



**HAL**  
open science

# Approximation numérique sur maillage cartésien de lois de conservation : écoulements compressibles et élasticité non linéaire

Yannick Gorsse

## ► To cite this version:

Yannick Gorsse. Approximation numérique sur maillage cartésien de lois de conservation : écoulements compressibles et élasticité non linéaire. Analyse numérique [math.NA]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2012. Français. NNT : . tel-00796722

**HAL Id: tel-00796722**

**<https://theses.hal.science/tel-00796722>**

Submitted on 4 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# THÈSE

Pour l'obtention du grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE DE BORDEAUX

DOMAINE DE RECHERCHE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL  
SCIENTIFIQUE

Présentée par

**Yannick GORSSE**

---

## Approximation numérique sur maillage cartésien de lois de conservation : écoulements compressibles et élasticité non linéaire

---

Directeur de thèse : **M. Angelo Iollo**

Co-direction : **Mme. Lisl Weynans**

Soutenue le 9 novembre 2012  
Devant la Commission d'Examen

### JURY

M. Frédéric Gibou	Professeur des Universités	Rapporteur
M. Frédéric Coquel	Directeur de Recherche au CNRS	Rapporteur
M. Pierre-Henri Maire	Directeur de recherches CEA	Président
M. Michel Belliard	Chercheur CEA	Examineur
M. Angelo Iollo	Professeur des Universités	Directeur
Mme. Lisl Weynans	Maître de conférences	Co-directrice









---

# Remerciement

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Angelo Iollo et Lisl Weynans pour leur encadrement le long de ces trois années de thèse. Leur disponibilité permanente m'a permis de travailler dans d'excellentes conditions, au niveau scientifique comme au niveau personnel.

Je remercie vivement Frédéric Coquel et Frédéric Gibou qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse.

Mes remerciements vont également à Pierre-Henri Maire et Michel Belliard d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à remercier Haysam Telib, ses compétences et la rigueur dont il fait preuve m'ont beaucoup apporté tout au long de cette thèse. Merci à lui et à toute l'équipe d'Optimad Engineering pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont offert pendant deux semaines.

Je remercie également Thomas Milcent pour nos réunions professionnelles ainsi qu'amicales toujours très agréables.

Je tiens à remercier Michel Bergmann, Olivier Saut, Iraj mortazavi, Thierry Colin et les autres pour l'ambiance agréable qui règne dans l'équipe.

Merci à Jessica avec qui j'ai partagé mon bureau depuis le stage de master, merci pour les soirées et ta bonne humeur.

Merci aux doctorants, post doctorants et ingénieurs : Vincent pour ne jamais laisser de blanc dans une conversation (qui peut aborder tous les sujets), Pierre pour me bouger de ma chaise, Romain pour m'avoir fait découvrir Buckethead!, et bien sur Arnaud, Michael, Julie, Raphaël, Mathieu, Alexi, Guillaume.

Merci à ma famille pour m'avoir permis de continuer mes études aussi longtemps que je le souhaitais. Merci pour votre soutien, j'espère que la situation va s'améliorer.

Merci à mes amis Périgourdins Jérémy, Laurent, Romain, Thomas et les autres pour votre

## Remerciements

---

présence depuis tout ce temps!

Et enfin, merci à Diane et Violette qui rendent chaque jour ma vie plus belle.

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Méthodes numériques pour les écoulements compressibles autour d'obstacles.</b>	<b>5</b>
1 Fluides compressibles . . . . .	5
1.1 Équations d'Euler compressibles . . . . .	6
1.1.1 Conservation de la masse . . . . .	6
1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	6
1.1.3 Conservation de l'énergie totale . . . . .	7
1.2 Équations d'état . . . . .	8
1.2.1 Gaz parfaits . . . . .	8
1.2.2 Gaz raides . . . . .	9
1.2.3 Gaz de Van der Waals . . . . .	9
1.2.4 Équation générale . . . . .	9
1.3 Le problème de Riemann . . . . .	10
1.3.1 Hyperbolicité . . . . .	10
1.3.2 Invariants de Riemann . . . . .	11
1.3.3 Problème de Riemann . . . . .	12
2 Résolution numérique des équations d'Euler . . . . .	15
2.1 Discrétisation en espace . . . . .	15
2.1.1 Méthode de Godonov . . . . .	15
2.1.2 Reconstruction de pentes . . . . .	17
2.2 Intégration en temps . . . . .	18

2.3	Conditions au bord . . . . .	19
2.3.1	Condition de champ lointain . . . . .	20
2.3.2	Condition d'entrée . . . . .	20
2.3.3	Condition de sortie . . . . .	21
2.3.4	Symétrie . . . . .	22
3	Méthodes de capture d'interface . . . . .	23
3.1	Méthodes de Front Tracking . . . . .	23
3.2	Méthodes VOF . . . . .	23
3.3	Méthodes Level set . . . . .	25
4	Méthode ALE. . . . .	26
5	Les méthodes de frontières immergées. . . . .	27
5.1	Méthodes continuous forcing . . . . .	29
5.1.1	La méthode de Peskin . . . . .	29
5.1.2	Méthodes de pénalisation . . . . .	30
5.2	Méthodes discrete forcing. . . . .	32
5.2.1	Méthodes cut-cell . . . . .	33
5.2.2	Méthodes ghost-cell . . . . .	34
6	Conclusion . . . . .	37
<b>II Une méthode cartésienne d'ordre 2</b>		<b>39</b>
1	Description en 1D . . . . .	39
1.1	Procédure . . . . .	39
1.2	Pentes au voisinage du solide . . . . .	41
2	Description en 2D. . . . .	41
2.1	Détermination des vitesses $u^*$ et $v^*$ . . . . .	42
2.2	État fluide extrapolé . . . . .	43
2.2.1	Cas « oblique » . . . . .	44
2.2.2	Cas non « oblique » . . . . .	46
2.3	Bilan et précisions . . . . .	46
3	Description en 3D. . . . .	47
3.1	Détermination des vitesses $u^*$ et $v^*$ . . . . .	48
3.2	État fluide extrapolé . . . . .	49
4	Résultats numériques. . . . .	49
4.1	Analyse de la précision en 1D. . . . .	50
4.2	Ecoulement de Ringleb . . . . .	53

4.3	Écoulement subsonique autour d'un cylindre . . . . .	56
4.4	Cylindre supersonique . . . . .	58
4.5	Profil NACA0012 transonique . . . . .	60
4.6	Profil oscillant . . . . .	62
4.7	Quelques simulations 3D . . . . .	63
5	Code parallèle . . . . .	66
5.1	Partitionnement et quantités à communiquer . . . . .	66
5.1.1	Stencil . . . . .	67
5.1.2	Communications . . . . .	67
5.1.3	Algorithme . . . . .	68
5.2	Performance . . . . .	69
5.2.1	Scalabilité faible . . . . .	70
5.2.2	Scalabilité forte . . . . .	71
6	Conclusion . . . . .	73
<b>III Élasticité Eulérienne compressible : contexte et méthodes numériques</b>		<b>75</b>
1	Le modèle . . . . .	75
1.1	Caractéristiques . . . . .	75
1.2	Equations . . . . .	77
1.3	Loi de comportement . . . . .	78
1.4	Tenseur des contraintes . . . . .	79
1.5	Vitesse des ondes . . . . .	80
1.6	Solveur exact . . . . .	80
2	Résolution numérique . . . . .	83
2.1	Solveur HLLC pour l'élasticité . . . . .	84
3	Méthodes de simulation d'écoulements multi-matériaux . . . . .	85
3.1	Méthodes d'interface diffuse . . . . .	85
3.2	Méthodes d'interface non diffuse . . . . .	87
3.2.1	La méthode ghost fluid . . . . .	87
3.2.2	Méthode multimatériaux HLLC . . . . .	90
4	Conclusion . . . . .	90
<b>IV Une méthode robuste pour les écoulements multi-matériaux</b>		<b>91</b>
1	Schéma numérique en deux dimensions . . . . .	91
1.1	Solveur pour deux états du même matériau . . . . .	91

1.2	Solveur multi-matériaux . . . . .	93
1.3	Définition des pentes . . . . .	94
1.4	Mise à jour des cellules changeant de milieu . . . . .	95
2	Résultats numériques . . . . .	97
2.1	Validations et cas test 1D. . . . .	97
2.1.1	Fluide-fluide . . . . .	97
2.1.2	Solide-solide . . . . .	102
2.1.3	Élastique-fluide . . . . .	104
2.2	Simulations 2D . . . . .	108
2.2.1	Fluide-fluide . . . . .	108
2.2.2	Élastique-fluide . . . . .	115
3	Perspectives d'amélioration . . . . .	121
3.1	Cas 1D . . . . .	121
3.2	Cas 2D . . . . .	122
3.3	Résultats préliminaires . . . . .	123
4	Conclusion . . . . .	124
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>127</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>131</b>

---

# Introduction générale

La démarche historique de la recherche scientifique basée sur le duo théorie-expérience s'est enrichie ces dernières décennies d'un outil précieux : la simulation numérique. Les modèles que développent les chercheurs afin d'apporter des explications rationnelles et solides à des phénomènes naturels se présentent sous la forme d'équations. Pour des phénomènes simples, ces dernières peuvent parfois être résolues de manière exacte. Pour des phénomènes plus complexes, une solution analytique est hors de portée. La simulation numérique permet de résoudre de manière approchée ces équations et ainsi élargit considérablement le potentiel d'investigation scientifique.

L'expérience numérique permet de simuler des phénomènes inaccessibles au chercheur par l'expérience conventionnelle, comme les collisions entre galaxies ou la simulation du climat passé. Elle permet également de remplacer les essais réels par des essais virtuels : la simulation en aérodynamique permet d'éviter ou de compléter les essais en souffleries, elle permet de dimensionner des installations nucléaires afin d'en optimiser l'efficacité, etc... La simulation peut également être un outil de projection dans le futur, comme par exemple à court terme avec la météorologie, à moyen terme avec la simulation de la croissance tumorale [49], ou à long terme avec la simulation du climat futur [61] ou encore l'évolution d'indicateurs de la société [51].

Une des conditions nécessaires de ces progrès récents est l'explosion de la puissance de calcul informatique. En effet la puissance de calcul du super-ordinateur le plus rapide est de  $50 \cdot 10^3$ Flops en 1946, elle progresse jusqu'à  $150 \cdot 10^6$ Flops en 1975 pour littéralement s'envoler à  $16 \cdot 10^{15}$ Flops aujourd'hui.

La simulation numérique a bien sûr des limites qu'il est nécessaire de connaître. Afin de simuler un phénomène, il faut dans un premier temps comprendre son fonctionnement et être



capable de réaliser un modèle mathématique. Pour les phénomènes encore mal compris, des maillons reliant phénomène et simulation manquent. La résolution numérique peut également être utilisée hors du domaine de validité du modèle et par conséquent produire des résultats erronés sans que l'utilisateur en soit alerté. D'autre part, certaines simulation de phénomènes complexes sont encore inaccessibles au calcul en raison du temps nécessaire à leur exécution. Enfin, l'efficacité de la parallélisation des codes de calcul décroissant avec le nombre de processeurs utilisés, la programmation d'algorithmes visant à être exécutés sur les clusters les plus puissant est un vrai challenge.

C'est dans ce cadre de la simulation numérique, et plus précisément son application aux écoulements fluides et aux interactions fluide-structure que se situent les travaux menés pendant cette thèse. Les situations faisant intervenir ces problèmes sont variées. Elles vont de la biomécanique (écoulement sanguin, nage de poissons) aux transports (aéronautique, automobiles, transports ferrés), en passant par les procédés industriels (nucléaire, extraction pétrolière) ou encore les applications militaires (détonations, armement).

Nous nous intéressons à la simulation d'écoulements de fluides compressibles autour de solides rigides, aux écoulements mettant en jeu différents fluides compressibles et enfin aux interactions entre un fluide compressible et un solide déformable élastique. Pour ce type d'écoulement mettant en jeu des interfaces en mouvement, ou pouvant subir de grandes déformations, plusieurs choix de méthodes numériques sont possibles : sur maillage fixe (méthodes eulériennes), ou avec déformation de maillages (méthodes ALE). En raison d'une part de déformations potentiellement très importantes et du changement de topologie des interfaces considérées (par exemple rupture d'une bulle de gaz dans l'eau) et d'autre part de la simplicité de mise en oeuvre des simulations, c'est la première approche que nous choisissons.

Cette thèse se divise en deux parties. La première concerne les écoulements autour d'obstacles rigides. Le modèle utilisé est celui des équations d'Euler compressible associées à la loi des gaz parfaits. Le but de cette première partie est de développer un schéma numérique sur maillage cartésien simple et précis afin d'imposer une condition de glissement à l'ordre 2 au bord de l'obstacle considéré. On s'appuie sur un schéma numérique classique de type volumes finis. L'obstacle considéré étant de forme arbitraire, l'effort est porté sur la condition au bord de celui ci. C'est donc une approche de type frontières immergées qui est développée. La méthode est développée en 2D ainsi qu'en 3D. Un code parallèle est développé.

La deuxième partie de la thèse traite des écoulements multi-matériaux. Le modèle utilisé est celui de l'élasticité non linéaire compressible. Il englobe les équations d'Euler et permet

donc d'utiliser une approche multiphasique. Les mêmes équations sont discrétisées dans tout le domaine, seules les lois de comportement changent suivant la phase considérée. Le but de cette deuxième partie est d'une part d'étendre le schéma existant en deux dimensions et à l'ordre 2, et d'autre part d'adapter la méthode développée dans la première partie aux interfaces entre différents matériaux.

Le plan de cette thèse est le suivant : le premier chapitre décrit le contexte physique des équations d'Euler et leur résolution numérique. Il traite ensuite des méthodes de résolution numérique sur maillage non adapté. Un état de l'art des méthodes de suivi d'interface et des méthodes de simulation d'écoulements autour d'obstacles est présenté. L'accent est mis sur les méthodes de frontières immergées.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une méthode numérique pour imposer une condition de glissement à l'ordre 2 pour les écoulements de fluides compressibles autour d'obstacles. La méthode est décrite en une, deux et trois dimensions. Elle consiste à déterminer un état fictif pour les cellules proches de l'interface afin d'imposer la condition au bord à la précision souhaitée grâce à une procédure « dimension par dimension » en vue de faciliter l'extension au 3D. Des validations en 1D sont présentées, suivies de cas test 2D. Nous calculons notamment l'ordre de convergence du schéma sur l'écoulement de Ringleb pour lequel la solution exacte est connue. La production d'entropie autour d'un cylindre 2D dans un écoulement subsonique est mesurée. L'écoulement autour d'un profil d'aile transonique fixe ou oscillant est simulé, et les coefficients aérodynamiques sont comparés aux résultats de référence ou aux expériences. Enfin, nous décrivons la procédure utilisée afin de paralléliser le code et présentons des tests de performance ainsi que des simulations préliminaires.

Le troisième chapitre concerne l'élasticité eulérienne non linéaire compressible. Nous décrivons le modèle ainsi que les méthodes utilisées dans la littérature afin de simuler les écoulements multi-matériaux. Un solveur de Riemann exact à cinq ondes est implémenté dans le but de valider les simulations numériques présentées au chapitre IV. Enfin, nous présentons le solveur sur lequel se base le chapitre IV : le solveur multimatériaux HLLC.

Dans le quatrième chapitre, nous décrivons les travaux menés pour développer un code 2D à l'ordre 2 pour les écoulements multi-matériaux : extension du solveur en 2D, reconstruction de pentes, mises à jour des cellules changeant de milieu. Un travail de validation et la simulation de cas test réalistes en 2D sont réalisés. Nous présentons des simulations de tubes à choc 1D dont la solution numérique est comparée aux solutions exactes. Des simulations 2D d'interaction choc-bulle ainsi que d'impact et projectile sur une plaque plane dans l'air sont présentées.



---

---

# Chapitre I

---

## Méthodes numériques pour les écoulements compressibles autour d'obstacles.

Dans cette première partie de thèse, il sera question d'écoulement de fluide compressible autour d'obstacles rigides. Le but est de développer une méthode numérique sur maillage cartésien simple et précise. Dans ce chapitre, nous présentons le contexte physique, la discrétisation des équations puis nous faisons un état de l'art des méthodes numériques eulériennes pour la simulation d'écoulements autour obstacles.

### 1 Fluides compressibles

Les équations d'Euler décrivent l'évolution d'un gaz compressible non visqueux et sans transfert de chaleur. Nous allons détailler dans la section suivante chaque équation qui compose le système d'équations d'Euler : la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Pour plus de détails on pourra se reporter à [74], [79] ou [40] par exemple. On trouvera dans le tableau I.1 la signification des variables employées dans la suite.

$\rho$	densité	$c_p$	chaleur massique à pression constante
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse	$c_v$	chaleur massique à volume constant
$u$	composante $x$ de la vitesse	$\gamma$	ratio des chaleurs spécifiques
$v$	composante $y$ de la vitesse	$R$	constante spécifique des gaz parfaits
$p$	pression	$\varepsilon$	énergie interne par unité de masse
$T$	température	$c$	vitesse du son
$e$	énergie totale par unité de masse	$s$	entropie

Tableau I.1 – Notations.

## 1.1 Équations d'Euler compressibles

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, un gaz est décrit grâce à des variables macroscopiques telles la densité, la vitesse du fluide, la pression. Les quatre principes fondamentaux qui gouvernent le mouvement des fluides compressibles sont :

- la loi de conservation de la masse,
- le principe fondamental de la dynamique, ou loi de Newton,
- le premier principe de la thermodynamique,
- le deuxième principe de la thermodynamique

Les prochains paragraphes les décrivent brièvement.

On écrit au préalable la formule de Reynolds pour les volumes qui nous servira à écrire les équations dans le formalisme eulérien :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} f(x, t) dx \right) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) dx. \quad (\text{I.1})$$

### 1.1.1 Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse postule qu'il n'y a ni création ni disparition de matière. Pour un volume fluide  $\Omega_t$  que l'on suit dans son mouvement, ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx \right) = 0.$$

En utilisant I.1, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dx = 0.$$

L'égalité étant vraie quel que soit  $\Omega_t$ , on obtient l'équation sous forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{I.2})$$

### 1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

On applique ici le principe fondamental de la mécanique à un volume  $\Omega_t$  de fluide que l'on suit dans son mouvement. La variation de quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système. Les forces extérieures volumiques sont notées  $f(x, t)$  et les forces surfaciques s'écrivent  $\sigma(x, t) \mathbf{n}(x, t)$ . On a donc l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx \right) = \int_{\partial \Omega_t} \sigma(x, t) \mathbf{n}(x, t) ds + \int_{\Omega_t} f(x, t) dx.$$

Nous supposons que le fluide n'est soumis qu'à ses propres contraintes, ce qui entraîne que  $f(x, t) = 0$ . En utilisant I.1, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, dx = \int_{\partial \Omega_t} \sigma \mathbf{n} \, ds.$$

Dans le cas de fluides non visqueux,  $\sigma = -p\mathbf{I}$ . On obtient l'équation sous forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}) = 0. \quad (\text{I.3})$$

### 1.1.3 Conservation de l'énergie totale

Soit  $e$  l'énergie totale par unité de masse. L'énergie se décompose en deux parties :

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u},$$

où  $\varepsilon$  est l'énergie interne par unité de masse et  $\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  est l'énergie cinétique.

C'est le premier principe de la thermodynamique que l'on applique ici. Il stipule que la variation d'énergie totale est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur sous forme de chaleur et de travail. Dans le cadre des équations d'Euler, les transferts de chaleur sont négligés (gaz adiabatique). On a donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) e(x, t) \, dx \right) = \int_{\partial \Omega_t} (\sigma(x, t) \mathbf{n}(x, t)) \cdot \mathbf{u}(x, t) \, ds + \int_{\Omega_t} f(x, t) \cdot \mathbf{u}(x, t) \, dx.$$

En utilisant la même hypothèse sur les forces extérieure que précédemment (seules les forces surfaciques comptent), et en utilisant I.1, on a :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) = 0. \quad (\text{I.4})$$

Les équations d'Euler compressible sont formées des trois équations locales I.2, I.3 et I.4 obtenues précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Pour fermer le système on a besoin d'une relation supplémentaire liant les variables : une loi d'état.

## 1.2 Équations d'état

Des relations entre les variables peuvent être déduites des deux lois de la thermodynamique :  $d\varepsilon = \delta Q + \frac{p}{\rho^2}d\rho$  et  $\delta Q = Tds$  où  $s$  désigne l'entropie. On a :

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho. \quad (\text{I.6})$$

Si on choisit une loi d'état canonique de la forme  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$ , la température et la pression sont déduites de I.6 :

$$T = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\rho} \quad p = \rho^2 \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_s. \quad (\text{I.7})$$

Dans la suite nous écrivons les relations effectivement utilisées dans le code  $p = p(\rho, T)$  et  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, p)$  ainsi que l'expression de la vitesse du son  $c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$ . Nous allons voir trois équations d'état classiques et définir une équation générale les regroupant.

### 1.2.1 Gaz parfaits

L'équation d'état des gaz parfaits décrit un gaz où les particules sont ponctuelles et n'ont pas d'interaction entre elles. Ceci est une bonne approximation des gaz réels à basse pression et haute température. Sous la forme  $p = p(\rho, T)$ , elle s'écrit :

$$p = \rho RT, \quad (\text{I.8})$$

où  $R = c_p - c_v$  est la constante spécifique des gaz parfaits,  $c_p$  et  $c_v$  la chaleur massique à pression ou à volume constant. L'expression de l'énergie interne et de la vitesse du son pour un gaz parfait sont :

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (\text{I.9})$$

où  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  est le ratio des chaleurs spécifiques, ou constante polytropique.

### 1.2.2 Gaz raides

La loi des gaz raides est utilisée pour décrire des gaz peu compressibles. En effet, plus le paramètre  $p_\infty$  est grand, plus le gaz est "raide". Lorsque  $p_\infty = 0$ , on retrouve la loi des gaz parfaits. Sous la forme  $p = p(\rho, T)$ , elle s'écrit :

$$p = \rho RT - p_\infty. \quad (\text{I.10})$$

Les expressions de l'énergie interne et de la vitesse du son pour un gaz raide sont :

$$\varepsilon = \frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho} \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p + p_\infty}{\rho}}. \quad (\text{I.11})$$

### 1.2.3 Gaz de Van der Waals

L'équation d'état de Van der Waals décrit un gaz où les particules occupent un volume non nul (le covolume  $b$ ) et ont des interactions entre elles (la constante  $a$  est appelée pression de cohésion). A basse pression et haute température on tend vers la loi des gaz parfaits, mais à haute pression et basse température cette loi modélise mieux le comportement des gaz réels. Sous la forme  $p = p(\rho, T)$ , elle s'écrit :

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2. \quad (\text{I.12})$$

Les expressions de l'énergie interne et de la vitesse du son pour un gaz de Van der Waals sont :

$$\varepsilon = \frac{(p + a\rho^2)(1 - b\rho)}{(\gamma - 1)\rho} - a\rho \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p + a\rho^2}{\rho(1 - b\rho)}}. \quad (\text{I.13})$$

### 1.2.4 Équation générale

Il est possible d'écrire une loi générale permettant de regrouper les trois lois précédentes. Sous la forme  $p = p(\rho, T)$ , elle s'écrit :

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2 - p_\infty. \quad (\text{I.14})$$



Les expressions de l'énergie interne et de la vitesse du son pour la loi générale sont :

$$\varepsilon = \frac{(p + a\rho^2 + p_\infty)(1 - b\rho)}{(\gamma - 1)\rho} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p + p_\infty + a\rho^2}{\rho(1 - b\rho)}}. \quad (\text{I.15})$$

### 1.3 Le problème de Riemann

Dans cette section nous allons parler du problème de Riemann, qui est un ingrédient essentiel aux méthodes volumes finis pour les loi de conservation, et en particulier pour les équations d'Euler. En effet, le célèbre schéma de Godunov [29] propose une généralisation des schémas upwind pour les systèmes non linéaires grâce à la structure locale des caractéristiques définies par le problème de Riemann. Avant d'aborder le problème de Riemann, rappelons quelques propriétés des équations d'Euler. Dans la suite, nous utilisons la loi des gaz parfaits.

#### 1.3.1 Hyperbolicité

Le système des équations d'Euler I.5 peut se réécrire sous forme vectorielle. Pour le cas 1D on a :

$$W_t + F(W)_x = \mathbf{0}, \quad (\text{I.16})$$

où :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.17})$$

Cette loi de conservation peut être écrite sous forme quasi-linéaire :

$$W_t + A(W)W_x = \mathbf{0}, \quad (\text{I.18})$$

où :

$$A(W) = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)u^3 - \frac{c^2 u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}u^2 - \frac{c^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{pmatrix}. \quad (\text{I.19})$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne  $A$  sont :

$$\lambda_1 = u - c \quad \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + c. \quad (\text{I.20})$$

Les valeurs propres étant réelles et distinctes, le système d'équations d'Euler est strictement hyperbolique. Les vecteurs propres associés sont :

$$K^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix} \quad K^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix} \quad K^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}, \quad (\text{I.21})$$

où  $H = (\rho e + p)/\rho$  est l'enthalpie totale. On a :

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1(W) \cdot K^{(1)} &= -\frac{\gamma + 1}{2\gamma} c < 0, \\ \nabla \lambda_3(W) \cdot K^{(3)} &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma} c > 0, \\ \nabla \lambda_2(W) \cdot K^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

On dit que les champs caractéristiques associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont non linéairement dégénérés ( $\nabla \lambda_i \cdot K^{(i)} \neq 0$ ) tandis que celui associé à  $\lambda_2$  est linéairement dégénéré.

### 1.3.2 Invariants de Riemann

Dans le cadre d'écoulements continus, les quantités appelées invariants de Riemann sont conservées le long des courbes caractéristiques. La méthode des caractéristiques revient à utiliser ces propriétés.

Les courbes caractéristiques  $\mathcal{C}^\pm$  et  $\mathcal{C}^0$  sont définies par :

$$\mathcal{C}^\pm \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \pm c \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \mathcal{C}^0 = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La caractéristique  $\mathcal{C}^-$  transporte la quantité  $R_1$  et  $\mathcal{C}^+$  transporte  $R_3$  :

$$\begin{aligned} R_1 &= u - \frac{2}{\gamma - 1} c, \\ R_3 &= u + \frac{2}{\gamma - 1} c, \end{aligned}$$

et la caractéristique  $\mathcal{C}^0$  transporte l'entropie  $s$  :

$$s = \gamma \log(T) - (\gamma - 1) \log(p).$$

Ces invariants sont utilisés par la suite afin de définir les conditions au bord du domaine, et sont également utilisés dans des solveurs de Riemann approchés comme le solveur d'Osher.

### 1.3.3 Problème de Riemann

On appelle problème de Riemann pour les équations d'Euler le problème de Cauchy pour I.16 avec les conditions initiales :

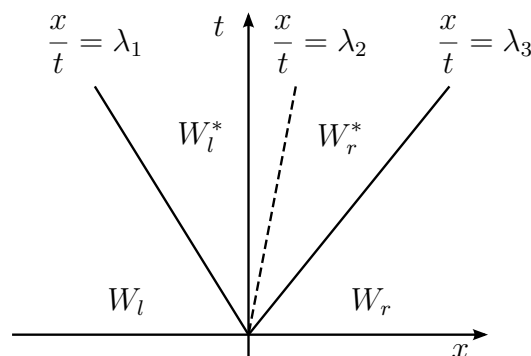
$$W(x, 0) = \begin{cases} W_l & \text{si } x < 0, \\ W_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Les données initiales sont simplement deux états constants séparés par une discontinuité en  $x = 0$ .

Pour un système de lois de conservation strictement hyperbolique, dont  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $A$  (I.19), le problème de Riemann I.22 possède une unique solution qui se présente sous la forme d'une succession d'états constants  $W_l = W_0, W_1, \dots, W_n = W_r$  séparés par une onde émanant de l'origine.

Dans le cas des équations d'Euler, voir fig. I.1, les états  $W_l$  et  $W_l^*$  sont séparés par une onde non linéaire (choc ou détente), de même que les états  $W_r^*$  et  $W_r$ , alors que les états  $W_l^*$  et  $W_r^*$  sont séparés par une onde linéairement dégénérée (discontinuité de contact).

On remarque que la solution varie selon le paramètre  $x/t$ . Dans le cas représenté sur la fig. I.1



**Figure I.1** – Représentation du problème de Riemann pour les équations d'Euler dans le plan  $(x, t)$ .

la solution du problème de Riemann  $RP(W_l, W_r)$  s'écrit :

$$W(x/t) = \begin{cases} W_l & \text{si } x/t < \lambda_1, \\ W_l^* & \text{si } \lambda_1 \leq x/t < \lambda_2, \\ W_r^* & \text{si } \lambda_2 \leq x/t < \lambda_3, \\ W_r & \text{si } \lambda_3 \leq x/t. \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

Voyons quelles relations lient les états de part et d'autre de chaque onde.

**Onde de détente.** Une illustration de la structure des caractéristiques et de l'allure des variables à travers une onde de détente est présentée sur la fig. I.2. Dans ce cas là, la solution est continue et les invariants de Riemann sont égaux dans les états adjacents à une onde de détente. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont des détente on a :

$$\left. \begin{array}{l} R_3 = u + \frac{2}{\gamma - 1}c = \text{cst} \\ R_2 = s = \text{cst} \end{array} \right\} \text{à travers } \lambda_1 \quad \left. \begin{array}{l} R_1 = u - \frac{2}{\gamma - 1}c = \text{cst} \\ R_2 = s = \text{cst} \end{array} \right\} \text{à travers } \lambda_3 \quad (\text{I.24})$$

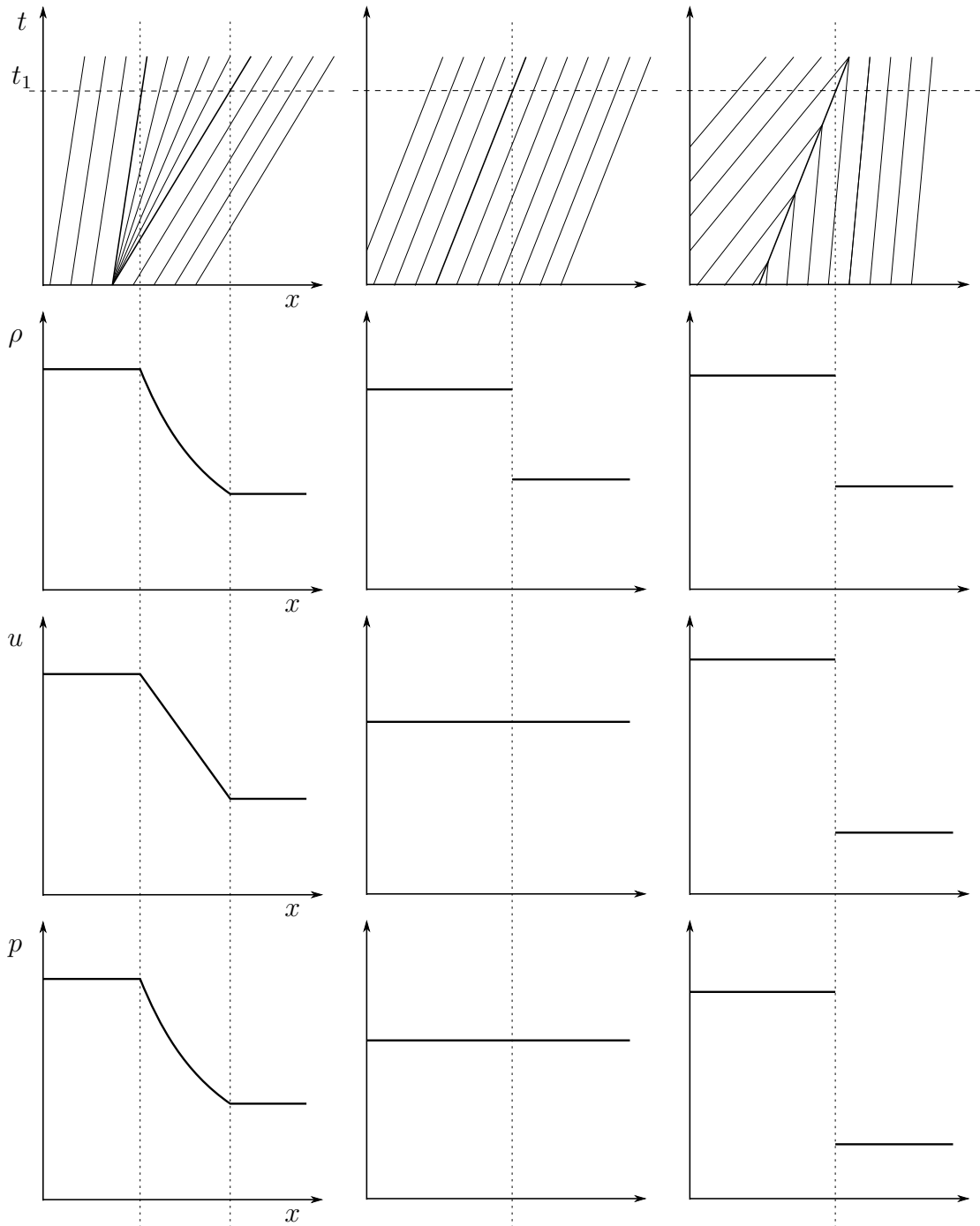
**Onde de choc.** Une illustration de la structure des caractéristiques et de l'allure des variables à travers une onde de choc est présentée sur la fig. I.2. Ici la solution est discontinue pour chaque variable, elle doit satisfaire les conditions de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{aligned} [\rho u] &= S[\rho], \\ [\rho u^2 + p] &= S[\rho u], \\ [(\rho e + p)u] &= S[\rho e], \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

où  $[\alpha]$  désigne le saut de la quantité  $\alpha$  à travers l'interface, et  $S$  la vitesse de propagation du choc.

**Discontinuité de contact.** Une illustration de la structure des caractéristiques et de l'allure des variables à travers une discontinuité de contact est présentée sur la fig. I.2. C'est une onde à travers de laquelle la vitesse et la pression sont constantes, mais la densité est discontinue, ainsi que toutes les variables qui en dépendent (énergie interne, température, vitesse du son, entropie, ...). Toute solution discontinue est soumise aux relations de Rankine Hugoniot I.25. Et à travers une discontinuité de contact :

$$p = \text{cst} \quad u = \text{cst} \quad (\text{I.26})$$



**Figure I.2** – Structure des caractéristiques et solution au temps  $t_1$  à travers une onde de détente (à gauche), une discontinuité de contact (au centre) et une onde de choc (à droite).

Après avoir fait un bref rappel de notions relatives aux écoulements compressibles, nous allons décrire la méthode numérique utilisée afin de résoudre la partie fluide.

## 2 Résolution numérique des équations d'Euler

Dans cette section nous allons décrire les méthodes utilisées pour résoudre les équations d'Euler dans le domaine fluide. Les domaines 2D considérés sont de forme rectangulaire, nous utilisons une méthode classique volumes finis type Godunov avec reconstruction de pentes afin d'obtenir l'ordre 2 en espace.

### 2.1 Discrétisation en espace

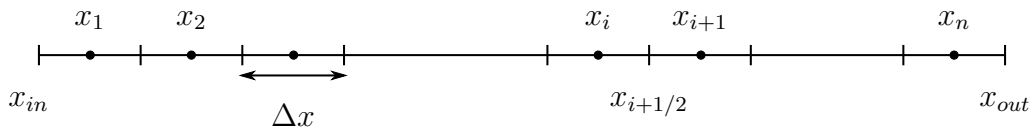
Nous travaillons sur des maillages cartésiens, le plus souvent uniformes.

#### 2.1.1 Méthode de Godonov

**En 1D,** le « maillage » sur un domaine  $[x_{\text{in}}, x_{\text{out}}]$  consiste en un ensemble de cellules  $C_i$  définies par :

$$C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], i = 1 \dots n \quad , \quad x_{i+1/2} = x_{\text{in}} + i\Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{x_{\text{out}} - x_{\text{in}}}{n},$$

où  $n$  est le nombre de points de discrétisation et  $\Delta x$  le pas de discrétisation, voir fig. I.3. On définit le centre de  $C_i$  comme  $x_i = x_{\text{in}} + (i - 1/2)\Delta x$ .



**Figure I.3** – Maillage 1D.

En intégrant I.16 sur la cellule  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , on obtient la semi-discrétisation :

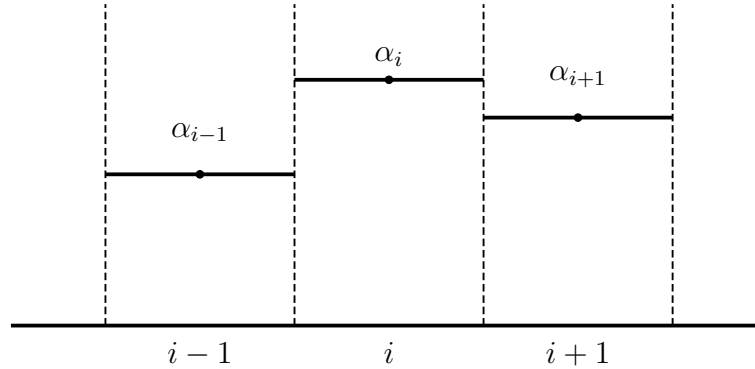
$$\frac{dW_i}{dt} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = \mathbf{0},$$

où  $\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(W_i, W_{i+1})$  est le flux numérique à l'interface  $i + 1/2$  et

$$W_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t) dx \tag{I.27}$$

est la valeur moyenne de  $W$  sur la cellule  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Les inconnues  $W_i$  sont donc des valeurs moyennes sur les cellules. Ainsi même si la solution présente une discontinuité, cette quantité moyenne est tout de même définie.

On peut voir sur la fig. I.4 une distribution d'états constants sur une partie d'un maillage 1D.

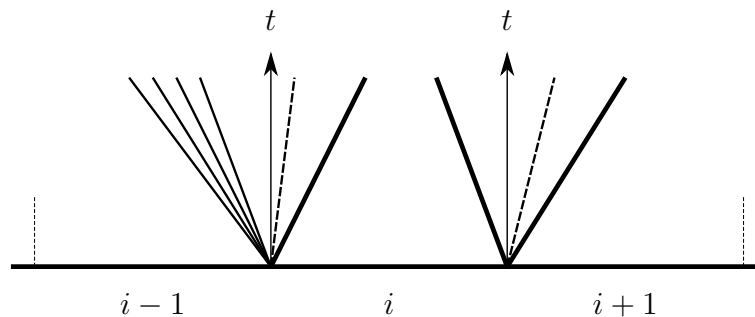


**Figure I.4** – Distribution d'états constants pour une variable  $\alpha$ .

À chaque interface  $x_{i+1/2}$  correspond la définition d'un problème de Riemann, voir fig. I.5, entre les états constants  $W_i$  et  $W_{i+1}$ . La définition d'un flux numérique de type Godunov à cette interface fait intervenir la résolution (exacte ou approchée) de ce problème de Riemann. En effet, le flux en  $i + 1/2$  est défini par :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = F(W_{i+1/2}(0)) \quad (\text{I.28})$$

où  $W_{i+1/2}(0)$  est la solution du problème de Riemann  $RP(W_i, W_{i+1})$  pour  $x/t = 0$ , c'est à dire le long de l'axe  $t$ .



**Figure I.5** – Ondes émergent de la solution des problèmes de Riemann aux interfaces  $i - 1/2$  et  $i + 1/2$ .

Ce schéma est d'ordre 1, mais il est possible de monter en ordre en remplaçant les constantes par morceaux par des fonctions linéaires par morceaux par exemple.

### 2.1.2 Reconstruction de pentes

Sur chaque cellule on définit une pente  $s_i$  pour chaque variable telle que :

$$\alpha(x) = \alpha_i + s_i \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad \text{sur la cellule } C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (\text{I.29})$$

pour une variable  $\alpha$  arbitraire, voir fig. I.6 pour une représentation graphique. On peut noter que cette formulation ne modifie pas les valeurs moyennes sur chaque cellules, et le cas  $s_i = 0$  correspond à la méthode d'ordre 1. Le flux numérique dépend désormais des valeurs immédiatement de part et d'autre de l'interface considérée :  $\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(W_i^r, W_{i+1}^l)$ , voir fig. I.6, où :

$$W_i^r = W_i + \frac{\mathbf{s}_i}{2}; \quad W_{i+1}^l = W_{i+1} - \frac{\mathbf{s}_{i+1}}{2}, \quad (\text{I.30})$$

avec  $\mathbf{s}_i$  un vecteur contenant les pentes associées à chaque variable dans la cellule  $i$ .

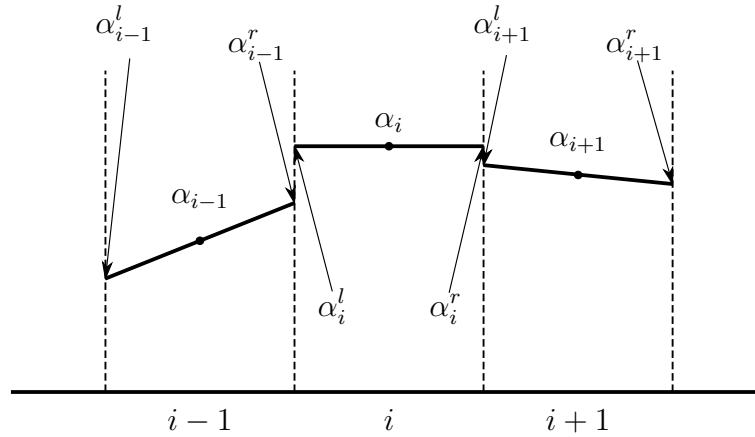


Figure I.6 – Reconstruction de pentes pour la variable  $\alpha$ .

On considère que la pente  $s_i$  est calculée grâce aux pentes  $s_{i-1/2}$  et  $s_{i+1/2}$ , autrement dit  $s_i = f(s_{i-1/2}, s_{i+1/2})$ , où :

$$s_{i-1/2} = s_i - s_{i-1}; \quad s_{i+1/2} = s_{i+1} - s_i. \quad (\text{I.31})$$

La pente la plus simple que nous puissions définir est la pente « centrée » :

$$s_i = \frac{1}{2} (s_{i+1/2} + s_{i-1/2}) \quad (\text{I.32})$$

Elle pourra être utilisée dans la suite pour les écoulements réguliers. En revanche, des oscillations apparaîtront à proximité des forts gradients, en particulier dans des écoulements discontinus.



C'est la raison pour laquelle nous utiliserons également des pentes limitées, afin de garantir le caractère TVD du schéma. Un exemple de pente limitée est la pente **minmod** :

$$s_i = \begin{cases} \text{sign}(s_{i+1/2})\min(|s_{i-1/2}|, |s_{i+1/2}|) & \text{si } s_{i-1/2}s_{i+1/2} > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

**En 2D**, on retrouve les mêmes principes dans chaque direction. Le maillage est constitué de  $n_x$  points dans la direction  $x$  et de  $n_y$  points dans la direction  $y$ . Les pas d'espace sont notés  $\Delta x$  et  $\Delta y$ .

Dans le cas 2D les équations s'écrivent :

$$W_t + F(W)_x + G(W)_y = \mathbf{0}, \quad (\text{I.34})$$

où :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix} \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho uv \\ v(\rho e + p) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.35})$$

On procède à un splitting directionnel afin de calculer les flux aux interfaces entre les cellules. En pratique on calcule les flux associés aux interfaces  $i + 1/2$  puis les flux associés aux interfaces  $j + 1/2$  (l'ordre n'a pas d'importance) avec les données initiales  $W^n$  dans les deux cas. La composante normale à l'interface considérée pour la vitesse joue le rôle de la vitesse 1D, et la composante tangentielle est simplement transportée. Autrement dit,  $v_l^* = v_l$  et  $v_r^* = v_r$ . Une fois les flux calculés, on obtient alors le résidu dans chaque cellule :

$$R_{ij} = \Delta y (\mathcal{F}_{i+1/2j} - \mathcal{F}_{i-1/2j}) + \Delta x (\mathcal{F}_{ij+1/2} - \mathcal{F}_{ij-1/2}), \quad (\text{I.36})$$

quantité qui sera utilisée dans l'intégration en temps afin de faire évoluer les variables.

## 2.2 Intégration en temps

L'intégration en temps des équations d'Euler revient à intégrer une EDO de la forme  $\frac{dW}{dt} = \mathcal{L}(W)$ . Elle sera effectuée grâce à un schéma de Runge-Kutta. Le schéma de Runge-Kutta

## I.2 Résolution numérique des équations d'Euler

---

d'ordre  $l$  est défini par :

$$\begin{cases} W^{n+1} = W^n + \Delta t \sum_{i=1}^l b_i k_i \\ k_i = \mathcal{L} \left( t_n + c_i \Delta t, W^n + \Delta t \sum_{j=1}^l a_{ij} k_j \right), \end{cases}$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps qui doit satisfaire la condition CFL de stabilité :

$$\Delta t = \text{cfl} \frac{\Delta x}{\max_{i,j} (|u_{ij}| + c_{ij})}, \quad 0 \leq \text{cfl} \leq 1,$$

et les coefficients  $a_{ij}$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont les composantes du tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_l & a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_l \end{array}$$

On donne les tableaux de Butcher pour  $l = 1, \dots, 4$  :

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

### 2.3 Conditions au bord

Nous décrivons le traitement des conditions au bord du domaine de calcul. Calculer les conditions au bord signifie calculer le flux aux interfaces ces cellules formant le bord du domaine. Ces flux sont calculés en résolvant un problème de Riemann entre l'état fluide extrapolé au bord grâce aux pentes MUSCL et une cellule fantôme dont la valeur des variables dépend de la condition au bord à imposer, ou bien en résolvant un problème de Riemann pour lequel une ou plusieurs variables des états intermédiaire sont imposées. Selon le calcul, différentes conditions au bord sont utilisées.

### 2.3.1 Condition de champ lointain

La valeur de la cellule fantôme est constante dans le temps et ne dépend pas de la cellule fluide voisine. Cette condition au bord est utilisée dans le cas d'un écoulement stationnaire pour lequel le bord considéré ne subit pas d'importantes perturbations dues à l'obstacle. Autrement dit, elle peut être utilisée comme entrée d'un écoulement subsonique si l'obstacle est éloigné du bord.

On peut noter que si l'état fluide contenu dans la cellule fantôme correspond à un écoulement supersonique entrant, alors cette condition est une entrée supersonique.

### 2.3.2 Condition d'entrée

Considérons que l'entrée de fluide s'effectue selon l'axe  $x = x_{\text{in}}$ . On distingue deux cas selon que l'écoulement est subsonique ou supersonique. Dans les deux cas, la structure locale des caractéristiques est étudiée : on détermine d'où proviennent les caractéristiques qui se rencontrent au point  $(x_{\text{in}}, t + \Delta t)$ , voir fig. I.7. Si l'écoulement est supersonique, alors toutes les caractéristiques sont rentrantes (elles proviennent de l'extérieur du domaine), le flux à l'entrée ne dépend donc que de l'état fluide imposé dans la cellule fantôme.

Dans le cas subsonique, deux caractéristiques sont entrantes, et une est sortante, voir fig. I.7. Deux conditions au bord doivent être imposées, et les quantités habituellement imposées sont la pression totale  $p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$  et la température totale  $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$ , où  $M$  est le nombre de Mach. Le flux à l'entrée est calculée à partir de l'état intermédiaire  $U_l^* = (u^*, v_l^*, p^*, c_l^*)$  du demi problème de Riemann au bord. On décrit brièvement le calcul permettant de le déterminer. L'expression de la température totale à l'entrée est :

$$T_0 = T_l^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u^*}{c_l^*}\right)^2\right). \quad (\text{I.37})$$

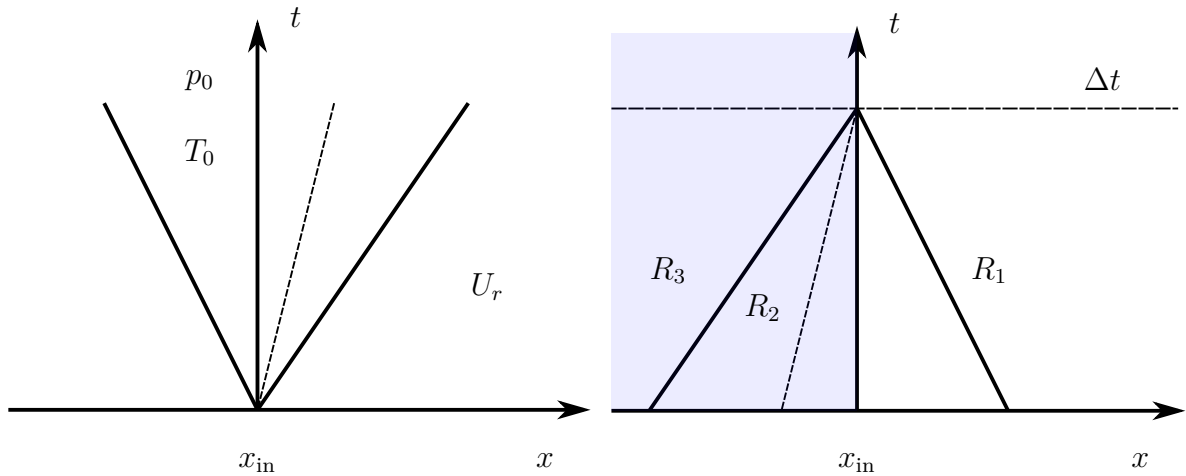
En utilisant l'invariant de Riemann  $R_1$  associé à la  $\mathcal{C}^-$  provenant de domaine fluide pour substituer  $u^*$  et en exprimant  $T_l^*$  en fonction de  $c_l^*$ , on obtient l'équation du second degré en  $c_l^*$  suivante :

$$(c_l^*)^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} e^{\frac{s - s_{\text{in}}}{\gamma}}\right) + c_l^* \left(2R_1 e^{\frac{s - s_{\text{in}}}{2\gamma}}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} R_1^2 - \gamma T_0 = 0, \quad (\text{I.38})$$

où  $e^{\frac{s-s_{\text{in}}}{2\gamma}} = \frac{c_r^*}{c_l^*}$ . Toutes les variables peuvent être déterminées :

$$\begin{cases} c_l^* = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ p^* = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ u^* = R_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_l^* e^{\frac{s-s_{\text{in}}}{2\gamma}} \\ v_l^* = 0, \end{cases}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les coefficients de l'équation I.38, et  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Si l'angle du vecteur vitesse à l'entrée n'est pas nul, il est possible de modifier ces calculs afin de le prendre en compte.



**Figure I.7** – À gauche : représentation du demi problème de Riemann au bord. À droite : représentation des caractéristiques se focalisant à l'interface au temps  $t + \Delta t$ . Le domaine bleu correspond au domaine fantôme.

### 2.3.3 Condition de sortie

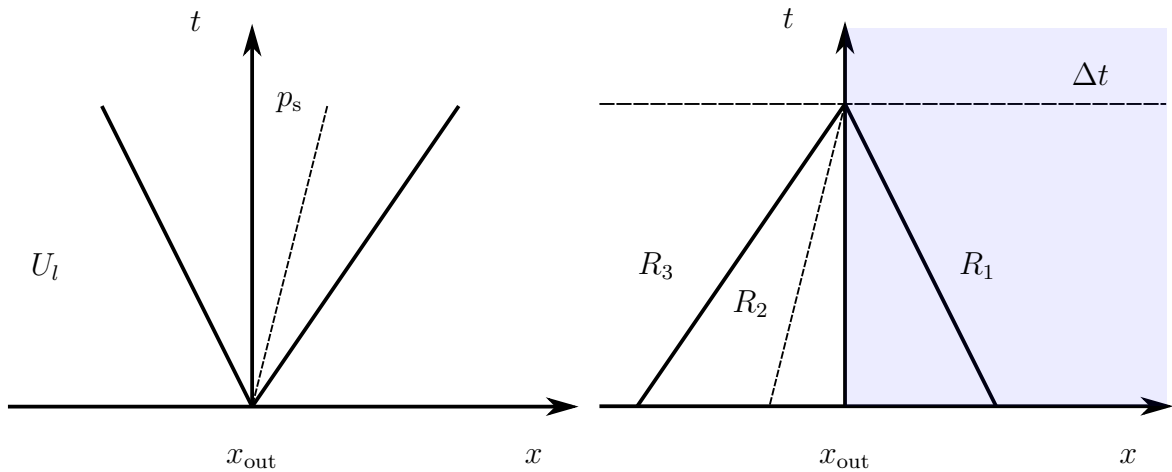
On distingue ici aussi deux cas selon que l'écoulement est subsonique ou supersonique. Si l'écoulement est supersonique, alors la valeur des variables de la cellule fluide est copiée dans la cellule fantôme. En réalité, la valeur contenue dans la cellule fantôme a peu d'importance car les caractéristiques sont toutes sortantes, et ceci a pour conséquence que le flux à l'interface ne dépend que des variables de la cellule fluide.

Si l'écoulement sortant est subsonique, alors deux caractéristiques sont sortantes et une

est entrante, voir fig. I.8. En conséquence, nous imposons une condition au bord, qui en règle générale est la pression en sortie. La procédure revient à résoudre un demi problème de Riemann où la pression intermédiaire  $p^*$  est connue, puis à calculer le flux correspondant à l'état intermédiaire  $U_i^* = (u^*, v_i^*, p^*, c_i^*)$  qui est calculé grâce aux invariants de Riemann :

$$\begin{cases} p^* = p_s \\ c_i^* = c_l \left( \frac{p_s}{p_l} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ u^* = R_3 - \frac{2}{\gamma-1} c_i^* \\ v_i^* = v_l \end{cases}$$

où  $R_3 = u_l + \frac{2}{\gamma-1} c_l$  et  $p_s$  la pression à la sortie.



**Figure I.8** – À gauche : représentation du demi problème de Riemann au bord. À droite : représentation des caractéristiques se focalisant à l'interface au temps  $t + \Delta t$ . Le domaine bleu correspond au domaine fantôme.

### 2.3.4 Symétrie

Les conditions de symétrie sont utilisées soit afin de réduire la taille d'un domaine de calcul possédant un axe de symétrie, soit pour simuler une paroi. La cellule fantôme contient des variables identiques à la cellule fluide à l'exception de la vitesse normale qui est transformée en son opposé.

Maintenant que le cadre numérique est décrit, nous pouvons nous intéresser aux méthodes qui permettent de simuler un écoulement autour d'un obstacle. Dans un premier temps nous parlerons des méthodes de capture d'interface.

### 3 Méthodes de capture d'interface

Lorsque le maillage n'est pas adapté à l'interface entre les différents milieux, il est nécessaire de disposer d'informations sur la position de cette interface. Pour cela, plusieurs méthodes existent, nous en donnons une brève description dans les paragraphes suivants.

#### 3.1 Méthodes de Front Tracking

La méthode de front tracking est utilisée dans le but de simuler une discontinuité de manière non diffuse, que ce soit un choc ou une discontinuité de contact. En plus du maillage habituel, des marqueurs sont présents sur la discontinuité et sont connectés entre eux pour former un maillage de triangles en 3D, ou des segments linéaires par morceaux en 2D. À ces marqueurs sont associés deux états fluides (un de part et d'autre de l'interface) qui servent à la propagation du front et à imposer les conditions de saut à l'interface. Les contributeurs historiques à ces méthodes sont Glimm et al. qui ont développé un vaste ensemble d'outils de Front Tracking aussi bien en 2D qu'en 3D [25, 28] ainsi que Tryggvason et al. [81] et LeVeque et al. [41].

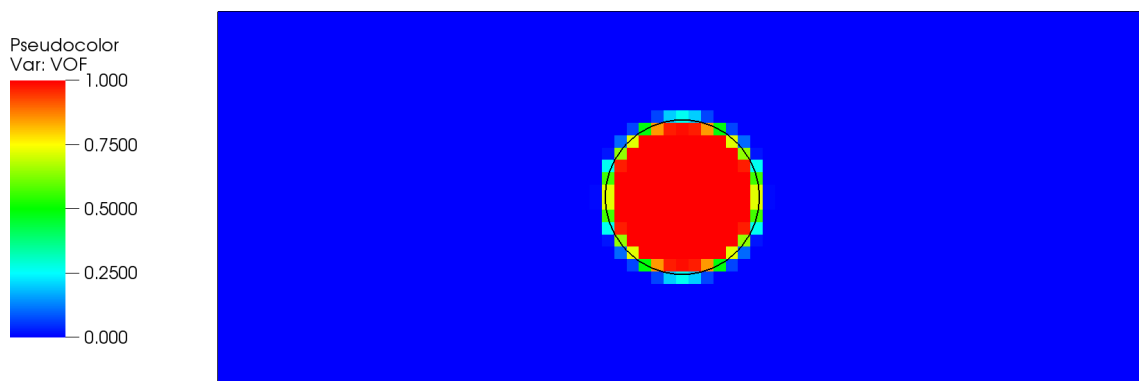
Un exemple d'algorithme de Front Tracking dans le cas compressible [27] est le suivant :

- les flux sont calculés pour l'intégration en temps (par exemple grâce à un solveur de Riemann approché). Chaque flux est calculé seulement à partir d'états provenant du même milieu. Autrement dit, si le stencil est coupé par un front, des états fantômes sont créés par extrapolation afin de n'utiliser que des quantités du même côté du front.
- Un problème de Riemann 1D est défini dans la direction normale au front. La vitesse de la discontinuité de contact qui en résulte est utilisée pour propager le front, et les états intermédiaires pour mettre à jour les états fluides aux points propagés.

#### 3.2 Méthodes VOF

La méthode Volume Of Fluid (VOF) introduite par Hirt et al. [34] propose une description de l'interface grâce à la fraction volumique occupée par un des deux milieux. Cette fraction

est représentée par  $C$  qui vaut 1 dans une phase, 0 dans l'autre, et  $0 < C < 1$  dans les cellules coupées par l'interface, voir fig. I.9. À partir des fractions volumiques, l'interface doit être reconstruite, et des procédures plus au moins sophistiquées ont été développées. Les plus simples sont les méthodes VOF-SLIC [60] de Noh de Woodward et VOF-SOLA [34] de Hirt et al. dont le principe est de reconstruire l'interface par des segments parallèles à la grille. Cette simplicité se traduit par un ordre 1 pour la reconstruction de l'interface.



**Figure I.9** – Fonction VOF pour un cercle. Le contour noir représente le bord du cercle.

Des versions plus précises existent dans lesquelles l'interface est reconstruite grâce à des portions de droite. Les travaux de DeBar [15] contenaient déjà pareille reconstruction. Les techniques les plus précises sont connues sous le nom de VOF-PLIC [43, 68, 83]. L'interface est reconstruite comme une succession de segments discontinus. Le fait de relaxer la contrainte de continuité de l'interface simplifie l'algorithme de cette méthode.

L'interface, en plus d'être reconstruite, est transportée à la vitesse du fluide. Si l'écoulement est incompressible, on a  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , et l'équation de transport de la fonction VOF peut être écrite sous forme d'une loi de conservation :

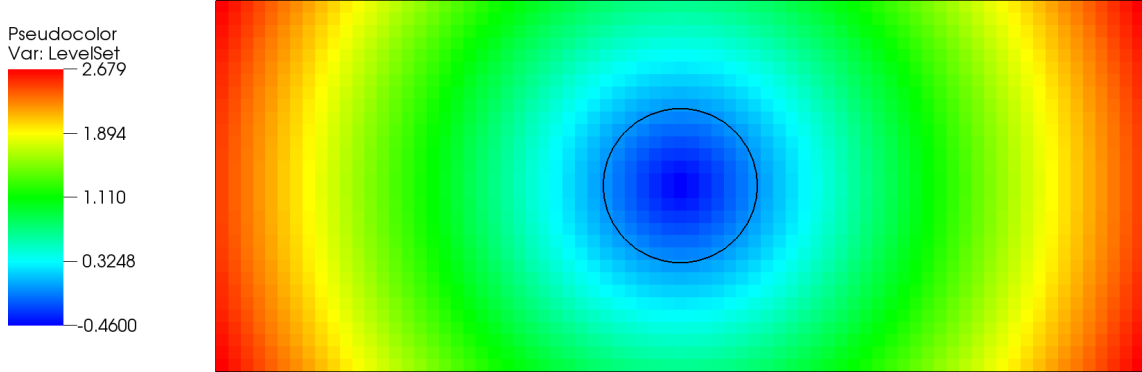
$$C_t + \nabla \cdot (C\mathbf{u}) = 0.$$

L'utilisation d'une loi de conservation permet de préserver le volume au niveau discret. Ceci est très appréciable avec les écoulements incompressibles pour lesquels conservation de volume équivaut à conservation de la masse.

Les méthodes VOF ont été appliquées aux écoulements compressibles dans [54, 69] notamment.

### 3.3 Méthodes Level set

La méthode level set est basée sur la représentation implicite de l'interface grâce au zéro d'une fonction régulière. Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas particulier de la fonction distance signée à l'interface, voir fig. I.10.



**Figure I.10** – Fonction level set pour un cercle. L'iso-zéro est représenté par le contour noir.

Cette méthode a été introduite par Osher et Sethian [64]. Un des avantages majeurs de la fonction level set est sa régularité, qui permet d'utiliser des schémas numériques pour son transport avec efficacité. Osher et Fedkiw fournissent un résumé des principales applications dans [63]. Considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . La fonction level set  $\varphi$  dont l'iso-zéro représente le bord du domaine  $\Omega$  est définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\text{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \text{dist}_{\partial\Omega}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction level set permet de calculer facilement la normale  $\mathbf{n}$  ainsi que la courbure  $\kappa$  de l'interface :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad , \quad \kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{I.39})$$

Afin de suivre l'évolution géométrique de l'interface, la fonction level set est transportée à la vitesse du fluide  $\mathbf{u}$  par l'équation d'advection :

$$\varphi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = 0.$$

Dès lors que le champ de vecteur n'est pas uniforme en espace, la fonction level set perd ses propriétés de fonction distance signée. Il existe plusieurs méthodes de réinitialisation de la fonction levelset à partir de son iso-zéro afin qu'elle retrouve ses propriétés de fonction distance.



Elles reposent sur la résolution de l'équation Eikonale avec vitesse de propagation  $v(x) = 1$  :

$$|\nabla\varphi| = \frac{1}{v(x)}. \quad (\text{I.40})$$

On peut citer l'algorithme du FastMarching [73] qui consiste à résoudre (I.40) sous la forme  $|\nabla\varphi|^2 = 1$  de proche en proche en partant d'une bande de points proches de l'interface.

Une autre manière de réinitialiser la fonction level set est la résolution de l'équation de Hamilton Jacobi :

$$\begin{aligned} \varphi_t + \text{sign}(\varphi_0) (|\nabla\varphi| - 1) &= 0, \\ \varphi(x, t = 0) &= \varphi_0(x), \end{aligned}$$

où  $\text{sign}(x) = 2H(x) - 1$ , et  $H$  la fonction de Heavyside. La solution stationnaire de cette équation est la fonction distance  $d(x)$  telle que  $|d(x)| = 1$ . Cette approche a été utilisée notamment dans les travaux de Fedkiw et al. [20] et Chen et al. [10]. Pour plus de détails sur les méthodes level set, le lecteur peut se référer aux travaux de Osher et Sethian [58, 62, 77].

Après cette entrevue des méthodes de suivi d'interface existantes, nous décrivons dans les prochaines sections des méthodes parmi les plus représentatives de l'état de l'art pour la simulation d'interaction fluide-structure. Dans les problèmes industriels, le couplage entre le fluide et la structure est un problème multi-physique le plus souvent traité de manière lagrangienne pour le solide, et grâce à une méthode ALE pour le fluide, l'interface séparant le fluide et la structure est le lieu où le couplage est effectué par un algorithme de contact. Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéressons principalement à la simulation des écoulements fluide-structure où le solide est rigide et son mouvement est imposé (il ne dépend pas de l'action du fluide). Dans la section suivante, nous décrivons une méthode classique pour la simulation d'écoulements autour d'obstacles potentiellement en mouvement : la méthode ALE. Pour cette méthode, le maillage est adapté à l'obstacle.

## 4 Méthode ALE.

La méthode ALE introduite par Hirt et al. [33] permet de combiner certains avantages des méthodes eulériennes et des méthodes lagrangiennes.

En formulation lagrangienne, le maillage se déplace à la vitesse des particules. La formulation des équations est généralement plus simple, la description des surfaces libres est précise, on peut

aisément suivre l'historique de la déformation du milieu. Étant donné que le maillage suit le déplacement de matière, des remaillages sont nécessaires très fréquemment pour de grandes déformations, typiquement dans le cas d'écoulements fluides.

En formulation eulérienne, le maillage est fixe et « voit » passer la matière. Ceci permet la simulation d'écoulements fluides sans remaillage ni dégradation de la précision au cours du temps. Par contre, si un solide est présent dans le domaine de calcul, sa surface ne comporte pas de points de maillage et le suivi de ses interactions avec le fluide est moins précis que dans le cas lagrangien. Un choix est à faire à propos de la loi de comportement à laquelle obéissent les cellules coupées par l'interface fluide-solide.

Dans les méthodes ALE, le maillage a une vitesse arbitraire. Elle peut varier continuellement entre une vitesse nulle et la vitesse du fluide en tout lieu du domaine de calcul. Le maillage est toujours adapté au solide, ce qui permet une description précise de l'interface, et sa vitesse de déplacement est choisie afin de minimiser sa déformation.

La forme intégrale des équations d'Euler compressible en formulation ALE telle qu'on peut la retrouver dans [33] est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} ds &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} ds &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} dx + \int_{\partial\Omega_t} (\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{n}) ds &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho e dx + \int_{\partial\Omega_t} (\rho (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds &= 0, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse de la matière et  $\mathbf{U}$  est la vitesse du maillage. La première équation est une loi de conservation géométrique (GCL) dont le rôle est d'assurer la stabilité et la consistance du schéma. On note que si  $\mathbf{U} = \mathbf{u}$ , on retrouve la formulation lagrangienne, et si  $\mathbf{U} = 0$ , on retrouve la formulation eulérienne.

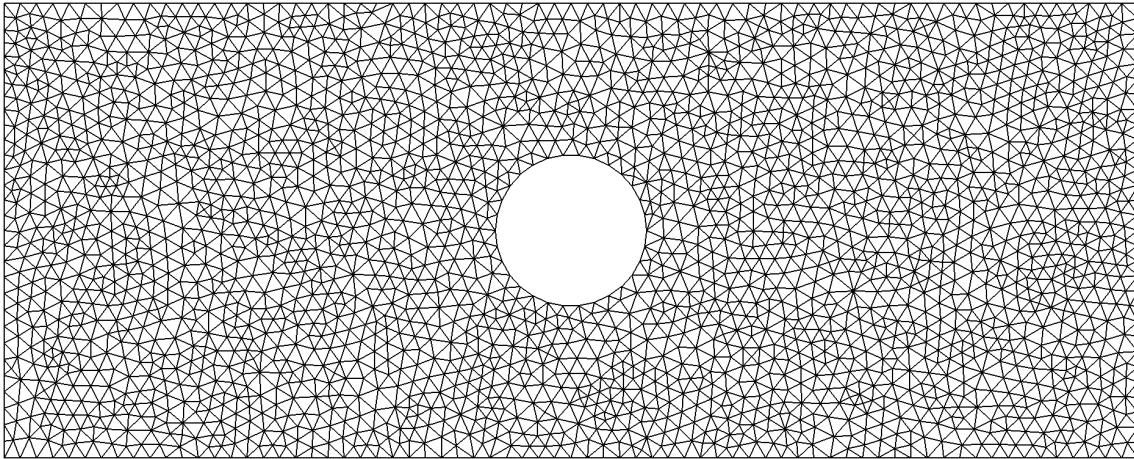
Ces méthodes sont efficaces, mais des étapes de remaillages et de projection sont tout de même nécessaires, rendant les calculs coûteux et l'implémentation plus difficile, particulièrement en 3D.

## 5 Les méthodes de frontières immergées.

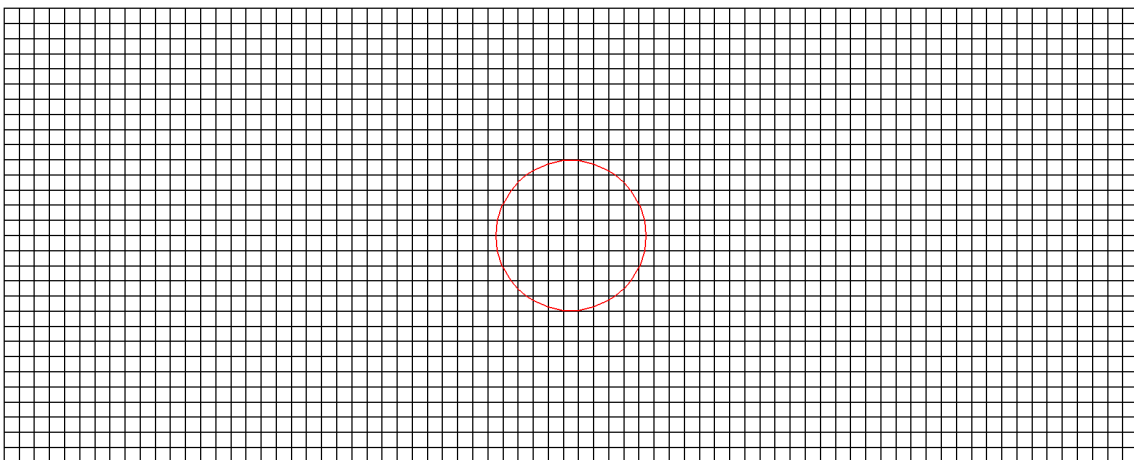
L'approche conventionnelle utilisée afin de simuler l'écoulement autour d'un obstacle solide consiste à créer un maillage adapté au solide, puis à résoudre les équations sur ce maillage avec

les conditions au bord adéquates.

Une autre approche consiste à utiliser une grille cartésienne, donc non adaptée à l'obstacle, et d'imposer la condition au bord de l'obstacle au moyen d'une modification des équations qui régissent l'écoulement. Ces méthodes sont appelées méthodes de frontières immergées.



(a) Maillage adapté



(b) Maillage non adapté

**Figure I.11** – Comparaison entre maillage adapté et maillage cartésien pour le même obstacle.

On peut voir une illustration de ces deux visions différentes sur la fig. I.11. En résumé, si l'on compare ces deux techniques, il est généralement admis que :

- la phase de maillage est très simplifiée dans le cas des méthodes de frontières immergées étant donné qu'elle ne dépend pas de la géométrie de l'obstacle. Ceci est un avantage évident lorsque les obstacles considérés bougent.

- La résolution des équations qui régissent l'écoulement est plus simple et moins coûteuse sur maillage cartésien. En effet, la discrétisation dépend de la géométrie de chaque maille et là où il est nécessaire de stocker des informations relatives à chaque cellule dans le cas de maillages adaptés, le maillage cartésien ne nécessite aucun stockage.
- Les conditions au bord sont très simples à imposer sur maillage adapté, et aucun effort particulier n'est nécessaire pour les imposer à l'ordre du schéma (du moins pour les schémas dont l'ordre est inférieur à 3). Dans le cas des méthodes de frontières immergées, il n'est pas aussi simple d'imposer les conditions au bord étant donné qu'il n'y a pas de point de maillage sur la surface de l'obstacle, et c'est clairement sur ce point que se concentre l'effort.

Dans cette section nous décrivons les différents types de méthodes de frontières immergées, on peut consulter [56] pour une review récente du sujet. Ces méthodes peuvent être classées de multiples manières, ici nous distinguons deux grandes familles de méthodes selon que les modifications à effectuer en vue d'imposer la condition au bord de l'obstacle se situent au niveau continu ou au niveau discret.

### 5.1 Méthodes continuous forcing

Dans ces méthodes, la présence des frontières est prise en compte en ajoutant un terme source aux équations au niveau continu. Par la suite les équations sont discrétisées et la résolution s'effectue de la même manière dans tout le domaine de calcul que l'on se trouve dans le fluide ou dans le solide.

#### 5.1.1 La méthode de Peskin

On décrit ici la méthode historique qui a donné leur nom aux méthodes de frontières immergées (IBM), elle a été introduite par Peskin [66] en 1972 dans le but de simuler des écoulements sanguins dans le cœur. Le modèle physique décrit l'interaction entre des membranes élastiques et un fluide incompressible. La membrane est représentée par un ensemble de particules lagrangiennes de coordonnée  $X_k$  qui se déplacent à la vitesse du fluide avec l'équation :

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \mathbf{u}(X_k, t) \tag{I.41}$$

## Chapitre I. Méthodes numériques pour les écoulements compressibles autour d'obstacles.

---

Les équations qui régissent l'évolution du couplage sont :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = \Delta \mathbf{u} + f \quad (\text{I.42})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{I.43})$$

où  $f$  est le vecteur des forces traduisant la présence des structures élastiques dans le fluide. Les forces sont données par :

$$f(x, t) = \sum_k F_k \delta(x - X_k), \quad (\text{I.44})$$

où  $F_k$  est la force générée par l'élasticité du matériau à la position de la  $k$ -ième particule, et  $\delta$  est la distribution de Dirac. En pratique, étant donné que les particules lagrangiennes ne coïncident pas avec des points  $x_{ij}$  de la grille, la distribution de Dirac est remplacée par une fonction à support compact plus régulière qui distribue les forces sur une bande de cellules autour des particules lagrangiennes. L'équation I.41 devient :

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = \sum_{i,j} \mathbf{u}(x_{ij}, t) \delta_h(x_{ij} - X_k), \quad (\text{I.45})$$

et l'équation I.44 devient :

$$f(x_{ij}, t) = \sum_k F_k \delta_h(x_{ij} - X_k). \quad (\text{I.46})$$

Cette méthode est efficace, mais son extension aux corps rigides pose problème du fait que les lois physiques pour les membranes élastiques ne sont pas bien posées dans la limite rigide. Il est aussi utile de préciser que cette méthode est d'ordre 1. La méthode d'interface immergée (IIM) introduite par Leveque et Li en 1994 [42] permet d'atteindre des ordres de convergence plus élevés, et permet de traiter des interfaces minces en utilisant des développements de Taylor et des conditions de saut à l'interface. Dans [44] la méthode a été appliquée aux équations de Navier-Stokes incompressible et permet de simuler des obstacles rigides.

Les corps rigides peuvent également être simulés par pénalisation, une méthode de type « continuous forcing » simple à mettre en œuvre décrite dans le paragraphe suivant.

### 5.1.2 Méthodes de pénalisation

La méthode de pénalisation  $L^2$  avec terme de Darcy a été développée et étudiée par Angot et al. [4] dans le cas incompressible. Elle consiste à considérer que l'écoulement a lieu dans un

## I.5 Les méthodes de frontières immergées.

---

milieu poreux, dont la perméabilité  $\frac{1}{\eta}$  est grande dans le domaine fluide  $\Omega_f$ , et petite dans le domaine solide  $\Omega_s$ . La vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  dans tout le domaine de calcul  $\Omega$  vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\Omega_s} \mathbf{u} + \nabla p = f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \tag{I.47}$$

Angot et al. montrent que la solution de I.48 tend vers la solution des équations de Navier-Stokes avec condition de Dirichlet au bord de  $\Omega_s$  lorsque  $\eta$  tend vers 0 avec un ordre de convergence  $\mathcal{O}(\eta^{\frac{3}{4}})$ . Ils proposent également une méthode de pénalisation  $H^1$  dont la convergence théorique est en  $\mathcal{O}(\eta)$  qui se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\Omega_s}\right) \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \left(1 + \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\Omega_s} \sigma(\mathbf{u}, p)\right) + \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\Omega_s} \mathbf{u} = f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \tag{I.48}$$

où  $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - p\mathbb{I}$  est le tenseur des contraintes dans le fluide.

En pratique ils observent une convergence en  $\mathcal{O}(\eta)$  pour les deux méthodes. De plus ces méthodes sont d'ordre 1 en espace.

Cette méthode a notamment été utilisée afin de simuler la nage de poissons dans [6]. Un domaine pénalisé ayant la forme d'un poisson est immergé dans un fluide incompressible. Une loi de nage est imposée au domaine pénalisé, puis les forces qu'exercent le fluide sur la structure sont calculées et traduites en un déplacement sous la forme d'une translation plus une rotation.

Des méthodes de pénalisation ont été mises au point pour les écoulement compressibles. Dans [46], les auteurs ajoutent un terme de pénalisation de la vitesse à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et un terme de pénalisation de la température à l'équation de conservation de l'énergie. Afin d'éviter la transmission d'ondes non physiques à l'intérieur de l'obstacle, l'équation de conservation de la masse pour les milieux poreux est prise en compte

dans le solide. Les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( 1 + \left( \frac{1}{\phi} - 1 \right) \mathbf{1}_{\Omega_s} \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (\text{I.49})$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p \mathbf{I}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \tau - \frac{1}{\eta} \mathbf{1} (\mathbf{u} - \mathbf{U}_0) \quad (\text{I.50})$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = -\nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \tau + \frac{1}{\text{RePr}(\gamma - 1)} \nabla \cdot (\mu \nabla T) - \frac{1}{\eta_T} \mathbf{1}_{\Omega_s} (T - T_0) \quad (\text{I.51})$$

où  $\phi$  est la porosité,  $\eta$  est une perméabilité visqueuse normalisée et  $\eta_T$  est une perméabilité thermique normalisée. Ces équations visent à imposer  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_0$  et  $T = T_0$  au bord de  $\Omega_s$ . Des simulations effectuées dans le cadre de l'acoustique montrent que la réflexion des ondes sur l'obstacle est correctement restituée grâce à cette méthode de pénalisation.

Une autre méthode est présentée dans [7]. Les auteurs pénalisent la quantité de mouvement ainsi que l'énergie :

$$\partial_t W + \nabla F + \frac{1}{\eta} \mathbf{1}_{\Omega_s} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(e - e_{\Omega_s}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla F_V \quad (\text{I.52})$$

où  $F$  est le vecteur des flux convectifs,  $F_V$  le vecteur des flux diffusifs et  $e_{\Omega_s}$  l'énergie du solide à température  $T_{\Omega_s}$  fixée. Les termes de pénalisation sont traités de manière implicite afin d'éviter une condition sur le pas de temps de type  $\Delta t < C\eta$ , où  $\eta$  a vocation à être petit. La simulation de cas supersoniques montre un bon comportement de cette méthode.

On voit qu'il existe différentes méthodes de Type « continuous forcing » afin d'imposer des conditions au bord de Dirichlet en vitesse et température pour les écoulements visqueux. En ce qui concerne les écoulement compressibles non visqueux, c'est au sein des méthodes de « discrete forcing », avec les méthodes type ghost-cell et cut-cell, que l'on trouve le plus de travaux.

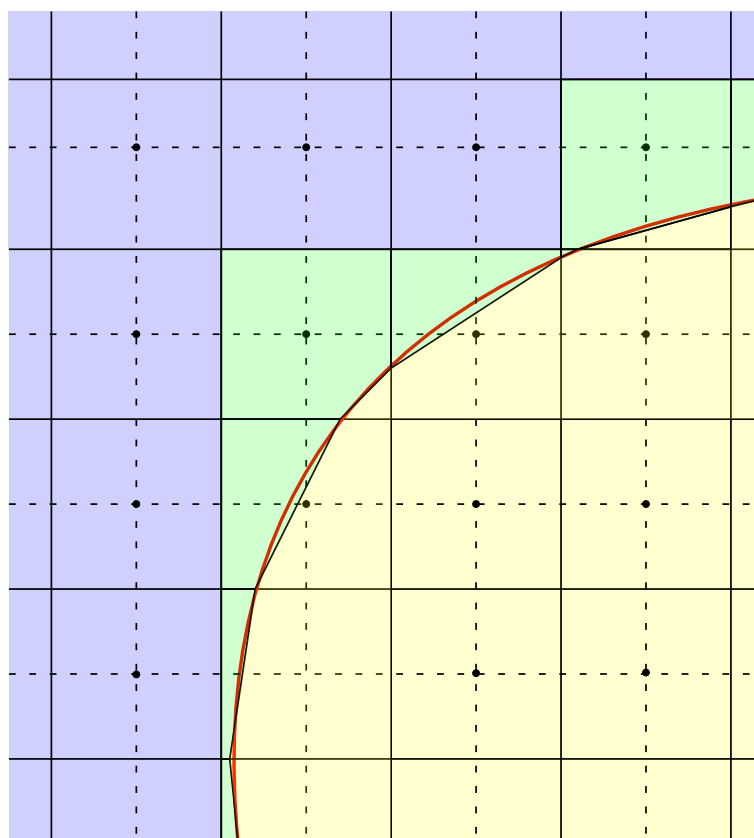
## 5.2 Méthodes discrete forcing.

Ici, les équations sont discrétisées sans être modifiées, et c'est lors de la résolution que des modifications vont intervenir pour les cellules proches de l'interface physique. Ces méthodes ont plusieurs avantages sur la précédente catégorie de méthodes. Elles permettent de traiter des écoulements entre différents fluides aussi bien que des écoulements autour d'obstacles solides.

Elles offrent la possibilité de traiter l'interface de manière non diffuse, et d'obtenir une précision au bord de l'obstacle de l'ordre de celle du schéma utilisé dans le fluide. Nous décrivons les méthodes ghost cell et cut cell dans cette section.

### 5.2.1 Méthodes cut-cell

Les méthodes cut-cell sont développées dans le but de garantir la conservation exacte des variables conservatives au voisinage de l'interface. En repérant les cellules coupées par l'interface, en modifiant localement les cellules coupées afin de mailler l'interface, puis en calculant les flux sur chaque face des cellules coupées, la conservativité est garantie, voir fig. I.12.



**Figure I.12** – Schéma représentant les cellules coupées intervenant dans les méthodes type cut-cells.

L'application directe d'un schéma numérique sur un maillage coupé de la sorte pose un problème de stabilité. En effet, les cellules coupées peuvent être arbitrairement petites, et de fortes contraintes sur la CFL en découlent. Colella et al. [11, 53, 65] proposent une méthode afin d'ôter cette contrainte sur la CFL en calculant dans un premier temps des flux qui ne prennent



pas en compte l'interface, ce qui élimine les problèmes de stabilité, mais ne préserve pas la conservativité. La perte de conservativité peut être calculée et distribuée aux cellules voisines en fonction de la masse fluide présente dans chacune d'elles. Dans [35], Hu et al. proposent de fusionner les petites cellules avec des cellules voisines entièrement fluides.

Dans [72], Seo et Mittal montrent les avantages de cette méthode sur les méthodes type ghost-cells pour des obstacles en mouvement. Ils attribuent les oscillations de pression observées autour d'un obstacle en déplacement à la perte de conservativité brusque lors d'apparition de cellules fraîchement devenues fluides ou solides (dans le cadre d'une méthode ghost cell).

Ces méthodes sont efficaces, mais il est nécessaire de traiter toutes les configurations géométriques possibles d'une cellule coupée, et ceci est particulièrement laborieux en 3D.

### 5.2.2 Méthodes ghost-cell

La méthode ghost fluid de Fedkiw [20] est utilisée à l'origine pour les écoulements multi-fluides et sera détaillée dans le chapitre III. Nous nous attardons ici sur les méthodes permettant de simuler les écoulements autour d'obstacles rigides.

La méthode ghost-fluid peut être adaptée afin de simuler l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle solide. L'attention est portée ici sur la vérification des conditions aux limites. Ce sont les travaux de Mohd-Yusof et al. [57] avec la méthode de « direct forcing » qui furent les premiers développements dans ce genre de méthodes. Une force qui ne découle pas d'une loi physique est définie dans les cellules proches de l'interface afin d'imposer la condition au bord. On retrouve la formulation IBM :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -u \cdot \nabla u - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + f, \quad (\text{I.53})$$

et le forçage  $f$  est tel que  $u^{n+1} = v$ , où  $v$  est la vitesse à imposer :

$$f = u \cdot \nabla u + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + \frac{v - u^n}{\Delta t}. \quad (\text{I.54})$$

Ceci revient à modifier la vitesse des mailles proches de l'interface. Dans [16] les auteurs comparent trois manières de déterminer la vitesse  $\mathbf{v}$  et mettent en évidence une précision accrue pour la méthode d'interpolation linéaire par rapport à une pondération par fraction volumique ou à une absence d'interpolation.

Dans [24], Gibou et al. développent une méthode d'ordre 2 pour l'équation de Poisson :

$$(\beta u_x)_x = f. \quad (\text{I.55})$$

## I.5 Les méthodes de frontières immergées.

---

Cette méthode repose sur la création d'états fantômes déterminés à l'aide d'interpolation linéaires faisant intervenir la condition au bord. Elles sont effectuées le long des directions du maillage. Par exemple, la discrétisation standard de I.55 étant :

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left( \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left( \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = f_i, \quad (\text{I.56})$$

si l'interface sur laquelle la condition de Dirichlet  $u = u_I$  doit être imposée se situe entre  $i$  et  $i + 1$ , alors  $u_{i+1}$  est remplacé dans I.56 par  $u_{i+1}^G$  une interpolation faisant intervenir la condition de Dirichlet :

$$u_{i+1}^G = \frac{u_I + (\theta - 1)u_i}{\theta}. \quad (\text{I.57})$$

Lorsque  $\theta$  est petit, cette formule est mal conditionnée, l'interface est donc déplacée sur le point  $i + 1$ .

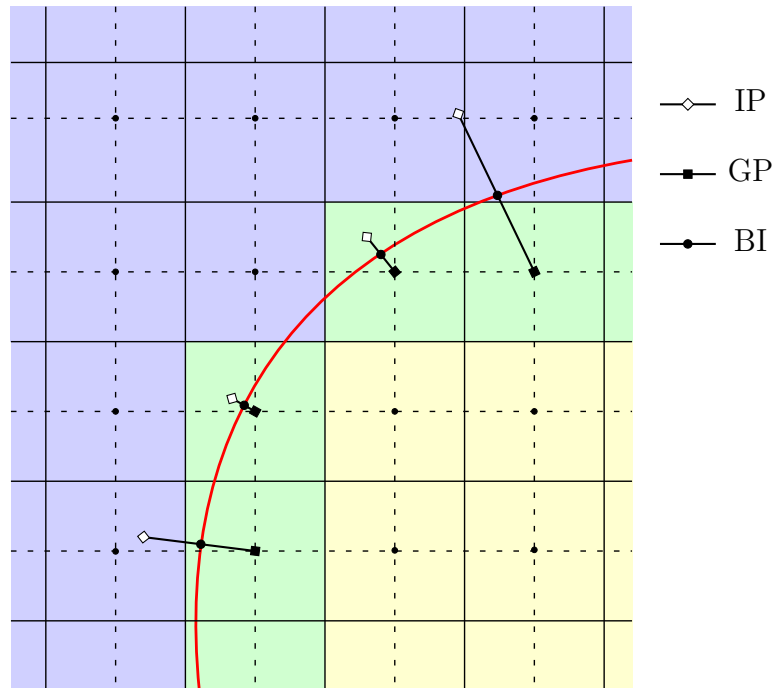
Dans [23] et [55], Ghias et Mittal présentent une méthode d'ordre 2 pour des écoulements de Navier-Stokes compressible et incompressible autour l'obstacles. Leur méthode de type ghost cells se trouve dans la lignée des travaux de Majumdar [50] et Tseng [80]. La première étape de leur méthode est de définir  $BI$  le projeté orthogonal de chaque ghost-point  $GP$  sur l'interface physique, un ghost-point étant le centre d'une cellule appartenant au milieu solide qui a au moins un voisin dans le domaine fluide. Ensuite sont définis les points  $IP$  comme l'extension dans le fluide des points  $BI$  d'une distance égale à la distance entre  $GP$  et  $BI$ , voir fig. I.13. La valeur de la vitesse en  $IP$  est ensuite déterminée par une formule d'interpolation qui dépend de la configuration géométrique locale, plus précisément elle dépend du nombre de centres de maille appartenant au domaine fluide parmi les quatre centres de maille qui définissent la cellule duale qui contient  $IP$ . Une fois la vitesse en  $IP$  déterminée, la vitesse en  $GP$  est définie par :

$$\mathbf{u}_{GP} = 2\mathbf{u}_{BI} - \mathbf{u}_{IP} \quad (\text{I.58})$$

Cette méthode d'interpolation a l'avantage d'assurer que le point  $BI$  est situé exactement à mi chemin entre le point fantôme  $GP$  et le point image  $IP$ . Ceci permet d'éviter la procédure décrite dans Gibou et al. [24] pour  $\theta$  petit.

La méthode ghost-cell a également été appliquée aux écoulements non visqueux dans [76], [9] et [13] notamment.

Dans [9], Chaudhuri et al. utilisent une méthode WENO5 pour la résolution du fluide loin du solide, et les points  $IP$  symétriques des ghost points sont définis de la même manière que sur la fig. I.13. Une pondération par distance inverse utilisant les points fluides de la cellule duale



**Figure I.13** – Schéma représentant une classe de méthodes ghost-cells. Les cellules bleues représentent les cellules fluides, les cellules vertes les ghost cells, et les cellules jaunes les cellules solides.

contenant  $IP$  est utilisée afin de définir les variables en  $IP$ . La distance à un des sommets de la cellule duale pouvant être petite, les auteurs définissent un seuil en dessous duquel la valeur en  $IP$  se voit affecter la valeur du sommet proche. Ils observent un ordre de convergence entre 1 et 2.

Dans [76], Sjogreen et al. utilisent la procédure suivante afin de définir la valeur des variables aux ghost points. En plus du point situé sur l'interface, deux points dans le fluide sont définis comme l'intersection entre le segment normal à l'interface passant par le ghost point considéré et les arêtes du maillage. Ceci permet d'utiliser un limiteur de pente et autorise à considérer des écoulements discontinus. La vitesse normale est interpolée grâce aux valeurs dans le fluide ainsi qu'à la condition au bord, et les autres variables sont extrapolées le long du segment normal à l'interface jusqu'au ghost point. Des validations numériques sont présentées sur des cylindres et un profil NACA, mais l'ordre de convergence de la méthode n'est pas présenté.

Dans [13], Dadone et Grossman utilisent le fait que l'interface physique peut être vue comme une ligne de courant. La première étape est de définir deux rangées de ghost points  $GP$  et leur image  $IP$  par rapport à l'interface physique. La valeur en  $IP$  est déterminée grâce à une interpolation bilinéaire. Par la suite, la valeur en  $GP$  est déterminée grâce à un modèle

d'écoulement de vortex avec distribution symétrique de l'entropie et l'enthalpie le long de la normale aux lignes de courant. L'application de ce modèle donne les expressions suivantes :

$$p_{GP} = p_{IP} - \rho_{IP} \frac{v_{IP}^2}{R} \Delta n \quad (\text{I.59})$$

$$\rho_{GP} = \rho_{IP} \left( \frac{p_{GP}}{p_{IP}} \right)^{1/\gamma} \quad (\text{I.60})$$

$$v_{GP} = v_{IP} + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_{IP}}{\rho_{IP}} - \frac{p_{GP}}{\rho_{GP}} \right) \quad (\text{I.61})$$

$$u_{GP} = -u_{IP}, \quad (\text{I.62})$$

où  $u$  désigne la vitesse normale à l'interface et  $v$  la vitesse tangentielle. Cette méthode donne de très bons résultats sur des écoulements réguliers. Les auteurs mettent en évidence une convergence à l'ordre 2 et une précision proche de celle obtenue sur maillage curviligne. Les auteurs ne présentent pas d'exemple d'écoulement de type interaction choc-paroi qui pourrait potentiellement poser problème au modèle d'interface utilisé étant données les hypothèses de régularité.

## 6 Conclusion

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la simulation des écoulements compressibles comportant des interfaces. Ces interfaces pouvant potentiellement être soumises à de grands déplacements et de grandes déformations, nous optons pour une méthode de type frontières immergées. Afin d'avoir la possibilité de garantir un ordre de convergence élevé, nous choisissons de développer une méthode de type « discrete forcing ». Dans un premier temps, une méthode pour les écoulements autour d'obstacles rigide est proposée dans un but de validation sur des cas tests classiques. Ceci est l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre I. Méthodes numériques pour les écoulements compressibles autour d'obstacles.

---

---

---

# Chapitre II

---

## Une méthode cartésienne d'ordre 2

Dans ce chapitre nous décrivons une des contributions de cette thèse, à savoir une méthode numérique permettant d'imposer au bord du domaine fluide une condition de glissement à l'ordre 2.

Après avoir décrit cette méthode, des validations sont présentées en 1D sur des cas test faisant intervenir une paroi, puis en 2D sur des obstacles fixes et en mouvement, et enfin en 3D. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Computational Physics* [32].

La procédure utilisée pour paralléliser le code est décrite à la fin du chapitre.

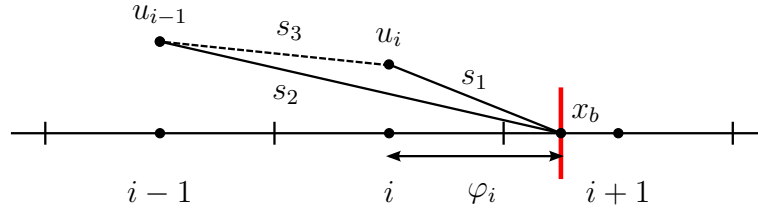
### 1 Description en 1D

Pour commencer nous décrivons la méthode dans le cas 1D. Ensuite, nous décrivons le calcul des pentes au voisinage du solide.

#### 1.1 Procédure

Une situation standard pour laquelle le maillage n'est pas adapté à l'obstacle considéré est représenté sur la fig. II.1. L'interface physique est en général située quelque part entre deux centres de maille, le maillage n'étant pas adapté au solide. On appelle maille fluide une maille  $C_i$  telle que  $\varphi_i > 0$ . Nous allons modifier le flux numérique au nœud situé entre la maille fluide et la maille solide afin d'imposer la condition au bord à la position réelle de l'interface fluide-solide à l'ordre 2. Nous voulons imposer  $u(x_b) = u_b + \mathcal{O}(\Delta x^2)$  avec  $x_b$  tel que  $\varphi(x_b) = 0$ .

Soit  $u^*$  la vitesse de la discontinuité de contact résultant de la solution du problème de Riemann à l'interface  $i + 1/2$ . Nous définissons un état fictif à droite de l'interface  $i + 1/2$  tel que  $u^*$  satisfasse, à la précision souhaitée, la condition au bord  $u(x_b) = u_b$ . La valeur de  $u^*$  peut



**Figure II.1** – Domaine 1D. Le segment rouge représente  $\varphi = 0$ . L'interface physique se trouve entre les centres des cellules  $i$  (fluide) et  $i + 1$  (solide). Les pentes  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  sont utilisées pour calculer la vitesse en  $i + 1/2$ . On utilise la pente  $s_3$  seulement lorsque un limiteur de pente est nécessaire.

être déterminée grâce à un développement de Taylor de  $u$  au voisinage de  $x_b$  :

$$u^* = u_b + \Delta x \left( \frac{1}{2} - d \right) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_b} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (\text{II.1})$$

où  $d = \frac{\varphi_i}{\Delta x}$ ,  $u_b$  est la vitesse de l'obstacle ( $= 0$  pour un corps fixe). La dérivée spatiale de  $u$  en  $x_b$  est approximée à l'ordre 1 par une pente  $s_b$  définie de la manière suivante :

$$s_b = d s_1 + (1 - d) s_2, \quad (\text{II.2})$$

où  $s_1 = \frac{u_b - u_i}{d \Delta x}$  et  $s_2 = \frac{u_b - u_{i-1}}{(1 + d) \Delta x}$  sont les pentes représentées sur la fig. II.1. Nous avons choisi cette formulation afin que la pente soit toujours bien définie, et ce même lorsque  $x_b$  est proche de  $x_i$  :

$$\Delta x s_b = u_b - u_i + \frac{1 - d}{1 + d} (u_b - u_{i-1}). \quad (\text{II.3})$$

Ceci a l'avantage de ne pas nécessiter de procédure particulière pour les petites valeurs de  $d$ . L'ordre de l'approximation reste 2 :

$$\begin{aligned} u(x_b) &= u^* + \Delta x \left( d - \frac{1}{2} \right) (s_b + \mathcal{O}(\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_b + \Delta x \left( \frac{1}{2} - d \right) (s_b - s_b + \mathcal{O}(\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_b + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Un autre avantage est d'avoir la possibilité de définir une pente limitée :

$$s_b^l = \text{minmod}(s_b, s_3), \quad (\text{II.4})$$

où  $s_3 = u_i - u_{i-1}$ .

En  $i + 1/2$ , l'état gauche du problème de Riemann  $U_- = (u_-, p_-, c_-)$  est calculé grâce à une reconstruction MUSCL. L'état droit fictif que nous créons est  $U_+ = (-u_- + 2u^*, p_-, c_-)$ , ainsi nous sommes assurés que  $u^*$  est la vitesse des états intermédiaires résultant de ce problème de Riemann.

## 1.2 Pentés au voisinage du solide

Afin de déterminer l'état  $U_-$ , nous avons besoin de pentés sur la cellule  $C_i$ . Ici on parle des pentés intrinsèques au schéma MUSCL. Rappelons que la pente dans cette cellule s'écrit  $s_i = f(s_{i-1/2}, s_{i+1/2})$ . Le stencil utilisé habituellement pour calculer les pentés n'est ici pas disponible étant donné que la cellule  $C_{i+1}$  n'est pas une cellule fluide. Une façon de déterminer cette pente est d'utiliser l'état  $U_{i+1/2}(0)$  solution du problème de Riemann  $RP(U_i, U_+(U_i))$  (sans utiliser de pentés). Ainsi, la pente  $s_{i+1/2}$  peut être définie comme :

$$s_{i+1/2} = \frac{U_{i+1/2}(0) - U_i}{2} \quad (\text{II.5})$$

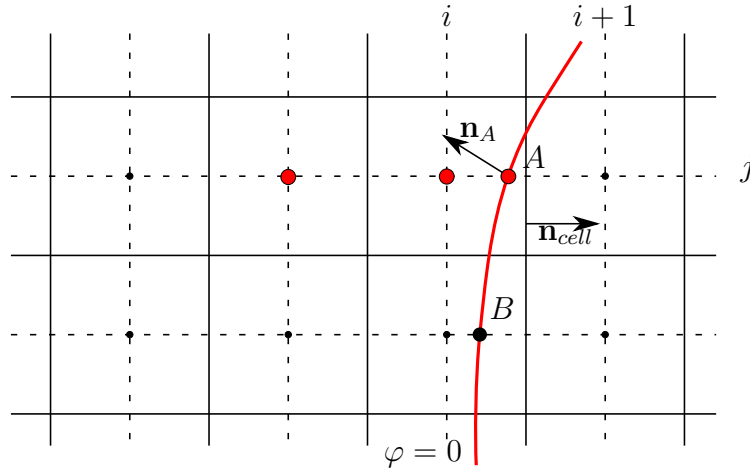
## 2 Description en 2D.

Comme décrit dans la première partie de la thèse, les équations sont résolues en calculant les flux dans chaque direction indépendamment. Nous conservons le même principe en ce qui concerne notre schéma, autrement dit nous appliquons dans chaque direction la méthode utilisée en 1D afin d'imposer la condition au bord à l'ordre 2. Lorsque la fonction level set change de signe entre deux centres de maille, nous modifions le flux numérique à l'interface entre ces deux cellules. Plus précisément, comme en 1D, nous calculons en premier lieu la valeur de la vitesse de la discontinuité de contact à l'interface séparant les deux cellules qui prend en compte la condition au bord en un point de l'interface physique.

Le point que nous choisissons naturellement dans ce contexte de splitting directionnel est l'intersection entre l'interface physique ( $\varphi = 0$ ) et le segment reliant le centre des mailles concernées par le changement de signe de la level set (par exemple les points  $A$  ou  $B$  sur la fig. II.2). Pour le calcul du flux numérique, un état fictif est créé du côté solide de l'interface  $i + 1/2$  par exemple sur la fig. II.2).

Cet état fictif sera utilisé pour calculer le flux numérique à cette interface. En 2D, la condition au bord que nous avons à imposer est cette fois-ci  $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = u_A^n$ , où  $\mathbf{u}_A$  est la vitesse du fluide à l'interface physique,  $u_A^n$  est la vitesse normale du solide en  $A$ , et  $\mathbf{n}_A$  le vecteur normal sortant





**Figure II.2** – Exemple de configuration géométrique au voisinage de l'interface physique.  $A$  est le point de l'interface physique situé entre le centre des mailles  $C_{ij}$  et  $C_{i+1j}$ . Le flux à l'interface  $(i + 1/2, j)$  est modifié afin d'imposer la condition au bord en  $A$ .

au solide.

Lorsque  $\mathbf{n}_A$  est parallèle à la normale à l'interface entre les cellules  $\mathbf{n}_{\text{cell}}$ , nous retrouvons le cas 1D. Par contre, lorsque le produit scalaire  $\mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_{\text{cell}}$  est petit, nous considérons que la condition au bord n'affecte que peu le flux numérique, comme ce serait le cas pour un maillage adapté. L'état fictif à l'interface du côté du solide est alors modifié par rapport au cas 1D grâce à une interpolation convexe afin de prendre en compte cette considération.

Nous calculons comme dans le cas 1D les variables primitives  $u_-, p_-, c_-$  relatives au problème de Riemann à l'interface numérique considérée grâce aux reconstructions de pente. En se référant à la fig. II.2 et en considérant le flux en  $(i + 1/2, j)$ , l'état droit est défini par  $U_+ = (-u_- + 2u_w, v_w, p_w, c_w)$ , où :

- $(u_w, v_w, p_w, c_w) = \alpha (u^*, v^*, p_-, c_-) + (1 - \alpha) (u_f, v_f, p_f, c_f)$  ;
- $\alpha = \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_{\text{cell}}$  ;
- $(u_f, v_f, p_f, c_f)$  est un état fluide extrapolé upwind détaillé plus loin ;

et  $U_- = (u_-, v_w, p_-, c_-)$ .

## 2.1 Détermination des vitesses $u^*$ et $v^*$

La composante normale de la vitesse de la discontinuité de contact  $\mathbf{u}^*$  est calculée de la même manière que dans le cas 1D. En appuyant notre description sur la fig. II.2, la fonction level set change de signe entre  $x_{i_f, j_f} = x_{i, j}$  et  $x_{i_s, j_s} = x_{i+1, j}$  au point  $A$ . En chaque centre de

maille est définie la normale  $\mathbf{n}_{ij}$  à l'iso-contour  $\varphi_{ij}$ . Une bonne approximation de la distance normalisée entre  $x_{i_f, j_f}$  et  $A$  est :

$$d = \frac{|\varphi_{i_f, j_f}|}{|\varphi_{i_f, j_f}| + |\varphi_{i_s, j_s}|} \quad (\text{II.6})$$

et le vecteur normal  $\mathbf{n}_A$  est défini par

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_{i_f, j_f} + d \left( \mathbf{n}_{i_s, j_s} - \mathbf{n}_{i_f, j_f} \right) \quad (\text{II.7})$$

où  $\mathbf{n}_{i, j}$  est une approximation aux différences finies centrées d'ordre 4 de  $\nabla\varphi$  au point  $(i, j)$ , ou la normale exacte si la géométrie est connue de manière analytique. Nous déterminons la valeur de la vitesse de la discontinuité de contact  $\mathbf{u}^*$  relative au problème de Riemann défini dans la direction normale à l'interface numérique  $(i + 1/2, j)$ , consistante à l'ordre 2 avec  $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = u_A^n$ . Le vecteur  $\mathbf{u}^*$  est déterminé de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}_A = u_n^* = u_A^n + \left( \frac{1}{2} - d \right) s_A^n \\ \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_A = u_\tau^* = \mathbf{u}_- \cdot \boldsymbol{\tau}_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_n^* n_x + u_\tau^* \tau_x \\ u_n^* n_y + u_\tau^* \tau_y \end{pmatrix},$$

où  $u_A^n$  est la vitesse normale de l'obstacle,  $\mathbf{n}_A = (n_x, n_y)^t$  et  $\boldsymbol{\tau}_A = (\tau_x, \tau_y)^t$  sont respectivement les vecteurs normal et tangentiel à l'interface physique au point  $A$ . La pente  $s_A^n$  est définie comme en 1D :

$$s_A^n = u_A^n - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_A + \frac{1-d}{1+d} (u_A^n - \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_A). \quad (\text{II.8})$$

Si un limiteur de pente est utilisé, la pente limitée est définie par :

$$s_A^{n,l} = \text{minmod}(s_A^n, s_3^n), \quad (\text{II.9})$$

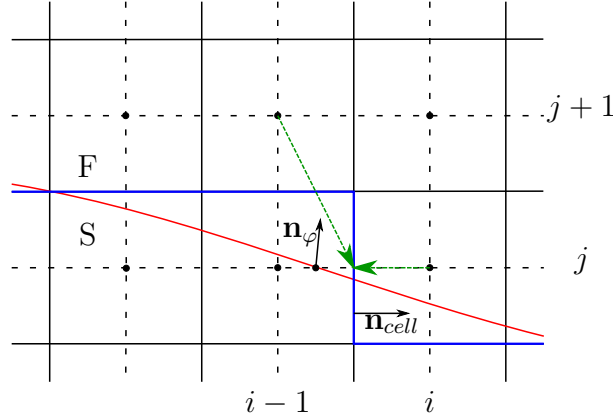
où  $s_3^n = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_A - \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_A$ .

## 2.2 État fluide extrapolé

$(u_f, v_f, p_f, c_f)$  est un état fluide qui ne dépend pas de la condition au bord. Il est déterminé de la façon suivante.

2.2.1 Cas « oblique »

Le 1<sup>er</sup> cas que nous considérons correspond à la situation représentée sur la fig. II.3 : une cellule que nous appelons « oblique » existe.



**Figure II.3** – Représentation du cas où une cellule « oblique » existe. L'état fluide extrapolé est une fonction des états dans la cellule fluide courante (ici  $C_{ij}$ ) et dans la cellule « oblique » (ici  $C_{i-1,j+1}$ ).

Une cellule est « oblique » si elle correspond à la définition suivante : soient  $C_{i_f, j_f}$  et  $C_{i_s, j_s}$  deux cellules voisines dans la direction  $d_\varphi$  telles que  $\varphi_{i_f, j_f} > 0$  et  $\varphi_{i_s, j_s} < 0$ , et  $\delta$  le symbole de Kronecker. Les cellules potentiellement « obliques » sont les cellules (voir fig. II.4) :

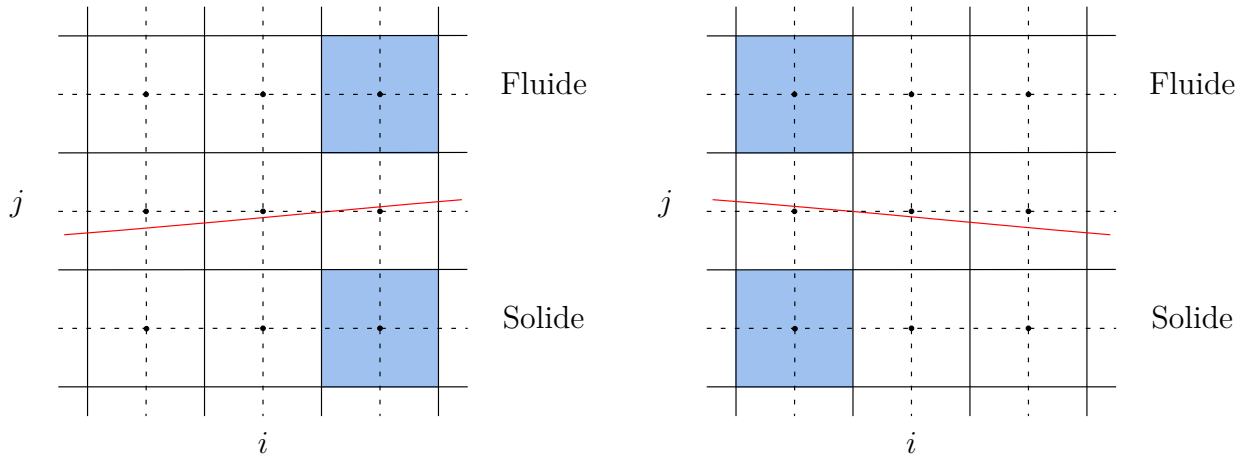
$$C_{i_1, j_1} \text{ si } \varphi_{i_1, j_1} > 0 \text{ et } C_{i_2, j_2} \text{ si } \varphi_{i_2, j_2} < 0, \quad (\text{II.10})$$

où :

$$\begin{aligned} i_1 &= i_s + \delta_{1,d}, & j_1 &= j_s + \delta_{2,d}, \\ i_2 &= i_s - \delta_{1,d}, & j_2 &= j_s - \delta_{2,d}, \\ d &= 1, 2, & d &\neq d_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Dans ce cas le produit scalaire  $\mathbf{n}_\varphi \cdot \mathbf{n}_{\text{cell}}$  peut être petit, ce peut donc être l'état fluide extrapolé qui prend le plus d'importance dans l'état fictif.

L'état  $U_f = (u_f, v_f, p_f, c_f)$  est déterminé en résolvant un problème de Riemann dans la direction tangentielle entre les états  $U_c$  et  $U_o$  extrapolés au centre de l'interface entre les cellules concernées par le changement de signe de la level set, voir fig. II.5. L'état fluide extrapolé est

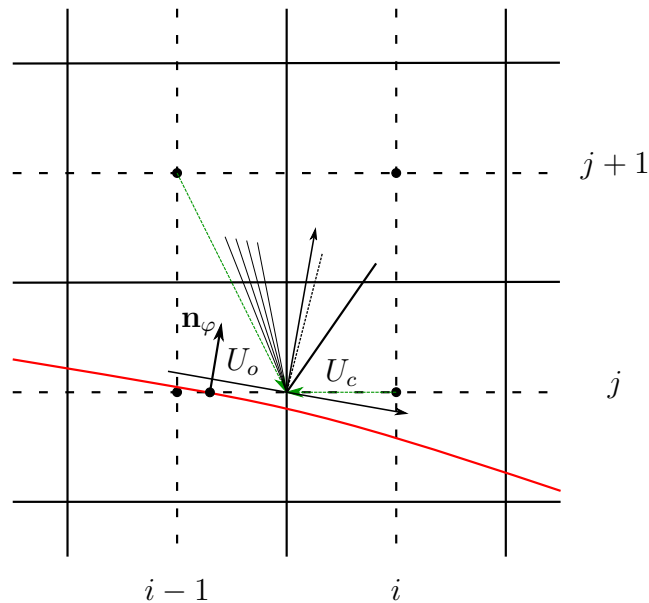


**Figure II.4** – Cellules potentiellement obliques pour la cellule  $C_{ij}$  et pour des changements de signe dans la direction  $d_\varphi = 1$ .

alors :

$$U_f = U_{\text{RP}}(0), \quad (\text{II.12})$$

où  $U_{\text{RP}}$  est la solution du problème de Riemann  $\text{RP}(U_c, U_o)$ .



**Figure II.5** – Représentation du problème de Riemann tangentiel résolu afin de déterminer l'état fluide extrapolé. Les états  $U_c$  et  $U_o$  sont obtenus en prolongeant les pentes MUSCL jusqu'au centre de l'interface numérique.

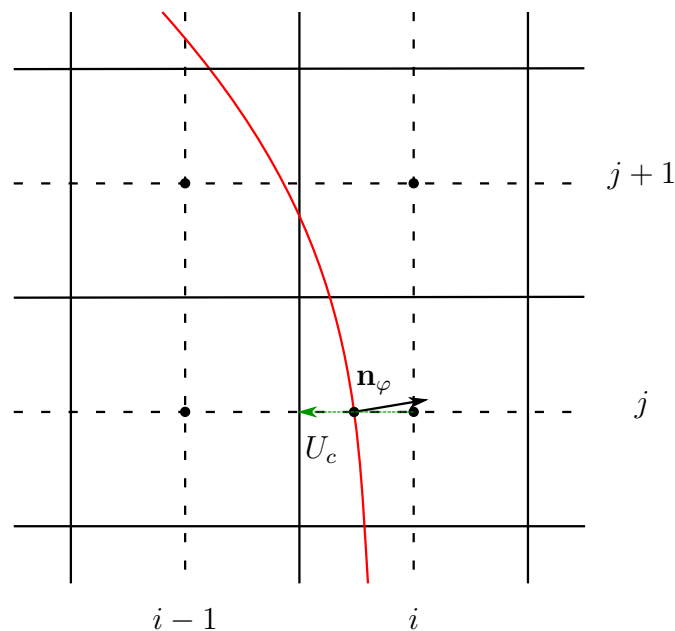
S'il existe plusieurs cellules obliques, l'état fluide sera la moyenne des résultats relatifs à

chacune des cellules « obliques ».

### 2.2.2 Cas non « oblique »

Ce cas correspond simplement à la situation où il n'existe pas de cellule « oblique ». La valeur absolue du produit scalaire  $|\mathbf{n}_\varphi \cdot \mathbf{n}_{\text{cell}}|$  est supérieure à 0.5 et c'est l'état « condition au bord » qui prime dans l'état fictif. Dans ce cas là, l'état fluide extrapolé est l'état fluide de la cellule courante extrapolé jusqu'à l'interface numérique grâce aux pentes MUSCL (voir fig. II.6) :

$$U_f = U_c \quad (\text{II.13})$$



**Figure II.6** – Dans le cas non-« oblique », l'état  $U_f$  a la valeur de l'état  $U_c$  qui est obtenu en prolongeant les pentes MUSCL jusqu'au centre de l'interface numérique.

## 2.3 Bilan et précisions

En 2D, l'état fictif permettant d'imposer la condition au bord est une combinaison convexe entre un état issu d'une interpolation entre les cellules fluides voisines dans la direction du changement de signe de la level set et la condition au bord, et un état fluide résultant d'un

problème de Riemann résolu dans la direction tangentielle, et ne prenant pas en compte la condition au bord.

Ceci permet d'assurer une bonne stabilité au schéma, même dans les cas où l'interface physique forme un angle proche de  $\pi/2$  avec l'interface entre les cellules concernées par le changement de signe de la level set.

Afin de calculer les pentes au bord du solide, la même procédure qu'en 1D est reprise : on utilise la solution d'un problème de Riemann  $RP(U_i, U^+)$  dont les états initiaux sont déterminés sans utiliser de pente.

Enfin, pour gérer le mouvement, et plus particulièrement l'apparition de cellules fraîchement devenues fluides, une procédure de mise à jour est nécessaire. En effet, les variables des cellules intérieures au solide n'ont pas de valeur valide. Nous procédons de la manière suivante :

1. calcul des flux et intégration en temps. L'état intermédiaire  $U_{i+1/2}(x/t = 0)$  est stocké pour chaque problème de Riemann à l'interface physique. Cet état est associé à la cellule solide adjacente à l'interface numérique siège du problème de Riemann. Il peut y avoir plusieurs états pour chaque cellule solide située au voisinage du bord.
2. transport de la fonction level set,
3. mise à jour des cellules solides devenues fluides. Le nouvel état fluide est la moyenne des états précédemment stockés. Pour une illustration graphique, voir fig. II.7.

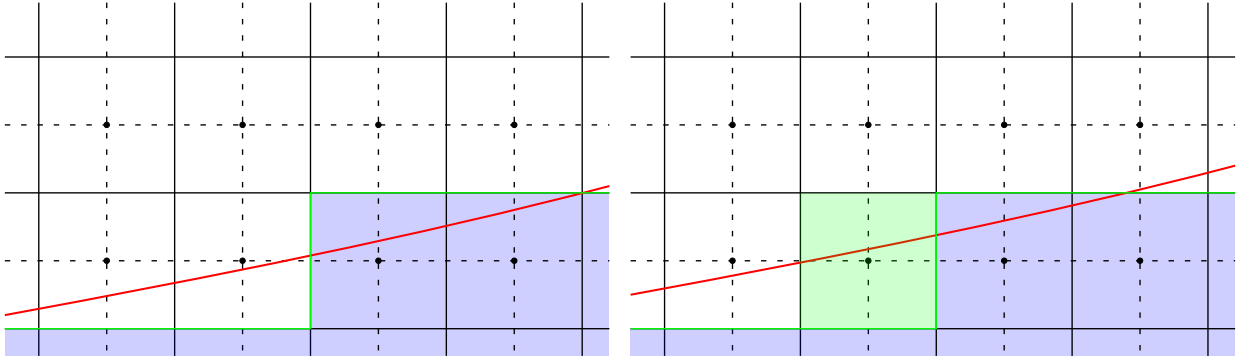
### 3 Description en 3D.

La méthode décrite précédemment est très simple à généraliser en 3D. L'état fictif est toujours une combinaison convexe de l'état « condition au bord » et de l'état « extrapolé ». Le vecteur  $\mathbf{u}^*$  nécessite la définition de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , deux vecteurs du plan tangent au solide passant par  $A$ .

En ce qui concerne les candidats potentiels au statut de cellules « obliques », ils sont désormais au nombre de 4 lorsqu'ils étaient 2 en 2D. Rappelons de manière synthétique les étapes qui permettent d'imposer la condition au bord  $\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = u_A^n$ .

Connaissant l'état gauche  $U_-$ , nous déterminons  $U_+ = (-u_- + 2u_w, v_w, w_w, p_w, c_w)$  :

- $(u_w, v_w, w_w, p_w, c_w) = \alpha (u^*, v^*, w^*, p_-, c_-) + (1 - \alpha) (u_f, v_f, w_f, p_f, c_f)$  ;
- $\alpha = \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{n}_{\text{cell}}$  ;
- $(u_f, v_f, w_f, p_f, c_f)$  est l'état fluide extrapolé upwind.



**Figure II.7** – Illustration de l'algorithme de mise à jour après le transport de la fonction level set. À gauche, on se situe à la fin de l'intégration en temps, et à droite, lors de la mise à jour succédant au transport de la level set. La ligne rouge représente l'iso zéro de la fonction level set, les cellules bleues sont les cellules fluides, et chaque interface verte appartenant à une cellule solide représente un état fluide stocké. La cellule fraîchement devenue fluide est représentée en vert et prend comme valeur la moyenne des deux états stockés.

### 3.1 Détermination des vitesses $u^*$ et $v^*$

La distance entre le centre de la maille courante et le point de l'interface physique appartenant au segment liant les deux centres de maille concernés par le changement de signe de la level set est approximé par :

$$d = \frac{|\varphi_{i_f, j_f, k_f}|}{|\varphi_{i_f, j_f, k_f}| + |\varphi_{i_s, j_s, k_s}|} \quad (\text{II.14})$$

et le vecteur normal  $\mathbf{n}_A$  est défini par

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_{i_f, j_f, k_f} + d \left( \mathbf{n}_{i_s, j_s, k_s} - \mathbf{n}_{i_f, j_f, k_f} \right) \quad (\text{II.15})$$

Le vecteur  $\mathbf{u}^*$  est déterminé de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}_A &= u_n^* = u_A^n + \left( \frac{1}{2} - d \right) s_A^n \\ \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_1 &= u_{\tau_1}^* = \mathbf{u}_- \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \\ \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_2 &= u_{\tau_2}^* = \mathbf{u}_- \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_n^* n_x + u_{\tau_1}^* \tau_{1,x} + u_{\tau_2}^* \tau_{2,x} \\ u_n^* n_y + u_{\tau_1}^* \tau_{1,y} + u_{\tau_2}^* \tau_{2,y} \\ u_n^* n_z + u_{\tau_1}^* \tau_{1,z} + u_{\tau_2}^* \tau_{2,z} \end{pmatrix},$$

où  $u_A^n$  est la vitesse normale de l'obstacle,  $\mathbf{n}_A = (n_x, n_y, n_z)^t$ ,  $\tau_1 = (\tau_{1,x}, \tau_{1,y}, \tau_{1,z})^t$  et  $\tau_2 = (\tau_{2,x}, \tau_{2,y}, \tau_{2,z})^t$  sont respectivement les vecteurs normal et tangentiels à l'interface physique au point  $A$ . La pente  $s_A^n$  est définie comme en 1D :

$$s_A^n = u_A^n - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_A + \frac{1-d}{1+d} (u_A^n - \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_A). \quad (\text{II.16})$$

Si un limiteur de pente est utilisé, la pente limitée est définie par :

$$s_A^{\mathbf{n},l} = \text{minmod}(s_A^n, s_3^n), \quad (\text{II.17})$$

où  $s_3^n = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_A - \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{n}_A$ .

### 3.2 État fluide extrapolé

Les cellules obliques ont la même définition qu'en 2D : soient  $C_{i_f, j_f, k_f}$  et  $C_{i_s, j_s, k_s}$  deux cellules voisines dans la direction  $d_\varphi$  telles que  $\varphi_{i_f, j_f, k_f} > 0$  et  $\varphi_{i_s, j_s, k_s} < 0$ , et  $\delta$  le symbole de Kronecker. Les cellules potentiellement « obliques » sont les cellules :

$$C_{i_1, j_1, k_1} \text{ si } \varphi_{i_1, j_1, k_1} > 0 \text{ et } C_{i_2, j_2, k_2} \text{ si } \varphi_{i_2, j_2, k_2} > 0, \quad (\text{II.18})$$

où :

$$\begin{aligned} i_1 &= i_s + \delta_{1,d}, & j_1 &= j_s + \delta_{2,d}, & k_1 &= k_s + \delta_{3,d}, \\ i_2 &= i_s - \delta_{1,d}, & j_2 &= j_s - \delta_{2,d}, & k_2 &= k_s - \delta_{3,d}, \\ d &= 1 \dots 3, & d &\neq d_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Pour chaque cellule « oblique » on résout un problème de Riemann dans la direction tangentielle. Pour ce faire, on détermine le repère local du problème de Riemann grâce à la normale à l'interface physique ainsi que le vecteur tangent coplanaire au vecteur liant le centre de la cellule oblique au centre de la cellule fluide.

## 4 Résultats numériques.

Dans cette section, nous présentons un ensemble de validations numériques allant d'expériences 1D à 3D. Nous comparons la précision de notre schéma en 1D au cas où la condition au bord peut être imposée exactement. En 2D, nous effectuons un test de convergence sur

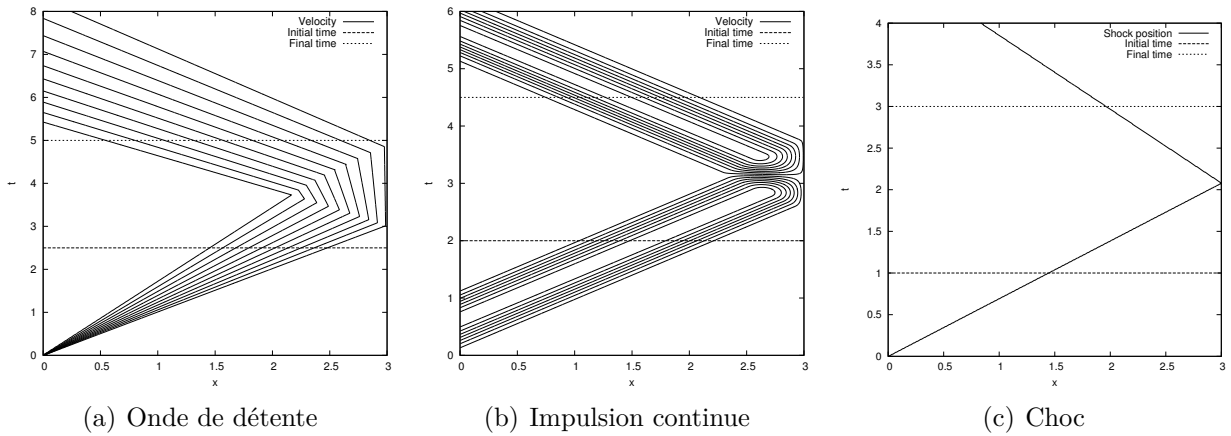


l'écoulement de Ringleb pour chaque variable, et dans les normes  $L_2$  et  $L_\infty$ . Nous mesurons la production d'entropie autour d'un cylindre subsonique en 2D. Nous comparons un écoulement supersonique autour d'un cylindre aux résultats obtenus sur maillage adapté. Les coefficients aérodynamiques d'un profil d'aile en régime transonique sont calculés et comparés à la littérature pour le cas stationnaire, et à l'expérience pour le cas oscillant.

On définit l'erreur  $L_p$  comme  $\left(\sum_i^N |e_i|^p / N\right)^{1/p}$  où  $e_i$  est l'erreur mesurée dans la  $i$ -ème cellule et  $N$  est le nombre de cellules (fluides) de calcul. La norme  $L_\infty$  de l'erreur est  $\max(|e_i|)$ .

### 4.1 Analyse de la précision en 1D.

Dans un premier temps, la précision de la méthode va être évaluée grâce à trois cas tests faisant intervenir une réflexion sur une paroi solide. Les cas tests concernent une onde de détente, une impulsion continue et un choc. Les solutions exactes sont représentées sur la fig. II.8. Le mur est situé en  $x_b = x_i + \psi(x_{i+1} - x_i)$ ,  $\psi \in [0, 1]$ . La précision de notre méthode est comparée au cas pour lequel le mur est situé exactement au noeud, là où l'on sait imposer la condition au bord de manière exacte.



**Figure II.8** – Diagrammes  $(x, t)$  des solutions exactes. On représente les iso-contours de la vitesse.

La solution exacte pour la réflexion de l'onde de détente est obtenue grâce aux invariants de Riemann. La vitesse à gauche de l'onde est  $-0.35$ . A droite, le gaz est au repos, la pression est 1 et la vitesse du son est 1.

En ce qui concerne l'impulsion continue, on impose au bord une condition d'entrée de vitesse qui correspond à une portion de sinuséide d'amplitude 0.01. La pression est 1. La solution de

référence est calculée sur un maillage de 10000 points, avec le mur situé à un noeud.

L'onde de choc a une vitesse correspondant à un nombre de mach de 1.22.

Les calculs sont initialisés au temps correspondant à la mention « initial time » sur les figures, et les erreurs sont calculées au temps correspondant à la mention « final time », relativement aux solutions analytiques et de référence (voir fig. II.8).

L'erreur en norme  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$  relative à  $\psi$  est calculée sur un maillage de 128 points et est représentée sur la fig. II.9. Sur le graphique nous comparons l'erreur de notre schéma avec l'erreur du schéma classique avec  $\psi = 0.5$ . Ce cas correspond à imposer exactement la condition d'imperméabilité dans le calcul du flux numérique en effectuant une condition de symétrie classique. On appelle « exact » l'erreur qui correspond à cette situation idéale.

Globalement, pour les trois cas test, les erreurs dans toutes les normes sont proches de l'erreur optimale. Considérons en premier lieu les cas tests dont les solutions sont continues. La position relative de la condition initiale et du mur sont fixes quel que soit  $\psi$ . On remarque que lorsque  $\psi$  augmente, l'erreur augmente légèrement en normes  $L_1$  et  $L_2$ . Ceci est cohérent car nous calculons la condition au bord en utilisant une plus grande distance pour l'extrapolation. L'erreur en norme  $L_\infty$  est moins régulière car le point de grille portant la plus grande erreur peut changer avec  $\psi$ . Elle est tout de même en moyenne de l'ordre de l'erreur optimale. Le cas  $\psi = 1$  correspond au cas  $\psi = 0$  et les erreurs pour chaque norme sont donc identiques.

Dans le cas de l'onde de choc, la position de la discontinuité ne peut être déterminée qu'avec une précision de l'ordre de la taille d'une maille. Pour cette raison, la position du choc par rapport au mur n'est pas fixe relativement à  $\psi$ . Autrement dit, le choc est initialement situé à une position fixe, sur un noeud de maillage, et la position du mur varie avec  $\psi$ . Par conséquent, les solutions numériques obtenues pour  $\psi = 0$  et  $\psi = 1$  ne sont pas exactement les mêmes. Les erreurs peuvent être discontinues relativement à  $\psi$  pour la même raison. Une différence dans la position relative du choc par rapport au mur de l'ordre de la taille d'une maille peut mener à des erreurs d'ordre supérieur. On peut en voir l'illustration sur la norme  $L_\infty$  en particulier.

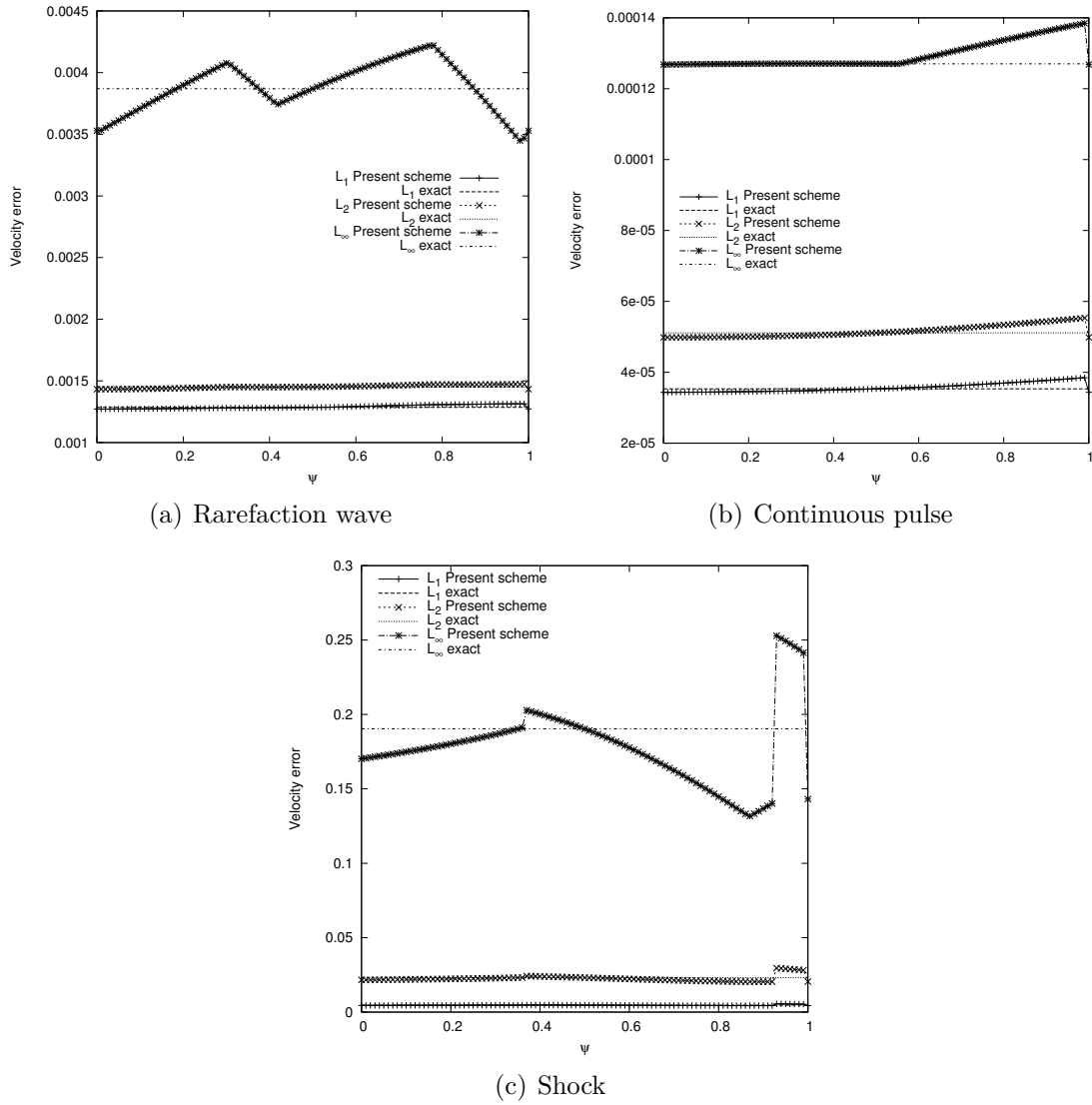


Figure II.9 – Erreur de notre schéma et erreur optimale.

## 4.2 Écoulement de Ringleb

Dans cette section, nous mesurons l'ordre de convergence de notre méthode sur un cas test classique : l'écoulement de Ringleb. Nous allons comparer les résultats avec deux méthodes : la méthode GC-CCST de Dadone et al., voir [13] et la méthode « symétrie » qui utilise la même procédure mis à part que les variables aux points fantômes sont les mêmes qu'aux points images à l'exception de la vitesse normale qui est transformée en son opposé. L'écoulement de Ringleb est une solution exacte des équations d'Euler. La solution est obtenue grâce à la méthode hodograph, voir [74].

La solution exacte est formulée dans les variables  $(\theta, V)$ , où  $u = V \cos \theta$ ,  $v = V \sin \theta$  et  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ . La fonction courant est définie par :

$$\Psi = \frac{\sin \theta}{V}$$

Les équations des lignes de courant sont :

$$x = \frac{1}{2\rho} \left( \frac{1}{V^2} - 2\Psi^2 \right) + \frac{L}{2}, \quad y = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho V^2}$$

avec :

$$L = - \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{3c^3} - \frac{1}{5c^5} \right), \quad c^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{2} V^2, \quad \rho = c^5$$

Dans notre cas, le domaine de calcul est  $[-0.5; -0.1] \times [0; 0.6]$  et on résout numériquement l'écoulement entre les lignes de courant  $\Psi_1 = 0.8$  et  $\Psi_2 = 0.9$ . Les conditions limite pour l'entrée ( $y = 0$ ) et la sortie ( $y = 0.6$ ) sont supersoniques.

L'ordre de convergence du schéma est calculé en norme  $L_2$  et en norme  $L_\infty$  sur quatre grilles différentes de résolution  $32 \times 48$ ,  $64 \times 96$ ,  $128 \times 192$  et  $256 \times 384$ . Une étude de convergence sur un maillage adapté avec le même schéma volumes finis a été effectuée. Le maillage est composé de lignes de courant et de lignes de potentiel. Un exemple est représenté sur la fig. II.10.

Les résultats pour les normes  $L_2$  et  $L_\infty$  sont comparés avec la méthode « symétrie », la méthode GC-CCST [13] et le calcul sur maillage adapté avec conditions de mur sur la fig. II.13 pour la vitesse, la pression, la vitesse du son.

La méthode « symétrie » nécessite une interpolation spéciale si au moins un des centres de maille requis pour l'interpolation  $Q_1$  se trouve de l'autre coté de l'interface physique. Afin d'éliminer les biais possibles, la valeur des variables au point symétrique des ghost cells par rapport à l'interface  $(x_P, y_P)$  sera la valeur de la solution exacte de l'écoulement de Ringleb  $U_P = U_{\text{ex}}(x_P, y_P)$ . Pour la méthode GC-CCST, nous effectuons une interpolation bilinéaire dans tous les cas.

Globalement, les résultats montrent que la méthode « symétrie » est d'ordre 1 en norme  $L_\infty$ , même si les ghost cells sont calculées grâce à la réflexion de la solution exacte.

La solution sur le maillage adapté est systématiquement la plus précise, et est toujours à

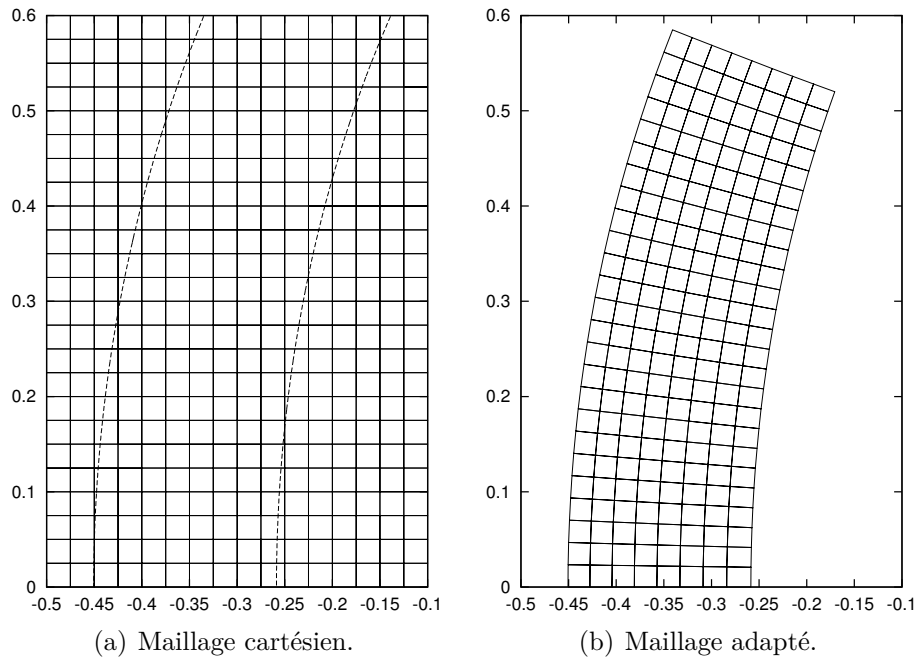


Figure II.10 – Comparaison entre le maillage cartésien avec l'isoligne  $\varphi = 0$  et le maillage adapté.

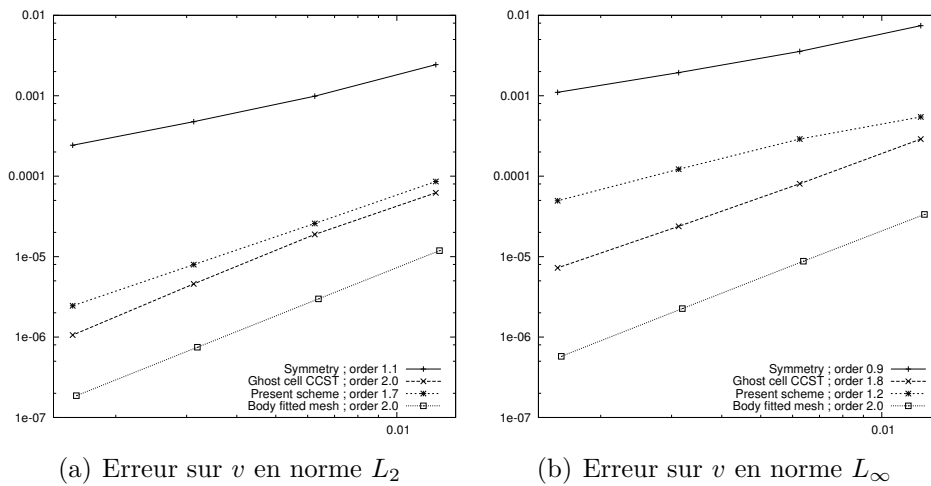


Figure II.11 – Comparaison de l'erreur sur  $v$  en norme  $L_2$  et  $L_\infty$  de notre schéma avec différentes méthodes. Les ordres de convergence sont détaillés dans la légende.

l'ordre 2.

Les résultats pour GC-CCST et notre méthode sont globalement comparables. On atteint l'ordre 2 dans toutes les normes pour la pression, un ordre proche de 2 pour la vitesse du son et un

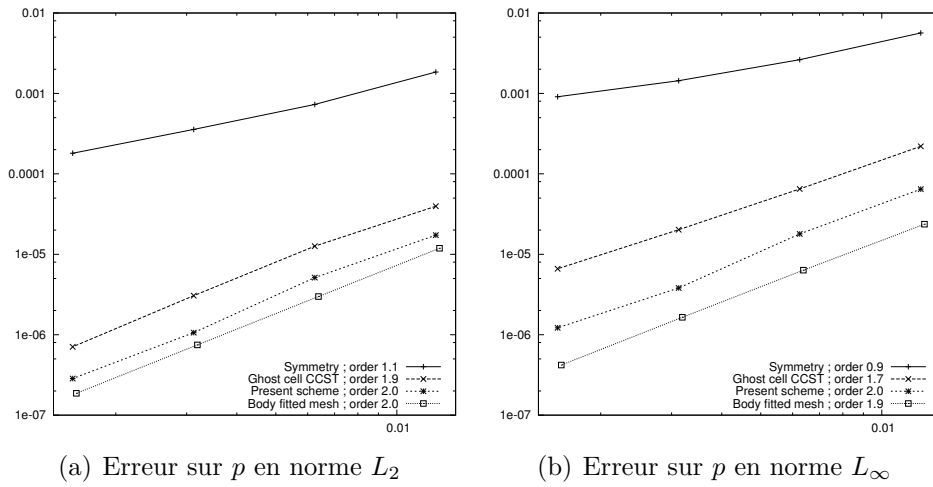


Figure II.12 – Comparaison de l’erreur sur  $p$  en norme  $L_2$  et  $L_\infty$ .

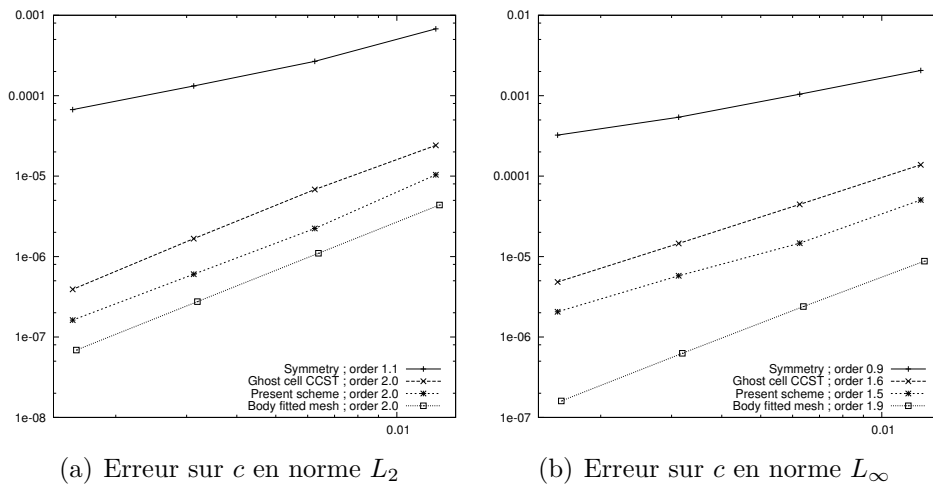


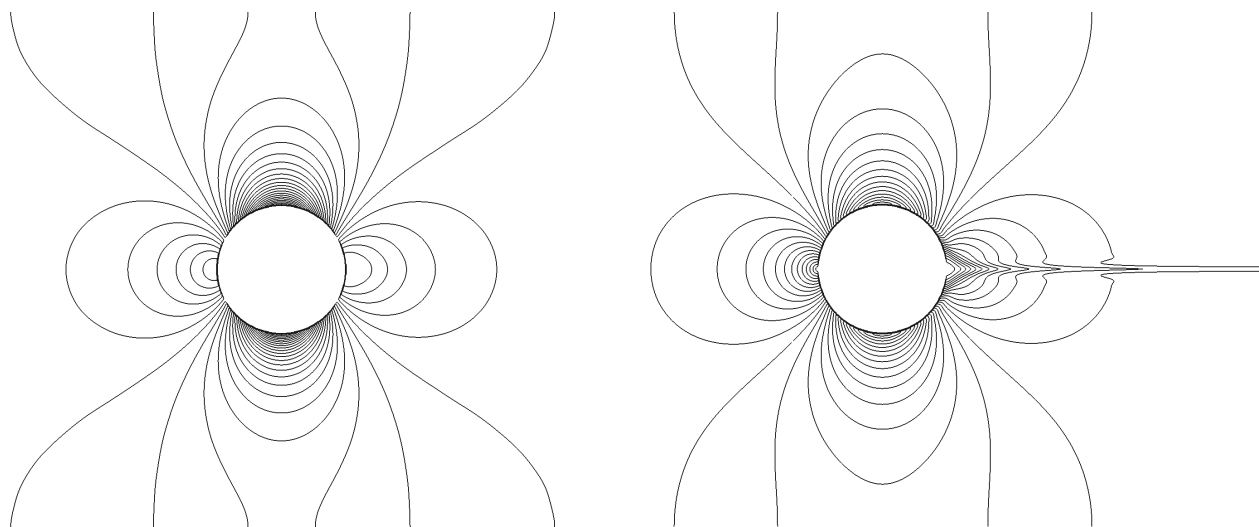
Figure II.13 – Comparaison de l’erreur sur  $c$  en norme  $L_2$  et  $L_\infty$ .

peu inférieur pour la vitesse.

### 4.3 Écoulement subsonique autour d'un cylindre

On considère un cylindre à section circulaire de rayon 0.5 centré en  $(0, 0)$ . Le domaine de calcul est  $[-3, 3] \times [0, 2]$ . A l'entrée et en sortie on a un écoulement non perturbé à Mach 0.2, et des conditions de symétrie sur les parois nord et sud. La grille la plus fine est  $1536 \times 512$  et afin de calculer les ordres de convergence, nous avons réduit de moitié le nombre de points dans chaque direction pour 4 calculs différents. Les champs de pression et de Mach sur le maillage le plus fin sont représentés sur la fig. II.14.

Pour la pression nous traçons 30 isocontours équirépartis dans  $[0.9, 1.03]$ . Pour le nombre de Mach, nous traçons 30 isocontours équirépartis dans  $[0, 0.45]$ . Le champ de pression est presque parfaitement symétrique, et on peut voir sur le champ de Mach le sillage habituel. Les ordres de convergence de l'erreur sur l'entropie sont présentés sur la fig. II.15. On observe des ordres de convergence proches de 2 pour les normes  $L_1$  et  $L_2$ , et de 1.6 pour la norme  $L_\infty$ . Ce résultat conforte ceux obtenus précédemment sur l'écoulement de Ringleb.



**Figure II.14** – À gauche : 30 iso-contours de la pression entre 0.9 et 1.03. À droite : 30 iso-lignes de Mach entre 0 et 0.43. Résultats sur la grille la plus fine.

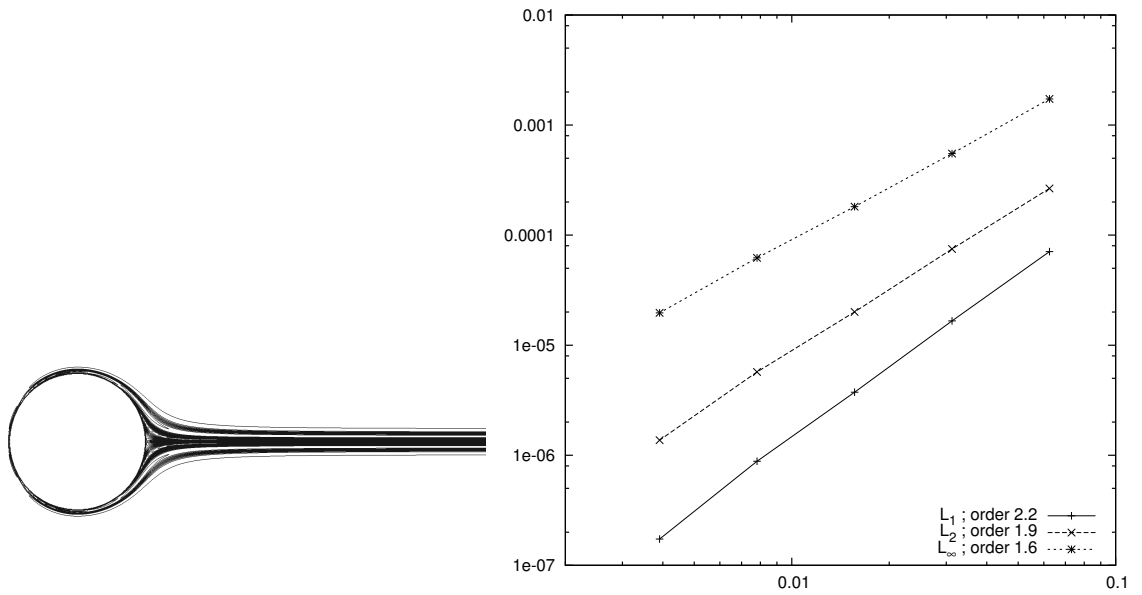


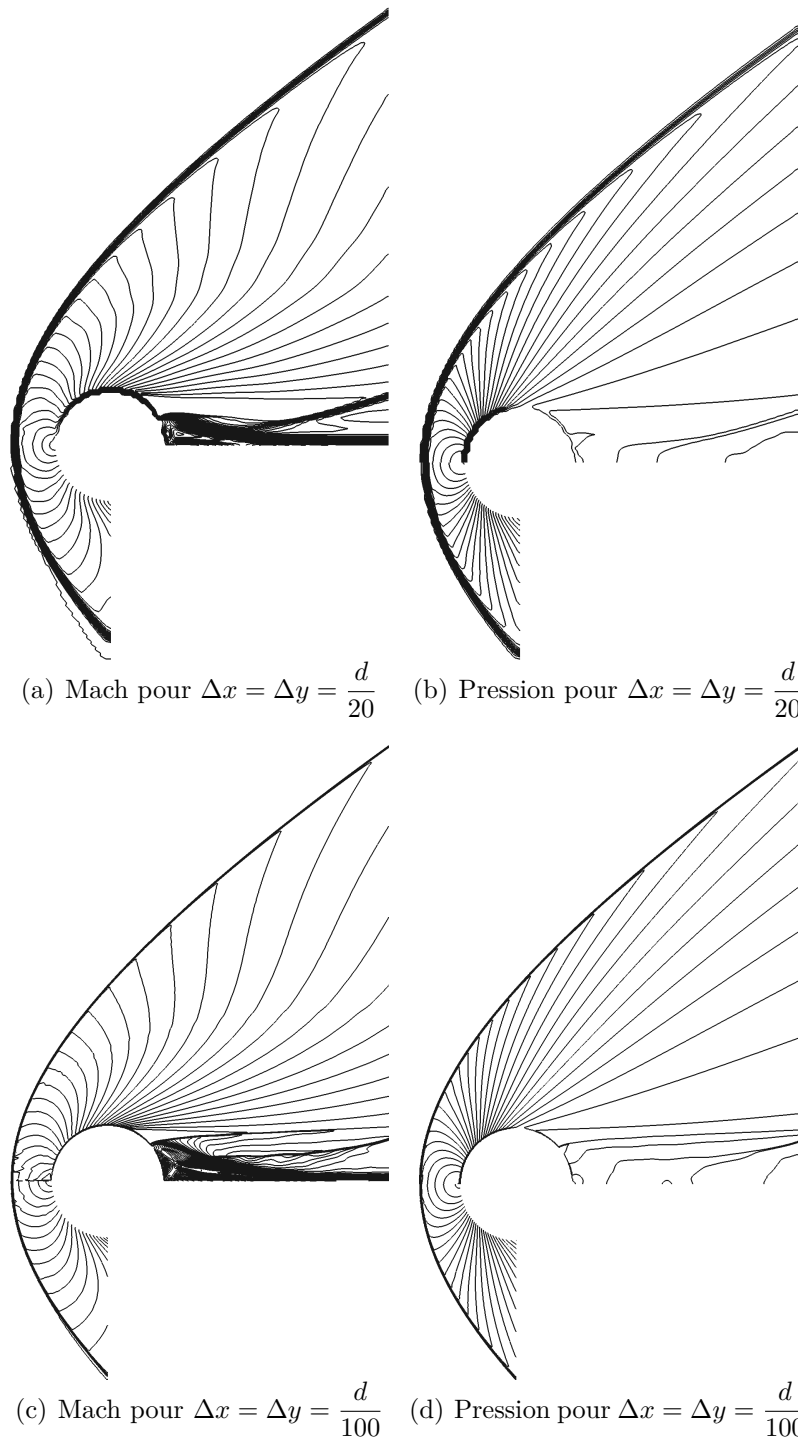
Figure II.15 – À gauche : 30 iso-contours de l'entropie entre  $-4.5 \cdot 10^{-7}$  et  $8.36 \cdot 10^{-6}$  sur la grille la plus fine. À droite : erreur sur l'entropie dans différentes normes.



### 4.4 Cylindre supersonique

On considère un cylindre de rayon 1 centré en  $(0, 0)$  dans un domaine de calcul de taille  $[-3, 5] \times [0, 8]$ . Les conditions aux limites sont : symétrie en bas, champ lointain en haut, entrée supersonique à Mach 3 à gauche, sortie supersonique à droite. La condition initiale correspond à l'écoulement imposé en entrée. Ceci est un bon test de robustesse du schéma, les méthodes où entrent en jeu des extrapolations peuvent avoir des problèmes de négativité de la pression dans les cas d'écoulements à nombre de Mach élevé, dans [76] par exemple. Ici, le fait de calculer les pentes au voisinage de l'interface physique grâce à l'état intermédiaire du problème de Riemann à l'interface numérique où est imposée la condition au bord nous assure pression et densité positives au moins jusqu'à l'interface numérique. On montre ici les calculs sur quatre maillages différents : deux grilles cartésiennes de taille  $160 \times 160$  et  $800 \times 800$ , et deux grilles polaires de taille  $60 \times 63$  et  $300 \times 315$  dont le maillage est adapté à l'obstacle ( $1 \leq r \leq 4$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ). Pour la simulation sur maillage adapté, nous avons choisi la forme du domaine afin de faciliter le calcul des conditions au bord. Ces dernières sont des conditions de symétrie le long de l'axe  $y = 0$  et au bord du cylindre, champ lointain à l'ouest et sortie supersonique le long de l'axe  $x = 0$ .

On notera que les contours de pression et de mach coïncident au niveau de l'axe de symétrie. On n'observe pas de phénomène de carbuncle.



**Figure II.16** – À gauche : 30 iso-contours de Mach uniformément répartis entre 0 et 3. À droite : 30 iso-contours de pression uniformément répartis entre 0 et 12. La solution obtenue sur maillage cartésien se trouve sur la partie supérieure, et le solution obtenue sur maillage adapté sur la partie inférieure.

## 4.5 Profil NACA0012 transonique

Dans cette partie nous présentons la simulation de l'écoulement autour d'un profil NACA0012 transonique. Les paramètres de l'écoulement sont  $M_\infty = 0.8$  et l'angle d'attaque  $\alpha = 1.25^\circ$ .

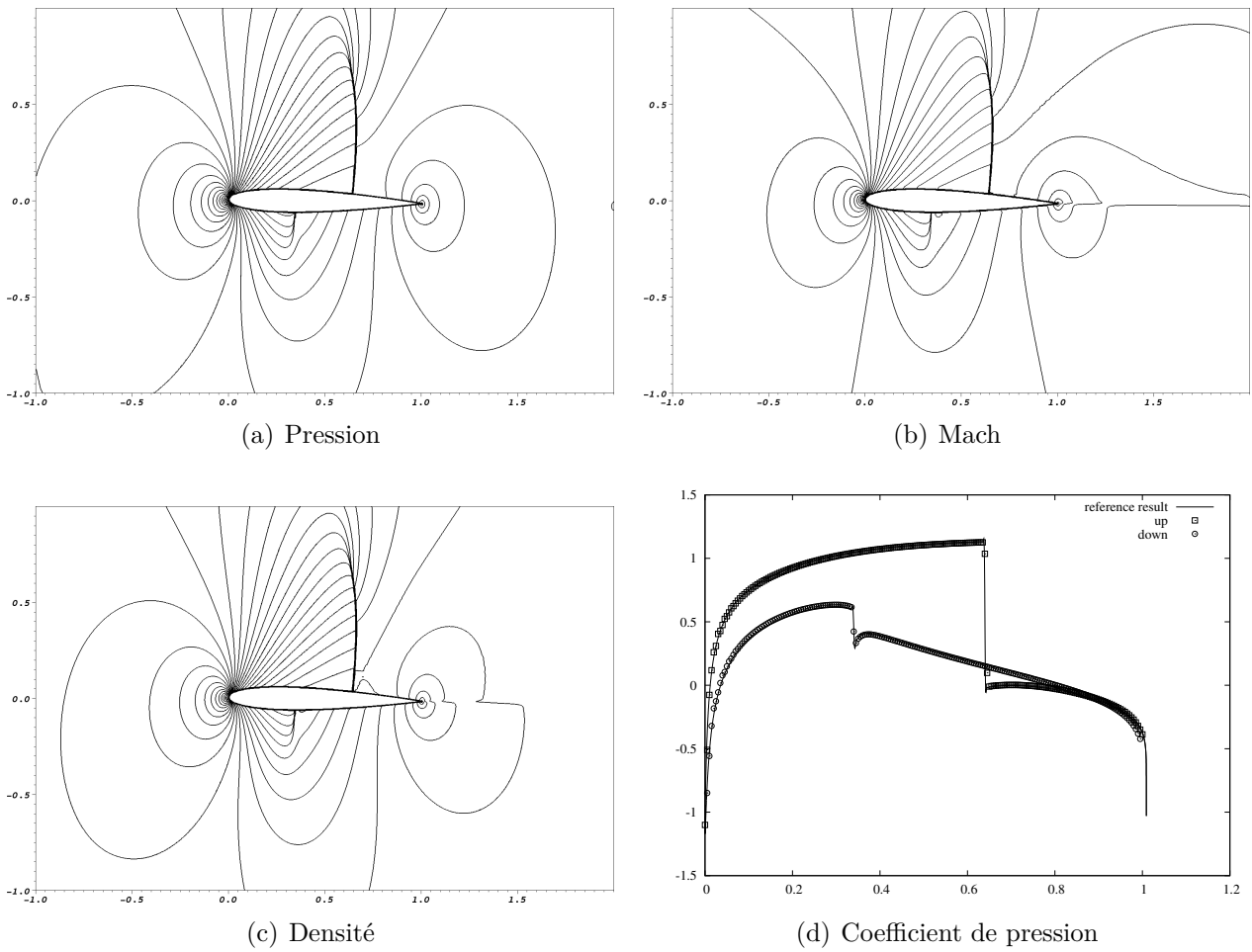
La solution précise est difficile à obtenir même si l'allure générale de la solution peut être obtenue avec une résolution relativement faible (voir une récente et complète discussion dans [82]). Ici nous effectuons le calcul sur un domaine de taille  $30c \times 20c$ , où  $c$  est la corde du profil, et avec  $\Delta x = \Delta y = \frac{c}{100}$ . Une fois le calcul arrivé à convergence, nous effectuons un zoom numérique sur  $[-c, 2c] \times [-c, c]$  afin d'obtenir une meilleure résolution sur le profil ( $\Delta x = \Delta y = \frac{c}{200}$ ). La solution convergée sur le domaine de  $30c \times 20c$  est interpolée afin de servir de condition au bord au domaine  $[-c, 2c] \times [-c, c]$ . Les contours de pression, mach et densité ainsi que le coefficient de pression sur la surface du profil sont représentés sur la fig. II.17.

**Traitement du bord de fuite.** Étant donnée la forme d'un profil NACA0012, le bord de fuite peut être tronqué d'une portion de taille supérieure à la taille d'une maille. En effet, si la partie la plus fine du profil passe entre des centres de maille, alors aucun changement de signe n'est détecté, et donc aucune condition au bord n'est imposée. Ceci peut être amélioré en considérant deux fonctions level set, et en imposant la condition au bord pour chaque changement de signe des deux fonctions (tant que la taille du profil n'est pas dépassée). Les résultats suivants comportent cette modification.

Pour les coefficients de traînée et de portance, nous avons effectué le calcul sur une grille de taille  $\Delta x = \Delta y = \frac{c}{400}$  sur le petit domaine de calcul. Les résultats sont détaillés et comparés à ceux de [82] sur la table II.1. Les résultats de référence sont obtenus avec les schémas de l'état de l'art sur maillage orthogonal sur 16 millions de points dans tout le domaine, et plus de 4000 points sur le profil. Il est à noter que le coefficient de traînée est particulièrement influencé par la configuration du maillage au bord de fuite.

	Min [82]	Max [82]	Présente étude
$C_l$	0.348226045	0.356208937	0.34951
$C_d$	0.022453440	0.022684938	0.02056

Tableau II.1 – Coefficients de traînée et de portance.



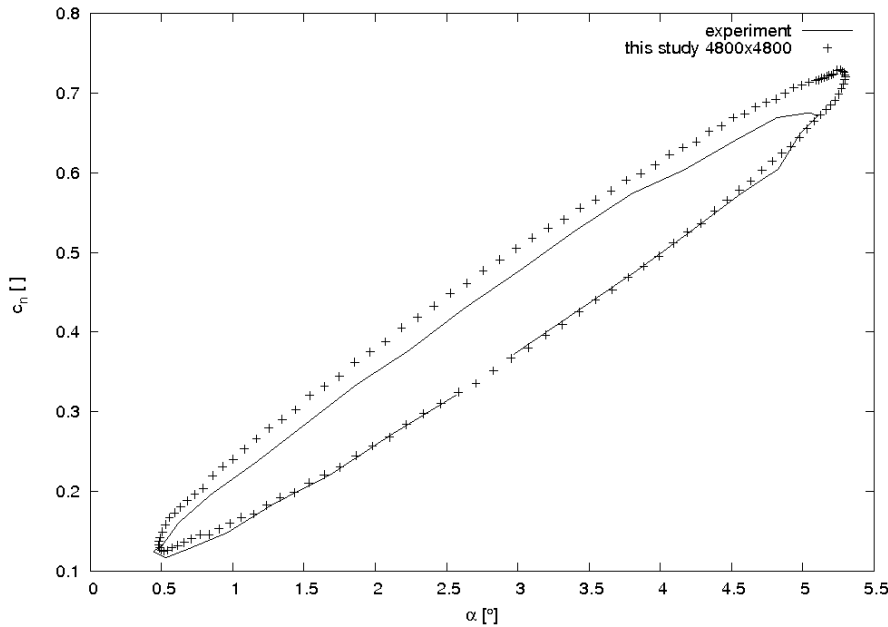
**Figure II.17** – Champs de pression, Mach et densité autour du NACA0012. Coefficient de pression sur la surface du profil comparée à un résultat de référence.

## 4.6 Profil oscillant

Nous présentons une simulation de profil oscillant. Il s'agit du cas test CT1 du rapport AGARD 702 [21]. Ici, l'obstacle est donc en mouvement. Le profil est immergé dans un écoulement à  $M_\infty = 0.6$ . Son angle d'incidence  $\alpha$  oscille autour d'un angle d'incidence moyen selon la loi suivante :

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(2\pi ft), \quad (\text{II.20})$$

où  $\alpha_m = 2.89^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.41^\circ$  et  $f = 50.32\text{Hz}$ . Le profil est de taille 1, et le calcul est effectué sur un domaine de taille  $[-12, 12]^2$  comportant  $4800^2$  points, ce qui correspond à 200 points sur la corde du profil. La méthode du zoom numérique n'a pas été utilisée, la simulation est effectuée sur le code parallèle décrit dans la section 5. Le coefficient normal est calculé et comparé à l'expérience, voir fig. II.18. On peut voir que le schéma donne des résultats proches



**Figure II.18** – Comparaison entre la force normale issue de la simulation et les données issues de l'expérience.

de l'expérience. La procédure utilisée au bord de fuite a montré ici toute son efficacité. Sans celle-ci, les coefficients de force sont très bruités à cause du changement de forme et de taille du profil lors du franchissement de mailles pendant l'oscillation. De légères différences subsistent pour les angles d'attaque les plus élevés. Ces différences peuvent être dues au fait que le modèle d'Euler ne comporte pas de viscosité. Si les résultats sont en bon accord avec l'expérience, cela ne garantit pas que l'ordre 2 est conservé dans le cas d'obstacles en mouvement. Des tests plus

précis sont nécessaires.

On retrouve ce cas test dans [45]. Leur méthode afin de prendre en compte les obstacles en mouvement consiste à faire varier la condition au bord de l'obstacle qui lui reste fixe. Leur approche n'est donc valable que pour les petits déplacements. Leurs résultats sont comparables aux nôtres.

### 4.7 Quelques simulations 3D

Des simulations préliminaires sont effectuées. La première concerne l'impact d'une onde de choc planaire à Mach 10 sur trois sphères de tailles différentes. Les sphères sont centrées en  $(0,0,0)$ ,  $(-0.75,1.4,-1.4)$ ,  $(0,-2,0)$  et ont un rayon de 1, 0.4, 0.3 respectivement. Le domaine de calcul est  $[-2.5, 2.5]^3$  et comporte  $256^3$  cellules. Des images sont présentées sur la fig II.19. Les interactions des ondes de choc produisent des structures complexes dans le sillage des sphères. Cette simulation permet de s'assurer que le schéma est robuste et se comporte bien en 3D.

Une autre simulation préliminaire est l'écoulement dans une tuyère à section elliptique. En entrée, la pression totale est fixée à  $10^5$ Pa et en sortie la pression statique est fixée à  $2 \cdot 10^4$ Pa. Une coupe de la solution convergée est présentée sur la fig II.20. L'écoulement est supersonique après le col.

L'extension du schéma numérique en 3D est immédiate, et ces simulations permettent d'avoir une première idée sur le comportement de ce schéma en 3D. Néanmoins, d'autres tests permettant de mesurer la précision du schéma en 3D sont nécessaires.

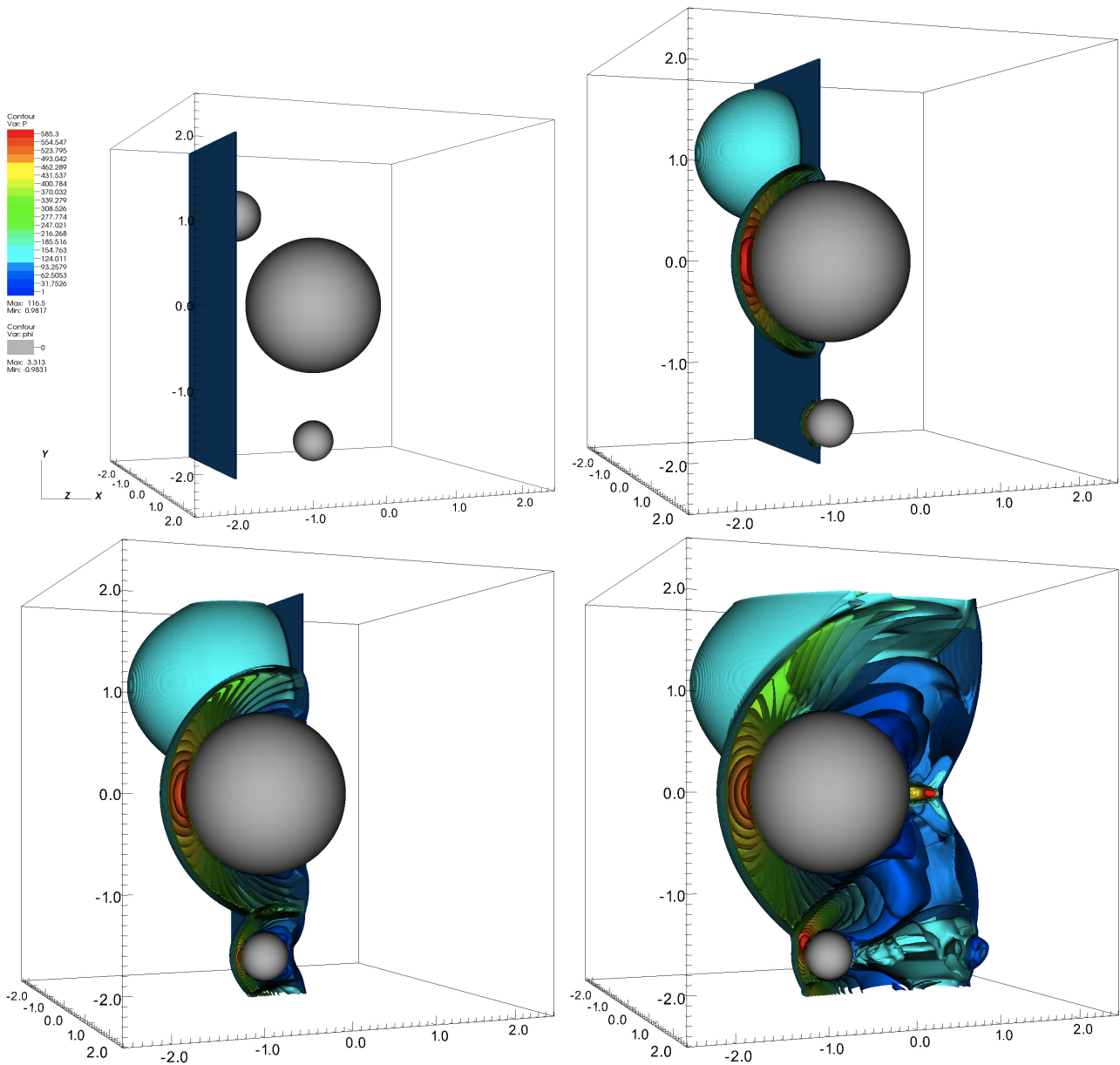


Figure II.19 – Réflexion d'un choc à Mach 10 sur trois sphères.

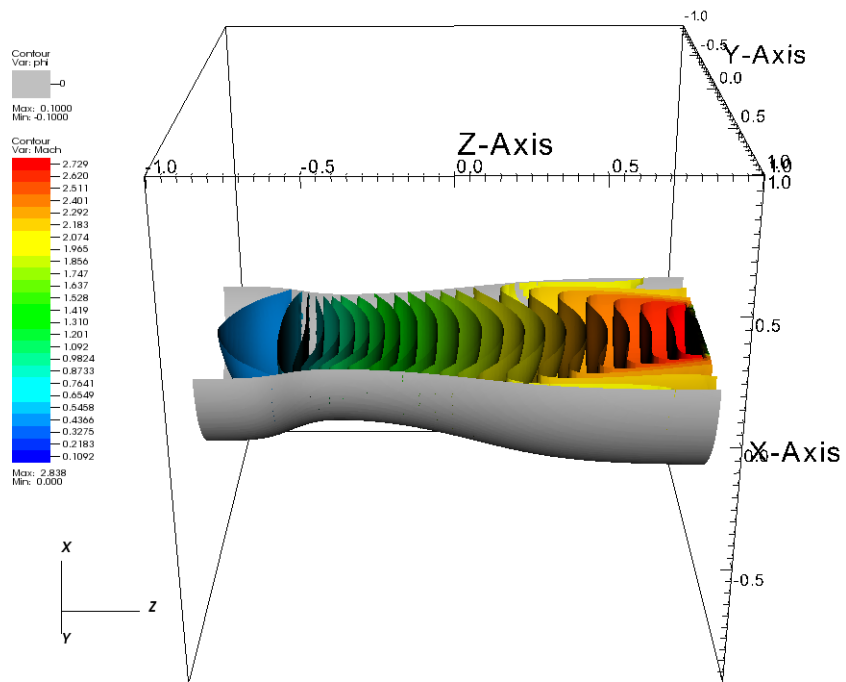


Figure II.20 – Écoulement dans une tuyère.



### 5 Code parallèle

Les calculs tridimensionnels sont très coûteux en temps de calcul. Afin de les réaliser en un temps raisonnable, il est indispensable de paralléliser le code. En s'exécutant sur plusieurs processeurs en même temps, on réduit le temps de calcul de manière significative.

En programmation séquentielle, le programme est exécuté par un seul processus, et toutes les variables du programme sont dans la mémoire allouée au processus.

En programmation parallèle avec échange de message, chaque processus exécute le programme, chaque processus a sa mémoire locale et ne peut accéder qu'aux variables qu'elle contient. Des données peuvent être échangées entre les processus grâce par exemple à la librairie MPI.

Nous avons décidé d'utiliser la librairie MPI afin de paralléliser notre code 3D. En faisant ce choix, nous espérons pouvoir tirer profit autant que possible des avantages des maillages cartésiens. Les communications entre les processeurs constituent un des points cruciaux pour garantir de bonnes performances lorsque le nombre de processeurs augmente.

Dans cette section nous décrivons la méthode utilisée afin de paralléliser le code, puis nous présentons des résultats de performance. Ce travail est issu d'une collaboration avec Haysam Telib, Optimad engineering.

#### 5.1 Partitionnement et quantités à communiquer

Par commodité, nous commençons par décrire le fonctionnement en 2D. La première étape pour paralléliser un code en MPI est de partitionner le domaine. Il est important que les sous domaines, ou blocs, issus du partitionnement aient tous une taille proche afin que la charge de travail par processeur soit comparable. Avec un maillage cartésien, la tâche est grandement facilitée. En effet, il suffit de quadriller le domaine pour le partitionner et obtenir des domaines de même taille, à condition que le nombre de mailles dans chaque direction soit divisible par le nombre de processeurs dans chaque direction. On peut voir un exemple de partitionnement pour 4 processeurs sur la fig. II.21(a).

Chaque bloc possède au plus 4 voisins. Chaque processus travaille sur un sous domaine, et dans sa mémoire se trouvent les variables relatives aux cellules contenues dans ce sous domaine. Le but est de calculer tous les flux du domaine physique. Il est nécessaire de déterminer la taille du stencil du schéma afin de connaître la quantité d'information à communiquer entre les différents processeurs.

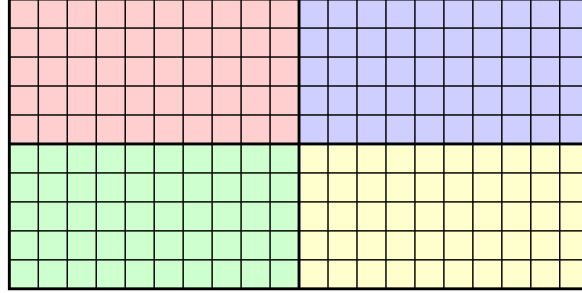


Figure II.21 – Partitionnement du domaine pour 4 processeurs

### 5.1.1 Stencil

Pour une cellule  $C_{ij}$  loin d'un obstacle, le flux  $F_{i-1/2j}$  est calculé à partir des états  $U_{i-1j} = U_{i-1j} + \frac{S_{i-1j}^x}{2}$  et  $U_{ij}^l = U_{ij} - \frac{S_{ij}^x}{2}$ . La pente  $S_{i-1j}^x$  est fonction des états  $U_{i-2j}$ ,  $U_{i-1j}$  et  $U_{ij}$ , et la pente  $S_{ij}^x$  est fonction des états  $U_{i-1j}$ ,  $U_{ij}$  et  $U_{i+1j}$ . En procédant de la même manière pour les flux  $F_{i+1/2j}$ ,  $F_{ij-1/2}$  et  $F_{ij+1/2}$ , on peut déterminer le stencil nécessaire au calcul des flux d'une cellule. Il est représenté sur la fig. II.22.

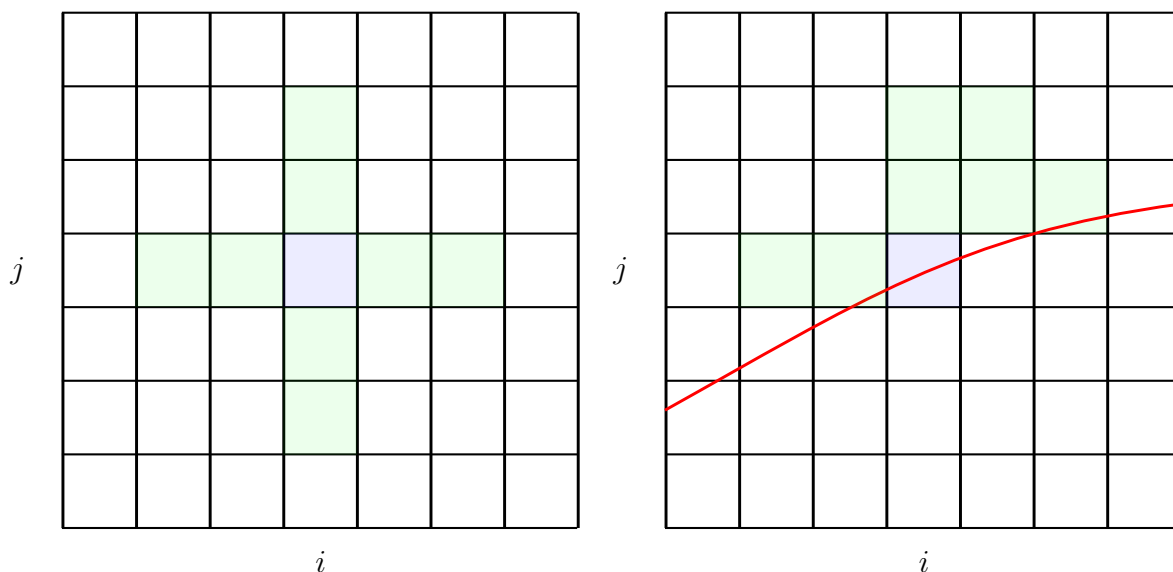
Si le domaine ne contient que du fluide, on n'a besoin que des voisins dans chaque direction, pas des voisins « diagonaux ». Or si un solide est présent dans le domaine, la possibilité d'avoir besoin d'une cellule « oblique » nous oblige à communiquer également les cellules diagonales. En effet, le stencil d'une cellule proche de l'interface physique et possédant un voisin « oblique » est représentée sur la fig. II.22. Le flux  $F_{i+1/2ij}$  nécessite les états  $U_{ij}$  et  $U_{i-1j}$  afin de déterminer l'état « condition au bord » et l'état  $U_{i+1j+1}$  ainsi que la pente  $S_{i+1j+1}$  afin de calculer l'état fluide extrapolé. La pente nécessite dans la direction  $x$  les cellules voisines, et dans la direction  $y$  l'état  $U_{i+1j+2}$  ainsi que l'état intermédiaire du problème de Riemann entre  $U_{i+1j+1}$  et  $U_w^1$  l'état fictif permettant d'imposer la condition au bord, mais calculé à l'ordre 1.

Nous retenons donc un stencil de taille 2 dans chaque direction,  $y$  compris dans les coins.

### 5.1.2 Communications

Les communications dans les directions du maillage étant bien plus aisées, on utilise un algorithme qui permet d'obtenir les informations contenues dans les cellules « diagonales » uniquement en procédant à des communications dans les directions verticales et horizontales, voir la fig. II.23.

Dans un premier temps, chaque bloc envoie à ses voisins E et O les variables contenues dans les deux rangées de cellules adjacentes au bloc cible. Une fois ces données reçues, les communications N et S sont effectuées. Les données envoyées concernent les variables des deux rangées



**Figure II.22** – À gauche : en vert, représentation de la taille du stencil nécessaire au calcul des flux aux interfaces d'une cellule  $C_{ij}$  en bleu.

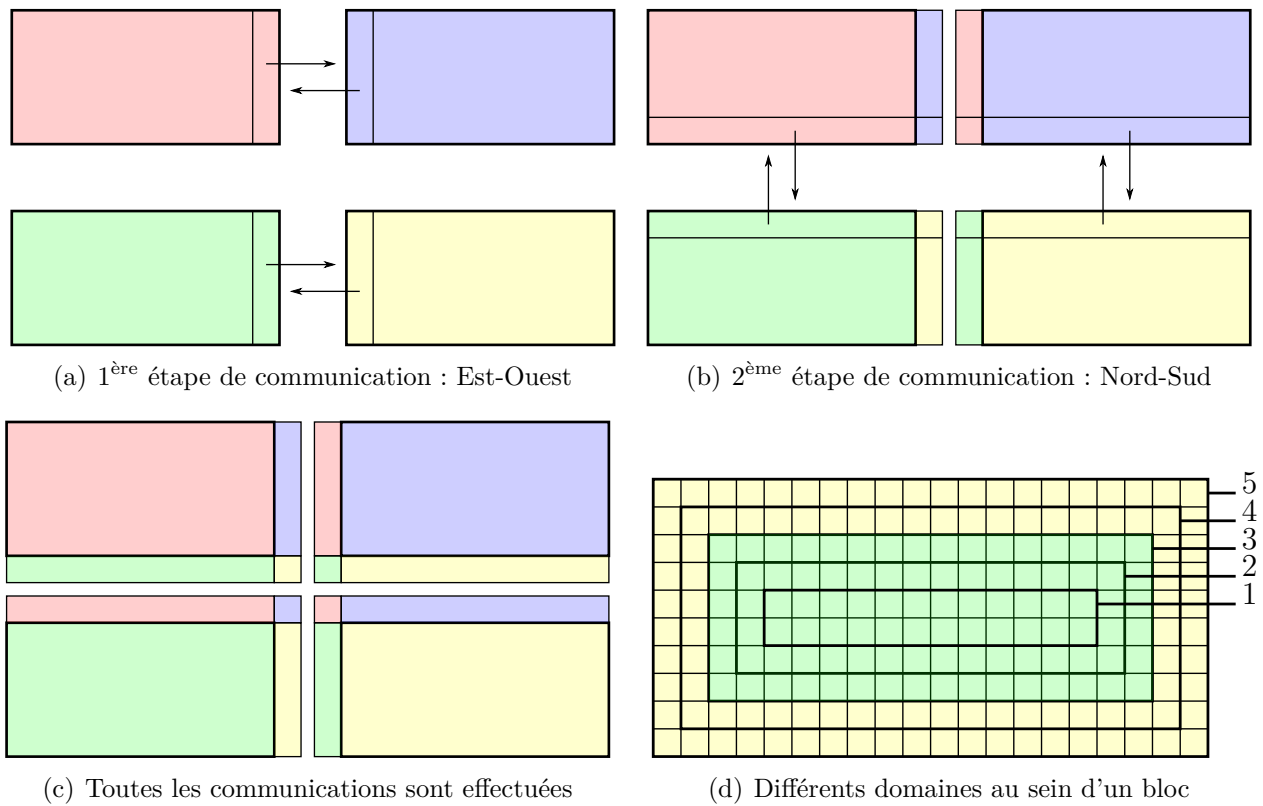
du bloc original, ainsi que leur prolongement dans les cellules reçues par les communications E et O.

On peut voir une illustration détaillée sur la fig. II.23.

### 5.1.3 Algorithme

Afin de minimiser le temps consacré aux communications, nous les effectuons dans la mesure du possible en arrière plan pendant que des calculs ne les nécessitant pas s'exécutent. En se référant à la fig. II.23(d), on voit que les pentes dans les deux directions peuvent être calculées sur le domaine 2 sans avoir reçu aucune communication. Ainsi, une fois les pentes calculées dans le domaine 2, les flux du domaine 1 peuvent être calculés. Restent à calculer les flux du domaine  $3 \setminus 1$  (3 privé de 1). Pour cela, on a besoin des pentes sur le domaine  $4 \setminus 2$ . Elles peuvent être calculées une fois les communications des voisins verticaux et horizontaux reçues. L'algorithme est le suivant, et une illustration est présentée sur la fig. II.24 :

1. préparation à la réception des communications E et O,
2. envoi des communications E et O,
3. calcul des pentes sur le domaine 2, et réception des communications E et O
4. si E et O reçues, envoi de N et S,
5. calcul des flux sur le domaine 1, et réception des communications E et O ou N et S



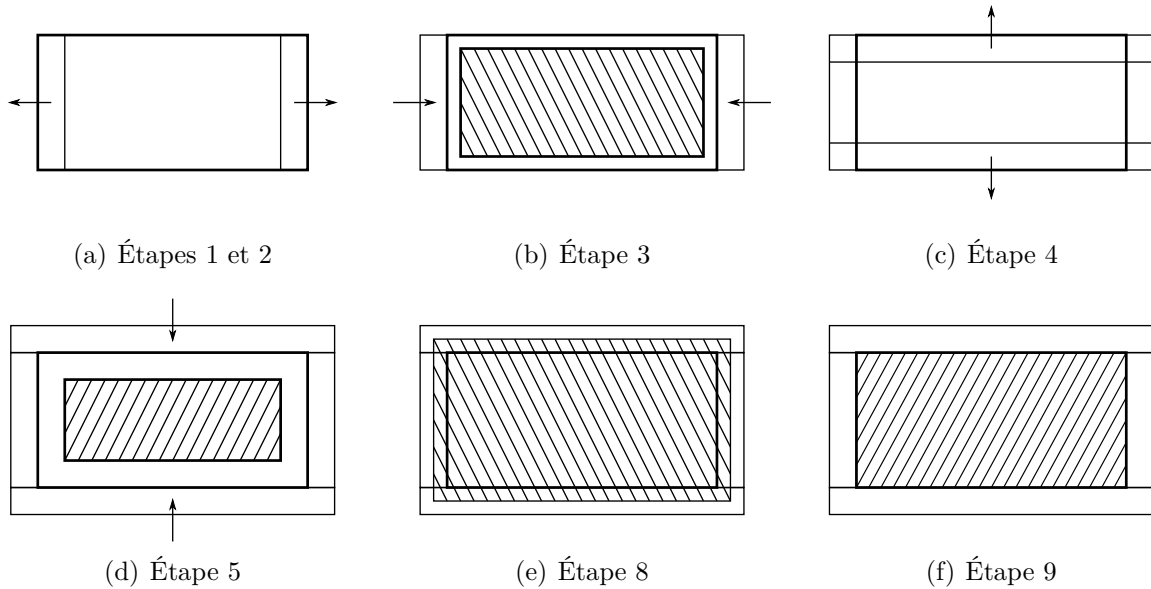
**Figure II.23** – (a, b, c) : schéma représentant les communications. (d) : Le domaine vert représente le bloc courant, le domaine jaune représente les cellules nécessaires au calcul des flux du bloc. Ce sont les quantités relatives à ces cellules qui sont communiquées.

6. si E et O reçues, envoi de N et S,
7. si N et S non reçues, attente de N et S,
8. calcul des pentes sur le domaine  $4 \setminus 2$ ,
9. calcul des flux sur le domaine  $3 \setminus 1$ .

Avec cet algorithme, les communications sont effectuées durant le calcul des pentes ou le calcul des flux dans la majorité des cas, et ne sont pas bloquantes.

## 5.2 Performance

La performance de l'aspect parallèle du code est mesuré de deux façons : par un test de scalabilité faible, et par un test de scalabilité forte.

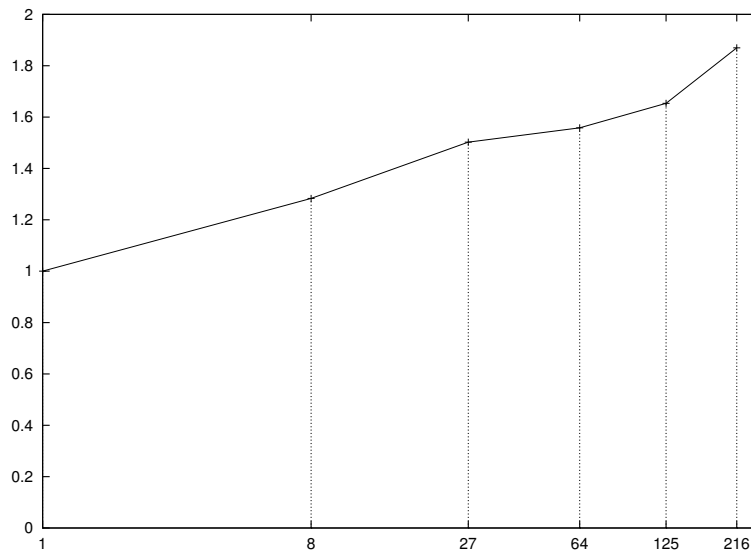


**Figure II.24** – Illustration de l'algorithme. Envoi des communications Est et Ouest, calcul des pentes sur le domaine 2 et réception des communications Est et Ouest, envoi des communications Nord et Sud, calcul des flux dans le domaine 1 et réception des communications Nord et Sud, calcul des pentes sur le domaine  $4 \setminus 2$ , calcul des flux dans le domaine  $3 \setminus 1$ .

### 5.2.1 Scalabilité faible

Pour le test de scalabilité faible nous nous intéressons à un problème de taille fixe par processeur. Le temps nécessaire à la résolution de ce problème est mesuré pour différents nombre de processeurs et doit idéalement rester constant. Nous comparons le temps d'exécution d'un problème de taille  $T$  sur 1 processeur avec le temps d'exécution d'un problème de taille  $nT$  sur  $n$  processeurs.

Le problème étudié ici est l'écoulement à Mach 0.2 d'un cylindre de centre l'origine et de rayon 0.5 confiné dans un domaine de taille  $[-3, 3]^3$ . Le domaine présente une entrée à l'ouest, une sortie à l'est et des parois ailleurs. On mesure le temps nécessaire à la résolution numérique de 1000 itérations pour un domaine de résolution  $50^3$  sur 1 processeur,  $100^3$  sur 8 processeurs,  $150^3$  sur 27 processeurs,  $200^3$  sur 64 processeurs,  $250^3$  sur 125 processeurs et  $300^3$  sur 216 processeurs. Les résultats moyennés sur 5 différentes exécutions sont présentés sur la fig. II.25. On observe une bonne scalabilité dans l'ensemble, la baisse de performance s'explique très probablement par une charge de travail par processeur qui se déséquilibre lorsqu'on augmente leur



**Figure II.25** – Scalabilité faible.

nombre. En effet, lorsque le domaine est partitionné en plusieurs blocs, certains ne contiennent que du fluide, et d'autre une portion de solide, qui demande plus de calculs.

### 5.2.2 Scalabilité forte

Pour le test de scalabilité forte nous mesurons la variation du temps nécessaire à la résolution d'un problème de taille fixe par rapport au nombre de processeurs. Plus précisément nous calculons le speedup  $s_i = t^0/t^i$ , où  $t^i$  est le temps d'exécution sur  $i$  processeurs. Idéalement,  $s_i = i$ .

Le problème étudié ici est le même que pour la mesure de la scalabilité faible, mais à résolution constante  $128^3$  et  $64^3$ . Le calcul est effectué sur  $2^i$ ,  $0 \leq i \leq 10$  processeurs et les résultats présentés sur la fig. II.26 sont la moyenne des résultats obtenus sur 3 exécutions différentes. On constate une très bonne scalabilité pour un domaine de taille  $128^3$ . Les résultats se dégradent jusqu'à 8 processeurs puis l'efficacité reste bonne jusqu'à 256 processeurs. La dégradation observée jusqu'à 8 processeurs peut s'expliquer par le fait que des communications s'ajoutent dans une direction dans chaque cas. En effet, pour 1 processeur, aucune communication n'est effectuée. Pour deux processeurs, des communications dans une direction sont effectuées. Pour 4 processeurs, des communication dans deux directions sont effectuées, et pour 8 des communications dans les trois directions sont effectuées. La scalabilité pour le domaine de taille  $64^3$  est bien sur plus affectée par les communications lorsque le nombre de processeurs augmente. Si l'on considère un domaine carré de côté  $n$ , la taille des blocs pour une exécution sur  $p$  pro-

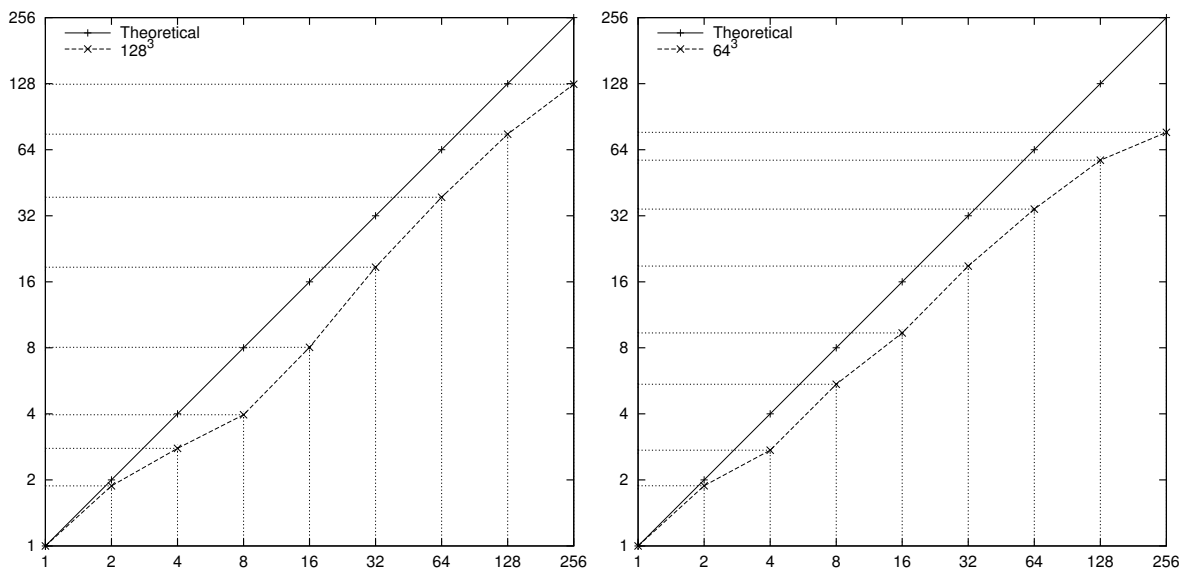


Figure II.26 – Scalabilité forte

cesseurs est de l'ordre de  $n^3/p$ , et le nombre de communications est de l'ordre de  $pn^2$ . On voit, par exemple en traçant le rapport  $\frac{pn^2}{n^3/p}$  fig. II.27, que lorsque le domaine est petit et le nombre de processeur grand, que la taille des communications prend le pas sur la taille des blocs, ce qui explique la perte de performance observée.

En effet, pour 256 processeurs les blocs sont de taille  $8 \times 8 \times 16 = 1024$  à comparer avec les variables de 1728 cellules à communiquer.

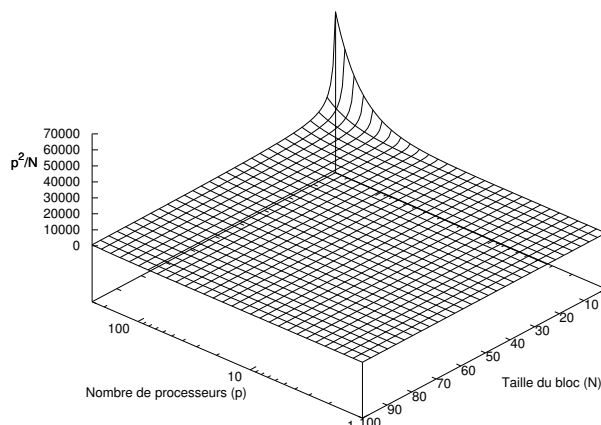


Figure II.27 – Rapport entre la taille des blocs et le nombre de communications pour  $p$  processeurs et un domaine de calcul de taille  $n^3$ .

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode numérique précise pour les écoulements autour d'obstacles rigides. Le fait d'adopter une démarche direction par direction facilite le passage en 3D, et l'utilisation d'une interpolation convexe entre un état visant à imposer la condition au bord à l'ordre 2 et un état fluide upwind permet de stabiliser le schéma. La validation sur un grand nombre de cas test montre une convergence à l'ordre 2 du schéma en deux dimensions pour des obstacles fixes. L'extension aux obstacles en mouvement montre de bons résultats comparés à l'expérience. Enfin, l'extension en 3D est aisée, et un code parallèle est développé. Comme le maillage cartésien permet un partitionnement trivial, l'attention est concentrée sur le passage des communications. Nous avons proposé un algorithme permettant de passer les communications durant les calculs ne nécessitant pas de les avoir reçues. Le code affiche de bonnes performances en terme de speedup, et des simulations préliminaires sont menées. Ce code nécessite encore un travail de validation afin de mesurer l'ordre de convergence en 3D sur des obstacles fixes ou en mouvement.





---

---

# Chapitre III

---

## Élasticité Eulérienne compressible : contexte et méthodes numériques

Dans cette deuxième partie de thèse on s'intéresse à la simulation numérique des écoulements multi-matériaux. Dans un premier temps nous introduisons le modèle d'élasticité non linéaire considéré. Ce modèle englobe les équations d'Euler. Numériquement, on peut donc adopter une approche multiphasique pour la simulation d'écoulements entre un solide élastique et un fluide compressible étant donné que seules les lois de comportement changent entre les différents milieux.

Des méthodes de résolution de la littérature pour ce type de problème seront présentés puis nous décrirons ensuite le schéma numérique permettant la résolution d'écoulements multimatériaux de manière non diffuse utilisé dans le chapitre IV.

### 1 Le modèle

On introduit brièvement le modèle d'élasticité eulérienne considéré dans cette thèse. Le lecteur peut se référer aux travaux originaux de Godunov [30] et Miller et Colella [52] ainsi qu'aux travaux plus récents de Cottet et al. [12] et Gavriluk et al. [22] et Iollo et al. [36] pour une description détaillée.

#### 1.1 Caractéristiques

On rappelle ou introduit les notations du tableau III.1. On considère  $\Omega_0$  le domaine occupé par un milieu continu dans la configuration de référence, et  $\Omega_t$  le domaine occupé par ce même milieu continu dans la configuration déformée au temps  $t$ , voir fig. III.1. Les caractéristiques directes  $X$  associent à chaque point matériel de la configuration de référence sa position dans

### Chapitre III. Élasticité Eulérienne compressible : contexte et méthodes numériques

---

$\rho$	densité	$\chi$	coefficient élastique
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse	$Y$	caractéristiques rétrogrades
$u$	composante $x$ de la vitesse	$\gamma$	ratio des chaleurs spécifiques
$v$	composante $y$ de la vitesse	$\Lambda$	vitesse des ondes élastiques
$T$	température	$c$	vitesse des ondes acoustiques
$p$	pression	$\varepsilon$	énergie interne par unité de masse
$e$	énergie totale par unité de masse	$s$	entropie

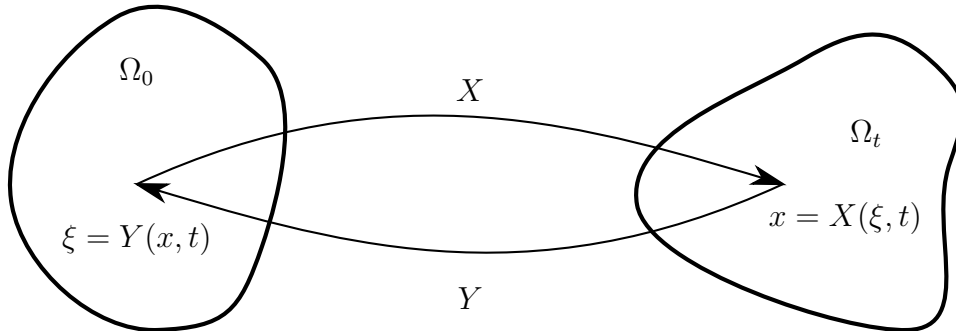
**Tableau III.1** – Notations.

la configuration déformée. Elles sont définies par :

$$X : \Omega_0 \times [0, T] \longrightarrow \Omega_t$$

$$(\xi, t) \mapsto X(\xi, t).$$

Le champ de vitesse sur la configuration déformée est donné par :



**Figure III.1**

$$u : \Omega_t \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, t) \mapsto u(x, t),$$

et les caractéristiques et le champ de vecteur sont liés par la relation :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(\xi, t) = \mathbf{u}(X(\xi, t), t) \\ X(\xi, 0) = \xi \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

En formulation eulérienne, nous travaillons avec des quantités sur la configuration déformée. Nous introduisons les caractéristiques rétrogrades qui permettent de décrire la déformation du

milieu continu dans la configuration déformée :

$$Y : \Omega_t \times [0, T] \longrightarrow \Omega_0$$

$$(x, t) \mapsto Y(x, t).$$

Les caractéristiques rétrogrades et directes sont liées par les relations :

$$X(Y(x, t), t) = x \tag{III.2}$$

$$Y(X(\xi, t), t) = \xi \tag{III.3}$$

En dérivant III.3 par rapport au temps, et en utilisant III.1, on obtient l'équation de transport des caractéristiques rétrogrades :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)Y = 0. \tag{III.4}$$

De plus, en dérivant III.2 par rapport à  $\xi$  ou III.3 par rapport à  $x$ , on obtient :

$$[\nabla_\xi X(\xi, t)] = [\nabla_x Y(x, t)]^{-1}. \tag{III.5}$$

Grâce à cette relation, nous pouvons exprimer en formulation eulérienne, dans la configuration déformée, les quantités qui dépendent du gradient de déformation  $\nabla_\xi X$  en formulation lagrangienne. Par exemple, la conservation de la masse en formulation lagrangienne :

$$\rho(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) = \rho(\xi, 0) \tag{III.6}$$

devient :

$$\rho(x, t) = \det(\nabla_x Y(x, t)) \rho(Y(x, t), 0). \tag{III.7}$$

## 1.2 Equations

Les équations qui régissent l'évolution de solides élastiques sont la conservation de la masse, de quantité de mouvement, d'énergie (décrites au chapitre I), et les équations de transport des caractéristiques rétrogrades III.4. Afin de travailler avec une formulation conservative, on

remplace cette dernière équation par son gradient. Les équations sont donc :

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ (\rho \mathbf{u})_t + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \sigma) = 0 \\ (\nabla_x Y)_t + \nabla_x (\mathbf{u} \cdot \nabla_x Y) = 0 \\ (\rho e)_t + \nabla_x \cdot (\rho e \mathbf{u} - \sigma^T \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

On notera que d'après l'équation III.7, le modèle présente une redondance entre les équations de conservation de la masse, et les équations de transport des caractéristiques. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre IV.

Pour fermer le système il est nécessaire de définir une loi de comportement.

### 1.3 Loi de comportement

Nous décrivons maintenant les lois de comportement que nous utilisons, pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [31]. Dans un milieu élastique, l'énergie interne par unité de volume notée  $W$  est une fonction du tenseur de déformation  $\nabla_\xi X$  et de l'entropie  $s$  :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_0} W(\nabla_\xi X(\xi, t), s(X(\xi, t), t)) \, d\xi, \quad (\text{III.9})$$

On note aussi  $\varepsilon$  l'énergie interne par unité de masse. Ces deux quantités sont reliées par la relation  $W = \rho_0 \varepsilon$  où  $\rho_0$  est la densité initiale.

En faisant le changement de variables  $\xi = Y(x, t)$ , on écrit l'énergie précédente dans la configuration déformée en formulation eulérienne :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega_t} W([\nabla_x Y]^{-1}(x, t), s(x, t)) \det(\nabla_x Y(x, t)) \, dx, \quad (\text{III.10})$$

L'énergie interne que nous considérons est soumis à deux hypothèses physiques. Le premier est le principe d'indifférence matérielle, autrement dit l'énergie est invariante par changement de référentiel galiléen. Le second est l'isotropie, c'est à dire que le matériau se comporte de la même façon dans toutes les directions. On peut montrer dans ce cas que l'énergie interne est une fonction qui dépend des invariants du tenseur de Cauchy-Green à gauche  $B$  défini par :

$$B = [\nabla_\xi X][\nabla_\xi X]^T = [\nabla_x Y]^{-1}[\nabla_x Y]^{-T}. \quad (\text{III.11})$$

De plus, nous faisons le choix de décomposer l'énergie interne en deux parties :  $\varepsilon_{\text{vol}}$  un terme

lié aux variations de volume (d'aire en 2D) et d'entropie, autrement dit un terme "hydrodynamique", et  $\varepsilon_{\text{iso}}$  un terme lié aux déformations élastiques à volume constant (type cisaillement) dépendant de  $\bar{B} = B/\det(B)^{1/2}$  ( $\det(\bar{B}) = 1$ ).

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{vol}}(\rho, s) + \varepsilon_{\text{iso}}(\bar{B}), \quad (\text{III.12})$$

La loi de comportement hydrodynamique correspond à un gaz général qui englobe Vander der Waals, stiffened gaz et gaz parfaits (décrit dans le chapitre I) :

$$\varepsilon_{\text{vol}}(\rho, s) = \frac{\kappa(s)}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho}, \quad (\text{III.13})$$

où  $\kappa(s) = e^{s/c_v}$ . On choisit la loi élastique de type Neo Hookéen pour la partie isochore :

$$\varepsilon_{\text{iso}}(\bar{B}) = \frac{\chi}{\rho_0} (\text{Tr}(\bar{B}) - 2) = \frac{\chi}{\rho} \left( (Y_1^1 - Y_2^2)^2 + (Y_2^1 + Y_1^2)^2 \right) \quad (\text{III.14})$$

où  $\chi$  est le coefficient élastique. De ces expression avec l'entropie on peut déduire les formules utilisées dans le code qui font intervenir les autres variables (pression, température...), voir chapitre I section 1.2.4.

## 1.4 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est donné par la variation d'énergie par rapport au tenseur des déformations, l'expression générale telle que l'on peut la trouver dans [31] est :

$$\sigma = -p(\rho, s)I + 2\chi \det(\nabla_x Y) \left( \bar{B} - \frac{\text{Tr}(\bar{B})}{2} I \right) \quad (\text{III.15})$$

et l'expression tous calculs faits est :

$$\sigma = -p(\rho, s)I + \chi \begin{pmatrix} (Y_2^1)^2 + (Y_2^2)^2 - (Y_1^1)^2 - (Y_2^1)^2 & -2(Y_1^1 Y_2^1 + Y_1^2 Y_2^2) \\ -2(Y_1^1 Y_2^1 + Y_1^2 Y_2^2) & -((Y_2^1)^2 + (Y_2^2)^2 - (Y_1^1)^2 - (Y_2^1)^2) \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

où  $Y_j^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x_j}$ . L'expression de la pression est :

$$p(\rho, s) = \kappa(s) \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - p_\infty - a\rho^2, \quad (\text{III.17})$$

## 1.5 Vitesse des ondes

Nous effectuons un splitting directionnel des équations. Dans la direction  $x$ , on a :

$$\Psi_t + F(\Psi)_x = 0, \quad (\text{III.18})$$

avec :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ Y_1^1 \\ Y_1^2 \\ Y_2^1 \\ Y_2^2 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F(\Psi) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 - \sigma^{11} \\ \rho uv - \sigma^{21} \\ uY_1^1 + vY_2^1 \\ uY_1^2 + vY_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ \rho eu - (\sigma^{11}u + \sigma^{21}v) \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

La vitesse des ondes correspond aux valeurs propres de la jacobienne du flux. Elles s'écrivent tous calculs faits, voir [31] :

$$\Lambda_E = \left\{ u - \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1 + \sqrt{\mathcal{A}_2}}{\rho}}, u - \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1 - \sqrt{\mathcal{A}_2}}{\rho}}, u, u, u + \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1 - \sqrt{\mathcal{A}_2}}{\rho}}, u + \sqrt{\frac{\mathcal{A}_1 + \sqrt{\mathcal{A}_2}}{\rho}} \right\}, \quad (\text{III.20})$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \chi((Y_{,1}^1)^2 + (Y_{,1}^2)^2 + (Y_{,2}^1)^2 + (Y_{,2}^2)^2) + \rho c^2/2 \\ \mathcal{A}_2 &= (\chi((Y_{,2}^1)^2 + (Y_{,2}^2)^2 - (Y_{,1}^1)^2 - (Y_{,1}^2)^2) - \rho c^2/2)^2 + 4\chi^2(Y_{,1}^1 Y_{,2}^1 + Y_{,1}^2 Y_{,2}^2)^2, \end{aligned}$$

et :

$$c^2 = \gamma \frac{p + p_\infty + a\rho^2}{\rho(1 - b\rho)}.$$

Lorsque  $\chi = 0$ , on retrouve l'expression de la vitesse des ondes pour un fluide  $u - c, u + c$ . Les conditions de stabilité du schéma numérique seront déterminées grâce à ces formules.

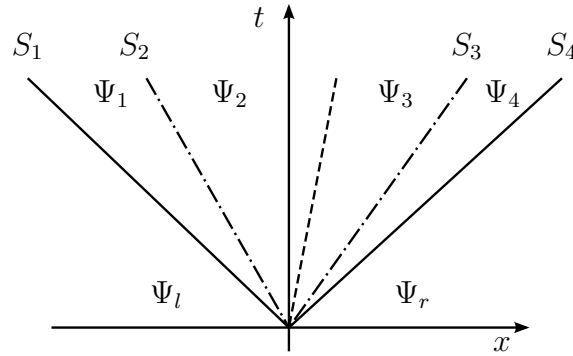
## 1.6 Solveur exact

Afin de valider les résultats numériques du chapitre IV, un solveur de Riemann exact à cinq ondes est mis au point. Le solveur décrit ici est basé sur celui développé dans [5], qui est une méthode itérative dont la solution converge vers la solution du problème de Riemann, c'est à

dire le système d'équations III.8 avec les conditions initiales :

$$\Psi(x, t = 0) = \begin{cases} \Psi_l \text{ si } x \leq x_0 \\ \Psi_r \text{ si } x > x_0, \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

où  $x_0$  est la position de la discontinuité au temps initial. La solution du problème de Riemann est composé de six états constants séparés par cinq ondes distinctes qui sont de gauche à droite : une onde longitudinale, une onde transversale, une discontinuité de contact, une onde transversale et une onde longitudinale, voir fig. III.2.



**Figure III.2** – Problème de Riemann pour le système (III.8) représenté dans le plan  $(x, t)$ . Les états constants sont notés  $\Psi_j$ , et la vitesse des ondes non linéaires  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$ . La ligne en pointillés est la discontinuité de contact.

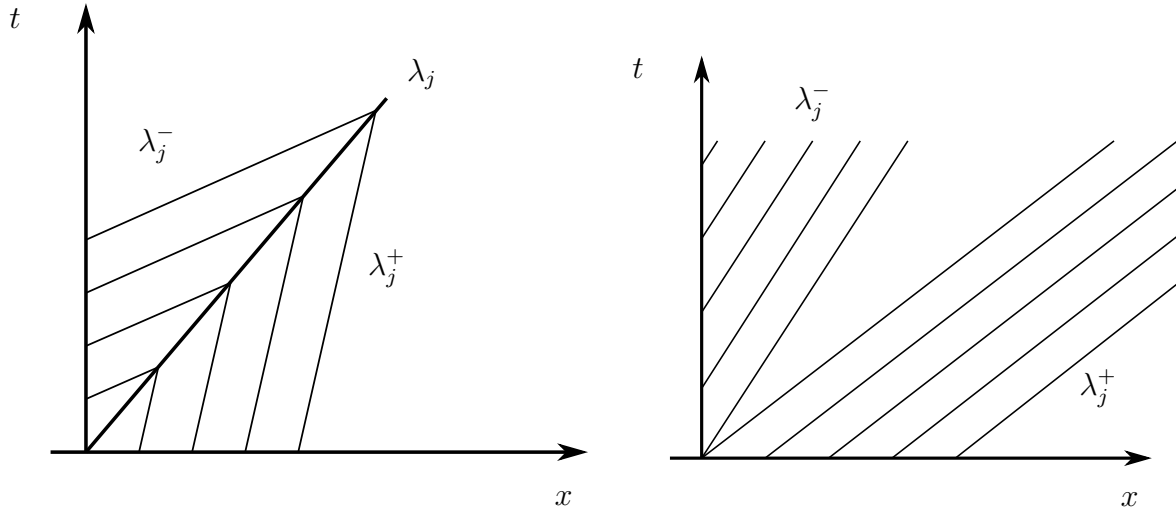
La solution à travers une onde est univoquement déterminée connaissant l'état d'un côté de l'onde et la vitesse de l'onde. Le principe de la méthode est de déterminer les états constants à travers chaque onde en partant des états  $\Psi_+$  et  $\Psi_-$  et en remontant jusqu'aux états de part et d'autre de la discontinuité de contact. L'erreur sur la vitesse et les contraintes est alors évaluée, des ajustements sur les vitesses des ondes sont effectués et les états sont à nouveau déterminés jusqu'à convergence des vitesses et contraintes à la discontinuité de contact. Décrivons plus en détail la procédure.

Étant donnée une estimation initiale de chaque état constant, le type d'onde est déterminé en calculant l'inclinaison des caractéristiques de part et d'autre de chaque onde :

$$\begin{cases} \text{L'onde est un choc si } |\lambda_+| < |\lambda_-| \\ \text{L'onde est une détente si } |\lambda_+| > |\lambda_-|, \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

où  $\lambda_+$  est la vitesse des caractéristiques du côté amont et  $\lambda_-$  la vitesse des caractéristiques du côté aval, voir fig. III.3.





**Figure III.3** – Structure des caractéristiques dans le cas d'un choc et d'une détente. La vitesse  $\lambda_+$  des caractéristiques amont est inférieure à la vitesse  $\lambda_-$  des caractéristiques aval pour un choc, et inversement pour une détente.

Ensuite, la vitesse des ondes est déterminée grâce aux relations de Rankine-Hugoniot dans le cas d'un choc :

$$s_j = \frac{F(\Psi_{j-1}) - F(\Psi_j)}{\Psi_{j-1} - \Psi_j} \text{ pour } 1 \leq j \leq 2 \quad (\text{III.23})$$

$$s_j = \frac{F(\Psi_{j+1}) - F(\Psi_j)}{\Psi_{j+1} - \Psi_j} \text{ pour } 3 \leq j \leq 5, \quad (\text{III.24})$$

où  $\Psi_0 = \Psi_l$  et  $\Psi_5 = \Psi_r$ . La vitesse des ondes correspond à la vitesse des caractéristiques III.20 de l'état aval dans le cas d'une détente :

$$s_j = \lambda_j \text{ pour } 1 \leq j \leq 2 \quad (\text{III.25})$$

$$s_j = \lambda_{j+5} \text{ pour } 3 \leq j \leq 4. \quad (\text{III.26})$$

Une fois que les types et vitesses des ondes sont connus, en partant de  $\Psi_l$  et  $\Psi_r$  les états  $\Psi_-$  peuvent être déterminés au travers de chaque onde. Dans le cas d'un choc on cherche la solution qui satisfait les conditions de Rankine Hugoniot :

$$R_s = F(\Psi_+) - F(\Psi_-) - s(\Psi_+ - \Psi_-) = 0. \quad (\text{III.27})$$

La solution  $\Psi_-$  de  $R_s = 0$  est approchée à la précision souhaitée grâce à une méthode de

Newton.

Pour une détente, nous utilisons la relation suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{r_j(\Psi)}{r_j(\Psi) \cdot \nabla_{\Psi} \lambda_j(\Psi)} \quad (\text{III.28})$$

où  $r_j$  représente la  $j$ -ème colonne de la matrice des vecteurs propres de droite et  $\lambda_j(\Psi_-) \leq \xi = \frac{x}{t} \leq \lambda_j(\Psi_+)$ . En partant de l'estimation de l'état aval  $\Psi_- = \Psi_j$ , on intègre la relation III.28 avec une méthode de RK4 pour obtenir la valeur amont  $\Psi_+(\Psi_j)$ . Cette valeur étant déjà connue, on cherche à résoudre :

$$R_r = \Psi_{j-1} - \Psi^+(\Psi_j) = 0 \text{ pour les ondes de gauche,} \quad (\text{III.29})$$

$$R_r = \Psi_{j+1} - \Psi^+(\Psi_j) = 0 \text{ pour les ondes de droite.} \quad (\text{III.30})$$

Comme pour les chocs, la solution  $\Psi_-$  de l'équation  $R_r = 0$  est approchée grâce à une méthode de Newton.

En pratique, l'expression de la jacobienne de la fonction flux est connue analytiquement et les vecteurs propres sont calculés numériquement grâce à la routine lapack DGEEV. La matrice  $\frac{\partial R_r}{\partial \Psi_-}$  est également calculée numériquement.

On peut ainsi déterminer chaque état jusqu'à la discontinuité de contact. On évalue l'erreur sur la continuité des vitesses et contraintes normales à travers la discontinuité de contact :

$$R_c = \begin{pmatrix} u_+(\Psi_2) - u_-(\Psi_3) \\ \sigma_+(\Psi_2)n - \sigma_-(\Psi_3)n \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{III.31})$$

Ce processus est englobé dans une méthode de Newton afin de résoudre III.31.

## 2 Résolution numérique

La méthode numérique utilisée pour discrétiser les équations est la même que celle décrite pour les équations d'Euler. Nous utilisons un schéma de type volumes finis, et une intégration en temps de type Runge-Kutta. Les flux aux interfaces sont déterminés grâce au solveur de Riemann approché HLLC [78] introduit par Toro. Nous le décrivons dans le cas des équations de l'élasticité compressible.

## 2.1 Solveur HLLC pour l'élasticité

Le solveur HLLC appliqué aux équations de l'élasticité compressible a été introduit dans les travaux de Gavrilyuk et al. [22] [18], on le retrouve également dans [31, 36]. Nous décrivons ici le solveur en une dimension d'espace, les particularités liées à la généralisation du solveur en 2D sera traitée dans le chapitre IV. L'idée du solveur HLLC est de ne considérer parmi les cinq ondes que comporte le problème de Riemann dans le cadre de l'élasticité seulement les deux ondes les plus rapides en valeur absolue ainsi que la discontinuité de contact, voir fig. III.4.

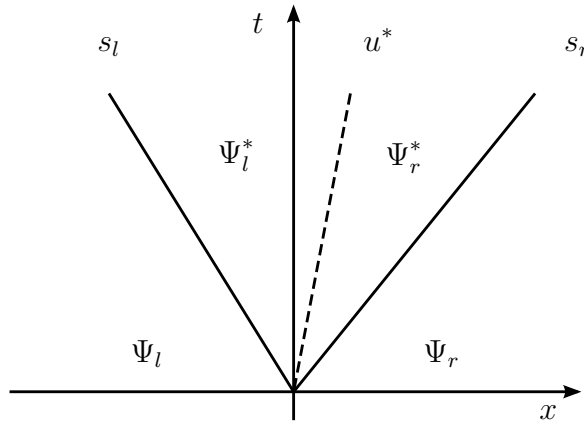


Figure III.4

De plus, les relations liant les états de la condition initiale  $\Psi_l$  et  $\Psi_r$  aux états intermédiaires  $\Psi_l^*$  et  $\Psi_r^*$  sont les relations de Rankine-Hugoniot. Autrement dit, les ondes les plus rapides sont considérées comme étant des ondes de choc. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 F(\Psi_l^*) - s_l \Psi_l^* &= F(\Psi_l) - s_l \Psi_l := Q_l \\
 F(\Psi_l^*) - u^* \Psi_l^* &= F(\Psi_r^*) - u^* \Psi_r^* \\
 F(\Psi_r^*) - s_r \Psi_r^* &= F(\Psi_r) - s_r \Psi_r := Q_r,
 \end{aligned} \tag{III.32}$$

où

$$\Psi_l^* = \begin{pmatrix} \rho_l^* \\ \rho_l^* u^* \\ \rho_l^* v^* \\ Y_{1,l}^{1,*} \\ Y_{1,l}^{2,*} \\ \rho_l^* e_l^* \end{pmatrix} \quad \Psi_r^* = \begin{pmatrix} \rho_r^* \\ \rho_r^* u^* \\ \rho_r^* v^* \\ Y_{1,r}^{1,*} \\ Y_{1,r}^{2,*} \\ \rho_r^* e_r^* \end{pmatrix} \tag{III.33}$$

sont les états intermédiaires considérés dans le solveur HLLC, et  $s_l$  et  $s_r$  sont des estimations

des vitesses des ondes, voir fig. III.4. Les équations III.32 permettent de calculer les états intermédiaires  $\Psi_l^*$  et  $\Psi_r^*$  avec lesquels est évalué le flux à l'interface  $F(\Psi(x/t = 0))$  :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} F(\Psi_l) & \text{si } s_l \geq 0 \\ Q_l + s_l \Psi_l^* & \text{si } s_l < 0 \leq u^* \\ Q_r + s_r \Psi_r^* & \text{si } u^* < 0 \leq s_r \\ F(\Psi_r) & \text{si } s_l \leq 0 \end{cases}$$

Des différences existent dans le calcul des états intermédiaires selon la nature des états initiaux. Les cas fluide-fluide, fluide-élastique et élastique-élastique seront décrit au chapitre IV.

Nous avons introduit le modèle ainsi que la méthode numérique utilisée afin d'approcher sa solution. Afin de prendre en compte plusieurs milieux différents de manière stable et précise, une méthode adéquate est nécessaire.

## 3 Méthodes de simulation d'écoulements multi-matériaux

Nous décrivons des méthodes permettant de simuler des écoulements multi-matériaux. Elles concernent les écoulements de deux fluides ayant des lois d'états différentes, et également des écoulements comportant des matériaux élastiques.

Nous les séparons en deux catégories : les méthodes d'interface non diffuses (sharp interface), et les méthodes d'interface diffuses.

### 3.1 Méthodes d'interface diffuse

Cette classe de méthode introduite notamment par Karni [38], Abgrall [1] et Saurel et Abgrall [70] permet de simuler des écoulements multimatériaux de manière robuste et sans oscillation. L'interface entre les différents matériaux est représentée par un changement dans la fraction massique ou volumique de chaque milieu. Il existe donc une zone de mélange artificielle au voisinage de la discontinuité de contact séparant les milieux de différente nature. La principale difficulté de ces méthodes est de définir des lois thermodynamiques physiquement, mathématiquement et numériquement consistantes dans la zone de mélange artificielle.

Dans [71], Saurel et al. proposent une méthode d'interface diffuse pour les écoulements multi-fluides compressibles non visqueux. Ils présentent un modèle de 6+1 équations mettant

### Chapitre III. Élasticité Eulérienne compressible : contexte et méthodes numériques

---

en jeu les fractions volumiques  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des deux fluides et deux pressions différentes  $p_1$  et  $p_2$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= \mu(p_1 - p_2), \\
 \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \varepsilon_1 u}{\partial x} + \alpha_1 p_1 \frac{\partial u}{\partial x} &= -p_I \mu(p_1 - p_2), \\
 \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \varepsilon_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \varepsilon_2 u}{\partial x} + \alpha_2 p_2 \frac{\partial u}{\partial x} &= p_I \mu(p_1 - p_2), \\
 \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 u}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 u}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2))}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \rho (Y_1 \varepsilon_1 + Y_2 \varepsilon_2 + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial u (\rho (Y_1 \varepsilon_1 + Y_2 \varepsilon_2 + u^2/2) + (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2))}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned} \tag{III.34}$$

où  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$  est la densité de mélange,  $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$  est la fraction massique,  $\mu$  est le paramètre de relaxation,  $p_I = \frac{Z_2 p_1 + Z_1 p_2}{Z_1 + Z_2}$  est la pression interfaciale et  $Z_k = \rho_k c_k$  est l'impédance acoustique du milieu  $k$ . La dernière équation est redondante mais est importante lors de la résolution numérique. Elle sert à corriger les erreurs dues à la formulation non conservative des équations sur l'énergie interne en présence de chocs. Numériquement, ce modèle est résolu en trois étapes :

1. étape hyperbolique : résolution des problèmes de Riemann du système III.34 à chaque interface entre les cellules,
2. étape de relaxation : à la fin du pas précédent, les pressions des deux milieux sont différentes, cette étape sert à restaurer l'équilibre mécanique,
3. étape de réinitialisation : après avoir déterminé les fractions volumiques et la pression de mélange, l'énergie interne est mise à jour avec les nouvelles valeurs de la pression.

Afin de garantir l'hyperbolicité de ce modèle, les fractions volumique doivent être strictement positives dans tout le domaine. Autrement dit, les phases ne sont pas totalement pures même loin de l'interface physique.

Cette méthode est très robuste, le même algorithme de résolution est utilisé dans tout le domaine sans avoir à suivre l'interface, et permet de faire apparaître des interfaces qui ne sont pas présentes initialement, comme par exemple dans la cavitation.

En contrepartie, l'interface est diffuse, et son épaisseur augmente au cours du temps. Le modèle comporte plus d'équations à discrétiser, dont certaines sous forme non-conservative, et

la résolution numérique nécessite plus d'étapes.

Après leurs travaux concernant le modèle hyperbolique d'élasticité isotrope ainsi qu'un solveur de Riemann permettant sa résolution [22], Gavriluyuk et al. présentent une méthode permettant de traiter les interactions entre solide élastique et fluide compressible [18] basé sur la méthode d'interface diffuse précédemment décrite.

Les principales différences concernent le traitement de la vitesse et des contraintes tangentielles dans le solveur de Riemann, ainsi que l'utilisation d'une méthode ghost fluid pour la bonne gestion de la vitesse transverse dans le cas d'une interface où intervient du glissement.

## 3.2 Méthodes d'interface non diffuse

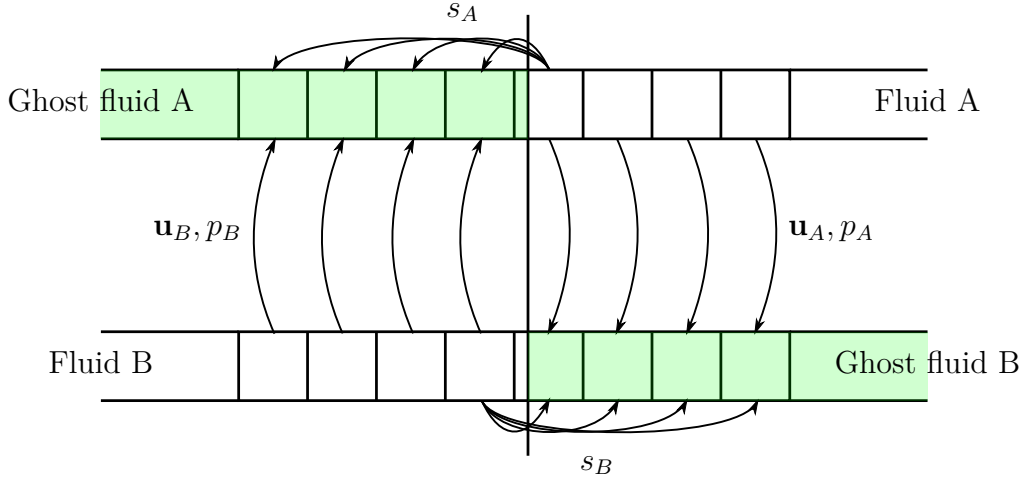
Pour cette classe de méthodes, l'interface entre des différents milieux reste une discontinuité au niveau numérique. Les méthodes lagrangiennes et ALE appartiennent naturellement à cette catégorie, mais nous ne décrivons que les méthodes cartésiennes utilisant une méthode level set dans cette partie. Une brève description des méthodes de Front Tracking et VOF est donnée dans la section 3 du chapitre I.

### 3.2.1 La méthode ghost fluid

Elle a été développée par Fedkiw [20], [19] afin de simuler l'évolution d'écoulements faisant intervenir plusieurs fluides non réactifs séparés par une interface. Le principe de cette méthode s'appuie sur le fait que l'interface qui sépare deux fluides est une discontinuité de contact. Par définition, la vitesse et la pression sont continues à travers une discontinuité de contact et au contraire, l'entropie est discontinue à travers cette interface. L'algorithme de la méthode ghost fluid consiste à créer dans chaque phase une bande de cellules fantômes proches de l'interface dont les variables se voient affecter les valeurs de vitesse et pression du fluide réel, et l'entropie du fluide voisin, voir fig. III.5.

Ensuite, la méthode numérique appliquée en un point du fluide A utilisera les variables contenues dans les cellules du fluide A et si le stencil contient des cellules du fluide B, ce sont les valeurs des cellules fantômes A qui sont utilisées à la place ; et de même pour le fluide B.

En 2D, comme la vitesse tangentielle est discontinue à travers une discontinuité de contact, les ghost cells reçoivent la composante normale du fluide réel présente dans la cellule, et la composante tangentielle du fluide voisin de la même manière qu'elles recevaient l'entropie en 1D.



**Figure III.5** – Schéma représentant la méthode ghost-fluid.

Cette méthode permet de traiter des écoulements entre des fluides de loi de comportement différent en conservant une interface non diffuse. La conservativité n'est plus assurée localement pour aucune des variables, mais la perte de conservativité décroît avec le maillage.

Abgrall et Karni dans [2] proposent une amélioration de la méthode développée par Fedkiw tant du point de vue du stockage des ghost cells que de la conservativité. À l'interface numérique des cellules concernées par le changement de signe de la fonction level set, disons les cellules  $i$  et  $i + 1$ , le flux numérique dépend des états droit et gauche, dont les lois d'état peuvent être différentes :

$$F_{i+1/2} = F(W_l, W_r, \gamma_l, \gamma_r). \quad (\text{III.35})$$

Leur méthode consiste à calculer deux flux distincts à l'interface, un pour chacun des deux fluides. Seules les constantes qui caractérisent le fluide sont modifiées, et non les variables. En effet, là où Fedkiw attribue la disparition des oscillations à l'extrapolation de l'entropie, Abgrall et Karni l'expliquent par l'utilisation d'une seule loi de comportement pour chaque calcul de flux. Les deux flux calculés à l'interface sont :

$$F_{i+1/2}^l = F(W_l, W_r, \gamma_l) \quad F_{i+1/2}^r = F(W_l, W_r, \gamma_r). \quad (\text{III.36})$$

Le flux  $F_{i+1/2}^l$  est utilisé pour mettre à jour la cellule  $i$ , et le flux  $F_{i+1/2}^r$  pour la cellule  $i + 1$ . On peut noter que grâce à cette formulation il n'y a pas de ghost cells à stocker, et les auteurs montrent que seule la conservativité de l'énergie n'est pas assurée, les flux de masse et de quantité de mouvement étant égaux à l'interface.

### III.3 Méthodes de simulation d'écoulements multi-matériaux

---

L'utilisation de solveurs de Riemann à l'interface afin d'améliorer les estimations de la vitesse et de la pression augmentent la robustesse de la méthode comme on peut le voir dans [17, 48]. Dans [48], Liu et al. proposent d'utiliser les états intermédiaires d'un solveur de Riemann approché à l'interface pour construire les variables des ghost cells, ils nomment leur méthode Modified Ghost Fluid Method (MGFM). La vitesse et la pression de la cellule fantôme correspondent à celles de l'état intermédiaire résultant du problème de Riemann à l'interface. L'entropie de l'état résultant du problème de Riemann situé entre l'onde non linéaire du côté du fluide résolu et la discontinuité de contact est affectée à la fois à la cellule fantôme et à la cellule fluide adjacente à l'interface. Les auteurs montrent une amélioration de la solution, notamment dans le cas d'interactions choc-interface.

Pour des interactions entre un fluide compressible et un fluide incompressible ou un solide, Fedkiw et al. [8, 19] proposent de modifier la méthode GFM. Au lieu de remplacer le calcul à l'interface entre des deux milieux différents par deux calculs dans un seul milieu en conservant les pression et vitesse normale de chaque milieu, les auteurs proposent de construire des états fantômes où la vitesse de l'interface est déterminée par le côté incompressible, et la pression est déterminé par le gaz. Les performances sont améliorées dans le cas air-eau, mais l'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas applicable aux cas air-air.

Dans [47], Liu et al. comparent les méthode GFM, GFM eau-air et MGFM pour des cas test 1D eau-air. Les auteurs montrent un net avantage pour la MGFM pour les cas très raides.

Un algorithme conservatif a été mis au point par Nguyen et al. [59]. Les auteurs appliquent cet algorithme aux détonations raides, cas pour lesquels une perte de conservativité pose des problèmes plus importants que dans le cas d'une discontinuité de contact par exemple. Le défaut de conservativité pour une variable  $\alpha$  est mesuré en soustrayant  $\alpha_{\text{new}}$  la valeur mise à jour après un pas de temps et en utilisant l'algorithme ghost fluid classique, et la valeur  $\alpha_{\text{old}} - \Delta t \Delta y (F^r - F^l) - \Delta t \Delta x (F^t - F^b)$ . Les erreurs de conservativité aux interfaces dues aux flux multivalués sont également mesurés et distribués de part de d'autre de l'interface en question. À ce niveau, les erreurs de conservation sont connues. Après une redistribution des erreurs, elles sont soustraites pour chaque cellule, rendant le schéma conservatif.

Dans [26], Glimm et al. proposent un autre algorithme conservatif utilisant la fonction level set. En 1D, le flux multivalué proche de l'interface physique est remplacé par un flux « dynamique », c'est à dire à travers une interface en mouvement à laquelle les conditions de Rankine Hugoniot sont satisfaites. La vitesse de l'interface est calculée comme étant la dérivée temporelle de sa position, la pression est déterminée par interpolation, et la densité est choisie afin de satisfaire les condition de Rankine Hugoniot.



### 3.2.2 Méthode multimatériaux HLLC

Cette méthode a été introduite dans [31] et c'est sur celle-ci que nous travaillons dans cette deuxième partie de thèse. L'interface est repérée grâce à une fonction level set. Le solveur HLLC précédemment décrit est utilisé, mais le calcul des flux change à l'interface. En effet, au lieu de calculer le flux à l'interface à partir de l'état intermédiaire du problème de Riemann en  $x/t = 0$ , deux flux sont calculés à partir des deux états intermédiaires de part et d'autre de la discontinuité de contact. L'un sera utilisé pour mettre à jour la cellule de gauche, et l'autre sera utilisé pour mettre à jour la cellule de droite.

Plus précisément, considérons que la fonction level set change de signe entre les cellules  $i$  et  $i + 1$ . À l'interface est défini le problème de Riemann  $RP(\Psi_l, \Psi_r)$ , où  $\Psi_l = \Psi_i$  et  $\Psi_r = \Psi_{i+1}$ . Le solveur HLLC appliqué à ce problème de Riemann fournit deux états intermédiaires  $\Psi_l^*$  et  $\Psi_r^*$ . Deux flux sont calculés à partir de ces états, pour les cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_i &= -\frac{F(\Psi_l^*) - F(\Psi_{i-1}, \Psi_i)}{\Delta x} \\ \frac{d}{dt}\Psi_{i+1} &= -\frac{F(\Psi_{i+1}, \Psi_{i+2}) - F(\Psi_r^*)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

Grâce à cette méthode, l'interface n'est pas diffuse. On note que ce schéma est localement non conservatif étant donné que  $F(\Psi_l^*) \neq F(\Psi_r^*)$ . On pourra vérifier par la suite que cette perte de conservativité est minimale étant donné que les forces et vitesses des ondes de choc sont bien calculées même dans des cas très sévères.

Les développements concernant le modèle et ce schéma numérique effectués dans le cadre de cette thèse sont présentés au chapitre IV.

## 4 Conclusion

Nous avons introduit le modèle d'élasticité non linéaire que nous allons utiliser. Ce modèle englobe les équations d'Euler, auxquelles est ajoutée l'équation de transport des caractéristiques rétrogrades. On a vu que ces équations comportaient une redondance avec l'équation de conservation de la masse, qu'il sera intéressant de surveiller lors des simulations numériques. En vue d'appliquer le schéma décrits dans le chapitre II il est nécessaire de disposer d'une méthode à interface non diffuse. La méthode multi-matériaux HLLC est à la base des travaux du chapitre IV.

---

---

# Chapitre IV

---

## Une méthode robuste pour les écoulements multi-matériaux

L'ordre deux en espace et en temps pour le modèle multi-matériaux est développé et implémenté, ainsi que quelques améliorations concernant la mise à jour des cellules changeant de milieu, et l'estimation de la vitesse des ondes du solveur HLLC. Puis, les test 1D de [36], effectués avec un solveur de Riemann exact à l'interface en raison de leur raideur, sont repris. Ensuite, des cas test 2D sont présentés, mettant en jeu des fluides de nature différente, ainsi que des écoulements élastique-fluide. Enfin, nous proposerons un algorithme permettant d'appliquer le schéma développé dans la première partie de la thèse aux écoulements multimatériaux afin de prendre en compte la position de l'interface avec plus de précision.

### 1 Schéma numérique en deux dimensions

La principale différence entre le solveur en 2D et celui en 1D décrit dans le chapitre III tient à la définition des variables  $Y_2^{1,*}$  et  $Y_2^{2,*}$ . En effet, en 1D, elles sont constantes en temps et en espace, alors qu'elles varient en 2D.

#### 1.1 Solveur pour deux états du même matériau

On rappelle les expressions des états intermédiaires du solveur HLLC appliqué au problème de Riemann  $RP(\Psi_l, \Psi_r)$  dans un contexte de splitting directionnel, dans la direction  $x$ . La vitesse de la discontinuité de contact est déterminée grâce à la relation :

$$Q_l - Q_r = \Psi_l^*(u^* - s_l) - \Psi_r^*(u^* - s_r), \quad (\text{IV.1})$$

et son expression est :

$$u^* = \frac{Q_l^2 - Q_r^2}{Q_l^1 - Q_r^1}. \quad (\text{IV.2})$$

Les états intermédiaires sont obtenus grâce aux relations :

$$\begin{aligned} F(\Psi_l^*) - s_l \Psi_l^* &= F(\Psi_l) - s_l \Psi_l := Q_l \\ F(\Psi_r^*) - s_r \Psi_r^* &= F(\Psi_r) - s_r \Psi_r := Q_r, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

leur expression est :

$$\rho_l^* = \frac{Q_l^1}{u^* - s_l} \quad \rho_r^* = \frac{Q_r^1}{u^* - s_r} \quad (\text{IV.4})$$

$$v_l^* = \frac{Q_l^3}{Q_l^1} \quad v_r^* = \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \quad (\text{IV.5})$$

$$Y_{1,l}^{1,*} = \frac{Q_l^4 - v_l^* Y_{2,l}^{1,*}}{u^* - s_l} \quad Y_{1,r}^{1,*} = \frac{Q_r^4 - v_r^* Y_{2,r}^{1,*}}{u^* - s_r} \quad (\text{IV.6})$$

$$Y_{1,l}^{2,*} = \frac{Q_l^5 - v_l^* Y_{2,l}^{2,*}}{u^* - s_l} \quad Y_{1,r}^{2,*} = \frac{Q_r^5 - v_r^* Y_{2,r}^{2,*}}{u^* - s_r} \quad (\text{IV.7})$$

$$\rho_l^* e_l^* = \frac{Q_l^6 + \sigma^{11} u^* + \sigma^{21} v_l^*}{u^* - s_l} \quad E_r^* = \frac{Q_r^6 + \sigma^{11} u^* + \sigma^{21} v_r^*}{u^* - s_r} \quad (\text{IV.8})$$

$$\sigma^{11,*} = \frac{Q_l^2 Q_r^1 - Q_l^1 Q_r^2}{Q_l^1 - Q_r^1} \quad \sigma^{21,*} = \frac{Q_l^3 Q_r^1 - Q_l^1 Q_r^3}{Q_l^1 - Q_r^1}. \quad (\text{IV.9})$$

Dans le cas d'un problème de Riemann entre deux milieux élastiques, les deux composantes de la vitesse sont continues à l'interface, et les équations (IV.5) sont remplacées par :

$$v^* = \frac{Q_l^3 - Q_r^3}{Q_l^1 - Q_r^1}. \quad (\text{IV.10})$$

Si l'on se réfère à un splitting dans la direction  $x$ , les variables  $Y_2^1$  et  $Y_2^2$  obéissent aux équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_2^1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial Y_2^2}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, ces deux variables restent discontinues à l'interface entre les deux cellules, elles ne sont pas transportées par le champ de vitesse, et aucune des ondes du problème de Riemann n'influence leur valeur. Les états intermédiaires qui garantissent la consistance entre

les équations IV.1 et IV.3 sont :

$$\begin{aligned} Y_{2,l}^{1,*} = Y_{2,r}^{1,*} &= \frac{Y_{2,l}^1 + Y_{2,r}^1}{2}, \\ Y_{2,l}^{2,*} = Y_{2,r}^{2,*} &= \frac{Y_{2,l}^2 + Y_{2,r}^2}{2}. \end{aligned} \tag{IV.11}$$

## 1.2 Solveur multi-matériaux

Pour le solveur multi-matériaux, en particulier dans le cas d'une interface entre un état fluide et un état solide élastique, il est important que les variables  $Y_j^i$  du fluide n'interagissent pas avec le solide. D'une part, ces variables géométriques ne sont pas utilisées dans le fluide. D'autre part, au niveau continu, les caractéristiques rétrogrades sont discontinues à l'interface car le fluide glisse sur le solide, voir fig. IV.1. Nous travaillons avec le gradient des caractéristiques rétrogrades, on s'attend donc à voir apparaître une masse de Dirac à l'interface. Afin que les caractéristiques rétrogrades du milieu fluide n'agissent pas sur le solide, il suffit de modifier IV.11 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Y_{2,l}^{1,*} = Y_{2,l}^1 & \quad ; \quad Y_{2,r}^{1,*} = Y_{2,r}^1, \\ Y_{2,l}^{2,*} = Y_{2,l}^2 & \quad ; \quad Y_{2,r}^{2,*} = Y_{2,r}^2. \end{aligned} \tag{IV.12}$$

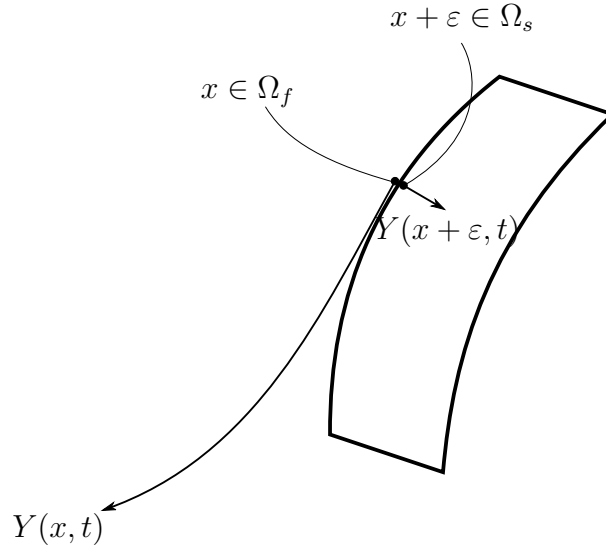
Pour dire les choses autrement, une formulation équivalente ayant l'avantage de conserver l'expression de l'état intermédiaire IV.11 est de créer des variables fantômes pour les variables géométriques  $Y_j^i$  du côté fluide, dans lesquelles seront copiées les variables du solide. Ceci correspond à un prolongement par continuité des variables géométriques du solide.

En ce qui concerne le tenseur des contraintes, lorsque l'un des états est fluide,  $\sigma^{21}$  étant nul dans le fluide et continu à l'interface, on impose  $\sigma^{21,*} = 0$ . Enfin, nous effectuons le remplacement de l'estimation de la vitesse des ondes :

$$\begin{aligned} s_l &= u_l - \Lambda_l \\ s_r &= u_r + \Lambda_r \end{aligned}$$

par l'approximation de Davis [14] :

$$\begin{aligned} s_l &= \min(u_l - \Lambda_l, u_r - \Lambda_r) \\ s_r &= \max(u_l + \Lambda_l, u_r + \Lambda_r), \end{aligned}$$



**Figure IV.1** – Illustration de la discontinuité des variables géométriques à l'interface entre un solide élastique et un fluide.  $\Omega_f$  représente le milieu fluide, et  $\Omega_s$  le milieu élastique.

ce qui améliore grandement la robustesse du schéma.

### 1.3 Définition des pentes

L'extension à l'ordre 2 en espace et en temps est implémenté. Nous utilisons un schéma de Runge Kutta 2 pour l'intégration en temps, et une reconstruction de pentes MUSCL pour l'ordre 2 en espace. Pour les cellules proches de l'interface séparant les deux milieux, le stencil servant à calculer la pente est coupé par l'interface. En utilisant le même type de procédure que décrit dans le chapitre II, nous proposons d'utiliser les états intermédiaires d'un problème de Riemann défini sans utiliser de pente. Plus précisément, si les cellules  $C_{ij}$  et  $C_{i+1j}$  n'appartiennent pas au même milieu et que l'on souhaite calculer la pente dans la direction  $x$  de la cellule  $C_i$ , nous avons besoin de définir les pentes  $s_{i-1/2}$  et  $s_{i+1/2}$ . La première n'est pas influencée par l'interface :  $s_{i-1/2} = \Psi_{ij} - \Psi_{i-1j}$ . Pour la seconde, nous utilisons l'état intermédiaire  $\Psi_l^*$  résultant du problème de Riemann  $RP(\Psi_{ij}, \Psi_{i+1j})$  résolu grâce au solveur multi-matériaux :

$$s_{i+1/2} = \frac{\Psi_l^* - \Psi_{ij}}{2}.$$

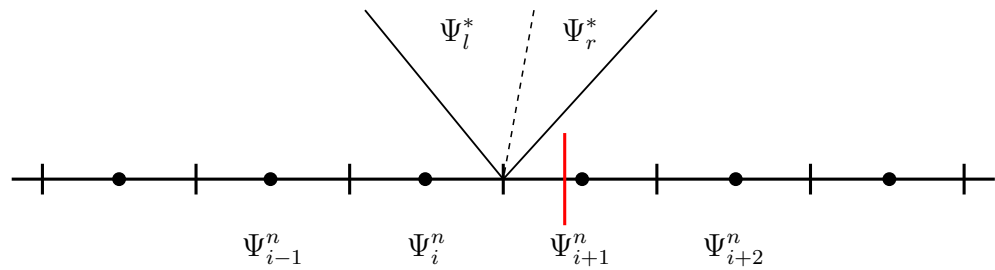
## 1.4 Mise à jour des cellules changeant de milieu

Le solveur multi-matériaux permet de traiter les interfaces séparant deux matériaux de manière non diffuse. Le passage d'un matériau à un autre lors du déplacement de la fonction level set au niveau discret doit donc être géré explicitement : lorsque l'interface physique franchit un centre de maille, le centre de maille en question change de milieu, et il est indispensable de mettre à jour ses variables en conséquence. L'algorithme employé est le suivant :

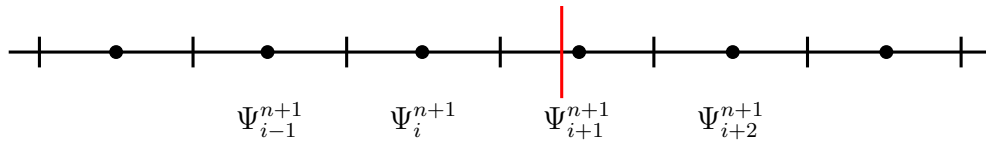
1. calcul des flux, y compris les flux à l'interface,
2. intégration,
3. déplacement de la level set,
4. mise à jour des variables ayant changé de milieu.

La méthode employée est d'utiliser les états intermédiaires du problème de Riemann à l'interface physique. Considérons la configuration géométrique selon laquelle l'interface se trouve entre les centres des cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$  au temps  $t_n$ , et entre les centres des cellules  $C_{i+1}$  et  $C_{i+2}$  au temps  $t_{n+1}$ . La cellule  $C_{i+1}$  a changé de milieu et le vecteur  $\Psi_{i+1}$  est écrasé par le vecteur  $\Psi_l^*$ , état intermédiaire du problème de Riemann en  $i + 1/2$  précédemment résolu lors du calcul des flux, voir fig. IV.2.

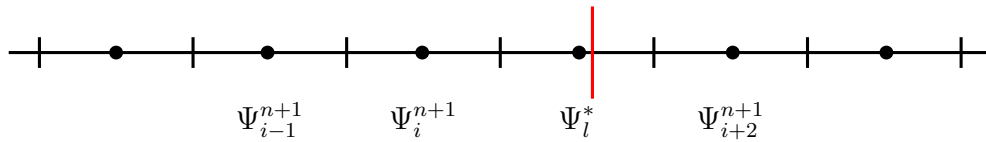
En deux dimensions, les états intermédiaires sont stockés pour chaque interface, et une cellule qui change de milieu est mise à jour grâce à la moyenne de ces états pour chaque interface à travers de laquelle la level set change de signe.



(a) Calcul des flux aux interfaces et sauvegarde des états intermédiaires du problème de Riemann à l'interface physique



(b) Mise à jour des variables



(c) Déplacement de la level set et mise à jour des cellules ayant changé de milieu

**Figure IV.2** – Algorithme utilisé pour la mise à jour des cellules passant d'un milieu à l'autre.

## 2 Résultats numériques

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus avec la méthode multi-matériaux. On procédera à des cas test 1D et 2D, fluide-fluide, élastique-élastique et élastique-fluide. En 2D, la fonction level set est transportée grâce à une méthode WENO5 [37].

### 2.1 Validations et cas test 1D.

Dans cette section nous exhibons les résultats de la méthode sur des cas test de type problème de Riemann. Dans la majorité des cas, la solution numérique est comparée à la solution exacte. Nous effectuons des tests fluide-fluide, solide-solide et solide-fluide.

#### 2.1.1 Fluide-fluide

Nous présentons quatre cas tests présentant une discontinuité en  $x_0$  sur un domaine  $[0, 1]$ . Le premier est un tube à choc contenant un seul fluide. Les conditions initiales et les paramètres du fluide sont présentés dans la table IV.1. Le deuxième cas test met en jeu deux gaz de constante polytropique différente et le troisième cas test est un tube à choc eau-air. Le quatrième cas test présente une discontinuité de vitesse transversale. Les trois premiers cas test sont effectués sur 1000 points, et le quatrième sur 100 points. La CFL est prise égale à 0.6.

TC	$\rho_l$	$\rho_r$	$u_l$	$u_r$	$v_l$	$v_r$	$p_l$	$p_r$	$\gamma_l$	$\gamma_r$	$p_{\infty,l}$	$p_{\infty,r}$	$x_0$	$t_{\text{end}}$
1	1	1	0	0	0	0	1000	0.01	1.4	1.4	0	0	0.5	0.012
2	1	1	0	0	0	0	500	0.2	1.4	1.6	0	0	0.5	0.01
3	1000	50	0	0	0	0	$10^9$	$10^5$	4.4	1.4	$6.8 \cdot 10^8$	0	0.7	$2.4 \cdot 10^{-4}$
4	1	1	0	0	100	0	$10^5$	$10^5$	1.4	1.4	0	0	0.5	$2.7 \cdot 10^{-3}$

Tableau IV.1 – Description des cas test fluide-fluide.

Les trois premiers cas test sont relativement sévères, les résultats montrent que l'interface n'est pas diffuse et aucune oscillation n'est à déplorer. L'utilisation de l'estimation de Davis pour la vitesses des ondes améliore fortement la robustesse du schéma (sans celle ci, le calcul échoue dès la première itération).

Les cas test 1 et 2 présentent de forts ratio de pression ainsi qu'une constante polytropique différente pour le cas test 2. Les résultats sont très satisfaisants même s'ils présentent les manifestations du problème d'« overheating » bien connu des méthodes ghost cells, voir fig. IV.3 et fig. IV.4.



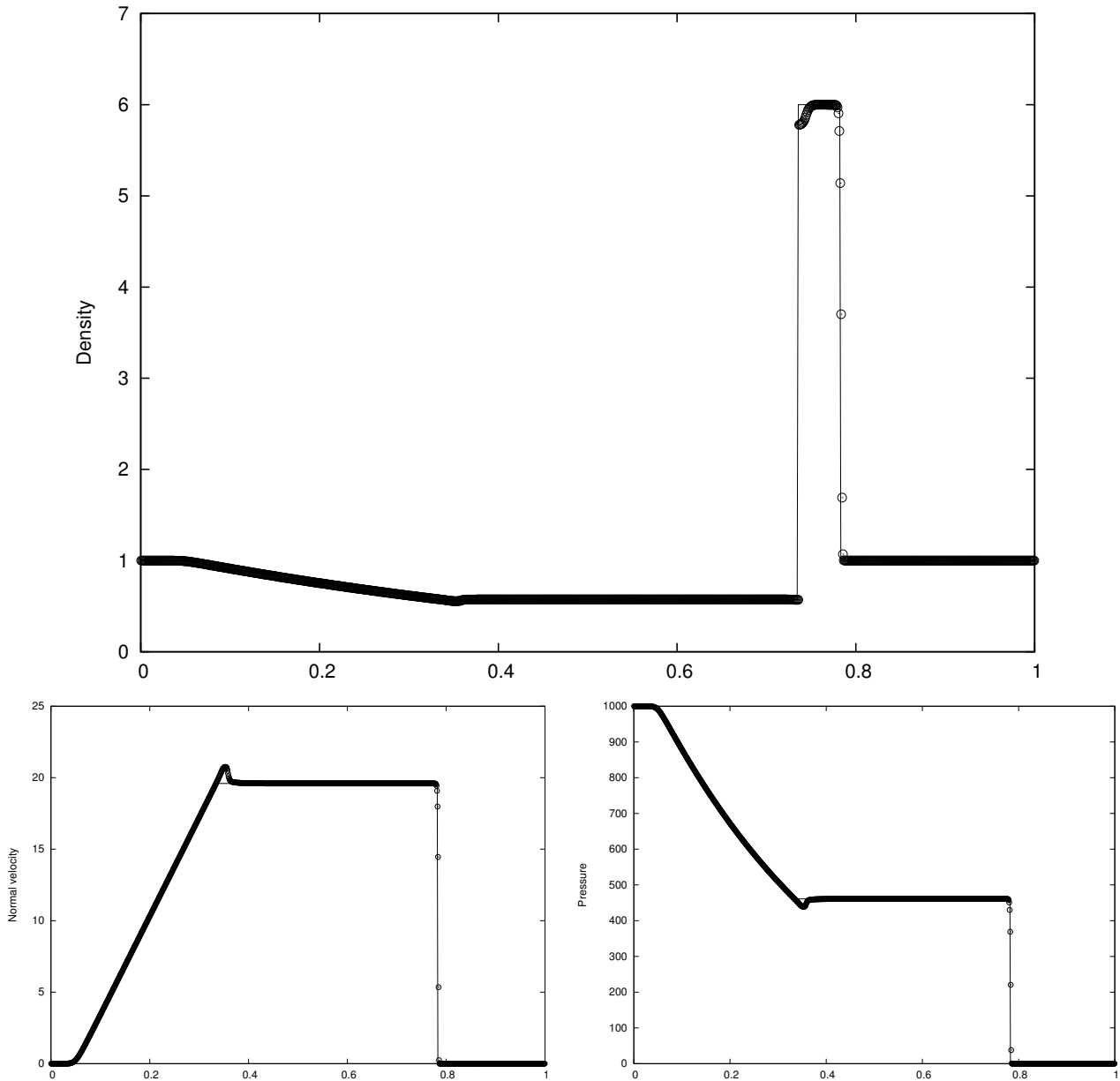


Figure IV.3 – Densité, vitesse et pression au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test fluide-fluide 1.

Le cas test 3 met en jeu des lois de comportement différentes : les constantes polytropiques sont différentes ainsi que le paramètre de gaz raide. Là encore, les résultats sont satisfaisants et sans oscillation, voir fig. IV.5.

Le cas test 4 montre que le schéma se comporte bien avec une discontinuité de vitesse tangentielle, voir fig. IV.6.

Pour tous ces cas test, la solution numérique est en très bon accord avec la solution exacte,

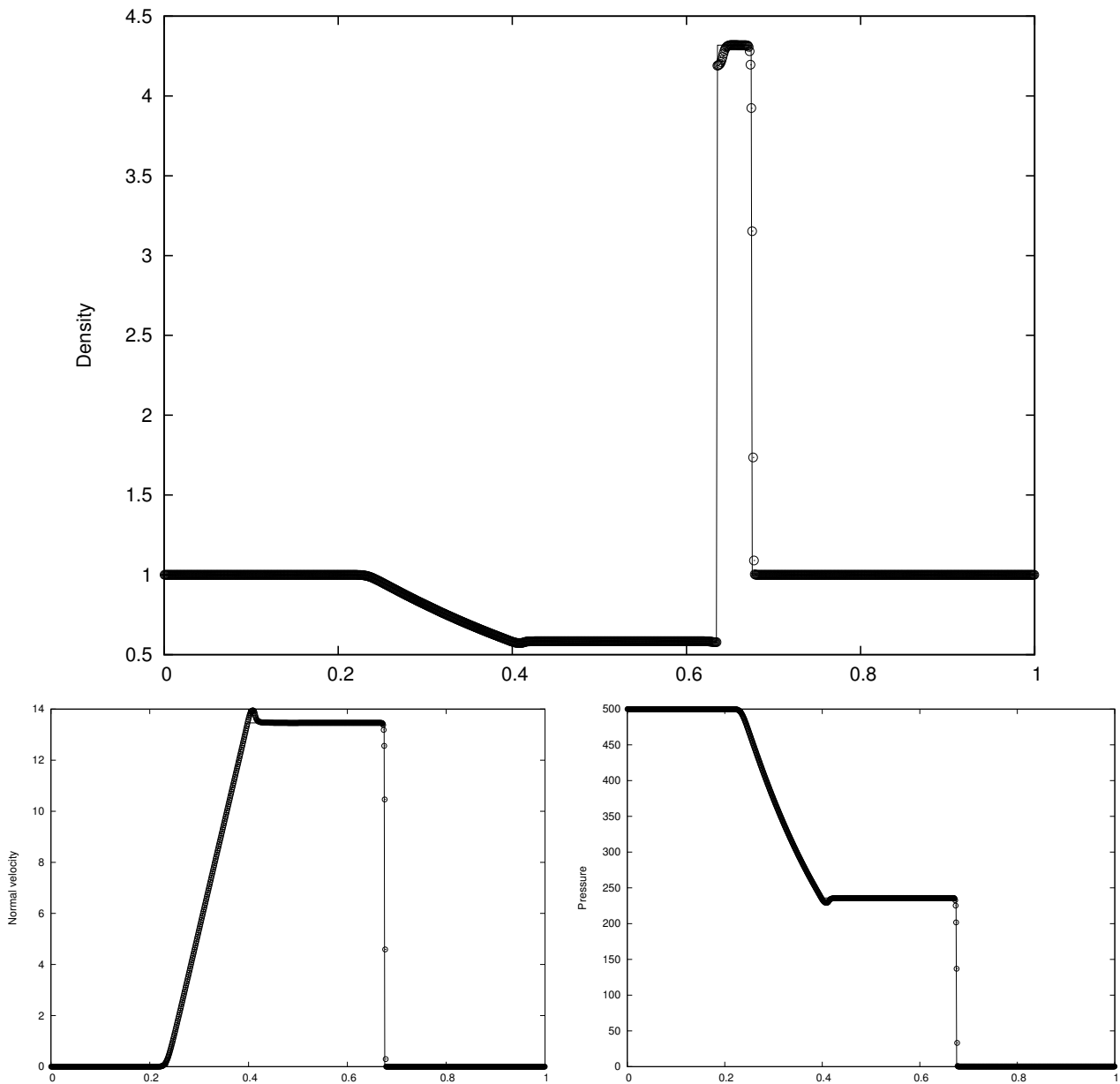


Figure IV.4 – Densité, vitesse et pression au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test fluide-fluide 2.

ne présente aucune oscillation, et la vitesse ainsi que l'amplitude des chocs sont correctes. Le schéma démontre clairement sa capacité à traiter des écoulements où sont présents de forts chocs sans détérioration des résultats.

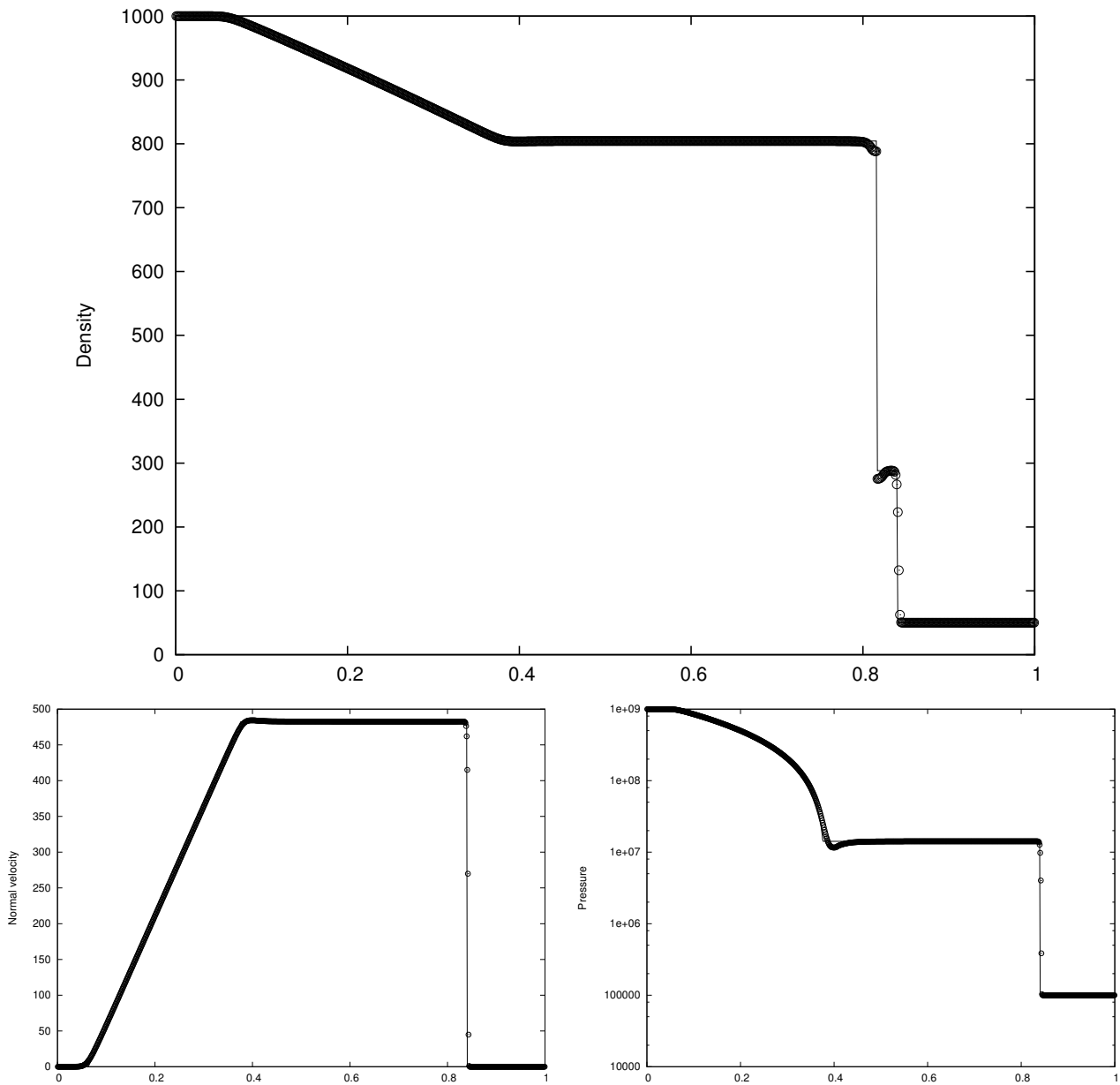
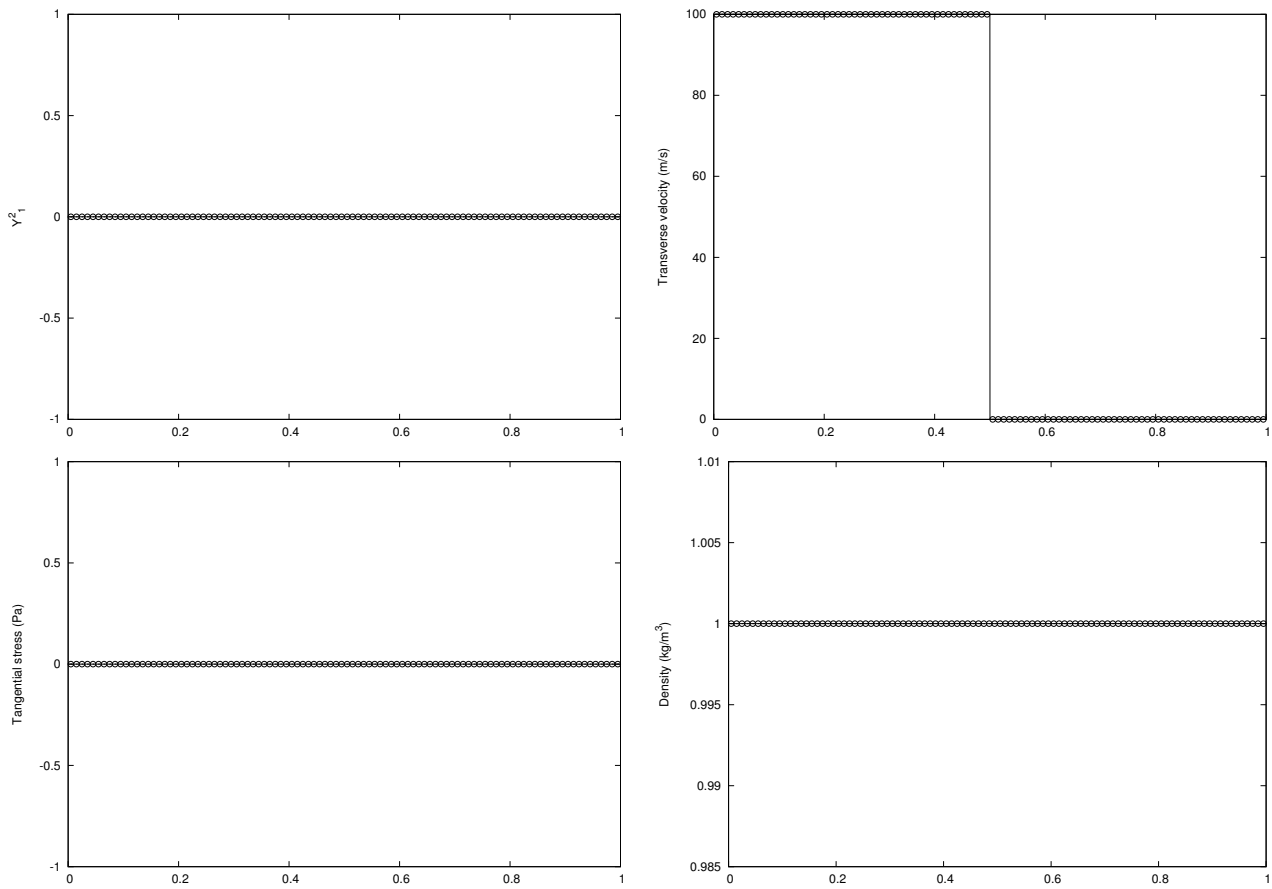


Figure IV.5 – Densité, vitesse et pression au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test fluide-fluide 3.



**Figure IV.6** –  $Y_1^2$ , vitesse tangentielle, contraintes tangentielles et densité au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test fluide-fluide 4.

### 2.1.2 Solide-solide

On considère un tube à choc contenant du cuivre au repos de densité  $8.9 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$ . Les paramètres caractérisant ce milieu sont  $\gamma = 4.22$ ,  $p_\infty = 3.42 \cdot 10^{10}$  et  $\chi = 5 \cdot 10^{10}$ . Une interface sépare une région à haute pression à gauche ( $10^9 \text{Pa}$ ) et une région à basse pression à droite ( $10^5 \text{Pa}$ ). Une discontinuité de la vitesse tangentielle est imposée :  $0 \text{m/s}$  à gauche et  $100 \text{m/s}$  à droite. L'interface est positionnée en  $x_0 = 0.5 \text{m}$ .

Un calcul sur une grille de 1000 points est effectué, et les résultats sont présentés sur la fig. [IV.7](#)

On peut voir avec ce cas test la structure en cinq ondes du problème de Riemann pour l'élasticité compressible. On distingue la discontinuité de contact qui sépare les deux matériaux, deux ondes relatives aux contraintes normales, ce sont les deux ondes les plus rapides en valeur absolue, et deux ondes de cisaillement moins rapides. Les contraintes normales et tangentielles ainsi que les vitesses normale et tangentielles sont continues à l'interface. La densité et la pression sont discontinues à l'interface.

La solution numérique est en très bon accord avec la solution exacte, et l'interface est non diffuse.

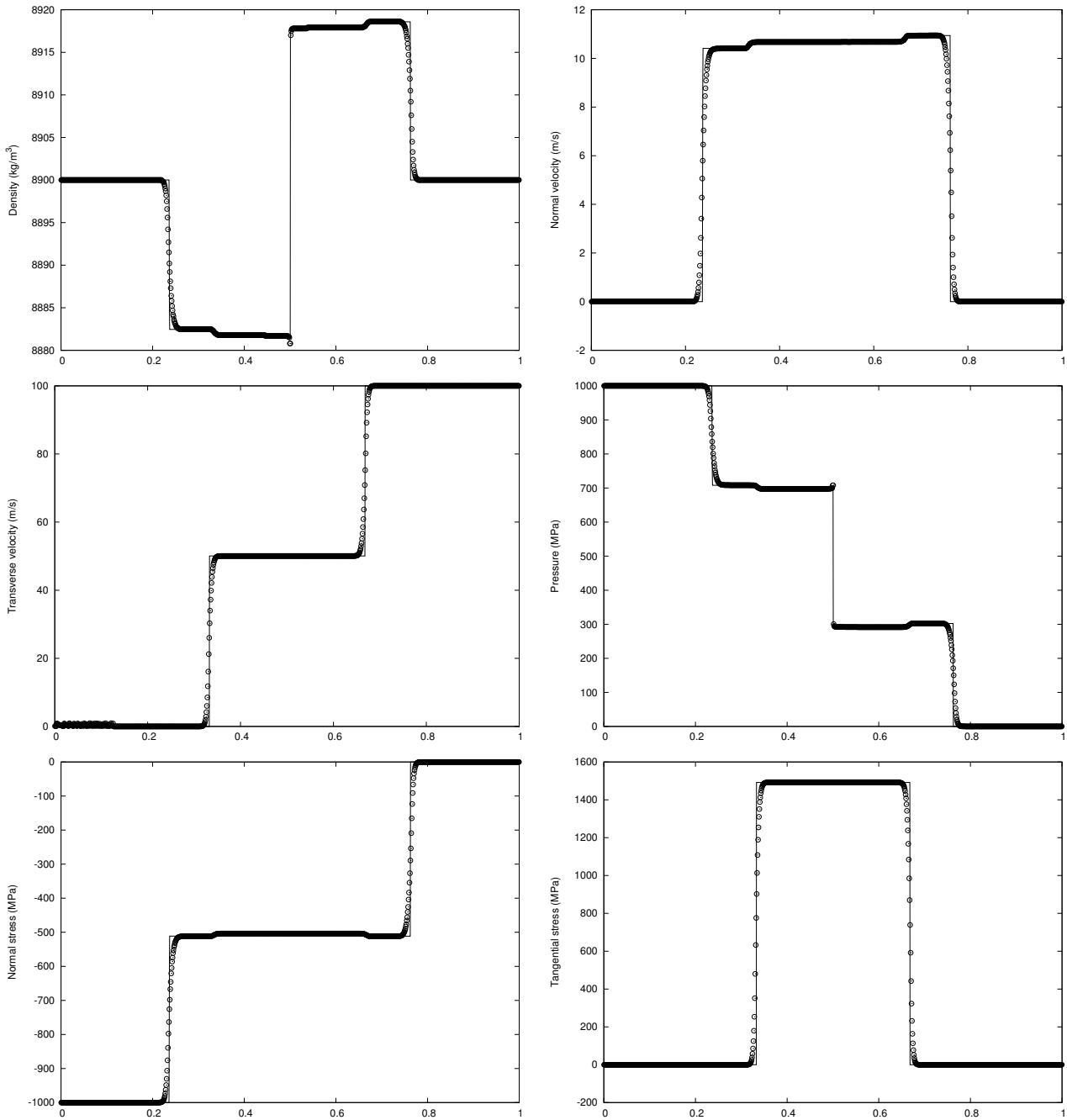


Figure IV.7 – Résultats au temps  $t_{end} = 4.6 \cdot 10^{-5}$  pour le cas test solide-solide.

### 2.1.3 Élastique-fluide

Nous présentons trois cas test mettant en jeu une interaction entre un solide et un fluide, voir la table IV.2. Le solide est caractérisé par les paramètres du cuivre :  $\rho = 8900\text{kg/m}^3$ ,  $p_\infty = 3.42 \cdot 10^{10}\text{Pa}$  et  $\chi = 9.2 \cdot 10^{10}\text{Pa}$ .

Le premier est l'advection d'une interface cuivre-air à vitesse uniforme ( $u = 1000\text{m/s}$ ) à la pression atmosphérique. Il est effectué sur 100 points.

Le deuxième cas test est un tube à choc contenant du cuivre à haute pression et de l'air à pression atmosphérique, les ratios de densité et de pression sont très grands. Le calcul est mené sur 1000 points.

Le troisième cas test est l'advection d'une interface cuivre-air à vitesse normale uniforme comprenant une discontinuité de la vitesse transversale. Les paramètres sont identiques au cas test 1 à l'exception de la vitesse tangentielle ( $v = 100\text{m/s}$ ) dans le cuivre.

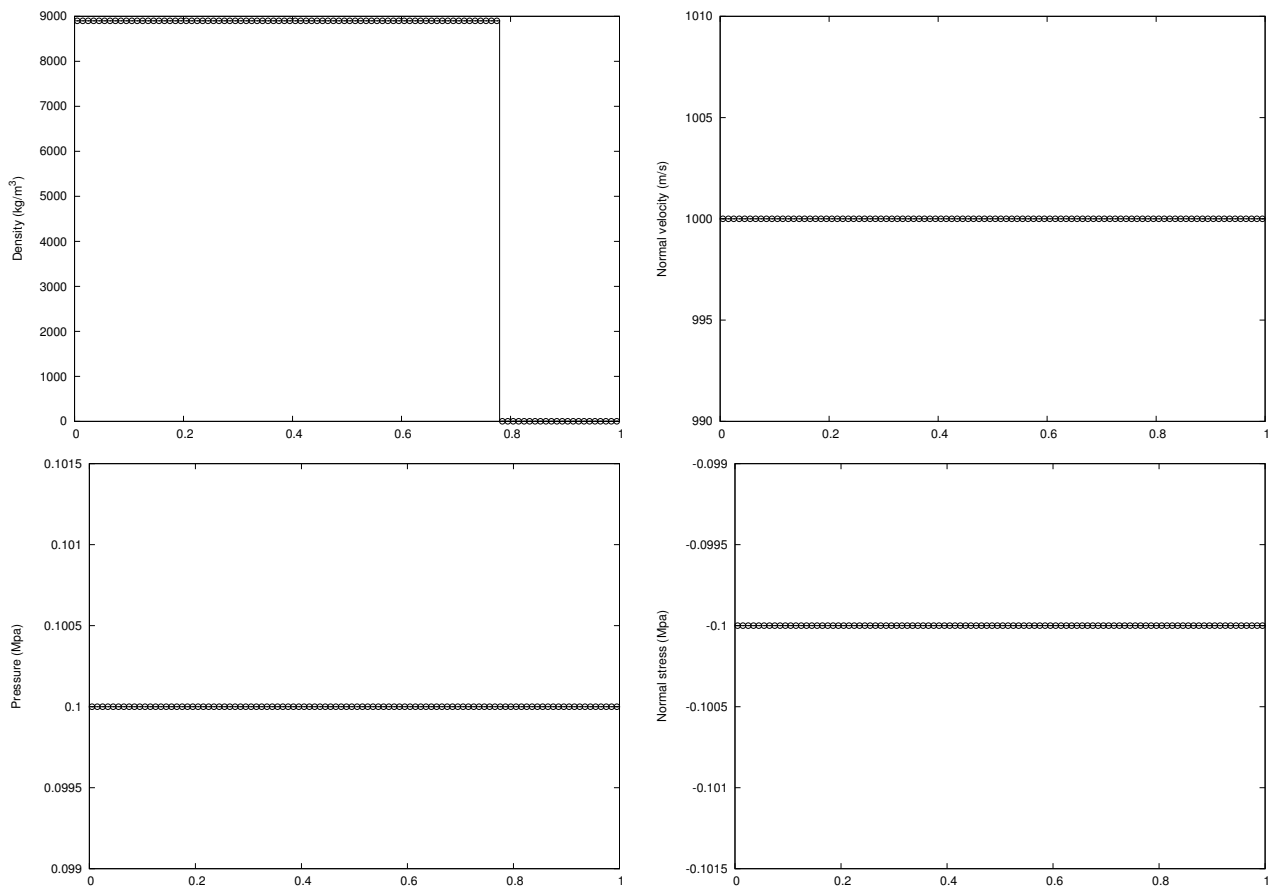
TC	$\rho_r$	$u_l$	$u_r$	$v_l$	$v_r$	$p_l$	$p_r$	$x_0$	$t_{end}$
1	1	1000	1000	0	0	$10^5$	$10^5$	0.4	$3.8 \cdot 10^{-4}$
2	50	0	0	0	0	$5 \cdot 10^9$	$10^5$	0.6	$8.7 \cdot 10^{-5}$
3	1	1000	1000	100	0	$10^9$	$10^5$	0.5	$1.5 \cdot 10^{-4}$

**Tableau IV.2** – Description des cas tests multi-fluide.

Le premier cas test, dont les résultats sont présentés sur la fig. IV.8, montre que l'interface est parfaitement transportée. Aucune oscillation n'apparaît et l'équilibre mécanique est préservé même en présence de très forts ratios de densité.

Le cas test 2 est un tube à choc très raide. On a d'un côté du cuivre à haute pression et de l'autre de l'air à pression atmosphérique. Les ratios sont donc de  $5 \cdot 10^4$  pour la pression et 200 pour la densité. Les résultats montrent l'excellente robustesse du schéma. La vitesse normale est continue à l'interface ainsi que les contraintes normales. La pression et la densité sont discontinues à l'interface restant nette. Une onde se propage dans l'air, elle est visible sur le tracé de la densité.

Le troisième cas test reprend la même configuration que le premier avec une discontinuité de la vitesse tangentielle à l'interface. Là encore, aucune oscillation, l'équilibre mécanique est préservé et l'interface reste nette.



**Figure IV.8** – Densité, vitesse, pression et contraintes normales au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test élastique-fluide 1.



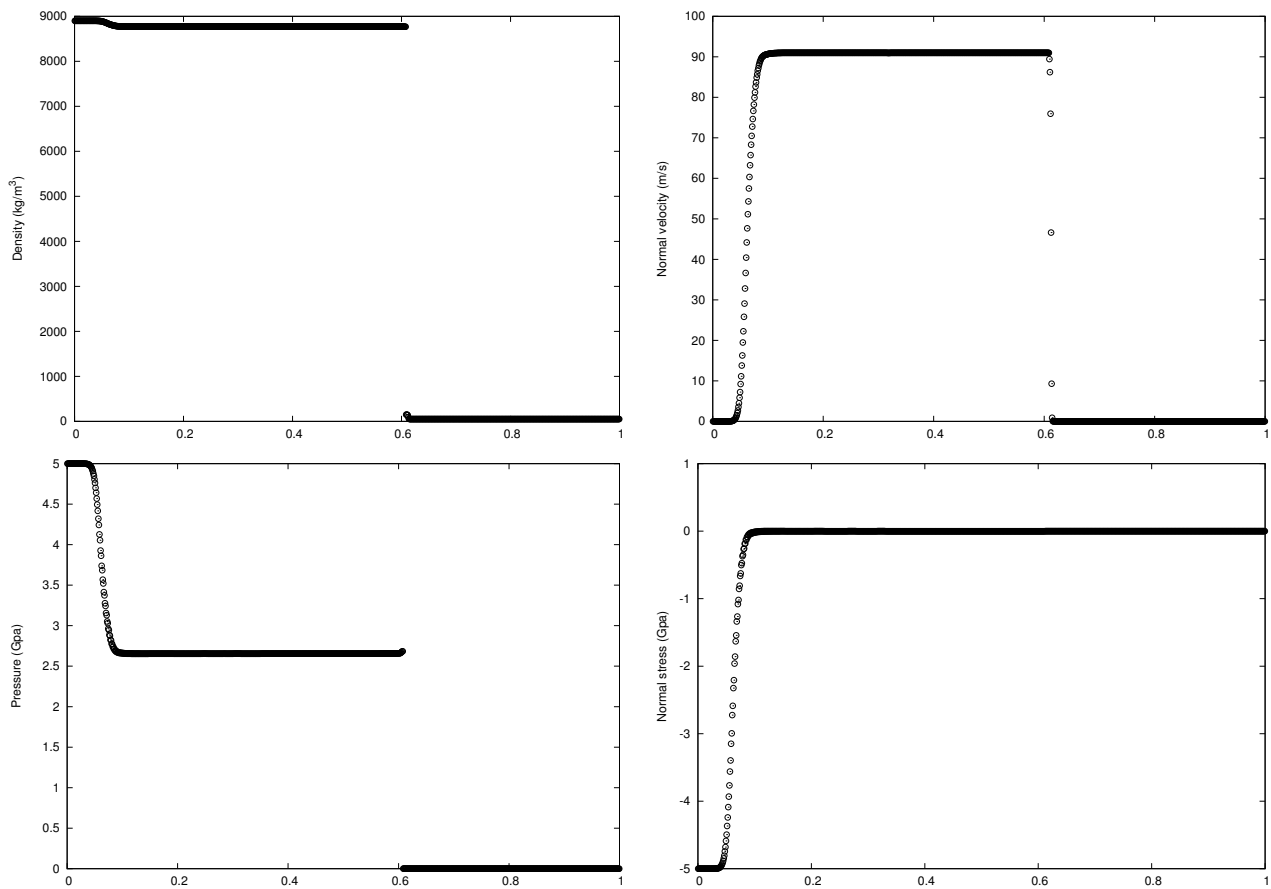
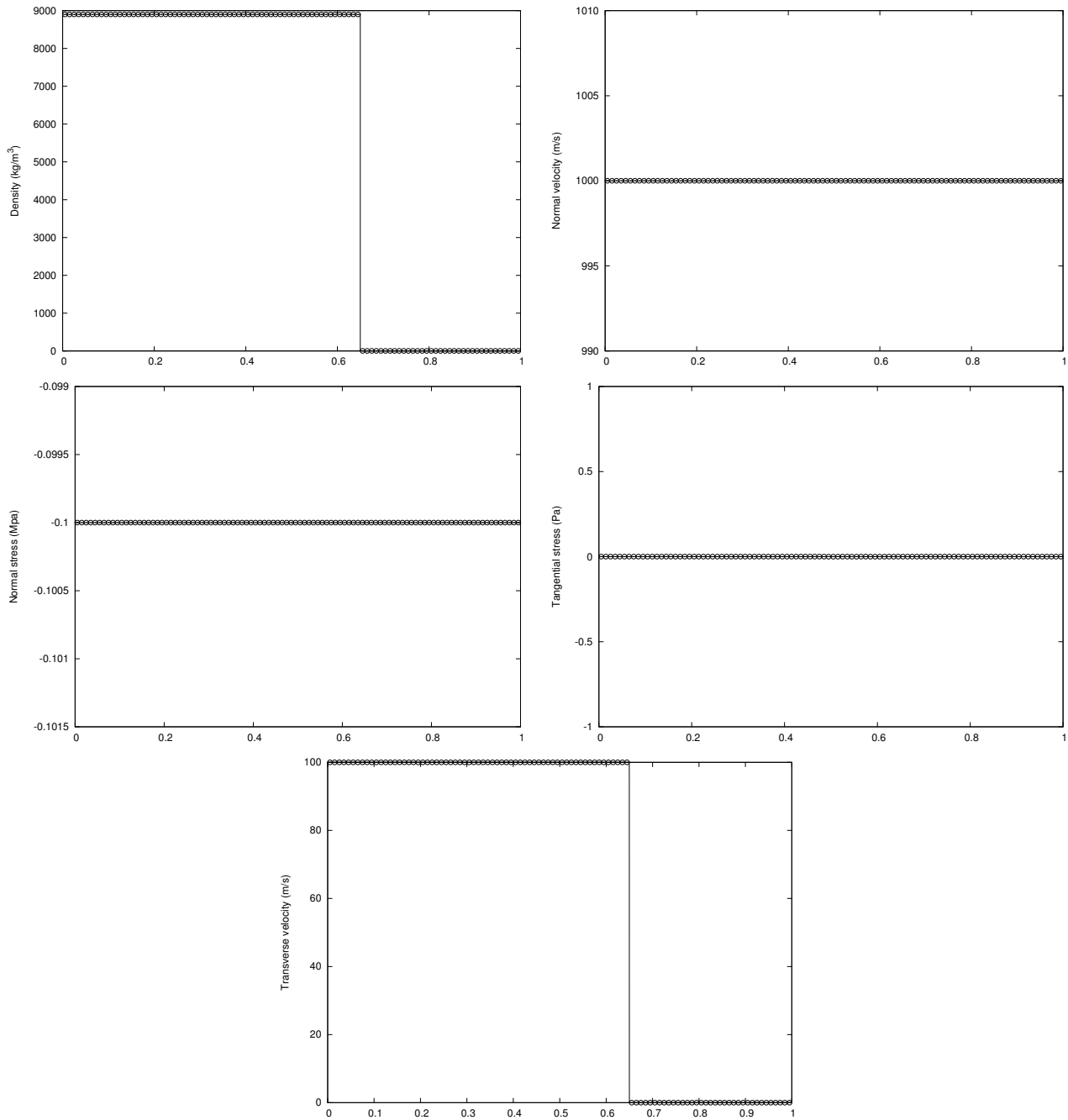


Figure IV.9 – Densité, vitesse, pression et contraintes normales au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test élastique-fluide 2.

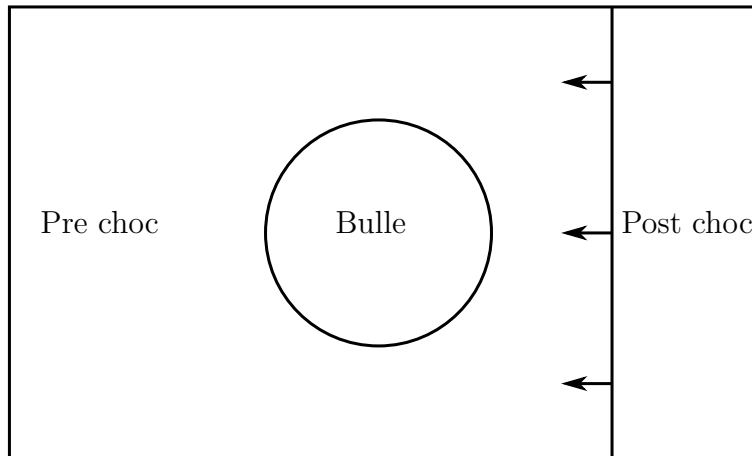


**Figure IV.10** – Densité, vitesse, contraintes normales et tangentielles et vitesse tangentielle au temps  $t_{\text{end}}$  pour le cas test élastique-fluide 3.

## 2.2 Simulations 2D

### 2.2.1 Fluide-fluide

Nous présentons deux cas test 2D d'interaction choc-bulle mettant en jeu deux fluides. Il est important de préciser que la tension de surface n'est pas prise en compte dans le modèle. Ainsi, l'interface présente des instabilités dont la taille change avec le maillage et les ruptures des structures les plus fines ne se produisent que pour des raisons numériques liées à la discrétisation (lorsqu'une structure devient plus petite que la taille d'une maille de calcul). Les calculs sont tout de même poursuivis après rupture des bulles afin de démontrer que la méthode numérique ne souffre pas de problème de stabilité lors de changements de topologie. La configuration initiale des deux cas test est représentée sur la fig. IV.11.



**Figure IV.11** – Configuration géométrique des deux cas test à l'instant initial.

Le premier est la propagation d'un choc à Mach=1.22 à travers une bulle d'hélium dans l'air. Ce cas test a été initialement proposé dans [67]. Le domaine de calcul est 445mm × 89mm, la bulle d'hélium a un diamètre de 50mm et est initialement située à (420mm,44.5mm), et le choc à l'instant initial est à une distance de 222.5mm du côté droit du domaine. Les conditions initiales sont :

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 100000) \text{ air pré-choc,} \\ (1.37636, -124.824, 0, 156980) \text{ air post-choc,} \\ (0.138, 0, 0, 100000) \text{ hélium.} \end{cases}$$

et les milieux sont caractérisés par :

$$(\gamma, a, b, p_\infty) = \begin{cases} (1.4, 0, 0, 0) \text{ air,} \\ (1.67, 0, 0, 0) \text{ hélium.} \end{cases}$$

Le calcul est effectué sur une grille de taille  $2000 \times 400$ . Des images Schlieren de l'écoulement à différents temps sont présentés en fig. IV.13. Ces images sont obtenues en traçant le champ de  $|\nabla\rho|$ . On utilise une échelle logarithmique afin de mettre en relief les variations internes à la bulle aussi bien que celles de l'air.

Cette simulation est en très bon accord avec la littérature, voir notamment [20, 67]. En effet on voit que l'onde de choc se propage plus vite dans la bulle d'hélium que dans l'air et on retrouve les structures caractéristiques lors des réflexions à l'intérieur de la bulle. Ensuite, la bulle se creuse, et deux chambres ne sont plus reliées que par un filament qui finit par se rompre.

Lorsqu'une structure plus fine que la taille d'une cellule passe entre deux centres de maille, l'iso-ligne zéro disparaît, et le fluide qu'elle contenait également. Ce processus est transparent lors de la simulation, la mise à jour est effectuée avec la méthode décrite dans le chapitre III.

Les deux ondes verticales en plus du choc résultent du fait que les conditions de Rankine Hugoniot ne sont pas exactement satisfaites à travers le choc. De la discontinuité initiale émergent alors 3 ondes. L'échelle logarithmique utilisée met en valeur ces ondes, mais leur amplitude reste petite.

Le second cas test met en jeu une bulle de gaz de Van der Waals et un gaz raide. Comme le cas test précédent, il s'agit d'une interaction entre un choc, ici à  $\text{Mach}=1.422$ , et une bulle. Le domaine de calcul est de taille  $1.2\text{m} \times 1\text{m}$ , et la bulle est de rayon  $0.2\text{m}$ . Ce cas test est beaucoup plus sévère que le précédent, en effet, les conditions initiales sont les suivantes :

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1000, 0, 0, 10^5) \text{ gaz raide pré-choc,} \\ (1230, -432.69, 0, 10^9) \text{ gaz raide post-choc,} \\ (1.2, 0, 0, 10^5) \text{ Van der Waals.} \end{cases}$$

et les milieux sont caractérisés par :

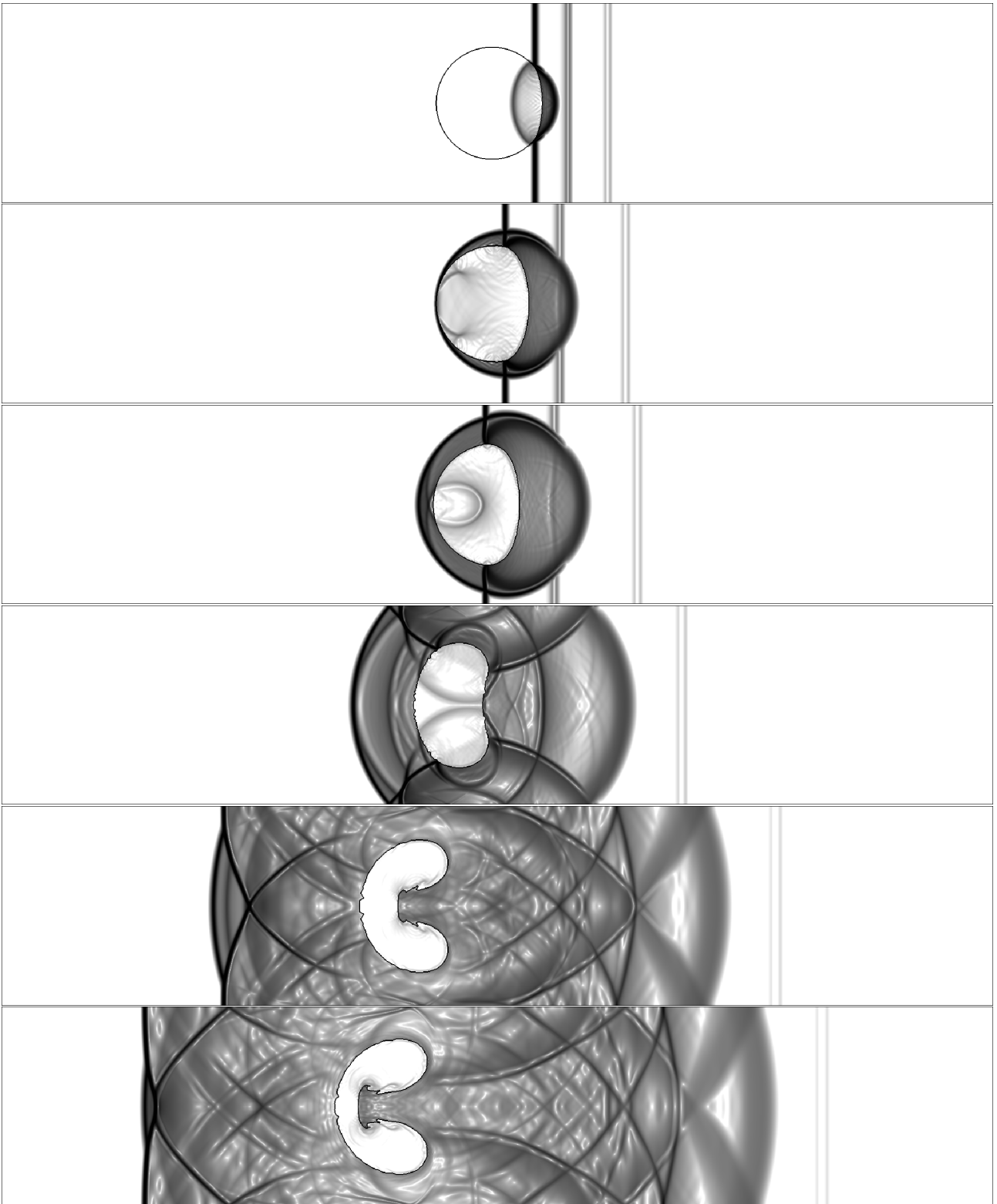
$$(\gamma, a, b, p_\infty) = \begin{cases} (4.4, 0, 0, 6 \cdot 10^8) \text{ gaz raide,} \\ (1.4, 5, 10^{-3}, 0) \text{ Van der Waals.} \end{cases}$$

## Chapitre IV. Une méthode robuste pour les écoulements multi-matériaux

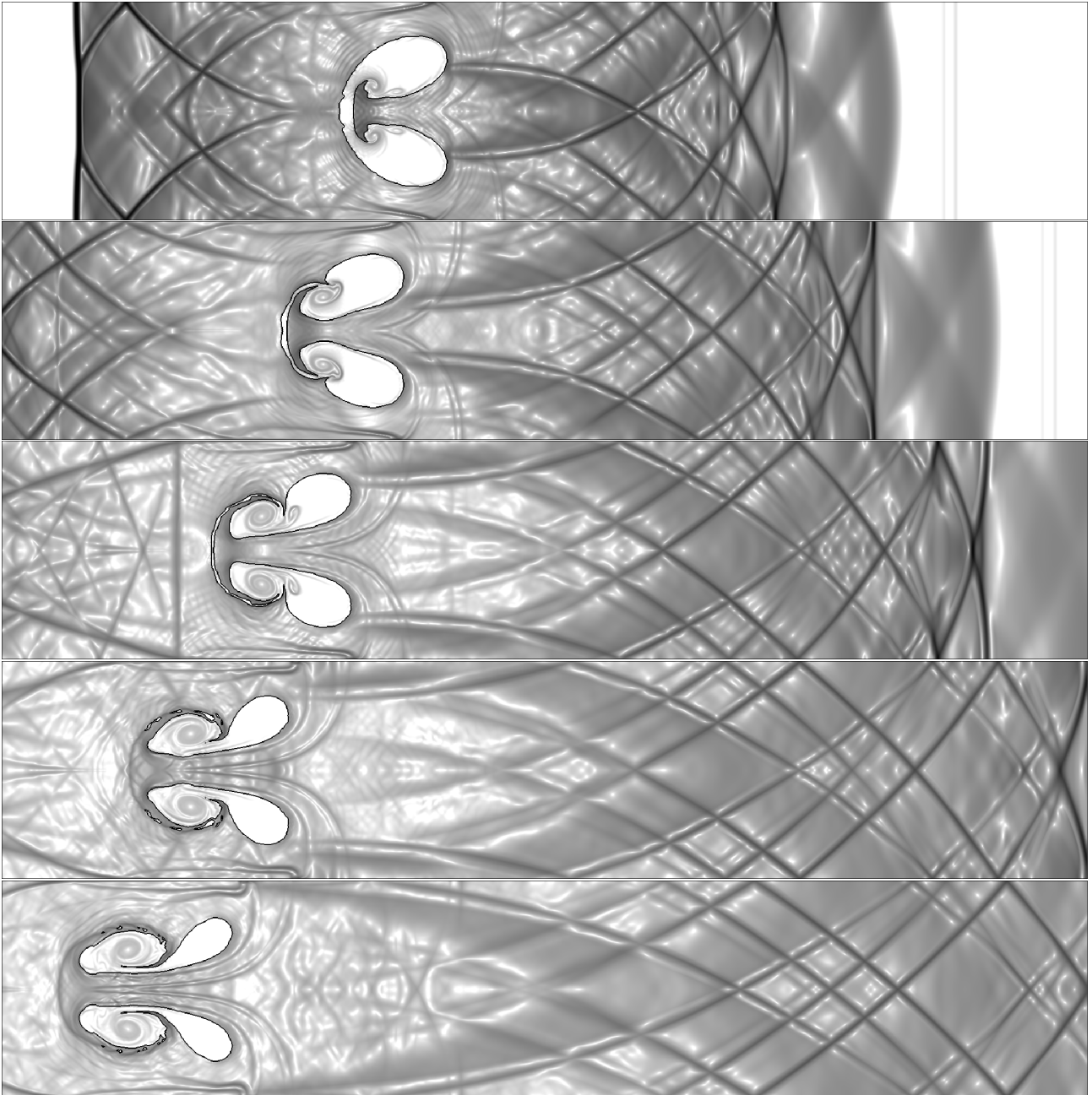
---

Le calcul est mené sur un maillage de taille  $480 \times 400$  et des images Schlieren de l'écoulement ainsi que la pression et la densité le long de la droite  $y = 0.5$  à différents temps sont présentés en fig. [IV.15](#).

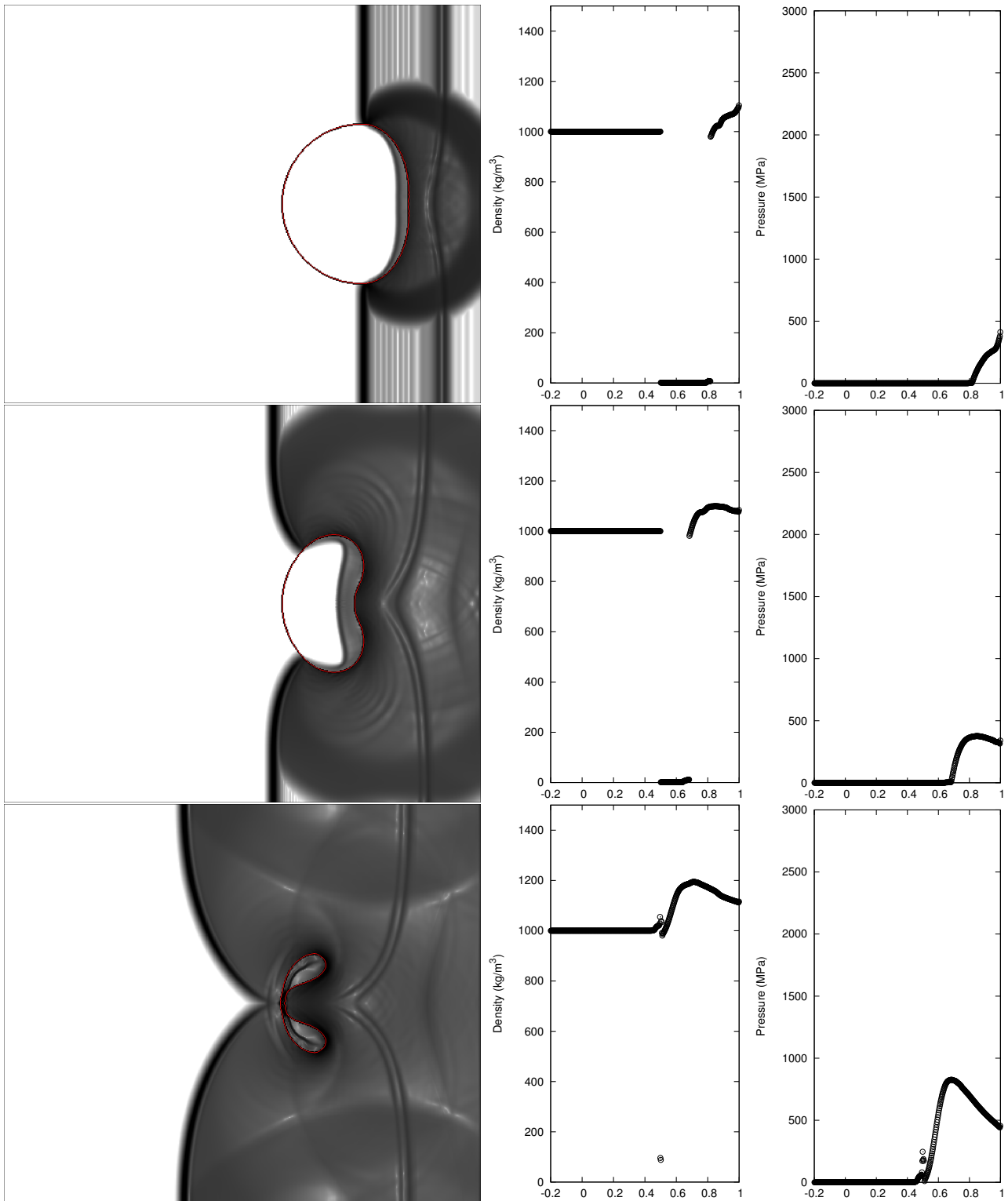
Cette simulation est en très bon accord avec la littérature, voir notamment Allaire et al. [\[3\]](#) et Shyue et al. [\[75\]](#). La bulle est fortement comprimée, se rompt et tourbillonne. Ce cas test démontre la robustesse du schéma en 2D.



**Figure IV.12** – Images Schlieren à  $t = 0.45, 0.75, 0.95, 1.6 \cdot 10^{-4}$ s pour l'interaction entre une bulle d'hélium et un choc dans l'air.

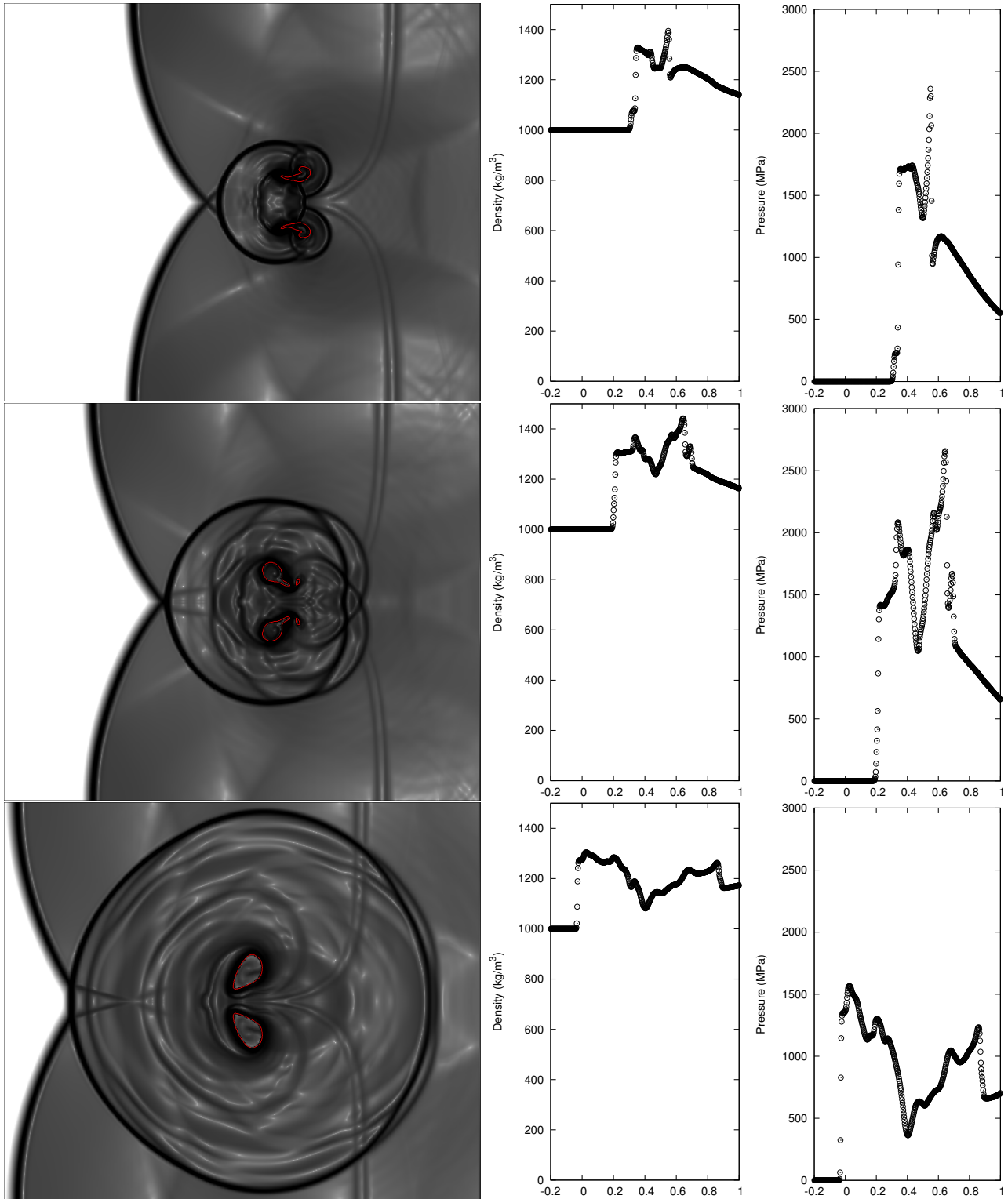


**Figure IV.13** – Images Schlieren à  $t = 4.7, 6.1, 7.9, 10 \cdot 10^{-4}$ s pour l'interaction entre une bulle d'hélium et un choc dans l'air.



**Figure IV.14** – Images Schlieren, coupes de densité et pression aux temps  $t = 1.06, 2.04, 3.01 \cdot 10^{-4}$ s pour l'interaction entre une bulle de gaz de Van der Waals et un choc dans un gaz raide. Le contour rouge représente l'iso-zéro de la fonction level set.





**Figure IV.15** – Images Schlieren, coupes de densité et pression aux temps  $t = 3.58, 4.06, 5 \cdot 10^{-4}$ s pour l'interaction entre une bulle de gaz de Van der Waals et un choc dans un gaz raide. Le contour rouge représente l'iso-zéro de la fonction level set.

### 2.2.2 Élastique-fluide

Nous présentons l'impact d'un projectile à 800m/s sur une plaque plane dans l'air. On retrouve ce cas test notamment dans [22] et dans [39]. À l'instant initial, le contact entre le projectile et la plaque est déjà effectué. La configuration initiale du cas test est représentée sur la fig. IV.16.

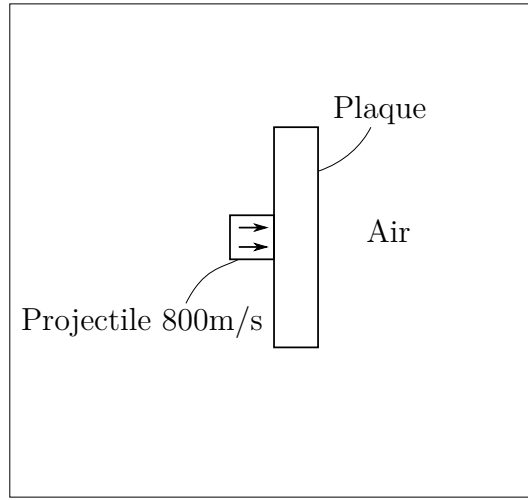


Figure IV.16 – Configuration géométrique à l'instant initial.

Les conditions initiales sont :

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 100000) \text{ air,} \\ (8900, 0, 0, 100000) \text{ plaque plane,} \\ (8900, 800, 0, 100000) \text{ projectile.} \end{cases}$$

et les milieux sont caractérisés par :

$$(\gamma, a, b, p_\infty, \chi) = \begin{cases} (1.4, 0, 0, 0, 0) \text{ air,} \\ (4.22, 0, 0, 3.42 \cdot 10^{10}, \chi_j) \text{ projectile et plaque plane.} \end{cases}$$

On procédera à trois calculs avec  $\chi_1 = 5 \cdot 10^{10}$ Pa qui correspond au cas où le projectile et la plaque sont composés de cuivre,  $\chi_2 = 5 \cdot 10^8$ Pa qui correspond à des matériaux plus souples et enfin  $\chi_3 = 0$  qui correspond à la limite fluide. Tous sont effectués sur un maillage de  $1000^2$ .

Sur la fig. IV.17, on peut voir différentes images Schlieren de l'écoulement pour le paramètre d'élasticité  $\chi_1$ . On voit l'onde se propager dans la plaque puis dans l'air. Le matériau élastique se déforme peu et oscille autour de sa configuration de référence. Ceci est en bon accord avec

la littérature, voir [22, 39]. Dans la simulation de Gavriilyuk et al.[22], on voit que l'onde dans l'air semble se propager plus vite qu'elle ne le devrait, et selon des directions qui semblent influencées par la présence d'une petite quantité de solide mélangé à la phase gazeuse. Des filaments s'échappent des coins de la plaque. Ici, la phase gazeuse est pure, et les ondes se propagent sans subir de perturbation.

Des images de la simulation avec le coefficient élastique  $\chi_2$  sont présentées sur la fig. IV.18. Le matériau se déforme beaucoup plus que dans le cas précédent. Lors de cette simulation, l'interface subit des instabilités importantes. Il existe peu de simulations similaires dans la littérature. Celle menée dans [22] ne présente pas d'instabilités, mais l'interface est diffuse. Il serait intéressant de disposer de plus d'éléments de comparaison afin d'effectuer une analyse plus précise. La simulation de [39] est effectuée sur peu de points en raison du traitement lagrangien, une comparaison paraît difficile.

Sur la fig. IV.19, on peut voir différentes images Schlieren de l'écoulement pour le paramètre d'élasticité  $\chi_3$ . Ceci correspond à la limite fluide. La plaque et le projectile sont totalement déformés par l'impact, aucune force ne les rappelle vers leur configuration d'origine. L'allure de la solution est qualitativement en bon accord avec [22], bien que les deux fluides se mélangent de manière significative dans la simulation de Gavriilyuk et al.

Sur la fig. IV.20, on peut voir le champ de  $|\rho/\rho_0 - \det \nabla Y|$  à l'intérieur du solide ainsi que son évolution dans le temps en différentes normes. Les résultats montrent que le cas qui présente la plus grande raideur souffre d'erreurs bien inférieures au cas le moins raide. Pour le cas le plus raide, les erreurs sont produites aux singularités géométriques dès le début lors de l'impact, et restent faibles ailleurs. Dans les deux cas, les erreurs se stabilisent en temps.

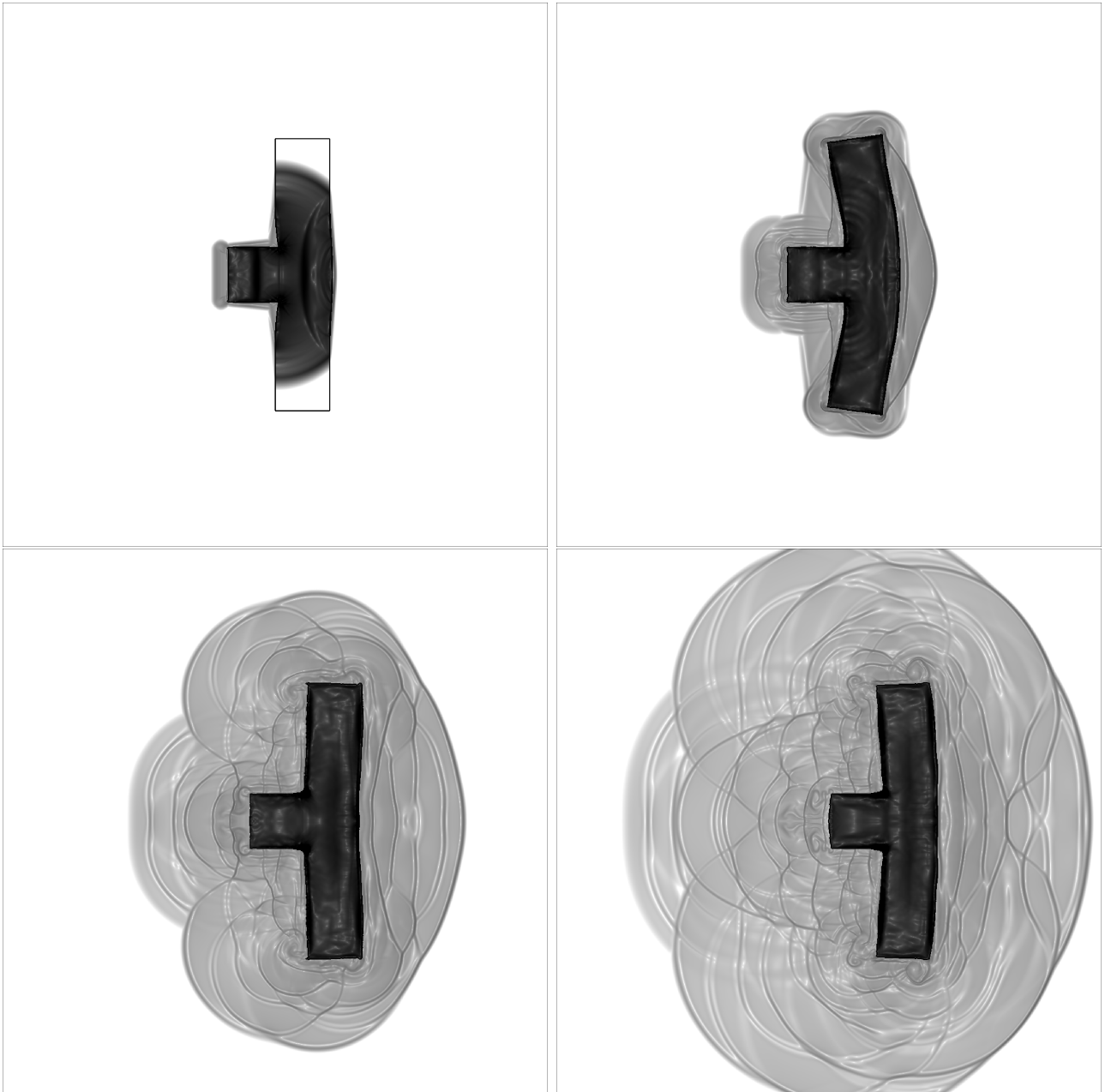


Figure IV.17 – Images Schlieren à  $t = 0.27, 1.5, 4.2, 7.1 \cdot 10^{-4}$ s pour l'impact avec  $\chi_1$ .

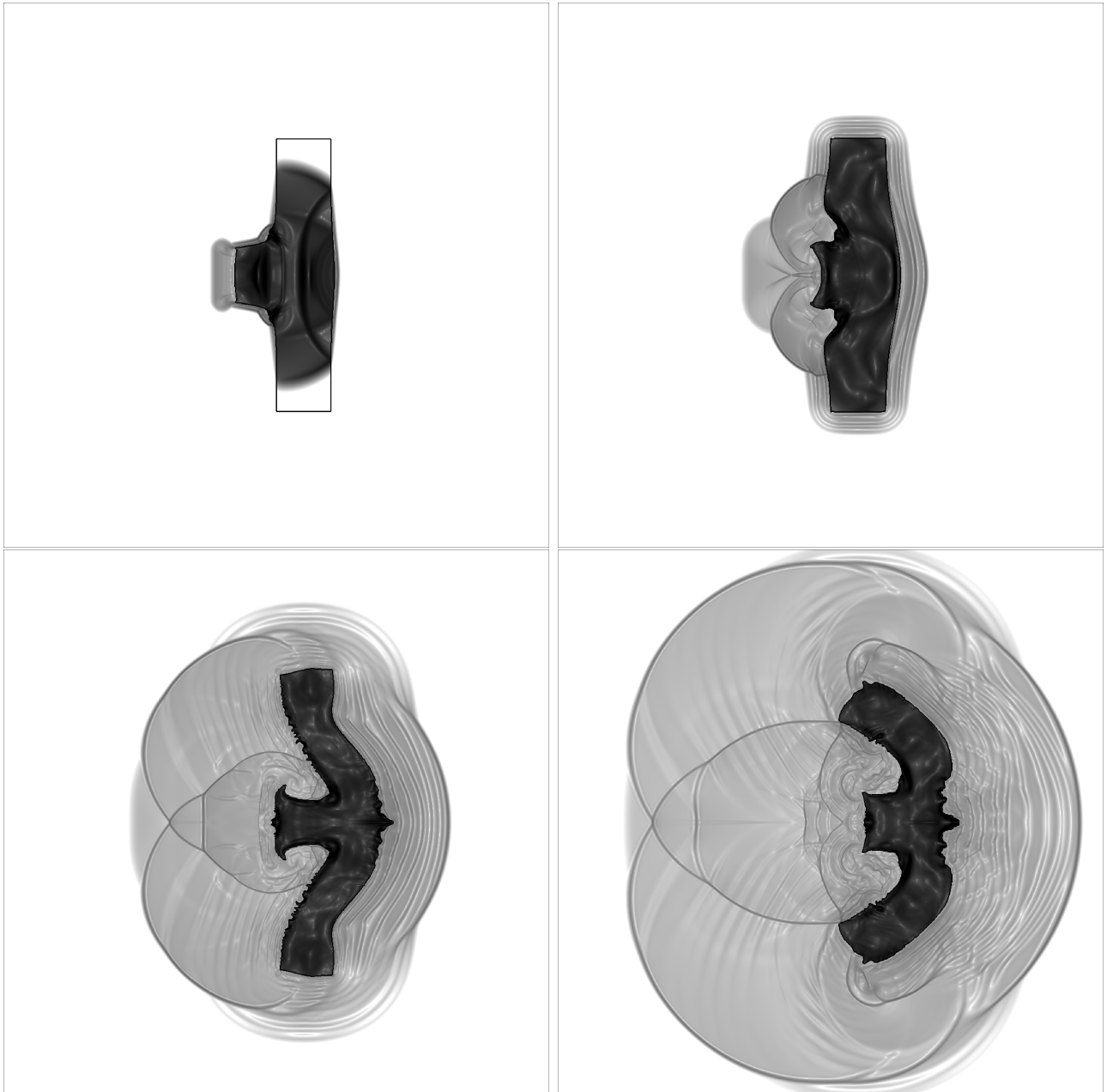


Figure IV.18 – Images Schlieren à  $t = 0.35, 1.4, 4.2, 7.1 \cdot 10^{-4}$ s pour l'impact avec  $\chi_2$ .



Figure IV.19 – Images Schlieren à  $t = 0.38, 1.4, 4.2, 7.1 \cdot 10^{-4}$ s pour l'impact avec  $\chi_3$ .

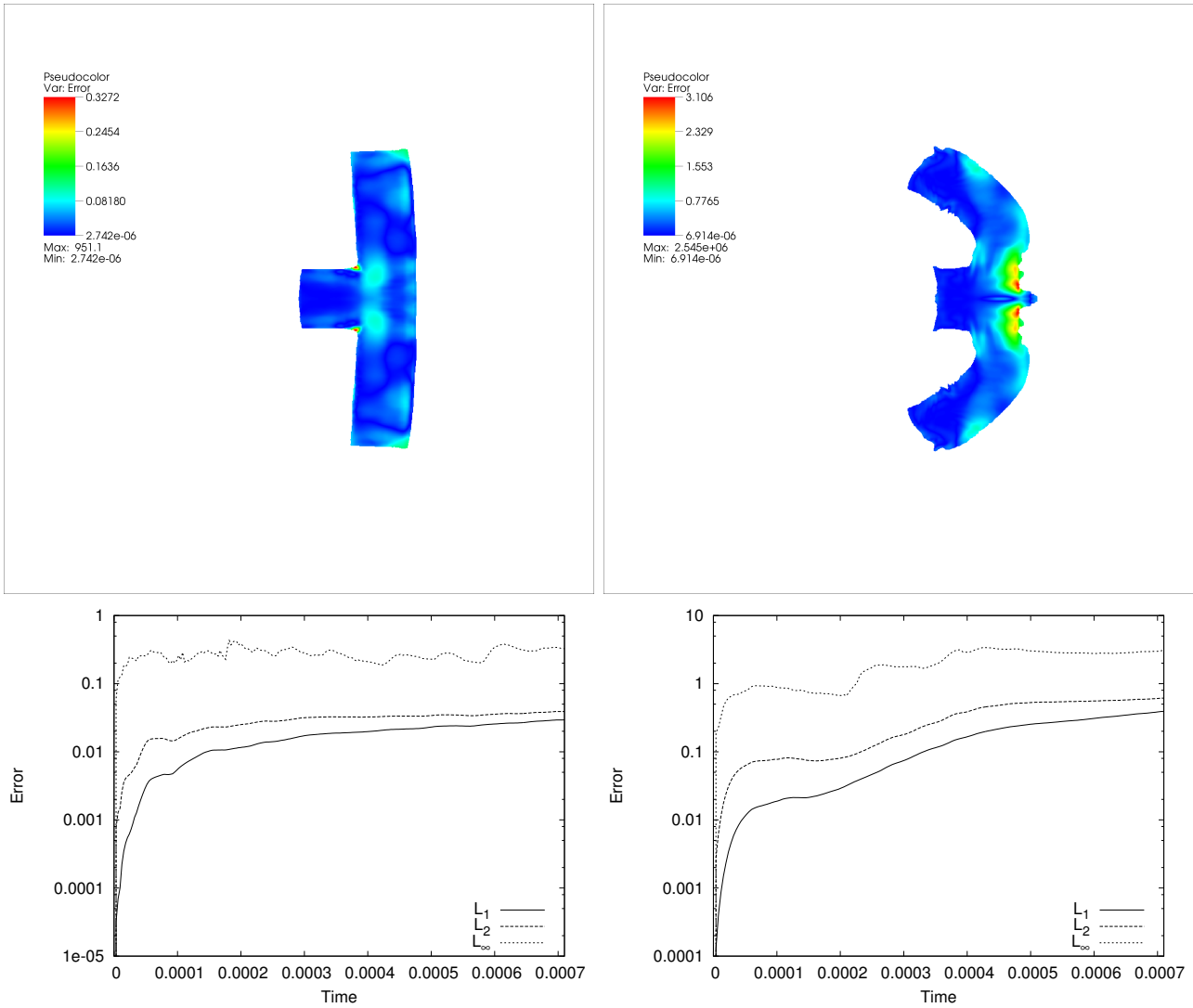


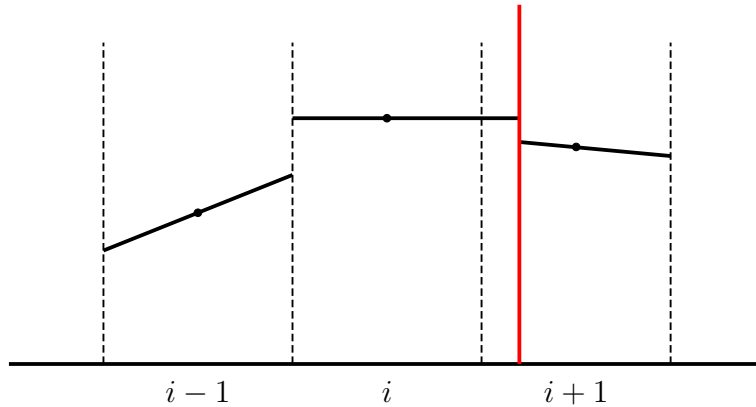
Figure IV.20 – Champs d'erreur et erreurs dans différentes normes.

### 3 Perspectives d'amélioration

Dans cette section nous proposons une procédure qui permet d'appliquer la méthode numérique développée dans le chapitre II dans le cadre des écoulements multi-matériaux. La méthode développée au chapitre II nécessite de connaître la vitesse normale de l'interface. Nous proposons de déterminer cette vitesse grâce au solveur multi-matériaux appliqué à l'interface dans la direction normale.

#### 3.1 Cas 1D

Supposons que la solution ainsi que les pentes MUSCL au temps  $t^n$  soient connues. Lorsque la level-set change de signe entre deux cellules  $C_{i_1j_1}$  et  $C_{i_2j_2}$ , la première étape est de définir un problème de Riemann à l'interface physique en extrapolant les pentes MUSCL, voir fig. IV.21.



**Figure IV.21** – Représentation graphique de l'extrapolation des pentes jusqu'à l'interface physique.

La résolution de ce problème de Riemann grâce au solveur multimatériaux nous donne la vitesse de la discontinuité de contact qui sépare des deux matériaux. Cette vitesse est alors imposée de part et d'autre de l'interface grâce au schéma décrit dans le chapitre II.

Dans le cas d'un écoulement fluide-fluide, l'application du schéma est immédiate. Si un milieu élastique est présent, il est nécessaire de modifier l'état fictif afin d'imposer les deux composantes de la vitesse. Si la cellule contenant l'état

$$\Phi_- = (u_-, v_-, \rho_-, p_-, Y_{j,-}^i) \quad (\text{IV.13})$$

est séparée d'un de ses voisins par une interface de vitesse  $\mathbf{u}_{\text{int}}$  (déterminée grâce au solveur multimatériaux dans la direction normale), alors l'état fictif à créer afin d'imposer la vitesse de



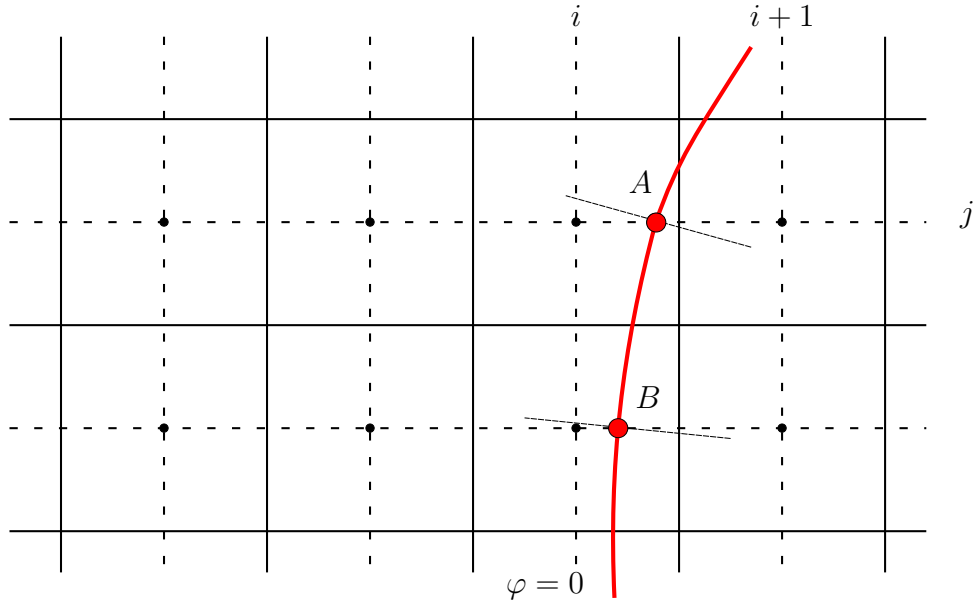
l'interface est

$$\Psi_+ = (2u^* - u_-, 2v^* - v_-, \rho_-, p_-, Y_{j,-}^i), \quad (\text{IV.14})$$

où  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\text{int}} + (d - 1/2)\mathbf{s}_b$ , et  $\mathbf{s}_b$  la pente définie de la même manière qu'au chapitre II pour les deux composantes de la vitesse.

### 3.2 Cas 2D

La procédure est la même qu'en 1D. Pour chaque changement de signe de la level-set entre deux cellules  $C_{i_1j_1}$  et  $C_{i_2j_2}$ , on définit un problème de Riemann dans la direction normale à l'interface, à l'intersection entre le segment qui lie les deux centres des cellules concernées par le changement de signe et l'interface physique. Ce problème de Riemann est défini en extrapolant les pentes MUSCL, puis en se plaçant dans le repère normal à l'interface, voir fig. IV.22. La vitesse normale de l'interface étant connue, on l'impose de la même manière que dans le



**Figure IV.22** – Représentation graphique de la configuration géométrique proche de l'interface. Les points rouges représentent les lieux où sont définis les problèmes de Riemann servant à définir la vitesse de l'interface, et les segments pointillés passant par ces points rouges représentent la direction selon laquelle est résolu le problème de Riemann.

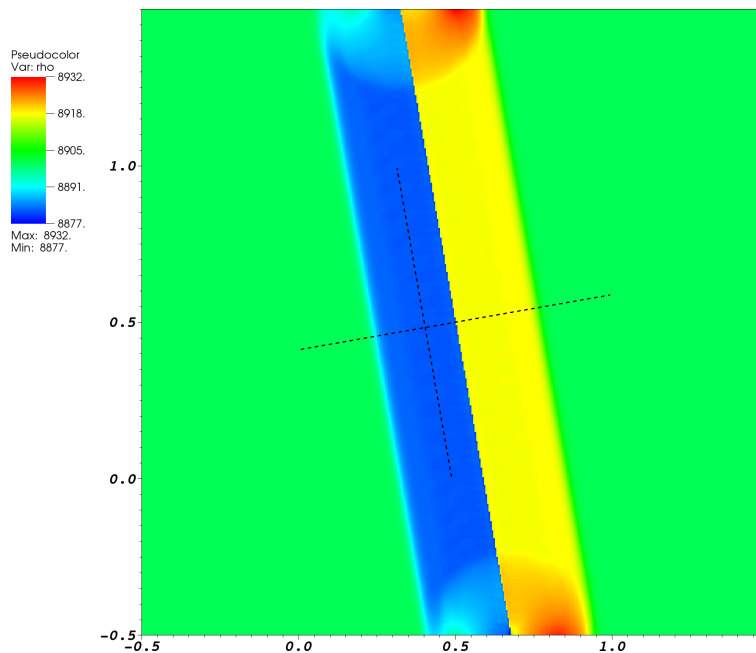
chapitre II, en déterminant l'état condition au bord ainsi que l'état fluide extrapolé, et ceci des deux cotés de l'interface. Pour les milieux élastiques, les deux composantes de la vitesse doivent

être imposées.

### 3.3 Résultats préliminaires

Dans la suite nous désignerons par « méthode d'ordre 2 » la méthode décrite ci dessus, et « méthode multi-matériaux » la méthode utilisant le solveur multi-matériaux sans cette nouvelle procédure.

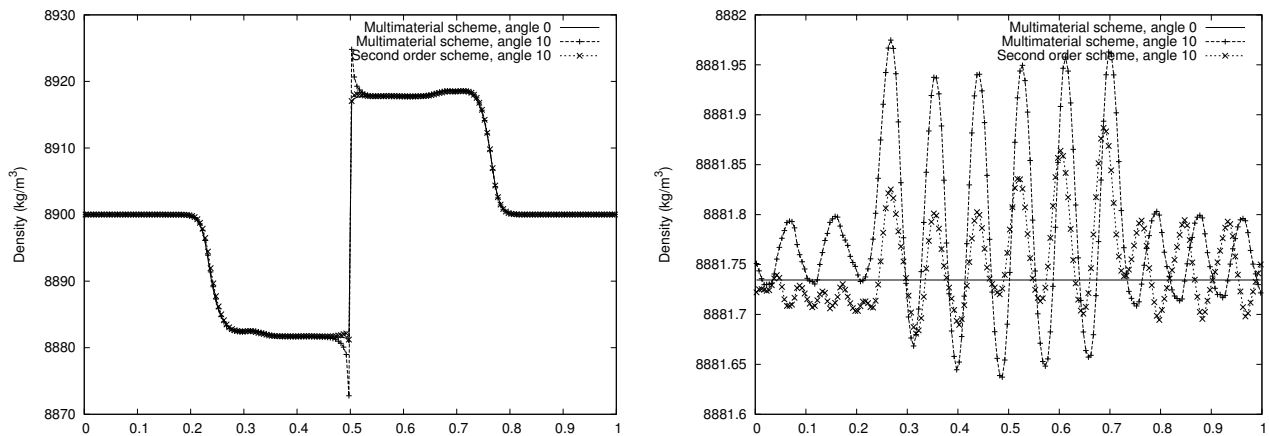
Cette méthode est appliquée au cas test 1D élastique-élastique 2.1.2. Ce cas test est étendu en 2D et l'angle que forme l'interface à l'instant initial avec le maillage est non nul, voir fig. IV.23. Le calcul est effectué avec les mêmes paramètres que dans le cas 1D sur un domaine de taille  $[-0.5, 1.5] \times [-0.5, 1.5]$  comportant  $400^2$  cellules. Nous avons choisi un domaine de cette taille afin que les effets relatifs aux bords n'interagissent pas avec la région sur laquelle les mesures seront effectuées. Nous évaluons la solution selon un segment de taille 1 normal à l'interface passant par  $(0.5, 0.5)$  ainsi que le long d'un segment parallèle à l'interface situé à une distance de 0.1 de celle ci, voir fig. IV.23.



**Figure IV.23** – Champ de densité au temps final. En pointillés sont représentés les segments le long desquels la solution est évaluée.

Sur la fig. IV.24, nous comparons le résultat de trois calculs : le premier est effectué avec le solveur multimatériaux pour l'interface initialement le long de  $x = 0.5$ , le second avec le solveur multimatériaux et l'interface formant un angle de  $10^\circ$  avec  $x = 0.5$ , et enfin le troisième

avec le schéma à l'ordre 2 et l'interface formant un angle de  $10^\circ$  avec  $x = 0.5$ . D'une part, l'overshoot observable à l'interface avec le premier schéma est absent avec la méthode d'ordre 2. D'autre part, les résultats du schéma à l'ordre 2 semblent comporter moins d'oscillations dans la direction tangentielle que ceux obtenus avec le solveur multi-matériaux. Ces deux effets sont très probablement dû à l'interpolation convexe entre l'état condition au bord et l'état fluide extrapolé. Par contre, les variables étant constantes au voisinage de l'interface, les pentes sont nulles, il ne peut donc pas y avoir de différence de précision entre le schéma d'ordre 2 et le schéma multi-matériaux. Pour cette raison, ce cas test ne permet pas de conclure, mais il permet de constater que le schéma d'ordre 2 reste stable et semble améliorer la solution en réduisant les oscillations.



**Figure IV.24** – À gauche : densité selon le segment normal à l'interface. À droite : densité selon le segment parallèle à l'interface.

## 4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons étendu le schéma existant en 2D et à l'ordre 2. Des améliorations y ont été apportées, notamment sur la définition des états intermédiaires des caractéristiques rétrogrades dans les problèmes de Riemann élastique-élastique et élastique-fluide. Les résultats numériques montrent que le schéma est robuste et que l'interface est non diffuse. Les tests effectués en 2D nous permettent de dire que les changements de topologie ne posent pas de problèmes au schéma. Le cas élastique fluide nécessite des investigations supplémentaires afin de déterminer la source des instabilités observées sur la surface du matériau élastique pour le cas le moins raide. Enfin, le schéma développé au chapitre II est appliqué dans

ce contexte en vue d'améliorer la précision en prenant en compte la position de l'interface de manière plus précise. Des résultats préliminaires montrent une amélioration de l'allure de la solution.



---

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique d'écoulements compressibles comportant des interfaces. Ces interfaces peuvent séparer un fluide et un solide rigide, deux fluides de lois d'état différentes, ou encore un fluide et un solide élastique. Dans un premier temps, nous avons mis au point une méthode de type frontières immergées afin d'imposer une condition de glissement au bord d'un obstacle rigide de manière précise. Nous avons ensuite contribué à la mise en place d'un schéma de type interface non diffuse pour les écoulements multi-matériaux en vue d'appliquer la méthode de frontières immergées aux solides déformables.

Nous avons commencé par décrire le contexte physique des écoulements de fluides compressibles non visqueux. Ensuite, un état de l'art des méthodes de simulation d'interaction entre un fluide compressible et un obstacle solide a été effectué. Nous avons choisi de développer une méthode de type frontières immergées en raison de la possibilité de traiter des objets potentiellement complexes et en mouvement, ainsi que pour les avantages qu'offrent les maillages cartésiens dans la tâche de parallélisation du code. Le schéma a été développé dans l'optique d'une extension en 3D parallèle facilitée, avec d'une part un algorithme « dimension par dimension » et d'autre part un stencil de taille réduite.

Les tests effectués en 1D ont montré que l'erreur commise par cette nouvelle méthode était du même ordre que l'erreur obtenue sur un maillage adapté. En 2D, la méthode appliquée aux obstacles fixes a été validée sur un grand nombre de cas test avec succès et nous avons montré qu'elle était d'ordre 2 en espace. L'application à des obstacles en mouvement a montré de bons résultats comparés à l'expérience, cependant une analyse plus précise reste à faire afin de quantifier la perte de précision due au mouvement.

Nous avons étendu cette méthode en 3D et un code parallèle a été développé avec la librairie MPI. Les tests de performance montrent des résultats satisfaisants en terme de speedup et des

simulations préliminaires ont été effectuées. Un effort de validation est nécessaire afin de vérifier que l'ordre de convergence de la méthode reste inchangé en 3D.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons pour but d'appliquer cette méthode numérique aux solides élastiques. Après avoir présenté le modèle d'élasticité non linéaire compressible utilisé, nous avons réalisé un état de l'art des méthodes d'écoulements multi-fluides et multi-matériaux. Le schéma à interface non diffuse existant a été étendu à l'ordre 2. Des validation 1D ont montré la robustesse du schéma. Nous avons étendu en 2D le schéma et des simulations d'interaction fluide-fluide et élastique-fluide ont été effectuées. Les cas test fluide-fluide présentent des résultats très satisfaisants, cependant, des questions se posent encore sur les simulations élastique-fluide. En effet, dans les cas les moins raides, des instabilités se développent et leur source n'est pas encore clairement identifiée. Enfin, une procédure permettant d'appliquer la méthode développée dans la première partie de la thèse a été proposée, et des résultats encourageants sur un cas test préliminaire sont présentés.

Ce travail démontre que les méthodes cartésiennes sont capables de simuler une large palette de situations et ceci avec un cout de calcul réduit. Les simulations d'écoulements multi-phasiques avec grande déformation et changement de topologie des interfaces sont grandement simplifiés par les approches cartésiennes. Il en est de même pour la simulation d'obstacles en mouvement. En effet, les méthodes sur cartésiennes permettent de conserver une qualité de maillage constante dans le temps et de s'affranchir de la tâche complexe de génération de maillage. Un code sur maillage cartésien permet de mettre en place rapidement un calcul mettant en jeu des interfaces de forme complexe.

Une perspective envisageable est le développement d'un code 3D parallèle regroupant tous les aspects abordés dans cette thèse. C'est à dire un code permettant de traiter des écoulements 3D de fluides pouvant obéir à différentes lois d'état autour d'obstacles rigides ou élastiques avec une précision à l'ordre 2 à l'interface. Ceci permet la simulation d'un très vaste éventail de configurations réalistes. Afin de réaliser ceci, il faut :

- s'assurer que la méthode développée dans la première partie de la thèse est suffisamment précise pour les obstacles en mouvement,
- vérifier que le schéma en 3D est d'ordre 2 pour les obstacles fixes et en mouvement,
- identifier la source des instabilités dans le cas élastique-fluide,
- étudier un schéma permettant d'améliorer les erreurs entre la densité et les caractéristiques rétrogrades.

Les méthodes cartésiennes avec maillage uniforme sont performantes pour des écoulements confinés où la taille de la structure considérée est relativement proche de la taille du domaine de calcul. En effet, l'utilisation d'un grand nombre de points de discrétisation est possible grâce à l'utilisation aisée d'algorithmes de parallélisation massive. En contrepartie, pour les écoulements externes notamment, un maillage uniforme n'est pas approprié. Non seulement les coûts de calcul deviendraient prohibitifs voire inenvisageables, mais de vastes zones où la solution est quasiment constante seraient largement sur-résolues inutilement. Il serait donc utile de développer des outils de type raffinement de maillage. Différentes méthodes existent, par exemple le raffinement par patch rectangulaires, ou par octree. Le premier peut être mis en place relativement rapidement, le deuxième permet en plus d'adopter une approche de raffinement adaptatif. Dans les deux cas, le partitionnement du domaine en blocs équilibrés par processeurs nécessite plus d'efforts que dans le cas uniforme.





---

## Références bibliographiques

- [1] Rémi Abgrall. How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations : A Quasi Conservative Approach. *Journal of Computational Physics*, 160(125) :150–160, 1996. [85](#)
- [2] Rémi Abgrall and Smadar Karni. Computations of Compressible Multifluids. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :594–623, May 2001. [88](#)
- [3] Grégoire Allaire, Sébastien Clerc, and Samuel Kokh. A Five-Equation Model for the Simulation of Interfaces between Compressible Fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, September 2002. [110](#)
- [4] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible flows. *Numer. Math.*, 81(4) :497–520, 1999. [30](#)
- [5] P.T. Barton, D. Drikakis, E. Romenski, and V.a. Titarev. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity. *Journal of Computational Physics*, 228(18) :7046–7068, October 2009. [80](#)
- [6] M. Bergmann and A. Iollo. Modeling and simulation of fish-like swimming. *J. Comput. Phys.*, 230 :329–348, 2011. [31](#)
- [7] O. Boiron, G. Chiavassa, and R. Donat. A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles. *Computers & Fluids*, 38(3) :703–714, March 2009. [32](#)
- [8] Rachel Caiden, Ronald P. Fedkiw, and Chris Anderson. A Numerical Method for Two-Phase Flow Consisting of Separate Compressible and Incompressible Regions. *Journal of Computational Physics*, 166(1) :1–27, January 2001. [89](#)
- [9] Arnab Chaudhuri, Abdellah Hadjadj, and Ashwin Chinnayya. On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions. *Journal of Computational Physics*, 230(5) :1731 – 1748, 2011. [35](#)

- [10] S. Chen, B. Merriman, S. Osher, and P. Smereka. A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problems. *Journal of Computational Physics*, 135(1) :8–29, July 1997. [26](#)
- [11] P. Colella, D.T. Graves, B.J. Keen, and D. Modiano. A cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 211(1) :347–366, 2006. [33](#)
- [12] G.-H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *M2AN*, 42 :471–492, 2008. [75](#)
- [13] A. Dadone and B. Grossman. Ghost-cell method for analysis of inviscid three dimensional flows on cartesian grids. *Computers and Fluids*, 36 :1513–1528, 2007. [35](#), [36](#), [53](#)
- [14] S. Davis. Simplified Second-Order Godunov-Type Methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(3) :445–473, 1988. [93](#)
- [15] R. DeBar. Fundamentals of the kraken code. *Tech. Rep. UCIR-760. Lawrence Livermore Nat. Lab.*, 1974. [24](#)
- [16] E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined immersed boundary finite difference methods for three dimensional complex flow simulations. *J. Comput. Phys.*, 161 :35–60, 2000. [34](#)
- [17] Charbel Farhat, Arthur Rallu, and Sriram Shankaran. A higher-order generalized ghost fluid method for the poor for the three-dimensional two-phase flow computation of underwater implosions. *Journal of Computational Physics*, 227(16) :7674–7700, August 2008. [89](#)
- [18] N. Favrie, S.L. Gavriluk, and R. Saurel. Solid fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations. *Journal of computational physics*, 228(16) :6037–6077, 2009. [84](#), [87](#)
- [19] R.P. Fedkiw. Coupling an eulerian fluid calculation to a lagrangian solid calculation with the ghost fluid method. *J. Comput. Phys.*, 175 :200–224, 2002. [87](#), [89](#)
- [20] R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, and S. Osher. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.*, 152 :457–492, 1999. [26](#), [34](#), [87](#), [109](#)
- [21] North Atlantic Treaty Organization. Advisory Group for Aeronautical Research and Development. *AGARD Report*. Number 702 in AGARD Report. 1982. [62](#)
- [22] S.L. Gavriluk, N. Favrie, and R. Saurel. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials. *Journal of computational physics*, 227(5) :2941–2969, 2008. [75](#), [84](#), [87](#), [115](#), [116](#)
- [23] R. Ghas, R. Mittal, and H. Dong. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 225 :528–553, 2007. [35](#)

- 
- [24] Frederic Gibou, Ronald P. Fedkiw, Li-Tien Cheng, and Myungjoo Kang. A Second-Order-Accurate Symmetric Discretization of the Poisson Equation on Irregular Domains. *Journal of Computational Physics*, 176(1) :205–227, February 2002. [34](#), [35](#)
- [25] J. Glimm, J. Grove, X. Li, and D. Tan. Robust computational algorithms for dynamic interface tracking in three dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(6) :2240–2256, 2000. [23](#)
- [26] J Glimm, X L Li, Y Liu, and N Zhao. Conservative front tracking and level set algorithms. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 98(25) :14198–201, December 2001. [89](#)
- [27] James Glimm, John W. Grove, X. L. Li, and N. Zhao. Simple front tracking. *Contemporary Mathematics*, 238, 1999. [23](#)
- [28] James Glimm, John W. Grove, Xiao Lin Li, Keh-ming Shyue, Yanni Zeng, and Qiang Zhang. Three-Dimensional Front Tracking. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(3) :703, 1998. [23](#)
- [29] S.K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sb.*, 47 :271, 1959. [10](#)
- [30] S.K. Godunov. Elements of continuum mechanics. *Nauka Moscow*, 1978. [75](#)
- [31] Y. Gorsse, A. Iollo, T. Milcent, and H. Telib. Accurate sharp interface scheme for multi-materials. *Proceedings of the 7th ICCFD*, 2012. [78](#), [79](#), [80](#), [84](#), [90](#)
- [32] Yannick Gorsse, Angelo Iollo, Haysam Telib, and Lisl Weynans. A simple second order cartesian scheme for compressible euler flows. *Journal of Computational Physics*, In press, 2012. [39](#)
- [33] C.W Hirt, A.A Amsden, and J.L Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14(3) :227 – 253, 1974. [26](#), [27](#)
- [34] C.W Hirt and B.D Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201 – 225, 1981. [23](#), [24](#)
- [35] X.Y. Hu, B.C. Khoo, N.A. Adams, and F.L. Huang. A conservative interface method for compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 219 :553–578, 2006. [34](#)
- [36] A. Iollo, T. Milcent, and H. Telib. A sharp contact discontinuity scheme for multimaterial models. *Finite Volumes for Complex Applications VI. Springer Proceedings in Mathematics 4*, 2011. [75](#), [84](#), [91](#)
- [37] Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1) :202–228, June 1996. [97](#)

- [38] Smadar Karni. Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm. *Journal of Computational Physics*, 112(1) :31 – 43, 1994. [85](#)
- [39] G. Kluth and B. Després. Discretization of hyperelasticity on unstructured mesh with a cell-centered Lagrangian scheme. *Journal of Computational Physics*, 229(24) :9092–9118, December 2010. [115](#), [116](#)
- [40] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid mechanics, second edition*. Pergamon Press, 1987. [5](#)
- [41] Randall J. LeVeque and Keh-Ming Shyue. Two-dimensional front tracking based on high resolution wave propagation methods. *Journal of Computational Physics*, 123(2) :354 – 368, 1996. [23](#)
- [42] R.J. Leveque and Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM Numerical Analysis*, 31(4) :1019–1044, 1994. [30](#)
- [43] Jie Li. Calcul d’interface affine par morceaux (piecewise linear interface calculation). *CR Acad. Sci. Paris*, 96 :320–391, 1995. [24](#)
- [44] Zhilin Li and Ming-Chih Lai. The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with Singular Forces. *Journal of Computational Physics*, 171(2) :822–842, August 2001. [30](#)
- [45] W. Liao, E.P.C. Koh, H.M. Tsai, and F. Liu. Euler calculations with embedded cartesian grids and small-perturbation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 229(9) :3523 – 3542, 2010. [63](#)
- [46] Q. Liu and O. Vasiliyev. A brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 227 :946–966, 2007. [31](#)
- [47] T.G. Liu, B.C. Khoo, and C.W. Wang. The ghost fluid method for compressible gas-water simulation. *Journal of Computational Physics*, 204(1) :193–221, March 2005. [89](#)
- [48] T.G. Liu, B.C. Khoo, and K.S. Yeo. Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface. *Journal of Computational Physics*, 190(2) :651–681, September 2003. [89](#)
- [49] Damiano Lombardi, Thierry Colin, Angelo Iollo, Olivier Saut, Françoise Bonichon, and J. PalussiÈre. Some models for the prediction of tumor growth : general framework and applications to metastases in the lung. In *Computational Surgery*, page 1. Springer, 2012. [1](#)
- [50] S. Majumdar, G. Iaccarino, and P.A. Durbin. Rans solver with adaptive structured boundary non conforming grids, 2001. [35](#)

- 
- [51] Donella H. Meadows and Club of Rome. *The Limits to growth*. Universe Books New York,, 1972. 1
- [52] G.H. Miller and P. Colella. A high-order eulerian godunov method for elastic plastic flow in solids. *Journal of computational physics*, 167(1) :131–176, 2001. 75
- [53] G.H. Miller and P. Colella. A conservative three-dimensionnal eulerian method for coupled solid-fluid shock capturing. *J. Comput. Phys.*, 183 :26–82, 2002. 33
- [54] GH Miller and EG Puckett. A high-order Godunov method for multiple condensed phases. *Journal of Computational Physics*, 164 :134–164, 1996. 24
- [55] R Mittal, H Dong, M Bozkurttas, and F M Najjar. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Computational Physics*, 227 :4825–4852, 2008. 35
- [56] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods, 2005. 29
- [57] J Mohd-Yusof. Combined immersed boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries. *CTR annual research briefs, Center for turbulence research, NASA Ames/Stanford Univ.*, 1997. 34
- [58] W Mulder, S Osher, and James A Sethian. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 100(2) :209 – 228, 1992. 26
- [59] D.Q. Nguyen, F. Gibou, and R. Fedkiw. A fully conservative ghost fluid method and stiff detonation waves. *The 12th International Detonation Symposium*, 2002. 89
- [60] W. Noh and Paul Woodward. Slic (simple line interface calculation). *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 59 :330–340, 1976. 24
- [61] Intergovernmental Panel on Climate Change. *Fourth Assessment Report : Climate Change 2007 : The AR4 Synthesis Report*. Geneva : IPCC, 2007. 1
- [62] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003. 26
- [63] Stanley Osher and RP Fedkiw. Level set methods : an overview and some recent results. *Journal of Computational physics*, pages 1–65, 2001. 25
- [64] Stanley Osher and James A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, 79(1) :12–49, 1988. 25
- [65] R.B. Pember, J.B. Bell, P. Colella, W.Y. Crutchfield, and M.L. Welcome. An adaptive cartesian grid method for unsteady compressible flows in irregular regions. *J. Comput. Phys.*, 120 :278–304, 1995. 33

- [66] C.S. Peskin. The fluid dynamics of heart valves : experimental, theoretical and computational methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 14 :235–259, 1981. [29](#)
- [67] James J Quirk and S Karni. On the dynamics of a shock-bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 318(-1) :129–163, 1996. [108](#), [109](#)
- [68] William J. Rider and Douglas B. Kothe. Reconstructing volume tracking. *Journal of Computational Physics*, 141(2) :112 – 152, 1998. [24](#)
- [69] R. Saurel and R. Abgrall. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998. [24](#)
- [70] Richard Saurel and Rami Abgrall. A multiphase godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425 – 467, 1999. [85](#)
- [71] Richard Saurel, Fabien Petitpas, and Ray a. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1678–1712, March 2009. [85](#)
- [72] Jung Hee Seo and Rajat Mittal. A Sharp-Interface Immersed Boundary Method with Improved Mass Conservation and Reduced Spurious Pressure Oscillations. *Journal of computational physics*, 230(19) :7347–7363, August 2011. [34](#)
- [73] J. Sethian. Fast marching methods. *SIAM Review*, 41(2) :199–235, 1999. [26](#)
- [74] A.H. Shapiro. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald Press, 1953. [5](#), [53](#)
- [75] Keh-Ming Shyue. A Fluid-Mixture Type Algorithm for Compressible Multicomponent Flow with van der Waals Equation of State. *Journal of Computational Physics*, 156(1) :43–88, November 1999. [110](#)
- [76] B. Sjogreen and N. A. Petersson. A cartesian embedded boundary method for hyperbolic conservation laws. *Communications in Computational Physics*, 2(6) :1199–1219, 2007. [35](#), [36](#), [58](#)
- [77] Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1) :146 – 159, 1994. [26](#)
- [78] E.F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the hll-riemann solver. *Shock Waves*, 4 :25–34, 1994. [83](#)
- [79] Eleuterio F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics - A practical introduction - 2nd edition*. Springer, Berlin, 1999. [5](#)

- [80] Ferziger Tseng. A ghost cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, 192 :593 – 623, 2003. [35](#)
- [81] Salih Ozen Unverdi and Grétar Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100(1) :25 – 37, 1992. [23](#)
- [82] John C. Vassberg and Antony Jameson. In pursuit of grid convergence for two-dimensional euler solutions. *Journal of Aircraft*, 47(4) :1152–1166, 2010. [60](#)
- [83] D.L. Youngs. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, page 273, 1982. [24](#)







Dans cette thèse, nous nous intéressons à la simulation numérique d'écoulements compressibles comportant des interfaces. Ces interfaces peuvent séparer un fluide et un solide rigide, deux fluides de lois d'état différentes ou encore un fluide et un solide élastique. Dans un premier temps, nous avons élaboré une méthode de type frontières immergées afin d'imposer une condition de glissement au bord d'un obstacle rigide de manière précise. Nous avons ensuite étudié et validé un schéma de type interface non diffuse pour les écoulements multi-matériaux en vue d'appliquer la méthode de frontières immergées aux solides déformables.

Mots clés : Compressible, frontières immergées, ordre 2, multi-matériaux.

We are interested in numerical simulation of compressible flows with interfaces. These interfaces can separate a fluid and a rigid solid, two fluids with different constitutive laws, or a fluid and an elastic solid. First, we have developed an immersed boundary method to impose precisely a non penetration condition at the border of an obstacle. Then, a sharp interface method for compressible multimaterials have been studied and validated. The immersed boundary method of the first part is applied in this context.

Keywords : Compressible, immersed boundary, second order, multimaterials