



**HAL**  
open science

**Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette.**

Olivier Arnaud Czarny

► **To cite this version:**

Olivier Arnaud Czarny. Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2003. Français. NNT : 2003AIX22109 . tel-00795374

**HAL Id: tel-00795374**

**<https://theses.hal.science/tel-00795374>**

Submitted on 27 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

Universités d'Aix-Marseille I, II et III

**ÉCOLE DOCTORALE**  
**Mécanique, Physique et Modélisation**

**THÈSE**

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

DE

L'ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE, PHYSIQUE ET  
MODÉLISATION, UNIVERSITÉS D'AIX-MARSEILLE

Spécialité : Mécanique, mention Mécanique des Fluides.

Par

**Olivier CZARNY**

---

Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois.  
Application au système de Taylor-Couette.

---

Présentée le 22 décembre 2003 devant la Commission d'examen constituée de :

M.	Patrick	BONTOUX	Directeur de Recherche CNRS – LMSNM, Marseille, France.
M.	Roland	BORGHI	Président - Professeur à l'EGIM, Marseille, France.
M.	Uwe	EHRENSTEIN	Rapporteur - Professeur à l'Université de Nice, Sophia-Antipolis, France
M.	Brian E.	LAUNDER	Professeur à l'UMIST, Manchester, UK.
M.	Richard M.	LUEPTOW	Professeur à la NorthWestern University, Evanston, IL, USA.
M.	Paul	MANNEVILLE	Rapporteur - Directeur de Recherche, LaDHx, Ecole Polytechnique, France.
M.	Francisco	MARQUES	Professeur à l'Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelone, Espagne
M.	Eric	SERRE	Docteur, CR1 LMSNM, Marseille, France.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le plus chaleureusement possible M. Patrick Bontoux, directeur de recherche au CNRS et directeur de thèse, pour ses qualités humaines, et pour m'avoir offert la chance d'inscrire mon travail et ma formation doctorale dans un cadre national et international de très grande qualité.

Merci à Richard M. Lueptow pour l'encadrement de grande valeur qu'il m'a prodigué. Je ne saurais le remercier assez pour la richesse de notre collaboration et son contact très ouvert.

Merci également à Brian Launder pour m'avoir offert la possibilité d'initier un travail expérimental dans le cadre des activités de l'UMIST (Manchester, UK) et pour avoir grandement contribué à ouvrir mon esprit vers d'autres champs d'exploration.

Ce travail n'aurait pu être possible sans Eric Serre, avec qui j'ai pu interagir tout au long de ces années de présence au LMSNM, et sur lequel j'ai pu compter en permanence pour avancer dans mes recherches. Je tiens à le remercier tout particulièrement.

Merci à toute l'équipe du LMSNM : Loïc Audren, Gildas Auguin, Sofiane Meradji, Giulio Pellegrino, Isabelle Raspo, François Rue, Sylvain Suard, et tous ceux que je n'ai pas nommés. Leur présence, leur bonne humeur et leurs compétences techniques m'auront été très précieuses au cours de ces années.

Qu'il me soit permis ici de mentionner le soutien de ma famille, et plus particulièrement de mes parents tout au long de mes longues études. Sans eux, rien n'aurait été possible, et je tiens à profiter de cet instant pour leur exprimer du plus profond de mon cœur ma très grande reconnaissance.

Merci à tous mes amis proches pour leur soutien : Sandrine, Christophe, Sébastien, Nicolas et Martin (pour ton précieux secours à Barcelone !)...



# Table des Matières

<b>Remerciements .....</b>	<b>1</b>
<b>Table des Matières .....</b>	<b>3</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 Les écoulements de Taylor-Couette.....</b>	<b>11</b>
1.1 La genèse.....	11
1.1.1 Cas de fluides non visqueux : le critère de Rayleigh. ....	11
1.1.2 Extension aux fluides visqueux.....	13
1.2 Stabilité et transition dans un système de long rapport d'aspect.....	17
1.2.1 En configuration rotor-stator.....	17
1.2.2 En rotation différentielle. ....	20
1.3 Influence du confinement. ....	24
<b>Chapitre 2 Modélisation et résolution par méthodes spectrales. ....</b>	<b>27</b>
2.1 Modélisation.....	28
2.1.1 Configuration géométrique. ....	28
2.1.2 Description de la dynamique.....	29
2.1.2.1 Equations de Navier-Stokes .....	29
2.1.2.2 Conditions limites .....	30
2.2 Simulation numérique directe par méthodes spectrales. ....	32
2.2.1 Traitement temporel des équations. ....	32
2.2.1.1 Discrétisation.....	32
2.2.1.2 Méthode de projection.....	32
2.2.2 Traitement spatial.....	35
2.2.2.1 Approximation des grandeurs physiques. ....	35
2.2.2.2 Méthode pseudo-spectrale.....	37
2.3 Mise en œuvre du code de calcul. ....	39
2.3.1 Détails numériques. ....	39
2.3.2 Expérience de Wereley et Lueptow .....	40
2.3.3 Expérience de Sobolik <i>et al.</i> .....	41
2.3.4 Plateforme de calcul .....	42
<b>Chapitre 3 Configuration rotor-stator : régimes TVF et WVF, et effet du confinement. 43</b>	
3.1 Ecoulement de couche limite d'Ekman dans une cavité Taylor-Couette rotor-stator.....	43

3.2	Tourbillons d'Ekman et transition vers le TVF en configuration rotor-stator. ....	45
3.2.1	Temps caractéristiques d'établissement des solutions. ....	46
3.2.2	Influence des conditions limites sur la transition Couette / TVF. ....	48
3.2.2.1	Disques fixes ( $\Omega_D = 0$ ). ....	48
3.2.2.2	Disques en rotation ( $\Omega_D = \Omega_i$ ). ....	51
3.2.2.3	Surfaces libres. ....	55
3.2.2.4	Conditions mixtes. ....	56
3.2.3	Discussion ....	57
3.2.4	Conclusion. ....	62
3.3	Interaction entre la couche d'Ekman et le Wavy Wortex Flow (WVF) : simulations rotor-stator tridimensionnelles. ....	62
3.3.1	Contrôle de la convergence des solutions. ....	62
3.3.2	Transition vers le Wavy Vortex Flow. ....	63
3.3.3	Structures spatiales des écoulements. ....	64
3.3.4	Dynamique temporelle des écoulements. ....	74
3.3.5	Conclusion. ....	78

#### **Chapitre 4 Configuration contrarotative : étude des régimes WVF, IPS et WIS, et des effets de confinement. .... 81**

4.1	Mise en évidence de régimes complexes IPS, WIS et SPI en configuration contrarotative. ....	82
4.1.1	Structures de type spirale ....	83
4.1.1.1	Interpenetrating Spirals (IPS).....	83
4.1.1.2	Wavy Interpenetrating Spirals.....	86
4.1.1.3	Spiral Vortex Flow (SPI).....	88
4.1.2	Ecoulement WVF.....	90
4.2	Effets des parois terminales sur l'écoulement en contrarotation.....	94
4.3	Conclusion.....	110

#### **Conclusion et perspectives..... 111**

#### **Annexe. Ecoulements turbulents : étude d'un système rotor-stator ..... 117**

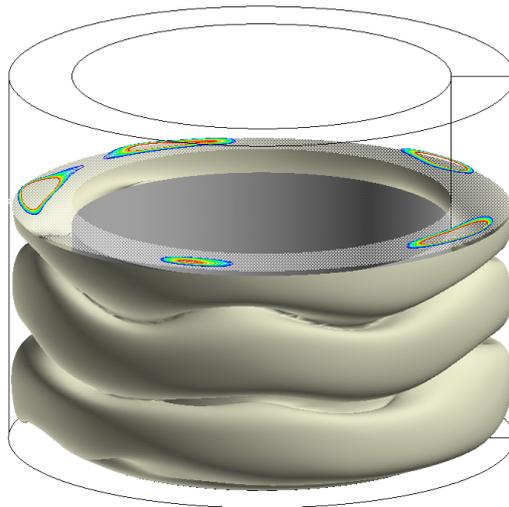
A.1.	Les structures de grandes échelles dans un système interdisques : contexte et dispositif expérimental.....	118
A.1.1.	Description du dispositif .....	118
A.1.2.	Visualisations .....	120
A.1.3.	Conclusion.....	122
A.2.	Approche statistique de la turbulence et les modélisations disponibles à l'UMIST 124	
A.2.1.	L'approche RANS .....	124
A.2.1.1.	Comment moyenner les équations ?.....	124
A.2.1.2.	Equations de Navier-Stokes moyennées .....	125
A.2.2.	Fermeture des équations moyennées : modèles de turbulence .....	125
A.2.2.1.	Modèle $k - \epsilon$ à bas Reynolds.....	126
A.2.2.2.	Modèle « Differential Stress Modelling » à bas Reynolds.....	127
A.2.2.3.	Influence de la rotation solide .....	129
A.2.3.	Discussion comparée entre des résultats DNS et des solutions RANS ( $k-\epsilon$ et DSM) .....	130
A.3.	Conclusion.....	144

**Bibliographie..... 147**

**Nomenclature..... 155**



# Introduction



Les développements techniques au fil des siècles ont vu l'apparition d'une classe de systèmes mécaniques appelés « turbomachines », c'est-à-dire de dispositifs impliquant un fluide interagissant avec un ou plusieurs éléments en rotation. On peut citer parmi les exemples plus récents les turbines, dynamos ou alternateurs de centrales électriques, les turbines présentes dans les turboréacteurs d'avions, ou encore les pompes à centrifugation.

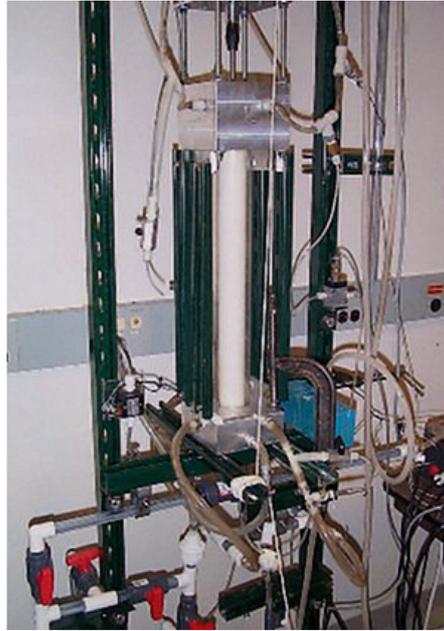
La nécessité industrielle d'améliorer le rendement des turbomachines a tout naturellement amené le besoin de mieux comprendre la physique en jeu dans les écoulements qui se développent entre des parois en rotation. Pour saisir les mécanismes fondamentaux qui pilotent ces classes d'écoulements, la communauté scientifique s'est tout d'abord intéressée à l'étude de configurations simplifiées, plus facilement modélisables par la théorie, et plus facilement approchables par des dispositifs expérimentaux.

Dans la liste des configurations qui permettent de faire mieux avancer la compréhension des mécanismes complexes par celle des mécanismes de base, le système de Taylor-Couette se positionne comme une figure incontournable de la mécanique des fluides. Ce dispositif met en jeu un écoulement de cisaillement entre deux cylindres coaxiaux, chacun pouvant tourner indépendamment l'un de l'autre, en co-rotation ou en contrarotation. Dans le cas le plus répandu, le cylindre de rayon le plus petit est mobile, tandis que le cylindre de plus grand rayon est fixe.

Véritable cheval de bataille, ce sujet, vieux de plus d'un siècle, ne cesse de susciter de nouvelles recherches expérimentales, théoriques ou numériques. La cause d'un tel engouement est probablement à chercher dans la nature paradoxale du problème, à la fois simple par la géométrie, et complexe par les mécanismes en jeu et les structures, de caractère majoritairement instationnaire, qui peuvent se manifester dans l'écoulement. La simplicité de la géométrie rend par ailleurs l'étude du système beaucoup plus commode : le système étant cylindrique, les conditions limites dans la direction azimutale sont périodiques, ce qui est plus facilement reproductible expérimentalement, et simplifie la mise en équation du problème. Un autre attrait des écoulements de Taylor-Couette réside dans leur

vaste phénotypie : des études expérimentales ont pu mettre en évidence au sein du système une très large gamme de structures très caractéristiques, présentant des motifs complexes : spirales, ondulations azimuthales, turbulence spirale. La compréhension de ces structures est un thème d'actualité.

Le dispositif de Taylor-Couette n'est pas qu'un cas d'étude académique. Son principe est actuellement utilisé dans le cadre du génie des procédés pour mélanger plusieurs produits ou réactifs. On l'emploie également dans des systèmes de filtration de faible encombrement, pour purifier des eaux usées ou des liquides corporels comme le sang (voir photo ci-dessous). Dans ce cadre, la NASA travaille actuellement sur la mise au point de systèmes de filtration embarqués, dans la perspective de vols habités de longue durée.



Dispositif de filtration utilisant le principe de Taylor-Couette (avec l'autorisation de R.M. Lueptow)

Beaucoup de travaux théoriques ou numériques utilisent l'écoulement de Taylor-Couette comme un cas-test, un « benchmark » pour valider de nouvelles modélisations, ou de nouvelles méthodes numériques de résolution d'équations. Mais peu insistent sur la physique sous-jacente du problème, notamment dans le cas où les cylindres tournent à des vitesses différentes.

En outre, dans la plupart des simulations numériques ou des études théoriques, les cylindres sont supposés infiniment longs, hypothèse bien pratique pour supprimer la dépendance du problème dans la direction de l'axe des cylindres : on peut dès lors supprimer une des variables du problème, ce qui permet de simplifier la résolution des équations. Mais dans la réalité, que ce soit dans les dispositifs expérimentaux ou ceux à vocation plus appliquée, les cylindres sont de longueur finie, et les parois qui ferment les cylindres dans leurs parties supérieure et inférieure sont susceptibles d'interagir fortement avec l'instabilité de Taylor, modifiant le scénario pré-établi par la théorie des cylindres infinis.

Notre étude s'inscrit dans les diverses thématiques que nous venons de citer; nous nous proposons d'apporter quelques réponses au problème de Taylor-Couette en choisissant l'approche numérique comme moyen d'investigation.

Le Chapitre 1 se propose de remonter aux origines des travaux sur les écoulements cisailés intercyllindres, et d'engager un tour d'horizon sur les travaux qui ont été consacrés aux écoulements de Taylor-Couette, en particulier sur la configuration contrarotative et sur les effets de parois.

La complexité des phénomènes en jeu dans les écoulements de Taylor-Couette rend nécessaire l'utilisation d'un outil fiable quant à la précision des résultats. C'est la raison pour laquelle nous avons privilégié une approche par simulation numérique directe (DNS), employant des méthodes spectrales de très haute précision. Dans le cadre de configurations à géométrie de révolution, ces dernières ont

prouvé leur efficacité à décrire des écoulements très complexes. Ces méthodes seront décrites dans le Chapitre 2 de ce mémoire.

Avec une géométrie fixée au préalable, nous nous sommes intéressés aux effets du confinement sur les structures de Taylor-Couette, en testant plusieurs types de conditions limites sur les disques qui ferment la cavité en haut et en bas. Nous avons privilégié une progression par ordre croissant de complexité, partant du cas le plus simple de la configuration rotor-stator, pour aller vers celui de la contrarotation. Nous avons d'abord considéré la configuration rotor-stator, où le cylindre externe est fixe alors que le cylindre interne est mobile : nous avons analysé l'écoulement classique axisymétrique issu de la première bifurcation de l'écoulement et l'écoulement ondulatoire issu de la bifurcation suivante (Chapitre 3).

Dans le cas plus complexe de la contrarotation, où les cylindres, tous deux mobiles, tournent dans des sens opposés, nous avons pu mettre en évidence des structures complexes pour la première fois numériquement dans une cavité confinée, notamment le motif des « spirales interpénétrantes ». Nous avons testé les effets de conditions limites sur l'écoulement (Chapitre 4).

En annexe, nous avons rapporté quelques résultats obtenus dans le cadre d'une étude combinant une expérience, des modélisations statistiques de turbulence (modèles  $k-\varepsilon$ , DSM) et une simulation numérique directe utilisant les méthodes spectrales que nous avons évoquées plus haut. L'expérience et les approches statistiques ont été réalisées en partenariat avec l'UMIST (Manchester), et ont amené une confrontation avec les résultats DNS sur deux points : les structures de grande échelle dans le cœur de l'écoulement, et les propriétés turbulentes déduites de la DNS et des méthodes statistiques. Nous avons développé notre expérience dans cette entreprise qui sera poursuivie dans un cadre post-doctoral avec Eric Serre et Brian Launder.



# Chapitre 1

## Les écoulements de Taylor-Couette.

Ce chapitre se propose d'effectuer une plongée historique vers l'origine des études consacrées aux écoulements de Taylor-Couette; nous exposerons quelques notions-clés pour appréhender les mécanismes de bases responsables des instabilités centrifuges. Puis nous aborderons à travers la littérature existante les divers scénarios de transitions et types de structures complexes qui peuvent se manifester dans les écoulements de Taylor-Couette. Une dernière partie sera consacrée à l'influence du confinement sur l'écoulement : les analyses théoriques supposant des cylindres de longueur infinie pour des raisons de simplicité, comment la longueur finie des cylindres affecte-t-elle les résultats théoriques ?

### 1.1 La genèse.



**Fig. 1-1** – John William Strutt, LORD RAYLEIGH (1842-1919)

On peut faire remonter la première étude d'un fluide entraîné par la rotation d'un cylindre à Isaac Newton qui, dans ses *Principia* en 1687, s'intéressa aux fluides en rotation. Plus tard, dans un article de 1848, George Gabriel Stokes évoqua le problème d'un fluide en mouvement entre deux cylindres mobiles et coaxiaux; il suggéra que la mise en rotation de la paroi cylindrique interne devait produire la situation la moins stable, puisque, raisonna-t-il, elle engendrait une force centrifuge qui projette le fluide vers la paroi externe, contribuant ainsi à déstabiliser l'écoulement. C'est à Lord Rayleigh que l'on doit, en 1880, une première formalisation théorique de ce problème, pour le cas particulier de fluides non visqueux.

#### 1.1.1 Cas de fluides non visqueux : le critère de Rayleigh.

Sur la base d'un raisonnement euristique, Rayleigh établit son célèbre critère de stabilité (voir Chandrasekhar [16], Greenspan [38], Meyer-Spasche [53], Manneville [51]). Considérons un fluide non visqueux en rotation dans une cavité cylindrique infiniment longue, et supposons que la distribution *vitesse-pressure* est purement radiale :  $\Psi = (0, V_\theta^*(r^*) = r^*\Omega(r^*), 0, p^*(r^*))$ . Une particule fluide, située à la distance  $r_l^*$  de l'axe de rotation, subit la force centrifuge  $\rho r_l^* \Omega^2(r_l^*)$ . L'ensemble des particules fluides, éjectées vers l'extérieur, exercent alors une pression plus grande

près de la paroi extérieure que près de l'axe de rotation, induisant, à travers la cavité, un gradient de pression centripète (Fig. 1-2). Lorsque l'écoulement est stable, les forces centrifuge et centripète qui s'exercent sur la particule fluide se compensent :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=r_0^*} = \rho \frac{V_\theta^{*2}}{r_0^*} = \rho r_0^* \Omega^2(r_0^*). \quad (1-1)$$

Supposons à présent que la même particule fluide subit un léger déplacement vers une nouvelle position  $r_2^* > r_1^*$ . En l'absence de dissipation visqueuse, son moment cinétique est conservé, ce qui s'écrit :

$$r_1^* \Omega_1^2 = r_0^* \Omega^2(r_0^*).$$

où  $\Omega_1$  est la nouvelle vitesse de la particule à la position  $r_1^*$ . La particule subit à présent une force centrifuge  $\rho r_1^* \Omega_1^2$ . Cependant, le gradient de pression environnant est égal à  $\rho r_1^* \Omega^2(r_1^*)$ . Si ce gradient est supérieur à la nouvelle force centrifuge de la particule, cette dernière est repoussée vers sa position initiale  $r_0^*$  : l'écoulement est **stable**. *A contrario*, s'il est plus petit, la particule continuera son mouvement vers l'extérieur : l'écoulement est **instable**. La condition de stabilité peut donc s'écrire :

$$\rho r_1^* \Omega^2(r_1^*) \geq \rho r_1^* \Omega_1^2 = \rho r_0^* \Omega^2(r_0^*)$$

soit encore :

$$r_1^* \Omega^2(r_1^*) \geq r_0^* \Omega^2(r_0^*)$$

ou, finalement :

$$\frac{d}{dr^*} (r^* \Omega^2(r^*)) \geq 0 \quad (1-2)$$

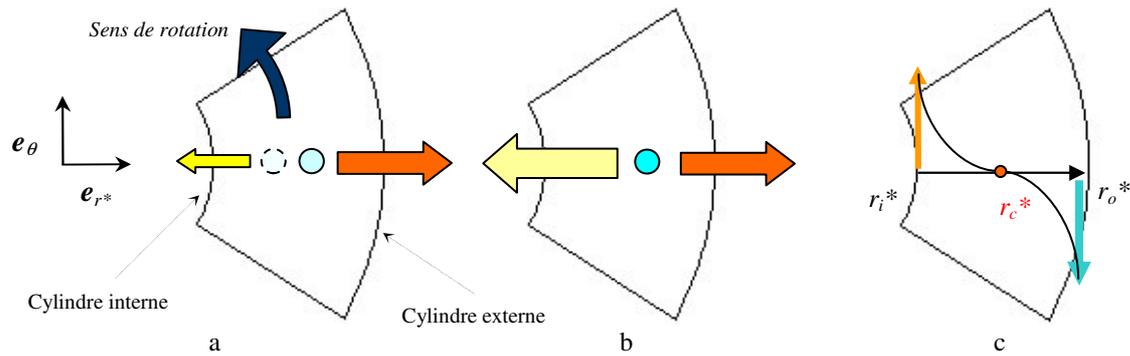
Cette condition est connue sous le nom de **critère de Rayleigh**.

Pour un écoulement cisailé entre deux parois cylindriques en rotation et de longueur infinie, les équations de Navier-Stokes, qui régissent la dynamique du fluide (cf. Chapitre 2), admettent une solution analytique axisymétrique et stationnaire, dépendant uniquement de  $r^*$  : c'est le **profil de Couette**, défini par :

$$\Omega_c(r^*) = A + \frac{B}{r^{*2}}, \quad \text{où } A = \frac{\Omega_o r_o^{*2} - \Omega_i r_i^{*2}}{r_o^{*2} - r_i^{*2}} \text{ et } B = \frac{(\Omega_i - \Omega_o) r_i^{*2} r_o^{*2}}{r_o^{*2} - r_i^{*2}} \quad (1-3)$$

le cylindre interne ( $i$ , pour « in ») étant caractérisé par son rayon  $r_i^*$  et sa vitesse de rotation  $\Omega_i$ , le cylindre externe ( $o$ , pour « out ») par son rayon  $r_o^*$  et sa vitesse  $\Omega_o$ . Les cylindres peuvent tourner dans le même sens (**corotation**), ou en sens opposé (**contrarotation**). Si l'un des deux cylindres est immobile, le système est dit **rotor-stator**. Appliqué à la distribution de vitesse (1-3), le critère de Rayleigh donne :  $\xi \geq \eta^2$ , où  $\xi = \Omega_o / \Omega_i$  et  $\eta = r_i^*/r_o^*$  ( $\eta$  est appelé **rapport des rayons**). En configuration rotor-stator, l'écoulement est stable si  $\Omega_i = 0$  et  $\Omega_o \neq 0$ ,  $\forall \Omega_o$  (configuration stator interne, rotor externe, noté  $S_i - R_o$ ), et instable si  $\Omega_o = 0$  et  $\Omega_i \neq 0$ ,  $\forall \Omega_i$  (rotor interne/stator externe, noté  $R_i - S_o$ ). Il suffit donc, selon ce modèle, que le cylindre interne tourne à n'importe quelle vitesse angulaire pour générer une situation d'instabilité (ce qui corrobore l'intuition de Stokes).

Lorsque les cylindres tournent en sens opposés (contrarotation), il existe un rayon  $r_c^*$  pour lequel la vitesse angulaire s'annule ; ce rayon sépare deux couches de fluide tournant en sens contraire (Fig. 1-2-c). La portion de cavité comprise entre le cylindre interne et la surface cylindrique de rayon  $r_c^*$  est assimilable à un système  $R_i - S_o$ , instable donc, nous venons de le voir,  $\forall \Omega_i$ . Le modèle prédit par conséquent que la situation contrarotative est **toujours instable**.

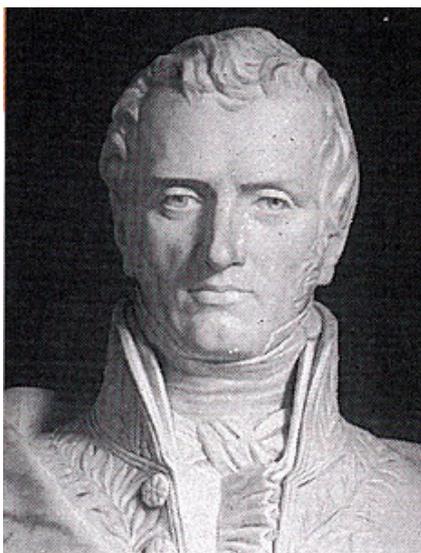


**Fig. 1-2** - Mécanisme de l'instabilité centrifuge (les schémas représentent une vue de dessus d'une section cylindrique du système intercylindre) : a) la particule est déplacée depuis sa position initiale (en pointillés) jusqu'à la position bleue ; si la force d'inertie qu'elle conserve (en rouge) est plus grande que le gradient de pression ambiant, elle continue son déplacement : la position est instable ; b) si le gradient de pression est plus grand que la force d'inertie de la particule, celle-ci revient à sa position initiale : le système est stable ; c) profil radial de la vitesse azimutale en régime contrarotatif :  $V_{\theta}^*$  s'annule en  $r^* = r_c^*$ , la zone comprise entre  $r^* = r_i^*$  et  $r^* = r_c^*$  est instable.

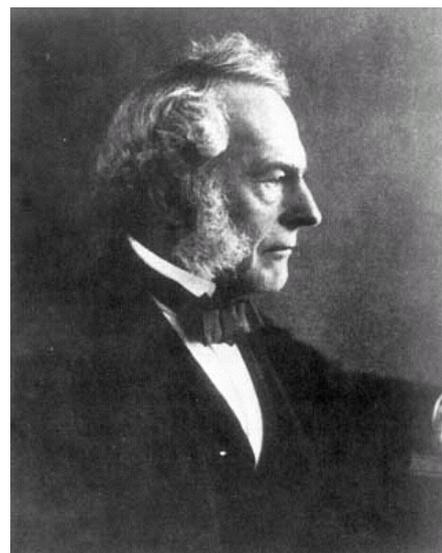
Des résultats postérieurs à la modélisation de Rayleigh vont cependant en montrer les limites : négligée dans le bilan des forces, la viscosité contribue en fait à dissiper une part de l'énergie de la particule fluide, ce qui ne conserve pas le moment cinétique et retarde l'apparition de l'instabilité centrifuge. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre que cette instabilité peut se développer.

### 1.1.2 Extension aux fluides visqueux.

Les équations régissant la dynamique d'un fluide visqueux furent établies par Claude Navier (1823) et George Stokes (1845). L'introduction de la notion de viscosité (notée  $\nu$ ) rendit nécessaire la mise au point d'appareils capables de la mesurer le plus précisément possible (Donnelly [28]).



**Fig. 1-3** – Claude Louis Marie Henri NAVIER (1785 - 1836)



**Fig. 1-4** – George Gabriel STOKES (1819 - 1903)

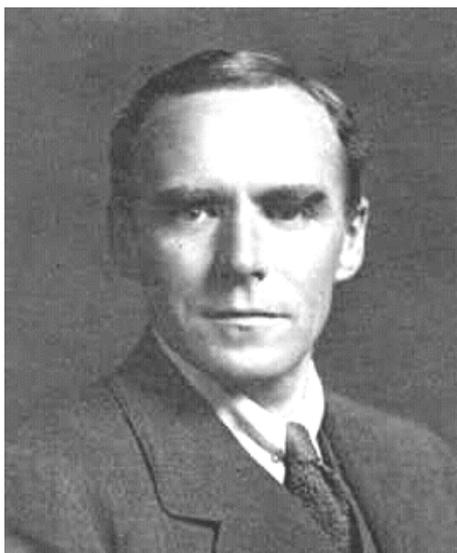


**Fig. 1-5** – Max MARGULES (1856-1930)

Indépendamment, un Anglais, Mallock (Fig. 1-7) mena des expérimentations similaires à celle de Couette (1888, 1896), en étendant son étude à la configuration  $R_i - S_o$  (Fig. 1-8 -b). Dans ce dernier cas, ses résultats mirent en évidence un régime instable quelles que furent les vitesses de rotation qu'il utilisa, ce qui était en totale adéquation avec le critère de Rayleigh. Mais dans le cas  $S_i - R_o$ , il trouva des seuils de stabilité, ce qui contredisait le critère...



**Fig. 1-7** – Arnulph MALLOCK (1851-1933)

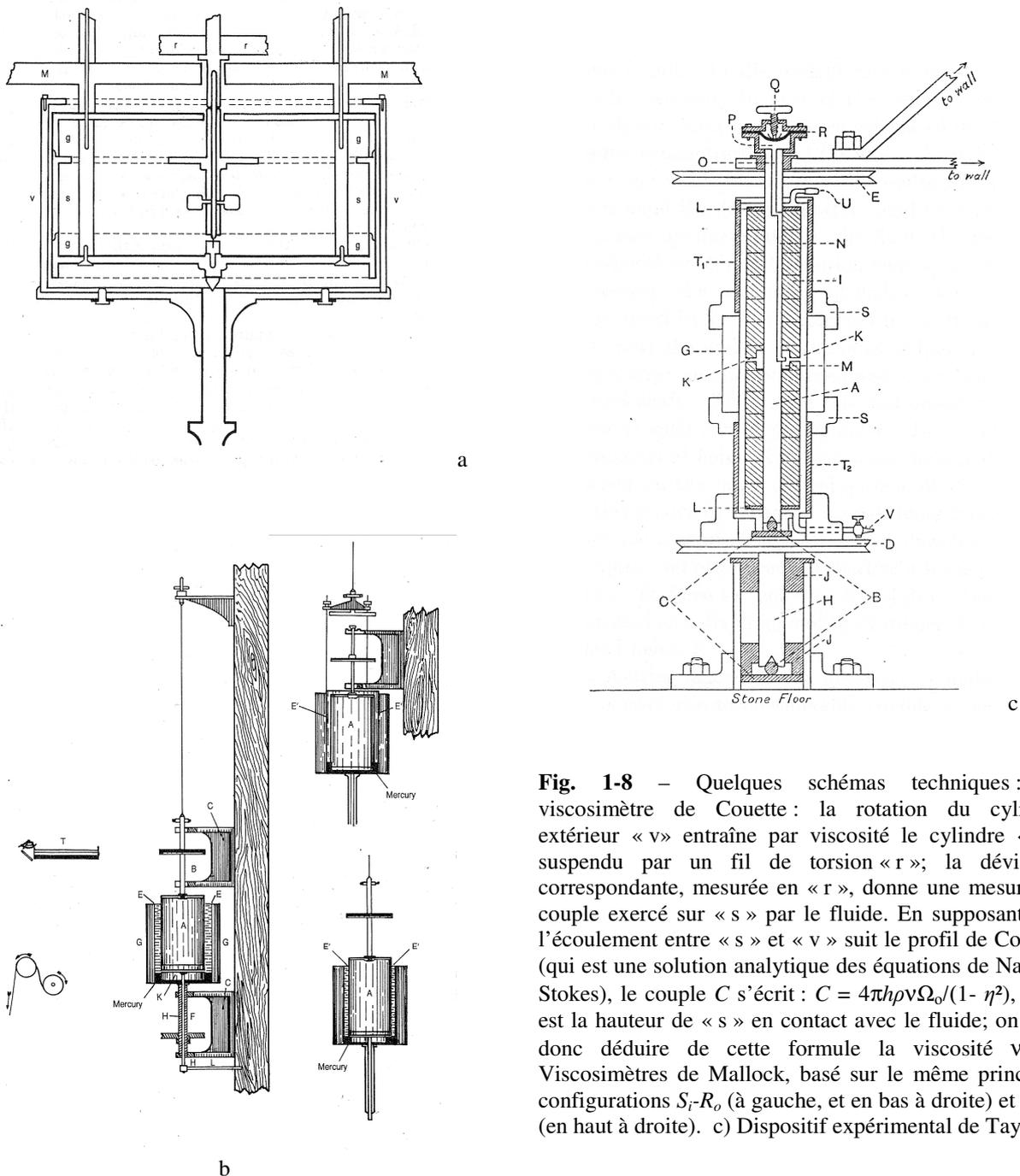


**Fig. 1-6** – Geoffrey Ingram TAYLOR (1886-1975)

En 1881 à Vienne, l'Austro-Hongrois Max Margules (Fig. 1-5) proposa un modèle de viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques (Meyer-Späche [53]). En 1890, le Français Maurice Couette reprit cette technique et mesura la viscosité de l'eau au moyen d'un appareil de type  $S_i - R_o$  (voir Fig. 1-8-a). Il remarqua que la mesure de la viscosité demeurait constante pour de faibles vitesses de rotation, puis changeait brusquement au-delà d'un certain seuil critique. Couette attribua ce comportement à l'apparition d'un régime turbulent.

En 1923, dans un article fondateur [82], Taylor (Fig. 1-6) reprit les résultats de Mallock en combinant approche théorique et approche expérimentale. Par une étude de stabilité linéaire du fluide visqueux (linéarisation des équations de Navier- Stokes par méthode des petites perturbations autour d'un écoulement de base, en supposant les cylindres de longueur infinie), Taylor montra que le profil de Couette, valable pour de faibles vitesses de rotation, se révélait instable face à de petites perturbations axisymétriques au delà de certains seuils de rotation : il prouva l'existence d'un seuil de transition dans le cas  $R_i - S_o$  (à l'inverse des résultats de Mallock qui n'en trouva pas); quant à la configuration  $S_i - R_o$ , elle devait rester stable dans tous les cas (contrairement aux observations de Couette et Mallock). Comment dès lors interpréter les résultats de Couette et Mallock ?

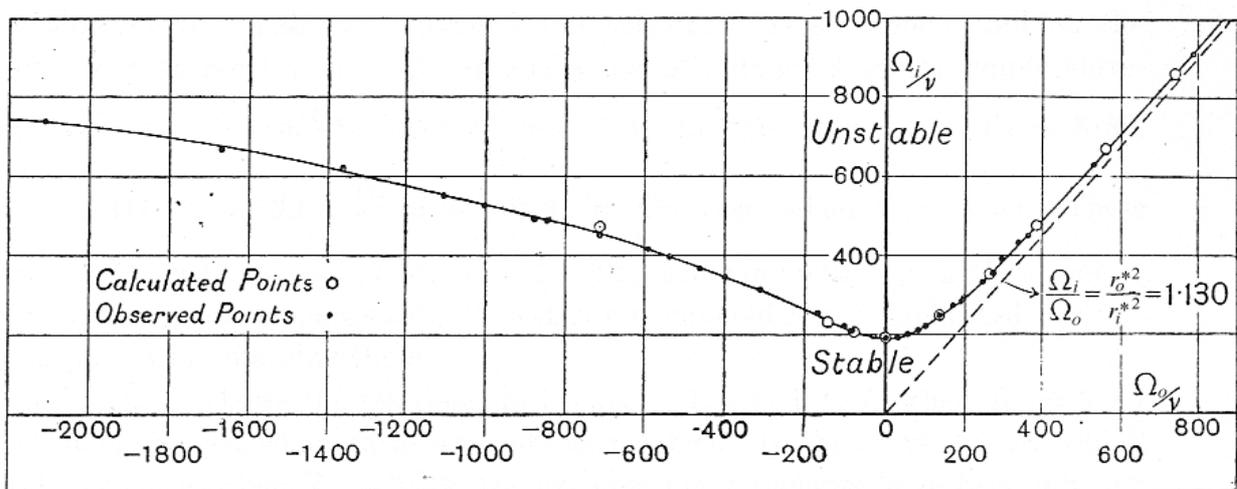
Taylor suggéra une liste de sources d'erreur dans le dispositif de Mallock. D'une part, une rigidité insuffisante du système était susceptible d'engendrer des vibrations parasites. D'autre part, le rapport  $\Gamma = H/d$  (**rapport d'aspect**) entre la hauteur des cylindres  $H$  et l'épaisseur de la couche de fluide entre les cylindres  $d = r_o^* - r_i^*$  ne devait pas être trop petit, sinon les effets des parois terminales (qui limitent la cavité en haut et en bas) pouvaient perturber les zones de mesure. Mallock était déjà conscient de ces effets de bord, au point qu'il inclut des couches de mercure en guise de paroi inférieure, pour tenter de supprimer le frottement du fluide sur la paroi et les vortex engendrés par ces frottements; malgré tout, cette précaution était insuffisante pour les limiter. Taylor conçut un dispositif de grand rapport d'aspect pour réduire au maximum l'influence des effets des bords au centre du système (et se rapprocher ainsi de l'hypothèse de cylindres infiniment longs qu'il avait supposée dans son analyse théorique); en outre, l'appareillage fut solidement arrimé aux murs du laboratoire afin de supprimer les vibrations (Fig. 1-8- c).



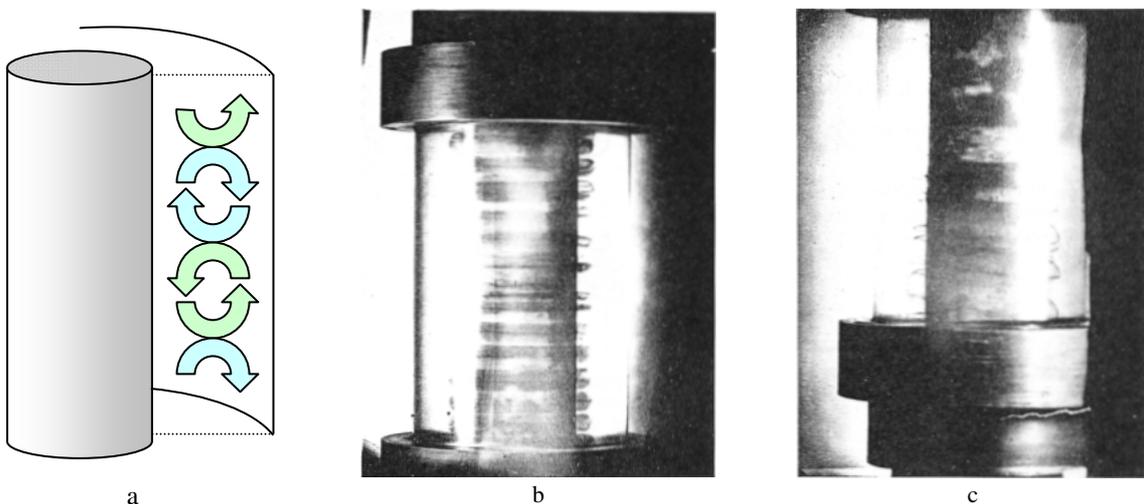
**Fig. 1-8** – Quelques schémas techniques : a) viscosimètre de Couette : la rotation du cylindre extérieur « v » entraîne par viscosité le cylindre « s », suspendu par un fil de torsion « r »; la déviation correspondante, mesurée en « r », donne une mesure du couple exercé sur « s » par le fluide. En supposant que l'écoulement entre « s » et « v » suit le profil de Couette (qui est une solution analytique des équations de Navier-Stokes), le couple  $C$  s'écrit :  $C = 4\pi h\rho\nu\Omega_o/(1-\eta^2)$ , où  $h$  est la hauteur de « s » en contact avec le fluide; on peut donc déduire de cette formule la viscosité  $\nu$ . b) Viscosimètres de Mallock, basé sur le même principe : configurations  $S_i-R_o$  (à gauche, et en bas à droite) et  $R_i-S_o$  (en haut à droite). c) Dispositif expérimental de Taylor.

Au final, Taylor obtint une très bonne concordance entre les courbes de transition théoriques et les courbes de transition expérimentales (Fig. 1-9). Taylor reporta sur ses graphes le critère de Rayleigh (en pointillés sur la Fig. 1-9). On peut noter que dans le cas de cylindres corotatifs, le critère de Rayleigh correspond à une asymptote de la courbe de stabilité, ce qui n'est pas du tout le cas pour des cylindres contrarotatifs.

Si les effets de bords et les vibrations parasites étaient, comme le suggérait Taylor, susceptibles d'expliquer les conclusions erronées de Mallock dans la configuration  $S_i-R_o$ , il apparut rétrospectivement que la plus petite des vitesses de rotation utilisée par Mallock lors de ses mesures en  $R_i-S_o$  (2 tours / min) se situait, compte tenu du rapport de rayons du dispositif et de la viscosité du fluide utilisé, au-dessus du seuil de transition de l'instabilité centrifuge... Mallock ne s'est ainsi jamais trouvé en situation de pouvoir observer le régime stable (Donnelly [28]).



**Fig. 1-9** - Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette dans le plan  $(\Omega_o/\nu, \Omega_i/\nu)$ ,  $\eta = r_i^*/r_o^* = 0.9418$  (d'après Taylor [82]);  $\Omega_i$  est la vitesse de rotation du cylindre intérieur,  $\Omega_o$  celle du cylindre extérieur. En pointillés, la droite de stabilité donnée par le critère de Rayleigh.



**Fig. 1-10** - a) Sens de rotation des vortex dans un plan méridien de l'écoulement. b) c) Mise en évidence des vortex dans l'écoulement par injection d'éosine depuis le cylindre intérieur (éléments K, O, N et P de la Fig. 1-8 -c); ici les deux cylindres sont en contrarotation (Taylor [82]) : b) vortex axisymétriques; c) structures spirales. On pourra noter que les rouleaux sont collés au cylindre interne, à l'intérieur de la zone instable définie sur la Fig. 1.1.

Quant au dispositif  $S_i-R_o$  de Couette, son rapport d'aspect était assez grand pour limiter les effets de bords : il était donc stable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge de Taylor. Par contre un autre type d'instabilité génératrice de turbulence (instabilité de Kelvin-Helmholtz) apparaît au-delà d'une vitesse de rotation relativement élevée : c'est cette transition que Couette observa (à un nombre de Reynolds d'environ  $Re_o = 2000$  selon ses mesures).

Revenons à présent aux travaux de Taylor. Les Fig. 1-10 a) et b) montrent deux types d'instabilités mises en évidence par Taylor. La première structure correspond à des vortex axisymétriques stationnaires se succédant le long de l'axe (Fig. 1-10-b); dans un plan méridien (plan vertical passant par l'axe de rotation), le sens de rotation des vortex alterne d'un rouleau à l'autre, en accord avec les calculs de Taylor (Fig. 1-10-a). Taylor remarqua en outre que, pour certaines vitesses de rotation, la symétrie axiale et la stationnarité des rouleaux horizontaux pouvaient être brisées par des pulsations azimutales dépendant du temps, et de fréquence variable. Un autre type de structure correspond à des spirales s'enroulant autour du cylindre intérieur (Fig. 1-10-c). Il existait donc plusieurs types d'écoulement possibles dans la zone d'instabilité. Dans les années qui suivirent, de très nombreux travaux théoriques, expérimentaux, et numériques – avec l'avènement de l'outil informatique – allaient permettre d'appréhender la variété des structures, de les classer, et de comprendre les scénarios de transition permettant de passer de l'une à l'autre.

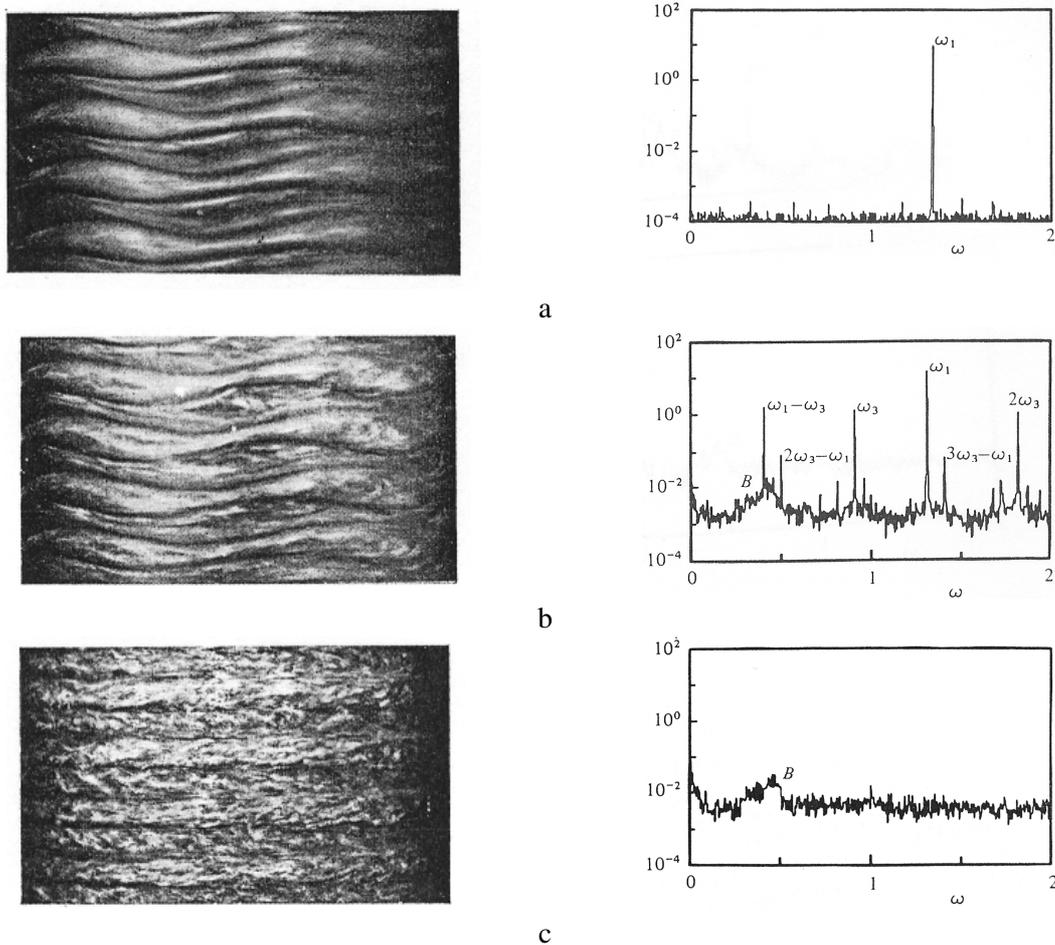
## 1.2 Stabilité et transition dans un système de long rapport d'aspect

### 1.2.1 En configuration rotor-stator

Le système rotor-stator  $R_i-S_o$  a inspiré une abondante littérature, notamment par sa plus grande facilité de mise en œuvre : la mise en rotation de la paroi extérieure est en effet plus délicate à réaliser techniquement. Pour des paramètres géométriques fixés et de longs rapports d'aspect, l'augmentation de la vitesse angulaire du cylindre interne (ou, de façon équivalente, du nombre de Reynolds du cylindre interne défini par  $Re_i = \Omega_i r_i^* d / \nu$ ) se traduit par un enchaînement d'écoulements présentant des caractéristiques clairement identifiables comme les motifs des tourbillons ou le spectre en fréquence de la vitesse du fluide dans la cavité (Fenstermacher *et al.* [31], Andereck *et al.* [6]). En reprenant les dénominations définies par Andereck, le scénario se décompose de la façon suivante :

- **Azimuthal Laminar Flow (AZI)** : dans un premier temps, de l'écoulement au repos jusqu'au premier seuil de transition, le fluide adopte le profil de Couette défini par l'équation (1-3). Cet écoulement stable sert souvent d'état de base pour les études de stabilité linéaire.
- **Taylor Vortex Flow (TVF)** : à partir du Reynolds critique  $Re_{i,crit}$ , l'écoulement bifurque vers les structures toroïdales de Taylor (Fig. 1-12), deux rouleaux adjacents tournant en sens opposé dans un plan méridien.
- **Wavy Vortex Flow (WVF)** : le seuil suivant correspond à l'apparition d'ondulations azimutales qui brisent l'axisymétrie des rouleaux (Fig. 1-11-a). Au niveau spatio-temporel, les ondulations sont caractérisées par une même fréquence fondamentale ( $\omega_1$  sur la Fig. 1-11-a), à laquelle peuvent être associées un certain nombre d'harmoniques.
- **Modulated Wavy Vortices (MWV)**: quand on augmente encore le taux de rotation, une nouvelle fréquence fondamentale s'ajoute à la précédente. D'autres fréquences, résultant de la combinaison linéaire des deux fréquences fondamentales ( $\omega_1$  et  $\omega_3$  sur la Fig. 1-11 -b), peuvent figurer dans le spectre (Fig. 1-11-b).
- **Turbulent Taylor Vortices (TTV)** : à vitesse angulaire très élevée, l'écoulement devient faiblement turbulent ; cependant la structure en rouleaux est globalement conservée. Le spectre

de fréquence ne comporte plus de pic, mais montre une large bande de bruit de fond (Fig. 1-11-c).



**Fig. 1-11** - Visualisation par technique Kalliroscope de la transition dans un système rotor-stator, et spectres fréquentiels associés de la vitesse radiale ( $\eta = 0.877$ ,  $\Gamma = 20$ ,  $Re_{i, crit} = 119.1$ ) : a)  $Re_i = 1.1 Re_{i, crit}$ ; b)  $Re_i = 9.5 Re_{i, crit}$ ; c)  $Re_i = 15 Re_{i, crit}$ ; d)  $Re_i = 23 Re_{i, crit}$  (d'après Fenstermacher *et al.* [31]).

*Apparition de la turbulence.* La nature de la turbulence au sein du fluide a longtemps prêté à débat ([51],[31]). D'après le scénario proposé par Landau en 1944, la transition vers un nouveau mode instable  $m$  se traduit par l'émergence d'une nouvelle fréquence fondamentale  $f_m$  incommensurable avec les fréquences des modes  $(1, \dots, m-1)$  déjà présents, c'est-à-dire que l'on ne peut trouver une suite  $(a_m)$  d'entiers relatifs tel que :

$$\sum_{j=1}^m a_j f_j = 0$$

L'état turbulent est atteint après une succession infinie de telles bifurcations. En ce sens, il n'y a pas à proprement parler de transition précise vers un régime chaotique : à nombre de Reynolds élevé, l'écoulement resterait caractérisé par une quantité certes grande, mais finie, de fréquences (régime complexe de type quasi-périodique).

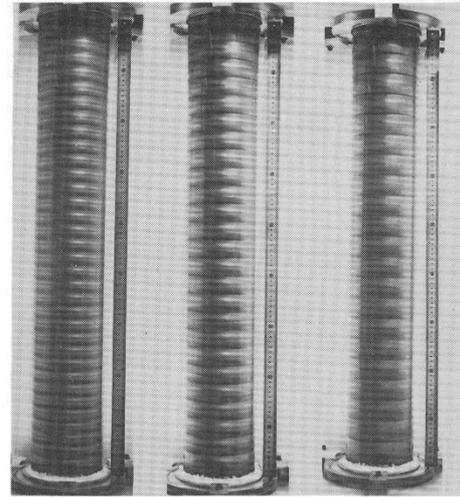
En 1971, via l'analyse développée pour l'étude des systèmes dynamiques, Ruelle et Takens envisagent un scénario différent ne mettant en jeu qu'un nombre fini et restreint de bifurcations. A partir d'un état stationnaire, un système bifurque d'abord vers un régime périodique (une fréquence fondamentale), puis ensuite vers un régime bipériodique (deux fréquences fondamentales). Au-delà, le système peut :

- soit transiter directement vers le chaos spatio-temporel sous l'effet de perturbations.

- soit bifurquer une troisième fois vers un nouvel état quasi-périodique (à trois fréquences fondamentales) avant de devenir chaotique sous l'effet de perturbations.

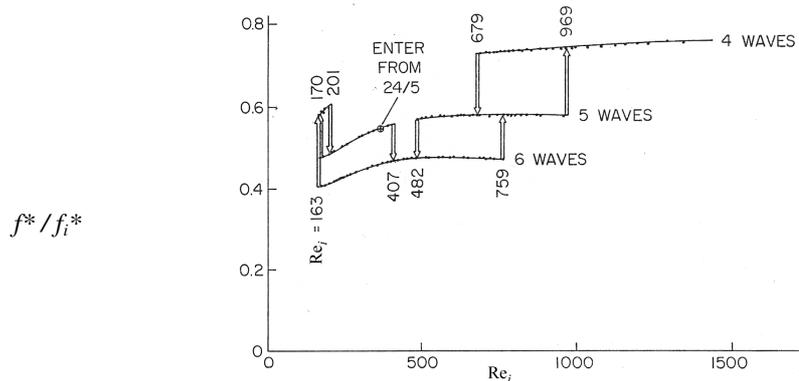
Dans un espace des phases décrivant le système (par exemple l'espace des composantes de la vitesse mesurée en un point de l'écoulement), les trajectoires parcourent un **attracteur étrange**, évoluant de manière désordonnée. Les observations reportées dans [31] confirment ce scénario dans le cas Taylor-Couette : l'écoulement bifurque une première fois vers le régime WVF (périodique), puis une deuxième fois vers le régime MWV (bi-périodique), avant de devenir systématiquement chaotique.

*Non-unicité des écoulements.* Une des particularités du système de Taylor-Couette est que les caractéristiques finales de l'écoulement dépendent grandement de son histoire, c'est-à-dire de toutes les étapes que l'on a suivies pour y parvenir. Coles, en 1965 [22], fut l'un des premiers à constater que, pour une même vitesse de rotation du cylindre et les mêmes paramètres géométriques du système, on pouvait obtenir des écoulements WVF différents, caractérisés par des longueurs d'onde axiale et azimutale différentes. Snyder (1969 [74]), puis Burkhalter & Koschmieder (1974 [15]) notèrent également la non-unicité des écoulements TVF, qui pouvaient se différencier par une longueur d'onde axiale  $\lambda$  différente (en d'autres termes, par un nombre de rouleaux différents pour une hauteur donnée) (cf. Fig. 1-12) Un facteur majeur à l'origine de cette différenciation pouvant être l'accélération du cylindre : une augmentation quasi-statique de 0 jusqu'au taux de rotation final peut ne pas donner le même écoulement qu'une augmentation brutale. Marcus, dans ses travaux, étudia la structure des écoulements WVF et MWV en testant plusieurs valeurs de la longueur d'onde  $\lambda$ . Meyer-Spasche [53] explora numériquement la stabilité de l'écoulement AZI et la structure des cas TVF en fonction du rapport de rayon  $\eta$  et de  $\lambda$ .



**Fig. 1-12** – Non-unicité de l'écoulement TVF (Burkhalter & Koschmieder [15]). Selon l'accélération choisie pour atteindre le  $Re_i$  final, on obtient des longueurs d'onde axiales différentes.

Coles nota que le nombre d'ondes azimutales changeait par paliers quand on augmentait la vitesse de rotation. Plus remarquable, ces paliers formaient des boucles d'hystérésis, et l'on pouvait passer d'un état à  $p$  modes à un état à  $q$  modes en augmentant ou en diminuant le Reynolds, deux états pouvant être possibles pour un même Reynolds (Fig. 1-13).

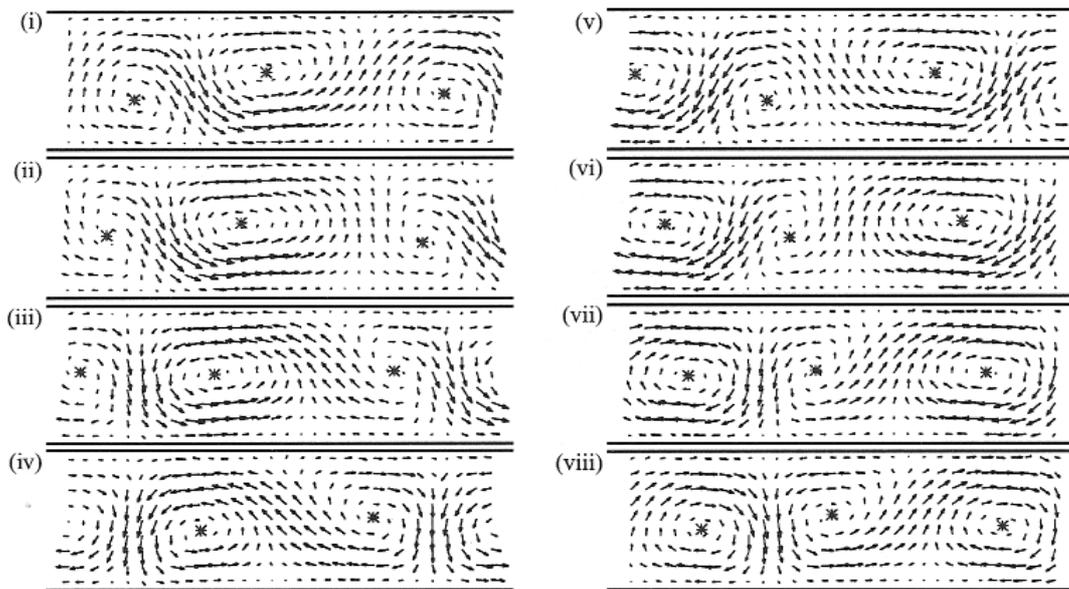


**Fig. 1-13** – Phénomène d'hystérésis pour un écoulement WVF ( $\eta = 0.874$ ,  $\Gamma = 14$ ) (d'après Coles [22]) : plusieurs solutions peuvent coexister pour une même valeur du nombre de Reynolds  $Re_i$ . En abscisse, le Reynolds  $Re_i$  du cylindre interne; en ordonnée, fréquence temporelle  $f^*$  de l'ondulation azimutale, adimensionnée par la fréquence de rotation du cylindre interne  $f_i^*$ .

*Structure de l'écoulement.* Le champ de vitesse et la structure de l'écoulement ont fait l'objet d'études détaillées. Marcus et Coughlin ([36],[24][25]) réalisèrent une étude très complète des cas WVF et

MWV par simulation numérique, utilisant des méthodes de type spectral, sous l'hypothèse d'une périodicité axiale des vortex (répétition de la même paire de rouleaux contrarotatifs au bout d'une longueur d'onde axiale  $\lambda$ ). Marcus suggéra que le WVF était dû à une instabilité centrifuge des couches de forte vitesse radiale qui séparent les rouleaux. D'autres travaux, comme ceux de Schröder & Keller [68] proposèrent d'autres méthodes numériques pour résoudre les équations de Navier-Stokes et analyser le champ de vitesse (*On pourra se référer à [53] pour une liste plus détaillée*).

Wereley & Lueptow [87] (1998) ont appliqué la technique PIV (*Particle Image Velocimetry*) pour mesurer les vitesses radiales et azimutales dans un plan méridien, dans le cas TVF et WVF. Akonur & Lueptow [2] ont complété cette étude en mesurant la vitesse azimutale dans un plan latitudinal (perpendiculaire à l'axe de rotation). Ils ont pu reconstituer ainsi, pour la première fois au niveau expérimental, le champ de vitesse tridimensionnel dans un système de Taylor-Couette. Ces travaux révélèrent dans le cas WVF que des rouleaux adjacents s'échangeaient du fluide de façon cyclique (Fig. 1-14).



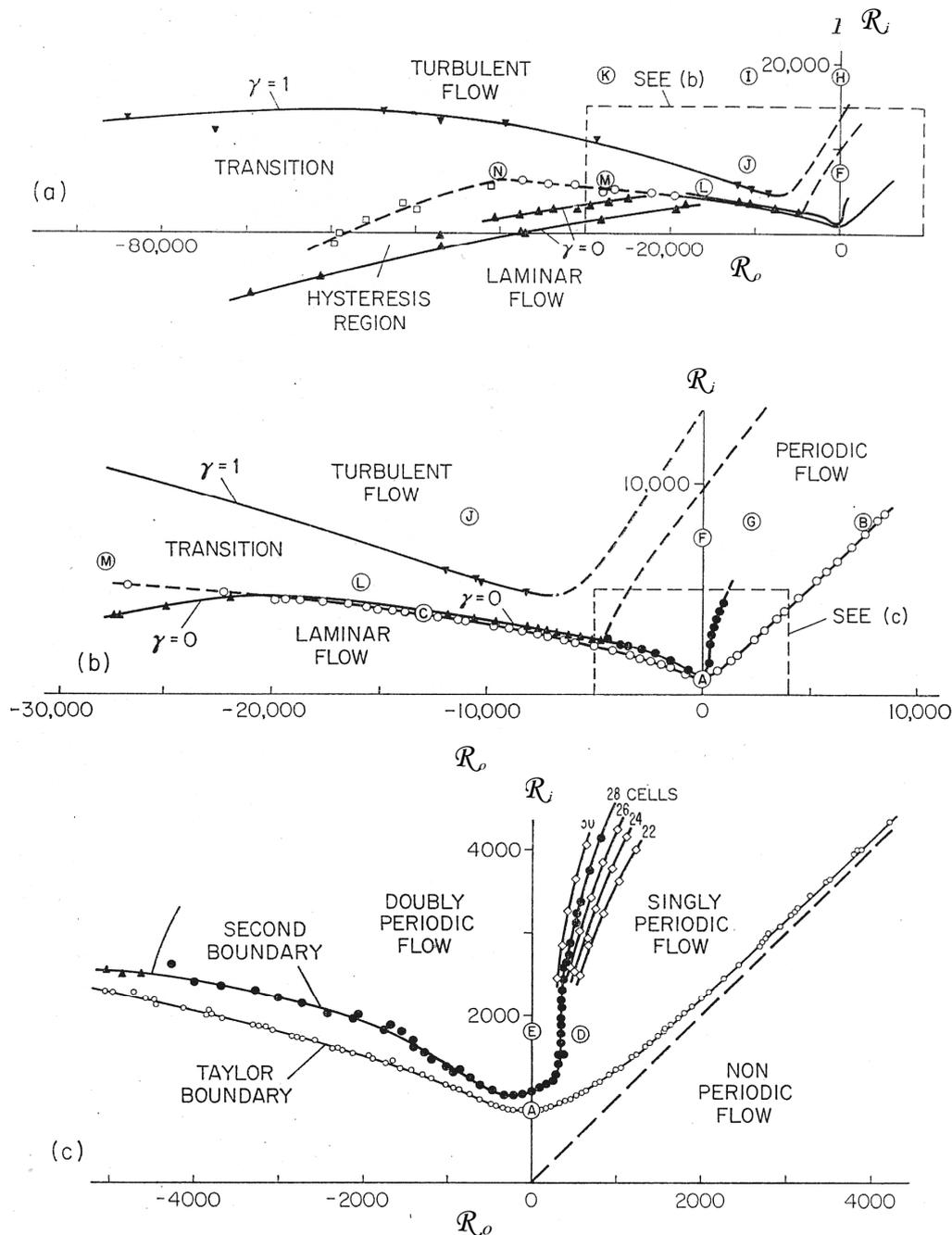
**Fig. 1-14** – Projection de la vitesse dans un plan méridien en régime WVF pour  $\Gamma = 47.7$ ,  $\eta = 0.83$ , et  $Re_i = 253$ . La projection est réalisée sur une durée d'un cycle, correspondant au passage d'une ondulation complète à travers le plan de projection, fixe dans l'espace. Le cylindre tournant est représenté par la paroi supérieure, le cylindre interne par la paroi inférieure (d'après Wereley & Lueptow [87]).

## 1.2.2 En rotation différentielle.

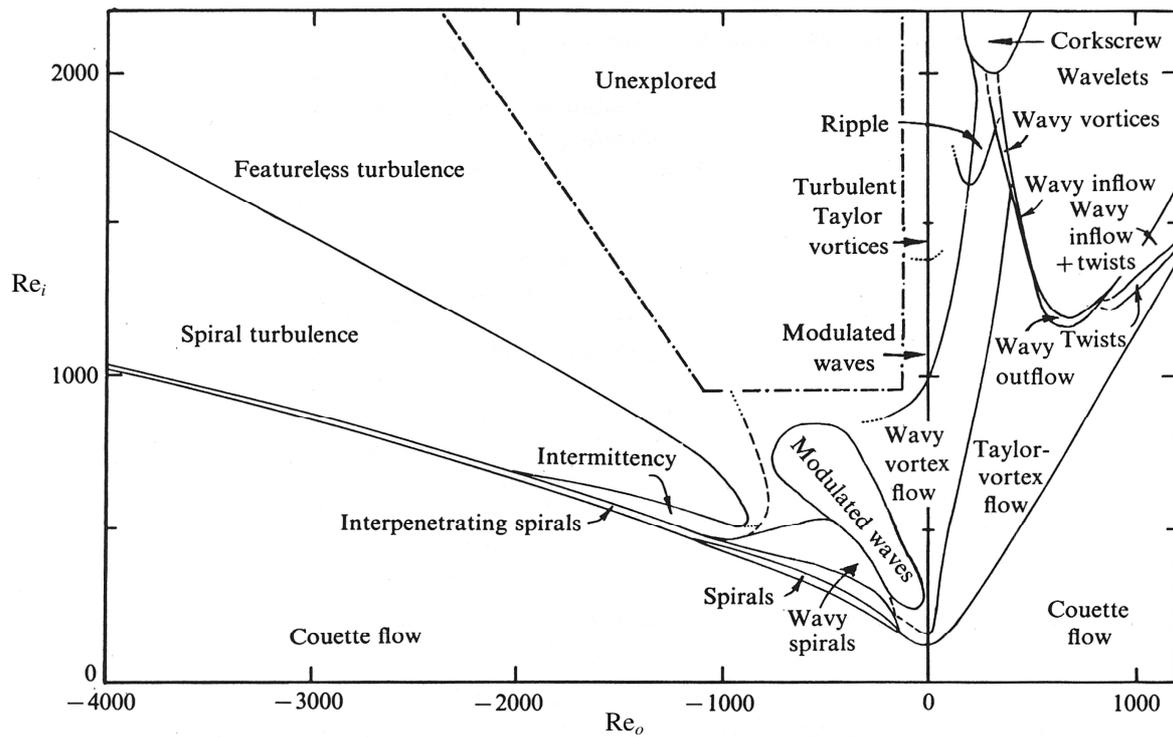
La mise en rotation de la paroi externe complexifie la structure de l'écoulement, modifiant notablement le profil radial de la vitesse azimutale, ce qui accentue de ce fait le cisaillement. D'un point de vue plus général, la stabilité du système en rotation différentielle a été étudiée par Snyder (1970 [74]), Hegseth *et al.* (1996 [40]). Des simulations numériques se sont intéressées à la co-rotation (Weisshaar *et al.*, 1991 [85]; Antonijoan & Sanchez, 2000 [8]) et à la contra-rotation (Jones, 1982; Sanchez *et al.*, 1993; Antonijoan *et al.*, 1998), pour des cylindres infiniment longs.

En plus du Reynolds du cylindre interne ( $Re_i$ ), on introduit le Reynolds du cylindre externe  $Re_o = \Omega_o r_o^* d / \nu$ . Taylor, nous l'avons vu, avait déterminé la frontière de stabilité du simple écoulement de Couette en fonction des vitesses de rotation des deux parois, mais avait noté que dans la zone instable du plan ( $\Omega_o/\nu$ ,  $\Omega_i/\nu$ ), des structures spirales pouvaient se manifester dans certains cas où les parois étaient en contrarotation. Dans [22], Coles recensa, au delà de la frontière de Taylor, des zones secondaires qui avaient été identifiées dans son laboratoire entre 1958 et 1961 [22]. Trois régions principales partagent le plan paramétrique montré sur la Fig. 1-15 : une première, correspondant à

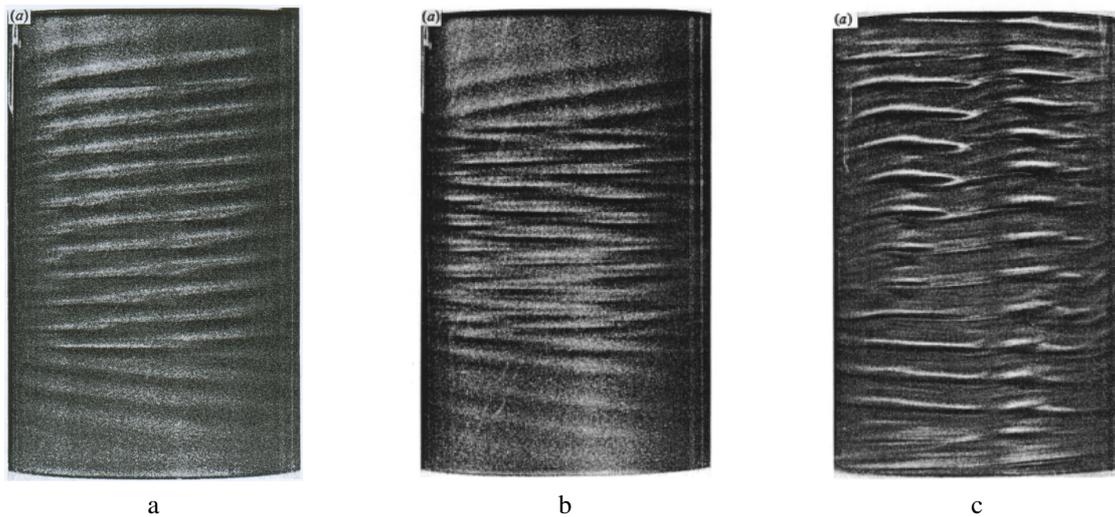
l'écoulement laminaire de Couette ; une autre, dans laquelle l'écoulement est pleinement turbulent ; et une zone de transition assurant l'interface entre les deux précédentes.



**Fig. 1-15** – Diagrammes de transition dans le plan  $(\mathcal{R}_o, \mathcal{R}_i)$ , pour  $\eta = 0.881$  (d'après Coles [22]); les Reynolds du cylindres sont ici définis par  $\mathcal{R}_o = \Omega_o (r_o^*)^2 / \nu = \text{Re}_o \eta / (1-\eta)$ ,  $\mathcal{R}_i = \Omega_i (r_i^*)^2 / \nu = \text{Re}_i \eta / (1-\eta)$ . Les frontières sont obtenues selon le protocole expérimental suivant : le cylindre externe est d'abord mis en rotation de manière quasi-statique, jusqu'à la vitesse finale souhaitée ; puis le cylindre interne est mis en rotation, toujours de façon quasi-statique.



**Fig. 1-16** – Diagramme de transition dans le plan  $(Re_o, Re_i)$ , pour  $\Gamma = 30$ ,  $\eta = 0.883$  (d'après Andereck & al.[6]). Le protocole expérimental est le même que celui suivi par Coles [22].



**Fig. 1-17** – Visualisation par technique Kalliroscope de quelques-uns des motifs observés par Andereck et al. dans le cas où les deux parois cylindriques sont mobiles ([6]) : a) Laminar Spiral flow (SPI), pour  $Re_o = -300$ ,  $Re_i = 240$  ; b) Interpenetrating Spirals (IPS) pour  $Re_o = -1000$ ,  $Re_i = 435$ ; c) Wavy Interpenetrating Spirals (WIS), pour  $Re_o = -300$ ,  $Re_i = 350$ .

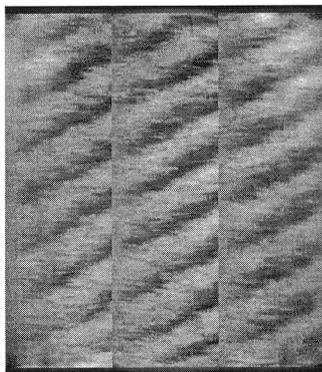
Respectant le même protocole expérimental que Coles, Andereck *et al.* ([5],[6]) allaient affiner la cartographie de l'écoulement dans la zone couverte par la Fig. 1-15, et montrer une très large diversité de motifs : « Twists », « Wavy Outflow », « Corkscrew »... (Fig. 1-16). La plupart de ces structures sont caractéristiques soit de la corotation, soit de la contrarotation. Quelques-uns d'entre eux, pour la contrarotation, sont illustrés sur la Fig. 1-17 :

- le « Laminar Spiral Flow » (désigné par « Spirals » sur la Fig. 1-16), caractérisé par un ou deux vortex en spirale s'enroulant autour du cylindre interne. La Fig. 1-17 (a) montre le cas où deux spirales, dont les inclinaisons ont des signes opposés, coexistent dans la cavité, mais sont clairement séparées par une interface horizontale, elles ne se mélangent pas.
- « InterPenetrating Spirals » : deux spirales dont les inclinaisons sont de signes opposés coexistent, comme pour le cas précédent, mais cette fois-ci elles interfèrent entre elles dans une bonne part de la cavité (Fig. 1-17 (b)).
- « Wavy Interpenetrating Spirals » : l'écoulement précédent est modulé par une ondulation azimutale semblable à celle du Wavy Vortex Flow décrit au § 1.2.1 (Fig. 1-17 (c)).

Un certain nombre d'études numériques ont été réalisées pour des cylindres de longueur infinie (pas de confinement axial), en co-rotation (Weisshaar *et al.* [85], Antonijoan & Sanchez [8]) et en contrarotation (Jones [44], Sanchez *et al.* [67], Antonijoan *et al.* [7]). La théorie des bifurcations s'est également intéressée à la nature chaotique de l'écoulement en contra-rotation à grand rapport d'aspect (Golubitsky & Langford [37], Chossat & Iooss [18], Stern & Hussain [78]). Les rapports d'aspect petits ou moyens n'ont donc pas été abordés.

Le régime contrarotatif est nettement plus complexe à étudier que le cas rotor-stator, notamment parce qu'on y rencontre des écoulements instationnaires mais pas nécessairement périodiques, compliquant l'interprétation des résultats.

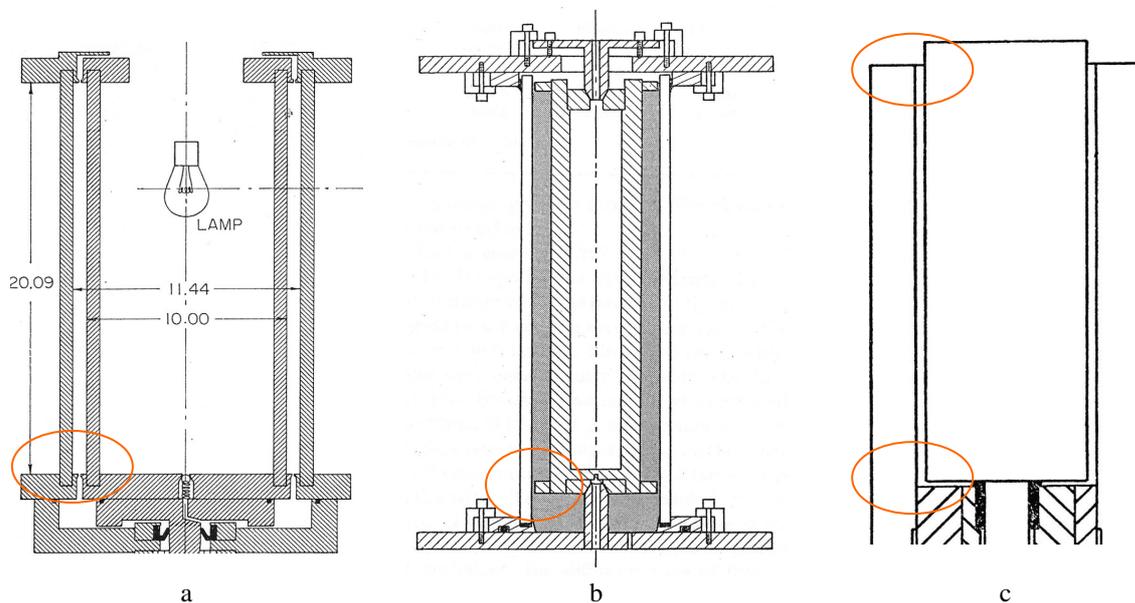
*Turbulence.* Dans le scénario menant à la turbulence dans le cas contrarotatif, on peut rencontrer deux types de processus (Coles [22]) : lorsque la rotation du cylindre interne est dominante, le scénario suit globalement celui du cas rotor-stator, avec apparition progressive de fréquences harmoniques et modulantes jusqu'à l'état turbulent. Par contre, si c'est la rotation du cylindre externe qui domine, la transition vers la turbulence se fait de façon plus directe, via un phénomène particulier appelé « intermittence » : des zones laminaires et turbulentes, séparées par des frontières très distinctes, peuvent coexister au sein du fluide. Les zones turbulentes peuvent se manifester sous la forme de « spots » turbulents, ou, plus frappant, sous une forme que Coles nomma « turbulence spirale ». Ce dernier motif se caractérise par deux bandes, l'une laminaire, l'autre turbulente, s'enroulant autour de l'axe de rotation (Fig. 1-18). Van Atta (1966, [83]), Hegseth *et al.* (1989 [39]), Colovas & Andereck (1997 [23]), Goharzadeh & Mutabazi (2001 [35]), Prigent (2000 [49], 2001 [63] [62]) ont par la suite fourni des études expérimentales approfondies sur ces phénomènes. Golubitsky *et al.* (1988 [37]), Stern & Hussain (1994 [78]) ont précisé, au moyen de la théorie des bifurcations, la nature chaotique de l'écoulement pour de longs cylindres en contrarotation.



**Fig. 1-18** – Visualisation par technique Kalliroscope de la turbulence spirale,  $Re_o = -1200$ ,  $Re_i = 790$ ,  $\Gamma = 203$ ,  $\eta = 0.963$  (Prigent [62]). L'image correspond à une projection cylindrique sur  $[0 ; 2\pi]$  de l'écoulement visualisé, via une technique combinant un système de miroirs et une reconstruction numérique d'image (Prigent & Dauchot [63]).

### 1.3 Influence du confinement.

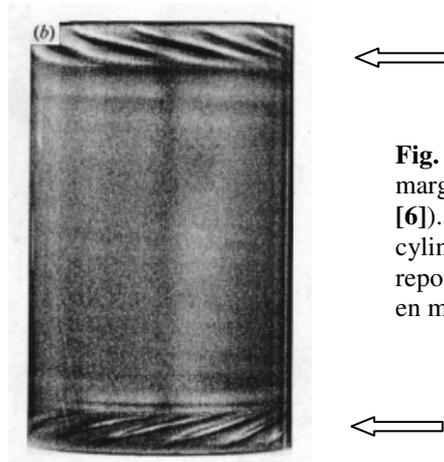
Dans les dispositifs réels de Taylor-Couette, la cavité cylindrique dans laquelle évolue le fluide est séparée de l'extérieur par des interfaces qui peuvent être de plusieurs types. Mallock, puis Taylor, avaient saisi toute l'importance de ces interfaces dans la stabilité du système. Ces interfaces, que nous appellerons **parois terminales**, se déclinent en plusieurs variantes (Fig. 1-19). Elles consistent la plupart du temps en des disques horizontaux (on utilisera le terme de **disques terminaux**) qui peuvent être soit fixés au cylindre externe (Taylor [82], Andereck [6], Prigent [62]) soit fixés au cylindre interne (Burkhalter & Koschmieder [15], Fig. 1-19-b). On peut rencontrer aussi des systèmes avec une partie fixée sur le cylindre externe et une partie fixée sur le cylindre interne (Coles [22], Fig. 1-19-a). Un espace, d'une largeur l'ordre de  $5\% d$ , assure le jeu mécanique nécessaire entre les éléments indépendants. Parfois, la zone supérieure de la colonne de fluide est laissée à l'air libre, sans aucune contrainte pariétale (Fenstermacher *et al.* [31], Cole [21], Fig. 1-19-c) : on parle de surface libre. Le fluide, mû par la rotation des cylindres, interagit différemment avec les parois terminales selon leur nature.



**Fig. 1-19** – On peut rencontrer plusieurs types de parois terminales dans les dispositifs expérimentaux : a) système mixte, une moitié fixée au cylindre externe, l'autre au cylindre interne (d'après Coles [22]); b) disques tournant avec le cylindre interne, en haut et en bas (Burkhalter & Koschmieder [14][15]); a) configuration mixte, disque fixe en bas, surface libre en haut (Cole [21]).

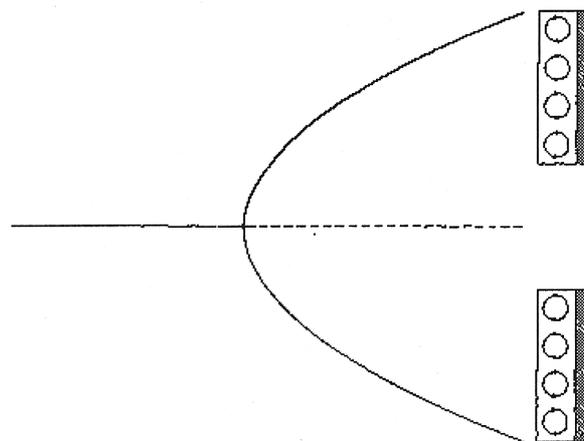
Dans un écoulement confiné radialement, une particule fluide subit une force d'inertie centrifuge et un gradient de pression centripète (voir §1.1.1). Près du disque terminal, le gradient de pression est relativement proche de celui que l'on obtient à une distance axiale plus importante du disque terminal, par exemple dans la zone située au centre de la cavité; mais la paroi du disque terminal, selon qu'elle est en rotation ou non, peut entraîner par viscosité le fluide dans son voisinage ; si la paroi a une vitesse angulaire inférieure à celle du fluide dans la zone géostrophique, elle va au contraire freiner le fluide. La différence entre le gradient de pression et la force centrifuge engendre à proximité du disque un flux radial centrifuge ou centripète ; cet effet est généralement désigné dans la littérature sous le nom de « pompage d'Ekman ». Le flux, dévié par les parois verticales des cylindres, génère des tourbillons, généralement appelés « tourbillons d'Ekman », qui sont localisés près des bords supérieur et inférieur de la cavité; la Fig. 1-20 présente une manifestation de ces tourbillons qui sont matérialisés près des bords (voir flèches sur la figure). Un élément intéressant que l'on peut noter est que ces structures présentent un mode azimuthal élevé. Des structures similaires sont également observables sur

les visualisations de Coles [22], où l'on peut observer, dans le cas d'écoulements WVF, un mode près des parois qui est beaucoup plus élevé que celui qui se manifeste plus loin des disques, au centre de la cavité. Nous ne disposons pas de données quantitatives à ce sujet, et à notre connaissance, il n'existe aucune étude qui ait été consacrée à ces modes particuliers naissants près des disques terminaux.



**Fig. 1-20** - Manifestation des tourbillons marginaux d'Ekman (d'après Andereck *et al* [6]). Ici, les disques terminaux sont fixés au cylindre externe. Le fluide est initialement au repos, puis les parois sont brusquement mises en mouvement.

*Bifurcation.* Dans le cas de cylindres infiniment longs, la transition depuis l'état stable de Couette vers le Taylor Vortex Flow (TVF) est décrite par une bifurcation de type fourche supercritique, comme illustré sur la Fig. 1-21; si l'on s'intéresse à un vortex particulier localisé en un endroit bien défini de la cavité de Taylor-Couette, chaque branche correspond à un sens de rotation possible pour le vortex, l'une ou l'autre de ces deux branches peut être atteinte de manière équiprobable. La présence de parois terminales modifie ce scénario : les branches de la bifurcation suivent une transition continue depuis l'écoulement de Couette jusqu'au TVF (Mullin [54]). Près des parois terminales, le sens de rotation des vortex marginaux est déterminé par le pompage d'Ekman : le flux près de la paroi est dirigé vers l'intérieur si la paroi est fixe, et vers l'extérieur si la paroi est solidaire du cylindre interne. Il existe toutefois une autre configuration, pour laquelle le sens de rotation du vortex marginal est opposé à celui normalement imposé par le pompage radial. Ce cas peut être atteint sous certaines conditions (Benjamin [10] [11], et Benjamin & Mullin [12]), mais il est peu fréquent, et l'écoulement suit généralement la branche continue.



**Fig. 1-21** – Diagramme de bifurcation de type fourche, applicable à la transition de l'écoulement de Couette vers le « Taylor vortex flow » (Cliffe *et al.* [19]).

Cette transition continue a pu être constatée expérimentalement et numériquement. En dessous du Reynolds critique entre le Couette Flow et le Taylor Vortex Flow, un simple vortex se développe près des parois terminales sous l'effet du pompage d'Ekman. Au fur et à mesure que le Reynolds est augmenté, la rotation des vortex marginaux est plus rapide, et génère par entraînement visqueux des vortex supplémentaires contrarotatifs dont l'intensité décroît exponentiellement avec la distance à la paroi terminale (Lücke *et al.*, [50]). Il est important de noter que ces tourbillons résultent d'effets mécaniques, et ne sont en aucun cas dus à l'instabilité centrifuge de Taylor, même si leur aspect est semblable. Lorsque le Reynolds critique de transition est atteint, le mécanisme d'instabilité de Taylor se superpose à celui du pompage d'Ekman, mais le sens de rotation des vortex demeure le même que celui initié par les tourbillons marginaux. En ce sens, la structure supercritique de Taylor est prédéterminée par la structure sous-critique d'Ekman et ce, même pour des cylindres relativement longs (Burkhalter & Koschmieder [14]).

Pour un système  $R_i$ - $S_o$  de petit rapport d'aspect, le confinement axial assuré par les disques terminaux joue un rôle essentiel dans le scénario de la transition en influant sur les Reynolds critiques : ainsi, la transition suivante TVF / WVF se produit à une vitesse de rotation plus élevée que dans le cas de cylindres de longueur infinie, parce que les vortex marginaux liés au pompage d'Ekman modifie la structure des tourbillons (Cole [21]). En outre, dans le cas de rapport d'aspect infini (cylindres de longueur infinie), la longueur d'onde axiale  $\lambda$  préférentielle des vortex est telle que  $\lambda = 2d$  – chaque vortex est donc inscrit dans un carré de côté  $d$ ; dans le cas confiné,  $\lambda$  est sensible à la distance entre les disques. Le paramètre-clé qui entre ici en jeu est le rapport d'aspect  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est entier et pair, la longueur d'onde axiale de la paire de vortex est identique à celle prédite pour des conditions limites identiques sur les disques. Cependant, un rapport d'aspect impair ou non entier conduit les tourbillons non marginaux à s'étirer ou à se comprimer pour s'ajuster au mouvement rotatoire des vortex marginaux (Cole[21]). Dans certains cas où le nombre de vortex dans la cavité est pair, des vortex « anormaux » ont pu être identifiés; le sens de rotation de ces tourbillons est opposé à celui prédit en se basant sur les conditions limites (Cliffe & Mullin [20]).

## Chapitre 2

### Modélisation et résolution par méthodes spectrales.

Les écoulements que nous considérons sont dits «réalistes», car ils impliquent des cavités de dimensions finies. Le système de Taylor-Couette est constitué de deux cylindres coaxiaux, pouvant tourner à des vitesses angulaires différentes indépendamment l'un de l'autre. La dynamique est gouvernée par les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible.

Le comportement spatial et temporel de tels écoulements peut être complexe, impliquant des phénomènes rapides en temps et de forts cisaillements dans la direction azimutale. Il est donc important de disposer d'un outil précis et fiable. Nous avons retenu dans cette optique une approximation de haute précision par méthodes spectrales. Un code développé au laboratoire depuis plusieurs années, a montré son efficacité dans différents problèmes liés à des écoulements de fluides en rotation (Raspo [64], Serre[70]) ; il a été adapté à la configuration géométrique particulière de Taylor-Couette.

Cette partie expose le modèle géométrique, les équations du mouvement considérées, ainsi que les méthodes de résolution.



Pafnuty Lvovich CHEBYSHEV  
(1821- 1894)



Jean-Baptiste Joseph FOURIER  
(1768 - 1830)

## 2.1 Modélisation

### 2.1.1 Configuration géométrique.

Par sa géométrie de révolution, le dispositif de Taylor-Couette induit naturellement une description en coordonnées cylindriques. La littérature traitant des turbomachines emploie parfois des référentiels tournants solidaires d'une paroi en rotation; mais pour autoriser une comparaison plus directe avec les résultats expérimentaux (exprimés ou visualisés la plupart du temps dans le référentiel fixe du laboratoire), on utilisera un repère cylindrique absolu ( $\mathbf{e}_{r^*}$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_{z^*}$ ).

La cavité annulaire est délimitée par un cylindre interne de rayon  $r_i^*$  et de vitesse angulaire  $\Omega_i$ , et un cylindre externe de rayon  $r_o^*$  et de vitesse  $\Omega_o$ . D'une hauteur  $2h$ , elle est fermée dans sa partie supérieure et dans sa partie inférieure par deux disques terminaux parallèles, en  $z^* = +h$  et en  $z^* = -h$  (cf Fig. 2-1).

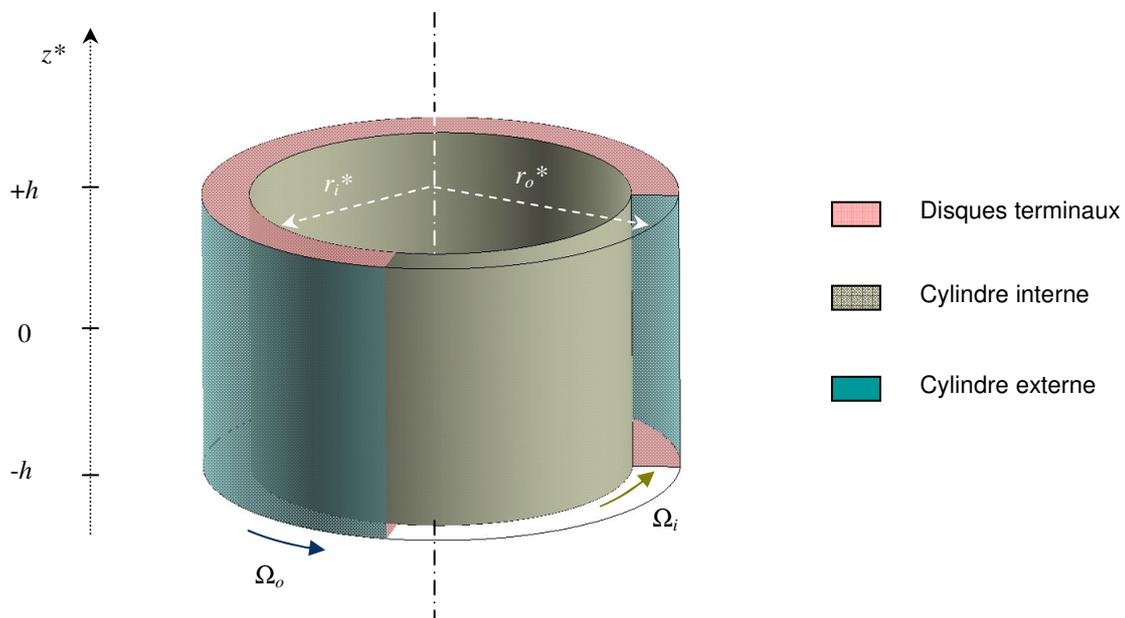


Fig. 2-1 – Schéma écorché de la configuration géométrique.

La littérature publiée depuis les travaux de Taylor a consacré l'usage d'un certain nombre de paramètres sans dimension permettant de caractériser la configuration :

- **le rapport de rayon** :  $\eta = r_i^* / r_o^*$ ,  $0 < \eta < 1$ , contrôle la courbure de la géométrie. Plus il est proche de 1, plus l'extension radiale de la cavité est petite, rapprochant localement la courbure des parois cylindriques de celle de leurs plans tangents. L'écoulement tend alors asymptotiquement vers un écoulement plan de Couette ([62]).
- **le rapport des vitesses angulaires** :  $\xi = \Omega_o / \Omega_i$ . Lorsque ce rapport tend vers 1 en même temps que le rapport de rayon  $\eta$ , le problème tend asymptotiquement vers celui de la convection plane de Rayleigh-Bénard ([51][53]), l'effet centrifuge jouant le même rôle que l'effet convectif induit par le gradient thermique.
- **le rapport d'aspect**  $\Gamma = 2h / d$ , où  $d = r_o^* - r_i^*$ .  $\Gamma$  mesure le rapport entre l'extension axiale de la cavité et l'épaisseur de la couche de fluide entre les cylindres. Plus il est grand, plus les effets des disques terminaux sur l'écoulement sont limités (cf. §1.3).
- **les nombres de Reynolds**  $Re_i = \Omega_i r_i^* d / \nu$  (pour le cylindre interne),  $Re_o = \Omega_o r_o^* d / \nu$  (pour le cylindre externe), où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

## 2.1.2 Description de la dynamique

### 2.1.2.1 Equations de Navier-Stokes

Le fluide est modélisé comme un milieu continu décrit selon le point de vue eulérien : toute grandeur physique  $\varphi^*$  - scalaire ou vectorielle -, qui caractérise une particule fluide située en  $\mathbf{X} = (r^*, \theta, z^*)$ , compose un champ scalaire ou vectoriel  $\varphi^* = \varphi^*(r^*, \theta, z^*)$ . Les contraintes qui s'exercent sur la particule fluide sont modélisées par le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*,$$

où  $p^*$  est la pression,  $\mathbf{I}$  le tenseur identité d'ordre 2, et  $\boldsymbol{\tau}^*$  le tenseur des contraintes visqueuses. On suppose que le fluide est newtonien et qu'il suit la relation de Stokes :

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mu(\mathbf{grad} \mathbf{V}^* + {}^t \mathbf{grad} \mathbf{V}^*) - \frac{2}{3} \mu(\text{div} \mathbf{V}^*) \mathbf{I}$$

Sous ces hypothèses précédentes, les équations-bilans de masse et de quantité de mouvement qui régissent la dynamique du fluide peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{V}^* = 0 \text{ sur } \overline{\mathcal{D}}^* & (2-1) \\ \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \mathbf{grad} \mathbf{V}^* \otimes \overline{\mathbf{V}}^* = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p^* + \nu \Delta \mathbf{V}^* \text{ sur } \mathcal{D}^* & (2-2) \\ \mathbf{V}^* = \mathbf{W}^* \text{ sur } \partial \mathcal{D}^* & (2-3) \end{cases}$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien,  $\mathcal{D}^*$  le domaine annulaire ouvert,  $\partial \mathcal{D}^*$  la frontière du domaine,  $\overline{\mathcal{D}}^* = \mathcal{D}^* \cup \partial \mathcal{D}^*$  son adhérence et  $\mathbf{W}^*$  les conditions limites imposées à la vitesse sur la frontière.

Le système (2-1)-(2-3) est adimensionné (Serre [69]). Les échelles de référence pour la longueur, la vitesse et le temps, sont  $h$ ,  $r_i^* \Omega_i$  et  $\Omega_i^{-1}$  respectivement. Les variables d'espace  $r^*$  et  $z^*$  sont quant à elles normalisées de manière à prendre leurs valeurs dans l'intervalle  $[-1 ; 1]$ , nécessité imposée par l'emploi de polynômes de Chebyshev, selon la méthode spectrale décrite au §2.2. Les variables spatiales normalisées vérifient la relation  $z = z^* / h$  et  $r = (2r^* - r_o^* - r_i^*) / d$ . Au final, le domaine géométrique est réduit au domaine sans dimension :

$$\overline{\mathcal{D}} = \{(r, \theta, z) \in [-1 ; 1] \times [0 ; 2\pi[ \times [-1 ; 1]\}.$$

En posant  $\mathbf{V} = {}^t(V_r, V_\theta, V_z) = \mathbf{V}^* / r_i^* \Omega_i$ ,  $p = p^* / \rho(r_i^* \Omega_i)^2$ ,  $t = t^* \Omega_i$ , le système (2-3) devient :

$$\begin{cases} \text{div}_a \mathbf{V} = 0 \text{ sur } \overline{\mathcal{D}} & (2-4) \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}_a \mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{V}} = -\mathbf{grad}_a p + \frac{1-\eta}{\eta \text{Re}_i} \Delta_a \mathbf{V} \text{ sur } \mathcal{D} & (2-5) \\ \mathbf{V} = \mathbf{W} \text{ sur } \partial \mathcal{D} & (2-6) \end{cases}$$

$$\text{où : } \text{div}_a \mathbf{V} = \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2\eta}{\Gamma(1-\eta)} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} V_r + \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta},$$

$$\mathbf{grad}_a \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} \cdot \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{2\eta}{\Gamma(1-\eta)} \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} \cdot \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) & \frac{2\eta}{\Gamma(1-\eta)} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{2\eta}{\Gamma(1-\eta)} \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{grad}_a p = \begin{pmatrix} \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{2\eta}{(1-\eta)r+1+\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{2\eta}{\Gamma(1-\eta)} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}, \Delta_a \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \Delta_a V_r - \frac{4\eta^2}{[(1-\eta)+1+\eta]^2} V_r - \frac{8\eta^2}{[(1-\eta)+1+\eta]^2} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta_a V_\theta - \frac{4\eta^2}{[(1-\eta)+1+\eta]^2} V_\theta + \frac{8\eta^2}{[(1-\eta)+1+\eta]^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \Delta_a V_z \end{pmatrix}$$

avec, pour un scalaire  $\varphi$ :

$$\Delta_a \varphi = 4\eta^2 \left[ \frac{1}{(1-\eta)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{(1-\eta)[(1-\eta)r+1+\eta]} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{[(1-\eta)r+1+\eta]^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\Gamma^2(1-\eta)^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

### 2.1.2.2 Conditions limites

Les parois de la cavité sont considérées comme imperméables : la composante normale de la vitesse à la paroi est nulle. L'interaction tangentielle entre le fluide et la paroi solide est quant à elle un peu plus difficile à appréhender. Le problème de ce type de condition limite, loin d'être trivial, fut soulevé par Stokes en 1848 ; le débat ne fut vraiment réglé qu'en 1923, lorsque Taylor obtint une excellente concordance expérimentations/calculs en supposant une adhérence parfaite du fluide aux parois (autrement dit, à la paroi, les vitesses du fluide et de la surface solide coïncident exactement). Cette condition, dite *de glissement nul*, s'imposa dès lors dans la communauté scientifique (Taylor [82], Donnelly [28]).

Si les parois conditionnent les trois composantes de la vitesse aux frontières du domaine, il n'existe pas en revanche de conditions aux limites naturelles pour la pression (Serre [69]) : ce problème est résolu en projetant les équations de Navier-Stokes sur la normale aux parois (voir §2.2).

*Conditions sur les parois cylindriques.* Elles sont imperméables et non-glissantes :

- sur le cylindre interne ( $r = -1, z \in [-1 ; 1], \theta \in [0 ; 2\pi[$ ) :  $V_r = 0, V_z = 0, V_\theta = 1$ .
- sur le cylindre externe ( $r = 1, z \in [-1 ; 1], \theta \in [0 ; 2\pi[$ ) :  $V_r = 0, V_z = 0, V_\theta = \xi / \eta$ .

*Conditions sur les disques terminaux.* Afin d'étudier l'influence des disques terminaux sur la dynamique de l'écoulement, quatre types de condition limite sont envisagés (**Tableau 2-1**)

Nature de la condition limite	Vitesse du disque $\Omega_D$
Paroi solide (glissement nul)	
Disque fixe ( $\xi = 0$ et $\xi \neq 0$ )	0
Disque solidaire du cylindre interne	$\Omega_i$
Disque solidaire du cylindre externe (pour $\mu \neq 0$ )	$\Omega_o \neq 0$
Surface libre (glissante)	-

**Tableau 2-1** – Liste des conditions limites sur les disques terminaux.

Dans tous les cas, les disques sont imperméables, ce qui se traduit par la condition suivante :

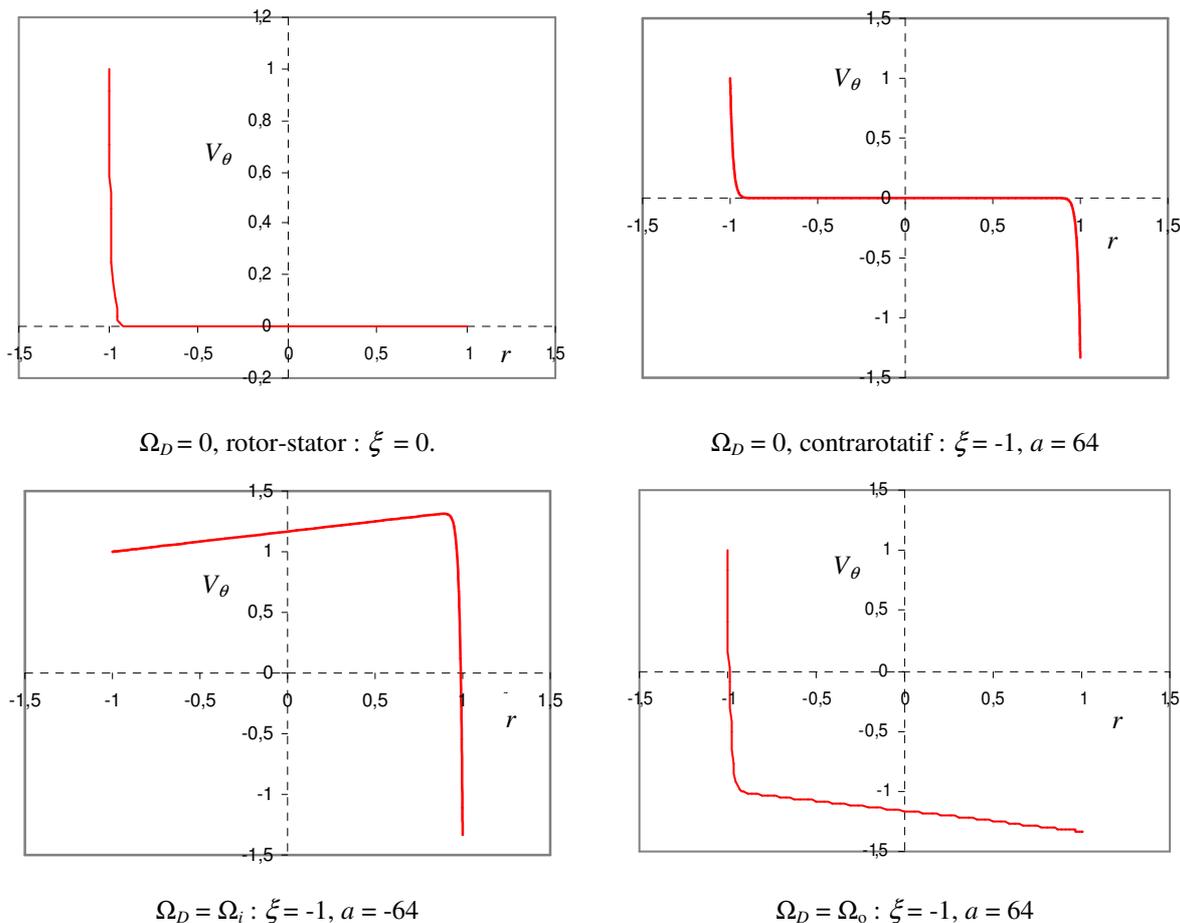
$$V_z(r, \theta, z) = 0, r \in [-1; 1], \theta \in [0; 2\pi[, z = \pm 1$$

Pour les conditions  $\Omega_D = 0$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$ , et  $\Omega_D = \Omega_o$ , la vitesse azimutale  $V_\theta$  présente une singularité au point de jonction entre le disque et un cylindre dans le cas où les deux sont animés de vitesses angulaires différentes. Ainsi, les profils de  $V_\theta$  sur les disques sont régularisés au moyen d'une fonction exponentielle. Cette régularisation prévient le risque de bruit parasite, en particulier dans l'utilisation de méthodes spectrales (Peyret [59]). On introduit un coefficient d'amortissement (noté  $a$ ) qui contrôle la courbure de la fonction exponentielle. Dans le cas des dispositifs expérimentaux, on note typiquement un espace d'une largeur d'environ 5%  $d$  entre les cylindres tournants et les disques animés d'une vitesse de rotation différente. Dans nos simulations, le coefficient  $a$  est ajusté pour que la largeur de la zone transitoire de  $V_\theta$  corresponde à cette valeur.

D'un point de vue plus analytique, nous avons en  $z = \pm 1$  :

- $V_r(r) = 0, V_\theta(r) = \frac{e^{-ar} - e^{-a}}{e^a - e^{-a}} + \frac{\xi}{\eta} \frac{e^{ar} - e^{-a}}{e^a - e^{-a}}, a = 64$ , pour  $\Omega_D = 0$  (rotor-stator et contrarotatif),
- $V_r(r) = 0, V_\theta(r) = \frac{(1-\eta)r + 1 + \eta}{2\eta} \cdot \frac{1}{e^a - e^{-a}} [(1-\xi)e^{-ar} + \xi e^a - e^{-a}]$  pour  $\Omega_D = \Omega_i$  et  $\Omega_D = \Omega_o$ .
  - $a = -64$ , pour  $\Omega_D = \Omega_i$  (rotor-stator ou contrarotatif);
  - $a = 64$ , pour  $\Omega_D = \Omega_o$  (contrarotatif).

La Fig. 2-2 montre quelques-uns des profils décrits par les équations précédentes.



**Fig. 2-2** – Conditions-limites : profils de la vitesse azimutale sur les disques terminaux,  $\eta = 0.75$ . En  $r = -1$ , cylindre interne, en  $r = 1$ , cylindre externe.

Pour la condition « surface libre », on considère un modèle simple de surface plane sans frottements. Comme l'ont observé Spohn *et al.* [77], la rotation d'un fluide entraîne une déformation de la surface libre proportionnelle à un nombre de Froude qui est considéré comme faible dans le cas de cavités à grand rapport d'aspect. Ainsi, bien que ne prenant pas en compte des déformations ainsi que les tensions superficielles à la surface, ce modèle demeure réaliste dans une grande gamme de paramètres (rapport d'aspect, taux de rotation). Par conséquent, on imposera les conditions suivantes :

$$V_z = 0, \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0, \quad \text{pour la surface libre.}$$

## 2.2 Simulation numérique directe par méthodes spectrales.

Les équations de Navier-Stokes, à l'exception de quelques configurations d'écoulements particulières, n'admettent pas de solution analytique. Ainsi il est nécessaire de disposer de méthodes d'approximation numérique de ces solutions. Pour répondre à cet objectif, une méthode numérique basée sur une méthode spectrale est utilisée pour la résolution des équations instationnaires et tridimensionnelles de Navier-Stokes (2-4)-(2-6), en formulation vitesse-pression.

### 2.2.1 Traitement temporel des équations.

#### 2.2.1.1 Discrétisation.

Les termes des équations de Navier-Stokes sont approchés par un schéma semi-implicite du second ordre qui présente de bonnes propriétés de stabilité (Vanel *et al.* [84], Hugues) :

- un schéma d'Euler retardé du second ordre, implicite, pour le terme à dérivée temporelle,
- un schéma d'Adams-Bashforth explicite pour le terme de convection,
- un traitement implicite pour le terme diffusif,

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_a \mathbf{V}^{n+1} = 0 \text{ sur } \overline{\mathcal{D}} \\ \frac{3\mathbf{V}^{n+1} - 4\mathbf{V}^n + \mathbf{V}^{n-1}}{2\delta t} + 2(\mathbf{grad}_a \mathbf{V} \otimes \mathbf{V})^n - (\mathbf{grad}_a \mathbf{V} \otimes \mathbf{V})^{n-1} = \\ \quad - \mathbf{grad}_a p^{n+1} + \frac{1-\eta}{\eta \text{Re}_i} \Delta_a \mathbf{V}^{n+1} \text{ sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{W}^{n+1} \text{ sur } \partial \mathcal{D} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2-7) \\ (2-8) \\ (2-9) \end{array}$$

où  $\delta t$  le pas de temps de la discrétisation, et  $\phi^n$  désigne l'approximation de la grandeur  $\phi$  à l'étape de temps  $t^n = n \delta t$ .

#### 2.2.1.2 Méthode de projection.

L'absence d'équation d'évolution sur la pression et la contrainte d'incompressibilité à satisfaire entraîne un couplage vitesse-pression que nous avons choisi de traiter au moyen d'un algorithme de projection. L'intérêt d'une telle méthode réside tout d'abord dans sa nature non itérative, et d'autre part dans le fait qu'elle ne nécessite pas de place de mémoire spécifique. La méthode de projection s'apparente aux algorithmes de type prédicteur-correcteur, et décompose la résolution des équations de Navier-Stokes en deux étapes :

- une étape de prédiction correspondant au calcul d'un champ de vitesse qui ne satisfait pas *a priori* la contrainte d'incompressibilité,

- une étape de correction (ou de projection), dans laquelle le champ de vitesse prédit est projeté, au moyen de la pression, dans un espace de champ à divergence nulle (Chorin [17], Goda [34]). Cet algorithme a été utilisé par Raspo [64] avec une méthode spectrale collocation-Chebyshev. L'algorithme utilisé dans notre étude comporte une modification efficace apportée par Hugues & Randriamampianina [43], qui consiste à introduire une pression préliminaire à chaque itération, autorisant une variation avec le temps du gradient de pression normal à la paroi.

*Etape de prédiction*

Un champ de pression préliminaire  $\tilde{p}^{n+1}$  est calculé à partir de l'équation de Poisson obtenue en appliquant l'opérateur divergence sur l'équation (2.8), sous l'hypothèse d'un champ  $V$  à divergence nulle. Une condition aux limites est obtenue en projetant (2.8) sur la normale à la frontière  $\partial\mathcal{D}$ . Notons que le terme implicite  $\Delta_a V^{n+1}$  est traité à ce niveau par un schéma d'Adams-Bashforth explicite. On obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_a \tilde{p}^{n+1} = {}_a \cdot \left[ -2(\mathbf{grad}_a V \otimes V)^n + (\mathbf{grad}_a V \otimes V)^{n-1} \right] \text{ sur } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \tilde{p}^{n+1}}{\partial n} = n \cdot \left[ \frac{-3W^{n+1} + 4V^n - V^{n-1}}{2\delta t} - 2(\mathbf{grad}_a V \otimes V)^n + (\mathbf{grad}_a V \otimes V)^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{1-\eta}{\eta \mathbf{Re}_i} (2\Delta_a V^n - \Delta_a V^{n-1}) \right] \text{ sur } \partial\mathcal{D} \end{array} \right. \quad (2-10)$$

La résolution de ce problème de Poisson fournit une pression préliminaire  $\tilde{p}^{n+1}$ . L'injection de ce champ de pression dans l'équation de quantité de mouvement (2.4) nous permet, via un nouveau problème de Poisson, de prédire un champ de vitesse préliminaire  $\tilde{V}^{n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3\tilde{V}^{n+1} - 4V^n + V^{n-1}}{2\delta t} + 2(\mathbf{grad}_a V \otimes V)^n - (\mathbf{grad}_a V \otimes V)^{n-1} = \\ - \mathbf{grad}_a \tilde{p}^{n+1} + \frac{1-\eta}{\eta \mathbf{Re}_i} \Delta_a \tilde{V}^{n+1} \text{ sur } \mathcal{D} \\ \tilde{V}^{n+1} = W^{n+1} \text{ sur } \partial\mathcal{D} \end{array} \right. \quad (2-12)$$

$\tilde{V}^{n+1}$  n'est pas *a priori* un champ à divergence nulle. Une étape de correction s'avère nécessaire pour obtenir un champ de vitesse  $V^{n+1}$  qui remplisse cette condition.

*Etape de projection-correction.*

Selon le théorème de décomposition de Helmholtz, tout champ vectoriel à l'intérieur d'un domaine est décomposable en une partie solénoïdale (de divergence nulle) et une partie irrotationnelle (de rotationnel nul). Cette décomposition est de surcroît unique si la composante normale du champ à la frontière du domaine est nulle. Le champ  $\tilde{V}^{n+1}$  est donc décomposable sous la forme :

$$\tilde{V}^{n+1} = \tilde{V}_S^{n+1} + \tilde{V}_I^{n+1}, \text{ avec } \text{div } \tilde{V}_S^{n+1} = 0, \text{ rot } \tilde{V}_I^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2-14)$$

$\tilde{V}_S^{n+1}$  étant de divergence nulle, il remplit la condition recherchée pour le champ corrigé et devient notre nouvelle inconnue : on pose donc  $\tilde{V}_S^{n+1} = V^{n+1}$ . Comme par (2-13) la condition

d'imperméabilité  $\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0$  est imposée aux bords du domaine, le théorème de Hemholtz assure l'unicité de  $\mathbf{V}^{n+1}$ .

$\tilde{\mathbf{V}}_I = \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1}$  étant de rotationnel nul, il existe un potentiel  $\Phi$  tel que  $\tilde{\mathbf{V}}_I^{n+1}$  dérive de  $\Phi$ . Le problème que l'on cherche à résoudre se ramène à :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = -\mathbf{grad}_a \Phi & (2-15) \\ \text{div}_a \mathbf{V}^{n+1} = 0 & (2-16) \end{cases}$$

La divergence de (2-15) couplée à une condition de Von Neumann sur  $\Phi$  conduit au système :

$$\begin{cases} \Delta_a \Phi = \text{div}_a \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \text{ sur } \mathcal{D} & (2-17) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{D} & (2-18) \end{cases}$$

Une fois  $\Phi$  obtenu, on déduit le champ  $\mathbf{V}^{n+1}$  par :

$$\mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{grad}_a \Phi \text{ sur } \overline{\mathcal{D}} \quad (2-19)$$

La reconstruction de  $\mathbf{V}^{n+1}$  par l'équation (2-19) s'étend sur l'intégralité du domaine, ce qui donne aux frontières :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{W}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{V}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_i - (\mathbf{grad}_a \Phi) \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{W}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_i - (\mathbf{grad}_a \Phi) \cdot \boldsymbol{\tau}_i, i \in \{1;2\} \end{cases} \text{ sur } \partial \mathcal{D} \quad (2-20)$$

où  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$  forme une base du plan tangent à la paroi. Par la condition de Von Neumann imposée sur  $\Phi$ ,  $\mathbf{V}^{n+1}$  satisfait la condition imposée  $\mathbf{W}^{n+1}$  dans la direction normale. Par contre, dans les directions tangentielles, une condition supplémentaire sur  $\Phi$  ou  $\mathbf{V}^{n+1}$  est impossible, car le système serait surcontraint; il en résulte une vitesse tangentielle parasite  $V_G$ : appelée *vitesse de glissement* :

$$\mathbf{V}_G = -(\mathbf{grad}_a \Phi)_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i \quad (2-21)$$

Raspo *et al.* [65] ont néanmoins constaté que le module de cette vitesse était de l'ordre de  $(\delta t)^3$ , soit un ordre inférieur au schéma temporel  $(\delta t)^2$

Une soustraction entre (2-8) et (2-12) donne :

$$\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = -\frac{2\delta t}{3} \mathbf{grad}_a (p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1}) + \frac{2\delta t}{3} \cdot \frac{1-\eta}{\eta \text{Re}_i} \Delta_a (\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^{n+1}) \text{ sur } \mathcal{D} \quad (2-22)$$

L'introduction du potentiel  $\Phi$  dans (2-22) permet d'obtenir  $p^{n+1}$  :

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{3}{2\delta t} \Phi - \frac{1-\eta}{\eta \text{Re}_i} \Delta_a \Phi \quad (2-23)$$

Raspo *et al*[65] ont montré que le terme  $\Delta_a \Phi$  dans (2-23) pouvait être négligé sans qu'il y ait modification notable de la précision sur le champ de pression. On peut donc se contenter, pour la correction du champ de pression, de :

$$p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} + \frac{3}{2\delta t} \Phi \quad (2-24)$$

Il est important de remarquer qu'au cours de toute cette procédure, le calcul de  $V^{n+1}$  ne fait jamais intervenir les valeurs du champ de pression obtenues aux pas de temps antérieurs ( $p^n, p^{n-1}, \dots$ ), puisque le champ de pression est prédit à chaque fois au moyen des champs de vitesse  $V^n, V^{n-1}, W^{n+1}$  (équations 2.4).

La condition (2-18) combinée à (2-23) donne :

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{p}^{n+1}}{\partial n} \text{ sur } \partial \mathcal{D} \quad (2-25)$$

De ce fait, la méthode autorise le gradient de pression normal aux parois à varier au cours du temps, contrairement au schéma classique de type Goda.

## 2.2.2 Traitement spatial.

Au cours de chacune des itérations temporelles correspondant au pas de temps  $n \delta t$ , les équations que nous venons de décrire doivent être résolues. De la même manière que nous avons estimé la dérivation en temps, les dérivées spatiales doivent être estimées à partir d'une discrétisation du domaine spatial.

### 2.2.2.1 Approximation des grandeurs physiques.

L'écoulement est entièrement décrit par le champ  $\Psi(X) = (V_r, V_\theta, V_z, p)(X)$ , où  $X = (r^*, \theta, z^*)$ . L'objectif de la méthode est de fournir une approximation  $\tilde{\Psi}_N$  de  $\Psi$  dans un espace généré par une base de fonctions connues  $(F_j)_{0 \leq j \leq N}$ . Trouver l'approximation de  $\Psi$  revient donc à déterminer les composantes  $(a_j)_{0 \leq j \leq N}$  de  $\tilde{\Psi}_N$  dans cette base :

$$\tilde{\Psi}_N(X) = \sum_{j=0}^N a_j F_j(X) \quad (2-26)$$

Ces fonctions de base  $(F_j)_{0 \leq j \leq N}$  sont définies par les polynômes de Chebyshev dans les directions non périodiques  $r, z$ , et par des polynômes trigonométriques de Fourier dans la direction périodique azimutale. Le choix des polynômes de Chebyshev est principalement motivé par l'utilisation d'algorithmes *Fast Fourier Transform* optimisés sur le calculateur utilisé pour les simulations.

*Dans l'espace de Fourier.* La périodicité azimutale du problème implique la  $2\pi$ -périodicité de  $\Psi$ . Comme l'on considère ici des phénomènes physiques suffisamment réguliers (continuité et dérivabilité des grandeurs physiques en tout point du domaine),  $\Psi$  est développable sous la forme d'une série de Fourier dans la direction  $\theta$ . Une approximation  $\tilde{\Psi}_{N_\theta}$  de  $\Psi$  dans cette direction revient tout simplement à tronquer le développement de Fourier à l'ordre  $N_\theta$  :

$$\tilde{\Psi}_{N_\theta}(X) = \sum_{k=-\frac{N_\theta}{2}}^{\frac{N_\theta-1}{2}} \hat{\Psi}_k(r, z) e^{ik\theta} \quad (2-27)$$

Dans l'espace des polynômes de Chebyshev. Soit  $F$  une fonction  $C^\infty$  de  $x$ , et  $\mathcal{P}_N(x)$  le sous-espace engendré par une famille de polynômes de  $x$  de degré inférieur ou égal à  $N$ .  $F$  peut être approchée par une approximation polynomiale  $\Xi_N \in \mathcal{P}_N(x)$ , et l'on montre que si  $F$  est  $C^\infty$  l'erreur  $E(N)$  définie par :

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - \Xi_N(x)| dx \quad (2-28)$$

converge exponentiellement vers 0 en fonction de  $N$ . On peut donc en théorie rendre la distance entre  $F$  et son approximation polynomiale dans l'espace des fonctions  $C^\infty$  de  $x$  aussi petite que l'on veut, pour peu que  $N$  soit suffisamment élevé. En pratique, la précision d'une telle approximation sur une machine de calcul est tributaire des erreurs d'arrondis et de troncature de la machine, et il existe un degré  $N_m \neq +\infty$  au-delà duquel ces erreurs prendront le pas sur la précision théorique.  $E$  est donc minimale pour  $N_m$ , et le polynôme  $\Xi_{N_m}$  est appelé « meilleure approximation de  $F$  ». La théorie mathématique montre que l'erreur commise par cette meilleure approximation tend vers 0 avec une rapidité plus ou moins grande suivant la régularité de  $F$ .

Sur  $[-1 ; 1]$ , les polynômes de Chebyshev sont définis par :

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)), x \in [-1; 1], \text{ avec } j \text{ entier naturel.}$$

En utilisant les propriétés de développement en cosinus, on peut montrer que  $T_j(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré  $j$ . L'approximation d'une fonction  $F$  dans l'espace de Chebyshev peut donc s'écrire :

$$\Xi_N(x) = \sum_{j=0}^N \xi_j T_j(x) \quad (2-29)$$

Si l'on applique maintenant aux coefficients  $\hat{\Psi}_k(r, z)$  figurant dans (2.21) une décomposition de Chebyshev d'ordre  $N_r$  dans la direction radiale, et d'ordre  $N_z$  dans la direction axiale, on peut écrire :

$$\hat{\Psi}_k(r, z) = \sum_{n=0}^{N_r} \sum_{m=0}^{N_z} \tilde{\psi}_{nmk} T_n(r) T_m(z) \quad (2-30)$$

et mettre l'approximation de  $\Psi$  sous la forme :

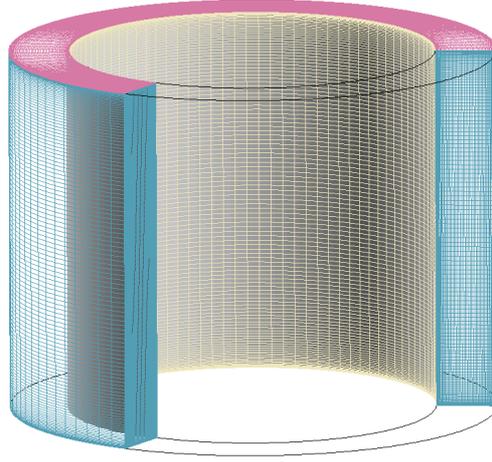
$$\tilde{\Psi}_N(r, z, \theta) = \sum_{k=-\frac{N_\theta}{2}}^{\frac{N_\theta-1}{2}} \sum_{n=0}^{N_r} \sum_{m=0}^{N_z} \tilde{\psi}_{nmk} T_n(r) T_m(z) e^{ik\theta} \quad (2-31)$$

Où  $N = (N_r, N_\theta, N_z)$ . Cette décomposition sera calculée selon la méthode exposée au 2.2.2.2 en chaque point d'un maillage illustré par la Fig. 2-3 dans le cas  $(N_r, N_\theta, N_z) = (61, 96, 121)$ . Le domaine cylindrique est découpé en  $N_\theta$  plans méridiens équidistants, définis par leur azimut  $\theta_q$  tel que :

$$\theta_q = \frac{2\pi q}{N_\theta}, -\frac{N_\theta}{2} \leq q \leq \frac{N_\theta}{2} - 1 \quad (2-32)$$

Dans chacun de ces plans, la direction radiale et la direction axiale sont segmentées par les points de Gauss-Lobatto, extrema des polynômes de Chebyshev de degré  $N_r$  et  $N_z$ , définis par :

$$\begin{cases} r_\alpha = \cos \frac{\alpha\pi}{N_r}, 0 \leq \alpha \leq N_r - 1 \\ z_\beta = \cos \frac{\beta\pi}{N_z}, 0 \leq \beta \leq N_z - 1 \end{cases} \quad (2-33)$$



**Fig. 2-3** – Matérialisation tridimensionnelle du maillage  $(N_r, N_\theta, N_z) = (61, 96, 121)$ , pour la configuration géométrique  $\eta = 0.75, \Gamma = 6$ .

### 2.2.2.2 Méthode pseudo-spectrale

L'injection de l'approximation (2-31) dans les équations (2-10) et (2-12) conduit à résoudre, à chaque étape en temps, des équations de type elliptique pouvant se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta_a \Psi_N(X) + \lambda \Psi_N(X) = S(X) \text{ sur } \mathcal{D} \\ B \Psi_N(X) = g(X) \text{ sur } \partial \mathcal{D} \end{cases} \quad (2-34)$$

avec  $\lambda = \text{diag} \left( \frac{3}{2\delta t} \cdot \frac{\eta \text{Re}_i}{1-\eta}, \frac{3}{2\delta t} \cdot \frac{\eta \text{Re}_i}{1-\eta}, \frac{3}{2\delta t} \cdot \frac{\eta \text{Re}_i}{1-\eta}, 0 \right)$  matrice diagonale  $4 \times 4$ .  $S(X)$  et  $g(X)$  constituent les termes sources.

On définit le résidu de (2-34) par

$$R_N(X) = \Delta_a \Psi_N(X) + \lambda \Psi_N(X) - S(X) \quad (2-35)$$

La méthode des résidus pondérés consiste à considérer le produit scalaire de  $R_N$  avec une base de fonctions-tests  $(\Lambda_i)_{0 \leq i \leq N}$ , et imposer que la mesure de ce produit soit nulle, pour une mesure  $m$  préalablement définie, ce qui se traduit formellement par :

$$\int_D R_N(X) \bar{\Lambda}_i(X) m(X) dX = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$$

où  $\bar{\Lambda}_i$  désigne le conjugué de  $\Lambda_i$ .

*Première étape : méthode spectrale Fourier-Galerkin.*

Dans une méthode de type Galerkin, les fonctions-tests sont les mêmes que les fonctions de base sur lesquelles les champs sont décomposés. Comme on utilise une décomposition de Fourier dans la direction azimutale, on applique la méthode des résidus pondérés avec pour  $\Lambda_i$  les fonctions exponentielles  $X \rightarrow (e^{ikX})$ ,  $-N_\theta/2 \leq k \leq N_\theta/2-1$ , et  $m(X) = 1$ . Cela revient à transporter dans l'espace de Fourier l'équation  $R_N(X) = 0$ . On obtient :

$$\Delta_{rz} \hat{\Psi}_k(r, z) - \sigma_k(r) \hat{\Psi}_k(r, z) = \hat{S}_k(r, z), \quad -\frac{N_\theta}{2} \leq k \leq \frac{N_\theta}{2} \quad (2-36)$$

avec  $\hat{\Psi}_k(r, z)$  défini en (2.22),

$$\Delta_{rz} = 4\eta^2 \left[ \frac{1}{(1-\eta)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{(1-\eta)[(1-\eta)r+1+\eta]} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma^2(1-\eta)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathbf{I},$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité,

$$\sigma_k(r) = \left( \frac{k^2 + 1}{[(1-\eta)r+1+\eta]^2} + \lambda, \frac{k^2 + 1}{[(1-\eta)r+1+\eta]^2} + \lambda, \frac{k^2}{[(1-\eta)r+1+\eta]^2} + \lambda, \frac{k^2}{[(1-\eta)r+1+\eta]^2} + \lambda \right)$$

Cette étape revient à résoudre dans l'espace de Fourier une équation d'Helmholtz dans un plan correspondant au mode  $k$ . On notera que  $\sigma_k(r)$  est une fonction paire de  $k$  :  $\sigma_k(r) = \sigma_{-k}(r)$ . La résolution du système ne nécessite le traitement que de  $N_\theta/2$  équations au lieu de  $N_\theta$ .

*Deuxième étape : méthode de collocation-Chebyshev.*

L'étape suivante consiste à appliquer une nouvelle procédure de résidus pondérés à l'équation (2-36).

On construit le résidu de l'équation (2-36). La méthode de collocation consiste à appliquer à ce nouveau résidu une méthode de résidu pondéré en choisissant comme  $\Lambda_i$  des fonctions de Dirac centrées sur les points de Gauss-Lobatto. On obtient :

$$R(r_\alpha, z_\beta) = \Delta_{rz} \hat{\Psi}_k(r_\alpha, z_\beta) - \sigma_k(r_\alpha) \hat{\Psi}_k(r_\alpha, z_\beta) - \hat{S}_k(r_\alpha, z_\beta) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \{1, \dots, N_r\} \times \{1, \dots, N_z\} \quad (2-37)$$

Cette procédure revient à annuler le résidu sur les points de Gauss-Lobatto.

*Mise en œuvre pratique*

L'introduction de la définition des points de Gauss-Lobatto (2-23) dans la décomposition (2-31) donne :

$$\tilde{\Psi}_N(r_\alpha, z_\beta, \theta_q) = \sum_{k=-\frac{N_\theta}{2}}^{\frac{N_\theta}{2}-1} \sum_{n=0}^{N_r} \sum_{m=0}^{N_z} \tilde{\psi}_{nmk} \cos\left(\frac{\alpha n \pi}{N_r}\right) \cos\left(\frac{\beta m \pi}{N_z}\right) e^{ik\theta_q} \quad (2-38)$$

La solution peut donc se décomposer en un développement en série de Fourier en cosinus dans les directions radiale et axiale et en série de Fourier classique dans la direction azimutale. Par conséquent, des algorithmes performants de type FFT (*Fast Fourier Transform*) pourront être utilisés afin de basculer de l'espace physique à l'espace spectral pour chacune des directions.

Selon l'étape de calcul concernée, le terme source  $S(X)$  de l'équation (2-34) contient des termes non-linéaires  $'V \otimes \text{grad}V$  impliquant des variables données de manière explicite : en effet, ces variables sont toutes prises à l'étape de temps  $n$  ou  $n-1$ . Les gradients sont calculés dans l'espace spectral à partir de leurs transformées de Fourier. L'opération  $\otimes$  est quant à elle réalisée dans l'espace physique. C'est cette combinaison alternant les calculs entre espace physique et espace spectral qui donne le nom de « pseudo-spectral » à la méthode (Peyret [59]).

Une fois  $S(X)$  constitué, on calcule  $\hat{S}_k$ , c'est-à-dire la transformée de Fourier dans la direction azimutale. Le traitement de l'opérateur laplacien est plus délicat. Comme il s'applique au vecteur-champ  $\Psi$  implicite, les dérivées spatiales ne peuvent être calculées directement dans l'espace spectral. L'opérateur sera calculé dans l'espace physique, il reste invariant par la transformée de Fourier en azimuth puisqu'il ne concerne que les directions radiales et axiales.

Formellement, le système (2-37) s'écrit  $A\Psi + \Psi B = S$ , où A et B sont les matrices des opérateurs de dérivations dans les directions radiale et axiale respectivement. Le système linéaire est résolu au moyen d'une diagonalisation complète des matrices A et B. Une fois les  $\tilde{\Psi}_{nmk}$  obtenus,  $\hat{\Psi}_k(r, z)$  est calculé via (2-30) sur les doublets  $(r_i, z_j)$ , et le champ physique est reconstitué sur les triplets  $(r_i, \theta_q, z_j)$ , par transformée de Fourier inverse de (2-27). Les détails de l'algorithme et des matrices A et B peuvent être consultés dans Raspo [64].

## 2.3 Mise en œuvre du code de calcul.

Les détails numériques concernant les maillages et les pas de temps pour chacune des simulations présentées dans ce rapport sont reportées dans cette section. D'autre part, afin de confirmer la capacité de la méthode numérique à appréhender un écoulement de type Taylor-Couette, quelques calculs préliminaires ont été menés dans les gammes de paramètres des expériences bien documentées de Wereley & Lueptow [86], et Sobolik *et al.* [76]. L'accord obtenu entre simulation numérique et expérience est très satisfaisant.

### 2.3.1 Détails numériques.

Le Tableau 2-2 contient les détails numériques de chacun des cas considérés dans ce rapport.

Configurations	$N_r$	$N_\theta$	$N_z$	$\delta t (= \Omega_i \delta t^*)$
Simulations de validation 2D (Chapitre 2)				
Wereley & Lueptow [87] $\Gamma = 47.7, \eta = 0.83$	33	-	301– 401	$5.10^{-2}$
Sobolik <i>et al</i> [76] $\Gamma = 9.85, \eta = 0.909$	61	-	121	$2.10^{-2}$
Investigations rotor-stator 2D / 3D (Chapitre 3)				
2D $\Gamma = 6, \eta = 0.75$	61	-	121	$1.10^{-2}$
3D Rotor-stator $\Gamma = 6, \eta = 0.75$	61	96	121	$5.10^{-3}$ à $10^{-2}$
Simulations contrarotatives 3D (Chapitre 4)				
WVF	61	120	121	$10^{-3}$ à $2.10^{-3}$
IPS	61	96 - 150	121	$5.10^{-3}$ à $6.10^{-3}$
WIS	61	150	121	$4.10^{-3}$ à $6.10^{-3}$

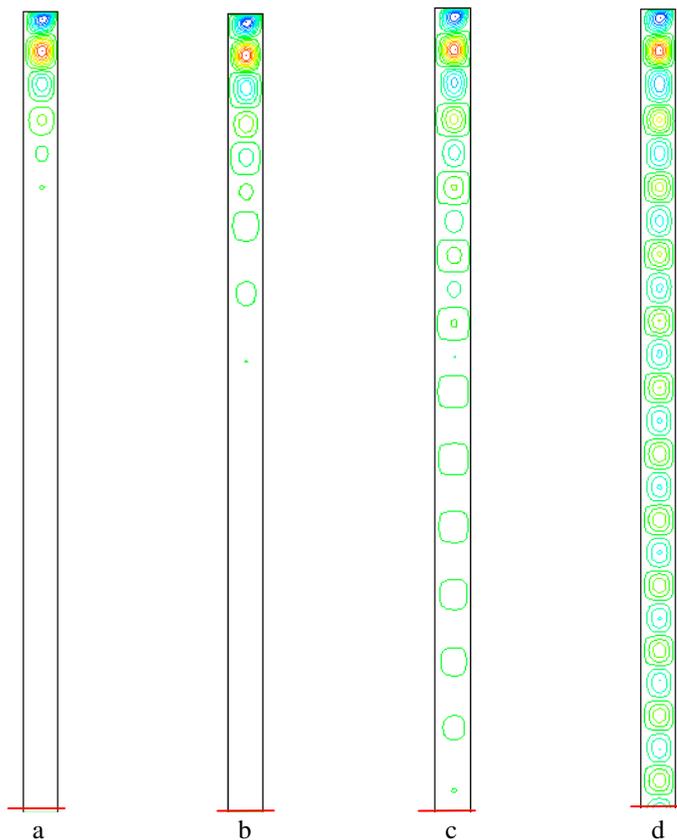
Tableau 2-2 – Maillages et pas de temps pour chacune des configurations.

### 2.3.2 Expérience de Wereley et Lueptow

Le système utilisé par Wereley & Lueptow est une configuration rotor-statot  $R_i-S_o$ , avec parois terminales fixes. La cavité est caractérisée par les paramètres géométriques  $\Gamma = 47.7$  et  $\eta = 0.83$ . L'analyse de stabilité linéaire indique que pour des cylindres de longueur infinie, le Reynolds critique de transition entre l'écoulement de Couette et les structures de Taylor se produit à  $Re_{i,crit}^s = 102$ . Le rapport d'aspect est ici suffisamment long pour que les effets de bord dus au pompage de couche limite soient négligeables dans la zone centrale de la cavité. Ceci permet d'observer assez précisément le Reynolds critique de transition.

Partant de l'écoulement au repos, nous avons progressivement augmenté la rotation du cylindre interne. Après convergence du calcul, pour  $Re_i = 98.77$  ( $\varepsilon = Re_i / Re_{i,crit} = 0.97$ ), les vortex marginaux dus au pompage de la couche limite sont visibles près des bords, et l'intensité des tourbillons secondaires décroît exponentiellement avec la distance à la paroi, pour devenir indétectable au centre (Fig. 2-4) Juste après le seuil de transition ( $Re_i = 103$ , soit  $\varepsilon = 1.01$ ), les rouleaux sont présents dans toute la cavité. Le code renvoie donc un seuil de transition en très bon accord avec le seuil théorique.

On dénombre dans l'écoulement simulé en régime supercritique 24 paires de rouleaux, ce qui est conforme aux observations expérimentales.



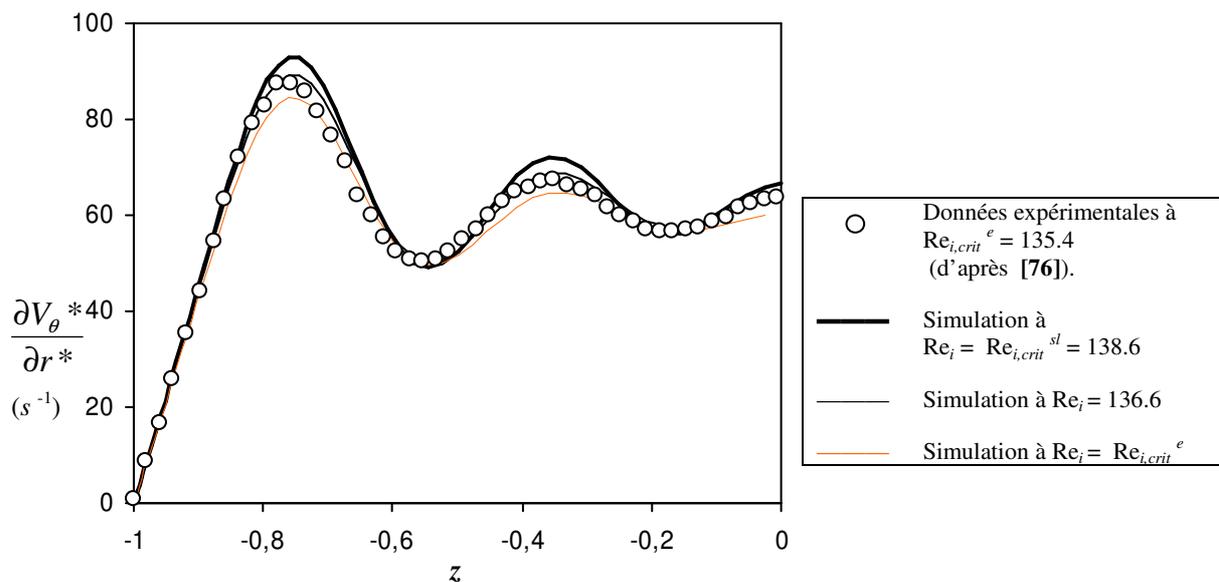
**Fig. 2-4** – Simulation numérique 2D dans la configuration expérimentale de Wereley & Lueptow [87] :  $\Gamma = 47.7$ ,  $\eta = 0.83$ . Iso-contours de  $V_r$  dans le plan méridien ( $r, z$ ) : a)  $Re_i = 98.77$  ( $\varepsilon = 0.97$ ) ; b)  $Re_i = 101$  ( $\varepsilon = 0.99$ ) ; c)  $Re_i = 102$  ( $\varepsilon = 1.00$ ) ; d)  $Re_i = 103$  ( $\varepsilon = 1.01$ ). Le trait rouge en bas de chacune des figures matérialise le plan  $z = 0$ .

### 2.3.3 Expérience de Sobolik *et al.*

Afin de mettre en évidence la capacité du code numérique à appréhender de manière précise les effets de bord, nous avons effectué une analyse comparative avec l'expérience de Sobolik *et al.* [76] qui est une des rares études à fournir des données quantitatives concernant l'interaction du tourbillon d'Ekman et l'instabilité de Taylor-Couette. L'étude de Sobolik *et al* porte sur un système  $R_i$ - $S_o$  (cylindre interne en rotor et cylindre externe en stator) munis de disques terminaux fixes ( $\Omega_D = 0$ ). La géométrie est caractérisée par  $\Gamma = 9.85$  et  $\eta = 0.909$ . A proximité du seuil de transition entre l'écoulement de Couette et l'écoulement de Taylor, les auteurs ont mesuré les gradients normaux de vitesse sur le cylindre externe, au moyen d'une sonde par électrodiffusion à trois éléments. Nous considérons ici les mesures que les auteurs ont réalisées sur le gradient normal de la composante azimutale de la vitesse, pour une solution aqueuse d'Emkarox de masse volumique  $\rho = 1050 \text{ kg.m}^{-3}$  et de viscosité cinématique  $\mu = 0.048 \text{ Pa.s}$ .

Pour ces conditions, Sobolik *et al* évalue un Reynolds critique expérimental à  $\text{Re}_{i,crit}^e = 135.4$ . Une première simulation a été réalisée sous l'hypothèse d'axisymétrie ( $N_r = 61$ ,  $N_z = 121$ ) pour cette même valeur du nombre de Reynolds. Le profil axial du gradient de  $V_\theta$  est représenté en Fig. 2-5, sur la mi-hauteur.

L'accord entre courbe expérimentale et courbe obtenue par numérique est bon, même si l'on peut constater que les données numériques présentent au niveau des extrema un écart négatif allant jusqu'à -3.6% par rapport aux données de l'expérience. Une nouvelle simulation, réalisée en augmentant le nombre de Reynolds de 0.9% (soit  $\text{Re}_i = 136.6$ ) permet d'obtenir une superposition quasi-parfaite entre les deux courbes.



**Fig. 2-5** - Gradient radial de la vitesse azimutale, mesuré sur la paroi cylindrique externe, pour la configuration de Sobolik et al [59]. Comparaison expérimental / numérique. La coordonnée axiale est adimensionnée par la demi-hauteur de la cavité  $h$ .

Les écarts observés peuvent être liés à plusieurs causes : tout d'abord, il est difficile d'assurer une précision

(VOIR PHYS of FLUIDS)

Par ailleurs, le rapport d'aspect étant relativement petit, les effets de bord jouent un rôle prépondérant, et le concept même de bifurcation n'est plus applicable : comme nous le verrons dans le Chapitre 3, on observe en fait dans les géométries confinées une transition continue depuis l'état au repos jusqu'à

l'écoulement de Taylor. Dans ces conditions, il est difficile de déterminer avec précision le seuil de transition au voisinage du point critique.

### 2.3.4 Plateforme de calcul



**Fig. 2-6** – Le supercalculateur Uqbar NEC SX-5 (photo IDRIS).

Les simulations ont été menées sur le supercalculateur NEC SX-5 (Fig. 2-6) hébergé à l'IDRIS<sup>1</sup>, centre de calcul du CNRS. Le NEC est une machine de calcul vectorielle disposant de 40 processeurs, chacun pouvant atteindre la puissance-crête de 8 Gflops.

Le code, optimisé pour ce type de calculateur, nous permet d'obtenir des temps de calcul CPU par itération et degré de liberté de l'ordre de  $10^{-6}$  s. Cette donnée est importante dans l'objectif de réaliser des simulations tridimensionnelles instationnaires.

---

<sup>1</sup> Institut du Développement des Ressources en Informatique Scientifique, Orsay (région parisienne).

## Chapitre 3

# Configuration rotor-stator : régimes TVF et WVF, et effet du confinement.

L'influence du confinement dans une cavité de Taylor-Couette a pu être mise en évidence par la variation du rapport d'aspect  $\Gamma$ . Par exemple, on a pu observer un décalage des seuils de transition en diminuant  $\Gamma$  (Cole [21]). Un aspect important lié au confinement est l'interaction qui existe entre la couche limite des disques marginaux et l'instabilité centrifuge de Taylor. Ce problème a d'ailleurs été fréquemment rapporté dans la littérature, mais il a rarement fait l'objet d'une étude spécifique. Comme nous le détaillons au Chapitre 1, les travaux les plus remarquables sur ce sujet incluent les études des vortex anormaux et des phénomènes de bifurcation par Benjamin, Mullin et associés (Cliffe *et al* [19], Benjamin[10][11], Benjamin & Mullin [12], Mullin [54], Mullin & Benjamin [55] Mullin & Blohm [56], Tavener *et al* [81], Pfister *et al* [61]); ces études ont été envisagées surtout du point de vue théorique, au détriment de l'aspect quantitatif. D'autres travaux se sont concentrés sur le régime transitoire lié à la propagation des vortex secondaires, depuis les disques vers le centre du système (Ahlers & Cannell [1], Lücke *et al* [50]).

De manière complémentaire aux travaux que nous venons de citer, nous nous proposons de réaliser dans ce chapitre une étude systématique de l'influence des disques marginaux sur la dynamique de l'écoulement. Nous avons procédé à une analyse quantitative basée sur les différents types de conditions limites appliquées aux parois terminales. Notre attention s'est portée en particulier sur la structure du champ de vitesse au voisinage des disques ainsi que sur le processus de bifurcation.

### 3.1 Ecoulement de couche limite d'Ekman dans une cavité Taylor-Couette rotor-stator.

Dans le cas d'un disque de rayon infini tournant à  $\Omega_D$  et surmonté d'un fluide en rotation à  $\Omega_f$ , les équations de Navier-Stokes peuvent se ramener à un système d'équations ordinaire décrivant l'écoulement de couche limite qui se développe au-dessus du disque (Karman [45], Batchelor [9]). Dans certains cas asymptotiques, des solutions exactes existent, comme par exemple pour  $\Omega_f \approx \Omega_D$  (Ekman [30]). Selon les valeurs respectives de  $\Omega_D$  et  $\Omega_f$ , on distingue différents types de couches limites. Dans le cas de disques d'extension radiale finie, la présence de parois modifie profondément l'écoulement, décrit de manière quasi analytique dans le cas infini. Néanmoins dans ce chapitre, on appellera de manière générique et indifférenciée « couche limite d'Ekman » la couche limite qui se développe près de la paroi terminale d'une cavité Taylor-Couette rotor-stator, que celle-ci soit tournante (attachée au rotor) ou fixe (attachée au stator).

Pour un système de Taylor-Couette rotor-stator on peut prédire intuitivement le sens de l'écoulement radial dans la couche limite du disque. Si le disque est tournant, la force centrifuge engendre un mouvement vers l'extérieur. En revanche, si le disque est immobile (c'est-à-dire fixé au cylindre externe), la force centrifuge devient négligeable, et il ne subsiste que le gradient de pression, lequel induit un mouvement centripète, orienté vers l'intérieur.

Dans cette partie, on se propose d'utiliser l'approche asymptotique développée par Ekman en prenant en compte la spécificité de notre écoulement à travers le gradient de pression géostrophique. Notre propos n'est pas de fournir une solution analytique, mais plutôt d'adapter les solutions asymptotiques d'Ekman, Bödewadt et Von Karman pour évaluer les transports opérés par la rotation des parois terminales. On peut essayer d'approcher la situation d'un point de vue plus quantitatif, en considérant le bilan des forces qui s'exercent sur un volume de contrôle élémentaire  $dr^* \times d\theta \times dz^*$ , ou encore (ce qui revient au même) en projetant l'équation de la quantité de mouvement (2-2) sur l'axe  $(O, \mathbf{e}_{r^*})$ . On suppose ici que l'écoulement est stationnaire et axisymétrique, donc indépendant du temps et de  $\theta$ . Dans ces conditions:

$$F^* = F_p^* + F_v^* \quad (3-1)$$

avec :

$$F^* = (\text{div } \boldsymbol{\tau}^*) \cdot \mathbf{e}_{r^*} \quad (3-2)$$

$$F_v^* = (\mathbf{grad} V^* \otimes V^*) \cdot \mathbf{e}_{r^*} = V_r^* \cdot \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} + V_z^* \cdot \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \quad (3-3)$$

$$F_p^* = \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \quad (3-4)$$

$F_v^*$  est la composante radiale de la force visqueuse.

Si l'on néglige les effets de bord dus aux parois cylindriques en  $r^* = r_i^*$  et  $r^* = r_o^*$ , on peut appliquer les hypothèses classiques de couche limite (Owens & Rogers [58]). Ainsi, près de la paroi :

- $V_z^*$  est négligeable par rapport à  $V_r^*$  et  $V_\theta^*$ .
- la dérivée radiale de toute quantité autre que la pression est négligeable par rapport à sa dérivée axiale.
- la pression ne dépend que de  $r^*$ .

Il s'ensuit qu'à  $r^*$  fixé, la pression dans la couche limite est la même que la pression dans la zone géostrophique de l'écoulement :

$$p^*(r^*) \approx p_{\text{géostrophique}}^*(r^*)$$

Le gradient de pression près du disque s'écrit alors :

$$F_p^* \approx F_{p,approx}^* = \left. \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right|_{\text{géostrophique}} = \rho r^* \Omega_c^2(r^*) \quad (3-5)$$

où  $\Omega_c$  est la distribution de vitesse angulaire du profil de Couette donnée par l'équation (1-3) (Chapitre 1). Regardons à présent le terme convectif (3-3) : à proximité d'un disque tournant, la contribution majeure de la convection est apportée par  $V_\theta^*$ , à peu près égale à la vitesse de la paroi ( $\Omega_D r^*$ ); on peut négliger les termes en  $V_r^*$  et  $V_z^*$ .

Par conséquent :

$$F_v^* = F_{v,approx}^* \approx -\rho \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} \approx -\rho r^* \Omega_D^2 \quad (3-6)$$

avec  $\Omega_D \neq 0$  si le disque est mobile, et  $\Omega_D = 0$  si le disque est fixe.

Toutes ces considérations permettent de simplifier l'équation (3-1) que l'on peut finalement mettre sous la forme :

$$F^* \approx F_{approx}^* = \left. \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right|_{\text{géostrophique}} - \rho \Omega_D^2 r^* \quad (3-7)$$

Le membre de droite de l'équation (3-7) représente les forces motrices de l'écoulement - force centrifuge et gradient de pression. Le membre de gauche quant à lui, est un terme traduisant la dissipation visqueuse, qui entraîne une perte de quantité de mouvement pour la particule.

Le sens de rotation des tourbillons d'Ekman est donc déterminé par le différentiel entre force centrifuge et gradient de pression. Lorsque la force centrifuge est supérieure au gradient de pression (résultante visqueuse négative), l'écoulement de couche limite est centrifuge (centripète dans le cas contraire).

Par effet visqueux, les tourbillons marginaux génèrent dans toute la cavité des tourbillons secondaires de faible intensité qui détermineront au-delà du seuil critique le sens de rotation des tourbillons de Taylor. Par conséquent, le sens de rotation des tourbillons de Taylor dépend directement de la balance entre force centrifuge et gradient de pression en zone de proche paroi. Il faut noter cependant que de par le caractère non linéaire de l'écoulement, des modes « anormaux » peuvent exister, pour lesquels les tourbillons marginaux tournent dans un sens opposé à celui induit *a priori* par l'écoulement de couche limite (Benjamin [10]).

## 3.2 Tourbillons d'Ekman et transition vers le TVF en configuration rotor-stator.

Dans la littérature (Sobolik *et al.* [76], Cole [21]), l'influence des parois terminales sur les paramètres caractéristiques des différents régimes d'instabilité apparaît de façon sensible pour des valeurs du rapport d'aspect inférieures à 10. Dans ce paragraphe, on considère une cavité de rapport d'aspect  $\Gamma = 6$ , de rapport de rayon  $\eta = 0.75$ , et différents types de conditions limites aux parois terminales (§ 2.1.2.2). Le scénario de transition vers le TVF est étudié dans ces différentes configurations.

Pour un rapport de rayon  $\eta = 0.75$ , et dans le cas de cylindres de longueur infinie, la transition théorique entre l'écoulement de Couette et le TVF se produit lorsque le nombre de Reynolds  $Re_i$  atteint la valeur critique  $Re_{i,crit} = 85.8$  (Di Prima *et al.* [66]). Nous choisissons par la suite d'adimensionner les vitesses par rapport à  $\Omega_{i,crit} r_i^*$  (vitesse azimutale de la surface du cylindre interne lorsque  $Re_i = Re_{i,crit}$ ). On comparera également les nombres de Reynolds au nombre critique théorique  $Re_{i,crit}$  au moyen du paramètre  $\varepsilon$  défini par  $\varepsilon = Re_i / Re_{i,crit}$ . On pourra constater que la bifurcation fourche en cavité de petit rapport d'aspect n'est pas applicable si les parois terminales sont des parois solides, puisqu'on observe une transition continue depuis l'état au repos jusqu'à celui d'une cavité entièrement occupée par les vortex. A l'opposé, dans le cas de parois terminales sans frottements (surfaces libres), on retrouve un comportement de bifurcation, avec une transition se produisant pour  $Re_i$  très proche de  $Re_{i,crit}$ .

### 3.2.1 Temps caractéristiques d'établissement des solutions.

On se propose de mesurer les temps d'établissement des solutions pour les différents types de conditions-limites. On choisit comme référence l'échelle de temps que met la quantité de mouvement azimutale pour diffuser à travers l'espace intercylindre de largeur  $d$ . Ce temps caractéristique est donné par (Lücke *et al.* [50]) :

$$\mathcal{T}_r = \frac{d^2}{2\pi \nu} \quad (3-8)$$

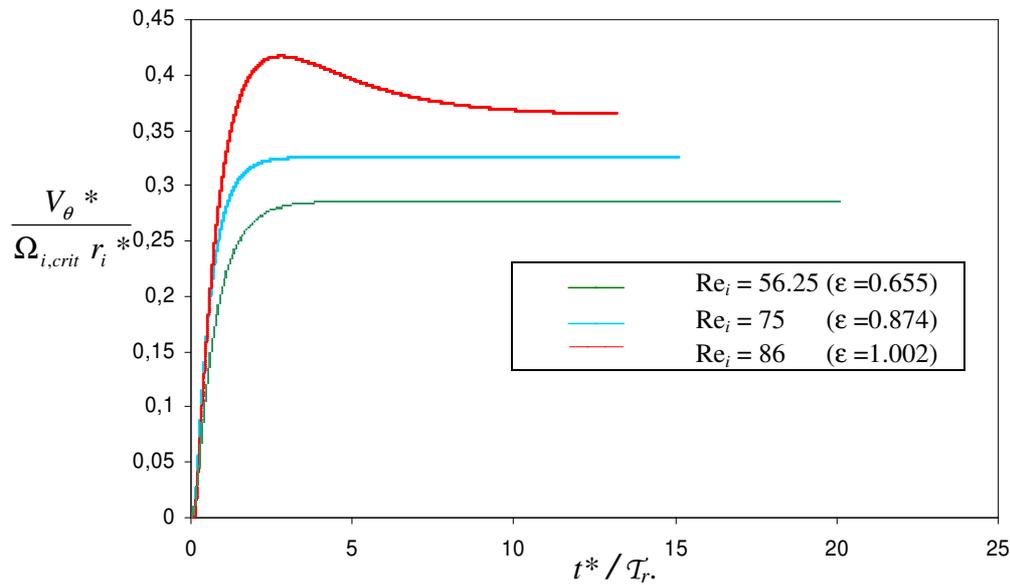
Nous avons réalisé dans un premier temps une série de simulations en utilisant la condition limite  $\Omega_D = \Omega_i$ , par une procédure de « *sudden start* » (Burkhalter & Koschmieder [15], et Lücke *et al.* [50]) : on part d'un état au repos, et on impose subitement au rotor une vitesse angulaire déterminée. L'évolution temporelle de la vitesse est mesurée au centre de la cavité, à mi-distance de chacune des parois cylindriques ( $r^* = r_i^* + d/2$ ).

Les simulations sont tout d'abord effectuées pour deux nombres de Reynolds inférieurs à  $Re_{i, crit}$ ,  $Re_i = 56.25$  ( $\varepsilon = 0.655$ ) et  $Re_i = 75$  ( $\varepsilon = 0.874$ ). Dans le cas de cylindres infinis, l'écoulement à ces nombres de Reynolds est de type Couette azimutal : nous avons donc mesuré l'évolution au cours de temps de la vitesse azimutale  $V_\theta$ . Les courbes obtenues sont données sur la Fig. 3-1, où le temps est adimensionné par rapport à  $\mathcal{T}_r$ . L'établissement est obtenu au bout d'un temps de l'ordre de 3 à 4  $\mathcal{T}_r$ , ce qui est en très bon accord avec les valeurs de 4 – 5  $\mathcal{T}_r$  obtenus par Lücke *et al.* [43] pour une cavité  $\eta = 0.893$  et  $\Gamma = 25$ .

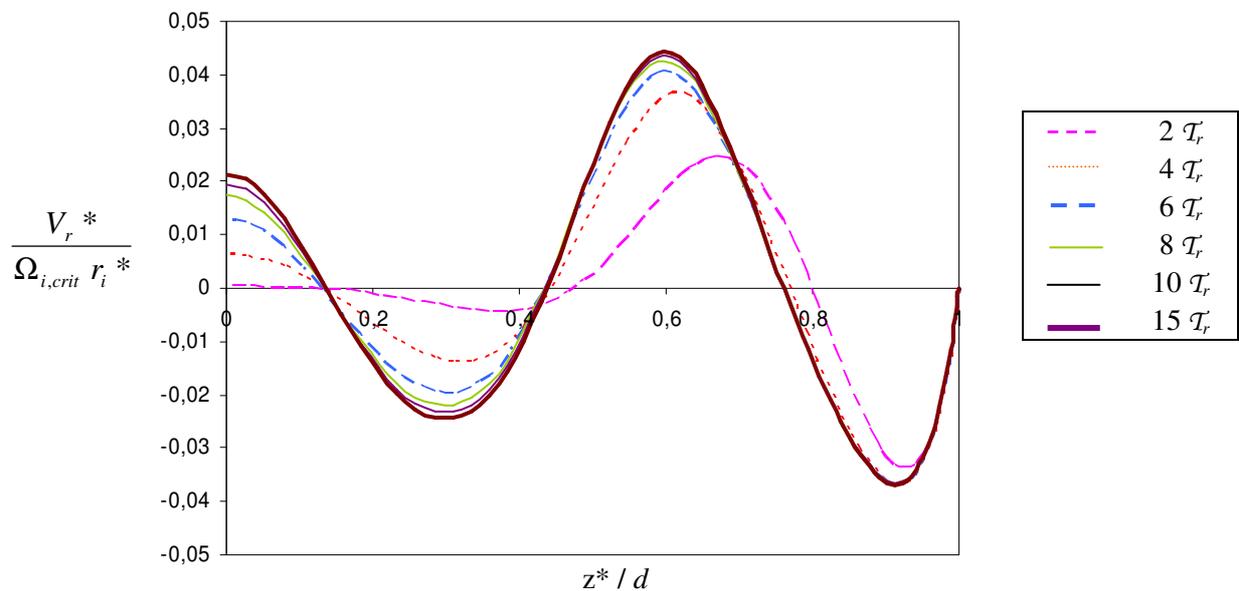
Pour  $Re_i$  supérieur à  $Re_{i, crit}$  ( $Re_i = 86$ , soit  $\varepsilon = 1.002$ ), le temps de convergence augmente considérablement jusqu'à environ 15  $\mathcal{T}_r$  (Fig. 3-1). Cette augmentation est liée à la propagation vers le centre de la cavité des vortex secondaires dus aux tourbillons d'Ekman, comme le montre la Fig. 3-2. En effet, au bout d'un temps de 4  $\mathcal{T}_r$ , on note la présence d'un vortex secondaire au centre de la cavité, dont l'intensité se stabilise aux environs de 10  $\mathcal{T}_r$ . En l'absence de tourbillons secondaires « détectables » ( $\varepsilon \ll 1$ ), le temps de convergence correspond simplement au temps de diffusion de la quantité de mouvement depuis le cylindre interne jusqu'au cylindre externe. Ceci explique un temps d'établissement très rapide vers l'écoulement de type Couette azimutal.

On regarde à présent l'influence de la condition limite sur le temps de convergence pour  $\varepsilon = 1.002$  ( $Re_i = 86$ ). Cet écoulement étant caractérisé par la présence de vortex dans le plan méridien (l'écoulement n'est alors plus de type Couette azimutal, mais de type Taylor axisymétrique stationnaire), la composante radiale de la vitesse  $V_r^*$  est utilisée comme variable caractéristique pour la mesure. La Fig. 3-3 montre l'historique de la vitesse radiale pour un démarrage instantané à partir d'un état au repos. Il n'y a pas d'influence perceptible de la condition limite sur le temps d'établissement (Fig. 3-3).

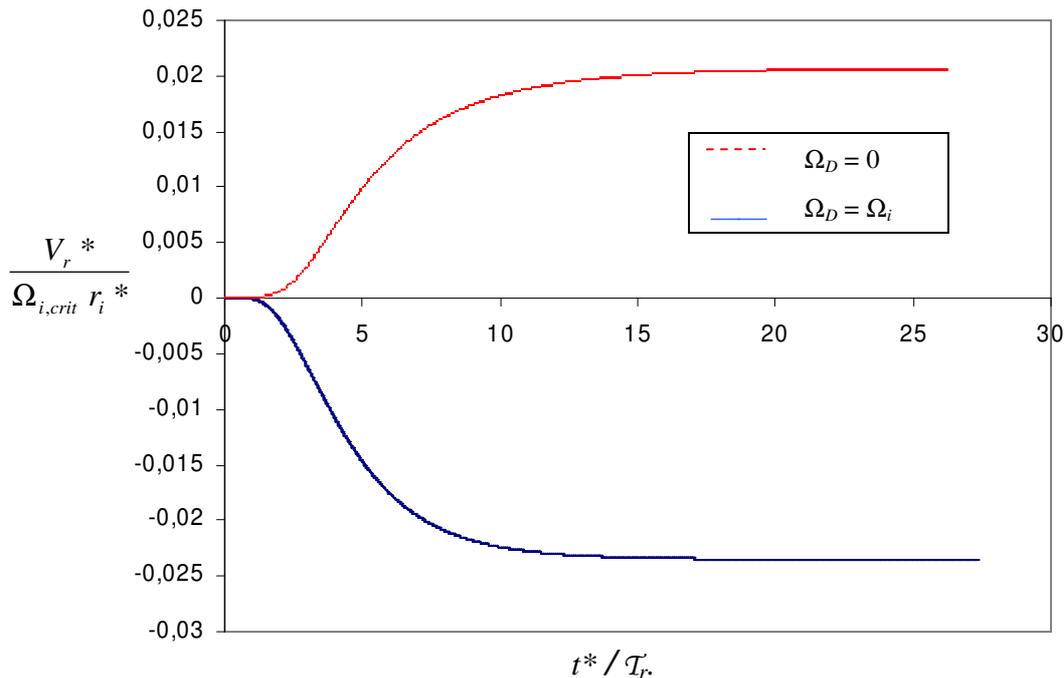
Dans le cas de conditions limites sans frottements (« surfaces libres »), le temps d'établissement de la solution pour un démarrage instantané à partir de l'état au repos est environ 100 fois plus grand que dans le cas de parois solides. La présence d'une paroi solide accélère l'établissement de l'instabilité de Taylor.



**Fig. 3-1** - Historique temporel de  $V_\theta' = V_\theta^* / \Omega_{i, \text{crit}} r_i^*$ , mesurée au centre de la cavité, en partant d'un état au repos et en imposant brusquement une rotation non nulle du cylindre interne; ici  $\Omega_D = \Omega_i$ . L'échelle de temps est le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$ .



**Fig. 3-2** – Profils axiaux de la vitesse radiale  $V_r^* / \Omega_{i, \text{crit}} r_i^*$ , tracés à plusieurs instants, à mi-distance entre les deux parois cylindriques ( $r^* = r_i^* + d / 2$ ). On part d'un état initialement au repos et l'on impose instantanément une rotation non nulle du cylindre interne ( $\text{Re}_i = 86$ ,  $\epsilon = 1.002$ ). Ici  $\Omega_D = 0$ .



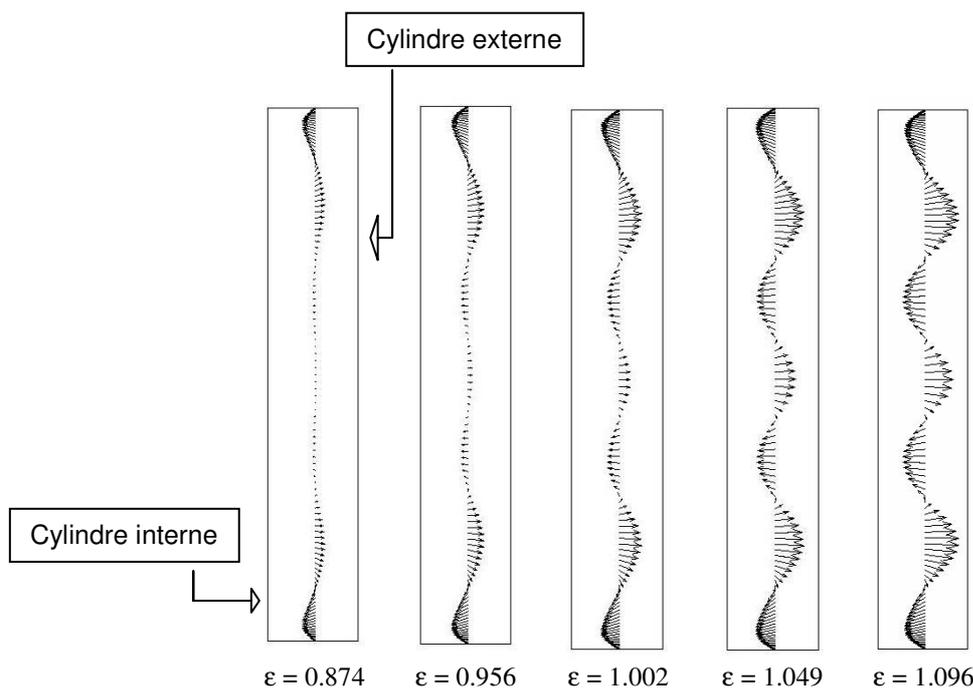
**Fig. 3-3** – Historique temporel de  $V_r^* / \Omega_{i,crit} r_i^*$ , mesurée au centre de la cavité, en partant d'un état au repos et en imposant instantanément une rotation non nulle du cylindre interne ( $Re_i = 86$ ). Le temps en abscisse est adimensionné par le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$ .

### 3.2.2 Influence des conditions limites sur la transition Couette / TVF.

L'influence des conditions limites aux disques sur la transition entre l'écoulement de Couette et l'écoulement de Taylor est étudiée pour trois types de conditions : disques fixes ( $\Omega_D = 0$ ), disques tournants ( $\Omega_D = \Omega_i$ ), et surfaces libres.

#### 3.2.2.1 Disques fixes ( $\Omega_D = 0$ ).

Considérons tout d'abord l'écoulement dans le cas de disques fixes, illustré sur la Fig. 3-4 pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Pour  $Re_i = 75$  ( $\varepsilon = 0.874$ ), on observe seulement un vortex d'Ekman près des disques, les vortex secondaires induits étant de très faible intensité. L'augmentation de la vitesse de rotation à  $Re_i = 82$  ( $\varepsilon = 0.956$ ) se traduit par une intensification des vortex secondaires par entraînement visqueux alors que les tourbillons de bord demeurent quasiment identiques. Avec l'apparition de l'instabilité centrifuge de Taylor pour des taux de rotation plus élevés ( $Re_i > Re_{i,crit}$ ), ces vortex centraux s'intensifient et deviennent même plus intenses que les tourbillons d'Ekman ( $\varepsilon = 1.049$ ) qui eux semblent beaucoup moins dépendre de la valeur de  $\varepsilon$ . D'un autre côté, on remarque que l'intensité de la vitesse dans les tourbillons marginaux à  $\varepsilon$  juste en dessous de 1 ( $\varepsilon = 0.956$ ) est similaire à celle des vortex de Taylor près du centre de la cavité observée à  $\varepsilon$  juste au dessus de 1 ( $\varepsilon = 1.049$ ). Dans les deux cas, le maximum de vitesse radiale est d'environ 3 - 4 %  $\Omega_i r_i^*$ . On aurait pu s'attendre à ce que la vitesse près de la paroi soit modifiée (substantiellement) pour  $\varepsilon$  légèrement supérieur à 1, de par l'addition des effets des deux mécanismes moteurs. Or, l'intensité des vortex marginaux n'est que très peu modifiée au voisinage de  $\varepsilon = 1$ . Ceci suggère qu'il n'y a pas d'interaction forte entre les vortex d'Ekman et l'instabilité centrifuge, chacun des mécanismes étant dominant près des parois et au centre, respectivement.



**Fig. 3-4** – Projection de la vitesse sur le plan méridien ( $r, z$ ), à proximité du point de transition théorique Couette/ Taylor ( $\varepsilon = 1.00$ ), pour  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$ ,  $\Omega_D = 0$  (disques fixes). Le cylindre interne est représenté par la ligne verticale de gauche, le cylindre externe par la ligne verticale de droite.

Dans le cas de disques infinis fixes surmontés par un fluide en rotation solide à  $\Omega_f$  très loin du disque, la théorie montre que l'épaisseur de la couche limite varie en  $\delta_D = (v / \Omega_f)^{1/2}$  (Greenspan [38]). Dans le cas de disques finis, si  $L$  est une longueur caractéristique du problème, l'épaisseur de la couche limite devrait varier comme :

$$\frac{\delta_D}{L} \approx \sqrt{Ek} = \sqrt{\frac{v}{\Omega_f L^2}} \quad (3-9)$$

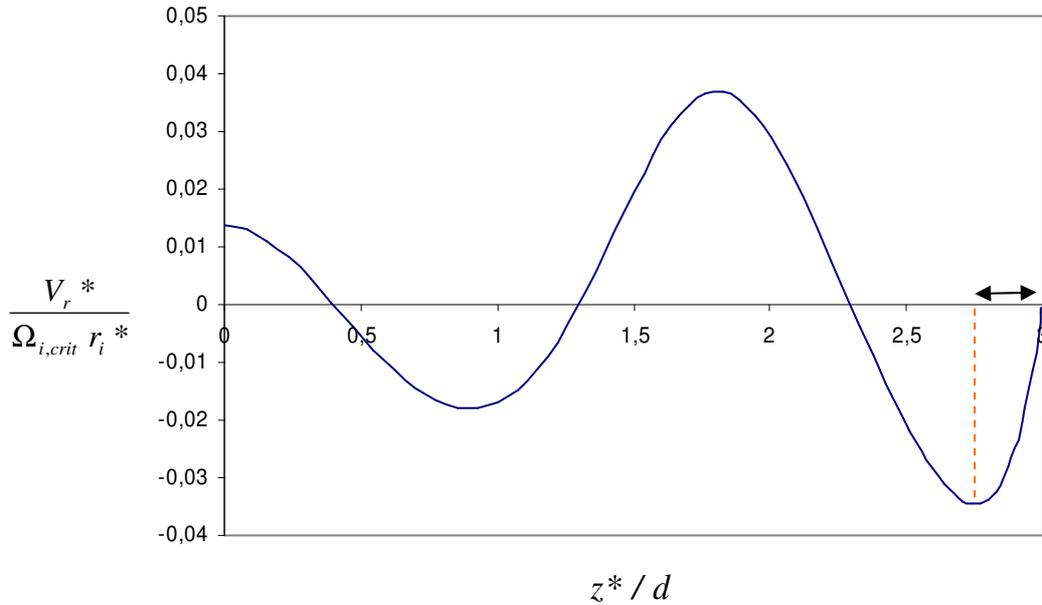
où  $Ek$  est le nombre d'Ekman.

Pour rester consistant avec la définition de  $\mathcal{T}_r$  donnée au § 3.2.1, on choisit comme échelle de longueur la distance  $d$  entre les cylindres. Enfin, on suppose que loin du disque,  $\Omega_f$  suit le profil de Couette. A mi-distance entre le cylindre interne et le cylindre externe, soit à la position radiale  $r^* = r_i^* + d/2$ , on obtient :

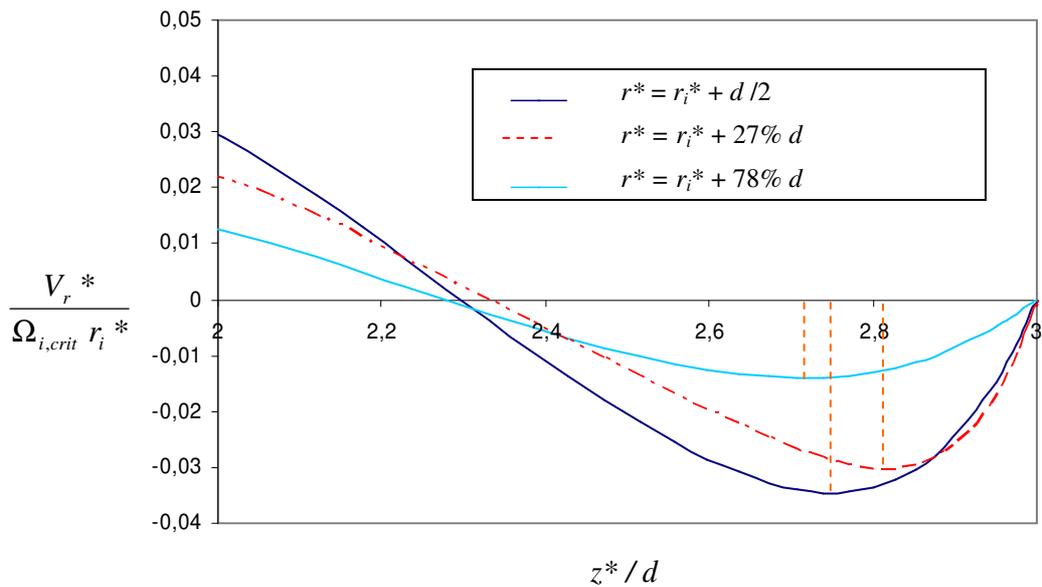
$$\frac{\delta_D}{d} \approx \sqrt{\frac{1+\eta}{\left(\frac{2}{1+\eta} - \eta\right) \text{Re}_i}} \quad (3-10)$$

où  $\eta = r_i^* / r_o^*$ . Ainsi, pour  $\text{Re}_i = \text{Re}_{i, \text{crit}}$ , l'épaisseur théorique est  $\delta_D \approx 0.23 d$ .

L'épaisseur de la couche limite peut être estimée dans la solution calculée en mesurant la distance axiale entre le disque et la position du premier maximum de  $V_r$  pour  $r^* = r_i^* + d/2$ , comme indiqué sur la Fig. 3-5.



**Fig. 3-5** – Exemple de mesure de l'épaisseur de la couche limite développée sur le disque, à partir du profil axial de la vitesse radiale; le cas représenté ici correspond à  $Re_i = 84$ , ( $\epsilon = 0.98$ ),  $\Omega_D = 0$ ; la position radiale est fixée à  $r^* = r_i^* + d / 2$ .



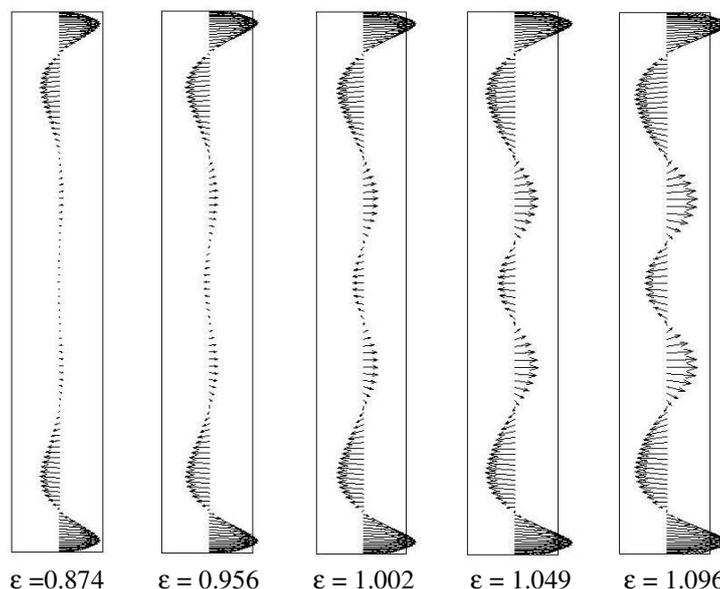
**Fig. 3-6** – Variation de la mesure de l'épaisseur de couche limite, selon le rayon  $r^*$ ;  $Re_i = 84$  ( $\epsilon = 0.98$ ),  $\Omega_D = 0$ .

A partir du champ de vecteurs présenté sur la Fig. 3-4, nous obtenons une gamme de valeurs en fonction du taux de rotation comprises entre  $0.23 d$  ( $\epsilon < 1$ ) et  $0.29 d$  ( $\epsilon > 1$ ), qui sont en bon accord avec la valeur théorique ( $\delta_D = 0.23 d$ ).

On peut souligner au passage l'ambiguïté qu'il y a à définir l'épaisseur d'une couche limite dans le cas d'un écoulement fortement confiné où les effets non parallèles sont très importants. D'autre part, il faut noter la forte interaction entre la structure tourbillonnaire et la couche limite. En Fig. 3-6, les profils axiaux de  $V_r$  au voisinage du disque et à différentes positions radiales mettent bien en évidence ces effets non parallèles. L'estimation de  $\delta_D$  varie de  $0.26 d$  à  $r^* = r_i^* + 27\% d$  jusqu'à  $0.29 d$  à  $r^* = r_i^* + 78\% d$ . Par la suite, nous fixerons arbitrairement  $\delta_D$  à la valeur obtenue à  $r^* = r_i^* + d / 2$ .

### 3.2.2.2 Disques en rotation ( $\Omega_D = \Omega_i$ ).

Contrairement au cas précédent, l'écoulement de couche limite est centrifuge et beaucoup plus intense comme le montre le champ de vecteurs en Fig. 3-7.



**Fig. 3-7** – Projection du champ de vitesse sur le plan méridien ( $r, z$ ), à proximité du point de transition théorique Couette/ Taylor ( $\varepsilon = 1.00$ ), pour  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$  (disques tournant avec le cylindre interne).

#### *Écoulement de couche limite.*

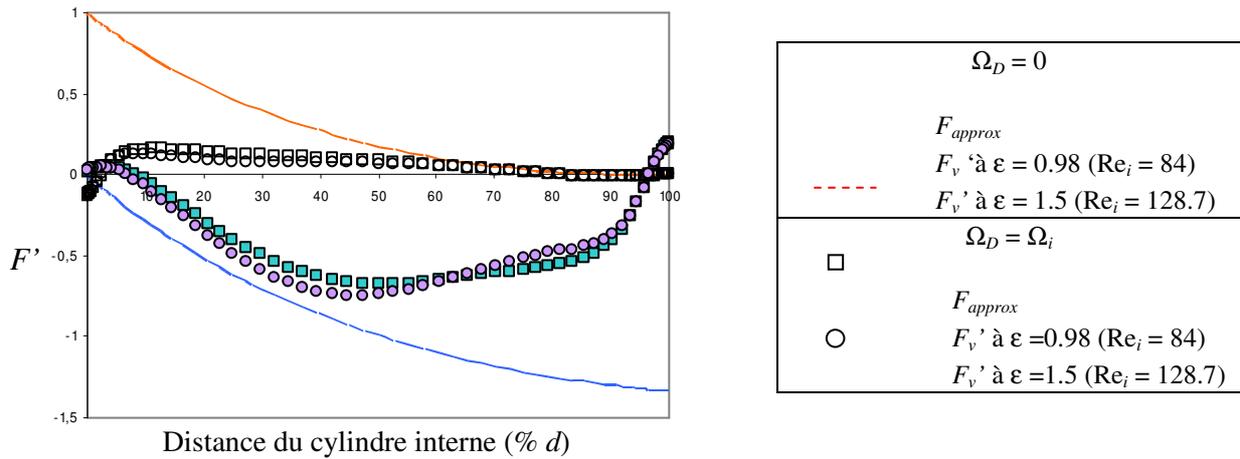
On se propose de montrer que l'approximation définie par l'équation (3-7) est cohérente avec la solution issue du calcul complet des équations de Navier-Stokes.

Afin d'évaluer dans chacune des configurations (disques fixes, disques tournants) l'intensité relative entre force de pression et force centrifuge au voisinage du disque (à une distance de  $0.03 d$ ), nous avons représenté en Fig. 3-8 les profils radiaux de la composante radiale de la force visqueuse  $F_{approx}' = F_{approx}^* / \rho r_i^* \Omega_i^2$  définie dans l'équation (3-7). On remarquera d'après l'équation (1-1) qu'avec cet adimensionnement,  $0 \leq F_{approx}' \leq 1$  dans le cas de disques fixes.

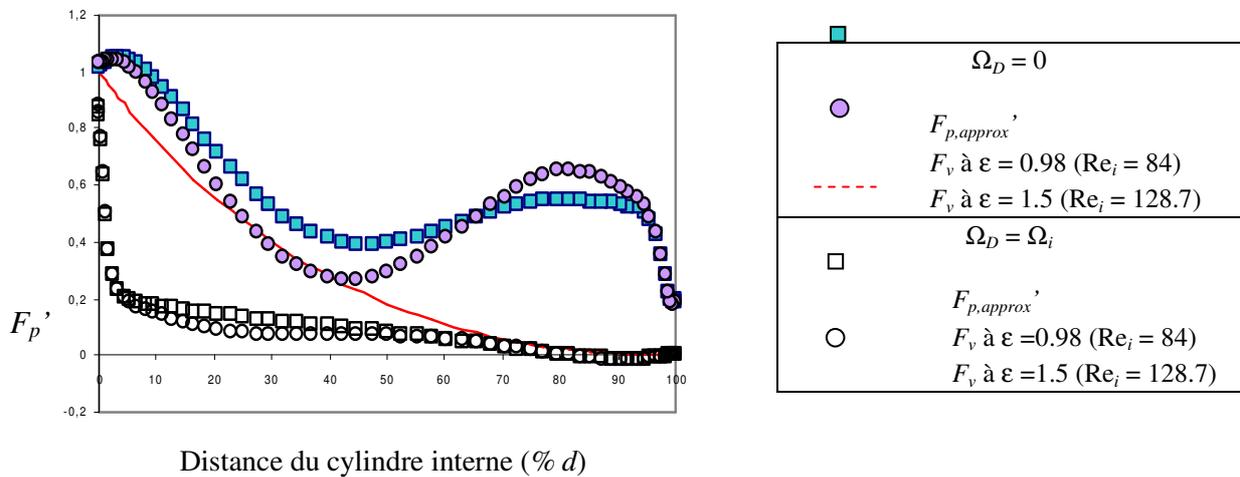
D'après la discussion présentée au 3.1, lorsque  $F_{approx}' > 0$ , la balance des forces engendre un mouvement centripète dans la couche limite alors que si  $F_{approx}' < 0$ , l'écoulement est centrifuge. Sur la Fig. 3-8,  $F_{approx}'$  est calculée pour deux nombres de Reynolds, l'un légèrement inférieur à  $Re_{i, crit}$  ( $\varepsilon = 0.96$ ) et l'autre supérieur à  $Re_{i, crit}$  ( $\varepsilon = 1.5$ ).

$F_{approx}'$  a été tout d'abord évaluée directement à partir de l'équation (3-7) (en pointillés). Au niveau du signe de  $f_v'$ , le modèle est cohérent avec les observations faites à partir des Fig. 3-4 et Fig. 3-7. De plus, la valeur de  $F_{approx}'$  calculée à mi-distance des cylindres, en  $r^* = r_i^* + d/2$  montre que l'intensité de l'écoulement est plus grande dans le cas de disques tournants que dans le cas de disques fixes ( $F_{approx}' = -1$  pour  $\Omega_D = \Omega_i$ , et  $F_{approx}' = 0.2$  pour  $\Omega_D = 0$ ).

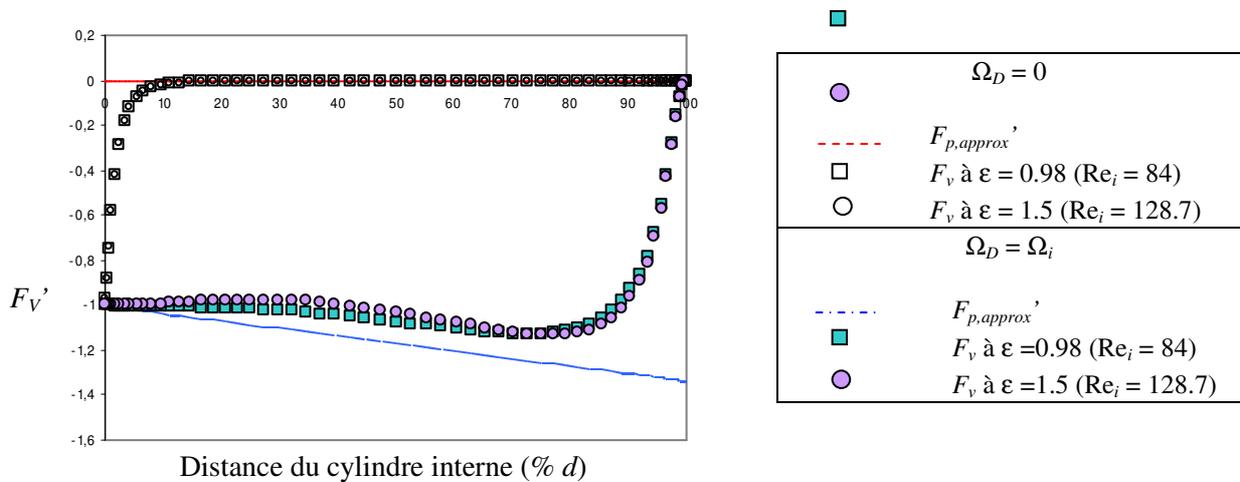
Néanmoins, ce modèle ne donne qu'un comportement qualitatif de l'écoulement en proche paroi, comme le montrent les courbes de la Fig. 3-8 représentant la résultante visqueuse réelle  $F' = (\text{div } \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{e}_r$ , calculée par le code à partir de l'équation (3-2) adimensionnée. On observe en effet un écart relativement important entre valeur réelle et valeur approchée.



**Fig. 3-8** – Comparaison entre les prédictions fournies par le modèle et la force visqueuse réelle calculée par le code en  $z^* = 2.97 d$  (soit  $0.99 h$ ). En pointillés verticaux, la position du rayon médian  $r^* = r_i^* + d / 2$ .



**Fig. 3-9** - Comparaison entre le gradient de pression  $F_p'$ , exprimé en fonction de la distance radiale au cylindre interne (unités  $\% d$ ), mesuré en  $z^* = 2.97 d$  (soit  $0.99 h$ ), et son approximation  $F_{p,approx}'$ .



**Fig. 3-10** – Comparaison entre le terme convectif  $F_V'$ , exprimé en fonction de  $r^* / r_i^*$ , mesuré en  $z^* = 2.97 d$  (soit  $0.99 h$ ), et son approximation  $F_{v,approx}'$ . L'approximation de  $F_V'$  pour  $\Omega_D = 0$  est  $F_{v,approx}' = 0$ ; pour  $\Omega_D = \Omega_i$  elle correspond à la droite oblique.

Afin de préciser l'origine de cet écart, nous avons successivement comparé :

- le gradient de pression géostrophique  $F_{p,approx}'$  de l'équation (3-7) calculé à partir du profil de Couette, avec le gradient de pression réelle  $F_p'$  calculé en proche paroi à la distance de  $0.03 d$  du disque.
- la force centrifuge  $F_{v,approx}'$  de l'équation (3-7) avec le terme convectif réel  $F_v'$  donné par l'équation (3-4).

Les résultats de ces comparaisons sont montrés, pour chacune des deux valeurs de  $\varepsilon$  choisies, sur les Fig. 3-9 et Fig. 3-10. Au niveau des gradients de pression, on observe une différence importante qui s'explique facilement par le fait que la pression calculée à partir du profil de Couette ne prend pas en compte la présence de parois terminales. Au niveau des termes convectifs, on constate qu'excepté près des bords, l'erreur commise est relativement faible : pour  $\Omega_D = 0$ , les deux courbes coïncident sur la majeure partie du domaine; pour  $\Omega_D = \Omega_i$  il existe un écart, qui demeure relativement petit sur 80% de l'intervalle  $[1.05 ; 1.3]$ . Ces résultats montrent la validité de l'approximation sur le terme convectif (3-6) loin des parois cylindriques.

### Structures de l'écoulement

Pour les deux configurations (disques fixes et disques tournants), l'écoulement est symétrique par rapport au plan  $z = 0$ , ce que l'on attend normalement pour le cas de rapports d'aspect entiers et pairs. Notons cependant que dans le cas d'écoulements plus confinés ( $\Gamma \leq 4$ ), l'écoulement peut devenir asymétrique pour  $\Omega_D = \Omega_i$  (Tavener *et al* [81]).

Contrairement aux vortex d'Ekman, la structure des tourbillons loin des disques est très similaire dans les deux configurations au sens de rotation près comme le montrent les Fig. 3-4 et Fig. 3-7. Un examen plus détaillé des profils de vitesse met néanmoins en évidence des différences sensibles au niveau du module de  $V_r^*$  au centre de la cavité, en  $z^* = 0$  : pour  $\Omega_D = \Omega_i$ , l'écoulement au centre est centripète, au lieu d'être centrifuge comme dans le cas  $\Omega_D = 0$ . Cette différence est directement liée au sens de l'écoulement dans la couche limite de la paroi terminale.

Dans le cas des disques tournants, on note que la vitesse radiale au centre pour  $Re_i = 94$  ( $\varepsilon = 1.096$ ) est inférieure de 22 % en valeur absolue à celle mesurée dans le cas  $\Omega_D = 0$ . Cette observation est en accord avec les travaux de Snyder & Lambert, [75]; Gollub & Freilich, [36]; Berland *et al* [13]; Heinrichs *et al* [41]; Wereley & Lueptow [86][87] qui ont montré que dans un écoulement de type TVF, la vitesse radiale dans une zone de flux centrifuge est toujours plus grande en valeur absolue que dans une zone de flux centripète. Cet effet est visible sur les Fig. 3-4 et Fig. 3-7, pour un taux de rotation  $Re_i$  supérieur à  $Re_{i,crit}$  ( $\varepsilon > 1$ ).

Dans le cas d'un disque tournant à  $\Omega_D = \Omega_i$ , et surmonté d'un fluide tournant approximativement à la même vitesse angulaire, la théorie des couches limites donne l'estimation suivante pour l'épaisseur de la couche d'Ekman :

$$\frac{\delta_D}{L} \approx \sqrt{Ek} = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega_i L^2}} \quad (3-11)$$

Soit, avec  $L = d$  :

$$\frac{\delta_D}{d} \approx \sqrt{\frac{\eta}{(1-\eta)Re_i}} \quad (3-12)$$

Pour  $Re_i \approx Re_{i,crit}$  on obtient  $0.19 d$ . Les résultats des simulations donne au voisinage du seuil ( $Re_i \approx Re_{i,crit}$ ) une épaisseur de l'ordre de  $\delta_D = 0.15 d$ , en bon accord avec la valeur théorique. Cette valeur représente une diminution significative de l'épaisseur estimée dans le cas de disques fixes ( $0.23 d \leq \delta_D \leq 0.29 d$ ).

On relève une asymétrie des tourbillons marginaux par rapport au plan médian  $r^* = r_i^* + d/2$ , aussi bien pour  $Re_i < Re_{i,crit}$  (Fig. 3-11) que pour  $Re_i > Re_{i,crit}$  (Fig. 3-12). Cette observation peut s'expliquer à partir de la Fig. 3-8 qui montre que selon la configuration (disques fixes ou disques tournants),  $F_{approx}^*$  est plus grand près du cylindre interne ou du cylindre externe. Pour  $\Omega_D = 0$ , le flux centripète est plus grand près du cylindre interne, entraînant ainsi un flux vertical plus important que le long du cylindre externe (Fig. 3-11-a). Le cas inverse est observé dans le cas de disques en rotation (Fig. 3-11-b). Par conséquent, le centre des vortex n'est pas situé à  $0.5 d$  de la paroi interne, mais à une position légèrement excentrée, estimée à partir de la position à laquelle les vitesses radiale et axiale s'annulent :  $0.47 d$  du cylindre interne dans le cas  $\Omega_D = 0$ , et  $0.53 d$  dans le cas  $\Omega_D = \Omega_i$ .

En outre, l'extension axiale  $L_v$  des vortex de bord est sensiblement différente de celle donnée pour les vortex de Taylor ( $L_v \approx d$ ), aussi bien pour des Reynolds inférieurs que supérieurs à  $Re_{i,crit}$ .

Pour  $Re_i = 82$  ( $\varepsilon = 0.985$ ),  $L_v = 1.30 d$  dans le cas de disques fixes ( $\Omega_D = 0$ ), et  $L_v = 1.17 d$  dans le cas de disques tournants ( $\Omega_D = \Omega_i$ ). Ces mesures sont en bon accord avec celles faites lors de précédents travaux :

- pour  $\Omega_D = \Omega_i$ , Alziary de Roquefort & Grillaud [4], obtiennent des vortex de bord d'extension axiale  $L_v = 1.20 d$ , avec  $\Gamma = 10$ ,  $\eta = 0.933$ , à un nombre de Reynolds égal à  $0.973 Re_{i,crit}$ , où  $Re_{i,crit}$  est le Reynolds critique théorique prévu pour  $\eta = 0.933$ .
- Pour  $\Omega_D = 0$ , Kuo & Ball [48] obtiennent  $L_v = 1.45 d$  à  $Re_i = 0.953 Re_{i,crit}$  pour  $\Gamma = 10$ ,  $\eta = 0.5$ . Sobolik *et al.* [76] observent quant à eux des vortex de bord d'extension  $L_v = 1.26 d$  pour  $\Gamma = 9.85$ ,  $\eta = 0.909$ , à  $Re_i = Re_{i,crit}$ .

Cette différence peut s'expliquer par une intensité plus grande (dans le cas  $\Omega_D = \Omega_i$  par rapport au cas  $\Omega_D = 0$ ) de la force motrice qui près de la paroi donne naissance aux tourbillons marginaux (Fig. 3-8).

Pour  $Re_i = 90$  ( $\varepsilon = 1.05$ ) (Fig. 3-12), on pourrait s'attendre à ce que sous l'effet de l'instabilité centrifuge, l'extension axiale  $L_v$  des vortex marginaux se rapproche de l'unité (cas des vortex de Taylor), ce qui n'est pas le cas, malgré une diminution à  $1.27 d$  pour  $\Omega_D = 0$ , et une valeur inchangée à  $1.17 d$  pour  $\Omega_D = \Omega_i$ .



**Fig. 3-11** – Projection des vecteurs-vitesse dans le plan méridien ( $r,z$ ), près du disque supérieur, pour  $\varepsilon = 0.98$ . a)  $\Omega_D = 0$  ; b)  $\Omega_D = \Omega_i$ . L'échelle des vecteurs est identique dans les deux cas.

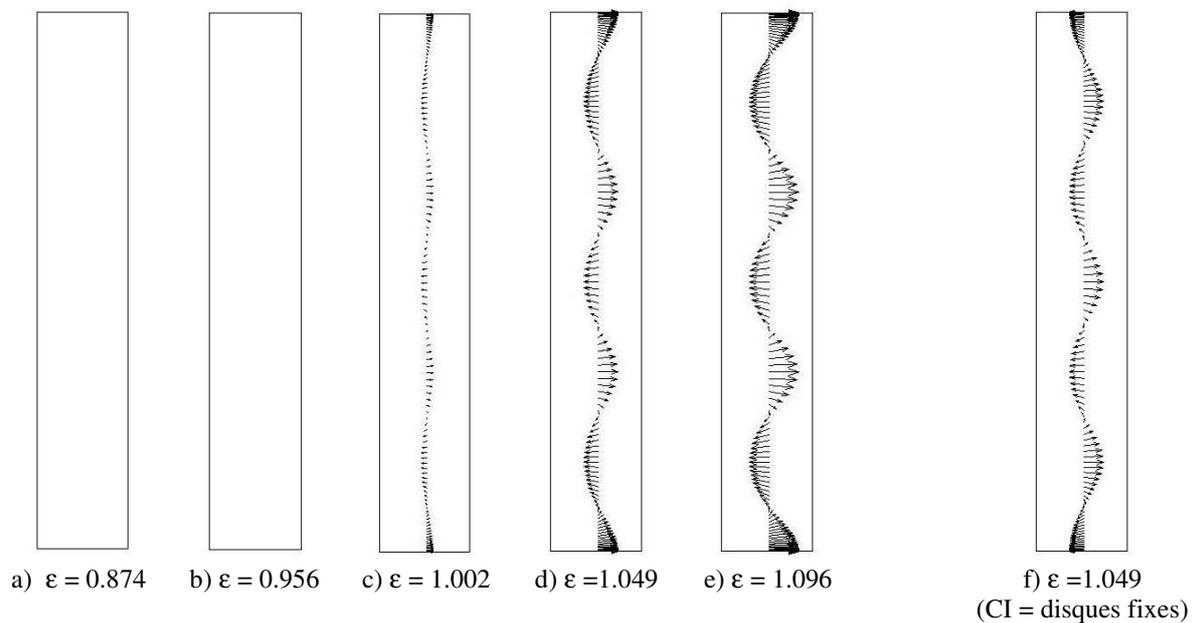


**Fig. 3-12** – Projection des vecteurs-vitesse dans le plan méridien ( $r,z$ ), près du disque supérieur, pour  $\varepsilon = 1.05$ . a)  $\Omega_D = 0$  ; b)  $\Omega_D = \Omega_i$ . L'échelle des vecteurs est identique dans les deux cas.

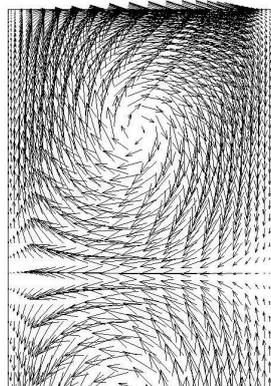
### 3.2.2.3 Surfaces libres.

Il est très difficile de modéliser la physique d'une surface libre. Dans notre cas, nous l'assimilons à une surface plane sans tension superficielle. Cette modélisation est réaliste par rapport aux expériences si on suppose que les déformations de la surface sont très faibles. Des résultats concluants ont été obtenus par Serre *et al.* [71] dans le cas d'une cuve cylindrique de grand rapport d'aspect.

L'évolution de l'écoulement en fonction du taux de rotation (Fig. 3-13) est différente des cas précédents obtenus dans le cas de parois non glissantes et très proche de celle observée dans le cas de cylindres de longueur infinie. La structure tourbillonnaire apparaît à  $Re_i = Re_{i, crit}$  et l'intensité des tourbillons est relativement uniforme le long de l'axe. L'écoulement proche de la paroi glissante est quasiment identique à celui observé au centre de la cavité en terme d'intensité. La vitesse radiale entre les vortex augmente plus rapidement avec  $\varepsilon$  dans les zones d'écoulement centrifuge que dans les zones d'écoulement centripète. En conséquence, la largeur des régions centrifuges diminue légèrement, contrairement aux régions centripètes dont la largeur augmente dans les mêmes proportions.



**Fig. 3-13** - Projection du champ de vitesse sur le plan méridien ( $r, z$ ), à proximité du point de transition Couette/Taylor ( $\varepsilon = 1.00$ ), pour  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$  et condition de surface libre au niveau des disques terminaux. La figure f montre l'écoulement obtenu à  $\varepsilon = 1.049$  en utilisant comme condition initiale la solution obtenue au même Reynolds avec des disques fixes.



**Fig. 3-14** - Projection des vecteurs-vitesse dans le plan méridien ( $r, z$ ), près du disque supérieur, pour  $\varepsilon = 1.05$ , en condition de surface libre. L'échelle des vecteurs est identique à celle des Fig. 3-11 et Fig. 3-12.

La surface libre modifie également le vortex de bord (Fig. 3-14) qui devient en apparence très proche du vortex de Taylor observé loin des parois terminales. En effet, contrairement aux cas avec parois solides (section 0), l'écoulement axial est le même au voisinage des deux cylindres, et le centre du vortex marginal est localisé à mi-distance des parois cylindriques (à  $0.49 d$  du cylindre interne). De plus, le vortex s'inscrit quasiment dans un carré de côté  $d$  (extension axiale mesurée de  $0.99 d$ ).

D'autre part, contrairement aux cas précédents où la direction de l'écoulement au voisinage des parois terminales est déterminée par la rotation ou non de ces parois, la direction de l'écoulement au voisinage de la surface libre n'est pas déterminée *a priori* et s'est montrée sensible à la condition initiale du calcul. En effet, les deux directions d'écoulement ont été obtenues : en augmentant progressivement la rotation depuis le repos, la solution obtenue à  $\varepsilon = 1.049$  met en évidence un flux centrifuge (Fig. 3-13 d). Partant à présent de la solution obtenue Fig. 3-4 pour un même taux de rotation, la direction centripète du flux entraîné par la paroi fixe demeure inchangée dans le cas de la surface libre (Fig. 3-13 f) ; l'écoulement obtenu est similaire à celui de la Fig. 3-13 d, à une translation près, de module  $d$  dans la direction axiale.

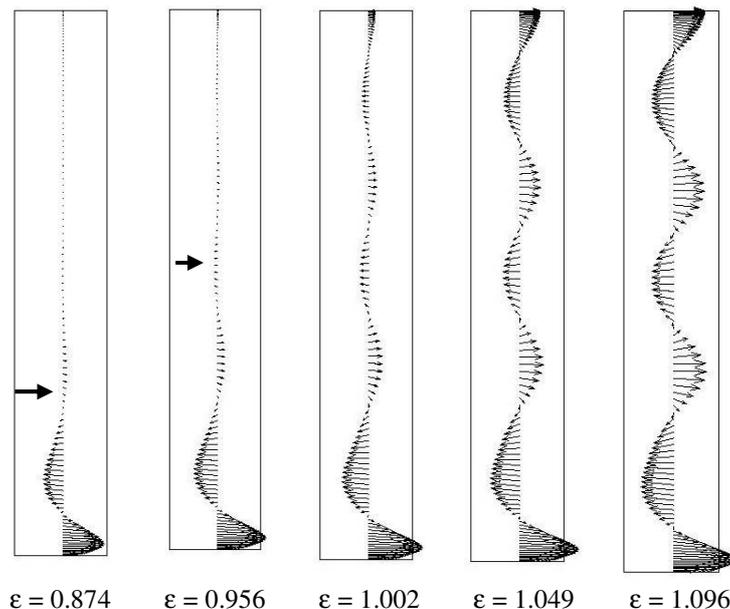
### 3.2.2.4 Conditions mixtes.

Nous avons considéré un dernier cas en combinant deux conditions limites, une surface libre en haut, et un disque tournant à  $\Omega_i$  en bas. Les résultats montrent (Fig. 3-15) que les écoulements au voisinage des extrémités sont similaires à ceux décrits précédemment.

Cette configuration permet de mettre en évidence en dessous du seuil de transition la pénétration des vortex secondaires depuis le bord inférieur vers le haut. On note un bon accord entre nos résultats et les estimations données par la formule de Lücke *et al* [50] :

$$D \approx 0.65 \frac{d}{\sqrt{|\varepsilon - 1|}} \quad (3-13)$$

L'utilisation de (3-13) permet d'estimer la distance de pénétration à  $1.8 d$  et  $3.1 d$  pour  $\varepsilon = 0.874$  et  $\varepsilon = 0.956$  respectivement. Ces distances sont indiquées par une flèche sur la Fig. 3-15.



**Fig. 3-15** - Projection du champ de vitesse sur le plan méridien ( $r,z$ ), à proximité du point de transition Couette/Taylor ( $\varepsilon = 1.00$ ), pour  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$  ; la paroi supérieure est une surface libre, la paroi inférieure tourne à  $\Omega_i$ . Les flèches indiquent la distance de pénétration prédite par l'équation (3-13).

### 3.2.3 Discussion

Cette étude montre l'influence des parois terminales sur l'écoulement de Taylor-Couette en cavité confinée, aussi bien au niveau du seuil de transition qu'au niveau des caractéristiques des vortex marginaux.

Il est évident d'après ces résultats que l'extension axiale des vortex marginaux dépend à la fois du taux de rotation et de la nature des parois terminales. Nous avons estimé à partir du champ de vecteurs-vitesse la longueur axiale des vortex marginaux ( $L_D$ ), et nous l'avons représentée en fonction de  $\varepsilon$  sur la Fig. 3-16. Nous notons que la précision de cette mesure est limitée par le fait que le vecteur-vitesse n'est connu qu'en des positions discrètes (points de maillage) et que d'autre part il est difficile de toujours déterminer clairement la frontière entre deux vortex. Néanmoins, la figure montre qu'à faibles valeurs de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0.21$ ) les vortex de bord occupent toute la longueur de la cavité annulaire : il y a par exemple deux vortex dans le cas de parois solides identiques ( $L_D / d = 3$ ), et un seul vortex dans le cas des conditions mixtes ( $L_D / d = 6$ ).

A plus grand taux de rotation ( $0.5 < \varepsilon < 1$ ), l'apparition de vortex secondaires réduit la taille des vortex marginaux. A  $Re_i = Re_{i,crit}$  ( $\varepsilon = 1$ ), des vortex marginaux de longueur  $L_D / d = 0.99$  apparaissent au voisinage de la surface libre alors que dans le cas de parois solides, leur longueur est réduite à  $1.17 \leq L_D / d \leq 1.29$ , selon le type de condition limite. Dans la configuration avec surfaces libres, cette longueur est indépendante de  $\varepsilon$  ( $1 < \varepsilon < 3$ ), comme dans le cas de parois solides fixes où cette longueur semble atteindre une valeur asymptotique  $L_D / d = 1.17$ . Au contraire, dans le cas de parois solides tournantes ou de conditions mixtes, la longueur augmente légèrement avec  $\varepsilon$ . Les mécanismes liés à cet accroissement ne sont pas clairs, bien qu'ils puissent être liés à l'énergie fournie aux vortex par les disques en rotation.

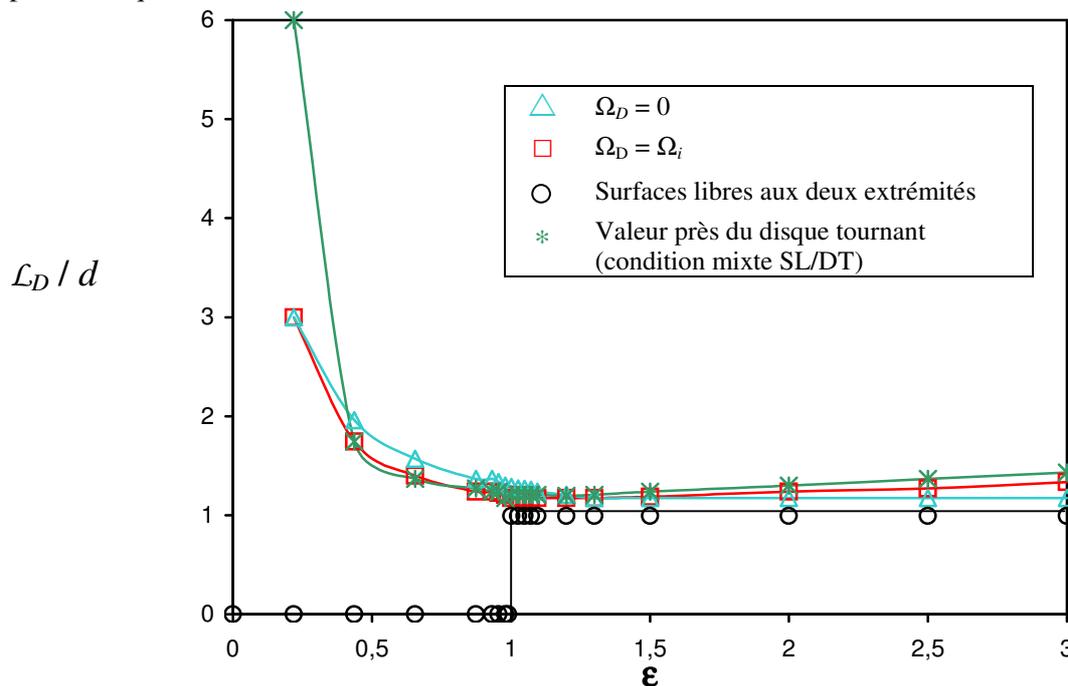


Fig. 3-16 – Dépendance entre le nombre de Reynolds et la longueur du vortex marginal.  $\varepsilon = Re_i / Re_{i,crit}$ .

L'intensité du tourbillon marginal peut être évaluée en mesurant le maximum d'intensité de la vitesse radiale dans la couche limite du disque, à mi-distance des parois cylindriques. Les résultats pour les différents types de conditions limites sont montrés sur la Fig. 3-17. Notons cependant que la position radiale du centre des vortex n'est pas nécessairement localisée à une distance  $d/2$  du cylindre interne,

comme nous l'avons montré précédemment et que par conséquent, des valeurs supérieures de  $V_r$  peuvent exister à d'autres rayons.

Dans les configurations avec parois solides, la vitesse change continûment avec l'augmentation du nombre de Reynolds, même pour  $Re_i = Re_{i,crit}$ . Comme nous l'avons déjà observé (3.2.2.2), le maximum de vitesse radiale est plus grand dans le cas de parois tournantes que dans le cas de parois fixes.

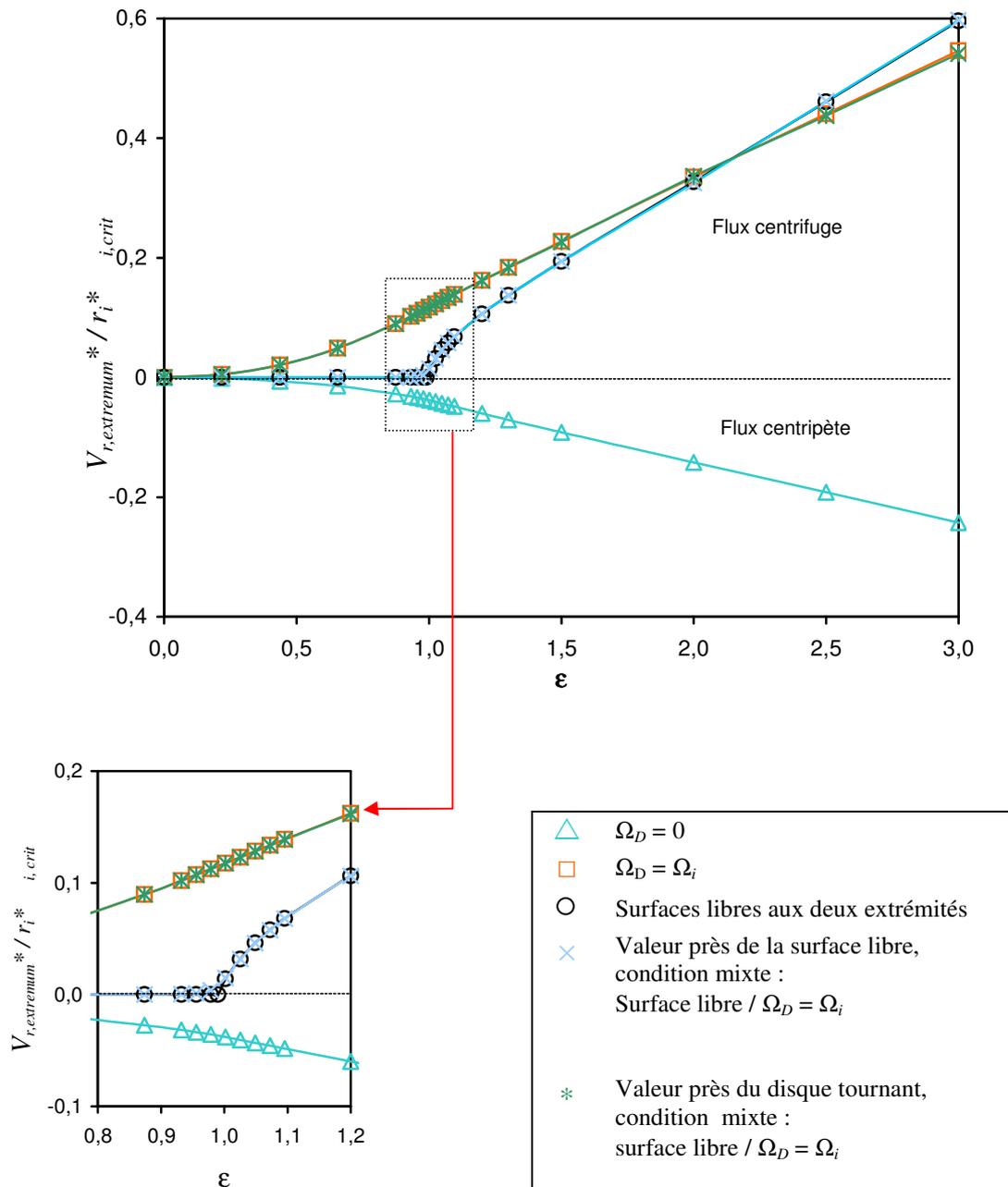
Dans la configuration avec surfaces libres, la transition vers le « Taylor Vortex Flow » se traduit par une augmentation brutale au voisinage de  $\varepsilon = 1$  du maximum de  $V_r$ , mettant en évidence une bifurcation de type fourche. La branche inférieure de cette bifurcation n'est pas représentée sur cette figure, parce nos simulations n'ont mis en évidence que des écoulements centrifuges au voisinage de la surface libre.

Dans le cas de conditions terminales mixtes, les maxima de vitesse suivent respectivement les courbes précédentes correspondant à deux disques tournants ou à deux surfaces libres. En d'autres mots, même pour un petit rapport d'aspect ( $\Gamma = 6$ ), il n'existe pas d'interaction directe entre la paroi tournante et la surface libre. Il faut toutefois signaler que pour les conditions mixtes, à proximité de  $\varepsilon = 1$ , l'augmentation de  $V_{r,max}$  près de la surface libre n'est pas aussi brusque que dans le cas des deux surfaces libres (voir zoom sur la Fig. 3-17).

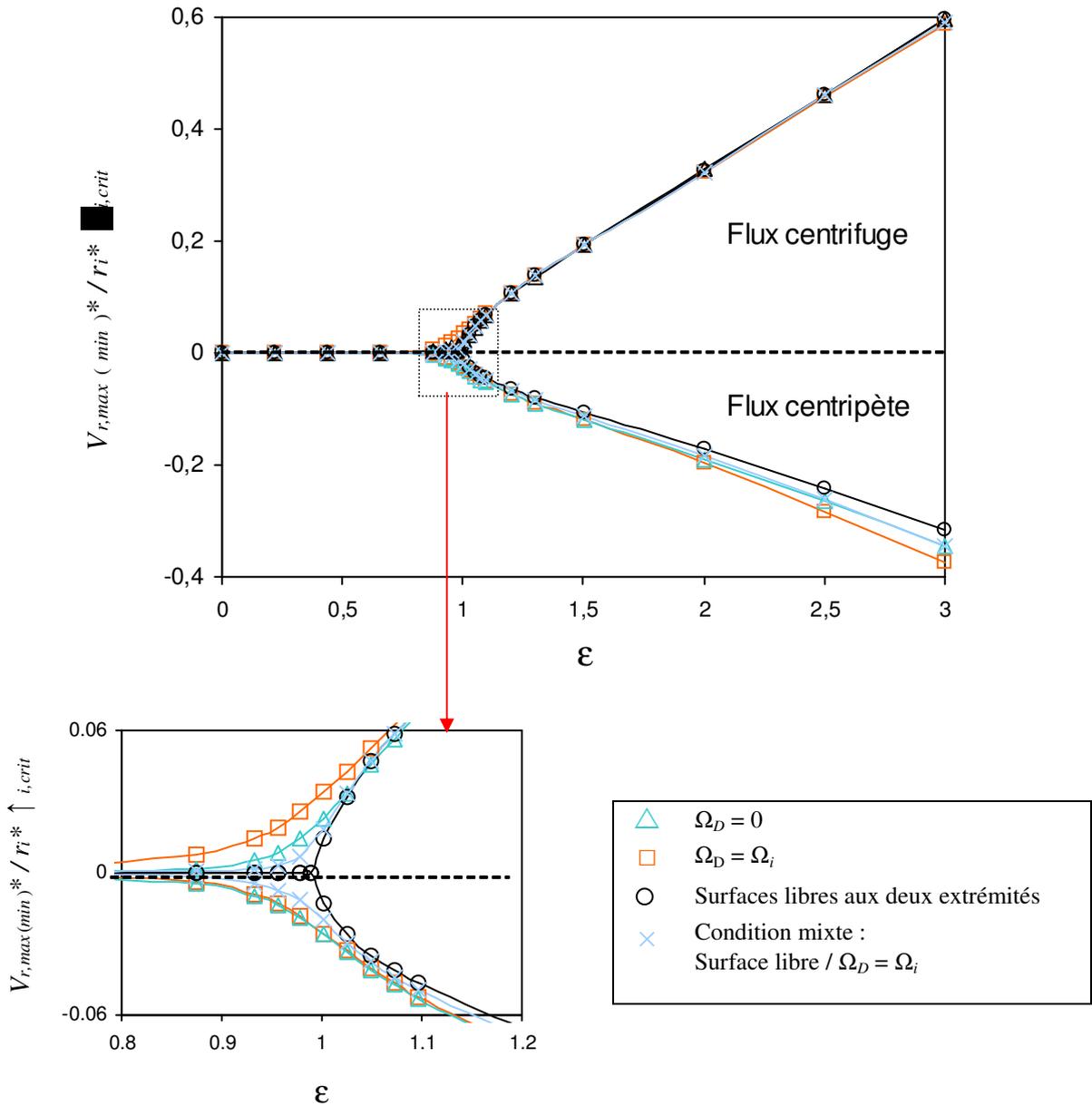
Dans le cas de surfaces libres, on peut également noter que le maximum de vitesse radiale  $V_{r,max}$  devient plus grand que pour un disque en rotation pour  $\varepsilon > 2$ . On remarque aussi que le module de  $V_{r,max}$  pour un disque fixe correspond environ à la moitié de celui de  $V_{r,max}$  pour un disque tournant. Ceci suggère que la friction due aux parois réduit l'énergie des structures tourbillonnaires, et ce de manière plus importante pour des parois fixes que pour des parois mobiles.

Il est donc clair que la nature des conditions limites sur les disques affecte la nature de la bifurcation entre l'écoulement de Couette et celui de Taylor. On peut étudier cette bifurcation en considérant comme variables les extrema de vitesse radiale à proximité du centre de la cavité défini en  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$  et  $z^* = 0$  (mi-hauteur du dispositif) (Fig. 3-18). Afin de pouvoir comparer  $V_r$  dans les frontières centrifuge et centripète des vortex, le maximum de vitesse est enregistré dans ces deux régions d'écoulement. En fonction des conditions limites, les zones centrifuge et centripète sont localisées en  $z^* = 0$  ou en  $z^* \approx \pm d$ . On constate que dans le cas particulier des conditions mixtes, la localisation axiale  $z^*$  de l'extremum de vitesse radiale se translate entre  $z^* = 0.08 d$  et  $z^* = 0.15 d$ , du fait de l'asymétrie du champ de vitesse.

Comme nous l'avons déjà observé au voisinage des parois terminales (Fig. 3-17), la vitesse change continûment avec l'augmentation du nombre de Reynolds dans les configurations avec parois solides et la configuration « conditions mixtes », même pour  $Re_i = Re_{i,crit}$ , comme le montre la zone agrandie de la Fig. 3-18. Ce comportement est cohérent avec les résultats de Kuo & Ball [48] et de Mullin [54]. De même que précédemment au voisinage des parois, la valeur des maxima de vitesse radiale est d'environ 60% supérieure dans les frontières centrifuges que dans les frontières centripètes. Cet écart entre maxima de vitesse est indépendant des conditions aux limites imposées sur les parois terminales pour des valeurs de  $\varepsilon$  suffisamment grandes ( $\varepsilon > 1.5$ ). Ce comportement n'est pas observé dans les zones d'écoulement centripète dans lesquelles la valeur des maxima de vitesse radiale change sensiblement en fonction des conditions limites. En effet, dans le cas d'une configuration avec surfaces libres, le maximum de vitesse devient inférieur à celui mesuré dans le cas de parois solides pour de grandes valeurs de  $\varepsilon$  (Fig. 3-18).



**Fig. 3-17** – Extremum de la vitesse radiale, mesuré près du disque terminal, pour  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$ . Selon la condition limite, le flux d'Ekman est soit centripète (pour  $\Omega_D = 0$ ), soit centrifuge (autres conditions). La vitesse est adimensionnée par la vitesse tangentielle du cylindre interne au seuil de transition,  $r_i^* \Omega_{i,crit}$ .



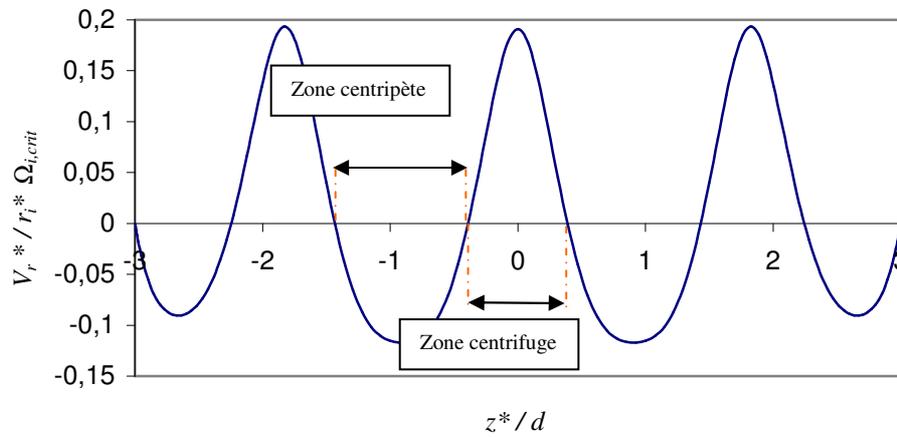
**Fig. 3-18** – Diagramme de bifurcation, basé sur la vitesse radiale maximale ou minimale, mesurée respectivement dans les zones de flux centrifuge et centripète, près du centre de la cavité. La vitesse est adimensionnée par la vitesse tangentielle critique du cylindre interne,  $r_i^* \Omega_{i,crit}$ .

Ce comportement est lié aux variations de taille des zones centrifuges et centripètes pour les différentes configurations étudiées et pour les différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

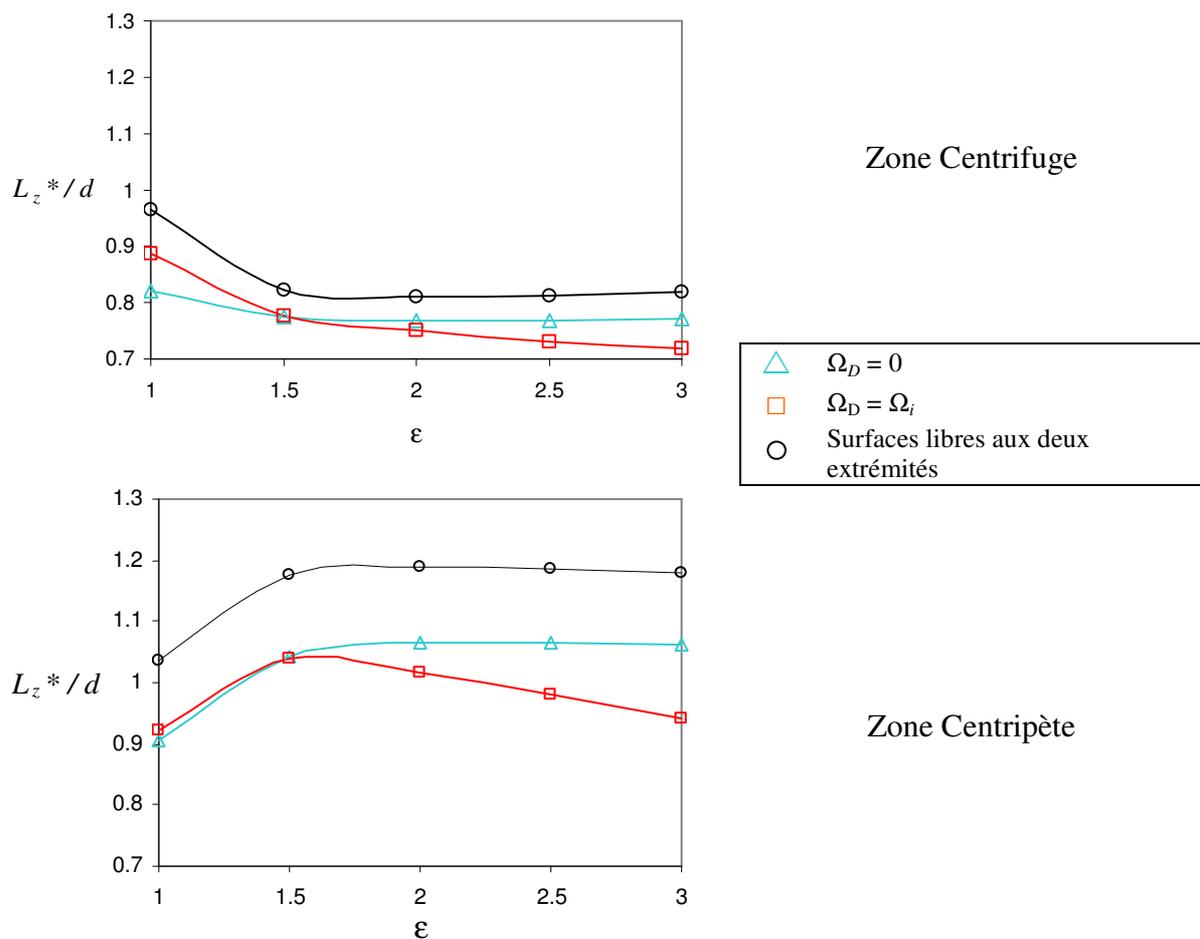
L'épaisseur de ces zones d'écoulement a été mesurée à partir des profils axiaux de vitesse radiale  $V_r$  à  $r^* = (r_i^* + r_o^*)/2$ , comme montré sur la Fig. 3-19. L'ensemble des mesures est représenté en Fig. 3-20 pour  $1 \leq \varepsilon \leq 3$ , et montre que l'épaisseur est beaucoup plus sensible aux conditions limites dans le cas des zones centripètes. Ainsi, pour un  $\varepsilon$  donné, l'épaisseur de la zone centripète est plus grande dans le cas de surfaces libres que dans le cas de parois solides, ceci entraînant par simple conservation du débit la diminution du maximum de vitesse radiale observée en Fig. 3-18.

D'autre part, l'épaisseur de ces zones d'écoulement est indépendante de  $\varepsilon$  (pour  $\varepsilon > 1.5$ ) excepté dans le cas des parois solides tournantes où celle-ci diminue sensiblement lorsque  $\varepsilon$  augmente. Ce comportement est lié à l'extension axiale des vortex marginaux qui augmente sensiblement avec

$\varepsilon$  dans le cas de parois tournantes et qui reste quasi-constante dans les autres configurations (Fig. 3-16).



**Fig. 3-19** – Mesure de l'épaisseur des zones centrifuge et centripète à partir d'un profil  $V_r^*(z)$ ,  $r^*$  fixé à  $(r_i^* + r_o^*)/2$  (ici pour le cas  $\text{Re}_i = 128.7$ , soit  $\varepsilon = 1.5$ ).



**Fig. 3-20** – Épaisseur des zones centrifuge et centripète les plus proches du plan  $z^* = 0$ , en fonction de  $\varepsilon$ ; les mesures sont effectuées en  $r^* = (r_i^* + r_o^*)/2$ , comme montré à la figure (Fig. 3-19).

### 3.2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'interaction couche limite de paroi / tourbillon de Taylor. Nous avons principalement étudié l'influence des conditions-limites aux parois terminales sur cette interaction, ainsi que sur la bifurcation écoulement de Couette / écoulement de Taylor. Dans le cas de parois solides, la bifurcation fourche disparaît au profit d'une évolution continue de l'écoulement. La présence de parois solides accélère le temps d'établissement de la solution de Taylor par la présence d'un vortex de bord qui, entraînant une structure tourbillonnaire initiale, « favoriserait » le développement de l'écoulement de Taylor.

Cette étude a montré que les caractéristiques du vortex marginal sont profondément dépendantes de la nature de la condition-limite, et plus précisément de l'intensité du flux dans la couche limite du disque de bord. Une approche simple, basée sur l'équilibre entre force centrifuge près du disque et gradient de pression géostrophique, permet de déterminer *a priori* la direction de l'écoulement dans la couche limite du disque. Les simulations ont montré que dans le cas de surfaces libres, cette direction peut être déterminée par la condition initiale utilisée. D'autre part, cette configuration est la plus proche de la configuration de Taylor-Couette en cylindres de longueur infinie.

## 3.3 Interaction entre la couche d'Ekman et le Wavy Wortex Flow (WVF) : simulations rotor-stator tridimensionnelles.

Dans cette section, on se propose de mettre en évidence l'influence des parois terminales sur des écoulements WVF obtenus à  $\varepsilon = 8$  et en conservant les paramètres géométriques  $\eta = 0.75$ ,  $\Gamma = 6$ . Comme l'a démontré Cole [21], le confinement axial influence la bifurcation secondaire TVF / WVF en retardant la transition par rapport au cas de cylindres de longueur infinie, et ce d'autant plus que le rapport d'aspect du système est petit.

### 3.3.1 Contrôle de la convergence des solutions.

Ce contrôle s'effectue en considérant les variations temporelles d'une variable caractéristique de l'écoulement (composantes de la vitesse par exemple) en un ou plusieurs points de la cavité. Afin de détecter rapidement la présence de modes 3D azimutaux, nous avons considéré les variations temporelles de l'énergie spectrale  $E_k$ , définie, pour un mode de nombre d'onde  $k = 2\pi / \lambda_\theta$ , où  $\lambda_\theta$  est la longueur d'onde azimutale du mode, par :

$$\begin{aligned} E_k(r, z) &= \left| \hat{V}_{r,k}(r, z) \right|^2 + \left| \hat{V}_{\theta,k}(r, z) \right|^2 + \left| \hat{V}_{z,k}(r, z) \right|^2 \\ &= E_{r,k} + E_{\theta,k} + E_{z,k} \end{aligned} \quad 3-14)$$

où  $\hat{V}_{r,k}$ ,  $\hat{V}_{\theta,k}$  et  $\hat{V}_{z,k}$ , complexes, sont les transformées de Fourier pour le mode  $k$  des composantes de la vitesse dans la direction périodique  $\theta$ .  $|\cdot|$  désigne le module d'un nombre complexe.

La stabilité des écoulements vis-à-vis de petites perturbations a été testée pour deux valeurs de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 6$ ,  $\varepsilon = 8$ ). La perturbation  $\mathbf{v}$  est introduite sur le champ de vitesse initial sous la forme :

$$\mathbf{v} = a \sin(k_{init} \theta) \mathbf{V} \quad (3-15)$$

où  $V$  est le champ de vitesse initial,  $k_{init}$  le mode azimutal de la perturbation, et  $a$  un coefficient d'amplitude. On s'est assuré que le nouveau champ perturbé  $V + v$  qui n'est pas *a priori* à divergence nulle vérifie l'équation de continuité après une itération en temps.

### 3.3.2 Transition vers le Wavy Vortex Flow.

Dans cette section, les écoulements de base sont obtenus à partir des écoulements bidimensionnels TVF à  $\varepsilon = 3$  (on rappelle  $\varepsilon = Re_i / Re_{i,crit}$ , où  $Re_{i,crit}$  est le Reynolds critique de la première transition CCF / TVF) et pour les différentes conditions limites  $\Omega_D = 0$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$ , ou surfaces libres (section 3.2.2). Ces solutions bidimensionnelles sont recopiées dans 96 plans azimutaux équidistants afin d'obtenir des écoulements de base définis sur un maillage tridimensionnel. Ces écoulements sont axisymétriques et stationnaires.

Pour  $\varepsilon \leq 6$ , l'écoulement demeure axisymétrique et stationnaire quelles que soient les conditions limites considérées ( $E_k$  égale le zéro-machine pour tout  $k \neq 0$ ). De plus, ces écoulements se sont montrés stables à toute perturbation de la forme ((3-15) jusqu'à une amplitude  $a = 10\%$ ).

La transition vers le WVF 3D instationnaire a été obtenue à  $\varepsilon = 8$  en bon accord avec les observations expérimentales de Di Prima *et al* [26] ( $\varepsilon \approx 8$ ), dans une cavité de même rapport de rayons  $\eta = 0.75$  mais de rapport d'aspect différent  $\Gamma = 16$ . Ce résultat laisse supposer que pour les paramètres ( $\eta, \Gamma$ ) considérés, le seuil critique de la seconde bifurcation TVF / WVF dépend peu du rapport d'aspect de la cavité.

L'écoulement à  $\varepsilon = 8$  s'est révélé extrêmement sensible aux conditions initiales et au nombre d'onde  $k_{init}$  de la perturbation initiale, entraînant l'existence de solutions multiples (de nombre d'onde dominant au centre  $k \in [0 ; 3]$ ) pour un même jeu de conditions limites. Pour chaque jeu de condition limite, la condition initiale est composée de 6 vortex axisymétriques. Les caractéristiques de ces solutions sont résumées pour chacune des conditions limites dans le Tableau 3-1.

En l'absence de perturbation, l'écoulement demeure de type TVF. Les travaux expérimentaux et numériques antérieurs ont mis en évidence des écoulements WVF de nombres d'onde azimutal compris entre 1 et 8 (Edwards *et al* [29], Mullin & Benjamin [55], Street & Hussaini [79]). En conséquence, afin de favoriser l'apparition de ces modes tridimensionnels, nous avons choisi des perturbations à deux nombres d'onde  $k_{init} = 3$  et  $k_{init} = 5$  compris dans l'intervalle  $[1 ; 8]$ .

- Dans le cas de disques tournants (cas A et B), le nombre de 6 vortex dans le plan méridien de la condition initiale TVF est conservé indépendamment de  $k_{init}$ . Pour les deux valeurs considérées  $k_{init} = 3$  et  $k_{init} = 5$ , on obtient un écoulement WVF de nombres d'onde azimutaux dominant au centre  $k = 3$  et  $k = 2$  respectivement. L'existence de nombres d'onde critiques multiples pour des écoulements de type WVF est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Coles [22] (voir aussi section 1.2.1) obtenus dans le cas de rapports d'aspect plus grand ( $\Gamma = 14$ ).
- Dans le cas de disques fixes (cas C et C'), la solution s'est montrée plus sensible à la condition initiale qu'à la perturbation considérée. En effet, les perturbations sont amorties après un temps relativement court. Dans cette configuration, l'écoulement WVF n'a pu être obtenu qu'en partant de l'écoulement 3D obtenu dans le cas B décrit précédemment. Le changement de conditions limites a entraîné l'apparition de deux vortex supplémentaires dans le plan méridien, mais n'a pas modifié le nombre d'onde azimutal dominant au centre de l'écoulement WVF initial. Ces deux vortex supplémentaires résultent certainement d'un cisaillement plus fort introduit par le changement de condition limite qui a scindé chaque vortex d'Ekman en une paire de deux vortex contrarotatifs.

- Dans le cas de surfaces libres (cas D, D' et D''), les perturbations de la solution TVF ont toujours été amorties. D'autre part, deux conditions initiales de type WVF ont été considérées (cas B et C). La solution WVF s'est maintenue (8 vortex dans le plan méridien et nombre d'onde azimutal dominant au centre  $k = 2$ ) dans le cas C seulement, le changement de conditions aux limites sur les parois terminales ayant ramené la solution WVF 3D à une solution TVF axisymétrique et stationnaire.

Cas	Condition limite	Condition initiale	Nombre d'onde de la perturbation	Nombre de vortex dans un plan méridien ( $r, z$ )	Nombre d'onde azimutal $k$ dominant au centre
A	$\Omega_D = \Omega_i$	6 vortex axisymétriques	$k_{init} = 3$	6	3
B	$\Omega_D = \Omega_i$	6 vortex axisymétriques	$k_{init} = 5$	6	2
C	$\Omega_D = 0$	Cas B	-	8	2
C'	$\Omega_D = 0$	6 vortex axisymétriques	$k_{init} = 3$ ou 5	6	0
D	Surfaces libres	Cas C	-	8	2
D'	Surfaces libres	6 vortex axisymétriques.	$k_{init} = 3$ ou 5	6	0
D''	Surfaces libres	Cas B	-	6	0

**Tableau 3-1** – Mise en évidence de solutions multiples à  $\varepsilon = 8$ , pour  $\eta = 0.75$  et  $\Gamma = 6$ . Les conditions initiales dénommées « 6 vortex axisymétriques » correspondent aux conditions axisymétriques à  $\varepsilon = 8$  obtenues pour les mêmes jeux de conditions limites à partir des écoulements de base correspondant à  $\varepsilon = 3$ .  $k = 0$  correspond à un écoulement axisymétrique.

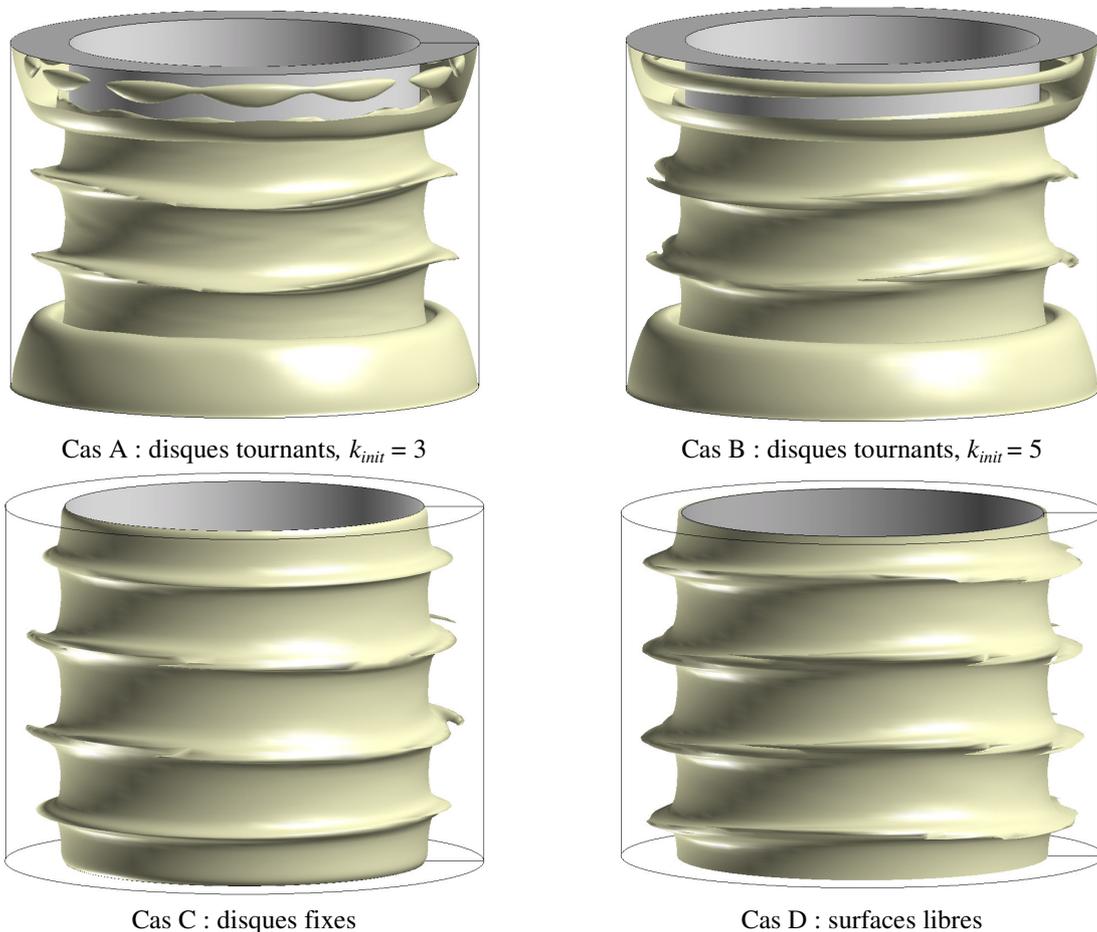
### 3.3.3 Structures spatiales des écoulements.

On se propose dans cette section de décrire la structure spatiale des écoulements WVF pour chacun des cas A, B C et D présentés dans le Tableau 3-1. Les isosurfaces de la vitesse azimutale  $V_{\theta}^* / r_i^* \Omega_i = 0.5$  sont représentées en Fig. 3-21, mettant en évidence de façon très nette les ondulations azimutales.

L'allure générale de l'écoulement dans le plan méridien rappelle celle obtenue dans le cas axisymétrique, comme le montre les champs de vecteurs sur la Fig. 3-22. Le contour  $V_{\theta}^* / r_i^* \Omega_i = 0.5$  (valeur médiane entre la vitesse du cylindre interne et celle du cylindre externe) montre que la quantité de mouvement azimutale est transportée depuis la zone située près du cylindre interne vers le cylindre externe dans des zones d'écoulements correspondant aux zones de flux centrifuges comprises entre deux vortex contrarotatifs. On note également un phénomène de circulation cyclique de fluide entre deux vortex consécutifs comme illustré sur la Fig. 3-23, et semblable à celui visualisé par Wereley & Lueptow [87] (voir Fig. 1-14). Ce phénomène consiste à un changement d'orientation, inclinée vers le haut ou vers le bas, du flux entre deux vortex consécutifs.

Plus en détails, la structure de l'écoulement dans le plan méridien diffère en fonction des cas considérés :

- Dans les cas A et B ( $\Omega_D = \Omega_i$ ), on dénombre 6 vortex. Les tourbillons d'Ekman présentent une importante extension axiale (environ  $1.5 d$ ), qui est à rapprocher de nos résultats bidimensionnels (Fig. 3-16) pour lesquels on avait observé une longueur comprise entre  $1.17 d$  et  $1.33 d$  pour  $\varepsilon$  variant de 1 à 3. Cette observation montre que le tourbillon d'Ekman s'allonge continûment à plus grande rotation des disques pour  $\varepsilon$  variant de 3 à 8. Cet accroissement des tourbillons d'Ekman entraîne une compression des vortex des Taylor dont la hauteur comprise entre  $0.75 d$  et  $0.78 d$  est nettement inférieure à la valeur  $1.002 d$  obtenue dans le cas de cylindres infiniment longs (Lücke *et al.* [50]).
- Dans le cas C ( $\Omega_D = 0$ ), les vortex d'Ekman se divisent en 2 sous l'effet du changement de conditions limites (voir détails section 3.3.2), portant à 8 le nombre de vortex dans le plan méridien. On remarque que contrairement au cas B, le sens de rotation des vortex marginaux est dirigé vers le cylindre interne. Ces caractéristiques demeurent dans le cas D dans lequel les disques fixes du cas C ont été remplacés par des surfaces libres.



**Fig. 3-21** – Isosurface  $V_{\theta}^* / r_i^* \Omega_i = 0.5$  pour chacun des 4 types de Wavy Vortex Flow obtenus. Pour les cas A et B, la partie supérieure de la surface est écorchée afin de permettre l'observation des structures additionnelles dans la zone du vortex d'Ekman.



Le nombre d'onde azimutal dominant au centre du Wavy Vortex Flow est  $k = 2$  pour l'ensemble des cas excepté le cas A où  $k = 3$ , comme on peut le voir sur la Fig. 3-24, où sont représentées les lignes isocontours de  $V_r$  dans un plan horizontal situé à différentes hauteurs. Les valeurs de maximum des vitesses radiales montrent que ces modes sont d'intensités différentes en fonction de leur localisation axiale. Dans l'ensemble des cas, ces modes sont fortement amortis au voisinage des parois terminales (Fig. 3-24, colonne de droite), excepté dans le cas des surfaces libres où l'amortissement est nettement moins sensible. Dans le cas A, on observe même près du disque la présence d'un mode 12 de très faible intensité (Fig. 3-24 cas A), mais néanmoins parfaitement visible sur la Fig. 3-21. D'autres modes secondaires en terme d'intensité (maximum d'énergie spectrale 5 fois inférieur environ) sont également observés dans la cavité. Ces modes sont de nombres d'onde  $k = 1$  (cas C),  $k = 4$  (cas B, C et D), et  $k = 6$  (cas A) (Fig. 3-25).

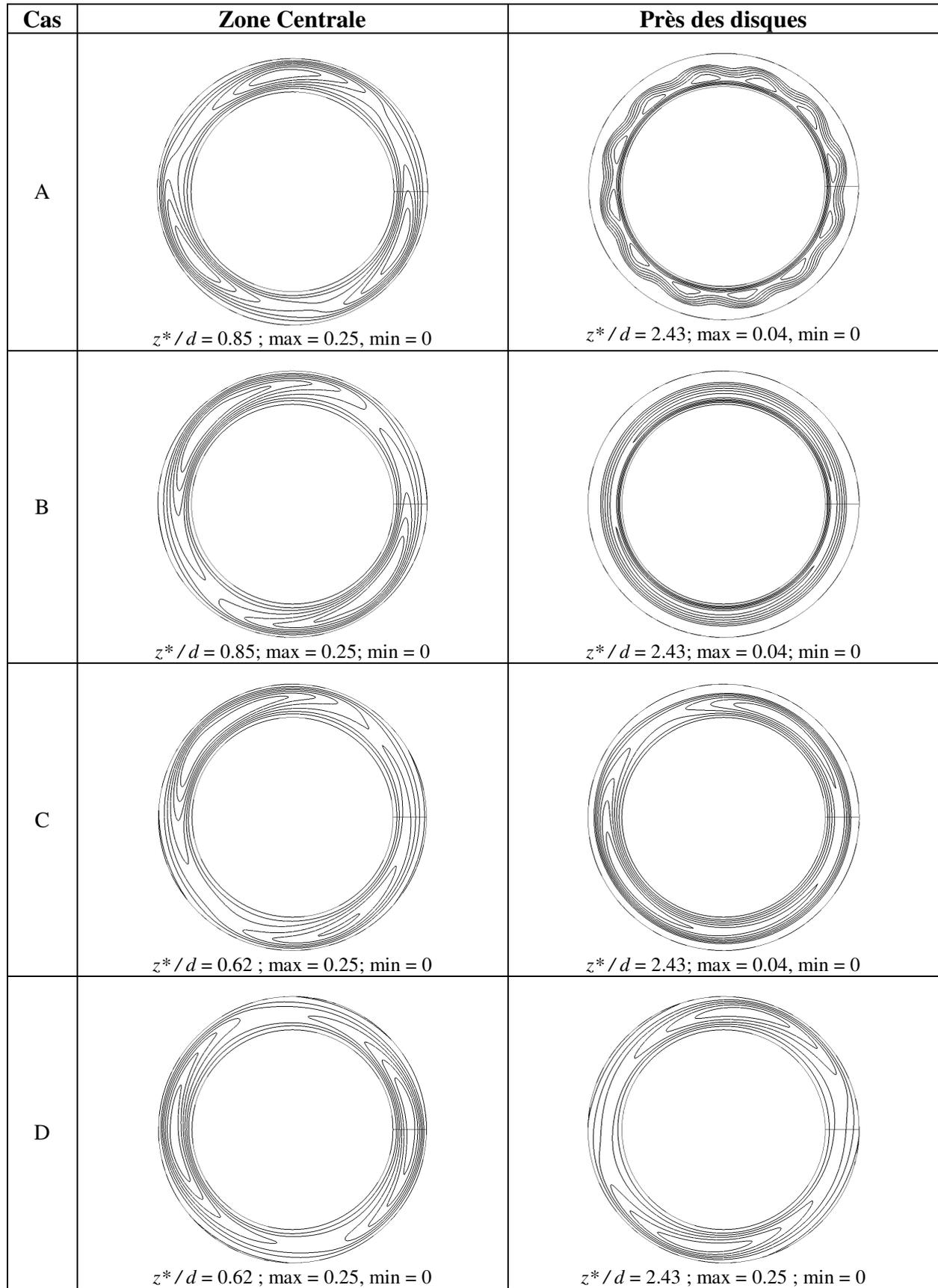
Ces observations montrent que l'amplitude des modes tridimensionnels est réduite au voisinage des parois. Cette réduction pourrait être liée à un effet confinant des disques (pas de flux axial), où à la dissipation visqueuse dans la couche limite.

En effet, bien qu'il puisse paraître évident qu'un disque plat puisse diminuer l'amplitude axiale d'une onde azimutale, il est néanmoins possible que l'énergie correspondante soit transférée dans les directions radiale et azimutale. Or, Wereley & Lueptow [77] ont montré que l'ondulation du WVF est très importante dans la direction radiale. De ce fait, l'effet confinant seul des disques (en l'absence de tout effet visqueux) pourrait ne pas altérer le mouvement ondulatoire de l'écoulement.

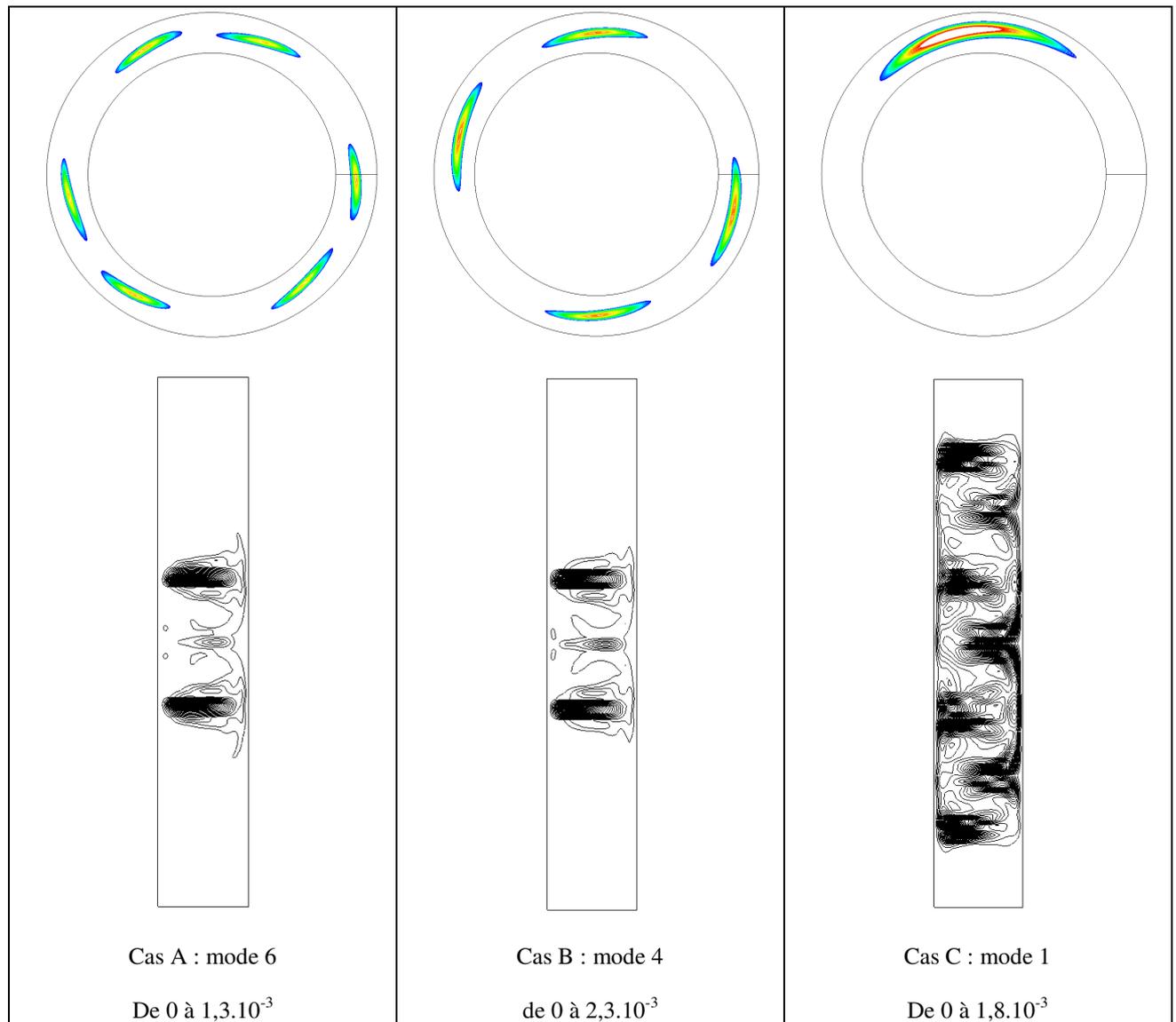
Cette hypothèse semble confirmée par la Fig. 3-26 représentant les contours d'énergie spectrale  $E_k$  pour les modes 2, 3 et 12 pour chacun des cas. On note que le mouvement ondulatoire persiste au voisinage de la surface libre bien que d'intensité légèrement inférieure à celle au centre de la cavité. Pour l'ensemble des autres cas, l'énergie spectrale est négligeable dans les régions d'écoulement situées à l'intérieur des vortex marginaux et en partie dans les vortex adjacents.

Etant donné que notre modèle de surface libre (assimilable à une surface plane) doit nécessairement supprimer l'amplitude axiale de l'ondulation comme indiqué précédemment, nous pourrions nous attendre à une redistribution de l'énergie du mode  $k = 2$  sur les composantes radiale et azimutale de la vitesse. Afin de vérifier ce phénomène, nous avons représenté, pour le cas avec surfaces libres (cas D), les contributions de l'énergie spectrale de chacune des composantes de la vitesse prises séparément (Fig. 3-27). Au voisinage des parois, la composante axiale est nulle, alors que les composantes radiale et azimutale du mode  $k = 2$  sont non nulles, mais de faible intensité. En effet, sur la surface libre, à  $r^* = (r_i^* + r_o^*)/2$ , les contributions radiale et azimutale du mode  $k = 2$  sont d'environ 16% seulement de la valeur maximale qu'elles atteignent sur toute la hauteur de la cavité au même rayon ; par ailleurs, ces mêmes contributions représentent environ 6 % et 8 % (respectivement) du maximum d'énergie totale atteint sur ce même axe.

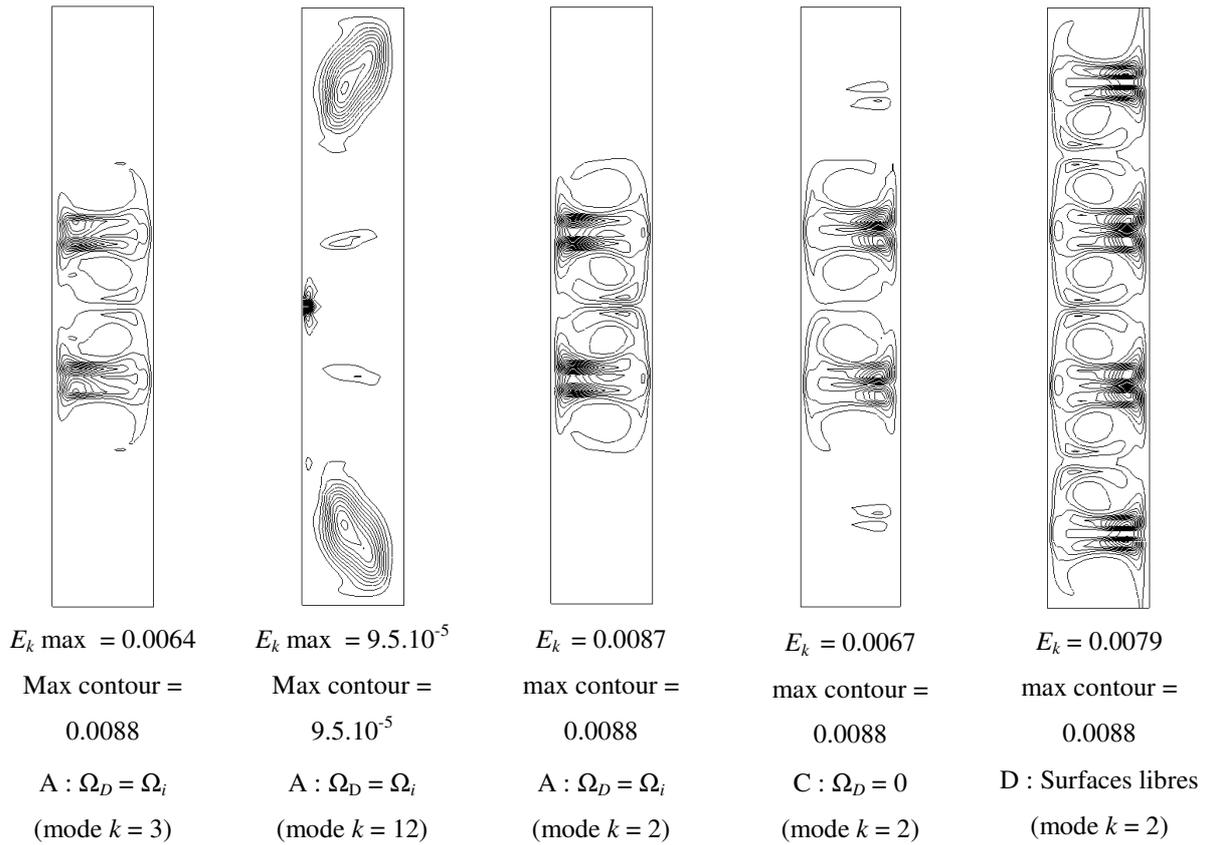
Ainsi, bien que la présence d'une surface plane semble être le facteur le plus important dans la réduction de l'ondulation au voisinage des parois terminales, la dissipation visqueuse dans la couche d'Ekman joue un rôle non négligeable.



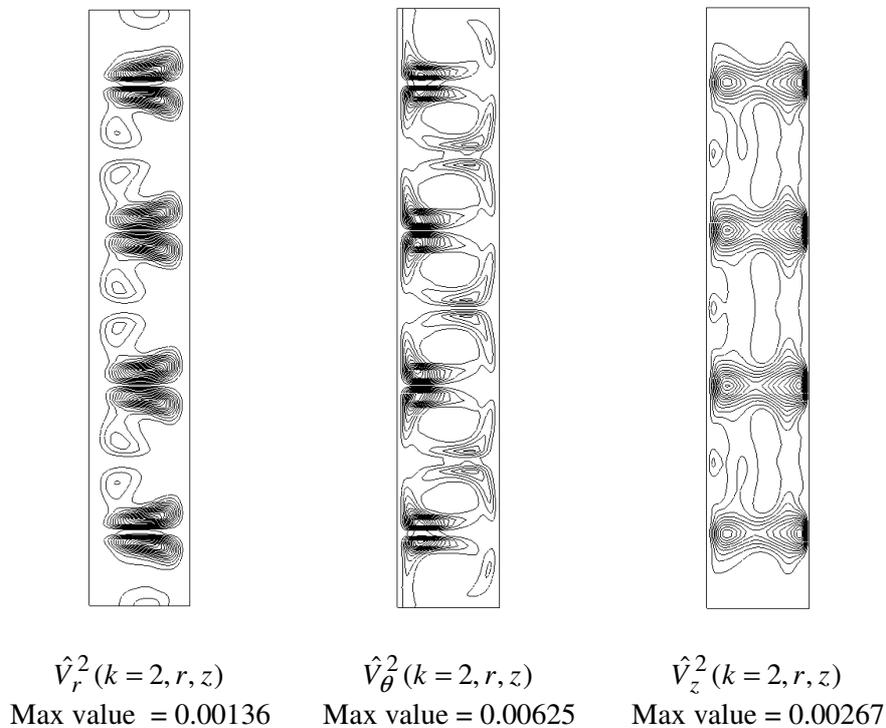
**Fig. 3-24** – Isocontours de  $V_r^*/r_i^* \Omega_i$  dans le plan  $(r, \theta)$ , montrant les modes azimutaux. Cas A : trois ondes sont évidentes dans le plan  $z^* = 0.85 d$  ( $0.85 d$  au-dessus du plan médian  $z^* = 0$  à mi-hauteur); cas B : deux ondes dans le plan  $z^* = 0.85 d$ ; cas C : deux ondes à  $0.62 d$  au dessus du plan  $z^* = 0$ ; cas D : deux ondes à  $0.62 d$  au dessus du plan  $z^* = 0$ . La ligne horizontale noire représente le plan  $\theta = 0$ .



**Fig. 3-25** – Visualisation des modes secondaires. En haut : isocontours de la vitesse radiale dans un plan horizontal ; en bas, contours de l'énergie spectrale  $E_k$  pour les modes secondaires, dans un plan  $(r, z)$ . Ces contours permettent de saisir la localisation spatiale des oscillations associées aux modes considérés. La plage de valeur indiquée sous les figures indique le minimum et le maximum de l'énergie spectrale pour chacun des modes correspondant.



**Fig. 3-26** – Contours de l'énergie spectrale  $E_k$  pour les modes principaux dans un plan méridien de l'écoulement. Pour chacune des figures, le cylindre interne est représenté par la ligne verticale de gauche, le cylindre externe par celle de droite. Sous chacune des figures sont indiqués le maximum atteint par  $E_k$ , et le maximum d'échelle utilisé.



**Fig. 3-27** – Contours des composantes de l'énergie spectrale  $E_k$  pour le mode 2, dans un plan méridien de l'écoulement, pour le cas D (surfaces libres). Pour chacune des figures, le cylindre interne est représenté par la ligne verticale de gauche, le cylindre externe par celle de droite.

En comparant les Fig. 3-22 et Fig. 3-26, il est clair que le maximum d'énergie des modes tridimensionnels est atteint autour des zones d'écoulements centrifuges entre deux vortex consécutifs. Ces zones coïncident avec les crêtes des isosurfaces  $V_{\theta}^* / r_i^* \Omega_i = 0.5$ . Cette observation est en contradiction avec les mesures effectuées par Wereley & Lueptow [87] dans le cas de longs cylindres à grand nombre de Reynolds, et d'après lesquelles la frontière centripète oscillait plus que la frontière centrifuge. Nous n'avons pas d'explication définitive à cette contradiction, mais une hypothèse résiderait dans la multiplicité des solutions qui caractérise le WVF et qui permettrait l'une ou l'autre des situations.

Considérons à présent la couche d'Ekman plus en détails. Les profils axiaux de la composante radiale de la vitesse en  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$  sont représentés en Fig. 3-28 dans la partie supérieure de la cavité ( $0 < z^*/d < 3$ ) pour les trois cas à  $k=2$  (le cas  $k=3$  étant relativement similaire). Ces profils sont semblables aux profils des vecteurs vitesse obtenus dans le cas axisymétrique (Fig. 3-15), excepté que l'ondulation de la solution nécessite ici la représentation de plusieurs profils à différentes positions azimutales, rendant la représentation vectorielle impossible.

- Dans les cas A, B et C, les profils mettent clairement en évidence une couche limite de fluide centrifuge (cas A et B) ou centripète (cas C) de type Ekman au voisinage du disque en  $z^*/d = 3$ . Le recouvrement des courbes au voisinage du disque montre que l'épaisseur  $\delta_e$  de la couche d'Ekman varie peu en fonction de  $\theta$  et que, par conséquent, cette région d'écoulement est peu affectée par le mouvement ondulatoire. Ce résultat est cohérent avec l'amortissement des énergies spectrales observé précédemment au voisinage des parois terminales au niveau des énergies spectrales. Des mesures précises de  $\delta_e$  à partir de la Fig. 3-28 (basée sur la position axiale du maximum de la vitesse radiale près du disque, comme montré sur la Fig. 3-5) montrent que  $\delta_e / d = 0.065$ , ce qui est en très bon accord avec le résultat issu de l'approximation (3-10),  $\delta_e / d = 0.066$ . On remarque que l'accord entre valeur estimée et valeur mesurée est ici meilleur que dans le cas des simulations axisymétriques, probablement à cause d'une vitesse de rotation plus grande, plus proche des conditions théoriques de validité de l'approximation.

Plus loin du disque, le mouvement ondulatoire est évidemment plus perceptible, ce qui se traduit par une dispersion plus importante des profils en fonction de la position azimutale.

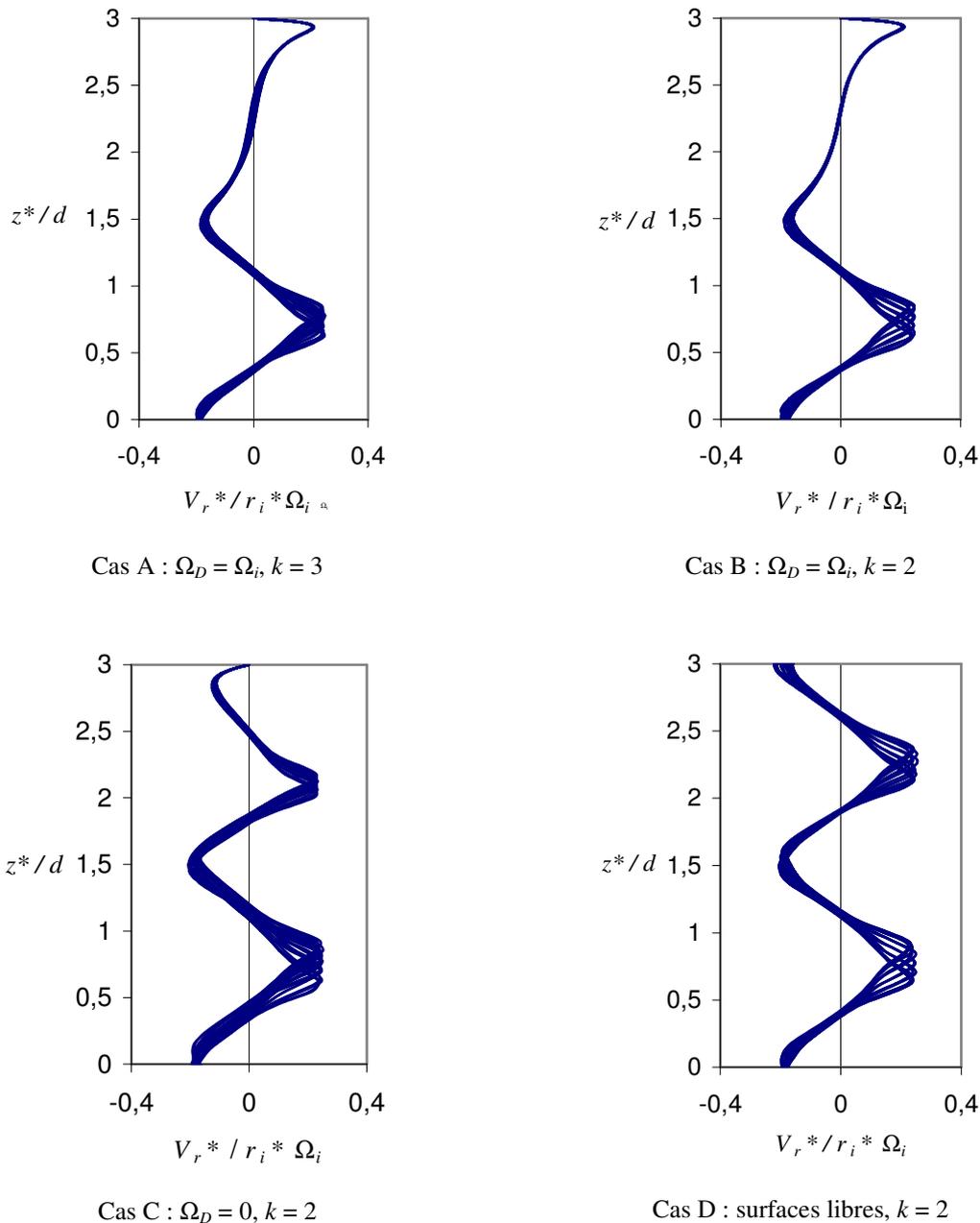
- Dans le cas D, et contrairement aux cas précédents, le mouvement ondulatoire affecte l'écoulement sur toute la hauteur. En effet, les profils de vitesse radiale varient sensiblement de la même manière en fonction de la position azimutale au voisinage de la surface libre que dans le reste de la cavité. Cette remarque montre une nouvelle fois que la surface libre n'influence que très faiblement l'écoulement voisin.

Il est aussi possible à partir de ces profils d'estimer le déplacement azimutal des frontières entre les vortex (Fig. 3-29). Pour cela, on considère que la position axiale où  $V_{r^*} / r_i^* \Omega_i$  atteint son maximum (ou minimum) correspond à la zone frontière entre deux vortex et que la position axiale où  $V_{r^*} / r_i^* \Omega_i = 0$  correspond au centre d'un vortex. Les variations axiales de ces positions en fonction de l'azimut donnent directement l'amplitude du mouvement des vortex. Les mesures correspondantes figurent dans le Tableau 3-2. On constate que le mouvement oscillatoire au centre de la cavité est très peu influencé par la condition limite à la paroi terminale : entre  $0.23 d$  et  $0.30 d$  dans le cas de frontières centrifuges, et identique ( $0.16 d$ ) dans le cas de frontières centripètes. L'influence de la condition limite est plus importante dans le cas du mouvement des vortex marginaux.

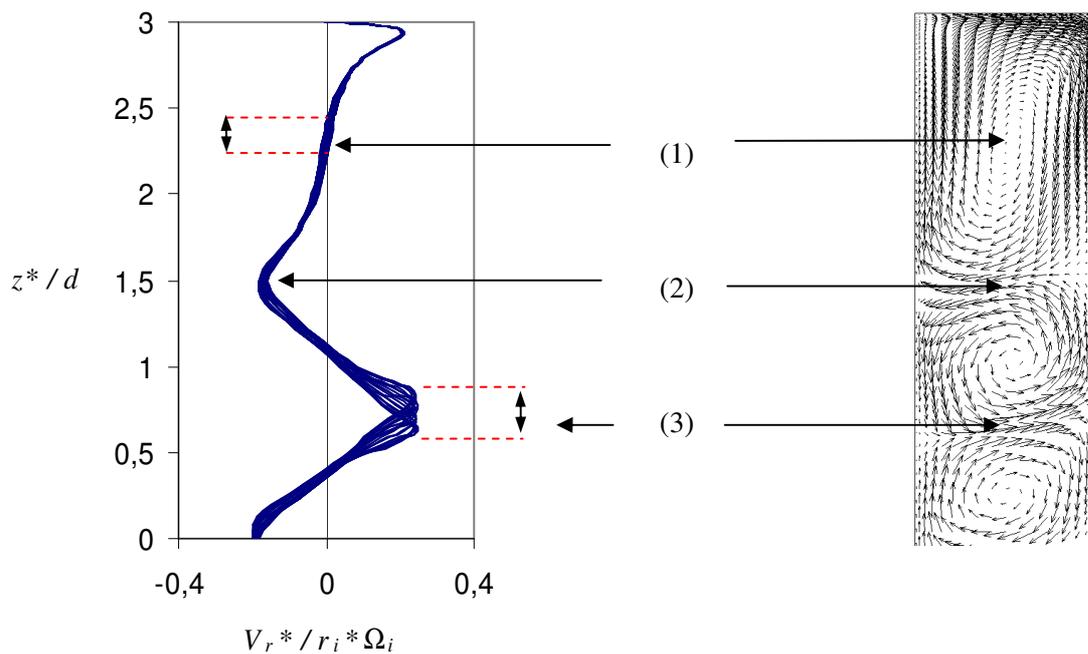
Dans tous les cas excepté le cas A, le caractère ondulatoire des vortex marginaux est très limité, la position du centre variant très peu avec l'azimut (déplacement axial compris entre  $0.06 d$  et  $0.08 d$ ). Dans le cas A par contre, comme nous l'avons constaté précédemment, la présence d'un mode  $k=12$  au voisinage du disque tournant entraîne un déplacement axial non négligeable du centre des vortex marginaux de l'ordre de  $0.25 d$ .

Dans l'ensemble des cas avec parois terminales non glissantes (cas A, B et C), l'oscillation de la frontière entre le vortex marginal et le vortex de Taylor immédiatement consécutif est faible. Plus précisément, il est négligeable dans les cas A et B ( $0.06 d$ ), et faible dans le cas C ( $0.14 d$ ).

Dans le cas avec surfaces libres, cette oscillation est plus importante, de l'ordre de  $0.26 d$ . On remarque que cette oscillation est proche des oscillations mesurées dans la frontière centrifuge entre deux vortex de Taylor consécutifs au centre de la cavité ( $0.30 d$ ), montrant le faible effet de la surface libre sur l'amortissement des ondulations.



**Fig. 3-28** – Superposition de profils de la vitesse radiale  $V_{r^*} / r_i^* \Omega_i$  en fonction de  $z^* / d$ , pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$ , dans la partie supérieure de la cavité ( $0 \leq z^* / d \leq 3$ ). La position radiale est fixée à mi-distance des deux parois cylindriques, en  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$ .



**Fig. 3-29** – Mesure de l’amplitude de déplacement des centres de vortex ou des frontières entre vortex, à partir d’un profil axial de la vitesse radiale; (1) : centre du vortex marginal d’Ekman; (2) frontière entre vortex marginal et premier vortex de Taylor; (3) Frontière centrifuge entre deux vortex de Taylor.

	Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
Centre du vortex d’Ekman (1)	0.25 $d$	0.05 $d$	0.08 $d$	0.06 $d$
Frontière entre le vortex d’Ekman et le vortex de Taylor adjacent (2)	0.06 $d$	0.06 $d$	0.14 $d$	0.26 $d$
Centre du vortex de Taylor adjacent au vortex d’Ekman.	0.05 $d$	0.04 $d$	0.10 $d$	0.03 $d$
Frontière (centrifuge, $V_r^* > 0$ ) entre 2 vortex de Taylor au-dessus du plan $z^* = 0$ (3)	0.23 $d$	0.23 $d$	0.30 $d$	0.30 $d$
Frontière (centripète, $V_r^* < 0$ ) entre 2 vortex de Taylor au niveau du plan $z^* = 0$	0.16 $d$	0.16 $d$	0.16 $d$	0.16 $d$

**Tableau 3-2** – Oscillations des structures de l’écoulement, mesurée par le déplacement de l’ordonnée  $z^*/d$  des zones où  $V_r^* = 0$  (centre d’un vortex),  $V_r^*$  atteint un maximum local (frontière centrifuge),  $V_r^*$  atteint un minimum local (frontière centripète). Le plan  $z^* = 0$  est matérialisé par les pointillés. Le fléchage précise (ici pour le cas A) chacune des zones où les mesures sont effectuées.

Un dernier commentaire concerne l'augmentation des maxima (ou minima) de vitesse radiale mesurés dans les zones frontières entre deux vortex de Taylor consécutifs par rapport au cas axisymétrique *Taylor Vortex Flow* ( $\varepsilon = 3$ ). En effet, le maximum  $|V_{r^*} / r_i^* \Omega_i|_{\max}$  s'accroît de 0.20 à 0.25 dans le cas de frontières centrifuges, et de 0.12 à 0.20 dans le cas de frontières centripètes. Ceci signifie qu'en régime WVF ( $\varepsilon = 8$ ), une partie plus importante de la quantité de mouvement apportée par la rotation du système est injectée dans le mouvement de rotation des vortex. Ce résultat est consistant avec les observations expérimentales de Wereley & Lueptow [87].

*Épaisseur de couche limite au niveau des disques terminaux.*

En reprenant les estimations données par les équations (3-10) et (3-12), on obtient  $\delta_D / d = 0.065$  pour le cas  $\Omega_D = \Omega_i$ , et  $\delta_D / d = 0.08$  pour  $\Omega_D = 0$ . Les mesures à partir des profils axiaux de vitesse radiale donnent 0.065 et 0.147 respectivement. On note que l'accord entre les mesures et l'estimation est bon dans le cas des disques tournants, mais il est moins satisfaisant pour le cas de disques fixes, probablement parce que l'hypothèse, utilisée par (3-10), selon laquelle la vitesse du fluide suit le profil de Couette loin du disque n'est ici plus valide. Une autre raison est à chercher dans la très forte interaction entre la structure tourbillonnaire et l'écoulement de couche limite.

### 3.3.4 Dynamique temporelle des écoulements.

Dans l'ensemble des cas considérés, la perturbation de la solution initiale stationnaire axisymétrique a conduit à une solution tridimensionnelle oscillatoire caractérisée par la présence d'ondes tournantes de nombres d'onde dominants  $k = 2$  ou  $k = 3$ . Des ondes tournantes d'intensité secondaire ont aussi été observées (section 3.3.3) de nombre d'onde  $k = 1$ ,  $k = 4$ , et  $k = 6$ . L'évolution temporelle de la composante radiale de la vitesse  $V_{r^*} / \Omega_i r_i^*$  est représentée en Fig. 3-30 au centre de la cavité et au voisinage d'une paroi terminale pour les quatre cas A, B, C et D. L'unité de temps est le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$  défini en (3-8). Dans les cas B et D, ces solutions sont de fréquence dominante  $f / f_i = 1.5$ , et on note sur les spectres de fréquence (Fig. 3-31) la présence de deux harmoniques  $f / f_i = 3$  et  $f / f_i = 4.5$ . Dans le cas A, l'analyse temporelle révèle deux fréquences dominantes incommensurables,  $f / f_i = 1.9$  et  $f / f_i = 5.38$ , correspondant aux deux modes spatiaux  $k = 3$  et  $k = 12$  observés au centre et près des parois terminales respectivement. Une harmonique  $f / f_i = 3.8$  est également observable sur la Fig. 3-31 (cas A). Dans le cas C, la solution est multifréquentielle avec trois fréquences incommensurables dominantes,  $f / f_i = 1.5$ , 1.06 et 0.37. L'ensemble de ces résultats est résumé dans le Tableau 3-3.

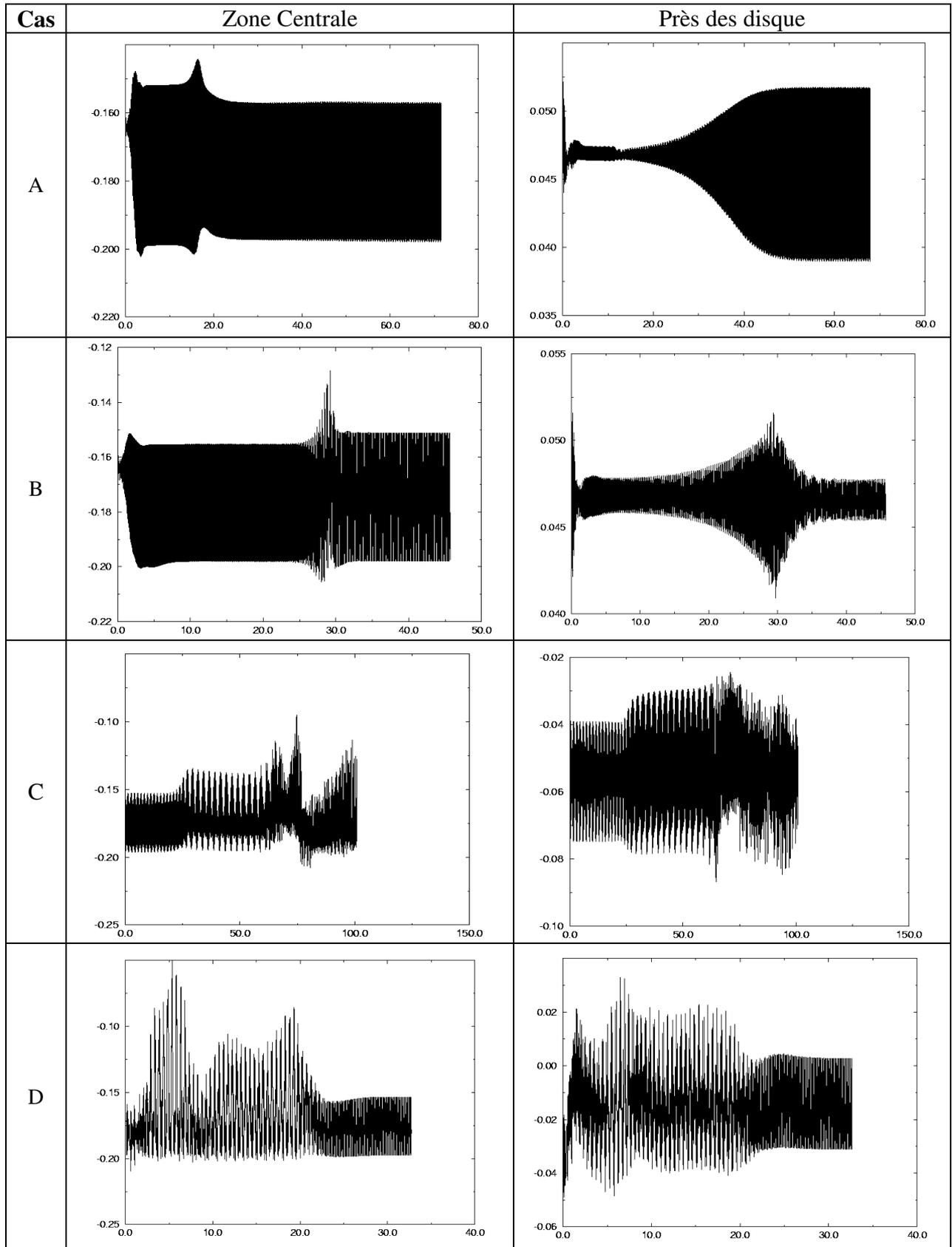
Cas	Nombre d'onde dominant	Fréquence dominante au centre	Fréquence dominante près des parois terminales
A	3 et 12	1.9	5.38
B	2	1.5	1.5
C	2	1.5, 1.06, 0.37	1.5, 1.06, 0.37
D	2	1.5	1.5

**Tableau 3-3** – Caractéristiques spatiotemporelles des écoulements tridimensionnels WVF obtenus dans les différents cas définis dans le Tableau 3-1.

- Dans les cas A et B, la perturbation tridimensionnelle de l'écoulement TVF axisymétrique et stationnaire est introduite à  $t = 0$ . Le temps d'établissement de la solution au centre de la cavité est respectivement d'environ  $25 \mathcal{T}_r$  et  $35 \mathcal{T}_r$ , soit entre 2.5 et 3.5 fois le temps caractéristique de propagation axiale des vortex secondaires défini en section 3.2.1. Dans le cas A, le mode excité  $k = 3$  correspond au mode le plus instable de l'écoulement, pour les conditions limites considérées, et par conséquent, la solution WVF à  $k = 3$  s'établit plus rapidement que dans le cas B. En effet, dans ce dernier cas, le mode excité  $k = 5$  est très nettement visible pour  $t < 30 \mathcal{T}_r$  (Fig. 3-32) mais se montre instable pour les conditions limites considérées, et la solution converge finalement vers le WVF à  $k = 2$ .
- Dans le cas C, le temps initial  $t = 0$  correspond à la solution établie obtenue à  $t = 45$  dans le cas B (WVF à  $k = 2$ ). Pendant un temps de l'ordre de  $30 \mathcal{T}_r$ , le WVF à  $k = 2$  domine, correspondant à un régime oscillatoire de fréquence  $f / f_i = 1.5$ . Puis, un nouveau mode apparaît conduisant à un régime quasi-périodique à deux fréquences jusqu'à un temps d'environ  $t = 65 \mathcal{T}_r$ . Finalement, un régime multifréquence à trois fréquences dominantes s'établit,  $f / f_i = 1.5, 1.06$  et  $0.37$ , correspondant aux modes dominants  $k = 1, 2$  et  $4$ .
- De même que dans le cas C, la solution initiale du cas D à  $t = 0$  est la solution multipériodique obtenue à  $t = 100$  dans le cas C. Le changement de condition limite entraîne après un temps d'environ  $25 \mathcal{T}_r$  une restabilisation de la solution vers un régime oscillatoire de fréquence  $f / f_i = 1.5$ . Seul le mode dominant  $k = 2$  persiste. Les modes  $k = 4$  et  $k = 6$  dans cette configuration d'intensités plus faibles, correspondent aux deux harmoniques  $2f / f_i$  et  $3f / f_i$ .

Excepté dans le cas A, les fréquences dominantes restent les mêmes au centre de la cavité et près des parois. L'existence dans le cas A d'un mode azimutal  $k = 12$  dans la zone de proche paroi de l'écoulement est en bon accord avec les observations que l'on peut faire à partir de visualisations expérimentales de Coles [22] (Fig. 3-33), Fenstermacher *et al.* [31], Andereck *et al.* [5], dans lesquelles des modes de grand nombre d'onde (plusieurs fois le nombre d'onde du WVF) sont nettement visible à proximité des parois terminales.

Les caractéristiques spatio-temporelles de ces modes de grand nombre d'onde (localisation près des parois, fréquence incommensurable avec la fréquence dominante au centre de la cavité) semblent indiquer qu'ils sont liés à un mécanisme d'instabilité différent que celui de l'instabilité centrifuge. La fréquence  $f / f_i = 5.38$  et le nombre d'onde  $k = 12$  semble être cohérent avec les caractéristiques spatio-temporelles de l'instabilité visqueuse de la couche d'Ekman observées par Serre [62] dans le cas d'une cavité interdisques de type rotor-stator.



**Fig. 3-30** – Enregistrement de la vitesse  $V_r^* / r_i^* \Omega_i$  en fonction du temps. La vitesse est enregistrée en deux points : au centre de la cavité,  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$ ,  $z^* = 0$  ; près du disque,  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$ ,  $z^* = 2.63 d$ . L'unité de temps est le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$  défini par (3-8).

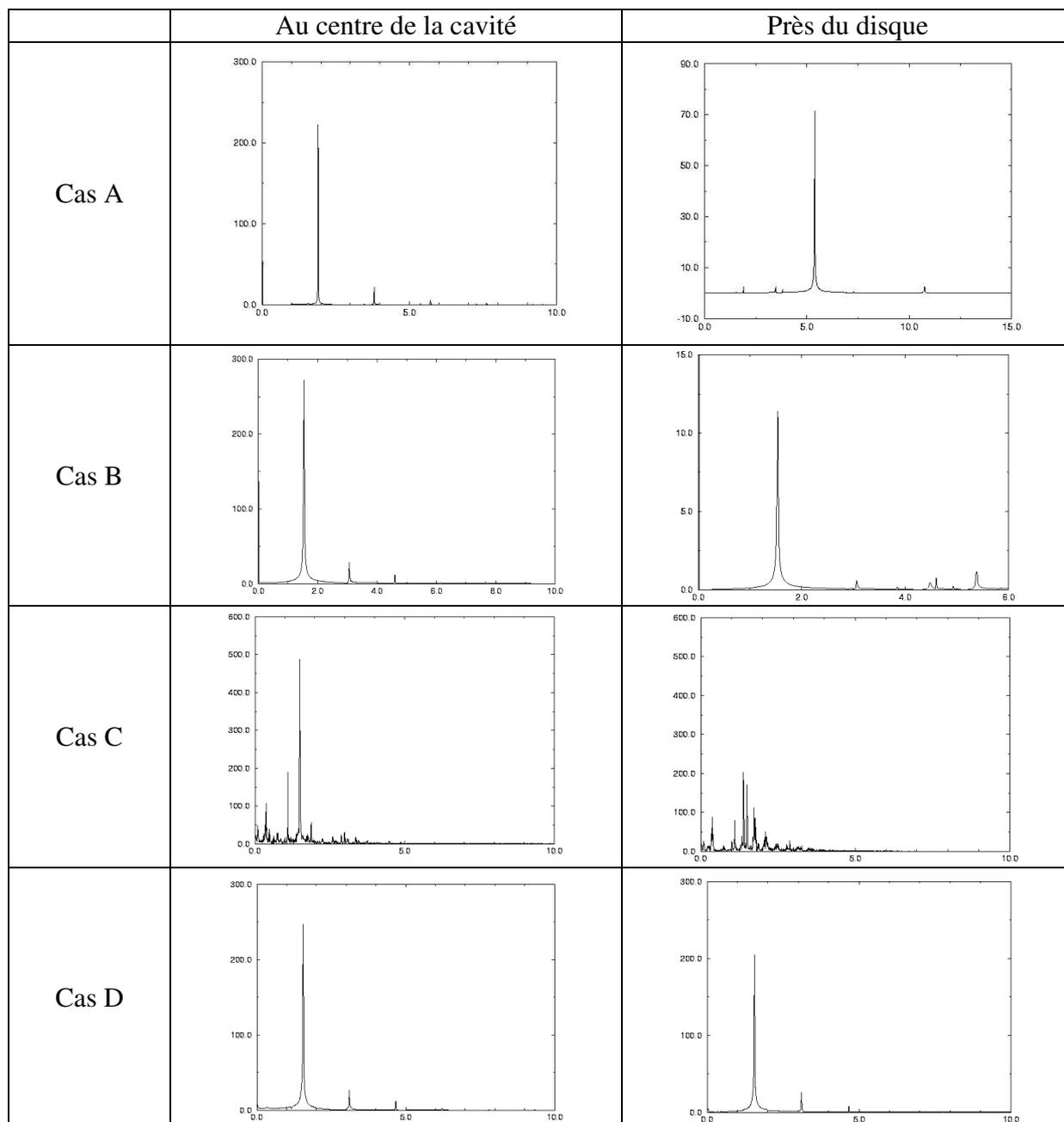
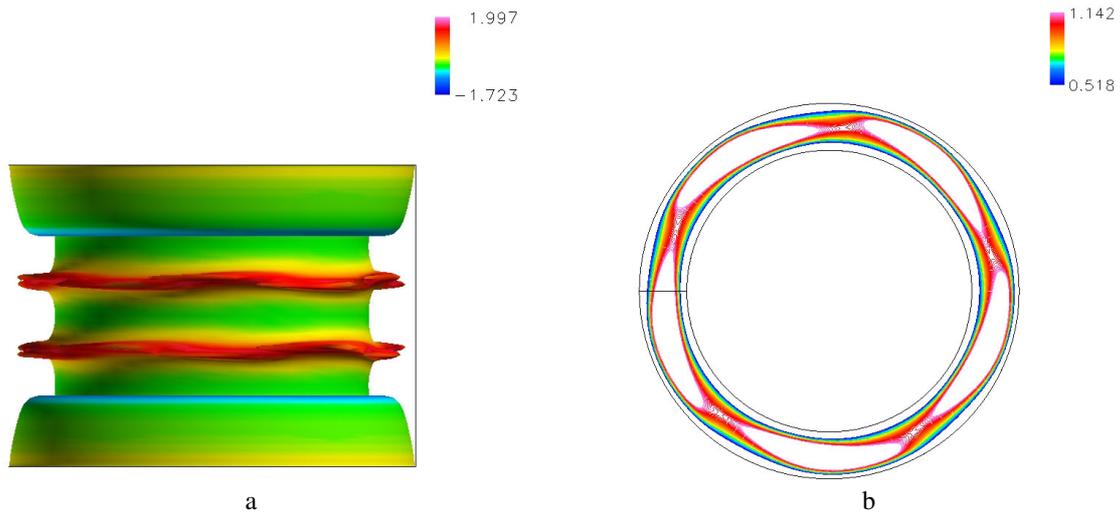
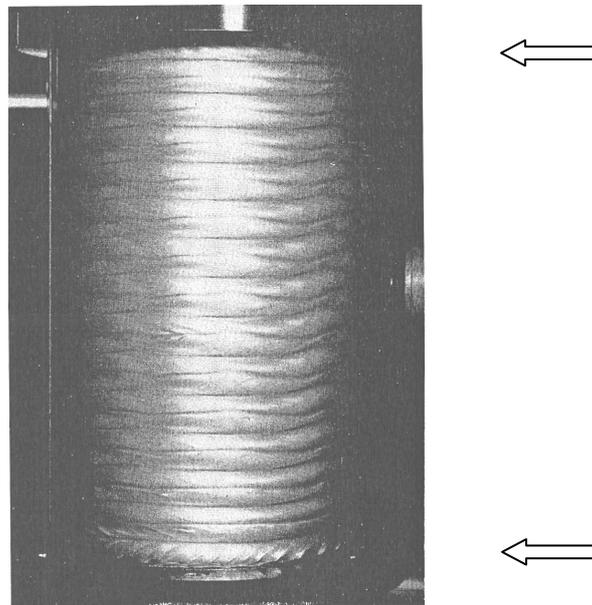


Fig. 3-31 – Spectres en fréquence des enregistrements de vitesse après établissement de la solution.



**Fig. 3-32** – a ) Visualisation 3D de l'isosurface  $V_\theta = 0.44$  de la solution transitoire du cas B, avec un mode azimutal dominant  $k = 5$  ; b) Isocontours de  $V_r$ , dans un plan horizontal, mettant en évidence le mode dominant  $k = 5$ .



**Fig. 3-33** – Visualisation d'un WVF par technique kalliroscope (Coles [22]). On distingue près des parois terminales (indiquées par des flèches en haut et en bas) la présence d'un mode azimutal de nombre d'onde supérieur à celui observable au centre du système.

### 3.3.5 Conclusion

Cette partie a pu mettre en évidence la complexité des solutions étudiées. Nous nous sommes intéressés à l'effet des frontières terminales sur l'écoulement, problème peu documenté dans la plupart des travaux précédents sur le WVF en configuration rotor-stator. Selon les conditions limites appliquées aux frontières terminales du système, des comportements multimodes et multifréquentiels ont été observés. La conclusion principale à apporter ici est que le frottement aux parois n'est pas le responsable majeur de l'amortissement des ondulations de l'écoulement à proximité des frontières. Des modes de fréquence azimutale plus élevée que le mode dominant au cœur de la cavité peuvent se développer près des disques terminaux, traduisant des mécanismes d'instabilité différents au cœur du système et à proximité des disques terminaux.





## Chapitre 4

# Configuration contrarotative : étude des régimes WVF, IPS et WIS, et des effets de confinement.

La configuration de Taylor-Couette correspondant à 2 cylindres en contra-rotation donne lieu au développement de régimes complexes conduisant assez rapidement à des régimes turbulents pour des valeurs modérées des nombres de Reynolds de rotation du cylindre interne et du cylindre externe, ce qui est différent de la configuration rotor-stator où les régimes complexes se produisent à des Reynolds plus élevés. Un nombre peu important d'études sont disponibles sur cette configuration. On note l'analyse expérimentale détaillée d'Andereck *et al.* [6] : la configuration étudiée est très allongée -  $\Gamma \sim 30$  - et la zone annulaire est très éloignée de l'axe,  $\eta \sim 0.88$ . Un diagramme de régimes de transition singulièrement complexe est montré en Fig. 1-16., et dans le cas contrarotatif en particulier sur la Fig. 4-1. Dans ses travaux de thèse, Prigent [62] s'est plus focalisé sur le problème de la spirale turbulence, pour des valeurs de  $\eta$  très proches de 1 ( $\eta = 0.963$  ;  $\eta = 0.98$ ) et un très grand rapport d'aspect ( $\Gamma = 203$  ;  $\Gamma = 431$ ).

Les motifs majeurs précédant les régimes turbulents sont caractérisés par leurs modes spatiaux (longueurs d'onde dans les directions axiale et azimutale), les symétries et la fréquence de rotation des modes. Le développement de méthodes de résolution numérique très précises de ces écoulements et la puissance des supercalculateurs actuels, tend normalement à rendre possible la simulation, l'exploration physique des écoulements et la mise en évidence des mécanismes génériques. Il est vrai que l'échelle de la résolution spatiale doit couvrir toutes les échelles caractéristiques des différents motifs et les contraintes de calculs (temps CPU, espace mémoire, ...) tendent par conséquent à amener une étude numérique des configurations - d'abord pour des extensions plus limitées que  $\Gamma \sim 30$  (donc avec des effets de disques de confinement aux frontières axiales de la zone annulaire) et de distance à l'axe plus modérée afin de limiter la résolution dans la direction azimutale qui croît rapidement avec le rayon : ainsi, pour Andereck *et al.*, le rapport de forme azimutale défini par  $\Gamma_\theta = 2\pi r_i^* / d$  vaut 47.4; pour notre configuration à  $\eta = 0.75$ , on a  $\Gamma_\theta = 18.8$  seulement.

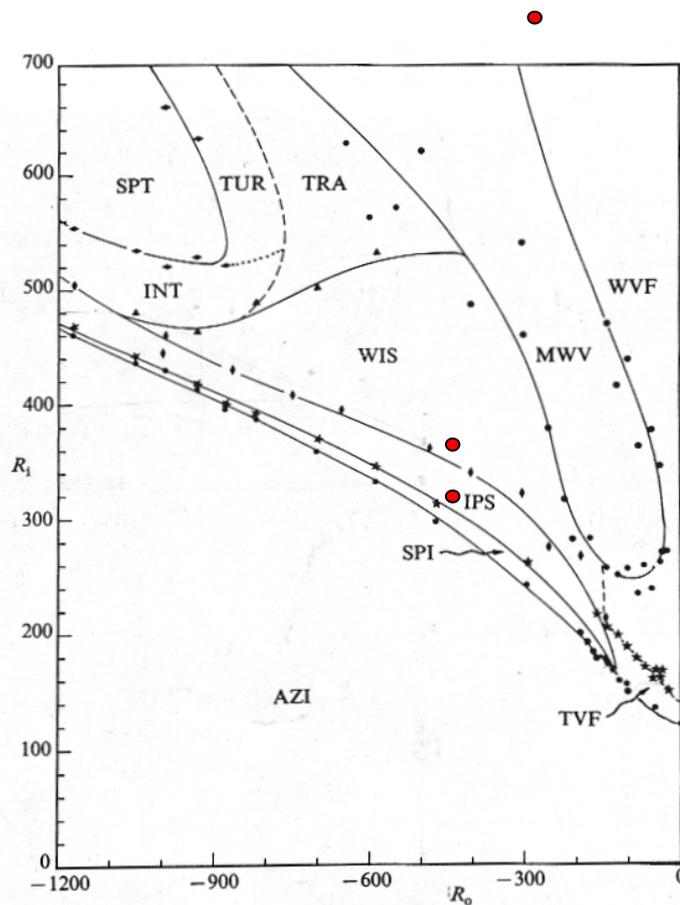
Dans l'article d'Andereck *et al.* [6], on peut relever distinctement le développement depuis les disques des tourbillons d'Ekman (comme cela a été vu dans le Chapitre 3) et sa persistance en présence d'écoulement secondaire. La force de l'interaction entre les cellules d'Ekman et les autres modes n'est pas bien connue mais elle est supposée être faible pour les grands rapport de forme. Concernant ce point, Andereck rapporte les résultats de Park & Donnely (1981) qui montraient un déplacement modéré des seuils de transition mais sans grand changement du régime et du comportement.

Dans le cas des investigations numériques présentes, nous reprenons la configuration déjà étudiée en rotor-stator au Chapitre 3 : rapport de forme de l'ordre de  $\Gamma \sim 6$ , rapport de rayon modéré  $\eta \sim 0.75$ .

Comme cela a été discuté dans le chapitre précédent pour une configuration différente, la proximité des disques aux parois terminales et des cellules d'Ekman peut entraîner une modification des bifurcations : l'estompage de la bifurcation "franche" en un changement de régime évolutif en particulier. Nous mettons en évidence dans ce chapitre des structures tridimensionnelles complexes de type spirale ou WVF. Nous discuterons en second lieu de l'influence des parois terminales sur l'écoulement, en comparant les effets de plusieurs types de conditions limites :  $\Omega_D = \Omega_o$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$ ,  $\Omega_D = 0$  et la condition particulière de frontière sans frottement et plane, notée par commodité condition de surface libre, déjà utilisée dans les chapitres précédents.

## 4.1 Mise en évidence de régimes complexes IPS, WIS et SPI en configuration contrarotative.

Dans cette partie, nous prenons seulement en compte la condition limite utilisée par Andereck *et al.* [6] :  $\Omega_D = \Omega_o$ .



**Fig. 4-1** Diagramme des régimes d'écoulements pour des cylindres en contrarotation (d'après Andereck *et al.* [6]); le diagramme a été établi pour un système de paramètres géométriques  $\eta = 0.883$  et  $\Gamma = 30$ . Sur le diagramme, les points rouges indiquent les points de fonctionnement que nous avons utilisés pour la mise en évidence de structures complexes en contrarotation :  $(Re_o, Re_i) = (-250 ; 750)$ ,  $(-500 ; 330)$ ,  $(-500 ; 375)$ . Le point  $(-250 ; 750)$  est situé en dehors du cadre de la figure.

### 4.1.1 Structures de type spirale

Dans le cas du diagramme de régime établi par d'Andereck *et al.* [6] (Fig. 1-16 et Fig. 4-1 du présent rapport), on observe que, en maintenant  $Re_o$  fixé et en faisant varier  $Re_i$ , la première transition au delà de l'écoulement de Couette avec les cellules d'Ekman en zone annulaire terminale (noté AZI) se produit vers le régime de *Taylor Vortex Flow* (TVF) pour  $Re_o > -155$  alors que pour des rotation plus fortes du cylindre externe ( $-1100 < Re_o < -155$ ), la transition se produit toujours vers le régime de tourbillons en spirales (SPI) et vers un régime plus complexe de tourbillons spiralés interpénétrants (IPS) pour  $-1200 < Re_o < -1100$ . L'écoulement de base est alors instable vis-à-vis d'instabilités non-axisymétriques. Ce comportement est bien mis en évidence par un ensemble de 2 spirales issues des zones terminales qui s'étendent dans le domaine annulaire et évolue au cours du temps; ainsi, à certaines phases, l'une seulement des 2 spirales apparaît dans les visualisations d'Andereck (voir Fig. 1-17-a de ce rapport). Le comportement temporel de ces régimes est très complexe et met en évidence des évolutions indépendantes et intermittentes autour d'une fréquence fondamentale (sur un spectre très étalé) comprise entre celle du disque interne et celle du disque externe. Au cours du temps, on relève une phase de spirales interpénétrantes.

Nous avons observé le régime SPI pour  $Re_o = -500$  et  $Re_i = 330$  au cours d'une phase transitoire. Le cas est discuté plus largement en section 4.1.1.3, puisqu'il s'agit d'une solution obtenue en diminuant le rapport d'aspect à partir d'un écoulement de spirales interpénétrantes IPS que nous avons pu mettre en évidence. L'état final obtenu après cette phase transitoire est de type TVF axisymétrique.

#### 4.1.1.1 Interpenetrating Spirals (IPS)

Le régime IPS (Interpenetrating Spirals) montre que les modes spiralés issues des parois terminales interagissent et se combinent ensemble dans la partie centrale de la cavité annulaire. L'extension axiale des zones de tourbillons d'Ekman aux frontières se réduit lorsque la rotation différentielle augmente et le régime IPS occupe alors la majeure partie du domaine. Ainsi, cela est très visible dans la Figure 7 d'Andereck (1986) lorsque l'on passe de ( $Re_o = -1000$ ,  $Re_i = 435$ ) à ( $Re_o = -3000$ ,  $Re_i = 860$ ) et on observe de plus que la taille des tourbillons en spirales est notablement réduite à grand  $Re$ . On note que la variation - dans un rapport de plus de  $3/2$  - est conforme à la variation de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche du cylindre interne en  $\Omega_i/\Omega_o$  pour  $\Omega_o \gg \Omega_i$  (Andereck *et al.* [6]). Les observations d'Andereck relèvent bien que les spirales ne se partagent pas l'espace radial complet entre les 2 cylindres mais se combinent et s'interpénètrent dans la couche interne du cylindre ( $Re_i$ ). Dans les spectres produits par Andereck *et al.*, on observe manifestement un spectre large autour de la fréquence principale (comprise entre les fréquences des disques interne et externe) et de quelques harmoniques principales - surtout pour les plus petits  $Re$ . Le spectre s'épaissit pour les grands  $Re$  et il apparaît bien que malgré une apparence d'ordonnement des structures spatiales, le phénomène correspond à une évolution continue de structure suivant un processus non-périodique.

Dans le cadre du présent travail de thèse, les calculs, initiés en simulation axisymétrique à  $Re_i = 750$  et  $Re_o = -150$ , aboutissent à un écoulement présentant 8 rouleaux oscillant à la fréquence  $f/f_i = 0.687$ . Cette solution axisymétrique est utilisée comme condition initiale et développée sur une grille tridimensionnelle en utilisant 96 plans azimutaux ( $N_\theta = 96$ ). On fixe alors un point de fonctionnement ( $Re_i, Re_o$ ) = (330, -500), ce qui devrait correspondre à la zone IPS sur le diagramme d'Andereck *et al.* L'écoulement obtenu est représenté sur la Fig. 4-2. La structure générale est celle de deux vortex spiralés d'inclinaisons opposées, qui s'interpénètrent sur la totalité de la cavité sauf tout près des bords, au niveau desquels ne subsiste qu'un seul type de spirale. Si l'on observe les isosurfaces de  $V_\theta = 0$  sur la Fig. 4-2, on note une alternance de « vallées » et de « crêtes »:

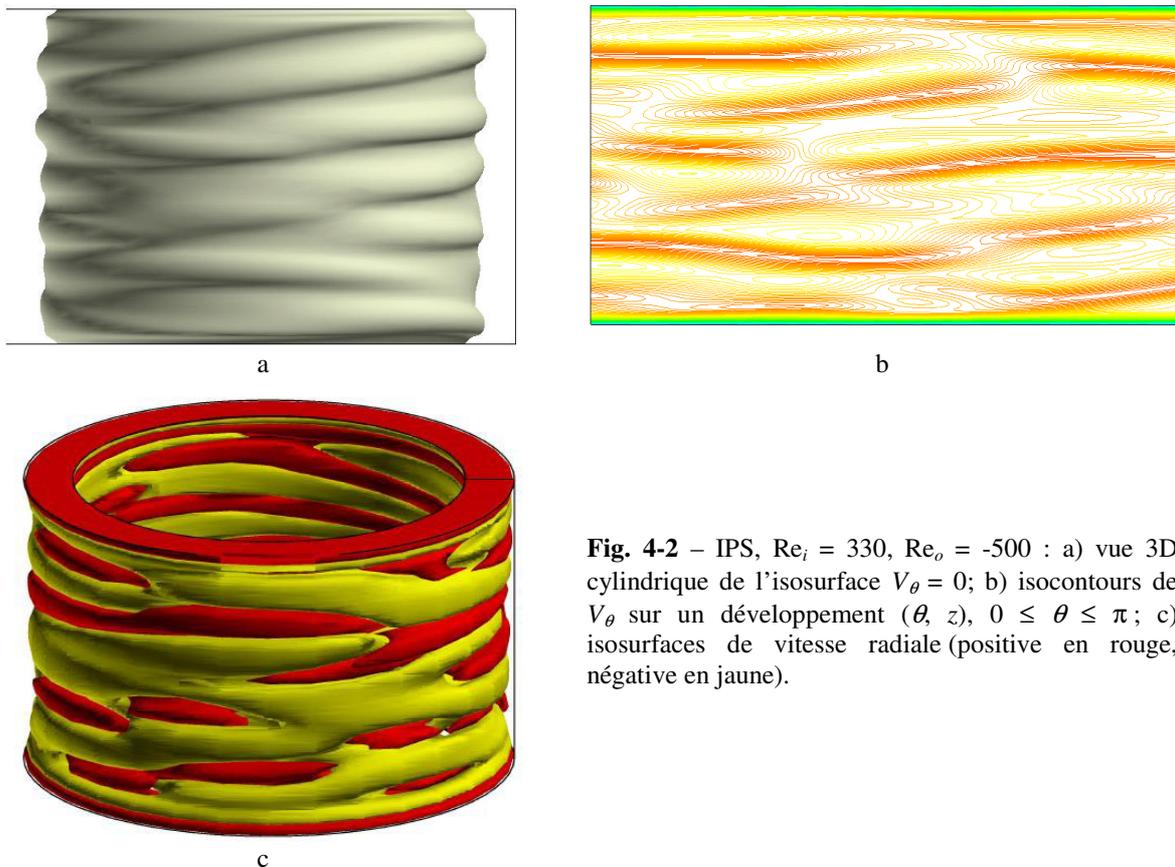
- au niveau des crêtes, le flux radial convecte vers l'extérieur la quantité de mouvement fournie par le cylindre interne.
- au niveau des vallées, le flux radial convecte vers l'intérieur la quantité de mouvement fournie par le cylindre externe.

- Les flux centrifuges s'effectuent selon des types de jet de section beaucoup plus étroite que dans le cas des flux centripètes.

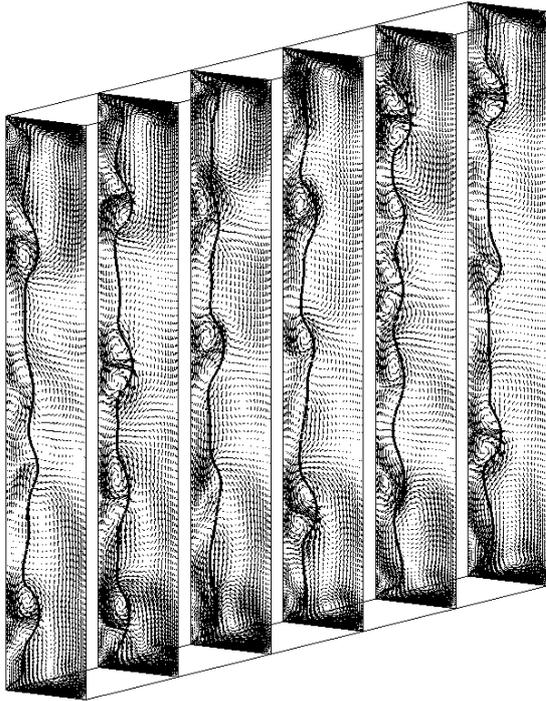
Les deux structures spirales ne présentent pas de symétrie par rapport à un plan horizontal. En effet, l'une des spirales intersecte le plateau supérieur avec un angle d'environ  $-9^\circ$ , tandis que l'autre coupe le plateau inférieur avec un angle d'environ  $5^\circ$ . Ces structures sont très semblables à celles observées par Andereck *et al.*, comme cela est illustré sur la Fig. 1-17 – b (Chapitre 1).

Concernant cet écoulement, la Fig. 4-3 montre clairement, à l'instar des observations d'Andereck, que les structures tourbillonnaires sont situées très nettement près du cylindre interne. Plus particulièrement, on remarque que les vortex sont confinés entre le cylindre interne et l'isosurface  $V_\theta = 0$  (matérialisée par une courbe noire sur chacun des plans verticaux de la figure). Cette isosurface, dans le cas de fluide non visqueux, délimite la couche instable vis-à-vis du critère de Rayleigh. Une discussion sur ce point sera exposée avec plus de détails et de commentaires dans la partie 4.2 traitant des effets des parois terminales sur l'écoulement.

Une animation au cours du temps réalisée à partir de nos simulations montre que les spirales tournent autour de l'axe de rotation dans le même sens que le cylindre externe, dont la vitesse de rotation est plus rapide que celle du cylindre interne :  $|\Omega_o / \Omega_i| = 1.136$ . On peut souligner également que dans ce cas étudié, les parois terminales sont solidaires du cylindre externe ( $\Omega_D = \Omega_o$ ), ce qui peut suggérer qu'elles contribuent à favoriser le sens de rotation du cylindre comme dominant.



**Fig. 4-2** – IPS,  $Re_i = 330$ ,  $Re_o = -500$  : a) vue 3D cylindrique de l'isosurface  $V_\theta = 0$ ; b) isocontours de  $V_\theta$  sur un développement  $(\theta, z)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ; c) isosurfaces de vitesse radiale (positive en rouge, négative en jaune).



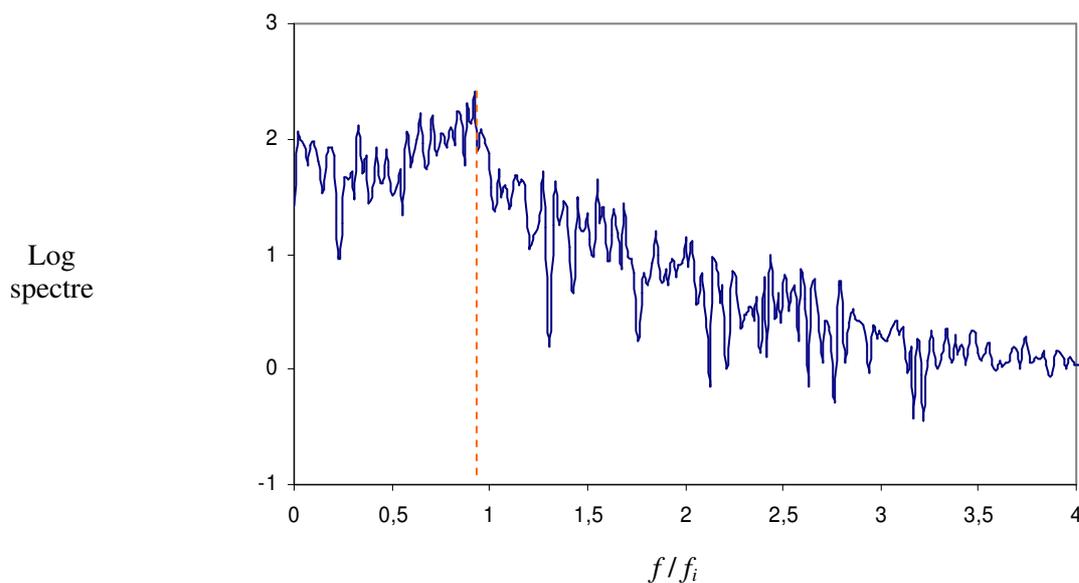
**Fig. 4-3** – IPS (Interpenetrating Spirals),  $Re_i = 330$ ,  $Re_o = -500$ . Projection du champ de vitesse sur les plans méridiens  $(r, z)$ . Régime de spirales interpénétrantes, obtenues pour  $\Gamma = 6$ , disques tournant avec le cylindre externe ( $\Omega_D = \Omega_o$ ). Ci-contre : représentation 3D cartésienne de l'écoulement, pour  $\theta$  allant de 0 à  $\pi$ .

Sur les spectres de fréquence reportés dans Andereck *et al.* pour des écoulements de type IPS, on peut relever des pics de fréquence  $f_m$  qui sont compris entre les fréquences de rotation du cylindre interne ( $f_i / f_i = 1$ ) et du cylindre externe ( $f_o / f_i$ ). Ainsi, on peut observer en valeurs normalisées par rapport à  $f_i$ , où  $f_i$  est la fréquence de rotation du cylindre interne :

- $1 < f_m / f_i \sim 1.4 < f_o / f_i = 2$  pour  $(Re_o, Re_i) = (-1000, 435)$ ,
- $1 < f_m / f_i \sim 1.9 < f_o / f_i = 3.1$  pour  $(Re_o, Re_i) = (-3000, 860)$ .

Dans notre cas à  $(Re_o, Re_i) = (-500, 330)$ , le spectre de fréquence de l'enregistrement de la vitesse au centre de la cavité révèle un pic pour  $f / f_i = 0.92$  (Fig. 4-4). On note que contrairement aux cas IPS d'Andereck, cette fréquence est inférieure à la fréquence de rotation du cylindre interne :

$$f / f_i = 0.92 < 1 < f_o / f_i = 1.136$$



**Fig. 4-4** – Spectre de fréquence de l'écoulement IPS obtenu à  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 330$ ,  $\Omega_D = \Omega_o$ . Un pic de fréquence (en pointillés sur la figure) se détache pour  $f / f_i = 0.92$ .

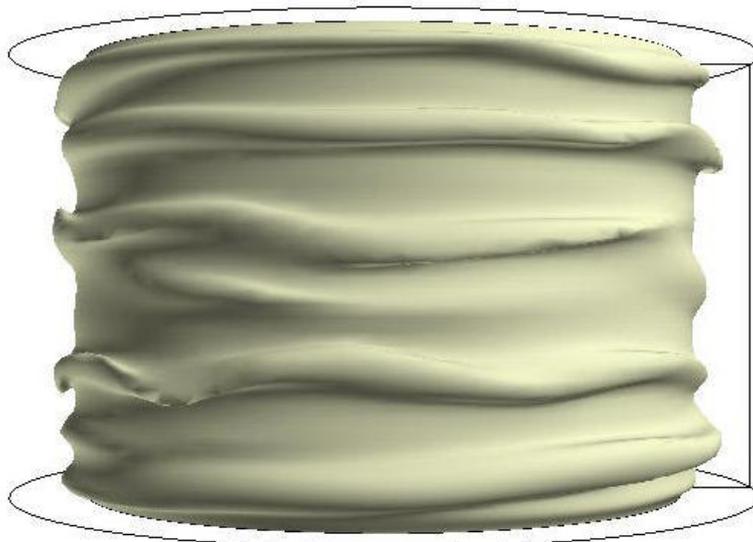
#### 4.1.1.2 Wavy Interpenetrating Spirals

Dans le régime WIS - Wavy Interpenetrating Spirals - les structures de spirales laminaires interpénétrantes sont déformées par la présence d'ondes azimuthales (Andereck *et al.* [6], voir Fig. 1-17-c de ce rapport). La structure oscillante est apparente (et le phénomène ne se distingue pas clairement par des structures spatio-temporelles typiques du régime WVF) mais, par instant, la structure caractéristique du régime IPS réapparaît transitionnellement. Le spectre de fréquence établi par Andereck *et al.* est très bruité (large spectre) mais fait apparaître une croissance vers les faibles fréquences.

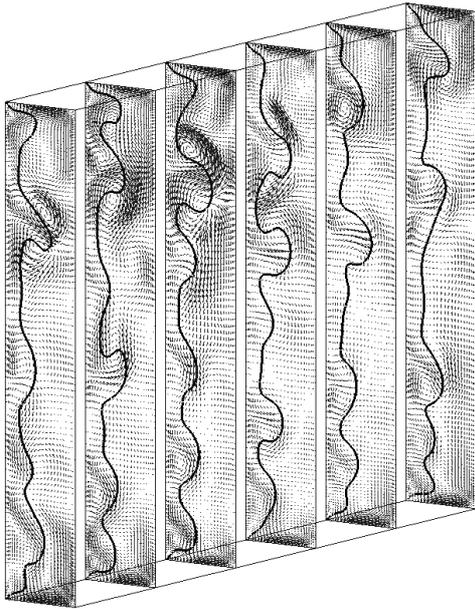
Nous avons pu obtenir un régime de ce type à partir de l'écoulement IPS précédemment décrit en augmentant  $Re_i$  de 330 à 375, tout en maintenant  $Re_o = -500$ . L'écoulement qui résulte de ce changement (Fig. 4-8) présente les caractéristiques du motif WIS identifié par Andereck *et al.* [6]. La projection du champ de vitesse sur des plans méridiens, comme sur la Fig. 4-6, que les tourbillons sont en général de taille  $0.4 d$  et se déplacent de façon désordonnée dans le plan méridien. Dans certaines phases, et en particulier près des parois terminales, leurs dimensions peuvent s'accroître jusqu'à atteindre pour certains la valeur de l'épaisseur de fluide  $d$ . Une comparaison entre la Fig. 4-6 et la Fig. 4-7 – représentant le même écoulement au bout d'un temps supplémentaire de  $1.23 \mathcal{T}_r$  – montre que les tourbillons les plus gros peuvent apparaître aussi bien dans la partie supérieure de la cavité que dans la partie inférieure.

Les vortex ont tendance à être à plus grande proximité du cylindre interne que du cylindre externe, ils ne semblent pas être strictement confinés dans la couche du profil de Couette dite « instable » selon le critère de Rayleigh. Nous verrons un peu plus loin qu'ils sont globalement situés à l'intérieur de la surface  $V_\theta = 0$ .

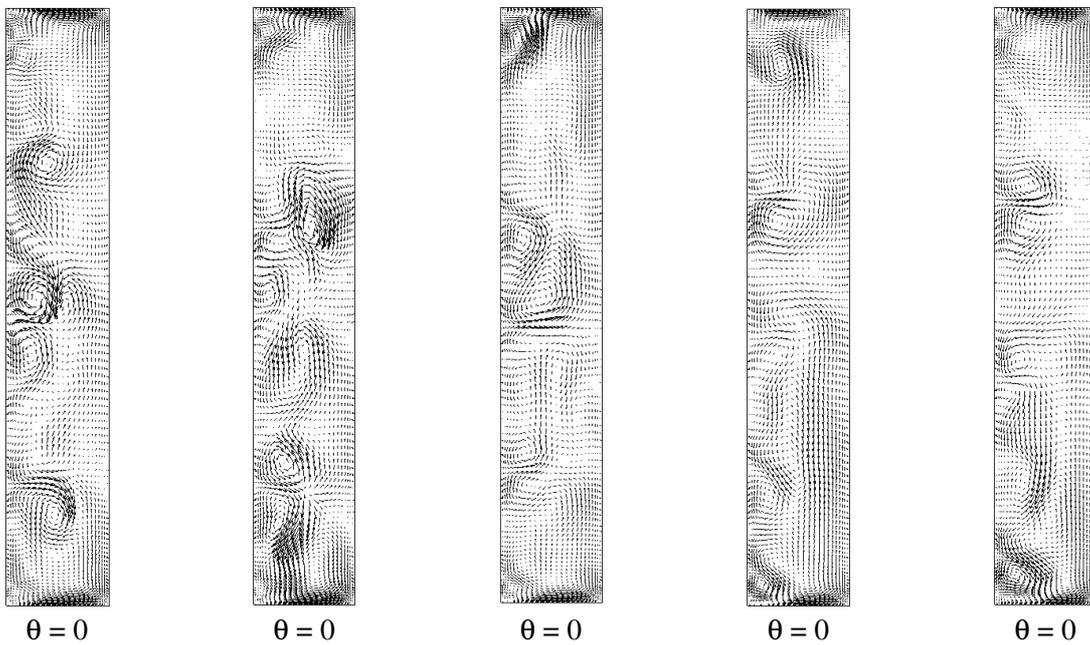
Le caractère ondulatoire des structures est assez facile à voir, mais la structure hélicoïdale est plus difficile à appréhender distinctement. Les structures étant plus désordonnées, elles sont moins évidentes que pour les cas WVF ou IPS. Le spectre de fréquence correspondant à l'écoulement montre, comme pour le cas d'Andereck *et al.*, un spectre large et bruité pour lequel aucune fréquence ne domine (Fig. 4-8). Le bruitage s'intensifie tout particulièrement dans les basses fréquences ( $f/f_i < 2$ ). Ceci traduit l'état désordonné de l'écoulement.



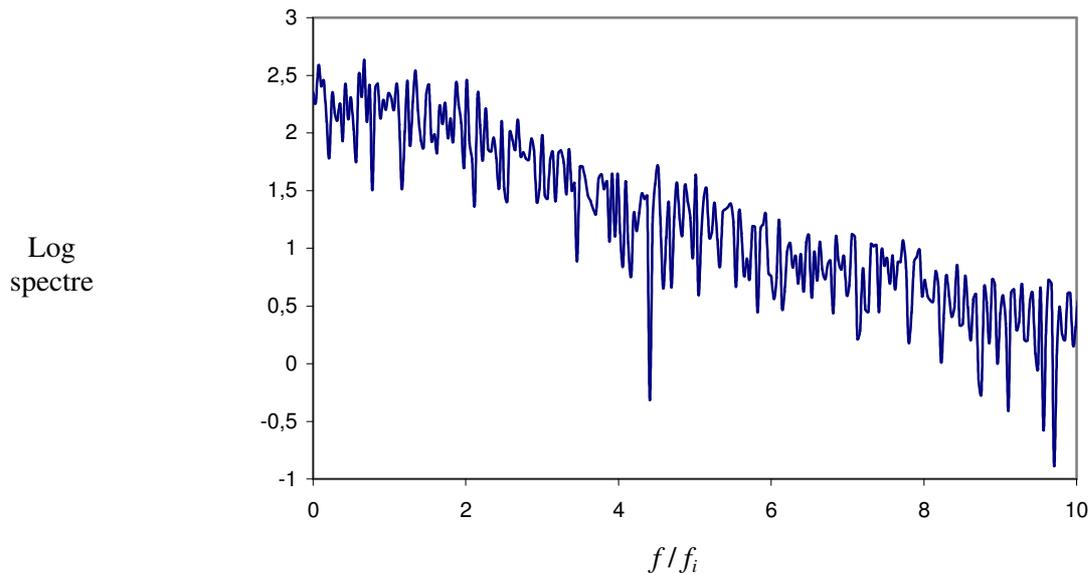
**Fig. 4-5** – WIS,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ . Isosurface de la vitesse azimuthale mettant en évidence le caractère ondulatoire de l'écoulement.



**Fig. 4-6** – Wavy Interpenetrating Spirals,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ . Projection du champ de vitesse sur les plans méridiens  $(r, z)$ . Régime de spirales interpénétrantes, obtenues pour  $\Gamma = 6$ , disques tournant avec le cylindre externe ( $\Omega_D = \Omega_o$ ). Ci-contre : représentation 3D cartésienne de l'écoulement, pour  $\theta$  allant de 0 à  $\pi$ . En trait noir épais sur chacun des plans, l'isocontour  $V_\theta = 0$ .



**Fig. 4-7** – WIS ( $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ). Projection de la vitesse sur plusieurs plans méridiens, après un temps de simulation égal à  $1.23 T_r$  par rapport à l'écoulement représenté en Fig. 4-6.



**Fig. 4-8** – Spectre en fréquence de l'écoulement WIS obtenu à  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ,  $\Omega_D = \Omega_o$ .

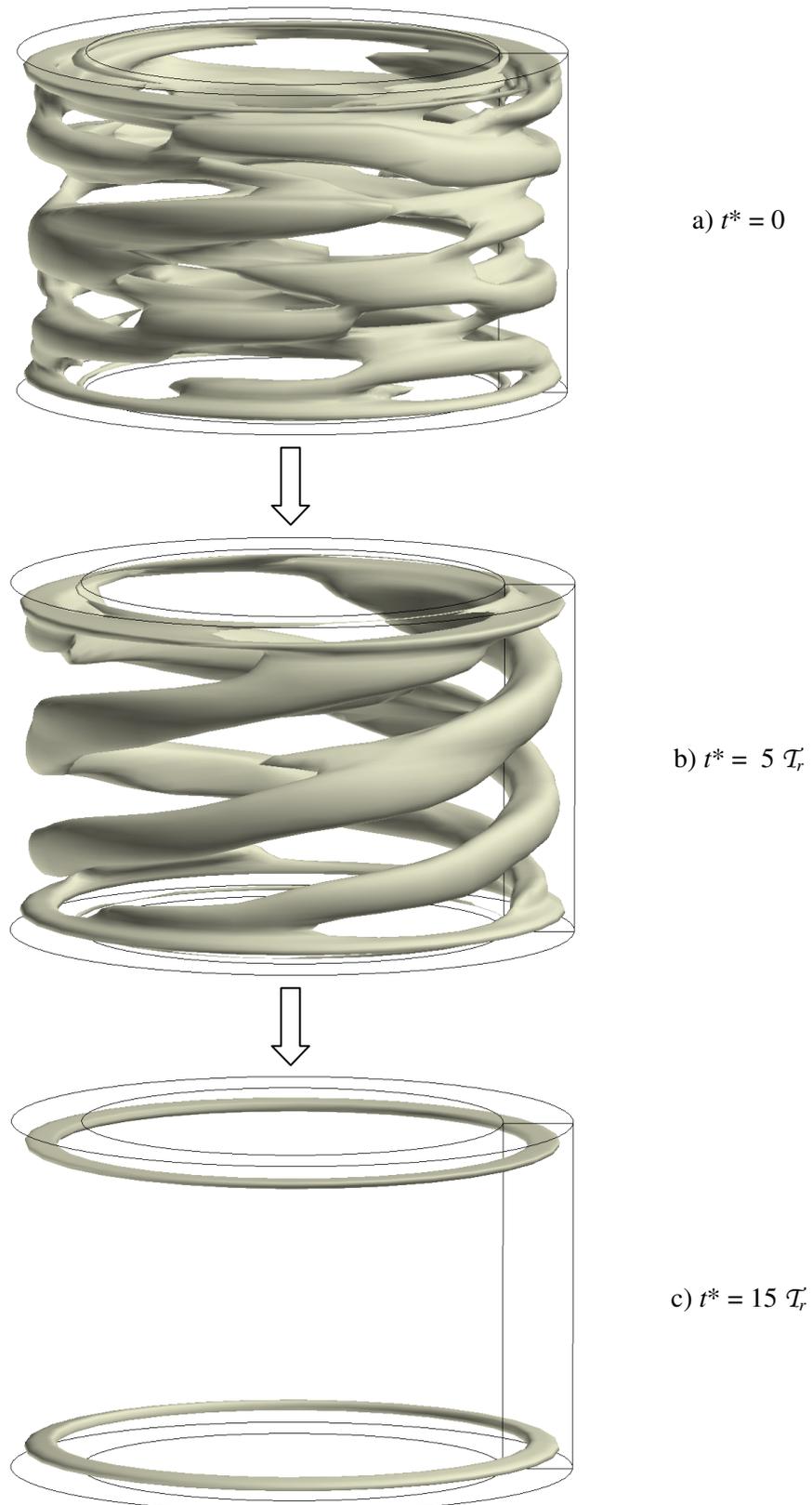
#### 4.1.1.3 Spiral Vortex Flow (SPI)

Comme nous l'avons évoqué au préalable plus haut, nous avons pu dans notre configuration obtenir par simulation le régime spiral (SPI), mais il s'agissait seulement d'une étape transitoire entre deux régimes IPS lorsque l'on fait varier les conditions aux limites. Utilisant l'écoulement IPS précédemment obtenu comme condition initiale, nous avons réduit le rapport d'aspect de  $\Gamma = 6$  à  $\Gamma = 5$ . Les résultats de ces simulations sont montrés sur la Fig. 4-9, avec l'état initial considéré et l'état succédant à cette phase SPI.

Sur la Fig. 4-9-b, le régime spiral transitoire est visualisé à l'instant  $t^* = 5 \mathcal{T}_r$ , où  $\mathcal{T}_r$  est le temps caractéristique de propagation radiale défini par l'équation (3-8) (Chapitre 3). Il est caractérisé par la présence de trois tourbillons spiraux de même inclinaison par rapport à l'horizontale. Le phénomène présente dans la phase transitoire un comportement périodique de fréquence  $f / f_i = 1.017$ . Cette fréquence est supérieure à la fréquence  $f / f_i = 0.92$  observée pour l'écoulement IPS à  $\Gamma = 6$  qui a servi de condition initiale. Ceci peut être expliqué par un effet de la conservation de l'énergie : la diminution du rapport d'aspect contraignant le fluide à augmenter la vitesse de phase du phénomène, et par suite la fréquence.

Le régime SPI observé n'est pas stable : au bout d'un temps  $t^* = 15 \mathcal{T}_r$ , le phénomène s'amortit complètement, pour ne laisser place qu'à un écoulement azimuthal de type Couette (AZI) (Fig. 4-9-c). Ce régime de spirales SPI peu stable est très différent du premier régime instationnaire obtenu en cavité rotor-stator au bien pour les faibles valeurs de  $Re_o$  au delà du régime de Taylor-Couette (TVF) : le régime Wavy Vortex Flow (WVF) reste périodique pour une large gamme de valeurs de  $Re_i$ .

Pour toute la gamme de  $Re_o$  rapportée sur la Fig. 4-1, il apparaît que l'étendue des régimes SPI et IPS (au delà de  $Re_o = -1200$ ) jouxtent de façon très étroite le seuil de la transition.



**Fig. 4-9** – Spirales laminaires,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 330$ ,  $\Gamma = 6$ . Isosurfaces de vitesse radiale mettant en évidence une structure spiralée dans la cavité. L'unité de temps  $\mathcal{T}_r$  est le temps caractéristique de transfert de quantité de mouvement dans la direction radiale depuis le cylindre interne vers le cylindre externe. Ce temps est défini par l'équation (3-8) (section 3.2.1 de ce rapport).

### 4.1.2 Ecoulement WVF

Le régime WVF reste très similaire dans sa structure au régime WVF pour  $Re_o = 0$  mais il implique des modes azimutaux en nombre plus important que lorsque le cylindre externe est un stator. Typiquement le nombre d'ondes est inférieur à 7, alors qu'il est de 8 ou 9 dans le cas contra-rotatif. Le Tableau 4-1 relève les données expérimentales d'Andereck *et al.* [6], et montre la variation de la vitesse angulaire pour de grands rapports d'aspect ( $\Gamma = 20$  ou 30).

$\Gamma$	$Re_o$	$Re_i$	$m$	$\omega_e$
30	-96	167	2	0.280
30	-119	170	2	0.280
30	-125	187	2	0.245
30	-158	230	6	0.143
30	-152	223	7	0.136
20	-153	223	7	0.141

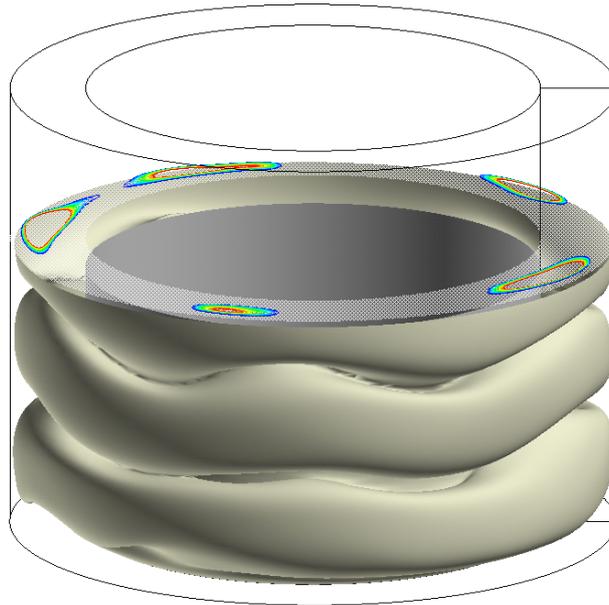
**Tableau 4-1** – Vitesses angulaires  $\omega_e$  des ondulations azimutales relevées par Andereck *et al.* [6] ;  $m$  est le nombre d'onde azimutal.

Le régime MWV - *Modulated Wavy Vortex* - se situe au delà du régime WVF pour une gamme de valeurs de  $Re_o$  et de  $Re_i$  plus grandes; cependant les valeurs de  $Re_i$  concernée sont bien inférieures à celles du cas rotor-stator ( $Re_i > 1100$ ). Ainsi les points de fonctionnement pour MWV se situent dans un domaine inclus dans  $800 > Re_i > 250$  et  $-800 < Re_o < 30$ , globalement. La caractéristique du comportement des structures d'écoulement est alors un mouvement d'ensemble général des oscillations des tourbillons de Taylor - sans blocage de phase entre les tourbillons. Le spectre de fréquence met bien évidence (à côté des fréquences de rotation des 2 cylindres - il faudrait les montrer), la fréquence de la rotation de l'oscillation (la plus grande), la modulation de fréquence, et la fréquence de l'oscillation de phase dans la direction axiale. L'amplitude de l'oscillation correspond dans la direction axiale à une hauteur du domaine et en azimut à une demi-longueur d'onde azimutale.

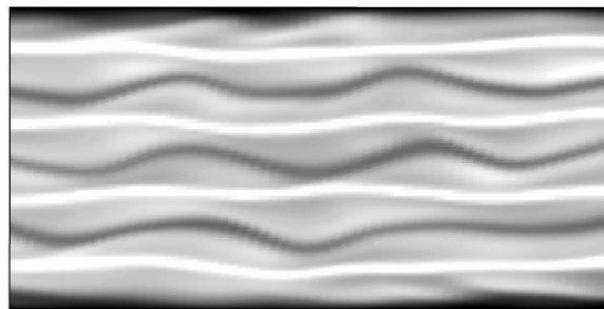
Dans le cadre des travaux menée lors de cette thèse, les calculs sont initiés en simulation axisymétrique pour  $\Gamma = 6$  à  $Re_i = 750$  et  $Re_o = -150$ . Ces nombres de Reynolds devant correspondre sur le diagramme d'Andereck à la zone WVF. On aboutit de fait à un écoulement présentant 8 rouleaux axisymétriques dans le plan méridien ( $r, z$ ) qui oscillent à la fréquence  $f / f_i = 0.687$ . Cette solution, déployée sur 120 modes de Fourier, est utilisée comme condition initiale. La Fig. 4-10 montre l'écoulement obtenu après modification du nombre Reynolds externe à  $Re_o = -250$  au bout d'un temps de calcul de 20 fois le temps caractéristique de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$  : l'aspect général est celui d'un WVF à 5 ondes azimutales.

Dans le plan méridien, la solution obtenue présente huit vortex (Fig. 4-11- c et d), ce qui est supérieur au nombre de 6 vortex obtenus dans nos simulations précédentes en configuration rotor-stator pour  $Re_i = 686.4 (= 8 Re_{i,crit})$  (Chapitre 3). La solution à 8 vortex, pour un rapport d'aspect  $\Gamma = 6$ , se traduit par une longueur d'onde axiale  $\lambda_z / d = 1.5$ . Cette valeur est inférieure à celles observées par Andereck *et al.*, qui ont obtenu en configuration contrarotative des longueurs d'onde  $\lambda_z / d$  comprises entre 1.67 et 1.76. Si l'on diminue notre rapport d'aspect de  $\Gamma = 6$  à  $\Gamma = 5$ , nous obtenons une diminution du nombre de rouleaux de 8 à 6, ce qui conduit ici à une longueur d'onde axiale  $\lambda_z / d = 1.67$ , qui correspond à un meilleur accord avec les observations d'Andereck, bien que celles-ci aient été obtenues pour  $\Gamma = 30$ .

L'analyse fréquentielle de l'écoulement (Fig. 4-12) révèle un pic de fréquence  $f / f_i = 0.40$  qui émerge d'un bruit de fond important. Cette valeur est proche des valeurs 0.35 et 0.40 obtenues pour  $\Gamma = 8$  et 10 respectivement (Edwards *et al.* [29]), mais sensiblement plus élevée que les valeurs, comprises entre 0.14 et 0.28, obtenues par Andereck *et al.* [6] pour des rapports d'aspect plus grands que le nôtre ( $\Gamma = 20$  ou 30).



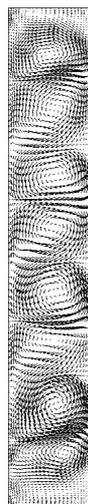
**Fig. 4-10** –WVF instationnaire,  $Re_i = 750$ ,  $Re_o = -250$ ,  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$ . La vue présente l'isosurface  $V_\theta = 0$ , coupée par un plan horizontal sur lequel sont matérialisés des isocontours de la vitesse radiale  $V_r$ . Ces contours mettent en évidence le mode 5 qui prédomine dans la cavité.



a



b

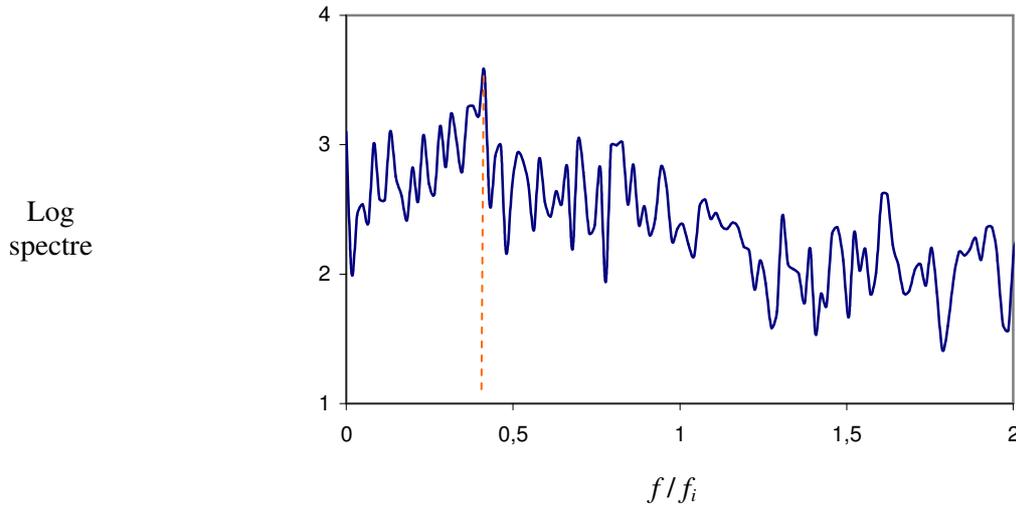


c



d

**Fig. 4-11** – WVF instationnaire,  $Re_i = 750$ ,  $Re_o = -250$ ,  $\Gamma = 6$ ,  $\eta = 0.75$ . Champ des isovaleurs de  $V_\theta$  (a) dans le plan  $(\theta, z)$ ,  $r^* = (r_o^* + r_i^*)/2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , (b) dans un plan méridien  $(r, z)$ ; (c, d) projection de la vitesse sur le plan méridien à deux étapes différentes du cycle.



**Fig. 4-12** – Wavy Vortex Flow (WVF),  $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ . Spectre en fréquence de l'écoulement. Un pic de fréquence est observé à  $f/f_i = 0.4$ .

*Une tentative de renormalisation des fréquences dominantes dans les écoulements WVF.*

Les écarts de fréquence relevés précédemment apparaissent très dispersés lorsque l'on reporte l'ensemble des résultats rotor-stator / contrarotation ensemble sur un même graphe  $f/f_i$  en fonction du rapport d'aspect  $\Gamma$ . Une tentative de regroupement de ces résultats est suggérée en considérant à la place de la fréquence la vitesse de l'onde azimutale  $2\pi r * f / m$ , qui inclut aussi le nombre d'onde azimutal  $m$ . Afin de prendre en compte la rotation différentielle du système, on choisit d'adimensionner cette vitesse par la vitesse de cisaillement entre le cylindre externe et le cylindre interne,  $r_i * \Omega_i - r_o * \Omega_o$ . On normalise la fonction de sorte qu'elle vaille :

- 1 si l'onde se déplace à la même vitesse que le cylindre interne,
- 0 si cette même onde se déplace à la même vitesse que le cylindre externe.

Finalement, nous proposons :

$$\gamma = \frac{C - r_o * \Omega_o}{r_i * \Omega_i - r_o * \Omega_o} = \frac{\left[ \frac{1}{2k} (1 + \eta) \frac{f}{f_i} \right] - \mu}{\eta - \mu} \quad (4-1)$$

où  $C$  est la vitesse de déplacement de l'onde dans le référentiel fixe,  $k$  est le nombre d'ondes azimutales, et  $\mu = \Omega_o / \Omega_i$ . L'utilisation de  $\gamma$  autorise la comparaison des vitesses d'ondes pour des systèmes co-rotatifs, contrarotatifs et rotor-stator.

Si l'on reporte, sur un même graphe  $\gamma(\Gamma)$ , nos résultats et les résultats disponibles dans la littérature, (Fig. 4-13) on s'aperçoit que tous s'articulent autour d'une même courbe de tendance (tracée en noir sur le graphe).

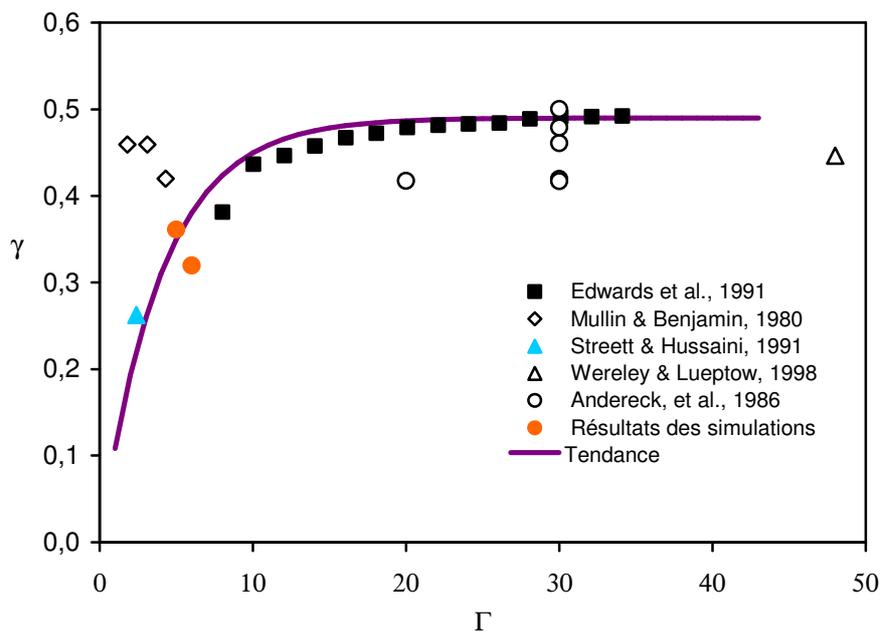
Sur le graphe, nous avons compilé nos résultats avec ceux provenant d'autres études (numériques ou expérimentales) se rapportant au WVF, dans le cas d'un cylindre externe fixe ( $R_i$ - $S_o$ ) ou en contrarotation (Andereck *et al.* [6], Edwards *et al.* [29], Mullin & Benjamin [55], Street & Hussaini [79], Wereley & Lueptow [87]).

Cette courbe correspond bien aux résultats de Wereley & Lueptow [85], Edwards *et al.* [29], Street & Hussaini [78], et nos résultats. Les résultats d'Andereck *et al.* [6], correspondant à des solutions multiples obtenues pour un même rapport d'aspect  $\Gamma = 30$ , se situent également assez bien par rapport à la courbe de tendance. On note par contre que les résultats de Mullin & Benjamin [54] ne s'inscrivent pas aussi bien par rapport à la courbe de tendance.

On note sur la figure la faible sensibilité de  $\gamma$  vis-à-vis du rapport d'aspect  $\Gamma$  lorsque  $\Gamma > 10$  : en effet,  $\gamma$  reste borné entre 0.4 et 0.5, bien que ces valeurs correspondent à des rapports de rayon très différents ( $0.75 \leq \eta \leq 0.88$ ) et à des rapports de vitesse de rotation s'étendant sur la gamme  $-0.62 \leq \mu \leq 0$ . Pour de petits rapports d'aspect, ( $\Gamma < 10$ ),  $\gamma$  diminue, comme cela est observé pour Edwards *et al.* [29], Street & Hussaini [79]) et pour nos résultats. En fait, lorsque  $\gamma$  diminue, comme cela est le cas, cela signifie que la fréquence tend vers la fréquence de rotation du cylindre externe. Ceci suggère un effet des parois terminales : en effet, dans tous les cas, les parois terminales sont fixées au cylindre externe :

- $\Omega_D = \Omega_o = 0$  si la configuration est rotor-stator.
- $\Omega_D = \Omega_o \neq 0$  pour les configurations contrarotatives (nous, et Andereck *et al.*).

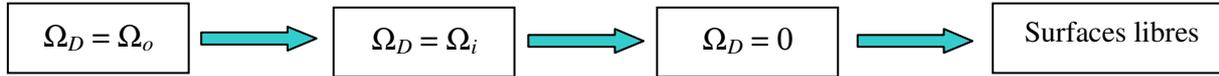
Ainsi, lorsque  $\Gamma$  diminue, les parois terminales ont un effet plus important, et tendent à imposer au fluide leur fréquence de rotation, soit celle du cylindre externe.



**Fig. 4-13** – Vitesse d'onde  $\gamma$  en fonction du rapport d'aspect  $\Gamma$ . Les symboles pleins se réfèrent à des résultats de simulations, les symboles vides à des résultats expérimentaux. Les cercles désignent quant à eux des configurations contrarotatives, les autres symboles à des configurations rotor-stator. La courbe en trait continu est une courbe de tendance, donnée par l'équation  $\gamma(\Gamma) = 0.49 [1 - \exp(-0.25 \Gamma)]$ .

## 4.2 Effets des parois terminales sur l'écoulement en contrarotation.

Les trois types d'écoulements (IPS, WIS, WVF) discutés dans la section précédente sont utilisés pour étudier précisément les effets des parois terminales. Les simulations sont effectuées en enchaînant les conditions limites selon la séquence suivante :



Ainsi, à partir d'un écoulement donné servant de condition initiale, les conditions limites sont modifiées jusqu'à obtenir le nouveau réglage désiré. L'écoulement obtenu au terme de la nouvelle simulation sert à son tour de condition initiale pour la condition limite suivante. Ici encore une fois, on s'assure du caractère non transitoire de l'écoulement obtenu en contrôlant l'évolution temporelle de la vitesse et de l'énergie spectrale  $E_k$  - définie par l'équation 3-14 - en plusieurs points de la cavité. La Fig. 4-15 montre les historiques de la vitesse axiale enregistrés au centre de la cavité. Les temps des simulations sont donnés pour chaque cas dans le Tableau 4-2. Pour désigner chaque combinaison de nombres de Reynolds, nous utilisons le label attribué par Andereck :

- WVF :  $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ .
- IPS :  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 330$ .
- WIS :  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ .

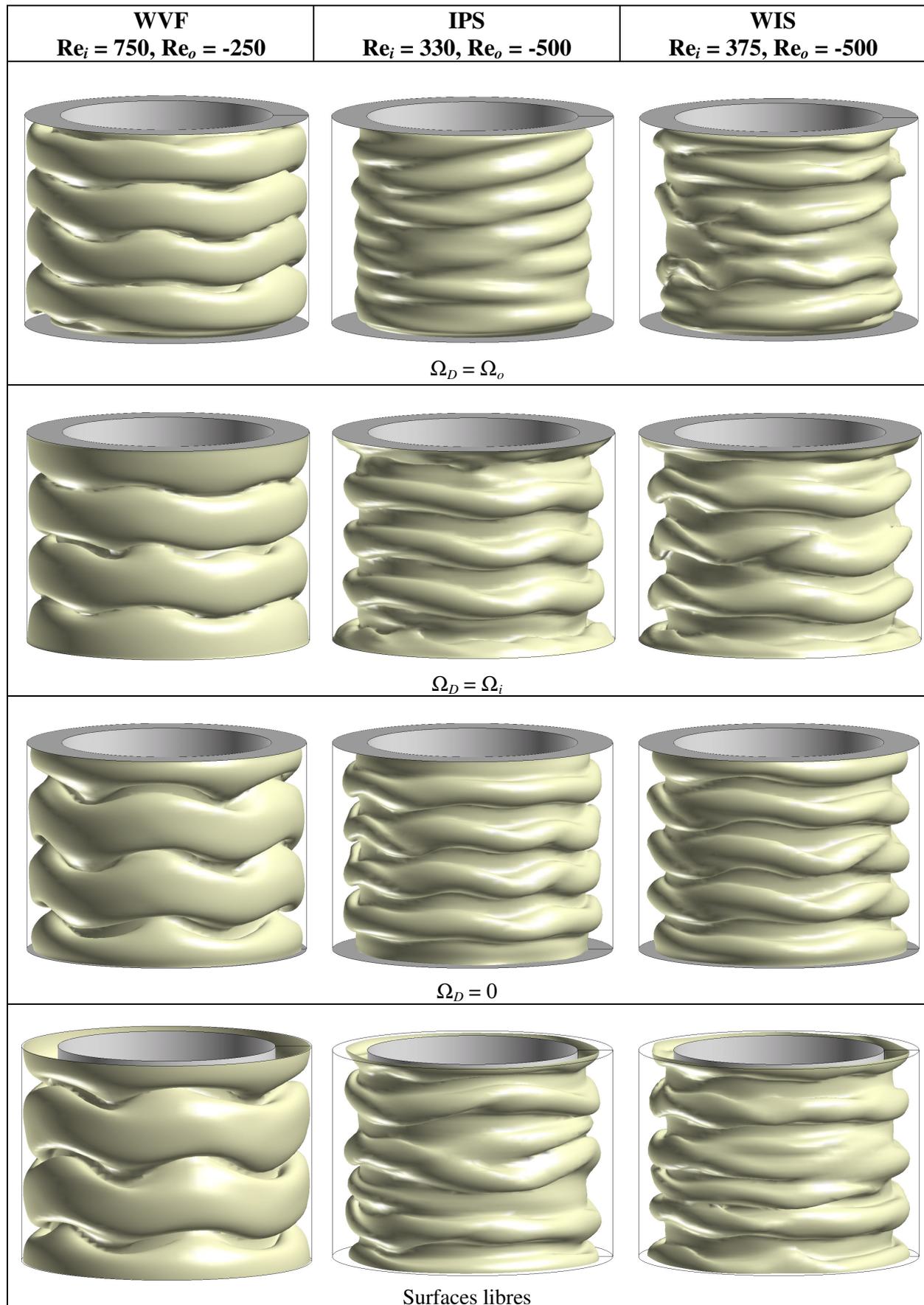
	WVF $Re_i = 750, Re_o = -250$	IPS $Re_i = 330, Re_o = -500$	WIS $Re_i = 375, Re_o = -500$
$\Omega_D = \Omega_o$	20	50	20
$\Omega_D = \Omega_i$	15	30	30
$\Omega_D = 0$	30	40	20
Surfaces libres	17.5	30	25

**Tableau 4-2** – Durées des simulations, adimensionnées par le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$  donné par l'expression (3-8).

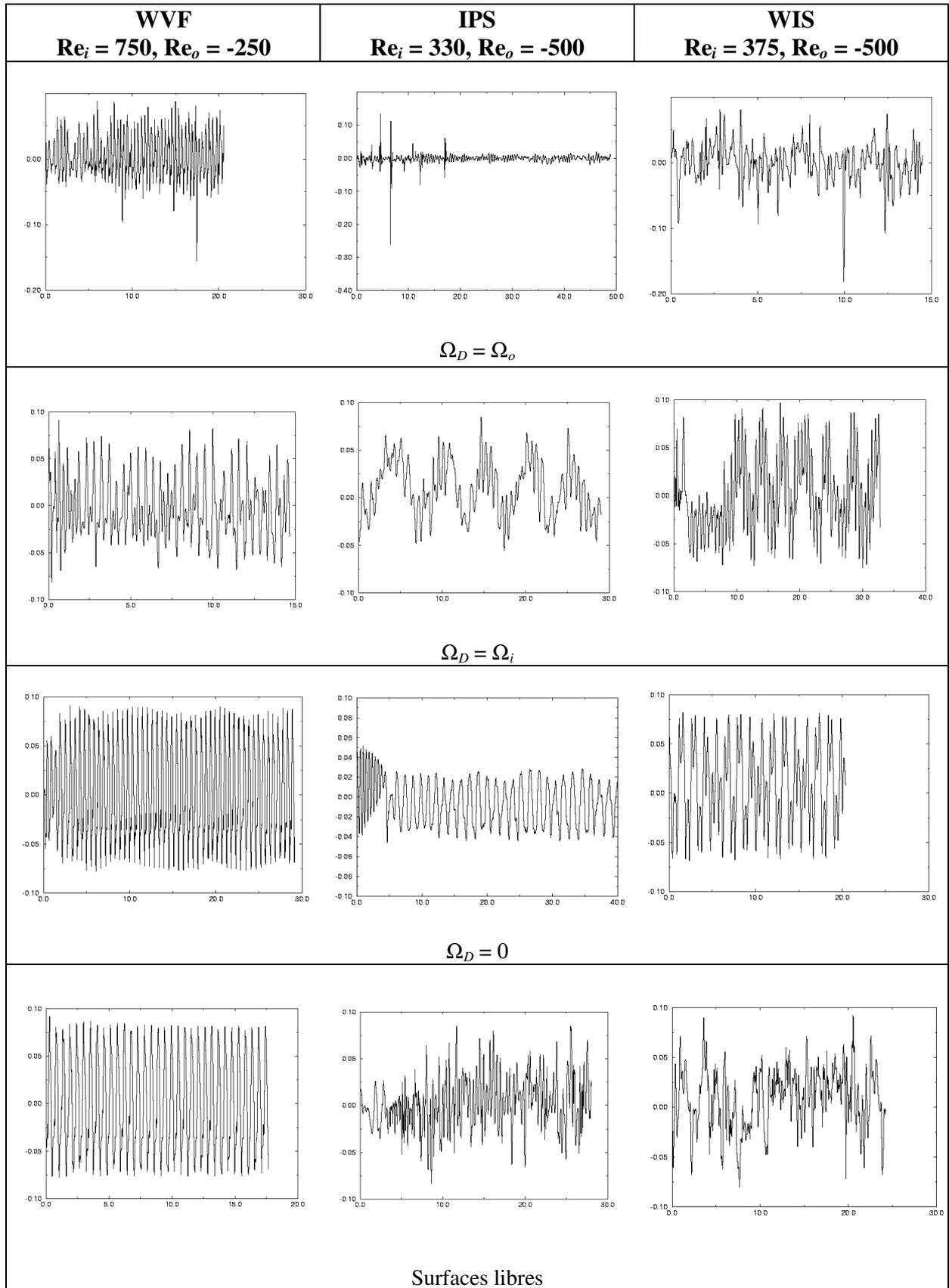
La Fig. 4-15 montre pour chacun des cas l'évolution de la vitesse axiale  $V_z$  au centre de la cavité. On note d'après les graphes que la solution s'établit en général au bout d'un temps de  $10 \mathcal{T}_r$  après le début de la simulation. Ce temps est inférieur aux temps d'établissement des solutions WVF dans la configuration rotor-stator de l'ordre de 25 à 65  $\mathcal{T}_r$  (voir section 3.3.4). Ceci peut être un résultat de la contrarotation qui génère des cisaillements plus importants dans le fluide par rapport au cas rotor-stator, et induit un brassage plus important réduisant le temps d'établissement des solutions.

La Fig. 4-14 montre, pour chacune des conditions limites et chacun des jeux de nombres de Reynolds, une vue tridimensionnelle de l'isosurface de la vitesse azimutale  $V_\theta = 0$ . Ces visualisations permettent en particulier de bien apprécier le caractère spatialement complexe des écoulements obtenus.

L'isosurface  $V_\theta = 0$  est comprise entre le cylindre interne et le cylindre externe. Considérons la couche de fluide délimitée d'une part par la surface du cylindre interne et, d'autre part, par l'isosurface  $V_\theta = 0$ . Dans cette couche, le fluide tourne dans le même sens que le cylindre interne (sens direct, ou anti-horaire, sur la Fig. 4-14). Au contraire, dans l'espace délimité par l'isosurface  $V_\theta = 0$  et le cylindre externe, l'écoulement tourne dans le sens du cylindre externe (sens indirect, ou horaire sur la figure).

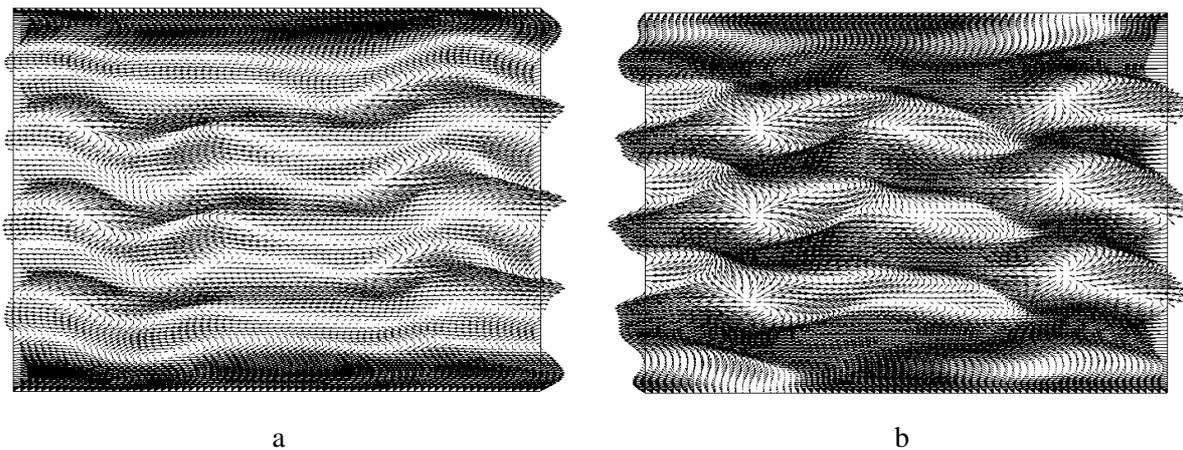


**Fig. 4-14** - Isosurface  $V_{\theta}^* / r_i^* \Omega_i = 0$ , pour chacun des jeux de Reynolds, et chacune des conditions limites aux disques. Le cylindre externe tourne dans le sens direct, le cylindre interne dans le sens indirect.



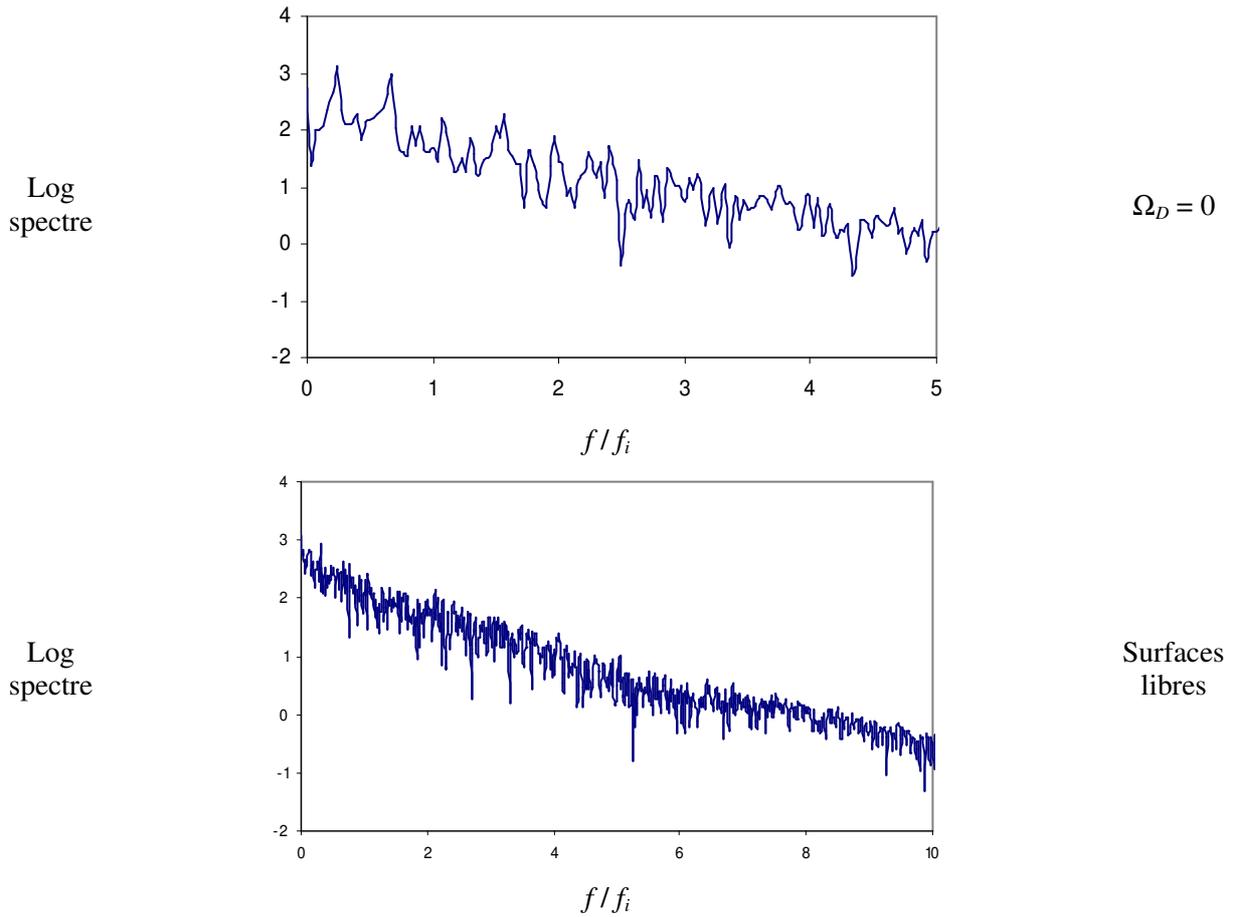
**Fig. 4-15** – Historiques de la vitesse axiale  $V_z^* / |r_o^* \Omega_o - r_i^* \Omega_i|$  en fonction du temps. Le temps en abscisse est adimensionné par le temps de diffusion radiale  $\mathcal{T}_r$ .

On note sur la figure que les ondulations azimuthales sont présentes pour le cas WVF quelle que soit la condition limite choisie pour les parois terminales. L'évolution temporelle de  $V_z$  au centre (Fig. 4-15) traduit cette persistance du caractère ondulatoire par un comportement pseudopériodique pour toutes les conditions limites. En revanche, pour le cas IPS, on note que lors de passage à la condition limite  $\Omega_D = \Omega_i$  ou  $\Omega_D = 0$ , la structure de spirales interpénétrantes disparaît au profit d'une structure ondulatoire en azimuth. Sur les enregistrements  $V_z(t)$  portés en Fig. 4-15, cette évolution se traduit par l'apparition d'un comportement pseudopériodique. Toutefois, les renflements de l'isosurface  $V_\theta = 0$  révèlent la structure spirale qui est rémanente. Un comportement identique peut être constaté sur les Fig. 4-14 et Fig. 4-15 dans le cas WIS. Cette coexistence spirales / ondulations est particulièrement visible sur la Fig. 4-16, qui montre la projection du champ de vitesse sur un plan  $(\theta, z)$  en deux positions radiales. Près du cylindre interne (Fig. 4-16-a), les structures s'apparentent à celles d'un WVF, tandis que plus près du cylindre externe (Fig. 4-16 - b), les structures sont plus disloquées et assez proches des configurations de spirales interpénétrantes.



**Fig. 4-16** – WIS,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ,  $\Omega_D = 0$ . Projection de la vitesse sur le plan  $(\theta; z)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  : a) à une distance de 40%  $d$  du cylindre interne ; b) à une distance de 65%  $d$  du cylindre interne.

Pour le cas WVF, le passage de la condition  $\Omega_D = 0$  à la condition « Surfaces libres » modifie peu la structure ondulatoire de l'écoulement, sauf près des parois terminales, où l'élargissement de l'isosurface traduit la disparition complète des tourbillons d'Ekman. Par contre, pour les cas IPS et WIS, les structures acquièrent un caractère nettement plus désordonné, ce que confirment les spectres en fréquence correspondants (Fig. 4-17), où l'on constate la présence d'un bruit de fond important.

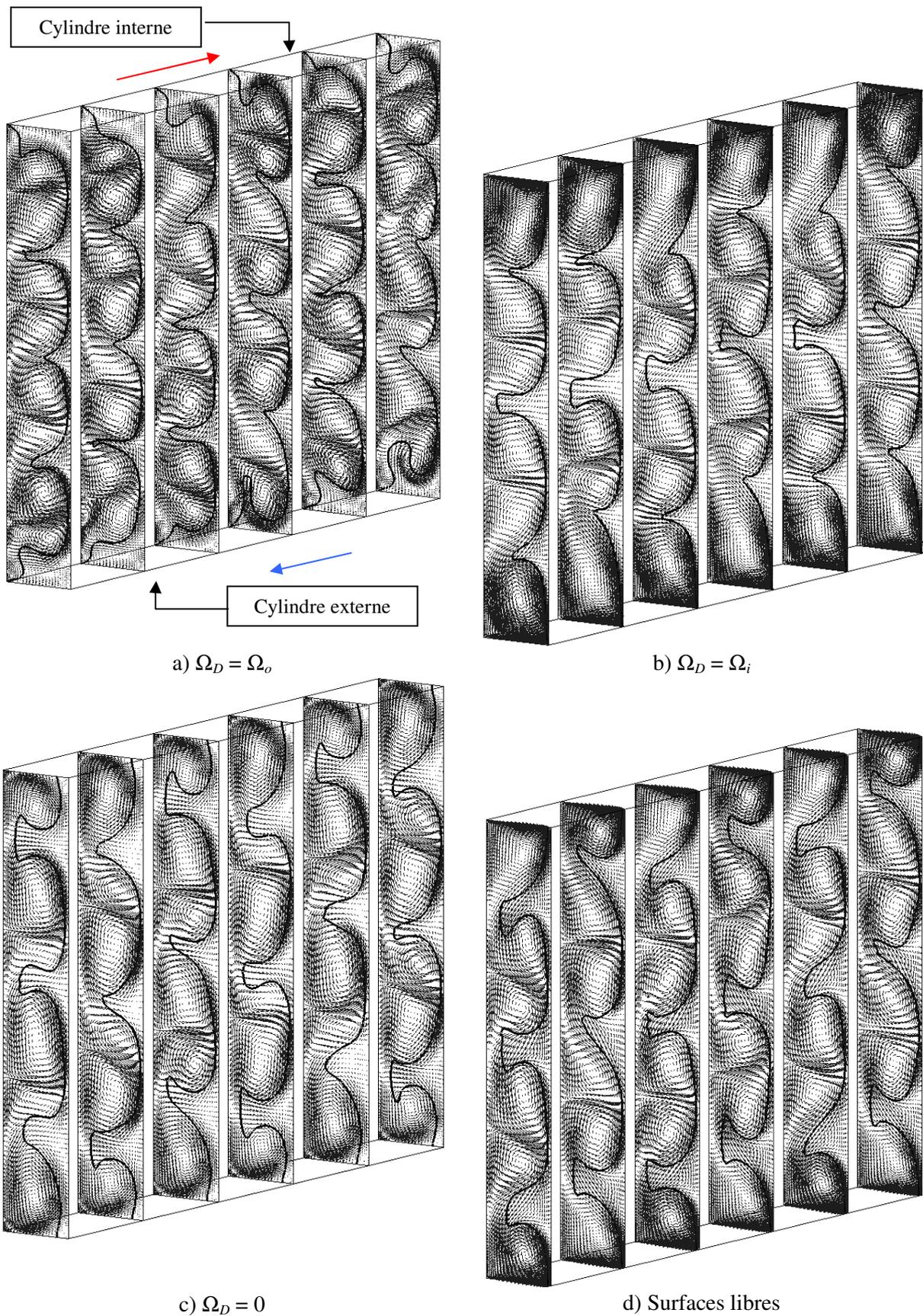


**Fig. 4-17** – WIS,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ . Comparaison des spectres en fréquence des écoulements obtenus avec les conditions limites  $\Omega_D = 0$  et « Surfaces libres ».

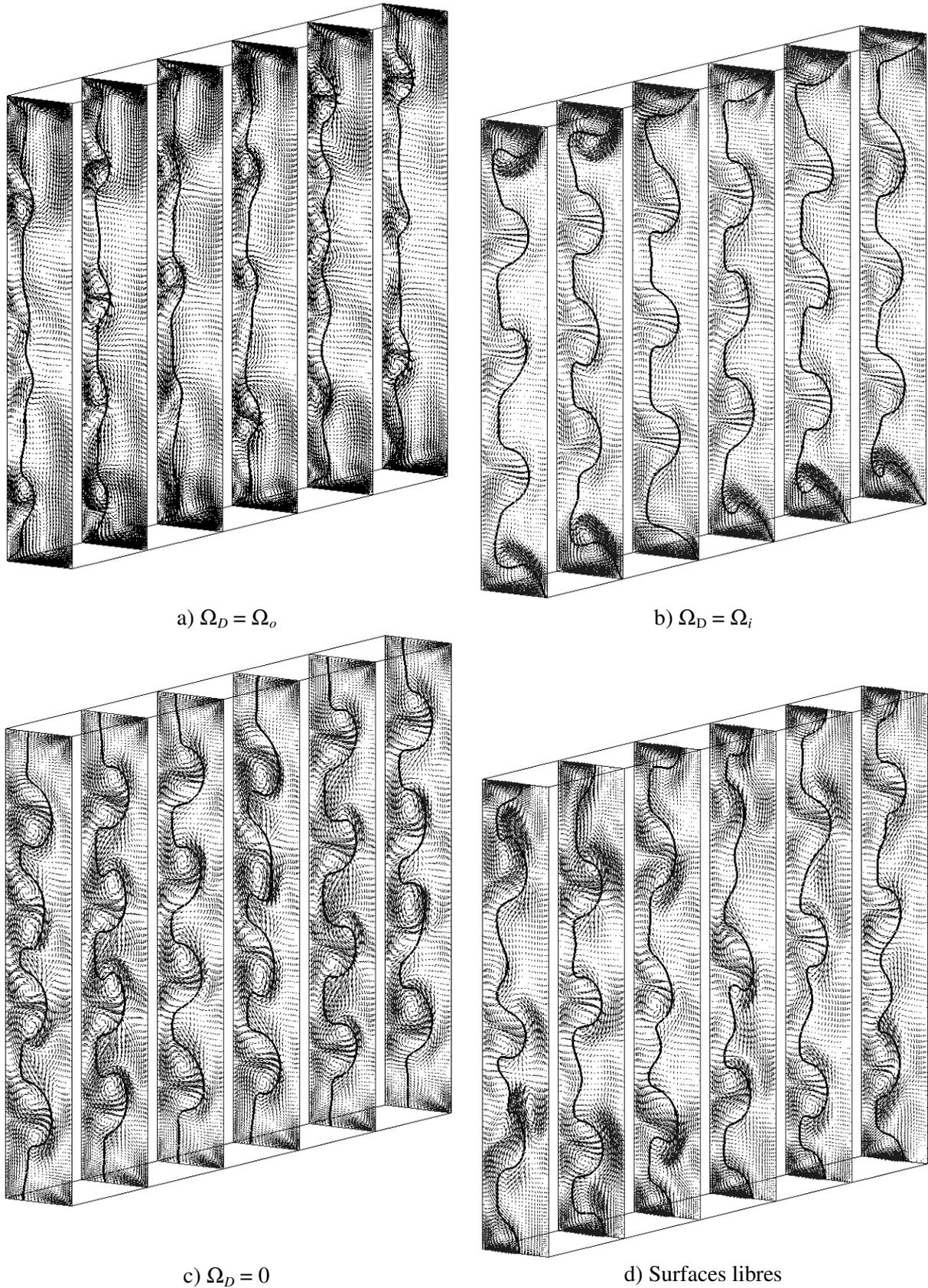
Les Fig. 4-18, Fig. 4-19 et Fig. 4-20 montrent la projection de la vitesse sur des plans méridiens ( $r, z$ ) en représentation cartésienne. La paroi du cylindre interne est figurée sur la gauche, comme indiqué sur la Fig. 4-18 – a. Sur les Fig. 4-19 et Fig. 4-20, on note que les tourbillons tendent à demeurer à proximité du cylindre interne. Nous avons fait figurer sur chacun des plans l'isocontour  $V_\theta = 0$ , qui correspond à la trace dans le plan méridien de l'isosurface  $V_\theta = 0$  représentée en Fig. 4-14. On constate que, en très grande partie, les tourbillons restent localisés dans la zone de fluide comprise entre le cylindre interne et l'isosurface  $V_\theta = 0$ , ce que l'on peut mieux apprécier sur la Fig. 4-21, qui montre quelques agrandissements de plans méridiens extraits des Fig. 4-18, Fig. 4-19 et Fig. 4-20.

*Le critère de Rayleigh, la configuration contrarotative et la prédétermination des seuils d'instabilité.*

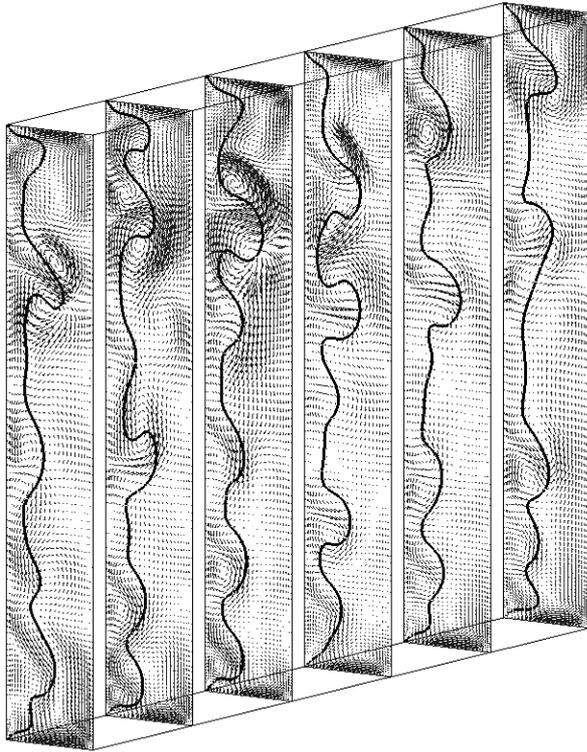
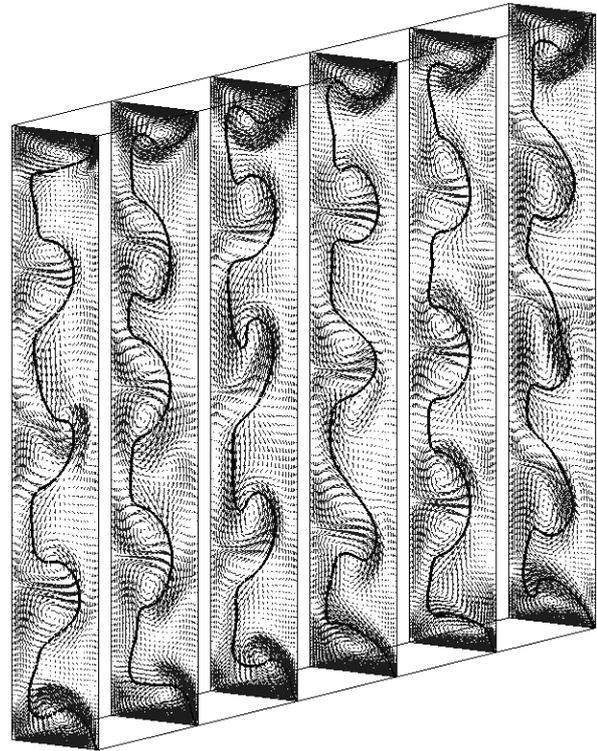
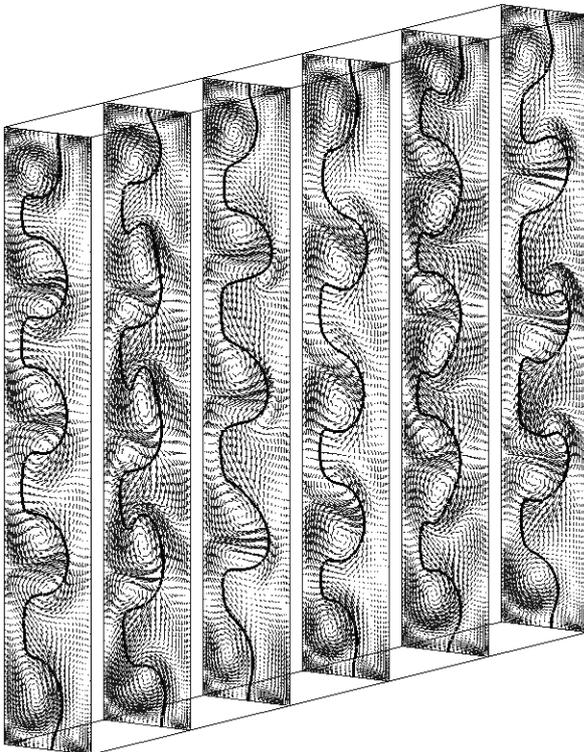
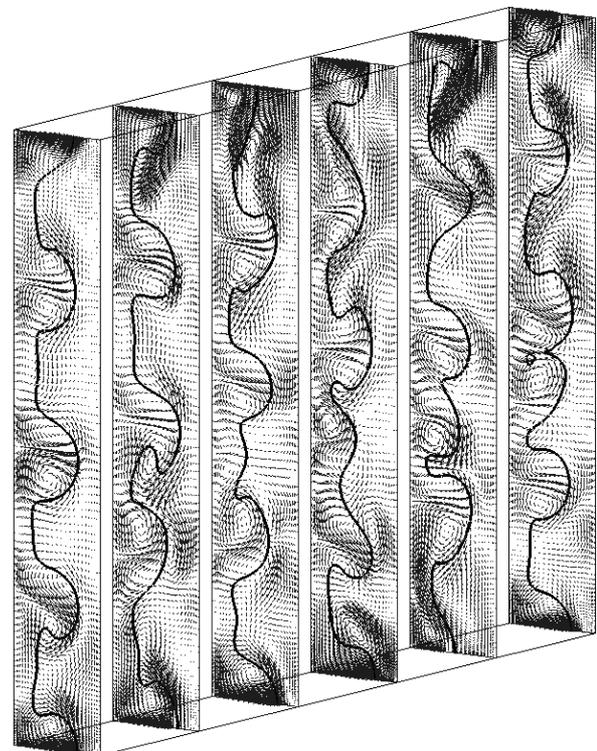
Le critère de Rayleigh (voir section 1.1.1) est pertinent pour analyser ces comportements. Dans le cadre d'un domaine annulaire et pour un fluide non visqueux entraîné par un mouvement de base (de type Couette) contrarotatif, les instabilités se développent dans une sous-couche interne. Cette sous-couche est bornée d'une part par la frontière interne en rotation, et d'autre part par l'isosurface  $V_\theta = 0$  qui est, dans la configuration de l'écoulement de base, une surface cylindrique située à distance intermédiaire entre les deux cylindres tournant à  $\Omega_i$  et  $\Omega_o$ . Le domaine se divise donc en une sous-couche active où se développe l'instabilité, et une sous-couche passive et stable, où l'écoulement non visqueux reste azimutal. Ceci revient à assimiler le domaine de la sous-couche active à un système de Taylor-Couette rotor-stator, la surface du stator étant représentée par l'isosurface  $V_\theta = 0$ .



**Fig. 4-18** - VWF ( $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ ) : projection de la vitesse sur six plans méridiens équidistants en représentation cartésienne ; l'azimut  $\theta$  des plans varie entre 0 et  $\pi$ . Le cylindre interne est à gauche et le sens de déplacement des parois est indiqué par une flèche. Sur chaque plan figure en trait gras le contour  $V_\theta = 0$ . L'échelle des vecteurs n'est pas identique entre les quatre figures..

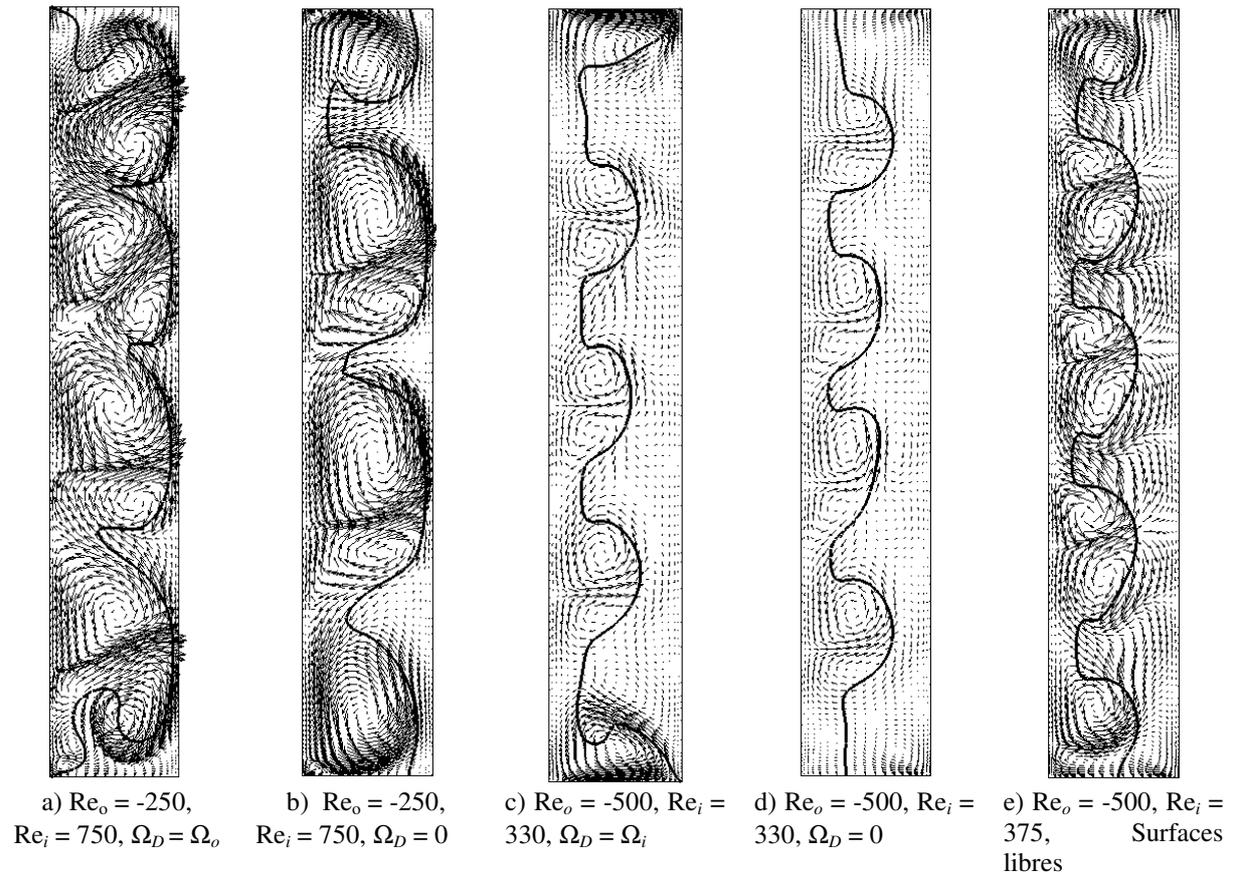


**Fig. 4-19** - IPS ( $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 330$ ) : projection de la vitesse sur six plans méridiens équidistants en représentation cartésienne; l'azimut  $\theta$  des plans varie entre 0 et  $\pi$ . Le cylindre interne est à gauche et son mouvement est dirigé vers la droite (indiqué par la flèche sur la figure). L'échelle des vecteurs n'est pas identique entre les quatre figures.

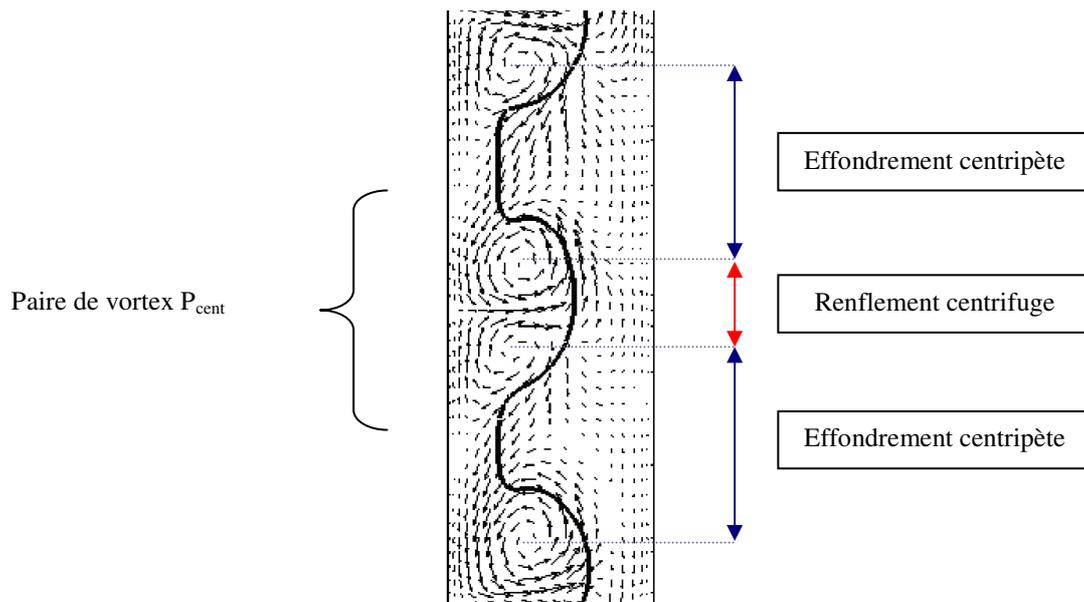
a)  $\Omega_D = \Omega_o$ b)  $\Omega_D = \Omega_i$ c)  $\Omega_D = 0$ 

d) Surfaces libres

**Fig. 4-20** - WIS ( $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ) : projection de la vitesse sur six plans méridiens équidistants en représentation cartésienne; l'azimut  $\theta$  des plans varie entre 0 et  $\pi$ . Le cylindre interne est à gauche et son mouvement est dirigé vers la droite (indiqué par la flèche sur la figure). L'échelle des vecteurs n'est pas la même entre les quatre figures.



**Fig. 4-21** – Projection du champ de vitesse sur des plans méridiens extraits des Fig. 4-18, Fig. 4-19 et Fig. 4-20. Le trait noir épais matérialise l'isocontour  $V_\theta = 0$ . NB : l'échelle des vecteurs est ici la même entre les cinq figures.



**Fig. 4-22** – Agrandissement de la Fig. 4-21-c explicitant la structure des écoulements. On note la paire de vortex confinée dans le renflement centrifuge de la surface  $V_\theta = 0$ .

En réalité, les effets de viscosité sont présents, et l'interface  $V_\theta = 0$  séparant d'une part la zone d'écoulement instable où apparaissent dans le plan méridien des cellules d'instabilité convective, et d'autre part l'écoulement stable externe, n'est pas une interface parfaite séparant deux zones d'écoulement distinctes et découplées, du fait des effets de viscosité induits par diffusion. Néanmoins, cela peut encore être considéré vrai, strictement, au seuil de transition, mais cela ne l'est plus dès que l'on atteint des valeurs de nombres de Reynolds largement supercritiques.

Nous avons pris en compte l'analyse de Rayleigh en déterminant le lieu de l'isosurface  $V_\theta = 0$  qui détermine, avec le cylindre interne, la couche de cisaillement sujette à l'instabilité. Cette surface est repérée par une abscisse radiale  $r_{V_\theta=0}^*$  qui s'exprime en fonction de  $Re_o$ ,  $Re_i$  et  $\eta$  sous la forme :

$$\frac{d_{V_\theta=0}}{d} = \frac{r_{V_\theta=0}^* - r_i^*}{d} = \frac{\sqrt{\frac{\eta(Re_i - \eta Re_o)}{\eta Re_i - Re_o}} - \eta}{1 - \eta} \quad (4-2)$$

avec  $\eta = r_i^* / r_o^*$ . L'épaisseur  $d_{V_\theta=0} = r_{V_\theta=0}^* - r_i^*$  définit l'épaisseur de la sous-couche active. A l'identique d'un système Taylor-Couette rotor-stator, on définit avec l'épaisseur  $d_{V_\theta=0}$  un nombre de Reynolds  $Re_{i,V_\theta=0}$ , caractéristique de cette sous-couche, par  $Re_{i,V_\theta=0} = \Omega_i r_i^* d_{V_\theta=0} / \nu$ .

Les travaux de Di Prima *et al.* [26], pour un fluide visqueux entre deux parois cylindriques, ont permis de déterminer une courbe donnant le nombre de Reynolds critique de l'écoulement Couette azimutal dans la sous-couche interne,  $Re_{i,crit,V_\theta=0} = \Omega_{i,crit} r_i^* d_{V_\theta=0} / \nu$ , en fonction du rapport de rayon  $\eta_{V_\theta=0} = r_i^* / r_{V_\theta=0}^*$ . Cette courbe est représentée en Fig. 4-23. Snyder [72] a fourni quant à lui une formule empirique donnée par:

$$Re_{i,crit,V_\theta=0} \approx 27\eta(1-\eta)[(1-\eta)\eta]^{-5/3} \quad (4-3)$$

La courbe correspondante est reportée en pointillés sur la Fig. 4-23. On note une tendance asymptotique avec  $Re_{i,crit,V_\theta=0}$  tendant vers l'infini pour  $\eta_{V_\theta=0} \rightarrow 1$ .

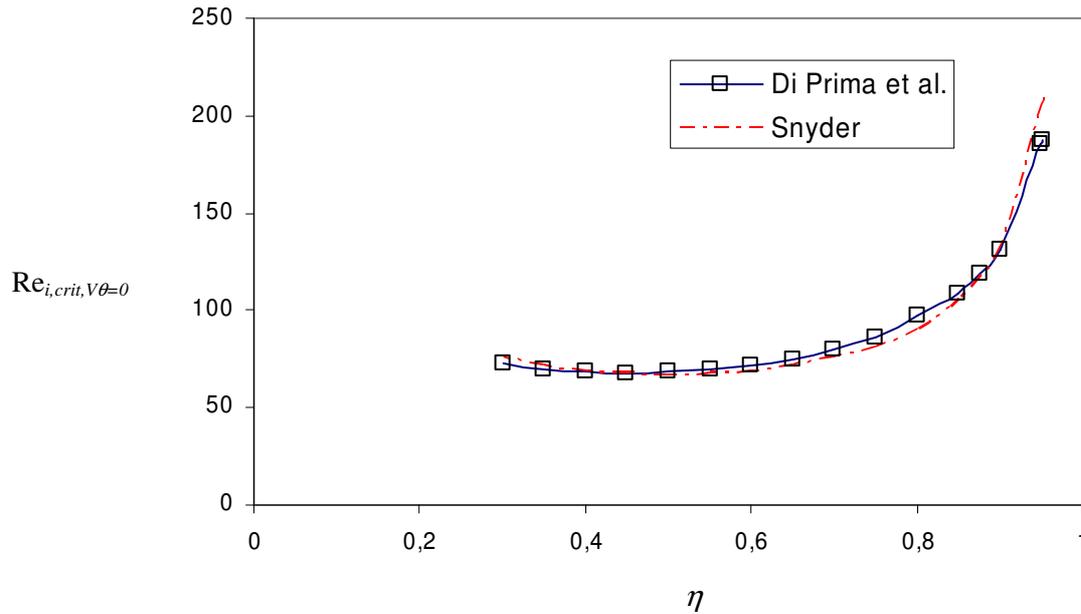
Dans le cadre des trois points de fonctionnement que nous avons considéré, c'est-à-dire :

- WVF :  $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ ,
- IPS :  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 330$ ,
- WIS :  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ,

on fait l'hypothèse d'un régime de Couette de base et la relation (4-2) qui en découle permet de déterminer l'abscisse radiale de l'isosurface  $V_\theta = 0$ . On identifie ainsi la couche interne de la configuration contrarotative avec la couche instable. Les valeurs correspondantes de  $d_{V_\theta=0}$  figurent dans le Tableau 4-3, ainsi que le nombre de Reynolds caractéristique de la sous-couche visqueuse,  $Re_{i,V_\theta=0}$ . En utilisant le  $\eta_{V_\theta=0}$  correspondant, on extrapole à partir des données de Di Prima *et al.* (Fig. 4-23) le Reynolds critique de transition  $Re_{i,crit,V_\theta=0}$  de la sous-couche.

$Re_o$	$Re_i$	$d_{V_\theta=0}$	$\eta_{V_\theta=0}$	$Re_{i,V_\theta=0}$	$Re_{i,crit,V_\theta=0}$
-250	750	0.721 d	0.8062	540.80	98
-500	330	0.364 d	0.8917	120.18	126.4
-500	375	0.394 d	0.8838	147.79	122.2

**Tableau 4-3** –Épaisseur de la sous-couche instable, obtenue avec l'équation (4-2), pour chacun de jeux de nombres de Reynolds utilisés dans cette partie. On indique aussi le nombre de Reynolds associé à la sous-couche,  $Re_{i,V_\theta=0}$ , ainsi que le seuil critique de la première instabilité,  $Re_{i,crit,V_\theta=0}$ .



**Fig. 4-23** – Courbe de stabilité  $Re_{i,crit,V\theta=0}(\eta)$  pour l'écoulement de Couette azimutal (d'après Di Prima *et al.* [26]). En pointillés rouge, la courbe de stabilité fournie par la formule empirique de Snyder [72].

Ceci indique que pour la configuration WVF ( $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ ), le régime obtenu est très supercritique ( $Re_{i,V\theta=0}$  est 5.5 fois supérieur au Reynolds critique) et les déformations de l'isosurface  $V_\theta = 0$  sont très significatives dans cet état (Fig. 4-18). En dehors de la zone des tourbillons marginaux, l'épaisseur de la sous-couche instable varie entre 20%  $d$  et 100%  $d$ , soit autour de la valeur de 72%  $d$  fournie par la relation (4-2). Pour le cas IPS, le Reynolds de la sous-couche est très légèrement sous-critique, inférieur au Reynolds critique d'environ 5%, alors que l'on s'attendait à un nombre de Reynolds supercritique. Néanmoins ceci peut être relié aux effets de bord. Les déformations de la couche instable sont bien moindres que pour le cas WVF (Fig. 4-19). L'épaisseur de la sous-couche est comprise entre 20%  $d$  et 70%  $d$ , à relier à la valeur théorique de 36%  $d$  fournie par (4-2). Pour le cas WIS, l'état est faiblement supercritique et proche du seuil (Fig. 4-20). L'épaisseur de la sous-couche interne est également comprise entre 20%  $d$  et 70%  $d$ , soit là encore autour de la valeur théorique correspondante de 39%  $d$ .

Dans le plan méridien, l'isosurface  $V_\theta = 0$  présente des renflements - orientés vers le cylindre externe - qui correspondent à un flux radial centrifuge, et des renflements - orientés vers le cylindre interne - qui correspondent à un flux radial centripète, comme illustré sur la Fig. 4-22. On note sur cette figure que chaque renflement centrifuge contient une paire de vortex contrarotatifs dont la frontière commune correspond à la zone de flux radial centrifuge ; à l'opposé, la zone de flux radial centripète est encadrée par deux vortex ; cette caractéristique est commune à tous les écoulements visualisés sur les Fig. 4-18, Fig. 4-19 et Fig. 4-20. La distance entre les centres des deux vortex de la zone centrifuge est indiquée par une flèche rouge sur la Fig. 4-22. Dans tous les cas, cette distance est inférieure à la distance qui sépare deux vortex délimitant la zone centripète (indiquée par une flèche bleue sur la Fig. 4-22).

#### *Influence des parois terminales sur la structure ondulatoire des écoulements.*

La Fig. 4-24 montre, pour le cas WIS  $\Omega_D = 0$ , les isocontours de l'énergie spectrale  $E_k$  dans le plan méridien. On rappelle que  $E_k$  est définie par l'expression :

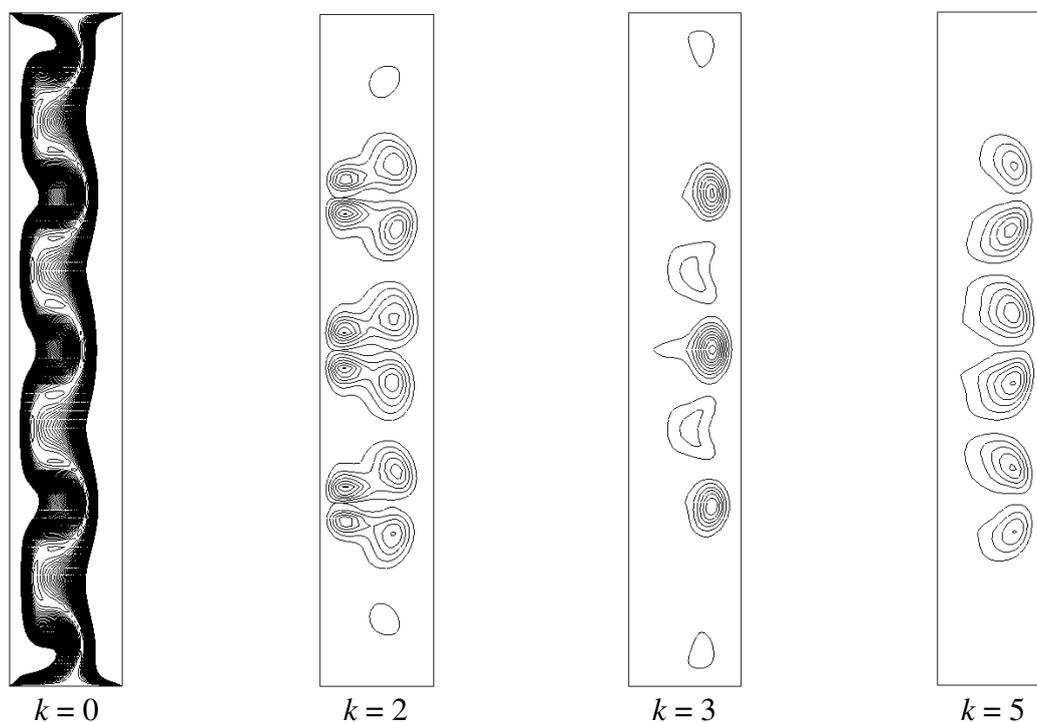
$$\begin{aligned}
 E_k(r^*, z) &= \left| \hat{V}_{r,k}(r^*, z) \right|^2 + \left| \hat{V}_{\theta,k}(r^*, z) \right|^2 + \left| \hat{V}_{z,k}(r^*, z) \right|^2 \\
 &= E_{r,k}(r^*, z) + E_{\theta,k}(r^*, z) + E_{z,k}(r^*, z)
 \end{aligned}$$

Plusieurs modes azimuthaux sont représentés. En dehors du mode axisymétrique  $k = 0$ , le mode dominant est le mode  $k = 2$ , les modes  $k = 3$  et  $k = 5$  apportant des contributions plus modestes.

Pour tous les cas WVF, IPS et WIS et pour toutes les conditions non glissantes ( $\Omega_D = \Omega_o$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$  et  $\Omega_D = 0$ ), l'énergie spectrale de tous les modes non axisymétriques ( $k \neq 0$ ) décroît à proximité des parois terminales, ce que l'on peut voir sur la Fig. 4-25 dans le cas particulier WIS avec  $\Omega_D = 0$ . La figure représente une superposition de profils axiaux  $E_{k=2}(z)$  pour plusieurs positions radiales. Pour toutes les positions radiales, la diminution de l'énergie jusqu'à 0 peut être constatée à proximité de la paroi terminale. Des extrema à hauteur de 0.01 sont concentrés dans la moitié de la cavité, localisés dans le plan méridien au niveau des zones de flux radial centrifuge. Au niveau des parois terminales, on observe que le « forçage » par les parois terminales en rotation d

Dans le cas de surfaces libres, la paroi terminale supprime seulement la composante axiale de l'énergie spectrale, comme nous avons pu le constater dans le cas rotor-stator (3.3.3). En considérant les profils axiaux de  $E_k$  et de ces contributions à  $r^* = (r_i^* + r_o^*)/2$ , on note que les contributions radiale et azimuthale de l'énergie du mode  $k = 2$  sont réduites de manière significative, valant seulement environ 26% et 35% respectivement de leur valeur maximale atteinte sur toute la hauteur de la cavité au même rayon; par ailleurs, la somme de ces mêmes contributions représentent à la surface libre environ 55% du maximum d'énergie totale  $E_k$  atteint sur ce même axe.

Ainsi, comme nous l'avons vu dans le cas rotor-stator, le frottement à la paroi n'est pas le mécanisme majeur responsable de la réduction du caractère ondulatoire de l'écoulement près de la paroi. Le caractère plat de la surface libre non seulement élimine la composante axiale des oscillations, mais en plus réduit les contributions radiale et azimuthale des oscillations.



**Fig. 4-24**– WIS ( $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ),  $\Omega_D = 0$  : isocontours de  $E_k$  dans le plan méridien pour plusieurs modes azimuthaux. Les contours sont séparés de manière égale, et l'échelle est la même pour toutes les figures, avec pour valeur maximale  $10^{-1}$ . Le cylindre interne se situe à gauche.

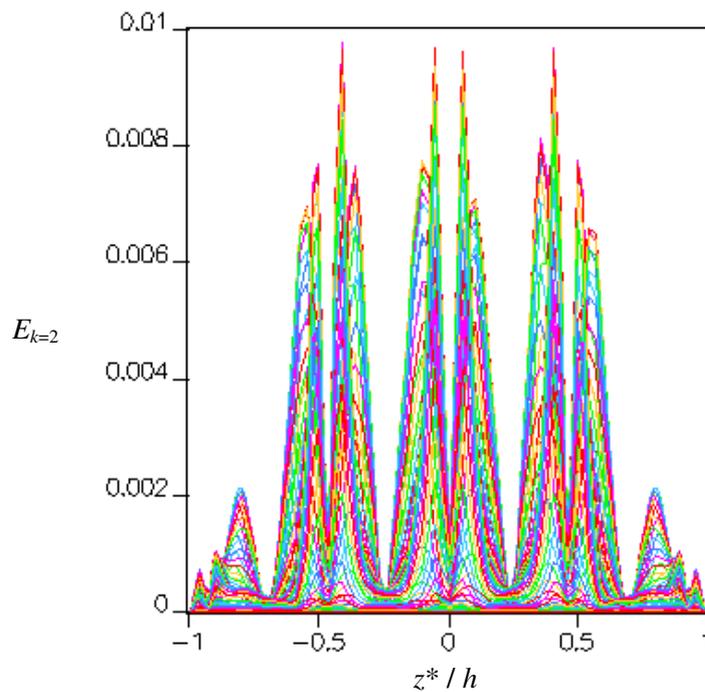


Fig. 4-25 – WIS,  $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ . Superposition de profils  $E_k(z)$ , pour le mode  $k = 2$ , à plusieurs positions radiales.

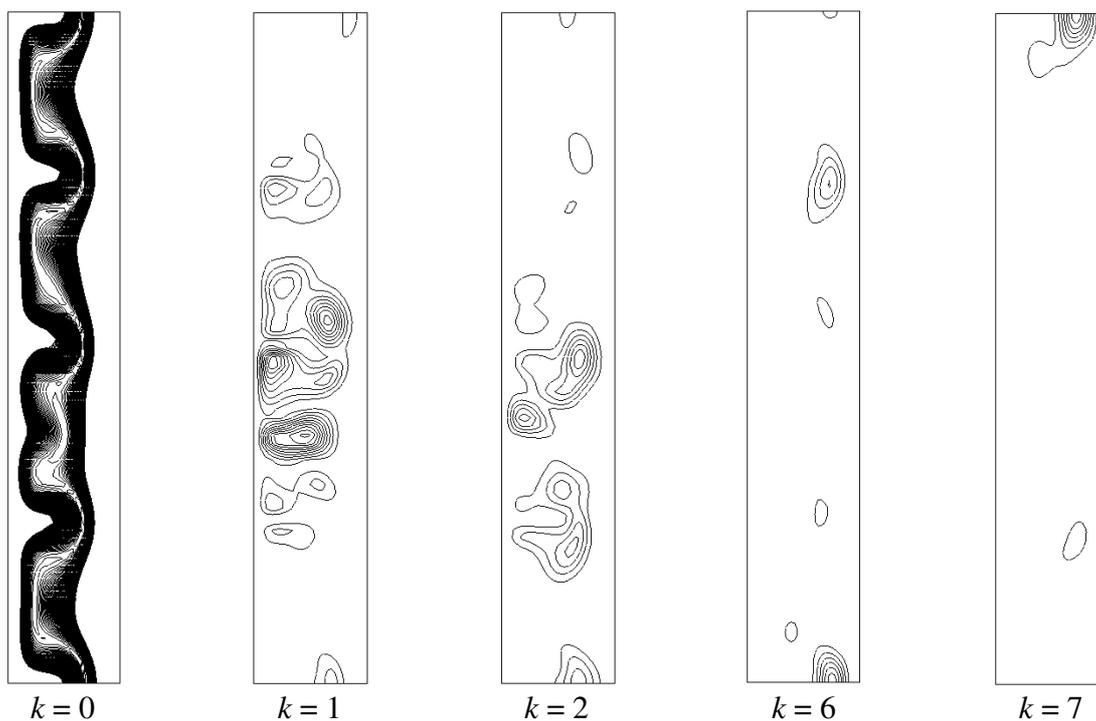
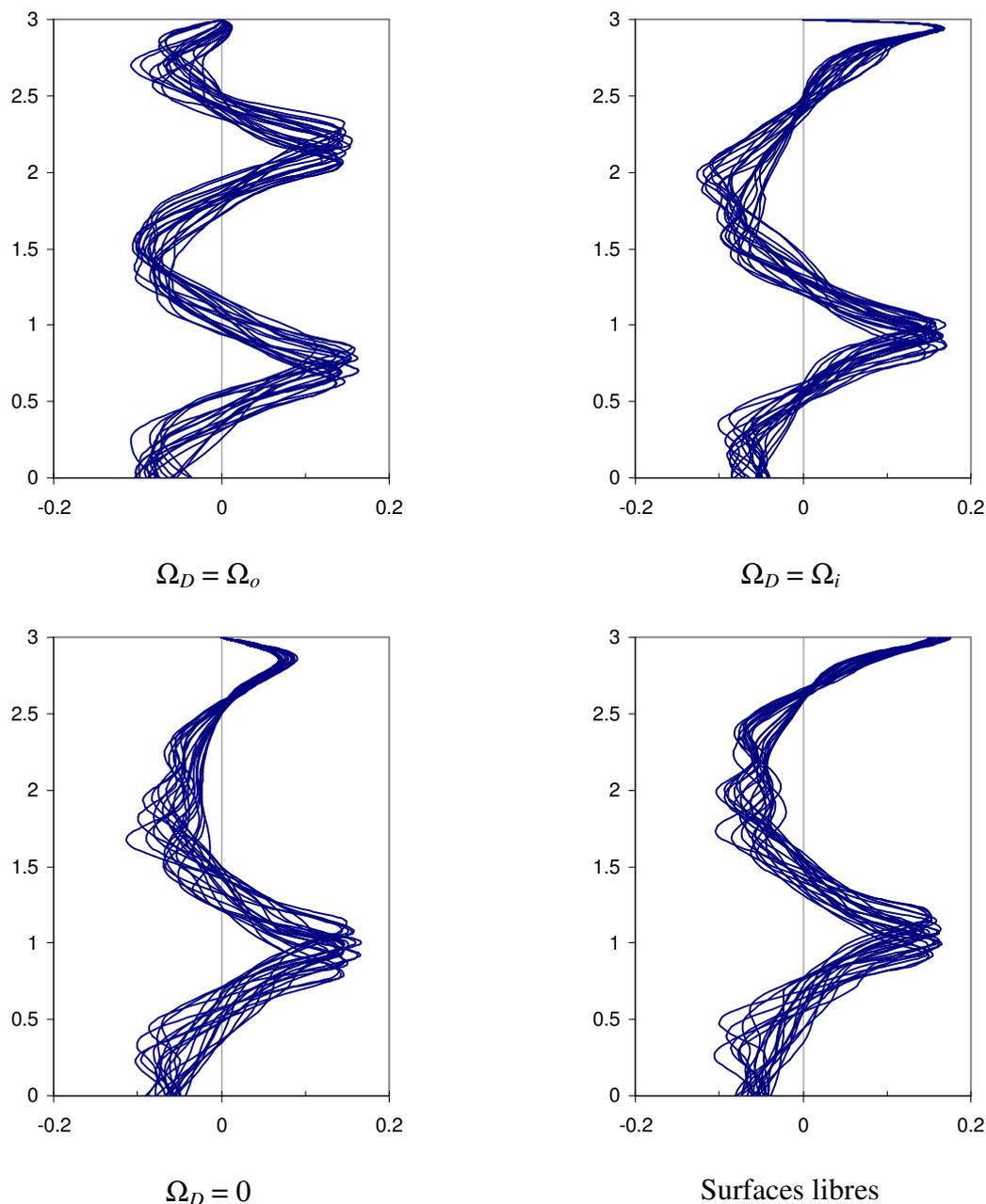


Fig. 4-26 – WIS ( $Re_o = -500$ ,  $Re_i = 375$ ), « surfaces libres » : isocontours de  $E_k$  dans le plan méridien pour plusieurs modes azimutaux. Les contours sont séparés de manière égale, et l'échelle est la même pour toutes les figures. Le cylindre interne se situe à gauche.

*Interaction de la couche d'Ekman avec les structures tourbillonnaires.*

Les profils axiaux de la composante radiale de la vitesse en  $r^* = (r_o^* + r_i^*) / 2$  sont représentés en Fig. 4-27 pour le cas WVF ( $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ ), et à plusieurs positions azimutales  $\theta$ . La couche limite d'Ekman est parfaitement distincte à proximité de la paroi terminale ( $2.8 \leq z^* / d \leq 3$ ) pour les conditions limites  $\Omega_D = \Omega_i$  et  $\Omega_D = 0$ . Dans le cas des surfaces libres, on note l'absence de couche limite d'Ekman comme nous l'avons précédemment observé dans le cas rotor-stator (Chapitre 3). Pour le cas  $\Omega_D = \Omega_o$ , la couche limite est moins distincte, la direction radiale de l'écoulement pouvant être centrifuge ou centripète, selon la position azimutale.



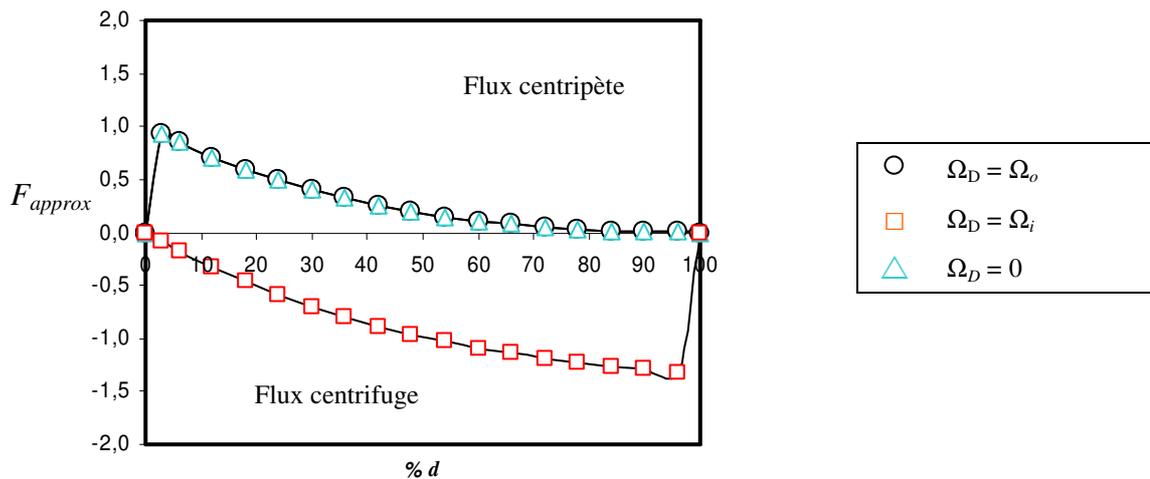
**Fig. 4-27** – Profils axiaux de la vitesse radiale  $V_r^* (z^* / d)$ , pour des positions azimutales allant de 0 à  $2\pi$  ; la position radiale est fixée à  $r_i^* + d / 2$ . La vitesse est adimensionnée par  $r_i^* \Omega_i - r_o^* \Omega_o$ . Le flux centrifuge est compté comme positif.

Pour prédire la direction de l'écoulement dans la couche limite, on peut appliquer ici l'approximation de la force visqueuse que nous avons développée dans la section 3.1. La Fig. 4-28 montre le profil radial de l'approximation  $F_{approx}$  de la force visqueuse  $F^*$  ainsi obtenue, pour chacune des conditions limites non glissantes  $\Omega_D = \Omega_o$ ,  $\Omega_D = \Omega_i$ , et  $\Omega_D = 0$ . Le flux est centripète lorsque  $F^*$  est positive, centrifuge dans le cas contraire.

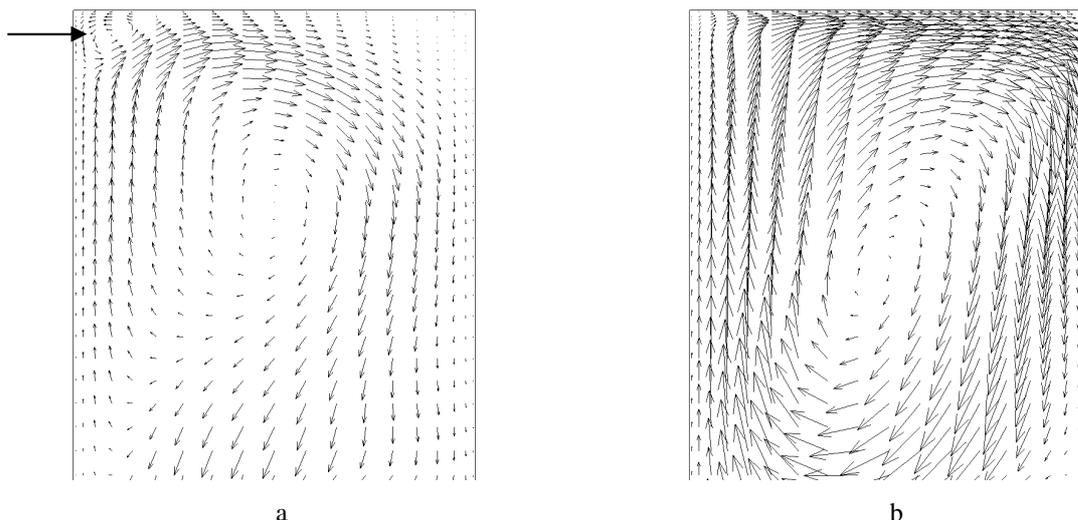
L'approximation fournit une prédiction correcte du sens de l'écoulement de couche limite pour chacune des combinaisons de nombres de Reynolds et pour chacune des conditions limites non glissantes, à l'exception du cas WVF avec  $\Omega_D = 0$ . Dans cette situation, l'approximation prédit un écoulement centripète alors que l'on observe un mouvement centrifuge à partir de la simulation. Toutefois, ce résultat s'explique d'un part, par l'utilisation comme condition initiale de l'écoulement obtenu à  $\Omega_D = \Omega_i$ , et d'autre part parce que la force visqueuse sur la paroi terminale est proche de zéro pour  $d/2 \leq r^* \leq d$  (Fig. 4-28). La force visqueuse pilote essentiellement l'écoulement pour  $r_i^* \leq r^* \leq r_i^* + d/2$ . Si on calcule l'intégrale  $I$  de la force visqueuse sur toute la surface du disque terminal, définie par :

$$I = 2\pi \left| \int_{r_i^*}^{r_o^*} F_{approx}(r) r dr \right|$$

on obtient un résultat 3.3 fois supérieur dans le cas  $\Omega_D = \Omega_i$  que dans le cas  $\Omega_D = 0$ . Dès lors, le flux centrifuge important imposé par la condition limite  $\Omega_D = \Omega_i$  ne parvient pas à être inversé par la force visqueuse lorsqu'on passe en conditions de disque fixes. Néanmoins, on note la présence d'un petit tourbillon généré par un écoulement centripète à l'intersection du disque terminal et du cylindre interne, à l'endroit où la force visqueuse est la plus importante (indiqué par une flèche sur la Fig. 4-29-a). Ce petit tourbillon est semblable à ceux trouvés par Cliffe & Mullin [20] dans le cas rotor-stator. Ces derniers avaient relevé l'existence de modes anormaux pour lesquels les tourbillons marginaux tournaient dans le sens opposé à celui naturellement induit par les parois terminales. Ils avaient néanmoins noté l'existence de tourbillons plus petits dont le sens de rotation était quant à lui conforme à la balance des forces en couche limite.



**Fig. 4-28** – Profil radial de l'approximation  $F_{approx}$  de la force visqueuse  $F^*$  à proximité des disques terminaux, donnée par l'expression (3-7) (Chapitre 3), appliquée dans le cas des simulations en contrarotation. En abscisse, la distance à la paroi du cylindre interne est donnée en %  $d$ .



**Fig. 4-29** – WVF ( $Re_o = -250$ ,  $Re_i = 750$ ). Comparaison dans un plan méridien du champ de vitesse, à proximité de la paroi terminale supérieure, dans le cas : a)  $\Omega_D = 0$  ; b)  $\Omega_D = \Omega_i$ . L'échelle des vecteurs est identique pour les deux figures. Le cylindre interne est situé à gauche. La flèche pour a) indique la position du petit tourbillon dont le sens de rotation est conforme à celui fourni par l'approximation  $F_{approx}$ .

#### *Epaisseur de la couche d'Ekman.*

Comme vu dans la section 3.2.2.1, l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche d'Ekman peut être estimée par :

$$\frac{\delta_D}{L} \approx \sqrt{Ek} = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega L^2}}$$

où  $Ek$  est le nombre d'Ekman, et  $\Omega$  l'échelle caractéristique de vitesse angulaire dans l'écoulement.

Pour prendre en compte la contrarotation et les deux vitesses de rotation qui pilotent l'écoulement, nous choisissons  $\Omega_i - \Omega_o$  comme échelle de vitesse angulaire. Pour rester consistant avec le dimensionnement choisi pour estimer l'épaisseur de la couche limite dans le cas rotor-stator - équation (3-10) -, on choisit l'épaisseur intercylindre  $d$  comme longueur caractéristique. On obtient :

$$\frac{1}{Ek} = \frac{(\Omega_i - \Omega_o)d^2}{\nu} = Re_i \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) - Re_o (1 - \eta) \quad (4-4)$$

Soit

$$\frac{\delta_D}{d} = \frac{1}{\sqrt{Re_i \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) - Re_o (1 - \eta)}} \quad (4-5)$$

Ce dimensionnement permet de retrouver l'équation (3-10) du cas rotor-stator lorsque  $Re_o = 0$ . L'épaisseur de la couche limite estimée par l'équation (4-5) est reporté dans le Tableau 4-4.

Cas	WVF ( $Re_o = -250$ , $Re_i = 750$ )	IPS ( $Re_o = -500$ , $Re_i = 330$ )	WIS ( $Re_o = -500$ , $Re_i = 375$ )
$\delta_D / d$	0.056	0.065	0.063

**Tableau 4-4** – Epaisseur  $\delta_D / d$  de la couche d'Ekman estimée par l'équation (4-5).

Comme nous l'avons fait pour le cas rotor-stator, nous avons estimé l'épaisseur de la couche limite d'Ekman en considérant les profils axiaux de la vitesse radiale à la position radiale  $r_i^* + d/2$ . Les résultats figurent dans le Tableau 4-5. Pour  $\Omega_D = \Omega_i$  et  $\Omega_D = \Omega_o$ , l'épaisseur varie entre 2% et 30% des valeurs fournies par le Tableau 4-4. Dans les cas  $\Omega_D = 0$ , l'épaisseur est plus grande que l'estimation. Cet écart peut s'expliquer par le fait que pour le cas d'un disque fixe, l'échelle de vitesse angulaire correspond à la vitesse angulaire du fluide loin de la paroi, et donc ne correspond plus à l'échelle  $\Omega_i - \Omega_o$  utilisée dans l'équation (4-5).

Cas ( $\text{Re}_o, \text{Re}_i$ )		WVF (-250, 750)	IPS (-500, 330)	WIS (-500, 375)
$\delta_D / d$	$\Omega_e = \Omega_o$	0.066 *	0.050 to 0.066	0.050 to 0.066
	$\Omega_e = \Omega_i$	0.050 to 0.066	0.066 to 0.083	0.066 to 0.082
	$\Omega_e = 0$	0.147	0.102	0.066 to 0.102 *

**Tableau 4-5** – Epaisseur  $\delta_D / d$  de la couche d'Ekman pour les cas de conditions limites non glissantes, obtenus à partir des résultats des simulations. Les cas indiqués par une astérisque \* indiquent les situations où la couche limite d'Ekman disparaît à quelques positions azimutales. L'unité est l'épaisseur intercylindre  $d$ .

### 4.3 Conclusion

Le système de Taylor-Couette en configuration contrarotative fournit une large variété d'écoulements complexes. Nous avons pu mettre en évidence des structures de type spirale ou WVF dans cette gamme de régime, et l'aspect de ces structures est conforme à de précédentes observations. Nous nous sommes également intéressés à l'influence des frontières terminales sur ces structures et sur l'écoulement de couche limite au niveau de ces frontières. Il apparaît que les structures dépendent à des degrés divers des conditions limites, selon la combinaison de nombres de Reynolds considérée. Dans le cas WVF, la structure des ondulations ne dépend pas fortement des conditions limites. Dans le cas IPS ou WIS, les conditions-limites peuvent modifier le caractère interpénétrant des structures, et augmenter ou diminuer le caractère ondulatoire de l'écoulement. Les vortex tendent à demeurer dans la sous-couche instable délimitée par le cylindre interne et l'isosurface  $V_\theta = 0$ . Comme dans le cas rotor-stator (Chapitre 3), les oscillations de l'écoulement sont modifiées par les conditions-limites. Le frottement aux parois n'est pas le mécanisme majeur de cette altération.

## Conclusion et perspectives

Ce travail apporte une contribution à l'étude des systèmes de Taylor-Couette pour des valeurs de rapport d'aspect modérées ( $5 \leq \Gamma \leq 6$ ) par la mise en évidence de régimes d'écoulements complexes tridimensionnels et instationnaires. Une attention particulière a été portée sur les effets liés au confinement axial avec l'étude de l'interaction entre frontières terminales et instabilité centrifuge de Taylor. Un code tridimensionnel basé sur des approximations spectrales des solutions des équations de Navier-Stokes a été mis en œuvre. La haute précision des méthodes utilisées a permis d'analyser la dynamique spatiotemporelle de ces écoulements dans des configurations rotor-stator et contrarotative.

Dans le cas d'un système de Taylor-Couette en rotor-stator, nos résultats ont permis de montrer toute l'importance des circulations tourbillonnaires générées au niveau des frontières terminales. En particulier, dans le cas de rapports d'aspects moyens, nos résultats ont montré comment les parois terminales modifient sensiblement le scénario de transition prévu par la théorie dans le cas de cylindres infiniment longs. La bifurcation fourche pour l'écoulement de Couette disparaît, au profit d'un régime de tourbillons marginaux diffusant depuis les frontières terminales vers le centre, auquel se superpose le régime de Taylor.

Le cas des écoulements TVF en configuration axiale très allongée n'a été retrouvé qualitativement et quantitativement qu'avec des conditions-limites idéales de type « frottement nul ». Dans ce cas, la longueur d'onde axiale des vortex ainsi que le Reynolds critique de transition théoriques ont été retrouvés.

Une analyse similaire a été réalisée dans le cas d'une configuration contrarotative peu documentée jusqu'à présent du fait de la complexité des écoulements générés. La simulation numérique directe de haute précision a permis de détailler quelques-uns de ces régimes.

L'analyse de ces résultats a été complétée par le développement d'une approche analytique de certains points de l'étude, concernant les effets des couches d'Ekman ou bien de la sous-couche active interne de la configuration contrarotative sur l'instabilité de Taylor.

Par ailleurs, le problème de Taylor-Couette offre une orientation possible vers le génie des procédés, et plus particulièrement vers les dispositifs de filtration utilisant des membranes poreuses. La compréhension des effets des parois terminales offre l'opportunité de perfectionner ce type de turbomachines et d'en améliorer le rendement. Cette thématique sera développée dans le cadre de travaux futurs, en collaboration avec la NorthWestern University (Evanston).



Une annexe à ce travail a été dédiée à l'étude des écoulements en régime turbulent dans le cas de configurations interdisques de type rotor-stator. Ce travail représente une participation à un programme de collaboration entre le LMSNM et l'UMIST (Manchester) concernant des approches couplées Simulation Directe (Eric Serre) / Approches statistiques de ces écoulements. Une partie expérimentale a été aussi initiée sur une installation de l'UMIST. Cette collaboration nous a permis d'acquérir une expérience dans l'étude des régimes turbulents dans les écoulements en rotation avec parois qui pourra être utilisée dans le futur dans le cadre des systèmes de Taylor-Couette. L'interaction entre les solutions DNS et les résultats de modélisations statistiques développées à l'UMIST sera amplifiée et devrait déboucher sur la proposition de modèles avancés plus adéquats en cavité en rotation. L'amélioration des prédictions des écoulements en régimes transitionnel et turbulent, ainsi que la confrontation des résultats issus de la simulation numérique avec des modélisations de type Ginzburg-Landau, constituent aussi des axes importants de perspectives à donner à ce travail.



# ANNEXE



## Annexe.

# Écoulements turbulents : étude d'un système rotor-stator

Le travail correspond à l'avancement d'une collaboration à laquelle j'ai participé activement pendant mon doctorat dans mon laboratoire et lors de plusieurs séjours à Manchester de l'ordre de 6 mois en total. Cette collaboration entre le laboratoire MSNM et le laboratoire du Professeur B.E. Launder de l'UMIST de Manchester concerne les écoulements turbulents de couche limite se développant dans une cavité rotor-stator allongée dans la direction radiale. Les disques jouent le rôle principal dans l'écoulement – par opposition au cas de la configuration de Taylor-Couette où ce sont les parois des cylindres qui jouent le rôle moteur et où l'influence des disques se limite à la mise en mouvement de l'écoulement par un tourbillon pariétal dès  $Re$  positif. Les couches limites caractéristiques d'Ekman et de Bödewadt, en particulier, sont le lieu d'instabilités, d'un régime de transition, d'un écoulement turbulent et il fait apparaître pour certains taux de rotation des phénomènes de transition inverse turbulence-laminaire.

Plusieurs travaux auxquels j'ai participé directement ont fait l'objet de publications qui sont jointes dans cette Annexe. Elles concernent le développement d'une étude expérimentale menée à l'UMIST et le développement d'étude par DNS auquel j'ai été associé avec E. Serre dans le laboratoire.

Pendant mes séjours de 6 mois à l'UMIST, j'ai été associé à la réalisation (et partiellement à la mise en œuvre) des études expérimentales (voir Czarny *et al.*, *J. Flow, Turbulence and Combustion*) décrites dans ce chapitre. Je me suis initié aussi à la modélisation de la turbulence dans les approches de type RANS qui est l'un des créneaux majeurs de l'UMIST et sur lequel repose leur reconnaissance internationale. L'interaction entre simulations DNS et modélisations RANS - en présence de mesures de laboratoire - doit amener à terme à une amélioration de la modélisation turbulente. J'ai suivi les études DNS menées par E. Serre et me suis trouvé associé à l'analyse des solutions spatio-temporelles tridimensionnelles produites en particulier par la représentation de celles-ci en composantes des tenseurs de Reynolds (cf *Advances in Turbulence IX*).

Cette section est décomposée en trois parties. La première développe mon implication à l'UMIST dans l'approche expérimentale. Dans la seconde partie, je relève les connaissances et les compétences acquises sur les modélisations RANS lors de ma collaboration avec B.E. Launder et H. Iacovidès à l'UMIST. La troisième partie expose des comparaisons DNS-RANS ( $k$ - $\epsilon$  et DSM), concernant les profils des vitesses moyennes, les tensions de Reynolds, et la variation des extrema de vitesse en fonction du nombre de Reynolds. Des articles complémentaires à ce travail sont joints en annexe.

## A.1. Les structures de grandes échelles dans un système interdisques : contexte et dispositif expérimental.

Les travaux de Taylor [82] ont montré qu'un fluide en mouvement circulaire peut conduire à l'apparition de structures tourbillonnaires à grande échelle. S'il est plus aisé de détecter ces structures au sein d'un écoulement laminaire, on dispose d'un certain nombre d'observations rapportant la présence de telles structures en régime turbulent, par exemple dans la couche limite d'un écoulement qui se développe sur une surface concave.

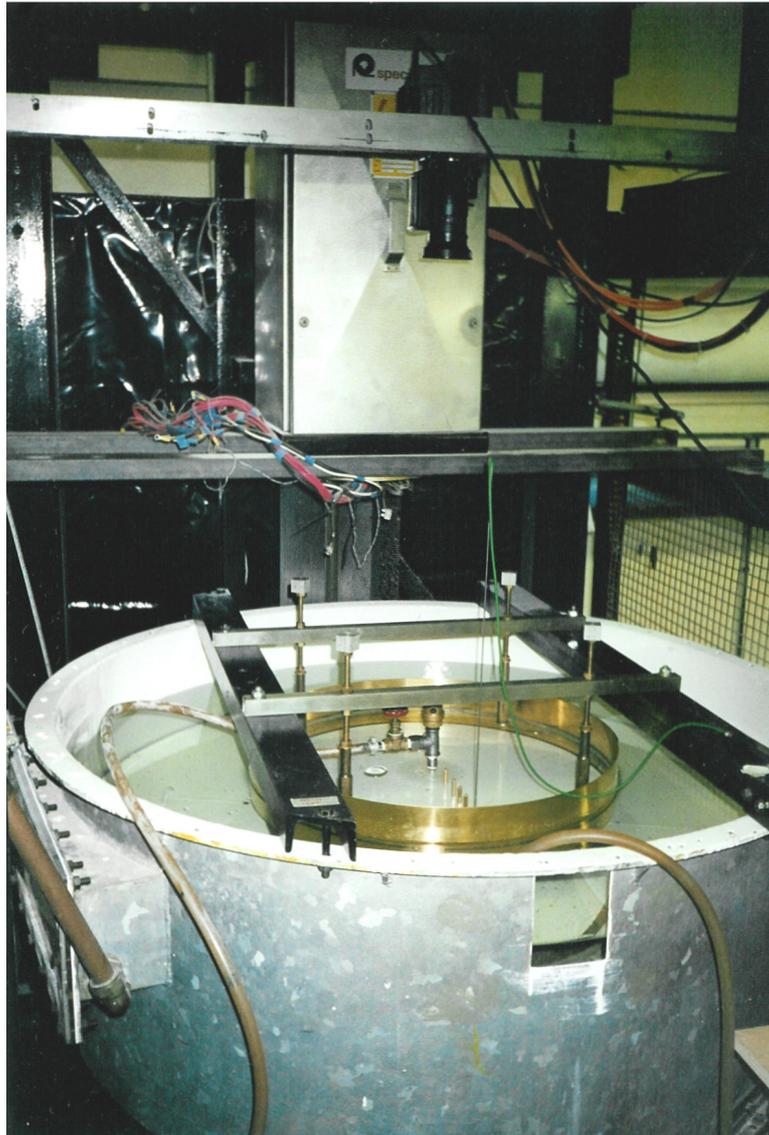
Un grand nombre d'études ont été réalisées sur les écoulements confinés pour une très large gamme de configurations mettant en jeu des disques en rotation. Cet intérêt est principalement motivé par le grand nombre d'applications industrielles pour ces écoulements, allant des disques durs d'ordinateurs aux systèmes rotor-stator que l'on peut trouver dans les turbines à gaz (Ito *et al.* [97]).

Les approches numériques des écoulements turbulents dans de telles configurations ont jusqu'à présent supposé que l'écoulement moyen était axisymétrique et stationnaire (Morse [100], Iacovides & Theofanopoulos [96]), ce qui est cohérent avec de précédentes expérimentations (Ito *et al.* [90]). Or, les études d'Abrahamson *et al.* [88] et Humphrey *et al.* [93] ont révélé l'existence de vortex de grande échelle dans l'espace compris entre deux disques co-rotatifs. Ces dernières études ont été réalisées dans le cadre des disques durs, mais Owen [101] a souligné la difficulté de prédire l'écoulement dans certaines configurations rotor-stator, et conjecturé que la cause de ce problème pouvait être liée à la formation d'instabilités tourbillonnaires de grande échelle.

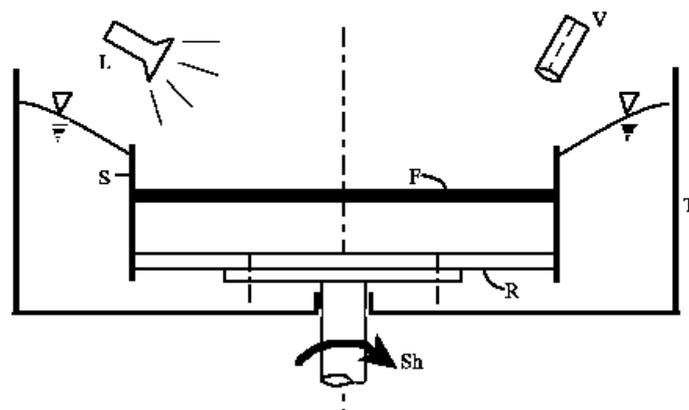
### A.1.1. Description du dispositif

Le dispositif expérimental (Fig. A-1) consiste une table tournante mise en rotation par un moteur et disposée dans un réservoir métallique ouvert de forme cylindrique (diamètre 1.22 m). La vitesse angulaire  $\Omega_D$  de la table tournante peut parcourir un intervalle allant de 30 à 250 tours par minute. Sur cette table est monté un rotor circulaire en plexiglas de rayon  $r_o^* = 307$  mm pour une épaisseur de 25 mm; la surface supérieure de ce disque est peinte en blanc pour fournir un contraste plus accentué avec l'encre noire. Au-dessus se trouve un disque fixe également en plexiglas et de même épaisseur que le rotor; son diamètre est toutefois légèrement plus grand. Sur sa circonférence est fixé un fin cylindre en laiton dont la hauteur s'étend en dessous du rotor et au dessus du stator; ceci permet de s'assurer que le disque supérieur n'est jamais au contact de l'eau, afin d'éviter tout problème de distorsion optique lors de la réalisation des prises de vue par le dessus du dispositif, au travers du stator transparent. Le système est caractérisé par le rapport d'aspect  $L = 2h / r_o^*$ , où  $2h$  est la distance entre les deux disques. On définit le nombre de Reynolds par  $Re = r_o^{*2} \Omega_D / \nu$ .

L'encre est injectée dans la cavité au moyen d'un tube hypodermique inséré au travers de petits trous percés dans le stator à diverses distances de l'axe de rotation. L'encre peut être introduite soit au centre de la cavité, soit dans la couche limite d'Ekman sur le rotor ou dans la couche de Bödewadt sur le stator. De précédents résultats (Lygren & Anderson [99]) ont montré que, dans la zone centrale,  $V_r^* = 0$  et la vitesse angulaire vaut environ 40%  $\Omega_D$ . L'encre est injectée soit continûment, soit par une simple saccade de 2 à 4 secondes. Les motifs obtenus sont enregistrés par une caméra vidéo montée au dessus de l'axe de rotation, du début de l'injection jusqu'à 30 secondes après la fin de cette phase. L'encre se disperse progressivement, et on effectue une nouvelle injection pour s'assurer que la forme des structures demeure la même qu'au départ. Les images sont ensuite numérisées.



a



b

**Fig. A-1** – Dispositif expérimental : a) photographie de l'ensemble monté à l'UMIST; b) coupe méridienne : F, disque fixe; R, disque en rotation; Sh, axe entraîné par le moteur électrique; T, réservoir; V, enregistreur vidéo; L : source lumineuse.

### A.1.2. Visualisations

Dans tous les cas illustrés par les images, le rotor tourne dans le sens direct (anti-horaire). Divers tests dans le sens indirect n'ont pas permis de discerner la moindre différence. La Fig. A-2 montre le résultat d'une injection pour  $L = 2h / r_o^* = 0.126$  et  $Re = 300\ 000$  ( $\Omega_D = 30\ \text{tr.min}^{-1}$ ); l'encre est ici introduite près du disque supérieur fixe. On note qu'ici il n'y a aucune trace de structure à grande échelle dans l'écoulement. Ceci nous servira de référence pour les figures suivantes.

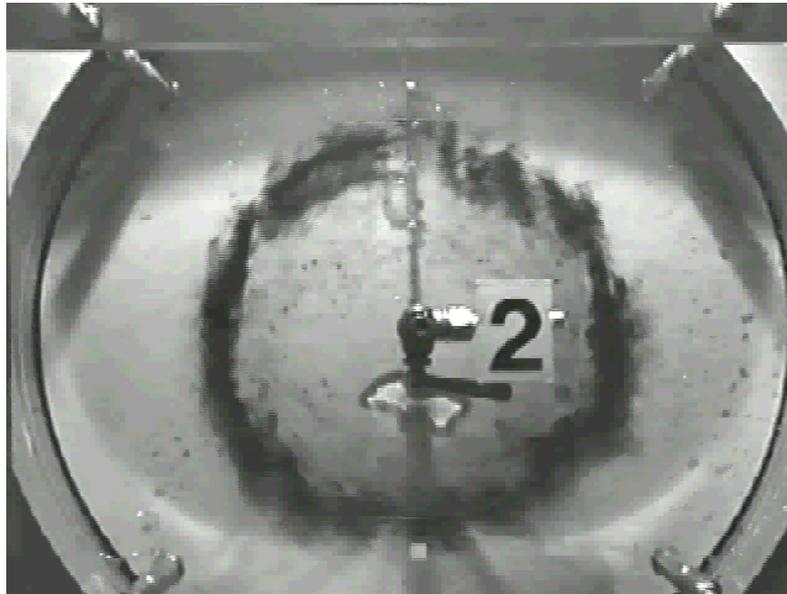
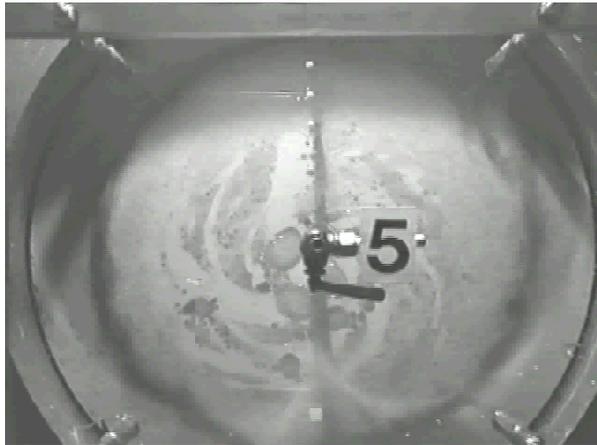


Fig. A-2 – Injection d'encre,  $Re = 300\ 000$  ( $\Omega_D = 30\ \text{tr.min}^{-1}$ ),  $L = 0.126$ ,

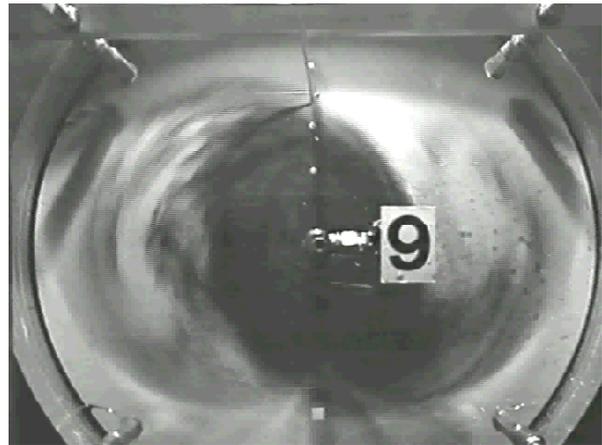
Gardant la même valeur de  $L$ , nous augmentons le Reynolds à  $Re = 900\ 000$  ( $\Omega_D = 90\ \text{tr.min}^{-1}$ ). Une structure à deux lobes (en forme de « S » inversé) peut alors être observée (Fig. A-3-b). Les structures sont animées d'une vitesse angulaire égale à peut près à la moitié de celle du rotor, ce qui indique que ces vortex sont situés dans le cœur géostrophique de l'écoulement. L'apparence globale du motif est similaire aux « structures tourbillonnaires tripolaires » que Kloosterziehl & Van Heijst [98] ont mises en évidence en étudiant des vortex barotropiques instables dans un fluide en rotation. La structure semble donc être une structure de base commune à plusieurs types d'écoulements en rotation.

On note une importante concentration d'encre dans la partie centrale elliptique de la structure; ceci indique un très faible transport de fluide depuis le centre vers le reste de la cavité.

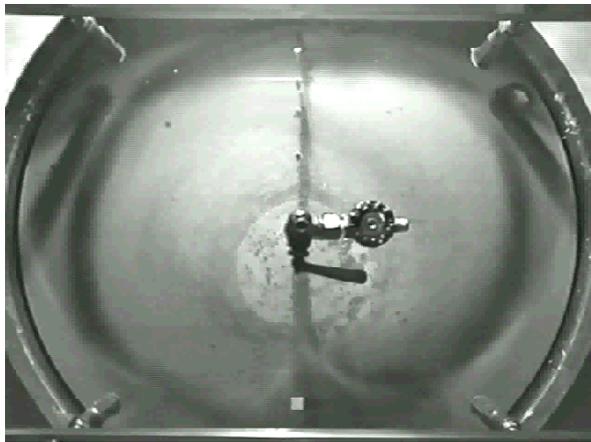
Si on augmente encore la vitesse de rotation, on obtient un motif constitué de deux vortex indistincts pour  $\Omega_D = 120\ \text{tr.min}^{-1}$  (Fig. A-3 - c); cependant, à  $\Omega_D = 180$  ou  $210\ \text{tr.min}^{-1}$ , on observe un mélange turbulent semblable à celui de la Fig. A-2 bien que 30s après la fin de l'injection, un motif à deux lobes une faiblement contrasté devient visible (Fig. A-3-d, e). Dans ce dernier cas, la partie centrale apparaît comme ellipse blanchâtre se détachant sur un fond plus sombre (plus sombre car de l'encre initialement injectée s'est mélangée de manière homogène dans l'ensemble du fluide). Ici, l'encre a été injectée près du rotor, ce qui implique que, comme pour le cas de la Fig. A-3 - c, il n'y a pas de trajectoire de fluide menant du point d'injection vers le cœur elliptique, ce dernier devant se situer à proximité du disque supérieur fixe. En d'autres termes, le flux radial centripète dans la couche de Bödewadt du stator décolle avant d'atteindre l'axe central, comme explicité sur la Fig. A-4 ; cette zone de décollement est toutefois de forme elliptique plutôt que circulaire.



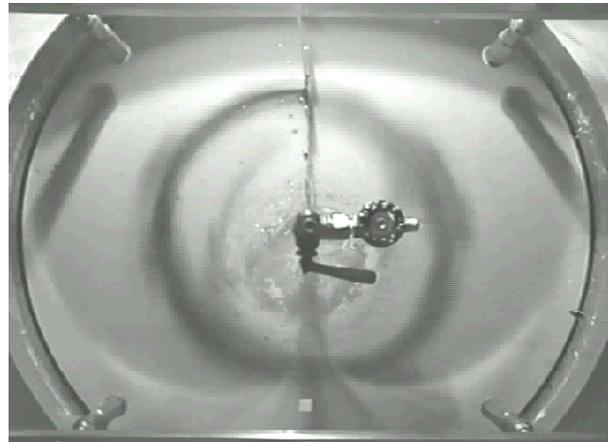
a



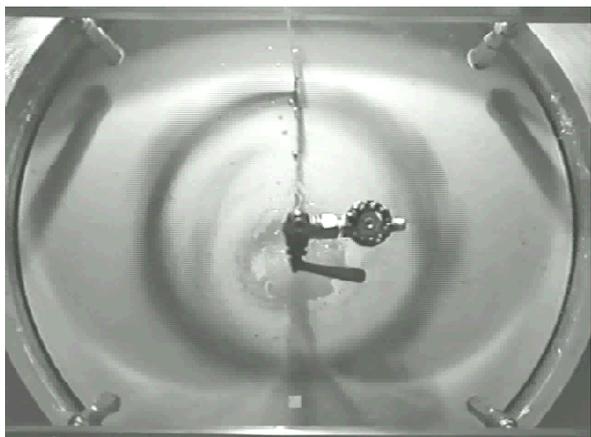
b



c

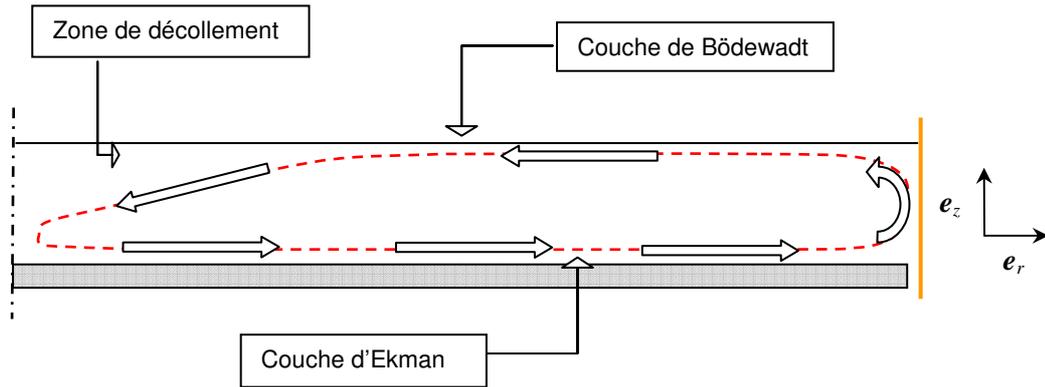


d



e

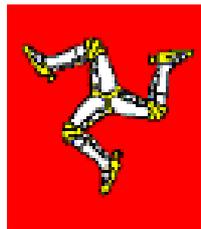
**Fig. A-3** – Injection d'encre pour  $L = 0.126$  : a)  $Re = 600\,000$  ( $60\text{ tr.min}^{-1}$ ); b)  $Re = 900\,000$  ( $90\text{ tr.min}^{-1}$ ); c)  $Re = 1\,200\,000$  ( $120\text{ tr.min}^{-1}$ ); d)  $Re = 2\,100\,000$  ( $210\text{ tr.min}^{-1}$ ); e)  $Re = 2\,400\,000$  ( $240\text{ tr.min}^{-1}$ )



**Fig. A-4** – Décollement du flux centripète dans la couche de Bödewadt à proximité de l’axe de rotation,  $L = 2h / r_o^* = 0.126$ .

On augmente à présent le rapport d’aspect de  $L = 0.126$  à  $L = 0.195$  afin de tester l’effet du confinement. L’écoulement aura tendance à générer plus facilement des structures régulières de vortex. Pour  $\Omega_D = 30 \text{ tr.min}^{-1}$ , l’encre révèle une structure heptagonale moins évidente à discerner sur un simple cliché que sur vidéo (Fig. A-6 -a). Par contre à  $60 \text{ tr.min}^{-1}$ , on peut clairement observer une structure pentagonale (Fig. A-6 - b). A  $90 \text{ tr.min}^{-1}$ , on note qu’il s’est produit une bifurcation vers la structure à deux lobes précédemment observée pour le rapport d’aspect plus petit (Fig. A-6 - c). Nous avons dans ce dernier cas tenté de reproduire ce résultat, et nous avons obtenu une structure à trois vortex ressemblant au symbole de l’île de Man (Fig. A-5); une vérification à partir des bandes vidéo a montré que la vitesse de rotation était en fait de  $86 \text{ tr.min}^{-1}$  au lieu de 90. Il semble donc qu’à l’intérieur d’un même cadre opératoire, les structures sont très sensibles à la vitesse précise de rotation. Si l’on augmente le taux de rotation, on retombe généralement sur la structure ellipsoïdale à deux lobes. Mais l’influence de cette structure décroît à ces vitesses de rotation importantes, le cisaillement turbulent classique devenant alors prépondérant.

Ces résultats semblent en accord avec les études en simulation numérique directe de Tucker pour cavité annulaire non isotherme en rotation [105]. Tucker obtint trois grands vortex pour  $\Omega_D = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ , mais seulement deux quand la vitesse est augmentée à  $17 \text{ rad.s}^{-1}$ .

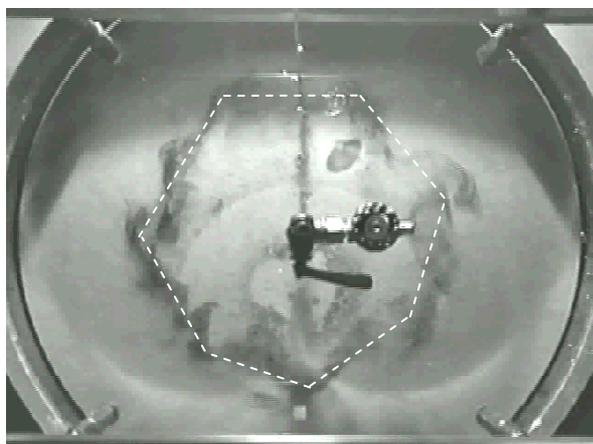


**Fig. A-5** – Symbole de l’île de Man.

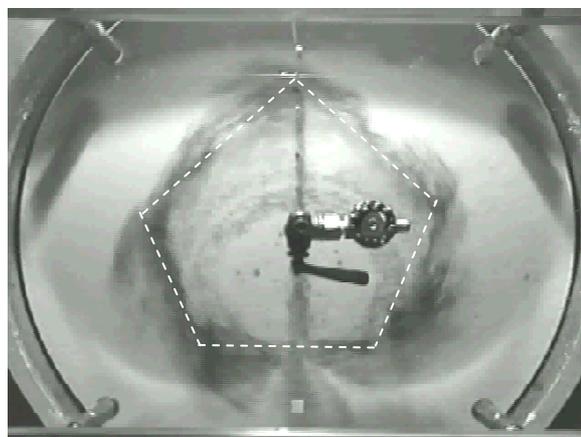
### A.1.3. Conclusion

Les visualisations que nous venons de décrire confirment la conjecture d’Owen selon laquelle des structures tourbillonnaires de grande échelle peuvent exister au sein d’un écoulement dans une cavité interdisques de type rotor-stator. Ces structures se manifestent sur une gamme moyenne de nombres de Reynolds (entre 300 000 et 2 400 000). L’apparition de ces structures est favorisée par la diminution du confinement. Le nombre de tourbillons a tendance à diminuer quand le nombre de Reynolds augmente.

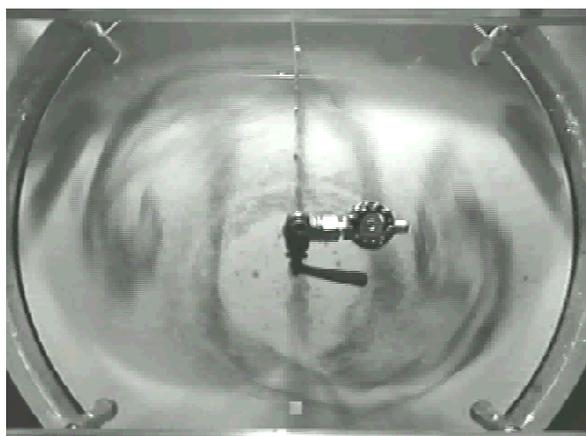
Dans la continuité de ce travail expérimental, une analyse par simulation numérique directe a été menée dans le but de caractériser plus précisément les structures tridimensionnelles dans la zone géostrophique. Ces résultats ont été publiés dans Serre *et al.* in *Advances in Turbulence IX*, (CIMNE Barcelona).



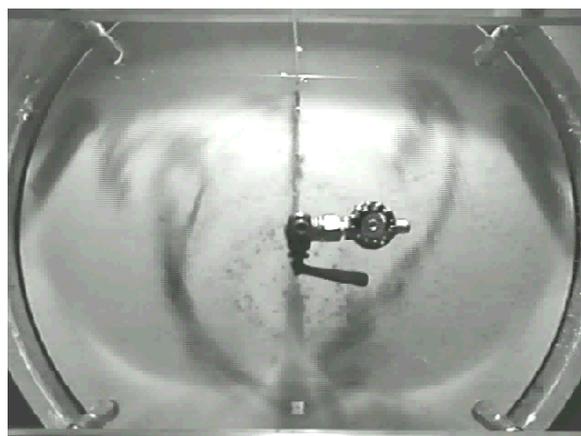
a



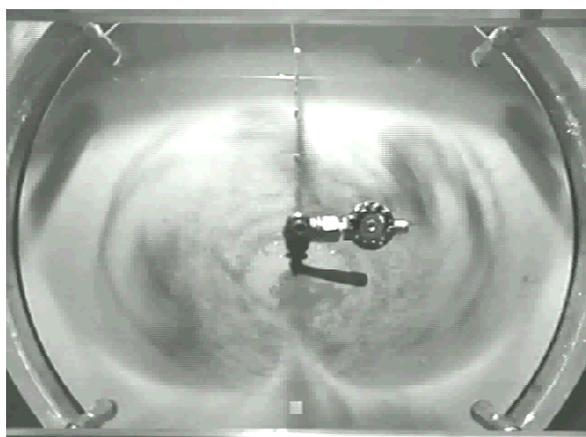
b



c



d



e

**Fig. A-6** – Injection d'encre pour  $L = 0.195$  : a)  $Re_H = 300\,000$  (30 tr.min<sup>-1</sup>); b)  $Re = 600\,000$  (60 tr.min<sup>-1</sup>); c)  $Re = 900\,000$  (90 tr.min<sup>-1</sup>); d)  $Re = 860\,000$  (86 tr.min<sup>-1</sup>) avec la structure à trois branches « île de Man »; e)  $Re = 2\,400\,000$  (240 tr.min<sup>-1</sup>). Les traits en pointillés mettent en évidence le caractère polygonal des structures.

## A.2. Approche statistique de la turbulence et les modélisations disponibles à l'UMIST

Les équations de Navier-Stokes présentées au chapitre 2 de ce mémoire sont établies en considérant les valeurs locales du vecteur d'état  $\Psi = (V_r, V_\theta, V_z, p)$  pour un instant  $t$ , une position  $X$  et une expérience  $\mathcal{E}$  précise. En ingénierie, on s'intéresse avant tout à un nombre limité de grandeurs quantitatives pouvant caractériser d'une manière générale l'écoulement turbulent, ce qui nous conduit tout naturellement à envisager des propriétés moyennes sur ledit écoulement (Ferziger & Peric [91]). Basée sur des idées d'Osborne Reynolds formulées il y a plus d'un siècle, l'approche RANS (« Reynolds-Averaged Navier-Stokes ») consiste à moyenner les équations de Navier-Stokes; la non-linéarité fait alors apparaître des termes qui doivent être modélisés. De par la très grande diversité des types d'écoulements turbulents, il est difficile - pour ne pas dire impossible - de trouver un modèle unique capable de tous les décrire : de ce fait, les modèles de turbulence doivent être envisagés avant tout comme des approximations pour l'ingénierie, et non comme des lois universelles

### A.2.1. L'approche RANS

#### A.2.1.1. Comment moyenner les équations ?

Considérons une expérience réalisée  $N$  fois en respectant le même protocole (mêmes conditions initiales, même histoire, mêmes valeurs des paramètres de contrôle) (Piquet [102], Ferziger [91]). Pour chacune des expériences (indiquées  $i$ ), l'écoulement est décrit par un champ spatio-temporel  $\Psi_i(X, t)$ .  $\Psi_i$  diffère d'un champ  $\Psi_{j \neq i}$  par un phénomène d'ordre aléatoire. On peut décomposer chaque variable en une valeur moyenne et une fluctuation dépendant du temps (Ferziger & Peric [75], Gatski & Rumsey [92], Piquet [102]) :

$$\Psi(X, t) = \bar{\Psi}(X, t) + \psi'(X, t)$$

où :

$$\bar{\Psi}(X, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi_i(X, t) \quad (0-1)$$

Cette moyenne d'ensemble, dite de Reynolds, filtre toutes les fluctuations aléatoires turbulentes, mais on peut noter que l'écoulement moyen  $\bar{\Psi}$  peut dépendre du temps. Cette définition respecte en outre les règles de Reynolds ([103]) :

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\alpha f} &= \alpha \bar{f}, \text{ où } \alpha \text{ est un scalaire.} \\ \overline{fg} &= \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \zeta} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial \zeta}} \end{aligned}$$

Si l'écoulement moyen est périodique en temps, on peut aussi définir une moyenne d'ensemble sur un certain nombre de cycles (Piquet [102]) :

$$\bar{\Psi}(X, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\Psi}_i(X, t), t \in [t_0; t_0 + T] \quad (0-2)$$

où  $T$  est la période du cycle, et  $\bar{\Psi}_i$  le champ des variables de l'écoulement au cours du cycle  $i$ .

Dans le cas particulier où  $\bar{\Psi}$  est stationnaire, la moyenne d'ensemble ne dépend plus du temps. On peut alors supposer l'*ergodicité* du problème, c'est-à-dire que l'on peut indifféremment considérer soit la répétition d'expériences similaires, soit une seule expérience indéfiniment prolongée (Schiestel [103]). Sous cette hypothèse, la moyenne en temps, définie par :

$$\bar{\Psi}(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(X, t) dt, \quad (0-3)$$

converge vers la moyenne d'ensemble. En pratique,  $T$  est forcément borné. Il est important, pour appliquer la moyenne en temps, de choisir pour  $T$  une valeur beaucoup plus grande que le temps caractéristique des fluctuations turbulentes ( $\mathcal{T}_{\text{turb}}$ ), et beaucoup plus petite que le temps caractéristique d'évolution du champ moyen ( $\mathcal{T}_{\text{moy}}$ ) (Piquet [102]) :

$$\mathcal{T}_{\text{turb}} \ll T \ll \mathcal{T}_{\text{moy}}$$

Par la suite, nous retiendrons comme moyenne la moyenne d'ensemble, et l'on notera  $\bar{\Psi}$  la grandeur moyenne de  $\Psi$ , sans préciser la dépendance en espace ou en temps. Chaque variable est décomposée sous la forme suivante :

$$\Psi = \bar{\Psi} + \psi'$$

$\bar{\Psi}$  est la valeur moyenne, et  $\psi'$  la fluctuation de  $\Psi$  autour de la valeur moyenne.

### A.2.1.2. Equations de Navier-Stokes moyennées

L'opérateur « moyenne » est appliqué aux équations de Navier-Stokes en incompressible, ce qui conduit à un système d'équations portant sur le champ de vitesse moyen :

$$\begin{cases} \text{div } \bar{\mathbf{V}} = 0 \\ \frac{\partial \rho \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \otimes \bar{\mathbf{V}} \cdot \text{grad } \rho \bar{\mathbf{V}} = -\text{grad } \bar{P} + \text{div} \left( \mu (\text{grad } \bar{\mathbf{V}} + {}^t \text{grad } \bar{\mathbf{V}}) - \rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \right) \end{cases} \quad (0-4)$$

(à vérifier mais ça devrait être bon)

Le tenseur  $\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$  représente les tensions turbulentes de Reynolds. Il traduit l'influence de la turbulence sur l'écoulement moyen. Les composantes du tenseur de Reynolds sont de nouvelles inconnues du problème qu'il est nécessaire de modéliser afin de fermer le système d'équations.

## A.2.2. Fermeture des équations moyennées : modèles de turbulence

L'objectif principal des modèles de turbulence est de relier les tensions de Reynolds aux valeurs du champ moyen. La relation peut se traduire sous la forme d'équations algébriques ou d'équations aux dérivées partielles. Les modèles mettent en jeu des approximations basées sur un certain nombre d'hypothèses. Les premières versions de modèles de turbulence ont été développées pour des écoulements pleinement turbulents (à grand nombre de Reynolds); pour cette catégorie d'écoulements, les échelles des structures turbulentes les plus grandes sont trop importantes pour être affectées par la viscosité moléculaire; le seul effet dû à la viscosité se traduit par la dissipation de la turbulence sous forme de chaleur, via les mouvements fluctuants au niveau des petites échelles. Par contre, pour de

nombre de Reynolds trop bas, la taille des structures turbulentes les plus grandes n'est plus assez importante pour ne plus être affectée par la viscosité; les modèles à grand nombre de Reynolds doivent alors être modifiés en conséquence s'ils doivent être utilisables dans des régions à bas Reynolds.

### A.2.2.1. Modèle $k - \varepsilon$ à bas Reynolds

Les tensions de Reynolds sont modélisées par l'approximation de viscosité effective :

$$\overline{v' \otimes v'} = \frac{2}{3} k \mathbf{I} - \nu_t (\mathbf{grad} \bar{\mathbf{V}} + {}^t \mathbf{grad} \bar{\mathbf{V}})$$

$k$  est l'énergie cinétique turbulente, définie par  $k = \frac{1}{2} Tr(\overline{v' \otimes v'})$ .

$\nu_t$  est la viscosité turbulente, définie par :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

où  $\varepsilon$  est le taux de dissipation isotrope de l'énergie turbulente, et  $C_\mu$  une constante. La viscosité effective  $\nu_e$  est définie par  $\nu_e = \nu + \nu_t$ .

Dans la méthode standard pour grand nombre de Reynolds (Jones & Launder, 1972), deux équations de transport, l'une sur  $k$ , l'autre sur  $\varepsilon$ , sont couplées à cette modélisation :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + {}^t \bar{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{grad}(\rho k) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \mathbf{grad} k \right] + \rho P_k - \rho \varepsilon \quad (0-5)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + {}^t \bar{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{grad}(\rho \varepsilon) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \mathbf{grad} \varepsilon \right] + C_{\varepsilon_1} \rho \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (0-6)$$

$\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont les nombres de Prandtl-Schmidt (à expliquer ?).  $P_k$  est un terme source donné par :

$$P_k = -\overline{v' \otimes v'} \otimes \mathbf{grad} \bar{\mathbf{V}}.$$

Les constantes sont fixées à :

$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_{\varepsilon_1}$	$C_{\varepsilon_2}$
0.09	1	1.22	1.44	1.92

Les modèles à bas nombre de Reynolds ont été développés notamment pour pouvoir décrire le comportement de l'écoulement à proximité de la paroi. Dans cette région, la viscosité turbulente devient faible, et les effets de la viscosité moléculaire deviennent plus importants. Launder & Sharma (1974) ont étendu le modèle standard à ce cas-ci en introduisant des fonctions empiriques d'amortissement  $f_\mu$ ,  $f_1$  et  $f_2$ , un terme de dissipation supplémentaire  $E$ , et en remplaçant l'équation de transport sur  $\varepsilon$  par une équation de transport sur  $\tilde{\varepsilon}$  défini par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - D$$

avec

$$D = 2\nu (\mathbf{grad} \sqrt{k})^2$$

On introduit le Reynolds de turbulence locale :

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$$

La viscosité turbulente est définie à présent par :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (0-7)$$

où  $f_\mu$  est une fonction d'amortissement donnée par :

$$f_\mu = e^{\frac{-3.4}{(1+\text{Re}_t/50)^2}}$$

Les équations sur  $k$  et  $\varepsilon$  prennent au final une forme similaire à (0-5) et (0-6) :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \bar{V} \otimes \text{grad}(\rho k) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + \rho P_k - \rho (\tilde{\varepsilon} + D) \quad (0-8)$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{V} \otimes \text{grad}(\rho \tilde{\varepsilon}) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad} \tilde{\varepsilon} \right] + C_{\varepsilon_1} f_1 \rho \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} f_2 \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E + [YC] \quad (0-9)$$

où :

$$f_1 = 1, \\ f_2 = 1 - 0.3e^{-\text{Re}_t^2}.$$

$$E = 2\nu_t (\text{grad}(\text{grad} \bar{V})) \otimes (\text{grad}(\text{grad} \bar{V})) \quad (\text{Peut-on trouver une meilleure notation tensorielle ?})$$

[YC] représente de terme correctif de Yap (1987) : il empêche les échelles turbulentes de longueur près des parois de devenir trop grande dans les régions où les fluides se séparent. Le terme de Yap est donné par :

$$[YC] = \text{Max} \left[ 0 ; 0.83 \left( \frac{l_\varepsilon}{l} - 1 \right) \left( \frac{l_\varepsilon}{l} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{k} \right]$$

avec  $l_\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ ,  $l = 2.55 y$ , où  $y$  est la distance normale à la paroi.

### A.2.2.2. Modèle « Differential Stress Modelling » à bas Reynolds

Les modèles du type  $k$ - $\varepsilon$  ne décrivent pas de manière correcte la sensibilité de la turbulence à la courbure des lignes de courant et aux forces à distance, à cause de l'hypothèse de turbulence isotrope. Dès lors il a fallu développer une nouvelle classe de modèles proposant des équations de transport concernant directement les tensions de Reynolds. Le nombre d'équations de transport pour cette classe de modèles est plus important que pour le modèle  $k$ - $\varepsilon$  (6 au lieu de 2 pour un écoulement tridimensionnel), ce qui augmente leur coût en résolution, mais c'est là le prix à payer pour accroître la précision.

Le modèle de fermeture à bas Re que nous allons décrire, proposé par Iacovides (1992), tire son origine d'un modèle algébrique (Algebraic Stress Model) développé par Iacovides et Launder (1992). Il reprend l'équation sur  $\tilde{\varepsilon}$  du modèle  $k$ - $\varepsilon$  bas-Re, (0-9), à laquelle il adjoint des équations de transport sur les tensions de Reynolds :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{grad}} (\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) = \mathbf{D} + \mathbf{P} - \mathbf{E} + \boldsymbol{\Phi} - \left( \mathbf{H} - \frac{1}{3} (\text{Tr } \mathbf{H}) \mathbf{I} \right) + \mathbf{J} \quad (0-10)$$

$\mathbf{D}$  modélise les effets de la diffusion :

$$\mathbf{D} = \text{div} \left[ \left( \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} + \mathbf{v} \right) \overline{\mathbf{grad}} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \right]$$

Le taux de production des tensions,  $\mathbf{P}$ , est donné par :

$$\mathbf{P} = \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \otimes \overline{\mathbf{grad}} \overline{\mathbf{V}} + \overline{(\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}') \otimes \mathbf{grad}} \overline{\mathbf{V}}$$

$\mathbf{E}$  est le taux de dissipation d'énergie turbulente. Ici la dissipation n'est plus supposée isotrope dans les régions à bas Reynolds :

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3} (1 - f_\varepsilon) \varepsilon \mathbf{I} + f_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}, \text{ avec } f_\varepsilon = e^{-\text{Re}_t/8}$$

Le tenseur de corrélation pression-déformation  $\boldsymbol{\Phi}$  redistribue l'énergie sur les composantes normales du tenseur de Reynolds (Schiestel [103], Elena [90]). Il se décompose en trois parties :

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + f_w (\boldsymbol{\Phi}_1^w + \boldsymbol{\Phi}_2^w)$$

- $\boldsymbol{\Phi}_1$  est un terme qui favorise le retour à l'isotropie de l'énergie cinétique turbulente :

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} - \frac{2}{3} k \mathbf{I} \right)$$

$C_1$  est supposée constante, et fixe la rapidité avec laquelle l'écoulement retourne à l'isotropie.  $k/\varepsilon$  est le temps caractéristique du phénomène (Elena [90]).

- $\boldsymbol{\Phi}_2$  modélise quant à lui le retour à l'isotropie du taux de production des tensions :

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = -C_2 \left( \mathbf{P} - \frac{2}{3} P_k \mathbf{I} \right)$$

$\boldsymbol{\Phi}_1$  et  $\boldsymbol{\Phi}_2$ , étant de trace nulle, ont la particularité de redistribuer l'énergie cinétique ou le taux de production (resp.) depuis les composantes du tenseur de Reynolds d'énergie (ou de production) supérieure à la valeur moyenne vers les composantes pour lesquelles ce taux est inférieur.

- $\boldsymbol{\Phi}_1^w + \boldsymbol{\Phi}_2^w$  est un terme qui intervient en présence de parois solides. Il traduit le fait que la surface des parois réfléchit les fluctuations de pression, ce qui interfère avec l'action redistributrice des termes précédents. La paroi a donc tendance à diminuer le module des tensions normales perpendiculaires à la paroi et à augmenter le module des tensions normales parallèles à la paroi et alignées dans le sens de l'écoulement moyen :

$$\boldsymbol{\Phi}_1^w = C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \left[ \overline{(\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}') \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})} \mathbf{I} - \frac{3}{2} \overline{(\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}')} \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{3}{2} \overline{((\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}') \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))} \right] \frac{k^{1.5}}{C_1 \varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2^w = C_2^w \frac{\varepsilon}{k} \left[ \boldsymbol{\Phi}_2 \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{I} - \frac{3}{2} \boldsymbol{\Phi}_2 \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{3}{2} \overline{(\boldsymbol{\Phi}_2 \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))} \right] \frac{k^{1.5}}{C_1 \varepsilon x_n}$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à la paroi.

La fonction  $f_w$ , définie par :

$$f_w = \left(1 - e^{-\text{Re}_t/8}\right) \left(1 - e^{-\text{Re}_t/100}\right),$$

amortit  $\Phi_1^w + \Phi_2^w$  dans la sous-couche visqueuse près des parois. Le terme bas-Re  $H$  prend alors le relais.  $H$  est défini par :

$$H = f_H \left[ \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \otimes (\mathbf{grad} \sqrt{k} \otimes \mathbf{grad} \sqrt{k}) + {}^t \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \otimes (\mathbf{grad} \sqrt{k} \otimes \mathbf{grad} \sqrt{k}) \right] \frac{\nu}{k}$$

$$f_H = (10 + 2.6 \text{Re}_t) e^{-\text{Re}_t/20}$$

Le rôle du terme bas-Re  $J$  est d'augmenter la sensibilité du modèle au Reynolds de l'écoulement moyen :

$$J = f_j k (\mathbf{grad} \bar{V} + {}^t \mathbf{grad} \bar{V}), \text{ où } f_j = 0.06 e^{-\text{Re}_t/8}.$$

L'expression de la viscosité turbulente est identique à celle du modèle  $k-\varepsilon$  bas-Re (0-7), la fonction  $f_\mu$  étant cette fois-ci donnée par :

$$f_\mu = e^{-\frac{4}{(1+\text{Re}_t/100)^2}}$$

### A.2.2.3. Influence de la rotation solide

Dans un écoulement confiné par des parois tournantes, la rotation interagit de manière complexe avec la turbulence. La zone géostrophique de l'écoulement au sein de la cavité est en rotation solide (citer...). Le principal effet de cette rotation solide est d'augmenter l'anisotropie des petites échelles dissipatives : le transfert d'énergie depuis les grandes échelles vers les petites structures dissipatives s'en trouve réduit, ce qui diminue le taux de dissipation  $\tilde{\varepsilon}$ . Iacovides & Tumpnakis ont proposé une correction empirique aux équations bas-Re [95]. Un paramètre de rotation solide,  $\Lambda$ , est préalablement défini :

$$\Lambda = \left[ (\hat{\Omega} - \hat{S})^2 \hat{\Omega} \right]^{1/3}$$

avec :

$$\hat{S} = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}}, \text{ où } \mathbf{S} \text{ est le tenseur de taux de déformation : } \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \bar{V} + {}^t \mathbf{grad} \bar{V})$$

$$\hat{\Omega} = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}}, \text{ où } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \bar{V} - {}^t \mathbf{grad} \bar{V}).$$

Au final, le coefficient  $C_{\varepsilon_1}$  est remplacé dans (0-9) par un nouveau coefficient  $C'_{\varepsilon_1}$  :

$$C'_{\varepsilon_1} = \frac{C_{\varepsilon_1}}{1 + \alpha e^{\frac{\beta - \text{Re}_t \Lambda}{\beta}}}$$

Les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  diffèrent selon qu'il s'agit du modèle  $k-\varepsilon$  ou du modèle DSM (voir Tableau A-1).

Modèle	$\alpha$	$\beta$
$k-\varepsilon$	10	50
DSM	20	100

**Tableau A-1** – Valeurs des constantes pour le terme de rotation.

### A.2.3. Discussion comparée entre des résultats DNS et des solutions RANS ( $k-\varepsilon$ et DSM)

Dans cette partie, nous procédons à une discussion comparative entre une solution obtenue par simulation numérique directe et des solutions obtenues parallèlement à l'aide d'un code développé à l'UMIST incluant les modèles de turbulence décrits dans la partie précédente. La solution DNS provient des travaux de Serre *et al.* [104], dont la méthode numérique est basée sur celle détaillée dans la partie 2.2 (Chapitre 2) de ce mémoire. Les éléments de comparaison entre simulation DNS et modélisations sont présentées ici pour la première fois et n'ont pas encore été publiés.

La configuration géométrique reprend celle utilisée dans la partie expérimentale pour  $L = 0.126$ , à ceci près qu'une paroi cylindrique interne de rayon  $r_i^*$  est incorporée (rapport de rayon  $r_i^* / r_o^* = 0.4$ ). Ce point est discuté dans Serre *et al.* [104]. Le nombre de Reynolds de la simulation numérique directe est  $\text{Re} = \Omega r_o^{*2} / \nu = 300\,000$ . Le calcul a nécessité une exploitation intensive avec une résolution spatiale de  $(N_r, N_\theta, N_z) = (301, 96, 96)$  et un pas de temps de  $\delta t = \Omega_D \delta t^* = 10^{-5}$ .

Le code UMIST utilise une méthode de type volumes finis. Les calculs réalisés sont bidimensionnels. Le maillage utilisé comprend 84 points dans la direction radiale, et 96 points dans la direction axiale.

A partir des grandeurs instantanées calculées par le code DNS, des grandeurs moyennes sont calculées en procédant d'abord à une moyenne en temps, puis à une moyenne en azimut. Ces grandeurs moyennes sont comparées aux valeurs moyennes renvoyées par le code UMIST.

*Discussion de l'effet du nombre de Reynolds Re sur les solutions numériques avec les deux modèles RANS.*

Les solutions RANS obtenues avec le modèle  $k-\varepsilon$  et le modèle DSM sont reportées en Fig. A-7 concernant les profils  $\bar{V}_r(z)$  à l'abscisses radiale  $r^* = r_i^* + d/2$ , où  $d = r_o^* - r_i^*$ .

Les profils obtenus en  $k-\varepsilon$  concernent la gamme  $100\,000 < \text{Re} < 900\,000$ ; ils révèlent une solution de type laminaire pour  $\text{Re} = 100\,000$  et  $200\,000$  - pour cette dernière valeur on constate une légère recirculation centrifuge près de la couche centripète de Bödewadt alors que la couche de type Ekman sur le rotor reste très fine en accord avec les prédictions de l'analyse théorique. Une très légère déviation est décelable au niveau du rotor au bord de la couche d'Ekman pour  $\text{Re}=300\,000$  alors que la couche limite du stator a fait apparaître un changement radical du profil vers une structuration de type turbulent pleinement développée. Pour les 2 valeurs les plus élevées de  $\text{Re} = 600\,000$  et  $900\,000$ , les profils restent quasiment indépendant de  $\text{Re}$  et montrent des couches de Bödewadt et d'Ekman typiquement turbulentes.

La gamme de profils représentées pour le modèle DSM couvre  $100\ 000 < Re < 600\ 000$ . Le profil pour  $Re = 100\ 000$  montre une couche nettement laminaire sur le rotor et une couche déjà turbulente au niveau du stator. La couche d'Ekman opère une transition turbulente pour  $Re = 300\ 000$  alors que la couche de Bödewadt est alors bien établie. Pour  $Re = 600\ 000$  - comme pour le modèle  $k-\varepsilon$  - les modifications restent minimales (inférieure à 1%) dans la couche du stator et elles sont inférieures à 5% sur le rotor par rapport à  $Re = 300\ 000$ .

La transition est bien mise en évidence en montrant des variations des maxima pour  $r^* = r_i^* + d/2$  en fonction de  $Re$  (Fig.A-8). Les représentations montrent un léger décalage de la transition entre les deux modèles. Il est bien entendu que ces modèles sont construits pour représenter l'état turbulent et que ces transitions sont artificielles et ne peuvent être interprétées réellement comme une représentation du phénomène physique du passage de laminaire à turbulent. Tout au plus, elles peuvent donner une indication, à  $Re$  donné, sur le caractère opérationnel de la modélisation turbulente.

*Comparaisons des solutions moyennes DNS,  $k-\varepsilon$ , DSM pour  $Re=300\ 000$  (Fig.A-9, Fig. A-10 et Fig. A-11).*

Il est assez remarquable que les profils de vitesse radiale  $\overline{V}_r$  pour  $r^* = r_i^* + d/4$  (Fig.A-9) soient assez proches les uns des autres - DNS,  $k-\varepsilon$  et DSM - à la fois en couche de Bödewadt qu'en couche d'Ekman. Dans la couche du rotor l'écoulement reste notablement laminaire et stable au delà du seuil critique dans la couche de Bödewadt. Les solutions  $k-\varepsilon$  et DSM montrent la faible circulation centrifuge en frontière de l'écoulement de la couche de Bödewadt (centripète).

Pour  $r^* = r_i^* + d/2$ , on a vu en Fig. A-7 que le profil de  $\overline{V}_r$  est "transitionnel" dans la couche du stator alors qu'il est encore laminaire en couche du rotor avec le schéma  $k-\varepsilon$ . La transition est déjà bien opérée pour le modèle DSM et le profil a les caractéristiques turbulentes en couches du stator et du rotor. On note que le profil moyen obtenu par DNS reste laminaire pour la couche d'Ekman alors qu'il montre un état transitionnel - ici plus réaliste qu'en approche RANS - avec un élargissement notable de la couche de Bödewadt.

Pour  $r^* = r_i^* + 3d/4$ , le profil pour la solution DNS moyennée se rapproche de la solution DSM, en particulier au niveau du maximum dans la couche de Bödewadt et de façon plus progressive au niveau de l'élargissement du profil alors que la couche DNS du rotor reste strictement laminaire - « collée » à la solution laminaire  $k-\varepsilon$ . La solution DSM est alors déjà notablement turbulente sur le rotor contrairement à l'observation par DNS.

Pour les profils de vitesse  $\overline{V}_\theta$  (Fig. A-10), les profils ont une même structuration axiale. Les différences apparaissent surtout en zone du cœur (géostrophique) : l'écart entre les 2 modélisations est assez sensible - de l'ordre de 30% de la valeur DSM. La solution DNS se situe entre les 2 références : à proximité de la valeur  $k-\varepsilon$  pour  $r^* = r_i^* + d/4$  et quasiment sur la constante du profil DSM pour  $r^* = r_i^* + 3d/4$ . On peut noter cependant que les couches de la solution DNS restent singulièrement plus minces que les couches en modélisations RANS - traduisant un état certainement faiblement turbulent.

Pour les profils de vitesse axiale  $\overline{V}_z$  (Fig. A-11) - qui sont secondaires dans les couches limites mais qui reflètent le niveau de parallélisme de l'écoulement par rapport aux parois radiales - l'ordre de grandeur est bien assuré pour les 3 abscisses mais le profil issu de la DNS demeure beaucoup plus complexe que ceux issus des modélisations RANS. Les valeurs de vitesse  $\overline{V}_z$  sont bien moindres cependant dans un rapport de 10 à 100 aux vitesses radiales et azimutales. Les zones de couche limite sont assez bien approchées et le profil DNS exhibe des changements de signe successifs dans la zone extérieure de la couche du stator.

*Comparaison des composantes du tenseur de Reynolds - termes diagonaux - contribution à l'énergie cinétique (Fig. A-12, Fig. A-13 et Fig. A-14).*

Le terme correspondant à  $\overline{v_\theta'^2}$  (Fig. A-13) est la composante dominante de l'énergie cinétique dans la solution DNS. Ces termes sont dominants aussi en modélisation DSM. Dans le cas  $k-\varepsilon$ , ce terme est équivalent aux termes  $\overline{v_r'^2}$  et  $\overline{v_z'^2}$ . Ceci traduit un défaut de prise en compte de l'inhomogénéité dans le cas  $k-\varepsilon$ , qui est mieux pris en compte dans le cas DSM, mais cependant de façon encore insuffisante relativement à l'état de la solution obtenue par DNS. Cette inhomogénéité de l'état turbulent est caractéristique de l'état de turbulence faible. On constate une anisotropie particulière privilégiant la direction azimutale.

Concernant les profils  $\overline{v_\theta'^2}$ , ils reflètent un taux de turbulence plus important sur le stator que sur le rotor. Pour  $r^* = r_i^* + 3d/4$  - c'est à dire l'abscisse où l'écoulement turbulent est le plus développé - la solution DSM prédit un taux de  $\overline{v_\theta'^2}$  plus important en couche d'Ekman qu'en couche de Bödewadt - contrairement à l'état effectif (traduit par la DNS).

Concernant la composante  $\overline{v_z'^2}$  (Fig. A-14), la solution  $k-\varepsilon$  surévalue la solution DNS (et aussi la solution DSM qui est proche de la solution DNS) en couche de Bödewadt alors que la solution DSM surévalue considérablement la solution en couche d'Ekman où la composante  $\overline{v_z'^2}$  obtenue par DNS est proche de zéro.

La composante  $\overline{v_r'^2}$  (Fig. A-12) traduit un autre aspect de l'anisotropie de l'état turbulent - typique de la turbulence faible. On constate que les extrema des solutions DNS en couche de Bödewadt sont assez bien approximés - ainsi que les structures des profils, mais de façon plus médiocre - par le modèle DSM. Pour  $r^* = r_i^* + d/2$  et  $r_i^* + 3d/4$ , les épaisseurs des couches limites de  $\overline{v_r'^2}$  sont notablement plus fines dans la solution DNS que dans la prédiction DSM.

*Comparaison des composantes de tenseurs correspondant au frottement turbulent -  $\overline{v_r'v_z'}$  et  $\overline{v_\theta'v_z'}$*  (Fig. A-15 et Fig. A-16).

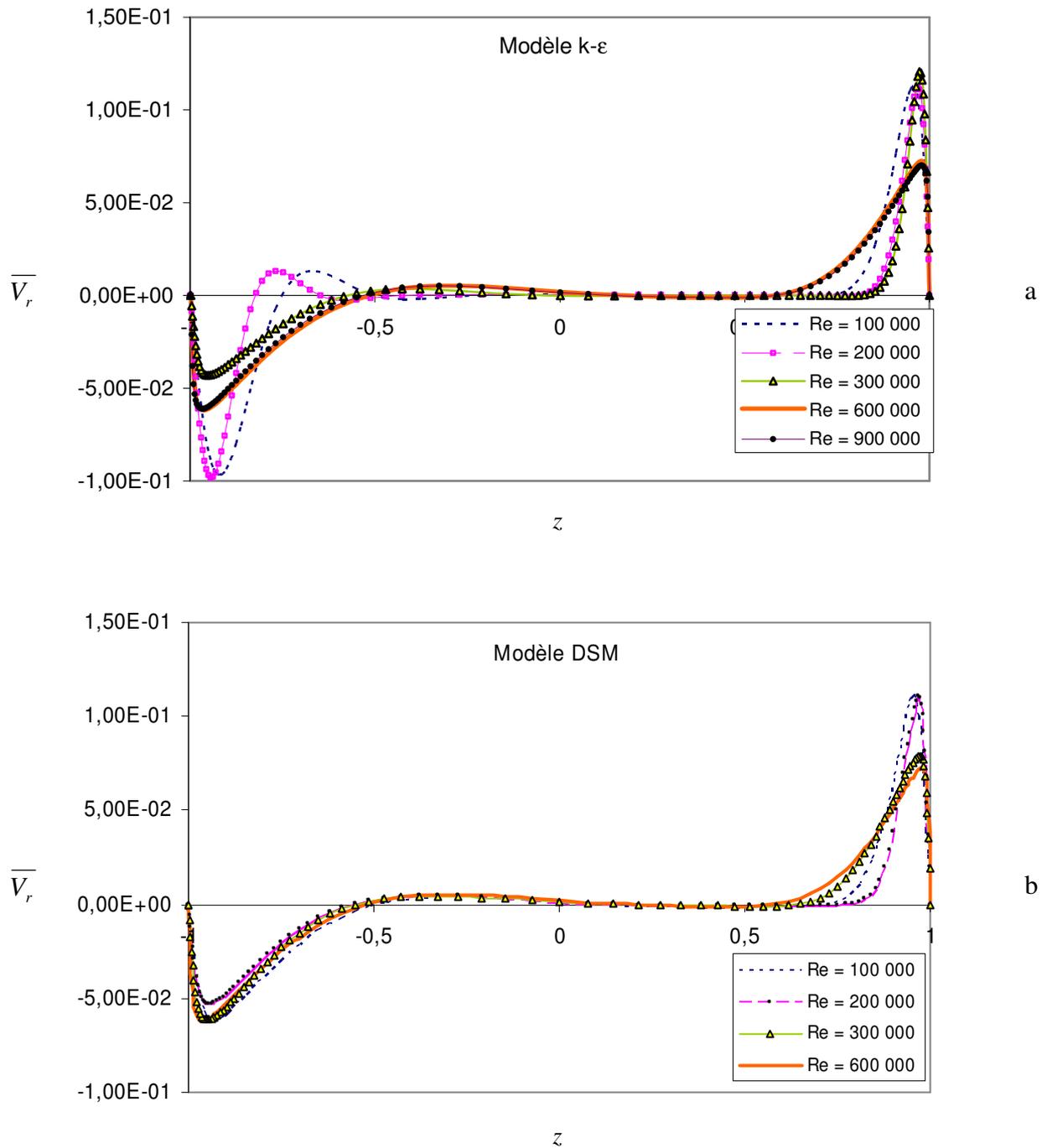
La caractéristique des profils des solutions  $\overline{v_r'v_z'}$  par modélisation DSM (et  $k-\varepsilon$ ) est la présence d'une zone négative en proche paroi de stator - qui est confirmée par la solution DNS. En dehors de cette zone de proche paroi, dans le cœur de l'écoulement, la variation est assez similaire en DNS et DSM ( $k-\varepsilon$ ). En proximité du rotor, la composante  $\overline{v_r'v_z'}$  est quasiment nulle pour la DNS et  $k-\varepsilon$ , alors que la solution DSM prédit un niveau sensiblement supérieur à celui atteint près du stator pour les abscisses  $r_i^* + d/2$  et  $r_i^* + 3d/4$ . Les mêmes observations qualitatives et quantitatives sont valides pour la composante  $\overline{v_\theta'v_z'}$ . La composante  $\overline{v_\theta'v_z'}$  est globalement plus grande dans un rapport de 2 à 3 que la composante  $\overline{v_r'v_z'}$ .

Du côté du rotor la solution DNS et la solution  $k-\varepsilon$  fournissent des valeurs approximativement nulles pour  $\overline{v_\theta'v_z'}$  - comme pour  $\overline{v_r'v_z'}$  - alors que la modélisation DSM prédit un accroissement significatif des extrema en proche rotor entre  $r^* = r_i^* + d/4$  (où les valeurs sont négligeables) et  $r_i^* + d/2$  (où l'état est très proche en intensité de  $r^* = r_i^* + 3d/4$ ).

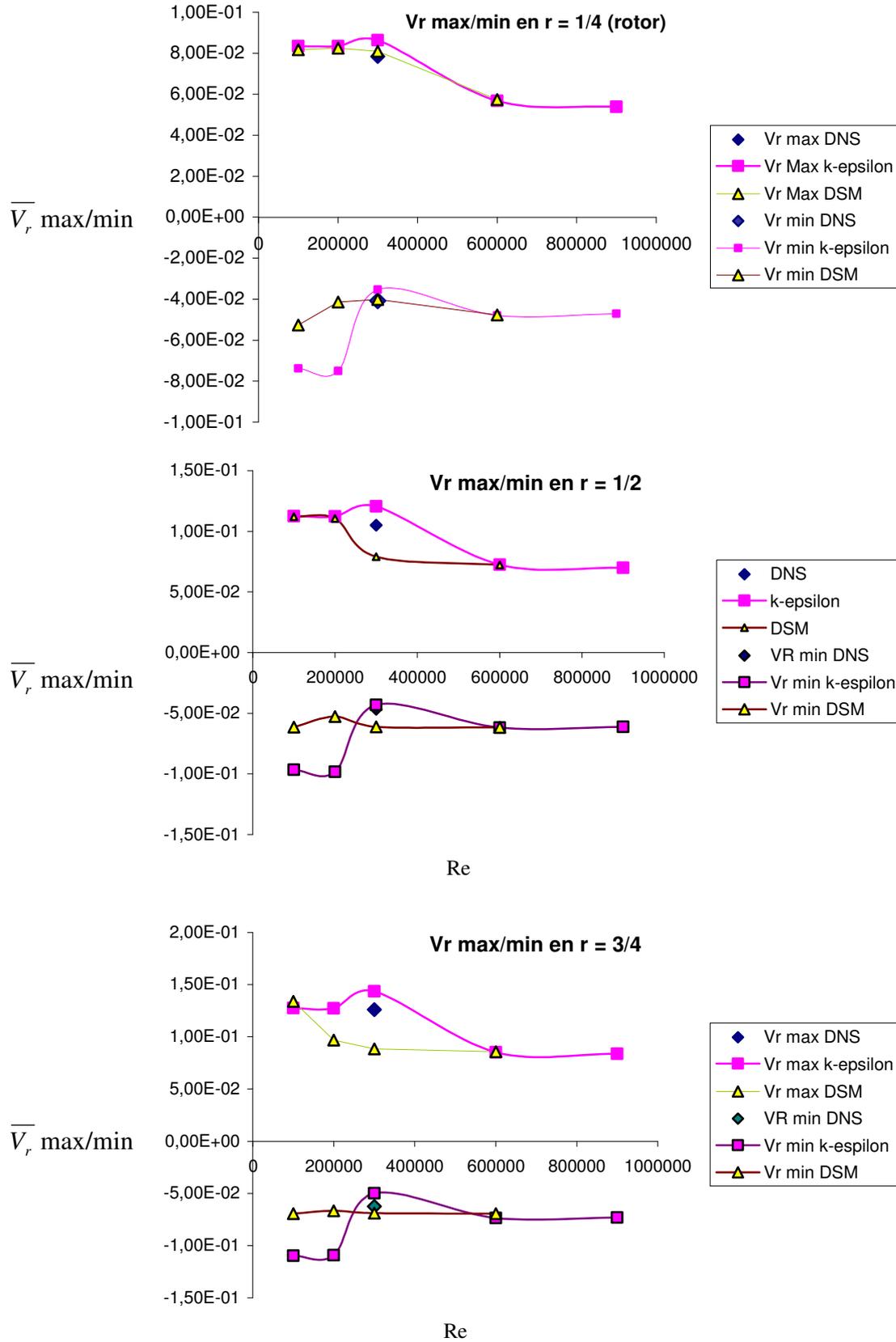
*Comparaisons sur la composante  $\overline{v_r'v_\theta'}$*  (Fig. A-17)

La solution par DNS est plus grande dans un rapport supérieur à 10 aux autres composantes hors diagonales. La zone intérieure est quasiment nulle pour les 3 abscisses radiales considérées  $r^* - r_i^* = d/4, d/2$  et  $3d/4$ . Les couches de variation de la composante sont 2 à 3 fois plus épaisses dans la couche de Bödewadt par rapport à la couche d'Ekman. L'intensité de la variable croît différentiellement entre

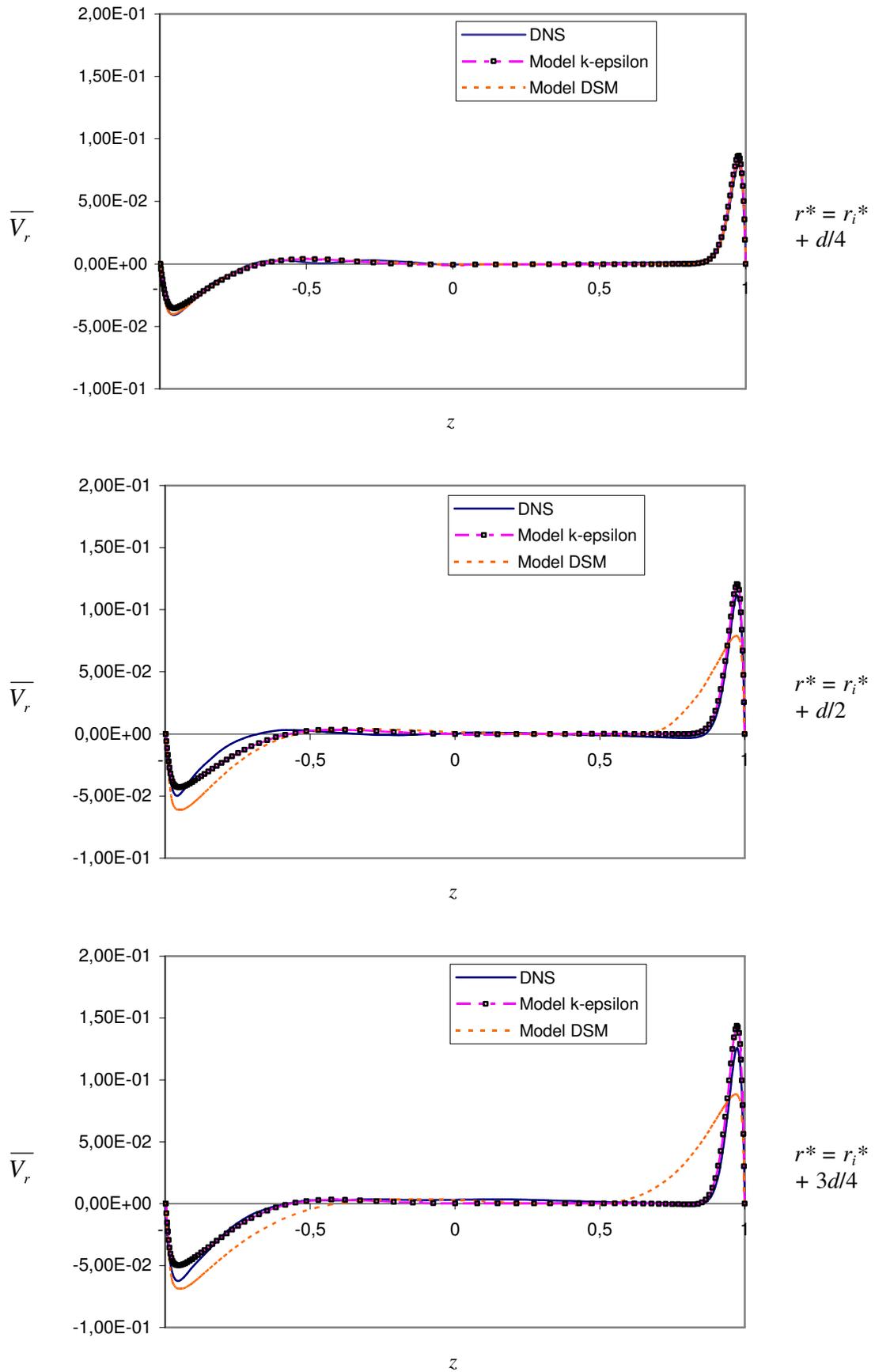
le rotor et le stator entre  $r^* = r_i^* + d/4$  et  $r_i^* + 3d/4$  : en  $r_i^* + d/4$ , l'extremum est en valeur absolue supérieur de 30% à l'extremum près du stator, alors que pour  $r^* = r_i^* + 3d/4$ , il est supérieur de plus de 100%.



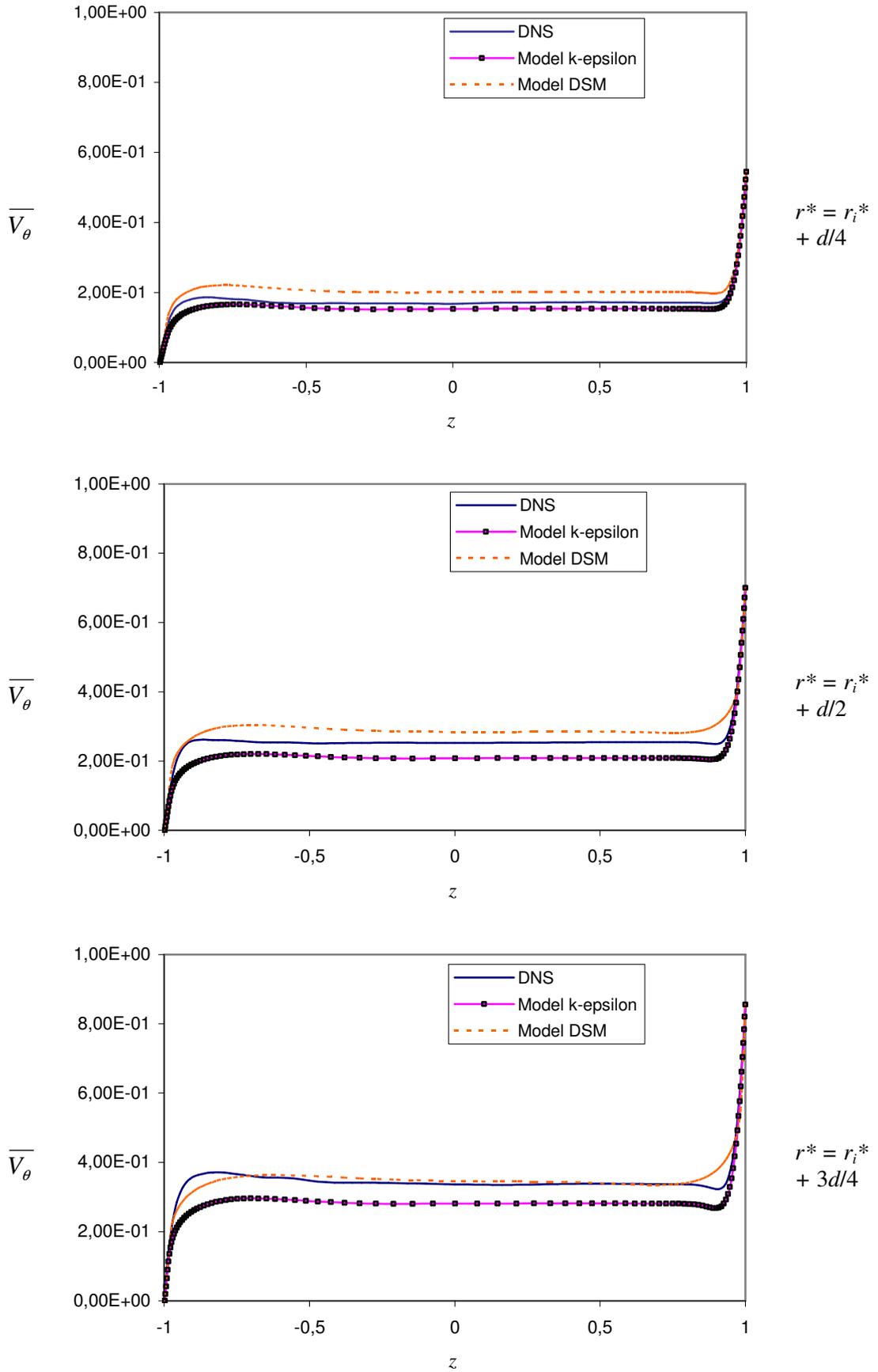
**Fig. A-7** - Profils axiaux, pour plusieurs nombres de Reynolds, de la vitesse radiale moyennée, l'abscisse radiale étant fixée à  $r^* = r_i^* + d/2$  : a) modèle k- $\epsilon$  ; b) modèle DSM.



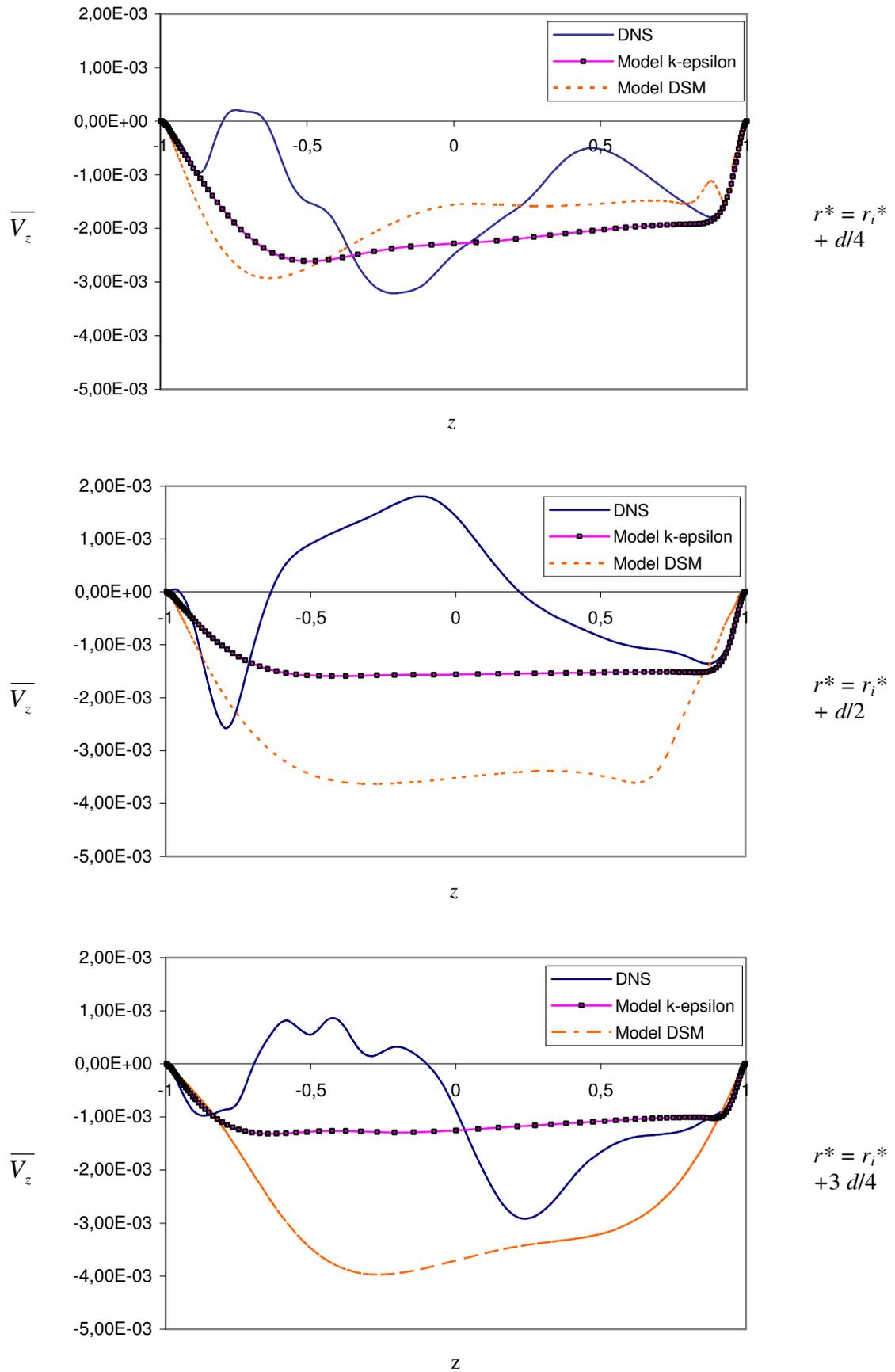
**Fig.A-8** – Variations en fonction de Re des maxima de vitesse radiale moyennée  $\overline{V_r}$  près du rotor (valeurs positives) et près du stator (valeurs négatives).



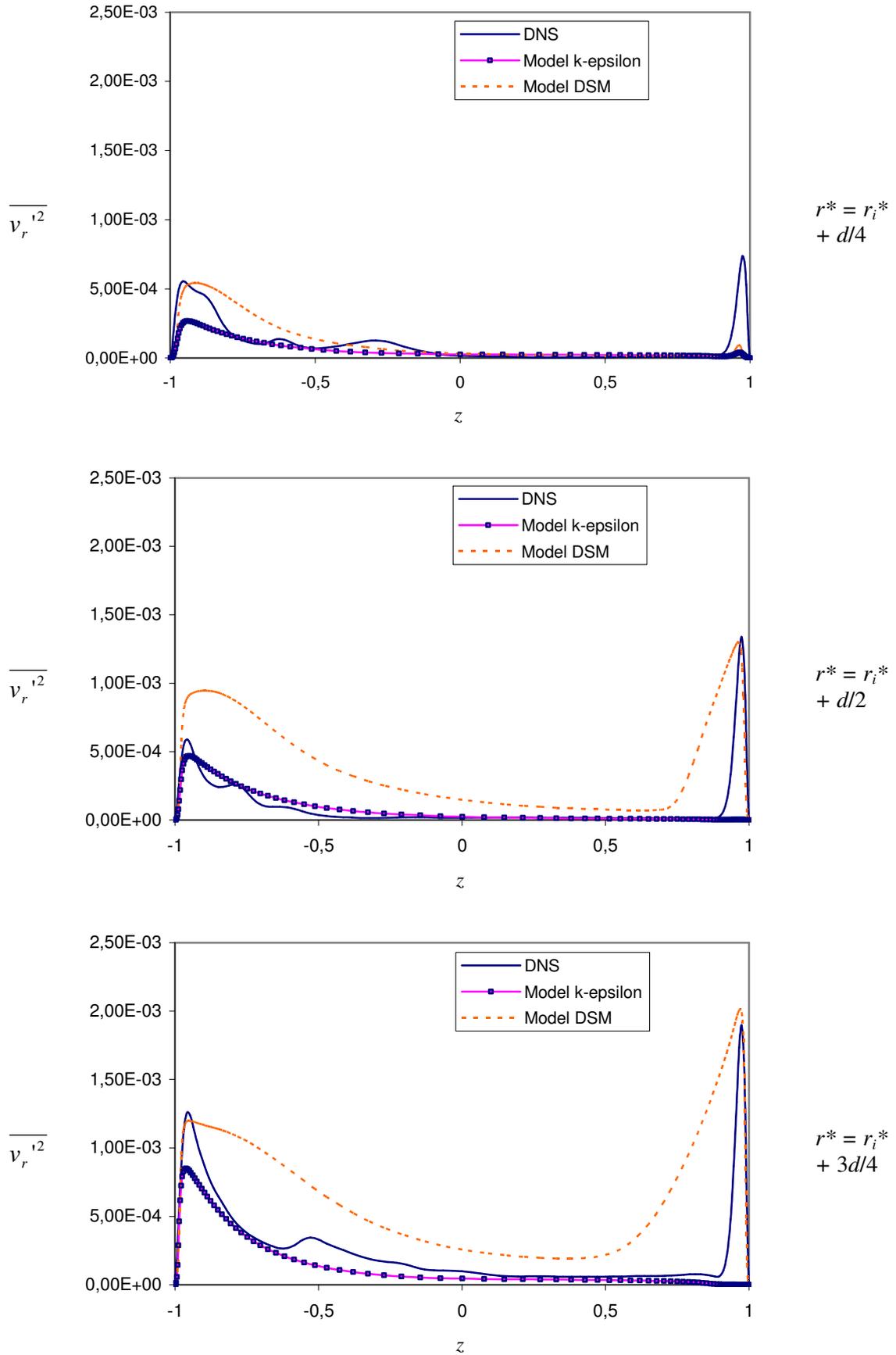
**Fig.A-9** – Comparaisons DNS,  $k-\epsilon$  et DSM des profils axiaux de  $\overline{V}_r$  pour trois abscisses radiales à  $Re = 300\,000$ .



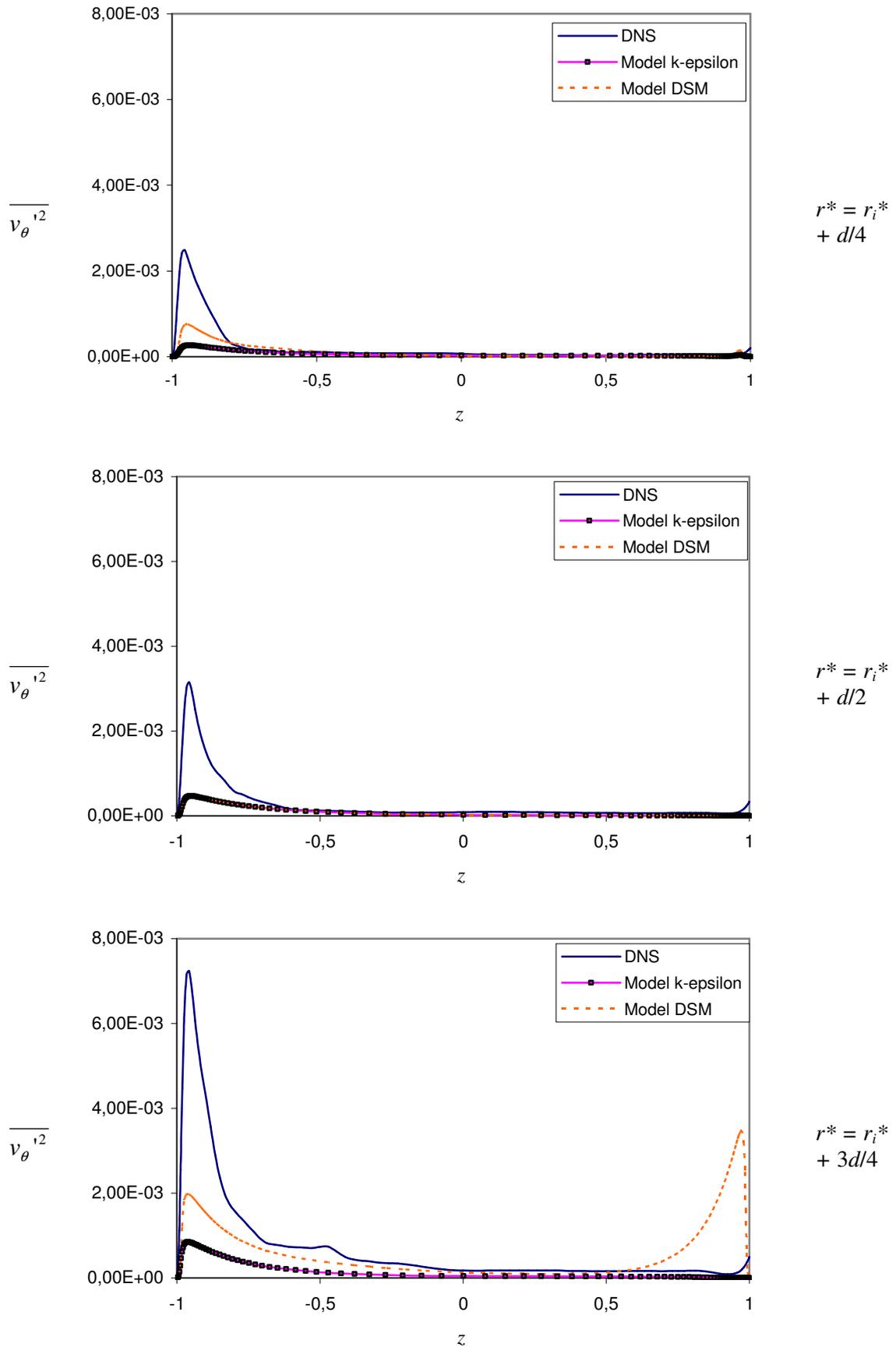
**Fig. A-10** - Comparaisons DNS,  $k-\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{V}_\theta(z)$  pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .



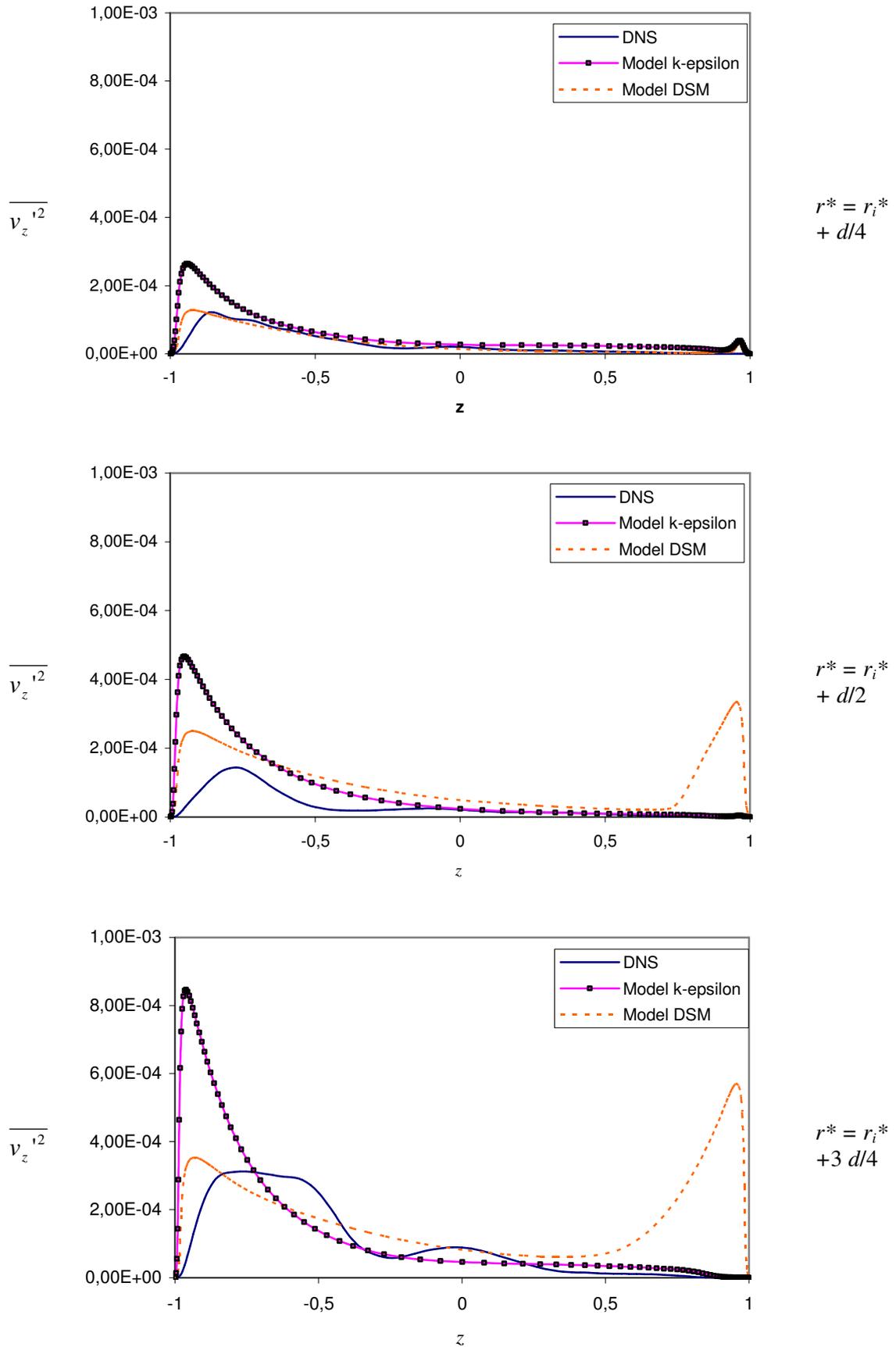
**Fig. A-11** - Comparaison DNS,  $k-\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{V}_z(z)$  pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .



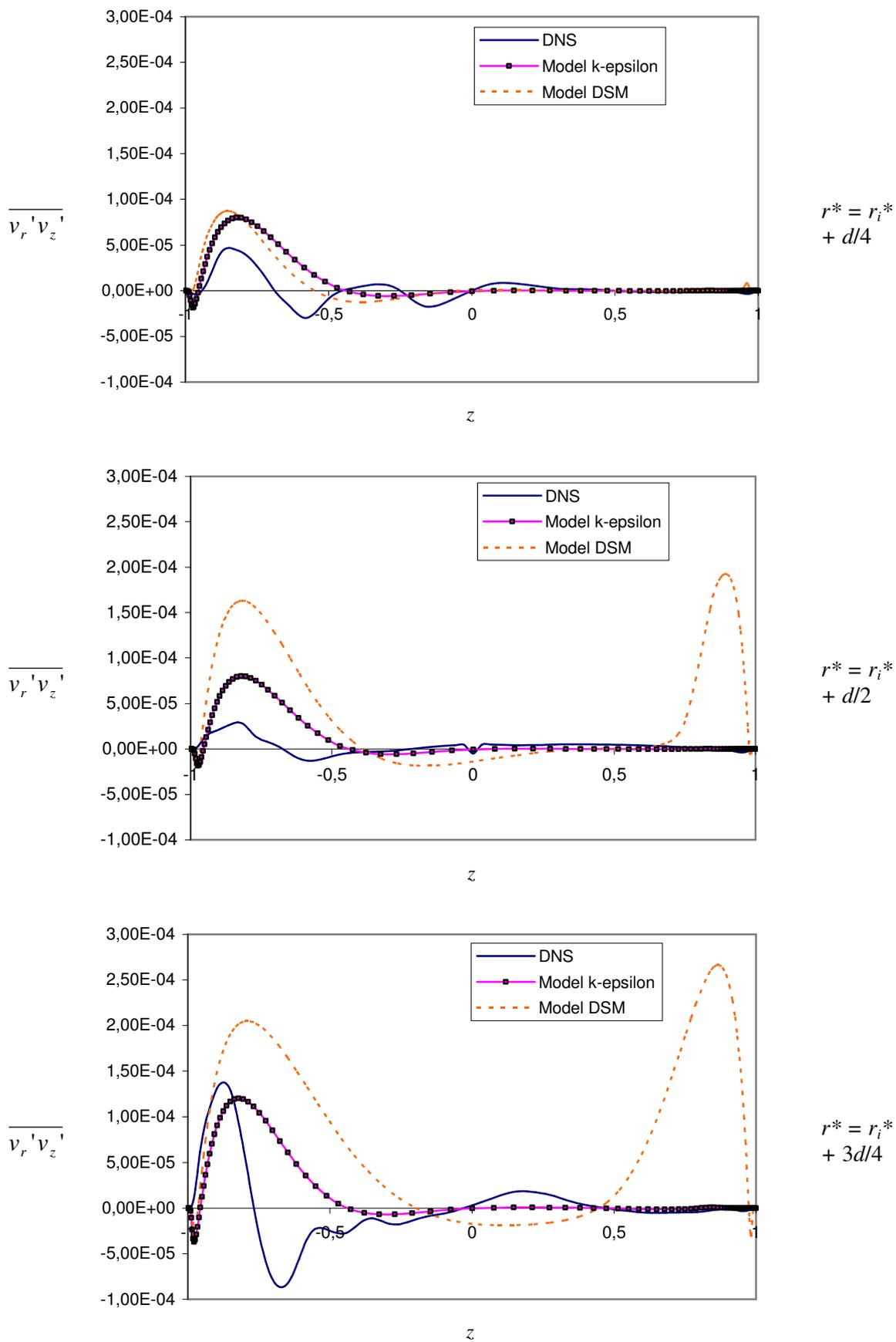
**Fig. A-12-** Comparaison DNS,  $k-\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_r'^2}$  pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .



**Fig. A-13-** Comparaison DNS,  $k-\varepsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_{\theta}'^2}(z)$  pour trois abscisses radiales à  $Re = 300\,000$ .



**Fig. A-14-** Comparaison DNS,  $k$ - $\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_z'^2}(z)$  pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .



**Fig. A-15-** Comparaison DNS,  $k-\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_r'v_z'}$ ( $z$ ) pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .

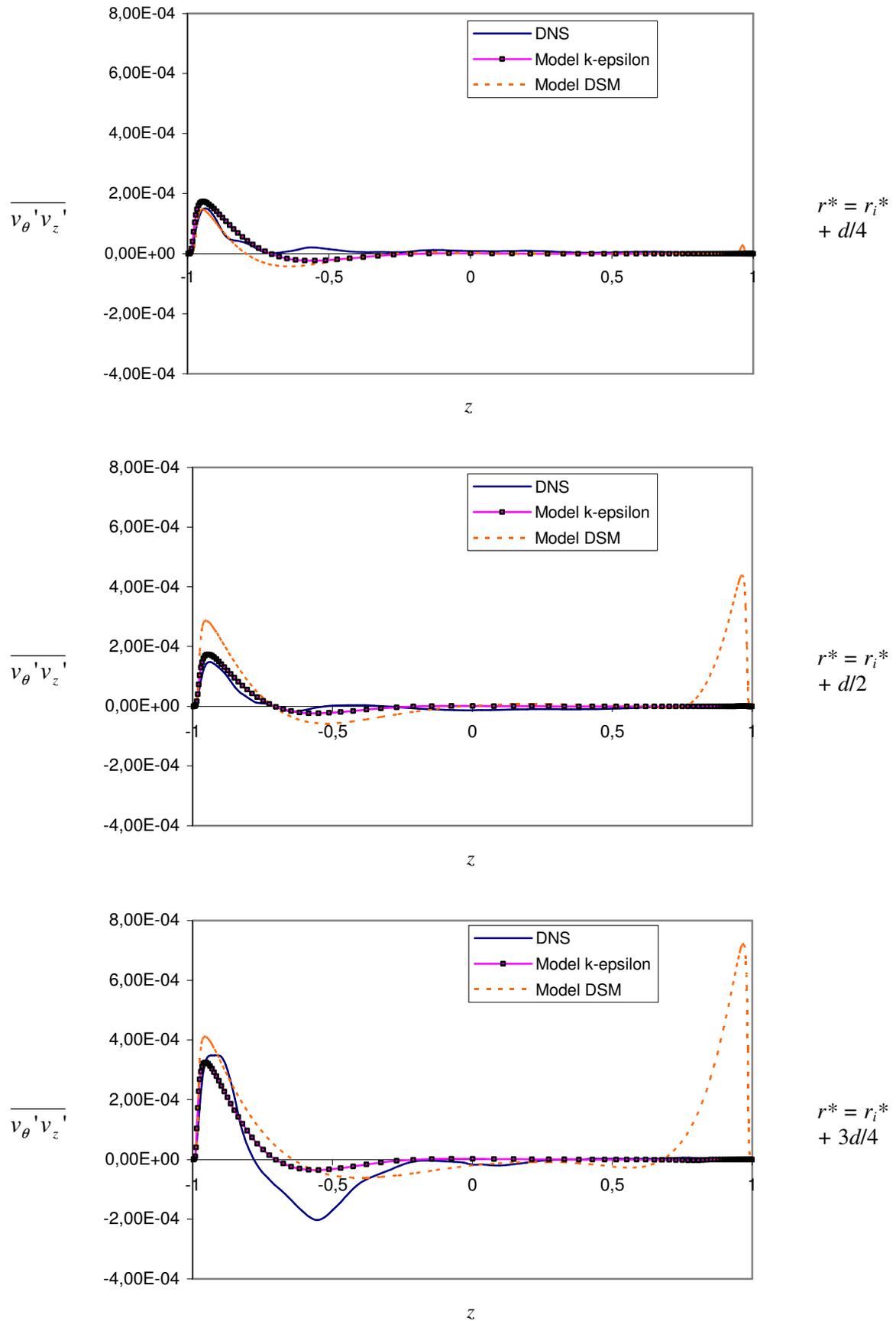
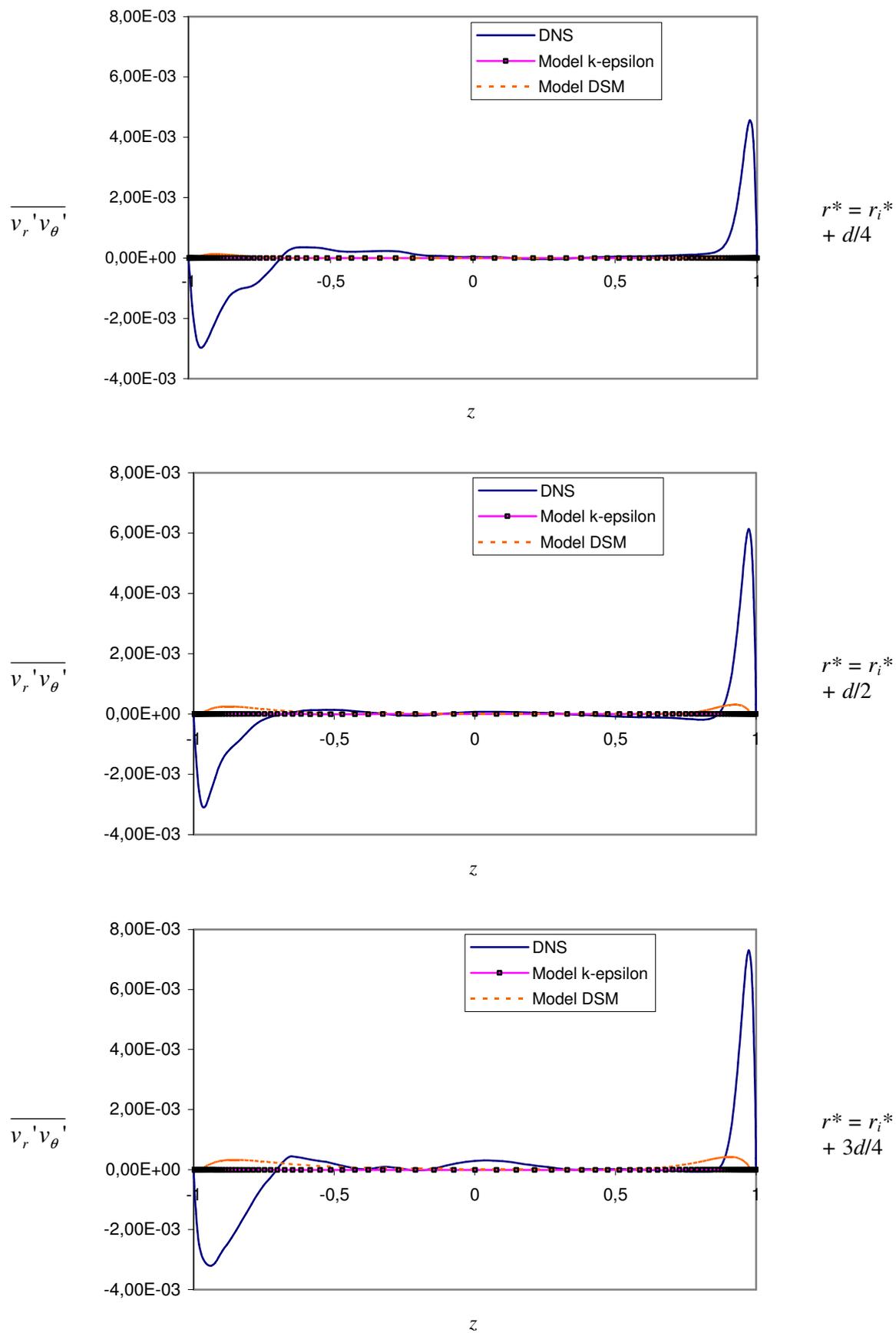


Fig. A-16- Comparaison DNS,  $k$ - $\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_{\theta}'v_z'}$ ( $z$ ) pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .



**Fig. A-17-** Comparaison DNS,  $k$ - $\epsilon$  et DSM des profils  $\overline{v_r'v_\theta'}(z)$  pour trois abscisses radiales, à  $Re = 300\,000$ .

### A.3. Conclusion

L'expérience très enrichissante de l'approche de l'écoulement de cavité rotor-stator m'a permis de dresser une étude comparative à plusieurs niveaux des couches limites de Bödewadt et d'Ekman et des grandes structures dans l'écoulement géostrophique. Cette étude m'a permis de me familiariser, au-delà de la DNS utilisée pour la configuration de Taylor-Couette, avec les approches basées sur la modélisation de la turbulence et avec une approche expérimentale qui m'a permis de me familiariser avec des techniques de visualisation.

Les résultats qui ont été obtenus concernent la mise en évidence expérimentale, confortée par la simulation directe, des structures tridimensionnelles dans l'écoulement géostrophique –en particulier plusieurs configurations-types de phénomènes d'onde en rotation différentielle par rapport au milieu qui les baigne. La mise en évidence de ces structures est originale, et ces structures avaient déjà pu être pressenties par les travaux d'Owen dans ce type de configuration.

Un autre domaine où les résultats apportés amènent non pas des conclusions définitives, mais des éléments de réflexion, concerne la mise en confrontation des forces et des faiblesses des modélisations pour les régimes de turbulence transitionnels considérés. La configuration met en évidence une bonne prédiction de l'écoulement moyen dans la couche de Bödewadt qui devient turbulente plus tôt que la couche d'Ekman. Les composantes de l'énergie cinétique sont bien prédites par l'approche DSM et ceci même pour certaines composantes (comme la composante de vitesse radiale). Les composantes du tenseur de Reynolds représentant plus particulièrement le frottement turbulent,  $\overline{v_r'v_z'}(z)$  et  $\overline{v_\theta'v_z'}(z)$ , montrent un comportement satisfaisant dans la couche de Bödewadt. Les résultats montrent le déséquilibre turbulent entre les deux couches de parois et également l'anisotropie des propriétés turbulentes en présence de rotation. Une étude étendue dans le cas de taux de rotation plus élevés – mais plus difficile à réaliser en DNS- devrait permettre de tester dans de meilleures conditions les modélisations, et permettre aussi de mieux pointer des remises en cause afin de prendre en compte dans les modèles l'anisotropie de la turbulence.





## Bibliographie

- [1] G. AHLERS AND D. S. CANNELL. Vortex-front propagation in rotating Couette-Taylor flow. *Phys. Rev. Lett.* (1983), **50**, 1583-1586.
- [2] A. AKONUR AND R. M. LUEPTOW. Three-dimensional velocity field for nonwavy and wavy Taylor Couette flow. *J. Fluid Mech.* (2001), submitted.
- [3] MOHAMMED E. ALI AND P. D. WEIDMAN. On the linear stability of cellular spiral Couette flow. *Phys. Fluids A* (1993), **5**, 1188-1200.
- [4] T. ALZIARY DE ROQUEFORT AND G. GRILLAUD. Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method. *Computers & Fluids* (1978), **6**, 259-269.
- [5] C. DAVID ANDERECK, R. DICKMAN AND HARRY L. SWINNEY. New flows in a circular Couette system with co-rotating cylinders. *Phys. Fluids* (1983), **26** (6), 1395-1401.
- [6] C. DAVID ANDERECK, S. S. LIU AND HARRY L. SWINNEY. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* (1986), **164**, 155-183.
- [7] J. ANTONIJOAN, F. MARQUES AND J. SANCHEZ. Non-linear spirals in the Taylor-Couette Problem. *Phys. Fluids* (1998), **12**, 3147-3159.
- [8] J. ANTONIJOAN AND J. SANCHEZ. Transitions from Taylor vortex flow in a co-rotating Taylor-Couette system. *Phys. Fluids* (2000), **12**, 3147-3159.
- [9] G. K. BATCHELOR. Note on the class of solutions of Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Q. J. Mech. Appl. Math.* (1951), **4**, 29-41.
- [10] T. B. BENJAMIN. Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. I. Theory. *Proc. R. Soc. Lond. A.* (1978), **359**, 1-26.
- [11] T. B. BENJAMIN. Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. II. Experiments. *Proc. R. Soc. Lond. A* (1978), **359**, 27-43.
- [12] T. B. BENJAMIN AND T. MULLIN. Anomalous modes in the Taylor experiment. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* (1981), **377**, 221-249.

- [13] T. BERLAND, T. JØSSANG AND J. FEDER. An experimental study of the connection between the hydrodynamics and phase transition descriptions of the Taylor-Couette instability. *Phys. Scripta* (1986), **34**, 427-431.
- [14] J. E. BURKHALTER AND E. L. KOSCHMIEDER. Steady supercritical Taylor vortex flow. *J. Fluid Mech.* (1973), **58 part 3**, 547-560.
- [15] J. E. BURKHALTER AND E. L. KOSCHMIEDER. Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts. *Phys. Fluids* (1974), **17** (11), 1929-1935.
- [16] S. CHANDRASEKHAR. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. *Oxford University Press* (1961).
- [17] A. CHORIN. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.* (1968), **22**, 745-762.
- [18] P. CHOSSAT AND G. IOOSS. The Taylor-Couette Problem. *Springer-Verlag, New-York* (1994)
- [19] K. A. CLIFFE, J. J. KOBINE, T. MULLIN. The Role of Anomalous Modes in Taylor-Couette Flow. *Proc. R. Soc. London A* (1992), **439**, 341-357.
- [20] K. A. CLIFFE AND T. MULLIN. A numerical and experimental study of anomalous modes in the Taylor experiment. *J. Fluid Mech.* (1985), **153**, 243-258.
- [21] J. A. COLE. Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *J. Fluid Mech.* (1976), **75, part 1**, 1-15.
- [22] D. COLES. Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.* (1965), **21**, 385-425.
- [23] P. W. COLOVAS AND C. D. ANDERECK. Turbulent bursting and spatiotemporal intermittency in the counterrotating Taylor-Couette system. *Phys. Rev. E* (1997), **55**, 2736-2741.
- [24] K. T. COUGHLIN AND P. S. MARCUS. Modulated waves in Taylor-Couette flow. Part 1. Analysis. *J. Fluid. Mech.* (1992), **234**, 1-18.
- [25] K. T. COUGHLIN AND P. S. MARCUS. Modulated waves in Taylor-Couette flow. Part 2. Numerical simulation. *J. Fluid. Mech.* (1992), **234**, 19-46.
- [26] R. C. DI PRIMA, P. M. EAGLES AND B. S. NG. The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow. *Phys. Fluids* (1984), **27**, 2403-2411.
- [27] R. C. DI PRIMA AND HARRY L. SWINNEY. Instabilities and Transitions in Flow Between Concentric Rotating Cylinders. *Topics in Applied Physics : Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer-Verlag (1981), vol. **45**, 139-180.
- [28] RUSSELL. J. DONNELLY. Taylor-Couette flow : the early days. *Physics Today* (1991, November), p.32-39.
- [29] W. S. EDWARDS, R. P. TAGG, B. C. DORNBLASER AND H. L. SWINNEY. Periodic travelling waves with nonperiodic pressure. *Eur. J. Mech., B/Fluids* (1991), **10** (2-Suppl.), 205-210.
- [30] V. W. EKMAN. On the influence of the Earth's rotation on the ocean currents. *Ark. Mat. Astr. Fys.* (1905), **2** (11), 1-52.

- [31] P. R. FENSTERMACHER, HARRY L. SWINNEY AND J. P. GOLLUB. Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow. *J. Fluid Mech.* (1979), **94**, part 1, 103-128.
- [32] JEAN GARRIGUES. Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens. *Cours de l'Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille*, 1999.
- [33] S. GHOSH MOULIC AND L. S. YAO. Taylor-Couette instability of travelling waves with a continuous spectrum. *J. Fluid Mech.* (1996), **324**, 181-198.
- [34] K. GODA. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three dimensional cavity flows. *J. Comp. Phys.* (1979), **30**, 76-95.
- [35] A. GOHARZADEH AND I. MUTABAZI. Experimental characterization of intermittency regimes in the Couette-Taylor system. *Eur. Phys. J. B* (2001), **19**, 157-162.
- [36] J. P. GOLLUB AND M. H. FREILICH. Optical heterodyne test of perturbation expansions for the Taylor instability. *Phys. Fluids* (1976), **19**, 618-626.
- [37] M. GOLUBITSKY AND W. F. LANGFORD. Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders. *Physica D* (1988), **32**, 362-392.
- [38] H. P. GREENSPAN. The theory of rotating fluids. *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics* (1969), Cambridge University Press, London.
- [39] JOHN J. HEGSETH, C. DAVID ANDERECK, F. HAYOT AND Y. POMEAU. Spiral Turbulence and Phase Dynamics. *Phys. Rev. Lett.* (1989), **62**, 257-260.
- [40] J. J. HEGSETH, G. W. BAXTER AND C. D. ANDERECK. Bifurcations from Taylor vortices between corotating concentric cylinders. *Phys. Rev. E* (1996), **53**, 507-521.
- [41] R. M. HEINRICHS, D. S. CANNELL, G. AHLERS AND M. JEFFERSON. Experimental test of the perturbation expansion for the Taylor instability at various wavenumbers. *Phys. Fluids* (1988), **31**, 250-255.
- [42] S. HUGUES. Développement d'un algorithme de projection pour méthodes pseudospectrales : application à la simulation d'instabilités tridimensionnelles dans les cavités tournantes. Modélisation d'écoulements turbulents dans les systèmes rotor-stator. *Thèse* (1998), *Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille*.
- [43] S. HUGUES AND A. RANDRIAMAMPINANINA. An improved projection scheme applied to pseudospectral methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids* (1998), **28**, 501-521.
- [44] C. A. JONES. On flow between counter-rotating cylinders. *J. Fluid Mech.* (1982), **120**, 433-450.
- [45] T. VON KARMAN. Über laminare und turbulente Reibung. *Z. angew. Math. Mech.* (1921), **1**, 233-252.
- [46] G. P. KING, Y. LI, W. LEE, H. L. SWINNEY AND P. S. MARCUS. Wave speeds in wavy Taylor-vortex flow. *J. Fluid Mech.* (1984), **141**, 365-390.
- [47] J. K. KOGA AND E. L. KOSCHMIEDER. Taylor vortices in short fluid columns. *Phys. Fluids A* (1989), **1**, 1475-1478.

- [48] DAH-CHYL KUO AND KENNETH S. BALL. Taylor-Couette flow with buoyancy : onset of spiral flow. *Phys. Fluids* (1997), **9**, 2872-2884.
- [49] R. J. LINGWOOD. Absolute instability of the Ekman layer and related rotating flows. *J. Fluid Mech.* (1997), **331**, 405-428.
- [50] M. LÜCKE, M. MIHELICIC AND K. WINGERATH. Front propagation and pattern formation of Taylor vortices growing into unstable circular Couette flow. *Phy.Rev.A* (January 1985), **31**, Num.1, 396-409.
- [51] PAUL MANNEVILLE. Structures dissipatives, chaos et turbulence. *Collection Aléa-Saclay* (mai 1991).
- [52] P. S. MARCUS. Simulation of Taylor-Couette flow. Part 2. Numerical results for wavy-vortex flow with one travelling wave. *J. Fluid Mech.* (1984), **146**, 65-113.
- [53] RITA MEYER-SPASCHE. Pattern formation in viscous flows : the Taylor-Couette problem and Rayleigh-Bénard convection. *International Series of Numerical Mathematics* (1999), vol.**128**, Birkhäuser Verlag Ed.
- [54] T. MULLIN. Finite-Dimensional Dynamics in Taylor-Couette Flows. *IMA J. Appl. Math.* (1991), **46**, 109-119.
- [55] T. MULLIN AND T. B. BENJAMIN. Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment. *Nature* (1980), **288**, 567-569.
- [56] T. MULLIN AND C. BLOHM. Bifurcation phenomena in a Taylor-Couette flow with asymmetric boundary conditions. *Phys. Fluids* (2001), **13**, 136-140.
- [57] G. P. NEITZEL. Numerical computation of time-dependent Taylor-vortex flows in finite-length geometries. *J. Fluid Mech.* (1984), **141**, 51-66.
- [58] J. M. OWEN AND R. H. ROGERS. Flow and Heat Transfert in Rotating-Disc Systems. Vol. 2 : rotating cavities. *Mechanical engineering research studies, engineering design series* (1995), Pr. W. D. Morris Ed., Research Studies Press Ltd.
- [59] R. PEYRET. Spectral methods for incompressible viscous flows. *Appl. Math. Sciences*, **148**, New-York Springer Verlag.
- [60] G. PFISTER AND I. REHBERG. Space-dependent order parameter in circular Couette flow transitions. *Phys. Lett. A* (1981), **83**, 19-22.
- [61] G. PFISTER, H. SCHMIDT, K. A. CLIFFE AND T. MULLIN. Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus. *J. Fluid Mech.* (1988), **191**, 1-18.
- [62] ARNAUD PRIGENT. La spirale turbulente : motif de grande longueur d'onde dans les écoulements cisailés turbulents. *Thèse* (2001), *Université de Paris Sud, UFR Scientifique d'Orsay*.
- [63] A. PRIGENT AND O. DAUCHOT. Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflexions. *Phys. Fluids* (2000), **12** (10), 2688-2690.

- [64] ISABELLE RASPO. Méthodes spectrales et de décomposition de domaine pour les écoulements complexes confinés en rotation. *Thèse* (1996), *Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille*.
- [65] ISABELLE RASPO, SANDRINE HUGUES, ERIC SERRE, ANTHONY RANDRIAMAMPINANINA, PATRICK BONTOUX. A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows. *Computers & Fluids* (2002), **31**, 745-767.
- [66] A. RECKTENWALD, M. LÜCKE AND H. M. MÜLLER. Taylor vortex formation in axial through-flow : linear and weakly nonlinear analysis. *Physical Review E* (1993), **48**, 4444-4454.
- [67] J. SANCHEZ, D. CRESPO AND R. MARQUES. Spiral vortices between concentric cylinders. *Appl. Sci. Res.*, **51**, 55-59.
- [68] W. SCHRÖDER AND H. B. KELLER. Wavy Talor-Vortex flows via multigrid-continuation methods. *J. Comput. Phys* (1990), **91**, 197-227.
- [69] ERIC SERRE. Instabilités de couche limite dans les écoulements confinés en rotation. Simulation numérique directe par une méthode spectrale de comportements complexes. *Thèse* (2000), *Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille*.
- [70] ERIC SERRE, EMILIA CRESPO DEL ARCO AND PATRICK BONTOUX. Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs. *J. Fluid Mech.* (2001), **434**, 65-100.
- [71] E. SERRE, M. SCHAEFER AND P. BONTOUX. Vortex breakdown in a cylinder with a free surface. *Computational Fluid and Solid Mechanics* (2003), K. J. Bathe (editor), Elsevier, 1125 – 1127.
- [72] H. A. SNYDER. Stability of rotating Couette Flow. II. Comparison with numerical results. *Phys.Fluids* (1968), **11**(8), 1599-1605.
- [73] H. A. SNYDER. Waveform in rotating Couette flow. *Int. J. Non-Linear Mech* (1970), **5**, 659-685.
- [74] H. A. SNYDER. Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow. *J. Fluid Mech.*, **35** (1969), part 2, 273-298.
- [75] H. A. SNYDER AND R. B. LAMBERT. Harmonic generation in Taylor vortices between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, **26** (1966), 545-562.
- [76] V. SOBOLÍK, B. IZRAR, F. LUSSEYRAN, S. SKALI. Interaction between the Ekman layer and the Couette-Taylor instability. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **43** (2002), 4381-4393.
- [77] A. SPOHN, M. MORY AND E. J. HOPFINGER. Observations of vortex breakdown in an open cylindrical container with a rotating bottom. *Exp. In Fluids* (1993), **14**, 70-77.
- [78] C. STERN AND F. HUSSAIN. Chaos in counter-rotating Couette flow. *Physica D*, **72** (1994), 195-210.
- [79] C. L. STREET AND M. Y. HUSSAINI. A numerical simulation of the appearance of chaos in finite-length Taylor-Couette flow. *Appl. Num. Math.*, **7** (1991), 41-71.

- [80] Y. TAKEDA, K. KOBASHI AND W. E. FISCHER. Observation of the transient behaviour of Taylor vortex flow between rotating concentric cylinders after sudden start. *Exp. Fluids*, **9** (1990), 317-319.
- [81] S. J. TAVENER, T. MULLIN AND K. A. CLIFFE. Novel bifurcation phenomena in a rotating annulus. *J. Fluid Mech.*, **229** (1991), 483.
- [82] G. I. TAYLOR. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **223** (1923), 289-343.
- [83] C. VAN ATTA. Exploratory measurements in spiral turbulence. *J. Fluid Mech.*, **25** (1966), 495-512.
- [84] J. M. VANEL, R. PEYRET AND P. BONTOUX. A pseudospectral solution of vorticity streamfunction equations using the influence matrix technique. *Numerical Methods for Fluid Dynamics II*, ed. by K. W. Morton and M. J. Baines (1986), 463-475.
- [85] E. WEISSHAAR, F. H. BUSSE AND M. NAGATA. Twist vortices and their instabilities in the Taylor-Couette system. *J. Fluid Mech.*, **226** (1991), 549-564.
- [86] S. T. WERELEY AND R. M. LUEPTOW. Azimuthal velocity in supercritical circular Couette flow. *Exp. Fluids*, **18** (1994), 1-9.
- [87] STEVEN T. WERELEY AND RICHARD M. LUEPTOW. Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor-Couette flow. *J. Fluid Mech.*, **364** (1998), 59-80.
- 
- [88] S. C. ABRAHAMSON, J. K. EATON AND D. J. KOGA. The flow between shrouded co-rotating disks. *Phys. Fluids*, **A1** (1989), 241-251.
- [89] S. C. CHEAH, H. IACOVIDES, D. C. JACKSON, H. JI AND B. E. LAUNDER. Experimental investigation of enclosed rotor-stator disc flows. *J. Exp. Thermal Fluid Sci.*, **9** (1994), 445-455.
- [90] LAURENT ELENA. Modélisation de la turbulence inhomogène en presence de rotation. *Thèse* (1994), *Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, Institut de Mécanique des Fluides*.
- [91] JOEL H. FERZIGER AND MILOVAN PERIĆ. Computational Methods for Fluid Dynamics. 3ème édition, *Editions Springer* (2002).
- [92] T. B. GATSKI AND C. L. RUMSEY. Linear and nonlinear eddy viscosity models. *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows* (2002), edited by B. E. Launder and N. Sandham, Cambridge University Press.
- [93] J. A. C. HUMPHREY, C. A. SCHULER AND D. R. WEBSTER. Unsteady laminar flow between a pair of disks co-rotating in a fixed cylindrical container. *Phys. Fluids* (1995), **A7**, 1225-1240.
- [94] H. IACOVIDES, D. C. JACKSON, G. KELEMENIS AND B. E. LAUNDER. Experiments on local heat transfer in a rotating square-ended U-bend. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **20** (1999), 302-310.
- [95] HECTOR IACOVIDES, KOSTAS S. NIKAS AND MARCEL A. F. TE BRAAK. Turbulent flow computations in rotating cavities using low-Reynolds-Number models. *ASME Paper 96-GT-159, International Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exhibition*, (June 10-13, 1996, Birmingham).

- [96] H. IACOVIDES AND I. P. THEOFANOPOULOS. Turbulence modeling of axisymmetric flow inside rotating cavities. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **12** (1991), 2-11.
- [97] M. ITO, Y. YAMADA, S. IMAO AND M. GOUDA. Experiments on turbulent flow due to an enclosed rotating disc. *Proceedings 1<sup>st</sup> Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements* (1990), Elsevier, W. Rodi and E.N. Ganic (eds), 659-668.
- [98] R. C. KLOOSTERZIEL AND G. J. F. VAN HEIJST. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* (1991), **223**, 1-24.
- [99] MAGNE LYGREN AND HELGE I. ANDERSON. Turbulent flow between a rotating and a stationary disk. *J. Fluid Mech.* (2001), **426**, 297-326.
- [100] A. P. MORSE. Numerical prediction of turbulent flow in rotating cavities. *ASME J. Turbomachinery* (1991), **113**, 131-138.
- [101] J. M. OWEN. Flow and heat transfer in rotating discs systems. *Turbulence, Heat and Mass Transfer* (2000), Y. Nagano, K. Hanjalic and T. Tsuji eds, Aichi Shuppan Press, 33-58.
- [102] JEAN PIQUET. Turbulent Flows. Models and Physics. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (1999).
- [103] ROLAND SCHIESTEL. Les écoulements turbulents. Modélisation et simulation. *Editions Hermes* (1998).
- [104] E. SERRE, P. BONTOUX AND B. E. LAUNDER. Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavity. *Flow, Turb. and Combust.*, **69** (2002), 35-50.
- [105] P. G. TUCKER. The temporal behaviour of flow in rotating cavities. *Advances in computational heat transfert* (2001), G. de Vahl Davis and E. Leonardi eds, Begell House, New York, 655-662.



# Nomenclature

## Eléments relatifs à l'étude du système de Taylor-Couette

$r_i^*$	Rayon du cylindre interne (dimensionné)
$r_o^*$	Rayon du cylindre externe (dimensionné)
$\Omega_i$	Vitesse angulaire du cylindre interne.
$\Omega_o$	Vitesse angulaire du cylindre externe.
$\Omega_D$	Vitesse angulaire du disque terminal.
$\xi$	Rapport des vitesses angulaires : $\xi = \Omega_o / \Omega_i$ .
$h$	Demi-hauteur du système de Taylor-Couette.
$d$	Distance intercylindre : $d = r_o^* - r_i^*$ .
$\eta$	Rapport de rayon (système de Taylor-Couette) : $\eta = r_i^* / r_o^*$
$\Gamma$	Rapport d'aspect (système de Taylor-Couette) : $\Gamma = 2h / d$ .
$V^*$	Vitesse (dimensionnée).
$V_r^*, V_\theta^*, V_z^*$	Composantes radiale, azimutale, axiale de la vitesse $V^*$ .
$p^*$	Pression (dimensionnée).
$\mu$	Viscosité dynamique.
$\nu$	Viscosité cinématique.
$\rho$	Masse volumique.
$r^*, \theta, z^*$	Coordonnées cylindriques (dimensionnées).
$Re_i$	Nombre de Reynolds du cylindre interne : $Re_i = \Omega_i r_i^* d / \nu$ .
$Re_o$	Nombre de Reynolds du cylindre externe : $Re_o = \Omega_o r_o^* d / \nu$
CCF	“Cylindrical Couette Flow”
IPS	“InterPenetrating Spiral flow”
SPI	“Laminar Spiral Flow”
TVF	“Taylor Vortex Flow”
WIS	“Wavy Interpenetrating Spiral Flow”
WVF	“Wavy Vortex Flow”

## Eléments relatifs à l'étude de la cavité interdisques (Annexe turbulence)

$k$	Energie cinétique turbulente.
$\varepsilon$	Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.
$\bar{V}$	Vitesse moyennée dans un écoulement turbulent.
$v'$	Fluctuation turbulente de la vitesse autour de $\bar{V}$ .
$\nu_t$	Viscosité turbulente.
$\nu_e$	Viscosité effective.
$Re_t$	Nombre de Reynolds turbulent.
$\sigma^*$	Tenseur des contraintes.
$\tau^*$	Tenseur des contraintes visqueuses.
$I$	Tenseur identité du second ordre.
$S$	Tenseur du taux de déformation.





