Systèmes de particules en interaction et modèles de déposition aléatoire

François Ezanno

▶ **To cite this version:**

François Ezanno. Systèmes de particules en interaction et modèles de déposition aléatoire. Probabilités [math.PR]. Aix-Marseille Université, 2012. Français. NNT : 2012AIXM4701 . tel-00796271

HAL Id: tel-00796271
https://theses.hal.science/tel-00796271

Submitted on 2 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Aix-Marseille Université

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur Aix Marseille Université
délivré par l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

par

François EZANNO

sous la direction d'Étienne PARDOUX et Enrique ANDJEL

Titre :

Systèmes de particules en interaction et modèles de déposition aléatoire

soutenue publiquement le 21 décembre 2012

JURY

Enrique Andjel	Aix-Marseille Université	Directeur
Nathanaël Enriquez	Université Paris 10	Examinateur
Étienne Pardoux	Aix-Marseille Université	Directeur
Didier Piau	Université Joseph Fourier-Grenoble	Rapporteur
Pierre Picco	Aix-Marseille Université	Examinateur
Ellen Saada	Université Paris Descartes	Rapporteur

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à mes directeurs Étienne Pardoux et Enrique Andjel. Ils ont toute mon admiration ainsi que ma gratitude pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse.
Etienne possède toutes les qualités qui sont appréciées par un thésard. J'ai pu bénéficier de son énergie, de sa rapidité, de son efficacité. Au delà du travail j'ai apprécié à sa juste valeur son altruisme et l'importance qu'il a accordé à mes problèmes, créant très vite une relation de confiance.
Enrique mériterait plus que quelques lignes comme remerciement. Sa vision ludique des probabilités, ainsi que sa rigueur font que je garde un excellent souvenir de toutes nos discussions mathématiques. J'ai appris énormément à son contact au sujet des probabilités, mais aussi de l'Histoire, du football, de la feijoada, de l'Argentine, du sudoku et bien d'autres choses. Je le remercie spécialement pour son accueil chaleureux à l'IMPA.

Je tiens à remercier vivement Ellen Saada et Didier Piau d'avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse. Leur lecture attentive et leurs précieuses remarques m'ont été d'une grande utilité. Je remercie aussi Pierre Picco et Nathanael Enriquez de faire partie du jury. C'est un grand honneur pour moi.

Je veux exprimer aussi ma reconnaissance aux excellents enseignants de l'université de Rennes, sans qui je ne serais pas là, en particulier Florent Malrieu, Grégory Vial et Hélène Guérin.

Les rencontres que j'ai faites au sein du LATP ont rendu ces trois années plus agréables et palpitantes. Merci en particulier à Sébastien Darses pour son soutien qui a beaucoup compté ainsi que pour quelques agréables dîners. Merci à Grégory Maillard pour son aide et son écoute. Merci à Alexandre Gaudillière pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et l'aide non négligeable qu'il m'a offerte au moment où j'en avais le plus besoin. Enfin les doctorants que j'ai eu le plaisir de côtoyer ont été autant de compagnons de galère grâce à qui j'ai pu tenir le cap : merci à Lionel, JC, Clément, Ismaël, Mattias, Mickaël, Julien, Jonathan, Sébastien, Thomas et Thomas, Bien, Niklas, Flore, Fanny, Benjamin, Moustapha, Elma. Merci à Peter pour les leçons de football. J'ai une pensée en particulier à mes "frères de thèse" Majid, Boubacar et Mamadou avec qui j'ai partagé beaucoup de discussions enrichissantes, d'expériences et d'émotions.

Je dois aussi remercier tout le personnel du CMI, en particulier Valérie, Sonia et Marie-Christine dont j'admire la compétence et la bonne humeur.

Merci aussi à Bob Dylan, João Gilberto et les Pink Floyd d'avoir rendu ces longues heures de rédaction moins monotones.

La présence de mes amis a été d'une grande aide pour rester dans la réalité, ce qui n'est pas toujours évident pour un mathématicien. Je ne sais pas comment les remercier car rien ne serait possible sans eux. Mes vieux amis de Saint-Pabu, Guillaume, Fred et PH ont beaucoup compté même si la distance les met sur ma route trop peu souvent. Je remercie

ceux d'Avignon : Guigui, Alexandra, Bertille, et Elise pour tous les bons moments. Mes colocataires d'Acigné, Alexandre, Maël, et François méritent une place particulière dans ces remerciements, ces trois années m'ont confirmé que je peux compter sur eux. Il en va de même pour les habitants de la rue de Saint-Malo, Titi, Coko, Jérémy et Lolasse. Merci à mon ami Pascal, je garde un souvenir ému de notre colocation. Merci à Dond, en particulier pour son canapé quand je n'étais qu'un bébé thésard. Enfin les Visan x, $x \in \mathbb{N}/2$, ont été des moments que je garde en mémoire, et dont je suis sorti à chaque fois avec une motivation renouvelée pour attaquer ma thèse. Tous les Visanais, y compris les deux, méritent des tonnerres de remerciements. Merci enfin à tous ceux qui ont fait le déplacement pour venir m'encourager.

J'ai la chance de pouvoir toujours compter sur des parents en or. Je suis heureux de pouvoir leur dire à quel point ils ont été importants pendant cette thèse. Merci Pierre et Céline, que je suis fier d'avoir comme frère et sœur. Merci aussi infiniment à Serge, à la petite Nina et à Milo.

Je remercie Elio pour toutes ces discussions captivantes sur les petits bébés escargots, et pour la joie qu'il m'apporte tous les jours. Enfin, merci Fanny, je ne pouvais pas rêver d'un soutien plus précieux que celui que tu m'as apporté, ni d'une compagnie plus réconfortante que la tienne.

"La probabilité de réussir la mise sur orbite d'une fusée est d'une chance sur un million. Dépêchons-nous de rater 999.999 lancements !"
Jacques Rouxel

Table des matières

Introduction **1**

Chapitre 1 Le problème de la construction des systèmes de particules en interaction **5**

1.1 Historique du problème 7

1.2 Point de vue analytique. Construction de Liggett via Hille-Yosida 9

1.3 Une construction élémentaire des systèmes de spins avec interactions de rang infini 11

1.4 Cas d'un espace d'état dénombrable avec des interactions de rang fini 23

Chapitre 2 Résultats sur le modèle de Gates-Westcott **29**

2.1 Modèles de croissance aléatoire 29

2.2 Récurrence du profil 36

2.3 Construction poissonienne pour le modèle de Gates-Westcott 37

2.4 Couplages 37

2.5 Vitesse asymptotique de croissance 39

2.6 État des connaissances sur le modèle de Gates-Westcott 42

2.7 Théorème de peigne pour $\beta_2 < \beta_0$ 43

2.8 une condition suffisante d'ergodicité dans le domaine $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$ 52

2.9 une condition suffisante de transience dans le domaine $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$ 59

2.10 Étude du cas $n = 4$ 62

2.11 Existence d'une mesure stationnaire pour une infinité de sites, avec $\beta_1 = (\beta_0 + \beta_2)/2$ 66

2.12 Questions ouvertes 69

Chapitre 3 Le processus de contact sous-critique vu du bord **71**

3.1 Définitions et notations 71

3.2 Une preuve alternative de la convergence du contact sous-critique vu du bord 74

3.3 Le processus de contact fini sous-critique vu du bord admet une limite de Yaglom 79

3.4 Problèmes pour adapter la section 3.2 en temps continu 86

Appendice : preuve du théorème 7 **89**

Bibliographie **91**

Introduction

Au cours de ces trois années de thèse, mes recherches ont porté principalement sur un modèle de croissance cristalline que nous nommons ici modèle de Gates-Westcott, ainsi que sur des questions relatives au processus de contact. En préambule à l'étude de ces objets j'ai aussi réfléchi à une représentation simple des systèmes markoviens avec une infinité de particules en interaction.

Chapitre 1 : construction des systèmes de particules en interaction

Dans les années 60, sous l'impulsion de la mécanique statistique, a été introduite une famille très générale de processus stochastiques markoviens : les systèmes de particules en interaction. Cette innovation a été le point de départ d'un grand nombre de travaux, aussi bien sur des problèmes globaux relatifs à cette famille que sur des processus particuliers faisant partie de cette famille : modèle d'Ising, de votant, de contact...Le point commun de tous ces processus est de décrire simultanément l'évolution dans le temps des états associés à un certain nombre (souvent infini) de sites, la dynamique étant gouvernée par la prescription de règles d'évolution locales.
Dans un premier temps s'est posé le problème de la définition : sous quelle condition a t-on l'existence et l'unicité de tels processus ? Précisons le sens de cette question : nous considérons un ensemble V de sites, un ensemble E d'états possibles pour chaque site, et pour $\eta \in E^V$ et $T \subset V$ fini, des mesures

$$c_T(\eta, \mathrm{d}\xi) \text{ sur } E^T.$$

On souhaite définir sans ambiguïté un processus $(\xi_t, t \geq 0)$ sur E^V tel que, dans la configuration η, la configuration locale $\eta_{|T}$ soit remplacée par une nouvelle configuration ξ selon la mesure de transition $c_T(\eta, \cdot)$, ceci pour tout T fini.
Ce problème de définition a été d'une certaine façon résolu dans les premières années. Dans le cas où E est compact, Liggett [34] a en particulier montré, sous une hypothèse très peu restrictive sur les taux de transition (hypothèse (H_1), page 8), que le prégénérateur de Markov associé à la dynamique décrite définissait un unique semi-groupe de Feller, donc un unique processus de Feller. L'outil principal de sa démonstration est la théorie de Hille-Yosida.

Dans le cas $E = \{0, 1\}$, et sous une hypothèse légèrement plus faible (hypothèse (H_1'), page 9), nous avons cherché à donner une autre construction qui se passe de la théorie de Hille-Yosida, en se basant sur une idée plus naïve qui est la suivante. Lorsque V est fini, le problème de l'existence et unicité du processus $(\xi_t, t \geq 0)$ est sans difficulté. Pour V infini, on fixe une suite $V_n \uparrow V$ de boîtes finies et on construit d'abord des processus $(\xi_t^n, t \geq 0)$ où seules les coordonnées de V_n évoluent. Le résultat le plus important du chapitre est que si (H_1') est vérifiée,

Théorème (corollaire du théorème 3, chapitre 1). *Pour $t \geq 0$, $v \in V$, $\xi_t^n(v)$ converge quand $n \to \infty$.*

Ceci est fait d'une façon qui met en valeur le caractère naturel de l'hypothèse (H_1'), qui n'apparaît pas clairement dans la construction de Liggett par exemple. On vérifie ensuite que le processus limite correspond à l'objet recherché :

Théorème (théorème 4, chapitre 1). *Le semi-groupe défini par le processus $\xi_t := \lim_{n\to\infty} \xi_t^n$ a le générateur de Markov souhaité.*

Chapitre 2 : Modèle de Gates-Westcott

Le modèle de Gates-Westcott est un processus stochastique de déposition verticale, où un certain nombre n de sites capturent à certains taux des particules environnantes, faisant ainsi croître un édifice cristallin. Le taux de capture en un site peut prendre trois valeurs β_0, β_1 et β_2 selon la géométrie du site (voir la figure 2.1.2 page 34). Ce sont des paramètres du problème.
L'évolution de l'édifice est décrite par un vecteur $X_t^n = (X_t^n(1), \ldots, X_t^n(n))$ et on s'intéresse à la forme de la surface du cristal, décrite par le vecteur $H_t^n = (X_t^n(1) - X_t^n(2), \ldots, X_t^n(n-1) - X_t^n(n))$. Le caractère (récurrent positif, récurrent nul ou transitoire) du processus de Markov H^n doit être interprété comme la nature stable/instable, autrement dit lisse/rugueuse, de l'interface du cristal. On emploiera indifféremment l'adjectif *ergodique* pour désigner un processus récurrent positif. Les résultats les plus importants de ce chapitre sont liés à la question suivante : selon les valeurs des paramètres $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et n, quelle est la nature de H^n ?
Si $\beta_2 < \beta_0$, les sommets croîssent plus vite que les trous, de sorte qu'il est aisé de montrer que H^n est transitoire. On donne une description plus précise du comportement asymptotique de H^n, comportement qui est parfaitement visible dans les simulations de la figure 2.7.

Théorème (Théorème 11, chapitre 2). *Si $\beta_2 < \beta_0$, le vecteur*

$$\frac{1}{t}(X_t^n(1), \ldots, X_t^n(n))$$

converge presque sûrement quand $t \to \infty$ vers un vecteur aléatoire G, qui est d'une forme donnée par (2.18), (2.19), *ou* (2.20) *selon les paramètres.*

Si $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$, il est déjà connu [3] que H^n est ergodique. La nature de H^n reste à déterminer pour deux zones de paramètres : $\beta_1 \geq \beta_0 \geq \beta_2$ et $\beta_0 \leq \beta_2 < \beta_1$. Nous

nous sommes concentrés sur cette dernière zone. La conséquence la plus importante de nos résultats est que cette zone est mixte :

Théorème (conséquence des théorèmes 13 et 14, chapitre 2)**.**

(i) Il existe des valeurs $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$ telles que, pour tout $n \geq 2$, H^n soit récurrent positif.
(ii) Il existe des valeurs $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$ telles que, pour tout $n \geq 5$, H^n soit transitoire.

Nous avons introduit deux outils nouveaux pour démontrer ces résultats. Le premier est la vitesse asymptotique $v^n = \lim_{t\to\infty} X_t^n(1)/t$, définie quand H^n est récurrent positif. Le second est un couplage monotone entre le processus X^n et un autre processus $\tilde{X}^n$ pour lequel la valeur de β_2 est remplacée par β_1. Nous donnons une condition suffisante pour qu'une comparaison existe entre ces deux processus.
Nous avons aussi considéré le processus $(H_t, t \geq 0)$ qui suit la même dynamique que celle décrite ci-dessus, mais avec une infinité de sites. Lorsque $\beta_2 > \beta_0$ et $\beta_1 = (\beta_0 + \beta_2)/2$, nous nous inspirons de l'expression explicite de la distribution stationnaire pour n fini donnée dans [17] pour démontrer l'existence d'une distribution stationnaire (là encore explicite) pour $(H_t, t \geq 0)$.

Théorème (Théorème 16, chapitre 2)**.** *Soit m la probabilité sur $\mathbb{Z}$ définie par :*

$$m(k) = \frac{1}{Z}\left(\sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_2}}\right)^{|k|},$$

où Z est la constante de normalisation.
Si $\beta_2 > \beta_0$ et $\beta_1 = (\beta_0 + \beta_2)/2$, alors la mesure produit $\mu := m^{\otimes\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ est invariante pour le processus $(H_t, t \geq 0)$.

Chapitre 3 : processus de contact sous-critique vu du bord

Le processus de contact $(\xi_t, t \geq 0)$ en une dimension est un exemple de système de particules. L'espace des configurations est $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ et les sites sont dits occupés s'ils sont dans l'état 1, et vides s'ils sont dans l'état 0. La configuration identiquement nulle est notée $\mathbf{0}$. En chaque site peuvent survenir des évènements de deux types :
- des décès : $1 \to 0$ au taux 1,
- des naissances : $0 \to 1$ au taux $\lambda \times$ le nombre de sites voisins occupés.

On prend ici la constante λ strictement inférieure à la valeur critique λ_c du processus de contact. Supposons qu'on parte d'une configuration avec un nombre fini d'individus. La probabilité $\mathbb{P}(\xi_t \neq \mathbf{0})$ de non extinction à l'instant t converge alors vers 0, quand $t \to \infty$. Cette convergence est d'ailleurs exponentiellement rapide. La configuration $\mathbf{0}$ est un état absorbant du processus et l'absorption arrive donc presque sûrement en temps fini.
Le processus de contact vu du bord $(\zeta_t, t \geq 0)$ est défini par $\zeta_t(v) = \xi_t(v + \sup \xi_t)$, où $\sup \xi_t = \sup\{v : \xi_t(v) = 1\}$. Autrement dit ζ_t s'obtient en translatant la configuration ξ_t de façon à ce que l'individu le plus à droite se retrouve à l'origine. Concernant le comportement asymptotique de ζ_t, deux questions se posent :

(a) Si on part d'un nombre fini de sites occupés, on peut considérer la loi de ζ_t conditionnée à la non extinction, soit $\mathcal{L}(\zeta_t|\xi_t \neq \mathbf{0})$. Est-ce que cette loi conditionnelle admet une limite [1] quand $t \to \infty$, indépendante de la condition initiale ? Autrement dit, le processus ζ_t admet-il une *limite de Yaglom* ?

(b) Si on part d'une configuration η avec une infinité de sites occupés, mais telle que $\sup \eta < +\infty$, l'évènement $\{\xi_t \neq \mathbf{0}\}$ est bien sûr de probabilité 1, donc on ne fait plus de conditionnement. Est-ce que $\mathcal{L}(\zeta_t)$ admet une limite quand $t \to \infty$?

Il existe un lien entre ces deux questions. Heuristiquement, puisque la probabilité de non-extinction est exponentiellement décroissante, si l'on part d'une configuration comme dans (b) l'individu le plus à droite qui a une descendance à l'instant t a très probablement passé une grande partie de l'intervalle de temps $[0, t]$ très isolé du reste de la population, ce qui fait que la configuration de sa descendance doit ressembler à ce qu'elle serait si l'individu en question avait été tout seul à l'instant 0. Par conséquent, la limite de Yaglom dans le problème (a), si elle existe, est une bonne candidate pour être aussi la solution du problème (b). Dans la section 3.3, nous répondons positivement à la question (a).

Théorème (corollaire du théorème 22, chapitre 3)**.** *Le processus* $(\zeta_t, t \geq 0)$ *admet une limite de Yaglom : il existe une mesure* ν *portée par l'ensemble des configurations finies telle que, quelle que soit la condition initiale,*

$$\mathcal{L}(\zeta_t|\xi_t \neq \mathbf{0}) \Rightarrow \nu, \ t \to \infty.$$

L'équivalent du problème (b) a été résolu récemment par Andjel [2] pour un modèle analogue en temps discret. Nous sommes pour l'instant arrêtés par des difficultés techniques pour adapter la preuve de ce résultat en temps continu. Nos tentatives infructueuses nous ont cependant amené à établir une preuve alternative du résultat de Andjel, que nous donnons dans la section 3.2. Nous espérons qu'elle puisse être le point de départ d'un passage au temps continu.

1. au sens de la convergence faible des mesures.

Chapitre 1

Le problème de la construction des systèmes de particules en interaction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de la construction de *systèmes de particules en interaction* (SPI dans la suite). Dans le sens où on emploie ce terme, il s'agit d'une classe de processus aléatoires décrivant simultanément l'état d'un nombre infini de coordonnées (correspondant aux états des particules), où la dynamique est telle que l'évolution de chaque particule n'est pas nécessairement markovienne, mais l'évolution du système dans son ensemble l'est. On note E l'ensemble des états possibles d'une particule, et V l'ensemble des sites. L'état global du système est décrit par une configuration, c'est-à-dire une fonction $\eta = (\eta(v), v \in V)$, et on note

$$X := E^V$$

l'espace des configurations. Dans le cas où $E = \{0, 1\}$, une configuration η pourra être confondue avec le sous-ensemble de V donné par $\{v \in V : \eta(v) = 1\}$. Dans ce chapitre les sites seront toujours notés par des lettres latines comme v, w, et les configurations par des lettres grecques telles que $\xi,\ \zeta,\ \eta$ ou χ.
Comme nous allons le voir, le fait que le nombre de particules ne soit pas fini soulève des problèmes de définition. Il arrive souvent que des modèles que l'on cherche à étudier soient déterminés par une description intuitive de son comportement. Malheureusement il n'est pas impossible que la description heuristique de la dynamique qui anime nos particules puisse ne pas correspondre à un unique processus stochastique, d'autant plus qu'il n'y a pas une unique façon de définir une telle correspondance (voir définition 1).
La généralisation du cas $E = \{0, 1\}$ au cas d'un espace fini ou même d'un espace compact quelconque n'étant pas l'obstacle majeur à la problématique de ce chapitre, nous énonçons tous les résultats anciens et nouveaux avec $E = \{0, 1\}$, jusqu'à la section 1.4 où on prendra $E = \mathbb{Z}$. Par ailleurs les résultats de cette thèse sont donnés, par souci de simplicité, dans le contexte a priori restrictif où un seul site à la fois peut changer d'état (sauf dans la section 1.4), excluant par exemple le processus d'exclusion de la discussion. Nous croyons que cette restriction n'est pas non plus profonde, de sorte que notre cadre capture l'essentiel des questions liées à la construction des SPI.
Ces deux dernières restrictions définissent le cadre des *systèmes de spins*. On considère une

famille de réels positifs

$$c = (c_v(\eta), v \in V, \eta \in X), \tag{1.1}$$

et on cherche à définir un processus de Markov sur E où dans la configuration η, chaque coordonnée $\eta(v)$ change d'état au taux $c_v(\eta)$. Sous quelle condition cette prescription est sans ambiguïté ? Le générateur infinitésimal correspondant à cette description est l'opérateur défini par

$$\Omega f(\eta) := \sum_{v \in V} c_v(\eta)\big[f(\eta^v) - f(\eta)\big], \tag{1.2}$$

où η^v est la configuration qui coïncide avec η partout sauf en v :

$$\eta^v(w) := \begin{cases} \eta(w), & \text{si } w \neq v, \\ 1 - \eta(v), & \text{si } w = v. \end{cases}$$

Dans (1.2) la somme peut ne pas converger, par conséquent Ω n'est pas défini sur l'ensemble de toutes les fonctions, mais en tout cas il l'est au moins sur l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des fonctions dites *locales* :

$$\mathcal{F}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées}\}. \tag{1.3}$$

L'espace $X = \{0,1\}^V$ étant muni de sa topologie produit, nous rappelons qu'il s'agit d'un espace topologique compact métrisable. $C(X)$ désignera l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de sa norme naturelle

$$\|f\| := \sup_{\eta \in X} |f(\eta)|$$

On désignera par

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, X) \tag{1.4}$$

l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans X continues à droite et admettant des limites à gauche. Formellement, tous les processus évoqués sont définis par une famille $(\mathbb{P}_\xi, \xi \in X)$ de probabilités sur l'ensemble des trajectoires telles que

$$\forall \xi \in X,\ \mathbb{P}_\xi(\xi_0 = \xi) = 1,\ \text{et } \mathbb{P}_\xi(\mathbb{D}) = 1, \tag{1.5}$$

où ξ_t désigne l'application qui à $(\eta_s, s \geq 0) \in \mathbb{D}$ associe la valeur η_t. L'espérance associée à $\mathbb{P}_\xi$ sera notée $\mathbb{E}_\xi$. Par abus, on pourra aussi parler de processus pour désigner la famille $(\xi_t, t \geq 0)$. On note $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par la famille de variables $(\xi_s, 0 \leq s \leq t)$ et $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par la famille de variables $(\xi_s, s \geq 0)$. Le processus sera dit *markovien* si

$$\forall \xi \in X, \forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{P}_\xi\left(\xi_{s+\cdot} \in A \mid \mathcal{G}_s\right) = \mathbb{P}_{\xi_s}(A),\ \mathbb{P}_\xi - p.s. \tag{1.6}$$

Définition 1. *On dit que le processus* $(\mathbb{P}_\xi, \xi \in X)$

- *est solution de (MG) si* $\forall \xi \in X, \forall f \in \mathcal{F}(X)$, $f(\xi_t) - \int_0^t \Omega f(\xi_s)\mathrm{d}s$ *est une martingale relativement à* $\mathbb{P}_\xi$.

– *est solution de (MG') si* $\forall v, w \in V$ *avec* $v \neq w$, $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_{t+h}(v) \neq \xi_t(v) \mid \mathcal{G}_t) = c_v(\xi_t)h + o(h),$$

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_{t+h}(v) \neq \xi_t(v), \xi_{t+h}(w) \neq \xi_t(w) \mid \mathcal{G}_t) = o(h).$$

– *est solution de (SG) si c'est un processus markovien dont le générateur est donné par (1.2) pour* $f \in \mathcal{F}(X)$.

Un processus de Markov est dit *de Feller* s'il a la propriété raisonnable que les opérateurs $S(t)$ définis par

$$S(t)f(\eta) = \mathbb{E}_\eta f(\xi_t) \tag{1.7}$$

préservent $C(X)$. Dans ce cas la famille $(S(t), t \geq 0)$ est un *semi-groupe de Markov* sur $C(X)$: elle vérifie les propriétés

(a) $S(0) = \mathrm{Id}$ et $S(t+s) = S(t)S(s)$,
(b) $S(t)1 = 1$,
(c) $f \geq 0 \Rightarrow S(t)f \geq 0$,
(d) $\forall f \in C(X), t \mapsto S(t)f$ est continue à droite dans $C(X)$

(en fait seul (d) requiert que le processus de Markov ξ_t soit de Feller). De plus, il est bien connu ([35], chapitre I, théorème 1.5) que la relation (1.7) constitue une correspondance bi-univoque entre les processus de Feller sur X et les semi-groupes de Markov sur $C(X)$. Ceci réduit la question *(SG)* à la question de rechercher les semi-groupes de Markov tels que pour $f \in \mathcal{F}(X)$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{S(t)f - f}{t} = \Omega f. \tag{1.8}$$

Dans la section 1.1, nous rappelons brièvement les résultats des années 70 concernant cette question. Dans la section 1.2 nous résumons le principe de la construction (qui est la plus couramment utilisée) donnée par Liggett dans [34] sous la condition (H_1). Cette condition a été légèrement affaiblie par la suite en (H_1'). Depuis cette décennie et en particulier grâce à [34], on peut dire que le problème de la construction est résolu, cependant dans [12] on a essayé de donner un éclairage nouveau sur la raison d'être de la restriction (H_1'), en construisant le SPI par des outils uniquement probabilistes à l'aide de couplages adéquats de systèmes finis. On peut lire dans plusieurs des papiers cités que la condition heuristique pour que la dynamique soit bien posée est que "l'influence ne puisse pas provenir de l'infini". Plus précisément, il est nécessaire que ce qui arrive dans un court instant en un site donné ne soit pas soumis à l'influence d'une chaîne d'interactions venant d'infiniment loin en temps fini. Notre construction, donnée en section 1.3, montre que la prescription (H_1') n'est pas imposée par des raisons techniques, mais qu'elle est réellement le reflet du fait que sans elle la dynamique est mal posée. Dans la section 1.4 enfin, pour les besoins de la section 2.11, nous faisons un travail analogue lorsque $E = \mathbb{Z}$ mais avec des interactions supposées de rang fini.

1.1 Historique du problème

Les origines des SPI sont largement enracinées dans la mécanique statistique. La première analyse par Glauber en 1963 d'une évolution markovienne d'un système avec une

infinité de coordonnées en interaction était un modèle d'Ising stochastique [21]. Cependant, seules les espérances des spins sont considérées, de sorte que le problème mathématique réside en un système d'équations différentielles. En 1970, Spitzer [42] étudie des processus décrivant certaines marches aléatoires couplées (dont un processus d'exclusion avec des particules à vitesse variable) qui sont faits pour que leur mesure invariante soit une mesure de Gibbs pour un potentiel prescrit. Ceci est fait dans un premier temps pour un nombre fini de particules, et dans la deuxième partie le cas d'un nombre infini de particules est évoqué mais sans pouvoir faire plus que d'énoncer des conjectures basées sur des calculs formels.
La même année Holley [27] vérifie les conjectures de Spitzer en définissant proprement les processus infinis en jeu. La méthode est d'approcher le processus par des processus finis, puis d'utiliser un théorème de Trotter-Kato, ce qui revient en fait à passer par le théorème de Hille-Yosida. Ces résultats s'appliquent spécifiquement aux processus introduits par Spitzer et par ailleurs pour leur démonstration le fait d'être en dimension 1 ($V = \mathbb{Z}$) est crucial.
Un article très important est celui de Liggett [34] en 1972 qui améliore ce dernier résultat : il montre via le théorème de Hille-Yosida l'existence et l'unicité d'une solution de *(SG)* dans deux contextes légèrement différents : d'abord pour le processus d'exclusion avec des particules à vitesse variable introduit dans [42], puis pour les systèmes de spins avec des taux $c_v(\eta)$ quelconques (voir section 1.2) supposés continus et vérifiant

$$B := \sup_{v \in V} \sum_{w \neq v} a(w, v) < +\infty, \qquad (H_1)$$

où

$$a(w, v) := \sup_{\eta \in X} |c_v(\eta) - c_v(\eta^w)|, \ w \neq v,$$

et $a(w, w) = 0$. La valeur $a(w, v)$ quantifie l'influence maximale de l'état du site w sur le taux de saut au site v. La construction plus générale qu'il donne plus tard dans [35] unifie ces deux situations.
La même année Harris [26] améliore lui aussi le résultat de [27] en le généralisant à $V = \mathbb{Z}^d$, mais spécifiquement pour un processus d'exclusion à vitesses variables introduit dans [42], et en imposant de plus un rang d'interaction fini. La généralité est donc bien moindre que dans [34] mais son approche, qui est plus proche de celle que nous adoptons en section 1.3, a l'avantage de fournir une construction qui permet de garder trace de l'histoire individuelle des particules : par exemple l'évènement que deux particules échangent leur position est invisible dans la construction de [34]. Simultanément Holley [28] énonce aussi un résultat moins général que celui de [34] mais dont la preuve est beaucoup plus courte.
Holley et Stroock [29] adoptent en 1976 le point de vue "problème de martingales". Bien sûr, les problèmes *(MG)* et *(SG)* ne sont pas équivalents mais ils sont liés. Cet article contient les résultats suivants :

- Le problème *(MG)* admet toujours une solution pourvu que les taux $c_v(\eta)$ soient continus en η.
- Il existe des exemples où *(MG)* admet plus d'une solution.
- Lorsqu'il existe une unique solution à *(MG)*, c'est aussi une solution de *(SG)*.

Le résultat de Liggett y est aussi redémontré via l'unicité de la solution de *(MG)*.
La condition *(MG')* est une condition plus faible que *(MG)*. Gray et Griffeath [24] donnent

un exemple pathologique d'un processus vérifiant *(MG')* mais pas *(MG)*. Ainsi *(MG')*, bien qu'étant la formulation la plus intuitive de la dynamique que l'on veut construire, n'est pas la plus judicieuse. Un résultat notable de [24] est que le résultat de [34] reste vrai sous l'hypothèse, plus faible que (H_1), qu'il existe une famille $(\lambda_v, v \in V)$ de réels positifs vérifiant $\lambda = \inf_{v\in V} \lambda_v > 0$ et telle que

$$A := \sup_{v\in V} \sum_{w\neq v} \frac{\lambda_w}{\lambda_v} a(w,v) < +\infty. \qquad (H_1')$$

Gray [23] obtiendra le même résultat sous la même condition (H_1') en introduisant des systèmes de spins "contrôlés". Citons enfin les travaux de Liggett et Spitzer [36] et Andjel [1] où le problème de la construction est étudié pour certains processus pour lesquels $E = \mathbb{N}$. Dans ces processus la coordonnée en un site représente le nombre de particules qui occupent ce site, ces particules effectuant des marches aléatoires sujettes à un couplage. Dans [36] le couplage est donné par le fait que toutes les particules occupant un site utilisent la même horloge pour le quitter. Dans [1] il s'agit du processus *zero-range*, pour lequel un site contenant k particules expulse une particule à un certain taux $g(k)$. Dans ces deux cas il est nécessaire de se restreindre à des configurations $\eta(v)$ "pas trop croissantes" quand $v \to \infty$. Ces deux papiers sont à mettre en lien avec notre section 1.4 où on traite une situation avec des taux d'une forme quelconque mais un rang fini d'interaction.

1.2 Point de vue analytique. Construction de Liggett via Hille-Yosida

Il est instructif de comprendre où précisément intervient la condition (H_1) dans la construction de Liggett basée sur l'analyse fonctionnelle sur l'espace X, ceci afin de pouvoir comparer avec notre construction donnée dans la section 1.3. Le contenu de la présente section reprend de manière condensée les sections I.1 et I.2 de [35] où plus de détails seront trouvés.
Rappelons d'abord ce que nous dit la théorie de Hille-Yosida. Ce qui suit jusqu'au théorème 1 est valable pour un espace X compact quelconque.

Définition 2.

- *Un* prégénérateur de Markov *(*pGM*) sur X est un opérateur Ω, défini sur un s.e.v. dense $\mathcal{D}(\Omega)$ de $C(X)$, vérifiant*
  - $\Omega 1 = 0$,
  - $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha \geq 0$, $\min f \geq \min(f - \alpha\Omega f)$.
- *Ω est dit* fermé *si son graphe est fermé dans $C(X) \times C(X)$.*
- *On dit que Ω a pour* clôture *$\overline{\Omega}$ si l'adhérence du graphe de Ω est le graphe de l'opérateur $\overline{\Omega}$.*

Il est bien connu que $\mathcal{F}(X)$ est dense dans $C(X)$ et que l'opérateur défini sur $\mathcal{F}(X)$ par (1.2) est un pGM. En fait nous verrons qu'il est même défini sur l'espace suivant :

$$\mathcal{D}(X) := \{f \in C(X) : |\!|\!| f |\!|\!| = \sum_v \Delta_f(v) < \infty\}, \qquad (1.9)$$

où $\Delta_f(v) := \sup_{\eta\in X} |f(\eta) - f(\eta^v)|$ (attention, $\|\!| \cdot |\!\|$ n'est pas une norme). On rappelle un résultat classique qui est que tout pGM admet une clôture qui est encore un pGM.

Définition 3. *Un* générateur de Markov (GM) *est un* pGM Ω *fermé et tel que* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \alpha\Omega) = C(X)$ *pour* $\alpha > 0$ *assez petit (et alors automatiquement pour tout* $\alpha \geq 0$*).*

De ces définitions on déduit la chose suivante. Si Ω est un pGM, une condition suffisante pour que $\overline{\Omega}$ soit un GM est que pour $\alpha > 0$ assez petit,

$$\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \alpha\Omega)} = C(X). \tag{1.10}$$

Le théorème suivant justifie l'importance de la notion de générateur de Markov.

Théorème 1 (Hille-Yosida)**.** *Il existe une correspondance bi-univoque entre un générateur de Markov* Ω *sur* X *et un semi-groupe de Markov* $S(t)$ *sur* $C(X)$*. Cette correspondance est donnée par*

$$\Omega f = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)f - f}{t}, \ \textit{défini sur } \mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C(X) \ \textit{telles quef cette limite existe}\},$$

$$S(t)f = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{Id} - \frac{t}{n}\Omega\right)^{-n} f, \ f \in C(X).$$

Ainsi si le critère (1.10) est vérifié, ce théorème fournit une solution à *(SG)*, et par ailleurs on vérifie assez aisément que $\overline{\Omega}$ est déterminé par sa restriction à $\mathcal{F}(X)$, ce qui signifie l'unicité de cette solution. Expliquons maintenant comment pour le prégénérateur (1.2) la condition (H_1) permet de vérifier que (1.10) a lieu.
Liggett fait, en plus de (H_1), les deux hypothèses naturelles suivantes :

$$\forall v \in V, \ c_v(\eta) \text{ est une fonction continue de } \eta, \tag{H_2}$$

et

$$C := \sup_{v\in V, \eta\in X} c_v(\eta) < +\infty. \tag{H_3}$$

Ces deux restrictions sont moins significatives que (H_1). (H_3) implique que pour $f \in \mathcal{D}(X)$ la série (1.2) converge uniformément. Par ailleurs (H_2) fait que $\Omega f \in C(X)$ et on a

$$\|\Omega f\| \leq C|\!|\!| f |\!|\!|. \tag{1.11}$$

Si $f \in \mathcal{D}(X)$ et $g := f - \alpha\Omega f$, on a l'inégalité

$$\Delta_f(w) \leq \Delta_g(w) + \alpha \sum_{v\neq w} a(w,v)\Delta_f(v). \tag{1.12}$$

À l'aide de l'opérateur Γ sur $\ell^1(V)$ défini par $\Gamma\beta(v) = \sum_{w\neq v} a(w,v)\beta(v)$, dont la constante B définie en (H_1) est en fait la norme subordonnée, cette estimation s'écrit $\Delta_f \leq \Delta_g + \Gamma\Delta_f$. En itérant on obtient $\Delta_f \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\Gamma^k\Delta_g + \alpha^{n+1}\Gamma^{n+1}\Delta_f$. Si $\alpha < 1/B$ le passage à la limite dans cette inégalité donne

$$\Delta_f \leq (\mathrm{Id} - \alpha\Gamma)^{-1}\Delta_g. \tag{1.13}$$

Théorème 2 (Liggett,'72). *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), On a $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-\alpha\Omega)} = C(X)$ pour α assez petit. Par conséquent il existe un unique processus de Markov sur X vérifiant* (SG).

Résumé de la preuve. Soit une suite exhaustive de sous-ensembles $V_n \subset V$, et $\Omega_n f(\eta) := \sum_{v\in V_n} c_v(\eta)\big[f(\eta^v) - f(\eta)\big]$. La famille $c_v(\eta)$ est celle définie en (1.1), et les opérateurs Ω_n sont comme Ω définis sur $\mathcal{D}(X)$. Les quantités analogues à C, B, Γ pour Ω_n sont notées avec l'indice n. L'idée classique est d'exploiter les bonnes propriétés de ce générateur "fini" en montrant qu'elles passent à la limite.
Clairement $C_n \leq C$, $B_n \leq B$ et $\Omega_n f \to \Omega f$ uniformément pour $f \in \mathcal{D}(X)$. Prenons $g \in \mathcal{D}(X)$ et montrons que g est limite d'une suite de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \alpha\Omega)$. Puisque Ω_n est un opérateur borné sur $C(X)$, on vérifie que pour $\alpha < 1/\|Omega_n\|$, $\mathrm{Id} - \alpha\Omega_n$ est inversible et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \alpha\Omega_n) = C(X)$. Il existe ainsi $f_n \in C(X)$ telle que $f_n - \alpha\Omega_n f_n = g$. Il n'est pas difficile de voir que $f_n \in \mathcal{D}(X)$, de sorte qu'on peut considérer $g_n := f_n - \alpha\Omega f_n$. Puisque $\Gamma_n \leq \Gamma$, l'inégalité (1.13) donne $\Delta_{f_n} \leq (\mathrm{Id} - \alpha\Gamma)^{-1}\Delta_g$. En utilisant (1.11) on obtient enfin

$$\begin{aligned}\|g - g_n\| &= \alpha\|(\Omega - \Omega_n)f_n\| \\ &\leq \alpha C \sum_{v\notin V_n} \Delta_{f_n}(v) \\ &\leq \alpha C \sum_{v\notin V_n} (\mathrm{Id} - \alpha\Gamma)^{-1}\Delta_g(v),\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ pourvu que $\alpha < 1/B$, puisque $(\mathrm{Id} - \alpha\Gamma)^{-1}\Delta_g \in \ell^1(V)$. □

Avant de poursuivre on précise que nos tentatives pour adapter cette preuve sous la condition affaiblie (H_1') ont été infructueuses.

1.3 Une construction élémentaire des systèmes de spins avec interactions de rang infini

Considérons une collection de taux de transition $(c_v(\eta), v \in V, \eta \in X)$. On fait dans cette section l'hypothèse suivante :

$$A := \sup_{v\in V} \sum_{w\neq v} \frac{\lambda_w}{\lambda_v} a(w,v) < +\infty, \qquad (H_1')$$

où $a(w,v)$ est défini à la page 8, et $(\lambda_v, v \in V)$ est une famille de réels positifs telle que

$$\lambda = \inf_{v\in V} \lambda_v > 0.$$

La condition (H_1') dit que la dépendance de $c_v(\eta)$ en les coordonnées $(\eta(w), w \in V)$ est d'une certaine façon faible pour les sites w lointains de v. En plus de (H_1') on suppose encore que (H_2) et (H_3) sont satisfaites.
L'objectif premier du travail que nous présentons est de donner une explication intuitive de

(H_1'), et ce faisant de proposer une construction assez générale basée uniquement sur des outils probabilistes élémentaires. De ce point de vue, notre construction est dans le même esprit que le travail de Harris dans un cadre particulier ([26]), mais nous ne demandons pas des interactions de rang fini. Nous montrons que quand (H_1') est vérifiée, un certain processus de Markov, à espace d'état dénombrable, a la propriété de ne pas exploser en temps fini. Ceci implique qu'il ne peut pas y avoir d'influence venant d'infiniment loin en un site donné en temps fini. Heuristiquement, l'idée principale est que pour déterminer l'état $\xi_t^\eta(v)$ de notre système de spins au site v à l'instant t, partant d'une configuration η à l'instant 0, il est nécessaire de connaître $\eta(w)$ pour un certain ensemble (aléatoire) F de sites w. Notre interprétation de (H_1') est qu'elle donne le contrôle adéquat sur les dépendances à longue portée de $c_v(\eta)$ pour que F reste fini presque sûrement. Ceci implique que le fait de geler tous les sites en dehors d'une boîte finie n'a pas d'influence sur la valeur de $\xi_t^\eta(v)$, pourvu que cette boîte soit suffisamment grande. Ceci constitue le programme de la sous-section 1.3.1, qui nous amènera à considérer la limite de systèmes de spins finis. Dans la sous-section 1.3.2, nous nous attachons à faire le lien entre ce processus limite et le prégénérateur de Markov (1.2) associé aux taux $c_v(\eta)$ définis en (1.1). Enfin, il est techniquement important, lorsqu'on donne une certaine construction d'un processus, d'avoir une caractérisation de ses mesures invariantes. C'est aussi fait dans la sous-section 1.3.2.

1.3.1 Couplage et existence du processus limite

On introduit l'ensemble des configurations avec un nombre fini de 1, soit

$$X' = \{\eta \in X : \mathrm{Card}(\eta) < +\infty\}, \tag{1.14}$$

où $\mathrm{Card}(\eta) := \mathrm{Card}\{v \in V : \eta(v) = 1\}$.
Si η_1 et η_2 sont deux configurations qui coïncident sur un sous-ensemble W de V, on a

$$\forall v \in W,\ |c_v(\eta_1) - c_v(\eta_2)| \leq \sum_{w \in W^c} a(w,v). \tag{1.15}$$

Il s'agit d'une conséquence directe de la définition de $a(w,v)$ et de l'inégalité triangulaire (ainsi que de l'hypothèse (H_2) dans le cas où W^c est infini). Enfin, On définit la notation

$$\overline{a}(w,v) := a(v,w).$$

On insiste sur le fait que l'intérêt de notre construction est de mettre en lumière l'aspect naturel de (H_1'), qui n'est pas palpable dans la démonstration du théorème 2. On utilise pour cela essentiellement une méthode de couplage et une relation de dualité entre deux processus.
Pour résumer notre stratégie, nous allons d'abord définir un processus en laissant évoluer uniquement les coordonnées à l'intérieur d'une boîte finie $V_n \subset V$, puis nous ferons tendre V_n vers V en croissant, et prouverons que la suite de processus obtenus converge presque sûrement. Le théorème 3 rend tout ceci possible en mettant en œuvre une construction graphique. L'idée de construction graphique a été développée très tôt par Harris dans un cadre particulier et s'est avérée fructueuse au delà des problèmes liés à la construction de

processus (voir par exemple [25]). Elle consiste à fabriquer un processus sur X comme une fonction déterministe d'un graphe aléatoire sous-jacent, qui contient une réalisation des instants et des lieux des différentes transitions éventuelles, généralement obtenus à partir d'une famille de processus de Poisson indépendants, indexée par l'ensemble des sites. Tout l'aléa est alors contenu dans cette famille de processus de Poisson.
Nous utilisons ici des processus de Poisson indépendants d'intensité égale et assez grande pour pouvoir gouverner les transitions de tous les sites. Lorsque l'un d'entre eux saute, il se produit éventuellement un saut pour l'état de la configuration au site correspondant. Ce saut a lieu ou pas selon une certaine probabilité imposée par la dynamique.
Avant d'expliquer comment obtenir un système de spins, commençons par définir les *systèmes de spins finis*. Il s'agit de simples processus de Markov à espace fini.

Définition 4. *Soit $\eta \in X$ et W un sous-ensemble fini de V. On dit qu'un processus $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$ est un système de spins fini partant de η et de paramètres (W, c) si c'est un processus de Markov sur $X_\eta^W = \{\theta \in X : \theta_{|W^c} = \eta_{|W^c}\}$ tel que*

- *$\xi_0 = \eta$;*
- *pour $\theta, \theta' \in X_\eta^W$, son taux de saut de θ à θ' est $c_v(\theta)$ si $\theta' = \theta^v$ pour un $v \in W$, et 0 sinon.*

On note $\mathbb{P}_{\eta,W}$ la loi d'un tel processus et $\mathbb{E}_{\eta,W}$ l'espérance sous cette loi. En utilisant ces notations on continuera à noter ξ_t la valeur du processus à l'instant t.

On fixe désormais une suite croissante $(V_n, n \geq 1)$ de boîtes finies telles que $\cup_{n\geq 1} V_n = V$. Nous voulons décrire ce qui arrive à un système de spins fini partant de η et de paramètres (V_n, c), losque $n \to \infty$.
On passe maintenant à la définition de processus de Markov auxiliaires, qu'on appellera *processus d'invasion*, et qui nous serviront comme outils pour contrôler les conséquences de la modification d'un des paramètres η ou W sur l'évolution d'un système de spins fini. Ce sont eux aussi des processus à valeurs dans l'espace des configurations, similaires au processus de percolation de premier passage mais avec des temps de passage exponentiels de paramètres dépendant des arêtes, et où les arêtes entre tous les couples de sommets sont éventuellement concernées par les passages.
Soit $W \subset V$ et $\alpha = (\alpha(w, v),\ w \neq v)$ une famille de réels positifs. Plus tard, le rôle de α sera joué par a ou par $\overline{a}$, selon le contexte. Le principe est que, indépendamment pour chaque couple de sites (x, y), on place des flèches de x vers y aux instants de saut d'un processus de Poisson, et qu'on décide que les 1 se propagent selon ces flèches. Plus rigoureusement on considère une famille de processus de Poisson mutuellement indépendants $(P_{x,y},\ x \neq y)$, où $P_{x,y}$ a pour intensité $\alpha(x, y)$, et on définit un graphe orienté (aléatoire) G sur l'ensemble $V \times \mathbb{R}_+$ en prescrivant que $\big((x, s), (y, t)\big)$ est une arête de G si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $x = y$ et $s \leq t$,
2. $s = t$ et s est un instant de saut de $P_{x,y}$.

On note alors

$$\{(w, s) \to_G (v, t)\} \tag{1.16}$$

l'évènement qu'il y ait un chemin orienté de (w, s) vers (v, t) dans G, c'est-à-dire une suite finie de flèches mises bout-à-bout de w vers v à des instants croissants.

Définition 5. *Soit* $\mathbf{P}_{W,\alpha}$ *la loi du processus* $(\zeta_t, t \geq 0)$ *sur* X *défini par*

$$\zeta_t(v) = 1 \Leftrightarrow \exists w \in W,\ (w,0) \to_G (v,t),$$

et $\mathbf{E}_{W,\alpha}$ *l'espérance sous cette loi. En utilisant ces notations on continuera à noter* ζ_t *la valeur du processus à l'instant* t*. Tout processus dont la loi est* $\mathbf{P}_{W,\alpha}$ *sera appelé un processus d'invasion de paramètres* (W,α)*. Si* $W = \{w\}$ *avec* $w \in V$*, on écrit simplement* $\mathbf{P}_{w,\alpha}$*.*

Une conséquence immédiate de cette définition est qu'un processus d'invasion possède la propriété de monotonie vis-à-vis du paramètre α. Plus précisément si α et $\widetilde{\alpha}$ sont tels que $\forall w \neq v$, $\alpha(w,v) \leq \widetilde{\alpha}(w,v)$, alors un argument standard de couplage montre que pour toute fonction positive f mesurable sur X et croissante pour l'ordre partiel canonique sur X, on a

$$\mathbf{E}_{W,\alpha}[f(\zeta_t)] \leq \mathbf{E}_{W,\widetilde{\alpha}}[f(\zeta_t)]. \tag{1.17}$$

On définit, pour $v \in V$ et $\chi \in X$,

$$\gamma_\alpha(v,\chi) := (1-\chi(v)) \sum_{w \neq v} \alpha(w,v)\chi(w),$$

$$g_\alpha(\chi) := \sum_{v \in V} \lambda_v \gamma_\alpha(v,\chi),$$

où λ_v est défini dans (H_1'). Remarquons qu'en prenant $\alpha = a$, on a

$$\gamma_a(v,\chi) \leq \lambda^{-1}\lambda_v \sum_{w \neq v} \lambda_v^{-1}\lambda_w a(w,v),$$

et par conséquent

$$\gamma_a(v,\chi) \leq \lambda^{-1}\lambda_v A. \tag{1.18}$$

On définit également la fonction

$$q(\chi) := \sum_{v \in V} \lambda_v \chi(v),\ \chi \in X.$$

Dans le cas particulier où $\lambda_v \equiv 1$, remarquons que $q(\chi)$ est simplement le cardinal de χ. Le résultat que l'on énonce maintenant donne une description simple du processus d'invasion dans deux cas spéciaux : dans le premier, on part d'une configuration avec un nombre fini de 0, et dans le deuxième avec un 1 en un certain site et des 0 partout ailleurs. On se concentre sur ces deux types de conditions initiales parce que ce sont en fait les seules qui vont nous servir.
Dans la suite on note 1_W la configuration telle que $1_W(v) = 1$ si $v \in W$ et 0 sinon. La restriction d'une configuration η à un ensemble $W \subset V$ sera notée $\eta_{|W}$.

Proposition 1. (i) *Supposons que* W^c *soit fini. Sous* $\mathbf{P}_{W,a}$*,* $(\zeta_t, t \geq 0)$ *est un processus de Markov sur l'ensemble fini* $X_W = \{\chi \in X : \chi_{|W} \equiv 1\}$*, partant de* $\zeta_0 = 1_W$*. De plus, dans la configuration* χ*, le site* v *change d'état au taux* $\gamma_a(v,\chi)$*.*

(ii) *Supposons maintenant que* $W = \{w\}$ *et que* (H_1') *soit vérifiée. Alors*

$$\mathbf{E}_{w,\overline{a}}[q(\zeta_t)] \leq \lambda_w e^{At}, \tag{1.19}$$

A étant la constante dans (H_1')*. En particulier sous* $\mathbf{P}_{w,\overline{a}}$*,* $(\zeta_t, t \geq 0)$ *est non-explosif au sens où* $\mathbf{P}_{w,\overline{a}}(\mathrm{Card}(\zeta_t) < +\infty) = 1$*, et* $(\zeta_t, t \geq 0)$ *est un processus de Markov à valeurs dans l'ensemble dénombrable* X'*, partant de* $\zeta_0 = 1_w$*. De plus, dans la configuration* χ*, le site* v *change d'état au taux* $\gamma_{\overline{a}}(v, \chi)$*.*

Démonstration. Dans chacun des deux cas le caractère markovien de $(\zeta_t, t \geq 0)$ découle du fait que les processus de Poisson sont à incréments indépendants et stationnaires. Pour calculer les taux de saut dans le premier cas, remarquons simplement que pour une configuration initiale χ avec $\chi(v) = 0$, la coordonnée $\zeta_t(v)$ saute si et seulement si l'un des processus $P_{w,v}$ (avec $\chi(w) = 1$) saute. Le résultat est donc une conséquence du fait que $\sum_{w:\chi(w)=1} P_{w,v}$ est un processus de Poisson d'intensité $\gamma_\alpha(v, \chi)$. Si par contre $\chi(v) = 1$ le taux de saut en v vaut 0 car seules des transitions $0 \to 1$ surviennent.
Quant à la seconde assertion, considérons d'abord

$$a_n(x, y) := \begin{cases} a(x, y), & \text{si } x, y \in V_n, \\ 0, & \text{sinon ;} \end{cases} \tag{1.20}$$

et $\overline{a}_n(x, y) := a_n(y, x)$. Soit $u_n(t) := \mathbf{E}_{w,\overline{a}_n}[q(\zeta_t)]$. D'une part, un simple calcul utilisant (H_1') montre que $g_{\overline{a}_n}(\chi) \leq Aq(\chi)$. D'autre part, sous $\mathbf{P}_{w,\overline{a}_n}$, $(\zeta_t, t \geq 0)$ est à valeurs dans un ensemble fini donc la formule suivante est une simple conséquence de la définition du générateur d'un processus de saut appliquée à la fonction q :

$$\mathbf{E}_{w,\overline{a}_n}[q(\zeta_{t+h})|\zeta_t] = q(\zeta_t) + g_{\overline{a}_n}(\zeta_t)h + o(h).$$

En prenant l'espérance dans cette formule, il vient

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_n(t+h) - u_n(t)}{h} = \mathbf{E}_{w,\overline{a}_n}[g_{\overline{a}_n}(\zeta_t)] \leq Au_n(t).$$

Mais alors le lemme de Grönwall avec le fait que $u_n(0) = \lambda_w$ donnent l'inégalité $u_n(t) \leq \lambda_w e^{At}$.
Pour terminer la preuve nous définissons un couplage des processus $(\zeta^n, n \geq 1)$ et ζ, qui sont des processus d'invasion de paramètres respectifs $(w, \overline{a}_n)$ et $(w, \overline{a})$, ce couplage ayant la propriété que $\zeta_t^n(v)$ est une suite croissante qui converge vers $\zeta_t(v)$. Pour ceci, on considère la construction Poissonienne ci-dessus et on définit ζ^n exactement comme ζ sauf que ζ^n utilise uniquement $P_{x,y}$ avec $x, y \in V_n$. Plus précisément on décide que $((x, s), (y, t))$ est une arête dans le graphe G_n si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée : soit $x = y$ et $s \leq t$, soit $s = t$, $x, y \in V_n$ et s est un instant de saut de $P_{x,y}$. Maintenant on définit ζ_t^n par

$$\zeta_t^n(v) = 1 \Leftrightarrow (w, 0) \to_{G_n} (v, t).$$

Tout chemin fixé dans le graphe G est aussi un chemin du graphe G_n dès que V_n est assez gros pour contenir tous les sommets de ce chemin. Par conséquent $\zeta_t(v)$ est bien la limite croissante quand $n \to \infty$ de $\zeta_t^n(v)$ presque sûrement. Par le théorème de convergence

monotone, on a que $\mathbf{E}_{w,\overline{a}}[q(\zeta_t)] = \lim_{n\to\infty} u_n(t)$. Ainsi la borne donnée pour $u_n(t)$ est aussi valable pour $\mathbf{E}_{w,\overline{a}}[q(\zeta_t)]$.
Puisque le processus ζ_t n'explose pas en temps fini, il s'agit d'un simple processus de saut pur sur l'ensemble X' dénombrable. On peut donc procéder comme dans le cas où W^c est fini pour déterminer ses taux de transition. □

Remarque. C'est précisément dans la preuve précédente que (H_1') agit. Imaginons par souci de simplicité que $\lambda_v \equiv 1$. Alors ce qui apparaît dans cette preuve concernant le processus d'invasion ζ_t de paramètres $(w, \overline{a})$ est que par (H_1') on a un contrôle $|\zeta_t| \leq B_t$, où B_t est un processus de branchement binaire en temps continu, d'intensité A. C'est cela qui assure la non-explosivité de ζ_t, qui est cruciale dans le corollaire 1.
La proposition suivante établit une relation de dualité entre le processus d'invasion de paramètre a et celui de paramètre $\overline{a}$.

Proposition 2. *Soit $v \in V$ et $W \subset V$. Alors*

$$\mathbf{P}_{W,a}(\zeta_t(v) = 1) = \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\exists w \in W, \zeta_t(w) = 1). \tag{1.21}$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$. Pour $s \leq t$, on pose

$$\widetilde{P}_{x,y}(s) = P_{y,x}(t) - P_{y,x}(t-s).$$

Les processus de Poisson étant à accroissements indépendants et stationnaires, $\widetilde{P}_{x,y}$ est aussi un processus de Poisson sur l'intervalle de temps $[0,t]$, d'intensité $a(y,x)$, et les processus $(\widetilde{P}_{x,y}, x \neq y)$ sont mutuellement indépendants puisque les $(P_{x,y}, x \neq y)$ le sont. On définit un nouveau graphe $\widetilde{G}$ sur $V \times [0,t]$ de la même façon que G, mais en utilisant cette fois $\widetilde{P}_{x,y}$ au lieu de $P_{x,y}$. L'équation (1.21) découle alors de l'équivalence :

$$(w,0) \to_G (v,t) \Leftrightarrow (v,0) \to_{\widetilde{G}} (w,t),$$

qui traduit le fait qu'un chemin de $(w,0)$ vers (v,t) dans G correspond, en retournant les flèches et en inversant le sens du temps, à un chemin de $(v,0)$ vers (w,t) dans $\widetilde{G}$. □

Passons maintenant au résultat principal de cette section.

Théorème 3. *Soient $n \geq 1$ et $\eta \in X$. Il existe un couplage de processus $(\xi^{\eta,n}, \eta \in X, n \geq 1)$ et $(\zeta^n, n \geq 1)$ tels que*
(i) *$\xi^{\eta,n}$ soit un système de spins fini partant de η et de paramètres (V_n, c),*
(ii) *ζ^n soit un processus d'invasion de paramètres (V_n^c, a),*
(iii) *pour tout $t \geq 0$ et $v \in V_n$, on ait*

$$\{\zeta_t^n(v) = 0\} \subset \{\forall k \geq n,\ \xi_t^{\eta,n}(v) = \xi_t^{\eta,k}(v)\}.$$

Démonstration. Comme annoncé, nous allons utiliser une construction graphique commune pour construire une famille de systèmes de spins finis sur un même espace de probabilité. On commence donc sans surprise par considérer une famille $(N_v, v \in V)$ de processus de Poisson mutuellement indépendants, N_v étant d'intensité $C + A\lambda^{-1}\lambda_v$. On introduit aussi une famille, indépendante de $(N_v, v \in V)$, de variables aléatoires $(U_{v,i}, v \in V, i \geq 1)$

mutuellement indépendantes, $U_{v,i}$ étant distribuée selon la loi uniforme sur $[0, C+A\lambda^{-1}\lambda_v]$. Tout ce matériel aléatoire est défini sur un espace de probabilité approprié $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et l'espérance sous $\mathbb{P}$ est notée $\mathbb{E}$. Pour $n \geq 1$, on considère

$$N^n = \sum_{v \in V_n} N_v.$$

Les sauts de N^n sont presque sûrement distincts et n'ont pas de point d'accumulation, de sorte qu'il existe une suite strictement croissante $(t_j,\ j \geq 1)$ telle que les sauts de N^n soient les $t_j, j \geq 1$. Soit v_j le site de V_n tel que $N_{v_j}(t_j) - N_{v_j}(t_j^-) = 1$, et $u_j = U_{v_j, N_{v_j}(t_j)}$. On définit alors $\xi_t^{\eta,n}$ de proche en proche, sur les intervalles de temps $[t_j, t_{j+1})$ (sa valeur est constante sur chacun de ces intervalles) :

- pour $t \in [0, t_1)$, $\xi_t^{\eta,n} = \eta$;
- pour $t \in [t_j, t_{j+1})$, $\xi_t^{\eta,n} = \begin{cases} \left(\xi_{t_{j-1}}^{\eta,n}\right)^{v_j}, & \text{si } u_j < c_{v_j}(\xi_{t_{j-1}}^{\eta,n}), \\ \xi_{t_{j-1}}^{\eta,n}, & \text{sinon.} \end{cases}$

On définit aussi ζ^n de proche en proche, à partir du même matériel aléatoire :

- pour $t \in [0, t_1)$, $\zeta_t^n = 1_{V_n^c}$;
- pour $t \in [t_j, t_{j+1})$,

$$\zeta_t^n = \begin{cases} \left(\zeta_{t_{j-1}}^n\right)^{v_j}, & \text{si } \zeta_{t_{j-1}}^n(v_j) = 0, \text{ et } A_j^n \leq u_j \leq A_j^n + \gamma_a(v_j, \zeta_{t_{j-1}}^n), \\ \zeta_{t_{j-1}}^n, & \text{sinon ;} \end{cases}$$

où $A_j^n := \inf_{k \geq n} c_{v_j}(\xi_{t_{j-1}}^{\eta,k})$. La valeur de A_j^n représente le taux de saut simultané de tous les processus $\xi_t^{\eta,k}$, $k \geq n$, lors de cette j-ième transition. Rappelons que $\gamma_a(v_j, \zeta_{t_{j-1}}^n) = \sum_{w \neq v_j} a(w, v_j)\zeta_{t_{j-1}}^n(w)$, lorsque $\zeta_{t_{j-1}}^n(v_j) = 0$.

Il découle encore des propriétés des processus de Poisson que chacun des processus $\xi^{\eta,n}$ et ζ^n a la propriété de Markov. Par ailleurs les taux de saut sont ceux voulus, par construction. En effet, pour chaque processus le taux de saut d'une coordonnée est donnée par la longueur instantanée de l'intervalle auquel on demande à u_j d'appartenir pour que la coordonnée saute, puisque dans notre construction cet intervalle est toujours contenu dans $[0, C + A\lambda^{-1}\lambda_{v_j}]$ d'après (1.18). Observons alors que cette longueur a été justement choisie pour que tous ces processus aient la dynamique désirée.

Montrons (iii) par récurrence sur j. Avec la convention $t_0 = 0$, on doit prouver que pour tous $j \geq 0$ et $v \in V$,

$$\{\zeta_{t_j}^n(v) = 0\} \subset \{\forall k \geq n,\ \xi_{t_j}^{\eta,n}(v) = \xi_{t_j}^{\eta,k}(v)\}. \tag{1.22}$$

Le cas $j = 0$ est une conséquence de la définition des processus. Supposons que (1.22) soit vérifiée pour un $j \geq 0$ et que $\zeta_{t_j}^n(v_{j+1}) = 0$ (dans le cas contraire la conclusion est triviale). Alors (1.15) donne

$$\sup_{k \geq n} c_{v_{j+1}}(\xi_{t_j}^{\eta,k}) \leq \inf_{k \geq n} c_{v_{j+1}}(\xi_{t_j}^{\eta,k}) + \gamma_a(v_{j+1}, \zeta_{t_j}^n).$$

Par conséquent, lorsque la transtion à l'instant t_{j+1} fait sauter $\xi_t^{\eta,k}(v_{j+1})$ mais pas $\xi_t^{\eta,k'}(v_{j+1})$, pour deux entiers $k, k' \geq n$, elle doit nécessairement faire sauter aussi $\zeta_t^n(v_{j+1})$ de 0 à 1. Ainsi (1.22) reste vraie pour $j+1$. □

Corollaire 1. *Dans le couplage précédent, pour tout $v \in V$ et $t \geq 0$, la suite $\xi_t^{\eta,n}(v)$ est presque sûrement constante à partir d'un certain rang n (aléatoire), et on peut donc définir*

$$\xi_t^{\eta}(v) := \lim_{n\to\infty} \xi_t^{\eta,n}(v).$$

Démonstration. Fixons $v \in V$ et $t \geq 0$. La suite d'évènements

$$E_n := \{\forall k \geq n,\ \xi_t^{\eta,k}(v) = \xi_t^{\eta,n}(v)\}$$

est croissante donc par le théorème 3 (iii) il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{V_n^c,a}\ (\zeta_t(v) = 1) = 0$. Or la relation de dualité (1.21) implique que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{V_n^c,a}(\zeta_t(v) = 1) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\exists w \in V_n^c : \zeta_t(w) = 1)\\ &= \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\mathrm{Card}(\zeta_t) = +\infty)\\ &= 0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de (1.19). □

1.3.2 Générateur et mesures invariantes du processus limite

Jusqu'à présent nous avons seulement établi l'existence du processus limite $(\xi_t^{\eta},\ t \geq 0)$ mais nous n'avons aucune réelle information concernant sa loi. Dans cette section nous montrons qu'il possède la propriété de Markov et que l'expression de son générateur est celle attendue, à savoir que (1.8) a lieu pour les fonctions f dans un ensemble que nous introduisons maintenant.
Pour une fonction f sur X, on rappelle la notation $\Delta_f(v) := \sup_{\eta\in X} |f(\eta) - f(\eta^v)|$ qui mesure l'influence de $\eta(v)$ sur la valeur de $f(\eta)$. Plutôt qu'avec les fonctions locales nous préférons travailler ici avec l'espace fonctionnel suivant qui s'avère plus adapté à notre problème que l'espace $\mathcal{F}(X)$. Soit

$$\mathcal{D}(X) = \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue et } \sum_{v\in V} \lambda_v \Delta_f(v) < +\infty\}.$$

Remarquons que la notation $\mathcal{D}(X)$ change par rapport à la section 1.2 du fait de la présence des λ_v, $v \in V$. $\mathcal{D}(X)$ doit être vu comme un espace de fonctions régulières au sens où ce sont des fonctions qui dépendent peu des coordonnées lointaines. Pour $f \in \mathcal{D}(X)$ on note

$$|\!|\!| f |\!|\!| := \sum_{v\in V} \lambda_v \Delta_f(v).$$

Il faut noter que ces deux notations ont légèrement changé par rapport à la section 1.2, du fait que (H_1) a été remplacée par (H_1'). Nous rappelons la définition du prégénérateur

$$\Omega f(\eta) := \sum_{v\in V} c_v(\eta)\big[f(\eta^v) - f(\eta)\big],\ f \in \mathcal{D}(X),$$

et de sa restriction en volume fini

$$\Omega_n f(\eta) := \sum_{v\in V_n} c_v(\eta)\big[f(\eta^v) - f(\eta)\big],\ f \in \mathcal{D}(X).$$

La preuve du théorème 4 montre que Ω est bien défini sur $\mathcal{D}(X)$. Quant à Ω_n, il définit même un opérateur borné sur $C(X)$ entier.
Pour $f \in C(X)$ et $\eta \in X$, on définit

$$S_n(t)f(\eta) := \mathbb{E}_{\eta,V_n}[f(\xi_t)],\ \text{et}\ S(t)f(\eta) := \mathbb{E}[f(\xi_t^\eta)].$$

Il découle du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t)f(\eta) = S(t)f(\eta). \tag{1.23}$$

Puisque nous utiliserons ce théorème à plusieurs reprises (sur l'espace de probabilité, sur un intervalle de temps, ainsi que sur l'ensemble V) nous l'appellerons simplement TCD. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 4. *$S(t)$ définit un semi-groupe de Markov sur $C(X)$, et pour $f \in \mathcal{D}(X)$ on a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)f(\eta) - f(\eta)}{t} = \Omega f(\eta). \tag{1.24}$$

Démonstration. Rappelons deux identités concernant les opérateurs $S_n(t)$. Pour $f \in \mathcal{D}(X)$ et $\eta \in X$, on a

$$S_n(t)f(\eta) = f(\eta) + \int_0^t \Omega_n S_n(s)f(\eta)\mathrm{d}s, \tag{1.25}$$

et pour $t_1,\ t_2 \geq 0$, on a

$$S_n(t_1)S_n(t_2)f(\eta) = S_n(t_1+t_2)f(\eta). \tag{1.26}$$

Puisque (1.25) et (1.26) portent sur un processus de Markov à espace d'état fini, elles sont élémentaires (voir par exemple le théorème 2.1.1 dans [38]). On continue en établissant des inégalités utiles pour la suite. Premièrement, pour $f \in \mathcal{D}(X)$,

$$|\Omega f(\eta)| \leq \lambda^{-1} C |\!|\!| f |\!|\!|, \tag{1.27}$$

$$|\Omega_n f(\eta)| \leq \lambda^{-1} C |\!|\!| f |\!|\!|, \tag{1.28}$$

$$|(\Omega_n - \Omega)f(\eta)| \leq C \sum_{v\in V_n^c} \Delta_f(v). \tag{1.29}$$

L'inégalité (1.27) vient simplement de ce que $|\Omega f(\eta)| \leq \sum_{v\in V} c_v(\eta)|f(\eta^v) - f(\eta)| \leq C\sum_{v\in V}\Delta_f(v) \leq C\sum_{v\in V}\lambda^{-1}\lambda_v\Delta_f(v)$. Les inégalités (1.28) et (1.29) s'obtiennent de manière similaire.
Nous cherchons maintenant à contrôler $\Delta_{S(t)f}(w)$. Nous considérons pour cela deux configurations η_1 et $\eta_2 = (\eta_1)^w$ et nous décrivons un nouveau couplage basé sur une idée similaire à celle du couplage de la sous-section 1.3.1. On prend $(N_v, v \in V)$, $(U_{v,i}, v \in V, i \geq 1)$, et les suites v_j, t_j et u_j comme dans la preuve du théorème 3, puis on définit les processus $(\xi^{\eta_1,n}, t \geq 0)$ et $(\xi^{\eta_2,n}, t \geq 0)$ par :

– pour $t \in [0, t_1)$, $\xi_t^{\eta_i,n} = \eta_i$;

– pour $t \in [t_j, t_{j+1})$, $\xi_t^{\eta_i,n} = \begin{cases} \left(\xi_{t_{j-1}}^{\eta_i,n}\right)^{v_j}, & \text{si } u_j < c_{v_j}(\xi_{t_{j-1}}^{\eta_i,n}), \\ \xi_{t_{j-1}}^{\eta_i,n}, & \text{sinon.} \end{cases}$

On définit conjointement un troisième processus $(\Gamma_t^n, t \geq 0)$ à partir du même matériel aléatoire :

– pour $t \in [0, t_1)$, $\Gamma_t^n = 1_w$,

– pour $t \in [t_j, t_{j+1})$,

$$\Gamma_t^n = \begin{cases} \left(\Gamma_{t_{j-1}}^n\right)^{v_j}, & \text{si } \Gamma_{t_{j-1}}^n(v_j) = 0, \text{ et } B_j^n \leq u_j \leq B_j^n + \gamma_{a_n}(v_j, \Gamma_{t_{j-1}}^n), \\ \Gamma_{t_{j-1}}^n, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $B_j^n := \min_{i=1,2} c_{v_j}(\xi_{t_{j-1}}^{\eta_i,n})$. On observe que $(\xi_t^{\eta_i,n}, t \geq 0)$ est un système de spins fini partant de η_i, de paramètres (V_n, c), et que $(\Gamma_t^n, t \geq 0)$ est un processus d'invasion de paramètres (w, a_n) (on a gardé la notation (1.20)). Ceci se justifie de la même façon que pour les processus $\xi^{\eta,n}$ et ζ^n dans le théorème 3. Par ailleurs, pour tout site v, puisque l'inclusion $\{\xi_t^{\eta_1,n}(v) \neq \xi_t^{\eta_2,n}(v)\} \subset \{\Gamma_t^n(v) = 1\}$ a lieu pour $t = 0$ et qu'elle est préservée par n'importe quelle transition, elle est vraie pour tout $t \geq 0$. Il découle alors des équations (1.17) et (1.21) que

$$\mathbb{P}(\xi_t^{\eta_1,n}(v) \neq \xi_t^{\eta_2,n}(v)) \leq \mathbb{P}(\Gamma_t^n(v) = 1) = \mathbf{P}_{w,a_n}(\zeta_t(v) = 1) \leq \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_t(w) = 1).$$

Ce couplage nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} |S_n(t)f(\eta_1) - S_n(t)f(\eta_2)| &\leq \mathbb{E}\big[|f(\xi_t^{\eta_1,n}) - f(\xi_t^{\eta_2,n})|\big] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbb{1}_{\{\xi_t^{\eta_1,n}(v) \neq \xi_t^{\eta_2,n}(v)\}}\right] \\ &\leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbb{P}(\xi_t^{\eta_1,n}(v) \neq \xi_t^{\eta_2,n}(v)). \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant ceci pour toute paire (η_1, η_2) de configurations coïncidant partout sauf en w, on obtient

$$\Delta_{S_n(t)f}(w) \leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_t(w) = 1). \tag{1.30}$$

Puis, en faisant $n \to \infty$, on obtient aussi

$$\Delta_{S(t)f}(w) \leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_t(w) = 1). \tag{1.31}$$

En sommant sur w puis en inversant l'ordre des deux sommes, on a alors grâce à (1.19) :

$$\begin{aligned} |\!|\!| S_n(t)f |\!|\!| &\leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \sum_{w \in V} \lambda_w \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_t(w) = 1) \\ &\leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbf{E}_{v,\overline{a}}[q(\zeta_t)] \\ &\leq \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \lambda_v e^{At}. \end{aligned}$$

Par conséquent $S_n(t)f \in \mathcal{D}(X)$ dès que $f \in \mathcal{D}(X)$, et on a l'inégalité suivante :

$$|\!|\!| S_n(t)f |\!|\!| \leq e^{At} |\!|\!| f |\!|\!|. \tag{1.32}$$

En partant de (1.31) on obtient de manière similaire :

$$|\!|\!| S(t)f |\!|\!| \leq e^{At} |\!|\!| f |\!|\!|. \tag{1.33}$$

Pour montrer que $(S(t), t \geq 0)$ est un semi-groupe de Markov (voir la définition page 7), les deux seules propriétés non évidentes à vérifier sont

(a) $\forall f \in C(X),\ S(t+s)f = S(t)S(s)f$,

(d) $\forall f \in C(X),\ t \mapsto S(t)f$ est continue à droite,

et il suffit de les vérifier pour $f \in \mathcal{D}(X)$ puisque c'est un sous-espace dense de $C(X)$.
Pour (a) on remarque que la convergence dans (1.23) est en fait uniforme pour $f \in \mathcal{D}(X)$. En effet, en utilisant le couplage introduit dans le théorème 3,

$$\begin{aligned} |S_n(t)f(\eta) - S(t)f(\eta)| &\leq \mathbb{E}\big[|f(\xi_t^{\eta,n}) - f(\xi_t^{\eta})|\big] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V} \Delta_f(v) \mathbb{1}_{\{\xi_t^{\eta,n}(v) \neq \xi_t^{\eta}(v)\}}\right] \\ &\leq \sum_{v\in V} \Delta_f(v) \mathbb{P}(\xi_t^{\eta,n}(v) \neq \xi_t^{\eta}(v)) \\ &\leq \sum_{v\in V} \Delta_f(v) \mathbf{P}_{V_n^c,a}(\zeta_t(v) = 1), \end{aligned} \tag{1.34}$$

qui tend vers 0 par le TCD puisque $f \in \mathcal{D}(X)$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{V_n^c,a}(\zeta_t(v) = 1) = 0$ (voir la preuve du corollaire 1). Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t)f - S(t)f\|_\infty = 0. \tag{1.35}$$

Maintenant, avec (1.26) on voit que pour obtenir (a) pour $f \in \mathcal{D}(X)$ il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \|S_n(t_1)S_n(t_2)f - S(t_1)S(t_2)f\|_\infty = 0$. Pour cela on décompose :

$$\begin{aligned} \|S_n(t_1)S_n(t_2)f - S(t_1)S(t_2)f\|_\infty \leq{}& \|(S_n(t_1) - S(t_1))S_n(t_2)f\|_\infty \\ &+ \|S(t_1)(S_n(t_2) - S(t_2))\|_\infty. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Le premier terme à droite de l'égalité (1.36) est majoré par

$$\sum_{v\in V} \Delta_{S_n(t_2)f}(v) \mathbf{P}_{V_n^c,a}(\zeta_t(v) = 1).$$

Quand $n \to \infty$ cette somme tend vers 0 par le TCD. En effet, par (1.30), son terme général est borné par $\sum_{u\in V} \Delta_f(u) \mathbf{P}_{u,\overline{a}}(\zeta_{t_2}(v) = 1)$, et la somme sur $v \in V$ de cette borne est finie car (1.19) implique que celle-ci est majorée par $\lambda^{-1} |\!|\!| f |\!|\!| e^{At}$.
Le second terme dans (1.36) tend aussi vers 0 grâce à (1.35) et à l'inégalité $\|S(t_1)(S_n(t_2) - S(t_2))f\|_\infty \leq \|S_n(t_2)f - S(t_2)f\|_\infty$. Ainsi (a) est démontrée.
Maintenant pour montrer (d) on commence par établir que pour $f \in \mathcal{D}(X)$,

$$S(t)f(\eta) = f(\eta) + \int_0^t \Omega S(s)f(\eta) \mathrm{d}s. \tag{1.37}$$

L'intégrale est bien définie puisque (1.27) et (1.33) donnent

$$|\Omega S(s)f(\eta)| \leq \lambda^{-1} C e^{As} |\!|\!| f |\!|\!|. \tag{1.38}$$

Grâce à (1.25) on a seulement à montrer que pour $s \geq 0$ fixé, $\lim_{n\to\infty} \Omega_n S_n(s)f(\eta) = \Omega S(s)f(\eta)$. En effet ceci avec le TCD implique l'inégalité (1.37). On est en droit d'utiliser le TCD grâce à la majoration $|\Omega_n S_n(s)f(\eta)| \leq \lambda^{-1} C e^{As} |\!|\!| f |\!|\!|$, voir (1.28) et (1.32).
D'une part par (1.29),

$$\begin{aligned} |(\Omega_n - \Omega) S_n(s)f(\eta)| &\leq C \sum_{w \in V_n^c} \Delta_{S_n(s)f}(w) \\ &\leq C \sum_{w \in V_n^c} \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_s(w) = 1) \\ &= C \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \sum_{w \in V_n^c} \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_s(w) = 1), \end{aligned}$$

et pour $v \in V$, on a $\lim_{n\to\infty} \sum_{w \in V_n^c} \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_s(w) = 1) = 0$ puisque

$$\sum_{w \in V} \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_s(w) = 1) \leq \lambda^{-1} \mathbf{E}_{v,\overline{a}}[q(\zeta_s)] < +\infty,$$

donc une nouvelle application du TCD donne $\lim_{n\to\infty} |(\Omega_n - \Omega) S_n(s)f(\eta)| = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \Omega\big(S_n(s) - S(s)\big)f(\eta) = \sum_{w \in V} c_w(\eta) \Big[&\big(S_n(s)f(\eta^w) - S_n(s)f(\eta)\big) \\ &- \big(S(s)f(\eta^w) - S(s)f(\eta)\big) \Big]. \end{aligned}$$

Dans le terme de droite le terme général de la somme tend vers 0 quand $n \to \infty$, et grâce à (1.30) et (1.31) il est majoré par $C(\Delta_{S_n(s)f}(w) + \Delta_{S(s)f}(w)) \leq 2C \sum_{v \in V} \Delta_f(v) \mathbf{P}_{v,\overline{a}}(\zeta_s(w) = 1)$, qui ne dépend pas de n. Puisque la somme sur w de cette borne est plus petite que $2\lambda^{-1} C e^{As} |\!|\!| f |\!|\!| < +\infty$, une application du TCD permet de terminer la preuve de (1.37).
On peut maintenant conclure pour (d) puisque (1.37) et (1.38) fournissent l'inégalité

$$\|S(t)f - f\|_\infty \leq \lambda^{-1} A^{-1} C (e^{At} - 1) |\!|\!| f |\!|\!|, \tag{1.39}$$

ce qui implique que l'application $t \mapsto S(t)f$ est continue en $t = 0$, et la continuité s'étend à $\mathbb{R}^+$ en utilisant (a).
Pour terminer la preuve du théorème il reste à montrer que pour $f \in \mathcal{D}(X)$ et $\eta \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{S(t)f(\eta) - f(\eta)}{t} = \Omega f(\eta).$$

L'application $t \mapsto \Omega S(t)f(\eta)$ est continue en $t = 0$. En effet on peut écrire

$$\begin{aligned} \Omega\big(S(t+s) - S(t)\big)f(\eta) = \sum_{w \in V} c_w(\eta) \Big[&\big(S(t+s)f(\eta^w) - S(t+s)f(\eta)\big) \\ &- \big(S(t)f(\eta^w) - S(t)f(\eta)\big) \Big], \end{aligned}$$

et conclure par un argument analogue à celui de la preuve de (1.37) en utilisant la continuité de $t \mapsto S(t)f(\eta)$. La continuité de $t \mapsto \Omega S(t)f(\eta)$, avec (1.37), implique directement (1.24). □

Soit μ une probabilité sur X. On note $\mu S(t)$ l'unique distribution sur X telle que

$$\forall f \in C(X), \int f \mathrm{d}[\mu S(t)] = \int S(t) f \mathrm{d}\mu.$$

La mesure μ est dite *invariante* si $\mu S(t) = \mu$ pour tout $t \geq 0$, ce qui est équivalent à la condition suivante :

$$\forall f \in \mathcal{D}(X), \int S(t) f \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu.$$

On donne maintenant un critère concret pour vérifier qu'une mesure μ est invariante en terme des fonctions locales.

Proposition 3. *Soit μ une probabilité sur X. Si*

$$\int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0 \tag{1.40}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(X)$, alors μ est invariante.

Démonstration. Le théorème 5.2 de [35] établit que la loi du processus $(\xi_t^\eta,\ t \geq 0)$ correspond à l'unique solution du problème de martingale pour Ω partant de η. Ainsi ce problème de martingale est bien posé. Ceci nous autorise à utiliser la proposition 6.10 de la même référence. Celle-ci établit que (1.40) est une condition suffisante pour que μ soit invariante. □

1.4 Cas d'un espace d'état dénombrable avec des interactions de rang fini

Dans cette section on adapte la section précédente à une situation plus générale en deux points : premièrement les transitions affectent éventuellement plusieurs sites simultanément, et deuxièmement les coordonnées prennent leurs valeurs dans un ensemble dénombrable (disons $\mathbb{Z}$). C'est le contexte du théorème 2.11 du chapitre 2, pour lequel à notre connaissance aucune construction générale n'a été donnée jusqu'à présent. Le prix pour ces généralisations est l'hypothèse (H_1'') qui dit que les interactions sont de rang fini.

Ici on note donc $X = \mathbb{Z}^V$, V étant l'ensemble des sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$. $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète et X de sa topologie produit. L'existence d'une arête entre deux sites w et v signifie que l'état du processus au site w influence les taux de transition au site v (ou vice-versa), ou qu'un évènement lié au site v peut affecter l'état du site w (ou vice-versa). L'ensemble $B(v, r) \subset V$ désigne la boule de centre v et de rayon r, au sens de la distance de graphe. On suppose G de degré fini, c'est-à-dire que les voisinages $\mathcal{N}_v := B(v, 1),\ v \in V$, sont d'ordre borné :

$$D := \max_{v \in V} |\mathcal{N}_v| < \infty.$$

Si $\eta \in X$ et $W \subset V$, $\xi \in \mathbb{Z}^W$, l'opération qui consiste à remplacer η par ξ sur W sera notée $\eta|W|\xi$, soit :

$$(\eta|W|\xi)(v) = \begin{cases} \eta(v), & \text{si } v \in W^c, \\ \xi(v), & \text{si } v \in W. \end{cases}$$

Dans cette section on note

$$\Delta_f(v) := \sup_{\eta=\eta' \ off\ v} \{|f(\eta) - f(\eta')|\},$$

où $\eta = \eta'$ *off* v signifie que η et η' coïncident en dehors de v, et

$$\mathcal{D}(X) := \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue et } \sum_{v\in V} \Delta_f(v) < \infty\}.$$

Pour $f \in \mathcal{D}(X)$ on note $|\!|\!| f |\!|\!| := \sum_v \Delta_f(v)$. On définit $C_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X, ainsi que $\mathcal{F}(X) = \{f \in C_b(X)$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées$\}$. En chaque sommet v, le processus peut subir des transitions

– affectant les sites de $\mathcal{N}_v$,

– dont les taux dépendent éventuellement de l'état des sites de $\mathcal{N}_v$.

Autrement dit l'évolution est gouvernée par une collection de taux de transition

$$c = \big(c(v,\eta,\xi), v \in V, \eta \in X, \xi \in \mathbb{Z}^{\mathcal{N}_v}\big)$$

sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

$$c(v,\eta,\xi) \text{ ne dépend que des coordonnées } (\eta(w), w \in \mathcal{N}_v), \qquad (H_1'')$$

$$C := \sup_{v\in V, \eta\in X} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^{\mathcal{N}_v}} c(v,\eta,\xi) < +\infty. \qquad (H_3'')$$

Remarquons que (H_2) est alors automatiquement satisfaite comme conséquence de (H_1'') et de la définition de la topologie sur X. On considère l'opérateur

$$\Omega f(\eta) := \sum_{v\in V} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^{\mathcal{N}_v}} c(v,\eta,\xi)\big[f(\eta|\mathcal{N}_v|\xi) - f(\eta)\big],$$

et, x étant un sommet arbitraire pris comme origine, la restriction de Ω en volume fini :

$$\Omega_n f(\eta) := \sum_{v\in B(x,n)} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^{\mathcal{N}_v}} c(v,\eta,\xi)\big[f(\eta|\mathcal{N}_v|\xi) - f(\eta)\big].$$

La preuve de l'équation (1.27') ci-dessous montre que Ω et Ω_n sont bien définis sur $\mathcal{D}(X)$. On rappelle que le théorème 1 est encore valable pour les semi-groupes sur un espace Y localement compact. L'espace $C(Y)$, sur lequel $\|\cdot\|_\infty$ n'est plus définie, doit simplement être remplacé par $C_b(Y) := \{f \in C(Y) : f$ est bornée$\}$. On donne ici une construction analogue à celle de la section précédente d'un semi-groupe $S(t)$ sur $C_b(X)$ vérifiant $\lim_{t\to 0} t^{-1}(S(t)f - f) = \Omega f$, pour $f \in \mathcal{D}(X)$. Comme dans le cas compact, en fait cette prescription détermine $S(t)$ de manière unique.

Lemme 1. $f \in \mathcal{D}(X) \Longrightarrow f \in C_b(X)$.

Démonstration. Soient $\eta, \eta' \in X$. On a $|f(\eta) - f(\eta|B(x,n)|\eta')| \le \sum_{v\in B(x,n)} \Delta_f(v)$, et la continuité de f donne $\lim_{n\to\infty} f(\eta|B(x,n)|\eta') = f(\eta')$. Donc $|f(\eta) - f(\eta')| \le \sum_{v\in V} \Delta_f(v)$. □

Lemme 2. *Pour $f \in \mathcal{D}(X)$,*

$$\|\Omega f(\eta)\| \leq CD|\!|\!|f|\!|\!|, \tag{1.27'}$$

$$\|(\Omega - \Omega_n)f(\eta)\| \leq CD \sum_{v \in B(x,n-1)^c} \Delta_f(v). \tag{1.28'}$$

Démonstration. On ne montre que la première inégalité, l'autre étant similaire. Elle découle de (H_1'') et (H_3'') comme le montre le calcul suivant : pour $\eta \in X$,

$$\begin{aligned} |\Omega f(\eta)| &\leq \sum_{v \in V} C \sum_{w \in \mathcal{N}_v} \Delta_f(w) \\ &\leq C \sum_{w \in V} \sum_{v \in \mathcal{N}_w} \Delta_f(w) \\ &\leq CD \sum_{w \in V} \Delta_f(w). \end{aligned}$$

□

Puisque le prégénérateur Ω_n ne met en jeu que les transitions des coordonnées de $B(x,n)$, il définit un unique semi-groupe $(S_n(t), t \geq 0)$ sur $C_b(X)$, qui à son tour correspond à un processus markovien de saut pur $(\xi_t^{\eta,n}, t \geq 0)$ sur un ensemble dénombrable. On va maintenant donner un couplage des processus ξ^{η^n}, pour $n \geq 1$ et $\eta \in X$.
Pour cela on considère une famille $(N_v, v \in V)$ de processus de Poisson indépendants, tous d'intensité C. On fixe $n \geq 1$ et $\eta \in X$, et on définit des suites t_j et v_j comme dans la preuve du théorème 3. On définit $\xi_t^{\eta,n}$ de proche en proche, constant sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$. On pose $\xi_0^{\eta,n} = \eta$, et pour $j \geq 0$ si on note $\chi := \xi_{t_j}^{\eta,n}$ alors $\xi_{t_{j+1}}^{\eta,n}$ prend la valeur

- $\chi|\mathcal{N}_{v_j}|\theta$ avec probabilité $\frac{c(v_j,\chi,\theta)}{C}$, pour $\theta \in \mathbb{Z}^{\mathcal{N}_{v_j}}$;
- χ avec probabilité $1 - \frac{1}{C}\sum_{\theta \in \mathbb{Z}^{\mathcal{N}_{v_j}}} c(v_j, \chi, \theta)$.

Concrètement, cette valeur est choisie à l'aide de variables uniformes prises comme dans la section 1.3, en découpant l'intervalle $[0,1]$ en sous-intervalles de longueurs adéquates. La valeur retenue à l'issue d'une transition est celle correspondant à l'intervalle auquel appartient la variable uniforme qu'on associe à cette transition.
Le processus $(\xi_t^{\eta,n}, t \geq 0)$ prenant ses valeurs dans un espace dénombrable, montrer qu'il admet Ω_n comme générateur ne pose pas de problème supplémentaire par rapport au théorème 3. On a par conséquent pour $f \in \mathcal{D}(X)$:

$$S_n(t)f(\eta) = \mathbb{E}[f(\xi_t^{\eta,n})].$$

On construit, conjointement à ces processus, un graphe aléatoire (non orienté) sur $V \times \mathbb{R}_+$ de la manière suivante. Pour chaque $v \in V$ on place, à chaque instant de saut t de N_v, des arêtes entre (w,t) et (v,t) pour chaque $w \in \mathcal{N}_v$. Si w et v sont deux sommets et $0 \leq s \leq t$, on définit l'évènement $\{(w,s) \to (v,t)\}$ comme dans (1.16).
Une fois donnés les processus de Poisson, $\xi_t^{\eta,n}(v)$ ne peut dépendre de la valeur de $\eta(w)$ que pour les sites w tels que $(w,0) \to (v,t)$. Plus précisément, on a

$$\{K_{0,t}^v \subset B(x,n)\} \subset \{\forall k \geq n, \xi_t^{\eta,k}(v) = \xi_t^{\eta,n}(v)\}, \tag{1.41}$$

où

$$K^v_{s,t} := \{w \in V : (w,s) \to (v,t)\}, 0 \le s \le t.$$

Le processus $(|K^v_{t-s,t}|, 0 \le s \le t)$ peut être majoré par un processus markovien $(X_s, 0 \le s \le t)$ sur $\mathbb{N}$ tel que $X_0 = 1$ et de mécanisme donné par les taux $q(n, n+D) = Cn$. Comme pour un processus de branchement standard, on a que $(X_s e^{-CDs}, s \ge 0)$ est une martingale. Ceci nous donne la majoration

$$\mathbb{E}|K^v_{0,t}| \le e^{CDt}. \tag{1.42}$$

En particulier l'ensemble $K^v_{0,t}$ est presque sûrement fini. Ceci, avec (1.41), implique que pour tout v, la suite $\xi^\eta_{n,t}(v)$ est constante à partir du premier rang (aléatoire) n_0 tel que $K^v_{0,t} \subset B(x, n_0)$. On peut donc définir le processus ξ^η par

$$\forall v \in V, \xi^\eta_t(v) = \lim_{n\to\infty} \xi^{\eta,n}_t(v),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\xi^\eta_t = \lim_{n\to\infty} \xi^{\eta,n}_t.$$

Pour $f \in C_b(X)$, on définit

$$S(t)f(\eta) := \mathbb{E}[f(\xi^\eta_t)].$$

Par convergence dominée, on a immédiatement

$$S(t)f(\eta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\xi^{\eta,n}_t)] = \lim_{n\to\infty} S_n(t)f(\eta). \tag{1.43}$$

Théorème 5. *$S(t)$ définit un semi-groupe de Markov sur $C_b(X)$, et pour $f \in \mathcal{D}(X)$ on a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)f(\eta) - f(\eta)}{t} = \Omega f(\eta).$$

Démonstration. On peut suivre la preuve du théorème 4, les équations (1.27)–(1.35) devenant respectivement :

$$\forall \eta \in X, |\Omega f(\eta)| \le CD|\!|\!|f|\!|\!|, \tag{1.27'}$$

$$\forall \eta \in X, |\Omega_n f(\eta)| \le CD|\!|\!|f|\!|\!|, \tag{1.28'}$$

$$\forall \eta \in X, |(\Omega_n - \Omega)f(\eta)| \le CD \sum_{v \in B(x,n)^c} \Delta_f(v), \tag{1.29'}$$

$$\Delta_{S_n(t)f}(w) \le \sum_{v\in V} \Delta_f(v)\mathbb{P}((w,0) \to (v,t)), \tag{1.30'}$$

$$\Delta_{S(t)f}(w) \le \sum_{v\in V} \Delta_f(v)\mathbb{P}((w,0) \to (v,t)), \tag{1.31'}$$

$$|||S_n(t)f||| \leq e^{CDt}|||f|||, \tag{1.32'}$$

$$|||S(t)f||| \leq e^{CDt}|||f|||, \tag{1.33'}$$

$$\|S_n(t)f - S(t)f\|_\infty \leq \sum_{v\in V} \Delta_f(v)\mathbb{P}\big(\exists w \notin B(x,n) : (w,0) \to (v,t)\big). \tag{1.34'}$$

□

Soit μ une probabilité sur X,et $\mu S(t)$ l'unique mesure sur X telle que $\forall f \in C_b(X), \int f \mathrm{d}[\mu S(t)] = \int S(t)f \mathrm{d}\mu$, ou de manière équivalente,

$$\forall f \in \mathcal{D}(X), \int f \mathrm{d}[\mu S(t)] = \int S(t)f \mathrm{d}\mu.$$

μ est dite invariante si $\forall t \geq 0, \mu S(t) = \mu$. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des probabilité invariantes.

Proposition 4. *Une probabilité μ appartient à $\mathscr{I}$ si et seulement si*

$$\forall f \in \mathcal{D}(X), \int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0. \tag{1.44}$$

Démonstration. L'identité (1.37) est encore valable pour $f \in \mathcal{D}(X)$ dans la présente section. Ceci fait partie de la preuve du théorème 5 qui est analogue à celle du théorème 4. Par conséquent

$$\int S(t)f \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int_0^t \left[\int \Omega S(s)f \mathrm{d}\mu\right] \mathrm{d}s. \tag{1.45}$$

Supposons $\mu \in \mathscr{I}$ et soit $f \in \mathcal{D}(X)$. On a comme dans la section 1.3 la convergence uniforme de $S(t)f$ vers f quand $t \to 0$, qui nous est fournie par une inégalité analogue à (1.38). L'application $s \to \int \Omega S(s)f \mathrm{d}\mu$ est par conséquent continune car

$$\left|\int \Omega(S(t) - S(s))f \mathrm{d}\mu\right| \leq CD\|S(t-s)f - f\|_\infty.$$

La primitive de cette application étant nulle par définition de $\mathscr{I}$, on conclut que sa valeur en 0 est nulle, soit $\int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0$.
Réciproquement, supposons que (1.44) a lieu. Alors pour $f \in \mathcal{D}(X)$, $S(s)f \in \mathcal{D}(X)$ et donc le dernier terme dans (1.45) est nul. □

Théorème 6. *$\mu \in \mathscr{I}$ si et seulement si*

$$\forall f \in \mathcal{F}(X), \int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0. \tag{1.46}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(X)$. On doit montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{F}(X)$ telle que $\left|\int \Omega(f-g)\mathrm{d}\mu\right| \leq \varepsilon$. Fixons un entier n_1 tel que $\sum_{v\notin B(x,n_1)} \Delta_f(v) \leq \varepsilon$, puis un autre entier n_2 tel que $\sum_{v\notin B(x,n_2)} \Delta_f(v) \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Card}B(x,n_1)}$.
On prend une configuration η' arbitraire et on considère la fonction

$$g(\eta) := f(\eta'|B(x,n_2)|\eta).$$

Bien sûr $g \in \mathcal{F}(X)$ puisque $g(\eta)$ ne dépend que de la restriction de η à $B(x,n_2)$. Par ailleurs $\|f-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Card}B(x,n_1)}$, et $\Delta_g(v) \leq \Delta_f(v)$. On écrit

$$\left|\int \Omega(f-g)\mathrm{d}\mu\right| \leq CD|\!|\!|f-g|\!|\!| \leq CD\left[\sum_{v\notin B(x,n_1)} \Delta_{f-g}(v) + \sum_{v\in B(x,n_1)} \Delta_{f-g}(v)\right].$$

Pour majorer le premier terme, on écrit $\Delta_{f-g}(v) \leq \Delta_f(v) + \Delta_g(v) \leq 2\Delta_f(v)$. Pour le second, on utilise le fait que $\Delta_{f-g}(v) \leq 2\|f-g\|_\infty$. Au final,

$$\left|\int \Omega(f-g)\mathrm{d}\mu\right| \leq CD\big(2\varepsilon + 2|B(x,n_1)|.\|f-g\|_\infty\big) \leq 4CD\varepsilon.$$

□

Chapitre 2

Résultats sur le modèle de Gates-Westcott

2.1 Modèles de croissance aléatoire

Pour situer le contexte de notre étude, nous commençons par faire un survol (non exhaustif) de différents types de *modèles de croissance*, dont fait partie le processus de Gates-Westcott. Cette classe de modèles a été l'objet d'une grande attention dans les dernières décennies.
Ces modèles décrivent l'accroissement d'un amas de particules qui se fait par agrégations successives à partir d'un germe initial qui peut être par exemple un site de nucléation seul ou bien une ligne de sites occupés. Ils réduisent généralement un phénomène complexe à un processus élémentaire simple gouverné par une règle basique, mais dont le comportement peut posséder une grande complexité.
Mathématiquement, il s'agit de processus aléatoires dont les états possibles sont les configurations d'amas. Pour qu'ils soient bien définis il nous faut spécifier leurs mécanismes de croissance. Autrement dit pour chaque site vacant voisin de l'amas à un instant donné, il faut spécifier la probabilité qu'une particule vienne s'y agréger en un intervalle de temps donné. Différents mécanismes ont déjà été imaginés, donnant lieu à divers modèles. Nous en décrivons ici quelques uns.

2.1.1 Modèle d'Eden, DLA et déposition verticale

Dès 1961 Eden propose dans [11] un modèle de croissance cellulaire pour étudier la prolifération de tumeurs. Il s'agit d'une chaîne de Markov $(A_n, n \geq 0)$ à valeurs dans les sous-parties finies de $\mathbb{Z}^2$, telle que

$$A_0 = \{0\},$$

et

$$A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}\}, \tag{2.1}$$

où x_{n+1} est choisi uniformément dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{Z}^2 : d(z, A_n) = 1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des sites adjacents à A_n. La version arête de ce même modèle consiste à choisir

FIGURE 2.1 –

$x_{n+1} = z$ avec une probabilité proportionnelle au nombre d'arêtes reliant z à A_n. Cette dernière version correspond aux configurations successives prises par l'amas dans le modèle de percolation de premier passage (pour des temps de passage de loi exponentielle). Pour plus de détails on peut consulter [31].
Le modèle iDLA (diffusion limitée par agrégation interne) est aussi construit selon la relation (2.1), mais sachant A_n, x_{n+1} est choisi selon la loi de X_τ, où $(X_k, k \geq 0)$ est une marche aléatoire symétrique partant de 0 et $\tau = \inf\{k \geq 0 : X_k \notin A_n\}$. Voir [7] pour une bonne introduction à ce modèle.
Dans d'autres modèles, les particules tombent aléatoirement de façon verticale sur un substrat horizontal, s'empilant ainsi sur chaque colonne. On parle alors de *déposition verticale*. Dans ce cas l'amas obtenu est sans trous, et seule la surface présente des irrégularités. Là aussi il faut préciser avec quelles probabilités (ou avec quels taux, en temps continu) les particules viennent se déposer sur chaque colonne. Le choix de ces probabilités doit traduire l'influence de la géométrie de l'amas autour d'un site sur l'attractivité de ce site. Les colonnes sont numérotées selon leur abscisse et la hauteur de la colonne i est notée $x(i)$. On peut citer par exemple les mécanismes suivants (voir [22] et [5] où encore d'autres modèles de croissances de surfaces sont décrits) :

- déposition avec relaxation : une particule arrive en un site i choisi uniformément, puis se fixe sur le site j de hauteur minimale parmi les sites qui sont à une distance au plus R du site i (voir figure 2.1 pour une simulation avec $R = 2$).
- une particule arrive en un site i choisi uniformément, puis migre éventuellement selon la règle suivante. On dit qu'un site j est un trou si les sites $\min(x(j-1), x(j+1)) \geq x(j)$, et on décide que la particule reste en i si i est un trou, sinon elle se déplace dans une direction où la pente est vers le bas jusqu'à se fixer au premier trou qu'elle rencontre (voir figure 2.2 pour une simulation avec $R = 2$).

Notons aussi que des modèles de déposition de *particules gluantes* ont été étudiés : dans [15] une particule tombe avec égale probabilité en chaque colonne et dans sa chute elle s'arrête et se fixe dès qu'elle rentre en contact avec une particule de l'amas (voir figure 2.3 pour une simulation, en noir les sites occupés par des particules). Tous les sites en dessous de cette nouvelle particule sont alors considérés comme occupés. Il est possible (voir [32]) d'envisager une version où les chutes des particules se font de manière oblique avec un certain angle d'incidence. La figure 2.4 montre une réalisation d'un tel processus.

Pour chacun de ces modèles, un des objectifs principaux est de comprendre comment se comportent les fluctuations de l'interface, afin d'avoir une idée de sa régularité. C'est aussi

FIGURE 2.2 –

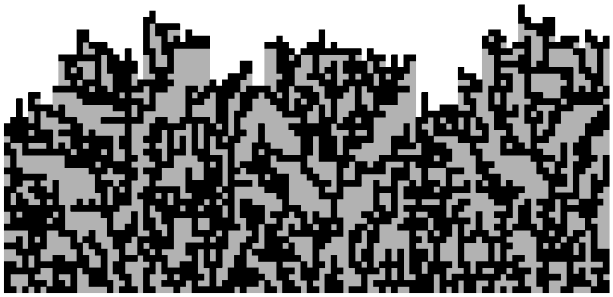

FIGURE 2.3 –

le cas pour le modèle de Gates-Westcott qui est notre objet d'intérêt dans ce chapitre et que nous allons maintenant présenter.

2.1.2 Modèle de Gates-Westcott

On présente ici un modèle markovien en temps continu qui décrit la croissance verticale d'un cristal. Nous donnons à ce modèle le nom des auteurs l'ayant introduit et étudié dans une série de papiers. Il s'agit d'un processus de déposition aléatoire verticale, où l'agrégation résulte de captures aléatoires de particules flottant dans le milieu par la surface d'un réseau cristallin, qui sera ici à maille carrée (Gates et Westcott ont aussi décrit un modèle analogue avec un réseau à maille triangulaire). La capture d'une particule en un site donné se fait à un taux prescrit par (2.5) qui ne dépend que de la forme locale de la surface au voisinage immédiat de ce site. La donnée de ces taux détermine entièrement notre processus.
Plus précisément, on fixe un entier $n \geq 2$ et la base du cristal est constituée d'un ensemble de n sites alignés, chacun de ces sites correspondant à une pile de particules qui va croître avec le temps. Bien sûr l'édifice cristallin considéré est de dimension 2 : pour plus d'informations sur de tels cristaux, dits *lamellaires*, voir [40]. L'état du cristal à un instant donné est donc décrit par un vecteur

$$x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \mathbb{N}^n,$$

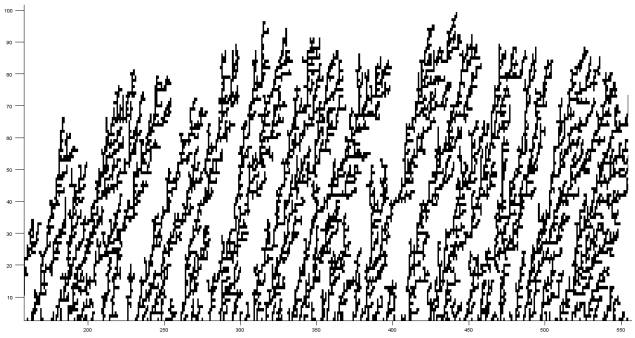

FIGURE 2.4 –

appelé *configuration*, où la valeur $x(i)$ représente la hauteur de la pile correspondant au site i. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, e_j désignera par la suite le vecteur unitaire :

$$e_j(i) = \delta_{i,j}.$$

Pour $x \in \mathbb{N}^n$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ on définit $V_j(x)$ le nombre de sites adjacents à j dont la hauteur de la pile excède strictement celle du site j, soit

$$V_j(x) = \mathbb{1}_{\{x(j-1)>x(j)\}} + \mathbb{1}_{\{x(j+1)>x(j)\}} \in \{0, 1, 2\}. \tag{2.2}$$

Si $V_j(x) = k$ on dit que le site j est dans l'état k. Pour que $V_j(x)$ soit bien défini, il se pose bien sûr un problème pour $j = 1$ et $j = n$: il faut choisir la valeur de $x(0)$ et $x(n+1)$, autrement dit imposer des conditions au bord. Nous utiliserons plusieurs conventions :

- *Condition zéro* : on pose $x(0) = x(n+1) = 0$. Cela revient à ajouter un site à gauche du site 1 et à droite du site n, ces deux sites étant bloqués au niveau 0.
- *Condition périodique* : on pose $x(0) = x(n)$ et $x(n+1) = x(1)$. L'ensemble des sites se referme sur lui-même.
- *Condition infini* : on pose $x(0) = x(n+1) = +\infty$.
- *Condition zéro/infini* : on pose $x(0) = 0$ et $x(n+1) = +\infty$. La condition infini/zéro est obtenue en posant l'inverse.

A partir de la section 2.7, on travaillera avec la condition zéro qui s'avère plus commode à manipuler. Cependant, les résultats des sections 2.7, 2.8 et 2.9 s'adaptent aux conditions périodiques. En effet dans les sections 2.7 et 2.9 tous les arguments utilisés dans nos démonstrations restent valables sous la condition périodique, et quant à la section 2.8 cette adaptation se fait en suivant la preuve du théorème 1.1 de [3]. Initialement, Gates et Westcott n'ont travaillé que sous la condition périodique, celle-ci ayant l'avantage d'éviter les effets de bord. La condition zéro a été introduite plus tard dans [3] : avec elle la preuve du résultat principal gagne en simplicité. Dans cette référence, le résultat correspondant avec conditions périodiques est aussi énoncé. Il est en fait obtenu comme conséquence de celui avec la condition zéro.

Pour une configuration x, le profil h de x est défini comme le vecteur

$$h := (\Delta_1 x, \dots, \Delta_{n-1} x), \tag{2.3}$$

où

$$\Delta_j x := x(j) - x(j+1),\ j = 1, \ldots, n-1. \Delta_j x := x(j) - x(j+1),\ j = 1, \ldots, n-1. \quad (2.4)$$

Remarque. La donnée des conditions au bord nous permettra si nécessaire d'utiliser les notations $h(0) = x(0) - x(1)$ et $h(n) = x(n) - x(n+1)$.
Connaître le profil h revient à connaître la configuration x à translation verticale près. Notre étude portera en fait plus sur h que sur x, ce qui se justifie par le fait que la forme de l'interface du cristal nous intéresse plus que sa position verticale.
On s'autorisera quelques abus de notation concernant les *configurations* et les *profils*. Il n'y aura pas d'ambiguïté sur le fait que la lettre h désigne systématiquement le profil de la configuration x. Si une fonction $F(x)$ ne dépend de x qu'à travers son profil, on pourra écrire $F(h)$. Par ailleurs pour un profil h donné, la lettre x désignera en général une quelconque configuration de profil h.

Définition 6 (Processus de Gates-Westcott). *Soit $\omega(a,b)$ une fonction bornée de $\mathbb{Z}^2$ dans $]0,+\infty[$. Le* processus de déposition *de fonction ω est le processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}^n$ de générateur infinitésimal donné par*

$$\Omega f(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega(\Delta_{i-1}x, -\Delta_i x) \left[f(x + e_i) - f(x) \right], \text{ pour } f \text{ bornée sur } \mathbb{N}^n. \quad (2.5)$$

Soit $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \in]0,+\infty[^3$. Le processus de Gates-Westcott *de paramètre β est le processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}^n$ de générateur infinitésimal donné par*

$$\Omega f(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{V_i(x)} \left[f(x + e_i) - f(x) \right], \text{ pour } f \text{ bornée sur } \mathbb{N}^n. \quad (2.6)$$

Il s'agit donc du processus de déposition de fonction

$$\omega(a,b) = \beta_{\mathbb{1}_{\{a>0\}} + \mathbb{1}_{\{b>0\}}}. \quad (2.7)$$

Ce processus sera usuellement noté $(X_t^n, t \geq 0)$.

Il est nécessaire de préciser quelle condition est imposée pour que le générateur (2.5) soit défini sans ambiguïté.
Remarque. La forme que prennent les taux de transition pour le processus de Gates-Westcott s'explique par des considérations physiques : il est raisonnable que le taux de capture d'une particule soit fonction de la géométrie de l'emplacement visé. En l'occurence il vaut β_0, β_1 ou β_2 selon que la particule doit créer 0, 1 ou 2 liaisons latérales avec des particules voisines.

Nous allons voir que différents choix de paramètres donnent des comportements très différents, comme les simulations suivantes permettent déjà de constater.

Définition 7 (Profil de Gates-Westcott). *Le profil de déposition (resp. de Gates-Westcott) est défini par*

$$H_t^n = (\Delta_1 X_t^n, \ldots, \Delta_{n-1} X_t^n),$$

où X_t^n est le processus défini par (2.5) (resp. par (2.6)).

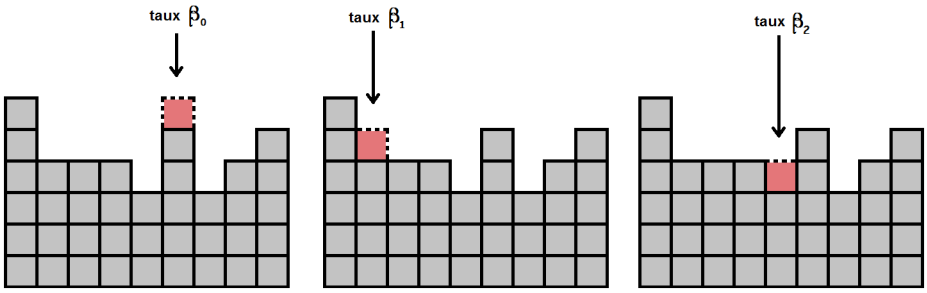

FIGURE 2.5 – Les trois types de sites différents capturent les particules à des taux différents

Proposition 5. *Avec la condition périodique, le profil de déposition* $(H_t^n, t \geq 0)$ *est un processus de Markov irréductible à valeurs dans* $\mathbb{Z}^{n-1}$ *de générateur donné par*

$$Lg(h) = \sum_{i=1}^{n} \omega(h(i-1), -h(i)) \left[f(h + e_i') - f(h) \right], \quad g \text{ bornée sur } \mathbb{Z}^{n-1}. \tag{2.8}$$

où

$$e_i' = \begin{cases} e_1, & si\ i = 1, \\ e_i - e_{i-1}, & si\ 1 < i < n, \\ -e_{n-1}, & si\ i = n. \end{cases}$$

Ceci est encore vrai avec la condition zéro, dans le cas particulier du profil de Gates-Westcott.

Démonstration. Une condition suffisante pour que H^n soit markovien est que la valeur de $\omega(\Delta_{i-1}x, -\Delta_i x)$ ne dépende de x qu'à travers h. Ceci est bien sûr le cas avec la condition périodique quelle que soit la forme des taux, ainsi qu'avec la condition zéro pour des taux de la forme (2.7). □

Remarque. Sans supposer que ω est de la forme (2.7), avec la condition zéro, H^n n'est en général pas markovien.
La notation $\mathbb{P}_x$, respectivement $\mathbb{P}_h$, désignera la loi de la trajectoire du processus $(X_t^n, t \geq 0)$ partant de x, respectivement du processus $(H_t^n, t \geq 0)$ partant de h. Les notations $\mathbb{P}_x^n$ et $\mathbb{P}_x^\beta$ pourront aussi être utilisées s'il y a ambiguïté sur la valeur de n ou de β. La configuration nulle et le profil nul (profil plat) seront notés $\mathbf{0}$. En l'absence de précision, la condition initiale sera la configuration nulle.
Dans la suite on fera référence à la *symétrie* de X^n et de H^n pour désigner la propriété suivante, qui est une conséquence directe des définitions de ces processus. Cette propriété est valable sous toutes les conditions excepté les conditions zéro/infini et infini/zéro.

Proposition 6. X_t^n *est identique en loi au processus* $(X_t^n(n), \ldots, X_t^n(1))$. *De même le processus* H_t^n *est identique en loi au processus* $(-\Delta_{n-1}X_t^n, \ldots, -\Delta_1 X_t^n)$.

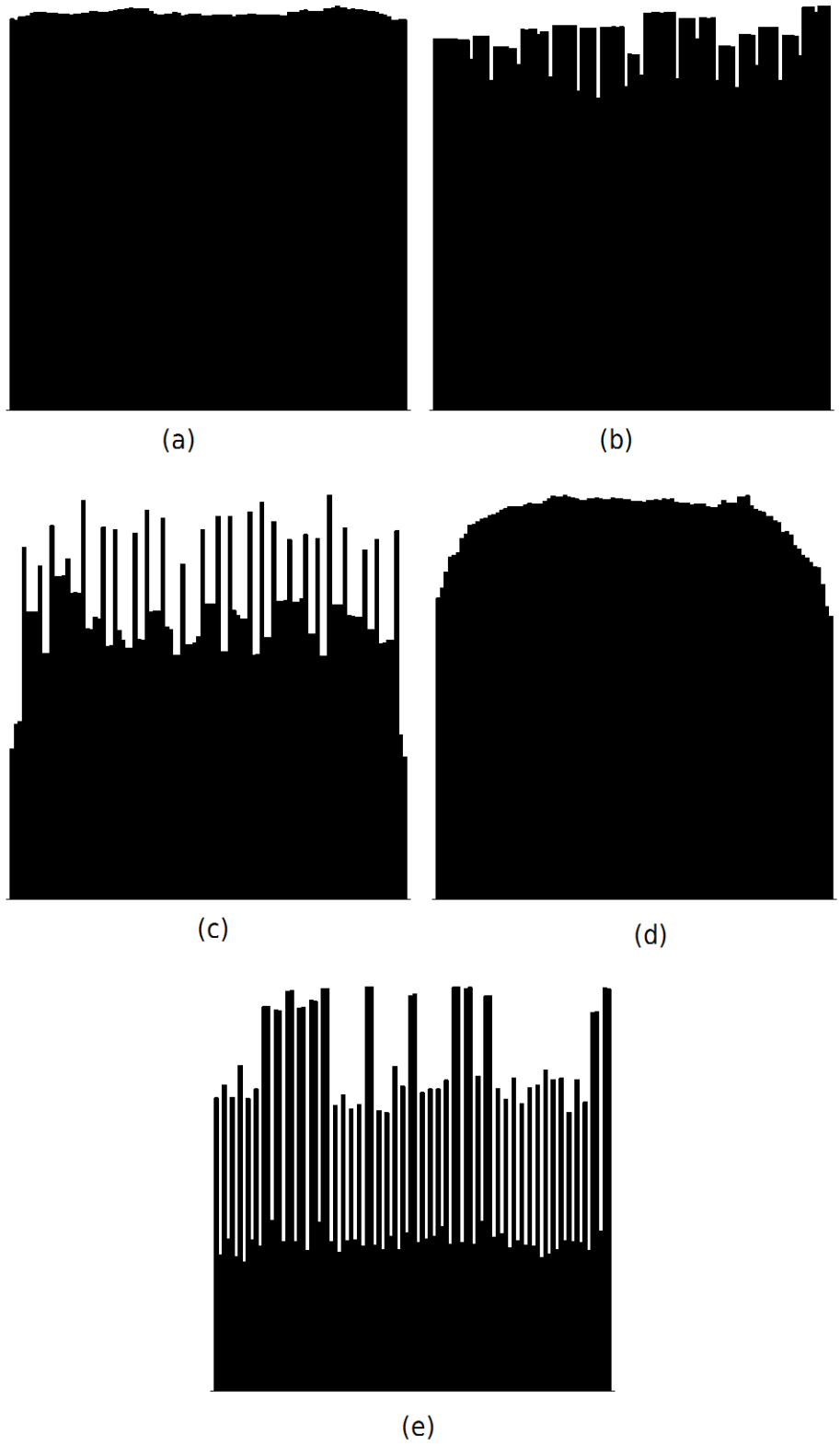

FIGURE 2.6 – Une réalisation de X_t^n avec la condition zéro pour $n = 100$, $t = 500$ et (a) $\beta = (1, 2, 3)$, (b) $\beta = (1, 6, 2)$, (c) $\beta = (10, 4, 3)$, (d) $\beta = (1, 1, 10)$, (e) $\beta = (1, 20, 5)$.

2.2 Récurrence du profil

On a déjà mentionné qu'une question clé est de comprendre la régularité (ou stabilité) de la surface du cristal. La récurrence et la transience du processus $(H_t^n, t \geq 0)$ sont des caractérisations mathématiques naturelles des notions physiques de croissance stable (voir la surface régulière (a) dans la figure 2.6) et instable (voir la surface rugueuse (c) dans la même figure). Plus précisément, on a les trois alternatives :

- le processus H^n est *récurrent positif* (ou *ergodique*),
- le processus H^n est *récurrent nul*,
- le processus H^n est *transitoire*.

Heuristiquement, l'ergodicité correspond véritablement à une surface stable : H^n passe l'essentiel de son temps dans des profils "proches" du profil plat. Le cas transitoire correspond à une instabilité dramatique et la récurrence nulle peut être vue comme une situation à la limite entre les deux précédentes.
On rappelle que l'ergodicité est une propriété équivalente à l'existence d'une distribution stationnaire, qui est alors la limite en loi du processus partant de n'importe quel profil initial. Un autre critère bien connu d'ergodicité de H^n est la tension :

$$H^n \text{ ergodique } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \text{ fini } \subset \mathbb{Z}^{n-1} : \forall t \geq 0, \mathbb{P}(H_t^n \in A) \geq 1 - \varepsilon. \tag{2.9}$$

On pourra se référer à [38] pour plus de détails. On va maintenant définir la *tension exponentielle*, qui est une propriété plus forte que la tension. On introduit d'abord une dernière notation : si f est une fonction positive définie sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$, on écrira

$$f(x) = \mathcal{O}_{exp}(x) \tag{2.10}$$

s'il existe des constantes $C, \alpha > 0$ telles que $f(x) \leq Ce^{-\alpha x}$. Si f dépend aussi d'une autre variable t, la notation

$$f(x) = \mathcal{O}_{exp}^t(x)$$

signifie que l'inégalité (2.10) est vérifiée pour des constantes C et α qui ne dépendent pas de t.

Définition 8. *On dit que* $(\Delta_j X_t^n, t \geq 0)$ *est* exponentiellement tendu *si*

$$\mathbb{P}_0(|\Delta_j X_t^n| \geq k) = \mathcal{O}_{exp}^t(k),$$

et que $(H_t^n, t \geq 0)$ *est exponentiellement tendu si* $(\Delta_j X_t^n, t \geq 0)$ *est exponentiellement tendu pour tout* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Bien sûr la tension exponentielle de H^n implique son ergodicité, mais aussi le fait que sa mesure invariante ait des queues exponentielles. Travailler avec la tension présente l'avantage d'être ramené à manipuler les coordonnées du processus H^n séparément.
Déterminer laquelle des trois alternatives a lieu est une question difficile, mais on peut déjà faire une remarque heuristique : puisque β_0 est la vitesse statistique des sommets et β_2 celle des trous, l'intuition nous dit qu'augmenter β_0 devrait rendre la surface plus irrégulière, et plus plausible que H^n soit transitoire. Inversement, augmenter β_2 devrait rendre la surface plus régulière, et plus plausible que H^n soit récurrent. Malheureusement pour l'instant aucun résultat général ne rend rigoureuse cette remarque.

2.3 Construction poissonienne pour le modèle de Gates-Westcott

Nous décrivons ici une construction du processus de Gates-Westcott X^n, et donc de H^n, qui utilise une famille de processus de Poisson et qui est commode à plusieurs égards. Nous verrons notamment dans le chapitre 2.4 qu'elle a l'avantage de fournir des couplages utiles. On commence par ranger les trois paramètres dans l'ordre croissant : soient b_0, b_1 et b_2 tels que $\{b_0, b_1, b_2\} = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2\}$ et $b_0 \leq b_1 \leq b_2$. On considère une famille de processus de Poisson $(N_{k,j}, 0 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq n)$ telle que

- $N_{k,j}$ a pour intensité b_k,
- les triplets $(N_{0,j}, N_{1,j}, N_{2,j})_{1 \leq j \leq n}$ sont mutuellement indépendants,
- pour tout j, il existe trois processus de Poisson $\widetilde{N}_{0,j}$, $\widetilde{N}_{1,j}$ et $\widetilde{N}_{2,j}$, mutuellement indépendants, d'intensités respectives b_0, $b_1 - b_0$ et $b_2 - b_1$, tels que

$$\begin{cases} N_{0,j} = \widetilde{N}_{0,j}, \\ N_{1,j} = \widetilde{N}_{0,j} + \widetilde{N}_{1,j}, \\ N_{2,j} = \widetilde{N}_{0,j} + \widetilde{N}_{1,j} + \widetilde{N}_{2,j}. \end{cases}$$

L'idée est de faire en sorte que les sauts d'un site j qui est dans un état correspondant à b_k soient gouvernés par le processus $N_{k,j}$. Les sauts des processus $\widetilde{N}_{k,j}$ sont des sauts supplémentaires des sites qui ont un taux de capture b_k par rapport à ceux qui ont un taux de capture b_{k-1}. Pour une condition initiale x_0 on construit donc le processus $(X_t^n, t \geq 0)$ en posant $X_0^n = x_0$, puis de proche en proche en posant à chaque instant de saut t de l'un des processus $N_{k,j}$:

$$X_t^n = \begin{cases} X_{t^-}^n + e_j, & \text{si } \beta_{V_j(X_{t^-}^n)} \geq b_k, \\ X_{t^-}^n, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.11}$$

De cette façon, il est aisé de vérifier que $(X_t^n, t \geq 0)$ possède la propriété de Markov et que ses taux de transition sont ceux désirés. Ceci est une conséquence du fait que, dans notre construction, un site j qui a un taux de capture égal à b_k effectue une capture si et seulement si $N_{k,j}$ saute, et que $N_{k,j}$ est bien un processus de Poisson d'intensité b_k. Par conséquent $(X_t^n, t \geq 0)$ est une version du processus de Gates-Westcott partant de x_0, avec n sites, et de paramètre β.
Dans tout le chapitre la notation $N_{k,j}$ désignera les processus de Poisson introduits ci-dessus.

2.4 Couplages

Il sera utile plus tard de comparer le processus X^n partant de deux configurations initiales différentes, ou bien avec des valeurs différentes des paramètres. Les comparaisons que l'on donne ne sont pas stochastiques mais trajectorielles puisqu'on met en œuvre des couplages obtenus grâce à la construction poissonienne.
On notera $\leq$ l'ordre partiel canonique sur $\mathbb{N}^n$: si $x, y \in \mathbb{N}^n$,

$$x \leq y \Leftrightarrow x(i) \leq y(i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Définition 9. *Le processus de Gates-Westcott est dit* attractif *si pour $x \leq y$, il existe un couplage de deux processus $(X_t^n, t \geq 0)$ et $(Y_t^n, t \geq 0)$ de lois respectives $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_y$, tels que presque sûrement, on ait*

$$\forall t \geq 0,\ X_t^n \leq Y_t^n.$$

Proposition 7. *Si $n \geq 2$ et $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, le processus de Gates-Westcott est attractif, quelle que soit la condition aux bords.*

Démonstration. Soient $x \leq y$. On considère X^n et Y^n construits comme dans la section 2.3, avec $X_0^n = x$ et $Y_0^n = y$, en utilisant pour l'un et l'autre la même famille de processus de Poisson. On raisonne par récurrence sur les instants de saut successifs de cette famille : on suppose donc que $X_{t-}^n \leq Y_{t-}^n$ et que t est un instant de saut du processus $N_{k,j}$, et on montre que

$$X_t^n(j) \leq Y_t^n(j). \tag{2.12}$$

Si $X_{t-}^n(j) < Y_{t-}^n(j)$ alors (2.12) est vérifiée puisque les coordonnées ne peuvent sauter que d'une unité. Si par contre $X_{t-}^n(j) = Y_{t-}^n(j)$ alors avec $X_{t-}^n(j-1) \leq Y_{t-}^n(j-1)$ et $X_{t-}^n(j+1) \leq Y_{t-}^n(j+1)$ on obtient que $V_j(X_{t-}^n) \leq V_j(Y_{t-}^n)$ (quelle que soit la condition au bord) donc notre hypothèse $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$ et la construction de la section 2.3 font que

$$X_\cdot^n(j) \text{ saute à l'instant } t \Rightarrow Y_\cdot^n(j) \text{ saute à l'instant } t.$$

Par conséquent l'inégalité (2.12) est préservée. □

En général il n'est pas vrai que le fait d'augmenter l'un des β_i, ou n, augmente le processus X^n au sens de la relation $\leq$. Cependant on a les deux propositions suivantes qui seront suffisantes pour nos besoins. La proposition 8, à nouveau, est valable quelle que soit la condition aux bords.

Proposition 8. *Soient $n \geq 2$, $x \in \mathbb{N}^n$, et $\beta, \beta' \in]0, +\infty[^3$. On suppose qu'on a $\beta_k \leq \beta'_\ell$ pour $k \leq \ell$. Alors il existe un couplage de deux processus $(X_t^n, t \geq 0)$ et $(X_t'^n, t \geq 0)$ de lois respectives $\mathbb{P}_x^\beta$ et $\mathbb{P}_x^{\beta'}$, tel que presque sûrement, on ait*

$$\forall t \geq 0,\ X_t^n \leq X_t'^n.$$

Démonstration. On construit le couplage en partant d'une famille de processus de Poisson $N_{k,j}$ comme dans la section 2.3 et d'une famille supplémentaire $\widehat{N}_{k,j}$ indépendante de la première, où $\widehat{N}_{k,j}$ est d'intensité $\beta'_k - \beta_k$ et n'est utilisée que par X'^n. Le processus X^n est construit selon (2.11) et le processus X'^n suit d'une part les transitions décrites par (2.11) mais également pour celui-ci un site j dans l'état k augmente d'une unité lorsque $\widehat{N}_{k,j}$ saute. Il est aisé de constater que ce sont deux processus de Gates-Westcott de paramètres β et β', et par ailleurs aucune transition ne peut briser l'inégalité à montrer. En effet si $X_t^n(i) = X_t'^n(i)$ et si $X_\cdot^n(i)$ saute à l'instant t, alors $X_\cdot'^n(i)$ doit aussi sauter grâce à notre hypothèse. □

La proposition suivante dit que, dans le cas attractif, rajouter des sites augmente le processus X^n. Sa preuve est encore basée sur un couplage.

Proposition 9. *On se place sous la condition zéro. Soient $m \leq n$, $x \in \mathbb{N}^n$ et $x^{(m)} = (x(1), \ldots, x(m))$. On suppose que $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$. Alors il existe un couplage de deux processus $(X_t^m, t \geq 0)$ et $(X_t^n, t \geq 0)$ de lois respectives $\mathbb{P}_{x^{(m)}}$ et $\mathbb{P}_x$, tels que presque sûrement, on ait*

$$\forall t \geq 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},\ X_t^m(i) \leq X_t^n(i).$$

Démonstration. On définit X_t^n comme dans la section 2.3 avec une famille de processus de Poisson $(N_{k,j}, k \in \{0,1,2\}, j = 1, \ldots, n)$, et X_t^m de la même manière avec les processus $(N_{k,j}, k \in \{0,1,2\}, j = 1, \ldots, m)$. Supposons que $X_{t^-}^m \leq X_{t^-}^n$, que $X_{t^-}^m(j) = X_{t^-}^n(j)$ pour un certain j et que $N_{k,j}$ saute à l'instant t. On observe que $X_{t^-}^n(j+1) - X_{t^-}^n(j) \geq X_{t^-}^m(j+1) - X_{t^-}^m(j)$, et de même $X_{t^-}^n(j-1) - X_{t^-}^n(j) \geq X_{t^-}^m(j-1) - X_{t^-}^m(j)$. Par conséquent,

$$X_\cdot^m(j) \text{ saute à l'instant } t \Rightarrow X_\cdot^n(j) \text{ saute à l'instant } t.$$

□

2.5 Vitesse asymptotique de croissance

Dans cette section on se place sous la condition zéro, mais cette restriction n'a d'importance que pour la proposition 11. Le résultat suivant dit que quand H^n est ergodique, tous les sites croissent linéairement à la même vitesse, appelée *vitesse asymptotique* de X^n.

Proposition 10. *Supposons le processus H^n ergodique, et notons π^n son unique distribution stationnaire. Alors il existe une constante $v^n > 0$ telle que pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, presque sûrement partant de n'importe quelle configuration,*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t^n(j)}{t} = v^n.$$

De plus, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, la vitesse est égale au taux moyen de saut au site j selon la distribution stationnaire :

$$v^n = \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{V_j(h)} \pi^n(h). \tag{2.13}$$

Démonstration. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Puisque $(X_t^n(j), t \geq 0)$ est un processus de comptage d'intensité instantanée $\beta_{V_j(X_t^n)}$, on a que

$$M_t := X_t^n(j) - \int_0^t \beta_{V_j(X_s^n)} \mathrm{d}s \text{ est une martingale,} \tag{2.14}$$

et que

$$L_t := M_t^2 - \int_0^t \beta_{V_j(X_s^n)} \mathrm{d}s \text{ est une martingale.} \tag{2.15}$$

Le théorème ergodique donne la convergence presque sûre

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \beta_{V_j(X_s^n)} \mathrm{d}s = \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n-1}} \beta_{V_j(h)} \pi^n(h),$$

donc il nous reste à montrer que $\lim t^{-1}M_t = 0$ presque sûrement. Or (2.15) nous autorise à utiliser l'inégalité de Doob : pour $r \leq t$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[r,t]} \frac{|M_s|}{s} \geq \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[r,t]} |M_s| \geq r\varepsilon\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[M_t^2]}{r^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{Kt}{r^2\varepsilon^2},\end{aligned}$$

où $K = \max(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$. La dernière inégalité est une conséquence directe de (2.15). On a donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n^2\leq s\leq(n+1)^2} s^{-1}|M_s| \geq \varepsilon\right) \leq K(n+1)^2/(\varepsilon^2 n^4),$$

et on conclut par le lemme de Borel-Cantelli.
Il reste à remarquer que la somme qui appraît dans (2.13) est une quantité qui est nécessairement indépendante de j. Dans le cas contraire il y aurait une contradiction avec la récurrence de H^n. □

Le cas $n = 2$, de par sa simplicité, a la particularité que la vitesse peut être calculée facilement, comme le montre la proposition suivante. Pour $n \geq 3$, à part dans un cas particulier (voir la section 2.6), il semble inespéré d'obtenir une telle expression explicite.

Proposition 11. *H^2 est ergodique si et seulement si $\beta_1 > \beta_0$. Dans ce cas, on a*

$$v^2 = \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0 + \beta_1}.$$

Démonstration. Le processus $H_t^2 = X_t^2(1) - X_t^2(2)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Il s'agit d'une marche aléatoire au plus proche voisin dont les taux de saut sont donnés par :

$$\begin{cases} q(i,i+1) = \beta_0,\ q(i,i-1) = \beta_1, & \text{si } i > 0, \\ q(0,1) = q(0,-1) = \beta_0, & \\ q(i,i+1) = \beta_1,\ q(i,i-1) = \beta_0, & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

La première assertion découle donc de considérations basiques sur cette marche. Si $\beta_1 > \beta_0$, on vérifie que la mesure sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\mu(i) = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_1 + \beta_0}\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{|i|}$$

est une probabilité, et qu'elle est réversible pour cette marche aléatoire. Il s'agit donc de son unique distribution stationnaire π^2. Pour s'en convaincre il suffit de s'assurer que

$$\mu(i)q(i,i+1) = \mu(i+1)q(i+1,i),\ i \in \mathbb{Z}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer :

$$v^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \pi^2(i)(\beta_0 \mathbb{1}_{\{i\geq 0\}} + \beta_1 \mathbb{1}_{\{i<0\}}) = \beta_0 \pi^2(\{0,1,\ldots\}) + \beta_1 \pi^2(\{\ldots,-2,-1\}) = \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0+\beta_1}.$$

□

On termine cette section sur la question de la monotonie de v^n en fonction du paramètre β. Soient β et β' tels que

- $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$ et $\beta'_0 < \beta'_1 \leq \beta'_2$;
- $\beta_k \leq \beta'_k$, pour $k = 0, 1, 2$;
- $\beta \neq \beta'$

En anticipant sur la partie 2.6, on note v^n et v'^n les vitesses correspondantes, qui existent puisque l'ergodicité des processus correspondants est garantie par le théorème 10. La proposition 8 implique que

$$v^n \leq v'^n,$$

mais l'inégalité stricte est moins évidente. C'est l'objet de la propriété suivante.

Proposition 12. *Supposons que $n \geq 3$ et que β et β' vérifient les hypothèses ci-dessus. Alors*

$$v^n < v'^n.$$

Démonstration. On suppose pour simplifier que $\beta_0 = \beta'_0$, $\beta_1 = \beta'_1$ et $\beta_2 < \beta'_2$. Le cas général se traite de manière similaire. On garde les notations de la proposition 8. On a donc une famille de processus de Poisson $N_{k,j}$ et une autre famille indépendante $\widehat{N}_{2,j}$ utilisée uniquement dans le processus X'^n par les sites qui sont des trous. On prend comme condition initiale $h_0 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ le profil présentant un trou de profondeur 1 au site 2, le reste étant plat. On introduit la suite $(\tau_m, m \geq 0)$ des instants successifs de visite de h_0 par le processus H^n :

$$\begin{cases} \tau_0 & := 0 \\ \widetilde{\tau}_0 & := \inf\{t > 0 : H^n_t \neq h_0\} \\ \tau_1 & := \inf\{t > \widetilde{\tau}_0 : H^n_t = h_0\} \\ & \cdots \\ \widetilde{\tau}_{m-1} & := \inf\{t > \tau_{m-1} : H^n_t \neq h_0\} \\ \tau_m & := \inf\{t > \widetilde{\tau}_{m-1} : H^n_t = h_0\} \end{cases}$$

Pour $m \geq 0$, on définit A_m l'évènement qu'à partir de l'instant τ_m les premiers processus de Poisson qui sautent soient dans l'ordre $\widehat{N}_{2,2}$, $N_{0,2}$, $N_{1,1}$, $N_{1,3}$, $\ldots, N_{1,n}$. Cette suite d'évènements fait que, pour chaque entier m où l'évènement A_m a lieu, le processus X'^n gagne au moins un étage d'avance supplémentaire sur X^n : on a, pour $r \in \mathbb{N}$,

$$\{X'^n_{\tau_m} - X^n_{\tau_m} \geq r\} \cap A_m \subset \{X'^n_{\tau_{m+1}} - X^n_{\tau_{m+1}} \geq r+1\}.$$

La propriété de Markov forte assure que les évènements A_m, $m \geq 0$, sont indépendants et de même probabilité $p = \mathbb{P}_{h_0}(A_0)$. Par ailleurs la récurrence positive fait que $\frac{\tau_m}{m}$ converge

presque sûrement vers une constante $C < +\infty$. De ces deux observations on déduit que pour j quelconque,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{X_t'^n(j) - X_t^n(j)}{t} \geq \frac{p}{C} > 0$$

presque sûrement, ce qui donne le résultat voulu. □

2.6 État des connaissances sur le modèle de Gates-Westcott

On fait ici un survol chronologique des principaux résultats concernant la récurrence du processus de Gates-Westcott jusqu'à cette thèse. Le premier résultat est tiré de [17], où la condition

$$\beta_2 > \beta_0, \quad \beta_1 = \frac{\beta_0 + \beta_2}{2} \tag{2.16}$$

est considérée. Cette condition a une pertinence physique : elle correspond à un modèle où les particules environnantes s'attachent par leur face inférieure (nucléation) à un certain taux β_0, et par leurs faces latérales (extension) à un autre taux ν, de sorte que $\beta_1 = \beta_0 + \nu$ et $\beta_2 = \beta_0 + 2\nu$. Dans le théorème 7 la simplicité de l'expression de π^n survient de manière étonnante dans la preuve, que nous reproduisons dans l'appendice. Dans [17] un résultat analogue est aussi donné pour un modèle analogue avec un cristal à maille triangulaire.

Théorème 7 (Gates, Westcott, '88). *Si β vérifie (2.16) et sous la condition périodique, H^n est ergodique et*

$$\pi^n(h) = \frac{1}{Z} \exp\left(-J \sum_{i=1}^{n} |h(i)|\right), \tag{2.17}$$

où $J = \frac{1}{2}\log(\beta_2/\beta_0)$ et Z est la constante de normalisation.

Dans la section 2.11 nous obtenons un analogue de ce résultat pour un modèle avec une infinité de sites.
Dans la suite [18] de l'article [17], Gates et Westcott utilisent (2.17) pour donner une formule explicite de la vitesse asymptotique, ainsi que des approximations pour différents ordres de grandeur des paramètres. Dans [19] le même modèle pour des cristaux en 3 dimensions est introduit. Le modèle est paramétré par des valeurs $\beta_i, i = 0, \ldots, 4$. Malheureusement la dimension supplémentaire ajoute de la complexité et Gates et Westcott n'obtiennent des résultats d'ergodicité et de transience que sous des conditions très fortes sur les paramètres. Ils sont obtenus en utilisant des critères de type Foster avec des fonctions de Lyapounov assez simples. Depuis ce papier rien n'est paru sur ce modèle 3D bien que plusieurs questions ouvertes y soient évoquées. Il n'est pas impossible que des fonctions de Lyapounov plus judicieuses prodiguent des conditions moins restrictives d'ergodicité et de transience. L'analogue 2D des résultats de [19] est donné dans [20] :

Théorème 8 (Gates, Westcott, '93). *Sous la condition périodique,*
- *Si $\min(\beta_1, \beta_2) > (n-1)^2\beta_0$ alors H^n est ergodique.*
- *Si $\beta_2 < \beta_0$ alors H^n est transitoire.*
- *Si $\beta_2 = \beta_0$ alors H^n est non ergodique.*

Remarque. Dans ce papier, au lieu de la première assertion on trouve la condition $\beta_2 > (n-1)^2\beta_0$. C'est une légère erreur puisque sans aucune hypothèse sur β_1 l'assertion devient fausse. Cependant sous l'hypothèse supplémentaire que $\beta_1 > (n-1)^2\beta_0$ la preuve donnée dans [20] fonctionne. Dans ce même article Gates et Westcott obtiennent également des conditions suffisantes d'ergodicité pour le processus de déposition avec des taux d'une forme quelconque :

Théorème 9 (Gates, Westcott, '93). *Le processus de déposition H^n de fonction ω sous la condition périodique est ergodique si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*
- *ω est symétrique, croissante, et pour tout x, $y \mapsto \omega(x,y)$ n'est pas une suite constante à partir d'un certain rang ;*
- *il existe $c > 0$ tel que $\lim_{|x+y|\to\infty}(x+y)[\omega(x,y) - c] = \infty$.*

Finalement, on termine par un résultat tiré de [3] qui nous sera utile dans la section 4 :

Théorème 10 (Andjel, Menshikov, Sisko, '06). *Sous la condition périodique et sous la condition zéro, si $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$ alors H^n est ergodique et la distribution stationnaire a des queues exponentielles. De plus il existe $d_n < \beta_1$ tel que $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_t^n(n) \geq d_n t) = \mathcal{O}_{exp}(t)$.*

Nos notations seront compatibles autant que possible avec celles de cette dernière référence. Les résultats des trois prochaines sections sont contenus dans [13].
On précise que dans [3] le théorème 10 est en fait énoncé sous l'hypothèse $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2$ mais le lecteur est invité à vérifier que si $\beta_1 = \beta_2$ sa preuve est toujours valable. Nous ne pouvons pas ici détailler cela davantage du fait que la preuve en question est longue et technique.
Remarque. Concernant l'autre frontière du domaine grisé de la figure 2.8, c'est-à-dire pour les paramètres tels que $\beta_0 = \beta_1 < \beta_2$, il existe un argument simple pour établir que H^n n'est pas ergodique sous la condition zéro. En effet s'il l'était, la formule (2.13) donnerait
- pour $j = 1$: $v^n = \beta_0$, puisque si $\beta_1 = \beta_0$ alors $X_t^n(1)$ est simplement un processus de Poisson d'intensité β_0 ;
- pour $j \notin \{1, n\}$: $v^n > \beta_0$ puisque la somme dans (2.13) est un barycentre non dégénéré entre β_0 et β_1.

2.7 Théorème de peigne pour $\beta_2 < \beta_0$

Pour la condition périodique, on sait déjà que si $\beta_2 < \beta_0$, le profil de X^n est transitoire. Ceci est valable aussi pour la condition zéro car la preuve de la deuxième assertion du théorème 8 donnée dans [20] fonctionne aussi sous la condition zéro. Ce n'est pas une surprise puisque cette condition dit que les pics croissent plus vite que les trous. Notre but dans cette section est de décrire plus précisément le comportement asymptotique du processus X^n sous cette hypothèse. Notre théorème 11 dit que presque sûrement le profil finit par adopter une forme de *peigne*. La forme exacte du peigne dépend en l'occurence de la position relative de β_1 par rapport à l'intervalle $[\beta_2, \beta_0]$, par conséquent on établit trois résultats analogues dont les preuves diffèrent légèrement.
Avant d'énoncer ces résultats nous avons besoin d'introduire quelques notations. On écrira

$t^{-1}X_t^n$ pour le vecteur $\left(t^{-1}X_t^n(1),\dots,t^{-1}X_t^n(n)\right)$. Pour deux vecteurs $a=(a_1,\dots a_k)$ et $b=(b_1,\dots b_\ell)$ on définit le vecteur

$$(a,b) := (a_1,\dots a_k, b_1,\dots b_\ell).$$

On désignera par $(-)$ le vecteur vide. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des n-uplets de la forme

$$(a_1,\beta_2,a_2,\dots,a_{k-1},\beta_2,a_k), \tag{2.18}$$

où $k\in\mathbb{N}$, et pour $1\le i\le k$, a_i est un vecteur qui vaut soit (β_0), soit (v^2,v^2). a_i peut ainsi être un élément de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$.
On définit de même $\mathcal{E}_2$ comme l'ensemble des n-uplets de la forme

$$(\beta_{i_1},\dots\beta_{i_n}), \tag{2.19}$$

où $i_j\in\{0,1,2\}$, $i_j\neq i_{j+1}$ pour $1\le j\le n-1$ et $i_1,i_n\neq 2$.
Soit $H^{n,\infty}$ le profil de Gates-Westcott avec la condition infini au bord. Concernant le processus $H^{2,\infty}$, on remarque que celui-ci est identique au processus H^2, avec β_0 remplacé par β_1, et β_1 par β_2. La preuve de la proposition 11 s'applique donc aussi à $H^{2,\infty}$ et par conséquent celui-ci est ergodique si $\beta_2>\beta_1$, avec une vitesse asymptotique

$$v^{2,\infty}=2\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}.$$

On définit alors $\mathcal{E}_3$ comme l'ensemble des n-uplets de la forme

$$(e_L,\beta_0,a_1,\beta_0,a_2,\dots,a_{k-1},\beta_0,a_k,\beta_0,e_R), \tag{2.20}$$

où $k\in\mathbb{N}$, $a_i=(\beta_2)$ ou $(v^{2,\infty},v^{2,\infty})$ pour $1\le i\le k$, et $e_L,e_R=(\beta_1)$ ou $(-)$.

Théorème 11. *Soient $n\ge 1$ et $x\in\mathbb{N}^n$. On se place sous la condition zéro.*
(i) Si $\beta_2<\beta_0\le\beta_1$ alors $t^{-1}X_t^n$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. et

$$\mathbb{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} t^{-1}X_t^n\in\mathcal{E}_1\right)=1.$$

(ii) Si $\beta_2<\beta_1<\beta_0$ alors $t^{-1}X_t^n$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. et

$$\mathbb{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} t^{-1}X_t^n\in\mathcal{E}_2\right)=1.$$

(iii) Si $\beta_1\le\beta_2<\beta_0$ alors $t^{-1}X_t^n$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. et

$$\mathbb{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} t^{-1}X_t^n\in\mathcal{E}_3\right)=1.$$

Pour illustrer ceci la figure 2.7 présente trois réalisations de X_t^n pour $n=100$, $t=1000$ et trois paramètres différents correspondant respectivement aux assertions (iii), (ii) et (i).

Remarque. Il est vraisemblable que la convergence presque sûre du vecteur $t^{-1}X_t^n$ ait lieu même sans l'hypothèse $\beta_2<\beta_0$. Par exemple lorsque $\beta_0<\beta_2<\beta_1$ notre conjecture, motivée par l'intuition et les simulations, est que les n sites finissent toujours par se diviser en un certain nombre de blocs (possiblement un seul, comme dans le cas ergodique) de

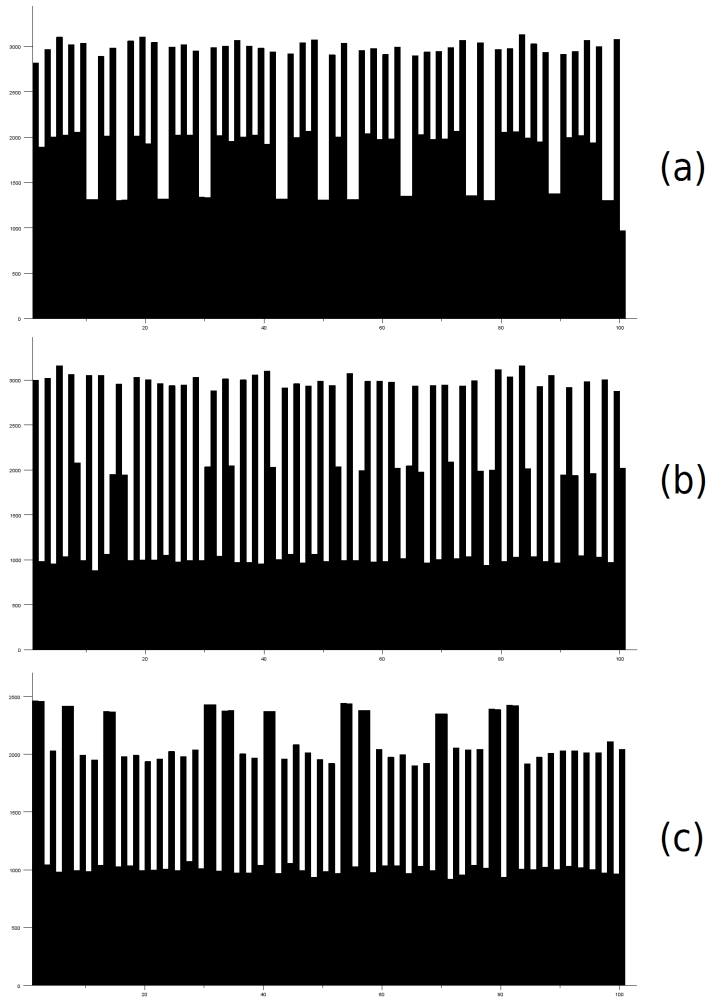

FIGURE 2.7 – X_t^n pour $n = 100$, $t = 1000$, et **(a)** $\beta = (3, 1, 2)$ **(b)** $\beta = (3, 2, 1)$ **(c)** $\beta = (2, 3, 1)$

diverses largeurs, séparés par des trous de largeur 1, chacun de ces blocs étant ergodique en profil. Si ceci est vrai alors chaque site admet une vitesse asymptotique qui est soit v^k, k étant la largeur du bloc contenant le site, soit β_2 si le site devient un trou. Malheureusement nous n'avons pas pu montrer un tel résultat.
La preuve du théorème 11 utilise le résultat technique suivant.

Lemme 3. *Soit $(Z_t, t \geq 0)$ un processus markovien de saut sur un ensemble dénombrable E, et $A \subset E$. Pour un sous-ensemble $F \subset E$ on définit le temps d'entrée $T_F := \inf\{t \geq 0 : Z_t \in F\}$. On suppose qu'il existe $p > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et des sous-ensembles $B_1, \ldots, B_N$ et $C_1, \ldots, C_N$ de E tels que*

(a) *pour tout $x \notin (A \cup B)$, où $B = \cup_{i=1}^N B_i$, on ait*

$$\mathbb{P}_x(T_B < +\infty) = 1,$$

(b) *pour tout* $i \in \{1, \dots, N\}$, *et* $x \in B_i \backslash A$,

$$\mathbb{P}_x(T_{C_i \cup A} < +\infty) = 1,$$

et

$$\mathbb{P}_x(Z_{T_{C_i \cup A}} \in A) \geq p.$$

Alors pour $x \in A^c$, *on a* $\mathbb{P}_x(T_A < +\infty) = 1$.

Démonstration. On considère la partition $(B'_1, \dots B'_N)$ de l'ensemble B définie par $B'_1 = B_1$ et

$$B'_k = B_k \backslash \left(\cup_{i=1}^{k-1} B_i \right), \quad 2 \leq k \leq N.$$

On commence par définir par récurrence une suite croissante de temps d'arrêt. Pour que cette suite soit bien définie, on est obligé d'adjoindre un élément ∂ à l'ensemble E et d'utiliser les conventions $\inf \varnothing = \infty$ et $Z_\infty = \partial$.
Soit $x \notin A$. On pose

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : Z_t \in B\},$$

et on définit i_1 l'indice tel que $Z_{\tau_1} \in B'_{i_1}$, puis

$$\tau'_1 := \begin{cases} \inf\{t \geq \tau_1 : Z_t \in C_{i_1} \cup A\}, & \text{si } Z_{\tau_1} \notin A, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$, on pose

$$\tau_n := \begin{cases} \inf\{t \geq \tau'_{n-1} : Z_t \in B\}, & \text{si } Z_{\tau'_{n-1}} \notin A \cup \{\partial\}, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases},$$

et on définit i_n l'indice tel que $Z_{\tau_n} \in B'_{i_n}$ si $\tau_n < \infty$, et

$$\tau'_n := \begin{cases} \inf\{t \geq \tau_n : Z_t \in C_{i_n} \cup A\}, & \text{si } Z_{\tau_n} \notin A \cup \{\partial\}, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans cette construction la suite $(Z_{\tau_1}, Z_{\tau'_1}, \dots, Z_{\tau_n}, Z_{\tau'_n}, \dots)$ est telle que $Z_{\tau_1} \notin A$, $Z_{\tau'_1} \notin A$, $Z_{\tau_2} \notin A \dots$ jusqu'à ce qu'un de ses termes appartienne à A, alors tous les termes suivants sont égaux à ∂. En procédant par récurrence, la propriété de Markov forte et les hypothèses (a) et (b) donnent :

$$\forall n \geq 1, \ \mathbb{P}_x(Z_{\tau_1} \notin A, Z_{\tau'_1} \notin A, \dots Z_{\tau_n} \notin A, Z_{\tau'_n} \notin A) \leq (1-p)^n.$$

En faisant $n \to \infty$ dans cette inégalité, on obtient $\mathbb{P}_x(\forall t \geq 0, Z_t \notin A) = 0$. □

Preuve du théorème 11 . Pour tout profil h et $i < j$, on note

$$\Delta_{i,j}(h) := h(i) + \cdots + h(j-1) \tag{2.21}$$

la différence de hauteur entre les sites i et j. On va considérer les sous-ensembles suivants de $\mathbb{Z}^{n-1}$. Pour simplifier les notations, dans les accolades x désignera n'importe quelle configuration de profil h.

$$\begin{aligned}
B_i &:= \{h \in \mathbb{Z}^{n-1} : h(i) = 0\},\ 1 \le i \le n-1,\\
A_i &:= \{h \in \mathbb{Z}^{n-1} : h(i-1) \ge 0, h(i) \le 0\},\ 2 \le i \le n-1,\\
A &:= \cup_{i=2}^{n-1} A_i,\\
B &:= \cup_{i=1}^{n-1} B_i,\\
C_1 &:= \{h \in \mathbb{Z}^{n-1} : \min(x(1), x(2)) = x(3)\},\\
C_i &:= \{h \in \mathbb{Z}^{n-1} : \min(x(i), x(i+1)) = \max(x(i-1), x(i+2))\}, 1 \le i \le n-2,\\
C_{n-1} &:= \{h \in \mathbb{Z}^{n-1} : \min(x(n-1), x(n)) = x(n-2)\}.
\end{aligned}$$

C_i est l'ensemble des profils dans lesquels le site le plus bas du bloc $\{i, i+1\}$ est au même niveau que le site le plus haut parmi les sites voisins de ce bloc (il y a en général deux voisins excepté si $i = 1$ ou si $i = n-1$). Remarquons que si $h \in (A \cup B)^c$ alors h est de la forme

$$h(1) < 0, \dots, h(i_0 - 1) < 0, h(i_0) > 0, \dots, h(n-1) > 0,$$

pour un i_0 qui est donc l'unique site de hauteur maximale. Ceci sera utilisé plusieurs fois dans cette preuve.
Quelques notations doivent maintenant être introduites. Si $1 \le a \le b \le n$ et $x_0 \in \mathbb{N}^{b-a+1}$, on note

$$(X_t^{a:b,x_0,t_0}, t \ge 0) \tag{2.22}$$

le processus de Gates-Westcott avec $b-a+1$ sites et condition zéro, partant de x_0, et défini selon la construction (2.11) mais en utilisant les processus de Poisson $N_{k,j}(t_0 + \cdot),\ a \le j \le b,\ 0 \le k \le 2$. Lorsque $t_0 = 0$ cet exposant sera abandonné pour alléger les notations. Par ailleurs pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$x(a:b) := (x(a), x(a+1), \dots, x(b)).$$

On commence par la preuve de (i), en procédant par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Le cas $n = 2$ est une conséquence de la proposition 11 si $\beta_1 > \beta_0$, et du fait que si $\beta_1 = \beta_0$ alors $X_t^2(1)$ et $X_t^2(2)$ sont des processus de Poisson d'intensité β_1. On prend maintenant $n \ge 3$ et on suppose que (i) est vérifiée pour tout $k < n$. Pour $Y \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ on notera $T_Y := \inf\{t \ge 0 : H_t^n \in Y\}$, et on utilise aussi les notations suivantes :

$$E_Y(t) := \{\forall s \ge t, H_s^n \in Y\},$$

et

$$F_Y := \cup_{t \ge 0} E_Y(t).$$

Soit $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Sur l'évènement $E_{A_i}(t)$, à partir de l'instant t la valeur de $X_t^n(i)$ augmente d'une unité aux instants de saut de $N_{2,i}$, et uniquement à ces instants. En effet, pour $s \ge t$, si à la fois $H_s^n(i-1) > 0$ et $H_s^n(i) < 0$ alors $V_i(H_s^n) = 2$, et par contre si l'un

des deux est nul alors tout saut du site i est prohibé par l'évènement $E_{A_i}(t)$. On a par conséquent

$$E_{A_i}(t) \subset \{\forall s \geq t, X_s^n(i) = X_t^n(i) + N_{2,i}(s) - N_{2,i}(t)\},$$

et par suite, pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$,

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s., } F_{A_i} \subset \{\lim t^{-1} X_t^n(i) = \beta_2\}. \tag{2.23}$$

On utilise maintenant le fait que tant que $H_t^n \in A_i$, les vecteurs $X_t^n(1:i-1)$ et $X_t^n(i+1:n)$ évoluent comme deux copies indépendantes du processus de Gates-Westcott avec $i-1$ (respectivement $n-i$) sites. Plus précisément sur l'évènement $E_{A_i}(t_0) \cap \{X_{t_0}^n = x_0\}$, on a

- $X_{t_0+t}^n(1:i-1) = X_t^{1:i-1, x_0^\ell, t_0}$, où $x_0^\ell = x_0(1:i-1)$, et
- $X_{t_0+t}^n(i+1:n) = X_t^{i+1:n, x_0^r, t_0}$, où $x_0^r = x_0(i+1:n)$.

Par conséquent l'hypothèse de récurrence assure que $\mathbb{P}_x$-p.s.,

$$\begin{aligned} F_{A_i} \subset \big\{ & t^{-1} X_t^n(1:i-1) \text{ et } t^{-1} X_t^n(i+1:n) \text{ convergent} \\ & \text{et leurs limites sont de la forme (2.18)} \big\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Grâce à (2.23) et à (2.24) il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}_h(\cup_{i=2}^{n-1} F_{A_i}) = 1 \tag{2.25}$$

pour achever la preuve. On prouve d'abord l'existence d'une constante $r > 0$ telle que pour tout $h \in A_i$,

$$\mathbb{P}_h(E_{A_i}(0)) \geq r. \tag{2.26}$$

D'une part, en partant d'un profil $h \in A_i$, un saut des sites $i-1$ et $i+1$ suffisent à rendre le site i strictement plus bas que ses deux voisins, donc il existe $r_1 > 0$ tel que pour $h \in A_i$,

$$\mathbb{P}_h\big(\forall t \leq 1,\ H_t^n \in A_i;\ H_1^n(i-1) > 0 \text{ et } H_1^n(i) < 0\big) \geq r_1. \tag{2.27}$$

D'autre part si h' est un profil tel que $h'(i-1) > 0$ et $h'(i) < 0$, alors on a $\mathbb{P}_{h'}$-p.s. l'inclusion

$$\{\forall t \geq 0,\ N_{2,i}(t) \leq \min(N_{0,i-1}(t), N_{0,i+1}(t))\} \subset E_{A_i}(0)$$

(on rappelle que les sauts de $N_{0,j}$ sont aussi des sauts de $N_{1,j}$ puisque $\beta_1 \geq \beta_0$). Puisque $\beta_2 < \beta_0$, on peut trouver une constante $r_2 > 0$ telle que pour h' comme plus haut, on ait

$$\mathbb{P}_{h'}(E_{A_i}(0)) \geq r_2. \tag{2.28}$$

Par conséquent (2.26) avec $r = r_1 r_2$ découle de (2.27) et de (2.28). Finalement (2.25) sera une conséquence de (2.26), de la propriété de Markov forte et du fait que pour tout $h \notin A$,

$$\mathbb{P}_h(T_A < +\infty) = 1, \tag{2.29}$$

cette dernière propriété restant maintenant à montrer. Pour cela on va vérifier que les hypothèses (a) et (b) du lemme 3 sont satisfaites.

Pour (a) on prend $h \notin (A \cup B)$. Soit i l'unique site de hauteur maximale dans le profil h. Si $i > 2$ alors $h(i-2), h(i-1) < 0$ (et si $i = 2$ c'est aussi le cas par convention), de sorte

que sur l'évènement $\{T_B > t\}$, comme ces deux inégalités restent vérifiées jusqu'à l'instant t, on a

$$H_t^n(i-1) = h(i-1) + N_{1,i-1}(t) - N_{0,i}(t),\ \mathbb{P}_h\text{-p.s.}$$

On déduit de cette égalité que

$$\mathbb{P}_h(T_B = +\infty) \leq \mathbb{P}_h(\forall t \geq 0, h(i-1) + N_{1,i-1}(t) - N_{0,i}(t) < 0) = 0.$$

Par la symétrie du processus, le cas $i = 1$ peut être traité de manière analogue au cas $i = n$.
On passe maintenant à (b), en considérant donc un profil initial $h \in B_i \backslash A$. Pour un tel profil h, il existe un indice $i \in \{2, \dots n-1\}$ tel que

$$h(1) < 0, \dots, h(i-1) < 0, h(i) = 0, h(i+1) > 0, \dots, h(n-1) > 0. \tag{2.30}$$

Notons que sur l'évènement $\{T_{C_i \cup A} > t\}$, toutes les inégalités strictes dans (2.30) doivent être préservées jusqu'à l'instant t, ainsi $\{T_{C_i \cup A} > t\} \subset \{\forall s \in [0,t], V_{i-1}(H_s^n) = 1\}$. Par conséquent on a, pour toute configuration x dont le profil est h :

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s.},\ \{T_{C_i \cup A} > t\} \subset \{X_t^n(i-1) = x(i-1) + N_{1,i-1}(t)\}.$$

Par un argument analogue on a aussi :

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s.},\ \{T_{C_i \cup A} > t\} \subset \{\big(X_t^n(i), X_t^n(i+1)\big) = X_t^{i:i+1,(0,0)}\},$$

et en combinant ces deux inclusions on obtient $\{T_{C_i \cup A} > t\} \subset \{H_t^n(i-1) = h(i-1) + N_{1,i-1}(t) - X_t^{i:i+1,(0,0)}(1)\}$, $\mathbb{P}_x$-p.s. En laissant $t \to \infty$ on a alors

$$\mathbb{P}_h(T_{C_i \cup A} = +\infty) \leq \mathbb{P}(\forall t \geq 0, h(i-1) + N_{1,i-1}(t) - X_t^{i:i+1,(0,0)}(1) < 0). \tag{2.31}$$

Si $\beta_1 > \beta_0$ la probabilité dans (2.31) est nulle puisque p.s.,

$$\lim \frac{1}{t}\big(h(i-1) + N_{1,i-1}(t) - X_t^{i:i+1,(0,0)}(1)\big) = \beta_1 - v^2 > 0,$$

où la dernière inégalité est une conséquence directe de la définition de v^2. Si $\beta_1 = \beta_0$ cette probabilité est aussi nulle puisque $h(i-1) + X_t^{i:i+1,(0,0)}(1) - N_{1,i-1}(t)$ n'est alors rien de plus qu'une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. Maintenant par symétrie le cas $i = 1$ se traite de la même façon que le cas $i = n-1$.
Finalement, la loi du processus $(X_t^2, t \geq 0)$ étant échangeable (permuter les 2 coordonnées de X_t^2 ne modifie pas sa loi), on a que

$$\mathbb{P}_h(H^n_{T_{C_i \cup A}} \in C_i \cap A) \geq \mathbb{P}_h(H^n_{T_{C_i \cup A}} \in C_i \cap A^c).$$

En particulier, $\mathbb{P}_h(H^n_{T_{C_i \cup A}} \in A) \geq 1/2$, ce qui conclut la preuve de (i).
Les preuves de (ii) et (iii) sont basées sur les mêmes idées. Attaquons-nous à (ii). La propriété (ii) est triviale pour $n = 1$. Pour $n = 2$ elle n'est pas beaucoup plus dure : le processus $H_t^2 \in \mathbb{Z}$ est une marche aléatoire au plus proche voisin, plus précisément $|H_t^2|$ augmente d'une unité au taux β_0 et décroît d'une unité au taux β_1 (excepté bien sûr en 0). On a donc $\mathbb{P}_h(F_{\mathbb{N}} \cup F_{-\mathbb{N}}) = 1$, ce qui nous permet de conclure.

Comme on l'a fait pour (i), on va utiliser le lemme 3 pour montrer que $\mathbb{P}_h(T_A < +\infty) = 1$ pour $h \notin A$, et conclure par récurrence. Cependant cette fois-ci cette égalité n'est vraie que si $n \geq 4$, donc il est nécessaire de traiter d'abord le cas $n = 3$ séparément.
Pour $n = 3$ posons

$$K_1 = \{h \in \mathbb{Z}^2 : h(1) \geq 0, h(2) \leq 0\},$$
$$K_2 = \{h \in \mathbb{Z}^2 : h(1) \leq 0, h(2) \geq 0\}.$$

Comme dans la preuve de (i) il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{P}_h(E_{K_i}(0)) \geq r$ pour tout $h \in K_i$, et une fois qu'on sait que H_t^3 finit par rester définitivement dans l'un de ces deux ensembles, c'est terminé. En posant $K = K_1 \cup K_2$, il est encore une fois suffisant, grâce à la propriété de Markov, de montrer que pour $h \in K^c$ on a $\mathbb{P}_h(T_K < +\infty) = 1$. Supposons par exemple que $h(1), h(2) > 0$. Alors sur l'évènement $\{T_K > t\}$, on a $H_t^3(1) = h(1) + N_{1,1}(t) - N_{1,2}(t)$, $\mathbb{P}_h$-p.s., donc

$$\mathbb{P}_h(T_K = +\infty) \leq \mathbb{P}(\forall t \geq 0, h(1) + N_{1,1}(t) - N_{1,2}(t) > 0) = 0$$

à cause de la récurrence de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
Fixons maintenant $n \geq 4$ et vérifions (a) dans le lemme 3. Soit $h \notin (A \cup B)$ et i l'unique site de hauteur maximale dans le profil h. On peut supposer que $i \geq 3$ sans perte de généralité grâce à la symétrie. Sur l'évènement $\{T_B > t\}$, on a

$$H_t^n(i-2) = h(i-2) + N_{1,i-2}(t) - N_{1,i-1}(t), \ \mathbb{P}_h\text{-p.s.}$$

Encore une fois on obtient $\mathbb{P}_h(T_B = +\infty) = 0$ par la récurrence de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
On vérifie maintentant (b) dans le lemme 3. Soit $h \in B_i \backslash A$. On suppose que $2 \leq i \leq n-1$, puisque le cas $i = 1$ est identique au cas $i = n-1$ par symétrie. Sur l'évènement $\{T_{C_i \cup A} > t\}$, on a $\mathbb{P}_h$-p.s.,

$$\big(H_t^n(i-1), \Delta_{i-1,i+1} H_t^n\big) = \big(h(i-1), \Delta_{i-1,i+1} h\big) + \big(N_{1,i-1}(t), N_{1,i-1}(t)\big) - X_t^{i:i+1,(0,0)}$$

(la notation $\Delta_{i-1,i+1} h$ est introduite dans (2.21)). On définit les évènements

$$G_1(t) = \{\forall s \geq t, X_s^{i:i+1,(0,0)}(1) < X_s^{i:i+1,(0,0)}(2)\},$$
$$G_2(t) = \{\forall s \geq t, X_s^{i:i+1,(0,0)}(1) > X_s^{i:i+1,(0,0)}(2)\}.$$

On a

$$\{T_{C_i \cup A} = +\infty\} \cap G_1(t) \subset \{\forall s \geq t, H_s^n(i-1) = H_t^n(i-1) + \big(N_{1,i-1}(s) - N_{1,i-1}(t)\big) - \big(N_{1,i}(s) - N_{1,i}(t)\big)\}.$$

Encore par la récurrence de la marche aléatoire symétrique on déduit de ceci que

$$\mathbb{P}_h(\{T_{C_i \cup A} = +\infty\} \cap G_1(t)) \leq \mathbb{P}_h\big(\forall s \geq t, H_t^n(i-1) + (N_{1,i-1}(s) - N_{1,i-1}(t)) - (N_{1,i}(s) - N_{1,i}(t)) < 0\big) = 0. \tag{2.32}$$

Similairement, on a

$$\{T_{C_i\cup A} = +\infty\} \cap G_2(t) \subset \{\forall s \geq t, \Delta_{i-1,i+1}H^n_s = \Delta_{i-1,i+1}H^n_t + \big(N_{1,i-1}(s) - N_{1,i-1}(t)\big) - \big(N_{1,i+1}(s) - N_{1,i+1}(t)\big)\},$$

et on déduit que

$$\mathbb{P}_h(\{T_{C_i\cup A} = +\infty\} \cap G_2(t)) = 0. \tag{2.33}$$

Par la remarque ci-dessus sur le processus à 2 sites, on obtient

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{t\geq 0} G_1(t)\right) \cup \left(\bigcup_{t\geq 0} G_2(t)\right)\right] = 1,$$

et par conséquent (2.32) et (2.33) impliquent que $\mathbb{P}_h(\{T_{C_i\cup A} = +\infty\}) = 0$. Le fait que $\mathbb{P}_h(H^n_{T_{C_i\cup A}} \in A) \geq 1/2$ découle de l'argument de symétrie comme pour la preuve de (i).
Enfin, la preuve de (iii) est analogue à celle de (i). On va montrer qu'avec probabilité 1, certains sites deviennent (et restent définitivement) plus hauts que leurs voisins. Quand ceci survient la configuration est divisée en deux parties disjointes, mais cette fois-ci des bords infinis sont éventuellement créés et ceci doit être pris en compte. Pour cette raison il est nécessaire d'étudier les trois types de conditions au bord (0, 1 ou 2 bords infinis) pour faire fonctionner la récurrence. Ainsi notre hypothèse de récurrence contiendra trois propriétés. On pose
$(\mathcal{H}_n)$: pour tout $x \in \mathbb{N}^n$, $t^{-1}X^n_t$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. (resp. $\mathbb{P}^\infty_x$-p.s. et $\mathbb{P}^{0,\infty}_x$-p.s.) vers un vecteur aléatoire G (resp. G^∞ et $G^{0,\infty}$), qui est de la forme

$$(b_\ell, \beta_0, a_1, \beta_0, a_2, \ldots, a_{k-1}, \beta_0, a_k, \beta_0, b_r), \tag{2.34}$$

où b_ℓ et b_r sont donnés par :

- pour G : $b_\ell, b_r = (\beta_1)$ ou $(-)$;
- pour $G^{0,\infty}$: $b_\ell = (\beta_1)$ ou $(-)$, et $b_r = (\beta_2)$ ou $(v^{2,\infty}, v^{2,\infty})$;
- pour G^∞ : $b_\ell, b_r = (\beta_2)$ ou $(v^{2,\infty}, v^{2,\infty})$.

Si w et w' sont deux vecteurs de la forme (2.34) alors le vecteur concaténé (w, β_0, w') est aussi de la forme (2.34). Puisque $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont vérifiées, le problème est encore réduit à montrer que la séparation en deux blocs survient presque sûrement pour $n \geq 3$. On pose

$$D_i := \{h : h(i-1) \geq 0, h(i) \leq 0\},\ i = 1, \ldots, n$$

(les coordonnées $h(0)$ et $h(n)$ sont définies par les conditions au bord), et on doit montrer que :

$$\mathbb{P}_h(\cup_{i=1}^n F_{D_i}) = 1, \quad \mathbb{P}^\infty_h(\cup_{i=2}^{n1} F_{D_i}) = 1, \quad \text{et } \mathbb{P}^{0,\infty}_h(\cup_{i=1}^{n-1} F_{D_i}) = 1.$$

Mais β_0 est maintenant le paramètre le plus petit, donc on obtient aisément l'analogue de (2.26), et il reste à montrer que

$$\mathbb{P}_h(T_D < +\infty) = 1, \quad \mathbb{P}^\infty_h(T_{D^\infty} < +\infty) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{0,\infty}_h(T_{D^{0,\infty}} < +\infty) = 1,$$

où $D = \cup_{i=1}^n D_i$, $D^\infty = \cup_{i=2}^{n-1} D_i$ et $D^{0,\infty} = \cup_{i=1}^{n-1} D_i$. La première de ces trois égalités est une conséquence du fait que toute configuration appartient à l'ensemble D. Pour prouver les deux autres inégalités on peut suivre exactement la preuve de (i), sauf que A_i est remplacé par D_i, β_2 et β_0 inversent leurs rôles, v^2 est remplacé par $v^{2,\infty}$ et les ensembles C_i sont définis par des inégalités opposées. □

2.8 une condition suffisante d'ergodicité dans le domaine $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$

Remarquons tout de suite que même si notre système admet trois paramètres β_0, β_1 et β_2, il n'y a en réalité que deux vrais degrés de liberté. Dans la suite on considère β_0 comme une constante fixée une fois pour toutes ($\beta_0 = 1$ par exemple). Ce choix est justifié car on peut toujours se ramener à $\beta_0 = 1$ en travaillant avec le processus $(X^n_{t/\beta_0}, t \geq 0)$.
Comme on peut le voir sur la figure 2.8, les théorèmes 10 et 11 font que le caractère (récurrent, ergodique) du processus de Gates-Westcott reste incompris dans deux zones de paramètres. Dans cette section et la suivante on choisit de se concentrer sur les paramètres dans le domaine

$$\mathcal{D} = \{\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) : \beta_0 < \beta_2 < \beta_1\}, \tag{2.35}$$

et on se place sous la condition zéro. Notre premier résultat dans cette direction, le théorème 12, donne une condition suffisante d'ergodicité. En soi cette condition n'est pas explicite puisque la valeur de $\widetilde{d}_n(\beta_1)$ définie en (2.37) n'est pas connue a priori. La valeur de β_0 étant désormais fixée égale à 1, notre stratégie est de donner pour chaque $\beta_1 > \beta_0$ une valeur seuil de β_2 au dessus de laquelle l'ergodicité a lieu.
L'idée principale est d'exploiter la comparaison qui existe entre X^n et le processus auxiliaire $\widetilde{X}^n$ défini comme le processus de Gates-Westcott de paramètres

$$\widetilde{\beta}_0 = \beta_0,\ \widetilde{\beta}_1 = \beta_1 \text{ et } \widetilde{\beta}_2 = \beta_1. \tag{2.36}$$

D'après la proposition 8, on peut construire X^n et $\widetilde{X}^n$ de façon que $X^n_t \leq \widetilde{X}^n_t$, $t \geq 0$. Or ce processus auxiliaire a plusieurs avantages :

- il est attractif d'après la proposition 7, et ce contrairement à X^n. Dans le théorème 10, X^n était attractif, ce qui avait une certaine importance dans sa démonstration, mais ici le caractère attractif de $\widetilde{X}^n$ est suffisant pour nos besoins.
- il ne fait plus intervenir la valeur de β_2, ce qui est crucial pour obtenir une condition explicite d'ergodicité,
- on va voir qu'il peut être majoré de façon à obtenir les résultats (a) et (b).

Remarque. Rien ne dit qu'il existe un couplage monotone entre les processus de paramètres $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ et (β_0, β_1, b), pour $b \in]\beta_2, \beta_1[$. La proposition 8 ne le garantit que pour $b \geq \beta_1$.
Toutes les quantités relatives au processus $\widetilde{X}^n$ seront notées avec un $\sim$. Pour $\beta_1 > \beta_0$ et $n \geq 2$, on définit

$$\widetilde{d}_n(\beta_1) := \inf\{d > 0 :\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\widetilde{X}^n_t(n) \geq dt) = \mathcal{O}_{exp}(t)\}. \tag{2.37}$$

Puisque $\widetilde{X}^n_t(n)$ est dominé par un processus de Poisson d'intensité β_1, et minoré par un autre processus de Poisson d'intensité β_0 on a bien sûr $\widetilde{d}_n(\beta_1) \in [\beta_0, \beta_1]$. Par ailleurs il découle des propositions 8 et 9 que

$$\widetilde{d}_n(\beta_1) \text{ est une fonction croissante de } n \text{ et de } \beta_1. \tag{2.38}$$

Théorème 12. *Soient $n \geq 2$ et $\beta \in \mathcal{D}$. Si $\beta_1 > \beta_0$ et $\beta_2 > \widetilde{d}_n(\beta_1)$, alors H^k est ergodique pour $k \leq n + 2$.*

Corollaire 2. *Si $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ alors H^3 est ergodique.*

Le théorème suivant est une application pratique du résultat abstrait que constitue le théorème 12 :

Théorème 13. *Soient $n \geq 2$ et $\beta \in \mathcal{D}$. Le processus H^k est ergodique pour $2 \leq k \leq n+2$ si β satisfait l'une des conditions suivantes :*

(a) $\beta_2 > n\beta_0$,

(b) $\beta_2 > ((n-1)\beta_1 + \beta_0)/n$.

De plus H^k est ergodique pour tout $k \geq 2$ si le paramètre β vérifie :

(c) $\beta_2 > 4\sqrt{2}\sqrt{\beta_1\beta_0}$.

Avant de passer aux preuves de ces résultats nous commentons brièvement leur intérêt, en gardant à l'esprit la figure 2.8. Dans le théorème 13, la condition (a) améliore significativement la seule condition d'ergodicité dans $\mathcal{D}$ que nous avions jusque là, à savoir la condition $\beta_2 > (n-1)^2\beta_0$ du théorème 8. La condition (b) a l'avantage de montrer que pour tout n il existe un voisinage à droite du domaine $\{\beta : \beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2\}$ traité dans [3], dans lequel l'ergodicité a encore lieu. La condition (c) est la plus importante des trois puisqu'elle fournit une zone d'ergodicité qui est indépendante du nombre de sites, ce qui n'est pas le cas de (a) et (b). Dans la section suivante le théorème 14 donnera de même une zone de transience indépendante de n.

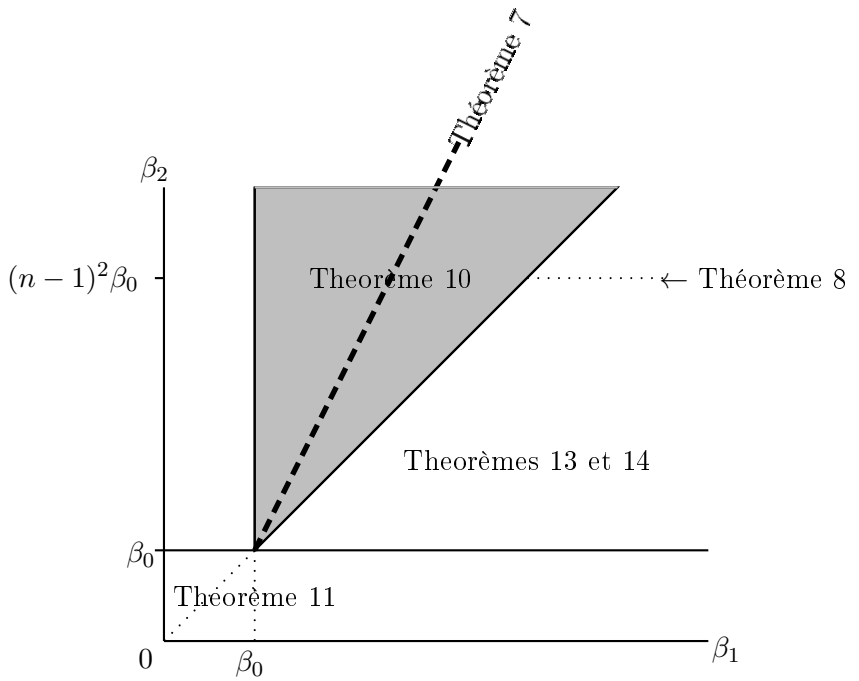

FIGURE 2.8 – Les différents résultats sur le diagramme des paramètres

Nous avons d'abord besoin d'introduire quelques notations et de deux lemmes préliminaires.

- $\Delta_j^{s,t} X^n := X_t^n(j) - X_s^n(j)$,
- $\tau_t^j := \sup\{s \le t : \Delta_j X_s^n = 0\}$. Ce n'est pas un temps d'arrêt.
- P_λ désignera toujours une variable aléatoire de loi Poisson(λ).
- $a^+ := \max(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Remarque. Puisque $\Delta_j X_t^n$ est égal en loi à $-\Delta_{n-j} X_t^n$, montrer la tension exponentielle de $(H_t^n, t \ge 0)$ revient à vérifier que pour tout j,

$$\mathbb{P}_0(\Delta_j X_t^n \ge k) = \mathcal{O}_{exp}^t(k), \tag{2.39}$$

c'est-à-dire la tension exponentielle de $((\Delta_j X_t^n)^+, t \ge 0)$.

Lemme 4. *Supposons qu'il existe des constantes $C_j, \alpha_j > 0$ telles que*

$$\forall t \ge 0,\ \forall \ell \in \mathbb{N} \cap [0,t],\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n > 0;\ \tau_t^j \in [\ell - 1, \ell[) \le C_j e^{-\alpha_j (t-\ell)}. \tag{2.40}$$

Alors $((\Delta_j X_t^n)^+, t \ge 0)$ est exponentiellement tendu.

Démonstration. Soit $t \ge 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On pose

$$m = \min\{q \in \mathbb{N} : t - q \le \frac{k}{2\beta_1}\}.$$

On a $k/(4\beta_1) \le (t-m) \le k/(2\beta_1)$, dès que $k \ge 4\beta_1$ et $t \ge \frac{k}{2\beta_1}$. Mais on peut supposer que ces deux contraintes sont vérifiées : la première parce que la conclusion du lemme ne dépend pas des valeurs de $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n \ge k)$ pour un nombre fini de k, et la seconde parce que quand elle n'est pas vérifiée la conclusion s'obtient en écrivant : $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n \ge k) \le \mathbb{P}(P_{\beta_1 t} \ge k) \le \mathbb{P}(P_{k/2} \ge k) = \mathcal{O}_{exp}(k)$.
On décompose

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n \ge k) \le \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n \ge k, \tau_t^j \ge m) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n > 0, \tau_t^j \le m).$$

Dans cette somme, le premier terme est majoré par

$$\mathbb{P}(N_{j,1}(t) - N_{j,1}(m) \ge k) \le (P_{\beta_1(t-m)} \ge k) \le \mathbb{P}(P_{k/2} \ge k) = \mathcal{O}_{exp}(k),$$

et le second terme est majoré par

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \le m} C_j e^{-\alpha_j(t-\ell)} &\le \sum_{t-\ell \ge k/(4\beta_1)} C_j e^{-\alpha_j(t-\ell)} \\
&\le \sum_{u \ge 0} C_j e^{-\alpha_j(k/(4\beta_1)+u)} \\
&= C_j (1 - e^{-\alpha_j})^{-1} e^{-\frac{\alpha_j}{4\beta_1} k}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 5. *Soit $\beta \in \mathcal{D}$ et $1 \le j \le n-1$. On suppose que pour $i = 1, \dots, j-1$, $((\Delta_i X_t^n)^+, t \ge 0)$ est exponentiellement tendu, et qu'il existe $d_j < \beta_2$ tel que*

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\widetilde{X}_t^j(j) \ge d_j t) = \mathcal{O}_{exp}(t), \tag{2.41}$$

où $\widetilde{X}^j$ est le processus défini par (2.36). Alors $((\Delta_j X_t^n)^+, t \ge 0)$ est exponentiellement tendu.
De plus, pour $j = n-1$, l'hypothèse (2.41) est superflue.

Démonstration. Prenons d'abord $j \leq n-2$, et choisissons une constante $L > 0$ assez grande pour que

$$d_j + \frac{j}{L} < \beta_2. \tag{2.42}$$

La conclusion va découler de (2.40) que nous prouvons maintenant. Les évènements

$$A_1 := \left\{ \max_{i=1,\dots j-1} \Delta_i X^n_\ell > \frac{t-\ell}{L} \right\} \text{ et } A_2 := \left\{ \Delta_j X^n_\ell > \frac{t-\ell}{L}, \tau^j_t \in [\ell-1, \ell[\right\}$$

vérifient

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A_1), \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A_2) \leq D_j e^{-\gamma_j (t-\ell)},$$

pour des constantes $D_j, \gamma_j > 0$. Cette majoration de $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A_1)$ a lieu par hypothèse, et celle de $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A_2)$ a lieu parce que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A_2) \leq \mathbb{P}(N_{j,1}(\ell) - N_{j,1}(\ell-1) > \frac{t-\ell}{L}) = \mathbb{P}(P_{\beta_1} > \frac{t-\ell}{L}).$$

On remarque maintenant que

$$\left(\{ \Delta_j X^n_t > 0;\ \tau^j_t \in [\ell-1, \ell[\} \cap A_1^c \cap A_2^c \right) \subset \{ \Delta_j X^n_s > 0, \forall s \in [\ell, t];\ \max_{i=1,\dots,j} \Delta_i X^n_\ell \leq \frac{t-\ell}{L} \},$$

donc il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe $C_j, \alpha_j > 0$ telles que

$$\forall t \geq 0, \forall \ell \leq t, \mathbb{P}_{\mathbf{0}} \left(\Delta_j X^n_s > 0, \forall s \in [\ell, t];\ \max_{i=1,\dots j} \Delta_i X^n_\ell \leq \frac{t-\ell}{L} \right) \leq C_j e^{-\alpha_j (t-\ell)}.$$

Notons A ce dernier évènement. On observe que

$$A \subset \{ \Delta^{\ell,t}_j X^n > (d_j + \frac{j-1}{L})(t-\ell) \} \cup \{ \Delta^{\ell,t}_{j+1} X^n \leq (d_j + \frac{j}{L})(t-\ell) \},$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(A) \leq \quad & \mathbb{P}_{\mathbf{0}} \left(A \cap \{ \Delta^{\ell,t}_{j+1} X^n \leq (d_j + \tfrac{j}{L})(t-\ell) \} \right) \\ & + \mathbb{P}_{\mathbf{0}} \left(A \cap \{ \Delta^{\ell,t}_{j} X^n > (d_j + \tfrac{j-1}{L})(t-\ell) \} \right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Puisque

$$\{ \Delta^{\ell,t}_{j+1} X^n \leq (d_j + \frac{j}{L})(t-\ell) \} \cap \{ \Delta_j X^n_s > 0, \forall s \in [\ell, t] \} \subset \{ N_{j+1,2}(t) - N_{j+1,2}(\ell) \leq (d_j + \frac{j}{L})(t-\ell) \},$$

le premier terme de la somme (2.43) est majoré par

$$\mathbb{P} \left(P_{\beta_2 (t-\ell)} \leq (d_j + \frac{j}{L})(t-\ell) \right),$$

qui est $\mathcal{O}_{exp}(t-\ell)$ par (2.42). Notons $E_j = \{ x \in \mathbb{N}^j : \max_{i=1,\dots j-1} \Delta_i x \leq \frac{t-\ell}{L} \}$. Une application de la propriété de Markov nous donne que le second terme de (2.43) est majoré par :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in E_j}\mathbb{P}_x\left(\Delta_j^{0,t-\ell}X^j > (d_j+\frac{j-1}{L})(t-\ell)\right) &\le \sup_{x\in E_j}\mathbb{P}_x\left(\Delta_j^{0,t-\ell}\widetilde{X}^j > (d_j+\frac{j-1}{L})(t-\ell)\right)\\ &\le \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}^j_{t-\ell}(j) > d_j(t-\ell)\right)\\ &= \mathcal{O}_{exp}(t-\ell),\end{aligned}$$

où la première inégalité provient de la proposition 8, la seconde de la proposition 7 et du fait que $\max(x)-x(j)\le (j-1)/L$ pour $x\in E_j$. La dernière inégalité est simplement dûe à l'hypothèse (2.41). Ceci achève la preuve pour $j\le n-2$.
Enfin on traite le cas $j=n-1$. En appliquant le théorème 10 à $\widetilde{X}^n$, on obtient (2.41) pour une certaine constante $d_{n-1}<\beta_1$. Cette fois on choisit L tel que $d_{n-1}+\frac{n-1}{L}<\beta_1$. On a encore (2.43). Remarquons que sur l'évènement $\{\Delta_{n-1}X^n_t>0\}$, on doit avoir $V_n(X^n_t)=1$. Donc dans la somme (2.43) on procède comme pour $j<n-1$ pour le second terme, et quant au premier terme il est majoré par

$$\mathbb{P}\left(P_{\beta_1(t-\ell)}\le\left(d_{n-1}+\frac{n-1}{L}\right)(t-\ell)\right)=\mathcal{O}_{exp}(t-\ell).$$

□

Preuve du théorème 12 . En gardant (2.38) à l'esprit, notre hypothèse implique que $\beta_2>\widetilde{d}_k(\beta_1)$ pour $k\le n$. Ainsi nous n'avons qu'à montrer le résultat voulu pour $k=n+2$. Prenons $r\in]\widetilde{d}_n(\beta_1),\beta_2[$. Par la proposition 9 et la définition de $\widetilde{d}_n(\beta_1)$ on a pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\widetilde{X}^j_t(j)\ge rt)=\mathcal{O}_{exp}(t).$$

On montre par récurrence sur j que pour $j=1,\dots,n+1$, on a :

$$(\mathcal{H}_j):\qquad ((\Delta_jX^{n+2}_t)^+,t\ge 0)\text{ est exponentiellement tendu,}$$

qui d'après la remarque précédant le lemme 4 est une condition suffisante pour l'ergodicité de H^{n+2}. Pour $j=1$ on applique simplement le lemme 5, dont les hypothèses sont vérifiées puisque $\beta_2>\beta_0$ et $\widetilde{X}^1_t$ est un simple processus de Poisson d'intensité β_0. Pour $j\le n$, le fait que $(\mathcal{H}_i)$ pour $i=1,\dots,j-1$ impliquent $(\mathcal{H}_j)$ est une conséquence directe du lemme 5. Pour $j=n+1$ c'est encore le cas en utilisant la dernière assertion du lemme 5.

□

Preuve du théorème 13 . À la lumière du théorème 12, on pourra conclure si on montre que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}^n_t(n)\ge(n\beta_0+\varepsilon)t\right)=\mathcal{O}_{exp}(t),\tag{2.44}$$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}^n_t(n)\ge\left(\frac{(n-1)\beta_1+\beta_0}{n}+\varepsilon\right)t\right)=\mathcal{O}_{exp}(t),\tag{2.45}$$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}^n_t(n)\ge(4\sqrt{2}\sqrt{\beta_1\beta_0}+\varepsilon)t\right)=\mathcal{O}_{exp}(t).\tag{2.46}$$

Premièrement, (2.44) découle simplement de l'inégalité

$$\widetilde{X}_t^n(n) \leq \max_{i=1,\dots,n} \widetilde{X}_t^n(i)$$

et du fait que $\max_{i=1,\dots,n} \widetilde{X}_t^n(i)$ est majoré par un processus de Poisson d'intensité $n\beta_0$. Montrons maintenant (2.45). Pour alléger les formules on notera $g_n := n^{-1}((n-1)\beta_1+\beta_0)$. Prenons $\eta < 2(n-1)^{-1}\varepsilon$. On pose $\delta = n\varepsilon - n(n-1)\eta/2 > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}_t^n(n) \geq (g_n+\varepsilon)\,t\right) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}_t^n(n) \geq (g_n+\varepsilon)\,t;\ \min_{i=1,\dots n-1} \Delta_i \widetilde{X}_t^n \geq -\eta t\right)\\ + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\min_{i=1,\dots n-1} \Delta_i \widetilde{X}_t^n \leq -\eta t\right)\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{N}^n$ on définit

$$\Sigma x := \sum_{i=1}^n x(i).$$

Alors d'une part

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\Big(\widetilde{X}_t^n(n) \geq (g_n+\varepsilon)\,t;\ \min_{1\leq i\leq n-1} \Delta_i \widetilde{X}_t^n \geq -\eta t\Big)\\ &\quad\leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\Big(\Sigma\widetilde{X}_t^n \geq \sum_{j=1}^n (g_n+\varepsilon-(n-j)\eta)t\Big)\\ &\quad\leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\Big(\Sigma\widetilde{X}_t^n \geq (ng_n+\delta)t\Big)\\ &\quad= \mathcal{O}_{exp}(t),\end{aligned}$$

puisque dans toute configuration x, on doit avoir $V_j(x) = 0$ pour au moins un site, ce qui implique que $\Sigma\widetilde{X}_t^n$ est dominé par un processus de Poisson d'intensité ng_n. D'autre part on a aussi

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\min_{i=1,\dots n-1} \Delta_i \widetilde{X}_t^n \leq -\eta t\right) = \mathcal{O}_{exp}(t)$$

comme conséquence directe du théorème 10. Ces deux observations achèvent la preuve de (2.45).

Finalement terminons par la preuve de (2.46). On pose $t_0 := 1/(4\sqrt{2}\sqrt{\beta_1\beta_0})$. Nous allons montrer que pour $k \geq 1$, $j \geq 0$ et $1 \leq i \leq n$, on a

$$p_{k,j}^i := \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\widetilde{X}_{kt_0}^n(i) \geq k+j-1\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j. \tag{2.47}$$

Ceci implique le résultat voulu : si (2.47) est vérifiée alors pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\widetilde{X}_t^n(n) \geq (1/t_0+\varepsilon)t) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\widetilde{X}_{t_0(\lfloor t/t_0\rfloor+1)}^n(n) \geq \lfloor t/t_0\rfloor + \lfloor \varepsilon t\rfloor) \leq (1/2)^{\lfloor \varepsilon t\rfloor} = \mathcal{O}_{exp}(t)$$

(ici $\lfloor t/t_0\rfloor$ désigne la partie entière de t/t_0). Pour démontrer (2.47) on procède par récurrence, en montrant que $(\mathcal{H}_\ell)$ est vérifiée pour tout $\ell \geq 1$, où

$$(\mathcal{H}_\ell): \quad \forall k \geq 1, j \geq 0 \text{ avec } k+j=\ell, \forall i \in \{1,\dots,n\},\ p_{k,j}^i \leq (1/2)^j.$$

Dans la suite on peut supposer sans perte de généralité que

$$\beta_1 \geq 2\beta_0, \tag{2.48}$$

puisque si ce n'est pas le cas on a $\widetilde{d}_n(\beta_1) \leq \beta_1 \leq 2\beta_0 \leq 4\sqrt{2}\sqrt{\beta_1\beta_0}$ et que donc (c) nous place dans le cadre du théorème 10. On introduit la notation $\tau_{v,d} := \inf\{s \geq 0 : \widetilde{X}^n_s(v) = d\}$. On dit qu'un site i est un *noyau* au niveau ℓ si le ℓ-ième carré déposé sur le site i est déposé à un instant où le site i est au moins aussi haut que ses voisins, autrement dit si

$$V_i(\widetilde{X}^n_{(\tau_{i,\ell})^-}) = 0.$$

Pour $i_1 \leq i_2$ on dit que i_1 *se propage* à i_2 dans l'intervalle de temps $[s,t]$ si N_{1,i_1+1}, N_{1,i_1+2}, $\ldots$, N_{1,i_2} sautent successivement entre l'instant s et l'instant t. Pour $i_1 > i_2$ cette définition s'étend de manière symétrique.
L'inégalité (2.47) pour $j = 0$, et par conséquent $(\mathcal{H}_1)$, est triviale. On suppose maintenant que $(\mathcal{H}_\ell)$ est vérifiée et on prend $i \in \{1, \ldots n\}$ et $k, j \geq 1$ avec $k + j = \ell + 1$. Alors

$$\begin{aligned} p^i_{k,j} &= \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\Big(\widetilde{X}^n_{kt_0}(i) \geq k + j - 1\Big) \\ &\leq \sum_{u=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\Big(\widetilde{X}^n_{(m-1)t_0}(u) < k + j - 1;\ \widetilde{X}^n_{mt_0}(u) \geq \\ &\qquad k + j - 1;\ u \text{ est un noyau au niveau } k + j - 1;\ u \text{ se propage} \\ &\qquad \text{à } i \text{ dans l'intervalle } [\tau_{u,k+j-1}, kt_0]\Big). \end{aligned}$$

Pour que ce dernier évènement ait lieu, les trois conditions suivantes doivent être réunies :
- $\tau_{u,k+j-2} \leq mt_0$,
- $N_{0,u}$ saute au moins une fois dans l'intervalle $[\max(\tau_{u,k+j-2}, (m-1)t_0), mt_0]$,
- u se propage à i après le premier de ces sauts.

En utilisant le fait que la loi de Poisson vérifie $\mathbb{P}(P_\lambda \geq 1) \leq \lambda$, il en découle que

$$p^i_{k,j} \leq \sum_{u=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} p^u_{m,k-m+j-1}\beta_0 t_0 \mathbb{P}_0\left(P_{(k-m+1)\beta_1 t_0} \geq |u - i|\right),$$

et par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
p_{k,j}^i &\leq \sum_{m=1}^{k} (1/2)^{k-m+j-1} \beta_0 t_0 \sum_{u=1}^{n} \mathbb{P}_0 \left(P_{(k-m+1)\beta_1 t_0} \geq |u-i| \right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{k} (1/2)^{k-m+j-1} \beta_0 t_0 \sum_{v \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_0 \left(P_{(k-m+1)\beta_1 t_0} \geq |v| \right) \\
&\leq (1/2)^{j-1} \beta_0 t_0 \sum_{m=1}^{k} (1/2)^{k-m} (1 + 2\mathbb{E}[P_{(k-m+1)\beta_1 t_0}]) \\
&\leq (1/2)^{j-1} \beta_0 t_0 \left[\sum_{r=0}^{k-1} (1/2)^r + 2\beta_1 t_0 \sum_{r=0}^{k-1} (r+1)(1/2)^r \right] \\
&\leq (1/2)^{j-1} \beta_0 t_0 (2 + 8\beta_1 t_0) \\
&\leq (1/2)^j.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence de (2.48) et du choix de t_0. □

2.9 une condition suffisante de transience dans le domaine $\beta_0 < \beta_2 < \beta_1$

Dans cette section on exhibe des paramètres appartenant au domaine $\mathcal{D}$ pour lesquels H^n est transitoire, indépendamment de la valeur de n. Avec la section précédente cela montre que le domaine $\mathcal{D}$ est mixte, ce qui pose à l'avenir le problème de décrire la zone des paramètres pour lesquels H^n est ergodique, et de ceux pour lesquels H^n est transitoire. Dans le théorème suivant on se place sous la condition zéro.

Théorème 14. *Fixons $\beta_0 > 0$ et $\beta_2 \in]\beta_0, 2\beta_0[$. Alors il existe $B > \beta_0$ tel que H^n soit transitoire pour tout $\beta_1 > B$ et $n \geq 5$.*

On commence par un lemme qui dit que pour $n = 3$, prendre β_1 très grand rend la vitesse asymptotique v^3 proche de sa borne $3\beta_0$. On rappelle que par le corollaire 2, v^3 existe dès qu'on prend β_1 et β_2 strictement supérieurs à β_0.

Lemme 6. *Soit $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que*

$$\beta_1 \geq \frac{27\beta_0^2\beta_2}{\varepsilon(\beta_2 - \beta_0)}. \tag{2.49}$$

Alors la vitesse asymptotique vérifie

$$v^3 \geq 3\beta_0 - \varepsilon.$$

Démonstration. On note ici A l'ensemble des configurations avec un trou :

$$A = \{h \in \mathbb{Z}^2 : h(1) > 0, h(2) < 0\}.$$

Pour $x \in \mathbb{N}^3$ on notera aussi $x \in A$ si le profil de x appartient à A. On définit une double suite de temps d'arrêt en posant :

$$U_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t^3 \in A\}, \qquad \begin{array}{l} T_0 = 0, \\ T_1 = \inf\{t > U_1 : X_t^3 \notin A\}, \\ \cdots \end{array}$$

$$U_{k+1} = \inf\{t \geq T_k : X_t^3 \in A\}, \quad T_{k+1} = \inf\{t > U_{k+1} : X_t^3 \notin A\}, \text{ pour } k \geq 2.$$

On définit aussi

$$Y_n := \Sigma X_{T_n}^3.$$

Pour montrer le résultat voulu il nous suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} Y_n/T_n \geq 9\beta_0 - 3\varepsilon$. On affirme d'abord que la suite

$$I_n := Y_n - (9\beta_0 - 3\varepsilon)T_n$$

est une sous-martingale. Par la propriété de Markov forte c'est le cas si pour tout $x \notin A$,

$$\mathbb{E}_x[Y_1 - (9\beta_0 - 3\varepsilon)T_1] \geq 0. \tag{2.50}$$

Pour établir cette inégalité on fait les observations suivantes :

- Soit $Z_1 = \Sigma X_{U_1}^3$ le nombre de sauts du processus avant d'atteindre A. Pour n'importe quelle configuration initiale $y \notin A$ la probabilité que la première transition mène à A est majorée par β_0/β_1. Ainsi par la propriété de Markov, Z_1 est stochastiquement plus grande que la loi géométrique de paramètre β_0/β_1, et par conséquent

$$\mathbb{E}_x[Z_1] \geq \beta_1/\beta_0. \tag{2.51}$$

- Toute configuration $y \notin A$ telle que $\Sigma y \notin 3\mathbb{Z}$ admet au moins un site j tel que $V_j(y) = 1$. Donc conditionnellement à Z_1, au moins $(2Z_1/3 - 1)$ transitions jusqu'à l'instant U_1 surviennent à un taux supérieur ou égal à β_1, et de toute façon les autres surviennent à un taux qui est au moins $3\beta_0$. On déduit de cette remarque que $\mathbb{E}_x[U_1|Z_1] \leq \frac{2Z_1}{3\beta_1} + \frac{Z_1/3+1}{3\beta_0}$, et par conséquent

$$\mathbb{E}_x[U_1] \leq \left(\frac{2}{3\beta_1} + \frac{1}{9\beta_0}\right)\mathbb{E}_x[Z_1] + \frac{1}{3\beta_0}. \tag{2.52}$$

- La configuration $X_{U_1}^3$ appartient à l'ensemble $A \cap \{x \in \mathbb{N}^3 : x(1) = x(2)+1 \text{ ou } x(3) = x(2)+1\}$. Or, pour toute configuration y dans cet ensemble, le temps de sortie de A partant de y est stochastiquement supérieur au temps d'atteinte de 0 par un processus de naissance et de mort sur $\mathbb{Z}_+$ partant de 1, avec un taux de naisance égal à β_0 et un taux de mort égal à β_2. Par conséquent

$$\mathbb{E}_x[T_1 - U_1] \leq \frac{1}{\beta_2 - \beta_0}. \tag{2.53}$$

Maintenant (2.52) et (2.53) nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[Y_1 - (9\beta_0 - 3\varepsilon)T_1] &\geq \mathbb{E}_x[Z_1] - (9\beta_0 - 3\varepsilon)\left[\left(\frac{2}{3\beta_1} + \frac{1}{9\beta_0}\right)\mathbb{E}_x[Z_1] + \frac{1}{3\beta_0} + \frac{1}{\beta_2 - \beta_0}\right] \\ &= \left[\frac{2\varepsilon - 6\beta_0}{\beta_1} + \frac{\varepsilon}{3\beta_0}\right]\mathbb{E}_x[Z_1] - (9\beta_0 - 3\varepsilon)\left(\frac{1}{3\beta_0} + \frac{1}{\beta_2 - \beta_0}\right). \end{aligned}$$

La condition (2.49) implique que $(2\varepsilon - 6\beta_0)/\beta_1 + \varepsilon/(3\beta_0) \geq 0$. En utilisant (2.51) on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[Y_1 - (9\beta_0 - 3\varepsilon)T_1] &\geq \left[\frac{2\varepsilon - 6\beta_0}{\beta_1} + \frac{\varepsilon}{3\beta_0}\right]\frac{\beta_1}{\beta_0} - (9\beta_0 - 3\varepsilon)\left(\frac{1}{3\beta_0} + \frac{1}{\beta_2 - \beta_0}\right) \\ &\geq \varepsilon\frac{\varepsilon\beta_1}{3\beta_0^2} - 9\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_0},\end{aligned}$$

qui est positif sous l'hypothèse (2.49). On conclut qu'on a bien (2.50) et donc que la suite I_n est une sous-martingale.
On définit une autre suite $(S_k, k \geq 0)$ d'entiers naturels en posant $S_0 = 0$, et pour $k \geq 0$,

$$S_{k+1} = \inf\{n > S_k : H^3_{T_n} = \mathbf{0}\}.$$

On remarque que $T_{S_1} = \inf\{t \geq 0 : H^3_t = \mathbf{0} \text{ et } H^3_{t-} = (1,-1)\}$. Or pour un processus de Markov ergodique sur un ensemble dénombrable et deux états s_1 et s_2 avec un taux de saut positif de s_1 à s_2, l'instant (aléatoire) de la première transition de s_1 vers s_2 est d'espérance finie. De cette remarque on déduit que $\mathbb{E}_0[T_{S_1}] < \infty$, et par conséquent on a aussi $\mathbb{E}_0|I_{S_1}| < \infty$. La propriété de sous-martingale nous donne $\mathbb{E}_0[I_{S_1}] \geq 0$. Puisque par la propriété de Markov I_{S_k} est la somme de k variables qui sont des copies indépendantes de I_{S_1}, et que la même chose a lieu pour T_{S_k}, une simple application de la loi des grands nombres donne :

$$3v^3 = \lim_{k\to\infty}\frac{Y_{S_k}}{T_{S_k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{I_{S_k}}{T_{S_k}} + 9\beta_0 - 3\varepsilon = \frac{\mathbb{E}_0[I_{S_1}]}{\mathbb{E}_0[T_{S_1}]} + 9\beta_0 - 3\varepsilon \geq 9\beta_0 - 3\varepsilon.$$

□

Preuve du théorème 14. On rappelle d'abord un fait basique. Si $(\mathcal{N}_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ, et f est une fonction déterministe positive telle que $\lim_\infty f(t)/t = \mu > \lambda$, alors

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0, \mathcal{N}_t \leq f(t)) > 0. \tag{2.54}$$

Ceci peut s'obtenir comme conséquence du fait que $\mathbb{P}(\mathcal{N}_t \geq \frac{\lambda+\mu}{2}t) = \mathcal{O}_{exp}(t)$. De la proposition 11 et du lemme 6 avec $\varepsilon = 3\beta_0 - \beta_2$, on déduit qu'une condition suffisante pour que

$$\beta_2 < \min(v^2, v^3)$$

est que $\beta_1 > B$, où

$$B := \max\left(\frac{\beta_0\beta_2}{2\beta_0 - \beta_2}, \frac{27\beta_0^2\beta_2}{(3\beta_0 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_0)}\right).$$

Pour $n \geq 5$ il est possible de décomposer les n sites en blocs de largeur 2 ou 3 séparés par des trous de largeur 1. Cependant, pour que la suite soit plus lisible, on supposera désormais que $n \in 3\mathbb{Z} + 2$, de sorte à n'utiliser que des blocs de largeur 2 et donc seule l'inégalité $\beta_2 < v^2$ sera nécessaire. Bien sûr ce qui suit s'adapte sans problème si on ne suppose plus que $n \in 3\mathbb{Z}+2$, auquel cas il est nécessaire d'utiliser aussi l'inégalité $\beta_2 < v^3$.

On part de la configuration $x := (1,1,0,1,1,0,\dots,1,1,0,1,1)$ et on montre que l'évènement $E = \{\forall t \geq 0, H_t^n \neq \mathbf{0}\}$ vérifie $\mathbb{P}_x(E) > 0$, ce qui implique que H^n est transitoire. On utilise la notation (2.22) et on remarque que

$$\begin{aligned} E \supset & \left\{\forall t \geq 0, X_t^n(3) < \min\left(X_t^n(2), X_t^n(4)\right)\right\} \cap \dots \cap \left\{\forall t \geq 0, X_t^n(n-2) < \right. \\ & \left. \min\left(X_t^n(n-3), X_t^n(n-1)\right)\right\} \\ = & \left\{\forall t \geq 0, N_{3,2}(t) < \min\left(X_t^{1:2,(0,0)}(2), X_t^{4:5,(0,0)}(1)\right)\right\} \cap \dots \cap \left\{\forall t \geq 0, N_{n-2,2}(t) < \right. \\ & \left. \min\left(X_t^{n-4:n-3,(0,0)}(2), X_t^{n-1:n,(0,0)}(1)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Le processus $m_t = \min\left(X_t^{1:2}(2), X_t^{4:5}(1), \dots, X_t^{n-4:n-3}(2), X_t^{n-1:n}(1)\right)$ vérifie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_t}{t} = v^2,$$

et il est indépendant des processus de Poisson $N_{3,2}, N_{6,2}, \dots, N_{n-2,2}$. Par conséquent le résultat découle de (2.54) et du fait que $\beta_2 < v^2$. □

2.10 Étude du cas $n = 4$

Dans cette section on montre, toujours sous la condition zéro :

Théorème 15. *Si $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ alors H^4 est ergodique.*

Ce résultat n'est pas inclus par le théorème 13. Il peut paraître sans importance car en soi l'étude du processus H^n pour $n = 4$ n'est pas cruciale. On a choisi cependant de l'exposer car sa démonstration utilise un ingrédient supplémentaire par rapport au théorème 13, or comme on expliquera dans la section 2.12, on espère que cet ingrédient puisse être utile pour n quelconque afin d'affaiblir les conditions du théorème 13.
On commence par deux lemmes et un résultat préliminaire sur le processus de Gates-Westcott avec $n = 2$ et avec les conditions au bord : infini à gauche et zéro à droite. Ce processus sera noté $Y_t = (Y_t(1), Y_t(2))$ dans cette section. Notre proposition 13 est un résultat préliminaire qui dit en substance que dans le processus Y_t, le site de gauche a pour vitesse asymptotique β_1. La démonstration de cette proposition requiert elle-même deux lemmes préliminaires que nous énonçons en premier lieu.
Remarque. Par *principe standard de grandes déviations*, on entend que si $(X_i, i \geq 0)$ est une suite i.i.d. avec des moments exponentiels, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq (\mathbb{E}X + \varepsilon)n\right) = \mathcal{O}_{exp}(n), \text{ et } \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq (\mathbb{E}X - \varepsilon)n\right) = \mathcal{O}_{exp}(n).$$

Dans cette section on note $q_i(x) := \beta_{V_i(x)}$, $x \in \mathbb{N}^n$.

Lemme 7. *On suppose qu'il existe des constantes $v, C, \alpha > 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0, \ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s \leq vt\right) \leq Ce^{-\alpha t}. \tag{2.55}$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ il existe des constantes C', $\alpha' > 0$ tels que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(X_t^n(i) \leq (v-\varepsilon)t\right) \leq C' e^{-\alpha' t} \tag{2.56}$$

Démonstration. On va utiliser le processus $M_t^\alpha := (1-\alpha)^{X_t^n(i)} e^{\alpha \int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s}$. Le théorème T2, page 165 de [8], implique que pour tout $\alpha < 1$, $(M_t^\alpha, t \geq 0)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}$, dite martingale exponentielle (ou de Doléans). On écrit alors

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_t^n(i) \leq (v-\varepsilon)t) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s \leq vt\right) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(X_t^n(i) - \int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s \leq -\varepsilon t\right).$$

On choisit $\alpha > 0$ assez petit pour que $-\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha} < \frac{\beta_k}{\beta_k - \varepsilon/2}$, $k = 0, 1, 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(X_t^n(i) - \int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s \leq -\varepsilon t\right) &= \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\log(1-\alpha)X_t^n(i) - \int_0^t \log(1-\alpha)(q_i(X_s^n) - \varepsilon/2)\mathrm{d}s \right.\\
&\qquad \left. \leq -\frac{1}{2}\log(1-\alpha)\varepsilon t\right)\\
&\leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\log(1-\alpha)X_t^n(i) + \alpha\int_0^t q_i(X_s^n)\mathrm{d}s \geq -\frac{1}{2}\log(1-\alpha)\varepsilon t\right)\\
&= \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(M_t^\alpha \geq e^{-\frac{1}{2}\log(1-\alpha)\varepsilon t}\right)\\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbf{0}}[M_t^\alpha] e^{\frac{1}{2}\log(1-\alpha)\varepsilon t}\\
&= e^{\frac{1}{2}\log(1-\alpha)\varepsilon t}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé avec $\varepsilon' = \min(\alpha, -\log(1-\alpha)\varepsilon/2)$ et $C' = C + 1$. □

Lemme 8. *Soit une suite $(Z_i, i \geq 1)$ de variables i.i.d avec $Z_i \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z_1] = +\infty$. On pose $N(t) = \inf\{n : S_n \geq t\}$, avec $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}(N(t) \geq \varepsilon t) \leq e^{-\alpha t}.$$

Démonstration. Soit $\widetilde{Z}_i = Z_i \wedge M$, avec M assez grand pour que $\mathbb{E}[\widetilde{Z}_1] > \varepsilon^{-1}$. Soit $\widetilde{S}_n = \widetilde{Z}_1 + \cdots + \widetilde{Z}_n$, et $\widetilde{N}(t) = \inf\{n : \widetilde{S}_n \geq t\}$. On note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière supérieure d'un réel a, et on écrit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) \geq \varepsilon t) &\leq \mathbb{P}(\widetilde{N}(t) \geq \varepsilon t)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\widetilde{N}(t) \geq \frac{t}{\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta}\right), \quad \text{pour } \delta \text{ assez petit}\\
&\leq \mathbb{P}\left(\widetilde{S}_{\lceil \frac{t}{\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta}\rceil} \leq t\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\widetilde{S}_{\lceil \frac{t}{\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta}\rceil} \leq \frac{t}{\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta}(\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta)\right)\\
&\leq \exp\left(-\frac{\gamma t}{\mathbb{E}\widetilde{Z}_1 - \delta}\right),
\end{aligned}$$

pour un certain $\gamma > 0$, grâce au principe standard de grandes déviations. □

On est maintenant en mesure de donner le résultat annoncé sur Y_t.

Proposition 13. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(Y_t(1) \leq (\beta_1 - \varepsilon)t) = \mathcal{O}_{exp}(t). \tag{2.57}$$

Démonstration. En vertu du lemme 7, il suffit de montrer que pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\int_0^t q_1(Y_s)\mathrm{d}s \leq (\beta_1 - \varepsilon)t\right) = \mathcal{O}_{exp}(t).$$

Soit $A = \{y \in \mathbb{N}^2 : y(1) < y(2)\}$, et $T(t) = \int_0^t \mathbb{1}_A(Y_s)\mathrm{d}s$. On a

$$\int_0^t q_1(Y_s)\mathrm{d}s = \beta_2 T(t) + \beta_1(t - T(t)),$$

de sorte qu'il suffit de montrer que pour $a > 0$, $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(T(t) \geq at) = \mathcal{O}_{exp}(t)$. On note $\tau_1,\ \tau_1',\ \tau_2,\ \tau_2', \ldots$, les durées des excursions alternativement dans A^c et dans A. Il s'agit d'une suite de v.a. indépendantes, où les τ_i sont de même loi avec $\mathbb{E}[\tau_i] = +\infty$, et $m = \mathbb{E}[\tau_i'] < +\infty$. De plus, $\mathbb{E}[e^{\alpha\tau_i'}] < +\infty$ pour α assez petit.
Soient $S_n := \sum_{i=1}^n (\tau_i + \tau_i')$ et $N_t := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n < t\}$. On choisit $\lambda < a/m$, et on écrit

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(T(t) \geq at) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(N_t \geq \lambda t) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\sum_{i=1}^{\lceil \lambda t \rceil} \tau_i' \geq \frac{a}{\lambda}\lceil \lambda t \rceil\right).$$

Le premier terme est $\mathcal{O}_{exp}(t)$ grâce au lemme 8. Le second terme aussi grâce au choix de λ, au fait que la loi de τ_i' a des queues exponentielles, et au principe standard de grandes déviations. □

Remarque. il est important pour la preuve suivante de noter que si $r \leq 0$,

$$\mathbb{P}_{(0,r)}(Y_t(1) \leq (\beta_1 - \varepsilon)t) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(Y_t(1) \leq (\beta_1 - \varepsilon)t) = \mathcal{O}_{exp}(t).$$

Preuve du théorème 15. **(i)** On peut supposer que $\beta_1 \geq \beta_2$ car sinon le résultat découle du théorème 10. On doit montrer que pour $j = 1, \ldots 3$, il existe $C_j,\ \alpha_j > 0$ tels que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_j X_t^n \geq k) \leq C_j e^{-\alpha_j k}. \tag{2.58}$$

Comme on l'a dit dans la preuve du théorème 12, les hypothèses du lemme 5 sont automatiquement vérifiées pour $j = 1$, donc (2.58) est vérifiée pour $j = 1$. Par ailleurs si l'on suppose qu'elle est vérifiée pour $j = 2$ alors elle l'est aussi pour $j = 3$ (par la dernière assertion du lemme 5). Il reste donc à montrer (2.58) pour $j = 2$, et par le lemme 4 il suffit en fait de montrer qu'il existe $C_2, \alpha_2 > 0$ telles que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\Delta_2 X_t^4 > 0,\ \tau_t^2 \in [\ell - 1,\ \ell[\right) \leq C_2 e^{-\alpha_2(t-\ell)}. \tag{2.59}$$

On prend d_2 comme dans le théorème 10, puis on choisit $\gamma > 0$ assez petit et L assez grand pour que

$$\gamma < \beta_2 - \beta_0, \quad \text{et} \quad \frac{d_2 + 2/L}{1 - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}} < \beta_1.$$

Puisqu'on sait déjà que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_1 X_\ell^4 > \frac{t-\ell}{L}) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell), \quad \text{que} \quad \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(-\Delta_3 X_\ell^4 > \frac{t-\ell}{L}) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell),$$

et que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(\Delta_2 X^4(\ell) > \frac{t-\ell}{L},\ \tau_t^2 \in [\ell-1,\ \ell[) \leq \mathbb{P}(P_{\beta_1} > \frac{t-\ell}{L}) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell)),$$

on peut noter $D = \{x \in \mathbb{N}^4 : \max(\Delta_1 X_\ell^4, \Delta_2 X_\ell^4, -\Delta_3 X_\ell^4) \leq (t-\ell)/L\}$ et la preuve de (2.59) et donc du résultat annoncé sera achevée si l'on montre que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(\Delta_2 X_s^4 > 0,\ \forall s \in [\ell, t];\ X_\ell^4 \in D\right) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell). \tag{2.60}$$

Notons E l'évènement dans (2.60). On remarque que $E \subset \{\Delta_2^{\ell,t} X^4 > (d_2 + \frac{1}{L})(t-\ell)\} \cup \{\Delta_3^{\ell,t} X^4 \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{0}}(E) \leq \quad & \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(E \cap \{\Delta_2^{\ell,t} X^4 > (d_2 + \tfrac{1}{L})(t-\ell)\}\right) \\ & + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(E \cap \{\Delta_3^{\ell,t} X^4 \leq (d_2 + \tfrac{2}{L})(t-\ell)\}\right).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Puisque X^2 est attractif (en effet dans X^2, la valeur de β_2 ne joue aucun rôle donc la proposition 7 est valable), on a

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(E \cap \{\Delta_2^{\ell,t} X^4 > (d_2 + \frac{1}{L})(t-\ell)\}\right) \leq \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(X_{t-\ell}^2(2) > d_2(t-\ell)\right) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell),$$

grâce au choix de d_2. Quant au deuxième terme dans la somme (2.61), on utilise la propriété de Markov forte. En notant $T^0 := \inf\{s \geq 0 : Y_s(1) = Y_s(2)\}$, celle-ci donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\big(E \cap \{\Delta_3^{\ell,t} X^4 \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\}\big) &\leq \max_{0 \leq r \leq \lceil \frac{t-\ell}{L} \rceil} \mathbb{P}_{(0,r)}\big(Y_{t-\ell}(1) \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\big) \\ &\leq \max_{0 \leq r \leq \lceil \frac{t-\ell}{L} \rceil} \mathbb{P}_{(0,r)}\left(T^0 \geq \frac{t-\ell}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(Y_{\left(1 - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right)(t-\ell)}(1) \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\right) \\ &= \mathbb{P}_{(0, \lceil \frac{t-\ell}{L} \rceil)}\left(T^0 \geq \frac{t-\ell}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right) + \mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(Y_{\left(1 - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right)(t-\ell)}(1) \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\right)\end{aligned}$$

(la première inégalité utilise la remarque suivant la proposition 13). Or

- on a
$$\mathbb{P}_{(0, \lceil \frac{t-\ell}{L} \rceil)}\left(T^0 \geq \frac{t-\ell}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell).$$
C'est une conséquence du fait qu'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec un rappel constant vers 0 atteint 0 en un temps qui a des moments exponentiels.
- par ailleurs, (2.57) implique que
$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}}\left(Y_{\left(1 - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_0 - \gamma)L}\right)(t-\ell)}(1) \leq (d_2 + \frac{2}{L})(t-\ell)\right) = \mathcal{O}_{exp}(t-\ell)$$
grâce à l'hypothèse faite sur γ et L.

Ceci achève la preuve. □

2.11 Existence d'une mesure stationnaire pour une infinité de sites, avec $\beta_1 = (\beta_0 + \beta_2)/2$

Le résultat de cette section concerne le processus de Gates-Westcott avec une infinité de sites, et avec un paramètre vérifiant (2.16). Ce processus, désormais noté $(H_t, t \geq 0)$, est à valeurs dans l'espace non dénombrable $E = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ des configurations $h = (h(k), k \in \mathbb{Z})$. Ce processus est déterminé par son générateur infinitésimal défini par

$$\Omega f(h) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k(h) \Big[f(h^k) - f(h) \Big],$$

pour les fonctions $f \in \mathcal{D}(X)$ (voir la section 1.4 du chapitre 1). On a noté $q_k(h) = \beta_{V_k(h)}$, et $h^k = h + e'_k$ où $e'k$ est le vecteur défini dans (2.8). On rappelle que dans le cas d'un nombre fini de sites et sous la condition périodique, on a le théorème 2.17. La mesure π^n qui apparaît dans ce résultat est définie sur l'ensemble $E_n := \{h \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n h(i) = 0\}$ qui est canoniquement en bijection avec $\mathbb{Z}^{n-1}$. On note m la mesure sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$m(k) = \frac{1}{Z} r^{|k|},$$

avec $r = \sqrt{\beta_0/\beta_2}$ et $Z = (1+r)/(1-r)$. Alors une autre façon de décrire la mesure π^n du théorème 2.17 est de remarquer que

$$\pi^n = m^{\otimes n} | E_n,$$

c'est-à-dire la mesure produit $m^{\otimes n}$ sur $\mathbb{Z}^n$ conditionnée par le sous-ensemble E_n de $\mathbb{Z}^n$. Remarquons au passage que

$$m(\{0, 1, \ldots\}) = \frac{1}{1+r}, \quad m(\{0, 1, \ldots\}) = \frac{r}{1+r}. \tag{2.62}$$

Lorsque $n \to \infty$, il est naturel de penser que le conditionnement par E_n, qui est dû aux effets de bord, n'a que peu d'influence sur la projection de π^n sur un ensemble fixé de coordonnées. En d'autres termes, pour $n = \infty$ on s'attend à voir le conditionnement disparaître. Le théorème suivant confirme cete intuition.

Théorème 16. *La mesure produit $\mu := m^{\otimes \mathbb{Z}}$ est invariante pour le processus $(H_t, t \geq 0)$.*

Le processus $(H_t, t \geq 0)$ n'étant pas un processus de saut comme l'était le processus $(H^n_t, t \geq 0)$, il est impossible pour montrer ce théorème d'utiliser le critère des cycles pour la réversibilité dynamique, comme dans le cas d'un nombre fini de sites (voir l'appendice). Il nous faut donc procéder d'une manière plus directe.
Dans la démonstration suivante, on notera pour $a \in \mathbb{Z}$,

$$\text{signe}(a) = \begin{cases} +1, & \text{si } a > 0, \\ -1 & \text{si } a < 0, \\ 0, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Preuve du théorème 16. Forts du théorème 6 de la section 1.4, il nous suffit de montrer que

$$\int \Omega f \mathrm{d}\mu = 0, \tag{2.63}$$

pour toute fonction f bornée et locale. Par conséquent, quitte à sommer il est suffisant de montrer que (2.63) est vérifiée par les fonctions de la forme

$$f(h) = \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j),$$

où $i < j$ et $a_i, a_{i+1}, \dots a_j \in \mathbb{Z}$. On notera

$$\mu^0 := \int f \mathrm{d}\mu = \mu(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j) = \frac{1}{Z^{j-i+1}} r^{\sum_{k=i}^{j} |a_k|}.$$

On définit aussi la constante

$$\rho := \frac{1}{rZ}\mu^0(\beta_1 r + \beta_0).$$

Puisque $f(h^k) = f(h)$ pour $k \notin \{i, \dots, j+1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\Omega f(h) &= \sum_{k=i}^{j+1} q_k(h)\big[f(h^k) - f(h)\big] \\
&= \sum_{k=i+1}^{j} q_k(h)\big[\mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(k-1) = a_{k-1} + 1, h(k) = a_k - 1, \dots, h(j) = a_j) \\
&\qquad - \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j)\big] \\
&+ q_i(h)\big[\mathbb{1}(h(i) = a_i - 1, h(i+1) = a_{i+1}, \dots, h(j) = a_j) - \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j)\big] \\
&+ q_{j+1}(h)\big[\mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j-1) = a_{j-1}, h(j) = a_j + 1) - \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j)\big].
\end{aligned}$$

On note $\sum_{k=i+1}^{j} A_k(h)$ le premier terme de cette somme, puis $B(h)$ et $C(h)$ les deux suivants. On commence par le calcul de $\int B \mathrm{d}\mu$.
Si $a_i > 0$, on remarque que

$$\begin{aligned}
B(h) =& \big[\beta_1 \mathbb{1}_{h(i-1)>0} + \beta_0 \mathbb{1}_{h(i-1)\le 0}\big] \\
&\times \big[\mathbb{1}(h(i) = a_i - 1, h(i+1) = a_{i+1}, \dots, h(j) = a_j) - \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j)\big],
\end{aligned}$$

qui s'intègre en

$$\begin{aligned}
\int B \mathrm{d}\mu &= \left(\beta_1 \frac{r}{1+r} + \beta_0 \frac{1}{1+r}\right)\left(\frac{\mu^0}{r} - \mu^0\right) \\
&= \frac{1-r}{r(1+r)}\mu^0(\beta_1 r + \beta_0) \\
&= \rho.
\end{aligned}$$

Si $a_i < 0$, on remarque que

$$\begin{aligned}
B(h) =& \big[\beta_2 \mathbb{1}_{h(i-1)>0} + \beta_1 \mathbb{1}_{h(i-1)\le 0}\big] \\
&\times \big[\mathbb{1}(h(i) = a_i - 1, h(i+1) = a_{i+1}, \dots, h(j) = a_j) - \mathbb{1}(h(i) = a_i, \dots, h(j) = a_j)\big],
\end{aligned}$$

qui s'intègre en

$$\begin{aligned}\int B\mathrm{d}\mu &= \left(\beta_2\frac{r}{1+r}+\beta_1\frac{1}{1+r}\right)(\mu^0 r-\mu^0)\\ &= -\frac{1-r}{1+r}\mu^0(\beta_2 r+\beta_1)\\ &= -\rho\end{aligned}$$

(la dernière inégalité utilise l'hypothèse (2.16)).
Enfin si $a_i = 0$,

$$\begin{aligned}B(h) =&\big[\beta_2\mathbb{1}_{h(i-1)>0}+\beta_1\mathbb{1}_{h(i-1)\le 0}\big]\mathbb{1}(h(i)=a_i-1,h(i+1)=a_{i+1},\dots,h(j)=a_j)\\ &-\big[\beta_1\mathbb{1}_{h(i-1)>0}+\beta_0\mathbb{1}_{h(i-1)\le 0}\big]\mathbb{1}(h(i)=a_i,\dots,h(j)=a_j),\end{aligned}$$

qui s'intègre en

$$\begin{aligned}\int B\mathrm{d}\mu &= \left(\beta_2\frac{r}{1+r}+\beta_1\frac{1}{1+r}\right)\mu^0 r-\left(\beta_1\frac{r}{1+r}+\beta_0\frac{1}{1+r}\right)\mu^0\\ &= \frac{\mu^0}{1+r}(\beta_2 r^2-\beta_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

En mettant ces résultats ensemble, on a obtenu

$$\int B\mathrm{d}\mu = \mathrm{signe}(a_i)\rho. \tag{2.64}$$

Par un calcul analogue, on obtient

$$\int C\mathrm{d}\mu = -\mathrm{signe}(a_j)\rho. \tag{2.65}$$

On écrit enfin

$$\begin{aligned}A_k(h) = q_k(h)\big[&\mathbb{1}(h(i)=a_i,\dots,h(k-1)=a_{k-1}+1,h(k)=a_k-1,\dots,h(j)=a_j)\\ &-\mathbb{1}(h(i)=a_i,\dots,h(k-1)=a_{k-1}+1,h(k)=a_k,\dots,h(j)=a_j)\big]\\ q_k(h)\big[&\mathbb{1}(h(i)=a_i,\dots,h(k-1)=a_{k-1}+1,h(k)=a_k,\dots,h(j)=a_j)\\ &-\mathbb{1}(h(i)=a_i,\dots,h(j)=a_j)\big].\end{aligned}$$

En procédant pour chacun des deux termes de cette somme comme on l'a fait dans les précédents calculs, on aboutit à

$$\int A_k\mathrm{d}\mu = \big(\mathrm{signe}(a_k)-\mathrm{signe}(a_{k-1})\big)\rho. \tag{2.66}$$

Les égalités (2.64), (2.65) et (2.66) impliquent le résultat voulu. □

2.12 Questions ouvertes

Pour terminer ce chapitre, nous évoquons certains problèmes ouverts et conjectures qui sont apparus durant nos recherches et peuvent motiver une poursuite des investigations sur le processus de Gates-Westcott.

1. Y'a t-il des cas où H^n est ergodique et où il est possible de dire quelque chose sur la vitesse de convergence vers la distribution stationnaire ?
2. Après avoir fait la remarque à la fin de la Section 2.2, on peut se poser précisément la question suivante : si $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ et $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2')$ avec $\beta_2 < \beta_2'$, les implications suivantes sont-elles vraies ?

$$H^n \text{ est récurrent sous } \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{\beta} \Rightarrow H^n \text{ est récurrent sous } \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{\beta'},$$

$$H^n \text{ est ergodique sous } \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{\beta} \Rightarrow H^n \text{ est ergodique sous } \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{\beta'}.$$

3. Comme mentionné dans la remarque qui suit le théorème 11, on peut se poser la question de savoir s'il est vrai, pour n'importe quelles valeurs des paramètres, que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t^n(i) \text{ existe presque sûrement,}$$

autrement dit que $t^{-1}X_t^n$ converge presque sûrement vers un vecteur *a priori* aléatoire (qui peut être en fait déterministe, par exemple si H^n est ergodique). Un résultat de ce type (pour un modèle assez différent cependant) est obtenu dans [37]. Pour commencer par un cas simple, on pourrait vérifier (ou infirmer) la conjecture suivante :

$$\text{si } \beta_1 > \beta_0 \text{ et } \beta_2 < v^2, \text{ alors } \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t^5 = (v^2, v^2, \beta^2, v^2, v^2).$$

4. Pour $\beta \in \mathcal{D}$, nous pensons qu'il est possible d'obtenir une conclusion plus forte que dans le théorème 12. Sous les mêmes hypothèses, nous allons expliquer qu'il est vraisemblable que

$$H^k \text{ soit ergodique pour } k \text{ allant jusqu'à } 2n+2. \tag{2.67}$$

Pour montrer ceci il suffit de prendre $k = 2n+2$ et de vérifier que (2.39) a lieu pour $j = 1, \dots, 2n+1$.
Pour $j = 1, \dots n$, il suffit de suivre la preuve du théorème 12.
Pour $j = n+1, \dots 2n+1$, on espère pouvoir obtenir (2.39) en s'inspirant de la preuve du théorème 15 : il faudrait d'abord montrer que la conclusion de la proposition 13 est toujours valable avec r sites si $\beta_2 > \widetilde{d}_{r-1}(\beta_1)$ [2]. Ensuite il resterait à adapter ce qui est fait dans la preuve du théorème 15.

2. Cela paraît raisonnable : dans ce processus le site 1 évolue alternativement selon un processus de Poisson d'intensité β_1 et β_2. Les périodes d'intensité β_1 sont d'espérance infinie, alors que les périodes d'intensité β_2 sont d'espérance finie sous l'hypothèse $\beta_2 > \widetilde{d}_{r-1}(\beta_1)$.

5. Prenons n pair pour simplifier, et supposons que la conjecture (2.67) soit vérifiée, de sorte que v^n existe si $\beta_2 > (n/2-1)\beta_0$ et $\beta_1 > \beta_2$ [3]. Si l'on fait varier β_1, est-il vrai que
$$\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0 ?$$
Dans le lemme 6 nous avons déjà montré ceci dans le cas simple où $n = 3$. Pour n quelconque, l'intuition reste la suivante : si β_1 est immense, partant de l'état plat on attend un certain temps distribué selon la loi $\mathrm{Exp}(n\beta_0)$, pour que le premier carré soit posé, puis avec probabilité proche de 1 le reste de l'étage se remplit presque instantanément.
6. Si les deux points précédents sont démontrés, on déduira l'existence d'un phénomène critique losque l'on augmente β_2, pour β_1 fixé (β_1 grand). Plus précisément, on montrerait aisément que
   - H^n est ergodique pour $\beta_2 > (n/2-1)\beta_0$,
   - H^n est transitoire pour β_2 en dessous d'une certaine valeur proche de $(n/2-1)\beta_0$.
7. Dans le (c) du théorème 13, on montre en fait que si $\beta_1 > 32\beta_0$,
$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{d}_n(\beta_1) < \beta_1. \tag{2.68}$$
Est-il vrai que (2.68) a lieu pour tout $\beta_1 > \beta_0$? Si, comme nous le croyons, la réponse est positive, cela fournirait un voisinage à droite de $\mathcal{D}$, indépendant de n, où l'ergodicité a lieu.
8. Nous avons été obligés d'introduire la constante $\widetilde{d}_n(\beta_1)$, mais il paraît plausible qu'en fait l'égalité suivante ait lieu :
$$\widetilde{d}_n(\beta_1) = \widetilde{v}^n.$$
Par une application du principe standard de grandes déviations, on peut montrer que c'est le cas si $\widetilde{H}^n$ a des temps de retour qui, en plus d'être intégrables, ont des moments exponentiels. Malheureusement [3] ne contient pas de résultat à ce sujet et ceci reste une question ouverte.
9. Dans la section 2.11, nous avons seulement pu exhiber une distribution stationnaire pour le profil de Gates-Westcott. Rien de plus n'est connu sur l'ensemble des distributions stationnaires, ou sur la convergence en loi du processus partant du profil $\mathbf{0}$.

3. en fait $\beta_1 > \beta_0$ suffit grâce au théorème 10

Chapitre 3

Le processus de contact sous-critique vu du bord

3.1 Définitions et notations

Ce chapitre porte sur le processus de contact sur $\mathbb{Z}$, ainsi que sur un modèle discret, en relation avec ce dernier. Le modèle discret, introduit dans [10], consiste en une percolation orientée sur un graphe en 2 dimensions et constitue un analogue en temps discret du processus de contact. L'intérêt de ce dernier vient du fait qu'il partage la plupart des propriétés importantes du processus de contact continu tout en gardant la simplicité de manipulation dûe au caractère discret. C'est commode pour travailler dans un premier temps en écartant les difficultés techniques propres au temps continu, avant d'adapter éventuellement les raisonnements au contact classique. Kuczek [33] s'est par exemple placé dans ce cadre pour établir un théorème limite central pour le bord du processus.
Les deux processus seront notés par la lettre ξ, le contexte permettant de lever toute ambiguïté. Soit

$$X := \{0,1\}^{\mathbb{Z}}.$$

On rappelle qu'une configuration $\eta \in X$ peut être identifiée avec la sous-partie $\{v \in \mathbb{Z} : \eta(v) = 1\}$ de $\mathbb{Z}$. Par conséquent on écrira $\sup \eta$ au lieu de $\sup\{v \in \mathbb{Z} : \eta(v) = 1\}$, et $|\eta|$ au lieu de $\sum_{v\in\mathbb{Z}} \eta(v)$. La configuration identiquement nulle sera notée $\mathbf{0}$. On définit aussi les ensembles suivants (ceux notés avec un Y concernent le contact discret) :

$$X_\infty := \{\eta \in X : |\eta| = \infty, \sup \eta < +\infty\}.$$

$$X_f := \{\eta \in X : |\eta| < \infty\}.$$

$$Y := \mathscr{P}(2\mathbb{Z}),\ Y' := \mathscr{P}(2\mathbb{Z}+1).$$

$$Y_\infty := \{A \subset 2\mathbb{Z} : |A| = \infty, \sup A < +\infty\},\ Y'_\infty := \{A \subset 2\mathbb{Z}+1 : |A| = \infty, \sup A < +\infty\}.$$

$$Y_f := \{A \subset 2\mathbb{Z} : |A| < \infty, A \neq \varnothing\},\ Y'_f := \{A \subset 2\mathbb{Z}+1 : |A| < \infty, A \neq \varnothing\}.$$

$$X^b_\infty := \{\eta \in X : |\eta| = \infty, \sup \eta = 0\},\ X^b_f := \{\eta \in X : |\eta| < \infty, \sup \eta = 0\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

$$Y^b_\infty := \{A \subset 2\mathbb{Z} : |A| = \infty, \sup A = 0\},\ Y^b_f := \{A \subset 2\mathbb{Z} : |A| < \infty, \sup A = 0\} \cup \{\varnothing\}.$$

Si $\eta \in X$ et $v \in \mathbb{Z}$ on note $\eta \oplus v$ la translatée de η selon v, c'est-à-dire :

$$\eta \oplus v(w) = \eta(w - v), w \in \mathbb{Z}.$$

Une configuration non vide majorée peut être décrite par la donnée de la position de sa particule la plus à droite, ainsi que de la configuration vue de cette dernière particule. Cette deuxième donnée est l'objet d'étude dans ce chapitre. Plus précisément, on considère l'application

$$\begin{array}{rcccl} B & : & X_\infty \cup X_f & \to & X_\infty^b \cup X_f^b \\ & & \eta & \mapsto & \begin{cases} \eta \oplus (-\sup \eta), & \text{si } \eta \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{si } \eta = \mathbf{0}. \end{cases} \end{array} \tag{3.1}$$

On dit que $B(\eta)$ est la configuration "η vue du bord". B est définie de manière similaire sur $Y_\infty \cup Y_f$ et sur $Y'_\infty \cup Y'_f$.

Définition 10. *Le processus de contact partant de $\eta \in X$ d'intensité λ est le système de spins sur $\mathbb{Z}$, noté $(\xi_t^\eta, t \geq 0)$, défini par $\xi_0^\eta = \eta$ et par les taux de transition suivants.*

$$c_v(\eta) = \begin{cases} 1, \ \textit{si } \eta(v) = 1 \\ \lambda(\mathbb{1}_{\eta(v-1)=1} + \mathbb{1}_{\eta(v+1)=1}), \ \textit{si } \eta(v) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

On dit que le site v est *occupé* si $\eta(v) = 1$ et *vacant* si $\eta(v) = 0$. Alors (3.2) dit qu'un site occupé devient vacant au taux 1 et qu'un site vacant devient occupé à un taux proportionnel au nombre de sites voisins occupés. Si $\eta = \{a\}$, on écrit ξ_t^a au lieu de $\xi_t^{\{a\}}$. Par un simple argument de couplage, il existe une valeur critique $\lambda_c \geq 0$ telle que

$$\text{si } \lambda < \lambda_c, |\eta| < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\forall t \geq 0, \xi_t^\eta \neq \mathbf{0}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\text{si } \lambda > \lambda_c, \ \mathbb{P}(\forall t \geq 0, \xi_t^0 \neq \mathbf{0}) > 0. \tag{3.4}$$

Il est bien connu que $\lambda_c \in]0, +\infty[$, et que lorsque $\lambda = \lambda_c$ c'est encore (3.3) qui a lieu [6]. Par ailleurs (voir [35], Partie VI, Théorème 3.4) si $\lambda < \lambda_c$ alors il existe $K, r > 0$ tels que

$$\mathbb{P}(\xi_t^0 \neq \mathbf{0}) \leq Ke^{-rt}, \ t \geq 0. \tag{3.5}$$

On pourra se référer pour plus de détails sur le processus de contact au chapitre VI de [35]. On décrit maintenant le modèle discret. Il met en jeu le graphe G orienté défini par l'ensemble de sommets

$$V = \{(x, n) \in \mathbb{Z}^2 : n \geq 0, x + n \in 2\mathbb{Z}\},$$

et par l'ensemble d'arêtes

$$E = \{\langle (x, n), (x + 1, n + 1) \rangle, (x, n) \in V\} \cup \{\langle (x, n), (x - 1, n + 1) \rangle, (x, n) \in V\}.$$

Soient $(X_e, e \in E)$ des v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. On dit que l'arête e est ouverte si $X_e = 1$ et fermée sinon. Un chemin dans G est une suite finie $(e_1, \ldots, e_n)$ d'arêtes consécutives. Un chemin $(e_1, \ldots, e_n)$ est dit ouvert si chaque arête e_i est ouverte.

Pour $v_1, v_2 \in V$, on note $\{v_1 \to v_2\}$ l'évènement qu'il existe un chemin ouvert de v_1 vers v_2, et pour $V_1, V_2 \subset V$, on note

$$\{V_1 \to V_2\} = \{\exists v_1 \in V_1, \exists v_2 \in V_2 : v_1 \to v_2\}$$

ainsi que $\{V_1 \nrightarrow V_2\}$ son complémentaire. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $A \subset 2\mathbb{Z} + k$ (c'est-à-dire $A \subset 2\mathbb{Z}$ si k pair ou $A \subset 2\mathbb{Z}+1$ si k impair), on s'autorise à écrire (A, k) au lieu de $\{(a, k), a \in A\}$.

Définition 11. *Le processus de contact discret partant de $A \subset 2\mathbb{Z}$ est défini par*

$$\xi_n^A = \{y : (y, n) \in V, (A, 0) \to (y, n)\}.$$

C'est une chaîne de Markov prenant ses valeurs alternativement dans Y et Y'.

Pour $A \subset 2\mathbb{Z} + k$ on utilisera aussi la notation

$$\xi_{k,n}^A = \{y : (y, n) \in V, (A, k) \to (y, n)\}, n \geq k.$$

Comme dans le cadre continu, il existe une valeur critique $p_c \in]0, 1[$ telle que
- si $p \leq p_c$, $\forall A \subset 2\mathbb{Z}$ finie, $\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \xi_n^A \neq \varnothing) = 0$,
- si $p > p_c$, $\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \xi_n^0 \neq \varnothing) > 0$.

En outre, si $p < p_c$, il existe $\rho > 0$ tels que

$$\mathbb{P}(\xi_n^0 \neq \varnothing) \leq e^{-\rho n}, \ n \geq 0. \tag{3.6}$$

Un fait élémentaire concernant le processus de contact est que si la configuration initiale a la propriété d'être infinie et majorée, cette propriété est conservée à tout instant (on dit qu'une configuration est majorée si l'ensemble de ses sites occupés est borné à droite). Autrement dit

$$\forall \eta \in X_\infty, \mathbb{P}\left(\forall t \geq 0, \xi_t^\eta \in X_\infty\right) = 1,$$

et de la même façon on a

$$\forall \eta \in X_f, \mathbb{P}\left(\forall t \geq 0, \xi_t^\eta \in X_f\right) = 1.$$

Ceci reste bien sûr vrai pour le contact discret.

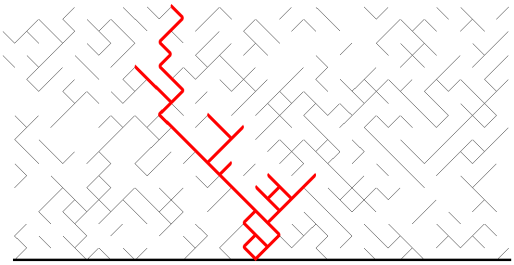

FIGURE 3.1 – Une réalisation du processus de contact discret

Définition 12. *Supposons que $\eta \in X_\infty$ ou $\eta \in X_f$. Ce qui précède nous autorise à considérer le* processus de contact vu du bord *défini par*

$$\zeta_t^\eta := B(\xi_t^\eta).$$

L'invariance par translation dans (3.2) fait de $(\zeta_t^\eta, t \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans X_∞^b si $\eta \in X_\infty$, ou dans X_f^b si $\eta \in X_f$.
Dans le cadre discret on définit de même les processus

$$\zeta_n^A = B(\xi_n^A),\ n \geq 0,$$

ainsi que $\zeta_{k,n}^A = B(\xi_{k,n}^A)$, $n \geq k$. Ce sont des chaînes de Markov à valeurs dans Y_∞^b si $A \in Y_\infty$ ou dans Y_f^b si $A \in Y_f$.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la convergence en loi des processus vus du bord, lorsqu'on part d'une configuration quelconque η infinie et majorée, comme par exemple une demi-droite de sites ocupés. Nous rappelons que X est muni de sa topologie produit. Dans ce contexte la convergence faible d'une suite μ_n de probabilités sur X vers une autre probabilité μ sur X, notée $\mu_n \Longrightarrow \mu$, a lieu si

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f \mathrm{d}\mu_n = \int_X f \mathrm{d}\mu,$$

pour toute fonction locale f sur X.
Dans le cas surcritique, Galves et Presutti [16] ont montré que $\forall \eta \in X_\infty^b$, le processus ζ_t^η converge en loi vers une unique mesure invariante. Ce résultat a ensuite été étendu au cas critique par Cox, Durrett et Schinazi [9]. Dans ces deux derniers cas, les démonstrations s'adaptent sans difficulté à la situation du temps discret. Ces deux résultats sont énoncés dans le cadre continu mais le passage au temps discret ne pose pas de problème. Dans le cas sous-critique, il est démontré dans le cadre discret [41] et continu [4] que le processus ζ n'admet pas de distribution stationnaire. Cependant Andjel [2] a montré récemment dans le cadre discret l'existence d'une distribution ν telle que pour $A \in Y_\infty^b$, la loi de ζ_n^A converge faiblement vers ν. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une convergence en loi puisqu'il s'avère que la mesure ν est portée par Y_f^b, autrement dit elle ne charge que les configurations finies, alors que le processus ζ_n^A est à valeurs dans Y_∞^b. La mesure ν coïncide avec la limite de Yaglom du processus restreint aux configurations finies (voir théorème 18).
Dans la section 3.2, nous donnons une preuve alternative de ce résultat. Ensuite dans les sections 3.3 et 3.4 nous abordons, sans le résoudre, le problème d'adapter ce même résultat au processus de contact classique. En particulier nous prouvons l'existence d'une limite de Yaglom pour le contact sous-critique vu du bord, ce qui constitue un premier pas dans cette direction. Bien sûr ce résultat possède aussi un intérêt en lui-même.

3.2 Une preuve alternative de la convergence du contact sous-critique vu du bord

Dans cette section on fait l'hypothèse que $p < p_c$, et on donne une nouvelle preuve du théorème suivant dû à Andjel [2]. Outre le fait qu'elle soit plus courte, notre motivation

initiale était de disposer d'une démonstration qui soit plus aisément adaptable au cadre du temps continu.
On note $\mathcal{L}(Z|D)$ la loi d'une v.a. Z conditionnellement à un évènement D.

Théorème 17 (Andjel, '12). *Supposons que $p < p_c$. Il existe une probabilité ν sur Y_f^b telle que pour tout $A \in Y_\infty^b$, on ait la convergence faible*

$$\mathcal{L}(\zeta_n^A) \Longrightarrow \nu,\ n \to \infty.$$

Pour notre preuve comme pour celle de [2], l'ingrédient principal est le théorème 1 dans [14], qui appliqué à notre contexte donne l'existence d'une limite de Yaglom pour le processus ζ_n :

Théorème 18 (Ferrari, Kesten, Martinez, '95). *Supposons que $p < p_c$. Il existe une probabilité ν sur Y_f^b telle que*

$$\mathcal{L}(\zeta_n^0 | \xi_n^0 \neq \varnothing) \Longrightarrow \nu,\ n \to \infty.$$

On commence par introduire quelques notations supplémentaires. Pour $a \in \mathbb{Z}$ on note $]a, \infty[$ l'ensemble $\{a+2, a+4, \ldots\}$. Pour $(x,k) \in V$, on définit

$$C_{x,k} := \{(y,n) \in V : |y-x| \leq n-k\},$$

$$L_k := \{(x,r) \in V : r = k\},$$

$$\mathcal{F}^k = \sigma(X_e, e \in E^k),\ \mathcal{F}^-_{x,k} = \sigma(X_e, e \in E^-_{x,k}),\ \mathcal{F}^+_{x,k} = \sigma(X_e, e \in E^+_{x,k}),$$

où

$$E^k = \{< v_1, v_2 > \in E : v_1, v_2 \in \cup_{j=0}^k L_j\},$$

$$E^-_{x,k} = \{\langle (y,n), (z,n+1)\rangle \in E : n \geq k, y - x \leq n-k, z - x \leq n+1-k\},$$

$$E^+_{x,k} = E \backslash E^-_{x,k}.$$

Désormais $A = \xi_0$ et n sont fixés, et pour simplifier les notations on écrira ξ_n et ζ_n au lieu de ξ_n^A et ζ_n^A. Soit

$$\mathcal{G}(n) = \{(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) : \gamma_0 \in 2\mathbb{Z}; \forall i = 1, \ldots, n, |\gamma_i - \gamma_{i-1}| = 1\}$$

l'ensemble des chemins de L_0 vers L_n. γ sera confondu avec la sous-partie $\{(\gamma_0, 0), \ldots, (\gamma_n, n)\}$ de V. Pour $\gamma \in \mathcal{G}(n)$, on note $G(\gamma)$ le sous-graphe de G constitué des arêtes dont l'un des sommets est strictement à droite de γ, et $\mathcal{F}(\gamma)$ la tribu engendrée par les variables représentant l'état des arêtes de $G(\gamma)$ (voir figure 3.2). On définit aussi $\Gamma = (\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)$ le chemin ouvert le plus à droite de A vers L_n [4]. Enfin on définit l'évènement

$$\{\ell \text{ est un point de rupture}\} = \{\xi_\ell \cap]\Gamma_\ell, \Gamma_\ell + 2(n-\ell)] = \varnothing\},$$

et on note

$$R := \min\{\ell \geq 0 : \ell \text{ est un point de rupture}\}.$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\sqrt{n}$ la partie entière de la la racine carrée de n.

4. Γ est bien défini parce que si $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ et $(\gamma'_0, \ldots, \gamma'_n)$ sont deux chemins ouverts alors $(\max(\gamma_0, \gamma'_0), \ldots, \max(\gamma_n, \gamma'_n))$ en est aussi un.

Lemme 9. *Soit $A' \subset 2\mathbb{Z}+\ell$ telle que $|A'| = \infty$ et $a = \sup A' < +\infty$. Alors*

$$\mathcal{L}(\zeta_{\ell,n}^{A'} | R = \ell, \Gamma_\ell = a) = \mathcal{L}(\zeta_{n-\ell}^{A'} | 0 \to L_{n-\ell}). \tag{3.7}$$

Démonstration. $\zeta_{\ell,n}^{A'}$ ne dépendant que des états d arêtes appartenant à $E_{a,\ell}^-$, c'est une variable $\mathcal{F}_{a,\ell}^-$-mesurable. On affirme par ailleurs que l'évènement $\{R = \ell\} \cap \{\Gamma_\ell = a\}$ est l'intersection de $\{(a,\ell) \to L_n\}$ avec un évènement $\mathcal{F}_{a,\ell}^+$-mesurable. Les tribus $\mathcal{F}_{a,\ell}^+$ et $\mathcal{F}_{a,\ell}^-$ étant indépendantes, car engendrées par des v.a. correspondant à deux parties disjointes de E, ceci implique que

$$\mathcal{L}(\zeta_{\ell,n}^{A'} | R = \ell, \Gamma_\ell = a) = \mathcal{L}(\zeta_{\ell,n}^{A'} | (a,\ell) \to L_n),$$

ce qui donne le résultat annoncé par l'invariance par translation.
L'affirmation du paragraphe précédent est une conséquence du fait que

$$\begin{aligned}\{R = \ell\} \cap \{\Gamma_\ell = a\} = \{(a,\ell) \to L_n\} &\cap \{(A,0) \to (a,\ell)\} \\ &\cap \bigcap_{k=0}^{\ell-1} \left\{ \left(A \cap [\Gamma_0, \infty[, 0\right) \to \left(]\Gamma_k, \Gamma_k + 2(n-k)[, k\right) \right\} \\ &\cap \left\{ \left(A \cap [\Gamma_0, \infty[, 0\right) \nrightarrow \left(]a, a + 2(n-\ell)], \ell\right) \right\} \\ &\cap \left\{ \left(\xi_\ell \cap]a + 2(n-\ell), \infty[, \ell\right) \nrightarrow L_n \right\},\end{aligned}$$

où on remarque que dans le terme de droite tous les évènements hormis $\{(a,\ell) \to L_n\}$ sont $\mathcal{F}_{a,\ell}^+$-mesurables. □

On notera par la suite $\gamma_{|[a,b[}$ l'ensemble $\gamma \cap \left(\bigcup_{j=a}^{b-1} L_j\right)$.

Lemme 10. *il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $q < 1$ tels que $\forall k \geq k_0, \forall \gamma \in \mathcal{G}(k)$,*

$$\mathbb{P}\left(\{\gamma_{|[0,k[} \to (]\gamma_k, \infty[, k) \text{ dans } G(\gamma)\} \cup \{(]\gamma_0, \gamma_0 + 2k^2], 0) \to L_k \text{ dans } G(\gamma)\}\right) \leq q.$$

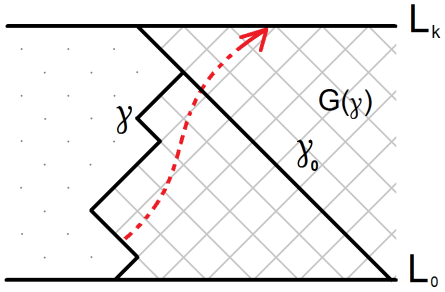

FIGURE 3.2 – En pointillés, l'évènement $\{\gamma_{|[0,k[} \to (]\gamma_k, \infty[, k)$ dans $G(\gamma)\}$.

Démonstration. Soit $p(\gamma) := \mathbb{P}(\{\gamma_{|[0,k[} \to (]\gamma_k, \infty[, k)$ dans $G(\gamma)\})$. On utilise le fait que

$$\max_{\gamma \in \mathcal{G}(k)} p(\gamma) = p(\gamma^0), \tag{3.8}$$

où γ^0 est le chemin droit de pente -1, c'est-à-dire $\gamma^0 = (0, -1, \dots, -k)$. La figure 3.2, qui représente simultanément γ et γ^0, suggère une façon simple de montrer l'égalité (3.8). Or par symétrie, on a

$$p(\gamma^0) = \mathbb{P}\left(]0,\infty[,0) \to \{(1,1),\dots,(k,k)\}\right),$$

et par conséquent $p(\gamma^0) \le r := \mathbb{P}\big(]0,\infty[,0) \to C_{0,0}\big)$. Une conséquence de (3.6) est que $r < 1$.
Par ailleurs on a aussi

$$\mathbb{P}\big(]\gamma_0, \gamma_0 + 2k^2], 0) \to L_k \text{ dans } G(\gamma)\big) \le \mathbb{P}\big(]0, 2k^2], 0) \to L_k \text{ dans } G(\gamma)\big),$$

qui est majorée par $k^2\mathbb{P}((0,0) \to L_k)$, qui tend vers 0 quand $k \to \infty$ grâce à (3.6). On obtient le résultat en prenant k assez grand pour que $k^2\mathbb{P}((0,0) \to L_k) \le \frac{1-r}{2}$. □

Lemme 11. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(R \le n/2) = 1$.

Démonstration. On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n suffisamment grand :

$$\max_{\gamma\in\mathcal{G}(n)} \mathbb{P}(R > n/2 | \Gamma = \gamma) \le \varepsilon. \tag{3.9}$$

Fixons $\gamma \in \mathcal{G}(n)$. La probabilité dans (3.9) vaut

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\le n/2} \{\gamma_{|[0,j[} \to \big(]\gamma_j, \gamma_j + 2(n-j)], j\big) \text{ dans } G(\gamma)\} \\ \cup \{(A\cap]\gamma_0,\infty[,0) \to \big(]\gamma_j, \gamma_j + 2(n-j)], j\big) \text{ dans } G(\gamma)\} \Big| \Gamma = \gamma \Big),$$

Or l'évènement à gauche du signe | est un évènement $\mathcal{F}(\gamma)$-mesurable croissant [5], tandis que $\{\Gamma = \gamma\}$ est l'intersection de l'évènement $\{\gamma$ est ouvert$\}$ avec un évènement $\mathcal{F}(\gamma)$-mesurable décroissant. Puisque $\{\gamma$ est ouvert$\}$ est indépendant de $\mathcal{F}(\gamma)$, il suffit pour avoir (3.9) de prouver que

$$\max_{\gamma\in\mathcal{G}(n)} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\le n/2} \{\gamma_{|[0,j[} \to \big(]\gamma_j, \gamma_j + 2(n-j)], j\big) \text{ dans } G(\gamma)\} \\ \cup \{(A\cap]\gamma_0,\infty[,0) \to \big(]\gamma_j, \gamma_j + 2(n-j)], j\big) \text{ dans } G(\gamma)\} \Big) \le \varepsilon, \tag{3.10}$$

pour n assez grand. Pour $m \ge 0$, on pose

$$F_m := \Big\{ \gamma_{|[m\sqrt{n},(m+1)\sqrt{n}[} \cup \Big([\gamma_{m\sqrt{n}}, \gamma_{m\sqrt{n}} + 2n], m\sqrt{n} \Big) \to L_{(m+1)\sqrt{n}} \text{ dans } G(\gamma) \Big\}.$$

Les F_m sont des évènements mutuellement indépendants, or d'après le lemme 10 on a pour $n \ge k_0^2$ l'inégalité $\mathbb{P}(F_m) \le q < 1$. Il reste à remarquer que l'évènement dans (3.10) est inclus dans $F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_{\sqrt{n}/2}$, et par conséquent sa probabilité est majorée par $\mathbb{P}(F_0)\dots\mathbb{P}(F_{\sqrt{n}/2}) \le q^{\sqrt{n}/2}$, qui est inférieur à ε pour n assez grand. □

5. on rappelle que ceci signifie que son indicatrice est une fonction de $\big(X_e, e$ arête de $G(\gamma)\big)$, et cette fonction est croissante vis-à-vis de la relation d'ordre canonique $\le$.

Notre dernier lemme est identique au lemme 3.1 de [2]. On dit qu'une fonction f sur $Y_f^b \cup Y_\infty^b$ est *locale* s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f(A)$ ne dépende de A qu'à travers $A \cap \{-2r, \dots, -2\}$.

Lemme 12. *Soit f une fonction locale sur sur $Y_f^b \cup Y_\infty^b$. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\zeta_n^{A'})|0 \to L_n] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n] = 0,$$

uniformément en $A' \in Y_f^b \cup Y_\infty^b$.

Démonstration. Soit r telle que $f(A)$ ne dépende que de $A \cap \{-2r, \dots, -2\}$. On pose $\Phi = \{(x,k) : k \leq n, (0,0) \to (x,k)\}$, et on remarque que pour toute valeur possible ϕ de Φ,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(\zeta_n^{A'})|\Phi = \phi] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|\Phi = \phi]| &\leq \mathbb{E}[|f(\zeta_n^{A'}) - f(\zeta_n^0)| \ |\Phi = \phi] \\
&\leq 2\|f\|\mathbb{P}(f(\zeta_n^{A'}) \neq f(\zeta_n^0)|\Phi = \phi) \\
&\leq 2\|f\|\mathbb{P}\big(([-2(n+r), 0[, 0) \to L_n \text{ sans utiliser les points de } \phi\big) \\
&\leq 2\|f\|\mathbb{P}\big(([-2(n+r), 0[, 0) \to L_n\big) \\
&\leq 2(n+r)\|f\|_\infty e^{-\rho n},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Preuve du théorème 17. Grâce au théorème 18, nous n'avons qu'à montrer que pour toute fonction locale f sur $Y_f^b \cup Y_\infty^b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\zeta_n^A)] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n] = 0.$$

Fixons f et posons

$$u_n = \sup_{k \geq n} |\mathbb{E}[f(\zeta_k^0)|0 \to L_k] - \int f \mathrm{d}\nu|.$$

La suite u_n est décroissante avec $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. D'après le lemme 12, il existe aussi une suite v_n décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ telle que

$$\forall A' \in Y_\infty^b, |\mathbb{E}[f(\zeta_n^{A'}) \mid 0 \to L_n] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0) \mid 0 \to L_n]| \leq v_n.$$

On pose $w_n = v_n + 2u_n$. Alors

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(\zeta_n^A)|R = \ell] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n]| &\leq |\mathbb{E}[f(\zeta_n^A)|R = \ell] - \mathbb{E}[f(\zeta_{n-\ell}^0)|0 \to L_{n-\ell}]| \\
&\quad + |\mathbb{E}[f(\zeta_{n-\ell}^0)|0 \to L_{n-\ell}] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n]| \\
&\leq v_{n-\ell} + u_n + u_{n-\ell} \\
&\leq w_{n-\ell}
\end{aligned}$$

(le fait que $|\mathbb{E}[f(\zeta_n^A)|R=\ell] - \mathbb{E}[f(\zeta_{n-\ell}^0)|0 \to L_{n-\ell}]| \leq v_{n-\ell}$ est une conséquence du lemme 9). Ainsi,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(\zeta_n^A)] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n]| &\leq 2\|f\|\mathbb{P}(R > n/2) \\ &\quad + |\mathbb{E}[f(\zeta_n^A)\mathbb{1}_{R\leq n/2}] - \mathbb{E}[f(\zeta_n^0)|0 \to L_n]\mathbb{P}(R \leq n/2)| \\ &\leq 2\|f\|\mathbb{P}(R > n/2) + \sum_{j=0}^{n/2} \mathbb{P}(R=j) w_{n-j} \\ &\leq 2\|f\|\mathbb{P}(R > n/2) + w_{n/2},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant dûe au fait que w_n est décroissante. On conclut par le lemme 11. □

3.3 Le processus de contact fini sous-critique vu du bord admet une limite de Yaglom

Si l'on veut adapter la preuve du théorème 17 au temps continu, le premier pas est d'avoir un résultat analogue au théorème 18. C'est l'objet de cette section.

3.3.1 Un théorème général sur la convergence conditionnelle des processus de Markov absorbants

On considère ici $(X_t, t \geq 0)$ un processus markovien de saut sur un ensemble S dénombrable. On note $Q = (q_{x,y})_{x,y\in S}$ son génerateur infinitésimal, c'est-à-dire que pour $x, y \in S$ distincts,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{P}_x(X_t = y) = q_{x,y}.$$

On note

$$P^t(x,y) := \mathbb{P}_x(X_t = y)$$

le semi-groupe associé à ce processus. On suppose qu'il existe un état absorbant $0 \in S$:

$$\mathbb{P}_0(X_t = 0) = 1, \ t \geq 0, \tag{3.11}$$

ce qui est équivalent à ce que $q_{0,x} = 0$ pour tout $x \neq 0$. Soit $S' := S\backslash\{0\}$. On suppose que la restriction de Q à S' est irréductible, autrement dit que pour tous $x, y \in S'$,

$$P^1(x,y) > 0. \tag{3.12}$$

Précisons qu'en temps discret, l'hypothèse d'irréductibilité s'écrirait de la manière suivante : pour tous $x, y \in S'$,

$$\exists m \geq 0 : P^m(x,y) > 0. \tag{3.12'}$$

On suppose en outre que l'absorption est certaine, soit

$$\forall x \in S', \ \mathbb{P}_x(T < \infty) = 1, \quad \text{où } T := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}. \tag{3.13}$$

Lemme 13. *Il existe $R \geq 1$ tel que pour $x, y \in S'$, $\lim_{t\to\infty} P^t(x,y)^{1/t} = 1/R$. Le réel R est appelé* taux d'absorption *du processus.*

Démonstration. Pour $x \in S'$, la convergence de $P^t(x,x)^{1/t}$ vient du fait que $P^t(x,x)$ est une fonction surmultiplicative du temps qui admet donc une limite par le théorème sous-additif. Sa limite est la même pour tout x, ce qui s'explique par l'encadrement

$$P^1(y,x)^{-1}P^{t+2}(y,y)P^1(x,y)^{-1} \geq P^t(x,x) \geq P^1(x,y)P^{t-2}(y,y)P^1(y,x).$$

On obtient similairement la convergence de $P^t(x,y)^{1/t}$, avec $x \neq y$, en écrivant

$$P^1(y,x)^{-1}P^{t+1}(y,y) \geq P^t(x,y) \geq P^1(x,y)P^{t-1}(y,y).$$

□

Une idée largement exploitée est d'utiliser le fait que pour $r > 0$, $(r^tP^t, t \geq 0)$ est encore un semi-groupe. Les propriétés de ce semi-groupe lorsque $r = R$ sont d'un intérêt particulier car $R^tP^t(x,y)$ est "d'ordre 1" et il a des points communs avec le semi-groupe associé à un processus irréductible (sans absorption). Il est bien connu qu'il y a trois alternatives :

- *la R-transience :* $\forall x \in S'$, $\int_0^\infty R^tP^t(x,x)\mathrm{d}t < \infty$;
- *la R-récurrence nulle :* $\forall x \in S'$, $\int_0^\infty R^tP^t(x,x)\mathrm{d}t = \infty$, mais $\lim R^tP^t(x,x) = 0$;
- *la R-récurrence positive :* $\lim R^tP^t(x,x) > 0$.

Pour une introduction à ces notions on pourra consulter [39]. Précisons que lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée pour un état $x \in S$, elle l'est aussi pour tous les états. Les notions ci-dessus ne dépendent donc pas du choix de x.
Bien sûr ceci s'adapte au cadre des chaînes de Markov à temps discret. Cette section doit beaucoup aux idées utilisées dans [14], dont on utilisera d'ailleurs le théorème principal :

Théorème 19 (Ferrari, Kesten, Martìnez)**.** *Soit $(Y_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov à temps discret vérifiant (3.11), (3.12') et (3.13). On suppose qu'il existe un ensemble $A \subset S'$, un élément $y_0 \in A$ et des constantes $C_1, C_2, C_3, \varepsilon_0 > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telles que*

(i) $\forall x \in A$, $\forall n \geq 0$, $\mathbb{P}_x(T > n; Y_1, \dots Y_n \notin A) \leq C_1(R + \varepsilon_0)^{-n}$,
(ii) $\forall x \in A$, $\forall n \geq 0$, $\mathbb{P}_x(T > n) \leq C_2\mathbb{P}_{y_0}(T > n)$,
(iii) $\forall x \in A$, $\mathbb{P}_x(\exists n \leq n_0 : Y_n = y_0) \geq C_3$.

Alors $(X_n, n \geq 0)$ est R-récurrente positive.

Dans cette référence les auteurs mentionnent qu'un résultat analogue en temps continu doit pouvoir être obtenu d'une façon similaire à celui-ci. Cependant, certaines difficultés techniques surviennent si on essaye d'adapter la preuve de ce théorème en temps continu. Nous énonçons ici cet analogue continu du théorème 19, mais plutôt que de l'obtenir avec une preuve similaire nous l'obtenons comme une conséquence du théorème 19 lui-même.

Théorème 20. *Soit $(X_n, n \geq 0)$ la chaîne de Markov issue du processus $(X_t, t \geq 0)$ pris aux temps entiers. On suppose que $(X_n, n \geq 0)$ vérifie (i), (ii) et (iii). Alors $(X_t, t \geq 0)$ est R-récurrent positif.*

Démonstration. On déduit du théorème 19 que $\lim_{n\to\infty} R^nP^n(x,x) > 0$, ce qui entraîne que $\lim_{t\to\infty} R^tP^t(x,x) > 0$ puisque cette limite doit exister dans tous les cas. □

Précisons qu'en général la R-récurrence positive n'entraîne pas l'existence de mesures quasi-stationnaires, et encore moins la convergence conditionnelle. Cependant dans notre cas on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 21. *On suppose que (i)–(iii) sont vérifiées, et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :*

(iv) $\mathrm{Card}\{x \in S' : q(x,0) > 0\} < \infty$.

Alors il existe une probabilité μ sur S' telle que pour tout $x, y \in S'$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(X_t = y \mid T > t) = \mu(y). \tag{3.14}$$

Démonstration. On a nécessairement $R > 1$, puisque si on avait $R = 1$ la R-récurrence positive impliquerait $\limsup_{t\to+\infty} \mathbb{P}_x(T > t) \geq \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}^t(x,x) > 0$, ce qui contredit (3.13). Le théorème 10 dans [39] établit alors l'existence et l'unicité d'une probabilité ν sur S' vérifiant $\nu P^t = R^{-t}\nu$. Or sous cette hypothèse le théorème 12 de cette même référence nous donne la convergence (3.14). □

Remarque. La mesure μ dans (3.14) est appelée *limite de Yaglom* du processus $(X_t, t \geq 0)$.

3.3.2 La limite de Yaglom pour des systèmes de spins finis

On vérifie ici que le processus de contact vu du bord vérifie toutes les hypothèses du théorème 21 et par conséquent admet une limite de Yaglom. Cependant on va se placer dans un cadre général qui est celui des *systèmes de spins* sur $\mathbb{Z}$ (remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}^d$ ne poserait aucune difficulté additionnelle mais pour nos besoins une dimension suffit). C'est l'analogue du cadre des *automates cellulaires probabilistes* traité par Ferrari, Kesten et Martìnez [14].

On utilise les notations introduites au début du chapitre. La configuration nulle sera notée $\mathbf{0}$. On répète que l'abus de confondre une configuration η avec l'ensemble $\{v \in \mathbb{Z} : \eta(v) = 1\}$ pourra être commis. En particulier on pourra écrire $\eta_1 \cup \eta_2$ au lieu de $\max(\eta_1, \eta_2)$, et $\{v\}$ pour la configuration qui vaut 1 en v et 0 ailleurs. Avant de poursuivre nous énonçons un lemme élémentaire. Désormais si Z est une v.a. et A un évènement, on utilisera la notation $\mathbb{E}[Z; A] := \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$.

Lemme 14. *Soit $(Z_n, n \geq 1)$ une suite i.i.d. telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbb{E}[e^{aZ_1}] < \infty$. Alors pour tout $p \geq 1$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^p} \mathbb{E}Z_1. \tag{3.15}$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{E}Z_1 = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et

$\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\mathbb{P}(|n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i| > \varepsilon) \leq e^{-n\delta(\varepsilon)}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i|^p &\leq \varepsilon^p + \mathbb{E}\left[|n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i|^p; |n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i| > \varepsilon\right] \\ &\leq \varepsilon^p + \|n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i\|_{2p}^p e^{-n\delta(\varepsilon)/2} \\ &\leq \varepsilon^p + \|Z_1\|_{2p}^p e^{-n\delta(\varepsilon)/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\limsup \mathbb{E}|n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i|^p \leq \varepsilon^p$, ce qui donne le résultat voulu puisque ε est arbitrairement petit. □

Soit une famille $\{c_v(\eta), \eta \in X, v \in \mathbb{Z}\}$ de réels positifs. On fait les hypothèses suivantes :

$$c_v(\eta) \text{ dépend de } \eta \text{ seulement à travers } \eta(u),\ |u-v| \leq 1, \tag{H1}$$

$$c_0(\mathbf{0}) = 0, \tag{H2}$$

$$c_{v+u}(\eta \oplus u) = c_v(\eta),\ \eta \in X,\ u, v \in \mathbb{Z}. \tag{H3}$$

Bien sûr ce qui suit fonctionnerait de la même manière si $c_v(\eta)$ dépendait des valeurs $\eta(u)$ pour $|v-u| \leq K$, avec $K \in \mathbb{N}$. Néanmoins on décide de prendre $K = 1$ pour ne pas alourdir les démonstrations inutilement. Comme conséquence de (H1) et (H3), $c_v(\eta)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (en fait 8 au maximum) dont le maximum est noté

$$M := \sup_{\eta \in X, v \in \mathbb{Z}} c_v(\eta) < +\infty.$$

Sous nos hypothèses (voir le chapitre 1), le prégénérateur L défini sur l'ensemble des fonctions locales f par

$$\Omega f(\eta) := \sum_{v \in \mathbb{Z}} c_v(\eta)\big[f(\eta^v) - f(\eta)\big] \tag{3.16}$$

définit un unique processus de Markov $(\mathbb{P}_\eta, \eta \in X)$ sur X. L'état de ce processus à l'instant t sera noté ξ_t. Le lemme suivant exprime le fait que dans ce processus, l'information ne peut pas être transmise de site en site plus vite qu'un processus de Poisson d'intensité M.

Lemme 15. *On peut construire, conjointement au processus $(\xi_t, t \geq 0)$, deux familles (indépendantes l'une de l'autre) de processus de Poisson notées $(N_t^{v,\leftarrow}, t \geq 0)$ et $(N_t^{v,\rightarrow}, t \geq 0)$, $v \in \mathbb{Z}$, tous ces processus étant d'intensité M, telles que pour $\eta \in X_f$,*

$$\xi_t \subset \bigcup_{v \in \eta} [-N_t^{v,\leftarrow}, N_t^{v,\rightarrow}],\ \mathbb{P}_\eta - p.s. \tag{3.17}$$

En particulier (3.17) implique que

$$\mathbb{P}_\eta(\forall t \geq 0, \xi_t \in X_f) = 1. \tag{3.18}$$

Par ailleurs si $u < w_1 < w_2 < v$, les vecteurs $(\xi_t(r), r \leq u)$ et $(\xi_t(r), r \geq v)$ sont indépendants conditionnellement à l'évènement $\{N_t^{w_1,\leftarrow} > u\} \cap \{N_t^{w_2,\rightarrow} < v\}$.

Démonstration. Une construction graphique du processus ξ_t comme décrite dans la section 1.3 est possible grâce à l'hypothèse (H1). La valeur de $\xi_t(w)$ pour un site w qui n'est pas dans l'ensemble $\bigcup_{v\in\eta}[-N_t^{v,\leftarrow}, N_t^{v,\rightarrow}]$ n'est pas influencée par les coordonnées de η qui valent 1. Donc $\xi_t(w)$ a la même valeur qu'en partant de la configuration identiquement nulle, c'est-à-dire la valeur 0.
Conditionnellement à l'évènement $\{N_t^{w_1,\leftarrow} > u\} \cap \{N_t^{w_2,\rightarrow} < v\}$, les vecteurs $(\xi_t(r), r \leq u)$ et $(\xi_t(r), r \geq v)$ sont des fonctions des processus de Poisson de la construction graphique en restriction à deux parties disjointes de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$. Ceci entraîne leur indépendance. □

Dans cette section la configuration ξ_0 est toujours finie, de sorte que le processus $(\xi_t, t \geq 0)$ est à valeurs dans l'espace dénombrable $X_f \cup \{\mathbf{0}\}$. Les hypothèses (H1)–(H3) impliquent que $\mathbf{0}$ est un état absorbant pour ce processus, dont le temps d'absorption est noté

$$T := \inf\{t \geq 0 : \xi_t = \mathbf{0}\}.$$

On fait en outre les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\xi_t \text{ est irréductible en restriction à } X_f, \tag{H4}$$

$$\sup_{\eta\in X} \mathbb{P}_\eta(\xi_t(0) = 1) = o(1/t), \tag{H5}$$

$$\xi_t \text{ est } \textit{additif} \tag{H6}$$

L'hypothèse (H6) signifie qu'il est possible de construire conjointement des processus $\{\xi^\eta, \eta \in X\}$, où la loi de ξ^η est $\mathbb{P}_\eta$, de telle manière que

$$\forall t \geq 0,\ \xi_t^{\eta_1\cup\eta_2} = \xi_t^{\eta_1} \cup \xi_t^{\eta_2}. \tag{3.19}$$

L'additivité du processus ξ implique qu'il est attractif : si $\eta_1 \subset \eta_2$ alors $\xi_t^{\eta_1} \subset \xi_t^{\eta_2}$. La condition (H5) s'écrit ainsi plus simplement

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}(\xi_t(0) = 1) = o(1/t).$$

Selon les besoins, on utilisera indifféremment la notation ξ_t en précisant la condition initiale dans le symbole $\mathbb{P}_\eta$, ou bien la notation ξ_t^η, auquel cas la probabilité sous-jacente sera notée simplement $\mathbb{P}$.
Une conséquence de l'additivité (voir [25], théorèmes 1.8 et 2.17 du chapitre II) est que pour $\eta \in X_f$, la variable $|\xi_t^\eta|$ est majorée de la manière suivante (le symbole $\leq_s$ désigne l'inégalité stochastique) :

$$|\xi_t^\eta| \leq_s \bigoplus_{j=1}^{|\eta|} Y_j, \text{ où les } Y_j \text{ sont indépendantes et de même loi que } |\xi_t^0|. \tag{3.20}$$

Par la suite, $P(\lambda)$ désignera une v.a. de loi Poisson(λ). Une conséquence du principe de grandes déviations est que pour $a > \lambda$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[P(t)\mathbb{1}_{\{P(t)>at\}}] = 0. \tag{3.21}$$

Le lemme suivant est une adaptation au temps continu du théorème 2 de [14].

Lemme 16. *Supposons que le processus ξ_t vérifie les hypothèses (H1)-(H6). Alors pour tout $\gamma > 0$ il existe des constantes $K, C > 0$ telles que*

$$\forall \eta \text{ tel que } |\eta| \leq K,\ \mathbb{P}_\eta(|\xi_1| > K, \dots, |\xi_n| > K) \leq C\gamma^n. \tag{3.22}$$

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$ on note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de a. Nous allons montrer les deux choses suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\{0\}}|\xi_t| = 0, \tag{3.23}$$

$$\forall r \geq 1, \exists C_r > 0 : \forall t \geq 1, \forall \eta \in X_f,\ \mathbb{E}_\eta \frac{|\xi_t|^r}{t^r|\eta|^r} \leq C_r. \tag{3.24}$$

Expliquons d'abord pourquoi (3.23) et (3.24) impliquent le résultat voulu. Par (3.23), on peut prendre $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{E}_{\{0\}}|\xi_{n_0}| \leq 1/2$. On prend alors $r > 0$ tel que $(2/3)^{r/n_0} < \gamma$. Grâce au lemme 14 combiné avec (3.20), on peut choisir K assez grand pour que $\sup_{|\chi|>K} \mathbb{E}_\chi \frac{|\xi_{n_0}|^r}{|\chi|^r} \leq (2/3)^r$. Si $|\eta| \leq K$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\eta(\forall \ell = 1, \dots n,\ |\xi_\ell| > K) &\leq \mathbb{P}_\eta(\forall\ j = 1, \dots \lfloor n/n_0 \rfloor,\ |\xi_{jn_0}| > K) \\
&\leq \frac{1}{K^r}\mathbb{E}_\eta\left[|\xi_{\lfloor n/n_0\rfloor n_0}|^r; \forall\ j = 1, \dots \lfloor n/n_0\rfloor,\ |\xi_{jn_0}| > K\right] \\
&= \frac{|\eta|^r}{K^r}\mathbb{E}_\eta\left[\prod_{j=0}^{\lfloor n/n_0\rfloor - 1} \frac{|\xi_{(j+1)n_0}|^r}{|\xi_{jn_0}|^r}; \forall\ j = 1, \dots \lfloor n/n_0\rfloor,\ |\xi_{jn_0}| > K\right] \\
&\leq \sup_{|\eta|\leq K} \mathbb{E}_\eta \frac{|\xi_{n_0}|^r}{|\eta|^r} \left(\sup_{|\chi|>K} \mathbb{E}_\chi \frac{|\xi_{n_0}|^r}{|\chi|^r}\right)^{\lfloor n/n_0\rfloor - 1} \\
&\leq n_0^r C_r (2/3)^{r(\lfloor n/n_0\rfloor - 1)} \\
&\leq (3/2)^{2r} n_0^r C_r \gamma^n.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à prouver (3.23) et (3.24). On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_t^{\{0\}}| &= \sum_{u\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_0(\xi_t(u) = 1) \\
&\leq \sum_{|u|\leq 2Mt} \mathbb{P}_0(\xi_t(u) = 1) + 2\sum_{|u|>2Mt} \mathbb{P}_0(N_t^{0,\to} \geq u) \\
&\leq 2Mt \sup_{\eta\in E_0} \mathbb{P}_\eta(\xi_t(0) = 1) + 2\mathbb{E}[N_t^{0,\to}; N_t^{0,\to} \geq 2Mt].
\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme tend vers 0 par (H5), et le deuxième aussi par (3.21), d'où (3.23). Pour (3.24), on sait grâce à (3.20) et (3.17) que $|\xi_t^\eta|$ est stochastiquement inférieur à $P(2|\eta|Mt) + |\eta|$. Par le lemme 14, il existe t_0 tel que pour tout η et tout $t \geq t_0$,

$$\mathbb{E}_\eta \frac{|\xi_t|^r}{t^r|\eta|^r} \leq 2(2M)^r.$$

La majoration voulue pour tout $t \geq 1$ se déduit alors de la continuité de l'application $\lambda \mapsto \mathbb{E}[P(\lambda)^r]$. □

L'objet qui nous intéresse n'est pas le processus ξ_t lui-même. En effet on ne peut pas espérer que celui-ci admette une limite de Yaglom, puisque si c'était le cas elle serait en particulier la limite de $\mathbb{P}_{\{v\}}(\xi_t = \cdot \mid T > t)$ pour tout $v \in \mathbb{Z}$, et donc elle serait invariante par translation, ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle doit être portée par l'ensemble des configurations finies.
On s'intéresse plutôt, pour $\eta \in X_f$, au processus

$$\zeta_t^\eta := B(\xi_t^\eta),$$

où B est l'application définie dans (3.1). ζ_t^η est bien défini grâce à (3.18). L'invariance par translation (H3) implique que $(\zeta_t^\eta, t \geq 0)$ est un processus markovien de saut sur l'ensemble X_f^b, absorbé en $\mathbf{0}$. On a $|\zeta_t| = |\xi_t|$, et en particulier le temps d'absorption T vérifie $T = \inf\{t \geq 0 : \zeta_t = \mathbf{0}\}$.

Théorème 22. *On suppose que $(\xi_t, t \geq 0)$ vérifie (H1)–(H6). Alors le processus $(\zeta_t, t \geq 0)$ admet une limite de Yaglom : il existe une probabilité μ sur X_f^b telle que*

$$\forall \eta, \chi \in X_f^b \backslash \{\mathbf{0}\}, \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_\eta(\zeta_t = \chi \mid T > t) = \mu(\chi). \tag{3.25}$$

Démonstration. Le processus ζ_t est bien irréductible en restriction à $X_f^b\backslash\{\mathbf{0}\}$ grâce à (H4). Par ailleurs pour $\eta \in X_f^b\backslash\{\mathbf{0}\}$, on a

$$\mathbb{P}_\eta(\zeta_t \neq \mathbf{0}) \leq |\eta|\mathbb{P}_{\{0\}}(\zeta_t \neq \mathbf{0}) \leq |\eta|\mathbb{E}_{\{0\}}|\zeta_t|, \tag{3.26}$$

donc (2.44) fait que l'absorption est certaine. Il reste à vérifier que les hypothèses (i)–(iv) du théorème 21 sont toutes vérifiées. Pour cela on prend $\gamma < 1/R$ et on choisit :

- $A = \{\eta \in X_f^b\backslash\{\mathbf{0}\} : |\eta| \leq K\}$, où K est assez grand pour vérifier l'inégalité (3.22) du lemme 19,
- $\{0\}$ joue le rôle de y_0.

L'hypothèse (i) est une conséquence du choix de A. Ensuite l'inégalité (3.26) donne aussi (ii) avec $C_2 = K$. Pour terminer nous allons voir que (iii) est une conséquence de (3.13). On introduit une notation pour gagner en concision : la valeur de $c_0(\eta)$ sera notée $c(\eta(-1), \eta(0), \eta(1))$. On a nécessairement

$$c(0,1,0) > 0,$$

sinon $\mathbf{0}$ ne pourrait pas être atteint par ξ_t, ce qui contredit (3.13). Par ailleurs il est impossible que $c(1,1,0) = c(0,1,1) = 0$, car alors la monotonie imposerait d'avoir également $c(1,1,1) = 0$ (voir la caractérisation de la monotonie par les taux de transition dans [35]), auquel cas partant d'une configuration avec $\eta(v) = \eta(v+1) = 1$, on aurait $\mathbb{P}_\eta(\forall t \geq 0, \xi_t(v) = \xi_t(v+1)) = 1$, ce qui est encore en contradiction avec (3.13). On peut donc supposer par exemple

$$c(1,1,0) > 0.$$

Soit une configuration initiale $\eta \in X_f^b$ avec $|\eta| \leq K$, et $v_1, \ldots, v_{|\eta|}$ ses particules. On remarque que pour qu'à l'instant 1 il reste une et une seule particule, une condition suffisante est que dans l'intervalle de temps $[0,1]$,

- $v_{|\eta|}$ ne subisse aucune transition
- les sites voisins des v_j qui ne sont pas des particules ne subissent aucune transition

– pour $j = 1, \dots |\eta|-1$, v_j disparaisse dans l'intervalle de temps $[(j-1)/(|\eta|-1), j/(|\eta|-1)]$, et ne subisse aucune autre transition.

Cette remarque se traduit par la minoration

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\eta(\xi_1 = \{0\}) &\geq \big[\exp(-M)\big]^{3|\eta|}\big[1 - \exp\big(-(|\eta|-1)^{-1}\min(c(1,1,0), c(0,1,0))\big)\big]^{|\eta|-1} \\ &\geq \big[\exp(-M)\big]^{3K}\big[1 - \exp(-(K-1)^{-1}\min(c(1,1,0), c(0,1,0)))\big]^{K-1} \\ &> 0.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3. *Si $(\xi_t, t \geq 0)$ est le processus de contact de paramètre $\lambda < \lambda_c$ alors $(\zeta_t, t \geq 0)$ admet une limite de Yaglom qui sera notée ν.*

Démonstration. Pour le processus de contact, l'hypothèse (H5) est une conséquence de (3.5), et les hypothèses (H1)–(H4) et (H6) sont aussi des faits bien connus. □

3.4 Problèmes pour adapter la section 3.2 en temps continu

Il semble plausible qu'un passage au temps continu soit possible dans le théorème 17, en travaillant avec la structure de percolation qui gouverne le processus de contact, c'est-à-dire la construction graphique de Harris. Il s'agit d'un travail en cours.
ζ_t désignant ici le contact vu du bord, Nous voulons montrer l'affirmation suivante :

Conjecture. *Supposons $\lambda < \lambda_c$. Pour tout $A \in X_\infty^b$, on a la convergence faible*

$$\zeta_t^A \Longrightarrow \nu, \ t \to \infty.$$

Ceci présente deux difficultés. Premièrement, certains conditionnements par rapport à un nombre fini d'évènements (comme dans la preuve du lemme 12) ne sont plus pertinents. Cependant nous pensons que cet obstacle technique peut être réglé en travaillant avec des tribus bien choisies. La deuxième difficulté, plus profonde, vient du fait que les cônes de dépendance droits $C_{x,n}$ ne sont plus utiles puisqu'en temps continu des chemins de pente arbitrairement grande existent avec probabilité positive. Même si les probabilités de voir des chemins très pentus sont contrôlées par des inégalités de grandes déviations sur les processus de Poisson, il n'est pas évident que ces contrôles résistent au conditionnement par des évènements comme la survie d'individus jusqu'à des instants grands, ceux-ci étant aussi de probabilité très faible. Cette différence avec le cas discret est l'obstacle le plus sérieux pour prouver notre conjecture.
On peut toujours considérer $(\Gamma_s, 0 \leq s \leq t)$ le chemin le plus à droite du niveau 0 vers le niveau t, et définir l'évènement

$$\{s \text{ est un point de rupture}\} = \{(\Gamma_0, 0) \nrightarrow (]\Gamma_s, \infty[, s)\} \cap \{(A, 0) \nrightarrow (]\Gamma_s, \Gamma_s + 2m(n-s)], s)\},$$

où m est une constante à choisir, représentant la pente des cônes. Avec ces définitions l'analogue du lemme 9 en temps continu est certes faux mais on peut espérer que les deux termes de (3.7) soient asymptotiquement proches si m est assez grand.

Le lemme 10 ne s'adapte pas non plus directement au temps continu. En effet il faut prendre en compte le fait que les chemins n'ont plus une pente minorée par -1 : ils peuvent au contraire être arbitrairement pentus. Ceci nous empêche de trouver un point de rupture assez bas de la même manière que nous l'avons fait dans le lemme 11.

Appendice : preuve du théorème 7

Nous résumons ici la preuve de ce résultat remarquable pour plusieurs raisons : elle est simple, élégante et instructive. On commence par introduire une généralisation de la notion de réversibilité. Soit E dénombrable, $\phi : x \mapsto \overline{x}$ une involution sur E, et $(X_t, t \geq 0)$ un processus markovien de saut sur E de mécanisme donné par une fonction $q(x, y)$. On dit que X est ϕ-dynamiquement réversible si pour $T > 0$, les processus $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ et $(\overline{X_t}, 0 \leq t \leq T)$ sont identiques en loi. Plus de détails peuvent être trouvés dans [30]. Il existe notamment un analogue du critère des cycles de Kolmogorov : supposons qu'il existe x_0 tel que $x_0 = \overline{x_0}$ et que

(i) $q(x, y) > 0 \Leftrightarrow q(\overline{y}, \overline{x}) > 0$;

(ii) $q(x) = q(\overline{x})$;

(iii) $\forall x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, on a $q(x_1, x_2) \ldots q(x_n, x_1) = q(\overline{x_1}, \overline{x_n}) \ldots q(\overline{x_2}, \overline{x_1})$.

Alors

$$\mu(x) := C \frac{q(x_0, x_1) \ldots q(x_n, x)}{q(\overline{x}, \overline{x_n}) \ldots q(\overline{x_1}, \overline{x_0})} \tag{27}$$

ne dépend pas du chemin $x_0 \to x_1 \cdots \to x_n \to x$ choisi. De plus si μ est une probabilité alors en choisissant $\mathcal{L}(X_0) = \mu$, le processus X est ϕ-dynamiquement réversible. Dans ce cas X est donc en particulier stationnaire et sa distribution stationnaire est la mesure μ. On applique maintenant ceci au processus H^n. Il est ici plus commode d'ajouter à un vecteur profil $(h(1), \ldots h(n-1))$ la coordonnée $h(n) = -\sum_{i=1}^{n-1} h(i)$, c'est-à-dire de décrire un profil par un élément de l'ensemble

$$E = \{h \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^{n} h(i) = 0\}.$$

On considère la fonction $h \mapsto \overline{h} = -h$, et $h_0 = \mathbf{0}$. La condition (i) est bien sûr vérifiée par H^n. Pour (ii), il suffit d'écrire

$$q(h) = n\beta_0 + \nu \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{h(i) \neq 0} = q(-h).$$

Enfin pour montrer (iii) on remarque d'abord, en notant $h^{(i)} = h + e'_i$ (e'_i est le vecteur dans (2.8)), que

$$\begin{cases} q(h, h^{(i)}) = \beta_0 \Leftrightarrow q(-h^{(i)}, -h) = \beta_2, \\ q(h, h^{(i)}) = \beta_1 \Leftrightarrow q(-h^{(i)}, -h) = \beta_1, \\ q(h, h^{(i)}) = \beta_2 \Leftrightarrow q(-h^{(i)}, -h) = \beta_0. \end{cases} \tag{28}$$

On considère un cycle $h^1 \to \cdots \to h^r \to h^1$, et on doit montrer que

$$q(h^1, h^2) \dots q(h^r, h^1) = q(-h^1, -h^r) \dots q(-h^2, -h^1).$$

De chaque côté, tous les facteurs sont égaux à β_0, β_1 ou β_2. On peut donc écrire que le terme de gauche est de la forme $\beta_0^a \beta_1^b \beta_2^c$, et de même, celui de droite vaut $\beta_0^{a'} \beta_1^{b'} \beta_2^{c'}$. La deuxième équivalence dans (28) donne $b = b'$. Par ailleurs, de h^j à h^{j+1}, la valeur de la fonction

$$f(h) := \sum_{i=1}^{n} |h_i|$$

augmente de 2 unités lorque $q(h^j, h^{j+1}) = \beta_0$ et diminue de 2 unités lorsque $q(h^j, h^{j+1}) = \beta_2$. Par conséquent $a = c = a' = c' = \frac{r-b}{2}$, d'où (iii).
On cherche maintenant à exprimer dans ce contexte la mesure définie par (27). On note donc, pour $h \in E$,

$$m(h) = \frac{q(h^0, h_1) \dots q(h_r, h)}{q(-h, -h_r) \dots q(-h_1, h^0)} = B \prod_{j=0}^{r} \frac{q(h^j, h^{j+1})}{q(-h^{j+1}, -h^j)},$$

où $h^0 \to h^1 \to \cdots \to h^r \to h^{r+1} = h$ est un quelconque chemin de h^0 à h. D'après (28), on a $m(h) = (\beta_0/\beta_2)^{M(h)}$, où

$$M(h) = \text{Card}\left\{j = 0, \dots r : q(h^j, h^{j+1}) = \beta_0\right\} - \text{Card}\left\{j = 0, \dots r : q(h^j, h^{j+1}) = \beta_2\right\}.$$

Mais en observant que $f(h) = f(h) - f(h^0) = 2M(h)$, on conclut que

$$m(h) = \exp\left(-\frac{1}{2} \log \frac{\beta_2}{\beta_0} \sum_{i=1}^{n} |h(i)|\right).$$

La somme d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 étant finie, m est une mesure finie. Ceci implique que H^n est ergodique et que sa distribution stationnaire est la mesure m normalisée.

Bibliographie

[1] E.D. Andjel : Invariant measures for the zero range process. *Ann. Probab.*, 10:525–547, 1982.

[2] E.D. Andjel : Convergence in distribution for subcritical $2d$ oriented percolation seen from the edge. *soumis*, 2012.

[3] E.D. Andjel, M.V. Menshikov et V.V. Sisko : Positive recurrence of processes associated to crystal growth models. *Ann. Appl. Probab.*, 16(3):1059–1085, 2006.

[4] E.D. Andjel, R. Schinazi et R.H. Schonmann : Edge processes of one dimensional stochastic growth models. *Ann. Inst. Henri Poincaré (B)*, 26(3):489–506, 1990.

[5] A.L. Barabási et H.E. Stanley : *Fractal Concepts in Surface Growth.* Cambridge University Press, 1995.

[6] C. Bezuidenhout et G. Grimmett : The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4):1462–1482, 1990.

[7] M. Bramson, D. Griffeath et G. Lawler : Internal diffusion limited aggregation. *Ann. Probab.*, 20:2117–2140, 1992.

[8] P. Brémaud : *Point Processes and Queues : Martingale Dynamics.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[9] J.T. Cox, R. Durrett et R. Schinazi : The critical contact process seen from the right edge. *Prob. Th. Relat. Fields*, 87:325–332, 1991.

[10] R. Durrett : Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12:999–1040, 1984.

[11] M. Eden : A two-dimensional growth process. *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab*, 4:223–239, 1961.

[12] F. Ezanno : A coupling construction for spin systems with infinite range interactions. *Markov Proc. Relat. Fields*, 18:201–214, 2012.

[13] F. Ezanno : Some results about ergodicity in shape for a crystal growth model. *soumis*, 2012.

[14] P.A. Ferrari, H. Kesten et S. Martínez : R-positivity, quasi-stationary distributions and ratio limit theorems for a class of probabilistic automata. *Ann. Appl. Probab.*, 6(2):577–616, 1996.

[15] S.R. Fleurke, M. Formentin et C. Kuelske : Dependent particle deposition on a graph : concentration properties of the height profile. 2010. arXiv :1003.4599v2 [math.PR].

[16] A. Galves et E. Presutti : Edge fluctuations for the one dimensional supercritical contact process. *Ann. Probab.*, 15:1131–1145, 1987.

[17] D.J. Gates et M. Westcott : Kinetics of polymer crystallization I. Discrete and continuum models. *Proc. Roy. Soc. A*, 416:443–461, 1988.

[18] D.J. Gates et M. Westcott : Kinetics of polymer crystallization II. Growth regimes. *Proc. Roy. Soc. A*, 416:463–476, 1988.

[19] D.J. Gates et M. Westcott : On the stability of crystal growth. *J. Stat. Phys.*, 59:73–101, 1990.

[20] D.J. Gates et M. Westcott : Markov models of steady crystal growth. *Ann. Appl. Probab.*, 3(2):339–355, 1993.

[21] R.J. Glauber : Time-Dependent Statistics of the Ising Model. *J. Math. Phys.*, 4(2):294–307, 1963.

[22] J.F. Gouyet : *Physics and fractal structures.* Springer-Verlag, 1996.

[23] L. Gray : Controlled spin-flip systems. *Ann. Probab.*, 6(6):953–974, 1978.

[24] L. Gray et D. Griffeath : On the uniqueness of certain interacting particle systems. *Prob. Th. Relat. Fields*, 35:75–86, 1976.

[25] D. Griffeath : *Additive and cancellative interacting particle systems.* Lect. Notes Math. Springer-Verlag, 1979.

[26] T.E. Harris : Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices. *Adv. Math.*, 9:66–89, 1972.

[27] R.A. Holley : A class of interactions in an infinite particle system. *Adv. Math.*, 5(2):291–309, 1970.

[28] R.A. Holley : Markovian interaction processes with finite range interactions. *Ann. Math. Stat.*, 43:1961–1967, 1972.

[29] R.A. Holley et D.W. Stroock : A martingale approach to infinite systems of interacting processes. *Ann. Probab.*, 4(2):195–228, 1976.

[30] F.P. Kelly : *Reversibility and stochastic networks.* Wiley, 1979.

[31] H. Kesten : Aspects of first passage percolation. *In École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984*, volume 1180 de *Lect. Notes Math.*, pages 125–264. Springer, 1986.

[32] J. Krug et P. Meakin : Columnar growth in oblique incidence ballistic deposition : Faceting, noise reduction, and mean-field theory. *Phys. Rev. A*, 43:900–919, 1991.

[33] T. Kuczek : The central limit theorem for the right edge of supercritical oriented percolation. *Ann. Probab.*, 17(4):1322–1332, 1989.

[34] T.M. Liggett : Existence theorems for infinite particle systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:471–481, 1972.

[35] T.M. Liggett : *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[36] T.M. Liggett et F. Spitzer : Ergodic theorems for coupled random walks and other systems with locally interacting components. *Prob. Th. Relat. Fields*, 56:443–468, 1981.

[37] I.M. MacPhee, M.V. Menshikov et M. Vachkovskaia : Dynamics of the supermarket model. 2010. ArXiv :1002.4570[math.PR].

[38] J.R. Norris : *Markov chains*, volume 2 de *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 1998.

[39] P.K. Pollett et E.A. Van Doorn : Quasi-stationary distributions. Memorandum 1945, University of Twente, 2011. http ://eprints.eemcs.utwente.nl/20245/.

[40] D. Sadler : On the growth of two dimensional crystals : 2. assessment of kinetic theories of crystallization of polymers. *Polymer*, 28(9):1440–1454, 1987.

[41] R.H. Schonmann : Absence of a stationary distribution for the edge process of subcritical oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 15:1146–1147, 1987.

[42] F. Spitzer : Interaction of Markov processes. *Adv. Math.*, 5:246–290, 1970.

Résumé

Les résultats de cette thèse sont composés de trois parties relativement indépendantes. Dans la première partie, nous reprenons le problème de la définition d'une classe de processus markoviens à une infinité de coordonnées (systèmes de particules en interaction). Nous en proposons une construction ne mettant en jeu ni d'analyse fonctionnelle (ou peu), ni de problème de martingale. Ceci est fait en utilisant des outils probabilistes élémentaires, notamment des couplages adéquats. On fait pour cela une certaine hypothèse sur les taux individuels de transition, qui a été déjà exploitée dans la construction de T. M. Liggett (1972) notamment. Notre construction a l'avantage d'expliquer, plus concrètement que dans les autres constructions, le caractère naturel de cette hypothèse.
Dans une seconde partie, nous considérons un modèle de croissance cristalline introduit par D. J. Gates et M. Westcott en 1987, où des particules du milieu environnant s'agrègent à la surface d'un cristal à maille carrée. Le modèle est caractérisé par des taux de déposition en chaque site qui prennent une certaine forme. Nos résultats portent principalement sur la question de la récurrence et de la récurrence positive de la surface du cristal en fonction de certains paramètres. Nous montrons notamment l'existence d'une zone de paramètres dans laquelle transience et récurrence positive coexistent, et suspectée de présenter un phénomène critique.
La troisième partie porte sur la question de la convergence en loi pour le processus de contact (sur $\mathbb{Z}$) sous-critique vu du bord, partant d'une demi-droite de sites occupés. Nous donnons dans un premier temps une démonstration alternative d'un résultat récent de E. D. Andjel, pour la convergence en loi dans la percolation 2D orientée qui est un équivalent discret du contact. Nous établissons un résultat en relation : le processus de contact vu du bord, sur les configurations finies, admet une limite de Yaglom. Enfin nous mettons en évidence les difficultés à surmonter pour adapter le résultat d'Andjel au temps continu.

Mots-clés : Systèmes de particules en interaction, modèles de déposition, processus de contact, percolation orientée.

Abstract

The results of this thesis are organized in three parts that are nearly independent.
In the first part, we treat the problem of the defintion of a class of Markov processes with infinitely many coordinates, namely interacting particle systems. We propose a construction involving neither functional analysis, nor martingale problems. This is done using elementary probabilistic tools, such as proper couplings. Our technique requires a certain assumption on the jump rates which is, up to a slight generalization, the one used in T. M. Liggett's construction. Our construction has the advantage to give more intuition on the necessity of this assumption.
In the second part, we consider a crystal growth model proposed by D. J. Gates and M. Westcott in 1987, where floating particles are packed on the surface of a square-lattice crystal, with prescribed deposition rates. We treat the question of the recurrence and positive recurrence of the interface, according to the value of certain parameters. We study especially a zone of parameters where transience and positive recurrence coexist. In this zone a critical phenomenon is suspected to occur.
The third part deals with the question of the convergence in law for the subcritical contact process (on $\mathbb{Z}$) seen from the edge, starting from a half-line of occupied sites. First we give an alternative proof of a recent result by E. D. Andjel, stating that convergence holds in a closely related discrete-time model. In continuous time we establish that the finite contact process seen from the edge has a Yaglom limit.

Keywords: Interacting particle systems, deposition models, contact process, oriented percolation.