



**HAL**  
open science

# Méthodes de discrétisation pour la modélisation par éléments analytiques en hydrogéologie quantitative - Application aux écoulements en régimes permanents et transitoires

Frédéric Dauvergne

► **To cite this version:**

Frédéric Dauvergne. Méthodes de discrétisation pour la modélisation par éléments analytiques en hydrogéologie quantitative - Application aux écoulements en régimes permanents et transitoires. Sciences de l'environnement. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2006. Français. NNT: . tel-00797147

**HAL Id: tel-00797147**

**<https://theses.hal.science/tel-00797147>**

Submitted on 5 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 00000

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur**

DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE et de  
L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

Spécialité Sciences et Génie de l'Environnement

Discipline des Mathématiques appliquées à l'hydrogéologie

## Méthodes de discrétisation pour la modélisation par éléments analytiques en hydrogéologie quantitative

– Application aux écoulements en régimes permanents  
et transitoires –

par

**Frédéric DAUVERGNE**

soutenue le 13 décembre 2006 devant la commission d'examen

M. :	Rachid	ABABOU	Examineur
MM. :	Otto D. L.	STRACK	Rapporteurs
	Moumtaz	RAZACK	
MM. :	Didier	PENNEQUIN	Examineurs
	Mireille	BATTON-HUBERT	
	Didier	GRAILLOT	



## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Didier Graillot, directeur du centre SITE, pour l'autonomie et la confiance qu'il m'a accordées durant ces années, mais aussi pour sa disponibilité et ses conseils promulgués durant cette thèse.

Je remercie Otto D. L. Strack, Professeur de l'université du Minnesota, USA et Moutaz Razack, Professeur de l'université de Poitiers d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail, ainsi que les personnes qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers Randal Barnes, Professeur associé et Otto D. L. Strack, Professeur, de m'avoir chaleureusement accueilli lors de mes 2 séjours au sein du département d'ingénierie civil de l'Université du Minnesota, USA. Naturellement, je n'oublie pas de remercier chaleureusement leurs femmes Debra et Andrine de leur disponibilité et de leur grande gentillesse.

J'adresse toute ma reconnaissance à Mme Mireille Batton-Hubert, Maître assistante et co-directrice de ma thèse de m'avoir soutenu et encouragé, pour ses conseils, mais aussi pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.

Je remercie vivement Philippe Le Grand, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté durant ce travail, pour ses conseils avisés et les nombreuses discussions au coin d'une table.

Je remercie Djamel Mimoun pour l'aide qu'il m'a apporté au niveau hydrogéologique.

Je n'oublie pas les membres du labo, qui ont participé plus ou moins directement au bon déroulement de cette thèse, et en particulier les secrétaires.

Je garde une pensée pour tous les compagnons de route, les anciens comme les nouveaux pour leur soutien, leurs encouragements et leur bonne humeur.

Mais aussi, mes amis de longue date, Olive et Ronan pour m'avoir supporté durant toutes ces années et les membres du Fauriel Tennis Club pour m'avoir permis de me défouler sur une petite balle jaune.

Naturellement, je tiens à particulièrement remercier ma famille pour leur soutien permanent, en particulier ma sœur, mes parents et tous ceux de Saint Malo et d'ailleurs.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Du problème physique au modèle numérique</b>	<b>9</b>
1.1 Les nappes d'eau souterraines : un milieu naturel . . . . .	9
1.2 La modélisation des écoulements de nappes d'eau souterraines . . . . .	11
1.2.1 Du microscopique au macroscopique . . . . .	11
1.2.2 Caractéristiques hydrogéologiques de l'aquifère . . . . .	12
1.3 Cadre de la modélisation des aquifères . . . . .	13
1.3.1 Principe de conservation de la masse . . . . .	13
1.3.2 Loi de Darcy . . . . .	14
1.3.3 Équation générale régissant les écoulements souterrains . . . . .	15
1.4 Équation de la diffusivité pour un régime permanent 2D . . . . .	15
1.4.1 Hypothèse de Dupuit et flux horizontal . . . . .	15
1.4.2 Potentiel hydraulique . . . . .	16
1.5 Représentation Complexe . . . . .	17
1.5.1 Potentiel complexe . . . . .	17
1.5.2 Vitesse complexe . . . . .	17
1.5.3 Principe de superposition . . . . .	18
1.6 Numerical methods applicable in hydrogeology . . . . .	18
1.6.1 Domain method . . . . .	19
1.6.2 Boundary methods . . . . .	19
1.6.3 Vector and grid based approaches . . . . .	21
1.7 Paradigme orienté objet de la méthode des éléments analytiques . . . . .	22
1.7.1 Approche orientée objet de l'hydrogéologie . . . . .	22
1.7.2 Conceptualisation orientée objet . . . . .	23
1.8 Démarche générale de modélisation . . . . .	27
<b>2 Comparaison des approches AEM et FDM</b>	<b>31</b>
2.1 Présentation géographique du site d'étude . . . . .	31
2.1.1 L'Écozone du Forez : Un site à fort enjeu écologique et économique . . . . .	31
2.1.2 Description géomorphologique . . . . .	32
2.1.3 Description hydrologique . . . . .	37
2.1.3.1 Environnement climatique . . . . .	37
2.1.3.2 Environnement hydrographique . . . . .	37
2.1.3.3 Environnement hydrogéologique . . . . .	38
2.2 Organisation des données pour le modèle physique . . . . .	39

2.2.1	Organisation des données mobilisables . . . . .	39
2.2.2	Données topographiques . . . . .	39
2.2.3	Données hydrologiques . . . . .	42
2.2.4	Données hydrogéologiques . . . . .	44
2.2.5	Représentation des caractéristiques physiques de l'aquifère sous SIG . . . . .	47
2.3	Modélisation hydrodynamique . . . . .	49
2.3.1	Représentation des conditions aux limites . . . . .	49
2.3.2	Procédure de discrétisation . . . . .	51
2.3.3	Résultats de simulation . . . . .	55
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Analyse mathématique de l'erreur de discrétisation</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Étude analytique pour une répartition de charge constante . . . . .	62
3.2.1	Position du problème . . . . .	62
3.2.2	Résolution analytique du segment de droite . . . . .	63
3.2.3	Résolution analytique de l'arc de cercle . . . . .	66
3.2.3.1	Expression de la troisième transformation conforme . . . . .	67
3.2.3.2	Expression de l'image de l'infini $t_\infty$ . . . . .	70
3.2.3.3	Évaluation du potentiel complexe de l'arc de cercle dans l'espace $t$ . . . . .	70
3.2.3.4	Évaluation Numérique . . . . .	71
3.2.4	Comparaison des potentiels complexes obtenus . . . . .	73
3.2.4.1	Étude pour l'hypothèse $\Phi_l = \Phi_{arc}$ . . . . .	73
3.2.4.2	Étude du cas de l'hypothèse $Q_{arc} = Q_l$ . . . . .	75
3.2.4.3	Analyse de sensibilité de l'erreur de discrétisation . . . . .	76
3.3	Généralisation au cas d'une répartition de potentiel non constante . . . . .	78
3.3.1	Position du problème . . . . .	78
3.3.2	Résolution analytique du segment de droite . . . . .	78
3.3.3	Résolution analytique de l'arc de cercle . . . . .	79
3.3.4	Estimation des coefficients $a_n$ pour une répartition de potentiel linéaire . . . . .	81
3.3.4.1	Représentation de la condition de potentiel par une série de Fourier . . . . .	81
3.3.4.2	Représentation de la distribution de potentiel linéaire . . . . .	82
3.4	Étude numérique de 3 segments connectés . . . . .	83
3.4.1	Position du problème . . . . .	83
3.4.2	Cadre de la résolution numérique par éléments analytiques . . . . .	83
3.4.2.1	Définition du potentiel complexe . . . . .	84
3.4.2.2	Définition du système de coordonnées local . . . . .	84
3.4.3	Expression locale d'une ligne source . . . . .	84
3.4.3.1	Représentation par les polynômes de Tchebychev . . . . .	85
3.4.3.2	Représentation du champ lointain (far-field) . . . . .	86
3.4.3.3	Formulation contractée du potentiel complexe . . . . .	87
3.4.4	Principe de résolution par la méthode des éléments analytiques . . . . .	87
3.4.4.1	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	87
3.4.4.2	Définition des points de contrôles . . . . .	88
3.4.4.3	Assemblage de la matrice d'influence et du second membre . . . . .	88

3.4.4.4	Prise en compte de contraintes . . . . .	89
3.4.5	Comparaison avec l'arc de cercle . . . . .	89
3.4.5.1	Étude spatiale au sens des moindres carrés . . . . .	89
3.4.5.2	Étude en terme d'Aire et de Périmètres . . . . .	92
3.5	Conclusion . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Nouvelles approches de discrétisation</b>	<b>95</b>
4.1	Méthodes de discrétisation adaptées aux AEM . . . . .	95
4.1.1	Classification des algorithmes de simplification . . . . .	95
4.1.2	L'algorithme de Douglas-Peucker . . . . .	97
4.1.3	Méthodes de discrétisation alternatives . . . . .	99
4.1.4	Reconnaissance de formes elliptiques pour la discrétisation . . . . .	102
4.1.5	Préservation des propriétés physiques . . . . .	104
4.2	Estimation de l'erreur de discrétisation . . . . .	105
4.2.1	Notion d'éléments actifs et passifs . . . . .	105
4.2.2	Mesures spatiales de la discrétisation . . . . .	106
4.2.3	Estimateur local a posteriori . . . . .	108
4.2.4	Estimateur global a posteriori . . . . .	109
4.3	Vers un outil d'aide à la discrétisation . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Nouveaux éléments analytiques 1D en régime transitoire</b>	<b>111</b>
5.1	Problème physique . . . . .	111
5.2	Formulation générale . . . . .	112
5.3	Solution exacte . . . . .	114
5.4	Résolution du problème en régime transitoire . . . . .	115
5.5	Formes analytiques des différents potentiels . . . . .	116
5.5.1	Forme de l'élément linesink . . . . .	116
5.5.2	Forme de l'élément divergence linesink . . . . .	118
5.5.3	Équivalent 1D du potentiel non singulier . . . . .	119
5.5.4	Calcul de $T_n$ , $T'_n$ et $T''_n$ . . . . .	120
5.6	Assemblage de la matrice d'influence et du second membre . . . . .	120
5.6.1	Points de contrôles . . . . .	121
5.6.2	Conditions à vérifier par le système d'équations à résoudre . . . . .	121
5.6.3	Contraintes du système d'équations à vérifier . . . . .	123
5.7	Un premier résultat numérique . . . . .	126
5.8	Comportement des termes singuliers d'ordre un et trois . . . . .	128
5.9	Étude de la consistance du schéma numérique . . . . .	129
5.10	Étude du comportement de la solution numérique . . . . .	131
5.10.1	Influence du pas de temps $\Delta t$ . . . . .	132
5.10.2	Évolution de l'erreur en fonction de l'itération . . . . .	133
5.10.3	Influence du nombre de points de contrôles et de leurs répartition . . . . .	135
5.10.4	Influence du degré $N$ des polynômes de Tchebychev . . . . .	138
5.11	Pré-estimation du résultat numérique a la première itération . . . . .	138
5.12	Résolution de l'équation non linéaire pour une diffusivité non constante . . . . .	141
5.12.1	Résolution par un schéma explicite . . . . .	141
5.12.2	Résolution par un schéma implicite . . . . .	142
5.13	Conclusion . . . . .	143



<b>6</b>	<b>Méthode des éléments analytiques 2D pour le régime transitoire</b>	<b>145</b>
6.1	Position du problème . . . . .	145
6.2	Étude de solutions particulières . . . . .	146
6.2.1	Une solution 2D . . . . .	146
6.2.2	Une solution 1D . . . . .	148
6.3	Formulation des éléments analytiques en régime transitoire . . . . .	150
6.3.1	Transformation conforme utilisée . . . . .	150
6.3.2	Formulation utilisant les polynômes de Tchebychev . . . . .	151
6.3.3	Écriture en fonction des $\tilde{F}_n$ . . . . .	152
6.3.4	Élément linesink . . . . .	153
6.3.5	Élément divergence line sink . . . . .	156
6.3.6	Élément non singulier . . . . .	158
6.4	Méthode de résolution numérique . . . . .	160
6.4.1	Système d'équations à résoudre . . . . .	160
6.4.2	Définition des points de contrôles . . . . .	161
6.4.3	Assemblage de la matrice d'influence et du second membre . . . . .	162
6.4.3.1	Condition au domaine . . . . .	162
6.4.3.2	Condition au bord . . . . .	164
6.4.3.3	Résolution par moindres carrés avec sous domaines . . . . .	165
6.4.4	Prise en compte de la contrainte de singularités . . . . .	166
6.4.5	Initialisation du système d'équations . . . . .	166
6.4.6	Estimation de la taille de l'ellipse d'influence à chacune des itérations . . . . .	167
6.5	Conclusion . . . . .	167
<b>A</b>	<b>Généralisation de la théorie complexe pour les fonctions harmoniques</b>	<b>175</b>
A.1	Rappel de quelques propriétés d'analyse complexe . . . . .	175
A.2	Formulation du potentiel complexe par la divergence et le rotationnel . . . . .	176
<b>B</b>	<b>Relation mathématique entre les AEM et les BEM</b>	<b>181</b>
<b>C</b>	<b>Fonction de courant et fonction potentiel</b>	<b>185</b>
<b>D</b>	<b>Données collectées pour l'Écozone</b>	<b>187</b>
D.1	Données climatiques de la plaine du Forez . . . . .	187
D.2	Données cartographiées sous SIG . . . . .	189
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>201</b>

# Introduction

## **La modélisation mathématique au service de la gestion des ressources en eau souterraine**

L'eau douce mobilisable est une denrée rare et précieuse qui est souvent stockée dans les nappes d'eau souterraines. Or, cette ressource a fortement subi les effets de la poussée démographique associée à l'industrialisation, l'urbanisation et l'intensification agricole de ces dernières années. Il devient nécessaire d'avoir une gestion efficace de ces réserves.

Pour cette raison, la modélisation est devenue un outil indispensable à la connaissance des écoulements souterrains pour une gestion efficace des ressources en eau. Associer une méthode numérique à l'outil SIG permet d'envisager les nombreuses possibilités que pourrait apporter une interaction efficace entre les données géoréférencées et les résultats de simulations.

Or la méthode des éléments analytiques présente une structure similaire aux SIG (Système d'Information Géographique) par sa nature vectorielle et orientée objet. C'est pourquoi elle présente une alternative intéressante par rapport aux méthodes numériques usuellement utilisées en hydrodynamique souterraine. Elle a été spécifiquement développée pour les écoulements souterrains. Elle présente des résultats qui, d'un point de vue fiabilité et adaptabilité à différentes échelles spatiales, montrent leurs intérêts et leurs possibilités.

Enfin, cette méthode innovante présente un challenge mathématique par la nature "complexe" de la théorie qu'elle exploite. En effet, la théorie mathématique présente de vastes possibilités qui sont parfois sous-exploitées dans leurs applications. Pourtant, elles permettent souvent d'aider à résoudre des problèmes spécifiquement liés à l'environnement qui nous entoure.

## **Objectifs des travaux**

Il s'agit d'abord d'étudier les spécificités de la méthode des éléments analytiques par rapport aux méthodes de modélisation numériques classiques. Cette comparaison doit pouvoir mettre en évidence les différences d'approches de modélisation entre ces méthodes. Cela permet d'en déduire les avantages et inconvénients pour chacune d'elles. Ces différentes approches peuvent néanmoins se réunir sous une démarche commune de modélisation à travers la concep-

tualisation de l'aquifère. Cette démarche méthodique doit permettre de limiter les erreurs en les contrôlant plus efficacement.

Ensuite, il s'agit de se focaliser sur le processus de discrétisation. C'est l'étape de la modélisation où l'utilisateur peut sans doute influencer le plus sur la qualité finale de la modélisation. Pour cela, une analyse des approximations inhérentes à la méthode des éléments analytiques doit être effectuée à travers l'étude de cas théoriques "contrôlables".

La représentation objet et vectorielle des éléments analytiques permet de bien valoriser les interactions possibles avec les SIG. En particulier, il s'agit d'élaborer des algorithmes de discrétisation adaptés aux spécificités et aux besoins de la méthode, mais aussi de mettre en valeur des critères d'évaluation de la qualité de cette discrétisation. La synthèse de ces outils et méthodes permet à l'utilisateur de disposer d'un outil d'aide à la discrétisation pour réduire au mieux ses effets sur la qualité de modélisation.

Enfin, il s'agit d'étudier le comportement numérique des éléments analytiques adaptés à la simulation en régime transitoire. Pour cela, des éléments analytiques 1D sont d'abord développés pour faciliter cette étude. Leur comportement numérique reste similaire tout en réduisant les erreurs numériques qui sont induites par le calcul des éléments analytiques eux-mêmes.

Cette analyse permet de mettre en évidence une méthode de résolution adaptée au régime transitoire qui est ensuite transposée au problème 2D. Elle y expose en particulier une méthode pour estimer le champ d'influence de l'élément transitoire, utilisant un critère de discrétisation spatial qui doit être corrélé avec le pas de discrétisation temporel.

## Position des travaux

Cette thèse s'inscrit à l'intersection de 3 disciplines scientifiques (figure 1). Chacune d'elle possède un domaine de recherche particulier qui a inspiré les travaux tout au long de ce mémoire. La combinaison de ces 3 disciplines a permis de catalyser les travaux de ce mémoire en s'inspirant tour à tour des connaissances acquises par chacune d'elles.

- Le domaine de l'*hydrogéologie* représente l'application physique finale puisque l'objectif reste de modéliser les écoulements souterrains. Elle nécessite la connaissance de théories qui permettent de représenter le comportement physique d'un écoulement dans un milieu poreux. Comme un aquifère est une partie intégrante du cycle de l'eau, elle nécessite aussi la connaissance plus large de l'hydrologie.
- Le domaine des *mathématiques*, et plus particulièrement celui de la modélisation numérique permet d'exploiter au mieux les possibilités apportées par la technologie informatique.

- Le domaine de l'*informatique* et plus particulièrement les SIG permet d'exploiter toutes les connaissances liées aux bases de données et à la CAO (Conception Assistée par Ordinateur). C'est devenu un outil pratiquement indispensable à la gestion des données rattachées à un environnement géographique. Leurs capacités permettent d'envisager de multiples utilisations dont celle de structurer et préparer les données en vue de l'utilisation d'un code de calcul numérique.

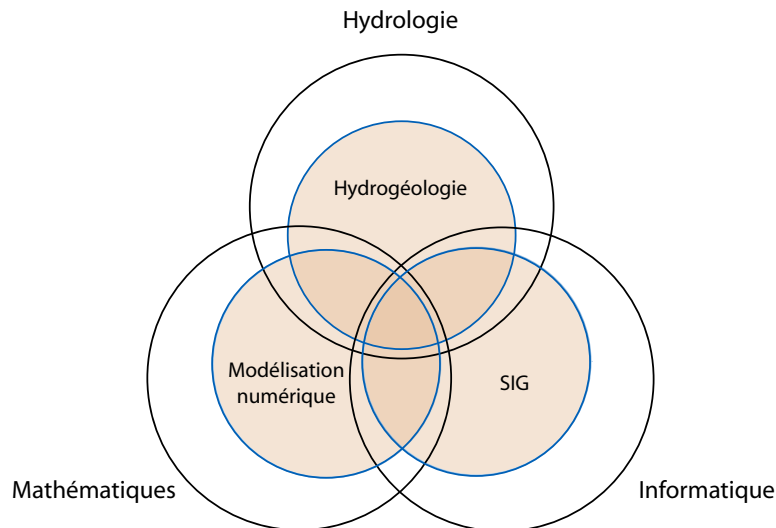


FIGURE 1 – Position des travaux.

## Plan du manuscrit

Ce manuscrit s'organise en 6 chapitres. Les chapitres 1, 2 et 4 sont à caractère pratiques alors que les chapitres 3, 5, 6 sont plus théoriques. Les chapitres 1 et 2 sont plutôt du domaine de l'hydrogéologie. Les chapitres 3 et 4 abordent le sujet de la discrétisation d'un point de vue théorique et pratique. Les chapitres 5 et 6 sont du domaine des mathématiques et de l'analyse numérique.

Le premier est une introduction générale qui est destiné à rappeler les concepts généraux de l'hydrodynamique souterraine. Puis, il s'attache à mettre en évidence les particularités et la place de la méthode des éléments analytiques parmi les autres méthodes de modélisation. Il permet aussi d'introduire un certain nombre de concepts de modélisation.

Le deuxième commence par décrire d'un point vu hydrogéologie les propriétés physiques de l'aquifère test qui est utilisé. Puis, la comparaison entre les éléments analytiques et la méthode des différences finies s'approfondit sur une méthodologie de modélisation qui envisage toutes les étapes de la modélisation, de la création du modèle conceptuel jusqu'aux résultats de simulation. Mais avant tout.

Le chapitre 3 est plus mathématique. Il s'attache à étudier le comportement numérique de l'erreur de discrétisation pour essayer d'en réduire au mieux ses effets. C'est également l'occasion de présenter des éléments de théorie de la méthode des éléments analytiques.

Le chapitre 4 développe des algorithmes informatiques et expose des critères pour la discrétisation. En utilisant les SIG, il essaie d'exploiter l'analyse mathématique du chapitre 3 pour établir une procédure de discrétisation performante et adaptée au spécificité des éléments analytiques.

Le mémoire se finit avec l'étude numérique et mathématique de l'application des éléments analytiques au régime transitoire dans les chapitres 5 et 6. Le chapitre 5 traite le cas 1D en étudiant le comportement numérique d'une résolution 1D d'un problème en régime transitoire avec des éléments analytiques 1D analogue à ceux du 2D pour limiter les erreurs numériques et mettre plus facilement en évidence des caractéristiques numériques. Le chapitre 6 exploite l'analyse du chapitre 5 pour résoudre le même problème en 2D.

# Chapitre 1

## Du problème physique au modèle numérique

*“Science cannot solve the ultimate mystery of Nature. And it is because in the last analysis we ourselves are part of the mystery we are trying to solve.”*

Max Planck, Nobel de physique 1918.

CE PREMIER chapitre est destiné à rappeler les concepts généraux de l’hydrodynamique souterraine. Il montre comment les équations fondamentales gouvernent tout processus de modélisation hydrogéologique. Ces équations appliquent des hypothèses propres à la physique des écoulements dans un milieu poreux. Il est présenté le cas plus particulier des équations utilisées dans le cadre de la méthode des éléments analytiques. Après avoir effectué ces quelques rappels, les éléments analytiques sont classifiés dans la grande famille des méthodes numériques. Puis, les différences avec les autres méthodes plus classiques y sont discutées en mettant en évidence les avantages et inconvénients pour chacune d’elles. Pour finir, il est montré comment ce modèle mathématique s’intègre dans une démarche globale de modélisation allant du problème physique jusqu’au modèle numérique.

### 1.1 Les nappes d’eau souterraines : un milieu naturel

La dynamique du cycle de l’eau montre la complexité des échanges hydriques entre les différents milieux sur Terre. L’eau y subit différents processus complexes ; passant par les différents états solides, liquides et gazeux. Lors de son parcours terrestre, une grande quantité de cette eau se trouve sous une forme souterraine. Elle constitue une des étapes importantes si l’on considère la forte interaction avec l’environnement extérieur. Cette eau permet par

exemple d'alimenter les cours d'eau en période de sécheresse. La connaissance de ces écoulements souterrains présente un enjeu important pour une gestion efficace de l'eau. Ainsi, la loi sur l'eau de janvier 1992 a permis d'instituer des schémas directeurs d'aménagement et de gestion des eaux (SDAGE). Ils permettent de fixer les orientations fondamentales pour une gestion équilibrée de l'eau. Plus récemment, la Directive Cadre Européenne sur l'Eau (DCE) impose le maintien ou le retour au bon état des masses d'eau souterraine du point de vue de la qualité<sup>1</sup>.

*“L'eau fait partie du patrimoine commun de la nation. Sa protection, sa mise en valeur et le développement de la ressource utilisable, dans le respect des équilibres naturels, sont d'intérêt général.*

*L'usage de l'eau appartient à tous dans le cadre des lois et règlements ainsi que des droits antérieurement établis.”*

Article 1er de la loi sur l'eau du 3 janvier 1992.

L'aquifère est défini comme une couche géologique formée soit de roches poreuses d'origines sédimentaires (sable, gravier, calcaire, craie, ...), soit de roches dures fissurées. Il est susceptible de contenir une zone saturée en eau qui est appelée nappe d'eau souterraine ou nappe aquifère. De plus, cette formation géologique est un milieu suffisamment conducteur d'eau pour permettre un écoulement significatif et le captage de quantités d'eau appréciables.

Lorsque la surface supérieure de l'eau fluctue sans contrainte, ces nappes d'eau sont dites libres. Si l'eau est confinée par des couches géologiques imperméables, elles sont captives. En particulier, cette thèse traitera en exemple le cas des nappes phréatiques qui sont des nappes d'eau souterraines libres et peu profondes.

Le bassin versant d'une rivière est la zone géographique à l'intérieur de laquelle l'eau précipitée s'écoule et converge vers la rivière. Si le but est l'identification et la gestion des ressources souterraines, il devient naturel de considérer une échelle spatiale de l'ordre du bassin versant. Ainsi, il est possible d'identifier un espace du sous-sol et d'en estimer toutes ses influences extérieures, i.e. les quantités d'eau qui entrent et qui sortent de la nappe. Cette ressource est alors entièrement déterminée par les volumes qui entrent, la circulation intérieure et les volumes qui sortent.

La nature lithologique de l'aquifère, c'est à dire la nature des roches constituant sa formation géologique, leur localisation, leur disposition et leur architecture, permettent d'aboutir, en synthétisant, à la définition et à l'identification des structures hydrogéologiques internes et aux limites du bassin versant correspondant.

---

1. Directive 2000/60/CE du parlement européen et du conseil du 23 octobre 2000 établissant un cadre pour une politique communautaire dans le domaine de l'eau.

Cette étude géologique associée à la connaissance des apports naturels qui les alimentent permet d'estimer la ressource en eaux souterraines existante, mais une connaissance approfondie du comportement physique des écoulements souterrains ne peut être obtenue que par une modélisation de l'aquifère.

Dans ce chapitre, il sera exposé une démarche globale de modélisation pour les écoulements souterrains. Les équations générales seront obtenues à partir des fondements de la mécanique des fluides d'après le principe d'homogénéisation du milieu poreux [6, 10, 17, 29, 43].

## 1.2 La modélisation des écoulements de nappes d'eau souterraines

### 1.2.1 Du microscopique au macroscopique

Au niveau microscopique, le milieu poreux se compose d'un ensemble de particules minérales solides séparées par des espaces vides, les pores. Dans le cas de sables ou graviers, il s'agit d'un assemblage de grains aux formes plutôt arrondies. La porosité permet de quantifier le rapport entre le volume des vides et le volume total du matériau.

Une partie de l'eau contenue dans les pores du milieu est retenue dans ces vides ou à la surface des grains par des forces supérieures à celle de la gravité. Cette eau, non mobilisable, est appelée eau de rétention. L'eau gravitaire, au contraire, est soumise à une force de gravité dominante. C'est l'eau qui circule dans l'aquifère. Ce qui permet de définir une porosité efficace comme le rapport entre le volume d'eau gravitaire et le volume total de la roche saturée en eau. Cette porosité dépend principalement de la taille des grains, de l'arrangement des grains et de leur état de surface.

Les écoulements dans les milieux poreux sont a priori très difficiles à modéliser compte tenu de leur extrême complexité géométrique. De plus, la prise en compte de l'ensemble des hétérogénéités du milieu est souvent inutile à l'échelle macroscopique. Un procédé d'homogénéisation permet alors d'idéaliser le milieu en le considérant comme continu et donc en moyennant ses propriétés à l'échelle macroscopique à partir de sa microstructure. Nous utilisons alors un VER (volume élémentaire représentatif) qui contient un volume suffisamment petit pour prendre en compte la structure microscopique du milieu et suffisamment grand pour décrire le comportement global du milieu. Notons que l'échelle du VER peut être nettement plus petite que les dimensions totales du système aquifère.

Ainsi, les grandeurs physiques que nous manipulerons par la suite correspondent à des grandeurs moyennées et les lois qu'elles vérifient ne sont valables que sur un plan macroscopique.



## 1.2.2 Caractéristiques hydrogéologiques de l'aquifère

### *Perméabilité*

La perméabilité ou conductivité hydraulique  $k [LT^{-1}]$  représente le volume d'eau gravitaire s'écoulant pendant une unité de temps à travers une unité de section orthogonale à la direction de l'écoulement sous l'effet d'une unité de gradient hydraulique. Ayant les dimensions d'une vitesse, elle est exprimée en mètres par seconde.

Une perméabilité intrinsèque au milieu poreux  $\kappa [L^2]$  est définie. Elle permet de se rendre indépendant des caractéristiques du fluide et exprime sa résistance à l'écoulement qui le traverse. Il est possible de lier cette perméabilité intrinsèque avec la perméabilité  $K$  par

$$k = \frac{\kappa \rho g}{\mu} \quad (1.1)$$

où  $\rho [ML^{-3}]$  représente la densité du fluide,  $\mu [ML^{-1}T^{-1}]$  la viscosité dynamique du fluide et  $g [LT^{-2}]$  l'accélération gravitationnelle.

### *Coefficient d'emmagasinement*

Le coefficient d'emmagasinement  $S [.]$  peut être défini comme le volume d'eau pouvant être libéré ou emmagasiné par un prisme vertical du matériau aquifère de section égale à l'unité, à la suite d'une modification unitaire du niveau de la charge piézométrique. C'est un coefficient sans dimension. Dans les nappes captives, l'eau libérée dépend entièrement de la compressibilité du matériau aquifère et de l'eau et ce coefficient est faible (de  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ ). Dans les nappes libres, l'effet de la compressibilité du matériau aquifère et de l'eau étant généralement négligeable, le coefficient d'emmagasinement correspond pratiquement au volume d'eau gravitaire saturant la roche, et donc à la porosité efficace. Son ordre de grandeur est généralement comprise entre  $1 \cdot 10^{-2}$  et  $2 \cdot 10^{-1}$  pour un matériau alluvionnaire.

### *Charge piézométrique*

La charge piézométrique  $\phi [m]$  est une notion fondamentale de hydrodynamique qui permet d'évaluer le comportement de la nappe aquifère (figure 1.1).

Puisque les écoulements dans le milieu poreux sont de vitesses assez faibles (généralement inférieures à  $10^{-3}$  m/s), il est possible de négliger l'inertie du fluide à l'échelle macroscopique. La charge piézométrique peut ainsi s'exprimer en fonction de l'élévation  $z_h [m]$  et de la pression  $p [N/m^2]$  par la relation :

$$\phi = z_h + \frac{p}{\rho g} \quad (1.2)$$

où  $\rho [kg/m^3]$  représente la densité du fluide et  $g [m/s^2]$  l'accélération de la gravité.

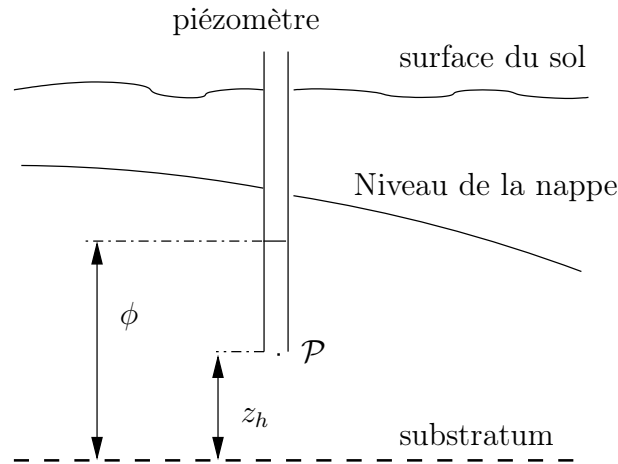


FIGURE 1.1 – Définition de la charge piézométrique

## 1.3 Cadre de la modélisation des aquifères

### 1.3.1 Principe de conservation de la masse

La conservation de la masse du fluide s'exprime à l'échelle macroscopique par une équation appelée équation de continuité par

$$\frac{\partial (n\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{q}) = -\rho\gamma \quad (1.3)$$

où  $\rho [ML^{-3}]$  est la masse volumique,  $n [.]$  est la porosité totale,  $\gamma$  le débit d'eau prélevée par unité de volume,  $\vec{q} [LT^{-1}]$  la vitesse de filtration de l'écoulement exprimant la vitesse fictive d'un fluide qui percolerait à travers le milieu idéalisé.

La porosité  $n$  est indépendante du temps lorsque le milieu poreux est considéré indéformable. Si de plus, la masse volumique  $\rho$  est considérée indépendante de la pression  $p$ , nous obtenons la relation :

$$\frac{\partial (n\rho)}{\partial t} = \frac{\partial (n\rho)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.4)$$

avec un coefficient d'emménagement spécifique  $S$  défini par

$$S = g \frac{\partial (n\rho)}{\partial p} \quad (1.5)$$

Considérons maintenant une masse volumique constante. En introduisant l'expression 1.4 dans l'équation 1.3, puis en y développant la pression  $p = \rho g (\phi - z_h)$  en fonction de  $\phi$ , l'équation de continuité 1.3 peut se réécrire en fonction de la charge piézométrique  $\phi$  par

$$S \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = -\gamma \quad (1.6)$$

Cette expression est la forme la plus courante de l'équation de continuité exprimée en fonction de la charge piézométrique. En régime permanent, la variation de la charge par rapport au temps s'annule et l'équation 1.6 se réduit à la forme :

$$\text{div}(\vec{q}) = -\gamma \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Loi de Darcy

La loi de Darcy est issue de l'expérience de Henri Darcy (1803-1858) en 1856 [18]. Elle exprime que la vitesse de filtration  $\vec{q}$  [ $LT^{-1}$ ] est proportionnelle au gradient de la pression  $p$ . Cette loi n'est valable qu'à l'échelle macroscopique et son expression la plus courante en hydrogéologie se présente sous la forme :

$$\vec{q} = -\frac{\kappa}{\mu} \left( \vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} z_h \right) \quad (1.8)$$

Pour un fluide incompressible, cette loi peut aussi s'exprimer en fonction de la charge piézométrique par la relation :

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} \phi \quad (1.9)$$

où  $k$  [ $LT^{-1}$ ] est le coefficient de perméabilité généralement exprimé sous la forme d'un tenseur symétrique. Dans le cas où le milieu poreux est isotrope, les perméabilités deviennent des scalaires.

Il a été établi que la loi de Darcy relative à un écoulement monophasique à l'échelle macroscopique peut être obtenue par des techniques d'homogénéisation à partir des équations de Navier-Stokes écrites à l'échelle du pore puis réexprimées sur le VER [22, 6].

Une justification rigoureuse de cette loi, à partir d'une analyse microscopique de l'écoulement, a été donnée par H. ENE et E. SANCHEZ-PALENCIA en 1975 [30] dans le cadre d'une hypothèse de périodicité du milieu.

Il est possible de déterminer une limite de validité pour cette loi en définissant un nombre de Reynolds propre aux milieux poreux qui dépend à la fois des propriétés du milieu poreux et de celles du fluide. Il est alors montré que cette loi est valable pour définir les écoulements de nappes d'eau souterraines puisque les vitesses d'écoulements rencontrées restent faibles [22, 63].

### 1.3.3 Équation générale régissant les écoulements souterrains

L'équation de continuité 1.6 et celle de la loi de Darcy 1.8 permettent de représenter les écoulements incompressibles pour un milieu poreux idéalisé. Leur combinaison conduit à l'équation de diffusivité suivante :

$$S \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(-k \vec{\nabla} \phi) + \gamma = 0 \quad (1.10)$$

Cette équation permet d'estimer la charge piézométrique  $\phi$  en fonction des paramètres hydrogéologiques. En effet, il est nécessaire de connaître la géométrie du système aquifère, les entrées/sorties du domaine de modélisation qui peuvent être évaluées par les signaux extérieurs, la répartition de la perméabilité et du coefficient d'emmagasinement grâce à la configuration des formations géologiques.

La représentation de la réalité sera d'autant meilleure que moins d'hypothèses restrictives seront utilisées. La complexité du milieu naturel est mieux prise en compte, mais cela augmente aussi la complexité du modèle à mettre en œuvre et nécessite une plus grande quantité d'information.

L'équation générale 1.10 a été établie en utilisant principalement des hypothèses propres aux nappes phréatiques. Il est possible d'en dériver diverses formes d'équations de diffusivité suivant la nature du problème étudié. Les caractéristiques géométriques et physiques du domaine, la densité des données mobilisables et la problématique de modélisation sont des facteurs déterminants pour le choix de cette formulation.

## 1.4 Équation de la diffusivité pour un régime permanent 2D

Nous considérons dans le reste du mémoire, sauf mention contraire, que le système aquifère est un milieu poreux, homogène et isotrope et que l'écoulement du fluide est incompressible et de densité constante. Nous allons rappeler dans cette section comment s'exprime l'équation de la diffusivité pour un écoulement permanent 2D avec une perméabilité  $k$  constante par morceaux.

### 1.4.1 Hypothèse de Dupuit et flux horizontal

L'échelle des aquifères que nous cherchons à modéliser est beaucoup plus importante que leur épaisseur. Par conséquent, l'ordre de grandeur des vitesses horizontales sont généralement nettement plus importantes que les vitesses verticales. Ce qui signifie que l'approximation de Dupuit (1863) [29] devient raisonnable.

Cette hypothèse implique que l'écoulement vertical devient négligeable, c'est à dire que les équipotentielles de charges piézométrique sont verticales ; ou encore que la distribution de

pression hydrostatique est constante sur la verticale.

Il serait possible d'établir des équations 2D en utilisant des hypothèses moins restrictives [62, 78] que celle de Dupuit. Nous considérons néanmoins cette hypothèse par soucis de clarté et puisque le cadre de nos travaux se base principalement sur des aquifères libre.

L'approximation de Dupuit permet de considérer un écoulement 2D. La somme des flux horizontaux  $q_{xy}$  [ $LT^{-1}$ ] le long de la verticale sont alors donnés par

$$Q = \int_0^h q_{xy} dz \quad (1.11)$$

avec  $h$  [ $L$ ] l'épaisseur saturée en eau de l'aquifère. Cette relation s'exprime sous forme matricielle en fonction de la composante  $Q_x$  en  $x$  et  $Q_y$  en  $y$  par

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^h \vec{q}_x dz \\ \int_0^h \vec{q}_y dz \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

### 1.4.2 Potentiel hydraulique

Dans le cadre de nos travaux, nous allons reformuler les équations générales en fonction d'un potentiel hydraulique  $\Phi$  défini par

$$\Phi = \begin{cases} k H \phi - \frac{1}{2} k H^2 & \text{pour } \phi \geq H \\ \frac{1}{2} k \phi^2 & \text{pour } \phi < H \end{cases} \quad (1.13)$$

avec l'épaisseur de l'aquifère  $H$  [ $L$ ]. La loi de Darcy (équation 1.9) s'exprime alors sous sa forme 2D par

$$Q = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.14)$$

et la loi de conservation de la masse (équation 1.7) s'exprime alors par l'équation de continuité 2D :

$$-\text{div}(\vec{Q}) = \gamma \quad (1.15)$$

avec  $\gamma$  le débit de recharge.

Finalement, la combinaison des équations 1.15 et 1.14 permet de réduire le problème à une équation de Laplace par

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi) = \Delta\Phi = \gamma \quad (1.16)$$

Pour  $\gamma = 0$  nous constatons que le potentiel  $\Phi$  devient une fonction harmonique. C'est ce qui va motiver le choix d'une représentation complexe.

## 1.5 Représentation Complexe

L'équation de Laplace 1.16 exprime le caractère "potentiel" de l'écoulement. Il devient alors judicieux d'utiliser les variables complexes pour exploiter une théorie mathématique déjà très développée [14, 53, 58].

### 1.5.1 Potentiel complexe

Introduisons le potentiel complexe  $\Omega(z)$  dans l'espace complexe  $\boxed{z}$  par

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (1.17a)$$

$$z = x + iy \quad (1.17b)$$

avec  $\Psi$  défini comme le conjugué harmonique de  $\Phi$  par les conditions de Cauchy–Riemann :

$$Q_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad (1.18a)$$

$$Q_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (1.18b)$$

Cette condition implique que le potentiel  $\Omega(z)$  est une fonction holomorphe et vérifie donc l'équation de Laplace (Annexe A). Elle signifie aussi que  $\Psi$  est la fonction de courant. Elle permet de définir des lignes de courant qui sont orthogonales aux lignes potentielles (Annexe C).

### 1.5.2 Vitesse complexe

La vitesse complexe est définie par

$$W(z) = -\frac{d\Omega(z)}{dz} \quad (1.19)$$

D'après les conditions de Cauchy–Riemann (équations 1.18), il en découle la relation :

$$W(z) = -\frac{d\Omega(z)}{dz} = -\frac{\partial\Omega(x, y)}{\partial x} = Q_x(z) - iQ_y(z) \quad (1.20)$$

### 1.5.3 Principe de superposition

Puisque l'équation de Laplace 1.16 est linéaire, la combinaison linéaire d'une famille de solutions de l'équation de Laplace  $\{\Omega_k(z), k = 1, \dots, nb\}$  est aussi solution, i.e.

$$\Omega(z) = \sum_{k=1}^{nb} \Omega_k(z) \tag{1.21}$$

est solution de l'équation de Laplace.

## 1.6 Numerical methods applicable in hydrogeology

Increasingly sophisticated numerical methods for the resolution of the groundwater differential equations have been facilitated by the significant evolution of powerful computer technology. Hence, some denser and more complex systems are possible that should better model reality.

The majority of these numerical methods are classified inside a diagram (figure 1.2). This classification, certainly not unique, is mainly based on the spatial representation of the discretization. Cleavage is observed between the domain methods and the boundaries methods. The discretization is done on the entire computational field for the former method. The discretization is carried out on the border of the modeled domain for the latter. Then, the way of discretization of the algebraic equations distinguishes these methods.

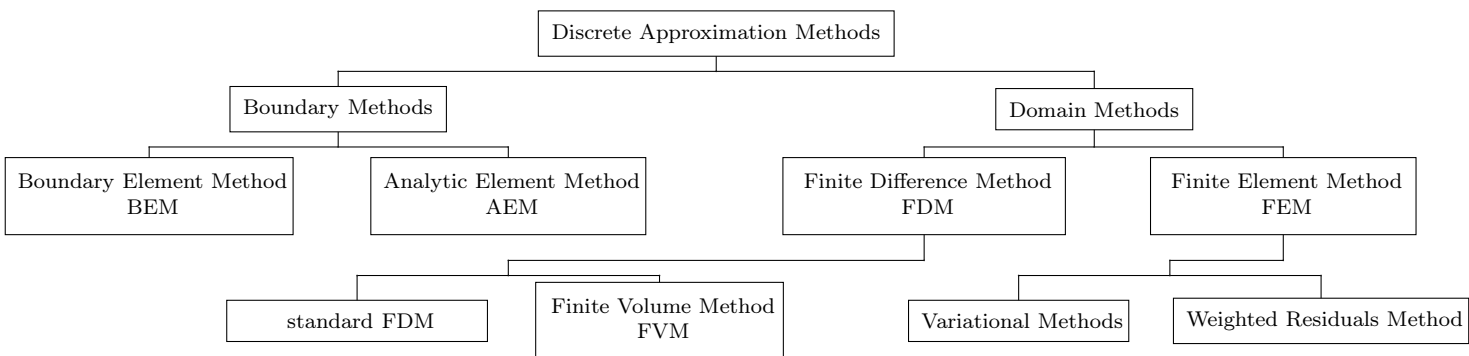


FIGURE 1.2 – None exhaustive outline of discrete approximation methods.

### 1.6.1 Domain method

The Finite Difference and the Finite Element Methods represent the two principal domain methods. They are based on paving the domain with elementary geometrical forms. The choice of this geometry depends principally on the shape of the entire geometrical field, required precision, computational cost and density of exploitable data.

The Finite Difference Method is very popular in hydrogeologic modeling. This is because of its easy use and its intuitive modeling approach. Indeed, this technique is relatively simple to code and implement by the simplicity of its theory and algorithm, with rectangular grid and easy data inputs. It is particularly adapted for regular domains. But, FDM manifests reduced capacities for the representation of complex geometries, via the strict use of rectangular forms of discretization. In particular, it is tricky to represent wells and highly curvilinear geometry. The abrupt changes in the property media values as the permeability generate some large numerical errors. Moreover, the local refinement is inefficient and the representation of the geometry is coarse. This makes inevitable the use of alternative methods such as the Finite Elements or the Boundary Element Methods.

While typically more difficult to implement, the FEM is preferred for the local refinement of grid as an adaptive mesh generation. The profound development of its application gives accuracy, stability and robustness. FEM is preferred for problems with irregular or inhomogeneous domains. Its also well represents the non-linearity and anisotropy in permeability. But, it is computational time consuming and data storage is generally huge, especially for large domains in high resolution.

### 1.6.2 Boundary methods

The Boundary Methods were inspired by work from the beginning of the XIX<sup>th</sup> century with the POISSON (1820) and FREDHOLM (1896) work on the Boundary Integral Equations (BIE).

Theses methods are based on the concepts of fundamental solutions with the Green functions and Cauchy integrals. The algebraic equations of the Boundary Value Problem are reformulated in an integral form that is defined on the boundaries. This integral formulation checks precisely the differential equations of the Boundary Value Problem and reduces the dimension of the system of algebraic equations by one. Therefore, Boundary Methods make it possible to estimate the solution at any point of the field. The problem is then characterized by a finite number of parameters defined on the boundary.

For a mathematically well-posed Boundary Value Problem (BVP), the Boundary integral equations obtained are all equivalent. Thus, many alternatives in the numerical methods can be found and they all can be regrouped under a common mathematical theory.



The Boundary Element Method (BEM) is probably the famous method based on a discretization of the Boundary Integral Equations. It is a terminology derived from the way of discretizing the boundary in Boundary Elements (BE) with a parallel to the Finite Element Method.

The theory in the Boundary Methods is generally more complex and less developed than for the FEM. In particular, some singular integrals associated with these methods are often difficult to calculate and need particular attention.

These are particularly interesting when only the boundary solution is considered. This kind of method is appropriate for a set of highly irregularly spaced points in a large domain because of the exact formulation at every location on the domain in terms of the boundary parameters. Unlike the previous domain methods, the computational time cost to calculate at some locations is proportional to the number of points plus the previous computational time used to estimate the overall solution.

These methods use generally less nodes to calculate the solution because the mesh is only on the boundary. Normally, the FEM is preferred for problems where the domain is highly heterogeneous, whereas the BEM is advantageous for highly homogeneous domains. These methods are particularly efficient if the extent of the domain is infinite. The truncation of the spatial domain is not necessary and only one equation can represent infinite behaviour.

Analytic Element Method (AEM) was developing in parallel to the Boundaries Elements Method [61]. Under the impulse of Pr. STRACK [67, 68], this method was developed in the end of the 70<sup>th</sup> in close relationship to its application on the groundwater flow.

Based mostly upon the Cauchy integral theorem of complex variables [48] and the potential flow theory, AEM has previously been limited to two-dimensional geometry and steady state applications. This formulation is obviously equivalent to the BEM that employs generally the Second Green identity and the respective fundamental solution. This yields to an over-determined system of equations to solve. The recent use of the Wirtinger theory [74] makes it possible to apply complex variable methods to any two-dimensional problem that requires the determination of a vector field. The boundary conditions are expressed in terms of discontinuities or jumps. Different geometric shapes as line or curve can be used to represent the boundary.

Unlike in BEM, the mathematic integrals are analytically estimated before the computational process. This yields a sharp formulation of the boundary condition in relation with physical meaning. Then, all of these analytic expressions are superimposed by the Helmholtz theorem to obtain the overall solution of the groundwater flow. Thus, each physical phenomenon is represented as best as possible. Only these “analytical elements” as a function of parameters approximated at the boundary need to be calculated.

This necessary analytical development, for a long time, restricted the AEM to 2D potential flows. Nowadays, it is possible to calculate the majority of the steady groundwater flows (2D/3D, multi-layers, free/confined aquifer, ...). Many recent works for the transient state allow a probable nearest use.

By its construction, the AEM is particularly efficient for the boundary value problems involving Laplace or Poisson partial differential equations. The development of specialized analytical solutions accelerates the computational speed as well as improving the accuracy obtained on the boundary. The superposition of these analytical expressions by the Helmholtz's decomposition makes it possible to deal with very large models and conserve accuracy on the small scale. The computational time consumed depends mostly on the number of these elements. This property is particularly useful for regional models as NAGROM [21] and the Twin Cities Metropolitan Groundwater Model in Minnesota [57].

Ergo, the AEM is not widely applicable as compared to the universal adaptability of the Finite Element and Finite Difference Methods. However, for some cases, this method can be easier to use and more computationally efficient.

### 1.6.3 Vector and grid based approaches

Two main categories of numerical methods were presented above : the vector and the grid based approaches. They all can be used to approximate the boundary value problems that arise in groundwater flow problems. Their choice will depend on the nature of the problem.

They can be more or less appropriate if we consider the spatial variability of the hydrosystem features and the resolution of the available data. They can also be used as two complementary approaches in a global way of simulation [19].

In addition, the object oriented and vector representation of the AEM is an interesting alternative to the standard representation made with the FDM. Its innate structure ameliorates the interaction with the GIS. Thus, well organizing a geodatabase within a conceptual model to be well exploited by the numerical models increases its effectiveness.

## 1.7 Paradigme orienté objet de la méthode des éléments analytiques

### 1.7.1 Approche orientée objet de l'hydrogéologie

Le paradigme<sup>2</sup> de la programmation objets est né dans les années 70 avec les langages SIMULA et SMALLTALK. Cette approche orientée objet consiste à modéliser informatiquement l'ensemble des éléments du monde réel en un ensemble d'entités informatiques appelées objets [45, 47]. Elle est depuis devenue très populaire grâce aux nombreux avantages apportés par rapport aux langages de programmation classiques (impératif, fonctionnel ou logique). Par contre, cette programmation nécessite une capacité d'abstraction du réel plus importante avec des notions comme la classification, l'héritage, l'encapsulation et le polymorphisme.

La méthode des éléments analytiques possède par nature cette structure objet. En effet, les éléments analytiques peuvent être interprétés comme des objets mathématiques. Ce sont des solutions élémentaires obtenues pour les écoulements souterrains qui correspondent à l'influence de l'élément sur l'écoulement. Elles s'expriment par un potentiel élémentaire et la définition de conditions aux limites propres à l'élément. Un élément analytique est par conséquent l'abstraction d'une entité hydrogéologique "réelle". Une combinaison d'éléments analytiques permet de représenter par exemple :

- Un puits
- Un bassin
- Une rivière
- Un zone colmatée
- Une fissure
- Une zone de recharge
- Un saut de perméabilité
- Une remonté du substratum
- Un aquitard
- ...

L'aquifère est ainsi décomposé en entités hydrogéologiques (figure 1.6). Leurs superpositions conduit à la solution générale. Ces éléments représentent soit la géologie avec la rupture de perméabilité, soit l'hydrogéologie avec une source/un puits, un tronçon de rivière.

La décomposition en objets plus simple permet de mieux maîtriser la complexité du problème de modélisation. Ils ont été implémentés progressivement au fur et à mesure de leurs

---

2. Le mot paradigme tient son origine des mots grecs παράδειγμα (gr. *paradeigma*) qui signifie "modèle" ou "exemple". Ce mot lui-même vient de παραδεικνύω (gr. *paradeiknunai*) qui signifie "démontrer" (Wikipedia, <http://fr.wikipedia.org/>).

développements ; tel que l'élément circulaire [38, 4] ou la zone surfacique d'extraction/injection [64]. Plus récemment, les éléments curvilignes développés principalement par LE GRAND [39]. La recherche de nouveaux éléments est toujours d'actualité avec en particulier le développement d'éléments analytiques pour le régime transitoire.

Dans l'approche objet, le principe d'abstraction permet d'encapsuler dans les objets les données et les opérations qui les manipulent. Ainsi, un objet n'est accessible que par ses opérations externes, indépendamment de sa représentation interne.

Cette structure permet d'avoir une interaction entre objets qui conserve l'indépendance entre les programmes, les données et les procédures. Les programmes peuvent partager les mêmes objets sans avoir à se connaître. C'est impossible avec une programmation fonctionnelle qui utilise le mécanisme d'import/export.

Cette approche permet une programmation modulaire via la réutilisation du code avec l'écriture de bibliothèques. Ainsi, le code est plus facilement réutilisable et plus extensible qu'une programmation fonctionnelle classique. Par conséquent, il est plus aisé de coordonner plusieurs développeurs simultanément.

### 1.7.2 Conceptualisation orientée objet

La conceptualisation orientée objet permet d'introduire diverses notions et structures familières à la théorie orientée objet. D'abord, un élément analytique est un objet. A ce titre, il est composé d'une identité, d'attributs et de méthodes.

*L'identité* de l'élément analytique lui permet de se faire distinguer des autres objets, indépendamment de son état.

*Les attributs* d'un objet permettent de le caractériser. Ce sont des variables qui stockent les informations d'état de l'objet. Un objet "élément analytique" est ainsi défini par sa géométrie avec les coordonnées de ses nœuds, sa forme géométrique et éventuellement son orientation (figure 1.3).

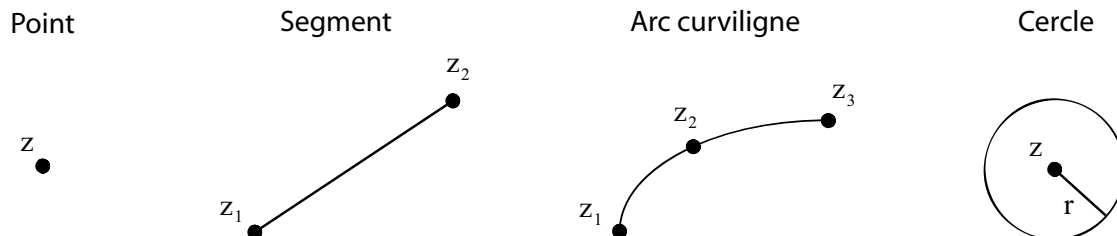


FIGURE 1.3 – Géométrie de quelques éléments analytiques

Il possède la forme mathématique de sa fonction potentiel. Cette fonction mathématique dépend d'un certain nombre d'inconnues et décrit l'influence de l'élément sur l'écoulement. Enfin, l'objet possède un type de condition aux limites décrit par son nom et ses données de condition aux limites.

*Les méthodes* d'un objet caractérisent son comportement. C'est l'ensemble des opérations que l'objet est à même de réaliser. Elles permettent de faire réagir l'objet aux sollicitations extérieures ou d'agir sur les autres objets. Ces opérations sont étroitement liées aux attributs. Leurs actions peuvent dépendre de la valeur des attributs et de les modifier.

A travers les méthodes, les objets "élément analytiques" peuvent fournir leurs données géométriques, le type d'interpolation et la répartition des points de contrôles. Les méthodes permettent aussi d'évaluer la contribution de la fonction potentiel ou la vitesse complexe.

Certains objets possèdent des caractéristiques communes. La classe permet de définir la structure de ces objets à travers la déclaration de l'ensemble des entités qui composeront un objet. Tous les objets sont l'instance d'une classe.

La classification des objets s'effectue aussi par la notion d'héritage. Elle permet aussi de faciliter et d'optimiser la construction des objets. Une nouvelle classe (la classe dérivée) peut être créée à partir d'une classe existante (superclasse). La classe dérivée contient par héritage les attributs et les méthodes de sa superclasse. Ces attributs et méthodes viennent s'ajouter à ceux qui sont définis au niveau de la classe dérivée. De cette façon, une hiérarchie de classes de plus en plus spécialisées est créée.

Les éléments analytiques ont été classifiés suivant leurs géométries, leurs fonctions potentiels et leurs données de conditions aux limites (figure 1.4). Cette classification permet de les organiser du plus général au plus spécialisé. La fonction potentiel ne peut être définie sans une géométrie fixée et les données de conditions aux limites sont propres à un objet élément analytique.

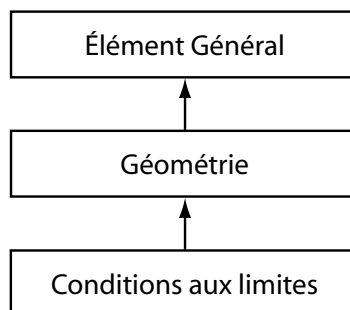


FIGURE 1.4 – Hiérarchie des niveaux d'héritages de classes pour un élément analytique

Le diagramme général (figure 1.5) représente la hiérarchie et l'interaction entre les classes d'éléments analytiques. C'est une classification non exhaustive qui est représentée en langage UML (Unified Modeling Language). C'est un métamodèle; c'est à dire un langage graphique de modélisation des données et des traitements associés. Il permet de formaliser le modèle objet, indépendamment de tout langage de programmation. UML permet ainsi de décrire de manière précise tous les éléments de la modélisation et la sémantique de ces éléments.

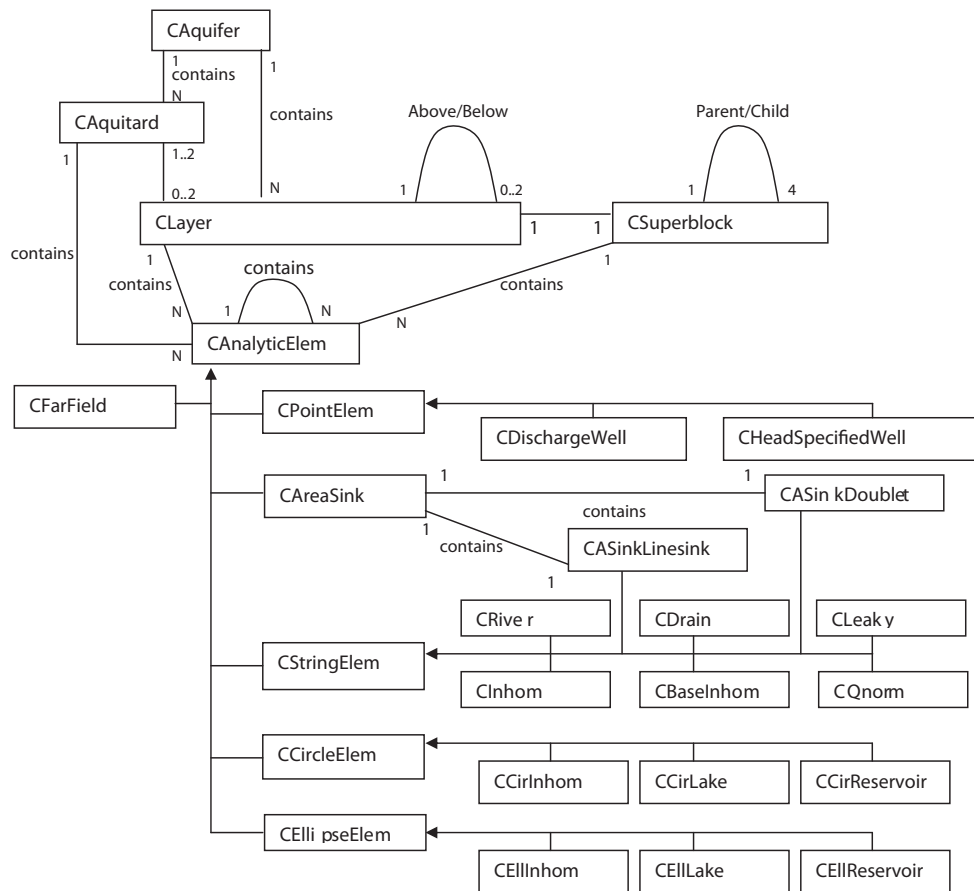


FIGURE 1.5 – Diagramme de Classes des éléments analytiques (D'après J. CRAIG [15, 16])

La connaissance des propriétés de l'aquifère à sa frontière est nécessaire pour la plupart des classes d'objets. C'est la classe la plus générale. Ensuite, il existe des classes intermédiaires qui restent trop générales à la définition d'un "élément analytique". Elles sont nécessaires pour la construction hiérarchique des classes. Le haut du diagramme montre la conceptualisation objet des interactions dans l'aquifère, la partie basse montre la construction des éléments analytiques.

Des classes permettent de définir une couche aquifère ou encore un groupe d'éléments. Cette dernière permet une résolution par la technique des superblocs. Cette technique permet d'améliorer la vitesse de résolution numérique de la méthode. Le principe est de regrouper les éléments de distances voisines. La résolution est effectuée sur chacun des groupes avant d'être globale sur l'aquifère.

Un élément particulier est l'élément uniforme qui représente l'influence à l'infini. C'est une condition à l'infini qui correspond mathématiquement à une source et à un puits de même débit qui seraient éloignés d'une distance infinie.

Cette conceptualisation orientée objet définit des éléments analytiques qui ne présentent individuellement aucun sens hydrogéologique. Une structure cohérente avec tous les autres éléments est donc nécessaire. Par exemple, pour former une zone d'extraction, il faut former une chaîne fermée d'éléments analytiques. La figure 1.6 montre ce que pourrait être la représentation conceptuelle d'un aquifère par cette approche.

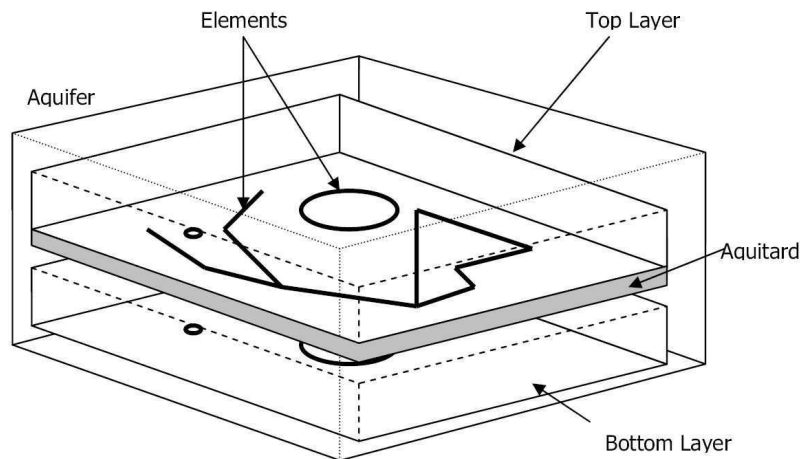


FIGURE 1.6 – Représentation de la structure objet d'un modèle par éléments analytiques (D'après J. CRAIG [15, 16])

Le développement mathématique de quelques éléments analytiques sera explicité dans le chapitre 3 à travers la modélisation de cas d'études mathématique. Cette approche montre aussi l'intérêt que pourraient apporter les outils SIG (Système d'information géographique) pour par exemple faciliter la connexion entre les modèles par éléments analytiques et les bases de données géographiques. Cela sera développé plus en détail au chapitre 2.

## 1.8 Démarche générale de modélisation

La modélisation est un terme très général, dont le sens est intimement lié à la discipline et au sujet d'étude. Dans le cadre de ce travail, nous parlerons plus particulièrement de “modélisation scientifique” qui s'inscrit dans une démarche rigoureuse et pertinente de la représentation d'un phénomène réel : l'écoulement souterrain.

A travers la recherche d'une expression simplifiée de ce système réel, la modélisation permet la perception, bien que partielle, des phénomènes impliqués dans la situation plus complexe de la réalité. Cette démarche doit permettre d'extraire les informations pertinentes de la réalité, dans le but de prédire ou de comprendre un phénomène réel.

Le modèle reste une construction de l'esprit et par conséquent subjectif dans l'élaboration. Il est donc nécessaire de conserver une méthodologie commune pour pouvoir partager des informations et faciliter la traçabilité.

Déjà amorcée par certains travaux [56, 51, 60, 52], cette formalisation permet d'introduire un référentiel terminologique cohérent, en rapport avec la simulation informatique de phénomènes naturels.

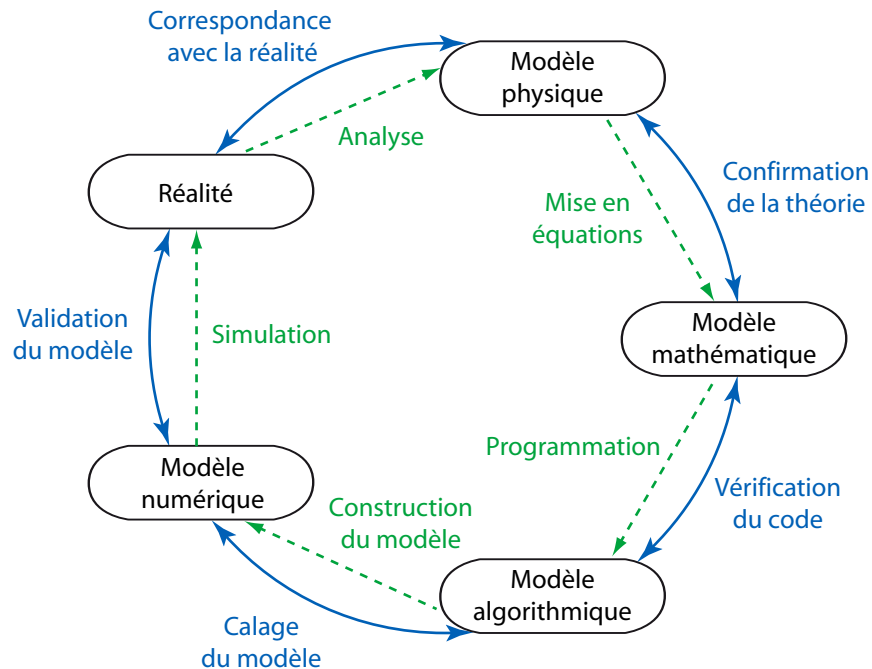


FIGURE 1.7 – Démarche de modélisation scientifique

La démarche de modélisation peut se décomposer en 5 étapes principales (figure 1.7). Chacune d'elle définissant un niveau d'abstraction dans l'élaboration du modèle :



- Le *niveau technique* caractérise le système naturel dans son environnement. L'observation du réel doit permettre de fixer le type d'étude, ses objectifs et la frontière du modèle. L'analyse de ce phénomène naturel doit se faire suivant ces objectifs. Seules les caractéristiques essentielles, celles qui ont une influence sur le problème étudié, sont conservées.
- Le *niveau physique* définit la nature du problème. L'étude des phénomènes physiques impliqués permet d'identifier les variables et conditions aux limites du problème. D'après les objectifs et la nature du problème, les variables se classifient en variables d'entrées, de sorties ou en paramètres. La mobilisation des lois physiques et des résultats mathématiques existants aide à formuler les hypothèses sur le problème.
- Le *niveau mathématique* est la mise en équation du problème physique. Par des lois physiques connues (modèle théorique) ou des corrélations entre les variables (modèle empirique), les hypothèses du problème sont traduites sous forme d'équations. Cela crée des liens entre les variables, en fonction d'un certain nombre de paramètres. La résolution du système d'équations ainsi formulé permettra d'obtenir la valeur des inconnues du problème mathématique.
- Le *niveau algorithmique* permet de formater les expressions mathématiques en algorithmes informatiques. Les méthodes numériques utilisées pour la résolution numérique y sont définies. En particulier, ce niveau définit les méthodes et type de discrétisation employées. Ce niveau d'abstraction doit donner les orientations principales, sans le choix a priori d'un langage de programmation particulier. Pour les éléments analytiques, le langage de programmation devra favoriser l'approche orientée objet.
- Le *niveau numérique* décrit informatiquement le système étudié à l'aide d'un code de simulation générique. Le modèle numérique se construit en fonction de divers paramètres. En particulier, le chapitre 3 montrera que les paramètres de discrétisation peuvent se décliner en discrétisation spatiale ou algébrique. Le choix et la structure du maillage sont dépendantes de la résolution souhaitée. Elle est bien sûr choisie en cohérence avec les objectifs de simulation.  
 Les paramètres physiques sont généralement mal connus. Un processus de calage consiste à ajuster ces paramètres, dans la limite estimée de leurs validités, en vue de reproduire la réalité avec le niveau de correspondance souhaité.

Finalement, la validation du modèle numérique s'attache à s'assurer que le niveau de correspondance avec le domaine d'application est cohérent. Des tests de sensibilité sur les paramètres peuvent permettre d'évaluer la robustesse du modèle.

Ces différentes étapes sont liées entre elles par un processus réversible. Il est toujours possible de revenir à l'une des étapes de modélisation afin d'obtenir la meilleure modélisation possible. L'interprétation des résultats, basée sur l'expérience et le sens commun, peuvent permettre d'améliorer la modélisation en améliorant les hypothèses effectuées à chacune des étapes. Il est par exemple possible de raffiner le maillage pour avoir une meilleure résolution.

Le modèle doit pouvoir être associé aux limites des questionnements pour lequel il est susceptible de donner des résultats utiles. Aucun modèle n'est suffisamment universel pour être susceptible de répondre à toutes les questions. Il doit représenter au mieux une réalité avec les informations du milieu naturel qui sont mobilisables. Les prédictions du modèle seront alors cohérentes avec la résolution considérée. Le chapitre suivant s'inspire de cette démarche de modélisation pour simuler le comportement hydrogéologique d'un aquifère.



## Chapitre 2

# Comparaison des approches AEM et FDM pour la modélisation des écoulements souterrains

LE CHAPITRE précédent a mis en évidence que la méthode des éléments analytiques est une alternative de modélisation intéressante, en particulier par la représentation objet qu'elle utilise. Ce chapitre consiste à approfondir cette comparaison avec la méthode des différences finies sur une méthodologie de modélisation qui envisage toutes les étapes de la modélisation, de la création du modèle conceptuel jusqu'aux résultats de simulation. Mais avant tout, les propriétés physiques de l'aquifère test utilisé seront présentées.

### 2.1 Présentation géographique du site d'étude

#### 2.1.1 L'Écozone du Forez : Un site à fort enjeu écologique et économique

Ce travail s'est porté sur L'Écozone du Forez. C'est un terrain situé au Nord-Est du Massif Central (figure 2.1), au cœur de la plaine du Forez. Il est localisé en bordure du fleuve Loire sur les communes de Magneux-Hautes-Rives, Chambéon et Feurs (figure 2.2).

Sur ce territoire déjà étudié du point de vue hydrogéologique [3, 46], une association de protection de la nature (la FRAPNA<sup>1</sup> Loire) a réhabilité les plans d'eau issue d'une exploitation d'extraction de granulats entre 1973 et les années 90. Dès lors, l'exploitant a délaissé le lit mineur du fleuve pour le lit majeur. Suite à cette entente entre l'exploitant et l'association de protection de la nature, l'Écopole du Forez est né en 1991. C'est devenu un centre d'observation de la vie sauvage et un espace d'accueil pour le public.

---

1. Fédération Rhône-Alpes de protection de la nature, <http://www.frapna.org/>.

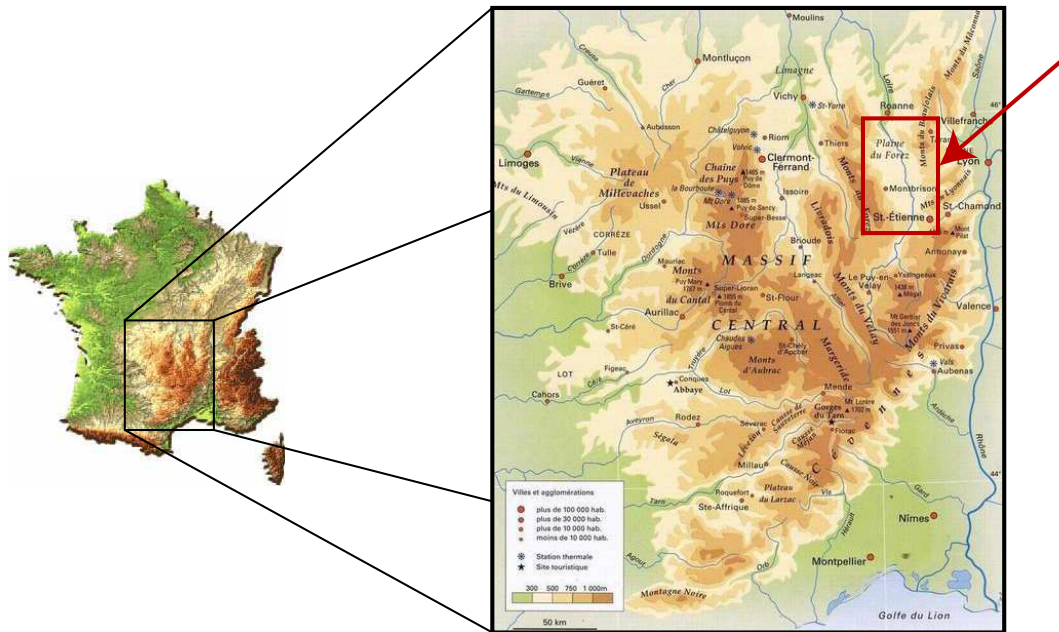


FIGURE 2.1 – Localisation de la plaine du Forez

L'exploitant a la volonté de poursuivre son activité sur la zone d'étude au travers de nouvelles demandes d'extension de son exploitation. Dans le même temps, l'association de protection de la nature s'aperçoit que le réaménagement écologique des gravières en eau peut restaurer et recréer la biodiversité écosystémique, végétale et animale de la plaine du Forez. Par conséquent, elle souhaite, à travers un nouveau plan de gestion [11, 12], gérer de nouveaux plans d'eau issus de l'exploitation afin d'augmenter les potentialités écologiques du site en se basant sur les concepts de l'écologie du paysage [46].

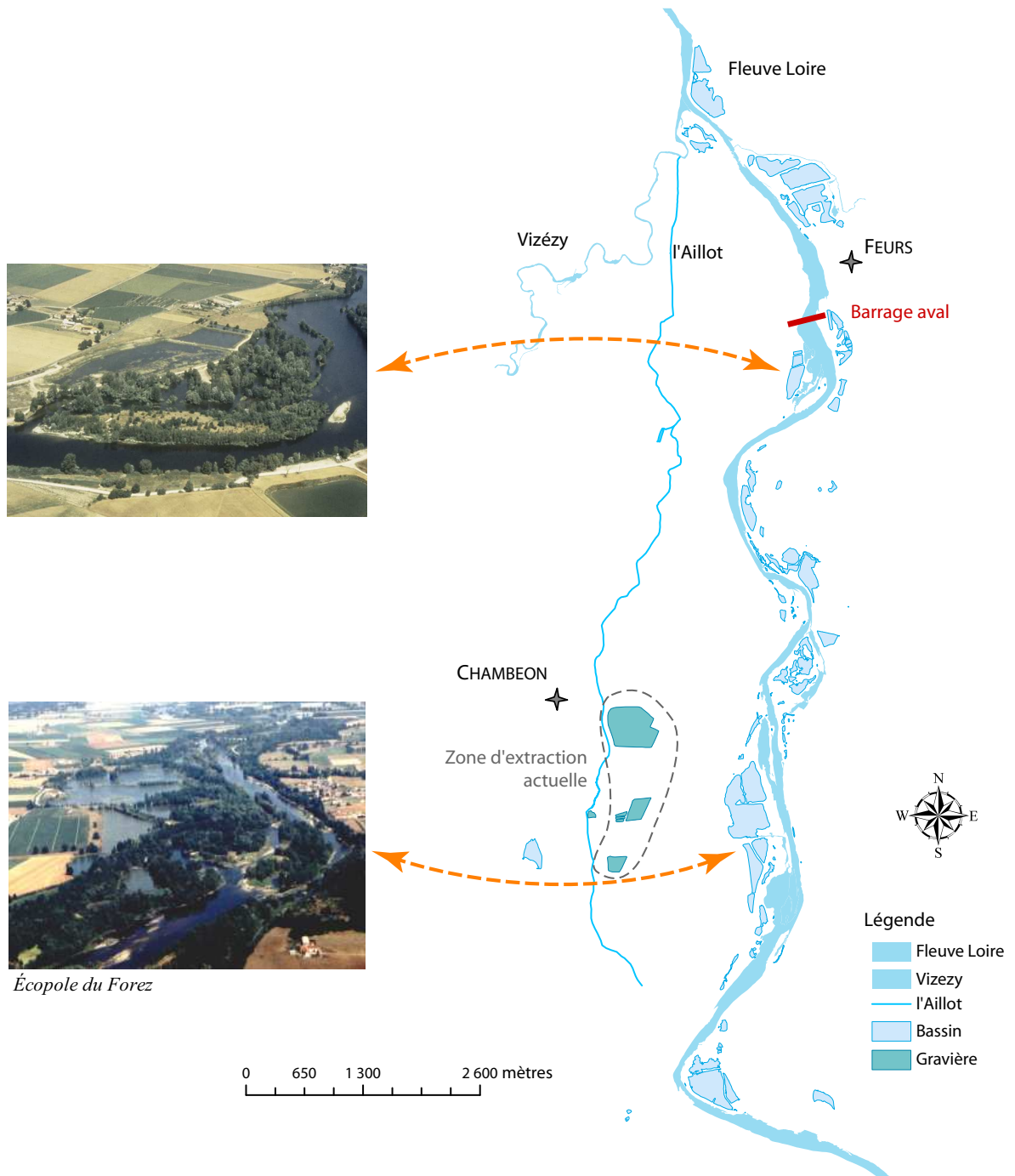
Par conséquent, ce site a pu capitalisé une solide expérience en terme de gestion des milieux naturels (suivi scientifique, dynamique du fleuve, réhabilitation de sites post-industriels, ...) et d'accueil du public (animation, éveil à l'éco-citoyenneté, ...) en collaboration avec de nombreux partenaires publics et privés. Cela en fait un site exemplaire pour tester et comparer nos différentes méthodes de modélisation.

### 2.1.2 Description géomorphologique

La plaine du Forez est un bassin d'effondrement fermé de 760 km<sup>2</sup> qui s'allonge sur 40 km suivant un axe NNO-SSE avec une largeur maximale de 20 km (figure 2.1). Elle est circonscrite par les Monts du Forez à l'Ouest, les Monts du Lyonnais à l'Est, le seuil de Neulise au Nord et celui du Pertuiset au Sud.

Cette zone est assez plane, son altitude moyenne est de 332 m et varie de 320 à 400 m.

2.1 PRÉSENTATION GÉOGRAPHIQUE DU SITE D'ÉTUDE



Aquifère	Plaine alluviale
Superficie	14 km <sup>2</sup>
Épaisseur	De 2 à 7 m
Perméabilité	De 6 10 <sup>-4</sup> à 15 10 <sup>-4</sup> m/s

Fluve Loire	
Débit à l'étiage	10 m <sup>3</sup> /s
Débit en hautes eaux	200 m <sup>3</sup> /s
Crue centennale	4900 m <sup>3</sup> /s

FIGURE 2.2 – Présentation de l'Écozone du Forez

Seuls émergent de la plaine quelques reliefs volcaniques comme le Mont d’Uzore culminant à 534 m ou le Mont Saint-Romain-le-Puy à 497 m.

Ce bassin est un fossé d’effondrement qui a été remblayé au cours du Tertiaire par des sédiments argilo-sableux localement gréseux ou carbonatés de l’Oligo-miocène. Le fleuve Loire traverse la plaine selon une direction N10° Est, depuis Saint-Rambert jusqu’à Balbigny. Son tracé est régi par la tectonique du bassin [27].

Au cours du Plio-Quaternaire, le fleuve Loire s’est successivement encaissé dans les formations tertiaires puis dans ses propres alluvions pour former des terrasses étagées. Aujourd’hui, le lit mineur sur-creuse le substratum en certains endroits tandis qu’à d’autres, il divague en empruntant les nombreuses gravières [59].

L’étude précise de la zone d’étude a été effectuée d’après les documents géologiques représentés par les figures 2.3 et 2.4.

Le substratum est d’âge tertiaire. Il se situe entre 6,50 et 7,50 mètres sous la cote du terrain naturel et peut atteindre plusieurs centaines de mètres d’épaisseur<sup>2</sup>. C’est une formation de marnes vertes qui contient, par endroit, des passées sableuses.

La plaine alluviale (notée Fz<sub>1</sub>) est élevée de 5 mètres par rapport au fleuve et forme des basses terrasses. Cette étendue de 2 km de large en rive gauche de la Loire correspond à la zone d’inondation maximale de la Loire. Elle est limitée à l’Ouest par une formation oligo-miocène qui suit grossièrement le tracé du ruisseau l’Aillot entre le village de Magneux-Haute-Rive et Chambéon. Un ancien méandre de la Loire est encore visible près de Magneux-Haute-Rive.

En rive droite, la plaine alluviale apparaît en divers endroit comme la boucle de Marclopt. Au niveau de la boucle de Marclopt, cette basse terrasse est dominée par des alluvions anciennes, situées en limite Ouest du “Glacis de Feurs”. A Saint-Laurent-la-Conche, l’épaisseur des formations géologiques dépasse les dix mètres.

Cette formation alluviale est d’une épaisseur totale qui ne dépasse pas les 8 mètres. Elle est constituée de sables, de graviers, de galets et de limons fertiles qui proviennent des apports antérieurs aux endiguements du fleuve. En rive gauche, ces alluvions sont appelées “Chambons” de la Loire.

Plus précisément, cette strate est composée d’une couche de 3 à 6 mètres d’alluvions récentes de la Loire reposant sur le substratum. Une couverture limoneuse ou argilo-sableuse d’une épaisseur de l’ordre du mètre recouvre cette couche.

Les alluvions récentes et actuelles du fleuve, notées Fz<sub>2</sub>, sont situées dans une zone entre le fleuve et les levés de terre. L’altitude de cette zone est de moins de 5 mètres par rapport à la Loire. D’une épaisseur variant de 2 à 4 mètres, elles forment une bande de 150 mètres de large de part et d’autre de l’axe de la rivière.

---

2. D’après des sondages effectués en novembre et en décembre 1963 par le C.E.A. (le Commissariat à l’Énergie Atomique).



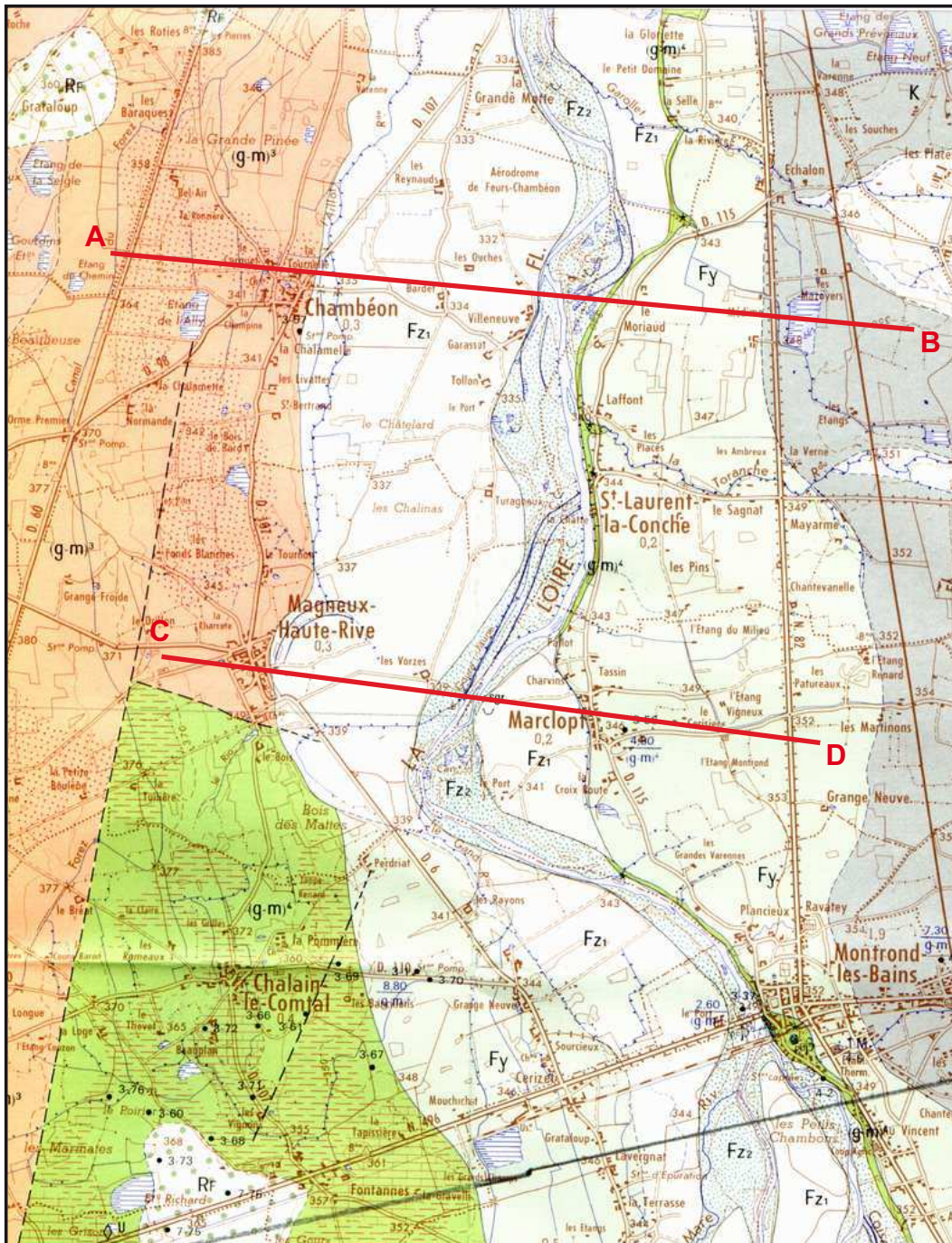


FIGURE 2.3 – Carte géologique du site d'étude (D'après la carte géologique de la France au 1/50 000 - Feuille de Montbrison). Les deux traits rouges localisent les coupes géologiques et géomorphologiques interprétatives de la plaine du Forez. La légende de la carte est donnée en figure 2.4.



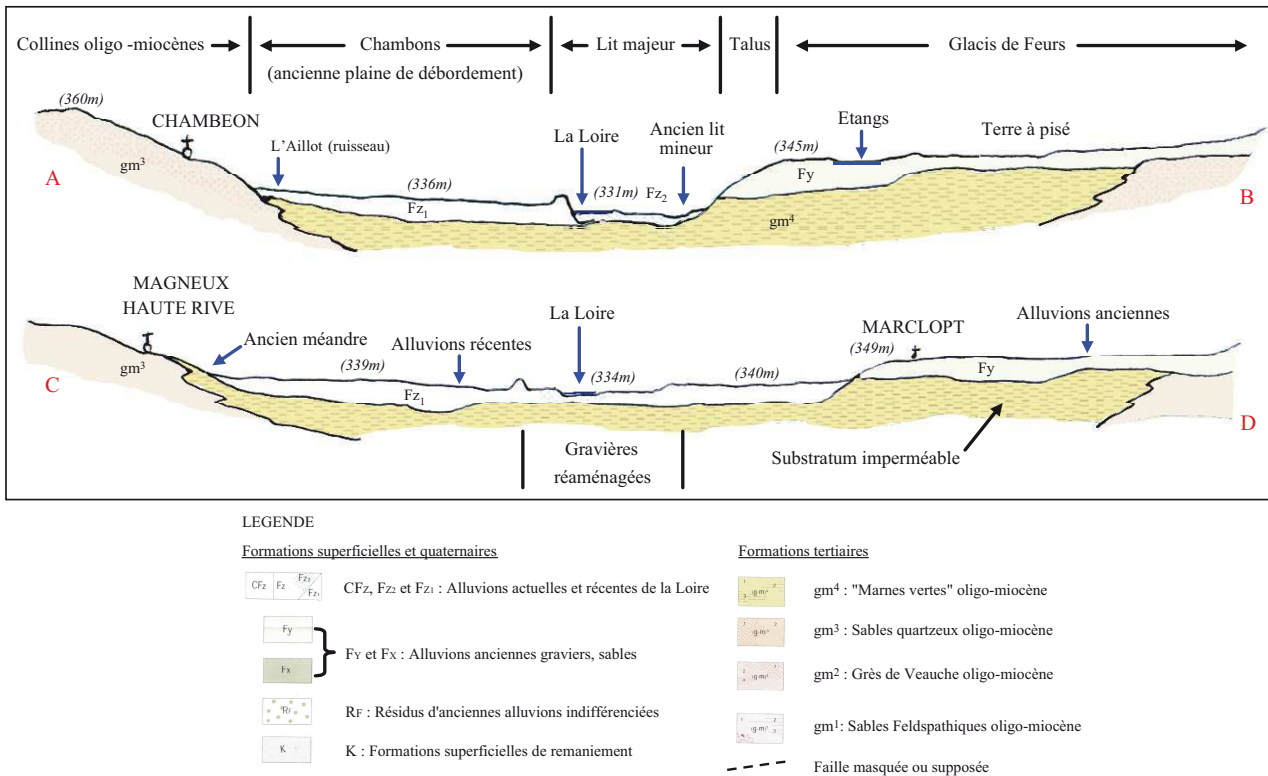


FIGURE 2.4 – Coupes géologiques et géomorphologiques interprétatives du secteur d'étude (d'après LEGRIEL (1975), modifié par D. MIMOUN)

Les différentes exploitations de granulats ont fortement influencé les caractéristiques de cette zone. Elles sont constituées de matériaux de nature granitique ou basaltique dont la granulométrie va jusqu'à 200 mm. Cette étendue se situe dans la zone de débordement définie par la crue de 1846.

A l'Ouest, les formations oligo-miocène correspondent au "3<sup>ème</sup> étage" des sables quartzeux. Ils sont notés g-m<sup>3</sup> sur les documents géologiques. Elles sont faiblement vallonnées avec une altitude située entre 360 et 370 mètres et dominent les basses terrasses qui sont d'une altitude moyenne de 338 mètres.

A l'Est, les alluvions anciennes (Fy) sont formées de sables, de graviers, d'argile en forte teneur. Elles forment une terrasse de 10 mètres de hauteur reposant sur les marnes vertes et dominant de 5 à 6 mètres le lit mineur de la rivière. En limite Est, ces alluvions sont recouvertes par des formations superficielles colluviales (K) qui proviennent de la désagrégation des massifs cristallins, le "Glacis de Feurs".

### 2.1.3 Description hydrologique

#### 2.1.3.1 Environnement climatique

L'Écozone du Forez se caractérise par un climat à dominante continentale. C'est dû essentiellement à la ceinture de reliefs qui abrite la plaine du Forez.

Par conséquent, elle se singularise par des totaux de pluviométrie annuels relativement faibles qui sont partout inférieurs à 700 mm. La saison la plus pluvieuse s'étend d'avril jusqu'en octobre avec des moyennes mensuelles variant de 70 à 100 mm. Le mois d'août marque généralement un creux assez net. La période la plus sèche est l'hiver avec seulement 28,5 mm de pluie en février.

La continentalité s'exprime particulièrement par l'impact du contraste saisonnier entre un été chaud et un hiver froid. La température moyenne annuelle est modérée avec 11,4 °C et l'amplitude entre le mois le plus chaud et le mois le plus froid est de 17,7 °C.

Les vents de secteur NO dominant largement en été et au printemps, les vents de secteur SSE dominant en hiver. Les vents forts avec plus de 29 m/s arrivent principalement entre le mois d'août et le mois de février.

#### 2.1.3.2 Environnement hydrographique

La Loire traverse la plaine du Sud au Nord. La différence de relief entre l'Ouest et l'Est marque une opposition entre les affluents des deux rives. Le régime du fleuve est directement lié à la pluviométrie. C'est pourquoi c'est un des paramètres important pour comprendre la dynamique fluviale.

- En rive gauche, les affluents issus des Monts du Forez (Le Lignon, le Vizezy) ont un régime pluvio-nival soutenu et présentent parfois de violentes crues ;
- En rive droite, les bassins versants des affluents issus des Monts du Lyonnais sont plus modestes.

Sur le site d'étude, 9 bassins principaux sont situés le long du fleuve. Certains sont d'anciens chenaux reliés au fleuve. Ils sont d'une profondeur moyenne de 2 mètres et reposent sur le substratum imperméable.

Ces bassins sont d'anciennes gravières réhabilitées et présentent un colmatage important le long des berges ; ce qui est généralement inhabituel pour des bassins naturels. Cela peut être dû en partie au passage fréquent d'engins mécaniques lors de l'extraction du granulats. A cela s'ajoute un colmatage "naturel" par sédimentation gravitaire induit par les forces de frottement et de gravité. L'origine peut aussi être physico-chimique.

Ce colmatage se caractérise par une diminution de la conductivité hydraulique des berges et du fond de l'excavation qui peuvent atteindre 2 à 3 ordres de grandeur de la conductivité hydraulique. Ce colmatage s'accroît généralement avec l'âge de la gravière.

Le régime de la Loire est très contrasté. Il est marqué tantôt par des étiages sévères avec moins de 5 m<sup>3</sup>/s, tantôt par de rapides montées des eaux avec plus de 200 m<sup>3</sup>/s suite aux lâchés du barrage qui se situe à l'amont. Dans la zone d'étude, son profil en long indique une pente moyenne proche de 1 ‰ (figure 2.7). La Loire incise le substratum tertiaire sur une grande partie du profil.

Dans la plaine, ces débits dépendent aussi du fonctionnement du barrage hydroélectrique de Grangent mis en service en 1957 et situé à environ 20 km en amont du site. Il tend à réguler le régime hydrique naturel du fleuve. Sur le site, le turbinage du barrage provoque des variations journalières du niveau d'eau proche de 0,5 mètres. Les principales caractéristiques de la Loire sont :

- pour la période de référence (1985–1995), un débit moyen sur l'année de 49 m<sup>3</sup>/s ;
- un débit moyen d'étiage de l'ordre de 10 m<sup>3</sup>/s pour le mois d'août ;
- des crues quinquennales d'un débit de l'ordre de 1000 m<sup>3</sup>/s ;
- des crues décennales d'un débit de l'ordre de 1700 m<sup>3</sup>/s ;
- des crues centennales d'un débit de l'ordre de 4900 m<sup>3</sup>/s.

### 2.1.3.3 Environnement hydrogéologique

Les alluvions de la plaine du Forez forment un aquifère dans lequel circule une nappe libre qui repose sur le substratum imperméable. En période de basses eau, son niveau de base est régit par le fleuve Loire qui draine nettement cette nappe d'eau. La perméabilité des alluvions varie de 10<sup>-3</sup> m/s à 10<sup>-4</sup> m/s pour les secteurs colmatés. L'écoulement souterrain est influencé localement par ces variations de perméabilité dans la formation sablo-argileuses de l'Oligo-miocène.

La carte piézométrique<sup>3</sup> (figure D.1, annexe D) au 1/10 000 montre que le sens d'écoulement général de la nappe suit la pente du terrain, soit une direction SO–NE. La cote piézométrique de la nappe suit celle de la Loire avec un gradient hydraulique moyen proche de 0.1%.

L'écoulement souterrain est alimenté au Sud Ouest par une nappe de versant, avec un écoulement de faible intensité. Entre Magneux-Haute-Rive et Chambéon, l'apport du versant est estimé à 32 ± 16 l/s pour 4 km (CPGF-Horizon, 1979). L'aval de cet aquifère est limité par la confluence du Vizezy et de la Loire.

---

3. Elle a été réalisée par CPGF-Horizon [1978] à partir d'une campagne de mesures réalisée dans 63 puits.

## 2.2 Organisation des données pour le modèle physique

### 2.2.1 Organisation des données mobilisables

Les données collectées sur le site proviennent de différentes sources. Ces données brutes d'origine diverses ont nécessité un travail conséquent pour les inventorier, les sélectionner, les organiser et les structurer.

Les outils et méthodes employés comme le type de mesure, le format de stockage et le système de coordonnées utilisé sont une part des facteurs qui influencent la qualité de ces données. Par ailleurs, un pré-traitement avant toute utilisation est souvent nécessaire. Par exemple, les données topographiques peuvent provenir de photographies aériennes. Elles sont aussi prélevées directement sur le site d'étude par l'intermédiaire d'instrument GPS et de la mesure de niveau d'eau sur des échelles limnimétriques. Ces données peuvent être organisées dans le Système d'Information Géographique (SIG) en 3 catégories :

- La *Topographie* avec les élévations d'altitude ;
- L'*Hydrologie* avec les mesures de niveaux d'eau ;
- L'*Hydrogéologie* avec la piézométrie à grande échelle et la carte des perméabilités.

### 2.2.2 Données topographiques

Des courbes de niveau équidistantes de 10 mètres et quelques points cotés de la carte IGN au 1/25 000 ont aidé à caractériser la topographie du site. Mais, la topographie du lit majeur est surtout représentée par une distribution spatiale de points cotés obtenus par photogrammétrie sur l'agrandissement de photographies aériennes à l'échelle 1/17 000 et datant de 1996. Cette distribution de points est irrégulière avec une densité plus forte aux endroits de rupture de pente comme des digues ou des seuils. La précision altimétrique de ce semis de points est décimétrique. Ces données brutes ont nécessité certaines réactualisation pour prendre en compte les changements provoqués par la présence de nouveaux sites d'exploitations de granulats.

Grâce à cette qualité des données, il a été possible de représenter précisément la topographie du terrain avec toute la variété de formes fluviales présentent ; ainsi que les levées de terre, les digues, les chemins, . . . Le contour de chacune de ces entités hydrologiques est défini, puis stocké au format vectoriel dans la base de données géographiques.

La topographie précise du lit mineur de la Loire est définie par 5 profils en travers<sup>4</sup>. Des sections supplémentaires sont intercalées entre les sections de mesures pour mieux représenter la morphologie horizontale du cours d'eau ; en particulier, la sinuosité des berges et les nombreux élargissements ou rétrécissements du lit de la rivière. Pour une discrétisation optimale, il est pertinent de choisir la position de ces sections en prenant en compte le profil en long de la Loire.

---

4. Réalisés par la Cellule Hydraulique de la DDE (Direction Départementale de l'Équipement).

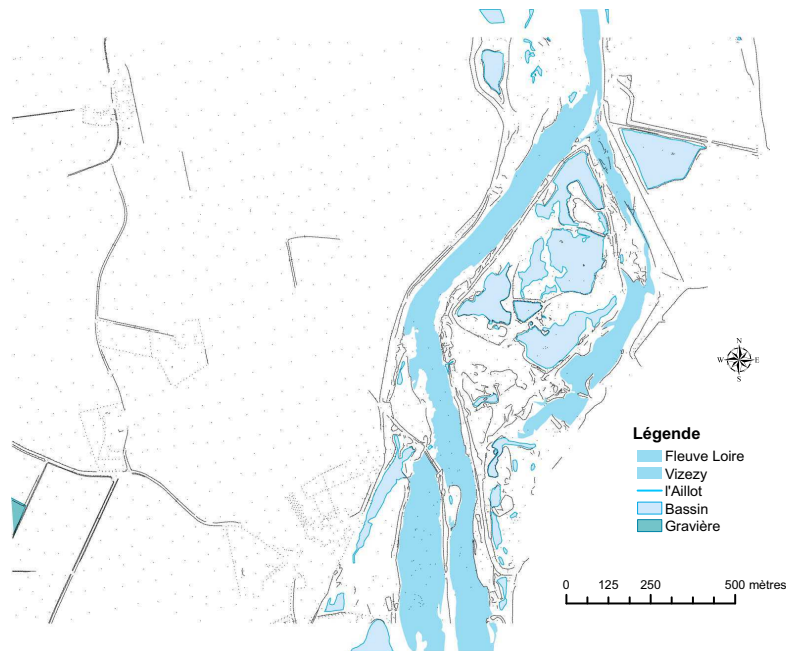


FIGURE 2.5 – Semis de points photogrammétriques du lit majeur (au niveau de l’île Moriaud).

Les sections sont interpolées entre elles dans le plan et l’altitude du fond du lit de la rivière est interpoler linéairement entre chacune des 5 sections de mesures. Cette représentation permet de mieux corrélér la variabilité horizontale et la variabilité verticale des données hydro-topographiques.

La topographie de la zone d’étude peut être représentée en 3D par un MNT (Modèle Numérique de Terrain) (figure 2.6). Les données du site sont regroupées pour générer un réseau de triangles irréguliers ou TIN (pour Triangular Irregular Network) avec l’algorithme d’interpolation de Delaunay<sup>5</sup> [23].

Les courbes de niveau et les points cotés numérisés à partir de la carte IGN au 1/25 000 permettent de construire la zone large du MNT sur la plaine alluviale. Pour la zone du lit majeur, le maillage est généré grâce au semis de points obtenus par photogrammétrie. Chacun de ces points constitue un nœud du maillage triangulaire.

Une zone de maillage disjointe de la précédente est générée pour le lit mineur du fleuve. Le maillage est de type régulier et se raccorde exactement a celui du lit majeur en leurs nœuds communs. Il est défini par les valeurs d’élévation des sections transversales.

Ainsi, un MNT général est construit pour toute la zone d’étude.

5. La triangulation de Delaunay se nomme ainsi d’après Boris Delone (1890-1980), mathématicien russe dont le nom a été francisé en Delaunay. Cet algorithme se défini naturellement comme le dual du diagramme de Voronoï, du nom du mathématicien russe Georgi Voronoï (1868-1908).

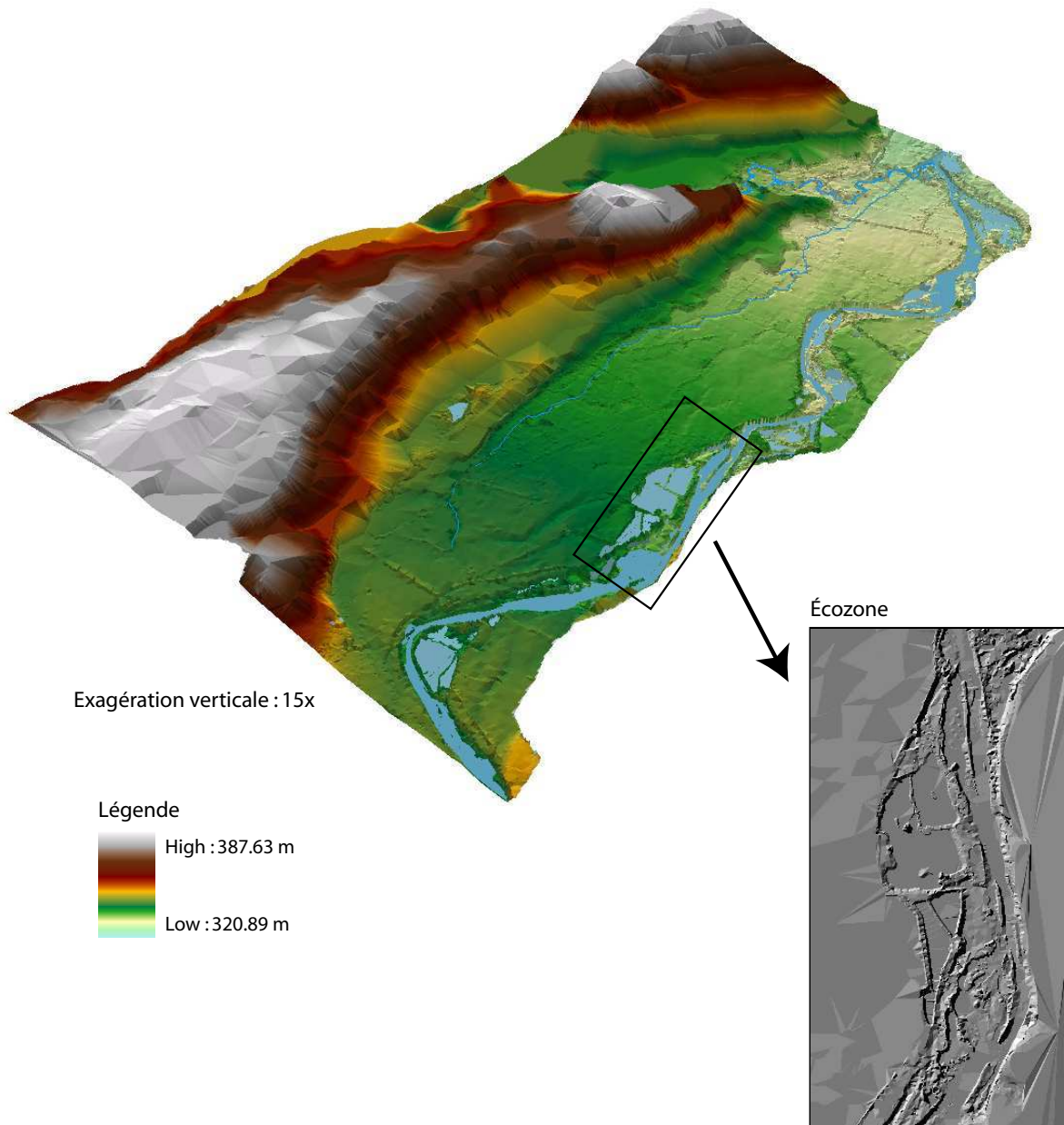


FIGURE 2.6 – Modèle Numérique de Terrain du site de l'Écozone du Forez.

### 2.2.3 Données hydrologiques

De nombreuses données sont disponibles concernant l'environnement hydrogéologique immédiat de l'aquifère. Des mesures assez complètes sont collectées sur le réseau hydrographique et sur les niveaux d'eau des bassins et gravières. Des données météo permettent d'estimer les apports de la pluviométrie à la nappe.

Pour le fleuve Loire, des débits sont disponibles pour les barrages de Grangent en amont et de Villerest en aval du site d'étude. La figure 2.7 montre le profil en long du fleuve à l'étiage avec ses variations du niveau d'eau. De nombreux affleurements du substratum peuvent y être observés. Ce profil permet de découper judicieusement la Loire en tronçons, en accord avec sa morphologie spatiale. Le choix de la position de ces sections constitue une première étape dans l'approximation des données de charge piézométrique.

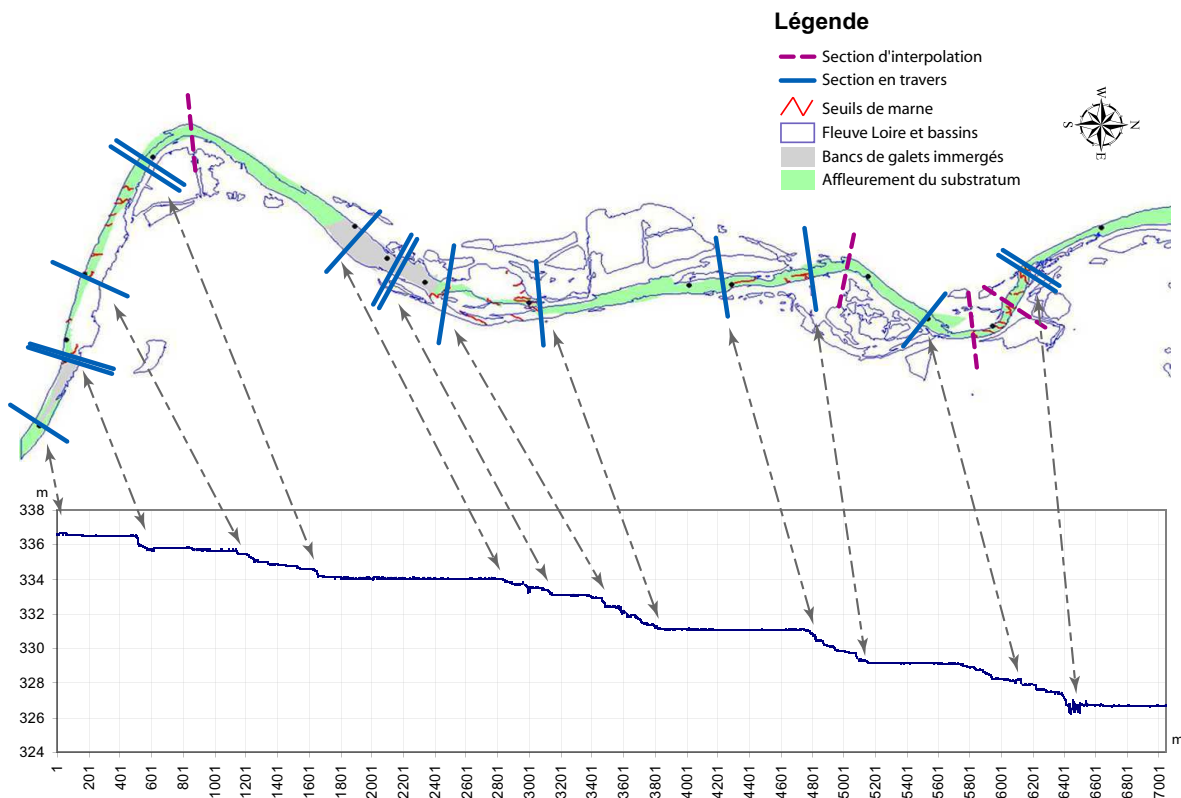


FIGURE 2.7 – Profil en long du fleuve Loire au niveau de l'Écozone, Août 2004.

Pour l'Aillot et le Vizezy, des mesures de niveau d'eau ont été interpolées pour représenter leur régime fluvial. La plupart des plans d'eau situés dans le domaine d'étude sont équipés d'échelles limnimétriques. Ils sont utiles lors de la procédure de calage pour estimer les données mal connues comme le colmatage du lit des rivières ou des bassins et les débits de pompage

effectué par les agriculteurs ou l'exploitant de granulat.

Ces données seules suffisent pour une représentation hydrographique en régime permanent. Par contre, l'utilisation d'un modèle hydraulique devient nécessaire pour en avoir une représentation dans le temps. Ce modèle utiliserait les débits en amont et en aval.

Deux stations météorologiques situées à proximité de la zone d'étude fournissent les données météorologiques de météo France (Annexe D.1). Les données de température et de pluviométrie proviennent de la station de Feurs, à 3 km au nord de la zone d'étude. Celles relatives à la vitesse du vent, au nombre de jours de gel, à l'ensoleillement et à l'évapotranspiration potentielle proviennent de la station d'Andrézieux Bouthéon, située à 17 km du site. L'Évapotranspiration Potentielle (ETP) correspond au pouvoir évaporant de l'atmosphère sur un sol avec couvert végétal qui dispose d'eau en abondance. Elle se calcule à partir de facteurs climatiques selon la formule empirique de PENMAN [49] (équation D.1 de l'annexe D.1). Cette loi est une des plus rigoureuses, mais elle nécessite de connaître un grand nombre de paramètres physiques. Au niveau des gravières, cette formule est empreinte d'une erreur car elle néglige l'activité photosynthétique de la végétation aquatique.

La part des eaux de pluie qui s'infiltrate dans la nappe est quantifiée à partir d'un bilan sur les échanges hydriques à la surface du sol (figure 2.8). Elle est estimée mensuellement en prenant en compte la pluviométrie mensuelle  $P$ , la valeur de l'ETP, l'évapotranspiration réelle (ETR) et la réserve facilement utilisable par les plantes (RFU). Celle-ci a été fixée ici à 50 mm, compte tenu de la texture limoneuse et argilo-sableuse du sol. Par cette méthode, le cas particulier de la neige n'est pas pris en compte.

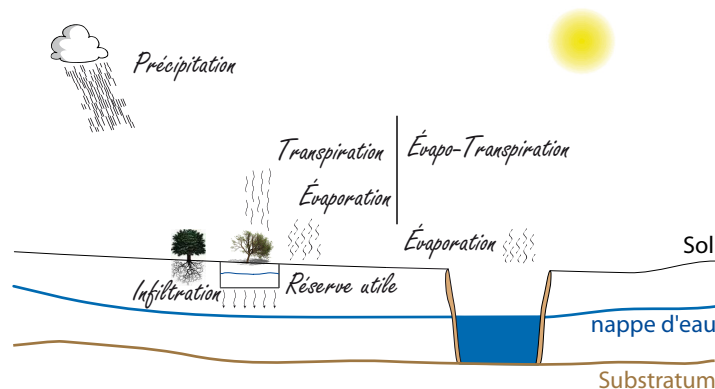


FIGURE 2.8 – Bilan hydrique du sol.

L'évapotranspiration réelle (ETR) est calculée par l'équation 2.1 en fonction de l'ETP et de la quantité d'eau présente dans le sol. Si les précipitations sont supérieures à l'ETP, alors



l'ETR est égale à l'ETP. Si les précipitations sont inférieures à l'ETP, alors l'ETR est égale aux précipitations plus les prélèvements en eau sur la RFU, avec une valeur d'ETR majorée par l'ETP. Un déficit hydrique apparaît si la RFU du sol est entièrement consommée.

$$\text{ETR} = \begin{cases} \text{ETP} & \text{si } P \geq \text{ETP} \\ \min(P + \text{RFU}, \text{ETP}) & \text{si } P < \text{ETP} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les précipitations efficaces sont égales à la quantité d'eau apportée par les précipitations moins l'évapotranspiration réelle. Cette eau pénètre dans le sol et approvisionne la réserve facilement utilisable. Si la capacité maximale de la RFU est dépassée, l'excédent de l'eau descend vers la nappe par infiltration (tableau 2.1). Cette infiltration efficace (Infilt) est toujours positive et elle est calculée par  $\text{Infilt} = (P - \text{ETP}) + \text{RFU} - 50$ , où RFU correspond à la réserve d'eau calculée avec le mois précédent. De même, il est possible d'estimer localement les apports atmosphériques aux bassins par  $P - \text{ETP}$ .

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc
P (mm)	88.2	30.6	28.5	74	75.5	81.6	60.2	48.9	80.6	82.1	45.1	35.1
ETP (mm)	13.9	23.5	49.0	70.7	98.1	118.5	141.3	118.5	77.1	40.3	17.6	12.6
P-ETP	74.3	7.1	-20.5	3.3	-22.6	-36.9	-81.1	-69.6	3.5	41.8	27.5	22.5
RFU	50	50	29.5	32.8	10.2	0	0	0	3.5	45.3	50	50
<b>Infilt (mm)</b>	<b>24.3</b>	<b>7.1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>22.8</b>	<b>22.5</b>
ETR (mm)	13.9	23.5	49	70.7	85.7	81.6	60.2	48.9	77.1	40.3	17.6	12.6

TABLE 2.1 – Calcul des infiltrations efficaces mensuelles (mm) qui recharge de la nappe (normales sur 10 ans).

Par conséquent, le bilan hydrique global qui permet de calculer la recharge de l'aquifère est donné par la somme des infiltrations efficaces vers la nappe alluviale et des échanges atmosphériques effectués au niveau des bassins.

## 2.2.4 Données hydrogéologiques

### *Piézométrie de référence*

La carte piézométrique établie à l'étiage au 1/10 000 (Figure D.1 de l'annexe D.2) sert de référence. Elle a été réalisée à partir d'une campagne de mesures réalisée dans 63 puits.

Différentes campagnes piézométriques ont aussi été réalisées depuis octobre 1999 avec 40 puits de la zone d'étude. Elles sont complétées par les données fournies par 10 piézomètres installés au environ des gravières du lit majeur en 1995 par l'exploitant de granulats.

L'analyse de 16 relevés effectués depuis octobre 1999 dans les 31 puits et piézomètres de la zone d'étude montre un battement de nappe annuel moyen de 0.56 mètres. Les données fournies par l'exploitant n'y ont pas été prises en compte car les niveaux piézométriques sont

trop perturbés par l'exploitation. L'exploitant extrait le granulat en rabattant la nappe par pompage. Ce qui fausse le comportement naturel de la nappe. Par conséquent, les données de la zone d'exploitation ne sont pas corrélées avec les autres mesures.

Le lit mineur correspond à la nappe d'accompagnement du fleuve Loire. Les observations montrent que la nappe alluviale y est très réactive aux variations du niveau de la Loire, en particulier lors des épisodes de crue. L'amplitude des battements de la nappe est plus importante au centre de la nappe alluviale.

La cartographie de référence et les mesures piézométriques du site seront pris en compte en fonction de leur qualité estimée lors d'une procédure de calage du modèle numérique.

#### *Résistivité électrique des alluvions*

La zone sud de la rive gauche a fait l'objet d'une campagne de prospection géophysique en 1978. Elle comportait 189 sondages électriques répartis sur 17 profils transversaux orientés Est-Ouest et 6 profils intermédiaires. La partie nord n'a pas pu être couverte par la prospection électrique en raison de la présence de canalisations d'eau qui perturbent fortement le diagramme électrique.

L'interprétation des diagrammes électriques a permis de réaliser des coupes d'interprétation au 1/10 000 en horizontal et 1/500 en vertical. Ces informations ont permis d'identifier, puis de cartographier les différentes formations géologiques :

- la topographie du toit du substratum tertiaire (figure D.4 de l'annexe D.2)
- l'épaisseur de la terre végétale (la couverture argilo-limoneuse)
- l'épaisseur des alluvions (la couverture des graves sableuses)
- la variation de la conductivité de l'eau et de la résistivité des alluvions (figure D.5 de l'annexe D.2)

La résistivité d'une formation dépend de la nature de ses alluvions mais aussi de la minéralisation de l'eau qu'elle contient. A teneur en argile égale, les alluvions situées à l'Ouest du ruisseau Aillot seront plus résistantes que celles situées au centre de la plaine alluviale, car la résistivité de l'eau est plus élevée vers le versant. En bordure du fleuve Loire, la résistivité des alluvions mouillées est masquée par celle des alluvions sèches, très résistantes et dont l'épaisseur est importante [46].

Les alluvions montrent ainsi une forte hétérogénéité spatiale, en particulier aux endroits des gravières réaménagées au près du fleuve Loire.

Cinq classes de résistivités homogènes traduisent de la variation de la qualité des alluvions. Elle ont été identifiées par CPGF Horizon d'après la carte des résistivités :

Résistivité $\rho$ des alluvions ( $\Omega\text{m}$ )	Critère de perméabilité qualitatif
$\rho < 100$	imperméable (couverture argilo-limoneuse)
$100 \leq \rho < 150$	peu perméable
$150 \leq \rho < 200$	moyennement perméable
$200 \leq \rho < 300$	perméable
$300 \leq \rho$	très perméable

### *Cartographie de la perméabilité*

La construction du champ de perméabilités est délicate. De fortes incertitudes sont liées à la nature des données. Les mesures sont de densité faible sur un domaine assez hétérogène.

En première estimation, le choix a donc été fait d'affecter une valeur de perméabilité pour chacune des 5 classes de résistivité. Ces valeurs ont été déterminées à partir de l'interprétation d'essais de pompage par la méthode de Jacob [42]. Ces mesures ont été réalisées à débit constant sur 4 forages de reconnaissance<sup>6</sup> et un puits. Les valeurs de perméabilité déduites se trouvent dans des gammes de valeur différentes et varient entre  $1.15 \cdot 10^{-3}$  m/s et  $3.9 \cdot 10^{-3}$  m/s.

Ce champ de perméabilité est ensuite modifié afin de tenir compte :

- du colmatage des berges des bassins de l'Écopole du Forez,
- des zones remblayées au niveau des nouvelles exploitations de granulats,
- des nouveaux plans d'eau créés.

La perméabilité est un des principaux paramètres de la procédure de calage du modèle numérique. Cela consiste à ajuster les valeurs de perméabilité lors d'une série de simulations, jusqu'à obtenir un comportement hydraulique similaire à celui de la nappe alluviale. Ces perméabilités sont modifiées dans la limite de leur validité déterminée par la géologie du site. Le résultat final de la simulation doit donc correspondre suffisamment aux mesures et à la piézométrie de référence.

La figure 2.10 montre la carte des perméabilités obtenue après la phase de calage. La concordance entre piézométrie observée et simulée est obtenue pour un découpage en zones de perméabilités uniformes dont les valeurs s'échelonnent entre  $0.05 \cdot 10^{-3}$  m/s et  $4.5 \cdot 10^{-3}$  m/s. Les valeurs de perméabilités les plus faibles, avec  $0.05 \cdot 10^{-3}$  m/s, sont affectées aux zones remblayées.

---

6. Étude SOGREAH de 1979 réalisée sur les forages F1, F2, F3, F4 et le puits B2 pour la rive gauche et le forage F1102 pour la rive droite.

### 2.2.5 Représentation des caractéristiques physiques de l'aquifère sous SIG

Une représentation appropriée du comportement physique de l'aquifère est nécessaire pour garantir une certaine qualité de modélisation. La connaissance de l'aquifère nécessite d'identifier et de formaliser de la meilleure façon possible chacun des phénomènes physiques, en cohérence avec les objectifs de modélisation.

Penser le modèle physique à travers l'outil SIG (Système d'information géographique) permet de stocker, d'organiser, de formaliser et de structurer les données de manière rigoureuse [8, 25]. Chacune des entités hydrogéologiques, correspondant à un phénomène physique particulier est identifiée, puis représentée vectoriellement dans le SIG. Ainsi, différentes couches d'informations, à l'image du millefeuille, représentent les multiples facettes de l'hydrosystème. Cette représentation informatique apporte cohérence et rigueur pour la simulation hydrogéologique. Elle facilite aussi la préparation des données d'entrées qui y seront utilisées.

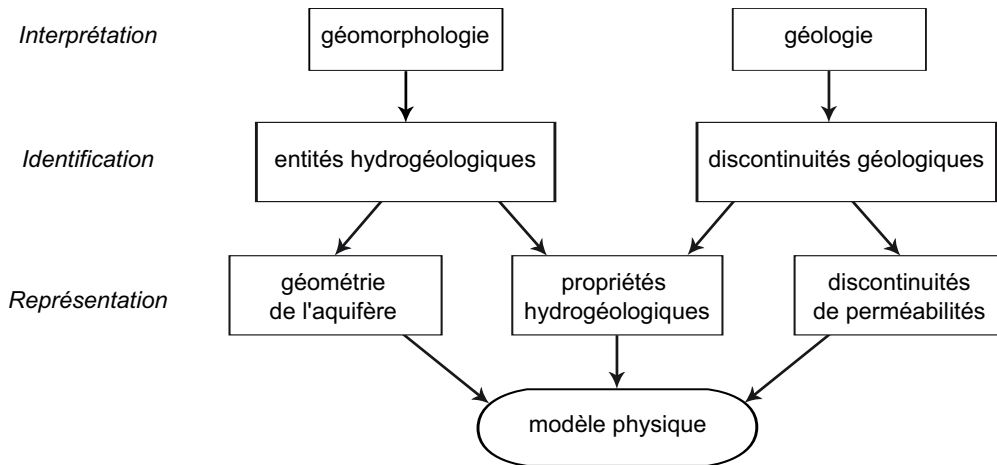


FIGURE 2.9 – Conception du modèle physique.

L'interprétation géomorphologique et géologique du site d'étude aide à définir le comportement physique de l'aquifère (figure 2.9). Elle conduit d'abord à la connaissance de la géomorphologie ; i.e. le relief, la nature du sol, la végétation, le colmatage du lit des rivières et bassins, etc. Cette connaissance est combinée avec d'autres types d'informations comme celle du fonctionnement hydraulique des rivières ou des interventions humaines pour permettre d'identifier les caractéristiques hydrogéologiques de l'aquifère, et ainsi de mieux formaliser la géométrie de l'aquifère. Ensuite, l'interprétation de la géologie permet d'identifier les sauts de perméabilités et d'estimer des paramètres hydrogéologiques comme la perméabilité et le coefficient d'emmagasinement.

Cela conduit à une image mentale de la représentation "continue" de l'aquifère. Celle-ci synthétise la connaissance du système physique pour envisager une description mathématique, ainsi qu'une automatisation de la procédure de modélisation en phase avec le formalisme objet (figure 2.10).

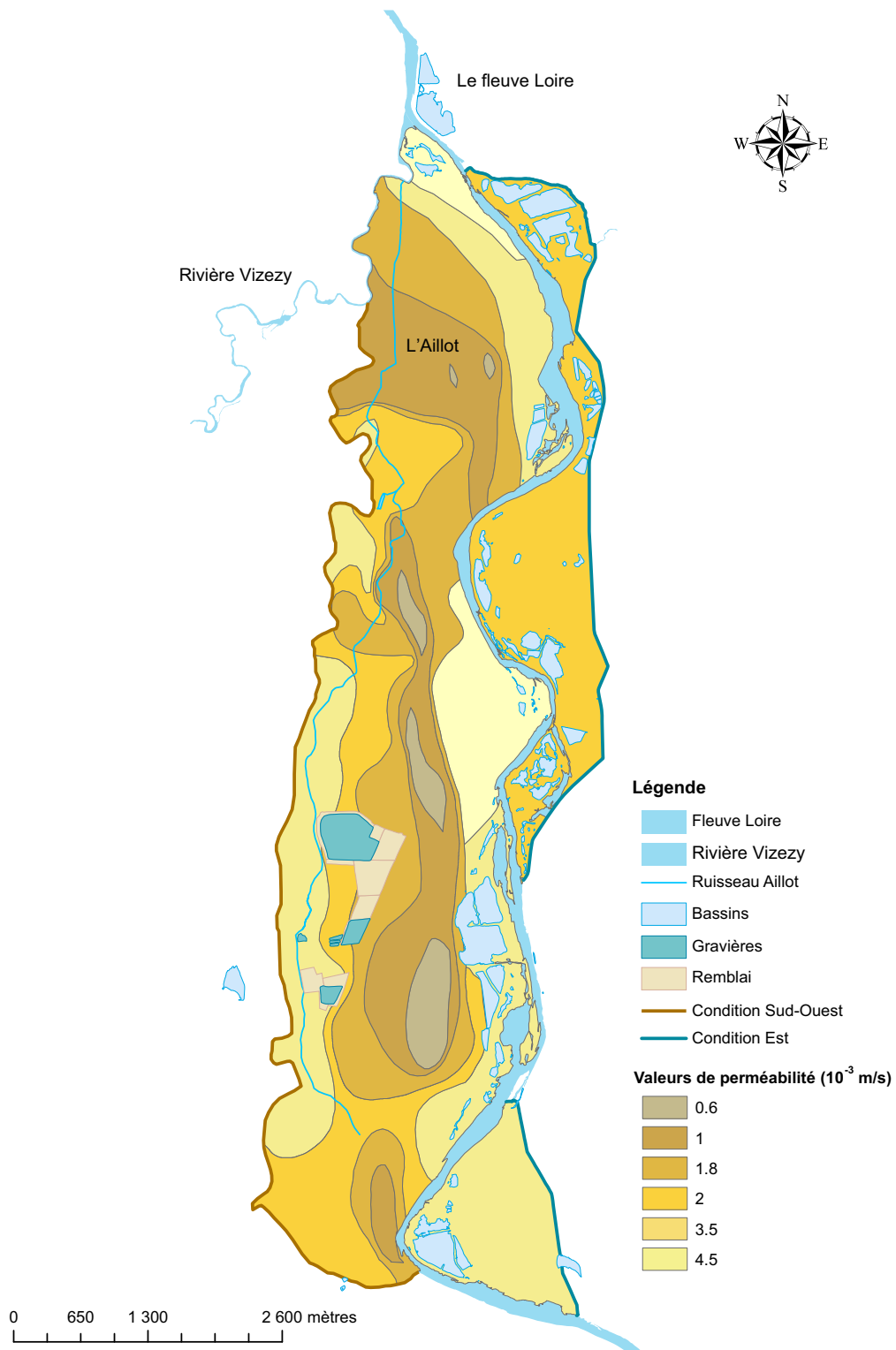


FIGURE 2.10 – Représentation “continue” du domaine d’étude.

## 2.3 Modélisation hydrodynamique

### 2.3.1 Représentation des conditions aux limites

La construction du modèle mathématique est la traduction des caractéristiques physiques en termes d'équations algébriques. Un système continu d'équations mathématiques est construit avec les équations fondamentales des écoulements souterrains et de conditions aux limites représentant les interactions à l'interface entre la nappe et chacune des entités physiques. En respectant l'interprétation physique, ces conditions aux limites peuvent se schématiser par la figure 2.11. Elles y sont formulées sans tenir compte du type de modèle numérique utilisé.

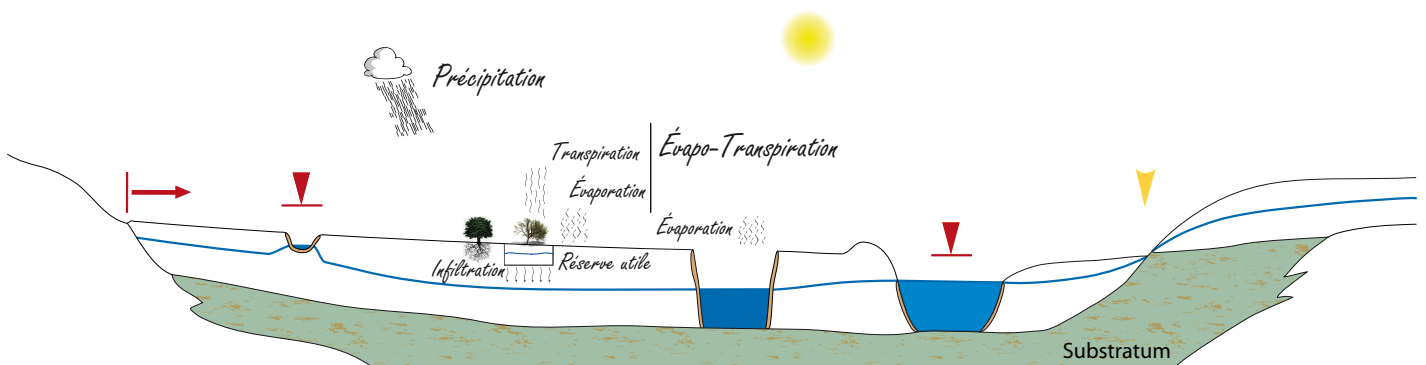


FIGURE 2.11 – Coupe transversale représentant les conditions aux limites utilisées.

Cette représentation physique puis mathématique de l'aquifère sous une forme vectorielle reste compatible avec la représentation "continue" des données sous le SIG (figure 2.10). Elle permet ainsi de réduire les erreurs dues à la manipulation des données.

#### *Détermination des limites du domaine modélisé*

Les limites du domaine modélisé sont définies par les limites naturelles de l'aquifère.

Pour l'écoulement émis par le versant Sud-Ouest, une condition sur les flux doit être imposée (condition de Neumann). Afin d'obtenir un bon comportement hydrogéologique du versant, ces flux sont représentés par une bande d'infiltration de 50 m de large et répartie le long de la limite. Un mur imperméable qui enveloppe cette zone permet de clore le domaine. Les données ont montré (section 2.1.3.3) que ce flux estimé est de  $32 \pm 16$  l/s pour 4 km. Puisque cette valeur n'est connue qu'à 50% près, elle pourra être ajustée lors du processus de calage du modèle.

Sur toute la limite Est qui est située sur la rive droite du fleuve Loire, la nappe est bornée par une condition de charge imposée (condition de Dirichlet). Dans la limite Nord, cette condition permet aussi de représenter la rivière Vizezy par ses mesures de niveau d'eau.

*Représentation de la Loire*

Le fleuve Loire divise l’aquifère en 2 zones hydrauliquement distinctes puisque son lit repose sur le substratum imperméable. Ce fleuve est fortement lié au comportement hydraulique de la nappe et en régit son comportement général. Il est représenté par une condition de type “rivière” (figure 2.12) ; une condition qui s’exprime par l’équation locale :

$$q_{riv} = \frac{\phi_n - \phi_r}{r} \quad (2.2)$$

où  $q_{riv}$  [m/s] est le flux extrait de la nappe. Ce flux est fonction du niveau d’eau du fleuve  $\phi_r$ , de la charge piézométrique de la nappe  $\phi_n$  et de la résistance  $r$  induite par le colmatage du lit du fleuve. Celui-ci est défini comme un aquitard, par une perméabilité et une épaisseur propre. L’écoulement y est supposé localement perpendiculaire au fond du fleuve. La résistance  $r$  [s] est calculée localement par  $r = \frac{E}{k_z}$  où  $E$  est l’épaisseur du lit et  $k_z$  sa perméabilité locale.

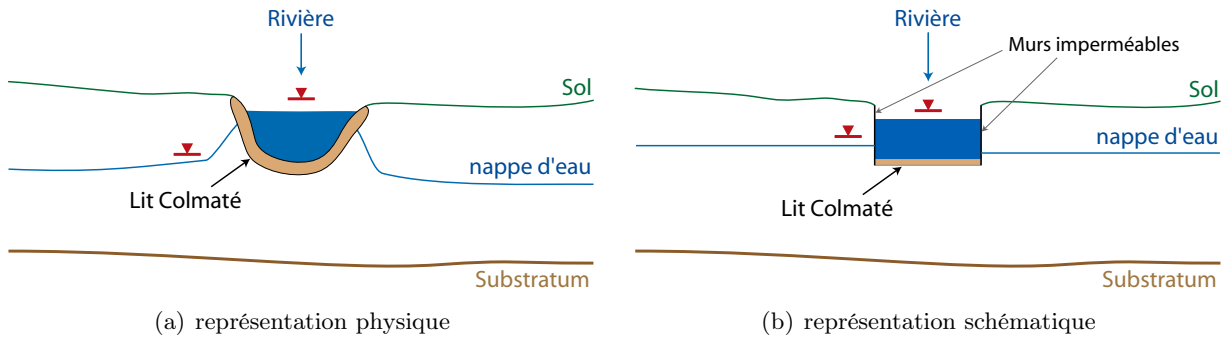


FIGURE 2.12 – Représentation de la condition de “rivière”.

*Représentation de l’Aillot*

Localisé vers l’Ouest, l’Aillot montre un débit faible et ne repose pas directement sur le substratum. Son régime hydraulique n’est pas directement connecté avec la nappe. Comme sa largeur est faible (moins de 3 m), ce ruisseau est représenté vectoriellement par une “rivière linéique”. Cette condition prend en compte la largeur de la rivière et le degré de colmatage du lit par un coefficient de résistance  $r = \frac{E}{k_z L}$ .

*Représentation des bassins et gravières*

Les bassins et gravières sont définies par des zones de perméabilité très élevée, choisie égale à 1 m/s. Induit principalement par le processus d’extraction du gravier, le colmatage autour de ces anciennes et récentes gravières est représenté par des zones locales de faibles perméabilités. Par soucis d’analogie avec les deux types de méthode numérique utilisés par la suite, c’est cette condition qui sera retenue.

Une condition de type “bassin” aurait aussi pu être utilisée. Elle permettrait de caractériser l’entité bassin dans sa globalité. En particulier, cela impose une hauteur strictement constante dans le bassin et le colmatage à l’interface entre le bassin et la nappe est mieux représenté. De plus, cette dernière condition permet d’éviter les problèmes de convergence numérique dus au saut de perméabilité.

#### *Représentation des inhomogénéités*

A l’intérieur du domaine, différentes zones représentent des perméabilités constantes par morceaux. Leur géométrie respecte les interfaces entre les différentes strates géologiques. Ainsi, des sauts de perméabilités sont définis sur la frontière de chacune de ces zones.

#### *Représentation des effets climatiques*

Pour une modélisation effectuée à l’étiage, les résultats du calcul de l’infiltration (tableau 2.1 de la page 44) permettent de raisonnablement supposer cette recharge négligeable.

Pour un autre régime climatique, l’infiltration au niveau du sol serait représentée par une recharge uniforme sur toute la zone modélisée. Pour les bassins et gravières, la recharge imposée représenterait le bilan  $P - ETP$  entre les précipitations et l’évapotranspiration.

### **2.3.2 Procédure de discrétisation**

Le diagramme 2.13 expose les différentes étapes du protocole de discrétisation. La première phase consiste à traiter les données hydrauliques (figure D.2 de l’annexe D.2). Les données de l’Aillot et du Vizezy ne sont pas modifiées puisqu’elles ne sont que ponctuelles. Par contre, la représentation de la Loire est sous la forme d’un profil en long. Ce qui est d’une précision nettement plus élevée que celle requise pour représenter des conditions aux limites d’un modèle hydrogéologique de l’aquifère. Par conséquent, nous en simplifions celles-ci tout en y conservant une représentation acceptable pour l’aquifère.

Cela consiste à subdiviser le profil en sections, en tenant compte des différentes variations du niveau d’eau et de la sinuosité du fleuve (figure 2.7). Ces dernières sont appelées section d’interpolation. Ensuite, les données attachées à chacune de ces sections sont interpolées linéairement entre elles. Il en est de même pour les données rattachées aux points de mesures des autres rivières.

Cette première phase nous permet d’aboutir à une représentation “continue” de l’aquifère (figure 2.10). Les différentes approximations effectuées dans la première phase ont une influence qui reste suffisamment minimales pour bien représenter les caractéristiques physiques de l’aquifère. Par contre, la phase de discrétisation géométrique peut générer beaucoup plus



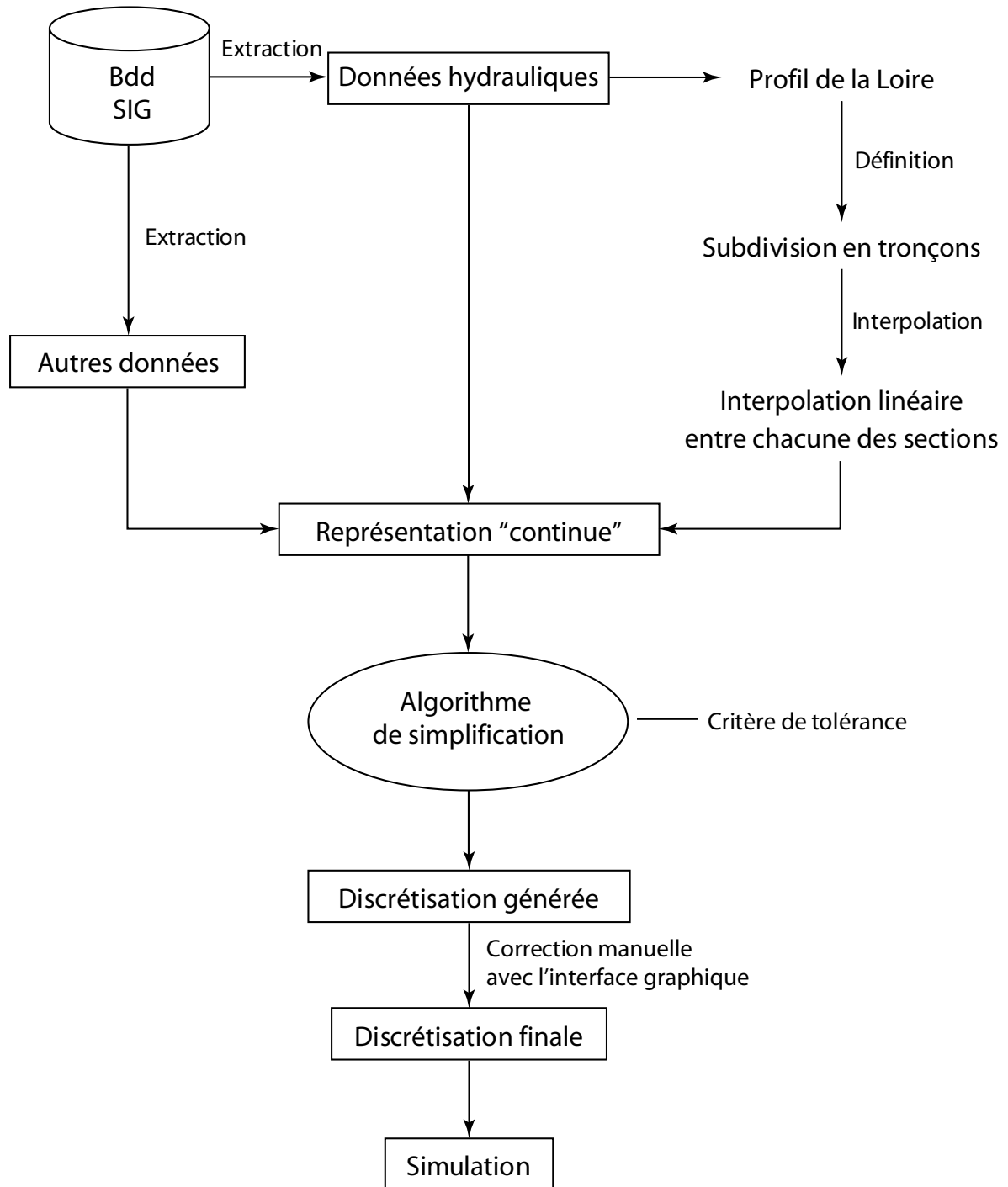


FIGURE 2.13 – Procédure de discrétisation effectuée.

de questions. En particulier, quel est le meilleur processus de discrétisation à employer ?

Pour chacune des méthodes FDM et AEM, la procédure de discrétisation consiste maintenant à simplifier la géométrie du domaine avec une résolution uniforme de 50 m.

Pour les FDM (figure 2.14(b)), le processus de discrétisation consiste à convertir la représentation vectorielle “continue” en format raster avec chacune des cellules d’une taille de 50 m. Des règles d’appartenance permettent de définir les mailles qui représenteront les différentes formes géométriques pour les conditions aux limites. Par exemple, si la surface de l’entité hydrogéologique vectorisée couvre plus de la moitié de la superficie de la cellule, alors celle-ci appartiendra à l’entité et la condition correspondante y sera imposée. Pour les entités unidimensionnelles telle que le ruisseau Aillot, la cellule qui contient la plus grande longueur de l’objet vectorisé par rapport aux cellules voisines est utilisée pour représenter la forme discrète de l’entité.

Pour les AEM (figure 2.14(a)), il n’y a pas de changement de format puisque la représentation objet et vectorielle y est similaire à celle des SIG. Ce qui rend un algorithme de discrétisation automatique très efficace. En première approche, nous avons utilisé l’algorithme de Douglas-Peucker [26] (voir chapitre 4) avec une tolérance de 50 m. Ce critère définit la distance maximale entre la discrétisation obtenue et la forme d’origine. Nous verrons au chapitre 4 qu’elle peut être considérée comme la résolution spatiale de la discrétisation.

Initialement, cet un algorithme consistait à simplifier la représentation spatiale des données. Il a été détourné de son utilisation initiale pour en faire un algorithme de discrétisation AEM. Il sera présenté en détail au chapitre 4 avec d’autres méthodes de discrétisation plus performantes permettant de réduire d’avantage l’erreur qui est induite par le processus de discrétisation.

Une interface graphique reste indispensable pour permettre de contrôler, voir d’améliorer la qualité de la discrétisation obtenue.

Pour les AEM, des défauts peuvent apparaître comme par exemple le chevauchement de polygones ou la superposition de vertices. Il est parfois intéressant aussi de rectifier manuellement le résultat obtenu afin d’avoir une meilleure représentation des contours pour le même nombre de vertices. L’étape finale avant la simulation est enfin de définir des objets éléments analytiques avec leurs propres données d’entrées, selon le formalisme objet présenté au chapitre précédent.

Pour les FDM, il est aussi souvent nécessaire de corriger manuellement le maillage à travers une interface graphique pour améliorer la qualité du maillage. Par exemple, deux bassins doivent être séparés d’au moins une maille pour avoir un comportement hydrogéologique valide.

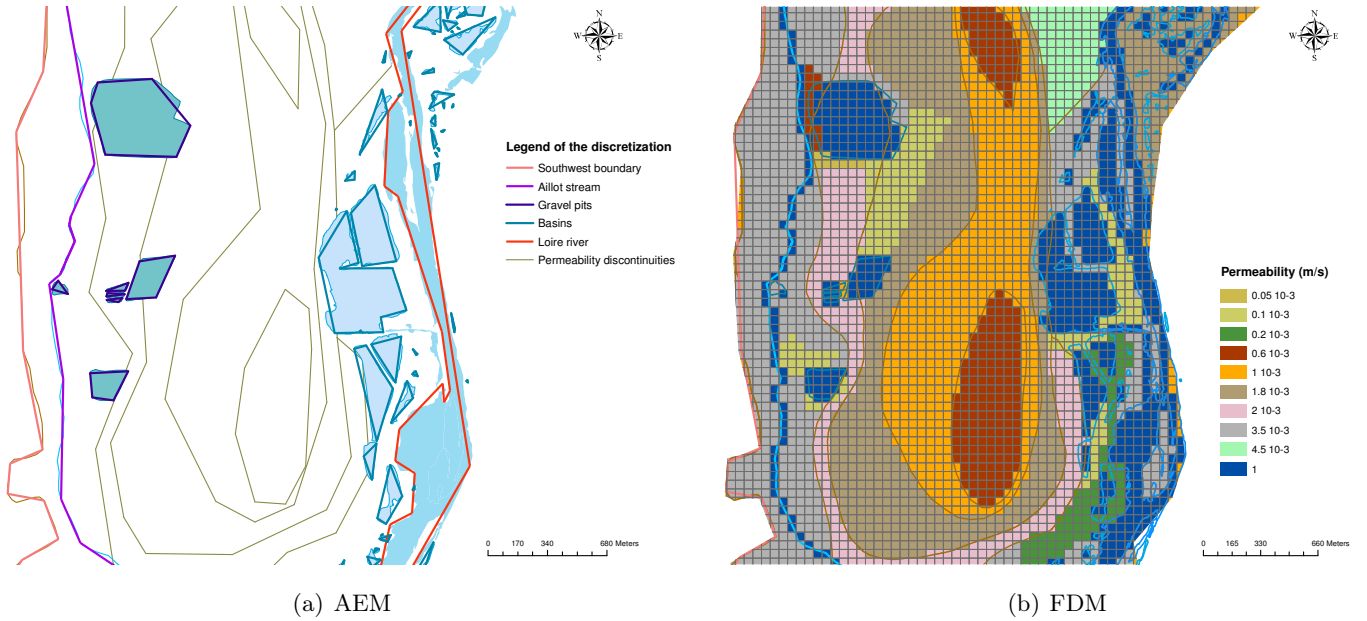


FIGURE 2.14 – Discretisation du domaine pour chacune des méthodes AEM et FDM avec une résolution de 50 m. Les AEM utilisent l’algorithme de Douglas-Peucker avec une tolérance de 50 mètres. Les FDM utilisent une taille de grille de 50 mètres.

Lors de ce processus de discrétisation, les données algébriques attachées aux formes géométriques sont aussi modifiées pour corriger les erreurs algébriques qui sont induites par la discrétisation spatiale. Elles permettent de conserver une certaine analogie avec la condition physique “continue”. Par exemple pour les FDM, la condition de “rivière” sur une maille exprime le débit  $Q_{riv}^{maille}$  en fonction de la conductance  $C [L^2 T^{-1}]$  par

$$Q_{riv}^{maille} = (\phi_n - \phi_r) C \quad \text{avec} \quad C = \frac{k_c L W}{\delta} \quad (2.3)$$

où  $k_c [L T^{-1}]$  est la perméabilité verticale du lit de la rivière,  $\delta [L]$  est l’épaisseur de son lit,  $W [L]$  est la largeur de la rivière et  $L [L]$  est longueur de rivière contenue dans la maille. Cette expression de la conductance  $C$  définit une perméabilité sur la maille qui est équivalente à celle de la condition physique “continue” (figure 2.12).

### 2.3.3 Résultats de simulation

Les résultats de simulation sont fournis par le logiciel MLAEM [69] pour les AEM et par MODFLOW [72] pour les FDM (figure 2.15). La modélisation des caractéristiques physiques de l'aquifère y est plus fine que celle obtenue initialement par DAUVERGNE [19] et MIMOUN [46] avec les codes de calculs SPLIT<sup>7</sup> pour les AEM et NEWSAM<sup>8</sup> pour les FDM. Elle prend maintenant en compte la totalité de l'aquifère avec la rive droite du fleuve Loire et une extension au-delà de l'Aillot, jusqu'à la limite naturelle de l'aquifère [20].

Les résultats de simulation sont obtenus pour une période d'étiage. Ils utilisent principalement des mesures de juillet 2004. Lors de cette période d'étiage, les données hydrauliques sont assez complètes et il n'y a généralement pas de pompage d'eau sur le site d'extraction de granulats. Par conséquent, les perturbations induites par l'activité d'extraction de granulats restent minimales.

Ces données sont ensuite traitées pour satisfaire au format d'entrée de chacune des deux méthodes de modélisation numérique. Durant tout le processus, la représentation des caractéristiques physiques y est conservée. Par conséquent, les 2 modèles numériques ont la même représentation physique de chacune des entités hydrogéologiques préalablement conceptualisées. Pour permettre la comparaison entre ces deux méthodes, le substratum est considéré horizontal à une altitude NGF<sup>9</sup> de 321 m.

Une résolution spatiale de 50 mètres est choisie pour chacune de ces modélisations. Ce paramètre permet de fixer la tolérance acceptée par chacun des critères de discrétisation :

- Pour les AEM, ce critère correspond à l'écart maximal entre la discrétisation générée par l'algorithme de Douglas-Peucker et la courbe originelle,
- Pour les FDM, ce critère correspond à la taille des cellules du maillage.

La figure 2.15 montre que les courbes piézométriques calculées par les deux méthodes de simulation sont relativement similaires. Les différences les plus importantes sont observées dans le sud-Ouest, vers la condition de flux imposée. C'est une condition qui est très sensible aux différents paramètres utilisés et peut générer d'importantes erreurs si elle est mal représentée. Nous avons choisi de la représenter par une bande d'infiltration de 50 m de large.

L'écart observé peut s'expliquer par une interprétation différente de la condition de flux pour chacune des discrétisations. Le débit global reste identique sur l'entité hydrogéologique, mais ce n'est plus forcément le cas localement.

En fait, le modèle FDM produit localement un débit plus faible que celui des AEM. Le contour géométrique de cette bande d'infiltration de 50 m de large est sans doute moins bien représenté par des mailles de 50 m<sup>2</sup>. Une alternative consisterait de corriger localement la

7. Un code de calcul développé par Igor JANKOVIC, Université de Buffalo, NY, USA.

8. Un code de calcul développé par le CIG de l'École des Mines de Paris.

9. Nivellement Général de France.

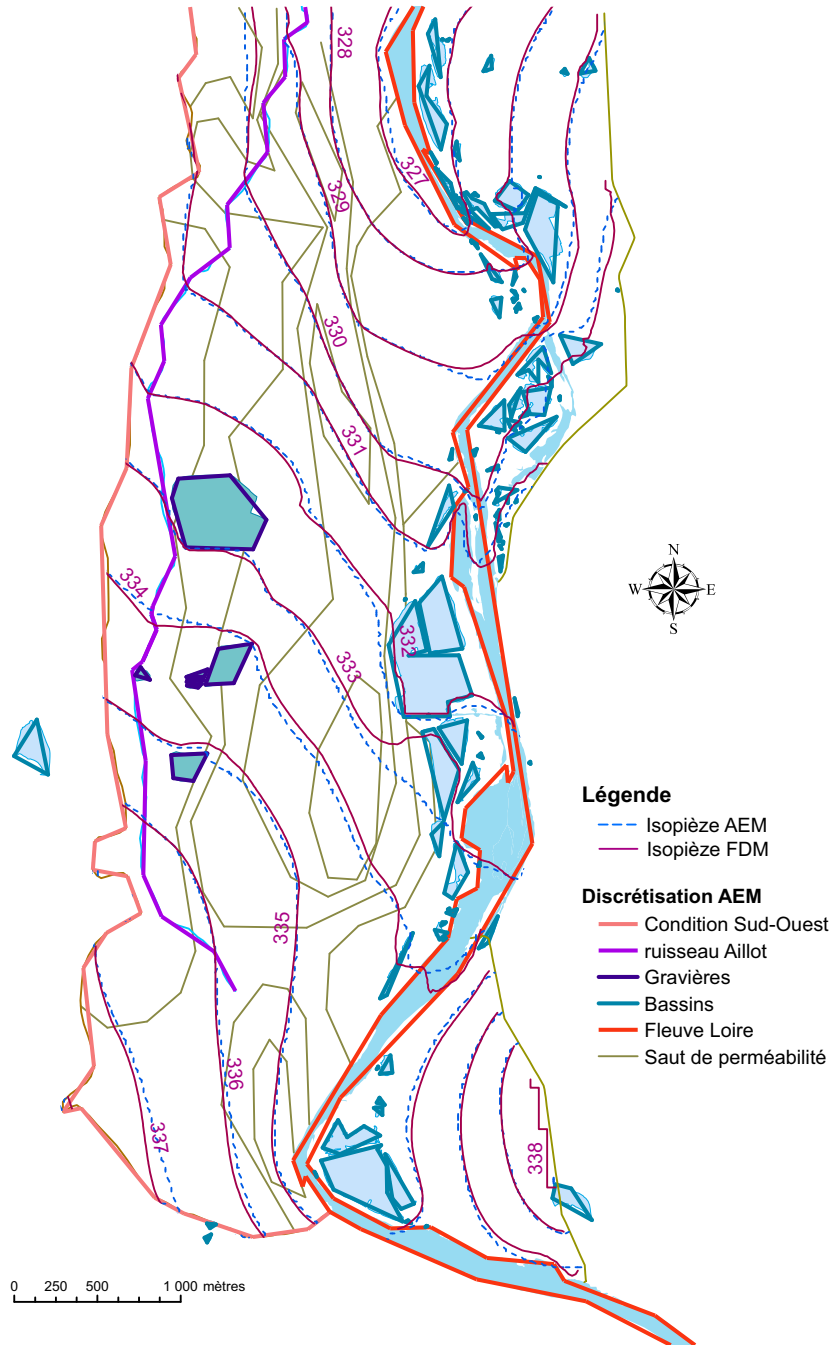


FIGURE 2.15 – Piézométrie simulée à l'étiage pour les FDM et les AEM. La résolution des différents maillages est de 50 mètres.

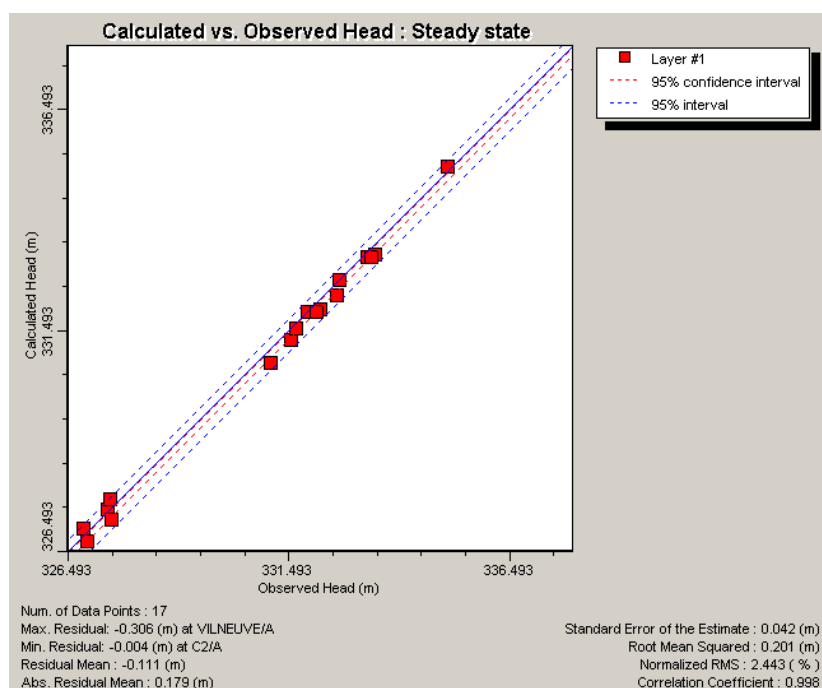


FIGURE 2.16 – Comparaison entre les valeurs de hauteur d’eau calculées et observées sur 17 points de mesure répartis sur la zone d’étude.

recharge imposée pour mieux représenter la condition physique tout en conservant la même recharge globale. En fait, cela implique de décomposer cette condition de flux en entités hydrogéologiques plus petites pour mieux la représenter.

Lors de la phase de calage, la qualité de la simulation a été estimée en comparant les résultats de calcul avec la piézométrie de référence et des valeurs de hauteurs d’eau. Elle a permis d’ajuster les données mal connues, surtout le flux du versant Ouest et les coefficients de résistances induits par le colmatage du lit de l’Aillot et de celui de la Loire. Mais le fait que ces paramètres de calage soient eux même dépendants de la discrétisation conduit à certaines difficultés.

La volonté n’a pas été d’obtenir un calage “parfait” d’un domaine où les échanges hydriques sont complexes, mais plutôt une comparaison entre les deux méthodes utilisées. Surtout que la qualité des mesures est variable, principalement à cause de l’appréciation de la côte NGF des puits.

A partir d’une sélection de 17 points de mesures piézométriques fiables prélevées dans des puits et des bassins, nous avons comparé les valeurs qui y sont observées le 23/10/2002 avec les valeurs calculées par le modèle aux différences finies (figure 2.16). A cette date, le comportement hydrogéologique était similaire à celui des données de 2004 utilisées pour les

modèles. L'erreur quadratique de 0.2 cm montre une correspondance que nous pouvons admettre comme suffisante pour notre problématique.

L'intérêt d'utiliser une méthode de modélisation alternative comme les AEM est de pouvoir corroborer les résultats de simulation obtenus par la méthode des différences finies. Une même conceptualisation du système hydrogéologique devrait induire un résultat de simulation identique. L'écart sur les résultats obtenus est donc plutôt dû au modèle numérique et au code de résolution numérique. Ici, elle a permis par exemple de mettre en évidence que la condition de flux n'est peut être pas assez finement représentée dans le Sud-Ouest.

## 2.4 Conclusion

Une comparaison des approches AEM et FDM pour la modélisation hydrodynamique a été présentée. La méthode très populaire des différences finies a été confrontée à celle des AEM à travers une méthodologie complète de modélisation. L'objectif recherché y a surtout été d'étudier la démarche générale de modélisation hydrodynamique à travers la méthode des AEM et celle des FDM.

La méthode des FDM est à priori bien appropriée pour cet aquifère. Son échelle est locale et présente une complexité assez hétérogène. Par contre, l'utilisation des mailles a montré des faiblesses pour bien représenter les contours complexes comme les bassins et les rives du fleuve.

La méthode des AEM est plus adaptée aux aquifères régionaux en permettant notamment une meilleure représentation de l'écoulement lointain. Son avantage est surtout mis en évidence lors de la modélisation de domaine ouvert avec des frontières physiques intérieures. Elle peut prendre en compte des domaines très larges tout en conservant une grande précision sur les petites échelles. Ce n'est pas vraiment le cas pour cet aquifère local.

Néanmoins, son autre avantage est la possibilité de finement représenter le contour géométrique des entités hydrogéologiques et par conséquent leurs influences physiques sur l'aquifère. En particulier, cette méthode numérique permet de calculer avec une meilleure précision la répartition des échanges de flux à l'interface entre la nappe et la rivière.

De plus, la représentation orientée objet et la structure naturellement vectorielle des AEM améliore fortement les interactions avec le SIG. L'organisation de la base de données à travers la conceptualisation de l'aquifère permet une grande synergie entre les données et le modèle numérique, au bénéfice de la qualité de simulation.

Finalement, nous constatons que suivant l'objectif de la modélisation, les AEM peuvent être plus ou moins bien adaptés par rapport aux FDM. L'intérêt est aussi d'utiliser une méthode de modélisation alternative qui peut corroborer les résultats de simulation obtenus

par la méthode des différences finies. Elles peuvent aussi être utilisées comme deux approches complémentaires de modélisation en choisissant par exemple la méthode la plus adaptée à chacun des sous domaines d'une modélisation.

Ce travail a aussi montré les améliorations qu'apporte un processus semi-automatique de discrétisation pour la modélisation des écoulements souterrains. La conception d'un système d'aide à la discrétisation permettrait de s'abstraire du type de méthode numérique et de prendre en compte divers algorithmes de discrétisation.

La quantification des gains obtenus en matière de qualité de simulation grâce à l'amélioration de la discrétisation requiert cependant une analyse mathématique plus adaptée, ce sera l'objet du travail présenté dans les chapitres suivants.





## Chapitre 3

# Analyse mathématique de l'erreur de discrétisation

LE CHAPITRE précédent a permis de d'exposer une démarche cohérente et rigoureuse de modélisation hydrogéologique, de la création du modèle conceptuel aux résultats numériques de simulation. Nous avons pu observer que la discrétisation y est une étape cruciale où l'influence de l'utilisateur est des plus importantes. Ce chapitre va donc s'attacher à étudier le comportement numérique de cette erreur pour essayer d'en réduire au mieux ses effets. C'est également l'occasion de présenter des éléments de théorie de la méthode des éléments analytiques.

### 3.1 Introduction

Un modèle est toujours entaché d'erreurs. Ces erreurs sont introduites à chacune des étapes de la modélisation. D'origines variées, elles peuvent être dues à l'incertitude sur les mesures, aux lois physiques utilisées, à l'implémentation de l'algorithme de résolution, à la discrétisation, aux erreurs d'arrondis informatiques, etc. Par exemple, la mesure d'une grandeur physique est toujours entachée d'une erreur. Elle provient principalement des imperfections des appareils de mesure et du mode opératoire de l'expérimentateur.

Contrairement à beaucoup de ces sources d'erreurs, l'étape de discrétisation induit une erreur qui pourrait être mieux contrôlée. Ce qui permettrait d'en réduire son effet sur le modèle numérique.

Sur un cas d'étude réel, il est difficile d'estimer cette erreur de discrétisation car toutes ces erreurs s'influencent les unes avec les autres. C'est pourquoi ce chapitre propose d'isoler au mieux cette erreur et d'y analyser son comportement numérique à travers quelques exemples théoriques. Ceux-ci permettront par la même occasion d'introduire des éléments de théorie de la méthode des éléments analytiques. Les solutions analytiques exactes sont développées

autant que possible pour éviter d'y ajouter les erreurs dues à la méthode numérique des éléments analytiques.

Dans les différents problèmes étudiés lors ce chapitre, un arc de cercle continu représente la géométrie exacte. Cette forme continue représente théoriquement une résolution spatiale infinie des données réelles. Cette géométrie sera comparée à ses différentes formes de discrétisation supposées : un segment joignant les extrémités et une polyligne composée de 3 segments connectés.

D'abord, les diverses solutions analytiques seront explicitées pour un segment et un arc de cercle. Leurs calculs se basent principalement sur des transformations conformes de l'espace complexe [54]. La condition de charge qui y est successivement imposée est soit constante soit de répartition linéaire.

Enfin, l'arc de cercle est comparé à une discrétisation représentée par une polyligne composée de 3 segments connectés. Ce problème permet d'exposer la méthode numérique des éléments analytiques à travers le calcul de ces 3 segments.

## 3.2 Étude analytique pour une répartition de charge constante

### 3.2.1 Position du problème

Pour cette d'étude, un potentiel constant  $\Phi_{arc}$  est imposé sur un arc de cercle représentant la géométrie exacte. La solution analytique théorique qui en est calculée est donc la solution exacte du problème. Cette solution est comparée à celle qui est obtenue pour un segment de droite qui représenterait la discrétisation de l'arc de cercle (figure 3.1). L'écart entre les solutions obtenues représente donc l'erreur de discrétisation qui est commise.

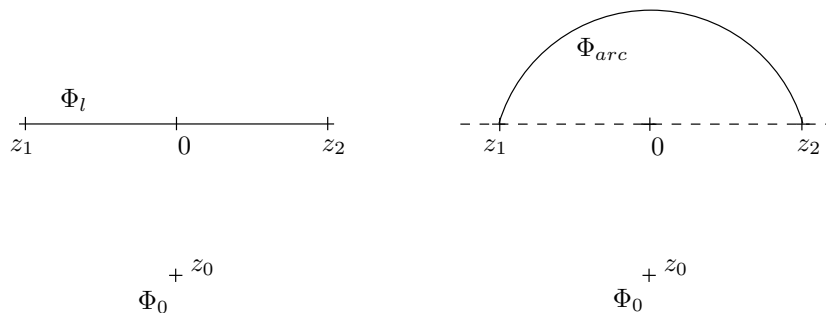


FIGURE 3.1 – Hypothèses du problème à répartition de charge constante

Pour développer ces solutions analytiques, un potentiel  $\Phi_0$  est imposé au point  $z_0$ . Cette

contrainte est nécessaire pour résoudre le problème mathématique. Elle peut être vue comme la représentation de l'influence extérieure.

Une étude de sensibilité des différents paramètres permet de mettre en évidence le comportement de l'erreur de discrétisation. L'influence sur l'erreur des deux types d'hypothèses  $\Phi_l = \Phi_{arc}$  et  $Q_l = Q_{arc}$  est étudiée.

### 3.2.2 Résolution analytique du segment de droite

Considérons un segment  $[z_1, z_2]$  défini dans l'espace complexe  $\boxed{z}$  avec une distribution constante de potentiel  $\Phi_l$ . La transformation conforme

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_1 - z_2)} \quad (3.1)$$

permet de transformer le segment  $[z_2, z_1]$  par le segment  $[-1, 1]$  dans l'espace  $\boxed{Z}$ . Considérons maintenant la transformation (figure 3.2)

$$z = \frac{1}{2} \left[ \chi + \frac{1}{\chi} \right] \quad (3.2)$$

et sa réciproque

$$\chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \quad (3.3)$$

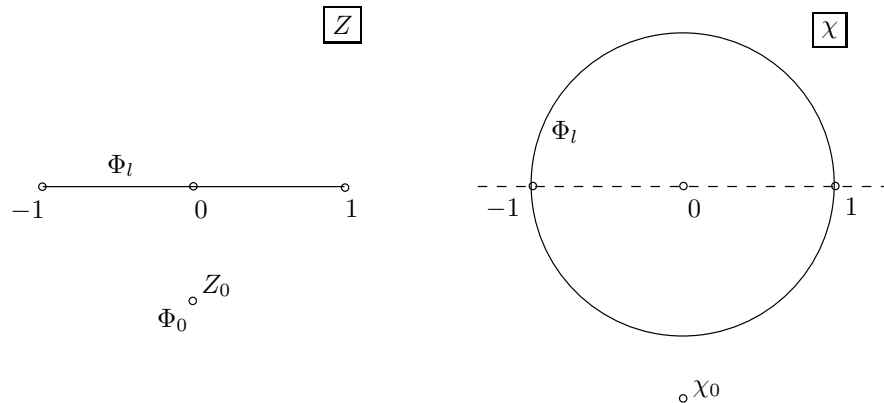


FIGURE 3.2 – Correspondance entre l'espace  $\boxed{Z}$  et l'espace  $\boxed{\chi}$ .

Ces transformations font correspondre le plan de l'espace  $\boxed{Z}$  avec le plan privé du disque unité dans l'espace  $\boxed{\chi}$ ; soit  $\{\chi : |\chi| \geq 1\}$ . Par conséquent, l'image du segment  $[z_2, z_1]$  par ces deux transformations successives est le cercle unité  $\mathcal{C} = \{\chi : \chi \bar{\chi} = 1\}$  dans l'espace  $\boxed{\chi}$ .

L'équation 3.3 fait apparaître une branche infinie<sup>1</sup> lors de l'expression du potentiel complexe. C'est dû au logarithme complexe qui ne peut être défini dans le plan complexe entier. Cette forme est préférée à  $\chi = z + \sqrt{z^2 - 1}$  qui induirait une branche infinie double pour le potentiel complexe.<sup>2</sup>

Dans l'espace  $\boxed{\chi}$ , l'expression du potentiel complexe  $\Omega_l$  est de la forme

$$\Omega_l(\chi) = \frac{Q_l}{2\pi} \ln(\chi) + C_{te} \quad (3.4)$$

Elle doit de plus vérifier la condition pour la fonction potentielle  $\Phi(\chi)$  sur le cercle unitaire

$$\Phi(\chi) = \Re[\Omega_l(\chi)] = \frac{Q_l}{2\pi} \ln |\chi| + C_{te} \quad \forall \chi \in \mathcal{C} \quad (3.5)$$

$$= \Phi_l \quad (3.6)$$

Donc l'expression de la constante est  $C_{te} = \Phi_l$ .

Par conséquent, en y ajoutant la contrainte imposée en  $z_0$ , le potentiel complexe  $\Omega_l$  doit vérifier

$$\begin{cases} \Omega_l(z) &= \frac{Q_l}{2\pi} \ln(z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}) + \Phi_l \\ \Phi(z) &= \Phi_0 \quad \text{pour } z = z_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

En utilisant la condition en  $z_0$ , le débit  $Q_l$  peut s'exprimer en fonction de  $\Phi_0$  par

$$\Phi_0 = \Re[\Omega_l(z_0)] = \frac{Q_l}{2\pi} \ln |z_0 + \sqrt{z_0-1} \sqrt{z_0+1}| + \Phi_l \quad (3.8)$$

Le système d'équations devient donc

$$\Omega_l(z) = \frac{Q_l}{2\pi} \ln(z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}) + \Phi_l \quad (3.9a)$$

$$Q_l = 2\pi \frac{\Phi_0 - \Phi_l}{\ln |z_0 + \sqrt{z_0-1} \sqrt{z_0+1}|} \quad (3.9b)$$

Ce système permet de découpler l'expression du potentiel  $\Omega_l(z)$  et celle du débit  $Q_l$  généré par la ligne. Les figures 3.3 et 3.4 représentent respectivement en 2D et en 3D la solution numérique de ce potentiel complexe pour un segment  $[-1, 1]$ . Le potentiel constant imposé sur le segment est  $\Phi_l = 2$  et la contrainte imposée en  $z_0$  est  $\Phi_0 = 1.5$ .

---

1. "branch-cut" en Anglais.

2. Cela vient de la formulation complexe de la racine carrée principale.

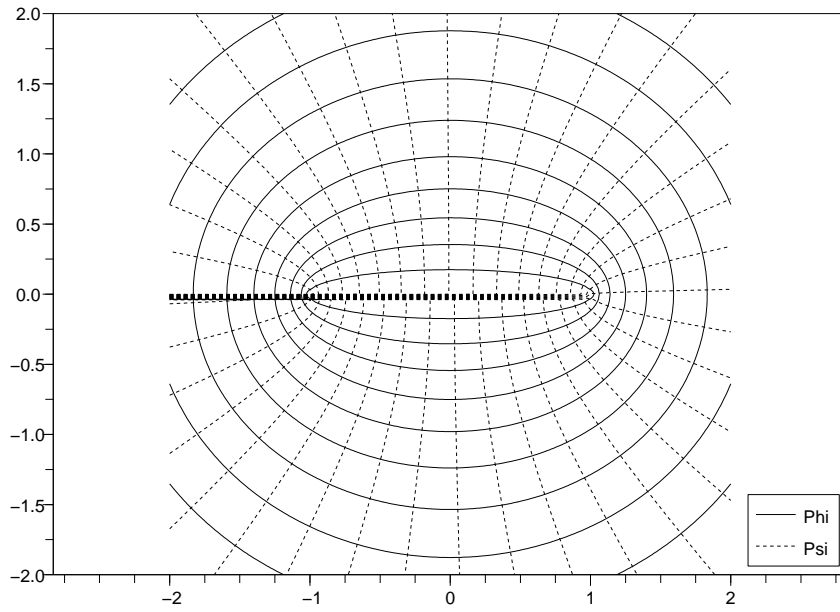


FIGURE 3.3 – Segment de potentiel constant en 2D

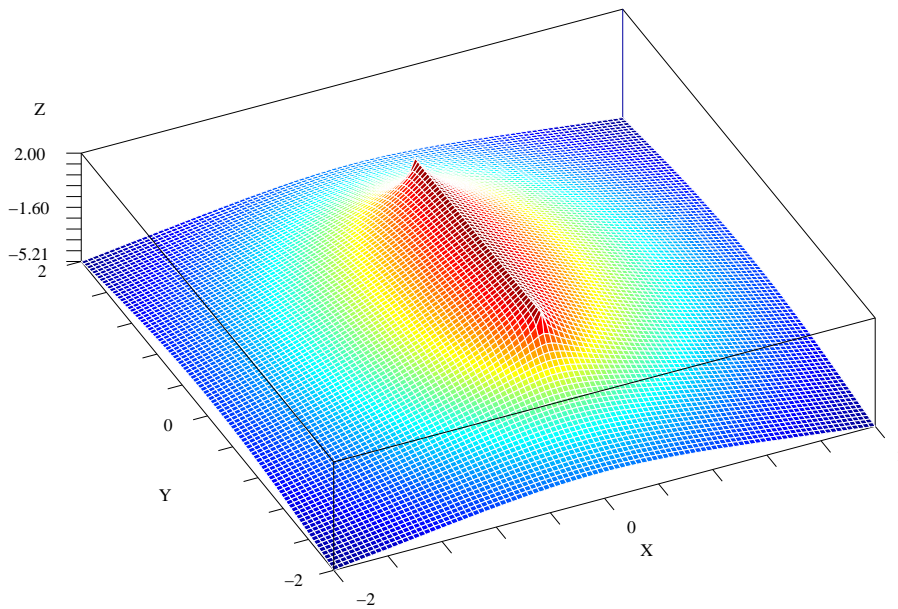


FIGURE 3.4 – Segment de potentiel constant en 3D

### 3.2.3 Résolution analytique de l'arc de cercle

Considérons un arc  $[z_1, z_2]$  défini dans l'espace complexe  $\boxed{z}$  avec une distribution constante de potentiel  $\Phi_{arc}$ . Pour déterminer l'expression du potentiel complexe  $\Omega_{arc}$  dans l'espace  $\boxed{z}$ , 3 transformations conformes vont être utilisées [54]. Les deux premières représentées sur la figure 3.5 se trouvent dans STRACK [63], la troisième est explicitée dans cette section. Cette méthode proposée montre une façon originale de calculer un arc de cercle de potentiel constant.

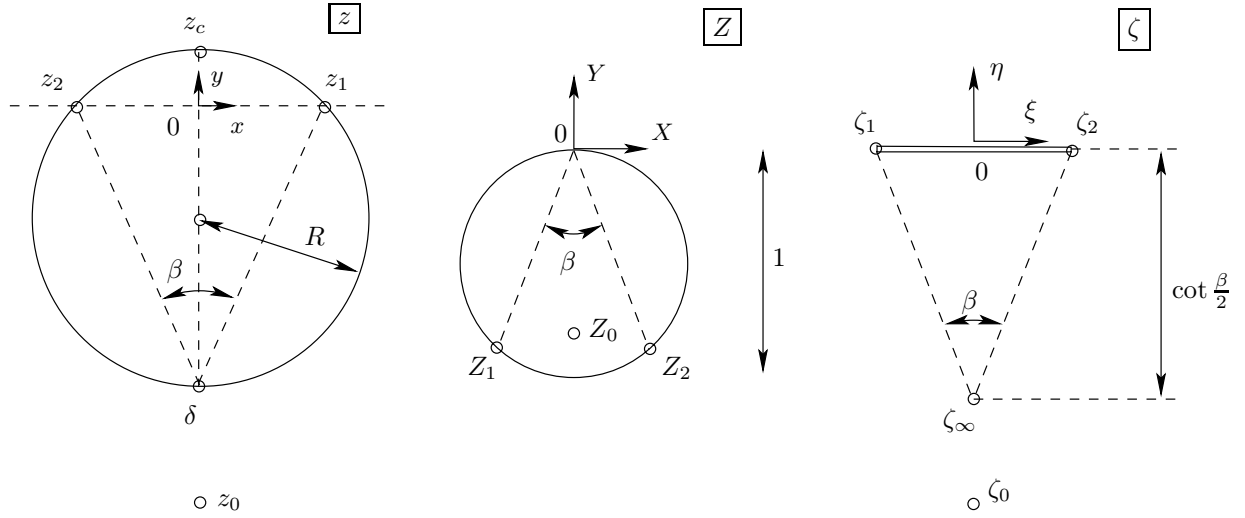


FIGURE 3.5 – Représentation des 2 premières transformations conformes

Cet arc de cercle (figure 3.5) est déterminé dans l'espace  $\boxed{z}$  en fonction des paramètres  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $R$ ,  $z_1$  et  $z_2$  (STRACK, [63], section 41). Ces paramètres peuvent être reliés entre eux. Prenons par exemple la situation représentée sur la figure 3.5 (il est toujours possible de se ramener à cette situation grâce à l'équation 3.1). L'équation du cercle s'exprime pour un point  $(x, y)$  par

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad (3.10)$$

où les coordonnées du centre du cercle  $x_c$  et  $y_c$  sont  $x_c = 0$  et  $y_c = -\cot \frac{\beta}{2} + R$ . En développant cette équation, nous obtenons

$$2R \cot \frac{\beta}{2} = x^2 + \left( \cot \frac{\beta}{2} \right)^2 \quad (3.11)$$

Par conséquent, nous obtenons la relation entre  $R$  et  $\beta$  par

$$R = \frac{1}{2} \left( x^2 \tan \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.12)$$

La première transformation est définie par

$$Z = \frac{z - \delta}{2R} e^{-i\gamma} \quad (3.13)$$

Elle transforme le cercle de l'espace  $\boxed{z}$  en un cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  dans l'espace  $\boxed{Z}$ . Le segment  $[z_1, z_2]$  y est orienté avec un angle  $\gamma$  par rapport à l'axe horizontal  $0x$ . Pour le cas particulier d'un arc défini comme sur la figure 3.5, cette transformation s'exprime par

$$Z = \frac{\delta - z}{2R} \quad (3.14)$$

Par cette transformation conforme, les images des points  $z_1, z_2, z = \delta$  et  $z = z_c$  deviennent respectivement les points  $Z_1, Z_2, Z_\delta = 0$  et  $Z_c = -i$ .

La deuxième transformation est définie par

$$\zeta = \cot \frac{\beta}{2} \left[ \frac{1}{Z} - i \right] \quad (3.15)$$

Elle transforme l'arc de cercle  $[Z_1, Z_2]$  du plan  $\boxed{Z}$  en une fente joignant les extrémités  $\zeta_1 = -1$  et  $\zeta_2 = 1$  de l'espace  $\boxed{\zeta}$ . L'image de l'infini devient le point  $\zeta_\infty$  défini par

$$\zeta_\infty = -i \cot \frac{\beta}{2} \quad (3.16)$$

### 3.2.3.1 Expression de la troisième transformation conforme

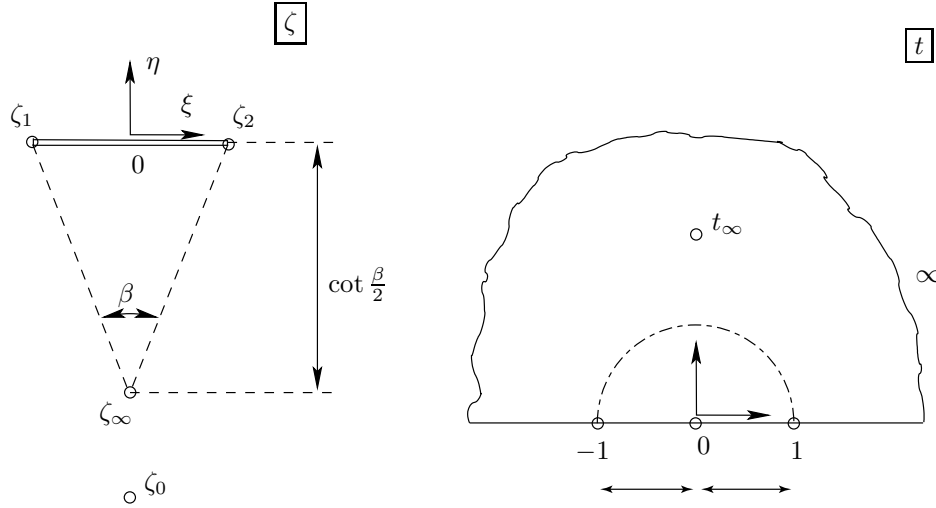
Pour obtenir une expression simple du potentiel complexe  $\Omega_{arc}$ , nous souhaitons avoir une transformation conforme qui puisse projeter le plan  $\boxed{\zeta}$  entier sur le demi-plan supérieur  $\{t \in \mathbb{C} : \Im(t) \geq 0\}$  d'un espace complexe  $\boxed{t}$  (figure 3.6).

Bien que nous ayons  $\zeta_1 = -1$  et  $\zeta_2 = 1$  dans notre étude, nous allons rechercher une forme plus générale de cette transformation avec  $\zeta_1 = -a$  et  $\zeta_2 = a$ . Pour cela, nous recherchons d'abord la transformation réciproque sous la forme

$$\zeta(t) = \frac{At}{(t - i\kappa)(t + i\kappa)} = \frac{At}{t^2 + \kappa^2} \quad (3.17)$$

avec les constantes réelles positives  $\kappa$  et  $A$ .




 FIGURE 3.6 – Représentation de la 3<sup>ème</sup> transformation conforme

Cette expression implique les images suivantes pour les points  $t = 0$ ,  $t = \infty$  et  $t = i\kappa$  :

$$\zeta(0) = 0^- \quad (3.18a)$$

$$\zeta(\infty) = 0^+ \quad (3.18b)$$

$$\zeta(i\kappa) = \infty \quad (3.18c)$$

Nous souhaitons que l'image du segment  $[-a, a]$  de l'espace  $\boxed{\zeta}$  soit le segment  $[-1, 1]$  dans l'espace  $\boxed{t}$ . Par conséquent, cette transformation doit aussi vérifier les propriétés :

$$\zeta(-1) = \frac{-A}{1 + \kappa^2} = -a = \zeta_1 \quad (3.19a)$$

$$\zeta(1) = \frac{A}{1 + \kappa^2} = a = \zeta_2 \quad (3.19b)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0 \quad \text{pour } \zeta = \pm a \quad (3.19c)$$

les équations 3.19a et 3.19b induisent la condition

$$a = \frac{A}{1 + \kappa^2} \quad (3.20)$$

D'après l'expression choisie pour  $\zeta(t)$  (équation 3.28), la condition 3.19c implique

$$\frac{A}{t^2 + \kappa^2} + At \left[ -\frac{2t}{(t^2 + \kappa^2)^2} \right] = 0 \quad \text{pour } \zeta = \pm a \quad (3.21)$$

c'est à dire

$$\frac{2t^2}{t^2 + \kappa^2} = 1 \quad \text{pour } \zeta = \pm a \quad (3.22)$$

En résolvant cette équation du 2<sup>ème</sup> ordre, nous obtenons la solution

$$t = \pm \kappa \quad \text{pour} \quad \zeta = \pm a \quad (3.23)$$

En substituant dans l'équation 3.28 ces expressions pour  $t$  et  $\zeta$ , nous pouvons en déduire une relation entre  $A$  et  $\kappa$  par

$$a = \frac{A}{2\kappa} \quad (3.24)$$

En regroupant les équations 3.20 et 3.24, nous obtenons un système de 2 équations à 2 inconnues pour  $A$  et  $\kappa$  :

$$\begin{cases} a = \frac{A}{1 + \kappa^2} \\ a = \frac{A}{2\kappa} \end{cases} \quad (3.25)$$

Ce système nous amène à résoudre l'équation du second degré en  $\kappa$  :

$$a\kappa^2 - 2a\kappa + a = 0 \quad (3.26)$$

Le discriminant  $\Delta$  est nul, donc nous obtenons la solution unique  $\kappa = \frac{2a}{2a} = 1$ . Par conséquent, nous avons  $A = 2a$  et nous obtenons l'expression générale de la transformation par

$$\zeta = \frac{2at}{t^2 + 1} = \frac{2at}{(t-i)(t+i)} \quad (3.27)$$

Pour le cas particulier de notre étude où  $a = 1$ , la transformation recherchée devient

$$\zeta = \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{2t}{(t-i)(t+i)} = 2 \left[ \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \right] \quad (3.28)$$

Il suffit d'inverser l'expression de cette transformation pour en déduire une formulation de  $t$  en fonction de  $\zeta$ . Par conséquent, le système suivant doit être résolu pour  $t$  :

$$\zeta t^2 - 2t + \zeta = 0 \quad (3.29)$$

le discriminant de cette équation du second degré est  $\Delta = 4(1 - \zeta^2)$ , les solutions sont donc de la forme

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \quad (3.30)$$

Posons  $\xi = \frac{1}{\zeta}$ , nous obtenons alors

$$t = \xi \pm \sqrt{\xi - 1} \sqrt{\xi + 1} \quad (3.31)$$

Pour obtenir que l'image d'un point  $\zeta$  de l'espace  $\boxed{\zeta}$  se projette dans le demi-plan supérieur  $\{t \in \mathbb{C} : \Im(t) \geq 0\}$ , il faut choisir la transformation conforme suivante :

$$t = \xi - \sqrt{\xi - 1} \sqrt{\xi + 1} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{1}{\zeta} \quad (3.32)$$

et sa transformation inverse est donnée par

$$\xi = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{1}{\zeta} \quad (3.33)$$

### 3.2.3.2 Expression de l'image de l'infini $t_\infty$

Pour complètement caractériser la transformation conforme passant de l'espace  $\boxed{z}$  à l'espace  $\boxed{t}$ , il est nécessaire de connaître les images successives de l'infini. La première transformation renvoie l'infini sur l'infini, puis la 2<sup>ème</sup> transformation envoie l'infini de  $\boxed{Z}$  au point  $\zeta_\infty$  défini par

$$\zeta_\infty = -i \cot \frac{\beta}{2} \quad (3.34)$$

Enfin, l'image du point  $\zeta_\infty$  dans l'espace  $\boxed{t}$  devient :

$$t_\infty = fct_t(\zeta_\infty) = i \left[ \tan \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left( \tan \frac{\beta}{2} \right)^2 + 1} \right] \quad (3.35)$$

Pour le cas particulier d'un demi arc de cercle d'extrémités  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ , nous obtenons que  $t_\infty = i (1 + \sqrt{2})$ .

### 3.2.3.3 Évaluation du potentiel complexe de l'arc de cercle dans l'espace $t$

Le potentiel  $\Omega_{arc}$  peut s'exprimer facilement dans l'espace  $\boxed{t}$  en utilisant la méthode des images puisque le point  $t_\infty$  est une source. En effet, la conservation de la masse implique que la somme des flux générés par le système est nulle. Le flux à l'infini  $Q_\infty$  doit compenser celui généré par l'arc de cercle  $Q_{arc}$  par

$$Q_\infty = -Q_{arc} \quad (3.36)$$

De même que pour la ligne à charge constante, il est nécessaire d'imposer un potentiel  $\Phi_0$  au point  $z_0$  pour résoudre le problème. Le potentiel complexe  $\Omega_{arc}$  doit alors vérifier

$$\begin{cases} \Omega_{arc}(t) = \frac{-Q_{arc}}{2\pi} \ln \frac{t-t_\infty}{t-t_\infty} + \Phi_{arc} \\ \Phi(t) = \Phi_0 \quad \text{pour } t = t_0 \end{cases} \quad (3.37)$$

En utilisant la condition en  $z_0$ , le débit  $Q_{arc}$  peut s'exprimer en fonction de  $\Phi_0$  par

$$\Phi_0 = \Re[\Omega_{arc}(t_0)] = \frac{-Q_{arc}}{2\pi} \ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right| + \Phi_{arc} \quad (3.38)$$

Le système d'équations devient donc

$$\Omega_{arc} = \frac{-Q_{arc}}{2\pi} \ln \frac{t-t_\infty}{t-t_\infty} + \Phi_{arc} \quad (3.39a)$$

$$Q_{arc} = -2\pi \frac{\Phi_0 - \Phi_{arc}}{\ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right|} \quad (3.39b)$$

Ce système permet de découpler l'expression du potentiel  $\Omega_{arc}(z)$  et celle du débit  $Q_{arc}$  généré par l'arc de cercle puisque la transformation conforme entre l'espace  $\boxed{z}$  et  $\boxed{t}$  est entièrement définie.

### 3.2.3.4 Évaluation Numérique

Les figures 3.7 et 3.8 représentent respectivement en 2D et en 3D la solution numérique de ce potentiel complexe pour un demi-cercle d'extrémités  $z_1 = -1$  et  $z_2 = 1$ . Il correspond aux valeurs de paramètres  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = -i$  et  $R = 1$ . Le potentiel constant imposé sur le segment est  $\Phi_{arc} = 2$  et la contrainte imposée en  $z_0 = -i$  est  $\Phi_0 = 1.5$ .

Par exemple, l'image du point  $z_0 = -2i$  est successivement donné par

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{2}i \\ \zeta_0 &= -3i \\ t_0 &= \left( \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \right) i \end{aligned}$$

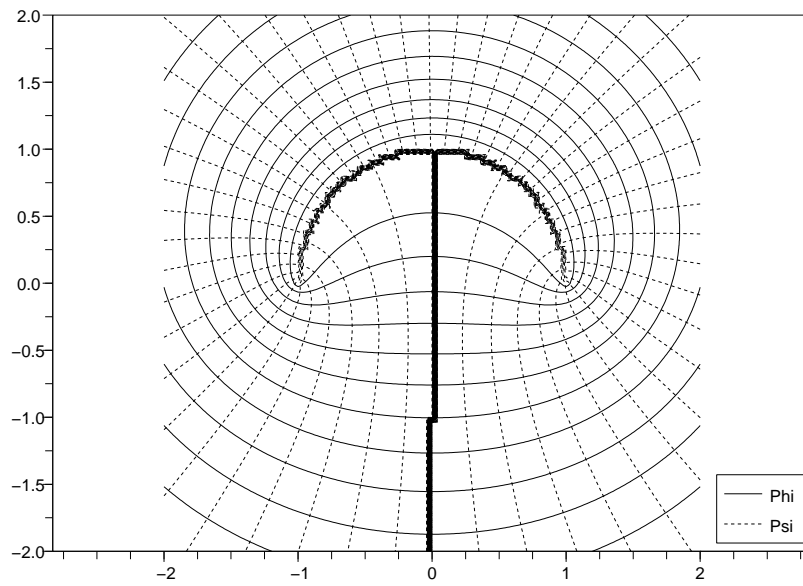


FIGURE 3.7 – Arc de cercle de potentiel constant en 2D

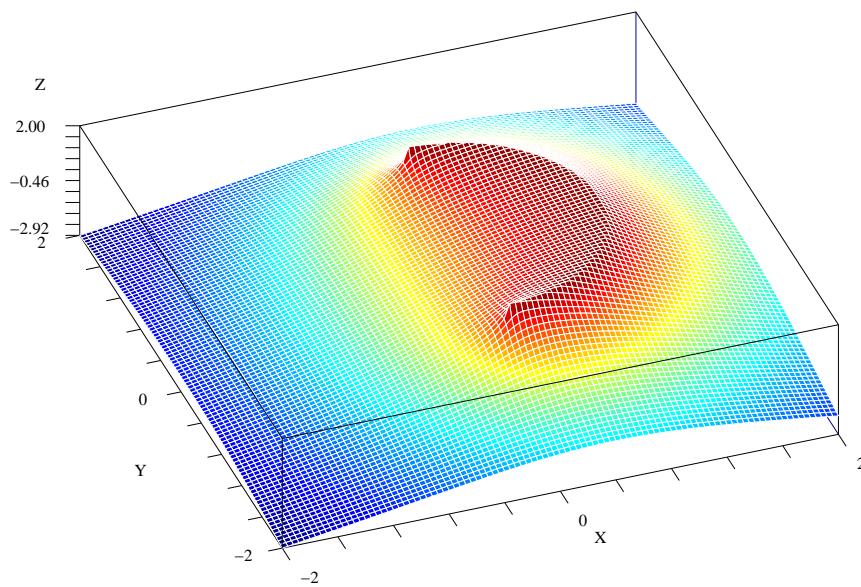


FIGURE 3.8 – Arc de cercle de potentiel constant en 3D

### 3.2.4 Comparaison des potentiels complexes obtenus

Les 2 sections précédentes ont permis d'exposer les démarches de calcul des potentiels complexes pour la ligne (équation 3.9) et l'arc de cercle (équation 3.39). Pour le segment, le potentiel complexe  $\Omega_l$  est donné par

$$\Omega_l(z) = \frac{Q_l}{2\pi} \ln(z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}) + \Phi_l \quad (3.40a)$$

$$Q_l = 2\pi \frac{\Phi_0 - \Phi_l}{\ln |z_0 + \sqrt{z_0-1} \sqrt{z_0+1}|} \quad (3.40b)$$

et pour l'arc de cercle, l'expression du potentiel complexe  $\Omega_{arc}$  est donné par

$$\Omega_{arc} = \frac{-Q_{arc}}{2\pi} \ln \frac{t - t_\infty}{t - \overline{t_\infty}} + \Phi_{arc} \quad (3.41a)$$

$$Q_{arc} = -2\pi \frac{\Phi_0 - \Phi_{arc}}{\ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - \overline{t_\infty}} \right|} \quad (3.41b)$$

Pour comparer le comportement de ces deux potentiels, deux types d'hypothèses sont considérées :

- soit  $\Phi_l = \Phi_{arc}$ , ce qui signifie une condition de potentiel identique ;
- soit  $Q_l = Q_{arc}$ , ce qui signifie une condition de débit identique.

#### 3.2.4.1 Étude pour l'hypothèse $\Phi_l = \Phi_{arc}$

Puisque  $\Phi_l = \Phi_{arc}$ , les débits  $Q_{arc}$  et  $Q_l$  sont successivement évalués par les équations 3.40b et 3.41b. L'erreur sur  $\Phi$  est donc donnée en fonction de  $z$  par

$$\text{Diff}(\Phi)(z) = |\Phi_{arc}(z) - \Phi_l(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| Q_{arc} \ln \frac{t - t_\infty}{t - \overline{t_\infty}} + Q_l \ln(z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1}) \right| \quad (3.42)$$

D'après le principe du maximum [54], l'erreur maximale doit se situer sur la frontière. C'est vérifié puisqu'elle se situe au point  $z_c$ , le point de l'arc qui se trouve le plus éloigné du segment (figures 3.9 et 3.10). Ce point est plus précisément défini par

$$z_c = \left( 2R - \cotan \frac{\beta}{2} \right) i \quad (3.43)$$

Par conséquent, l'erreur maximale est définie par

$$\begin{aligned} \text{Err}_{max}(\Phi) &= |\Phi_{arc}(z_c) - \Phi_l(z_c)| \\ &= |\Phi_{arc} - \Phi_l(z_c)| \end{aligned}$$

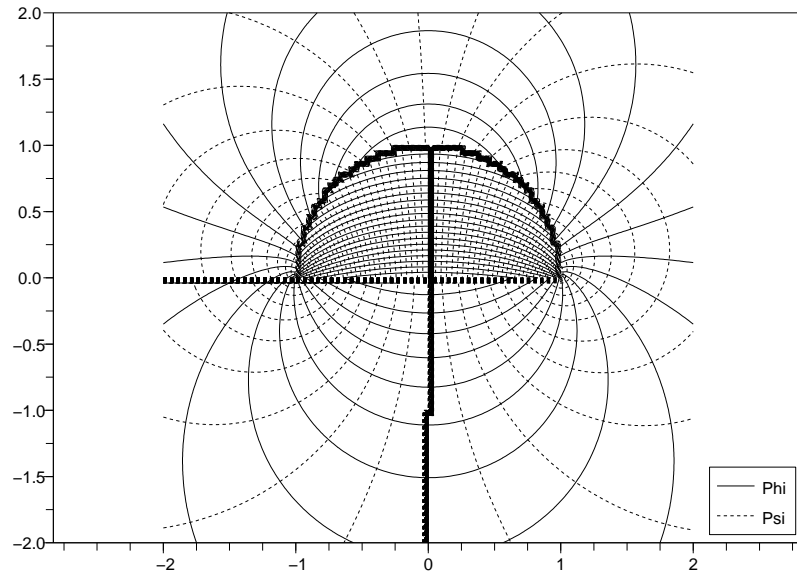


FIGURE 3.9 – Différence  $\Omega_{arc} - \Omega_l$  des potentiels complexes en 2D.

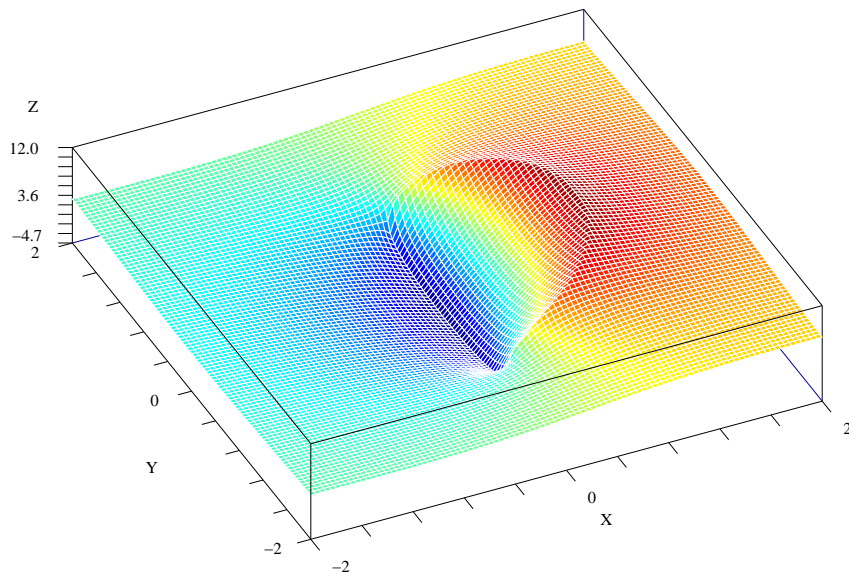


FIGURE 3.10 – Différence  $\Omega_{arc} - \Omega_l$  des potentiels complexes en 3D.

Puisque  $\Phi_l(z_c) = \Phi_l(\overline{z_c})$ , il est possible d'approcher ce terme par une simple interpolation d'ordre 1 par

$$\Phi_l(z_c) = (\Phi_0 - \Phi_l) \frac{|z_c|}{|z_0|} + \Phi_l \quad (3.44)$$

Pour effectuer une meilleure approximation, il est aussi possible d'utiliser la solution analytique 1D qui sera présentée au chapitre 5 en considérant une répartition de flux moyenné  $^{moy}q_l$  défini par  $^{moy}q_l = \frac{Q_l}{|z_1 - z_2|} = \frac{Q_l}{2}$ .

D'après les équations 3.40b et 3.41b, il est possible de relier les débits  $Q_l$  et  $Q_{arc}$  par

$$Q_l = -Q_{arc} \frac{\ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - \overline{t_\infty}} \right|}{\ln |z_0 + \sqrt{z_0 - 1}| \sqrt{|z_0 + 1|}} \quad (3.45)$$

Cette relation peut s'exprimer sous la forme

$$Q_l = -Q_{arc} \frac{g(t_0)}{f(z_0)} \quad (3.46)$$

avec

$$f(z_0) = \ln |z_0 + \sqrt{(z_0 - 1)} \sqrt{(z_0 + 1)}| \quad (3.47)$$

$$g(t_0) = \ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - \overline{t_\infty}} \right| \quad (3.48)$$

La limite asymptotique du rapport entre  $f$  et  $g$  est donnée par (figure 3.11(b))

$$\lim_{|z_0| \rightarrow +\infty} \frac{g}{f}(z_0) = -1 \quad (3.49)$$

Par conséquent, le débit  $Q_l$  se rapproche de  $Q_{arc}$  très lentement lorsque  $z_0$  tend vers l'infini.

### 3.2.4.2 Étude du cas de l'hypothèse $Q_{arc} = Q_l$

Avec l'hypothèse  $Q_{arc} = Q_l$ , il est possible d'établir une relation entre  $\Phi_{arc}$  et  $\Phi_l$  par

$$\Phi_l = \Phi_0 \left( 1 + \frac{f(z_0)}{g(t_0)} \right) - \Phi_{arc} \frac{f(z_0)}{g(t_0)} \quad (3.50)$$

avec

$$f(z_0) = \ln |z_0 + \sqrt{(z_0 - 1)} \sqrt{(z_0 + 1)}| \quad (3.51)$$

$$g(t_0) = \ln \left| \frac{t_0 - t_\infty}{t_0 - \overline{t_\infty}} \right| \quad (3.52)$$



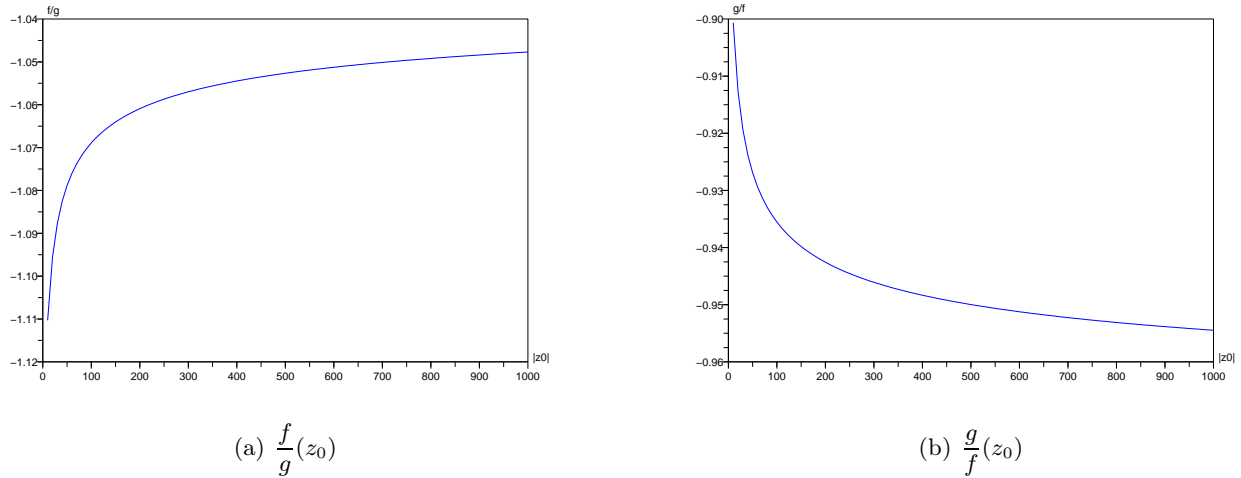


FIGURE 3.11 – Comportement asymptotique de la fonction  $\frac{f}{g}(z_0)$  en fonction du module de  $z_0 = -|z_0| i$ .

De même que précédemment, la limite asymptotique du rapport entre  $f$  et  $g$  est donnée par (figure 3.11(a))

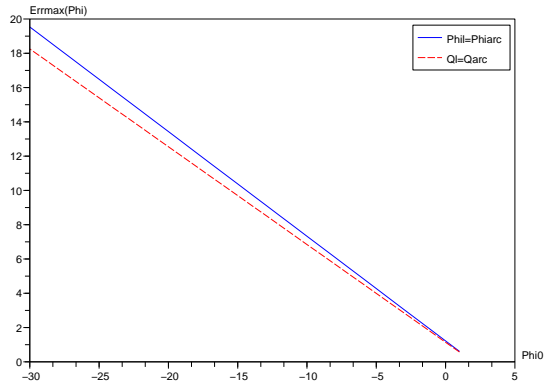
$$\lim_{|z_0| \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(z_0) = -1 \quad (3.53)$$

Par conséquent, d'après l'équation 3.50, cela signifie que plus  $|z_0|$  tend vers l'infini, plus la valeur de  $\Phi_l$  est proche de  $\Phi_{arc}$ .

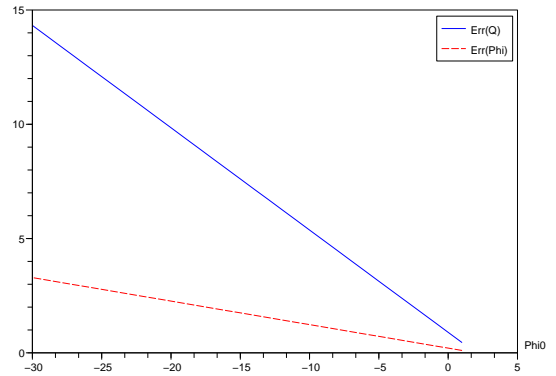
### 3.2.4.3 Analyse de sensibilité de l'erreur de discrétisation

Une analyse de sensibilité de l'erreur de discrétisation est présentée sur la figure 3.12. Elle montre comme se comporte l'erreur en faisant varier les paramètres  $\Phi_0$ ,  $z_0$  et  $\beta$  avec l'hypothèse  $\Phi_{arc} = \Phi_l$  ou  $Q_{arc} = Q_l$ . Cela montre globalement que respecter la condition  $Q_{arc} = Q_l$  est généralement meilleur que de respecter la condition  $\Phi_{arc} = \Phi_l$ . En pratique, il reste relativement difficile d'imposer ce type de condition puisqu'elle n'est généralement pas connue avant la simulation (sauf pour une condition de flux imposé). Par contre, elle pourrait éventuellement être prise en compte dans une perspective d'ajustement du maillage après une première simulation.

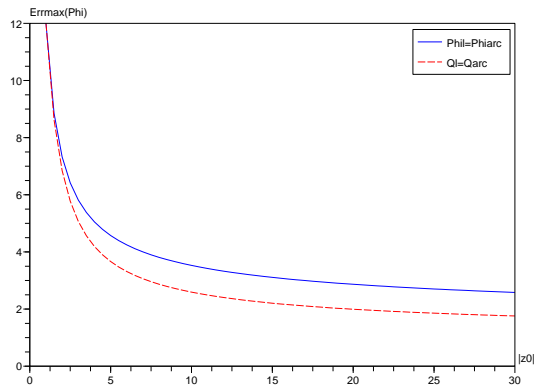
### 3.2 ÉTUDE ANALYTIQUE POUR UNE RÉPARTITION DE CHARGE CONSTANTE



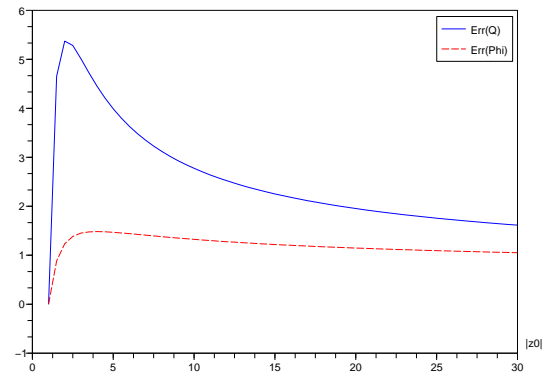
(a)



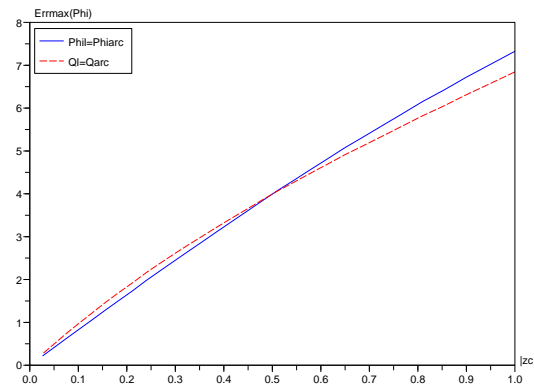
(b)



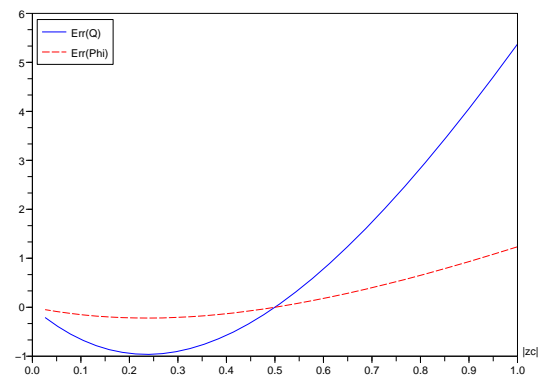
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.12 – Comportement de l'erreur en fonction des différents paramètres  $\Phi_0$ ,  $z_0$  et  $\beta$ . A gauche, représentation de l'erreur maximale  $Err_{max}$  selon l'hypothèse  $\Phi_{arc} = \Phi_l$  ou l'hypothèse  $Q_{arc} = Q_l$ . A droite, représentation de l'écart induit  $|Q_{arc} - Q_l|$  ou  $|\Phi_{arc} - \Phi_l|$  selon l'hypothèse considérée.

### 3.3 Généralisation au cas d'une répartition de potentiel non constante

#### 3.3.1 Position du problème

Une répartition non constante de potentiel  $\Phi_{arc}(\theta)$  pour l'arc de cercle et  $\Phi_l(\theta)$  pour le segment est imposée en fonction des coordonnées paramétriques  $\theta \in [0, \pi]$  joignant l'extrémité  $z_1$  pour  $\theta = 0$  à l'extrémité  $z_2$  pour  $\theta = \pi$ . Un potentiel  $\Phi_0$  est toujours imposé au point  $z_0$ . Le schéma 3.13 synthétise ces différentes hypothèses.

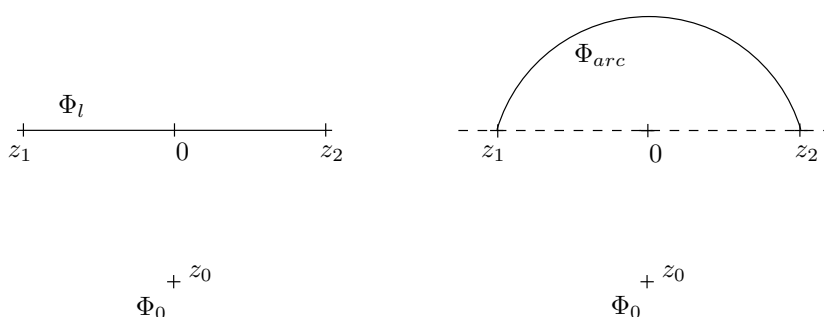


FIGURE 3.13 – Problème à répartition de charge non constante

Nous allons successivement exposer les solutions analytiques pour un arc de cercle, puis pour le segment de droite. Cette étude permet de généraliser le calcul des solutions pour une répartition de potentiel quelconque. Le calcul pour l'arc de cercle se fait par une approche un peu différente que précédemment. Bien sûr, cette méthode plus générale permettrait aussi de calculer une répartition de potentiel constante.

#### 3.3.2 Résolution analytique du segment de droite

Par un raisonnement similaire au cas constant, nous utilisons une transformation conforme qui fait correspondre le plan  $[z]$  à la zone extérieure au disque unité de l'espace  $[\chi]$ , i.e.  $\{\chi : |\chi| > 1\}$ . Elle est définie par

$$z = \frac{1}{2} \left[ \chi + \frac{1}{\chi} \right] \quad \text{càd} \quad \chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \quad (3.54)$$

Dans l'espace  $[\chi]$ , le potentiel complexe  $\Omega_l$  s'exprime alors en fonction des coefficients  $a_n$

$$\Omega_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} + \frac{Q_l}{2\pi} \ln \chi \quad \text{avec} \quad \chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \quad (3.55)$$

Ces coefficients  $a_n$  sont réels. Ils représentent la répartition de potentiel imposé sur le segment (voir section 3.3.4). Par conséquent, en y ajoutant la contrainte  $\Phi_0$  imposée en  $z_0$ , le potentiel complexe  $\Omega_l$  doit vérifier

$$\begin{cases} \Omega_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} + \frac{Q_l}{2\pi} \ln \chi & \text{avec } \chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \\ \Phi(z) = \Phi_0 & \text{pour } z = z_0 \end{cases} \quad (3.56)$$

En utilisant la condition en  $z_0$ , le débit  $Q_l$  peut s'exprimer en fonction de  $\Phi_0$  par

$$\Phi_0 = \Re[\Omega_l(z_0)] = \frac{Q_l}{2\pi} \ln |z_0 + \sqrt{z_0-1} \sqrt{z_0+1}| + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(z)^{-n} \quad (3.57)$$

Le système d'équations devient donc

$$\Omega_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} + \frac{Q_l}{2\pi} \ln \chi \quad \text{avec } \chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \quad (3.58a)$$

$$Q_l = 2\pi \frac{\Phi_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(z)^{-n}}{\ln |z_0 + \sqrt{z_0-1} \sqrt{z_0+1}|} \quad (3.58b)$$

Ce système permet de découpler l'expression du potentiel  $\Omega_l(z)$  et celle du débit  $Q_l$  généré par la ligne.

### 3.3.3 Résolution analytique de l'arc de cercle

Pour résoudre le potentiel complexe généré par une répartition non constante de potentiel  $\Phi_{arc}(\theta)$  sur un arc de cercle joignant les points  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ . De façon similaire au cas constant, nous caractérisons l'arc de cercle représenté sur la figure 3.1 par les paramètres  $\beta$ ,  $\delta$  et  $R$ .

Pour résoudre le potentiel complexe de l'arc de cercle  $\Omega_{arc}$  avec une distribution de potentiel non constant, 3 transformations conformes vont être utilisées. Les deux premières sont les mêmes que pour le cas constant. Elles sont représentées sur la figure 3.5 et se trouvent dans STRACK [63]. Elle sont données par

$$Z = \frac{\delta - z}{2R} \quad (3.59)$$

$$\zeta = \cot \frac{\beta}{2} \left[ \frac{1}{Z} - i \right] \quad (3.60)$$

Rappelons aussi que l'expression de l'image de l'infini de l'espace  $\boxed{z}$  dans l'espace  $\boxed{\zeta}$  est défini par

$$\zeta_{\infty} = -i \cot \frac{\beta}{2} \quad (3.61)$$

Pour la 3<sup>ème</sup> transformation, nous choisissons cette fois l'expression donnée par

$$\chi = \zeta + \sqrt{\zeta - 1} \sqrt{\zeta + 1} \quad (3.62)$$

Elle nous permet de faire correspondre le segment de l'espace  $\boxed{\zeta}$  avec le cercle unité de l'espace  $\boxed{\chi}$  (figure 3.14).

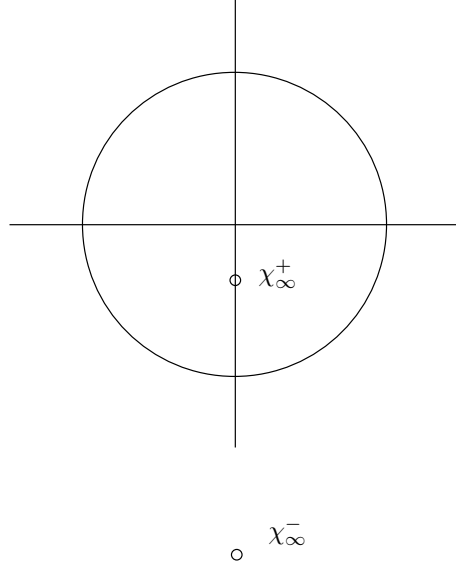


FIGURE 3.14 – Représentation de la 3<sup>ème</sup> transformation.

L'image de l'infini  $y$  devient le point défini par

$$\chi_{\infty}^{-} = \zeta_{\infty} + \sqrt{\zeta_{\infty} - 1} \sqrt{\zeta_{\infty} + 1} \quad (3.63)$$

Par exemple, pour le cas du demi arc de cercle nous obtenons  $\chi_{\infty}^{-} = -(1 + \sqrt{2})i$ .

Par la méthode des images et puisque  $Q_{\infty} = -Q_{arc}$ , nous pouvons exprimer le potentiel  $\Omega_{arc}$  dans l'espace  $\boxed{\chi}$  en fonction des coefficients  $a_n$  par

$$\Omega_{arc}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} - \frac{Q_{arc}}{2\pi} \ln \left( \frac{\chi - \chi_{\infty}^{+}}{\chi - \chi_{\infty}^{-}} \right) \quad (3.64)$$

Les coefficients  $a_n$  sont réels et dépendent de la répartition de potentiel (section 3.3.4).

Posons  $\chi_{\infty}^{-} = -ip^*$  et  $\chi_{\infty}^{+} = -ip$ . D'après STRACK [63] (page 241), nous avons la relation

$$p = \frac{R^2}{p^*} \quad (3.65)$$

Par exemple, pour le cas d'un demi arc de cercle unité  $p^* = (1 + \sqrt{2})$ , nous aurions donc

$$p = \frac{R^2}{p^*} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad (3.66)$$

et donc

$$\chi_\infty^+ = \frac{-i}{1 + \sqrt{2}} \quad (3.67)$$

Par conséquent, en y ajoutant la contrainte  $\Phi_0$  imposée en  $z_0$ , le potentiel complexe  $\Omega_{arc}$  doit vérifier

$$\begin{cases} \Omega_{arc}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} - \frac{Q_{arc}}{2\pi} \ln \left( \frac{\chi - \chi_\infty^+}{\chi - \chi_\infty^-} \right) \\ \Phi(z) = \Phi_0 \quad \text{pour } z = z_0 \end{cases} \quad (3.68)$$

En utilisant la condition en  $z_0$ , le débit  $Q_{arc}$  peut s'exprimer en fonction de  $\Phi_0$  par

$$\Phi_0 = \Re[\Omega_{arc}(z_0)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_0^{-n} - \frac{Q_{arc}}{2\pi} \ln \left| \frac{\chi_0 - \chi_\infty^+}{\chi_0 - \chi_\infty^-} \right| \quad (3.69)$$

où  $\chi_0$  est l'image de  $z_0$  dans l'espace  $\boxed{\chi}$ . Le système d'équations devient donc

$$\Omega_{arc}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^{-n} - \frac{Q_{arc}}{2\pi} \ln \left( \frac{\chi - \chi_\infty^+}{\chi - \chi_\infty^-} \right) \quad (3.70a)$$

$$Q_{arc} = -2\pi \frac{\Phi_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(z)^{-n}}{\ln \left| \frac{\chi_0 - \chi_\infty^+}{\chi_0 - \chi_\infty^-} \right|} \quad (3.70b)$$

Ce système permet de découpler l'expression du potentiel  $\Omega_{arc}(z)$  et celle du débit  $Q_{arc}$  généré par l'arc de cercle.

### 3.3.4 Estimation des coefficients $a_n$ pour une répartition de potentiel linéaire

#### 3.3.4.1 Représentation de la condition de potentiel par une série de Fourier

Par chacune de ces transformations, les images du segment et de l'arc de cercle deviennent le cercle unité dans l'espace  $\boxed{\chi}$ . Il est défini par  $\chi = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Nous choisissons de représenter la condition limite par une série de Fourier :

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \quad (3.71a)$$

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \sin(n\theta) + \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (3.71b)$$

pour chacun des élément géométrique considéré. Par construction, le potentiel  $\Phi$  doit respecter la condition de continuité  $\Phi(e^{i\theta}) = \Phi(e^{-i\theta})$ . Les coefficients correspondrons donc à une fonction paire.

### 3.3.4.2 Représentation de la distribution de potentiel linéaire

D'après la condition de continuité, l'équation 3.71a est la série de Fourier d'une fonction paire que nous appellerons  $f$ . Les coefficients  $a_n$  sont donc donnés par

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \quad (3.72)$$

où  $f(t)$  pour  $t \in [0, \pi[$  définit la répartition de potentiel le long de l'élément géométrique. Cela permet de représenter n'importe quelle répartition de densité suffisamment régulière. Dans le cas d'une répartition linéaire, la fonction  $2\pi$  périodique  $f$  est par exemple de la forme  $f(t) = |t|$  avec  $t \in ] - \pi, \pi[$ .

Les coefficients de Fourier, pour  $n \in \mathbb{N}$ , sont alors

$$\begin{cases} a_0 & = \pi \\ a_{2n} & = 0 \\ a_{2n+1} & = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2} \end{cases} \quad (3.73)$$

nous observons alors que l'ordre de convergence de la suite de terme général  $a_n$  est de l'ordre de  $1/(n^2)$ .

Une troncature du potentiel  $\Phi$  est donnée à l'ordre  $N$  par

$$\Phi^N(z) = \sum_{n=0}^N a_n \chi^{-n} \quad \text{avec} \quad \chi = z + \sqrt{z-1} \sqrt{z+1} \quad (3.74)$$

L'erreur effectuée par cette troncature est

$$E_N(\chi) = \left| \Phi(z) - \Phi^N(z) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \chi^{-n} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \sim \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (3.75)$$

en utilisant que  $\frac{1}{|\chi|} \leq 1$  à l'extérieur du cercle unité. Donc, le reste de cette série est de l'ordre de

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{N} \quad (3.76)$$

Cela donne une estimation du comportement de l'erreur en fonction du degré  $N$  de la troncature.

## 3.4 Étude numérique de 3 segments connectés

### 3.4.1 Position du problème

Cette étude va s'attacher à calculer la solution de 3 segments connectés avec une approche par éléments analytiques. Cette solution représente la discrétisation de l'arc de cercle, dont la solution analytique a déjà été exposée à la section 3.2. Par conséquent, l'erreur de discrétisation commise pourra être quantifiée en comparant ces solutions obtenues. En particulier, il s'agira d'estimer la position optimale des 3 segments pour représenter au mieux cet arc de cercle symbolisant le contour "exact" et d'en déduire une méthode de discrétisation efficace.

Les hypothèses du problème étudié sont représentées sur la figure 3.15. Un potentiel constant  $\Phi_{3l}$  y est imposé sur chacun des segments et de même que précédemment, un potentiel  $\Phi_0$  est imposé au point  $z_0$ .

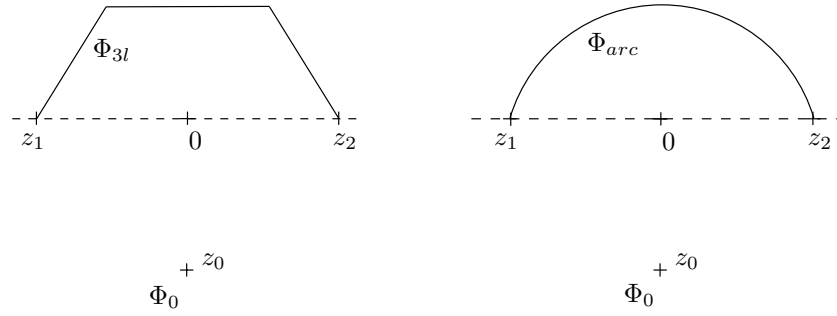


FIGURE 3.15 – Hypothèses du problème des 3 segments

### 3.4.2 Cadre de la résolution numérique par éléments analytiques

Une ligne source est constituée d'une répartition de sources d'intensité  $\sigma(\delta)$ . Son expression analytique est de la forme

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \sigma(\delta) \ln(z - \delta) d\delta \quad (3.77)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \mu(z_2) \ln(z - z_2) - \mu(z_1) \ln(z - z_1) + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu(\delta)}{z - \delta} d\delta \right] \quad (3.78)$$

$$\text{avec } \left. \frac{d\mu}{dz} \right|_{z \in [z_1, z_2]} = \sigma(z) \quad (3.79)$$

par une intégration par parties. Ainsi, nous obtenons l'expression du potentiel complexe  $\Omega(z)$  en fonction de la répartition de saut  $\mu(\delta)$ . Cette équation s'exprime en fonction des sources  $\mu(z_1)$  et  $\mu(z_2)$  à chacune des extrémités  $z_1$  et  $z_2$  et de l'intégrale de Cauchy qui



représente une ligne dipôle. Cette représentation permet de simplifier le calcul des éléments analytiques grâce à une écriture mathématique commune.

Le calcul de ces éléments se trouve à la base de la méthode des éléments analytiques initiée par STRACK [63]. Le principe de résolution de ces éléments analytiques est assez bien détaillé dans la thèse de JANKOVIĆ [38]. Par contre, il propose de les résoudre par une méthode itérative, alors que la méthode choisie ici est basée sur une résolution globale.

### 3.4.2.1 Définition du potentiel complexe

D'après le principe de superposition (chapitre 1), la solution du potentiel complexe des 3 segments peut s'exprimer en fonction de la somme des potentiels complexes  $\Omega_j$  induit par chacune des lignes sources  $\mathcal{L}_j$  d'indice  $j$  :

$$\Omega_{3l}(z) = \sum_{j=1}^3 \Omega_j(z) + C_0 \quad (3.80)$$

où  $C_0$  est la constante qui permet de satisfaire la condition de potentiel  $\Phi_0$  au point de référence  $z_0$ .

### 3.4.2.2 Définition du système de coordonnées local

Le potentiel complexe induit par chacun des éléments  $\mathcal{L}_j$  est exprimé dans son système de coordonnées locales par

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_1^j + z_2^j)}{\frac{1}{2}(z_1^j - z_2^j)} \quad (3.81)$$

où  $z_1^j$  et  $z_2^j$  sont les coordonnées globales dans l'espace  $\boxed{z}$  des extrémités du segment  $\mathcal{L}_j$ . Les images de ces deux extrémités sont respectivement les points  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$  du système de coordonnées locales.

### 3.4.3 Expression locale d'une ligne source

L'expression du potentiel complexe d'une ligne source (équation 3.78) s'exprime dans son système de coordonnées locales par

$$\Omega_j(Z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left( \mu(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + q(Z) \right)}_{(A)} \underbrace{- \frac{\mu(1)}{2\pi} \ln(Z-1) + \frac{\mu(-1)}{2\pi} \ln(Z+1)}_{(B)} \quad (3.82)$$

Cette expression montre qu'une ligne source est une ligne dipôle (A) à laquelle sont rajoutés

des termes sources aux extrémités ( $B$ ). Le flux généré par la ligne source est donc  $Q_j = \mu(-1) - \mu(1)$ . Le terme ( $A$ ) induit un saut de la partie imaginaire du potentiel  $\Omega_j(Z)$  le long du segment. Ce saut est représenté par la fonction de saut  $\mu(Z)$ .

Le polynôme  $q(Z)$  ne dépend que de la fonction de saut  $\mu(Z)$ . C'est un polynôme de correction qui permet que le comportement à l'infini de la ligne dipôle ( $A$ ) soit

$$\Omega_{(A)}(Z) \underset{|Z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{Z} \quad (3.83)$$

### 3.4.3.1 Représentation par les polynômes de Tchebychev

Soit  $X = \{Z : Z \in [-1; 1]\}$  l'ensemble des points définissant le segment en coordonnées locales. La fonction de saut  $\mu(Z)$  devient réelle et peut donc s'exprimer en fonction des polynômes de Tchebychev par

$$\mu(X) = \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} T_n(X) \quad (3.84)$$

Le terme ( $A$ ) de l'équation 3.82 s'exprime alors en fonction de  $X$  par

$$(A) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} T_n(X) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \sum_{n=0}^{N_j-1} b_{jn} T_n(X) \right] \quad (3.85)$$

où le polynôme de correction  $q(X)$  s'exprime sous une forme similaire à  $\mu(X)$ , mais avec les coefficients  $b_{jn}$ . Pour avoir le comportement souhaité à l'infini [63, 38], ces coefficients doivent s'exprimer en fonction des coefficients  $a_{jn}$  par

$$b_{jn} = B a_{jn} \quad (3.86)$$

où  $b_j$  et  $a_j$  sont des vecteurs de dimension  $(N_j)$  et  $(N_j + 1)$  contenant respectivement les coefficients  $b_{jn}$  et  $a_{jn}$ . La matrice  $B$  est une matrice de taille  $(N_j) \times (N_j + 1)$  dont la forme est donnée en fonction de l'indice de la colonne  $c$  et de celui de la ligne  $r$  par :

$$B(r, c) = \begin{cases} \frac{2}{c} & \text{pour } r = 0 \text{ et } c \text{ impaire} \\ \frac{4}{c-r} & \text{pour } 0 < r < c \text{ et } r+c \text{ est impaire} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.87)$$

Le terme ( $B$ ) de l'équation 3.82 s'exprime alors en fonction de  $X$  en utilisant la représen-

tation Tchebychev de la fonction saut (équation 3.84) par

$$(B) = \frac{1}{2\pi} \left[ - \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} T_n(1) \ln(X-1) + \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} T_n(-1) \ln(X+1) \right] \quad (3.88)$$

### 3.4.3.2 Représentation du champ lointain (far-field)

Pour des points éloignés, il devient nécessaire d'utiliser un développement asymptotique de l'expression logarithmique  $\ln\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)$ . Lors de ce développement, seuls les coefficients négatifs ne s'annulent pas en ajoutant le polynôme de correction. Par conséquent, le terme (A) du potentiel complexe  $\Omega_j(Z)$  peut se mettre sous la forme d'une série de Laurent avec uniquement des exposants négatifs par

$$(A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{NF_j} c_{jn} Z^{-n} \quad (3.89)$$

où  $NF_j$  est le nombre de terme de la série en  $Z^{-n}$ . Cette expression permet de réduire les erreurs numériques pour des valeurs de  $|Z|$  importantes et elle converge uniquement pour  $|Z| > 1$ . Le calcul de ses coefficients  $c_{jn}$  peut se faire en fonction des coefficients  $a_{jn}$  par la relation :

$$c_j = -CD a_j \quad (3.90)$$

où  $c_j$  et  $a_j$  sont des vecteurs de taille  $NF_j$  contenant respectivement les coefficients  $c_{jn}$  et  $a_{jn}$ .  $D$  est de dimension  $(N_j + 1) \times (N_j + 1)$  et représente la matrice de passage entre la représentation polynômiale et la représentation par les polynômes de Tchebychev. Elle est donnée par ABRAMOWITZ [1] et s'exprime par la relation

$$D(r, c) = \begin{cases} (-1)^{\frac{c}{2}} & \text{pour } r = 0 \text{ et } c \text{ pair} \\ \frac{4}{c-r} & \text{pour } r = 1 \text{ et } c = 1 \\ 2D(r-1, c-1) - D(r, c-2) & \text{pour } r > 0 \text{ et } c > 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.91)$$

$C$  est une matrice de dimension  $(NF_j) \times (N_j + 1)$  qui représente la relation dans la base des polynômes de Tchebychev entre les coefficients de la représentation au près de l'élément et ceux du champ lointain  $c_{jn}$ . Elle s'exprime par

$$C(r, c) = \begin{cases} \frac{2}{r+c+1} & \text{pour } r+c+1 \text{ impair} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.92)$$

La détermination de la distance à laquelle il faut utiliser l'expression pour le champ lointain est délicate. D'après JANKOVIĆ, pour  $N_j = 40$ , le champ lointain peut être défini pour  $|Z| > 1.02$  pour une correspondance de l'ordre de 7 chiffres significatifs. C'est dû à la récurrence de Clenshaw utilisée pour calculer les polynômes de Tchebychev. LE GRAND [40] a montré qu'il est possible de rendre cette transition plus efficace et comment il est possible d'augmenter le degré des polynômes de Tchebychev sans introduire des erreurs numériques significatives.

### 3.4.3.3 Formulation contractée du potentiel complexe

En regroupant les expressions 3.85 3.88 et 3.89, il est possible de contracter l'écriture du potentiel complexe  $\Omega_j(Z)$  pour la ligne source. Il peut s'exprimer avec les coefficients  $a_{jn}$  par un série dépendante d'une fonction  $G_j(n, Z)$  par

$$\Omega_j(Z) = \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} G_j(n, Z) \quad (3.93)$$

$G_j(n, Z)$  est la fonction qui synthétise les équations 3.85 et 3.88 pour le champ au près, ainsi que l'équation 3.89 pour l'expression du champ lointain de la partie (A). La jonction entre le champ au près et le champ lointain est définie par une ellipse.

## 3.4.4 Principe de résolution par la méthode des éléments analytiques

### 3.4.4.1 Prise en compte des conditions aux limites

Pour résoudre notre problème, nous devons satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\Phi(z) = \Phi_{3l} \quad \forall z \in \mathcal{L}_j \quad \text{pour } j = 1, 2, 3 \quad (3.94)$$

où  $\mathcal{L}_j$  est le segment géométrique de la ligne source d'indice  $j$ .

Rappelons (équation 3.80) que l'expression du potentiel  $\Omega$  en fonction des potentiels complexes élémentaires  $\Omega_j(Z)$  est donnée par

$$\Omega_{3l}(Z) = \sum_{j=1}^3 \Omega_j(Z) + C_0 \quad (3.95)$$

En prenant la partie réelle, nous obtenons

$$\Re[\Omega(z)] = \Phi_{3l} = \sum_{j=1}^3 \Re[\Omega_j(Z)] + C_0 \quad (3.96)$$

En prenant en compte l'équation 3.93, cette expression se met sous la forme d'une série en  $a_n$  par

$$\Re[\Omega(z)] = \Phi_{3l} = \sum_{j=1}^3 \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} \Re[G_j(n, Z)] + C_0 \quad (3.97)$$

#### 3.4.4.2 Définition des points de contrôles

Pour chacun des éléments  $\mathcal{L}_j$ , un ensemble de points de contrôles est défini localement pour  $\overset{m_j}{X} \in [-1, 1]$  par

$$\{\overset{m_j}{X} \in \mathcal{L}_j : m_j \in 1, \dots, M_j \text{ avec } M_j \in \mathbb{N}^*\} \quad (3.98)$$

$M_j$  est le nombre total de points de contrôles pour l'élément d'indice  $j$ . Pour la résolution, ces points sont choisis aux localisations des racines des polynômes de Tchebychev par

$$\overset{m_j}{X} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2(m_j - 1)}{M_j}\right) \text{ pour } m_j \in 1, \dots, M_j \quad (3.99)$$

Un tel ensemble de points de contrôles permet d'optimiser la qualité de l'interpolation au sens des moindres carrés avec une représentation adéquat des singularités localisées aux extrémités.

#### 3.4.4.3 Assemblage de la matrice d'influence et du second membre

Soit  $u_{jn}(Z) = \Re[G(n, Z_j)]$ , alors d'après l'équation 3.97, il suffit de résoudre les inconnues  $a_{jn}$  par la méthode des moindres carrés le système suivant :

$$\Phi_{3l} = \sum_{j=1}^3 \sum_{n=0}^{N_j} a_{jn} u_n(\overset{m_j}{X}) + C_0 \quad \forall \overset{m_j}{X} \quad (3.100)$$

En redéfinissant ce système en fonction des indices globaux  $m = \sum_{j=1}^3 M_j$  et  $K = \sum_{j=1}^3 N_j$  des points de contrôles  $\overset{m}{x}$ , le système s'écrit :

$$\sum_{k=1}^K a_k u_k(\overset{m}{x}) = \overset{cte}{\Phi} - C_0 \quad \forall \overset{m}{x} \quad (3.101)$$

Par conséquent, il faut résoudre par la méthode des moindres carrés une matrice  $[U]$  de dimensions  $M \times K$  et de terme général  $u_k(\overset{m}{x})$  dont les inconnues sont les  $K$  termes  $a_k$  par

$$[U][a_k] = [b] \quad (3.102)$$

où le second membre  $[b] = \Phi_{3l} - C_0$  est un vecteur de dimension  $K$  et la valeur de  $C_0$  est fixée par le point de référence  $z_0$ .

#### 3.4.4.4 Prise en compte de contraintes

Ils est souvent nécessaire d'imposer des contraintes lors de la résolution. Par exemple, il est possible de contraindre que la fonction de densité soit continue aux jonctions entre lignes sources, i.e.

$$\mu|_{z_2}^j = \mu|_{z_1}^k \quad \forall z_2^j, z_1^k \text{ vérifiant } z_1^k = z_2^j \quad (3.103)$$

Ces contraintes seront vérifiées exactement lors d'une résolution par moindres carrés. Ce principe sera plus précisément détaillé au chapitre 5 lors de la résolution d'un problème 1D en transitoire.

#### 3.4.5 Comparaison avec l'arc de cercle

Considérons les 3 lignes connectées définies en fonction de  $k_z = k_x + i k_y$  par :

$$\mathcal{L}_1 = [-1, -k_z] \quad (3.104)$$

$$\mathcal{L}_2 = [-k_z, k_z] \quad (3.105)$$

$$\mathcal{L}_3 = [k_z, 1] \quad (3.106)$$

Le potentiel imposé sur ces 3 segments est le même que celui imposé sur l'arc de cercle, i.e.  $\Phi_{arc} = \Phi_{3l} = 2$ . La contrainte  $\Phi_0 = 10$  est imposée au point  $z_0 = -i$ . Les figures 3.17 et 3.18 montrent les résultats obtenus pour ces paramètres et avec  $k_z = 0.5 + i$ .

##### 3.4.5.1 Étude spatiale au sens des moindres carrés

Nous étudions d'abord la position optimale des 3 segments connectés au sens des moindres carrés. La position spatiale optimale au sens des moindres carrés est  $k_x = 0.61$  et  $k_y = 0.93$  (figure 3.16).

Dans l'intervalle défini pour  $k_x$  et  $k_y$ , l'erreur au sens des moindres carrés est donnée par la figure 3.19.

La position optimale des segments avec  $k_z$  appartenant à l'arc de cercle serait

$$k_z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) i \quad \simeq 0.5 + 0.87 i \quad (3.107)$$

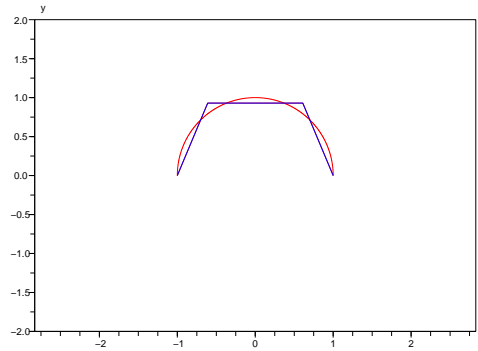


FIGURE 3.16 – Position spatiale optimale au sens des moindres carrés.

Pour comparer le potentiel complexe de l'arc de cercle avec celui des 3 lignes, nous allons estimer la position optimale minimisant l'erreur entre les 2 potentiels complexes. Pour cela nous faisons varier la valeur de  $k_z$ . Le résultat est représenté sur la figure 3.20.

La position minimisant la norme correspondante est donnée par le tableau 3.1. Ils sont établis à partir d'une grille de résolution 0.02.

	Erreur2	Erreur1	Erreurinf	Erreurmax
$k_x$	0.67	0.69	0.62	0.64
$k_y$	0.90	0.89	0.94	0.90

TABLE 3.1 – Localisation de l'erreur minimale selon plusieurs critères.

Pour cette analyse, la comparaison des solutions à été effectuée sur une grille de résolution 0.02. L'écart peut être en parti justifié par les erreurs numériques. Néanmoins, nous constatons que la norme infinie correspond exactement à la position obtenue au sens des moindres carrés. Cette position est tout à fait adaptée à notre problème, mais il faut faire attention au cas général. En effet, si la répartition de potentiel est par exemple linéaire, il faudrait utiliser le même principe en déterminant la position optimale au sens des moindres carrés pondérés par rapport au flux local. Cela semble approprier, mais cela demanderait bien sûr des analyses supplémentaires pour être justifier.

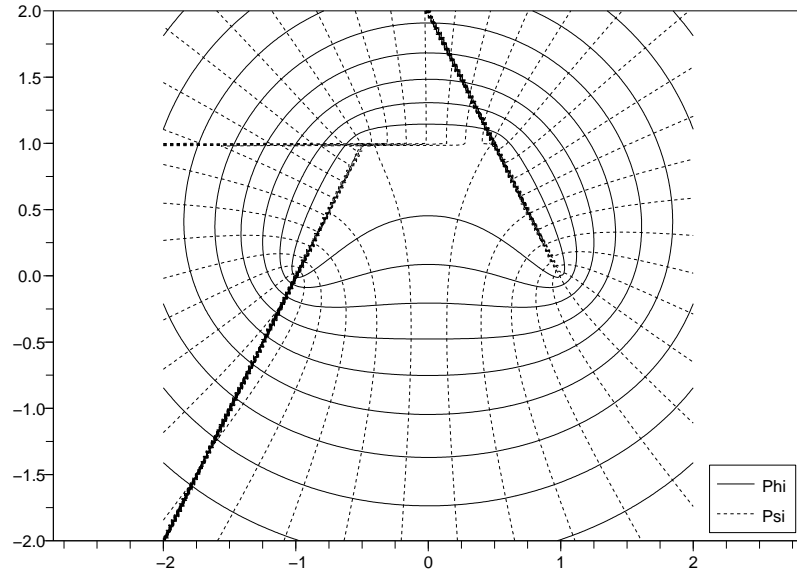


FIGURE 3.17 – Les 3 segments connectés en 2D.

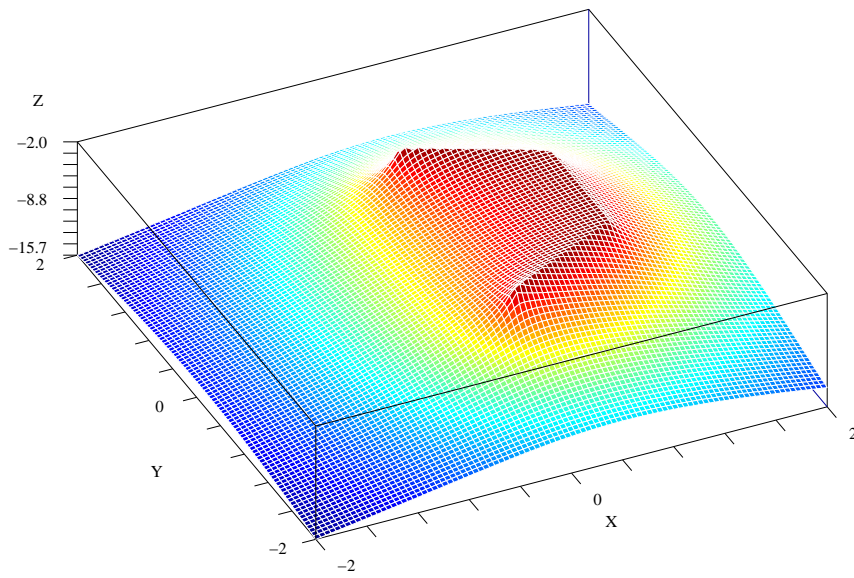
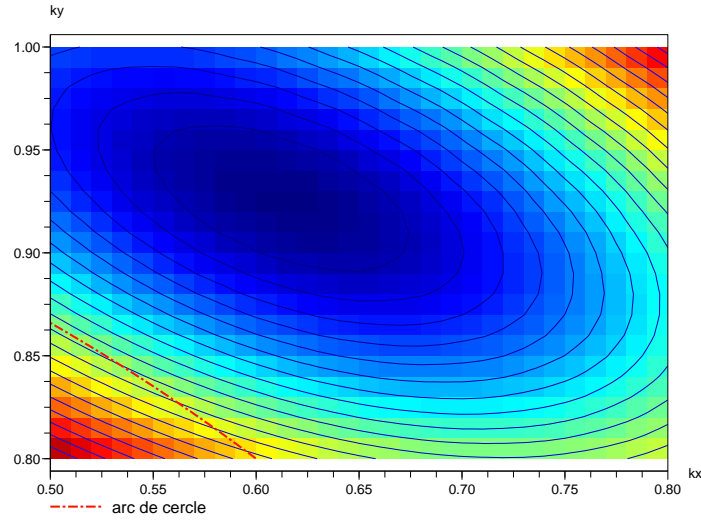


FIGURE 3.18 – Les 3 segments connectés en 3D.




 FIGURE 3.19 – Erreur au sens des moindres carrés en fonction de  $k_z$ .

### 3.4.5.2 Étude en terme d'Aire et de Périmètres

Soit  $\alpha = 2 * \arcsin\left(\frac{1}{R}\right)$ . Pour l'Arc de cercle, l'aire et le périmètre sont définis par

$$A_{arc} = \frac{\alpha}{2} R^2 - R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.108)$$

$$P_{arc} = \alpha R \quad (3.109)$$

Dans le cas d'un demi arc de cercle, nous avons  $A_{arc} = \frac{\pi}{2}$  et  $P_{arc} = \pi$ .

Pour les 3 segments connectés, l'aire est définie par

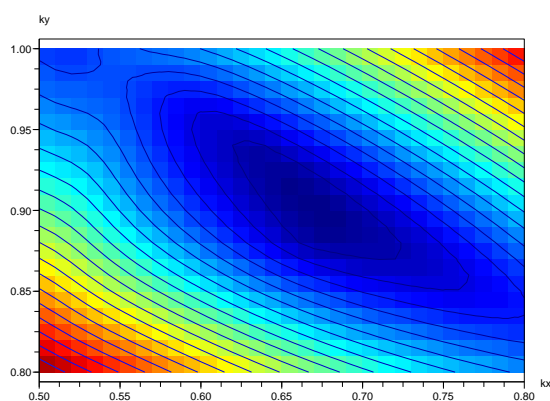
$$A_{3l} = (k_x + 1) k_y \quad (3.110)$$

$$P_{3l} = 2 \sqrt{k_y^2 + (1 - k_x)^2} + 2 k_x \quad (3.111)$$

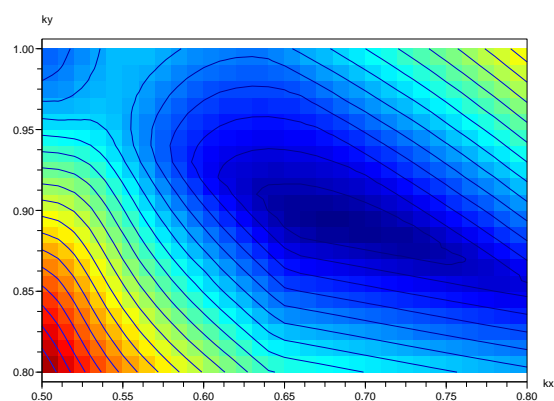
Nous allons chercher à évaluer l'écart des solutions optimales par rapport à ces critères. Le tableau 3.2 montre les résultats obtenus.

	Erreur2	Erreur1	Erreurlinf	Erreurmax
$ A_{arc} - A_{3l} $	0.068	0.067	0.048	0.095
$ P_{arc} - P_{3l} $	0.116	0.123	0.126	0.077

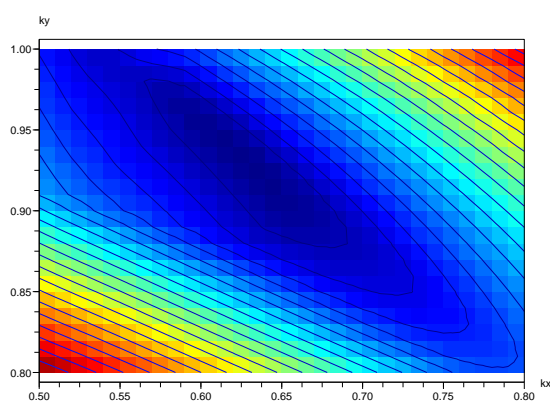
TABLE 3.2 – Écart par rapport aux critères géométriques de la forme optimale en fonction du critère d'erreur.



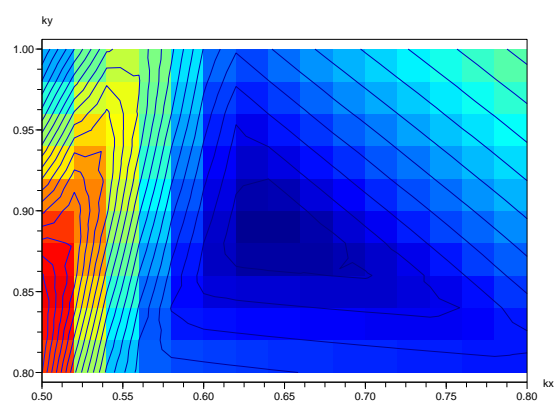
(a) Erreur en norme 2



(b) Erreur en norme 1



(c) Erreur en norme infinie



(d) Erreur maximale (résolution 0.02)

FIGURE 3.20 – Représentation de l'erreur suivant plusieurs critères

### 3.5 Conclusion

Les différents problèmes présentés dans ce chapitre ont permis d'analyser le comportement numérique de l'erreur de discrétisation. Dans le même temps, différentes techniques de résolution par éléments analytiques ont été exposées. Elles montrent en particulier à quel point cette méthode de résolution est vaste puisqu'il est possible de résoudre un même problème de différentes façons. Les transformations conformes ont été très employées à travers ces exemples théoriques. Une méthode de résolution a été exposée pour 3 lignes connectées de potentiel constant, combinant 3 éléments analytiques linéaires.

Il s'avère qu'une discrétisation optimale n'a généralement pas de sommets positionnés sur la courbe d'origine. C'est pourtant la méthode classiquement utilisée pour discrétiser la frontière géométrique. Le chapitre suivant va donc s'attacher à développer des méthodes de

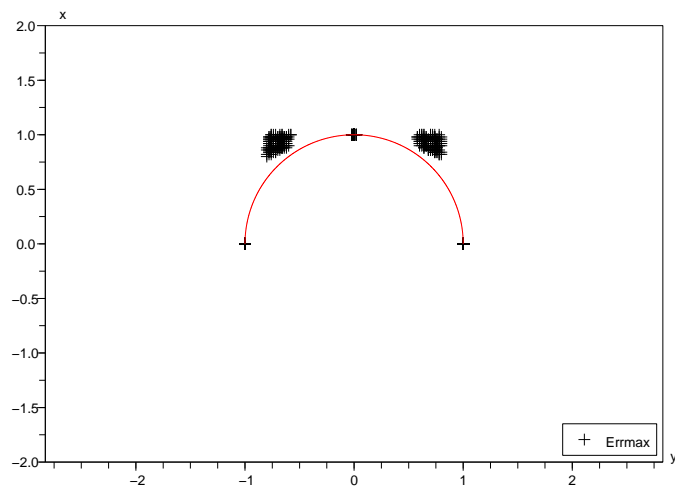


FIGURE 3.21 – Localisation de l'erreur maximale en fonction de  $k_z$ .

discrétisation plus adaptées à la méthode des éléments analytiques.

A partir de ces bases, il serait aussi intéressant d'étudier l'efficacité algorithmique de l'élément arc de cercle par rapport à la ligne pour faire ressortir des équivalences de coût algorithmique. Relier ce critère à la précision géométrique de la discrétisation permettrait d'augmenter encore l'efficacité de la discrétisation.

## Chapitre 4

# Nouvelles approches de discrétisation

LA CONCEPTUALISATION “continue” de l’aquifère à travers le SIG offre de nombreuses possibilités algorithmiques qui seraient adaptables pour constituer un algorithme de discrétisation. Bien sûr, son choix doit tenir compte de la spécificité et des besoins de la méthode des éléments analytiques. En particulier, la conceptualisation vectorielle des objets hydrogéologiques doit y être exploitée au mieux, tout en conservant leurs caractéristiques topologiques.

Des outils et méthodes de discrétisation sont étudiés dans ce chapitre. Ils s’intégreraient facilement dans une démarche cohérente et rigoureuse de modélisation telle qu’elle a été présentée au chapitre 2. L’exploitation de l’analyse mathématique du chapitre 3 a permis aussi de mettre en valeur une démarche de discrétisation et un certain nombre de critères d’analyse de cette discrétisation pour en déduire son influence sur la qualité du modèle.

L’objectif est d’aboutir à une procédure de discrétisation qui réduirait au mieux l’erreur induite par la discrétisation.

### 4.1 Méthodes de discrétisation adaptées aux AEM

#### 4.1.1 Classification des algorithmes de simplification

Selon l’approche suivie au chapitre 2, nous avons vu que la discrétisation peut être interprétée comme une simplification des caractéristiques physiques de l’aquifère. Cela se traduit avec le SIG par une dégradation de la représentation vectorielle des entités hydrogéologiques.

Avant d’utiliser un algorithme, une structure rigoureuse de l’information géoréférencée est nécessaire (figure 4.1). Cela implique bien souvent un “nettoyage” des couches d’informations géographiques pour en éliminer les structures dégénérées. Des nœuds doivent être définis uniquement aux points d’interpolations algébriques et aux points d’intersections de polygones. Chacune des polygones doit démarrer à un nœud pour finir à un autre nœud. Ces nœuds sont fixes et connectent les polygones entre elles. Les polygones sont définis par une polygone

fermée en formant un anneau.

Par conséquent, un algorithme de discrétisation géométrique pourra être utilisé efficacement sur toute la géométrie du domaine. Cet algorithme devra préserver la consistance topologique des différentes entités géométriques, en interdisant en particulier leurs regroupements et en évitant leurs superpositions.

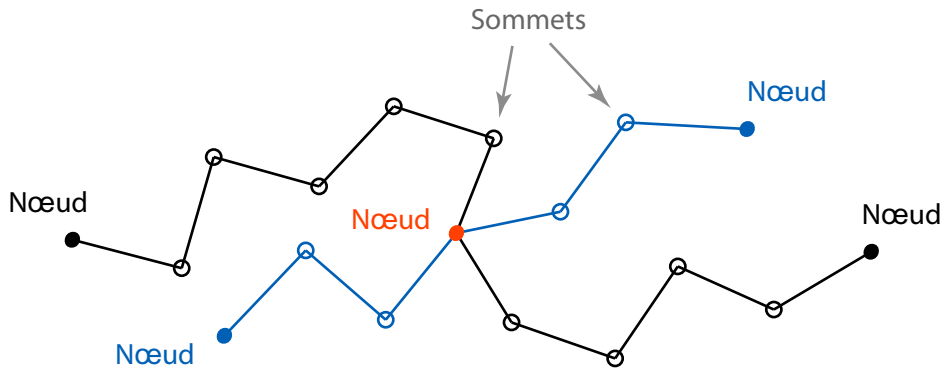


FIGURE 4.1 – Structure topologique “correcte” de la connexion entre les polygones.

De nombreux algorithmes de simplification existent en géométrie algorithmique. Ils peuvent servir d’inspiration pour le choix d’une méthode de discrétisation qui serait adaptée aux éléments analytiques. Ces algorithmes de simplification ont majoritairement été développés pour le domaine de la visualisation. Par conséquent, ils sont beaucoup plus adaptés aux modifications graduelles de la résolution graphique. Les deux techniques qui s’en distinguent sont principalement basées sur un traitement local de la réduction des sommets :

- L’une est basée sur un sous-échantillonnage des données. Elle consiste à sélectionner un sous-ensemble des sommets originaux de la polyligne.
- L’autre dont le principe est de fusionner les sommets initiaux en minimisant un certain critère d’erreur. Cela produit un effet de “lissage” de la polyligne et donc une meilleure qualité visuelle qui est très appréciée en informatique graphique [35, 34, 36].

En vue de leur utilité, les algorithmes qui permettent de généraliser une polyligne ont aussi été très étudiés pour la cartographie [44, 73]. L’intérêt y est la possibilité de ne retenir que l’information qui est pertinente pour produire une carte offrant un compromis entre précision, contenu et lisibilité de l’information.

Plus précisément, certains sommets estimés trop proches deviennent redondants et par conséquent inutiles pour une résolution souhaitée. Réduire ainsi le nombre de vertices<sup>1</sup> sur chacune des polygones induit une diminution du temps d’affichage, de la mémoire nécessaire au stockage des données et du temps de calcul des diverses opérations qui servent à manipuler

1. Vertices est le pluriel de vertex qui désigne soit un nœud soit un sommet.

cette information vectorisée. Cela permet aussi de faire correspondre des données à des échelles différentes.

Que ce soit pour l'informatique graphique ou pour la cartographie, les techniques qui permettent de simplifier une structure vectorielle sont essentiellement basées sur un traitement local. Il existe par exemple une adaptation de la méthode d'élimination de sommets de Visvalingam [70] qui élimine itérativement des sommets de la polygline selon un critère qui dépend de la courbure géométrique [71].

Leur principal défaut est que la résolution originelle des données y est nettement supérieure à celle qui serait requise pour une discrétisation. Leur utilisation pour générer un maillage induirait un temps de calcul qui serait disproportionné par rapport au besoin. De plus, les algorithmes qui déplacent localement les sommets initiaux souffrent d'un manque de contrôle sur l'erreur de maillage.

Les algorithmes qui traitent la polygline dans sa globalité sont principalement fondés sur l'algorithme de Douglas-Peucker. Il a été découvert simultanément par RAMER (1972) [50] et par DOUGLAS et PEUCKER (1973) [26]. C'est l'algorithme de généralisation le plus populaire dans le domaine du SIG car ses diverses améliorations ont permis de le rendre très efficace [37].

#### 4.1.2 L'algorithme de Douglas-Peucker

L'algorithme de Douglas-Peucker (DP) est illustré par la figure 4.2. Ses caractéristiques montrent qu'il est le plus approprié pour générer un maillage adapté à la méthode des éléments analytiques.

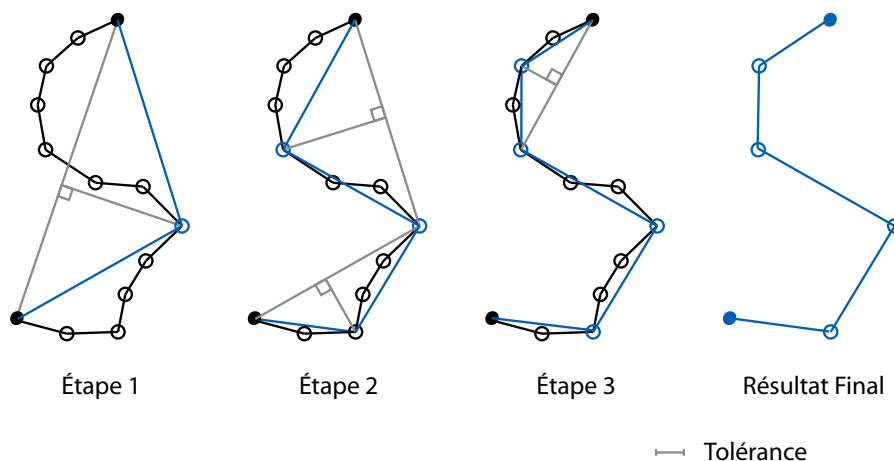


FIGURE 4.2 – Généralisation d'une polygline avec l'algorithme de Douglas-Peucker.

Son principe est de modifier individuellement chacune des polyglines selon une procédure

de sous-échantillonnage de sommets. Il est appliqué dans notre exemple à une polyligne  $U$  avec une tolérance  $L_{DP}$ . Son écriture algorithmique est donnée par :

```

Algorithme   SimplifieDP

Entrées :    $U = (u_0, \dots, u_n)$            // Définition de la polyligne
                $L_{DP} > 0$                        // Tolérance

if    $n \leq 2$  and  $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\text{dist}(u_i, u_0, u_n)\} > L_{DP}$  then
     $i_{\max} := \text{argmax}_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\text{dist}(u_i, u_0, u_n)\}$ 
     $U_1 := (u_0, \dots, u_{i_{\max}})$ 
     $U_2 := (u_{i_{\max}}, \dots, u_n)$ 
     $V_1 := \text{SimplifieDP}(U_1, L_{DP})$            // Simplifier récursivement  $U_1$ 
     $V_2 := \text{SimplifieDP}(U_2, L_{DP})$            // Simplifier récursivement  $U_2$ 
    return  $\text{concat}(V_1, V_2)$ 
else
    return  $(u_0, u_n)$ 
end
end
    
```

D'abord, les deux extrémités  $u_0$  et  $u_n$  de la polyligne sont connectées par un segment. Puis la distance entre le segment et chacun des sommets est calculée. Si au moins un de ces sommets se trouve au-delà de la distance de tolérance, celui qui est le plus éloigné est ajouté à la polyligne simplifiée et l'algorithme est récursivement appliqué à chacune des sous-polygones  $U_1$  et  $U_2$ . Sa complexité est de  $O(n \log m)$  en général et de  $O(nm)$  dans le pire cas,  $m$  étant le nombre de sommets de la polyligne simplifiée.

L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets de la polyligne initiale sont contenus à une distance qui est inférieure à la tolérance  $L_{DP}$ . Ce critère est cohérent puisqu'il représente l'écart maximal entre les deux polygones. Ainsi, il est possible de faire le lien avec la notion de résolution du maillage qui correspond au niveau de détail de la représentation spatiale. En effet, cette granularité peut s'interpréter aussi comme la distance minimale séparant deux objets. Par conséquent, l'algorithme DP présente l'avantage d'être fonction de la résolution souhaitée.

Cependant, la forme originale de cet algorithme montre l'inconvénient majeur de ne pouvoir empêcher l'apparition d'auto-intersections pour certaines formes complexes. Il ne prend pas en compte non plus son environnement topographique immédiat, ce qui produit parfois des chevauchements ou des superpositions avec d'autres entités géométriques. Il faut aussi faire attention aux polygones simplifiés qui sont réduites à un point (polygone de longueur nulle).

Par conséquent, de nombreux travaux ont successivement cherché à améliorer cet algorithme. Ils ont permis d'accélérer son exécution [37] et de proposer entre autres d'y ajouter des critères pour en préserver la consistance topologique [55].

L'approche de l'algorithme utilisé au chapitre 2 est plus simple. D'abord, les morceaux de polygones générés qui sont topologiquement erronés sont identifiés. Puis, l'algorithme DP est de nouveau appliqué aux polygones originales, mais avec une tolérance qui est réduite de 50 %. Ceci est effectué jusqu'à ne plus avoir d'erreur topologique. Le pire cas étant de ne pouvoir simplifier la polygone d'origine.

### 4.1.3 Méthodes de discrétisation alternatives

L'algorithme de Douglas-Peucker est une méthode de génération de maillage intégrée dans certain SIG<sup>2</sup>. Elle est très satisfaisante en première approche, mais elle n'a pas été développée spécifiquement pour cette tâche. Il est possible de développer des algorithmes alternatifs qui seraient plus adaptés aux particularités d'un maillage pour les éléments analytiques. Ils permettraient d'améliorer encore plus la qualité de la discrétisation qui est produite.

Pour développer ces algorithmes alternatifs, le choix a été fait de s'inspirer de l'algorithme DP. En effet, il a montré une grande efficacité pour de forts changements de résolution et son critère est pertinent pour faire la correspondance avec la notion de résolution du maillage.

De plus, l'analyse mathématique du chapitre 3 a montré que la simplification reste moins précise si ses sommets ne sont composés uniquement d'un sous-ensemble des sommets de la représentation "continue". En effet, la meilleure représentation de l'arc de cercle par 3 segments connectés n'a aucun sommet placé sur la courbe. Pour une répartition de charge constante (et de flux spécifique constant) sur un arc isolé, la meilleure approximation obtenue est celle équivalente à celle des moindres carrés.

Par conséquent, les deux nouvelles approches algorithmiques qui sont suggérées ici exploitent ces deux aspects en combinant l'algorithme DP et une approximation par moindres carrés (figure 4.3). Ils conservent la consistance topologique des données et sont suffisamment flexibles pour être adaptés selon les besoins de l'utilisateur. Le choix de ces méthodes de discrétisation a aussi été justifié par leur relative facilité d'utilisation avec un SIG.

Le premier algorithme (least square DP) commence, comme l'algorithme DP, par joindre les deux extrémités de la polygone par un segment. Puis, le sommet qui est le plus éloigné est sélectionné s'il se trouve au-delà de la distance de tolérance  $L_{DP}$ , sinon la simplification s'arrête là.

Ce sommet divise les sommets d'origine en 2 groupes (figure 4.3). Le premier groupe est

---

2. Cet algorithme a par exemple été implémenté dans ARCINFO de ESRI, 1996.



composé des sommets situés entre le premier  $u_0$  et le sommet le plus éloigné  $u_{i_{max}}$  exclu. Le deuxième groupe est composé des sommets situés entre le sommet le plus éloigné  $u_{i_{max}}$  (qui est aussi exclu) et le dernier  $u_n$ .

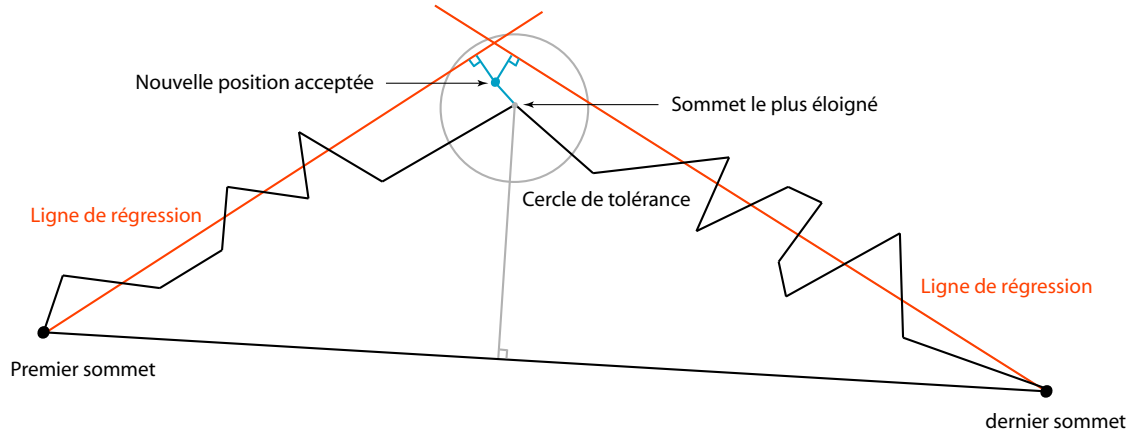


FIGURE 4.3 – Méthode de localisation des sommets avec l’algorithme de génération du maillage.

Une régression linéaire est calculée respectivement pour chacun de ces deux groupes, les extrémités  $u_0$  et  $u_n$  étant des contraintes fixées. Puis, la position potentielle  $x$  du nouveau sommet  $p$  est calculée en minimisant l’erreur quadratique pondérée de la fonctionnelle  $J(x)$ . Celle-ci est définie en fonction des distances à chacune de ces 2 régressions linéaires  $d_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  et de la distance  $d_v(x)$  au point  $u_{i_{max}}$ .

$$J(x) = \sum_{i=1,2} l_i d_i(x) + L_{DP} d_v(x) \quad (4.1)$$

où  $l_i$  est la longueur des sous polygones définies par chacun des 2 groupes et  $L_{DP}$  est la tolérance définie dans l’algorithme DP. Si la position  $x$  du nouveau sommet est estimée en dehors du cercle de rayon  $L_{DP}$ , l’algorithme prend le point  $u_{i_{max}}$  pour sommet de la polygone simplifiée.

Cette procédure est récursivement reproduite pour chacune des sous-polygones où le point  $u_{i_{max}}$  est substitué par le point nouvellement calculé. L’algorithme se poursuit jusqu’à ce que tous les sommets se trouvent à une distance qui est inférieure à la tolérance.

La deuxième version de l’algorithme (DP+least square correction) commence avec l’exécution de l’algorithme DP. Puis, la position des sommets  $y$  est ajustée de sorte à minimiser la fonctionnelle  $J(x)$ , de la même manière que pour l’algorithme précédent (figure 4.3). Par

conséquent, toutes les coordonnées des vertices initiaux doivent être gardées en mémoire. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut être utilisée après une simulation pour rectifier une partie de la géométrie de l'aquifère par exemple.

Ces méthodes algorithmiques ne sont pas dépendantes du type de courbes géométriques de la discrétisation (arc curviligne, courbes de Bézier, ...). En effet, l'interpolation par moindres carrés peut permettre d'approcher les sommets initiaux par une courbe curviligne (figure 4.4). Par contre, la méthode pour estimer l'écart entre les deux courbes devient non linéaire. Deux méthodes peuvent être utilisées pour estimer l'écart maximal entre les deux courbes.

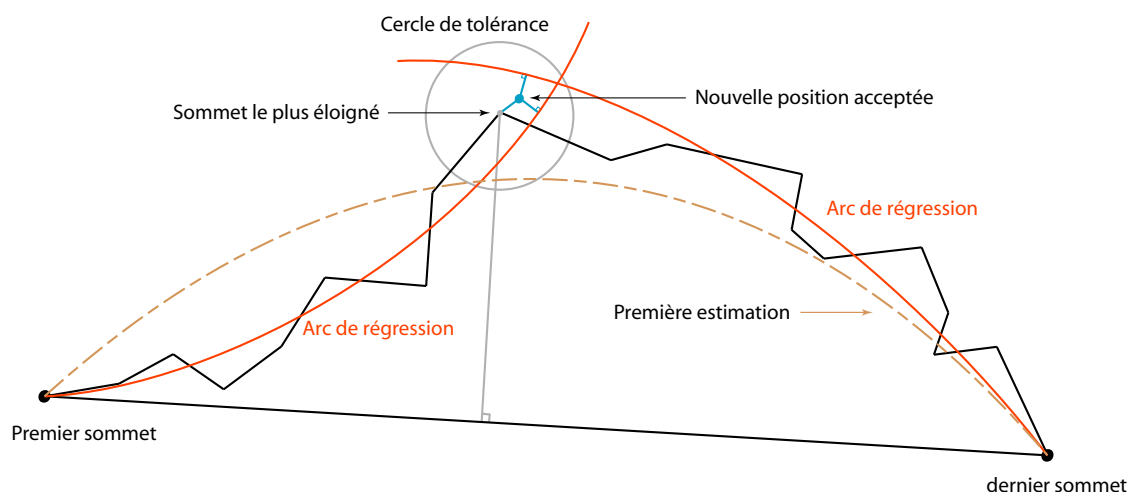


FIGURE 4.4 – Méthode de localisation des sommets avec l'algorithme de génération du maillage curviligne.

Toutes ces méthodes ont pour point commun d'utiliser le critère spatial  $L_{DP}$  qui correspond à la résolution de la discrétisation qui est souhaitée sur le domaine modélisé. Cette résolution peut être uniforme ou graduelle suivant l'objectif de la modélisation et de la résolution des données disponibles. Prenons par exemple le cas d'un problème multi-échelles où une zone précise intéresserait l'utilisateur. La résolution peut augmenter graduellement en fonction de la distance à cette zone. Elle peut aussi être fonction d'une loi dépendante de la propagation des erreurs de discrétisation dans les résultats de simulations, similairement aux lois qui ont été estimées au chapitre 3.

Enfin, ces différentes méthodes algorithmiques sont facilement intégrables dans une procédure automatique de génération de maillage, en y apportant une certaine objectivité dans la démarche de modélisation.

#### 4.1.4 Reconnaissance de formes elliptiques pour la discrétisation

Les solutions particulières développées pour l'ellipse sont très utilisées dans la méthode des éléments analytiques. Elles succèdent naturellement à celles obtenues pour le point, le segment, l'arc de cercle et le cercle. Ces solutions se calculent efficacement tout en réduisant de manière significative le temps de calcul qui est nécessaire pour le calcul de la solution obtenue sur un polygone de forme similaire. Extraire ces formes géométriques simples de l'ensemble des données géoréférencées permet d'exploiter au mieux les possibilités offertes par les éléments analytiques. La simulation y devient plus efficace et plus rapide.

La détection de cette primitive géométrique est un problème qui a été très étudié du fait de ses possibles applications dans de nombreuses disciplines. La méthode qui semble la plus pertinente pour notre problématique est la reconnaissance d'une ellipse d'après un ensemble de points. En effet, la résolution de la discrétisation est normalement nettement moins précise que celle des données. Résoudre le problème pour une polygone serait inadapté car la complexité algorithmique y serait trop importante.

Beaucoup de méthodes ont été proposées pour détecter ces formes elliptiques. Pour détecter des formes simples dans les images, les algorithmes de "votes" comme la transformée de Hough [28, 41] sont très populaires. Elles sont robustes et peuvent détecter plusieurs primitives en même temps, mais elles sont généralement assez lentes et requièrent une mémoire importante. De toutes façons, elles ne sont pas vraiment adaptées à la structure topologique des données d'un SIG.

L'autre famille est formée des méthodes d'optimisation qui cherche à minimiser une fonction d'objectivité (méthode des moindres carrés). Cette fonctionnelle caractérise la correspondance entre la forme elliptique estimée et l'ensemble des points donnés. Ces méthodes assez rapides ne peuvent faire correspondre qu'une seule forme à la fois, ce qui n'est pas gênant pour notre problématique.

Les algorithmes qui en découlent sont typiquement basés sur la correspondance à une forme conique générale [7, 33]. Des contraintes y sont ajoutées afin d'avoir une solution de la forme d'une ellipse. Dans le cas de données incomplètes ou non uniformes, des améliorations des méthodes précédentes ont été proposées selon une approche directe par moindres carrées [31, 32].

Ces divers travaux ont permis de rendre efficaces les algorithmes permettant de faire correspondre une ellipse avec un ensemble de points. Comme les données SIG sont assez régulières, les méthodes d'optimisation classiques basées sur une forme conique générale sont suffisamment efficaces pour apporter une solution adaptée à notre problématique.

La structure topologique des données est d'abord considérée "correcte". Chaque polygone doit être formé d'une polygone fermée où les vertices sont espacés d'une distance inférieure à

$L_{DP}$ . La démarche adoptée est d'appliquer l'algorithme d'optimisation de forme aux vertices de la polyligne pour en obtenir une ellipse (figure 4.5).

Cela peut se faire automatiquement sur toutes les formes polygonales. Il serait néanmoins plus approprié que l'utilisateur fasse une présélection de ces formes polygonales.

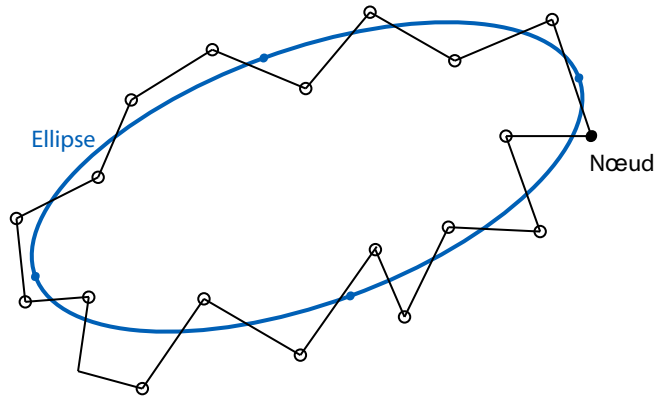


FIGURE 4.5 – Schématisation d'une ellipse obtenue par une optimisation de forme utilisant les vertices d'une polyligne fermée.

Ensuite, plusieurs critères peuvent servir de contrainte à l'algorithme d'optimisation de forme pour permettre de vérifier un certain niveau de correspondance entre l'ellipse estimée et sa polyligne. Ces critères peuvent aussi permettre de valider ou non la correspondance entre une estimation d'ellipse générée et sa forme polygonale d'origine :

- le critère de l'écart entre les centres de gravité,
- le critère de la correspondance des aires avec un écart inférieur à  $\pi L_{DP}^2$ .

Ensuite, il s'agit d'estimer la correspondance entre les deux formes par une estimation de l'écart maximal entre celles-ci. C'est une estimation en norme infinie de l'écart entre les deux courbes géométriques.

L'estimation ne peut être appliquée directement sur l'ellipse. Les intersections entre l'ellipse et la polyligne d'origine doivent être préalablement calculées ou alors cela doit être fait durant l'algorithme. Ensuite, pour Hausdorff, des points espacés d'une distance inférieure à  $L_{DP}$  sont définis le long de l'ellipse. Pour cela, les 4 extrémités de l'ellipse sont pris en compte puis les points sont répartis uniformément selon un intervalle inférieur à  $L_{DP}$ .

Ensuite, nous calculons la distance de chacun des sommets à la courbe elliptique. Si un des sommets se trouve au-delà de la distance de tolérance  $L_{DP}$ , la forme elliptique est considérée invalide. Sinon, nous définissons par  $u_{max}$  le point le plus éloigné de l'ellipse. Sa distance caractérise le niveau de correspondance entre le polygone et l'ellipse. Une approximation elliptique

acceptable aura une correspondance au polygone inférieure à  $L_{DP}$ .

L'estimation de la distance d'un point à une ellipse est un algorithme non linéaire. D'autres méthodes plus performantes comme la distance de Hausdorff (présentée à la section 4.2.2) peuvent être utilisées pour estimer la norme infinie entre les 2 formes géométriques. Elle s'applique sur chacune des sections définies entre 2 intersections entre l'ellipse et la polygone fermée.

#### 4.1.5 Préservation des propriétés physiques

Dans le processus de discrétisation suivi au chapitre 2, nous avons pu mettre en évidence les notions d'approximations algébrique et géométrique :

- L'*approximation géométrique* est la simplification de la représentation spatiale de l'information. Pour les AEM, cela consiste à simplifier la représentation vectorielle du modèle "continu". Pour les FDM, c'est la traduction de cette représentation vectorielle en une grille.
- L'*approximation algébrique* consiste à dégrader les valeurs imposées sur cette forme géométrique. Cela permet de conserver une certaine analogie avec les propriétés physiques des entités de l'aquifère.

Ces deux types d'approximation sont étroitement liés puisqu'une modification de la géométrie implique une erreur sur les données algébriques attachées et réciproquement.

Chacune des formes géométriques possède des attributs algébriques qui se rapportent aux caractéristiques physiques de l'élément hydrogéologique. Pour rectifier l'erreur qui est induite par la modification de la géométrie, il faut modifier la valeur des caractéristiques physiques attribuées aux entités hydrogéologiques. Ainsi, on conserve la correspondance physique par rapport à la condition physique "continue".

L'expression de la condition de "rivière" (déjà été exposé au chapitre 2) exprime le flux  $q_{riv}^{maille}$  en fonction de la résistance  $r$  par

$$q_{riv} = \frac{\phi_n - \phi_r}{r} \quad \text{avec} \quad r = \frac{E}{k_z} \quad (4.2)$$

et pour une condition de "rivière linéique" par

$$Q_{riv} = \frac{\phi_n - \phi_r}{R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{E}{k_z W} \quad (4.3)$$

Ces équations sont fonction du niveau d'eau du fleuve  $\phi_r$ , de la charge piézométrique de la nappe  $\phi_n$  avec  $E$  l'épaisseur du lit,  $k_z$  la perméabilité locale et  $W$  la largeur de la rivière.

La correction de l'attribut physique est donnée en fonction de la longueur  $\tilde{L}$  ou de l'aire  $\tilde{A}$  de la simplification par

$$\tilde{k}_c = \frac{k_c A}{\tilde{A}} \quad (4.4)$$

ou pour une condition de “rivière linéique” :

$$\tilde{k}_c = \frac{k_c L}{\tilde{L}} \quad (4.5)$$

Pour les cas d'une condition de flux sur une polygone ou de recharge sur un polygone, la correction se fait par

$$\tilde{q} = \frac{q L}{\tilde{L}} \quad (4.6)$$

et pour une recharge par

$$\tilde{q} = \frac{q A}{\tilde{A}} \quad (4.7)$$

où  $\tilde{A} [L^2]$  est l'aire de la simplification de forme polygonale ou elliptique.

## 4.2 Estimation de l'erreur de discrétisation

### 4.2.1 Notion d'éléments actifs et passifs

Les éléments analytiques peuvent être classifiés en fonction de leur influence sur l'écoulement. Les éléments “actifs” sont nommés ainsi car ils génèrent un flux par nature. Ces éléments représentent les conditions limites de type Dirichlet ou Neumann. La condition imposée sur l'objet peut changer, mais ils sont toujours construits à partir de l'élément analytique “linesink” (ligne source) qui est l'élément mathématique à l'origine du flux.

Du fait qu'ils créent un écoulement dans l'aquifère, leur influence s'étend théoriquement jusqu'à l'infini. Une erreur de discrétisation implique une propagation de l'erreur de simulation sur tout le domaine.

Les éléments dit “passifs” ne font que réagir aux autres éléments. Ils se construisent à partir d'une “linedoublet” (ligne doublet) et ne produisent donc pas d'écoulement. Ils sont calculés en fonction de l'influence des autres éléments. Ils affectent localement l'écoulement, par conséquent ils introduisent une erreur de modélisation spatialement borné.

### 4.2.2 Mesures spatiales de la discrétisation

La méthode la plus naturelle pour estimer l'erreur de discrétisation est de comparer l'écart géométrique entre les formes originelles et leurs approximations. Plusieurs méthodes de mesures spatiales sont possibles pour évaluer la qualité du maillage.

La distance de Hausdorff  $d_H$  permet d'estimer cette erreur spatiale selon une approximation discrète de la norme infinie. Elle s'exprime en fonction de l'ensemble des vertices  $U$  de la polygone originelle et de ceux de la forme simplifiée  $V$  par :

$$d_H(U, V) = \max(h(U, V), h(V, U)) \tag{4.8}$$

avec

$$h(U, V) = \max_{u \in U} \min_{v \in V} \|u - v\| \tag{4.9}$$

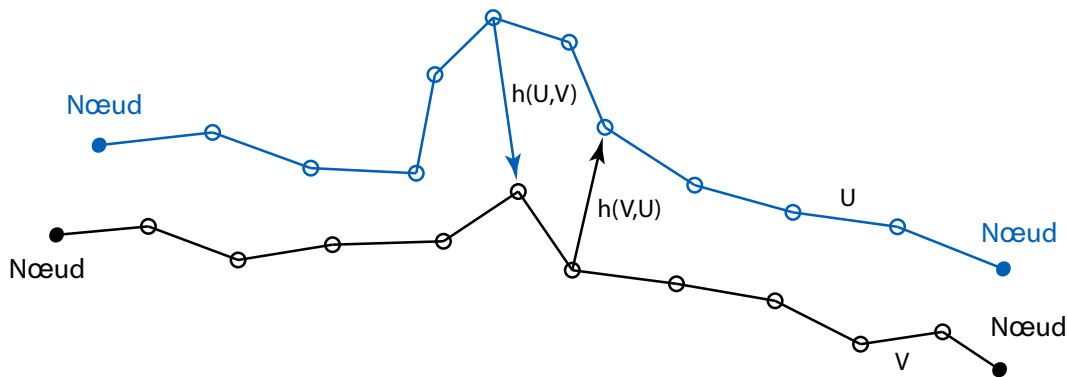


FIGURE 4.6 – Représentation de la distance de Hausdorff.

Plus l'échantillonnage des courbes est fin, plus cette distance se rapproche de la norme infinie  $\mathcal{L}_\infty$ , mais alors cette méthode peut devenir coûteuse. Pour affiner la précision de cette erreur, la méthode alternative revient à estimer la distance d'un point à la courbe en minimisant la distance entre ce point et sa projection sur la courbe. La distance  $D$  est alors calculée par :

$$D(U, V) = \max_{u \in U} \{\text{dist}(u, V)\} \tag{4.10}$$

où  $\text{dist}(u, V)$  est la distance entre le point  $u$  et la forme géométrique  $V$ . Elle se caractérise par la distance minimale entre le point  $u$  et une projection sur  $V$ .

Il peut être aussi très utile de comparer les formes géométriques par des critères spatiaux faciles à estimer :

- L'aire entre le maillage obtenu et le contour original,
- La différence de périmètre entre la courbe du maillage et l'originale.

À travers cette estimation de la qualité du maillage, le maillage peut être localement ajusté, voir raffiné.

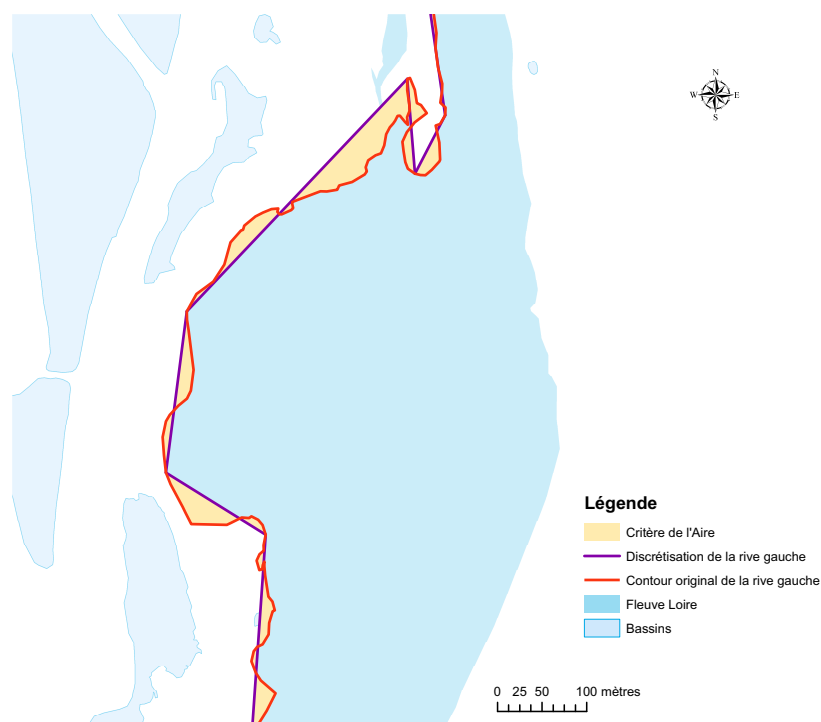


FIGURE 4.7 – Mesures spatiales de la discrétisation.

Avec la même idée, la discrétisation algébrique peut être évaluée en utilisant la norme quadratique entre les valeurs d'origines et les nouvelles. Puisque les représentations algébrique et géométrique sont fortement liées entre elles, ces critères doivent être interprétés avec précaution.

Ces mesures de la discrétisation restent spatiales. Elles permettent de bien évaluer l'erreur sur les éléments passifs puisque leur erreur est essentiellement due à la représentation spatiale de ces éléments (ils ont un débit nul). Par contre, l'erreur induite par les éléments actifs est aussi due au flux généré. C'est pourquoi, nous avons développé des estimateurs plus adaptés à ce type d'élément.



### 4.2.3 Estimateur local a posteriori

Nous avons établi un critère local permettant d'estimer l'erreur de discrétisation en fonction du résultat de simulation. Il sert pour les entités hydrogéologiques du type "actif" comme par exemple la condition "rivière".

Cet estimateur physico-géométrique combine les caractéristiques physiques et géométriques de l'élément par

$$Ed_{loc} = \frac{Q}{T_{max}} \frac{A}{L_{DP} L} \quad (4.11)$$

C'est un critère sans dimension qui dépend du débit total  $Q$  généré par l'élément, de sa longueur  $L$ , de l'aire  $A$  située entre la polygone originelle et sa simplification, de la résolution  $L_{DP}$  issue du processus de discrétisation et de la transmissivité maximale de l'aquifère donnée par  $T_{max} = (k\phi)_{max}$ . La figure 4.8 montre une schématisation des différents paramètres du critère.

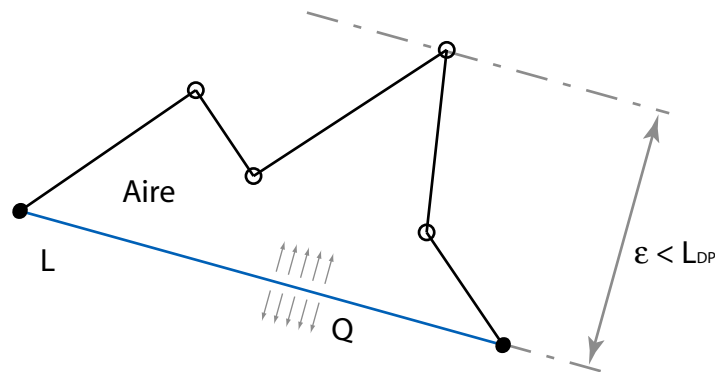


FIGURE 4.8 – Schématisation de l'estimateur local.

La première partie du critère peut être interprétée au signe près comme une estimation moyenne du gradient de la charge, puisque la loi de Darcy nous donne localement la relation :

$$\frac{Q}{T_{max} L} = \frac{q_{moy}}{T_{max}} = -\nabla\phi_{moy} \quad (4.12)$$

avec  $q_{moy}$  et  $\phi_{moy}$  des valeurs moyennées sur la ligne.

La deuxième partie du critère est formée de paramètres spatiaux et représente un dimensionnement de l'élément en fonction d'une résolution définie par  $L_{DP}$ .

#### 4.2.4 Estimateur global a posteriori

Nous souhaiterions maintenant estimer cette erreur de discrétisation à une échelle plus globale. Pour cela, nous établissons un critère non dimensionnel d'une façon similaire au précédent sur une partie du maillage par :

$$Ed = \frac{\sum_i Q_i}{T_{max}} \frac{\sum_i sgn_i A_i}{L_{DP} (\sum_i L_i)} \quad (4.13)$$

où  $.i$  représente l'élément  $i$  avec son débit total  $Q_i$ , son aire  $A_i$  et sa longueur  $L_i$ . Le  $sgn_i$  représente le signe orientée de l'aire par rapport à la géométrie d'origine.

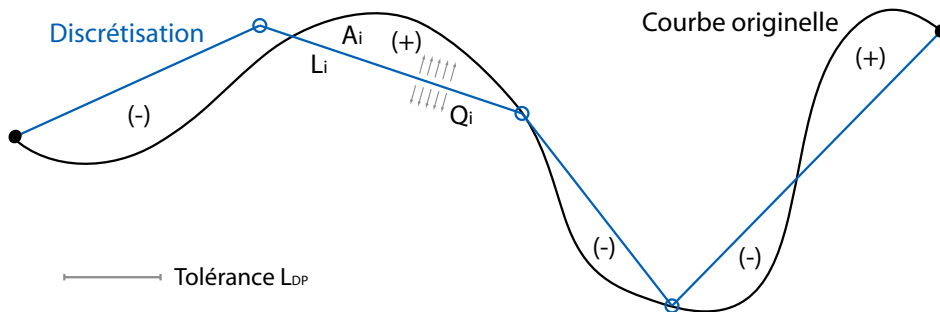


FIGURE 4.9 – Schématisation de l'estimateur global.

Le critère  $Ed$  est l'erreur cumulée d'une partie du maillage. Cela peut être vu comme une représentation de l'erreur de maillage à une échelle définie par le diamètre de l'enveloppe convexe intégrant cette partie du maillage. Cet estimateur permet d'estimer l'influence qu'aura l'erreur de discrétisation d'une partie de maillage sur l'ensemble de la modélisation.

Utiliser ces estimateurs d'erreur en complément de la mesure spatiale de la discrétisation permet d'avoir une idée assez complète de l'erreur de discrétisation.

Avant tout, il serait intéressant de tester la robustesse de ces estimateurs sur un cas d'étude théorique comme ceux présentés aux chapitre 3. Par exemple, la robustesse de l'estimateur local pourrait être vérifié sur le 1<sup>er</sup> cas théorique (cas avec un potentiel imposé constant). Cela consisterait à étudier la sensibilité de ce critère par rapport aux différents paramètres  $\Phi_0$ ,  $z_0$  et  $\beta$ .

### 4.3 Vers un outil d'aide à la discrétisation

Ce travail a montré des extensions possibles de l'algorithme de Douglas-Peucker pour réduire au maximum les erreurs qui sont induites par la discrétisation. Elles combinent cet algorithme de Douglas-Peucker et une approximation par moindre carré. Leurs avantages sont leur intégration facile dans un SIG aussi bien que la possibilité d'utiliser une discrétisation avec des éléments de formes géométriques plus sophistiquées comme les éléments curvilignes. Cette démarche de discrétisation peut intégrer des éléments analytiques dont la géométrie est une ellipse pour offrir un panel de possibilités très variées. Il serait alors intéressant de pouvoir estimer la meilleure géométrie du point de vue algorithmique.

Avec ces algorithmes, de nombreux outils permettent d'évaluer l'erreur de discrétisation, ainsi que les erreurs de simulation induites. Par conséquent, l'utilisateur peut évaluer la qualité globale de son modèle avant et après la simulation. Il peut choisir d'ajuster ou de raffiner le maillage avant ou après la simulation pour satisfaire au mieux son objectif de modélisation.

L'intérêt que présenterait un processus semi-automatique de discrétisation adapté à une structure objet et vectorielle dans le SIG découle de cette partie du travail. Ces différents algorithmes pourraient s'intégrer dans un outil d'aide à la discrétisation qui permettrait à l'utilisateur d'avoir à sa disposition plusieurs outils pour l'assister dans ses tâches de modélisation, en contribuant ainsi à une grande rigueur dans sa démarche de modélisation.

## Chapitre 5

# Nouveaux éléments analytiques 1D en régime transitoire

LA MÉTHODE des éléments analytiques pour le régime permanent a été présentée lors des précédents chapitres. Tout en conservant la représentation objet des éléments analytiques, de nouveaux éléments ont aussi été mathématiquement développés pour résoudre une variété de problèmes plus importante STRACK [66, 65]. Chacun de ces éléments analytiques permet de représenter un comportement physique comme le “leakage”. Cela représente les différents échanges verticaux qui peuvent intervenir entre 2 aquifères séparés par un aquitard, mais aussi lors de la représentation d’un écoulement souterrain en régime transitoire.

Pour le régime transitoire, il s’agit de résoudre l’équation fondamentale en régime transitoire tout en conservant une décomposition de la solution en éléments analytiques. Nous avons choisi de résoudre le problème d’une variation brusque du niveau d’eau d’une rivière s’écoulant dans un milieu aquifère. Par une discrétisation finie du temps, la solution de ce problème pourrait aisément représenter les variations temporelles du niveau d’eau d’une rivière.

Nous avons choisi de résoudre d’abord ce problème en 1D pour limiter les erreurs dues au calcul des éléments analytiques eux-même et se focaliser sur le comportement numérique de la résolution.

### 5.1 Problème physique

Nous considérons la simulation d’une variation brusque de potentiel de charge sur une coupe verticale d’un aquifère centrée sur une rivière positionnée en  $x = 0$  (figure 5.1). L’aquifère est libre, de milieu considéré homogène et isotrope, de perméabilité  $k$  [ $L/T$ ] et de coefficient d’emménagement  $S_p$  [.]. La base de l’aquifère est horizontale et considérée comme imperméable. Le niveau initial de la nappe est considéré constant et d’élévation de référence  $\Phi = 0$ .

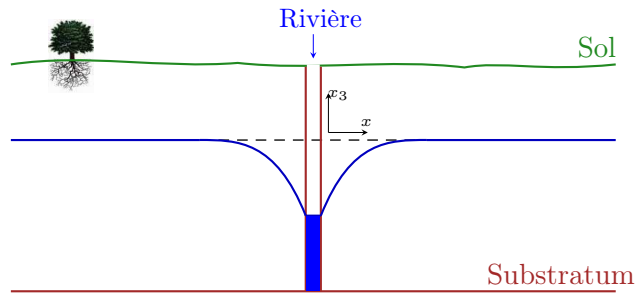


FIGURE 5.1 – Variation brusque de potentiel

La rivière subit une variation brusque du niveau d'eau à  $t = 0$ . Le saut effectué est de  $\Phi_1 - \Phi_{init}$ .

Les conditions du problème physique sont alors :

$$\Phi(x, 0) = \Phi_{init} \quad \text{pour } x \neq 0 \quad (5.1)$$

$$\Phi(0, t) = \Phi_1 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (5.2)$$

## 5.2 Formulation générale

Rappelons l'expression du potentiel complexe  $\Phi [L^3/T]$  :

$$\Phi = k h \bar{\phi} - \frac{1}{2} k h^2 \quad \text{avec} \quad \bar{\phi} = \frac{1}{h} \int_0^h \phi dx_3 \quad (5.3)$$

où  $x_3$  est l'axe de coordonnée verticale et  $h [L]$  la hauteur d'eau dans la nappe phréatique. Notons que dans un aquifère libre, nous pouvons choisir la charge piézométrique  $\phi$  telle que  $\phi = h$ .

L'approximation de Dupuit selon laquelle la charge piézométrique est constante sur la verticale permet de déduire la propriété suivante :

$$\bar{\phi} = \phi = h \quad (5.4)$$

Le potentiel complexe peut ainsi s'écrire :

$$\Phi = \frac{1}{2} k h^2 \quad (5.5)$$

De plus, l'équation fondamentale d'un écoulement en régime transitoire, obtenue par le principe de conservation de la masse, peut être formulée en terme de potentiel (Strack [63], eq. 16.15) :

$$\nabla^2 \Phi = S_p \frac{\partial h}{\partial t} - N \quad (5.6)$$

où  $S_p$  [.] est le coefficient d'emmagasinement et  $N$  [ $L/T$ ] l'infiltration verticale uniforme.

D'après l'hypothèse de Dupuit (équation 5.4), le potentiel complexe  $\Phi$  peut se développer par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = k h \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.7)$$

Nous en déduisons une formulation de l'équation fondamentale pour un écoulement en régime transitoire par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{S_p}{k h} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - N \quad (5.8)$$

Pour l'étude,  $h(x, t)$  est considéré de variation faible en temps et en espace. Ainsi, cette équation est simplifiée en considérant la moyenne spatiale et temporelle de la hauteur d'eau sur tout l'aquifère  $h_{moy}$  :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k h_{moy}}{S_p} \quad (5.9)$$

où  $\alpha$  [ $L^2/T$ ] est le coefficient de diffusivité. Notons qu'il est possible de prendre en compte une diffusivité non constante, mais les solutions exactes de cette équation ne sont plus exploitables. De plus, pour l'étude proposée ici, cela complique inutilement la forme des solutions obtenues.

L'erreur résultante de cette approximation est donnée par :

$$\Delta \alpha = \frac{k (h - h_{moy})}{S_p} \quad (5.10)$$

Pour donner un ordre d'idée physique, des valeurs proches de celle d'un aquifère alluvial peu épais (l'Écozone du Forez par exemple) sont prises en compte. Soit une perméabilité moyenne  $k \approx 10^{-3} m/s$  avec sa valeur maximum  $k_{max} = 5 \cdot 10^{-3} m/s$ , une hauteur d'eau moyenne  $h_{moy} \approx 5 m$  avec  $|h - h_{moy}| < 1 m$ , et un coefficient d'emmagasinement encadré par  $0.2 \leq S_p \leq 0.3$ ; une estimation de l'erreur  $\Delta \alpha$  est :

$$|\Delta \alpha| = \left| \frac{k (h - h_{moy})}{S_p} \right| < 0.05 m^2/s \quad (5.11)$$

Et l'erreur relative peut être estimée par :

$$\frac{|\Delta \alpha|}{\alpha} = \frac{|\Delta h|}{h} \approx \frac{1}{5} = 0.2 \quad (5.12)$$

### 5.3 Solution exacte

La solution exacte de ce problème, donnée par CARSLAW et JAEGER [9] est :

$$\Phi(x, t) = \Phi_{init} + (\Phi_1 - \Phi_{init}) \operatorname{erfc} \left( x \sqrt{\frac{1}{4\alpha t}} \right) \quad (5.13)$$

avec

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u) \quad \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv \quad (5.14)$$

La fonction  $\operatorname{erfc}(u)$  tend vers 0 lorsque  $u$  tend vers l'infini. Nous pouvons donc définir  $u_{max}$  fonction d'une précision numérique  $\epsilon$  et de la variation de charge  $\Phi_1 - \Phi_{init}$  tel que

$$\frac{\operatorname{erfc}(u_{max})}{\Phi_1 - \Phi_{init}} \leq \epsilon \quad (5.15)$$

Ainsi, pour  $u > u_{max}$ , le potentiel  $\Phi = \Phi_{init} + \epsilon$  peut être assimilé à  $\Phi_{init}$ . Cela nous permet d'en déduire la distance d'influence  $d$  du potentiel  $\Phi$  atteinte lorsque  $u = u_{max}$  :

$$d = \sqrt{4\alpha t} u_{max} \quad (5.16)$$

Maintenant, calculons analytiquement la solution exacte de  $\gamma(x)$  qui représente le Laplacien de  $\Phi(x)$ . La dérivée première de  $\operatorname{erfc}(u)$  est donnée par

$$\operatorname{erfc}'(u) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \quad (5.17)$$

Ainsi, la dérivée seconde de  $\operatorname{erfc}(u)$  est :

$$\operatorname{erfc}''(u) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} (-2u) \quad (5.18)$$

La solution exacte  $\gamma(x)$  peut donc s'écrire

$$\gamma(x) = (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{1}{\alpha t \sqrt{\pi}} e^{-u^2} u \quad \text{avec} \quad u = x \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (5.19)$$

## 5.4 Résolution du problème en régime transitoire

Nous proposons de résoudre ce problème par un schéma aux différences finies centrées en temps de la forme :

$$\begin{cases} \gamma = \nabla^2 \Phi \\ \gamma = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi - \left[ \gamma_0 + \frac{2\Phi_0}{\alpha \Delta t} \right] \end{cases} \quad (5.20)$$

avec la recherche d'une solution décomposée sous la forme :

$$\Phi = \overset{a}{\Phi} + \overset{b}{\Phi} + \overset{ns}{\Phi} \quad (5.21)$$

où  $\overset{a}{\Phi}$  est une fonction harmonique,  $\overset{b}{\Phi}$  est une fonction bi-harmonique,  $\overset{ns}{\Phi}$  est une série polynômiale permettant de satisfaire l'équation différentielle au sens des moindres carrés.

Pour justifier cette forme, nous remarquons d'abord que l'équation 5.20 peut se mettre sous la forme d'une équation de Helmholtz modifiée avec un terme d'infiltration  $N$  :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\Phi}{\lambda} - N \quad (5.22)$$

où  $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{2}$  et  $N = \left[ \gamma_0 + \frac{2\Phi_0}{\alpha \Delta t} \right]$ .

Considérons  $\Phi_n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  définis par  $\nabla^2 \Phi_n = \frac{\Phi_{n-1}}{\lambda}$ . Alors le potentiel  $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n$  est solution de l'équation de Helmholtz sans le terme d'infiltration  $N$ , puisque

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \nabla^2 \Phi_n \quad \text{car} \quad \nabla^2 \Phi_0 = 0 \quad (5.23)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{n-1}}{\lambda} \quad (5.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n}{\lambda} \quad \text{par changement de variable implicite sur } n \quad (5.25)$$

$$= \frac{\Phi}{\lambda} \quad (5.26)$$

Maintenant, si nous considérons  $\Phi$  décomposé sous la forme :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n + \overset{ns}{\Phi} \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \overset{ns}{\Phi} = -N \quad (5.27)$$

alors  $\Phi$  est bien solution de l'équation 5.22.

Une série de fonctions singulières  $\Phi_n$  de degré impaire et une fonction  $\overset{ns}{\Phi}$  non singulière pouvant être représentée par une série de monômes est ainsi obtenue.



les dérivées successives du potentiel  $\Phi$  tendent vers zéros. Nous considérons qu'à partir de l'ordre 6, il est suffisant de les approcher par une fonction non singulière. La fonction  $\overset{ns}{\Phi}$  introduite permet de toujours vérifier l'équation de diffusivité (équation 6.1) aux points de contrôles du domaine. Elle permet donc d'approcher tous les termes singuliers non pris en compte directement.

Dans la suite, les formes analytiques choisies pour les potentiels 1D sont justifiées par rapport aux potentiels complexes 2D existants.

## 5.5 Formes analytiques des différents potentiels $\overset{a}{\Phi}$ , $\overset{b}{\Phi}$ et $\overset{ns}{\Phi}$

Nous allons construire des fonctions équivalentes aux fonctions analytiques 2D existantes (appelées aussi éléments analytiques), puis en déduire la forme des fonctions  $\overset{a}{\Phi}$ ,  $\overset{b}{\Phi}$  et  $\overset{ns}{\Phi}$ . Nous les appellerons éléments analytiques 1D en référence à leurs homologues 2D. Celles-ci seront choisies de telle sorte que  $\Phi$  et  $\gamma$  soient nulles et de dérivées nulles en limite d'influence du phénomène transitoire, i.e. une racine de multiplicité 4.

Dans un premier temps, nous verrons la forme 1D de l'élément linesink  $\overset{a}{\Phi}$ . C'est une singularité harmonique qui était déjà utilisée dans la méthode des éléments analytiques en régime permanent et qui permet de modéliser une répartition de source. Ensuite, la forme de l'élément divergence linesink  $\overset{b}{\Phi}$  permettant de modéliser l'infiltration verticale générée par la répartition de source sera développée. Enfin, la forme du potentiel non singulier  $\overset{ns}{\Phi}$  sera explicitée. Cet élément permet de représenter les phénomènes assimilés comme non singuliers. Dans notre cas, cela permettra de satisfaire l'équation de diffusivité en des points choisis dans le domaine.

### 5.5.1 Forme de l'élément linesink

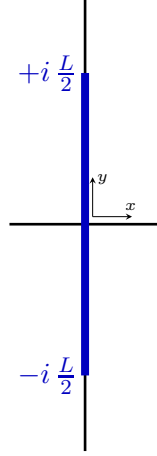
Pour représenter au mieux l'influence d'un élément linesink dans le cas à une dimension, nous avons choisi de partir de la forme bi-dimensionnelle de l'élément linesink avec répartition de charge constante  $\sigma$  (Strack [63], équation 25.7 p285) :

$$\overset{a}{\Omega}_{2D} = g_0 = \frac{\sigma L}{4\pi} \left\{ (Z+1) \ln(Z+1) - (Z-1) \ln(Z-1) + 2 \ln \left[ \frac{z_2 - z_1}{2} \right] - 2 \right\} \quad (5.28)$$

avec  $L$  la longueur de l'élément. Le changement de variables suivant est utilisé :

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad \text{avec} \quad z_1 = \frac{-iL}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{iL}{2} \quad (5.29)$$

$$= -\frac{2i}{L} z \quad (5.30)$$


 FIGURE 5.2 – Potentiel complexe 2D d'une linesink de densité  $\sigma$  constante

Cet élément, schématisé sur la figure 5.2 est positionné sur l'axe imaginaire et centré en 0. L'évaluation sur l'axe réel d'un élément linesink de longueur infinie permettra de représenter l'influence d'une singularité dans le cas à 1 dimension.

Le potentiel  $\overset{a}{\Phi}$  peut se mettre sous la forme :

$$\overset{a}{\Phi}(z) = \frac{1}{2} [g_0 + \overline{g_0}] = \Re(g_0) = \sigma \tilde{G}_a(z) \quad (5.31)$$

Pour  $z \in [-1, 1]$ , le développement de  $\tilde{G}_a(z)$  donne :

$$\tilde{G}_a(z) = \frac{L}{4\pi} \left[ \ln \left( 1 + \frac{4z^2}{L^2} \right) - \frac{4z \arctan \left( \frac{2z}{L} \right)}{L} + \frac{2\pi z}{L} \operatorname{sign} \left( \frac{z}{L} \right) + \Re(C) \right] \quad (5.32)$$

$$= \frac{L}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{4z^2}{L^2} \right) - \frac{z}{\pi} \arctan \left( \frac{2z}{L} \right) + \frac{1}{2} |z| + \frac{L}{4\pi} \Re(C) \quad (5.33)$$

Un développement asymptotique de l'expression précédente lorsque  $L$  tend vers l'infini implique :

$$\tilde{G}_a(z) = \frac{1}{2} |z| + \frac{L}{4\pi} \Re(C) - \frac{1}{L\pi} z^2 + O \left( \frac{1}{L^2} \right) \quad (5.34)$$

Choisissons  $C = 0$  et faisons tendre  $L$  vers l'infini, alors nous obtenons l'expression finale de la forme à 1 dimension :

$$\tilde{G}_a(z) = \frac{1}{2} |z| \quad (5.35)$$

Cette fonction est harmonique pour  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et sera exprimée avec la variable locale  $X$ . Un polynôme de correction est ensuite ajouté pour permettre d'avoir la propriété souhaitée (racine de multiplicité 4) à la distance d'influence  $d$ , i.e. pour  $|X| = 1$ . Nous obtenons alors :

$$G_a(X) = \frac{1}{2} \left\{ |X| - \left( \frac{1}{16} X^6 - \frac{5}{16} X^4 + \frac{15}{16} X^2 + \frac{5}{16} \right) \right\} \quad (5.36)$$

Le calcul de la dérivée seconde de  $G_a$  nous donne l'expression analytique suivante :

$$\frac{\partial^2 G_a}{\partial X^2}(X) = -\frac{1}{2} \left( \frac{15}{8} X^4 - \frac{30}{8} X^2 + \frac{15}{8} \right) \quad (5.37)$$

Cette expression sera utile lors du calcul de  $\gamma$  pour la résolution du problème numérique.

### 5.5.2 Forme de l'élément divergence linesink

Soit  $\overset{b}{\Phi}$  défini par :

$$\overset{b}{\Phi} = \sigma_\gamma G_b(X) \quad (5.38)$$

La fonction  $\overset{b}{\Phi}$  est choisie de telle sorte que

$$\frac{d^2 G_b}{dX^2} = G_a \quad (5.39)$$

Une intégration double en  $X$  donne :

$$G_b(X) = \frac{1}{12} X^2 |X| \quad (5.40)$$

Ce qui est bien une fonction bi-harmonique en  $X$ .

Pour faire la correspondance avec les éléments 2D développés par Strack, nous pouvons remarquer que la partie réelle de l'intégrale double en  $Z$  et  $\overline{Z}$  d'une fonction complexe est égale à l'intégrale double en  $X$  de la partie réelle de cette fonction. Cette fonction correspond exactement à la partie réelle 1D de la fonction divergence linesink 2D.

De même que pour l'élément linesink, pour permettre d'avoir le comportement souhaité à la distance d'influence  $d$  pour chaque pas de temps (racine de multiplicité 4), un polynôme de correction est ajouté :

$$G_b(X) = \frac{1}{12} \left\{ X^2 |X| - \left( \frac{-1}{16} X^6 + \frac{9}{16} X^4 + \frac{9}{16} X^2 - \frac{1}{16} \right) \right\} \quad (5.41)$$

Le calcul de la dérivée seconde de  $G_b$  nous donne l'expression analytique suivante :

$$\frac{\partial^2 G_b}{\partial X^2}(X) = \frac{|X|}{2} - \frac{1}{12} \left( \frac{-15}{8} X^4 + \frac{54}{8} X^2 + \frac{9}{8} \right) \quad (5.42)$$

Cette expression analytique sera également utile lors du calcul de  $\gamma$  pour la résolution du problème numérique.

### 5.5.3 Équivalent 1D du potentiel non singulier

La forme de la fonction non singulière en 2D est la suivante :

$$\frac{ns}{2D} \Omega = (\zeta\bar{\zeta} - 1)^4 \left\{ \sum_{m=0}^M \sum_{\substack{n=0 \\ n+m \leq M}}^m a_{mn} T_m(Z) \overline{T_n(Z)} + \overline{a_{mn}} \overline{T_m(Z)} T_n(Z) \right\} \quad (5.43)$$

où  $\zeta = 1$  le long d'une ellipse représente la distance d'influence de l'élément.

Les polynômes de Tchebychev ont la propriété suivante [1] :

$$2T_m T_n = T_{m+n} + T_{m-n} \quad \text{pour } m \geq n \quad (5.44)$$

Cela nous permet d'en déduire la forme équivalente à une dimension :

$$\frac{ns}{\Phi} = (\zeta^2 - 1)^4 \sum_{n=0}^N a_n T_n(X) \quad (5.45)$$

où  $\zeta = 1$  pour une distance  $d$  qui représente la distance d'influence de l'effet transitoire de l'élément. Son expression en coordonnées locales  $X = \frac{x}{d}$  est alors  $\zeta = X$ . D'où :

$$\frac{ns}{\Phi} = \sum_{n=0}^N a_n G_n(X) \quad (5.46)$$

où  $G_n(X) = (X^2 - 1)^4 T_n(X)$ .

Par la suite, la notation  $T_n(X) = T_n$  sera considérée par souci de simplification d'écriture des polynômes de Tchebychev.

Le Laplacien de  $\Phi$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\partial^2 G_n}{\partial X^2}(X) \quad (5.47)$$

puisque  $G_n(X) = (\zeta^2 - 1)^4 T_n(X)$ , la dérivée première est obtenue :

$$\frac{\partial G_n}{\partial X} = 4(\zeta^2 - 1)^3 2X T_n + (\zeta^2 - 1)^4 T'_n \quad (5.48)$$

et la dérivée seconde en  $X$  :

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial X^2} = [48 (\zeta^2 - 1)^2 X^2 + 8 (\zeta^2 - 1)^3] T_n + 16 X (\zeta^2 - 1)^3 T'_n + (\zeta^2 - 1)^4 T''_n \quad (5.49)$$

#### 5.5.4 Calcul de $T_n$ , $T'_n$ et $T''_n$

Le calcul numérique des polynômes de Tchebychev s'effectue de façon classique à l'aide de la formule de récurrence suivante :

$$T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1} \quad (5.50)$$

avec  $T_0 = 1$  et  $T_1 = X$ .

Le calcul de la dérivée des polynômes de Tchebychev s'obtient en dérivant la formule de récurrence précédente :

$$T'_{n+1} = 2T_n - 2X T'_n - T'_{n-1} \quad (5.51)$$

avec  $T'_0 = 0$  et  $T'_1 = 1$ .

Une dérivation des termes de l'équation différentielle précédente nous permet d'en déduire la relation pour le calcul de la dérivée seconde des polynômes de Tchebychev  $T''_n$  :

$$T''_{n+1} = 4T'_n + 2X T''_n - T''_{n-1} \quad (5.52)$$

avec  $T''_0 = 0$  et  $T''_1 = 0$ .

Tous ces développements analytiques nous permettrons d'obtenir la forme de la matrice d'influence et du second membre du système d'équations 5.20 à résoudre.

## 5.6 Assemblage de la matrice d'influence et du second membre

Pour résoudre ce système, nous avons choisi de combiner un schéma numérique en temps (différences finies centrées) avec une méthode de résolution par moindres carrés pour chacune des itérations. Pour bien résoudre ce problème, il est nécessaire de choisir judicieusement les conditions aux limites à imposer qui seront assimilées à des contraintes pour les moindres carrés.

Lors de la résolution, il faudra faire attention au phénomène de Runge [24] qui est notamment très bien mis en évidence lors de l'utilisation d'une interpolation de Lagrange avec répartition uniforme des points de contrôles sur le domaine  $\mathcal{D} = [-1, 1]$ . Nous noterons sa frontière par  $\partial\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$ .

Par souci de simplification des écritures, nous considérons que l'état initial  $\Phi_0$  se situe au niveau de référence 0, ainsi  $\Phi_0 = 0$ , et que le saut effectué est unitaire, ainsi  $\Phi_1 = -1$ . Le problème peut toujours être ramené à un problème plus classique de niveau de référence

quelconque par une simple translation et de saut de potentiel quelconque par un facteur d'échelle sur l'altitude.

### 5.6.1 Points de contrôles

Pour satisfaire l'équation différentielle, des points de contrôles  $\{X_j, j = 1, \dots, J\}$  répartis dans le domaine sont utilisés. Le nombre de ces points devra toujours être supérieur au degré du polynôme d'interpolation, c'est à dire  $J > N$ , pour permettre d'avoir un système sur-déterminé.

La répartition de Tchebychev est définie par :

$$X_j = \cos\left(\pi \frac{(j-1)}{J_{loc}}\right) \quad \text{avec } j = 1, \dots, J_{loc} \quad (5.53)$$

Puisque la répartition des points de contrôles peut être un facteur influençant la résolution, nous allons aussi étudier deux autres répartitions de points de contrôles différentes : la répartition uniforme classique excluant le point  $X = 0$  et une répartition suivant la solution exacte et définie par :

$$Y_j = \text{erf}(u_{max} X_j) \quad \text{avec } j = 1, \dots, J_{loc} \quad (5.54)$$

où  $\{Y_j, j = 1, \dots, J_{loc}\}$  est une répartition équidistante sur  $]0, 1[$ .

Ensuite, un découpage et une normalisation de l'espace sur  $[-1, 0[$  et  $]0, 1]$  sont effectués pour permettre de garder une symétrie par rapport au point de singularité  $X = 0$ . Notons que puisqu'une condition vérifiée exactement sera imposée, il est inutile de le prendre comme point de contrôle. Il sera donc exclus.

### 5.6.2 Conditions à vérifier par le système d'équations à résoudre

Rappelons que les éléments analytiques 1D utilisés peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\overset{ns}{\Phi}(X) = \sum_{n=0}^N a_n G_n(X) \quad (5.55)$$

$$\overset{a}{\Phi}(X) = \sigma G_a(X) \quad (5.56)$$

$$\overset{b}{\Phi}(X) = \sigma_\gamma G_b(X) \quad (5.57)$$

Le système d'équations 5.20 s'exprime en coordonnées locales par :

$$\begin{cases} \gamma(X) & = \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial X^2} \frac{1}{d^2} \\ \frac{1}{2} (\gamma(X) + \gamma_0(X)) & = \frac{1}{\alpha \Delta t} [\Phi(X) - \Phi_0(X)] \end{cases} \quad (5.58)$$

avec  $X = \frac{x}{d}$  le système de coordonnées locales et le potentiel complexe  $\Phi(X)$  recherché sous la forme :

$$\Phi(X) = \sigma G_a(X) + \sigma_\gamma G_b(X) + \sum_{n=0}^N a_n G_n(X) \quad (5.59)$$

Incluons l'équation 5.59 dans le système d'équations 5.58. Le système d'équations suivant devra être satisfait pour chaque point de contrôle  $X_j$  :

$$\left( \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi(X_j) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}(X_j) \frac{1}{d^2} \right) = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_0(X_j) + \gamma_0(X_j) \quad (5.60)$$

Ce qui s'exprime sous forme matricielle par :

$$M a = b \quad (5.61)$$

ou encore, sous une forme plus développée :

$$\left( \begin{array}{ccc|c|c} \dots & M_1^n & \dots & M_1^{N+1} & M_1^{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & M_j^n & \dots & M_j^{N+1} & M_j^{N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & M_J^n & \dots & M_J^{N+1} & M_J^{N+2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_N \\ \hline \sigma \\ \hline \sigma_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_J \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

$M$  est une matrice sur-déterminée de dimension  $J \times (N+3)$ , puisque  $J \geq N+3$ , et définie par

$$M_j^{n+1} = \begin{cases} \frac{2}{\alpha \Delta t} G_n(X_j) - \frac{\partial^2 G_n}{\partial X^2}(X_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } 0 < n < N \\ \frac{2}{\alpha \Delta t} G_a(X_j) - \frac{\partial^2 G_a}{\partial X^2}(X_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } n = N + 1 \\ \frac{2}{\alpha \Delta t} G_b(X_j) - \frac{\partial^2 G_b}{\partial X^2}(X_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.63)$$

$b$  est le second membre du système défini par

$$b_j = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_0(X_j) + \gamma_0(X_j) \quad (5.64)$$

et  $a$ , contenant les coefficients inconnus du système, est défini par :

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{pour } 0 < n < N \\ \sigma & \text{pour } n = N + 1 \\ \sigma_\gamma & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.65)$$

Notons que les fonctions  $\Phi_0$  et  $\gamma_0$ , calculées à l'itération précédente, doivent être réévaluées pour la nouvelle répartition de points  $X_j$  à l'itération actuelle. Pour cela, la relation suivante est utilisée :

$$\Phi_0(X) = \begin{cases} \Phi_0\left(X \frac{d}{d_0}\right) & \text{pour } X < \frac{d}{d_0} \\ 0 & \text{pour } X \geq \frac{d}{d_0} \end{cases} \quad (5.66)$$

où  $d_0$  correspond à la distance d'influence de l'itération précédente.

Enfin, il est nécessaire d'initialiser les valeurs de  $\Phi(x)$  et  $\gamma(x)$ . Celles-ci seront considérées égales au potentiel de référence  $\Phi_0 = 0$ .

Soit  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne discrète associée aux points de contrôles  $X_j$ . Résoudre ce système au sens des moindres carrés signifie que nous devons minimiser la fonctionnelle quadratique suivante :

$$J(a) = \|Ma - b\|_2^2 \quad (5.67)$$

Le problème devient alors

$$\text{Chercher } a \in \mathbb{R}^{N+3} \text{ tel que } J(a) = \|Ma - b\|_2^2 \text{ soit minimale} \quad (5.68)$$

En exprimant que  $a$ , solution de ce problème, annule la différentielle de la fonctionnelle  $J(a)$ , c'est à dire  $J'(a) = 2M'(Ma - b) = 0$ , nous montrons que le problème 5.68 est équivalent au système linéaire suivant :

$$M^T Ma = Mb \quad (5.69)$$

Notons que cette équation est appelée équation normale associée au problème des moindres carrés. La matrice  $M^T M$  étant symétrique définie positive, les méthodes de Choleski ou du gradient conjugué peuvent être utilisées. Cependant, les équations normales sont souvent assez mal conditionnées. Une méthode basée sur la décomposition  $QR$  (Quasi-Réversibilité) de la matrice  $A$  [13] est préférable.

### 5.6.3 Contraintes du système d'équations à vérifier

Pour avoir un problème mathématique bien posé, les conditions aux limites doivent être vérifiées exactement. Cela se traduit par des contraintes à imposer lors de l'utilisation de la méthode des moindres carrés. Nous parlons alors de méthode des moindres carrés avec



contraintes.

Rappelons que la forme de la fonction  $\Phi$  à été choisie de sorte à avoir une racine de multiplicité 4 en limite d'influence du phénomène transitoire, i.e. pour  $|X| = 1$ . Ainsi, la solution numérique est implicitement contrainte. Mais, il est nécessaire de contraindre le système au point singulier  $X = 0$  sur les fonctions  $\Phi$  et  $\gamma$  ainsi que leurs dérivées. Le problème sera alors mathématiquement bien posé.

Les deux premières conditions sur  $\Phi$  et  $\gamma$  sont définies par :

$$\Phi(0) = \Phi_1 = -1 \quad (5.70)$$

$$\gamma(0) = \nabla^2 \Phi(x) = 0 \quad (5.71)$$

Une relation entre les singularités d'ordre un et d'ordre trois en  $x$  sera aussi imposée. Elle permettra d'établir une relation entre  $\sigma$ ,  $\sigma_\gamma$  du pas de temps actuel et  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{\gamma_0}$  du pas précédent. Notons que cela correspond finalement à mettre une condition sur les dérivées premières de  $\Phi$  et  $\gamma$  en zéro.

Soit  $\tilde{\Phi}(x)$  la partie singulière du potentiel  $\Phi$ . Elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(X) &= \sigma \tilde{G}_a(X) + \sigma_\gamma \tilde{G}_b(X) \\ &= \frac{\sigma}{2} |X| + \frac{\sigma_\gamma}{12} |X| X^2 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Le coefficient du terme singulier d'ordre un, que nous noterons  $\Phi(x)|_{|x|}$ , équivalent à la dérivée première en  $x = 0$  de la partie singulière de  $\Phi$ , est donné par :

$$\Phi(x)|_{|x|} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x}(x)|_{x=0} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X}(X)|_{X=0} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{d} \quad (5.73)$$

De même, le coefficient du terme singulier d'ordre un de la fonction  $\gamma(x)$ , que nous noterons  $\gamma(x)|_{|x|}$ , peut être explicité par :

$$\gamma(x)|_{|x|} = \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}}{\partial X^3}(X)|_{X=0} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^3 = \frac{\sigma_\gamma}{2} \frac{1}{d^3} \quad (5.74)$$

En utilisant les équations 5.73 et 5.74, les termes singuliers d'ordre un peuvent être identifiés dans le schéma numérique discrétisé (eq. 5.58). La relation suivante est alors mise en évidence :

$$\left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{1}{d} \right] \sigma - \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{d^3} \right] \sigma_\gamma = \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{1}{d_0} \right] \sigma_0 + \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{d_0^3} \right] \sigma_{\gamma_0} \quad (5.75)$$

Nous remarquons que les contraintes exprimées par les relations 5.70, 5.71 et 5.75 peuvent s'exprimer sous la forme d'un système linéaire fonction des inconnues  $a$  du système d'équations. Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$Q a = c \quad (5.76)$$

où  $Q$  est la matrice des contraintes de dimension  $3 \times (N + 3)$  et  $c$  est le second membre du système de contraintes de dimension  $3 \times 1$ . Leurs expressions sont données par

$$Q_1^{n+1} = \begin{cases} G_n(0) & \text{pour } 0 < n < N \\ G_a(0) & \text{pour } n = N + 1 \\ G_b(0) & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.77)$$

$$Q_2^{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 G_n}{\partial X^2}(0) & \text{pour } 0 < n < N \\ \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 G_a}{\partial X^2}(0) & \text{pour } n = N + 1 \\ \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 G_b}{\partial X^2}(0) & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.78)$$

$$Q_3^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < n < N \\ \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{1}{d} & \text{pour } n = N + 1 \\ -\frac{1}{2d^3} & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.79)$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{pour } 0 < n < N \\ \sigma & \text{pour } n = N + 1 \\ \sigma_\gamma & \text{pour } n = N + 2 \end{cases} \quad (5.80)$$

$$c = \begin{cases} \Phi(0) = \Phi_1 = -1 \\ \gamma(0) = 0 \\ \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{1}{d_0} \right] \sigma_0 + \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{d_0^3} \right] \sigma_{\gamma_0} \end{cases} \quad (5.81)$$

Un algorithme de résolution par moindres carrés avec contraintes est utilisé. Cela signifie que nous allons chercher à minimiser la fonctionnelle  $J(a)$  (équation 5.67) dans le domaine restreint par la contrainte linéaire précédente (équation 5.76). Le problème à résoudre devient alors :

$$\text{Chercher } a \in \{\mathbb{R}^{N+3} / Qa = c\} \quad \text{tel que } J(a) = \|Ma - b\|_2^2 \quad \text{soit minimale} \quad (5.82)$$

Nous pouvons montrer que cela revient finalement à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{a} &= (M^T M)^{-1} M^T b \\ \tilde{Q} &= (M^T M)^{-1} Q^T (Q (M^T M)^{-1} Q^T)^{-1} \\ a &= \hat{a} + \tilde{Q} (c - Q \hat{a}) \end{cases} \quad (5.83)$$

Ces équations sont appelées équations normales associées au problème des moindres carrés sous contrainte. De même que pour la méthode des moindres carrés ordinaire et puisque la matrice  $M^T M$  est symétrique définie positive, il est possible d'utiliser les méthodes de Choleski ou du gradient conjugué. Pour les mêmes raisons que précédemment (équations normales mal conditionnées), nous leur préférons une méthode basée sur la décomposition  $QR$  de la matrice  $A$  [13]. Ce qui serait une amélioration à apporter au code de calcul.

Cette méthode de résolution a été développée de façon à conserver le principe de superposition des potentiels complexes. Il est ainsi possible d'ajouter un potentiel complexe représentant l'influence des autres éléments du "modèle aquifère" au modèle numérique développé ici.

Une méthode de résolution numérique assez complexe a été mise en évidence. Celle-ci combine une méthode discrétisée en temps et une méthode d'approximation de fonction par moindres carrés sous contraintes. Ces deux approches ne sont généralement pas associées entre elles lors de la résolution de problème physique. Elle ne rentre donc pas dans les méthodes de résolution classique que nous pouvons trouver dans la littérature. Il est donc nécessaire d'analyser numériquement le comportement du modèle. Cela permettra d'en déduire le comportement numérique d'un modèle utilisant les éléments analytiques 2D.

## 5.7 Un premier résultat numérique

Par la suite, un coefficient de diffusivité  $\alpha = 1$  est considéré et nous nous focalisons sur le cas d'une variation brusque unitaire du niveau de la rivière, i.e.  $\Phi_1 = -1$ . De plus, l'état initial sera considéré constant de potentiel de référence  $\Phi_0 = 0$ .

Un premier résultat numérique est représenté sur la figure 5.3. Un extrait du script de résolution sous Scilab montre les paramètres qui ont été utilisés :

```
nbpts = 100; //Nombres de points de contrôles répartis aux racines
des polynômes de Tchebychev
N = 6; //Degré du polynôme de la partie non singulière
Dt=.1; //Pas de temps
NBiter = 10; //Nombre d'itérations maximale
```

La figure 5.3 compare les solutions numériques de  $\Phi$  et  $\gamma$  obtenues après une itération et les solutions exactes obtenues d'après les résultats théoriques (équations 5.13 et 5.19). La figure 5.4 montre l'évolution de la norme euclidienne du résidu  $E_{mc} = \|M a - b\|_2$  induit par la résolution par moindres carrés en fonction de l'itération du schéma numérique.

Notons que l'écart entre la solution numérique  $\gamma$  et sa solution exacte  $\gamma_{ex}$  est dépendant d'un facteur d'échelle  $\Delta t$  par rapport à l'erreur sur la solution  $\Phi$ . Le facteur  $\frac{1}{\Delta t}$  apparaissant dans l'équation 5.58 explique cette observation.

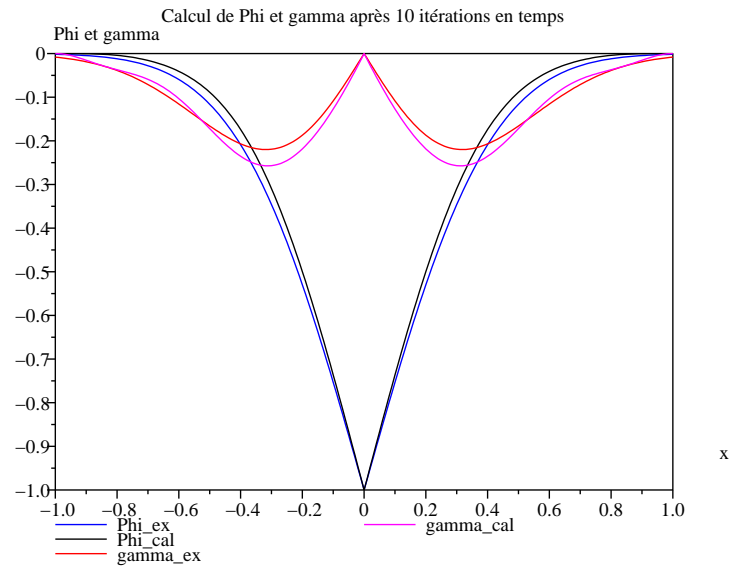


FIGURE 5.3 – Comparaison entre les solutions numériques de  $\Phi$  et  $\gamma$  après 10 itérations avec leurs solutions exactes respectives

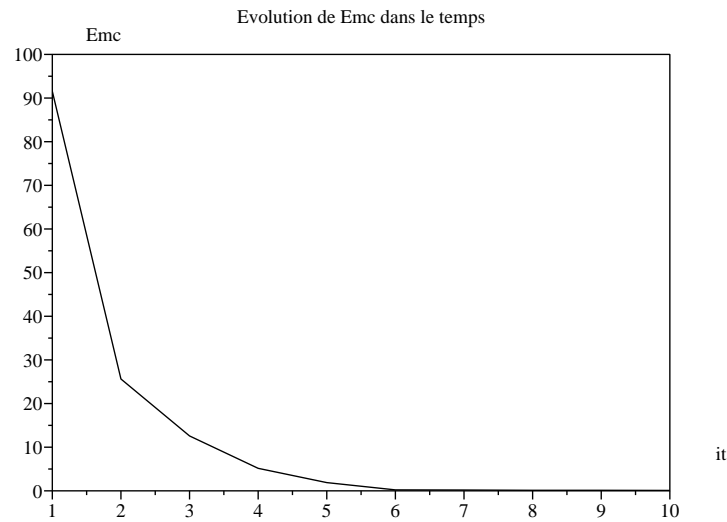


FIGURE 5.4 – Évolution de l'estimateur d'erreur  $E_{mc} = \|Ma - b\|_2$  en fonction de l'itération

Notons que les coefficients  $a_n$  pour  $n$  impaire sont nuls. Cela se justifie par la parité en  $X = 0$  de la fonction  $\Phi$  recherchée et du fait que tout polynôme de Tchebychev de degré impair est impair.

## 5.8 Comportement des termes singuliers d'ordre un et trois

Les termes singuliers calculés à partir de la solution numérique seront comparés par rapport à ceux obtenus d'après les solutions exactes  $\Phi_{ex}(x)$  (équation 5.13). Utilisant les valeurs  $\Phi_0 = 0$  et  $\Phi_1 = -1$ , la solution exacte s'exprime :

$$\Phi(x) = -1 + \operatorname{erf}(u) \quad \text{avec} \quad u = |x| \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (5.84)$$

Un développement analytique de la fonction erf nous donne [1] :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n! (2n+1)} \quad (5.85)$$

Les termes singuliers exacts d'ordre un et trois en sont déduits :

$$\Phi(x)|_{|x|} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (5.86)$$

$$\Phi(x)|_{|x|^3} = \frac{-2}{3\sqrt{\pi}} (4\alpha t)^{-3/2} \quad (5.87)$$

Utilisant l'expression numérique des termes singuliers d'ordre un et trois de  $\Phi$ , les inconnues  $\sigma$  et  $\sigma_\gamma$  peuvent être reliées aux valeurs exactes des termes singuliers par :

$$\frac{1}{d} \frac{\sigma}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (4\alpha t)^{-1/2} \quad (5.88)$$

$$\frac{1}{d^3} \left[ \frac{1}{12} \sigma_\gamma \right] = \frac{-2}{3\sqrt{\pi}} (4\alpha t)^{-3/2} \quad (5.89)$$

Représentons les relations formulées par les équations 5.88 et 5.89 sur la figure 5.5 et observons leur évolutions temporelles.

Les termes de gauche correspondent aux singularités calculées (courbes bleu et cyan) et les termes de droite correspondent aux singularités exactes (courbes noire et verte). Notons que les paramètres utilisés sont les mêmes que pour le calcul précédent représenté sur la figure 5.3. L'évolution de l'erreur sur la singularité d'ordre 2 à été factorisé par  $\Delta t$ . Il est ainsi facile de remarquer que l'amplitude et le comportement des erreurs deviennent similaires.

Une convergence rapide de chacune des singularités calculées vers leurs solutions exactes respectives est observée. Cela confirme le comportement de la solution déjà observé sur la figure 5.3.

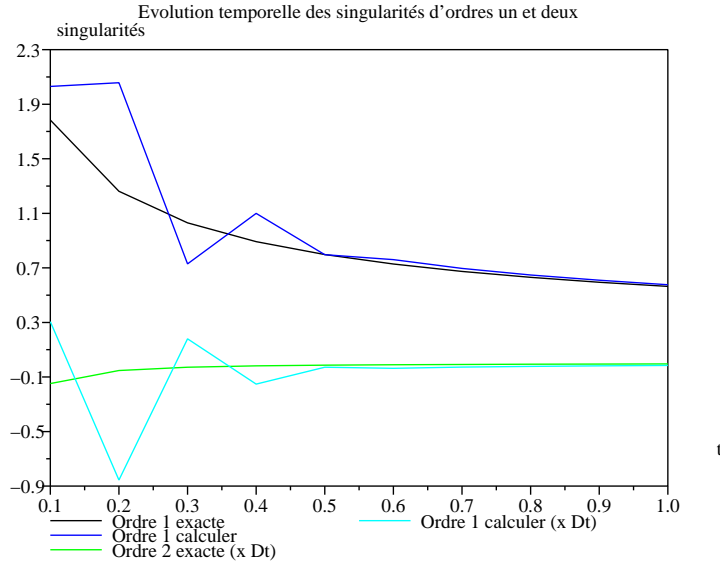


FIGURE 5.5 – Singularités d'ordre un et deux exactes et calculés

Sans conclure définitivement, nous pouvons déjà remarquer que la solution numérique nécessite un certain nombre d'itérations avant d'obtenir un comportement régulier de la solution numérique.

## 5.9 Étude de la consistance du schéma numérique

La consistance est la propriété qui traduit le fait que toute solution exacte régulière vérifie le schéma discret avec une erreur qui tend vers 0 quand  $\Delta t \rightarrow 0$ . Notons  $\Phi_{\frac{1}{2}}$  la valeur du potentiel calculé au temps  $t + \frac{\Delta t}{2}$ .

Soit les développements de Taylor de  $\Phi$  en fonction de  $\Phi_{\frac{1}{2}}$  et de  $\Phi_0$  en fonction  $\Phi_{\frac{1}{2}}$  :

$$\Phi_0 = \Phi_{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \Phi_{\frac{1}{2}}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (5.90)$$

$$\Phi = \Phi_{\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \Phi_{\frac{1}{2}}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (5.91)$$

En incluant ces développements de Taylor dans le schéma numérique 5.58, nous obtenons :

$$\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial \Phi_{\frac{1}{2}}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \right] = \frac{1}{2} (\gamma + \gamma_0) \quad (5.92)$$

L'erreur de troncature  $ET$  représente l'erreur commise en remplaçant les dérivées partielles exactes par leurs approximations dans l'équation différentielle. Nous avons  $ET = O(\Delta t^2)$ , ce

qui correspond à une consistance d'ordre 2 du schéma numérique.

Pour mettre en évidence l'évolution de cette consistance, les solutions exactes  $\Phi_{ex}$  et  $\gamma_{ex}$  calculées précédemment sont intégrées dans le schéma numérique. L'erreur de troncature obtenue au temps  $t$  avec un pas de discrétisation  $\Delta t$  peut ainsi être estimée en utilisant :

$$\frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_{ex}(t) + \gamma_{ex}(t) = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_{ex}(t + \Delta t) - \gamma_{ex}(t + \Delta t) + ET \quad (5.93)$$

La figure 5.6 montre la consistance de ce schéma numérique.

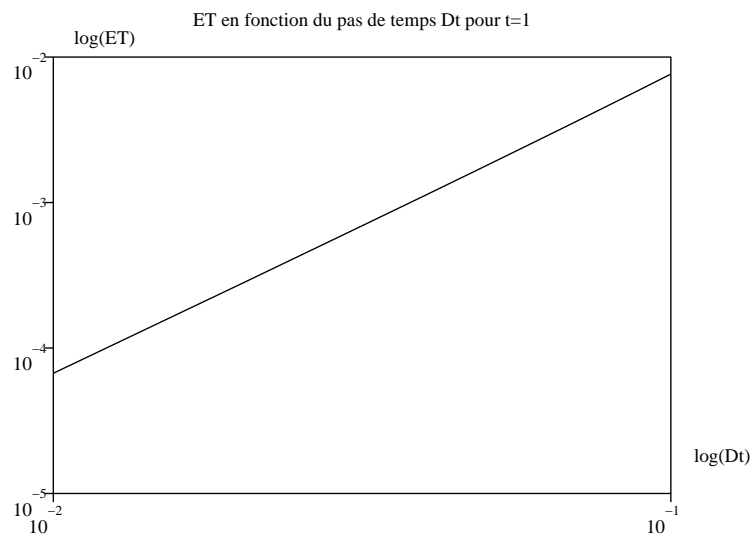
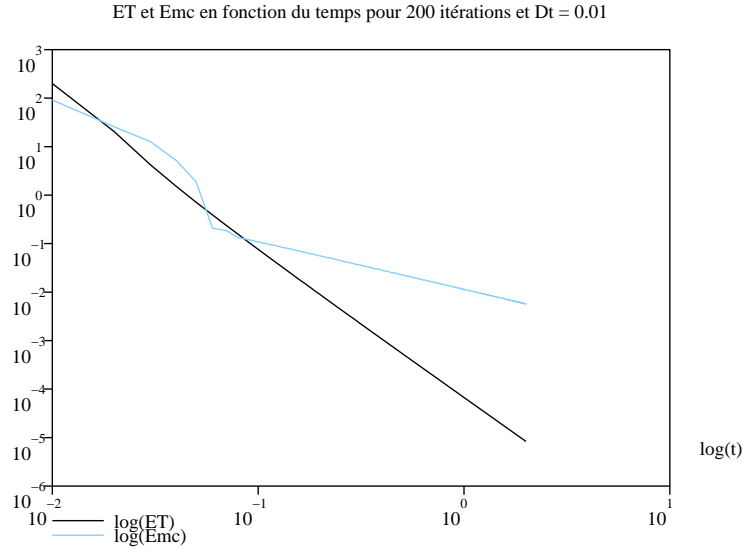


FIGURE 5.6 – Représentation des valeurs calculées de l'erreur de troncature du schéma numérique (eq. 5.93) au temps  $t = 1$

En effectuant une régression linéaire sur les valeurs calculées, nous obtenons une consistance d'ordre  $2.057 \approx 2$  confirmant le résultat donné par 5.92.

Maintenant, regardons l'évolution de l'erreur de troncature en fonction du temps. La figure 5.7 représente l'évolution logarithmique de  $ET$  en comparaison avec l'erreur  $E_{mc}$  de la résolution numérique.

Le comportement de l'erreur de troncature est linéaire, ce qui implique un ordre de convergence calculé de  $3.0938 \approx 3$ . Pour l'erreur  $E_{mc}$ , deux phases dans le comportement de la courbe logarithmique peuvent être observées sur la figure 5.7. Une première non linéaire qui finit sur une singularité de la courbe logarithmique, puis une seconde où une convergence régulière est établie. Nous estimons la convergence de la deuxième phase de l'ordre de  $0.998 \approx 1$ .


 FIGURE 5.7 – Évolution de l’erreur  $ET$  et de l’erreur  $E_{mc}$ 

## 5.10 Étude du comportement de la solution numérique

La résolution numérique dépend de paramètres tel que le pas de discrétisation  $\Delta t$ , le nombre de points de contrôles  $J = NbX_j$  utilisés, leur mode de répartition sur le domaine (Tchebychev, uniforme, suivant la fonction erf) et le degré  $N$  des polynômes de Tchebychev pour l’estimation du potentiel non singulier.

Ces paramètres proviennent de l’utilisation d’une méthode itérative, comme le pas de temps  $\Delta t$ , ou de la méthode des moindres carrés.

La norme euclidienne du résidu de la méthode des moindres carrés  $E_{mc} = \|Ma - b\|_2$  est un estimateur d’erreur naturel. Elle permet d’estimer la convergence numérique du système d’équations. Elle permet d’avoir une estimation de l’erreur induite par la résolution numérique sans différencier les erreurs sur  $\Phi$  et  $\gamma$ .

Mais, cet estimateur d’erreur ne met pas en évidence les erreurs induites par les paramètres numériques tels que le nombre de points de contrôles, le degré  $N$  des polynômes de Tchebychev pour l’estimation du potentiel non singulier.

Ainsi, nous utiliserons en complément un critère d’erreur basé sur l’écart maximal entre la solution numérique et la solution exacte défini par :

$$E_{inf}(\Phi) = \frac{\|\Phi(X) - \Phi_{ex}(X)\|_\infty}{\max_{X,t} |\delta\Phi|} = \frac{\sup_{X \in [-1,1]} |\Phi(X) - \Phi_{ex}(X)|}{\max_{X,t} |\delta\Phi|} \quad (5.94)$$

où  $\max_{X,t} |\delta\Phi|$  correspond au maximum en temps et en espace de la variation de la hauteur d’eau. Pour notre étude, elle est égale à  $1\ m$ , obtenue au temps initial en  $x = 0$ . Nous



définissons de façon identique le critère d'erreur  $E_{inf}(\gamma)$  de la fonction  $\gamma$ . Les valeurs par défaut des paramètres faisant l'objet de cette étude sont :

```
nbpts = 100; //Nombres de points de contrôles répartis aux racines
des polynômes de Tchebychev
N = 6; //Degré du polynôme de la partie non singulière
Dt=.01; //Pas de temps
NBiter = 100; //Nombre d'itérations maximale
```

Ces paramètres et leurs influence sur la qualité de la simulation numérique seront successivement étudiés en fonction de divers critères tels que  $E_{inf}$ ,  $E_{mc}$  et le temps de calcul cpu pour en déduire la meilleure configuration.

### 5.10.1 Influence du pas de temps $\Delta t$

Le pas de discrétisation représente un des paramètres les plus importants. Il provient de l'utilisation d'un schéma itératif. Nous représentons sur la figure 5.8, l'évolution en fonction du temps de  $E_{mc}$  pour plusieurs pas de discrétisation  $\Delta t$ .

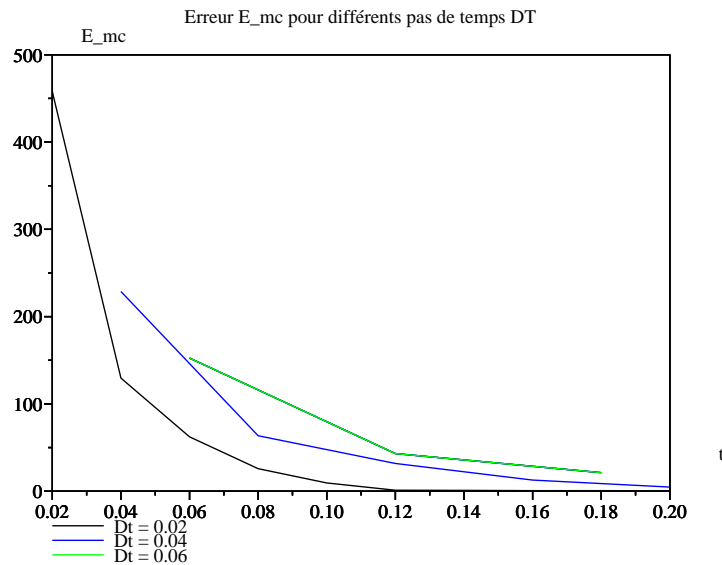


FIGURE 5.8 – Résidu  $E_{mc}$  en fonction du pas de temps  $\Delta t$

L'erreur  $E_{mc}$  diminue en fonction du temps, ce qui signifie une convergence vers une solution lorsque le temps augmente; ce que nous avons déjà observé lors de la première simulation. Nous observons également que plus le pas de temps  $\Delta t$  est petit, plus cette erreur est faible. Par contre, l'utilisation d'un pas de temps plus petit augmente l'erreur  $E_{mc}$  obtenue à la première itération.

La figure 5.9 représente l'erreur  $E_{inf}$  obtenue pour des diverses simulations de pas de temps différents. Logiquement, la solution numérique s'améliore lorsque le pas de temps diminue. Comme nous l'avons déjà remarqué, deux phases dans la résolution numérique sont clairement identifiable.

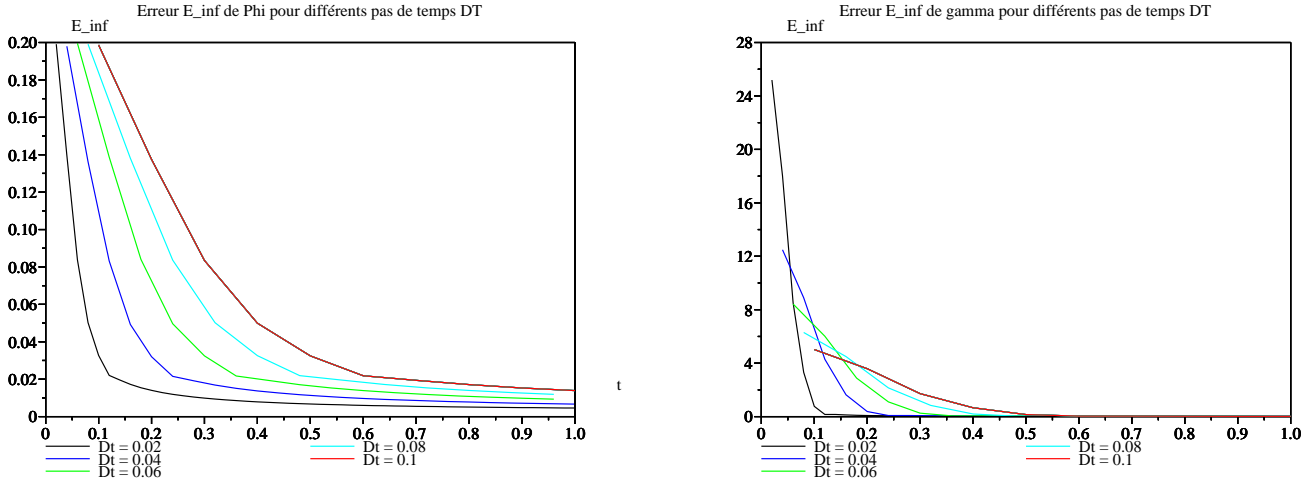


FIGURE 5.9 – Variation dans le temps de l'erreur  $E_{inf}$  en fonction de  $\Delta t$

### 5.10.2 Évolution de l'erreur en fonction de l'itération

La figure 5.10 montre une diminution rapide de  $E_{mc}$  dès les premières d'itérations. Le nombre d'itérations nécessaires pour que  $E_{mc}$  soit négligeable reste toujours inférieur à 10; ceci est peu influencé par la valeur du pas de discrétisation  $\Delta t$ .

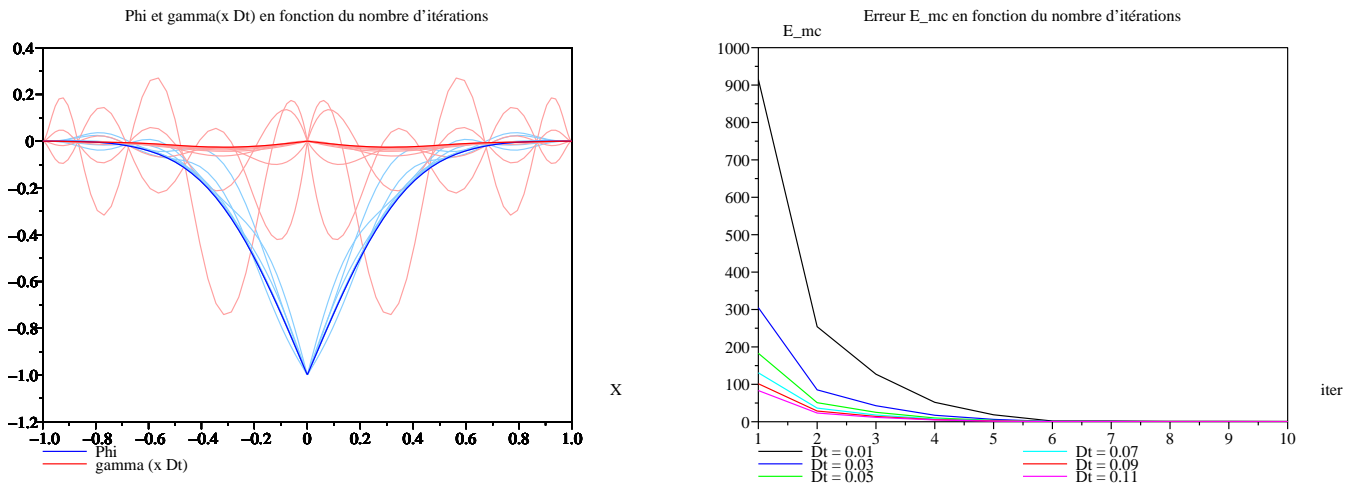


FIGURE 5.10 – Évolution de la solution numérique pour les 10 premières itérations

Il faut garder à l'esprit que cette résolution "locale" serait normalement intégrée dans la simulation "globale" d'un aquifère qui comprendrait l'influence d'autres éléments analytiques. Pour permettre d'éviter les erreurs induites par un petit pas de temps tout en gardant la précision apportée, nous pourrions définir un pas de temps  $\Delta t$  de cette résolution numérique qui soit inférieur au pas de temps défini à l'échelle du modèle aquifère. En d'autres termes, nous pourrions par exemple envisager de prendre en compte les valeurs de  $\Phi$  toutes les 10 itérations dans la modélisation de l'aquifère en régime transitoire.

Nous pouvons aussi observer sur la figure 5.11 la variation logarithmique des divers critères d'erreurs en fonction de l'itération.

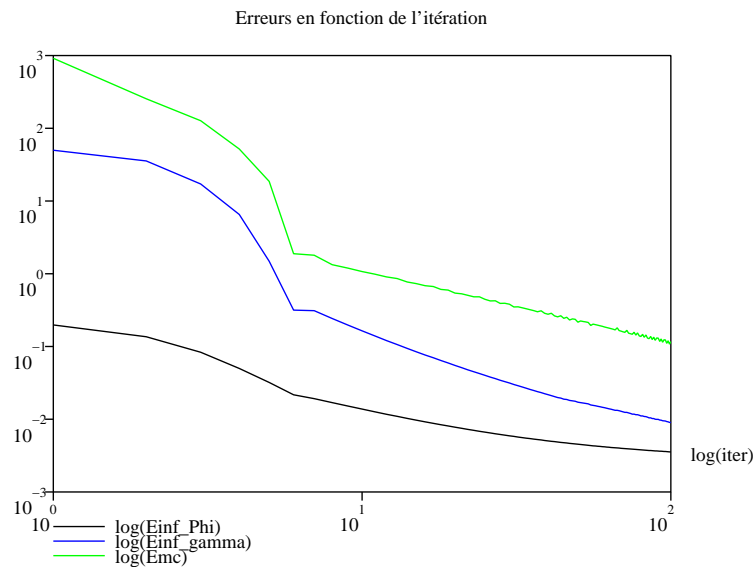


FIGURE 5.11 – Évolution logarithmique de l'erreur en fonction du nombre d'itérations avec  $\Delta t = 0.01$

Deux phases sont observables. Elle sont séparées par une singularité observable sur la courbe représentant l'erreur  $E_{mc}$ . La première phase, comprenant les premières itérations, met en évidence une convergence rapide des critères d'erreurs. Pour la deuxième phase, la variation des critères d'erreurs devient plus régulière. Le tableau 5.1 montre les ordres de convergence obtenus pour la deuxième phase. L'ordre de convergence de  $E_{mc}$  et  $E_{inf}(\gamma)$  est de 1, alors que  $E_{inf}(\Phi)$  est beaucoup plus faible.

Erreur	Ordre
$E_{inf}(\Phi)$	.3438
$E_{inf}(\gamma)$	.9369
$E_{mc}$	.9901

TABLE 5.1 – Ordre de convergence des erreurs en fonction du nombre d'itérations

Regardons maintenant l'erreur en fonction du pas de discrétisation  $\Delta t$ . Par régression linéaire sur les courbes logarithmiques, l'ordre de convergence à été calculé par rapport aux critères d'erreurs en fonction du pas de temps  $\Delta t$ . Le tableau 5.2 montre les résultats obtenus à divers temps  $t$ .

t	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$E_{inf}(\Phi)$	1.2888	1.0278	.7469	.6224	.5340
$E_{inf}(\gamma)$	1.8262	1.1556	.4929	.2426	.1715
$E_{mc}$	2.1376	.8552	.3798	-.0085	-.0082

TABLE 5.2 – Ordre de convergence, fonction de  $\Delta t$ , des critères d'erreurs à des temps fixés

La convergence diminue en fonction du temps comme observé plus haut. Nous remarquons que la convergence de  $E_{inf}(\gamma)$  est plus importante que celle de  $E_{inf}(\Phi)$  pour  $t = 0.1$  et  $t = 0.3$ , puis cela s'inverse. La convergence numérique évolue rapidement, jusqu'à devenir presque nulle à partir de  $t = 0.7$ .

Nous en concluons que le pas de temps devra être choisi en fonction de la variabilité des conditions aux limites. Plus elle sera importante, plus le pas de temps devra être petit. En même temps, il n'est pas nécessaire d'utiliser un pas de temps excessivement petit.

Une solution serait d'utiliser un pas de temps "local" inférieur a cela du système "global". Par exemple, le pas de temps "local" pourrait être choisi de l'ordre de 1/10 du pas de temps "global" puisque l'erreur  $E_{mc}$  devient négligeable au bout d'une dizaine d'itération.

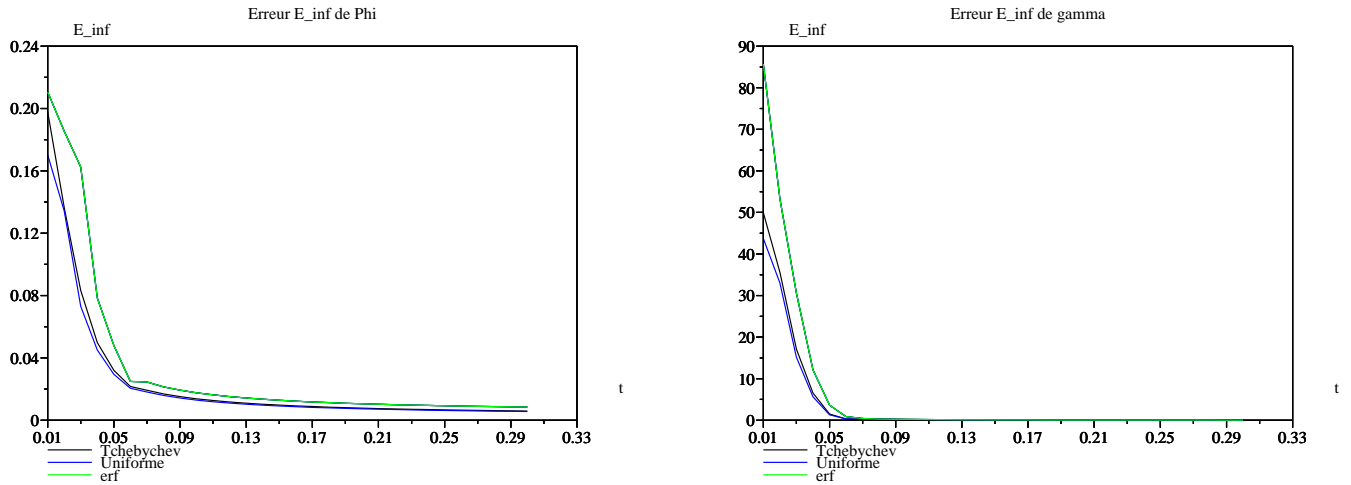
### 5.10.3 Influence du nombre de points de contrôles et de leurs répartition

La façon dont les points de contrôles sont répartis peut influencer la qualité de la simulation. Nous avons représenté sur la figure 5.12 trois répartitions différentes : Une répartition aux racines des polynômes de Tchebychev, des points de contrôles équidistants et une répartition fonction de la solution exacte, appelée répartition erf.

L'écart observé entre les résultats obtenus pour une répartition de Tchebychev et une répartition uniforme est très faible, même si de meilleurs résultats sont obtenus avec une répartition uniforme. Dans notre exemple, l'écart entre ces solutions numériques, au temps  $t = 0.3$ , est inférieur à  $10^{-3}$  pour  $\Phi$  et  $\gamma$ .

La précision de la méthode des moindres carrés dépend surtout du nombre de points de contrôles utilisés lors de la résolution du système. Lorsque ce paramètre augmente, la solution s'améliore régulièrement jusqu'à l'obtention d'une solution optimale lorsque  $NbX_j$  augmente. Cette solution contient toujours une erreur résiduelle. En conséquence, nous avons choisi de considérer l'écart entre la solution obtenue avec 600 points de contrôles et la solution numérique obtenue avec un nombre croissant de points de contrôles  $NbX_j$ ; avec la notation suivante :

$$E_{diff}(\Phi) = \frac{|E_{inf}(\Phi)(600) - E_{inf}(\Phi)(NbX_j)|}{\max_{X, t} |\delta\Phi|} \quad (5.95)$$


 FIGURE 5.12 – Influence du type de répartition des points de contrôles sur l'erreur  $\| \cdot \|_{\infty}$ 

De même, la différence  $E_{diff}(\gamma)$  fonction de  $E_{inf}(\Phi)$  et la différence  $E_{diff}(mc)$  fonction de  $E_{mc}$  sont définies. Le tableau 5.3 résume ces erreurs calculées, ainsi que le temps de calcul nécessaire :

$NbX_j$	14	16	20	24	28	36	52	100	300
$E_{diff}(\Phi)$	.05749	.008872	.009030	.004197	.001612	.0007962	.0003240	.0000078	8.527 E-07
$E_{diff}(\gamma)$	5.739	1.458	.2976	.2998	.1283	.04484	.01282	.0009197	.0000262
$E_{diff}(mc)$	2002	1971	1918	1873	1833	1761	1641	1371	675.9
Temps cpu	10.72	11.00	11.031	11.25	11.5	12.00	13.02	15.98	28.61

 TABLE 5.3 – Écart entre la solution obtenue avec 600 points de contrôles avec une solution numérique obtenue avec  $NbX_j$  points de contrôles

Une divergence de la solution numérique pour  $NbX_j \leq 12$  (valeurs non représentées sur le tableau) peut être observée. Dans notre exemple, la forme de la solution  $\Phi$  recherchée, paire par rapport à  $X = 0$ , est un polynôme de degré  $N + 4 = 10$  avec deux fonctions singulières. Ainsi, il est nécessaire d'avoir  $NbX_j \geq N + 8$  (avec  $N$  pair) pour avoir une estimation par moindres carrés et éviter une divergence de la solution numérique. Notons que l'erreur sur  $\gamma$  est toujours dépendante d'un facteur d'échelle  $\Delta t$ .

Pour mieux représenter cette convergence, nous avons tracé sur la figure 5.13 la représentation logarithmique de la convergence de la solution numérique en fonction du nombre de points de contrôles  $NbX_j$ .

Remarquons que, logiquement, l'erreur  $E_{diff}(mc)$  est très peu influencée par le nombre de points de contrôles avec une convergence de l'ordre de .3298. Par contre,  $E_{diff}(\Phi)$  et  $E_{diff}(\gamma)$  présentent une convergence régulière d'ordre respectivement  $4 \approx 3.577$  et  $4 \approx 3.837$ .

Nous remarquons que le paramètre utilisé par défaut, égal à 100 points de contrôles, implique une précision à  $10^{-2}$  près pour  $\Phi$  et  $\gamma$ ; ce qui peut être considéré comme suffisant.

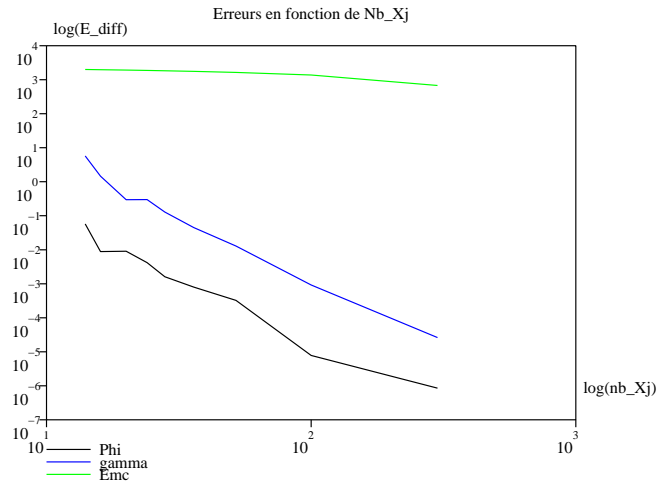


FIGURE 5.13 – Représentation logarithmique des erreurs  $E_{diff}$  de la solution numérique en fonction du nombre de points de contrôles  $NbX_j$

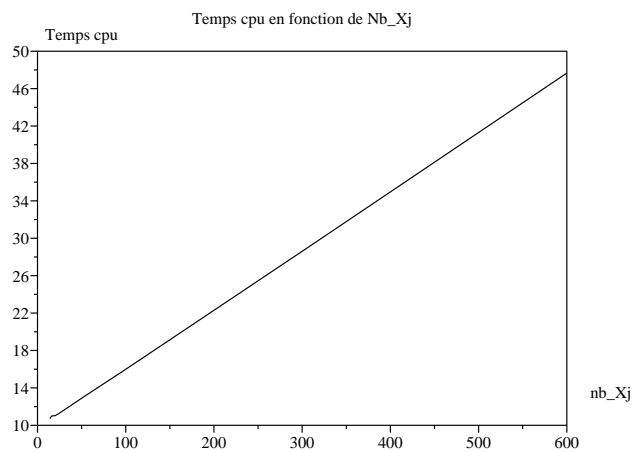


FIGURE 5.14 – Temps cpu en fonction du nombre de points de contrôles  $NbX_j$

Nous remarquons que  $NbX_j$  est lié linéairement à  $E_{mc}$  et au temps de calcul cpu. La relation linéaire entre le temps cpu et le nombre de points de contrôles, représenté sur la figure 5.14, nous montre une pente de 6.3%.

#### 5.10.4 Influence du degré $N$ des polynômes de Tchebychev

Dans la décomposition du potentiel  $\Phi$ , le degré polynômial le plus élevé des termes singuliers est 3. Pour obtenir une solution le polynôme non singulier doit donc nécessairement être d'un degré supérieur à 4. Nous observons numériquement qu'un degré  $N \geq 5$  est nécessaire pour obtenir la convergence; la solution divergeant fortement lorsque  $N < 4$ . La divergence pour  $N = 4$  peut s'expliquer par l'utilisation de contraintes sur le système d'équation.

Lors de nos tests numériques, un nombre excessivement important de points de contrôles avec  $NbX_j = 600$  à été utilisé pour permettre d'éviter l'influence de ce paramètre. Nous observons qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un trop grand degré  $N$ . Les simulations ont montré que pour  $N > 8$ , la solution n'est pas plus précise et se dégrade pour les premières itérations. La forte non régularité de la solution numérique lors des premières itérations peut expliquer le phénomène. Après un grand nombre d'itérations, les solutions se rapprochent tout en restant dans un intervalle de variation de l'ordre de  $10^{-3}m$ . Cela peut s'expliquer par des erreurs numériques qui annulent la précision apportée par l'utilisation d'un degré  $N$  élevé. L'utilisation d'un algorithme itératif simple pour le calcul des polynômes de Tchebychev peut être une part de l'explication. Notons que cette solution est stable et ne devient pas pour autant moins précise pour  $N$  grand.

Il est donc inutile d'augmenter excessivement le degré des polynômes de Tchebychev. Cela n'apporte pas d'amélioration significative de la simulation et augmente les temps de calculs inutilement.

### 5.11 Pré-estimation du résultat numérique a la première itération

Les analyses précédentes montrent de fortes perturbations induites par l'initialisation du système à résoudre. Ce qui provoque des erreurs importantes lors des premières itérations pour s'atténuer jusqu'à un niveau de stabilisation acceptable. Au bout de 10 itérations, une convergence régulière est obtenue.

L'interaction entre les éléments analytiques "locaux", résolvant le phénomène transitoire local, est beaucoup plus forte que celle que nous avons avec les éléments analytiques extérieurs à cette résolution. Partant de ce principe, la solution du problème numérique sera proche de la solution exacte du problème 1D qui est connue. L'initialisation des singularités d'ordre un et deux à partir des solutions exactes permettra d'obtenir une résolution numérique qui

converge plus régulièrement vers la solution du problème étudié ; évitant d'importantes erreurs numériques induites par l'initialisation.

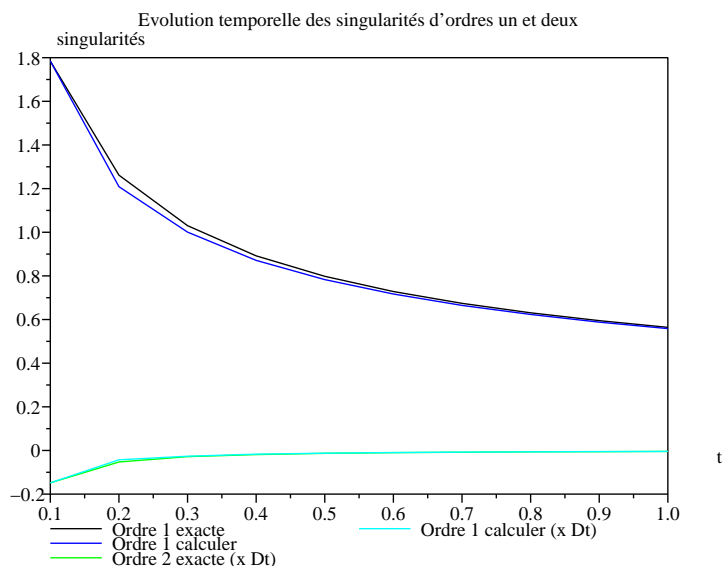


FIGURE 5.15 – Singularités d'ordre un et deux exactes et calculés

Fourni par les équations 5.88 et 5.89, les valeurs exactes de ces singularités sont imposées à la première itération sur notre problème 1D. Les éléments “extérieurs” sont supposés sans influence, mais cela permet néanmoins de comprendre le comportement numérique de la résolution numérique. Les mêmes paramètres de simulation que précédemment sont utilisés.

La figure 5.15 montre l'évolution temporelle de la valeur des singularités. La comparaison avec la figure 5.5 montre la nette différence sur l'évolution de la solution. La première phase qui montrait une solution perturbée n'existe plus et l'estimation des singularités converge régulièrement vers la solution exacte.

Erreur	Ordre
$E_{inf}(\Phi)$	.0081
$E_{inf}(\gamma)$	1.0029
$E_{mc}$	.9949

TABLE 5.4 – Ordre de convergence des erreurs en fonction du nombre d'itérations à partir des itérations où  $E_{mc}$  devient linéaire en logarithme

Les figures 5.16 5.17 5.18 et le tableau 5.4 montrent les autres résultats obtenus, confirmant un meilleur comportement pour la résolution numérique. Tout se passe comme si l'influence des erreurs numériques provoquées par le schéma numérique s'atténuait, ne restant principalement que les erreurs induites par la résolution par moindres carrés.

Cette méthode permet d'accélérer la vitesse de convergence, mais il reste préférable de définir un pas de temps local pour la résolution numérique du problème transitoire plus petit



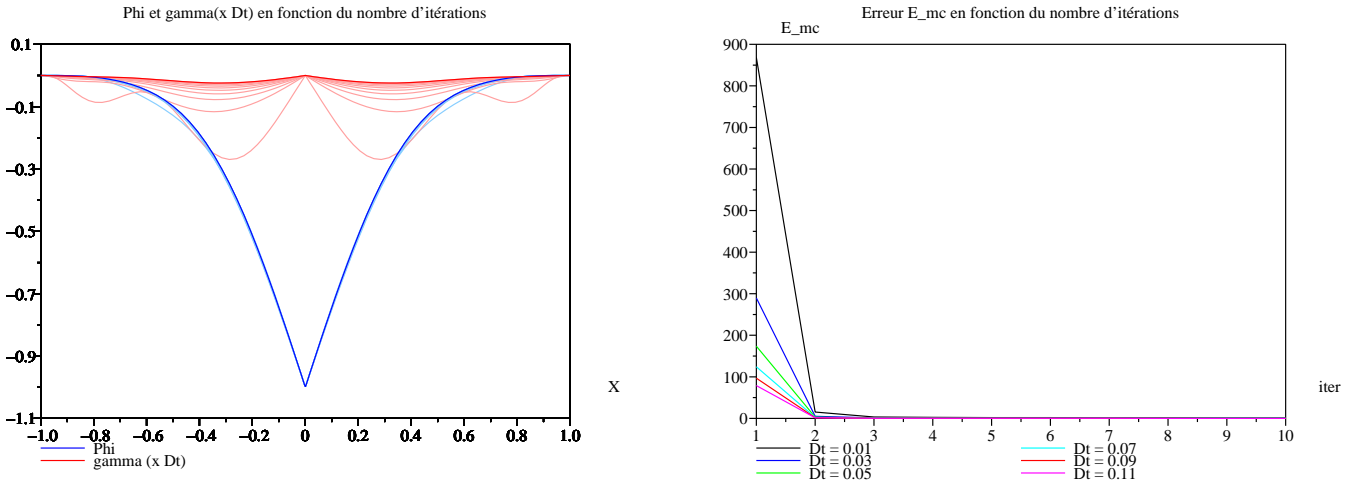


FIGURE 5.16 – Évolution de la solution numérique pour 10 itérations en temps

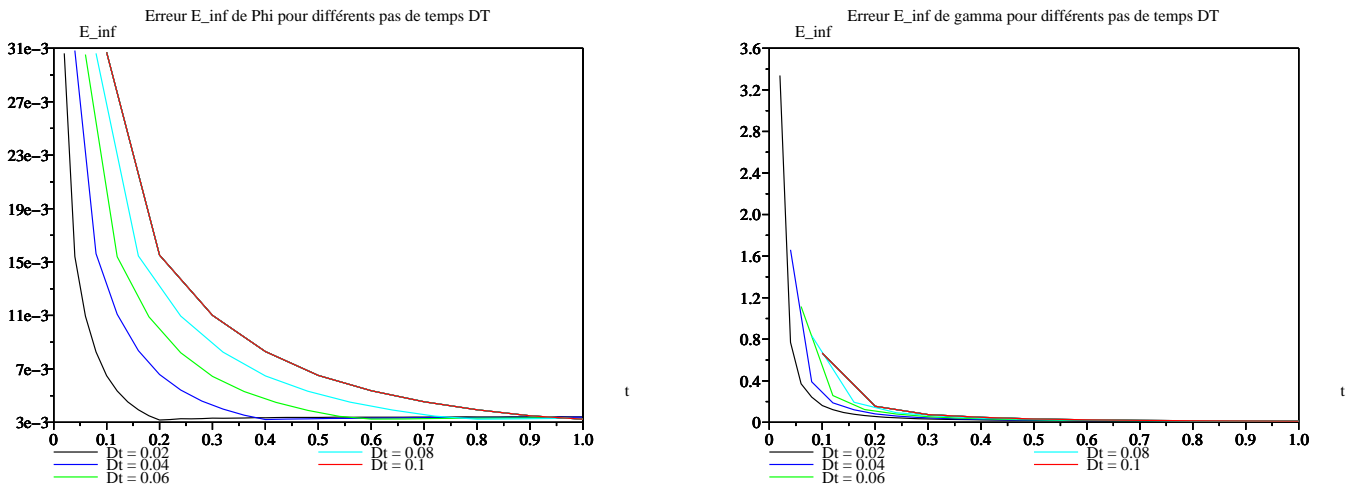


FIGURE 5.17 – Variation dans le temps de l'erreur  $E_{inf}$  en fonction de  $\Delta t$

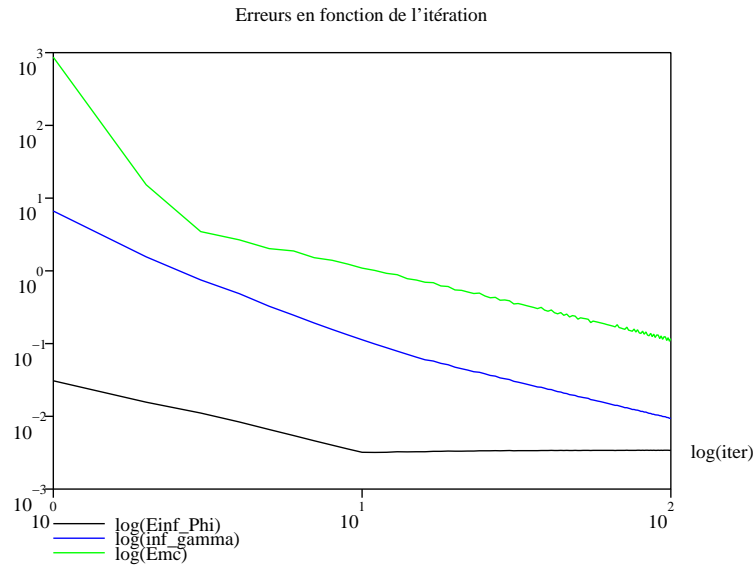


FIGURE 5.18 – Évolution de l’erreur en fonction du nombre d’itérations pour  $\Delta t = 0.01$

que celui pour la modélisation du modèle aquifère “global”. La figure 5.16 montre que 3 itérations suffisent pour notre problème, une dizaine d’itérations devraient être suffisantes pour une résolution dans un cadre plus général avec l’ajout d’éléments analytiques extérieurs au phénomène transitoire local. Les solutions analytiques n’étant pas aisément connues dans ce cas, il reste difficile d’estimer l’influence de ces éléments sur le comportement numérique de la solution.

## 5.12 Résolution de l’équation non linéaire pour une diffusivité non constante

### 5.12.1 Résolution par un schéma explicite

Rappelons que la forme de l’équation fondamentale de la résolution d’un écoulement en régime transitoire s’exprime par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{S_p}{k h} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - N \quad (5.96)$$

où la diffusivité est donnée par  $\alpha = \frac{k h}{S_p}$ . Celle-ci peut se formuler en fonction du potentiel  $\Phi$  avec l’équation 5.3, donnant ainsi une expression de l’équation 5.96 par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{S_p}{\sqrt{4 k \Phi}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - N \quad (5.97)$$

Cette équation non linéaire peut se résoudre par un schéma numérique de nature explicite par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{S_p}{\sqrt{4k\Phi_0}} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t} - N \quad (5.98)$$

C'est une résolution qui reste simple à mettre en œuvre. En partant de la procédure de résolution exposée dans les sections précédentes, il suffit de rajouter une réévaluation de la diffusivité à chacune des itérations de la résolution numérique.

Étant donné la nature des écoulements souterrains et l'ordre de grandeur des différents paramètres mis en jeu, la diffusivité varie faiblement pendant chacun des pas de temps "locaux". Cette modélisation peut donc être tout à fait acceptable dans le cadre d'une modélisation des écoulements souterrains.

### 5.12.2 Résolution par un schéma implicite

Malgré tout, il est reconnu que l'utilisation d'un schéma implicite est plus stable. Une telle méthode permet de résoudre le système d'équations par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{S_p}{\sqrt{4k\Phi}} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t} - N \quad (5.99)$$

La résolution de cette équation non linéaire peut se faire par des méthodes classiques de résolution d'équations non linéaires. On pourrait par exemple utiliser l'algorithme du gradient à pas optimal. Seulement, pour pouvoir conserver la décomposition de  $\Phi$  en éléments analytiques, il est nécessaire de combiner cette technique avec une méthode d'optimisation.

Reprenons le système 5.20, le problème consiste à trouver les  $\sigma$ ,  $\sigma_\gamma$  et  $\sigma_n$  tels que l'on minimise la fonctionnelle suivante :

$$J(\sigma, \sigma_\gamma, \sigma_n) = \left\| \frac{\gamma + \gamma_0}{2} - \frac{1}{\sqrt{4k\Phi}} \frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t} \right\|_{max} \quad (5.100)$$

avec

$$\Phi(X) = \sigma G_a(X) + \sigma_\gamma G_b(X) + \sum_{n=0}^N \sigma_n G_n(X) \quad (5.101)$$

Alors, on obtient les valeurs optimales de  $\sigma$ ,  $\sigma_\gamma$  et  $\sigma_n$  en appliquant le gradient à pas optimal sur cette fonctionnelle.

Il reste aussi possible d'établir une condition sur les singularités pour cette équation non linéaire en dérivant chacun des membres de l'équation 5.58, puis en posant  $X = 0$ .

## 5.13 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre un équivalent 1D aux récents éléments analytiques développés par STRACK [66, 65] et basé sur le calcul de WIRTINGER [74]. Il en a été dérivé des éléments 1D avec une influence spatialement bornée. Ces formes 1D nous ont permis d'éviter d'introduire les erreurs numériques dues au calcul des éléments eux même pour se focaliser sur le comportement numérique de la résolution elle-même. Cela nous permet d'en déduire une tendance pour le comportement numérique en 2D et d'établir des principes de résolution adaptés au problème considéré.

Bien sûr cette résolution s'est focalisée sur un problème local particulier, mais la méthode de résolution a tenu compte de l'influence d'éventuels éléments extérieurs. En particulier, elle conserve le principe de superposition des potentiels complexes propre à toute résolution par éléments analytiques. Ce qui rend cette méthode de résolution complètement intégrable dans un modèle numérique de l'aquifère par éléments analytiques.

La méthode de résolution utilisée est une combinaison entre un schéma aux différences finies en temps et une approximation par moindres carrées en espaces. C'est une méthode de résolution relativement instable lors des premières itérations et cette analyse a montré qu'il est préférable d'initialiser la résolution numérique en évaluant des singularités par leur solution locale exacte. Puisque la solution finale est généralement proche de la solution locale, cela permet de mieux régulariser la convergence vers la solution.

Pour intégrer cette résolution dans une modélisation numérique de tout un aquifère, nous avons montré qu'il faudrait prendre en compte un pas de temps "local" 10 fois inférieur au pas de temps de la modélisation de l'aquifère qui est choisi. En effet, le résultat obtenu après 10 itérations permet d'avoir une convergence suffisante vers la solution en évitant ainsi les possibles perturbations des premières itérations.

Dans le chapitre suivant, nous allons chercher à exploiter cette analyse pour établir une méthode de résolution similaire pour les éléments analytiques 2D en régime transitoire.



## Chapitre 6

# Méthode des éléments analytiques 2D pour le régime transitoire

LE CHAPITRE précédent était consacré à une étude d'une modélisation d'un problème 1D en régime transitoire avec le développement d'éléments analytiques 1D. Diverses techniques de modélisation y ont été exposées pour résoudre le problème des éléments analytiques adapté au régime transitoire. Il s'agit maintenant d'exploiter cette analyse pour établir une méthode de résolution pour le problème 2D.

Pour cela, nous avons utilisé le récent développement par STRACK [66, 65] de nouveaux éléments analytiques basés sur le calcul de WIRTINGER [74]. Ces éléments présentent l'avantage de représenter par exemple le "leakage" qui est induit par de l'infiltration entre 2 couches aquifères séparées par un aquitard. Ils peuvent permettre aussi de représenter des écoulements souterrains en régime transitoire par une méthode qui est présentée dans ce chapitre.

### 6.1 Position du problème

Le problème consiste à modéliser une variation brusque de potentiel constant sur un segment  $[z_1, z_2]$  représentant la rivière. L'aquifère est libre, de milieu considéré homogène et isotrope, de perméabilité constante  $k [L/T]$  et de coefficient d'emmagasinement  $S_p [.]$ . La base de l'aquifère est horizontale et considérée comme imperméable.

Pour l'étude, la hauteur d'eau  $h(x, t)$  est considérée de variation faible en temps et en espace. Ainsi, l'équation à résoudre est simplifiée en considérant la moyenne spatiale et temporelle de la hauteur d'eau sur tout l'aquifère  $h_{moy}$ . Elle s'exprime en fonction du coefficient de diffusivité  $\alpha [L^2/T]$  par

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k h_{moy}}{S_p} \quad (6.1)$$

Le choix de considérer une diffusivité  $\alpha$  constante permet de simplifier la modélisation exposée dans ce chapitre. Il serait relativement facile de l'étendre au cas d'une diffusivité  $\alpha$  non constante par une méthode "implicite" comme celle qui a été exposée à la fin du chapitre 5.

Le niveau initial de la nappe est considéré constant et d'élévation de référence  $\Phi_{init} = 0$ . Au temps  $t = 0$ , la rivière subit une variation brusque de son niveau d'eau avec un saut de potentiel de  $\Phi_1 - \Phi_{init}$ . Les conditions du problème physique sont alors :

$$\begin{cases} \Phi(z, 0) = \Phi_{init} & \text{pour } z \neq 0 \\ \Phi(z, t) = \Phi_1 & \text{pour } z \in [z_1, z_2] \text{ et } t \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

## 6.2 Étude de solutions particulières

### 6.2.1 Une solution 2D

L'étude des éléments analytiques pour le régime transitoire a été amorcée dans la thèse de ZAADNOORDIJK en 1988 [76]. Cette méthode est depuis devenue incompatible avec les diverses améliorations qui ont été développées par la suite pour le régime permanent.

Ces travaux restent néanmoins très utiles par l'étude de fonction particulière qui a été effectuée. En particulier, il a été présenté la solution exacte pour une ligne source d'extrémités  $(\xi_1, 0)$  et  $(\xi_2, 0)$  avec une répartition de flux spécifique  $\sigma$  constant en espace et en temps qui est supposée s'activer au temps  $t = 0$ . Elle s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} & \overset{exact}{\Phi}(\xi, \eta, t) = \\ & \sigma \left[ \frac{\eta}{8\pi\alpha} \left\{ (\xi - \xi_2) E_1 \left( \frac{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2}{4\alpha t} \right) - (\xi - \xi_1) E_1 \left( \frac{(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2}{4\alpha t} \right) \right\} \right. \\ & \quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\eta^2}{2\alpha} + t \right\} \int_{\sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-u^2} \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi - \xi_2}{\eta} u \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi - \xi_1}{\eta} u \right) \right\} du \\ & \quad \left. - \frac{\eta\sqrt{t}}{4\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\eta^2}{4\alpha t}} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi - \xi_2}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi - \xi_1}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha t}} \right) \right\} \right] \quad (6.3) \end{aligned}$$

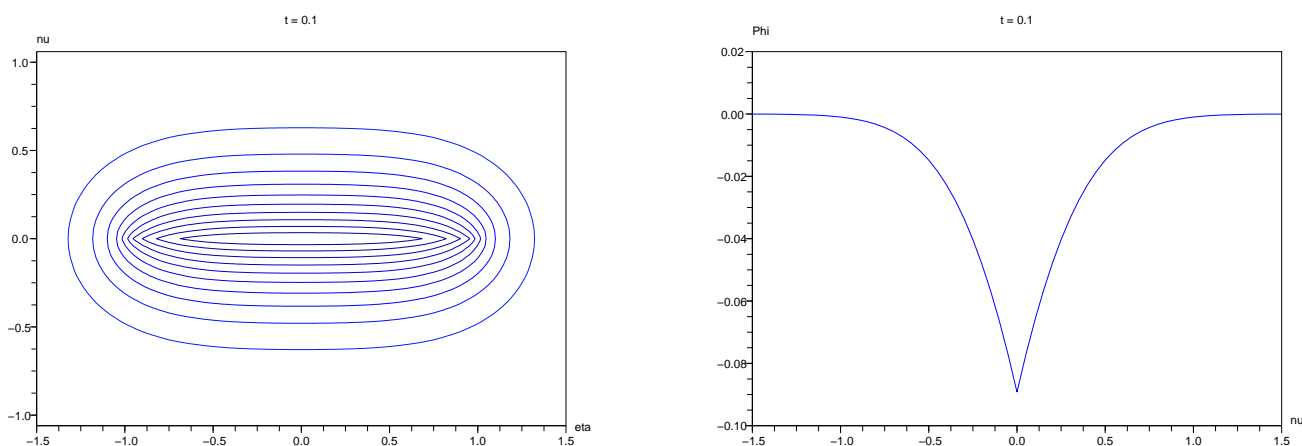
Dans cette expression, la fonction exponentielle intégrale  $E_1$  (ABRAMOWITZ [1], p229, équation 5.1.11) et son développement asymptotique se présente sous la forme

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.4)$$

$$= -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n n!} \quad \text{pour } |\arg z| < \pi \quad (6.5)$$

L'équation 6.3 est obtenue en intégrant sur le temps la fonction ligne source instantanée. En fait, il est relativement facile d'en déduire la forme générale pour une répartition de  $\sigma$  qui varie en temps comme celui d'un polynôme de degré  $n$ .

Cette fonction reste très singulière. Elle est fonction d'intégrales impropres qu'il faut calculer avec précaution. La méthode de calcul est présentée dans BARNES [5] d'après les travaux de ZAADNOORDIJK [76, 77]. Cette fonction  $y$  est décomposée en 3 parties qui sont calculées séparément. L'intégrale impropre  $y$  est représentée sous différentes formes qui dépendent de paramètre fonction de son comportement singulier. La figure 6.1 en montre une application numérique obtenue au temps  $t = 0.1$  pour le segment  $[-1, 1]$  de flux constant  $\sigma = 1$ .



(a) Courbe de niveau dans le plan.

(b) Coupe de la solution en  $\eta = 0$ .

FIGURE 6.1 – Résultat numérique de la solution exacte en transitoire.

Similairement à la méthode utilisée en 1D, il est possible de représenter le domaine d'influence de la fonction par une ellipse. Cette ellipse est entièrement déterminée par son demi-grand axe  $A$  et son demi-petit axe  $B$ . Pour notre exemple numérique, si nous posons successivement  $\xi = 0$  puis  $\eta = 0$ , il est possible d'estimer numériquement cette distance d'influence



en fonction d'une précision  $\epsilon$  par

$$\xi_{max} = \min\{\xi : \xi > 0 \text{ et } \left| \frac{exact}{\Phi}(\xi, 0, t) \right| < \epsilon\} \quad (6.6)$$

$$\eta_{max} = \min\{\eta : \eta > 0 \text{ et } \left| \frac{exact}{\Phi}(0, \eta, t) \right| < \epsilon\} \quad (6.7)$$

Ce qui donne une estimation du demi-grand axes  $A$  et du demi-petit axe  $B$  par

$$\xi_{max} = A \quad (6.8)$$

$$\eta_{max} = B \quad (6.9)$$

Ainsi, l'ellipse d'influence est déterminée par l'équation cartésienne réduite :

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{B}\right)^2 = 1 \quad (6.10)$$

Cette solution s'exprime dans l'espace local  $\boxed{Z}$  en posant  $\xi_1 = -1$  et  $\xi_2 = 1$ .

## 6.2.2 Une solution 1D

Nous pouvons remarquer sur la figure 6.1(b) la similarité entre le comportement de cette fonction sur l'axe  $Y = 0$  et la solution 1D déjà présentée au chapitre 5.

Cette solution 1D constitue une approximation raisonnable du comportement de la solution 2D sur l'axe  $Y = 0$ . Rappelons qu'elle se présente pour  $X > 0$  et  $t > 0$  sous la forme :

$$\Phi(X) = \Phi_{init} + (\Phi_1 - \Phi_{init}) \operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (6.11)$$

$$\gamma(X) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}(X) = (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{1}{\alpha t \sqrt{\pi}} e^{-u^2} u \quad \text{avec } u = \frac{X}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (6.12)$$

avec

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u) \quad \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv \quad (6.13)$$

La dérivée du potentiel  $\Phi(X)$  (équation 6.11) est donnée par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = (\Phi_1 - \Phi_{init}) \operatorname{erfc}'(u) du \quad (6.14)$$

$$= (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{-1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \quad (6.15)$$

celle de  $\gamma(X)$  (équation 6.11) est donnée par

$$\frac{\partial\gamma}{\partial X} = \frac{\partial^3\Phi}{\partial X^3} \quad (6.16)$$

$$= (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\alpha t)^{-3/2} e^{-u^2} [-2u^2 + 1] \quad (6.17)$$

Par conséquent, les singularités de cette fonction 1D sont définis en  $X = 0^+$  par

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}|_{X=0^+} = (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{-1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha t}} \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial X}|_{X=0^+} = (\Phi_1 - \Phi_{init}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\alpha t)^{-3/2} \quad (6.19)$$

Ces fonctions sont paires, nous obtenons donc une forme identique au signe près pour  $\frac{\partial\Phi}{\partial X}|_{X=0^-}$  et  $\frac{\partial\gamma}{\partial X}|_{X=0^-}$ . En particulier, cela permet de relier la singularité d'ordre 1 au flux  $\sigma_{1D}$  par

$$\sigma_{1D} = \frac{\partial\Phi}{\partial X}|_{X=0^+} - \frac{\partial\Phi}{\partial X}|_{X=0^-} \quad (6.20)$$

Dans le cas de notre exemple, nous avons  $\Phi_{init} = 0$  et  $\Phi_1 = -1$ . Par conséquent, le flux est donnée par

$$\sigma_{1D} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha t}} \quad (6.21)$$

Pour faire une correspondance avec l'équation 6.3, il suffit de considerer par exemple la moyenne sur le segment de droite 2D.

## 6.3 Formulation des éléments analytiques en régime transitoire

### 6.3.1 Transformation conforme utilisée

Considérons un segment  $[z_1, z_2]$  défini dans l'espace complexe  $\boxed{z}$  par la transformation conforme

$$Z = \frac{z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_1 - z_2)} \quad (6.22)$$

L'image du segment  $[z_2, z_1]$  devient le segment  $[-1, 1]$  dans l'espace  $\boxed{Z}$  (figure 6.2). Considérons maintenant la transformation

$$Z = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi}{\nu} + \frac{\nu}{\chi} \right) \quad (6.23)$$

Cette transformation est similaire à celle qui a été utilisée au chapitre 3 pour les éléments analytiques classiques. Elle permet de transformer l'ellipse de foyer  $-1$  et  $1$  dans l'espace  $\boxed{Z}$  au cercle unité  $\chi\bar{\chi} = 1$  de l'espace  $\boxed{\chi}$  (figure 6.2). Le segment  $[-1, 1]$  devient alors le cercle de rayon  $\nu$ .

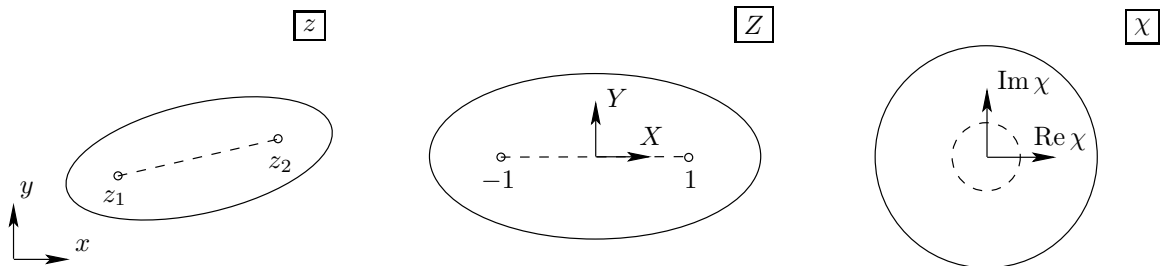


FIGURE 6.2 – Transformations conformes utilisées.

Dans l'espace  $\boxed{Z}$ , l'ellipse est définie par l'équation cartésienne réduite :

$$\left( \frac{X}{A} \right)^2 + \left( \frac{Y}{B} \right)^2 = 1 \quad (6.24)$$

en fonction du demi grand axe  $A$  et du demi petit axe  $B$ . Ceux-ci peuvent être reliés au paramètre  $\nu$  par

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} + \nu \right) \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} - \nu \right) \quad (6.25)$$

De ces 2 relations, nous pouvons en déduire l'expression de  $\nu$  en fonction de  $A$  et  $B$  par

$$\nu = A - B \quad (6.26)$$

### 6.3.2 Formulation utilisant les polynômes de Tchebychev

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\boxed{\chi}$ , alors elle peut s'exprimer par une série de Laurent par

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \chi^n + b_n \chi^{-n}) \quad (6.27)$$

Pour conserver la continuité de cette fonction holomorphe dans  $\boxed{Z}$ , il est nécessaire d'établir une relation de continuité en  $\chi \bar{\chi} = \nu^2$ . Cela se traduit par la condition

$$f(\chi) = f(\bar{\chi}) \quad (6.28)$$

D'après  $\bar{\chi} = \frac{\nu^2}{\chi}$ , nous avons la relation

$$b_n = a_n \nu^{2n} \quad (6.29)$$

La fonction analytique  $f$  peut donc s'exprimer par

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ \chi^n + \left( \frac{\nu^2}{\chi} \right)^n \right] \quad (6.30)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n \psi_n \quad \text{avec} \quad \psi_n = \frac{1}{2} \left[ \chi^n + \left( \frac{\nu^2}{\chi} \right)^n \right] \quad (6.31)$$

Ceci va justifier le choix d'exprimer les fonctions analytiques dans une base de fonctions  $\psi_n$  au lieu de la traditionnelle base de fonctions  $T_n$ . Par conséquent, les différentes expressions pour  $\psi_n$  et  $T_n$  sont données en fonction de  $\chi$  par

$$\psi_n = \frac{1}{2} \left[ \chi^n + \left( \frac{\nu^2}{\chi} \right)^n \right] \quad (6.32)$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\chi}{\nu} \right)^n + \left( \frac{\nu}{\chi} \right)^n \right] \quad (6.33)$$

Ce qui met en évidence la relation  $\psi_n = \nu^n T_n$ . Par conséquent, il est possible de mettre

en évidence une relation de récurrence pour  $\psi_n$  similaire à celle pour  $T_n$  par

$$\psi_{n+1} = 2\psi_1\psi_n - \nu^2\psi_{n-1} \quad (6.34)$$

$$T_{n+1} = 2ZT_n - T_{n-1} \quad (6.35)$$

avec  $\psi_1 = \nu Z$ .

### 6.3.3 Écriture en fonction des $\tilde{F}_n$

En suivant une démarche similaire à celle qui est présentée dans STRACK [65], nous définissons la fonction  $\tilde{F}_n$  par

$$\tilde{F}_n(Z) = - \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_n(\delta)}{Z - \delta} d\delta \quad (6.36)$$

Alors d'après 6.34, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n+1} &= - \int_{-1}^{+1} \frac{2\delta \nu \psi_n(\delta)}{Z - \delta} d\delta + \int_{-1}^{+1} \frac{\nu^2 \psi_{n-1}(\delta)}{Z - \delta} d\delta \\ &= 2 \int_{-1}^{+1} \nu \psi_n(\delta) d\delta - 2Z \int_{-1}^{+1} \frac{\nu \psi_n(\delta)}{Z - \delta} d\delta - \nu^2 \tilde{F}_{n-1}(Z) \\ &= 2Z \nu \tilde{F}_n(Z) - \nu^2 \tilde{F}_{n-1}(Z) + 2\nu \int_{-1}^{+1} \psi_n(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (6.37)$$

Pour calculer l'intégrale sur  $\psi_n$ , nous utilisons le calcul de l'intégrale de  $T_n$  qui est effectué dans STRACK [65]. Le résultat est donnée par

$$\int_{-1}^{+1} T_n(\delta) d\delta = \frac{-1}{n^2 - 1} [1 - (-1)^{n+1}] \quad \text{pour } n > 1 \quad (6.38)$$

Cette relation y a été établie en exprimant  $T_n$  en fonction de  $\chi$ , puis par un développement qui utilise la relation :

$$\int T_n dZ = \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{n+1}}{n+1} - \frac{T_{n-1}}{n-1} \right] \quad \text{pour } n > 1 \quad (6.39)$$

L'équation 6.38 permet ainsi d'obtenir une relation similaire pour l'intégrale de  $\psi_n$  par

$$\int_{-1}^{+1} \psi_n(\delta) d\delta = \frac{-\nu^n}{n^2 - 1} [1 - (-1)^{n+1}] \quad \text{pour } n > 1 \quad (6.40)$$

Finalement, nous obtenons une relation de récurrence pour  $\tilde{F}_{n+1}$  par

$$\tilde{F}_{n+1} = 2Z \nu \tilde{F}_n(Z) - \nu^2 \tilde{F}_{n-1}(Z) - \frac{2\nu^{n+1}}{n^2 - 1} [1 - (-1)^{n+1}] \quad \text{pour } n > 1 \quad (6.41)$$

Le calcul de  $\tilde{F}_0$  et  $\tilde{F}_1$  peut se faire directement d'après l'expression 6.36 avec  $\psi_0 = 1$  et  $\psi_1 = Z\nu$  par

$$\tilde{F}_0 = \ln \frac{Z-1}{Z+1} \quad (6.42a)$$

$$\tilde{F}_1 = Z\nu \ln \frac{Z-1}{Z+1} + 2\nu \quad (6.42b)$$

### 6.3.4 Élément linesink

Nous avons déjà vu au chapitre 3 que l'expression du potentiel complexe pour une ligne source peut s'écrire avec la fonction de saut  $\mu(Z)$  par

$$\Omega(Z) = \frac{1}{2\pi} \left( \mu(Z) \ln \frac{Z-1}{Z+1} + q(Z) \right) - \frac{\mu(1)}{2\pi} \ln(Z-1) + \frac{\mu(-1)}{2\pi} \ln(Z+1) \quad (6.43)$$

où  $q(Z)$  est un polynôme de correction qui permet d'avoir le bon comportement à l'infini.

Nous considérons maintenant une expression de  $\mu(Z)$  dans la base des fonctions  $\psi_n(Z)$  par

$$\mu(Z) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(Z) \quad (6.44)$$

Puisque la formulation des  $\tilde{F}_n$  présentés à la section précédente intègrent directement le polynôme de correction  $q(Z)$ , le potentiel complexe peut se réécrire directement en fonction des  $\tilde{F}_n$  par

$$\Omega(Z) = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \tilde{F}_n(Z) - \frac{\mu(1)}{2\pi} \ln(Z-1) + \frac{\mu(-1)}{2\pi} \ln(Z+1) \quad (6.45)$$

Chacune des fonctions  $\tilde{F}_n$  y est définie par

$$\tilde{F}_n = \psi_n \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{b}_m \psi_m \quad (6.46)$$

$$= 2\psi_n \ln \frac{\chi-\nu}{\chi+\nu} + \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{b}_m \psi_m \quad (6.47)$$

La relation de récurrence de l'équation 6.41 permet de fournir directement les coefficients  $\tilde{b}_n$  de sorte à avoir un comportement de l'ordre de  $\frac{1}{Z}$  à l'infini. Seulement, nous souhaiterions imposer une condition plus forte en bornant le domaine d'influence de cet élément à une forme elliptique.

Nous voulons imposer une racine de multiplicité 4 sur le contour d'une ellipse de foyers

les extrémités du segment. Pour cela, nous ajoutons un polynôme de correction au potentiel complexe précédent. Nous obtenons alors une expression du potentiel  $\overset{a}{\Omega}(Z)$  par

$$\overset{a}{\Omega}(Z) = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n F_n(Z) - \frac{\mu(1)}{2\pi} \ln(Z-1) + \frac{\mu(-1)}{2\pi} \ln(Z+1) \quad (6.48)$$

Chacune des fonctions  $F_n$  y est définie par

$$F_n = \tilde{F}_n + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \psi_m n \quad (6.49)$$

$$= \psi_n \ln \frac{Z-1}{Z+1} + \sum_{m=0}^{n-1} (\tilde{b}_m + b_m) \psi_m \quad (6.50)$$

$$= 2\psi_n \ln \frac{\chi - \nu}{\chi + \nu} + \sum_{m=0}^{n-1} (\tilde{b}_m + b_m) \psi_m \quad (6.51)$$

Les termes logarithmiques fonctions de  $\mu(-1)$  et  $\mu(1)$  peuvent se réécrire en développant l'expression de  $\mu(Z)$  par

$$H_0(Z) = -\frac{\mu(1)}{2\pi} \ln(Z-1) + \frac{\mu(-1)}{2\pi} \ln(Z+1) \quad (6.52)$$

$$= -\frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n [\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.53)$$

Cette formulation permet de prendre en compte le calcul des  $\tilde{F}_n$  obtenus par la formule de récurrence 6.41 . Elle permet aussi de partir d'une solution ayant un comportement régulier à l'infini avant d'y imposer une condition plus forte par les moindres carrés. Soit

$$\overset{a}{G}_n(Z) = \tilde{F}_n + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \psi_m - [\ln(Z-1) - (-1)^m \ln(Z+1)] \quad (6.54)$$

alors, imposer que  $\overset{a}{\Phi}$  ait une racine de multiplicité 4 sur le contour de l'ellipse se traduit par une condition sur les dérivées successives de  $\overset{a}{G}_n(Z)$  en fonction de  $Z$  pour tout  $n = 0, \dots, N$  par

$$\overset{a}{G}_n(Z) = 0 \quad \frac{\partial \overset{a}{G}_n}{\partial Z}(Z) = 0 \quad \frac{\partial^2 \overset{a}{G}_n}{\partial Z^2}(Z) = 0 \quad \frac{\partial^3 \overset{a}{G}_n}{\partial Z^3}(Z) = 0 \quad (6.55)$$

Cette contrainte est en fait imposée au sens des moindres carrés sur l'ensemble des points de contrôle  $\{\overset{\circ}{\chi}_j \quad j = 1, \dots, \overset{\circ}{N}\}$  répartis uniformément le long du cercle  $\chi \bar{\chi} = 1$  dans  $\square \chi$ .

Le calcul des dérivées successives de  $F_n(Z)$  et  $\psi_n(Z)$  se déduisent directement des formules

de récurrence fournies par les équations 6.41 et 6.34. Pour  $\widetilde{F}_n$  nous obtenons :

$$\widetilde{F}'_{n+1} = 2\widetilde{F}_n + 2Z\widetilde{F}'_n - \widetilde{F}'_{n-1} \quad (6.56a)$$

$$\widetilde{F}''_{n+1} = 4\widetilde{F}'_n + 2Z\widetilde{F}''_n - \widetilde{F}''_{n-1} \quad (6.56b)$$

$$\widetilde{F}'''_{n+1} = 6\widetilde{F}''_n + 2Z\widetilde{F}'''_n - \widetilde{F}'''_{n-1} \quad (6.56c)$$

avec la notation abrégé de la dérivée par rapport à  $Z$ .

Ainsi, le problème revient à résoudre l'ensemble des  $b_n$  du système d'équations suivant pour tout  $n = 0, \dots, N$  :

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi_n = -\widetilde{F}_n + [\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.57a)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi'_n = -\widetilde{F}'_n + \frac{\partial}{\partial Z} [\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.57b)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi''_n = -\widetilde{F}''_n + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} [\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.57c)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi'''_n = -\widetilde{F}'''_n + \frac{\partial^3}{\partial Z^3} [\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.57d)$$

Finalement, la partie réelle du potentiel complexe  $\overset{a}{\Omega}(Z)$  peut s'exprimer par

$$\overset{a}{\Phi}(Z) = \frac{1}{2} \left[ \overset{a}{\Omega}(Z) + \overline{\overset{a}{\Omega}(Z)} \right] \quad (6.58)$$

$$= \frac{1}{2} [h_0(Z) + h_0(\overline{Z}) + H_0(Z) + H_0(\overline{Z})] \quad (6.59)$$

avec

$$h_0(Z) = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n F_n(Z) \quad (6.60)$$

$$H_0(Z) = -\frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n L_n(Z) \quad (6.61)$$

$$L_n(Z) = -[\ln(Z-1) - (-1)^n \ln(Z+1)] \quad (6.62)$$



### 6.3.5 Élément divergence line sink

L'élément divergence linesink  $\overset{b}{\Phi}$  est choisi de sorte à avoir un Laplacien égal à une linesink. Par conséquent, nous choisissons :

$$4 \frac{\partial^2 \overset{b}{\Phi}}{\partial Z \partial \bar{Z}} = \overset{a}{\Phi}(Z) \quad (6.63)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \overset{a}{\Omega}(Z) + \overline{\overset{a}{\Omega}}(Z) \right] \quad (6.64)$$

$$= \frac{1}{2} [h_0(Z) + h_0(\bar{Z}) + H_0(Z) + H_0(\bar{Z})] \quad (6.65)$$

Le calcul de  $\overset{b}{\Phi}$  s'effectue alors en intégrant successivement par rapport à  $Z$  et  $\bar{Z}$  selon une démarche similaire à celle qui se trouve dans STRACK [65]. Cela nous amène à une expression de  $\overset{b}{\Phi}(Z)$  de la forme :

$$\begin{aligned} \overset{b}{\Phi}(Z) = \frac{1}{8} \{ & (\bar{Z} - Z) [h_1(Z) + H_1(Z) - h_1(\bar{Z}) - H_1(\bar{Z})] \\ & + 2 [h_2(Z) + H_2(Z) - h_2(\bar{Z}) - H_2(\bar{Z})] \} \end{aligned} \quad (6.66)$$

avec

$$h_1(Z) = \int h_0 dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \int F_n(Z) dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \overset{1}{F}_n(Z) \quad (6.67)$$

$$h_2(Z) = \int h_1 dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \iint F_n(Z) dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \overset{2}{F}_n(Z) \quad (6.68)$$

$$H_1(Z) = \int H_0 dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \int L_n(Z) dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \overset{1}{L}_n(Z) \quad (6.69)$$

$$H_2(Z) = \int H_1 dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \iint L_n(Z) dZ = \frac{L^2}{8\pi} \sum_{n=0}^N a_n \overset{2}{L}_n(Z) \quad (6.70)$$

en introduisant les notations

$$\overset{1}{F}_n(Z) = \int F_n(Z) dZ \quad \overset{2}{F}_n(Z) = \int \overset{1}{F}_n(Z) dZ \quad (6.71)$$

$$\overset{1}{L}_n(Z) = \int L_n(Z) dZ \quad \overset{2}{L}_n(Z) = \int \overset{1}{L}_n(Z) dZ \quad (6.72)$$

Leurs calculs sont données d'après STRACK [65] par

$${}^1F_n(Z) = \frac{1}{2} \frac{F_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2} \frac{F_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n^2-1} [\ln(Z-1) + \ln(Z+1)] \quad (n = 2m, m \in \mathbb{N}^*) \quad (6.73a)$$

$${}^1F_n(Z) = \frac{1}{2} \frac{F_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2} \frac{F_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n^2-1} F_0 \quad (n = 2m+1, m \in \mathbb{N}^*) \quad (6.73b)$$

et

$$\begin{aligned} {}^2F_n(Z) &= \frac{F_{n+2}}{4(n+1)(n+2)} - \frac{F_n}{2(n^2-1)} - \frac{F_{n-2}}{4(n-1)(n-2)} \\ &\quad - \frac{3}{(n^2-1)(n^2-2)} [\ln(Z-1) - (-1)^{n+2} \ln(Z+1)] + K_1(Z) \end{aligned} \quad (6.74)$$

avec

$$\begin{aligned} K_1(Z) &= \frac{1}{n^2+1} [(Z-1) \ln(Z+1) - (-1)^{n+1}(Z+1) \ln(Z+1) \\ &\quad - (Z-1) + (-1)^{n+1}(Z+1)] \end{aligned} \quad (6.75)$$

Nous choisissons de reformuler le potentiel  $\Phi$  sous une forme plus concise par

$${}^b\Phi(Z) = \sum_{n=0}^N a_n {}^bG_n(Z) \quad (6.76)$$

avec

$$\begin{aligned} {}^bG_n(Z) &= \frac{1}{8} (\bar{Z} - Z) \left[ {}^1F_n(Z) + L_n(Z) - {}^1F_n(\bar{Z}) - L_n(\bar{Z}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ {}^2F_n(Z) + L_n(Z) - {}^2F_n(\bar{Z}) - L_n(\bar{Z}) \right] + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \psi_m \end{aligned} \quad (6.77)$$

Nous choisissons alors d'imposer une condition similaire à celle pour la linesink avec une racine de multiplicité 4 sur le contour de l'ellipse. Cela se traduit par une condition sur les dérivées successives de  ${}^bG_n(Z)$  en fonction de  $Z$  pour tout  $n = 0, \dots, N$  par

$${}^bG_n(Z) = 0 \quad \frac{\partial {}^bG_n}{\partial Z}(Z) = 0 \quad \frac{\partial^2 {}^bG_n}{\partial Z^2}(Z) = 0 \quad \frac{\partial^3 {}^bG_n}{\partial Z^3}(Z) = 0 \quad (6.78)$$

Cette contrainte est imposée au sens des moindres carrés sur l'ensemble des points de contrôle  $\{\overset{\circ}{\chi}_j \mid j = 1, \dots, N\}$  répartis uniformément le long du cercle  $\chi \bar{\chi} = 1$ .

Par conséquent, le problème revient à résoudre l'ensemble des  $b_n$  du système d'équations

suivant pour tout  $n = 0, \dots, N$  :

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi_n = -R_n \quad (6.79a)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi'_n = -\frac{\partial R_n}{\partial Z} \quad (6.79b)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi''_n = -\frac{\partial^2 R_n}{\partial Z^2} \quad (6.79c)$$

$$\sum_{n=0}^N b_n \psi'''_n = -\frac{\partial^3 R_n}{\partial Z^3} \quad (6.79d)$$

avec

$$R_n = \frac{1}{8} (\bar{Z} - Z) \left[ F_n^1(Z) + L_n^1(Z) - F_n^1(\bar{Z}) - L_n^1(\bar{Z}) \right] + \frac{1}{4} \left[ F_n^2(Z) + L_n^2(Z) - F_n^2(\bar{Z}) - L_n^2(\bar{Z}) \right] \quad (6.80)$$

### 6.3.6 Élément non singulier

Introduisons la variable  $\zeta$  définie par

$$\zeta = \frac{2\nu}{1-\nu^4} (Z - \nu^2 \bar{Z}) \quad (6.81)$$

alors, en développant  $\zeta \bar{\zeta}$  en fonction de  $X$  et  $Y$ , nous obtenons :

$$\zeta \bar{\zeta} = \frac{\nu^2}{4} [(1-\nu^2)^2 X^2 + (1+\nu^2)^2 Y^2] = \left( \frac{X}{A} \right)^2 + \left( \frac{Y}{B} \right)^2 \quad (6.82)$$

Ce qui signifie que  $\zeta \bar{\zeta} = 1$  représente l'ellipse de demis grands axes  $A$  et  $B$  (voir l'équation 6.24).

Par conséquent, nous représentons le potentiel non singulier par une série qui est fonction de  $\psi_m$  et  $\bar{\psi}_n$  par

$$\overset{ns}{\Phi}(Z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^m \left[ a_{mn} \overset{ns}{G}_{mn}(Z, \bar{Z}) + \overline{a_{mn}} \overset{ns}{G}_{mn}(Z, \bar{Z}) \right] \quad (6.83)$$

avec

$$\overset{ns}{G}_{mn} = (\zeta\bar{\zeta} - 1)^4 \psi_m(Z) \psi_n(\bar{Z}) \quad (6.84)$$

$$= (\zeta\bar{\zeta} - 1)^4 \psi_m(Z) \overline{\psi_n(Z)} \quad (6.85)$$

Cet élément servira à vérifier l'équation différentielle à résoudre pour la décomposition de  $\Phi$  fournie par l'équation 6.87.

## 6.4 Méthode de résolution numérique

### 6.4.1 Système d'équations à résoudre

Nous proposons de résoudre ce problème en combinant un schéma aux différences finies centrées en temps et une méthode de résolution par moindres carrés en espace de façon similaire à la méthode utilisée en 1D (chapitre 5). Cela revient à résoudre le système donné par

$$\begin{cases} \gamma = \nabla^2 \Phi \\ \gamma = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi - \left[ \gamma_0 + \frac{2\Phi_0}{\alpha \Delta t} \right] \end{cases} \quad (6.86)$$

avec la recherche d'une solution décomposée sous la forme :

$$\Phi = \overset{a}{\Phi} + \overset{b}{\Phi} + \overset{ns}{\Phi} \quad (6.87)$$

où  $\overset{a}{\Phi}$  est une fonction harmonique,  $\overset{b}{\Phi}$  est une fonction bi-harmonique,  $\overset{ns}{\Phi}$  est une série polynômiale permettant de satisfaire l'équation différentielle au sens des moindres carrés.

D'après l'équation A.8 de l'annexe A, nous avons l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$  par

$$\gamma = \Delta \Phi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (6.88)$$

$$= \frac{16}{L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z \partial \bar{Z}} \quad (6.89)$$

$$= \frac{16}{L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi \partial \bar{\chi}} \frac{\partial \chi}{\partial Z} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{Z}} \quad (6.90)$$

avec  $L^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$  et en utilisant l'équation 6.22 reliant la variable  $Z$  à la variable  $z$ . Puisque

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} - \frac{\nu}{\chi^2} \right) \quad (6.91)$$

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{\chi}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu} - \frac{\nu}{\bar{\chi}^2} \right) \quad (6.92)$$

nous obtenons une expression du Laplacien dans l'espace  $\boxed{\chi}$  par

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi \partial \bar{\chi}} = \frac{L^2}{64} \gamma \left[ \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{\nu^2}{\chi^2 \bar{\chi}^2} \right] \quad (6.93)$$

Le système à résoudre s'exprime donc en coordonnées locale par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi \partial \bar{\chi}}(\chi) = \frac{L^2}{64} \gamma \left[ \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{\nu^2}{\chi^2 \bar{\chi}^2} \right] \\ \frac{1}{2} (\gamma(\chi) + \gamma_0(\chi)) = \frac{1}{\alpha \Delta t} [\Phi(\chi) - \Phi_0(\chi)] \end{cases} \quad (6.94)$$

avec la recherche d'une solution décomposée sous la forme :

$$\Phi(\chi) = \overset{a}{\Phi}(\chi) + \overset{b}{\Phi}(\chi) + \overset{ns}{\Phi}(\chi) \quad (6.95)$$

### 6.4.2 Définition des points de contrôles

Pour satisfaire l'équation différentielle, des points de contrôles sont répartis dans le domaine  $\mathcal{D}$  et au bord  $\mathcal{D}_\nu$  (sur le segment). Pour avoir un système sur-déterminé, leur nombre restera toujours supérieur au nombre d'inconnues du système d'équations à résoudre. Une répartition de Tchebychev est choisie pour chacune des directions en fonction d'un angle de variation uniforme par

$$\chi_{j_0, k} = R_{j_0} e^{i \theta_k} \quad (6.96)$$

avec

$$R_{j_0} = \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{j_0}{J} \right) \right] \frac{1 - \nu}{2} + \nu \quad \text{pour } j_0 = 1, \dots, J_0 \quad (6.97)$$

$$\theta_k = k \frac{2\pi}{K} \quad \text{pour } k = 0, \dots, K - 1 \quad (6.98)$$

Chacun des points  $\chi_{j_0, k}$  ainsi défini est fonction des paramètres  $j_0 = 1, \dots, J_0$  et  $k = 0, \dots, K - 1$ . Leur nombre est donc de  $J_0 \times K$ . Ces points peuvent se réécrire avec un indice global par

$$\chi_j = \chi_{j_0, k} \quad \text{avec } j = kJ + j_0 \quad \text{et } j_0 = 1, \dots, J_0 \quad (6.99)$$

Sur le segment défini par  $[-1, 1]$  dans  $\boxed{Z}$ , la répartition de Tchebychev classique est choisie. Cela se traduit dans  $\boxed{\chi}$  par une répartition uniforme de points de long du cercle  $\chi \bar{\chi} = \nu^2$ , i.e. par

$$\overset{\nu}{\chi}_k = \nu e^{i \theta_k} \quad \text{avec } \theta_k = k \frac{2\pi}{K} \quad \text{pour } k = 0, \dots, K - 1 \quad (6.100)$$

Nous pouvons remarquer que cette répartition est cohérente avec celle au domaine puisque nous avons la relation avec les points aux domaines donnée par

$$\overset{\nu}{\chi}_k = \chi_{j,k} \quad \text{pour } j = 0 \quad (6.101)$$

### 6.4.3 Assemblage de la matrice d'influence et du second membre

#### 6.4.3.1 Condition au domaine

Du système d'équations 6.94, nous pouvons en déduire une relation pour  $\Phi(\chi)$  par

$$\frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi(\chi) - \frac{64}{L^2} \frac{1}{d_\chi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi \partial \bar{\chi}}(\chi) = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_0(\chi) + \gamma_0(\chi) \quad (6.102)$$

avec  $d_\chi$  défini par

$$d_\chi = \left[ \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{\nu^2}{\chi^2 \bar{\chi}^2} \right] \quad (6.103)$$

Cette relation est appliquée en chacun des points de contrôle  $\chi_j$  du domaine en développant le potentiel  $\Phi$  sous sa forme décomposée (équation 6.95) en fonction des coefficients inconnus  $a_n$  et  $a_{mn}$ . Ces relations sont regroupées dans une matrice d'influence  $M$  de taille  $J_M \times K_M$  avec  $J_M$  étant le nombre total de points de contrôle du domaine et  $K_M$  le nombre de coefficients inconnus du système.

Le terme de droite de l'équation 6.102 permet de définir le second membre  $b$ . Il est fonction des solutions  $\Phi_0$  et  $\gamma_0$  obtenues au pas de temps précédent.

Considérons que cet espace précédent soit exprimé avec la variable  $\chi_0$  qui dépend du paramètre  $\nu_0 = A_0 - B_0$  représentant la taille de l'ellipse d'influence. Nous avons donc une relation avec l'espace  $\boxed{Z}$  par

$$Z = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_0}{\nu} + \frac{\nu}{\chi_0} \right) \quad (6.104)$$

et l'ancienne taille de l'ellipse d'influence est déterminée par

$$\left( \frac{\xi}{A_0} \right)^2 + \left( \frac{\eta}{B_0} \right)^2 = 1 \quad (6.105)$$

Soit  $Z_j = X_j + i Y_j$  l'image du point de contrôle  $\chi_j$  dans  $\boxed{Z}$ , i.e.

$$Z_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_j}{\nu} + \frac{\nu}{\chi_j} \right) \quad (6.106)$$

Dans notre étude, l'ellipse ne fait que s'accroître. Si  $Z_j$  vérifie la condition

$$\left(\frac{\xi}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{B_0}\right)^2 > 1 \quad (6.107)$$

alors ce point se situe à l'extérieur de l'ellipse et nous avons  $\Phi_0(Z_j) = 0$ . Sinon, le calcul se fait en calculant l'image du point de contrôle dans l'espace  $\boxed{\chi_0}$ .

Rappelons que la forme des potentiels  $\overset{a}{\Phi}$ ,  $\overset{b}{\Phi}$  et  $\overset{ns}{\Phi}$  est donnée par

$$\overset{a}{\Phi}(Z) = \sum_{n=0}^N a_n \overset{a}{G}_n(Z) \quad (6.108a)$$

$$\overset{b}{\Phi}(Z) = \sum_{n=0}^N \gamma_n \overset{b}{G}_n(Z) \quad (6.108b)$$

$$\overset{ns}{\Phi}(Z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m \text{Re} [a_{mn} G_{mn}(Z, \bar{Z})] \quad (6.108c)$$

$$= \sum_{p=0}^P a_p \overset{ns}{G}_p(Z) \quad (6.108d)$$

avec  $P = \frac{1}{2}(M+1)(M+2)$  et  $N = \frac{1}{2}(m)(m+1) + n + 1$ .

Alors, la matrice  $M$  des condition au domaine est de dimension  $J_M \times K_M$  et son terme général est défini par

$$M_j^{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{\alpha \Delta t} \overset{a}{G}_n(\chi_j) - \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 \overset{a}{G}_n}{\partial \chi^2}(\chi_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } 0 \leq k \leq N \\ \text{et } n = k & \\ \frac{2}{\alpha \Delta t} \overset{b}{G}_n(\chi_j) - \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 \overset{b}{G}_n}{\partial \chi^2}(\chi_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } N+1 \leq k \leq 2N+1 \\ \text{et } n = k - (N+1) & \\ \frac{2}{\alpha \Delta t} \overset{ns}{G}_p(\chi_j) - \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 \overset{ns}{G}_p}{\partial \chi^2}(\chi_j) \frac{1}{d^2} & \text{pour } 2N+2 \leq k \leq 2N+2+P \\ \text{et } p = k - (2N+3) & \end{cases} \quad (6.109)$$

Le second membre du système  $B$  est défini par

$$B_j = \frac{2}{\alpha \Delta t} \Phi_0(\chi_j) + \gamma_0(\chi_j) \quad (6.110)$$



et  $a$ , contenant les coefficients inconnus du système, est défini par :

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_n & \text{pour } 0 \leq k \leq N \\ & \text{et } n = k \\ a_n^\gamma & \text{pour } N + 1 \leq k \leq 2N + 1 \\ & \text{et } n = k - (N + 1) \\ a_p^{ns} & \text{pour } 2N + 2 \leq k \leq 2N + 2 + P \\ & \text{et } p = k - (2N + 3) \end{cases} \quad (6.111)$$

Par conséquent, toutes les conditions au domaine peuvent s'exprimer sous une forme matricielle par

$$M a = B \quad (6.112)$$

avec  $[M]_{j,n} = M_j^{k+1}$ ,  $[a]_k = a_{k+1}$  et  $[B]_j = B_j$ .

#### 6.4.3.2 Condition au bord

La relation au bord défini par  $\chi \bar{\chi} = \nu^2$  s'exprime par une condition sur  $\Phi$  et  $\gamma$  en chacun des  $K$  points de contrôles  $\chi_k$ . Les deux premières conditions sur  $\Phi$  et  $\gamma$  sont définies par

$$\Phi(\chi_k^\nu) = \Phi_1 = -1 \quad (6.113a)$$

$$\gamma(\chi_k^\nu) = \nabla^2 \Phi(\chi_k^\nu) = 0 \quad (6.113b)$$

Ces deux relations peuvent aussi se mettre sous une forme matricielle par

$$\overset{\nu}{M} a = C \quad (6.114)$$

où  $\overset{\nu}{M}$  est une matrice de dimension  $2K \times K_M$  est définie pour  $k = 1, \dots, K$  par

$$\overset{\nu}{M}_k^{l+1} = \begin{cases} \overset{a}{G}_n(\chi_k^\nu) & \text{pour } 0 \leq l \leq N \\ & \text{et } n = l \\ \overset{b}{G}_n(\chi_k^\nu) & \text{pour } N + 1 \leq l \leq 2N + 1 \\ & \text{et } n = l - (N + 1) \\ \overset{ns}{G}_p(\chi_k^\nu) & \text{pour } 2N + 2 \leq l \leq 2N + 2 + P \\ & \text{et } p = l - (2N + 3) \end{cases} \quad (6.115)$$

et en considérant les  $K$  même points de contrôle, cette matrice est définie pour  $k = K + 1, \dots, 2K$  par

$$M_k^{\nu l+1} = \begin{cases} \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 G_n^a}{\partial \chi^2}(\chi_k) & \text{pour } 0 \leq l \leq N \\ \text{et } n = l & \\ \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 G_n^b}{\partial \chi^2}(\chi_k) & \text{pour } N + 1 \leq l \leq 2N + 1 \\ \text{et } n = l - (N + 1) & \\ \frac{64}{L^2 d_\chi} \frac{\partial^2 G_p^{ns}}{\partial \chi^2}(\chi_k) & \text{pour } 2N + 2 \leq l \leq 2N + 2 + P \\ \text{et } p = l - (2N + 3) & \end{cases} \quad (6.116)$$

et  $C$  un vecteur de dimension  $2K$  défini par

$$C_k = \begin{cases} -1 & \text{pour } k = 1, \dots, K \\ 0 & \text{pour } k = K + 1, \dots, 2K \end{cases} \quad (6.117)$$

### 6.4.3.3 Résolution par moindres carrés avec sous domaines

Nous choisissons de résoudre ce problème par une méthode des moindres carrés avec une même contribution de chacun des éléments analytiques.

Considérons les  $J$  points de contrôles  $\chi_j$  du domaine  $\mathcal{D}$  et les  $K$  points de contrôle  $\chi_k$  du bord  $\mathcal{D}_\nu$ . Les éléments  $\overset{a}{\Phi}$  et  $\overset{b}{\Phi}$  doivent se résoudre sur les points de contrôle du bord  $\mathcal{D}_\nu$  et l'élément  $\overset{ns}{\Phi}$  se résout sur les points de contrôle du domaine  $\mathcal{D}$ . Par exemple, d'après les équations 6.113a et 6.113b, la contribution de l'élément  $\overset{a}{\Phi}$  se traduit pour chacun de ses coefficients  $a_j$  par la condition

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{k=1}^{2K} \left[ \sum_{n=0}^N a_n \overset{\nu}{M}_k^{n+1} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=l-(N+1)}}^N \gamma \overset{\nu}{a}_n \overset{\nu}{M}_k^{l+1} + \sum_{\substack{p=0 \\ p=l-(2N+3)}}^P \overset{ns}{a}_p \overset{\nu}{M}_k^{l+1} - C_k \right]^2 = 0 \quad (6.118)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{2K} \left[ \sum_{n=0}^N a_n \overset{\nu}{M}_k^{n+1} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=l-(N+1)}}^N \gamma \overset{\nu}{a}_n \overset{\nu}{M}_k^{l+1} + \sum_{\substack{p=0 \\ p=l-(2N+3)}}^P \overset{ns}{a}_p \overset{\nu}{M}_k^{l+1} - C_k \right] \overset{\nu}{M}_k^{j+1} = 0 \quad (6.119)$$

En procédant de même pour les éléments  $\overset{b}{\Phi}$  et  $\overset{ns}{\Phi}$ , nous obtenons une matrice carrée que nous résolvons de façon traditionnelle.

#### 6.4.4 Prise en compte de la contrainte de singularités

En dérivant les termes de l'équation 6.102, nous obtenons la relation

$$\frac{2}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}(\chi) - \frac{64}{L^2} \frac{1}{\chi} \left( \frac{1}{d_\chi} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \chi^2 \bar{\chi}}(\chi) \right) = \frac{2}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \chi}(\chi) + \frac{\partial \gamma_0}{\partial \chi}(\chi) \quad (6.120)$$

En appliquant cette relation aux points de contrôle du bord  $\chi_j^\nu$ , nous obtenons

$$\frac{2}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}(\chi_j^\nu) - \frac{64}{L^2} \frac{1}{d_{\chi_j^\nu}} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \chi^2 \bar{\chi}}(\chi_j^\nu) = \frac{2}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \chi}(\chi_j^\nu) + \frac{\partial \gamma_0}{\partial \chi}(\chi_j^\nu) \quad (6.121)$$

Cette condition permet d'établir une relation entre les coefficients des potentiels  $\overset{a}{\Phi}$  et  $\overset{a}{\bar{\Phi}}$  par rapport à ceux précédemment calculés. Elle est imposée sous forme d'une contrainte lors de la résolution du système d'équations 6.94.

#### 6.4.5 Initialisation du système d'équations

Pour initialiser le système d'équations 6.94, nous proposons d'exploiter la solution 1D donnée par l'équation 6.11 pour estimer les singularités  $\frac{\partial \Phi}{\partial Z}(\chi_j^\nu)$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial Z}(\chi_j^\nu)$  et la taille de l'ellipse d'influence.

Nous utilisons les équations 6.18 et 6.19 pour initialiser les singularités lors de la première itération par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}(\chi_j^\nu) \frac{\partial \chi}{\partial Z} = \frac{\partial \Phi}{\partial X}|_{X=0^+} = \frac{1}{2} \sigma_{1D} \quad (6.122)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \chi}(\chi_j^\nu) \frac{\partial \chi}{\partial Z} = \frac{\partial \gamma}{\partial X}|_{X=0^+} = \frac{1}{2} \sigma_{\gamma 1D} \quad (6.123)$$

Cela permet d'avoir une convergence plus régulière vers la solution. Comme l'a montré l'étude 1D au chapitre 5, les fortes fluctuations des premières itérations sont ainsi atténuées. Cette méthode se base sur le fait que les singularités de la solution finale reste proche de celle de la solution 1D exacte.

Il est aussi nécessaire de connaître la taille de l'ellipse d'influence à l'initialisation. Pour cela, nous utilisons la solution 2D fourni par l'équation 6.3 au temps  $t = \Delta t$  avec une répartition constante de flux Ensuite, la taille de l'ellipse d'influences est déterminée en évaluant les paramètres  $A$  et  $B$  par les équations 6.8 et 6.9. Ainsi, la taille de l'ellipse d'influence est déterminée à  $t = \Delta t$  par

$$\left( \frac{X}{A} \right)^2 + \left( \frac{Y}{B} \right)^2 = 1 \quad (6.124)$$

et le paramètre  $\nu$  est donnée par

$$\nu = A - B \quad (6.125)$$

#### 6.4.6 Estimation de la taille de l'ellipse d'influence à chacune des itérations

A chacune des itérations, il est nécessaire d'évaluer la taille de l'ellipse d'influence pour pouvoir résoudre le système d'équation. La méthode utilisée pour l'initialisation ne peut être raisonnablement utilisée car rien ne présage de la variation de flux le long du segment. Seul le potentiel  $y$  est fixé et les éléments extérieurs peuvent fortement influencer cette répartition de flux.

Une méthode de type explicite est choisie ici. Elle suppose que le débit généré par l'élément reste constant pendant le pas de temps  $\Delta t$ . Ainsi, le débit est obtenu par l'itération précédente et s'exprime en fonction des coefficients  $a_n$  de l'itération précédente par

$$Q = \mu(-1) - \mu(1) \quad \text{avec} \quad \mu(Z) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(Z) \quad (6.126)$$

Puisque  $\psi_n(-1) = (-1)^n$  et  $\psi_n(1) = 1$ , nous obtenons

$$Q = \sum_{n=0}^N a_n [(-1)^n - 1] \quad (6.127)$$

Ensuite, la taille de l'ellipse d'influence est estimée au pas de temps suivant avec la solution 2D donnée par l'équation 6.3 avec une répartition constante de flux pour générer un débit similaire. L'ellipse d'influence est représentée par les paramètres  $A$  et  $B$ , permettant ainsi d'en déduire celui du changement de variable  $\nu = A - B$ .

## 6.5 Conclusion

La méthode de résolution transposée au problème 2D avec des éléments analytiques montre une méthode numérique pour résoudre le problème d'un saut de potentiel sur un segment de droite. Cette méthode exploite l'analyse du comportement numérique du problème 1D équivalent en proposant d'initialiser la résolution par une approximation des singularités avec leurs solutions 1D respectives. Cela permet de régulariser la convergence vers la solution. Elle se base aussi sur une approximation de l'influence elliptique de chacun des éléments transitoires en se rapportant la solution exacte 2D à flux constant.

Puisque ces éléments transitoires ont un champ d'influence spatialement borné (ce qui est aussi vrai dans la réalité), ils peuvent s'intégrer dans une modélisation numérique de tout un aquifère. Nous avons montré qu'il faudrait alors prendre en compte un pas de temps "local" de

l'ordre de 1/10 du pas de temps utilisé pour modéliser l'aquifère. En effet, le résultat obtenu après 10 itérations permet d'avoir une convergence suffisante vers la solution pour éviter les éventuelles perturbations des premières itérations.

Il serait alors possible de représenter les variations d'une rivière par une succession de saut du niveau d'eau à chaque pas de temps. L'aquifère serait alors représenté par des éléments transitoires ou permanent suivant l'objectif de la modélisation et la variation en temps du phénomène transitoire.

# Conclusion et Perspectives

L'objectif principal de ce travail de thèse consistait à traiter les problèmes liés à la discrétisation spatiale et temporelle appliquée à la méthode des éléments analytiques en utilisant une approche à la fois pratique et théorique.

Cela nécessitait de positionner la méthode des éléments analytiques dans le cadre général des méthodes numériques, en mettant en évidence ses particularités, avec ses différents avantages et inconvénients. Une comparaison sur un cas d'étude a permis d'identifier les besoins de cette méthode numérique en matière de discrétisation. Ceci en adoptant une démarche de modélisation rigoureuse adaptée aux écoulements hydrogéologiques pour contrôler au mieux toutes les étapes de la modélisation.

Il s'agissait de focaliser ensuite sur le processus de discrétisation en développant une analyse mathématique par l'étude de cas théoriques et selon une approche pratique pour élaborer des algorithmes de discrétisation adaptés aux spécificités et aux besoins des éléments analytiques. La synthèse de ces deux approches avait pour finalité de mettre en valeur des critères d'évaluation de la qualité de cette discrétisation et de disposer d'un outil d'aide à la discrétisation. A partir d'une étude en régime permanent, le cas du régime transitoire a été traité par l'élaboration d'une méthode de résolution utilisant les éléments analytiques en conservant une structure objet et le principe de superposition. L'intégration dans un modèle hydrogéologique complet proposant le choix d'éléments transitoires ou permanents demeurant un des objectifs du travail.

Une analyse de la résolution numérique d'un problème 1D avec le développement d'éléments analytiques 1D a donc été réalisée pour en déduire une méthode de résolution transposable au problème 2D en traitant plus particulièrement la gestion du pas de temps et en prenant en compte le champ d'influence des éléments transitoires.

## Comparaison des méthodes AEM et FDM

La comparaison des approches AEM et FDM a été réalisée en reprenant les différentes étapes de la modélisation hydrodynamique. La méthode des FDM est a priori bien appropriée pour le type d'aquifère étudié puisqu'il est de taille relativement réduite et assez hétérogène. Néanmoins, l'utilisation de mailles carrées soulève des difficultés pour représenter les zones à

géométrie complexe comme c'est le cas, par exemple, pour les berges du fleuve et autour des bassins.

La méthode des AEM est plus adaptée aux aquifères régionaux et permet notamment une meilleure représentation de l'écoulement lointain. Son avantage est surtout mis en évidence lors de la modélisation de domaines ouverts avec des frontières physiques intérieures. Elle peut prendre en compte des domaines très étendus tout en conservant une grande précision à de petites échelles.

Néanmoins, la représentation plus fine du contour géométrique des entités hydrogéologiques et par conséquent leurs influences physiques sur l'aquifère constitue un avantage certain. En particulier, la méthode numérique des AEM permet de calculer avec une meilleure précision la répartition des échanges de flux à l'interface entre la nappe et la rivière.

La représentation orientée objet et la structure naturellement vectorielle des AEM améliore fortement les interactions avec un SIG. L'organisation de la base de données à travers la conceptualisation de l'aquifère permet une grande synergie entre les données et le modèle numérique, au bénéfice de la qualité de simulation.

Finalement, nous avons constaté que suivant l'objectif de la modélisation, les AEM peuvent être plus ou moins bien adaptées par rapport aux FDM. L'intérêt est aussi d'utiliser une méthode de modélisation alternative qui peut corroborer les résultats de simulation obtenus par la méthode des différences finies. Les deux méthodes peuvent aussi être utilisées comme deux approches complémentaires de modélisation en choisissant par exemple la méthode la plus adaptée à chacun des sous domaines d'une modélisation.

### **Analyse théorique des erreurs de discrétisation**

L'analyse du comportement numérique de l'erreur de discrétisation représente un point central. Cela a permis d'exposer différentes techniques de résolution selon le principe de la méthode des éléments analytiques à partir d'exemples théoriques. En particulier, ces exemples ont montré la richesse et la modularité de cette méthode de résolution "orientée objet". En effet, peu importe la technique mathématique permettant de résoudre un élément analytique, il suffit que cet élément respecte la représentation objet des éléments analytiques pour être exploitable. Ces exemples ont montré comment calculer ces éléments analytiques à l'aide de transformations conformes et du principe de superposition pour les résoudre ensemble.

Une discrétisation optimale ne conduit généralement pas à positionner les sommets sur la courbe d'origine. C'est pourtant la méthode classiquement utilisée pour discrétiser une frontière géométrique. Ce constat a motivé le développement d'algorithmes de discrétisation plus adaptés aux spécificités des éléments analytiques.

### Vers un outil d'aide à la discrétisation

La mise en œuvre du travail théorique sur la discrétisation a fait l'objet d'algorithmes de discrétisation adaptés aux spécificités et aux besoins des éléments analytiques.

Les extensions de l'algorithme de Douglas-Peucker permettent de réduire au maximum les erreurs qui sont induites par la discrétisation. Elles combinent cet algorithme de Douglas-Peucker et une approximation par moindres carrés. Leurs avantages sont leur intégration facile dans un SIG et la possibilité d'utiliser une discrétisation avec des éléments de formes géométriques plus sophistiquées comme les éléments curvilignes. Cette démarche de discrétisation peut intégrer des éléments analytiques dont la géométrie est une ellipse pour offrir un panel de possibilités plus variées.

A l'aide de ces algorithmes, il devient possible d'évaluer l'erreur de discrétisation et les erreurs de simulation qui en découlent. La qualité globale du modèle avant et après la simulation peut ainsi être évaluée. L'utilisateur peut choisir d'ajuster ou de raffiner le maillage avant ou après la simulation pour satisfaire au mieux son objectif de modélisation.

### Méthode de résolution des éléments analytiques pour le régime transitoire

Le développement d'éléments analytiques 1D a permis la résolution numérique d'un problème en régime transitoire 1D. Ces formes 1D nous ont permis d'éviter d'introduire les erreurs numériques dues au calcul des éléments eux mêmes pour se focaliser sur le comportement numérique de la résolution elle-même. Cette méthode de résolution a ensuite été transposée au problème 2D avec des éléments analytiques 2D similaires à ceux récemment développés par STRACK [66, 65] grâce au calcul de WIRTINGER [74]. Leur distance d'influence  $y$  est considérée de forme elliptique.

La méthode de résolution utilisée combine un schéma aux différences finies en temps et une approximation par moindres carrés. Nous avons vu que cette méthode de résolution est relativement instable lors des premières itérations et qu'il est préférable d'initialiser la résolution numérique par une estimation des singularités avec leur solution locale exacte. Puisque la solution finale est généralement proche de la solution locale, cela permet de mieux régulariser la convergence vers la solution.

Puisque ces éléments transitoires ont un champ d'influence spatialement borné (ce qui est aussi vrai dans la réalité), ils peuvent s'intégrer dans une modélisation numérique de tout un aquifère. Nous avons montré qu'il faudrait alors prendre en compte un pas de temps "local" de l'ordre de 1/10 du pas de temps utilisé pour modéliser l'aquifère. En effet, le résultat obtenu après 10 itérations permet d'avoir une convergence suffisante vers la solution pour éviter les éventuelles perturbations des premières itérations.



## Perspectives

L'analyse critique de ce travail montre que plusieurs points restent à approfondir, en particulier :

- poursuivre la comparaison entre les FDM et les AEM en prenant en compte les variations topographiques du substratum, en régime transitoire ou en traitant d'autres types d'aquifère,
- tester le couplage entre les deux méthodes appliquées à plusieurs endroits différents de l'aquifère,
- tester la robustesse des estimateurs d'erreur de discrétisation locaux et globaux avec, par exemple, le premier cas d'étude exposé au chapitre 3,
- développer un code de résolution intégrant ces éléments analytiques 2D en transitoire,
- intégrer la résolution en régime transitoire dans un modèle plus complet de représentation de l'aquifère.

L'une des perspectives immédiates est l'élaboration d'un outil d'aide à la discrétisation pour la modélisation par éléments analytiques. Cela passe naturellement par un développement informatique des algorithmes présentés au chapitre 4.

Associer ces algorithmes aux critères d'erreur permettrait, par exemple, de choisir la représentation spatiale la plus rentable en fonction de l'efficacité algorithmique et d'une résolution donnée. Cette résolution pouvant bien sûr être uniforme, mais aussi dépendante des objectifs de l'utilisateur. Par exemple, elle pourrait être déterminée en fonction du critère d'erreur local et de l'influence de la discrétisation à une certaine distance (influence des éléments analytiques les uns par rapport aux autres). Grâce à la représentation "en continu" de l'aquifère, il serait envisageable de s'abstraire du type de méthode numérique en utilisant indépendamment les FDM ou les AEM pour une résolution donnée. En allant plus loin, cela revient à coupler des méthodes numériques différentes en définissant des domaines de résolution disjoints pour lesquels l'une ou l'autre de ces méthodes serait appliquée ; ou encore de les coupler à des échelles différentes.

Finalement, ce travail a essayé de démontrer plusieurs possibilités offertes par la méthode des éléments analytiques avec pour objectif de contribuer à l'amélioration des techniques de modélisation selon deux aspects majeurs :

- un aspect pratique avec la conception de techniques d'aide à la discrétisation à partir d'algorithmes de génération de maillage adaptés aux éléments analytiques,
- un aspect théorique avec l'établissement d'une méthode de résolution numérique pour des éléments analytiques adaptés au régime transitoire.

La méthode des éléments analytiques reste encore difficile d'accès aux non initiés, elle est encore "jeune" et n'est pas encore arrivée à sa pleine maturation comme les méthodes classiques FDM et FEM. Elle a nécessité et va encore nécessiter un important travail de développement mathématique, numérique et algorithmique.

La forte modularité due à sa représentation objet permet d'envisager des développements successifs autour du noyau initial de la méthode numérique des éléments analytiques en régime permanent. Ce développement intégrerait les différentes tentatives de progrès exposés dans la thèse, tout en considérant bien sûr les travaux développés dans le cadre de la communauté scientifique des éléments analytiques.



## Annexe A

# Généralisation de la théorie complexe pour les fonctions harmoniques

### A.1 Rappel de quelques propriétés d'analyse complexe

Rappelons les relations entre les différentes variables réelles  $(x, y)$  et les variables complexes  $(z, \bar{z})$  données par

$$2x = z + \bar{z} \tag{A.1}$$

$$2iy = z - \bar{z} \tag{A.2}$$

et introduisons les opérateurs différentiels suivant :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{A.4}$$

Alors rappelons le théorème d'analyse complexe bien connu [53] :

**Théorème A.1.** *Soit  $f$  une fonction complexe dans  $\mathcal{D}$  qui possède une différentielle en tout point de  $\mathcal{D}$ . La fonction  $f$  est holomorphe si et seulement si l'équation de Cauchy-Riemann donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \tag{A.5}$$

est vérifiée pour tout point  $z \in \mathcal{D}$ . Alors nous obtenons la relation :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad \text{pour } z \in \mathcal{D} \tag{A.6}$$

De ce théorème découle plusieurs conséquences. En particulier, si  $f$  a des dérivées partielles du second ordre continues, la fonction  $f$  vérifie le Lemme de Schwarz suivant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, en utilisant les équations A.3 et A.3 nous pouvons obtenir une formulation du Laplacien par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\text{A.8})$$

Par conséquent, nous en déduisons la proposition suivante :

**Proposition A.1.1.** *Les fonctions harmoniques sur un ouvert  $\mathcal{D}$  sont les fonctions qui vérifient l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{A.9})$$

en tout point de  $\mathcal{D}$

Par conséquent, une fonction complexe  $f = P + iQ$  avec  $P$  et  $Q$  réels est harmonique dans  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont harmoniques dans  $\mathcal{D}$ . Si  $f$  est holomorphe,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  et  $f$  à ses dérivées partielles continues à tous ordres. Nous en déduisons donc la propriété suivante :

**Proposition A.1.2.** *Les fonctions holomorphes sont harmoniques.*

## A.2 Formulation du potentiel complexe par la divergence et le rotationnel

Soit l'expression de la divergence et du rotationnel de  $Q$  suivant :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\gamma \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = -\delta \quad (\text{A.10b})$$

Rappelons l'expression de la vitesse complexe :

$$W = Q_x - i Q_y \quad (\text{A.11})$$

Alors, l'expression donné par le système d'équations A.10 est équivalent à la formulation

suivante pour la vitesse complexe  $W$  :

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\gamma \quad (\text{A.12a})$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} = -i\delta \quad (\text{A.12b})$$

Finalement, nous obtenons l'expression suivante :

$$2 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = -\omega = -(\gamma + i\delta) \quad (\text{A.13a})$$

Soit  $\Gamma = \Phi + i\Psi$  le potentiel complexe donnée par la décomposition de Helmholtz. Les différentes décompositions en deux termes permettant de prendre en compte séparément la divergence et le rotationnel sont :

$$Q_x = \overset{\gamma}{Q}_x + \overset{\delta}{Q}_x \quad (\text{A.14a})$$

$$Q_y = \overset{\gamma}{Q}_y + \overset{\delta}{Q}_y \quad (\text{A.14b})$$

$$W = \overset{\gamma}{W} + \overset{\delta}{W} \quad (\text{A.14c})$$

où l'indice supérieur  $\gamma$  indique la partie à rotationnel nul et  $\delta$  indique la partie à divergence nulle.

Rappelons l'expression pour le vecteur vitesse :

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{A.15a})$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{A.15b})$$

Alors l'expression de l'équation A.11 nous permet d'en déduire une expression pour  $W$  avec les opérateurs pour  $z$  et  $\bar{z}$  définis avec l'équation ?? :

$$W = -2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \quad (\text{A.16})$$

ou encore, en prenant en compte la décomposition de  $W$ , l'expression des différentes parties de la décomposition peuvent se formuler par :

$$\overset{\gamma}{W} = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A.17a})$$

$$\overset{\delta}{W} = -2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A.17b})$$

Finalement, le potentiel complexe  $\Gamma$  peut s'exprimer, grâce au théorème A.8 par

$$4 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z \partial \bar{z}} = \omega \quad (\text{A.18})$$

Ce qui nous permet d'en déduire une relation pour les potentiels réels  $\Phi$  et  $\Psi$  correspondants au potentiel complexe  $\Gamma$  :

$$\Delta \Phi = \gamma = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\text{A.19})$$

$$\Delta \Psi = \delta = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\text{A.20})$$

Considérons maintenant le cas particulier où  $\omega = \gamma + i\delta = 0$ , alors nous avons :

$$\Gamma(z, \bar{z}) = 2\Omega(z) \quad (\text{A.21})$$

$$= \Phi(z, \bar{z}) + i\Psi(z, \bar{z}) \quad (\text{A.22})$$

Comme  $\Gamma$  n'est fonction que d'une variable, nous pouvons choisir que  $\Gamma$  dépend de  $z$  uniquement, alors :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{A.23})$$

ou encore

$$2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + i \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A.24})$$

En développant et en utilisant les expression A.3 et A.4, nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.25})$$

Ainsi, nous retrouvons que  $\Omega$  est holomorphe et les conditions de Cauchy-Riemann en séparant la partie imaginaire et la partie réelle.

Soit  $I$  l'intégrale de  $\omega$  sur l'ensemble  $\mathcal{A}$ . En utilisant un changement de variables entre  $(x, y)$  et  $(z, \bar{z})$ , nous obtenons

$$I = \iint_{\mathcal{A}} \omega(x, \bar{y}) dx dy = \frac{1}{2i} \iint_{\mathcal{A}} \omega(z, \bar{z}) dz d\bar{z} \quad (\text{A.26})$$

puisque  $d\mathcal{A} = dx dy = \frac{1}{2i} dz d\bar{z}$ . Puis, en utilisant l'équation A.13 et le théorème de la divergence, nous obtenons une expression pour  $I$  en fonction de  $W$  par

$$I = -\frac{1}{i} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z} = -\frac{1}{i} \int_{\partial\mathcal{A}} W(z, \bar{z}) dz = i \int_{\partial\mathcal{A}} W(z, \bar{z}) dz \quad (\text{A.27})$$

Cette formulation complexe permet de combiner le théorème de la divergence et le théorème de Stokes. En effet,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{A}} \omega(z, \bar{z}) dx dy \\ &= - \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + i \left( \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial\mathcal{A}} -[Q_x dx + Q_y dy] + i \int_{\partial\mathcal{A}} [Q_x dx + Q_y dy] \\ &= i \int_{\partial\mathcal{A}} (Q_x - i Q_y) dz \quad \text{puisque } dz = dx + i dy \\ &= i \int_{\partial\mathcal{A}} W(z, \bar{z}) dz \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$





## Annexe B

# Relation mathématique entre les AEM et les BEM

Dans la méthode des éléments analytiques, les équations intégrales aux frontières sont généralement estimées à partir de l'intégrale de Cauchy en variables complexes.

Par contre, la méthode des éléments aux frontières utilise généralement les solutions fondamentales de Green ou encore la seconde identité de Green pour le développement de ces solutions particulières exprimées en terme de variables réelles.

Ces deux approches sont mathématiquement équivalentes, à ceci près que la formulation complexe reviendrait à exprimer les variables  $\Phi$  et  $\Psi$  par un couple d'équations réelles [75].

Rappelons d'abord le théorème de Cauchy [53] :

**Théorème B.1.** *Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert convexe,  $p \in \mathcal{D}$ ,  $f$  une fonction continue sur  $\mathcal{D}$  et holomorphe sur  $\mathcal{D} - p$ , alors*

$$\int_{\varsigma} f(z) dz = 0 \quad (\text{B.1})$$

*pour tout chemin fermé  $\varsigma$  dans  $\mathcal{D}$ .*

Notons que cette formulation pour un contour fermé peut facilement s'adapter à un chemin non fermé par changement de variables et l'utilisation d'une transformation conforme.

Considérons maintenant le potentiel complexe  $\Omega = \Phi + i\Psi$  et la fonction  $f(z)$  définie par

**Théorème B.2.** *Soit  $\varsigma$  un chemin fermé dans un ouvert convexe  $\mathcal{D}$  et soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\mathcal{D}$ . Si  $z \in \mathcal{D}$  et si  $z \notin \varsigma^*$ , alors*

$$f(a) \text{Ind}_{\varsigma}(a) = \int_{\varsigma} \frac{\Omega(z)}{z - a} dz = 0 \quad (\text{B.2})$$

où

$$Ind_{\zeta}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \text{domaine délimité par le contour fermé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Ainsi l'application de ce théorème permet de calculer des solutions pour la méthode des éléments analytiques en utilisant la formulation suivante :

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{\Omega(z)}{z-a} dz = 0 \quad (\text{B.4})$$

Pour montrer que cette formulation peut être reliée à la seconde identité de Green, notons d'abord que

$$\frac{dz}{z-a} = d \ln(z-a) = d \ln(r) + i d\theta \quad (\text{B.5})$$

où  $z-a = r e^{i\theta}$  en notation polaire.

L'équation B.2 peut ainsi être réécrite sous la forme

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} [\Phi(z) + i \Psi(z)] [d \ln(r) + i d\theta] \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \left[ \Phi d \ln(r) - \Psi \frac{\partial \theta}{\partial s} ds + i \left( \Phi \frac{\partial \theta}{\partial s} ds + \Psi d \ln(r) \right) \right] \quad (\text{B.7})$$

En remarquant la relation  $\frac{\partial \ln(r)}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial s}$  entre les coordonnées polaires  $(\theta, r)$  et curvilignes  $(s, n)$ , où  $n$  est le vecteur normal à la frontière et  $s$  est le vecteur tangent à la frontière, puis par intégration par partie sur le terme incluant  $d \ln(r)$ , nous obtenons

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Phi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} - \ln(r) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right] ds + \frac{i}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Psi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} + \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] ds \quad (\text{B.8})$$

Par identification des parties réelles et imaginaires avec  $\Omega(a) = \Phi(a) + i \Psi(a)$ , nous pouvons mettre en évidence les relations suivantes :

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Phi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} - \ln(r) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right] ds \quad (\text{B.9})$$

$$\Psi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Psi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} + \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] ds \quad (\text{B.10})$$

Les équations B.9 et B.10 montrent que les potentiels  $\Phi$  et  $\Psi$  peuvent être interprétés comme la somme d'un potentiel logarithmique double couche de densité  $\frac{\Phi}{2\pi}$  ou  $\frac{\Psi}{2\pi}$  et d'un potentiel logarithmique de simple couche de densité  $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial s}$  ou  $-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}$ .

On observe alors que le potentiel complexe le long de l'intérieur de la frontière est égale au saut sur la frontière (car représenté par la densité de potentiel de simple couche) et ainsi le potentiel s'annule en dehors du domaine délimité par la frontière (ce qui respecte le théorème

---

de Cauchy).

Rappelons que les conditions de Cauchy-Riemann peuvent s'exprimer sur la frontière par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (\text{B.12})$$

La prise en compte des conditions de Cauchy-Riemann dans les équations B.9 et B.10 permet d'obtenir :

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Phi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} - \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \quad (\text{B.13})$$

$$\Psi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[ \Psi \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} - \ln(r) \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] ds \quad (\text{B.14})$$

Ce système d'équations obtenu pour  $\Phi$  et  $\Psi$  est exactement la représentation intégrale qui est obtenue avec la méthode des BEM. Pour cela, la deuxième identité de Green et la solution fondamentale de Laplace en deux dimension est normalement utilisée.

Notons qu'une solution obtenue par la représentation complexe correspond alors à deux solutions par la méthode des BEM.



## Annexe C

# Fonction de courant et fonction potentiel

Nous exposons dans cet annexe quelques propriétés sur la fonction de courant et la fonction potentiel. Elles ont été déduites des conditions de Cauchy–Riemann utilisées.

**Théorème C.1.**  $\Psi$  est la fonction de courant.

*Démonstration.* Soit  $M$  une particule élémentaire. Son déplacement élémentaire est défini par  $d\vec{M}$ . Les lignes de courant sont donc caractérisées par

$$d\vec{M} \times \vec{Q} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad d\vec{M} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Pour les coordonnées en  $z$ , nous obtenons la relation

$$0 = (d\vec{M} \times \vec{Q})_z = Q_y dx - Q_x dy = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = d\Psi \quad (\text{C.2})$$

en utilisant les Conditions de Cauchy–Riemann pour  $\Phi$  et  $\Psi$ . Par conséquent,  $\Psi$  est constante sur chacune des lignes de courant. □

**Théorème C.2.** Les lignes de courant et les lignes potentiels sont orthogonales.

*Démonstration.*  $\Phi$  est constante sur chacune des lignes équipotentiels. Par conséquent, en utilisant les Conditions de Cauchy–Riemann, nous obtenons la relation

$$d\Phi = -Q_x dx - Q_y dy = 0 \quad (\text{C.3})$$

D'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=cste} = -\frac{Q_x}{Q_y} \quad (\text{C.4})$$

Les lignes de courant sont définies par  $\Psi(x, y) = cste$ . Par un raisonnement similaire au précédent, nous obtenons la relation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=cste} = \frac{Q_y}{Q_x} \quad (\text{C.5})$$

En combinant les équations C.4 et C.5, nous obtenons la relation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=cste} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=cste} = -1 \quad (\text{C.6})$$

Cela signifie que les lignes de courant et les lignes potentiels se coupent orthogonalement. □

**Théorème C.3.** *les potentiels réels  $\Phi$  et  $\Psi$  sont harmoniques, i.e.  $\Delta\Phi = \Delta\Psi = 0$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\vec{Q} = -\vec{\nabla}\Phi$ , nous avons

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = \nabla \times \vec{Q} = -\nabla \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0 \quad (\text{C.7})$$

En utilisant les conditions de Cauchy–Riemann, nous obtenons donc  $\Delta\Psi = 0$ . □

## Annexe D

# Données collectées pour l'Écozone

### D.1 Données climatiques de la plaine du Forez

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
moyenne	2.9	4.4	7.6	9.6	14.5	17.2	20.6	20.4	16.2	12.5	6.7	3.7	11.4
T minimale	-0.8	-0.4	1.9	4.2	8.2	11	13.8	12.9	9.9	7.5	2.7	0.4	5.9
T maximale	6.6	9.1	13.3	15.1	20.8	23.4	27.5	27.9	22.5	17.5	10.8	6.9	16.8

TABLE D.1 – Températures normales sur 10 ans (1986-1996) en °C, station de Feurs.

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
Gelées totales ( $T < 0^{\circ}\text{C}$ )	18.6	16.2	11.6	4.9	0.3				0.2	1.5	9.6	17	79.9
Gelées fortes ( $-10 < T < -5^{\circ}\text{C}$ )	6.6	4.7	1.7							0.1	2	3.8	18.9
Gelées très fortes ( $T < -10^{\circ}\text{C}$ )	1	0.5									0.2	0.2	1.9

TABLE D.2 – Nombre de jours de gelées, normales sur 10 ans ( 1986-1996 ) en °C, station de Feurs.

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
$T > 30^{\circ}\text{C}$					0.5	3.2	11.1	12.3	1.9				29

TABLE D.3 – Nombre de jours de forte chaleur, normales sur 10 ans (1986-1996) en °C, station de Feurs.

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
Hauteur d'eau	88.2	30.6	28.5	74	75.5	81.6	60.2	48.9	80.6	82.1	45.1	35.1	680.4
Nbre de jours pluie													
Totale ( $p > 0.1 \text{ mm}$ )	11.9	11.5	9.4	13.2	12.5	11.3	7.4	7.9	9.2	12.5	10.3	11.7	128.8
Forte ( $p > 10 \text{ mm}$ )	1	0.5	0.4	2.2	2.4	2.7	2	1.7	2.8	12.9	1.3	0.7	20.6

TABLE D.4 – Précipitations, normales sur 10 ans (1986-1996) en mm, station de Feurs.



Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
Durée	78	89	136	165	206	238	273	252	210	145	96	82	1970

TABLE D.5 – Ensoleillement, moyenne sur 10 ans (1971-1980) en heures, station de Bouthéon.

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aôut	Sept	Oct	Nov	Déc	Année
ETP (mm)	13.9	23.5	49.0	70.7	98.1	118.5	141.3	118.5	77.1	40.3	17.6	12.6	781.1

TABLE D.6 – Évapotranspiration potentielle (calculé avec la formule de PENMANN, [49]).

La formule de PENMANN est exprimée en fonction de nombreux paramètres météorologiques. Elle se formule par (D'après DE MARSILY,81, [22])

$$ETP = \frac{1}{L} \frac{R_n}{1 + \frac{F'\theta}{\gamma}} + E_a \frac{1}{1 + \frac{F'\theta}{\gamma}} \quad (D.1)$$

avec

$L$  = chaleur latente d'évaporation de l'eau (59 cal/cm<sup>2</sup> pour 1 mm d'eau équivalente)

$R_n$  = rayonnement net, évalué par la formule :

$$R_n = I_{g_a} (1 - a)(0.18 + 0.62 \frac{h}{H}) - \sigma \theta^4 (0.56 - 0.08\sqrt{e}) (0.10 + 0.9 \frac{h}{H})$$

$E_a$  = pouvoir évaporant de l'air =  $(e_W - e) 0.26 (1 + 0.4 V)$

$\gamma$  = constante psychométrique ( $\gamma \approx 0.65$ )

$a$  = albedo de la surface évaporante (en général,  $a = 0.25$ )

$I_{g_a}$  = radiation solaire directe en l'absence d'atmosphère

$h$  = durée réelle d'insolation

$H$  = durée astronomique du jour

$\theta$  = température de l'air sous abri ( $^{\circ}K$ )

$\sigma$  =  $1.19 \cdot 10^7$  cal/cm<sup>2</sup>.jour. $^{\circ}K$

$e$  = tension de la vapeur d'eau mesurée sous abri, en mb

$e_W$  = tension maximale de la vapeur d'eau pour la température  $\theta$  en mb

$V$  = vitesse moyenne du vent mesurée à 10 m au-dessus de la surface évaporante (m/s)

$F'\theta$  = pente de la courbe de tension maximale de la vapeur d'eau.

Pour estimer certaines de ces constantes météorologiques, il est utile de se servir des nombreuses formules et tables de valeurs qui se trouvent sur le site internet de la FAO (Food and agriculture Organization of the United Nation) [2].

## D.2 Données cartographiées sous SIG

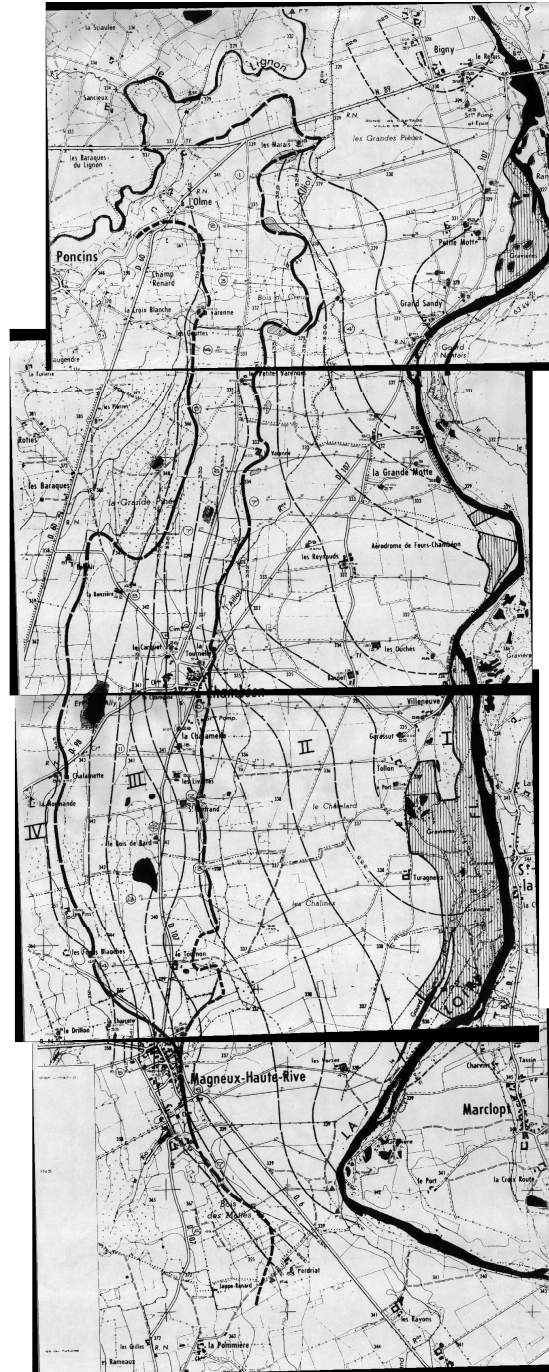


FIGURE D.1 – Courbes piézométriques de références établies au 1/10 000 pour l'Écozone (d'après les données de l'étude géophysique CPGF Horizon [1978]).

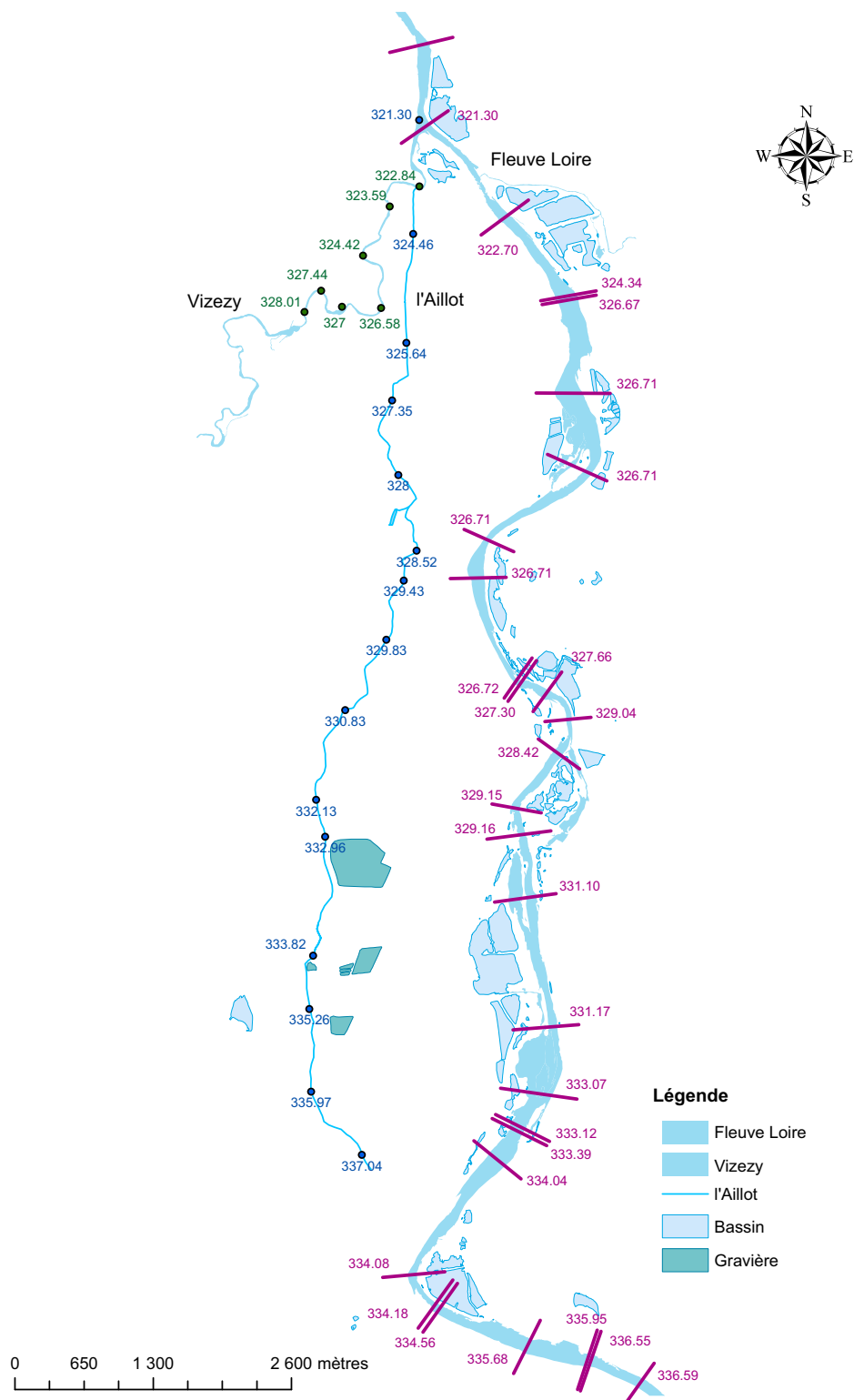


FIGURE D.2 – Localisation des mesures hydrauliques de l'Écozone.

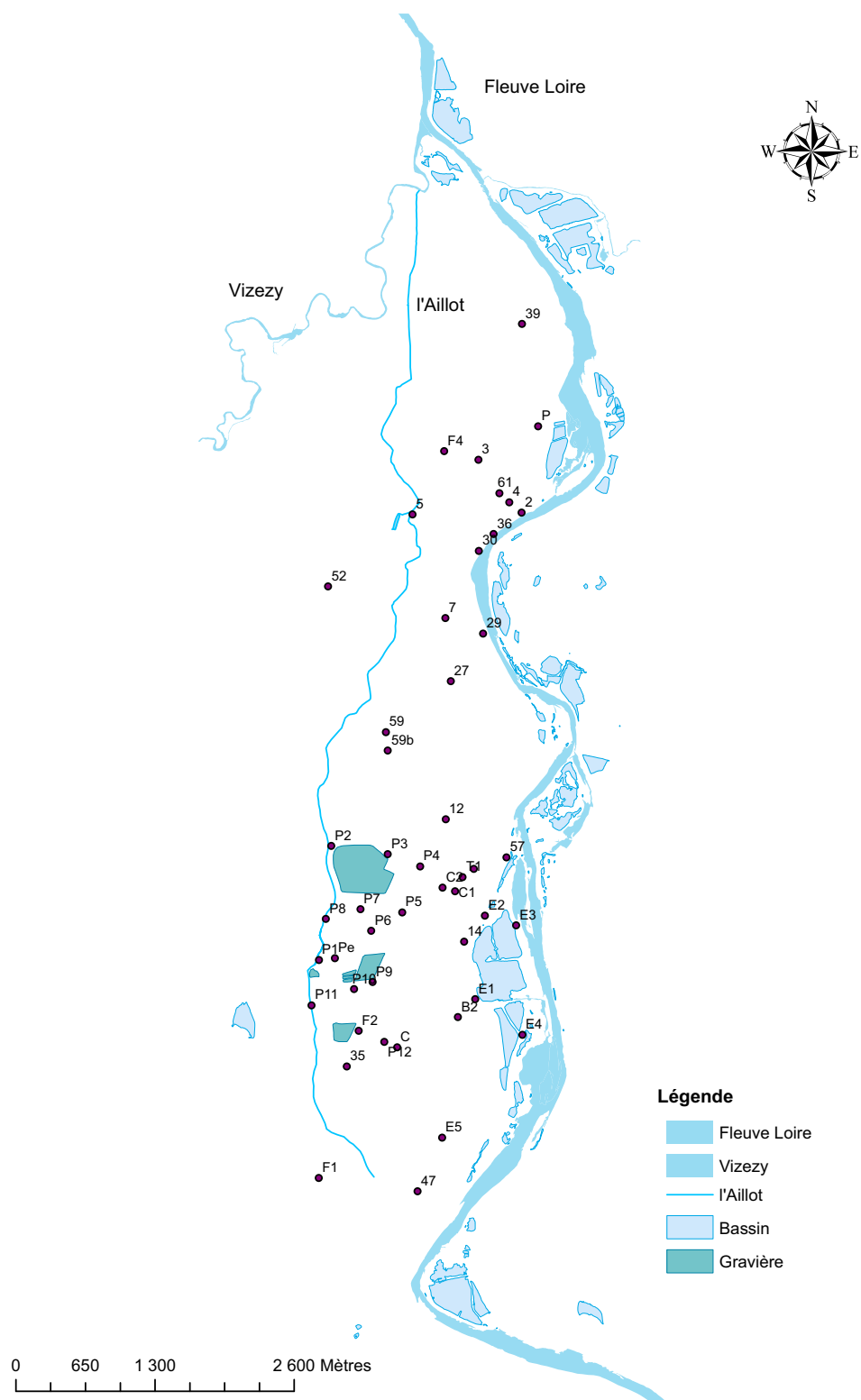


FIGURE D.3 – Localisation des mesures piézométriques de l'Écozone.

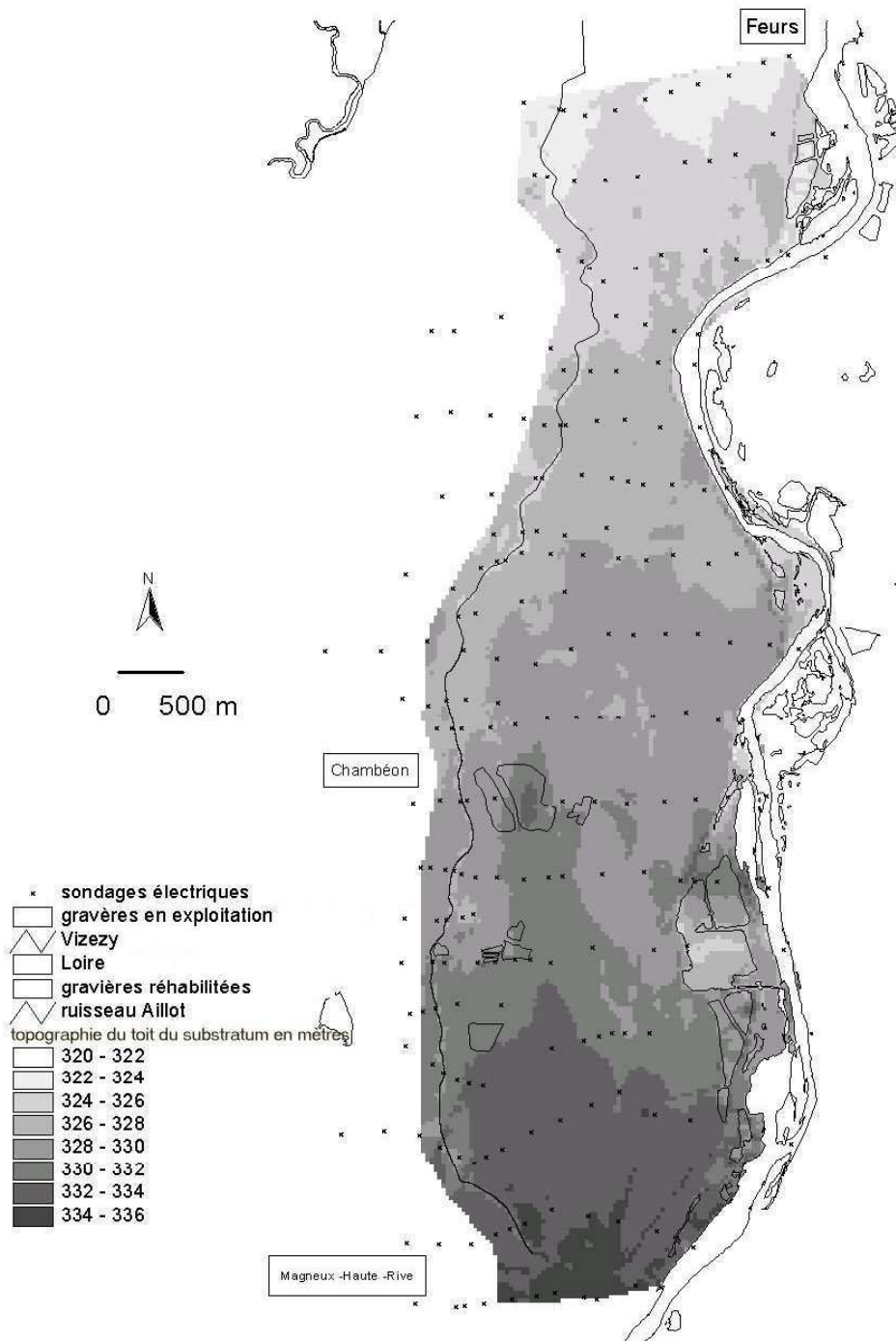


FIGURE D.4 – Topographie du toit du substratum dans la zone d'étude (d'après les données de l'étude géophysique CPGF Horizon [1978]).

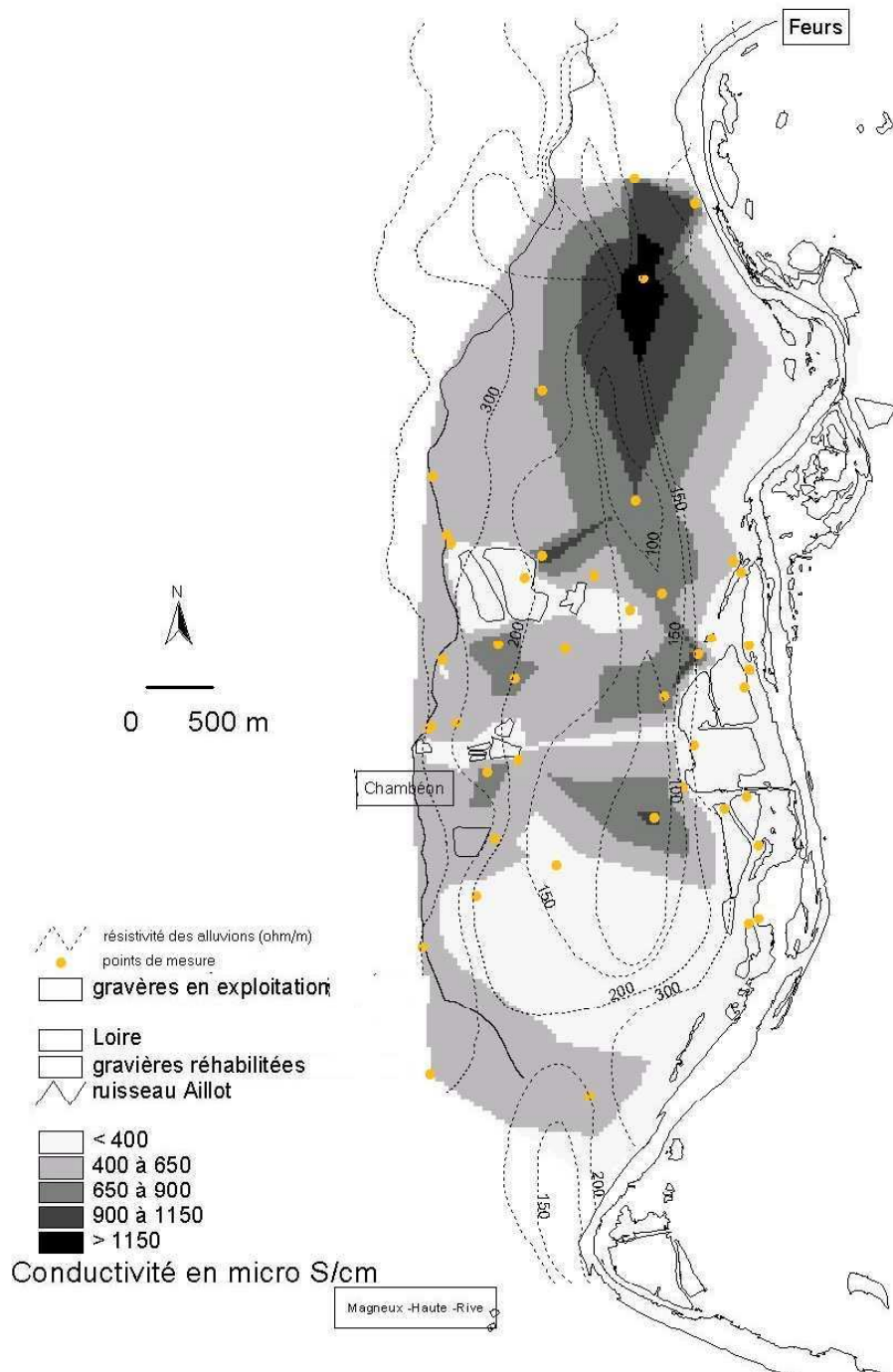


FIGURE D.5 – Carte de variation de la conductivité de l'eau dans la zone d'étude. La résistivité des alluvions nappe est caractérisée à partir des isobathes dessinés en pointillés.



# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965. 1046 pp.
- [2] R. G. ALLEN, L. S. PEREIRA, D. RAES, et M. SMITH. *Crop evapotranspiration – Guidelines for computing crop water requirements – FAO Irrigation and drainage paper 56*. FAO, Rome, 1998. 328 p.
- [3] F. ALLIGNOL. *Analyse spatiale et aide à la décision pour la recherche de gisements alluvionnaires : application à la Loire Supérieure (42)*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 1997.
- [4] R. BARNES et I. JANKOVIĆ. Two-dimensional flow through large numbers of circular inhomogeneities. *Journal of Hydrology*, 226(3–4) :204–210, 1999.
- [5] R. J. BARNES et O. D. L. STRACK. A transient area-sink composed of line elements. Dans *Fourth International Conference on the Analytic Element Method*, Saint Etienne, France, 2003.
- [6] J. BEAR. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [7] F. L. BOOKSTEIN. Fitting conic sections to scattered data. Dans *Computer Graphics and Image Processing 9*, p. 56–71, 1979.
- [8] P. A. BURROUGH et R. A. MCDONNELL. *Principles of Geographic Information Systems*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2<sup>e</sup> édn, 1998. 356 pp.
- [9] H. S. CARSLAW et J. C. JAEGER. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London, 1959. 510 pp.
- [10] G. CASTANY. *Principe et méthodes de l'hydrogéologie*. Dunod, Paris, 1856.
- [11] CESAME. Plan de gestion des milieux naturels Écopôle/Écozone du forez. Rap. tech. intermédiaire, Région Rhône-Alpes, Département de la Loire, DIREN Rhône, FRAPNA Loire, 1996. 145 p.
- [12] CESAME. Plan de gestion, Écozone/Écopôle du forez 2003–2008, volet Milieu naturels et état des lieux. Rap. tech. final, FRAPNA Loire, 2003. 130 p.



- [13] P. G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1982.
- [14] J. B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, New York, seconde édn, 1978.
- [15] J. R. CRAIG. Bluebird developers manual. Rap. tech., Department of Civil, Structural, and Environmental Engineering, University at Buffalo, Buffalo, NY, 2002.
- [16] J. R. CRAIG. *Contaminant Transport Modeling using Analytic Element Flow Solutions*. Thèse de doctorat, University at Buffalo, Minneapolis, 2004.
- [17] G. DAGAN. *Flow and Transport in Porous Formations*. New York, NY, 1989.
- [18] H. DARCY. *Les fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Corps impériaux des ponts et chaussées, Domaine publique, <http://gallica.bnf.fr>, 1856.
- [19] F. DAUVERGNE, D. MIMOUN, et D. GRAILLOT. Comparison between FDM and AEM for modeling a local aquifer in France. Dans *Fourth International Conference on the Analytic Element Method*, Saint Etienne, France, 2003.
- [20] F. DAUVERGNE, D. MIMOUN, et D. GRAILLOT. Comparison of vector and grid based approaches for groundwater modeling. Dans *DARCY 2006, International symposium on the Aquifer Systems Management*, Dijon, France, 2006.
- [21] W. J. de LANGE. *Groundwater Modeling of Large Domains with Analytic Elements*. Thèse de doctorat, University of Technology, Delft, The Netherlands, 1996.
- [22] G. de MARSILY. *Hydrogéologie quantitative*. Collection sciences de la terre, Masson, 1981.
- [23] B. N. DELAUNAY. Sur la sphere vide. *Bull. Acad. Sci. USSR VII : Class. Sci. Math.*, p. 793–800, 1934.
- [24] J. P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. PUG, Grenoble, 1996.
- [25] J. DENEGRE et F. SALGE. *Les systèmes d'information géographique*. Puf, 2 édn, 2004. 128 pp.
- [26] D. DOUGLAS et T. PEUCKER. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *The Canadian Cartographer*, 10(2) :112–122, 1973.
- [27] P. DUCLOS. *Géologie et minéralisations uranifères de la plaine tertiaire du Forez*. Thèse d'État Sciences, Rapport R. 3117 du CEA, Univ. Clermont Ferrand, 1967.
- [28] R. O. DUDA et P. E. HART. Use of the hough transformation to detect lines and curves in pictures. *Comm. ACM*, 15(1) :11–15, Jan. 1972.
- [29] J. DUPUIT. *Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables*. 2° édition, Dunod, Paris, 1863.
- [30] H. I. ENE et E. SANCHEZ-PALENCIA. Équations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*, 14(1) :73–108, 1975.

- 
- [31] A. FITZGIBBON et R. FISHER. A buyer's guide to conic fitting. Dans *Proceedings of the 6th British Machine Vision Conference*, p. 513–522, 1995.
- [32] A. W. FITZGIBBON, M. PILU, et R. B. FISHER. Direct least-squares fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(5) :476–480, Mai 1999.
- [33] W. GANDER, G. H. GOLUB, et R. STREBEL. Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT*, 34(4) :558–578, Déc. 1994.
- [34] M. GARLAND. *Quadric-Based Polygonal Surface Simplification*. Thèse de doctorat, Computer Science Department, Carnegie Mellon University, CMU-CS-99-105, Mai 1999.
- [35] M. GARLAND et P. S. HECKBERT. Surface simplification using quadric error metrics. Dans *SIGGRAPH 97 Proc.*, 1997.
- [36] P. HECKBERT et M. GARLAND. Optimal triangulation and quadric-based surface simplification. *Journal of Computational Geometry : Theory and Applications*, 14(1–3) :49–65, Nov. 1999.
- [37] J. HERSHBERGER et J. SNOEYINK. Speeding up the douglas-peucker line-simplification algorithm. p. 134–143, 1992.
- [38] I. JANKOVIĆ. *High-Order Analytic Elements in Modeling Groundwater Flow*. Thèse de doctorat, University of Minnesota, Minneapolis, 1997.
- [39] P. le GRAND. *Analytic elements of high degree along bezier spline curves for the modeling of groundwater flow*. Ms thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1999.
- [40] P. le GRAND. *Advanced curvilinear shapes for object centered modeling of groundwater flow with the analytic element method*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, Saint Etienne, France, 2003.
- [41] V. LEAVERS. *Shape Detection in Computer Vision Using the Hough Transform*. Springer-Verlag, London, 1992.
- [42] A. MABILLOT. *Les forages d'eau : Guide pratique*. Crépines Johnson–France SA, Naintré, 1971.
- [43] C. MARLE. *Écoulement polyphasiques en milieux poreux*. Cours de Production de l'IFP, 1972.
- [44] R. MCMASTER. Automated line generalization. *Cartographica*, 24(2) :74–111, 1987.
- [45] B. MEYER. *Conception et programmation orientées objet*. Eyrolles, 2000.
- [46] D. MIMOUN. *Spatialisation de l'information : une aide à l'analyse hydraulique et paysagère développée lors de la réhabilitation des sites post-industriels, cas des réaménagements des gravières en eau en milieu alluvionnaire*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2004.

- [47] P.-A. MULLER. *Modélisation objet avec UML*. Eyrolles, 1997.
- [48] N. I. MUSKHELISHVILI. *Singular Integral Equations*. Dover Publications, Inc., New York, seconde édn, 1992. Based on the Russian edition, Moscow, 1946.
- [49] H. L. PENMAN. Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *Proceedings of the Royal Society of London*, 193 :120–145, 1948.
- [50] U. RAMER. An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves. *Computer Graphics and Image Processing*, 1 :244–256, 1972.
- [51] J. C. REFSGAARD. Parameterisation, calibration and validation of distributed hydrological models. *Journal of Hydrology*, 198(1–4) :69–97, Nov. 1997.
- [52] J. C. REFSGAARD et H. J. HENRIKSEN. Modelling guidelines—terminology and guiding principles. *Advances in Water Resources*, 27(1) :71–82, 2004.
- [53] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1975.
- [54] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 3rd édn, 1987.
- [55] A. SAALFELD. Topologically consistent line simplification with the douglas-peucker algorithm. *Cartography and Geographic Information Science*, 26(1) :7–18, 1999.
- [56] S. SCHLESINGER, R. E. CROSBIE, R. E. GAGNÉ, G. S. INNIS, C. S. LALWANI, J. LOCH, et AL.. Terminology for model credibility. *SCS Tech Comm Model Credibil Simul*, 32(3) :103–4, 1979.
- [57] J. K. SEABERG, D. D. HANSEN, B. W. BLOCK, A. R. STREITZ, et M. BAKKER. Development of a regional groundwater flow model for the Twin Cities. Dans *Conference Companion : Analytic-based Modeling of Groundwater Flow*, p. 39–41, Nunspeet, The Netherlands, April 1997.
- [58] R. A. SILVERMANN. *Introductory complex analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [59] SOGREA et AQUASCOP. Étude géomorphologique de la loire dans le département de la loire. Rap. tech. 30 0325 R5, Étude pour la DDE Loire, 1996. 76 p.
- [60] T. O. SONNENBORG, B. S. B. CHRISTENSEN, P. NYEGAARD, H. J. HENRIKSEN, et J. C. REFSGAARD. Transient modeling of regional groundwater flow using parameter estimates from steady-state automatic calibration. *Journal of Hydrology*, 273(1–4) :188–204, 2003.
- [61] O. STRACK. Theory and applications of the analytic element method. *American. Geophysical Union. Rev. Geophys*, 41(2) :1005, 2003.
- [62] O. STRACK, R. J. BARNES, et A. VERRUIJT. Vertically integrated flows and the dupuit-forchheimer approximation. Dans *Fourth International Conference on the Analytic Element Method*, Saint Etienne, France, 2003.

- 
- [63] O. D. L. STRACK. *Groundwater Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989. 732 pp.
- [64] O. D. L. STRACK. Principles of the analytic element method. *Journal of Hydrology*, 226(3-4) :128–138, 1999.
- [65] O. D. L. STRACK. Divergence Line Elements with Chebychev polynomials for density distribution. *Communication personnelle*, 2004.
- [66] O. D. L. STRACK. Discharge potential for a pond with elliptical boundary. Dans *Proceedings of the 5th International Conference on the Analytic Element Method (ICAEM)*, p. 165–171, Manhattan, Kansas, 2006.
- [67] O. D. L. STRACK et H. M. HAITJEMA. Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities : 1. Solution for homogeneous permeability. *Water Resources Research*, 17(5) :1535–1549, 1981.
- [68] O. D. L. STRACK et H. M. HAITJEMA. Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities : 2. Solution for inhomogeneous permeability. *Water Resources Research*, 17(5) :1551–1560, 1981.
- [69] O. E. STRACK et F. D. STRACK. A tutorial to MLAEM and SLAEM. Rap. tech., Strack Consulting, Inc., 1997.
- [70] M. VISVALINGAM et D. WHYATT. Line generalization by repeated elimination of points. *The Cartographic Journal*, 30(1) :46–51, 1993.
- [71] Z. WANG et J. C. MÜLLER. Line generalization based on analysis of shape characteristics. *Cartography and Geographic Information Systems*, 25(1) :3–15, 1998.
- [72] WATERLOO HYDROGEOLOGIC. Visual Modflow user’s manual. Rap. tech., 2002. 370 pp.
- [73] E. WHITE. Assessment of line-generalization algorithms using characteristic points. *The American Cartographer*, 12(1) :17–27, 1985.
- [74] W. WIRTINGER. Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. *Mathematischen Annalen*, 97 :357–375, 1927.
- [75] G. Q. YU et T. C. RASMUSSEN. Application of the ordinary least squares approach for solution of complex variable boundary element problems. *Int. J. of Num. Methods in Engineering*, 40(7) :1281–1293, 1997.
- [76] W. J. ZAADNOORDIJK. *Analytic Elements for Transient Groundwater Flow*. Thèse de doctorat, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 1988.
- [77] W. J. ZAADNOORDIJK et O. D. L. STRACK. Area sinks in the analytical element method for transient groundwater flow. *Water Resources Research*, 29(12) :4121–4129, 1993.
- [78] J. ZAOUÏ. Les écoulements en milieu poreux et l’hypothèse de Dupuis. *La Houille Blanche*, 3 :385–388, 1964.



# Table des figures

1	Position des travaux. . . . .	7
1.1	Définition de la charge piézométrique . . . . .	13
1.2	None exhaustive outline of discrete approximation methods. . . . .	18
1.3	Géométrie de quelques éléments analytiques . . . . .	23
1.4	Hiérarchie des niveaux d'héritages de classes pour un élément analytique . . . .	24
1.5	Diagramme de Classes des éléments analytiques (D'après J. CRAIG [15, 16]) . .	25
1.6	Représentation de la structure objet d'un modèle par éléments analytiques (D'après J. CRAIG [15, 16]) . . . . .	26
1.7	Démarche de modélisation scientifique . . . . .	27
2.1	Localisation de la plaine du Forez . . . . .	32
2.2	Présentation de l'Écozone du Forez . . . . .	33
2.3	Carte géologique du site d'étude (D'après la carte géologique de la France au 1/50 000 - Feuille de Montbrison). Les deux traits rouges localisent les coupes géologiques et géomorphologiques interprétatives de la plaine du Forez. La lé- gende de la carte est donnée en figure 2.4. . . . .	35
2.4	Coupes géologiques et géomorphologiques interprétatives du secteur d'étude (d'après LEGRIEL (1975), modifié par D. MIMOUN) . . . . .	36
2.5	Semis de points photogrammétriques du lit majeur (au niveau de l'île Moriaud). 40	
2.6	Modèle Numérique de Terrain du site de l'Écozone du Forez. . . . .	41
2.7	Profil en long du fleuve Loire au niveau de l'Écozone, Août 2004. . . . .	42
2.8	Bilan hydrique du sol. . . . .	43
2.9	Conception du modèle physique. . . . .	47
2.10	Représentation "continue" du domaine d'étude. . . . .	48
2.11	Coupe transversale représentant les conditions aux limites utilisées. . . . .	49
2.12	Représentation de la condition de "rivière". . . . .	50
2.13	Procédure de discrétisation effectuée. . . . .	52
2.14	Discrétisation du domaine pour chacune des méthodes AEM et FDM avec une résolution de 50 m. Les AEM utilisent l'algorithme de Douglas-Peucker avec une tolérance de 50 mètres. Les FDM utilisent une taille de grille de 50 mètres. 54	

2.15	Piézométrie simulée à l'étiage pour les FDM et les AEM. La résolution des différents maillages est de 50 mètres. . . . .	56
2.16	Comparaison entre les valeurs de hauteur d'eau calculées et observées sur 17 points de mesure répartis sur la zone d'étude. . . . .	57
3.1	Hypothèses du problème à répartition de charge constante . . . . .	62
3.2	Correspondance entre l'espace $\boxed{Z}$ et l'espace $\boxed{X}$ . . . . .	63
3.3	Segment de potentiel constant en 2D . . . . .	65
3.4	Segment de potentiel constant en 3D . . . . .	65
3.5	Représentation des 2 premières transformations conformes . . . . .	66
3.6	Représentation de la 3 <sup>ème</sup> transformation conforme . . . . .	68
3.7	Arc de cercle de potentiel constant en 2D . . . . .	72
3.8	Arc de cercle de potentiel constant en 3D . . . . .	72
3.9	Différence $\Omega_{arc} - \Omega_l$ des potentiels complexes en 2D. . . . .	74
3.10	Différence $\Omega_{arc} - \Omega_l$ des potentiels complexes en 3D. . . . .	74
3.11	Comportement asymptotique de la fonction $\frac{f}{g}(z_0)$ en fonction du module de $z_0 = - z_0 i$ . . . . .	76
3.12	Comportement de l'erreur en fonction des différents paramètres $\Phi_0$ , $z_0$ et $\beta$ . A gauche, représentation de l'erreur maximale $Err_{max}$ selon l'hypothèse $\Phi_{arc} = \Phi_l$ ou l'hypothèse $Q_{arc} = Q_l$ . A droite, représentation de l'écart induit $ Q_{arc} - Q_l $ ou $ \Phi_{arc} - \Phi_l $ selon l'hypothèse considérée. . . . .	77
3.13	Problème à répartition de charge non constante . . . . .	78
3.14	Représentation de la 3 <sup>ème</sup> transformation. . . . .	80
3.15	Hypothèses du problème des 3 segments . . . . .	83
3.16	Position spatiale optimale au sens des moindres carrés. . . . .	90
3.17	Les 3 segments connectés en 2D. . . . .	91
3.18	Les 3 segments connectés en 3D. . . . .	91
3.19	Erreur au sens des moindres carrés en fonction de $k_z$ . . . . .	92
3.20	Représentation de l'erreur suivant plusieurs critères . . . . .	93
3.21	Localisation de l'erreur maximale en fonction de $k_z$ . . . . .	94
4.1	Structure topologique "correcte" de la connexion entre les polygones. . . . .	96
4.2	Généralisation d'une polyligne avec l'algorithme de Douglas-Peucker. . . . .	97
4.3	Méthode de localisation des sommets avec l'algorithme de génération du maillage. . . . .	100
4.4	Méthode de localisation des sommets avec l'algorithme de génération du maillage curviligne. . . . .	101
4.5	Schématisation d'une ellipse obtenue par une optimisation de forme utilisant les vertices d'une polyligne fermée. . . . .	103
4.6	Représentation de la distance de Hausdorff. . . . .	106

4.7	Mesures spatiales de la discrétisation. . . . .	107
4.8	Schématisation de l'estimateur local. . . . .	108
4.9	Schématisation de l'estimateur global. . . . .	109
5.1	Variation brusque de potentiel . . . . .	112
5.2	Potentiel complexe 2D d'une linesink de densité $\sigma$ constante . . . . .	117
5.3	Comparaison entre les solutions numériques de $\Phi$ et $\gamma$ après 10 itérations avec leurs solutions exactes respectives . . . . .	127
5.4	Évolution de l'estimateur d'erreur $E_{mc} = \ Ma - b\ _2$ en fonction de l'itération .	127
5.5	Singularités d'ordre un et deux exactes et calculés . . . . .	129
5.6	Représentation des valeurs calculées de l'erreur de troncature du schéma numérique (eq. 5.93) au temps $t = 1$ . . . . .	130
5.7	Évolution de l'erreur $ET$ et de l'erreur $E_{mc}$ . . . . .	131
5.8	Résidu $E_{mc}$ en fonction du pas de temps $\Delta t$ . . . . .	132
5.9	Variation dans le temps de l'erreur $E_{inf}$ en fonction de $\Delta t$ . . . . .	133
5.10	Évolution de la solution numérique pour les 10 premières itérations . . . . .	133
5.11	Évolution logarithmique de l'erreur en fonction du nombre d'itérations avec $\Delta t = 0.01$ . . . . .	134
5.12	Influence du type de répartition des points de contrôles sur l'erreur $\  \cdot \ _\infty$ . . . .	136
5.13	Représentation logarithmique des erreurs $E_{diff}$ de la solution numérique en fonction du nombre de points de contrôles $NbX_j$ . . . . .	137
5.14	Temps cpu en fonction du nombre de points de contrôles $NbX_j$ . . . . .	137
5.15	Singularités d'ordre un et deux exactes et calculés . . . . .	139
5.16	Évolution de la solution numérique pour 10 itérations en temps . . . . .	140
5.17	Variation dans le temps de l'erreur $E_{inf}$ en fonction de $\Delta t$ . . . . .	140
5.18	Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations pour $\Delta t = 0.01$ . . . .	141
6.1	Résultat numérique de la solution exacte en transitoire. . . . .	147
6.2	Transformations conformes utilisées. . . . .	150
D.1	Courbes piézométriques de références établies au 1/10 000 pour l'Écozone (d'après les données de l'étude géophysique CPGF Horizon [1978]). . . . .	189
D.2	Localisation des mesures hydrauliques de l'Écozone. . . . .	190
D.3	Localisation des mesures piézométriques de l'Écozone. . . . .	191
D.4	Topographie du toit du substratum dans la zone d'étude (d'après les données de l'étude géophysique CPGF Horizon [1978]). . . . .	192
D.5	Carte de variation de la conductivité de l'eau dans la zone d'étude. La résistivité des alluvions nappe est caractérisée à partir des isobathes dessinés en pointillés. .	193







## Résumé

Dans une démarche de modélisation hydrogéologique, la méthode des éléments analytiques présente une alternative intéressante par rapport aux méthodes numériques usuellement employées pour l'hydrodynamique souterraine. C'est une méthode aux frontières qui a été développée spécifiquement pour la modélisation des écoulements souterrains.

Après avoir identifié sa place parmi les autres méthodes existantes et discuté de ses avantages et inconvénients, il s'agit d'approfondir cette comparaison sur un cas d'étude réel. C'est pourquoi, cette méthode est comparée à la méthode des différences finies à travers une méthodologie envisageant toutes les étapes de la modélisation ; de la création du modèle conceptuel jusqu'aux résultats de simulation. Cette comparaison fait apparaître l'importance de l'étape de la discrétisation et l'importance cruciale qu'elle représente pour l'utilisateur sur la qualité générale de la modélisation.

Après avoir identifié les approximations inhérentes à la méthode des éléments analytiques, une analyse mathématique de problèmes simplifiés et localisés sur quelques éléments analytiques permet de quantifier ces erreurs et d'y extraire une analyse de leur comportement numérique. Cela permet d'introduire par la même occasion des éléments de théorie de la méthode des éléments analytiques.

La représentation objet et vectorielle des éléments analytiques permet de bien valoriser les interactions possibles avec les SIG. En particulier, il s'agit d'élaborer des algorithmes de discrétisation adaptés aux spécificités et aux besoins de la méthode, mais aussi de mettre en valeur des critères d'évaluation de la qualité de cette discrétisation. La synthèse de ces outils et méthodes permet à l'utilisateur de disposer d'un outil d'aide à la discrétisation pour réduire au mieux ses effets sur la qualité de modélisation.

Il s'agit ensuite d'étudier le comportement numérique des éléments analytiques adaptés à la simulation en régime transitoire. Pour cela, des éléments analytiques 1D sont d'abord développés pour faciliter cette étude. Leur comportement numérique reste similaire tout en réduisant les erreurs numériques qui sont induites par le calcul des éléments analytiques eux-même.

Cette analyse permet de mettre en évidence une méthode de résolution adaptée au régime transitoire qui est ensuite transposée au problème 2D. Elle y expose en particulier une méthode pour estimer le champ d'influence de l'élément transitoire, utilisant un critère de discrétisation spatial qui doit être corrélé avec le pas de discrétisation temporel.