{1 \dots P\}} \phi(x_i, \xi^j) - \min_{j \in \{1 \dots P\}} \phi(x_i, \xi^j) \right),$$

où  $x_i$  sont les noeuds du maillage éléments finis et où les  $\xi^j$  sont les noeuds de la grille stochastique d'interpolation. Pour l'exemple étudié, la valeur de  $l$  trouvée est 0.07. Elle correspond à une erreur  $\varepsilon_\Omega(u^{\eta,r}; u^\eta) = 3.10^{-2}$ . On procède ensuite au calcul des représentations séparées de rang  $s$  sous contraintes  $I_{1,s}^r$  et  $I_{2,s}^r$  des fonctions régularisées  $I_1^r$  et  $I_2^r$  respectivement, en utilisant  $s = 100$  et  $\epsilon = 1000$  pour chacune des deux fonctions. Par abus de notation, on note  $I_s^r$  l'approximation résultante de la fonction indicatrice  $I$ , et par  $u^{\eta,r,s}$  l'approximation de Galerkin dans  $\widetilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$  du problème (5.43), avec  $I_s$  remplacée par  $I_s^r$ .

#### 5.4.2.2 Construction de la PGD

On peut maintenant construire la suite PGD progressive  $u_m$ , qui converge théoriquement vers  $u^{\eta,r,s} \in \widetilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$ , qui est considéré comme une solution de référence<sup>6</sup>. La figure 5.22 illustre la convergence de  $u_m$  vers  $u^{\eta,r,s}$ . On note qu'une erreur  $\varepsilon_\Omega(u_m; \tilde{u}^{\eta,r,s}) \leq 3.10^{-2}$  est atteinte pour un faible rang  $m = 12$ . Les figures 5.23 et 5.24 montrent respectivement les premières fonctions déterministes  $w_i$  et les fonctions stochastiques paramétriques  $\lambda_i(\xi)$  de la PGD.

**Remarque 5.2** *On remarque une très grande irrégularité des fonctions paramétriques  $\lambda_i(\xi)$ , et donc de  $u_m(x, \xi)$  en fonction de  $\xi$ . Cela est dû aux paramétrisations particulières des fonctions sinusoïdales. La capture de cette irrégularité dans cette solution nécessite des espaces d'approximations  $\mathcal{S}_P$  de très grande dimension, ce qui est rendu abordable par l'utilisation des approximations séparées.*

La figure 5.25 montre la solution de référence  $u^{\eta,r,s}$  et les PGD  $u_m$  pour différents rangs  $m$  et pour des réalisations particulières  $\xi$ . Finalement, La

6. En pratique, on utilise comme solution de référence une très bonne approximation de  $u^{\eta,r,s}$ , obtenue avec une approximation PGD de rang élevé.



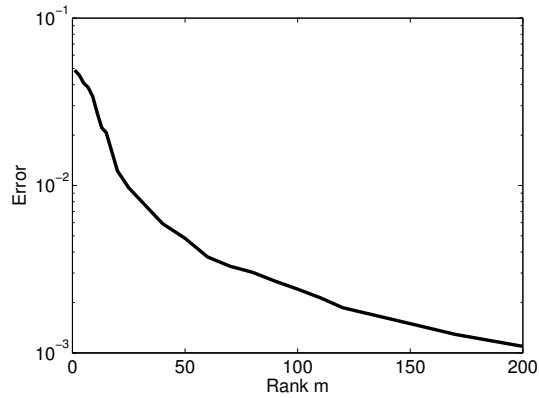


FIGURE 5.22 – Convergence de la PGD pour le problème avec les fonctions indicatrices approximées  $I_{1,s}^r$  et  $I_{2,s}^r$  (Représentations séparées sous contraintes avec  $\epsilon = 1000$  et  $s = 100$ ). Evolution de l'indicateur d'erreur  $\varepsilon_{\Omega}(u_m; u^{\eta,r,s})$  en fonction de  $m$ .

figure 5.26 montre la solution de référence  $u^{\eta,r,s}$  et l'approximation PGD  $u_{60}$  pour plusieurs réalisations  $\xi$ . La PGD donne une description précise de la solution pour une représentation séparée de rang faible.

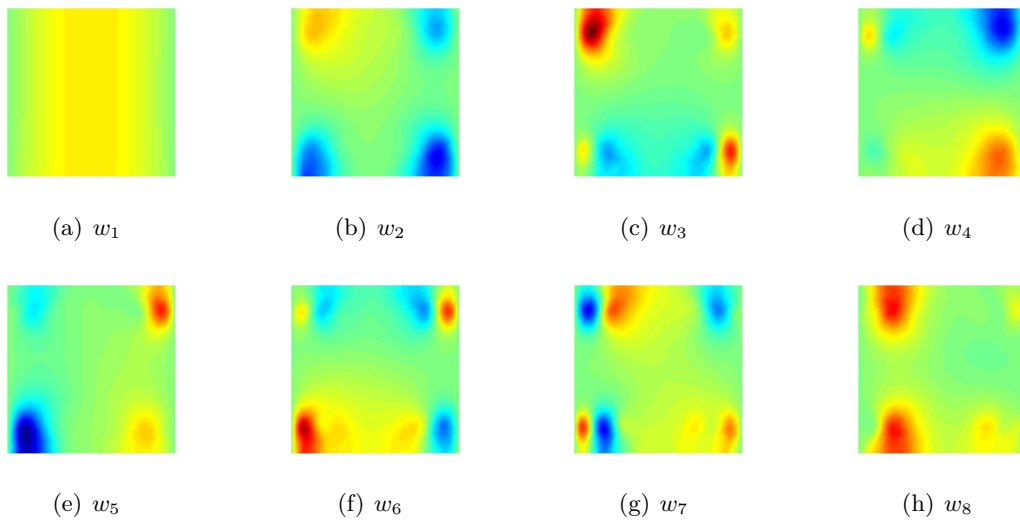


FIGURE 5.23 – Fonctions déterministes  $w_i$  de la PGD.

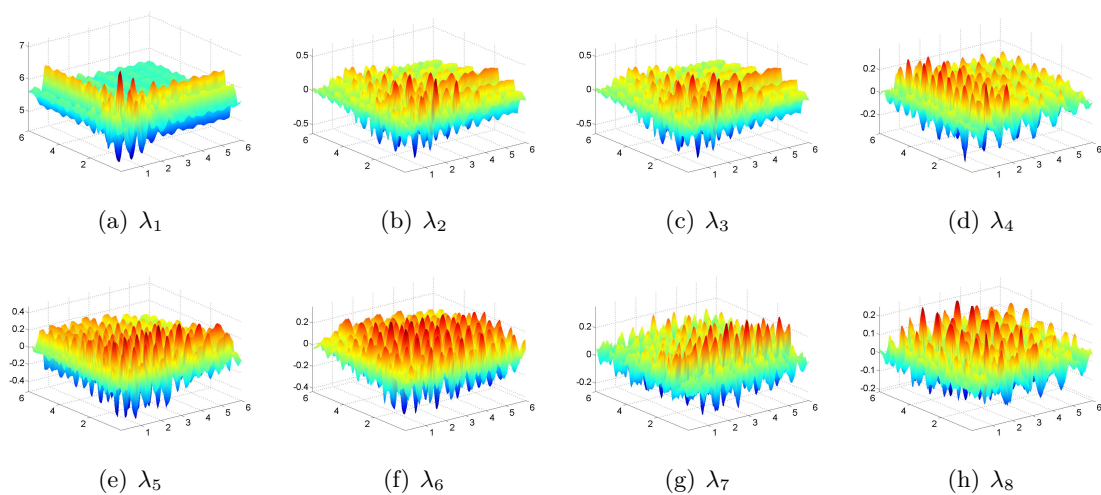


FIGURE 5.24 – Fonctions stochastiques paramétriques  $\lambda_i(\xi_1, \xi_2)$  de la PGD.

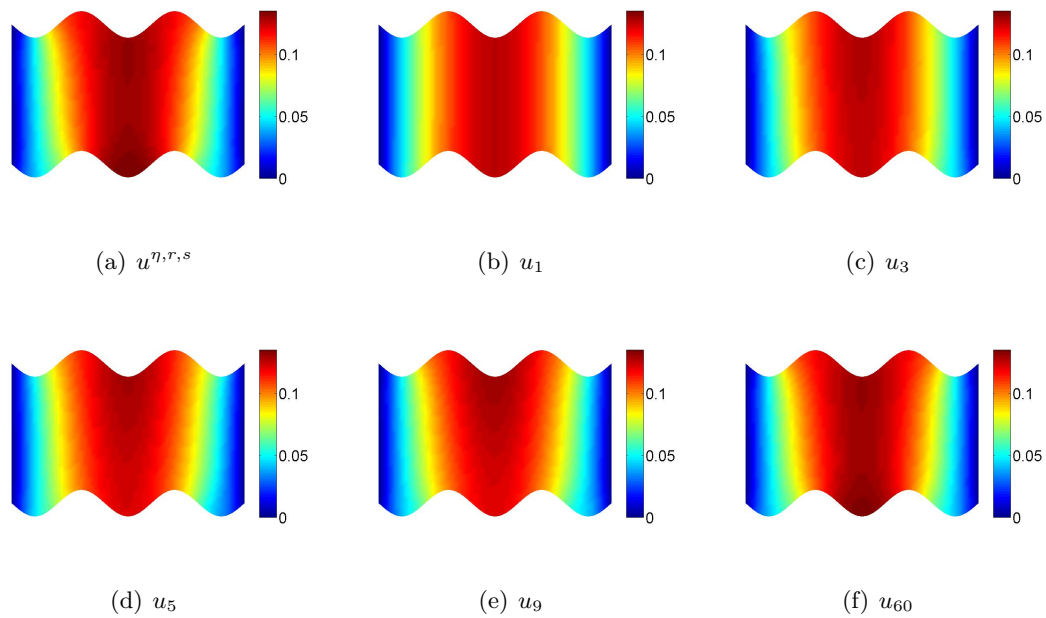


FIGURE 5.25 – Comparaison entre  $u^{\eta,r,s}(\cdot, \xi)$  et  $u_m(\cdot, \xi)$  pour différent  $m$ , et pour  $\xi = (\frac{5}{12}, \frac{5}{12})$ .

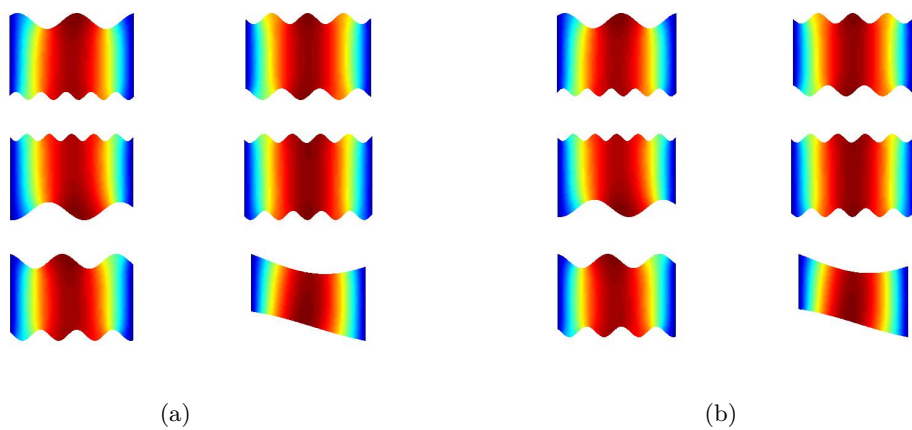


FIGURE 5.26 – Comparaison entre  $u^{\eta,r,s}(\cdot, \xi)$  (a) et  $u_{60}(\cdot, \xi)$  (b) pour plusieurs réalisations de  $\xi$ .

## 5.5 Conditions de Dirichlet sur une frontière aléatoire : méthode des fonctions caractéristiques

On s'intéresse maintenant au cas d'une frontière de Dirichlet aléatoire  $\Gamma_D(\xi)$ . On introduit ici la méthode des fonctions caractéristiques (voir [Babuska *et al.*, 2003]) dans le cadre des problèmes stochastiques.

### 5.5.1 Méthode des fonctions caractéristiques

Pour imposer les conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_D(\xi)$ , on introduit une fonction caractéristique  $\psi(x, \xi)$  ayant les propriétés suivantes :

$$\psi > 0 \quad \text{sur} \quad \Omega(\xi) \quad (5.61)$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D(\xi) \quad (5.62)$$

$$|\nabla\psi| > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D(\xi) \quad (5.63)$$

La solution du problème initial sera alors recherchée sous la forme  $u = \psi\tilde{u}$ , avec  $\tilde{u}$  une fonction définie sur  $\tilde{\Omega} \times \Xi$  ne vérifiant pas les conditions de Dirichlet. La condition de Dirichlet sur la frontière aléatoire est alors portée par la fonction caractéristique  $\psi$ . En pratique, nous choisissons  $\psi(x, \xi) = -\phi(x, \xi)$  avec  $\phi(x, \xi)$  la level-set dont l'iso-zéro dans  $\tilde{\Omega}$  caractérise la frontière aléatoire  $\Gamma_D(\xi)$ .

### 5.5.2 Reformulation du problème

On note à présent  $\tilde{\mathcal{V}} = H^1(\tilde{\Omega})$  et on introduit l'espace  $\tilde{\mathcal{V}}^{\Xi, \psi} = \{v = \psi\tilde{v} ; \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}^{\Xi} = \tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}\}$ . La formulation faible du problème sur domaine fictif s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u = \psi\tilde{u} \in \mathcal{V}^{\Xi, \psi} \text{ tel que} \\ &\tilde{A}(u, v) = \tilde{L}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^{\Xi, \psi} \end{aligned} \quad (5.64)$$

avec

$$\tilde{A}(u, v) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu \quad \text{et} \quad \tilde{L}(v) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} f v \, d\mu.$$

Ce problème est équivalent au problème suivant sur la fonction  $\tilde{u}$  :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \text{ tel que} \\ &A_{\psi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = L_{\psi}(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.65)$$

avec

$$A_\psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{A}(\psi\tilde{u}, \psi\tilde{v}) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} (\psi\nabla\tilde{u} + \tilde{u}\nabla\psi) \cdot (\psi\nabla\tilde{v} + \tilde{v}\nabla\psi) d\mu,$$

$$L_\psi(\tilde{v}) = \tilde{L}(\psi\tilde{u}) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} f \psi\tilde{v} d\mu.$$

### 5.5.3 Approximation

On introduit alors un espace d'approximation  $\tilde{\mathcal{V}}_N \subset \tilde{\mathcal{V}}$  associé à un maillage éléments finis de  $\tilde{\Omega}$ , ainsi qu'un espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ . Cela définit un espace d'approximation  $\tilde{\mathcal{V}}_{N,P}^{\Xi,\psi} = \{v = \psi\tilde{v} ; \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P\} \subset \tilde{\mathcal{V}}^{\Xi,\psi}$ . Une approximation de Galerkin  $u_{N,P}$  de  $u$  dans  $\tilde{\mathcal{V}}_{N,P}^{\Xi,\psi}$  est alors définie par le problème (5.64) où on remplace l'espace  $\tilde{\mathcal{V}}^{\Xi,\psi}$  par l'espace d'approximation  $\tilde{\mathcal{V}}_{N,P}^{\Xi,\psi}$ . On a  $u_{N,P} = \psi\tilde{u}_{N,P}$ , où  $\tilde{u}_{N,P}$  est une approximation de Galerkin de  $\tilde{u}$  dans l'espace produit  $\tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$ , définie par le problème (5.65) où on remplace l'espace  $\tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$  par l'espace d'approximation  $\tilde{\mathcal{V}}_N \otimes \mathcal{S}_P$ . Ayant obtenu une reformulation du problème sur un espace produit tensoriel, les méthodes d'approximation basées sur la construction de représentations séparées (voir chapitre 4) peuvent à nouveau être utilisées.

### 5.5.4 Illustration

On considère le problème (5.1) avec  $f = 1$  et un domaine  $\Omega(\xi) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 1, h(x_1, \xi) \leq x_2 \leq 1\}$  avec  $h(x_1, \xi)$  un champ stochastique modélisant une frontière rugueuse (voir la figure 5.27). Le domaine fictif est défini par  $\tilde{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1)$  tel que  $\Omega(\xi) \subset \tilde{\Omega}$ . Des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur toute sur la frontière du domaine  $\Omega(\xi) : \Gamma_D(\xi) = \partial\Omega(\xi)$ . Le bord rugueux est ici représenté par un champ dépendant de 10 variables aléatoires :

$$h(x_1, \xi) \approx \sigma \sum_{k=1}^{10} \hat{h}_k(x_1) \xi_k \quad (5.66)$$

où  $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^{10}$  sont des fonctions sinusoidales de longueurs caractéristiques et amplitudes décroissantes avec  $k$ , et les  $\{\xi_k\}_{k=1}^{10}$  sont des variables uniformes indépendantes sur  $(-1, 1)$ . Le paramètre  $\sigma$  est l'écart-type du

champ stochastique, qui est ici choisi égal à  $\sigma = 0.1$ . Le domaine aléatoire est caractérisé par l'iso-zero de la fonction level-set  $\phi(x, \xi) = -(x_2 - 0.15) + h(x_1, \xi)$  dans  $\tilde{\Omega}$ .

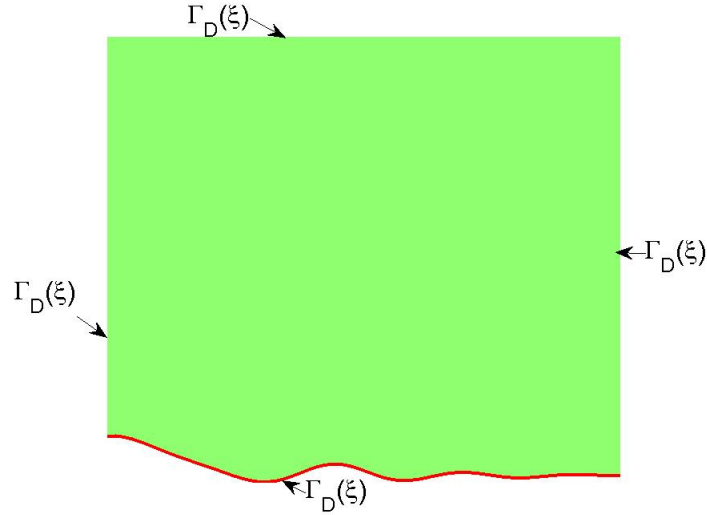


FIGURE 5.27 – Exemple modèle avec frontière de Dirichlet aléatoire

Un espace d'approximation éléments finis  $\tilde{\mathcal{V}}_N$  de dimension  $N = 1740$  est introduit au niveau spatial. Au niveau stochastique,  $\Xi = \times_{k=1}^{10} \Xi_k$ , avec  $\Xi_k = (-1, 1)$ , et on introduit pour chaque dimension stochastique un espace d'approximation  $\mathcal{S}_{P_k}$  éléments finis de degré 2 associé à une partition uniforme de  $\Xi_k$  en 20 éléments ( $P_k = 60$  pour tout  $k \in \{1 \dots 10\}$ ). Pour ce cas multidimensionnel, une méthode PGD progressive est appliquée (voir section (4.1.3)) pour obtenir une approximation séparée du problème (5.65) sous la forme

$$\tilde{u} \approx \tilde{u}_m(x, \xi) = \sum_{i=1}^m w_i(x) \lambda_i^1(\xi_1) \dots \lambda_i^{10}(\xi_{10}) \quad (5.67)$$

avec  $w_i \in \tilde{\mathcal{V}}_N$ ,  $\lambda_i^1 \in \mathcal{S}_{P_1}$ , ...,  $\lambda_i^{10} \in \mathcal{S}_{P_{10}}$ . Une approximation de la solution du problème initial est alors obtenue sous la forme  $\psi \tilde{u}_m$ , avec  $\psi(x, \xi) = -\phi(x, \xi)$ . Les figures 5.28 et 5.29 comparent l'approximation  $\psi \tilde{u}_{50}$  avec une solution déterministe pour plusieurs valeurs des paramètres aléatoires  $\xi$ . On observe une bonne concordance des résultats.

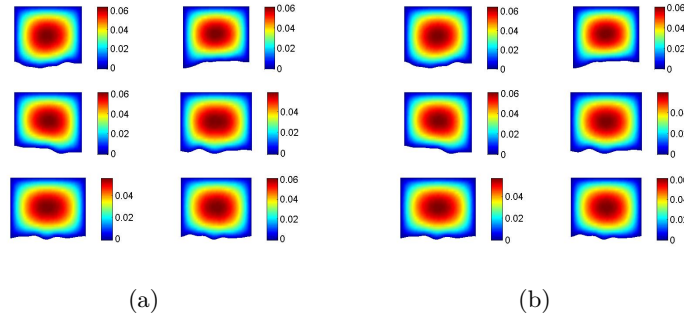


FIGURE 5.28 – Solution pour 6 réalisations de  $\xi$  : (a) approximation  $\psi\tilde{u}_{50}$  (PGD) et (b) solution déterministe.

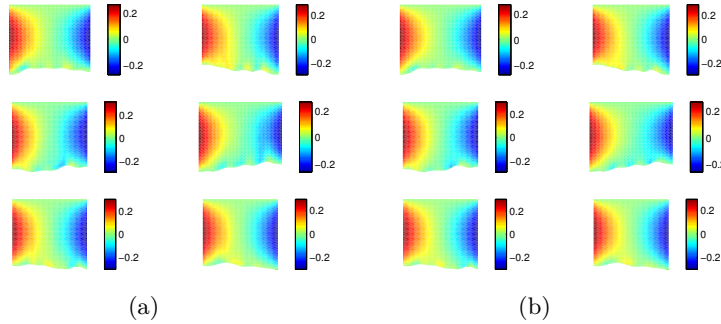


FIGURE 5.29 – Gradient horizontal pour 6 réalisations de  $\xi$  : (a) approximation  $\psi\tilde{u}_{50}$  (PGD) et (b) solution déterministe.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a proposé une méthodologie pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles définies sur des domaines incertains paramétrés. Cette méthodologie repose sur une méthode de domaine fictif conduisant à une formulation du problème dans un espace produit tensoriel. Cette structure produit tensoriel est exploitée en appliquant la méthode Proper Generalized Decomposition, permettant la construction a priori d'une approximation séparée de la solution. Dans le cas des conditions de Neumann sur une frontière aléatoire, et afin de rendre la PGD efficace, on a introduit des techniques spécifiques, afin d'obtenir un faible rang des représentations séparées de la fonction indicatrice du domaine. Cela conduit alors à un faible rang des représentations des formes bilinéaire et linéaire dans la formulation faible du problème. En particulier, une régularisation des fonctions indicatrices est introduite

afin d'accélérer la convergence de leurs représentations séparées. De plus, une nouvelle approximation produit tensoriel sous contrainte est utilisée afin de garder un caractère bien posé du problème associé à ces fonctions indicatrices. Ces différents ingrédients ont été réunis dans une méthodologie complète dont l'efficacité a été illustrée dans des exemples numériques dans le cas des frontières de Neumann et de Dirichlet aléatoires.



# Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, on a proposé une méthodologie de résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques traduisant des modèles présentant de nombreuses sources d'incertitudes localisées en espace. Les incertitudes peuvent porter sur les coefficients de l'opérateur, les termes sources ou encore la géométrie du domaine de définition de l'équation. Ces problèmes présentent deux difficultés majeures. La première est que leurs solutions possèdent un caractère multi-échelle ce qui nécessite des méthodes de réduction de modèle et des stratégies de calcul adaptées. La deuxième difficulté est associée à la prise en compte de nombreuses variabilités qui nécessite la représentation de fonctions de nombreux paramètres.

Pour résoudre ces difficultés, on a tout d'abord proposé une méthode de décomposition de domaine multi-échelle avec patches qui exploite le caractère localisé des incertitudes et permet une approximation fine de la solution dans les zones de variabilités localisées. Pour la gestion de problèmes de grande dimension (approximation fine, grande dimension paramétrique), nous avons introduit des techniques de réduction de modèle basées sur l'utilisation de représentations séparées. Enfin, pour la prise en compte de variabilités géométriques localisées, des méthodes spécifiques basées sur les approches de domaines fictifs ont été introduites.

La *méthode multi-échelle avec patches* peut être interprétée comme une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement, les patches constituant des sous-domaines contenant les incertitudes localisées et recouvrant un domaine global. Le couplage entre la solution globale et les solutions locales, définies sur les patches, est effectué à la frontière des patches, qui constitue une interface interne au domaine global. Un algorithme ité-

ratif a été proposé, qui requiert la résolution alternée de problèmes globaux et de problèmes locaux, ces derniers étant définis sur des patches. Les problèmes globaux sont associés à un opérateur fictif (éventuellement déterministe) et dans le cas de problèmes à variabilités géométriques, ces problèmes globaux peuvent être définis sur un domaine fictif ne voyant pas les détails géométriques. Nous avons prouvé la convergence de l'algorithme itératif. L'impact de perturbations sur l'algorithme (dues à des approximations) a été analysé théoriquement et ces résultats théoriques ont été validés numériquement. L'impact et le choix des différents paramètres de l'algorithme (taille de patch, paramètre de relaxation, choix de l'opérateur fictif) a été analysé en profondeur sur de nombreux exemples numériques. L'algorithme proposé a montré des bons résultats de convergence. De plus, les résultats ont montré que les paramètres de l'algorithme peuvent être choisis de telle manière à obtenir des problèmes globaux déterministes (non stochastiques) ce qui fournit un grand avantage en terme de temps de calcul. On a aussi montré que les tailles des patches doivent toutefois être choisies avec attention car lorsque les patches sont choisis trop petits (quand le patch ne contient pas les principaux effets des incertitudes localisées), le taux de convergence de l'algorithme itératif peut se détériorer. De plus, on a montré que les problèmes globaux et locaux peuvent être simplifiés en exploitant une analyse de sensibilité permettant d'évaluer la zone d'influence sur la solution des différents ensembles de variables aléatoires. En fait, les dépendances des solutions locales (sur les patches) par rapport à certains ensembles de variables peuvent être négligées pour réduire le coût de calcul des problèmes locaux.

Concernant la gestion de problèmes de grande dimension, nous avons introduit des *méthodes basées sur l'approximation de tenseurs* (utilisation de représentations séparées) qui exploitent la structure produit tensoriel des problèmes globaux et locaux. Pour le calcul des approximations de tenseurs, nous avons utilisé une version de la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) qui consiste à construire une décomposition séparée par corrections successives (algorithme greedy). Cette méthode PGD peut être considérée comme une technique de réduction de modèle qui consiste à construire progressivement des bases réduites de fonctions déterministes et de fonctions paramétriques. Afin d'améliorer la convergence

des représentations séparées dans le cas d'une grande dimension paramétrique, nous avons introduit un format hiérarchique pour l'approximation de tenseurs, permettant d'obtenir une réduction de modèle quasi optimale. Cette représentation hiérarchique s'est révélée très efficace dans le cadre de la méthode multiéchelle, où les solutions globales et locales ont pu être représentées avec des rangs très faibles. L'efficacité des méthodes d'approximation de tenseurs a été illustrée dans des exemples numériques.

Enfin, pour la prise en compte de variabilités géométriques localisées, nous avons proposé des *méthodes de résolution efficaces d'équations aux dérivées partielles définies sur des domaines aléatoires*. Nous avons pour cela utilisé des approches de domaines fictifs conduisant à une reformulation des problèmes sur des espaces produit tensoriel et permettant ainsi l'utilisation de solveurs spécifiques basées sur l'utilisation de représentations séparées (approximation de tenseur). Ces solveurs permettent ainsi de traiter des problèmes où les incertitudes géométriques sont modélisées par un grand nombre de paramètres aléatoires. Dans le cas de conditions de Dirichlet sur des frontières aléatoires, une méthode des fonctions caractéristiques a été utilisée. L'efficacité de cette méthode a été prouvée dans des exemples numériques. Dans le cas de frontières de Neumann aléatoires, des techniques spécifiques ont été introduites pour l'obtention de représentations séparées de faible rang de la fonction indicatrice du domaine, afin de rendre efficace les algorithmes d'approximation de tenseurs. En particulier, un lissage de la fonction indicatrice a été introduit afin d'accélérer la convergence de sa représentation séparée. De plus, une nouvelle approximation produit tensoriel avec contrainte a été introduite afin de préserver certaines contraintes de positivité qui assurent un caractère bien posé des problèmes associés à des fonctions indicatrices approximées. L'efficacité et la précision de cette approche a été illustrée dans des exemples. Des résultats théoriques ont été obtenus concernant la convergence des solutions associées à des fonctions indicatrices approchées et ces résultats ont été validés numériquement.

Pour conclure, la méthodologie proposée permet de résoudre des problèmes de grandes dimensions avec de nombreuses sources d'incertitudes localisées en espace (éventuellement de nature géométrique). On note que

les différentes contributions de cette thèse ont été guidées par la recherche d'une meilleure efficacité numérique mais aussi d'une plus grande simplicité dans l'implémentation des problèmes.

Ce travail de thèse ouvre plusieurs perspectives. Une première perspective consiste à étendre l'algorithme proposé aux problèmes non-linéaires, les patches contenant éventuellement des nonlinéarités localisées. L'algorithme proposé peut être naturellement étendu à certaines classes de problèmes non-linéaires simples, avec encore une garantie de convergence. Une deuxième perspective concerne la gestion de patches à position variable. *A priori*, l'algorithme proposé dans ce mémoire s'applique directement à ce cas mais une réflexion doit encore être menée pour aboutir à une implémentation efficace de l'algorithme dans ce contexte. Enfin, une perspective plus technique concerne la résolution de problèmes à géométrie aléatoire dans le cas de frontières paramétrées par un grand nombre de paramètres. Dans ce cas, des difficultés pratiques apparaissent dans le calcul des représentations séparées des fonctions indicatrices ou des fonctions caractéristiques, indispensables pour obtenir une reformulation du problème adaptée à l'utilisation des méthodes d'approximation de tenseur.

## Annexe A

# Convergence des solutions des formulations sur domaine fictif associées aux fonctions indicatrices approximées

Dans cette annexe, on donne deux résultats de convergence :

- (i) convergence avec  $\eta$  de la solution  $u^\eta$  du problème (5.13) vers la solution  $u$  du problème initial (5.4),
- (ii) convergence avec  $s$  de la suite des solutions  $u^{\eta,s}$  des problèmes (5.43), associés aux représentations séparées  $I_s$  de rang  $s$  de la fonction indicatrice  $I$ , vers la solution  $u^\eta$  du problème (5.13).

Le premier résultat est une variante de la preuve donnée dans [[Glowinski et al., 1996](#)] dans le contexte déterministe, avec une estimation améliorée du taux de convergence. Le deuxième résultat de convergence est établi avec une hypothèse forte sur la séquence  $I_s$ , qui est discutée dans la section B.

### A.1 Convergence des solutions des problèmes régularisés

On introduit la décomposition suivante de la forme bilinéaire  $A^\eta$  :

$$A^\eta(u, v) = A(u, v) + \eta C(u, v) = (1 - \eta)A(u, v) + \eta B(u, v)$$

avec

$$C(u, v) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega} \setminus \Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mu,$$

$$B(u, v) = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla v d\mu$$

On rappelle que la norme  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}$  dans  $\tilde{\mathcal{V}}^\Xi = \tilde{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{S}$  est définie par

$$\|v\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 = \int_{\Xi} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v|^2 d\mu = B(v, v)$$

On introduit l'espace suivant

$$\tilde{\mathcal{X}} = L^2_{P_\xi}(\Xi; H_0^1(\tilde{\Omega} \setminus \Omega)) \subset \tilde{\mathcal{V}}^\Xi$$

et on définit le sous-espace suivant de  $\tilde{\mathcal{V}}^\Xi$  :

$$\tilde{\mathcal{V}}_0^\Xi = \{v \in \tilde{\mathcal{V}}^\Xi; C(v, w) = 0 \forall w \in \tilde{\mathcal{X}}\}$$

$\tilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$  correspond aux fonctions dans  $\tilde{\mathcal{V}}^\Xi$  qui sont harmoniques dans le domaine non physique  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ . Il existe une fonction unique  $\hat{u}$  telle que

$$\hat{u} \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Xi \quad \text{et} \quad \hat{u}(\cdot, y) = u(\cdot, y) \quad \text{sur} \quad \Omega(y)$$

$\hat{u}$  est le prolongement harmonique unique de la solution  $u$  de (5.4).

**Theorème A.1** *Quand  $\eta \rightarrow 0$ , la solution  $u^\eta$  du problème (5.13) converge vers  $\hat{u}$  dans le sens suivant :*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\hat{u} - u^\eta\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi} = 0, \tag{A.1}$$

*et converge vers la solution  $u$  du problème (5.4) dans le sens suivant :*

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-1} \|u - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi} < \infty \tag{A.2}$$

avec

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-\delta} \|u - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi} = 0 \quad \forall \delta < 1$$

*qui indique qu'on a une convergence linéaire en fonction de  $\eta$  quand on considère seulement la partie physique de la solution (restriction sur le domaine physique  $\Omega$ ).*

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}
A^\eta(\hat{u} - u^\eta, \hat{u} - u^\eta) &= A^\eta(\hat{u}, \hat{u} - u^\eta) - A^\eta(u^\eta, \hat{u} - u^\eta) \\
&= L(\hat{u} - u^\eta) + \eta C(\hat{u}, \hat{u} - u^\eta) - L(\hat{u} - u^\eta) \\
&= \eta C(\hat{u}, \hat{u} - u^\eta)
\end{aligned}$$

En utilisant

$$A^\eta(v, v) = (1 - \eta)A(v, v) + \eta B(v, v) = (1 - \eta)\|v\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 + \eta\|v\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2$$

on obtient

$$(1 - \eta)\|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 + \eta\|\hat{u} - u^\eta\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 = \eta C(\hat{u}, \hat{u} - u^\eta) \quad (\text{A.3})$$

et aussi

$$\begin{aligned}
(1 - \eta)\|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 + \eta\|\hat{u} - u^\eta\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 &\leq \eta C(\hat{u}, \hat{u})^{1/2} C(\hat{u} - u^\eta, \hat{u} - u^\eta)^{1/2} \\
&\leq \eta B(\hat{u}, \hat{u})^{1/2} B(\hat{u} - u^\eta, \hat{u} - u^\eta)^{1/2} \\
&\leq \eta\|\hat{u}\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}\|\hat{u} - u^\eta\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi} \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

On déduit tout d'abord que

$$\|\hat{u} - u^\eta\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi} \leq \|\hat{u}\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}$$

qui prouve que la séquence  $u^\eta$  est bornée. Donc, on peut extraire une sous-séquence, notée aussi  $u^\eta$ , qui converge faiblement vers un élément  $u^* \in \tilde{\mathcal{V}}^\Xi$ .  $u^\eta$  vérifie

$$A(u^\eta, v) + \eta C(u^\eta, v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{V}}^\Xi$$

Ainsi, en prenant la limite avec  $\eta \rightarrow 0$ , on obtient

$$A(u^*, v) = L(v) \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{V}}^\Xi$$

qui prouve que la restriction de  $u^*$  sur le domaine  $\Omega$  coïncide avec la solution  $u$ . En plus, pour tout  $\eta$ , on a

$$C(u^\eta, v) = 0 \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{X}}$$

et en prenant la limite avec  $\eta$ , on obtient que

$$C(u^*, v) = 0 \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{X}}$$

qui donne  $u^* \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$ . Comme le prolongement unique de  $u$  dans  $\widetilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$  est  $\hat{u}$ , on a  $u^* = \hat{u}$ . Par unicité de la limite, on obtient donc que toute la séquence  $\{u^\eta\}_\eta$  converge faiblement vers  $\hat{u}$ . De (A.3), on a

$$\frac{1-\eta}{\eta} \|u - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 + \|\hat{u} - u^\eta\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 = C(\hat{u}, \hat{u} - u^\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

On obtient que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|\hat{u} - u^\eta\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi} = 0$$

et aussi que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-1/2} \|u - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi} = 0$$

Afin de raffiner le résultat de convergence dans la norme de  $\mathcal{V}^\Xi$ , on note que  $\hat{u}$  et  $u^\eta$  appartiennent à  $\widetilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$ , et que sous des hypothèses suffisantes de régularité de la frontière aléatoire, les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\Xi}$  et  $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi}$  sont équivalentes sur  $\widetilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$ <sup>1</sup>. Donc, il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$\|\hat{u} - u^\eta\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi} \leq \gamma \|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}$$

En utilisant cette inégalité et (A.4), on obtient

$$\|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 \leq \|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 + \eta \|\hat{u} - u^\eta\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 - \eta \|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}^2 \leq \eta \gamma \|\hat{u}\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi} \|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi}$$

et donc

$$\frac{1}{\eta} \|\hat{u} - u^\eta\|_{\mathcal{V}^\Xi} \leq \gamma \|\hat{u}\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi} < \infty$$

qui donne (A.2). ■

**Remarque A.1** *Sous des hypothèses suffisantes de régularité sur la frontière du domaine  $\Omega$ , on a que  $u^\eta$  vérifie la condition de transmission suivante sur la frontière interne  $\Gamma_N$  :*

$$\eta \frac{\partial u_+^\eta}{\partial n} - \frac{\partial u_-^\eta}{\partial n} = 0$$

---

1. L'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(\xi)}$  et  $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{V}}}$  sur  $\widetilde{\mathcal{V}}_0(\xi)$  peut être facilement montrée pour tout domaine déterministe  $\Omega(\xi)$  ayant une frontière suffisamment régulière (e.g. Lipschitz). On utilise pour cela la condition de prolongement harmonique vérifiée par les fonctions de  $\widetilde{\mathcal{V}}_0(\xi)$  et la continuité des opérateurs de trace de  $\Omega(\xi)$  sur  $\Gamma$  et de  $\widetilde{\Omega} \setminus \Omega(\xi)$  sur  $\Gamma$ , où  $\Gamma = \Omega(\xi) \cap (\widetilde{\Omega} \setminus \Omega(\xi))$ . On montre ainsi que pour tout  $u \in \widetilde{\mathcal{V}}_0(\xi)$ , on a  $\|u\|_{\mathcal{V}(\xi)} \leq \|u\|_{\widetilde{\mathcal{V}}} \leq C(\xi) \|u\|_{\mathcal{V}(\xi)}$  où  $C(\xi)$  est une constante dépendant du domaine  $\Omega(\xi)$ . Il en découle l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\Xi}$  et  $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi}$  sur  $\widetilde{\mathcal{V}}_0^\Xi$  si on suppose que  $C(\cdot)$  est uniformément bornée sur  $\Xi$ , ce qui équivaut à une condition de régularité sur la famille de domaines  $\{\Omega(\xi)\}_{\xi \in \Xi}$ . Il serait alors nécessaire de caractériser des classes de domaines aléatoires vérifiant cette condition. Durant cette thèse, nous n'avons pas approfondi cette question.



où  $n$  est la normale unité vers  $\Gamma_N$  et  $u_+^\eta$  (resp.  $u_-^\eta$ ) est la restriction de  $u^\eta$  sur  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$  (resp.  $\Omega$ ). Pour un  $\eta$  suffisamment petit, on obtient donc une vérification approchée des conditions aux limites de Neumann homogènes  $\frac{\partial u_-^\eta}{\partial n} \approx 0$ .

## A.2 Convergence des solutions associées à des fonctions indicatrices approximées

On suppose que la séquence  $\{I_s\}_{s \geq 1}$  est telle que pour  $s \geq s'$ , la condition (5.46) est vérifiée. L'existence d'un tel  $s'$  est une conséquence de l'hypothèse forte suivante sur la séquence  $I_s$ , qui est discutée dans la section B.

**Hypothèse A.1** *On suppose que la séquence  $\{I_s\}_{s \geq 1}$  converge uniformément vers  $I$  :*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|I - I_s\|_{L_{P_\xi}^\infty(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))} = 0 \quad (\text{A.5})$$

On note  $\delta_s = \|I - I_s\|_{L_{P_\xi}^\infty(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))}$ . Dans la suite, pour tout  $\eta$ , on considère la séquence  $\{I_s\}_{s \geq s'(\eta)}$  telle que

$$\frac{1 - \eta}{\eta} \delta_s \leq \gamma < 1 \quad (\text{A.6})$$

avec une certaine constante  $\gamma$ . On note que cette condition (A.6) implique que  $I_s \geq -\delta_s \geq -\gamma \frac{\eta}{1-\eta} > -\frac{\eta}{1-\eta}$ , qui est la condition d'ellipticité (5.47). Pour un domaine  $\omega$ , éventuellement aléatoire, on note  $\|\cdot\|_\omega$  la norme dans  $L_{P_\xi}^2(\Xi; \tilde{L}(\omega))$ , définie par

$$\|v\|_\omega^2 = \int_{\Xi} \int_{\omega} v^2 d\mu \quad (\text{A.7})$$

**Theorème A.2** *Sous l'hypothèse A.1, on a la convergence forte de la séquence  $\{u^{\eta,s}\}_{s \in \mathbb{N}}$ , avec  $u^{\eta,s}$  la solution de (5.43), vers la solution  $u^\eta$  de (5.13) :*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta} = 0$$

Plus précisément,

$$\|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \leq G(s, \eta)D(\eta)$$

où  $G(s, \eta) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow \infty$  et  $G(s, \eta)$  est uniformément borné en  $\eta$ , et où  $D(\eta)$  est une constante qui dépend du prolongement  $f^\eta$  de  $f$  :

$$D(\eta) = \left( \|f\|_\Omega^2 + \|f^\eta/\sqrt{\eta}\|_{\tilde{\Omega} \setminus \Omega}^2 \right)^{1/2} (1 + \eta)^{1/2}$$

**Preuve.** La forme bilinéaire  $A^\eta$ , définie dans (5.16), est continue symétrique et coercive. Elle définit une norme dans  $\tilde{\mathcal{V}}^\Xi$ , définie par  $\|v\|_{A^\eta}^2 = A^\eta(v, v)$ , et telle que  $\eta \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2 \leq \|\cdot\|_{A^\eta}^2 \leq \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{V}}^\Xi}^2$ . On a

$$\begin{aligned} \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta}^2 &= A^\eta(u^\eta - u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) \\ &= A^\eta(u^\eta, u^\eta - u^{\eta,s}) - A^\eta(u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) \\ &= L(u^\eta - u^{\eta,s}) - L_s^\eta(u^\eta - u^{\eta,s}) \\ &\quad + A_s^\eta(u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) - A^\eta(u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) \\ &= (L - L_s^\eta)(u^\eta - u^{\eta,s}) + (A_s^\eta - A^\eta)(u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Notant que

$$\|\nabla u\|_{\tilde{\Omega}}^2 \leq \frac{1}{\eta} \|u\|_{A^\eta}^2$$

et introduisant  $\delta_s = \|I - I_s\|_{L_{P_\xi}^\infty(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (A_s^\eta - A^\eta)(u^{\eta,s}, u^\eta - u^{\eta,s}) &\leq (1 - \eta)\delta_s \|\nabla u^{\eta,s}\|_{\tilde{\Omega}} \|\nabla(u^\eta - u^{\eta,s})\|_{\tilde{\Omega}} \\ &\leq \delta_s \frac{1 - \eta}{\eta} \|u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Soit  $\|\cdot\|_{A_s^\eta}$  la norme sur  $\tilde{\mathcal{V}}^\Xi$  induite par  $A_s^\eta$ , définie par  $\|v\|_{A_s^\eta}^2 = A_s^\eta(v, v)$ . On a aussi

$$\begin{aligned} \|u\|_{A_s^\eta}^2 &= \|u\|_{A^\eta}^2 + (1 - \eta) \int_{\tilde{\Omega}} (I_s - I) \nabla u^2 \\ &\geq \|u\|_{A^\eta}^2 - (1 - \eta)\delta_s \|\nabla u\|_{\tilde{\Omega}}^2 \\ &\geq \|u\|_{A^\eta}^2 \left( 1 - \frac{1 - \eta}{\eta} \delta_s \right) \end{aligned}$$

où  $\frac{1-\eta}{\eta}\delta_s \leq \gamma < 1$  avec l'hypothèse (A.6). On a donc

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1-\eta}{\eta}\delta_s) \|u^{\eta,s}\|_{A^\eta}^2 &\leq \|u^{\eta,s}\|_{A_s^\eta}^2 = L_s^\eta(u^{\eta,s}) \\ &\leq (1 + \delta_s) \left( \|f\|_\Omega \|u^{\eta,s}\|_\Omega + \|f^\eta\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} \|u^{\eta,s}\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} \right) \end{aligned}$$

On note  $C_\omega$  la constante définie par

$$C_\omega = \sup_v \frac{\|v\|_\omega}{\|\nabla v\|_\omega}$$

et  $C = \max\{C_\Omega, C_{\tilde{\Omega}}\}$  (les constantes  $C_\Omega$  et  $C_{\tilde{\Omega}}$  sont finies quand  $\partial\Omega$  et  $\partial\tilde{\Omega}$  possèdent une partie de Dirichlet). D'où

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1-\eta}{\eta}\delta_s) \|u^{\eta,s}\|_{A^\eta}^2 &\leq (1 + \delta_s) C \left( \|f\|_\Omega \|\nabla u^{\eta,s}\|_\Omega + \eta \|f^\eta/\eta\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} \|\nabla u^{\eta,s}\|_{\tilde{\Omega}} \right) \\ &\leq (1 + \delta_s) C \sqrt{2} \left( \|f\|_\Omega^2 + \eta \|f^\eta/\eta\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega}^2 \right)^{1/2} \left( \|\nabla u^{\eta,s}\|_\Omega^2 + \eta \|\nabla u^{\eta,s}\|_{\tilde{\Omega}}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (1 + \delta_s) C \sqrt{2} \left( \|f\|_\Omega^2 + \eta \|f^\eta/\eta\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega}^2 \right)^{1/2} (1 + \eta)^{1/2} \|u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \leq \sqrt{2} \frac{1 + \delta_s}{1 - \frac{1-\eta}{\eta}\delta_s} CD(\eta) \quad (\text{A.10})$$

avec  $D(\eta) = (1 + \eta)^{1/2} \left( \|f\|_\Omega^2 + \|f^\eta/\sqrt{\eta}\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega}^2 \right)^{1/2}$ . De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} (L - L_s^\eta)(u^\eta - u^{\eta,s}) &\leq \delta_s \left( \|f\|_\Omega \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_\Omega + \|f^\eta\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} \right) \\ &\leq \delta_s CD(\eta) \sqrt{2} \|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Finalement, en utilisant (A.8), (A.9), (A.10) et (A.11), on obtient

$$\|u^\eta - u^{\eta,s}\|_{A^\eta} \leq G(s, \eta) D(\eta)$$

avec

$$G(s, \eta) = \sqrt{2} C \left( \delta_s \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1+\delta_s}{1 - \frac{(1-\eta)}{\eta}\delta_s} + \delta_s \right) = \sqrt{2} C \frac{\delta_s}{\eta} \frac{1}{1 - \frac{(1-\eta)}{\eta}\delta_s}$$

On a clairement  $G(s, \eta) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ . Comme  $\delta_s$  est convergente, on a  $\delta_s \leq \delta_{max} < \infty$ . De la condition (A.6), on a donc  $G(s, \eta) \leq \sqrt{2}C \frac{\gamma + \delta_{max}}{1 - \gamma}$ , ce qui termine la preuve. ■

Le théorème A.2 nous dit que pour tout  $\eta > 0$  fixé, la solution  $u^{\eta, s}$  du problème (5.43) converge vers la solution  $u^\eta$  de (5.13), au sens de la norme induite par  $A_\eta$ , qui est équivalente à la norme dans  $\widetilde{\mathcal{V}}^\Xi$ . Ce théorème indique aussi que quand  $\eta \rightarrow 0$ , la convergence des séquences  $u^{\eta, s}$  peut être influencée par le choix du prolongement  $f^\eta$  de  $f$ . Une condition suffisante pour que cette convergence ne soit pas influencée par le prolongement, est de prendre

$$f^\eta = \hat{f}\eta^k, \quad k \geq 1/2, \quad \text{sur } \widetilde{\Omega} \setminus \Omega$$

avec  $\hat{f}$  un prolongement donné de  $f$  tel que  $\lim_{\eta \rightarrow 0} D(\eta) < \infty$ .

## Annexe B

# Convergence des représentations séparées des fonctions indicatrices

On discute ici les hypothèses sur la fonction indicatrice  $I$  qui sont requises afin d'obtenir une convergence uniforme de la décomposition de Karhunen-Loève  $I_s(x, \xi) = \sum_{i=1}^s g_i(x) \chi_i(\xi)$  (Hypothèse A.1 de la section A), qui rend possible la vérification de la condition (5.46). On rappelle que cette condition assure des problèmes (5.43) bien posés et la convergence des approximations associées  $u^{n,s}$  (voir annexe A). Plus de détails peuvent être trouvés dans [Babuska *et al.*, 2005].

On suppose tout d'abord que le noyau de corrélation  $c_I$  est continu, qui est une hypothèse raisonnable et qui peut être vérifiée dans la pratique. Alors, d'après le théorème de Mercer [Riesz et Sz.-Nagy, 1990], on a <sup>1</sup>

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|I - I_s\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}; L^2_{P_\xi}(\Xi))} = 0$$

Si en plus, on suppose que

- (c1) les images  $\{\chi_i(\Xi)\}_{i=1}^\infty$  sont uniformément bornées dans  $\mathbb{R}$ , *i.e.* il existe un ensemble borné  $\Upsilon \subset \mathbb{R}$  tel que  $\chi_i(\Xi) \subset \Upsilon$  pour tout  $i \geq 1$ ,
  - (c2) les fonctions  $\{g_i\}_{i=1}^\infty$  sont suffisamment régulières sur  $\tilde{\Omega}$  et uniformément bornées, *i.e.*  $\max_{i \geq 1} \|g_i\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} < \infty$ ,
  - (c3) les valeurs propres de l'opérateur de corrélation  $\gamma_i = \|g_i \chi_i\|_{L^2(\Xi \times \tilde{\Omega})}^2$  sont telles que  $\gamma_i = O\left(\frac{1}{1+i^q}\right)$  pour un certain  $q > 1$ ,
- alors on a la convergence uniforme de  $I_s$  vers  $I$ , *i.e.*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|I - I_s\|_{L^\infty_{P_\xi}(\Xi; L^\infty(\tilde{\Omega}))} = 0$$

---

1.  $\|I\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}; L^2_{P_\xi}(\Xi))} = \text{ess sup}_{x \in \tilde{\Omega}} \|I(x, \cdot)\|_{L^2_{P_\xi}(\Xi)} = \text{ess sup}_{x \in \tilde{\Omega}} \mathbb{E}(I(x, \xi)^2)$

En considérant les fonctions normalisées  $g_i \in L^2(\tilde{\Omega})$ , on a

$$\begin{aligned} |\chi_i(y)| &= \left| \int_{\tilde{\Omega}} I(x, y) g_i(x) dx \right| \leq \int_{\tilde{\Omega}} I(x, y) |g_i(x)| dx \\ &\leq \int_{\tilde{\Omega}} |g_i(x)| dx \leq \text{mes}(\tilde{\Omega})^{1/2} \|g_i\|_{L^2(\tilde{\Omega})} < \infty \end{aligned}$$

ce qui donne la condition (c1). La condition (c3) peut être vérifiée en pratique. Cependant, pour le présent contexte, la condition (c2) n'est pas vérifiée car le noyau de corrélation  $c_I$  n'a pas des propriétés de régularité suffisantes. En fait, ce problème peut être contourné par l'introduction d'une version régularisée de la fonction indicatrice  $I$ , notée  $I^r$ , avec un noyau de corrélation suffisamment régulier  $c_{I^r}$ . La solution  $u^{\eta, r}$  du problème (5.13), avec  $I$  remplacée par  $I^r$ , peut être choisie arbitrairement proche de la solution  $u^\eta$ . Alors, on peut définir une séquence de problèmes (5.43) associés à des représentations séparées  $I_s^r$  de  $I^r$ . Notant  $u^{\eta, r, s}$  leurs solutions, des conditions suffisantes seraient vérifiées afin de garantir la convergence avec  $s$  de  $u^{\eta, r, s}$  vers  $u^{\eta, r}$ . L'effet de la régularisation de  $I$  est illustré dans la section 5.3.3.3.

# Bibliographie

- A. TOSELLI, O. W. (2005). *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Theory, Springer, Berlin Heidelberg. 27
- AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3):153–176. 7, 22
- BABUŠKA, I. et CHLEBOUN, J. (2002). Effects of uncertainties in the domain on the solution of neumann boundary value problems in two spatial dimensions. *Mathematics of Computation*, 71(240):1339–1370. 17
- BABUSKA, I., BANERJEE, U. et OSBORN, J. E. (2003). Survey of meshless and generalized finite element methods : A unified approach. *Acta Numerica*, 12:1–125. 45, 130
- BABUSKA, I., TEMPONE, R. et ZOURARIS, G. E. (2005). Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1251–1294. 20, 147
- BEN DHIA, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib*, 326:899–904. 6
- BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I - Math.*, 332:649–654. 6
- BEN-HAIM, Y. et ELISHAKOFF, I. (1990). Convex models of uncertainty in applied mechanics. *Elsevier*. 11

- BERVEILLER, M. (2005). *Stochastic finite elements : intrusive and non-intrusive methods for reliability analysis*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand. 14
- BERVEILLER, M., SUDRET, B. et LEMAIRE, M. (2006). Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, 15:81–92. 13
- BESOLD, P. (2000). *Solutions to Stochastic Partial Differential Equations as Elements of Tensor Product Spaces*. Thèse de doctorat, Georg-August-Universität, Göttingen. 17
- BEYLKIN, G. et MOHLENKAMP, M. J. (2005). Algorithms for numerical analysis in high dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(6):2133–2159. 7, 22
- BREZZI, F., LIONS, J. et PIRONNEAU, O. (2001). Analysis of a chimera method. *C.R.A.S.*, 332:655–660. 6, 27, 32
- BRÉZIS, H. (1983). *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris. 17
- CANUTO, C. et FRANSOS, D. (2008). Numerical solution of partial differential equations in random domains : An application to wind engineering. *Communications in computational physics*, 5(2-4):515–531. 24
- CANUTO, C. et KOZUBEK, T. (2007). A fictitious domain approach to the numerical solution of pdes in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, 107(2):257–293. 7, 24, 44, 95
- CHAMOIN, L., ODEN, J. et PRUDHOMME, S. (2008). A stochastic coupling method for atomic-to-continuum monte-carlo simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(4344):3530–3546. 6
- CHAN, T. F. et MATHEW, T. P. (1994). Domain decomposition algorithms. *In Acta Numerica, Cambridge University Press*, pages 61–143. 27
- CHEVREUIL, M. et NOUY, A. (2012). Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89:241–268. 7, 79



- CHINESTA, F., AMMAR, A. et CUETO, E. (2010). Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327–350. 7, 22
- COTTEREAU, R., CLOUTEAU, D., DHIA, H. B. et ZACCARDI, C. (2011). A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:3280–3288. 6, 27, 35
- DEB, M., BABUŠKA, I. et ODEN, J. T. (2001). Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:6359–6372. 13, 20
- DHIA, H. B. et RATEAU, G. (2005). The arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 62:1442–1462. 27, 35
- DOOSTAN, A. et IACCARINO, G. (2009). A least-squares approximation of partial differential equations with high-dimensional random inputs. *Journal of Computational Physics*, 228(12):4332–4345. 7
- DÜSTER, A., NIGGL, A. et RANK, E. (2007). Applying the hp-d version of the fem to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(3740):3524–3533. 6
- ELISHAKOFF, I. (1999). Whys and hows in uncertainty modelling- probability, fuzziness, and anti-optimization. *Springer-Verlag*. 11
- FALCO, A. et NOUY, A. (2011). A Proper Generalized Decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart-Young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2):469–480. 7, 22, 101, 102, 115
- FALCO, A. et NOUY, A. ((2012)). Proper Generalized Decomposition for nonlinear convex problems in tensor Banach spaces. *Numerische Mathematik*. 7, 22, 23
- FARHAT, C., CHEN, P. et RISLER, F. (1996). A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring

- methods with Lagrange multipliers : Application to the design of new FETI coarse problems. Rapport technique CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, CU. 27
- FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227. 27
- FOKKEMA, D., SLEIJPEN, G. et der VORST, H. A. V. (1996). Generalized conjugate gradient squared. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 71:125–146. 21
- FRAUENFELDER, P., SCHWAB, C. et TODOR, R. A. (2005). Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5):205–228. 15, 17
- GANAPATHYSUBRAMANIAN, B. et ZABARAS, N. (2009). A stochastic multiscale framework for modeling flow through random heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, 228(2):591–618. 5
- GARDINER, C. W. (1985). Handbook of stochastic methods. *Springer-Verlag*. 11
- GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *Int. J. For Numerical Methods In Engineering*, 87:889–905. 6, 27, 35
- GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245. 6
- GHANEM, R. (1999). Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168:19–34. 21
- GHANEM, R. et SPANOS, P. (1991). *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin. 12, 13, 15, 19
- GLOWINSKI, R., HE, J., LOZINSKI, A., RAPPAZ, J. et WAGNER, J. (2005). Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements. *Numer. Math.*, 101:663–687. 27, 31
- GLOWINSKI, R., PAN, T., WELLS, R. et ZHOU, X. (1996). Wavelet and finite element solutions for the Neumann problem using fictitious domains. *Journal of Computational Physics*, 126(1):40–51. 97, 99, 139

- HACKBUSCH, W. (2012). *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*, volume 42 de *Series in Computational Mathematics*. Springer. 6, 22, 79, 81, 84
- HAGER, C., HAURET, P., TALLEC, P. L. et WOHLMUTH, B. I. (2012). Solving dynamic contact problems with local refinement in space and time. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 201-204:25–41. 6, 27, 35
- HE, J., LOZINSKI, A. et RAPPAZ, J. (2007). Accelerating the method of finite element patches using approximately harmonic functions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345:107–112. 27
- HECHT, F., LOZINSKI, A., PERRONNET, A. et PIRONNEAU, O. (2009). Numerical zoom for multiscale problems with an application to flows through porous media. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 23:265–280. 27, 32, 33
- KEESE, A. et MATHHIES, H. G. (2003). Numerical methods and Smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 83. 14
- KEESE, A. et MATHHIES, H. G. (2005). Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83:1033–1047. 21
- KOLDA, T. G. et BADER, B. W. (2009). Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*, 51(3):455–500. 22, 79
- LADEVÈZE, P. et FLORENTIN, E. (2006). Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1-3):225–234. 15
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J. et NÉRON, D. (2010). The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287–1296. 7, 22
- LE MAÎTRE, O., NAJM, H., GHANEM, R. et KNIO, O. (2004). Multi-resolution analysis of Wiener-type uncertainty propagation schemes. *Journal of Computational Physics*, 197(2):502–531. 13, 20

- LE MAÎTRE, O., REAGAN, M., NAJM, H., GHANEM, R. et KNIO, O. (2002). A stochastic projection method for fluid flow. ii. random process. *J. Comput. Physics*, 181:9–44. 14
- LIONS, J.-L. et PIRONNEAU, O. (1999). Domain decomposition methods for cad. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I - Math.*, 328:73–80. 27, 31
- LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory. I, fourth edition, in : Graduate Texts in Mathematics, vol. 45*. Springer-Verlag, New York. 11
- LOÈVE, M. (1978). *Probability Theory. II, fourth edition, in : Graduate Texts in Mathematics, vol. 46*. Springer-Verlag, New York. 11
- LOZINSKI, A. (2010). *Méthodes numériques et modélisation pour certains problèmes multi-échelles*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier, Toulouse. 6, 8, 27, 31, 32, 33, 37
- LOZINSKI, A. et PIRONNEAU, O. (2011). Numerical zoom for localized multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27:197–207. 6
- MA, X. et ZABARAS, N. (2011). A stochastic mixed finite element heterogeneous multiscale method for flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, 230(12):4696–4722. 5
- MAÎTRE, O. P. L. et KNIO, O. M. (2010). *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Scientific Computation. Springer. 5, 12
- MATHELIN, L. et MAÎTRE, O. L. (2006). A posteriori error analysis for stochastic finite elements solutions of fluid flows with parametric uncertainties. In WEESELING, P., OÑATE, E. et PÉRIAUX, J., éditeurs : *Proceedings of ECCOMAS CFD conference, TU Delft, The Netherlands*. 15
- MATHELIN, L. et MAÎTRE, O. L. (2007). Dual-based a posteriori error estimate for stochastic finite element methods. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 2(1):83–116. 15
- MATTHIES, H. G. (2008). Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations. *Zamm-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 88(11):849–873. 5

- MATTHIES, H. G. et KEESE, A. (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1295–1331. 15, 17
- MELENK, J. M. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39:289–314. 6
- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150. 6
- MOHAN, P. S., NAIR, P. B. et KEANE, A. J. (2011). Stochastic projection schemes for deterministic linear elliptic partial differential equations on random domains. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 85(7):874–895. 7
- NOUY, A. (2007). A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48):4521–4537. 22, 23, 100, 102
- NOUY, A. (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4718–4736. 7, 22, 23, 100, 102
- NOUY, A. (2009). Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3):251–285. 5, 12, 100
- NOUY, A. (2010a). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24):1603–1626. 7, 22, 100
- NOUY, A. (2010b). Proper Generalized Decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):403–434. 7, 23, 79, 83

- NOUY, A., CHEVREUIL, M. et SAFATLY, E. (2011). Fictitious domain method and separated representations for the solution of boundary value problems on uncertain parameterized domains. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 200:3066–3082. 7, 24, 44, 45
- NOUY, A., CLÉMENT, A., SCHOEFS, F. et MOËS, N. (2008). An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4663–4682. 7, 24, 44, 45, 95, 111
- NOUY, A. et FALCO, A. (2012). Constrained tensor product approximations based on penalized best approximations. *oai :hal.archives-ouvertes.fr :hal-00577942*. 114
- NOUY, A. et LE MAÎTRE, O. (2009). Generalized spectral decomposition method for stochastic non linear problems. *Journal of Computational Physics*, 228(1):202–235. 7, 22
- NOUY, A., SCHOEFS, F. et MOËS, N. (2007). X-SFEM, a computational technique based on X-FEM to deal with random shapes. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(2):277–293. 24
- PELLISSETTI, M. F. et GHANEM, R. G. (2000). Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31:607–616. 21
- RAMIÈRE, I., ANGOT, P. et BELLIARD, M. (2007a). A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6):766 – 781. 25, 95, 97
- RAMIÈRE, I., ANGOT, P. et BELLIARD, M. (2007b). A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. *Journal of Computational Physics*, 225(2):1347 – 1387. 97
- RIESZ, F. et SZ.-NAGY, B. (1990). *Functional Analysis*. Dover Publications, New York, NY. 17, 147
- SARKAR, A., BENABBOU, N. et GHANEM, R. (2009). Domain decomposition of stochastic pdes : Theoretical formulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(5):689–701. 5

- SHAFER, G. (1976). A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press, Princeton*. 11
- SMITH, B. F., BJORSTAD, F. E. et GROPP, W. (1996). Domain decomposition : Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations. *Cambridge University Press*. 27
- SMOLYAK, S. A. (1963). Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Sov. Math. Dokl*, 3:240–243. 15
- SOIZE, C. (2006). Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1-3):26–64. 17
- SONNEVELD, P. (1989). Cgs,a fast lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 10:36–52. 21
- STEGER, F. D. J. et BENEK, J. (1983). A chimera grid scheme, in advances in grid generation. *ASME FED*, 5. 34
- STEIN, E. et OHNIMUS, S. (1997). Coupled model- and solution-adaptivity in the finite-element method. *omputer Methods in Applied Mechanics and En- gineering*, 150(14):327–350. 6
- VORST, H. A. V. D. (2003). *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge University Press. 21
- WAGNER, G. J. et LIU, W. K. (2003). Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *Journal of Computational Physics*, 190(1):249–274. 6
- WOHLMUTH, B. I. (2001). *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*. Springer, Berlin. 27, 41
- XIAO, S. et BELYTSCHKO., T. (2004). Fast numerical methods for stochastic computations : a review. *Comm. Comput. Phys.*, 193(17-20):1645–1669. 6
- XIU, D. (2009). Fast numerical methods for stochastic computations : a review. *Comm. Comput. Phys.*, 5:242–272. 5
- XIU, D. et KARNIADAKIS, G. E. (2002). The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2):619–644. 13, 19

- XIU, D. et TARTAKOVSKY, D. M. (2006). Numerical methods for differential equations in random domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(3):1167–1185. 7, 24
- XU, J. (1992). Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 34:581–613. 27, 57
- XU, J. et ZOU, J. (1998). Some nonoverlapping domain decomposition methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 40:857–914. 27
- XU, X. F. (2007). A multiscale stochastic finite element method on elliptic problems involving uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(2528):2723–2736. 5
- XU, X. F., CHEN, X. et SHEN, L. (2009). A green-function-based multiscale method for uncertainty quantification of finite body random heterogeneous materials. *Computers and Structures*, 87:1416–1426. 5
- ZADEH, L. (1978). Fuzzy sets as the basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28. 11