



**HAL**  
open science

# Caractérisation des propriétés électro-acoustiques de structures piézoélectriques soumises à une contrainte statique de type électrique ou mécanique

Mathieu Domenjoud

► **To cite this version:**

Mathieu Domenjoud. Caractérisation des propriétés électro-acoustiques de structures piézoélectriques soumises à une contrainte statique de type électrique ou mécanique. Acoustique [physics.class-ph]. Université François Rabelais - Tours, 2012. Français. NNT : 2012TOUR4002 . tel-00782090v2

**HAL Id: tel-00782090**

**<https://theses.hal.science/tel-00782090v2>**

Submitted on 17 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*ÉCOLE DOCTORALE « Énergie, Matériaux, Sciences de la Terre et de l'Univers »*

GREMAN, pôle acoustique et piézoélectricité

**THÈSE** présentée par :  
**Mathieu DOMENJOURD**

Soutenue le : **28 novembre 2012**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université François – Rabelais de Tours**

Discipline/ Spécialité : Physique/Acoustique

**Caractérisation des propriétés électro-  
acoustiques de structures piézoélectriques  
soumises à une contrainte statique de type  
électrique ou mécanique**

Directeur de Thèse : TRAN-HUU-HUE Louis-Pascal  
Co-encadrant : LEMATRE Michaël

**RAPPORTEURS :**

**DEJOURS Corinne**  
**DUQUENNOY Marc**

Professeur des universités, Institut Polytechnique de Bordeaux  
Professeur des universités, Université de Valenciennes

**JURY :**

**CONOIR Jean-Marc**  
**DEJOURS Corinne**  
**DUQUENNOY Marc**  
**FEUILLARD Guy**  
**LEMATRE Michaël**  
**TRAN-HUU-HUE Louis-Pascal**

Directeur de recherche CNRS, Université Paris 6  
Professeur des universités, Institut Polytechnique de Bordeaux  
Professeur des universités, Université de Valenciennes  
Professeur des universités, ENI Val de Loire  
Maître de conférences, ENI Val de Loire  
Professeur des universités, ENI Val de Loire



*À mes parents, à ma famille, pour leur soutien et  
la confiance qu'ils m'ont toujours portée.*

*À ma petite fiancée Déborah, pour sa patience et  
l'aide précieuse qu'elle m'a prodiguée.*



## Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé au sein du pôle Acoustique et Piézoélectricité du Groupe de Recherche en Matériaux, Microélectronique, Acoustique et Nanotechnologies (GREMAN) dans les locaux de l'École Nationale d'Ingénieurs du Val de Loire (ENIVL). Je remercie monsieur Marc Lethiecq pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire, ainsi que monsieur Romuald Boné pour m'avoir permis d'effectuer mes travaux au sein de son école.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à messieurs Guy Feuillard et Pascal Tran pour avoir dirigé conjointement ce travail. Je remercie monsieur Michaël Lematre pour avoir accepté d'être l'encadrant de cette thèse.

Je remercie vivement monsieur Jean-Marc Conoir pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury ainsi que monsieur Marc Duquennoy et Mme Corinne Dejous l'attention qu'ils auront porté à mes travaux et leurs remarques pertinentes.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des collègues du laboratoire, et plus particulièrement monsieur Jérôme Fortineau, pour leur soutien quotidien.

Je remercie monsieur Michel Gratton pour sa disponibilité et le temps passé à mes côtés dans la mise en place des tests sur la machine de traction qui m'était prêtée par son laboratoire.

Je finirai en remerciant tous ceux que j'ai croisé pendant ces 4 années, ceux avec qui j'ai partagé les bons moments, mais aussi les plus difficiles. Un petit clin d'œil à Olivier, Dimitri et Guillaume, mes collègues thésards devenus bien plus.



# Table des matières

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Matériaux piézoélectriques sous contraintes.....</b>	<b>5</b>
I Précontraintes et contraintes résiduelles.....	6
I.1 Définitions et catégories de contraintes résiduelles .....	6
I.2 Origines des contraintes résiduelles .....	8
I.3 Intérêts et effets des précontraintes et contraintes résiduelles.....	11
I.4 Mécanismes de rupture .....	13
II La piézoélectricité.....	14
II.1 Structure cristalline.....	15
II.2 L'effet piézoélectrique.....	17
II.3 Changement de polarisation et ingénierie des domaines .....	20
III Les matériaux piézoélectriques .....	24
III.1 Les monocristaux .....	24
III.2 Les céramiques piézoélectriques .....	28
III.3 Protocole de polarisation .....	29
III.4 La structure Pérovskite.....	30
III.5 Les applications de l'effet piézoélectrique .....	32
IV Les matériaux piézoélectriques sous contraintes.....	33
IV.1 Contrainte mécanique.....	34
IV.2 Contrainte électrique .....	36
IV.3 Structure cristalline et changements de polarisation et déformations sous contraintes.....	37
Conclusion.....	39



<b>Chapitre II : Propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique contraint .....</b>	<b>41</b>
I Généralités sur les grandeurs mécaniques.....	42
I.1 Déformations.....	42
I.2 Tenseurs des contraintes.....	44
I.3 Relations entre contraintes et déformations .....	45
I.4 Couplage électromécanique .....	52
II Équation de propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique précontraint.....	54
II.1 Équations du mouvement dans un milieu précontraint non piézoélectrique.....	54
II.2 Équations de la dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte .....	60
II.3 Équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte .....	65
II.4 Calcul du coefficient de couplage dans un matériau piézoélectrique contraint .....	70
Conclusion .....	72
 <b>Chapitre III : Étude numérique des propriétés électro-acoustiques d'un matériau piézoélectrique non hystérétique sous précontrainte statique de type électrique ou mécanique .....</b>	<b>73</b>
I Définition de l'étude.....	74
I.1 Le niobate de lithium.....	74
I.2 Mode de précontrainte.....	76
II Étude sous précontrainte mécanique.....	77
II.1 Calcul des déformations initiales .....	77
II.2 Calcul des tenseurs de contraintes initiaux .....	81
II.3 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées ..	85
II.4 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées .....	92
II.5 Conclusion .....	95
III Étude sous précontrainte électrique .....	96

III.1 Calcul des déformations initiales.....	96
III.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées.....	98
III.3 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées.....	106
III.4 Conclusion.....	109
Conclusion.....	109
<b>Chapitre IV : Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques.....</b>	<b>111</b>
I Les phénomènes hystérétiques dans les céramiques ferroélectriques .....	112
I.1 Domaine d'étude .....	112
I.2 Chargement électrique d'un matériau ferroélectrique.....	113
I.3 Chargement mécanique d'un matériau ferroélectrique .....	117
II Mise en place du modèle de piézocéramiques sous contraintes .....	123
II.1 Formulation du modèle en contrainte uniaxiale de type mécanique ou électrique.....	124
II.2 Effet réversible.....	125
II.3 Distribution d'orientation de domaines .....	128
II.4 Évolution des distributions de domaines .....	132
III Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques sous chargement électrique .....	139
III.1 Lois de comportement .....	139
III.2 Évolution de la polarisation et du paramètre de concentration piézoélectrique sous chargement électrique.....	140
III.3 Détermination des constantes d'intégration .....	142
III.4 Évolution des déformations sous chargement électrique.....	143
IV Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques sous chargement mécanique.....	144
IV.1 Lois de comportement.....	144
IV.2 Calcul de la polarisation et de la déformation piézoélectrique rémanente sous chargement mécanique .....	145
IV.3 Calcul de la déformation ferroélastique rémanente.....	149

Conclusion .....	153
<b>Chapitre V : Comparaison entre modélisation et expériences .....</b>	<b>155</b>
I Étude d'un PLZT sous contrainte mécanique et électrique.....	156
I.1 Définition de l'étude et du matériau.....	156
I.2 Contrainte électrique .....	157
I.3 Contrainte mécanique.....	167
II Étude des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique .....	179
II.1 Calculs des paramètres des matériaux .....	179
II.2 Calcul des déplacements électriques sous contrainte mécanique dans les PZT-A et PZT-B .....	184
II.3 Calcul des déformations longitudinales sous contrainte mécanique dans un PZT-A et PZT-B .....	185
II.4 Évolution des constantes des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique .....	186
II.5 Conclusion .....	191
III Étude du PZT P188 sous contrainte mécanique .....	192
III.2. Calcul du déplacement électrique sous contrainte mécanique.....	194
III.3 Évolution du coefficient piézoélectrique sous contrainte mécanique.....	195
III.4 Conclusion.....	197
Conclusion .....	197
<b>Chapitre VI : Étude expérimentale de matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique .....</b>	<b>201</b>
I Étude du niobate de lithium sous contrainte mécanique .....	202
I.1 Dispositif expérimental .....	202
I.2 Mesures expérimentales .....	206
I.3 Conclusion.....	209
II. Étude des Pz21 et Pz26 sous contrainte mécanique.....	209
II.1 Dispositif expérimental.....	209

II.2 Étude du Pz21 sous contrainte mécanique.....	214
II.3 Mesure du déplacement électrique et des déformations du Pz26 sous contrainte mécanique.....	222
II.4 Conclusion.....	230
Conclusion.....	231
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>233</b>
<b>Annexes.....</b>	<b>237</b>
Annexe I Estimation des différences entre vitesses et coefficient de couplage définis dans les différents systèmes de coordonnées.....	237
Annexe I.1 Estimation de la différence entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées.....	237
Annexe I.2 Estimation de la différence entre les coefficients de couplages définis dans les deux systèmes de coordonnées.....	239
Annexe II Calcul des constantes des matériaux dans différents plans de coupe .....	240
Annexe II.1 Lois de transformations des paramètres piézoélastiques du second ordre .....	240
Annexe II.2 Lois de transformations des paramètres piézoélastiques du troisième ordre.....	241
Annexe III Constantes du troisième ordre du niobate de lithium.....	242
Annexe III.1 Constantes élastiques de rigidités du troisième ordre .....	242
Annexe III.2 Constantes piézoélectriques du troisième ordre.....	243
Annexe III.3 Constantes diélectriques du troisième ordre .....	244
Annexe III.4 Constantes électrostrictives du troisième ordre.....	244
<b>Bibliographie.....</b>	<b>245</b>
<b>Publications .....</b>	<b>253</b>



## Liste des tableaux

Tableau I.1 : Les 14 Réseaux de Bravais. ....	16
Tableau V.1 : Propriétés du PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. ....	156
Tableau V.2 : Propriétés des PZT-A et PZT-B [Cao1993]. ....	179
Tableau V.3 : Points de fonctionnements des PZT-A et PZT-B. ....	182
Tableau V.4 : Propriétés du PZT P188 [Richard1996]. ....	192
Tableau VI.1 : Propriétés du niobate de lithium [Warner1967]. ....	202
Tableau VI.2 : Propriétés des Pz21 et Pz26. ....	210
Tableau A.1 : Constantes élastiques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium. ....	242
Tableau A.2 : Constantes piézoélectriques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium. ....	243
Tableau A.3 : Constantes diélectriques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium. ....	244
Tableau A.4 : Constantes électrostrictives indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium. ....	244



## Liste des figures

Figure I.1 : Source de contrainte résiduelle [Duquennoy1997].	6
Figure I.2 : Contraintes résiduelles d'ordre 2 dans un matériau biphasé après déformation plastique [Duquennoy1997].	7
Figure I.3 : Représentation schématique des déformations à l'origine des contraintes résiduelles microscopiques hétérogènes [Duquennoy1997].	8
Figure I.3 : Trajet de déformation ( $\epsilon$ ) élastoplastique à champ de contrainte ( $\sigma$ ) hétérogène dans le cas d'une adaptation (a) et d'une accommodation (b).	9
Figure I.4 : Trajet de déformation élastoplastique à champ de contrainte homogène.	10
Figure I.5 : Cristal possédant un centre de symétrie.	17
Figure I.6 : Cristal ne possédant pas de centre de symétrie. Le barycentre des charges se déplace, créant une polarisation $P_0$ .	17
Figure I.7 : Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique [Delaunay2006].	18
Figure I.8 : Relations entre les classes de symétrie, les sous-groupes piézoélectriques, pyroélectriques, ferroélectriques et les structures cristallines.	19
Figure I.9 : Évolution de la polarisation spontanée en fonction de la température dans un cristal ferroélectrique de $\text{BaTiO}_3$ [Merz1953].	20
Figure I.10 : Mur de domaines à $180^\circ$ (a), mur de domaines à $90^\circ$ (b).	21
Figure I.11 : Modèles de piézo-céramiques non polarisée (a), polarisée (b) et à polarisation de saturation (c).	22
Figure I.12 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un matériau ferroélectrique.	23
Figure I.13 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un matériau antiferroélectrique.	24
Figure I.14 : Appareillage de Czochralski [Ferrand2007].	26
Figure I.15 : Structure cristallographique du niobate de lithium.	27
Figure I.16 : Les deux états de polarisation du niobate de lithium.	27
Figure I.17 : Structure cristalline de type Pérovskite $\text{ABO}_3$ sous forme cubique (a) et tétragonale (b) [Stoll1997].	30
Figure I.18 : Schéma d'un transducteur Tonpiliz.	35
Figure I.19 : Changement de polarisation ferroélectrique induit par un champ électrique supérieur au champ électrique coercitif [Hwang1995].	38
Figure I.20 : Changement de polarisation ferroélastique induit par une contrainte supérieure au champ de contrainte coercitif [Hwang1995].	38



Figure II.1 : Transformation d'un milieu de l'état initial (I) à l'état final (II).....	42
Figure II.2 : Effet d'une transformation de milieu sur les éléments de surface et de force.....	44
Figure II.3 : Composantes des tenseurs élastiques, piézoélectriques et diélectriques suivant les classes de symétrie [Royer1996]. .....	51
Figure II.4 : Schématisation des trois états du matériau : naturel, statique et dynamique.....	55
Figure : II.5 : Représentation des variations de longueur de parcours de l'onde acoustique lors d'une mesure sous contrainte statique [Duquennoy1997].....	69
Figure III.1 : Définition des orientations de l'étude.....	76
Figure III.2 : Évolution de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle $\theta$ , pour deux niveaux de contraintes de -110 MPa (lignes bleues) et 110 MPa (lignes vertes), pour $\varphi = 0^\circ$ (lignes continues) et $90^\circ$ (lignes discontinues).....	80
Figure III.3 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique appliquée calculée par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 55^\circ$ .....	80
Figure III.4 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy $t_{33}^0$ et le premier tenseur de Piola-Kirchoff $P_{33}^0$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 0^\circ$ .....	82
Figure III.5 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy $t_{33}^0$ et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff $\sigma_{33}^0$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 0^\circ$ .....	83
Figure III.6 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy $t_{33}^0$ et le premier tenseur de Piola-Kirchoff $P_{33}^0$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 90^\circ$ .....	84
Figure III.7 : Évolutions de la différence entre le tenseur de Cauchy $t_{33}^0$ et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff $\sigma_{33}^0$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) pour $\varphi = 90^\circ$ .....	85
Figure III.8 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).....	86
Figure III.9 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).....	87
Figure III.10 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).....	88
Figure III.11 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et	

rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	89
Figure III.12 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	90
Figure III.13 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	91
Figure III.14 : Évolutions du coefficient de couplage $k_t$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	93
Figure III.15 : Évolutions du coefficient de couplage $k_t$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	94
Figure III.16 : Évolutions de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle $\theta$ , pour deux niveaux de champs électriques, soit -17.5 MV/m (lignes bleues) et 17.5 MV/m (lignes vertes) et pour $\varphi = 0^\circ$ (lignes continues) et $90^\circ$ (lignes discontinues). .....	97
Figure III.17 : Évolutions de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe $\varphi = 0^\circ$ et $\theta = 89^\circ$ .....	98
Figure III.18 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	99
Figure III.19 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	100
Figure III.20 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	101
Figure III.21 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	103
Figure III.22 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	104

---

Figure III.23 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	105
Figure III.24 : Évolutions du coefficient de couplage $k_t$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	107
Figure III.25 : Évolutions du coefficient de couplage $k_t$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues). .....	108
Figure IV.1 : Système de coordonnées de l'étude. ....	112
Figure IV.2 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT [Lynch1995a]. ....	114
Figure IV.3 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT [Lynch1995a].....	116
Figure IV.4 : Évolution de la contrainte en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PLZT [Lynch1995a].....	118
Figure IV.5 : Évolution de la relation contrainte en fonction de la déformation longitudinale à champ électrique nul dans un PLZT [Lynch1995a]. ....	120
Figure IV.6 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale à champ électrique nul dans un matériau antiferroélectrique non polarisé [Cao1993]. ....	122
Figure IV.7 : Évolution du coefficient piézoélectrique en fonction du champ de polarisation et de la température pour un film mince de PVDF [Murayama1975].....	127
Figure IV.8 : Système de coordonnées cartésien global et système de coordonnées cylindrique local. ....	129
Figure IV.9 : Variation de la distribution de von Mises en fonction du paramètre de concentration $\kappa$ . ....	130
Figure IV.10 : Modèles de piézocéramiques non polarisée (a), polarisée (b) et à polarisation de saturation (c). ....	131
Figure IV.11 : Représentation des rapports de fonction de Bessel en fonction du paramètre de concentration $\kappa$ .....	136
Figure IV.12 : Évolution de la polarisation et du déplacement électrique sous contrainte électrique. ....	140
Figure IV.13 : Évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique, à champ électrique nul.....	145
Figure IV.14 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique, à champ électrique nul. ....	150
Figure V.1 : Évolution du déplacement électrique (a) et de la déformation longitudinale (b) en fonction du champ électrique en l'absence de contrainte mécanique dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].....	157

---

Figure V.2 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].....	159
Figure V.3 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. .....	160
Figure V.4 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation transversale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. .....	161
Figure V.5 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient diélectrique normalisé en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35. ....	163
Figure V.6 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ normalisé à contrainte mécanique nulle en fonction du champ électrique dans un PLZT 8/65/35.....	164
Figure V.7 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique (a) et de la déformation longitudinale (b) en l'absence de champ électrique dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. .....	167
Figure V.8 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].....	169
Figure V.9 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. .....	170
Figure V.10 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. .....	172
Figure V.11 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. ....	173
Figure V.11 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique $s_{3333}$ normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. ....	175
Figure V.12 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique $s_{1133}$ normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 .....	177
Figure V.13 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique en l'absence de champ électrique dans les PZT-A (a) et PZT-B (b) [Cao1993].....	180
Figure V.14 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale en l'absence de champ électrique dans les PZT-A (a) et PZT-B (b) [Cao1993].....	181
Figure V.21 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).....	184

---

Figure V.22 Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).....	185
Figure V.23 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).....	187
Figure V.24 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique $s_{3333}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).....	189
Figure V.25 : Évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans une céramique PZT P188 [Boucher2002].....	193
Figure V.26 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PZT P188. ....	195
Figure V.27 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ normalisée en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT P188.....	196
Figure VI.1 : Dispositif expérimental de mesure de déformations longitudinale et transversales sous contrainte uniaxiale. ....	204
Figure VI.2 : Cycle de chargement imposé au niobate de lithium. ....	206
Figure VI.3 : Déformation longitudinale du niobate de lithium (plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 0^\circ$ ) en fonction de la contrainte mécanique au cours des cycles de chargement. ....	207
Figure VI.4 : Déformation transversale du niobate de lithium (plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 0^\circ$ ) en fonction de la contrainte mécanique au cours des cycles de chargement. ....	208
Figure VI.6 : Schéma du dispositif de mesure des déformations et du déplacement électrique d'un matériau piézoélectrique sous contrainte mécanique.....	212
Figure VI.7 : Mode de charge et décharge du Pz21 (rouge) et du Pz26 (bleu). ....	214
Figure VI.8 : Mesure du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21. ....	215
Figure VI.9 : Évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.....	216
Figure VI.10 : Mesure de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21. ....	217
Figure VI.11 : Évolution du coefficient de souplesse $s_{3333}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.....	218
Figure VI.12 : Mesure de la déformation transversale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21. ....	219
Figure VI.13 : Évolution du coefficient de souplesse $s_{1133}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.....	220
Figure VI.14 : Évolution du coefficient de Poisson en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21. ....	221

Figure VI.15 : Mesure du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	223
Figure VI.16 : Évolution du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	224
Figure VI.17 : Mesure de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	225
Figure VI.18 : Évolution du coefficient de souplesse $s_{3333}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	226
Figure VI.19 : Mesure de la déformation transversale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	227
Figure VI.20 : Évolution du coefficient de souplesse $s_{1133}$ en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	228
Figure VI.21 : Évolution du coefficient de Poisson en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26. ....	229



# Introduction

Aujourd'hui, les matériaux piézoélectriques capables de convertir l'énergie électrique en énergie mécanique (et réciproquement) sont très largement utilisés pour des applications de transduction ultrasonore (imagerie médicale et contrôle non destructif) ainsi que pour des applications de capteurs et d'actionneurs. L'effet d'une sollicitation interne ou externe, qu'elle soit de nature électrique ou mécanique, peut conduire dans ces matériaux soit à une diminution, soit à une amélioration des performances du dispositif. Ainsi, certains transducteurs utilisés en acoustique sous-marine (transducteurs de Tonpiliz) sont soumis à l'effet d'une contrainte mécanique afin d'optimiser leurs performances. Inversement, les sondes ultrasonores utilisées dans le domaine biomédical exploitent l'effet d'un champ électrique statique pour améliorer la réponse des sondes. L'effet de telles sollicitations est encore mal connu, et bien souvent, les concepteurs de système mettent en avant une démarche empirique pour appréhender les difficultés liées au fonctionnement d'un matériau piézoélectrique. Des modèles permettant d'étudier l'influence d'une contrainte mécanique ou électrique statique sur la propagation d'ondes ultrasonores dans des matériaux piézoélectriques classiques ont déjà été développés, mais ont rarement été confrontés à des résultats expérimentaux. De plus, la plupart des matériaux piézoélectriques utilisés de nos jours sont de type PZT, aux lois de comportements hystérétiques. Différents modèles décrivent les comportements de ces matériaux sous contrainte mécanique ou électrique, mais souvent séparément et rarement en parallèle de mesures expérimentales. Le but de ce travail est de comprendre, modéliser et caractériser les propriétés électro-acoustiques de structures piézoélectriques soumises à une contrainte statique de type mécanique ou électrique afin d'utiliser ces propriétés pour optimiser les performances de ces matériaux.

Nous débutons ce manuscrit par la description, les origines et les intérêts des précontraintes ou contrainte résiduelles dans les matériaux classiques. En effet, ces phénomènes sont présents dans la majorité des pièces industrielles et la maîtrise de ces contraintes permet d'améliorer les capacités de tenue de ces matériaux. Les mécanismes de ruptures sont eux aussi détaillés. Par la suite, nous décrivons les différentes structures cristallines, et l'effet piézoélectrique des cristaux. Nous insistons ensuite sur l'ingénierie des domaines afin d'expliquer les changements de polarisations dans ces matériaux. Dans un deuxième temps, nous détaillons les modes de fabrication et protocoles de polarisation des principaux types de matériaux piézoélectriques que sont les monocristaux et les



piézocéramiques. Une attention particulière est portée sur la structure Pérovskite, car la plus répondue de par ses nombreux dérivés. Nous concluons ce chapitre, en faisant l'état de l'art des matériaux piézoélectriques sous contrainte électrique et mécanique.

Dans le second chapitre, nous développons la mise en place d'un modèle de propagation d'onde acoustique dans un milieu piézoélectrique (aux lois de comportement non hystérétique) contraint mécaniquement et électriquement. Nous définissons les lois de comportements linéaires d'un solide élastique, puis piézoélectrique, ainsi que le coefficient de couplage électromécanique. Travaillant dans des solides précontraints, nous définissons les différents états du matériaux ainsi que les tenseurs de contraintes inhérents aux différents systèmes de coordonnées (naturel, statique et dynamique). La présence de précontraintes se traduisant dans les relations non-linéaires entre contrainte et déformation, nous développons les équations dynamiques et constitutives d'un matériau piézoélectrique au troisième ordre. Par la suite, nous exprimons les équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contraintes dans les deux systèmes de coordonnées. Nous approximons alors les différences entre les vitesses exprimées dans chacun des systèmes et faisons de même avec le coefficient de couplage en mode plaque.

Dans le troisième chapitre, nous illustrons le modèle développé dans la précédente partie sur le niobate de lithium. L'étude sous précontrainte mécanique débute par le calcul des déformations initiales et la quantification de leurs non-linéarités. De plus, nous évaluons les différents tenseurs de contraintes initiaux et décrivons les différences entre chacun d'eux dans différents plans de coupe en fonction de l'angle d'élévation et pour des valeurs d'angle azimutal de  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Par la suite, nous caractérisons les évolutions des vitesses des 3 modes de propagation d'une onde plane et du coefficient de couplage dans ces même plans de coupe, dans les deux systèmes de coordonnées, sous contrainte mécanique (positive et négative) jusqu'à la limite élastique déterminée par la suite. Dans un deuxième temps, nous effectuons la même étude sous précontrainte électrique, jusqu'au champ électrique coercitif (négatif et positif).

Dans une deuxième partie de thèse, nous nous intéressons aux matériaux piézoélectriques de type piézocéramique qui sont des plus utilisés de nos jours. Ainsi, le chapitre IV expose la modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques, dans le but d'intégrer ces lois de comportements au précédent modèle. Les différents cycles d'hystérésis sont explicités en faisant le lien avec les évolutions de domaines décrites précédemment. Dans un deuxième temps, nous dissociions les comportements réversibles et irréversibles de ces matériaux et accommodons les équations constitutives au cas de piézocéramiques. Par la suite, nous utilisons une distribution de von Mises pour décrire les évolutions de polarisations et déformations rémanentes issues des mouvements de domaines microscopiques. La notion de phénomène ferroélastique pure est introduite et détaillée. Nous décrivons ensuite les différentes lois d'évolution des paramètres de

concentrations de domaines choisis et la méthode de calcul des polarisations et déformations rémanentes sous contrainte électrique et mécanique.

Le chapitre V est dédié à l'exploitation de ce modèle sur 4 matériaux différents. Pour commencer, nous faisons l'étude complète d'un PLZT 8/65/35 sous contraintes mécanique et électrique en traitant les déformations longitudinale et transversales. Dans un deuxième temps, nous étudions deux PZT aux propriétés très proches, mais tous deux plus durs que le PLZT, sous contrainte mécanique. Dans un troisième temps, nous faisons une étude sous contrainte mécanique d'un matériau possédant une dureté supérieure au PLZT, mais inférieure aux deux PZT, le PZT P188. Nous évaluons alors comment le modèle s'adapte à de tels matériaux, ainsi que les différences de comportements de chacun. Pour chaque matériau, nous faisons une étude de l'évolution de ses constantes en expliquant comment elles évoluent selon la nature du matériau et le type de contrainte. L'étude de ces matériaux illustre les avantages et les limites de notre modèle tout en explorant les différences de comportement des piézocéramiques sous contraintes.

Le dernier chapitre est dédié à la mise en place d'un dispositif expérimental adapté à l'étude de la non-linéarité électrique et mécanique de matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique. Nous commençons par mesurer l'évolution des déformations longitudinale et transversales dans le niobate de lithium jusqu'à la limite de rupture mécanique, pour vérifier la validité de notre dispositif et évaluer la limite élastique de ce matériau. Dans un deuxième temps, nous mesurons l'évolution du déplacement électrique et des déformations longitudinale et transversales des Pz21 et 26 sous contrainte mécanique. Ces résultats sont mis en parallèle avec ceux du précédent chapitre et permettent de discuter les hypothèses de notre modèle.



## Chapitre I : Matériaux piézoélectriques sous contraintes

Dans le but d'améliorer la tenue en service d'une pièce métallique soumise à des sollicitations mécaniques globales, plusieurs démarches sont possibles. Pourtant, la seule ne nécessitant pas de nouvelle conception de pièce ou un changement de matériau, est celle qui consiste à améliorer les propriétés locales du matériau par mise en précontrainte de compression des zones les plus sollicitées c'est-à-dire, le plus souvent, les couches superficielles de la pièce. En outre, l'introduction de contraintes résiduelles de compression superficielles est souvent associée à une augmentation de la dureté et de la limite d'endurance du matériau, ce qui justifie d'autant plus une telle approche et, in fine, représente la méthode la moins coûteuse.

Dans un champ d'application parallèle, les matériaux piézoélectriques, qui réalisent une conversion électromécanique directe, sont utilisés depuis de nombreuses années dans des applications de puissance telles que la génération ultrasonore ou l'actionnement. Le champ d'utilisation de ces matériaux ne cesse de croître en électronique de puissance, notamment avec le transformateur piézoélectrique et les microsources d'énergie. Dans le but d'améliorer ces dispositifs, le procédé de mise sous contrainte mécanique, mais aussi ici électrique, est largement applicable.

## I Précontraintes et contraintes résiduelles

### I.1 Définitions et catégories de contraintes résiduelles

#### I.1.1 Définitions

Les contraintes résiduelles sont des contraintes multiaxiales statiques autoéquilibrées existant dans un système isolé de température uniforme et en l'absence de tout chargement extérieur. Dans une section, la répartition des contraintes résiduelles résulte de l'équilibre mécanique entre la zone occupée par la source des contraintes résiduelles caractérisée par une fonction de distribution bien définie et le reste de la section déformée élastiquement. Dans le cas des traitements de précontrainte, les sources de contraintes résiduelles sont toujours localisées dans les couches superficielles du matériau. La figure I.1 représente l'état d'un matériau ayant subi une déformation plastique en surface et montre en parallèle le champ de contraintes résiduelles  $\sigma_R$  en fonction de la profondeur. On affecte les contraintes de compression d'un signe - et les contraintes de traction d'un signe +.

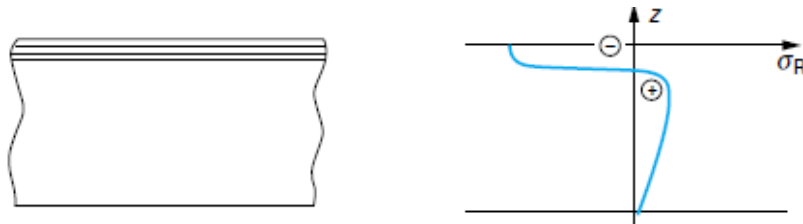


Figure I.1 : Source de contrainte résiduelle [Duquennoy1997].

Ainsi, les divers grains subissent des déformations permanentes plus ou moins importantes. En profondeur, les grains sont faiblement déformés et se trouvent dans un état de tension. A l'inverse, dans la couche superficielle, les grains possèdent une déformation permanente et sont dans un état de compression.

#### I.1.2 Différentes catégories de contrainte résiduelles

Du fait du caractère polycristallin et la plupart du temps polyphasé des matériaux métalliques, les déformations à l'origine des contraintes résiduelles peuvent intéresser des domaines de taille macroscopique, microscopique ou submicroscopique. Selon l'échelle considérée, il est classique de distinguer trois ordres de contraintes. Le champ des contraintes résiduelles apparaît comme le résultat de la superposition de ces 3 ordres de contraintes résiduelles.

Les contraintes résiduelles du premier ordre ou macroscopiques sont homogènes (constantes en intensité et en direction) dans des domaines relativement importants s'étendant sur plusieurs grains dans le cas des matériaux monophasés. Les forces résultant des contraintes du premier ordre sont en équilibre dans chaque section de la pièce et les moments liés à ces forces nuls par rapport à tout axe. Toute modification dans l'équilibre des forces et des moments associés aux contraintes résiduelles du premier ordre, due par exemple à un enlèvement de matière dissymétrique, se traduit par des variations dimensionnelles macroscopiques à l'échelle de la pièce.

Les contraintes résiduelles du deuxième ordre ou microscopiques homogènes sont homogènes dans des domaines correspondant à un grain ou une phase (échelle de quelques dizaines de micromètres). Elles proviennent de la différence d'orientation cristalline entre grains voisins. Les forces résultant des contraintes du second ordre et les moments associés s'équilibrent sur un nombre suffisant de grains. Une modification de l'équilibre des forces et des moments associés aux contraintes résiduelles du second ordre peut se traduire par des variations dimensionnelles macroscopiques à l'échelle de la pièce. L'origine de ces tensions provient généralement des différences de propriétés thermiques ou élastoplastiques entre différentes parties du matériau. Les cas où existent des contraintes du deuxième ordre à l'état pur sont peu nombreux, la figure I.2 montre un exemple pour un matériau biphasé (A ou B).

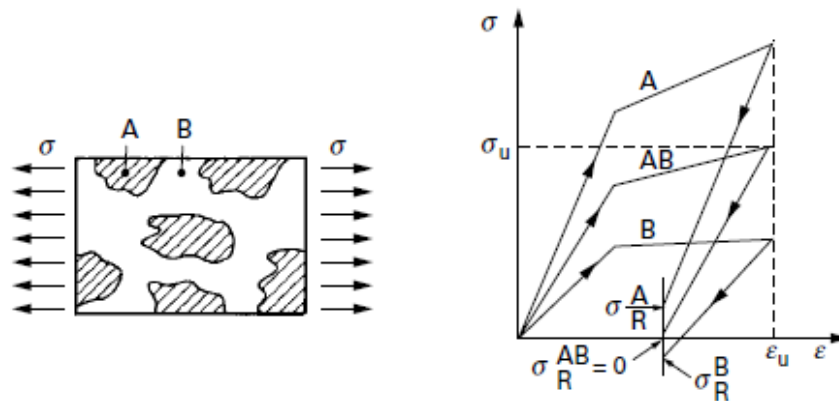


Figure I.2 : Contraintes résiduelles d'ordre 2 dans un matériau biphasé après déformation plastique [Duquennoy1997].

Si le matériau est soumis à des déformations plastiques uniformes  $\epsilon$ , il existera après relâchement de la contrainte appliquée, des contraintes résiduelles de signes opposées dans chacune des phases A et B, respectivement  $\sigma_R^A$  et  $\sigma_R^B$ , alors que la contrainte résiduelle moyenne  $\sigma_R^{AB}$  est nulle.

Les contraintes résiduelles du troisième ordre ou microscopiques hétérogènes sont hétérogènes même dans des zones s'étendant sur quelques distances interatomiques. Elles sont associées en majorité aux déformations existant au voisinage des défauts cristallins. Les forces résultant des contraintes du troisième ordre et les moments associés s'équilibrent dans des zones

représentant des portions très réduites d'un grain. Une modification de l'équilibre des forces et des moments associés aux contraintes résiduelles du troisième ordre ne se traduit par aucune variation dimensionnelle macroscopique. Comme le montre la figure I.3, ces contraintes sont introduites par toutes les déformations existantes au niveau du réseau cristallin.

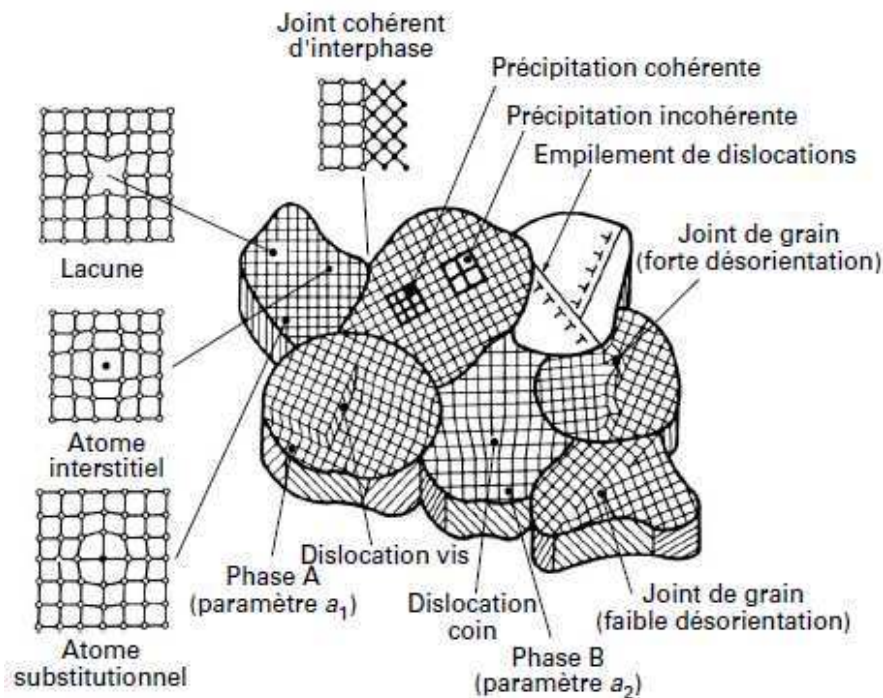


Figure I.3 : Représentation schématique des déformations à l'origine des contraintes résiduelles microscopiques hétérogènes [Duquennoy1997].

## I.2 Origines des contraintes résiduelles

Tous les procédés de fabrication de mise en forme comme le forgeage, le soudage, l'usinage ou les traitements thermiques génèrent dans la pièce des champs de contraintes résiduelles plus ou moins complexes et plus ou moins maîtrisables. Nous traitons ici les deux procédés à l'origine de la plupart des contraintes résiduelles que sont la déformation plastique et les traitements thermiques.

### I.2.1 La déformation plastique

Lorsqu'un solide cristallin est soumis à une contrainte mécanique, il se déforme de manière réversible tant que la contrainte est inférieure à une certaine valeur critique dite limite élastique. Au-delà de ce seuil de microélasticité  $\sigma_m$ , la déformation cesse d'être réversible. La déformation correspondante  $\varepsilon_m$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Ce seuil ne correspond pas toujours à une rupture marquée

de la pente de la courbe de traction, c'est pourquoi il est souvent difficile à déceler. Ce phénomène se produit pour une déformation plus élevée  $\varepsilon_M$ , pouvant atteindre  $10^{-2}$ , et une valeur de la contrainte  $\sigma_M$  pouvant être 10 à 20 fois supérieure à  $\sigma_m$ . La contrainte  $\sigma_M$  est appelée la limite macroélastique. Le domaine s'étendant entre  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_M$  est le domaine de macroélasticité. Dans certains cas (comme pour les monocristaux cubiques à face centrée purs) ce domaine est pratiquement négligeable. Dans la pratique,  $\sigma_M$  correspond à ce que l'on appelle classiquement la limite d'élasticité. La déformation plastique est thermiquement activée. A quelques rares exceptions, la limite d'élasticité décroît avec la température.

Toute hétérogénéité de déformation introduite à toute échelle de la structure entraîne l'existence de contraintes résiduelles. Selon l'importance de la déformation imposée par le traitement, ce retour, après suppression du chargement est soit élastique (adaptation) soit élastique puis plastique (accommodation). Ces deux cas sont illustrés respectivement par les figures I.3.a et I.3.b.

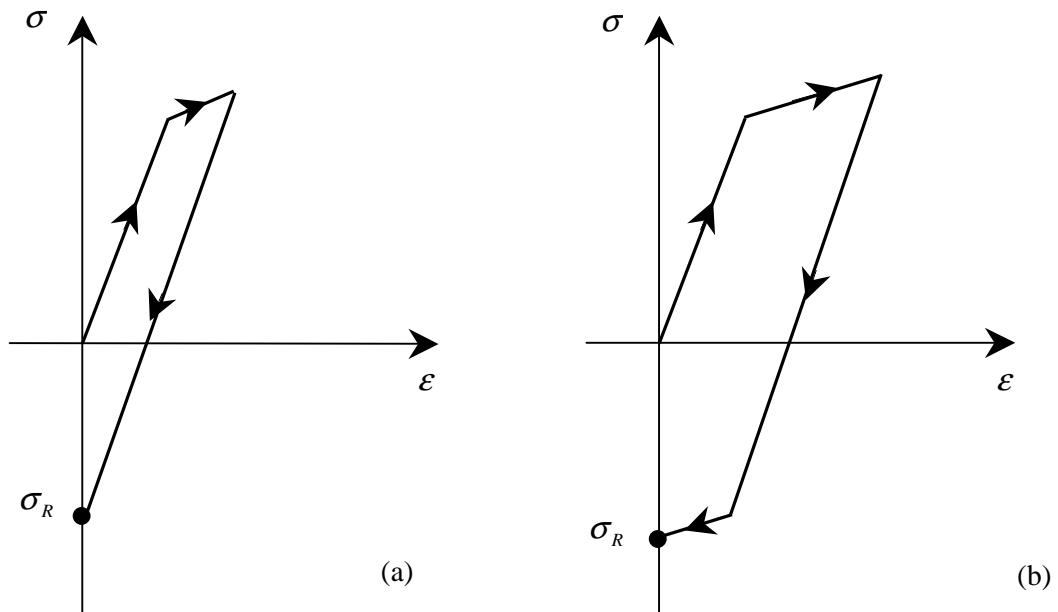


Figure I.3 : Trajet de déformation ( $\varepsilon$ ) élastoplastique à champ de contrainte ( $\sigma$ ) hétérogène dans le cas d'une adaptation (a) et d'une accommodation (b).

La valeur de la contrainte résiduelle  $\sigma_R$  varie entre zéro et la limite d'élasticité  $\sigma_M$  en zone adaptée. Elle se stabilise au seuil d'écoulement plastique en zone accommodée.

Si la déformation plastique est homogène dans toute la section de la pièce, il n'existe plus d'incompatibilité au sens mécanique du terme et il subsiste une déformation après retour élastique sans qu'il y ait génération de macrocontraintes résiduelles (figure I.4).



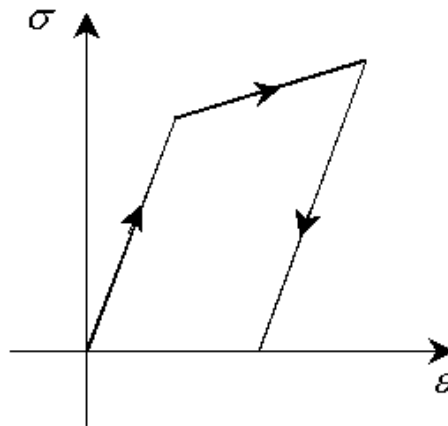


Figure I.4 : Trajet de déformation élastoplastique à champ de contrainte homogène.

Un traitement mécanique superficiel est donc d'autant plus efficace qu'il déforme plastiquement et localement le matériau.

Notons que les contraintes résiduelles de compression introduites par les différents traitements de mise en précontrainte n'ont d'intérêt que si elles restent stables en service. Des relaxations des contraintes résiduelles sont souvent constatées et peuvent mettre les pièces traitées en péril et nuire à la sécurité.

### I.2.2 Les traitements thermiques

Il existe différentes techniques de durcissement et mise en précontrainte des couches superficielles d'une pièce par utilisation d'un cycle thermique de chauffage et de refroidissement. Chacune de ces techniques de trempe génère des contraintes résiduelles dans la pièce. La trempe est une opération thermique de refroidissement dans des milieux permettant d'atteindre des vitesses de refroidissement plus élevées que celles permises à l'air libre. On emploie pour cela de l'eau, des huiles spéciales, des solutions polymère, des milieux fluidiques, des écoulements gazeux sous pressions en contact avec la pièce. Cette opération a pour but principal d'optimiser les propriétés mécaniques du matériau.

Le champ de (macro)contraintes résiduelles existant dans une pièce après trempe a schématiquement deux origines :

- Les contraintes résiduelles provenant de l'existence d'une répartition non uniforme de la température dans la pièce en cours de refroidissement. Ces contraintes sont liées au champ de gradient thermique. Nous les appellerons les contraintes thermiques.

- Les contraintes résiduelles provenant de la non simultanée en tous les points de la pièce des variations de volume et/ou des phénomènes de pseudoélasticité induites par les transformations de phase. Nous les appellerons simplement contraintes de transformation.

Ainsi, les divers phénomènes métallurgiques et thermiques intervenant au cours du refroidissement conditionnent l'état mécanique (au travers du champ de contraintes résiduelles) de la pièce avant trempe, mais il faut noter qu'il modifie aussi son état géométrique, au travers d'une torsion macroscopique de la pièce.

### I.3 Intérêts et effets des précontraintes et contraintes résiduelles

#### I.3.1 Intérêts des traitements superficiels

Dans le domaine des matériaux, la technologie des traitements superficiels constitue actuellement un des développements prioritaires. Les enjeux techniques concernent :

- l'amélioration de la résistance à la fatigue sous certains types de sollicitations,
- l'amélioration de la résistance à la corrosion,
- l'amélioration de la résistance à l'usure.

À l'échelle microscopique, les défauts de surface sont à découvert et soumis à l'attaque directe du milieu environnant. Le mouvement des dislocations est pratiquement libre et les domaines cristallins surfaciques se déforment plus aisément que ceux situés en pleine matière. À l'échelle macroscopique, les zones de concentration de contrainte (raccordements, entailles, stries d'usage...) sont le plus souvent associées aux surfaces libres des pièces. En outre, la plupart des modes de sollicitation statique ou cyclique comme la flexion ou la torsion génèrent des maxima de contraintes situés en surface.

Les zones superficielles d'un composant sont les plus exposées aux agressions extérieures, les propriétés de ces couches superficielles résultent de l'intervention simultanée et à des degrés divers selon les cas, des caractéristiques géométriques, des caractéristiques physico-chimiques, des caractéristiques mécaniques propres (limite d'élasticité, résistance à la rupture, dureté...) et de l'état de contraintes résiduelles. Il semble donc logique de rechercher une meilleure tenue en service globale de la pièce en essayant d'améliorer les caractéristiques de ces régions critiques. Dans ce but, la modification d'une couche superficielle de la pièce originale sur une épaisseur suffisante par traitement superficiel mécanique est souvent envisagée.

### I.3.2 Influence sur la déformation

Les contraintes résiduelles, présentes dans une pièce, forment un système en équilibre. Lorsque cet équilibre est détruit, la pièce se déforme de manière à retrouver un nouvel état d'équilibre du système des forces internes.

Comme exposé précédemment, toute action mécanique conduisant à la déformation plastique d'un matériau modifie la densité et l'arrangement des dislocations par rapport à l'état initial. Le résultat est différent selon que la densité initiale des défauts est faible (matériaux de dureté initiale faible) ou que la densité initiale des défauts est élevée (matériaux de dureté initiale élevée). Dans le premier cas, la déformation plastique conduit à un durcissement et dans le second cas à un adoucissement. La profondeur affectée par ces phénomènes est équivalente à celle affectée par les contraintes résiduelles de compression dans la couche.

La déformation après enlèvement de matière implique, soit leur prise en compte pour le respect des côtes finales de la pièce, soit leur suppression par détensionnement thermique ou mécanique préalable. Un procédé de détensionnement consiste à allonger ou tasser des pièces planes par introduction de déformations (généralement limitées et assez bien contrôlées) de manière à résorber une bonne partie des contraintes résiduelles.

### I.3.3 Influence sur la résistance des matériaux

L'effet des contraintes résiduelles influence différemment la résistance statique (limite d'élasticité) et la résistance dynamique (résistance à la fatigue).

Dans le cas d'une déformation uniaxiale, la limite d'élasticité décroît quelle que soit la distribution. Dans le cas d'une sollicitation multiaxiale, les contraintes résiduelles peuvent être très favorables. L'augmentation de la résistance à la fatigue due à la compression des contraintes résiduelles est un domaine privilégié de l'application des traitements de précontrainte. De nombreux traitements thermiques ou mécaniques introduisent ces contraintes de compression. Notons que les contraintes résiduelles macroscopiques et celles existant à l'échelle microscopique ont des influences différentes suivant l'état microstructural du matériau.

### I.3.4 Amélioration de la résistance à la corrosion

Les traitements superficiels, le plus souvent mécaniques, sont aussi communément utilisés en industrie pour inhiber les phénomènes de corrosion sous contrainte. Par exemple, il est possible de

montrer la corrélation qui existe entre la longueur des fissures de corrosion sous contrainte et l'épaisseur de la zone en traction et mettre en évidence l'absence de fissure lorsque la couche superficielle du matériau est mise en compression par polissage mécanique.

## I.4 Mécanismes de rupture

Les métaux, constitués de monocristaux, se rompent essentiellement de deux façons :

- par écartement des plans cristallographiques, il s'agit de rupture par clivage. Ce mode de rupture est de nature fragile (faible allongement plastique avant la rupture),

- par glissements le long de ces plans séparant la pièce en deux lorsque leurs amplitudes deviennent excessives, il s'agit de rupture par cisaillement. Ce mode de rupture est de nature ductile (grand allongement plastique avant la rupture).

Lorsque les joints de grains, qui sont à l'intersection de deux cristaux, sont moins résistants que ces derniers, la rupture suit ces joints. On parle alors de rupture intergranulaire. Notons qu'en l'absence de phénomène tels que le flambage et le matage, la limite à la rupture est plus importante en mode de compression qu'en mode de traction.

### I.4.1 Rupture par clivage

Le clivage est un mode de rupture qui se propage le long de plans cristallographiques, les plans de clivage, de bas indices de Miller. Macroscopiquement, la cassure présente un aspect brillant, à facette correspondant à chaque grain du matériau. A l'échelle microscopique, l'aspect est très lisse, les plans cristallographiques ne présentant que peu d'accidents ; ce sont en général des marches correspondant au rattrapage, par déchirure, de légères désorientations du plan de clivage par rapport à l'orientation cristallographique idéale.

La contrainte qu'il faut exercer localement pour amorcer un clivage est très élevée (de l'ordre du dixième du module d'Young), cette contrainte est appelée contrainte de clivage. Pour que le processus se déclenche, il est nécessaire que des déformations plastiques hétérogènes créent localement de très importantes concentrations de contraintes. Cette contrainte de clivage est peu fonction de la température, diminue quand la vitesse de sollicitation augmente, dépend essentiellement de la taille  $d$  du grain et varie comme  $d^{-1/2}$ .

#### I.4.2 Rupture à faciès ductile

Ce mode de rupture résulte de la naissance de cavités, puis de leur croissance et de leur coalescence (tendance à se réunir) sous l'effet de déformations plastiques. A l'échelle macroscopique, la cassure a un effet fibreux. Microscopiquement, on observe des cupules correspondant à chaque cavité.

Le mécanisme de rupture ductile est essentiellement un phénomène de déformation plastique qui survient quand la déformation a atteint une déformation critique. Cette limite décroît quand la température augmente ou quand la vitesse diminue en suivant les mêmes variations que la limite d'élasticité. Cette allongement de rupture est fortement fonction de la contrainte moyenne (contrainte hydrostatique) qui tend à refermer les cavités

#### I.4.3 Rupture intergranulaire

Elle survient si les joints des grains sont fragilisés par accumulation d'impuretés, de défauts ou de dislocations. Elle revêt deux aspects qui se rattachent aux précédents. La rupture suit les joints de grain avec des déformations plastiques locales très réduites, c'est l'analogie du clivage. Elle peut aussi présenter des cupules formées sur les inclusions rassemblées dans les joints. Les critères de rupture sont donc liés à la contrainte critique ou allongement critique selon les cas.

## II La piézoélectricité

L'effet piézoélectrique a beau avoir été découvert il y a plus d'un siècle sur le quartz par les frères Curie, il intéresse toujours autant la communauté scientifique. En 1917, Langevin se servait de cristaux de quartz pour engendrer des ondes de compressions, et dans les années 40, la découverte de sels piézoélectriques comme le  $\text{BaTiO}_3$  permet d'augmenter le couplage électromécanique (application pour les sonars). Dans les années 1950-60, l'apparition de nouvelles céramiques donnent un deuxième souffle à la piézoélectricité, grâce à l'utilisation des oxydes de plomb (PZT). Les principaux atouts de ces matériaux résident dans d'excellentes propriétés piézoélectriques ainsi qu'un fort coefficient de couplage électromécanique, ce qui entraîne une grande efficacité d'actionnement et une grande linéarité des propriétés. D'abord utilisés pour effectuer des microdéplacements ou des micropositionnements sous forme de céramiques massives, ces matériaux sont aujourd'hui intégrés sous forme de films de plus en plus minces. Récemment,

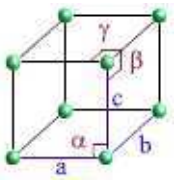
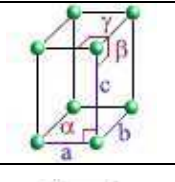
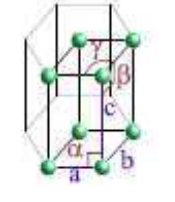
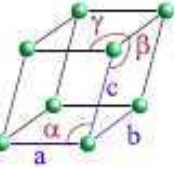
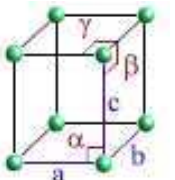
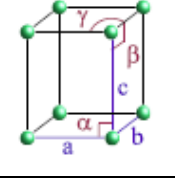
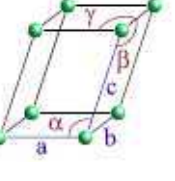
d'autres matériaux dérivés du PZT (PZNT, PMN-PT, PLZT...) présentent des propriétés supérieures au PZT, mais ils ne sont pas encore produits à grande échelle.

## II.1 Structure cristalline

Un solide cristallin est constitué par la répétition d'un motif atomique ou moléculaire dans les trois dimensions de l'espace. La périodicité de sa structure est représentée par un ensemble de points régulièrement disposés. Cet ensemble est appelé réseau cristallin et les points le constituant, dont le motif géométrique forme la maille élémentaire, sont appelés nœuds du réseau.

Le tableau 1.1 représente les sept réseaux primitifs ayant pour maille l'un des sept parallélépipèdes. Dans chacun de ces systèmes, la possibilité d'ajouter des nœuds dans la maille permet de générer des réseaux différents. L'environnement de chaque nœud devant être le même, les seuls emplacements possibles sont le centre de la maille (réseau centré) ou des faces (réseaux avec un nœud sur deux faces opposées ou réseau avec un nœud sur chaque face). Un réseau de Bravais est un réseau de nœuds obtenu à partir d'un nœud unique translaté suivant des vecteurs de base. Il existe 14 réseaux de Bravais différents en trois dimensions (tableau I.1), possédant des groupes d'espaces et des groupes ponctuels de symétrie différents. Tous les matériaux de type monocristaux ont une symétrie correspondant à l'un de ces réseaux.

Tableau I.1 : Les 14 Réseaux de Bravais.

Réseaux		Paramètres	Angles	Représentation
Cubique	Primitif	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$	
	Centré			
	Faces Centrées			
Tétraogonal (Quadratique)	Primitif	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$	
	Centré			
Hexagonal	Primitif	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \pi/2$ $\gamma = 2\pi/3$	
Rhombohédrique (Trigonal)	Primitif	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq \pi/2$ $< 2\pi/3$	
Orthorhombique	Primitif	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$	
	Centré			
	Faces Centrées			
	Bases Centrées			
Monoclinique	Primitif	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \pi/2$	
	Bases Centrées		$\gamma \neq \pi/2$	
Triclinique	Primitif	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \pi/2$	

## II.2 L'effet piézoélectrique

### II.2.1 Généralités

L'effet piézoélectrique direct traduit l'aptitude de quelques matériaux à se polariser sous l'application d'un effort mécanique, la charge électrique apparaissant à leur surface est alors proportionnelle à la contrainte exercée. Ce phénomène est réversible, c'est-à-dire qu'il est possible d'obtenir pour ces mêmes matériaux des déformations lorsqu'on les soumet à un champ électrique : c'est l'effet inverse.

Pour qu'un corps soit piézoélectrique, il faut qu'il soit non centro-symétrique, c'est-à-dire que les barycentres des charges positives et négatives doivent être différents dans la maille. Ainsi, seuls les cristaux ne présentant pas de centre de symétrie possèdent des caractéristiques piézoélectriques. Ceci est illustré dans les figures I.5 et I.6.

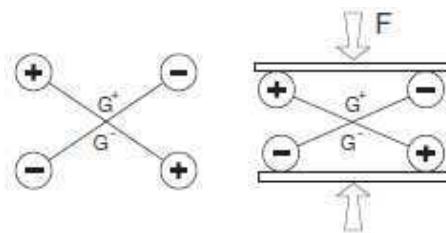


Figure I.5 : Cristal possédant un centre de symétrie.

Dans ce cas (figure I.5), l'application d'une contrainte mécanique, si elle engendre une déformation du matériau, n'induit pas de déplacement des barycentres positif et négatif ( $G^+$  et  $G^-$ ), si bien qu'aucune polarisation n'apparaît.

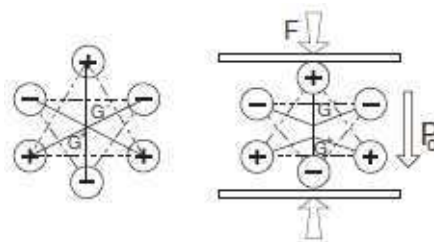


Figure I.6 : Cristal ne possédant pas de centre de symétrie. Le barycentre des charges se déplace, créant une polarisation  $P_0$ .

Pour ce cristal (figure I.6), la déformation entraîne un déplacement des barycentres, et une polarisation électrique  $P_0$  apparaît.



## II.2.2 Relations entre propriétés d'un matériau piézoélectrique

Les propriétés thermiques, mécaniques et électriques d'un cristal sont gouvernées par un certain nombre de grandeurs physiques telles que la température  $\theta$ , l'entropie  $\zeta$ , la contrainte  $\sigma$ , la déformation  $\mathbf{S}$ , ainsi que par le champ électrique  $\mathbf{E}$  et l'induction électrique  $\mathbf{D}$ . On peut établir entre toutes ces grandeurs trois ensembles d'effets appelés effets électromécaniques, effets thermoélectriques et effets thermoélastiques (figure I.7).

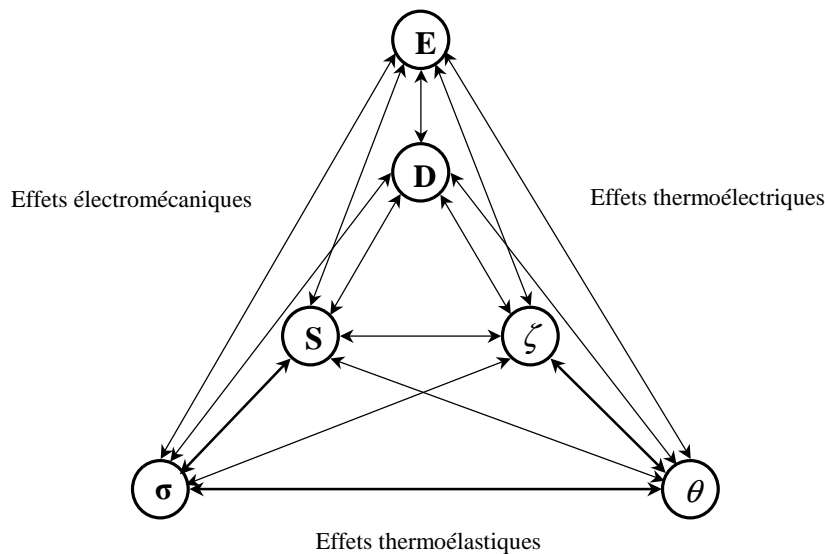


Figure I.7 : Interactions entre les grandeurs physiques d'un matériau piézoélectrique [Delaunnay2006].

Les interactions entre les différentes grandeurs correspondent à un ensemble de constantes liées entre elles. Ces relations seront détaillées au chapitre II.

## II.2.3 Les matériaux piézoélectriques

Parmi les matériaux piézoélectriques, il existe deux sous classes de matériaux, que sont les matériaux pyroélectriques et ferroélectriques.

La pyroélectricité, du grec pyro qui signifie feu, est le phénomène de polarisation dû à l'absorption de l'énergie thermique dans certains cristaux. La polarisation est proportionnelle à la variation de température et son signe dépend du sens de cet échange (échauffement ou refroidissement). Ainsi, les matériaux pour lesquels la polarisation est spontanée sont appelés pyroélectriques. La direction de polarisation privilégiée est celle de l'axe polaire du cristal.

La ferroélectricité s'observe dans le cas de certains diélectriques (isolants électriques) non centrosymétriques qui ont la propriété de se polariser sous l'influence d'un champ électrique. Dans ces

diélectriques, il existe un fort champ électrique local. Lorsque l'axe polaire (support d'un moment permanent) est mobile dans le réseau cristallin sous l'influence d'agents extérieurs (autres que la température), comme un champ électrique ou l'application d'une contrainte mécanique, les matériaux sont appelés ferroélectriques.

La classification de ces différents matériaux est résumée sur la figure I.8.

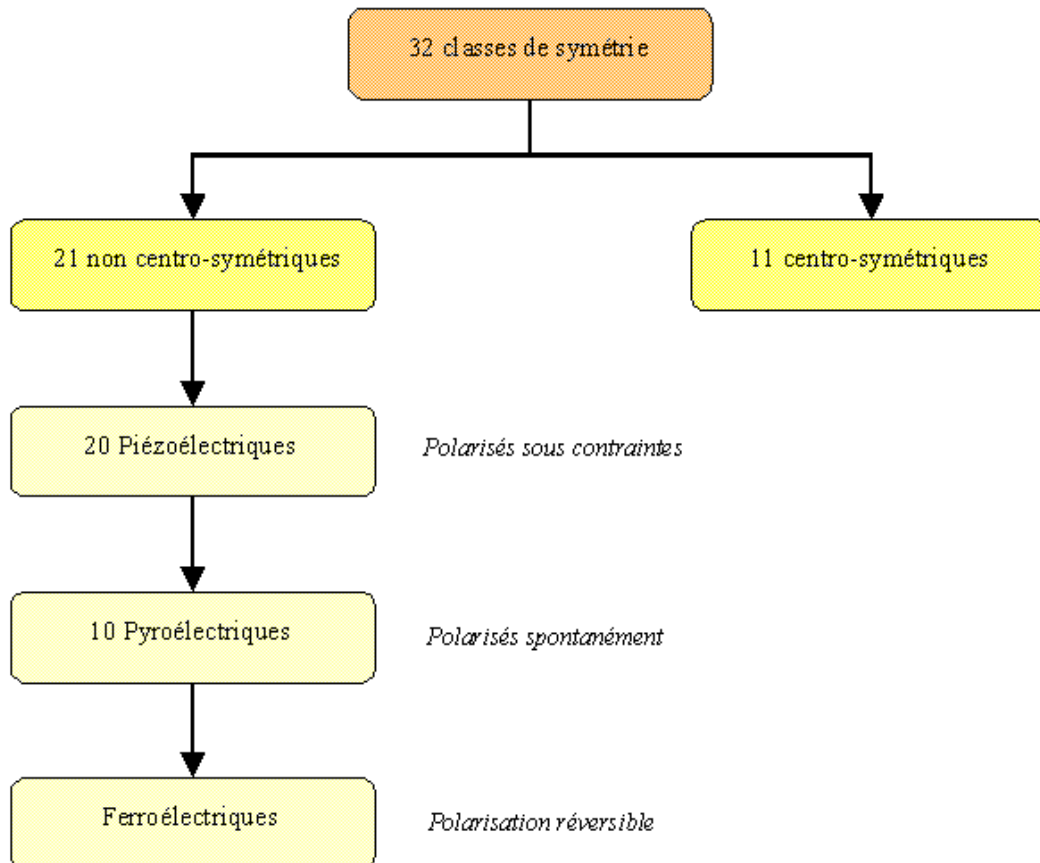


Figure I.8 : Relations entre les classes de symétrie, les sous-groupes piézoélectriques, pyroélectriques, ferroélectriques et les structures cristallines.

Ainsi, les matériaux pyroélectriques sont aussi piézoélectriques, mais la réciproque n'est pas vraie. Remarquons aussi que les effets piézoélectriques et pyroélectriques ne peuvent être observés que dans les diélectriques. Dans tout ce qui va suivre, nous négligerons systématiquement l'influence de la pyroélectricité et de la température dans les expressions générales des matériaux piézoélectriques. Les matériaux ferroélectriques existent sous 4 formes cristallographiques, la plus représentée étant la structure Pérovskite.

## II.2.4 Polarisation spontanée et température de Curie

Les matériaux ferroélectriques sont caractérisés par leur faculté de posséder un moment dipolaire permanent en l'absence de champ électrique extérieur. Par définition, le moment dipolaire par unité de volume est la polarisation spontanée du matériau, notée  $P^{sp}$ . Cette polarisation disparaît au-dessus d'une certaine température, appelée température de Curie notée  $T_c$ , il est alors dans un état paraélectrique.

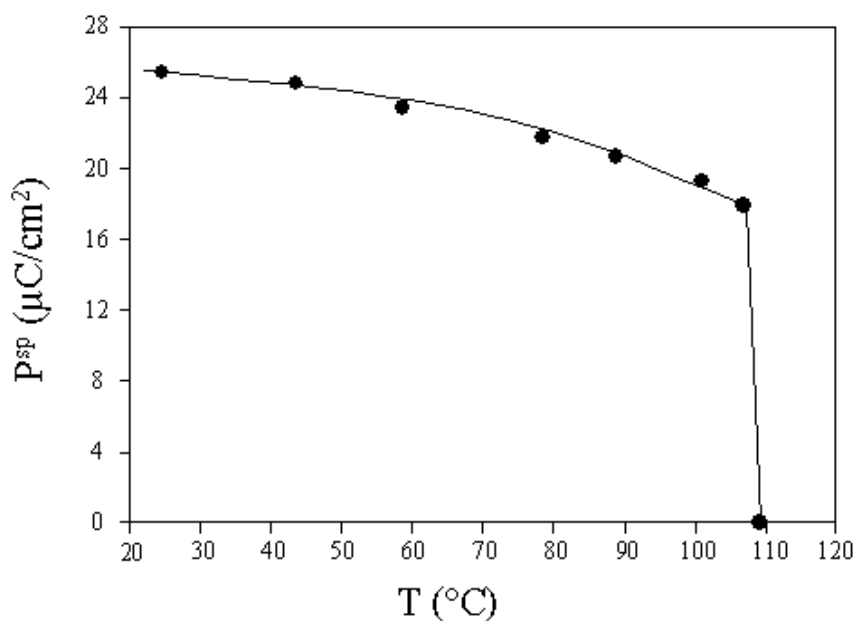


Figure I.9 : Évolution de la polarisation spontanée en fonction de la température dans un cristal ferroélectrique de  $BaTiO_3$  [Merz1953].

Dans ce cas, la température de Curie de ce matériau est de  $100^{\circ}C$ . Ainsi, au-delà de cette température, le matériau est dans un état paraélectrique, sa polarisation spontanée est nulle. En dessous de cette température, le matériau est dans un état ferroélectrique. Sa polarisation spontanée est non nulle et elle décroît en fonction de la température.

## II.3 Changement de polarisation et ingénierie des domaines

### II.3.1 Mouvement des murs de domaines

La phase ferroélectrique d'un cristal montre une structure en domaines dans laquelle les dipôles peuvent être orientés par application d'un champ électrique dans une direction donnée. Les domaines sont définis comme une région où la direction de polarisation est uniforme. Ils sont séparés entre eux par des interfaces dénommées murs de domaines. Ces murs de domaine peuvent

être à  $180^\circ$  ou  $90^\circ$ . Dans le premier cas, les polarisations sont parallèles, mais de directions opposées (figure I.10.a), dans le deuxième cas, elles sont perpendiculaires (figure I.10.b).

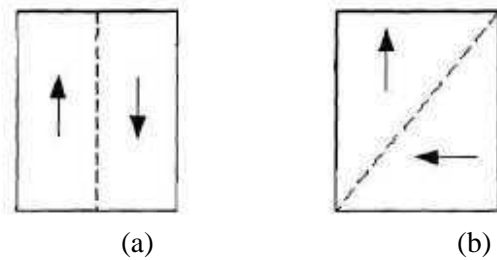


Figure I.10 : Mur de domaines à  $180^\circ$  (a), mur de domaines à  $90^\circ$  (b).

Le changement de polarisation n'est pas homogène. Il est dû à la possibilité de chaque domaine à s'orienter ou non dans une direction. Le changement de polarisation apparaît quand les murs de domaines du cristal changent de manière globale. Une hystérésis macroscopique mécanique provoquera un changement de murs de domaines irréversible [Berlincourt1959].

### II.3.2 Changement de polarisation macroscopique

Par définition, la polarisation du matériau est la polarisation macroscopique, qui se calcule comme la somme vectorielle des polarisations microscopiques. La polarisation (orientée) de chaque domaine est définie comme la polarisation spontanée  $P^{sp}$  orientée. La polarisation du matériau est le résultat de la sommation vectorielle de toutes ces polarisations.

Dans le cas des piézocéramiques non polarisées, la phase paraélectrique du matériau se caractérise par une distribution aléatoire des domaines. Les polarisations de domaines de directions opposées s'annulent entre elles et aboutissent à une polarisation macroscopique nulle (figure I.11.a). Au cours d'un processus de polarisation électrique, la majorité des polarisations de domaines vont changer et s'orienter dans la direction du champ électrique de polarisation (figure I.11.b). Il en résulte une polarisation macroscopique qui persistera en l'absence de champ électrique, que l'on appelle la polarisation rémanente ( $P^{rem}$ ). Quand le champ électrique est assez grand et appliqué assez longtemps, une majorité de domaines s'orientent quasi-parfaitement dans la direction de polarisation (figure I.11.c), ce qui engendre une polarisation macroscopique maximale, dite de saturation ( $P^{sat}$ ).

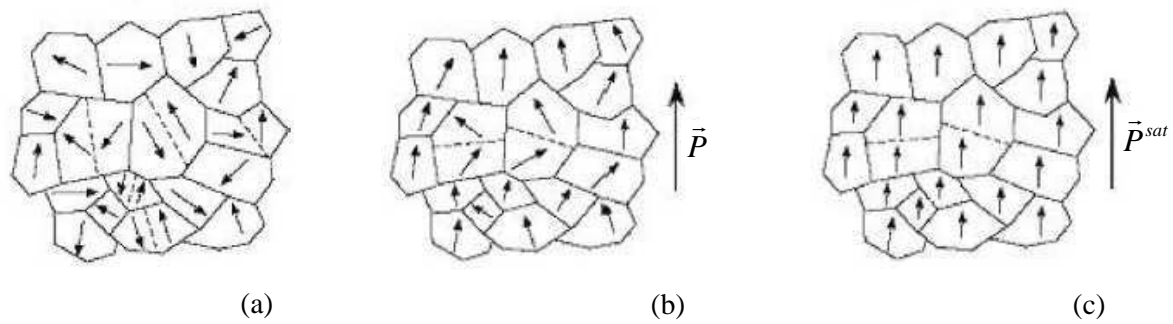


Figure I.11 : Modèles de piézocéramiques non polarisée (a), polarisée (b) et à polarisation de saturation (c).

Les transitions de phases d'états ferroélectriques à paraélectriques peuvent être comprises comme une réduction de la polarisation spontanée macroscopique jusqu'à une valeur nulle.

En théorie, la polarisation macroscopique maximale (correspondant au cas où 100% des domaines seraient orientés dans la direction de polarisation) est la polarisation spontanée. Pour atteindre une polarisation macroscopique égale à la polarisation spontanée, il faudrait appliquer un champ électrique infini. Ainsi, il est physiquement impossible d'orienter la totalité des domaines dans une unique direction. De ce fait, la polarisation spontanée est définie et évaluée comme la limite à champ infini de la polarisation macroscopique. C'est pourquoi on considère une polarisation de saturation  $P^{sat}$  correspondant à la limite physique de saturation au champ électrique correspondant noté  $E_{sat}$ . La polarisation de saturation est toujours inférieure à la polarisation spontanée. D'un point de vue de la symétrie, la direction de polarisation est un axe d'isotropie [Royer1996].

### II.3.3 Comportement ferroélectrique

Comme nous venons de le voir, les matériaux ferroélectriques se polarisent sous l'action d'un champ électrique. Cette polarisation macroscopique étant un phénomène homogène à un déplacement électrique, on observe l'évolution du déplacement électrique dans un matériau ferroélectrique sur la figure I.12.

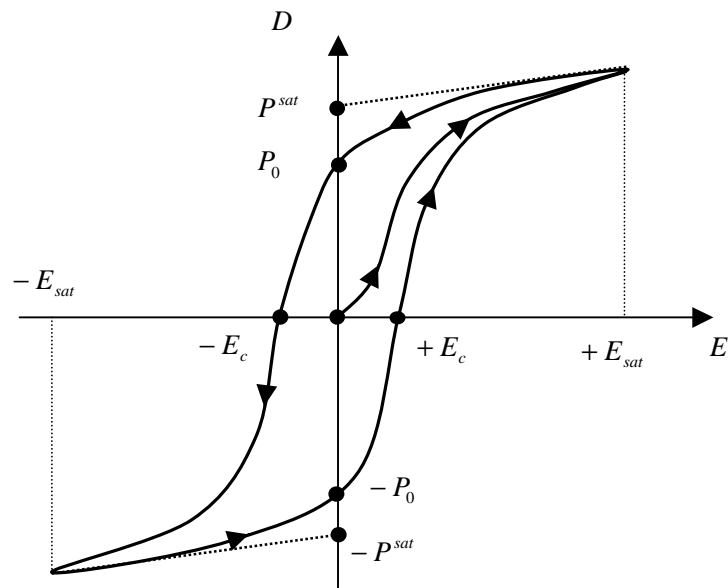


Figure I.12 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un matériau ferroélectrique.

Au point de coordonnées  $(0,0)$ , le matériau n'est pas polarisé, il est dans sa phase paraélectrique. Sous l'action du champ électrique positif, le matériau passe dans sa phase ferroélectrique et atteint sa valeur de polarisation de saturation  $P^{sat}$  au champ électrique de saturation  $E_{sat}$ . Lors de la relâche du champ électrique, le matériau conserve une polarisation dite rémanente notée  $P_0$ . Par la suite, l'application d'un champ électrique négatif provoque la décroissance de la polarisation jusqu'à atteindre une valeur nulle au niveau du champ électrique coercitif  $-E_c$ . La polarisation tend ensuite vers sa valeur de saturation négative  $-P^{sat}$  pour une valeur négative du champ électrique de saturation. La relâche du champ électrique et l'application d'un champ électrique positif engendre une évolution du déplacement électrique analogue, tout en passant par la polarisation rémanente  $-P_0$  à champ électrique nul et une polarisation nulle au niveau du champ électrique coercitif  $E_c$ . Une fois le point de saturation atteint, l'hystérésis diélectrique est complète.

### II.3.4 Comportement antiferroélectrique

Dans le domaine des piézocéramiques, les matériaux antiferroélectriques sont des matériaux cristallins très proches des matériaux ferroélectriques. Cependant, alors qu'un matériau ferroélectrique possède des domaines eux-même constitués de sous domaines polarisés spontanément dans des directions parallèles et dans le même sens, le matériau antiferroélectrique possède une structure composée de 2 sous domaines polarisés spontanément dans des directions

antiparallèles. Il est alors possible de créer des phases ferroélectriques au sein des matériaux antiferroélectriques en leur appliquant de grands champs électriques. Sous l'action d'un champ électrique, les matériaux antiferroélectriques possèdent une double hystérésis (figure I.13).

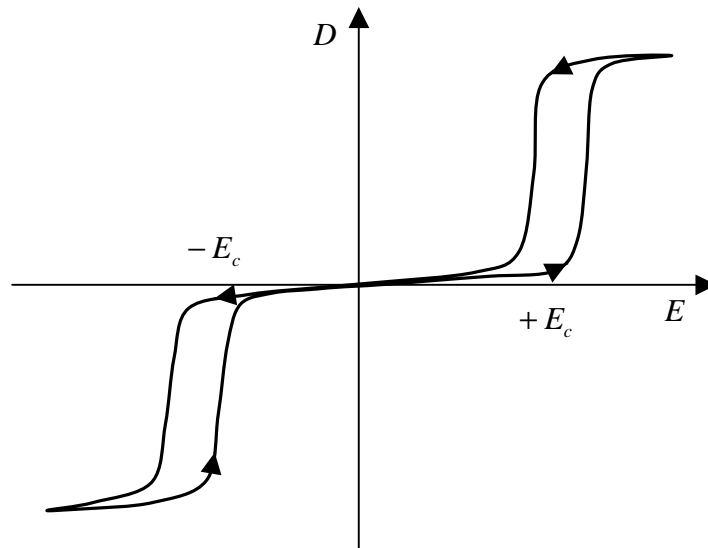


Figure I.13 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un matériau antiferroélectrique.

Ainsi, à champ électrique nul, le matériau n'est pas polarisé. L'évolution du déplacement électrique va nécessiter l'application d'un champ électrique important avant que la polarisation évolue. Une hystérésis analogue à celle des matériaux ferroélectriques est observée près de la valeur du champ électrique coercitif (ceci en champ positif et négatif). Cependant, une fois le champ relâché, la polarisation du matériau redevient nulle. Les matériaux antiferroélectriques ne possèdent donc pas de polarisation rémanente à champ électrique nul.

Ainsi, ce comportement hystérétique est lui aussi attribué à la présence de domaines dans le matériau. A champ électrique faible, les matériaux antiferroélectriques sont assimilables à des matériaux ferroélectriques non polarisés.

### III Les matériaux piézoélectriques

#### III.1 Les monocristaux

##### III.1.1 Généralités

Un monocristal est un arrangement régulier et périodique d'atome. Le plus populaire des monocristaux piézoélectriques existant à l'état naturel est le quartz ( $\text{SiO}_2$ ). Ses qualités de stabilité

en température et de grande linéarité mécanique l'impliquent dans des fonctions de capteurs de pression et de résonateurs. Il existe d'autres monocristaux synthétisés en laboratoire comme le niobate de lithium, le tantalate de lithium ou le tantalate de lithium qui présentent des températures de Curie élevées, de faibles permittivités diélectriques, et de faibles coefficients piézoélectriques.

Les cristaux ferroélectriques peuvent posséder une structure en domaines. On distinguera alors les monocristaux monodomains et polydomains selon qu'une ou plusieurs directions de polarisation coexistent dans le cristal. Dans une description cristallographique, les cristaux polydomains ne sont pas rigoureusement des monocristaux mais des cristaux maclés, c'est pourquoi ils sont souvent confondus avec des piézocéramiques. Aujourd'hui, les monocristaux polydomains de type PZN-PT et PMN-PT sont de loin les matériaux piézoélectriques possédant les plus grands coefficients piézoélectriques et les meilleurs couplages électromécaniques.

### III.1.2 Mode de fabrication

Il existe différentes méthodes de fabrication de monocristaux, notamment la méthode Bridgman et la méthode de Czochralski. Parce qu'elle est plus simple à mettre en œuvre et capable de créer des monocristaux de grandes dimensions nous avons choisi d'illustrer cette deuxième méthode.

Cette technique mise au point par Jan Czochralski consiste à cristalliser un matériau à partir de sa phase liquide en trempant à la surface du bain fondu un germe monocristallin orienté du cristal à obtenir. Le bain se solidifie sur le germe légèrement plus froid. Le cristal formé est extrait en tirant lentement ce germe vers le haut. Le diamètre de croissance du cristal est contrôlé en utilisant un système de pesée et en régulant la température du bain ou la vitesse de tirage.



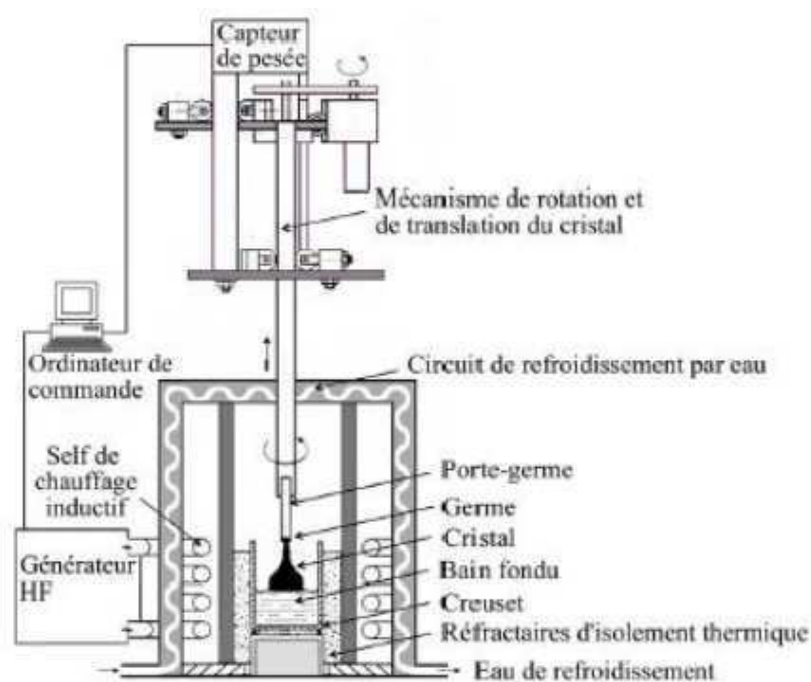


Figure I.14 : Appareillage de Czochralski [Ferrand2007].

Un appareillage Czochralski (figure I.14) est généralement composé de 2 parties : une partie supérieure supportant la tête de tirage et une partie inférieure où se trouve le creuset calorifugé, chauffé par induction haute fréquence. La perfection du cristal est souvent liée à la précision mécanique du dispositif de tirage, à la sensibilité de la pesée et au dispositif thermique entourant le creuset. En fin de tirage le cristal est soulevé lentement du bain, puis une rampe de refroidissement est appliquée. A ce niveau, le monocristal ferroélectrique possède une polarisation spontanée microscopique, mais sa polarisation macroscopique est très faible, car les directions de polarisations de domaines sont aléatoires. Notons que ces directions sont propres aux propriétés du cristal et que dans le cas du monocristal, la polarisation macroscopique est limitée dans ses directions par les axes de polarisations spontanées du cristal.

### III.1.3 Le niobate de lithium

De manière à illustrer les propriétés d'un monocristal et parce que nous l'utilisons dans notre travail de modélisation et d'expérimentation, nous présentons ici le niobate de lithium. Ce monocristal monodomaine est caractéristique des cristaux piézoélectriques 'classiques'. A température ambiante, le niobate de lithium est un monocristal ferroélectrique de symétrie rhomboédrique (trigonale) et de classe 3m. Il possède une température de Curie de 121°C et une polarisation spontanée de  $71 \mu\text{C}/\text{cm}^2$  à 23°C [Bou2008].

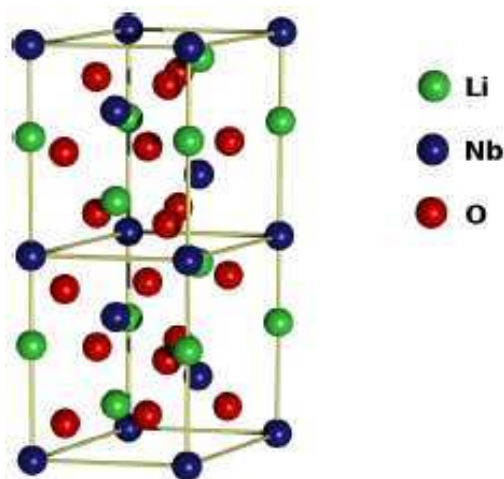


Figure I.15 : Structure cristallographique du niobate de lithium.

La croissance des cristaux se fait à une température supérieure à sa température de Curie (entre 1130 et 1200°C) pour laquelle le cristal est dans sa phase paraélectrique. Dans cette phase, les ions lithium sont situés dans le plan oxygène et les ions niobium sont localisés entre les plans oxygène. La polarisation électrique du cristal vient du fait que, lorsque le cristal refroidit, les ions  $\text{Li}^+$  et  $\text{Nb}^{5+}$  migrent des plans médians définis par les atomes d'oxygène vers un état stable. La direction du décalage donne le sens de la polarité. Ici, elle est portée par l'axe  $c$ .

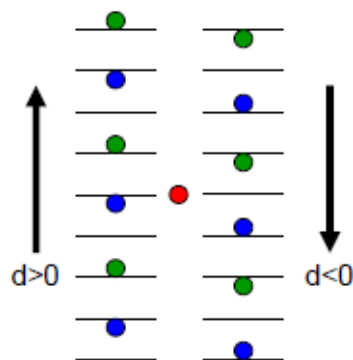


Figure I.16 : Les deux états de polarisation du niobate de lithium.

Il est important de noter que le décalage de l'atome de lithium (vers le haut) dans le cas de la polarisation positive est de 0.72 angström par rapport au plan médian, alors que le déplacement de l'atome de Nb (vers le bas) dans le cas de la polarisation négative est de 0.88 angström [El2004]. Cette dissymétrie se retrouve dans l'étude du cycle d'hystérésis du niobate de lithium. Notons qu'ici la notion d'hystérésis couvre simplement le changement de polarisation. Ainsi, dans le cas du niobate de lithium, le changement de polarisation du positif au négatif, a lieu pour une valeur de champ électrique coercitif égale à -17.6 kV/mm alors que le basculement de polarisation négative à positive a lieu pour une valeur de champ électrique coercitif égale à 22.9 kV/mm [Miller1998].

## III.2 Les céramiques piézoélectriques

### III.2.1 Généralités

Appartenant au groupe des ferroélectriques, les céramiques piézoélectriques sont des mélanges d'oxydes (généralement à base de titanates) formées d'éléments cristallins (grains) qui possèdent chacun une polarisation spontanée.

Il existe une grande variété de céramiques qui se différencient principalement par leurs coefficients piézoélectriques et leur température de Curie. Une famille de céramique bien connue est la famille des PZT. Le choix et les proportions des composantes de mélanges, leur finesse et le processus de fabrication déterminent les propriétés de chacune d'elles. En leur appliquant un grand champ électrique, les polarisations des grains s'alignent et on engendre une polarisation macroscopique. En principe, il n'y a aucune limitation quant aux formes et aux directions de polarisation des éléments céramiques, ce qui est leur grand avantage par rapport aux monocristaux.

### III.2.2 Mode de fabrication

Les matériaux ferroélectriques sont produits par une réaction à l'état solide de plusieurs oxydes. Différentes poudres de céramiques sont mixées puis épurées au travers d'un procédé de combustion contrôlée. Le matériau est ensuite retravaillé par différentes méthodes comme le moulage ou l'extrusion, puis recuit à très haute température afin de créer les liaisons intergranulaires, diminuer la porosité et augmenter la densité par réduction des distances entre grains. La croissance des grains est régulée pour obtenir la microstructure désirée. L'application de grosses pressions réduiront à nouveau la porosité et augmenteront la qualité des matériaux. La céramique est ensuite refroidie et passe ainsi de l'état paraélectrique à l'état ferroélectrique. A ce niveau, les grains de la céramique possèdent tous une polarisation spontanée microscopique. La polarisation macroscopique est non nulle, mais très faible, car les polarisations de grains sont désordonnées.

### III.2.3 Plasticité des polycristaux

Un grain de polycristal est complètement entouré par ses voisins avec des conditions d'accrolement entre grains contigus. Les joints de grains interrompant de manière brutale la régularité d'un empilement cristallin, ils interviennent comme obstacle à la propagation des dislocations de réseau. En même temps, du fait de leur propre structure de défauts, ils peuvent

permettre à différents mécanismes d'adoucissement de relaxer les contraintes internes provoquées par leur présence (agissant comme simples sources de dislocations de réseau ou comme siège d'un glissement intergranulaire). Ces propriétés contradictoires montrent la complexité de la prise en compte de l'effet granulaire des polycristaux.

Cependant, la taille des grains intervient directement sur la limite d'élasticité. Ainsi, la loi expérimentale de Hall-Petch relie la limite d'élasticité à froid  $\sigma^p$  d'un polycristal à la limite d'élasticité à froid  $\sigma^m$  du monocristal et au diamètre moyen  $d$  du grain :

$$\sigma^p = \sigma^m + K d^{-1/2}, \quad (\text{I.1})$$

avec  $K$  une constante qui dépend du matériau et de la température. Ainsi, la limite d'élasticité du polycristal est toujours supérieure à celle du monocristal et augmente quand la taille des grains diminue.

### III.3 Protocole de polarisation

Qu'il soit de nature monocristalline ou sous forme de céramique, un échantillon ferroélectrique est polarisé en appliquant un champ électrique sur le matériau. Dans le cas du monocristal, on favorise une ou plusieurs orientations de la polarisation par rapport aux autres. Dans le cas de la céramique, on oriente les polarisations des grains dans la direction du champ. La somme des polarisations de chaque grain forme la polarisation macroscopique du matériau. Deux méthodes sont couramment utilisées :

- Increasing Field : Partant d'un état vierge dans la phase ferroélectrique et un fort champ électrique est appliqué. Les moments dipolaires se réorientent en minimisant l'angle entre la polarisation et le champ électrique. Alors que ces champs sont de l'ordre de quelques kV/cm, il est possible de diminuer leur valeur en montant en température tout en restant en dessous de la température de Curie. Cette expérience revient à établir la première courbe de polarisation du cycle hystérétique diélectrique.

- Field Cooling : Un champ électrique est appliqué à l'échantillon dans la phase paraélectrique et on redescend en température jusque dans la phase ferroélectrique. Au passage de la température de Curie, les domaines qui se forment s'orientent dans le sens du champ électrique (ou au plus près). Les champs appliqués peuvent être beaucoup plus faibles, inférieurs à 1 kV/cm.

Notons que dans les deux cas, les électrodes doivent être fines, posséder une résistance électrique proche de zéro et une bonne durabilité. Tout écart entre l'électrode et la céramique abaisse la capacité effective du matériau.



### III.4.2 Dopage de la structure

Des éléments dopants sont souvent utilisés pour altérer les propriétés des matériaux ferroélectriques, qu'ils soient de type monocristal ou piézocéramique. Nous illustrons ici le dopage de la structure Pérovskite qui est des plus répandus à tel point que la dénomination de matériau dur et mou fait directement référence aux principales propriétés résultant du dopage de piézocéramique PZT [Surowiak2007-Wongdamnern2008].

Dans les céramiques dites dures, la structure est dopée avec des accepteurs. Les accepteurs sont des espèces susceptibles d'accepter la mise en commun d'un de leurs doublets électroniques ou d'accepter la cession d'un ion  $H^+$ . Ainsi, de petites quantités d'ions à plus faible valence remplacent des ions à plus forte valence,  $Zr^{4+}$  ou  $Ti^{4+}$  remplacés par  $Fe^{3+}$  par exemple. Réduisant le nombre de sites A vacants et augmentant le nombre de sites O libres, la mobilité des murs de domaines est réduite. Par conséquent, les valeurs de champs électriques coercitifs augmentent, les constantes diélectriques et piézoélectriques diminuent, et il est plus difficile d'augmenter ou diminuer la polarisation. Cependant, ces matériaux présentent des facteurs de perte faibles et de grands facteurs de qualité. Ainsi, ils sont souvent utilisés dans les applications de puissance exigeant de faibles pertes énergétiques.

Dans les céramiques dites molles, la structure est dopée avec des donneurs. Les donneurs sont des espèces susceptibles de mettre en commun l'un de leurs doublets électroniques libres ou de céder un ion  $H^+$ . Ainsi, de petites quantités d'ions à plus grande valence remplacent des ions à plus faible valence,  $Zr^{4+}$  ou  $Ti^{4+}$  remplacés par  $Nb^{5+}$  par exemple. Produisant des sites A vacants, on observe des facilités de mobilité des murs de domaines. Ces matériaux ont des champs électriques coercitifs moins élevés, de plus hautes constantes diélectriques et piézoélectriques, de faibles facteurs de qualité, et des changements de polarisation plus aisés.

### III.4.3 Les relaxeurs

Certains ferroélectriques montrent une dépendance de la valeur maximale de la permittivité diélectrique en fonction de la fréquence. Ces matériaux sont appelés ferroélectriques relaxeurs. Cet effet n'apparaît que dans des structures Pérovskites complexes pour lesquelles les sites A et/ou B sont occupés par au moins deux cations de valence différente (dopage à haute concentration de donneur). Les matériaux du type PZN-PT et PMN-PT appartiennent à cette famille. Ces matériaux sont caractérisés, d'un point de vue électrique, par une permittivité forte, très diffuse en température et dépendante de la fréquence de mesure. Leurs propriétés piézoélectriques sont bien plus élevées

que la plupart des PZT et sont un grand axe de recherche dans le développement de nouveaux matériaux piézoélectriques.

### III.5 Les applications de l'effet piézoélectrique

Le domaine d'application des matériaux piézoélectriques est très vaste car il est possible d'exploiter soit l'effet direct, soit l'effet inverse, soit les deux alternativement.

Ces matériaux permettent de convertir une onde acoustique en signal électrique et inversement. Ils constituent le cœur des transducteurs acoustiques utilisés pour émettre ou détecter des ondes acoustiques dans toutes les gammes de fréquences. Dans les gammes de fréquences audibles, on réalise des microphones et des haut-parleurs, dans les sonars, mais aussi dans l'automobile pour la détection d'obstacles et en médecine, ou pour les échographies, qui nécessitent l'émission et la détection d'ondes ultrasonores. L'allume-gaz et le briquet électronique sont des exemples de la manière dont les matériaux piézoélectriques permettent de produire de fortes tensions. L'effet piézoélectrique direct permet de générer de très fortes tensions, supérieures à la tension de claquage de l'air (30 kV/cm) pour un écartement de quelques millimètres, générant ainsi une étincelle de décharge mise à profit pour allumer le gaz du briquet ou de la gazinière.

Il est possible de réaliser des résonateurs piézoélectriques très stables et avec des fréquences très précises permettant de générer des références de temps exploitables en électronique. Les montres à quartz utilisent la résonance d'un diapason en quartz pour générer les impulsions régulières d'horloge. Ces derniers atteignent typiquement des facteurs de qualité de l'ordre de  $10^4$  à  $10^6$ . Les microbalances piézoélectriques, et particulièrement les microbalances à quartz, reposent également sur ce principe et permettent des mesures de masses très précises.

Une pression exercée sur un matériau piézoélectrique génère des charges mesurables électroniquement, ce qui fait d'eux des candidats naturels pour les applications basées sur la détection de pressions. Les actionneurs et moteurs piézoélectriques tirent profit de l'effet piézoélectrique inverse en utilisant la déformation induite par une tension électrique pour générer le déplacement. Leur faible échauffement et leur haute densité énergétique sont des atouts majeurs dans le domaine spatial. Le microscope à force atomique et le microscope à effet tunnel emploient la piézoélectricité pour réaliser les petits déplacements nécessaires au balayage de la surface sondée. Certains injecteurs automobiles les utilisent pour gagner en rapidité d'injection et en consommation. Les moteurs piézoélectriques sont utilisés dans les systèmes autofocus d'appareils photographiques, dans les mécanismes de vitre électrique de voiture, et en général dans les applications où la taille réduite de ces moteurs répond à des contraintes volumiques.

L'effet piézoélectrique est aussi utilisé dans le domaine des transformateurs pour multiplier des tensions alternatives. Contrairement au transformateur classique qui utilise un couplage magnétique, le couplage mis à profit est acoustique. Par effet piézoélectrique inverse, une tension d'excitation génère une contrainte alternative dans une barre d'un matériau fortement piézoélectrique. Cette contrainte permet la mise en vibration de la barre à une fréquence choisie correspondant à une fréquence de résonance. Par effet piézoélectrique direct, une tension est générée sur des électrodes situées sur la deuxième extrémité de la barre. Cette tension, qui bénéficie de l'amplification du mouvement dû à la résonance, peut être 1000 fois plus élevée.

Les matériaux piézoélectriques sont aussi au cœur d'applications plus récentes visant à récupérer l'énergie présente dans notre environnement sous différentes formes ou effectuées par des mouvements quotidiens. L'incorporation d'un film piézoélectrique dans les chaussures permet de produire de l'énergie grâce à la pression du talon pendant la marche. Les faibles puissances produites pourraient suffire à terme à alimenter certains dispositifs électroniques.

La microscopie à force piézoélectrique est un mode particulier d'utilisation du microscope à force atomique. L'application d'une tension entre la pointe et l'échantillon permet de sonder la structure en domaines ferroélectriques à l'échelle nanométrique.

## IV Les matériaux piézoélectriques sous contraintes

De manière générale, les systèmes piézoélectriques peuvent être utilisés sous différentes conditions : haute température, haute pression, champ électrique externe, et contrainte mécanique résiduelle ou appliquée. Ainsi, l'application d'un champ électrique, ou d'une contrainte mécanique externe, modifiera les constantes (élastiques, piézoélectriques et diélectriques) du matériau, ainsi que la propagation des ondes [Gafka1993-Yang2000-Lematre2005]. A haute comme à basse fréquence, il existe une dépendance entre l'application d'une contrainte électrique ou mécanique externe et les constantes d'un matériau PZT [Suchanicz2008].

Dans le domaine des piézocéramiques, l'effet d'un stress externe diminuera ou augmentera les constantes du matériau provoquant des effets non-linéaires hystérétiques importants [Damjanovic1997]. La non-linéarité des monocristaux a elle aussi été étudiée, et montre un caractère non-linéaire à fort niveau de contrainte [Fares1995-Chen2006-Lematre2008-Domenjoud2010]. La bonne compréhension de ces comportements permettra une amélioration de l'ensemble des dispositifs utilisant des matériaux piézoélectriques.



## IV.1 Contrainte mécanique

### IV.1.1 Les matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique dans la littérature

Il a été souvent observé que les caractéristiques de transducteurs développés à partir d'un même matériau, mais où l'un est pré-stressé et l'autre pas, sont significativement différentes [Krueger1961-Kato1995]. Au cours du développement de couches minces de ferroélectriques en sol-gel, les contraintes résiduelles modifient les propriétés électromécaniques, la polarisation et les performances du matériau. La dépendance de la réponse électromécanique à la contrainte externe semble directement liée au niveau de contrainte appliquée [Toupin1961-Si-Chaib2001-Sottos2004]. Profitant de ces propriétés, différentes études numériques ont été menées afin de vérifier les changements des propriétés élastiques, piézoélectriques et diélectriques de matériaux mis sous contrainte dynamique et statique pour définir dans quelle orientation cristallographique les propriétés étaient les plus optimisées [Su2005-Lematre2005-Wang2009]. D'autres auteurs comme Krueger et Jones se sont intéressés à l'effet d'une contrainte perpendiculaire et parallèle à la polarisation sur les coefficients piézoélectriques et ont mis au point un procédé de polarisation des céramiques PZT dans lequel l'application d'une contrainte mécanique radiale permet d'améliorer la vitesse de polarisation liée au champ électrique [Krueger1967-Krueger1967a-Jones2008]. Plus récemment, Kunga a montré comment une évolution de température fait évoluer le champ de polarisation [Kounga2008].

Ces variations de constantes modifient les caractéristiques de propagation des ondes élastiques [Gafka1993-Zhao1996-Yang2000-Lematre2006a-Sarasamak2010]. La connaissance de ces effets est d'une grande importance dans l'amélioration de la performance et à long terme du vieillissement de caractéristiques des dispositifs qui génèrent des ondes acoustiques de surface [Fares2002-Desmet1996]. Superposant un champ de contrainte statique aux équations dynamiques, Sinha [Sinha1985] a décrit les effets de la contrainte induite sur la propagation d'onde élastique dans des solides anisotropes et montre leurs effets significatifs sur les temps de trajets d'ondes acoustiques de surface dans des matériaux à base de quartz. En travaillant sur la propagation d'ondes longitudinales dans des matériaux stressés et déformés élastiquement par des forces de torsions, Si-Chaib [Si-Chaib2005] relia la propagation de ces ondes avec des paramètres physiques comme la densité, les constantes élastiques. Lors du procédé de fabrication, les piézocéramiques subissent une étape de frittage au cours de laquelle les grains sont soudés entre eux, ce qui induit des contraintes résiduelles non négligeables dans le matériau [Wali2007-Wali2008]. Les comportements hystériques de ces matériaux sont attribués aux mouvements des murs de domaines qui évoluent selon le type de contrainte [Damjanovic1997-Fan-1999-Zhou2005-Su2011]. Dans le domaine des matériaux ferroélectriques, mais aussi antiferroélectriques, Cao et Evans ont

montré que le comportement de piézocéramiques sous contrainte mécanique, n'était pas uniquement dû à l'évolution de la polarisation, mais aussi à un mouvement de domaines purement mécanique [Cao1993]. Cette même idée a été la base d'un travail théorique effectué par Kamlah sur le comportement de piézocéramiques contraintes mécaniquement [Kamlah1999-Kamlah1999a].

#### IV.1.2 Exemple d'utilisation : le transducteur Tonpiliz

La technologie la plus utilisée pour les transducteurs acoustiques sous-marins haute puissance est dite Tonpiliz [Thollon1992-Van1999]. Un empilement de galettes de matériau piézoélectrique est polarisé par une forte pression statique imposée par une tige de précontrainte. Cet empilement est solidaire d'un pavillon, équilibré par une contremasse à l'extrémité, qui transmet à l'eau les vibrations induites par application d'un champ électrique excitateur aux bornes du pilier piézoélectrique.

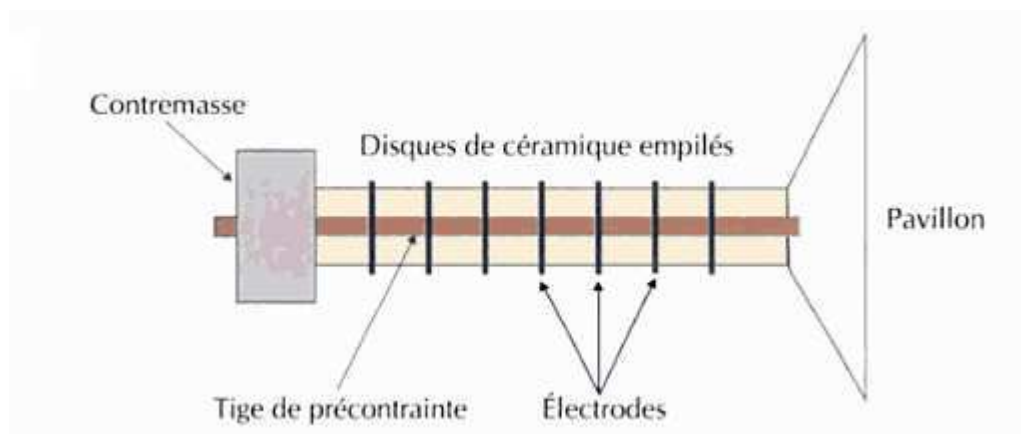


Figure I.18 : Schéma d'un transducteur Tonpiliz.

Le principal avantage de ce dispositif est d'être très fortement résonant, ce qui permet d'atteindre des niveaux d'émission élevés mais n'autorise que de faibles bandes passantes. Leur utilisation a permis de démontrer que dans des géométries optimales, on obtient une plus grande efficacité en comprimant un transducteur [Inoue1993-Meyer 2002]. Cependant, la présence de grande contrainte mécanique induit des effets non-linéaires qui modifient significativement les caractéristiques piézoélectriques à travers un changement des propriétés du matériau [Zhou2002].

## IV.2 Contrainte électrique

### IV.2.1 Les matériaux piézoélectriques sous contrainte électrique dans la littérature

Les effets de la contrainte électrique sur les matériaux piézoélectriques sont largement discutés dans la littérature. Ainsi, Palmieri étudia l'influence d'un champ électrique extérieur sur le mode de propagation de la vitesse de phase dans du ZnO sur substrat de Si [Palmieri1986]. Ren s'intéressa à la variation des coefficients piézoélectriques en fonction du champ électrique appliquée par méthode d'interférométrie [Ren2001]. Palma étudia l'effet électroacoustique non-linéaire pour des ondes de Lamb dans un plan YZ de LiNbO<sub>3</sub> dans une plaque soumise à un champ électrique uniforme [Palma1984-Palma1985]. Il développa un modèle simple et montra comment l'effet peut être interprété comme dépendant des constantes du deuxième et troisième ordre du matériau. L'importance de l'interaction non-linéaire a été mise en évidence expérimentalement à travers des mesures de changement de vitesse d'onde de Lamb produite par le champ électrique extérieur [Liu2001].

Dans le domaine des piézocéramiques, Perez caractérisa la non-linéarité d'évolution du coefficient diélectrique dans des piézocéramiques dures et molles [Pérez2001]. Lynch effectua une étude expérimentale de l'ensemble du comportement hystérétique d'une piézocéramique sous contrainte uniaxiale [Lynch1995a]. A l'image de ces résultats, il proposa un modèle décrivant le comportement de cette céramique sous contrainte électrique [Chen1998]. Basé sur des articles tels que ceux de Lynch ou Boucher [Boucher2002], Lu modélisa le comportement hystérétique de piézocéramique basé sur la prise en compte du comportement microscopique pour en déduire le comportement macroscopique de la céramique [Lu2006].

### IV.2.2 Exemple d'utilisation : la génération d'onde de choc

La problématique de la génération d'ondes de choc pour des applications médicales (lithotripsie, traitement de la tendinite, destruction de tissus non tumoraux) est de générer des pressions suffisantes, sans détériorer le transducteur. Malgré l'utilisation de matériaux composites, la pression maximale est trop faible. Une solution consiste à appliquer une précontrainte électrique dans le matériau (champ électrique) dans le sens opposé à celui de la polarisation (le transducteur se comprime) puis, d'appliquer un champ électrique dans le même sens que la polarisation, mais avant que le matériau n'ait eu le temps de se relaxer. Cette méthode est optimisée en déterminant précisément le temps d'inversion de la tension le plus adapté. Des études comparatives sur le

vieillessement ont montré que cette précontrainte électrique permet d'augmenter la pression de surface d'environ 40%.

### IV.3 Structure cristalline et changements de polarisation et déformations sous contraintes

Une piézocéramique est composée de nombreux grains, eux même composés d'un ou plusieurs domaines, chacun d'eux possédant une polarisation spontanée ( $P^{sp}$ ). Au niveau microscopique, par effet piézoélectrique direct, la polarisation spontanée induit une déformation spontanée ( $S^{sp}$ ) dans la maille. Ainsi, chaque domaine cristallin possède une polarisation spontanée et une déformation spontanée. Comme décrit sur la figure I.17.b, c'est le déplacement de l'ion  $Ti$  par rapport aux ions oxygènes et plomb qui crée un moment dipolaire dans une maille cristalline. Cette structure tétragonale est sensible aux contraintes extérieures (électriques et mécaniques) qui déforment la maille, bouleversant ainsi l'équilibre des murs de domaines.

#### IV.3.1 Changement de polarisation microscopique ferroélectrique

L'application d'un champ électrique sur une structure de type Pérovskite, déforme la structure cristalline en déplaçant les ions positifs et négatifs les uns par rapport aux autres, mais sans provoquer de changement de volume [Lynch1995a-Lu1998-Kamlah1999-Walter2003]. L'application d'un champ électrique dans la direction opposée à l'atome central  $Ti^{4+}$  va engendrer un mouvement de celui-ci dans la direction du champ électrique. Au-delà de la valeur de champ électrique coercitif ( $E_c$ ), l'atome central  $Ti^{4+}$  bouge dans l'une des 6 directions de la maille tétragonale engendrant un changement de polarisation, sans changement de volume. La polarisation s'aligne autant que possible dans la direction du champ électrique (figure I.19).

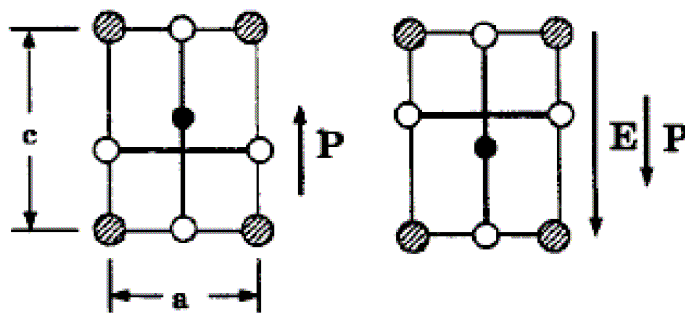


Figure I.19 : Changement de polarisation ferroélectrique induit par un champ électrique supérieur au champ électrique coercitif [Hwang1995].

En se déplaçant vers le site opposé à leurs positions d'origine, les atomes  $Ti^{4+}$  créent une polarisation dans le sens du champ électrique appliqué.

#### IV.3.2 Changement de polarisation microscopique ferroélastique

L'application d'une contrainte mécanique sur une structure de type Pérovskite déforme la structure cristalline en déplaçant les ions positifs et négatifs les uns par rapport aux autres, mais sans provoquer de changement de volume [Lynch1995a-Lu1998-Kamlah1999-Walter2003] (nous verrons par la suite que cette considération est en fait une approximation). L'application d'une compression dans le sens de la polarisation va provoquer un changement de polarisation. Lorsque la contrainte mécanique appliquée est supérieure à un champ de contrainte appelée champ de contrainte coercitif ( $\sigma_c$ ), l'atome central  $Ti^{4+}$  se déplace de vers l'un des sites secondaires à 90 degrés (figure I.20). La contrainte étant appliquée sur les deux faces opposées, elle ne permet pas à l'atome  $Ti^{4+}$  de rester dans l'axe de compression. La direction de polarisation s'alignera alors, autant que possible dans la direction perpendiculaire à la contrainte (figure I.20).

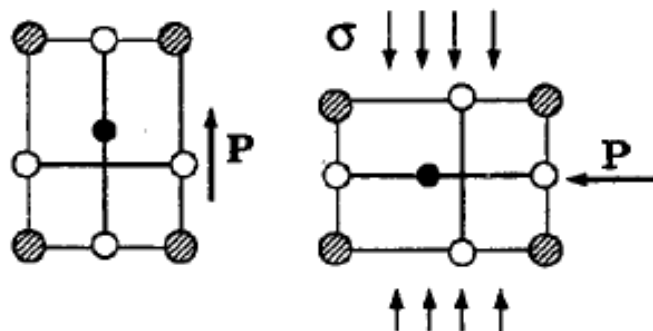


Figure I.20 : Changement de polarisation ferroélastique induit par une contrainte supérieure au champ de contrainte coercitif [Hwang1995].

Ainsi, la compression fait bouger l'ion  $Ti^{4+}$  dans une direction perpendiculaire, créant une polarisation dans une direction perpendiculaire à la direction de compression.

### IV.3.3 Déformations micro et macroscopiques

Lors de l'application d'un champ électrique et mécanique, les atomes  $Ti^{4+}$  se déplacent sous l'effet de la contrainte. D'un point de vue microscopique, la différence de déformation causée par le déplacement des atomes  $Ti^{4+}$  dans une direction perpendiculaire au champ de contrainte définit la valeur de la déformation spontanée  $S^{sp}$ . Cette valeur est la différence de déformation longitudinale entre l'état non polarisé et l'état de polarisation 'totale'. Ainsi, cette valeur correspond à la limite de déformation à champ électrique infini. Dans ce cas, la déformation longitudinale serait alors de  $(2/3) S^{sp}$  et les déformations transversales toutes deux égales à  $-(1/3) S^{sp}$ . Physiquement, il est impossible de mesurer cette valeur de déformation spontanée. C'est pourquoi on évaluera une valeur de déformation de saturation  $S^{sat}$ , définie au champ électrique de saturation  $E_{sat}$ . Par la suite, les déformations macroscopiques se calculent comme la somme vectorielle de l'ensemble de ces déformations. Ainsi, le changement de polarisation microscopique induit des déformations microscopiques.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les processus de déformation plastique et thermique à l'origine de la majorité des différentes catégories de contraintes résiduelles dans les matériaux classiques. Nous avons ensuite montré l'influence de ces contraintes sur les propriétés des matériaux.

Dans une seconde partie, nous avons décrit la structure cristalline ainsi que l'effet piézoélectrique direct et inverse. Nous avons ensuite dépeint les différents types de matériaux piézoélectriques et l'importance de la température de Curie. L'étude des changements de polarisation et de l'ingénierie des domaines a permis de comprendre comment ces matériaux se polarisent macroscopiquement.

Nous avons ensuite étudié les modes de fabrication ainsi que les propriétés des monocristaux et des céramiques piézoélectriques. Nous avons détaillé la structure, les évolutions et le dopage de la structure Pérovskite. La description d'une partie des dispositifs utilisant ce type de matériau a illustré l'étendue de leur utilité.

Dans une dernière partie, nous avons décrit différents exemples d'utilisations de matériaux piézoélectriques sous contraintes électriques et mécaniques, ainsi que l'état des connaissances dans ces différents domaines. De plus, nous nous sommes étendus sur les mécanismes de changement de polarisation et de déformations dans les piézocéramiques.

L'ensemble de ce chapitre a permis d'illustrer l'intérêt de bien maîtriser le comportement des matériaux piézoélectriques sous contraintes électriques et mécaniques et d'introduire différentes notions qui seront développées dans les prochains chapitres.

## Chapitre II : Propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique contraint

La propagation des ondes ultrasonores dépend des propriétés élastiques des matériaux, mais elle est également sensible à d'autres phénomènes tels que la présence de contraintes résiduelles ou appliquées. Cette présence de contraintes va se traduire dans les relations non-linéaires entre contrainte et déformation ; la théorie de l'élasticité linéaire décrite par la loi de Hooke n'est donc plus suffisante. Le comportement élastique non-linéaire d'un matériau peut-être abordé en étudiant la dépendance des paramètres électroacoustiques en fonctions des vitesses de propagation vis-à-vis des contraintes (acoustoélasticité). Pour développer les équations du mouvement, il faut tenir compte à la fois des déformations dynamiques occasionnées par le passage de l'onde, mais aussi des déformations statiques concomitantes à la présence de contraintes.

La méthode présentée consiste à étudier la propagation des ondes acoustiques dans un milieu piézoélectrique contraint électriquement et mécaniquement afin d'en déduire les expressions des vitesses de propagation et du coefficient de couplage en fonction des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques effectives.



## I Généralités sur les grandeurs mécaniques

### I.1 Déformations

Considérons la déformation d'un solide sous l'action d'une sollicitation, à partir d'un état initial (I) vers un état final (II), représenté ici par des surfaces de normales  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\mathbf{N}$  respectivement. Cette déformation est caractérisée par le déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point matériel de la position  $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  à l'instant  $t = 0$ , à la position finale  $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$  à l'instant  $t$ . Les positions de chaque point matériel sont repérées dans un même repère cartésien, de vecteurs de base orthonormée fixe  $y_1, y_2, y_3$ .

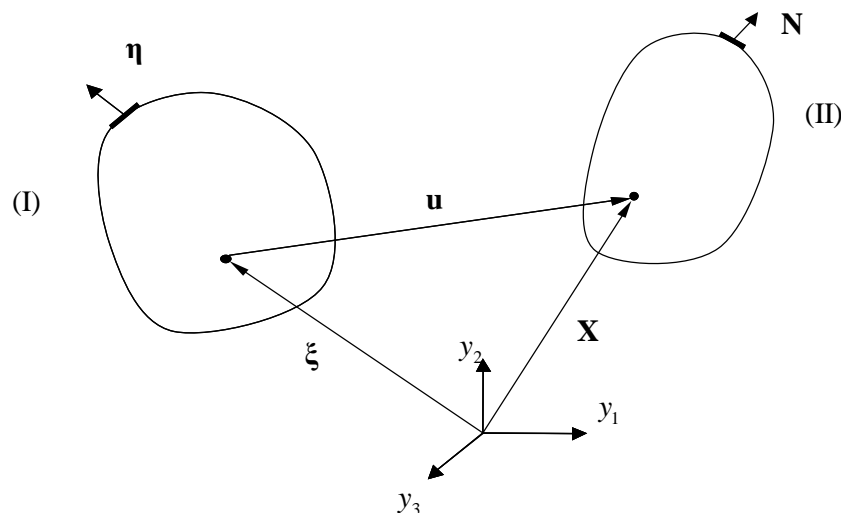


Figure II.1 : Transformation d'un milieu de l'état initial (I) à l'état final (II).

D'un point de vue acoustique, lorsque la longueur d'onde des ondes élastiques est grande devant les distances interatomiques, tout solide homogène peut-être assimilable à un milieu continu. De manière à assurer la continuité de la matière dans son mouvement, l'application  $\mathbf{G} : (\boldsymbol{\xi}, t) \rightarrow \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t)$  est supposée bijective et continûment dérivable.

#### I.1.1 Tenseurs de déformations

Les variations des carrés des longueurs d'un petit segment matériel, qui passe de l'état initial ( $dl_0$ , longueur à l'état non-déformé) à l'état final ( $dl$ , longueur à l'état déformé), sont décrites par

divers tenseurs de déformations. Le tenseur de déformations de Green-Lagrange, noté  $\mathbf{S}$ , peut s'exprimer en utilisant la différence quadratique des longueurs :

$$dl^2 - dl_0^2 = 2 S_{\alpha\beta} d\xi_\alpha d\xi_\beta, \text{ avec } S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_p}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_p}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{II.1})$$

où  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  et  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{\alpha\beta} = 0$  pour  $\alpha \neq \beta$  et  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  pour  $\alpha = \beta$ ).

### I.1.2 Déplacement

Le déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point matériel peut-être exprimé à l'aide des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\xi$  par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \xi, \quad (\text{II.2})$$

ce qui permet d'exprimer les composantes du tenseur de déformations par :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi_\beta} \right). \quad (\text{II.3})$$

Les neuf composantes de déformations  $S_{\alpha\beta}$  forment un tenseur de rang 2 et en raison de sa symétrie, seules six d'entre elles sont distinctes [Royer1996].

La conservation de la masse entre l'état (I) et l'état (II), s'exprime à l'aide du Jacobien de la transformation  $J$  :

$$\rho^f(\mathbf{X}(\xi, t)) = J^{-1} \rho^i, \quad (\text{II.4})$$

où

$$J = \det \mathbf{G}, \quad (\text{II.5})$$

avec  $\mathbf{G}$  le tenseur du gradient de transformation :

$$\mathbf{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}. \quad (\text{II.6})$$

$\rho^f$  et  $\rho^i$  correspondent respectivement, aux masses volumiques du milieu dans l'état final et initial.

## I.2 Tenseurs des contraintes

Différents tenseurs de contrainte peuvent être introduits pour traduire l'état de contrainte en un point matériel. Considérons un élément de force de contact  $d\mathbf{F}$  s'appliquant sur un élément de surface matérielle  $dA$  portée par le vecteur  $\mathbf{N}$ , normal à cette surface. Ce milieu continu est soumis à une transformation finie qui le fait passer dans la configuration déformée. Considérons alors un élément de force de contact  $d\mathbf{f}$  s'appliquant sur un élément de surface matérielle  $da$  portée par le vecteur  $\mathbf{n}$ , normal à cette surface. A chaque milieu est associé un élément de déplacements respectif  $d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{x}$  respectivement. La figure II.2 décrit ce système.

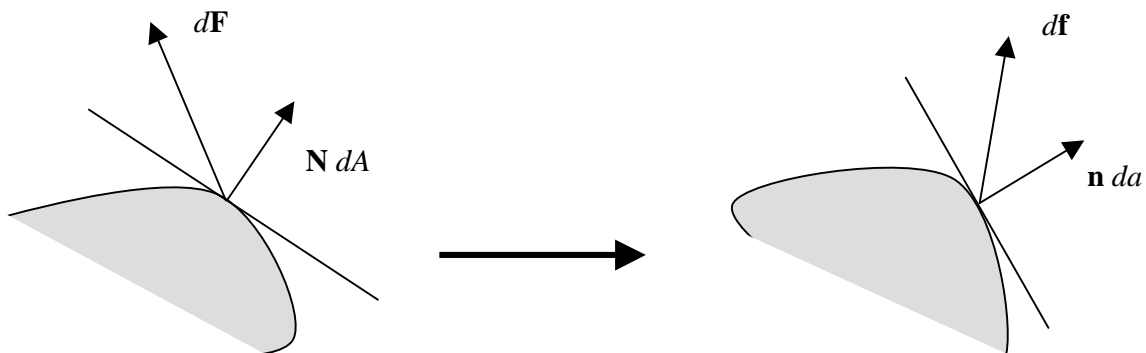


Figure II.2 : Effet d'une transformation de milieu sur les éléments de surface et de force.

Le tenseur de *contrainte de Cauchy*  $\mathbf{t}$  est la contrainte 'vraie' qui relie la force définie dans l'état prédéformé (précontraint) à la surface dans l'état déformé (contraint). C'est un tenseur symétrique.

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) da . \quad (\text{II.7})$$

Cette relation est facile d'aspect mais difficile à mettre en œuvre dans la pratique puisque la surface déformée fait partie de l'inconnue du problème.

Considérant les éléments de déplacements et de surface définis précédemment :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{G} d\mathbf{x} , \quad (\text{II.8.a})$$

$$da = J \mathbf{G}^{-T} dA . \quad (\text{II.8.b})$$

Pour garder une formulation analogue à la formule précédente, il est d'usage d'introduire la *contrainte nominale* (dite *contrainte de Piola-Kirchoff I* ou *Piola-Boussinesq*) :

$$\mathbf{P} = J \mathbf{t} \mathbf{G}^{-T} , \quad (\text{II.9})$$

qui permet d'écrire :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P}(\mathbf{N}) dA . \quad (\text{II.10})$$

C'est la contrainte que mesurée expérimentalement, car la plus accessible (force appliquée par unité de surface initiale). Son défaut majeur est qu'elle n'est pas symétrique.

De manière à effectuer des mesures de contrainte symétrique, définies dans la configuration initiale, on introduit la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , appelée *contrainte matérielle* ou contrainte de PIOLA-KIRCHOFF 2.

Elle est définie par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}, \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\sigma} = J \mathbf{G}^{-1} \mathbf{t} \mathbf{G}^{-T}. \quad (\text{II.11})$$

Suivant la surface choisie, il y a égalité ou non entre le tenseur de Cauchy et le tenseur de PIOLA-KIRCHOFF 2 [Rakotomanana2003].

### I.3 Relations entre contraintes et déformations

#### I.3.1 Comportement linéaire d'un solide élastique

La théorie linéaire de l'élasticité est basée sur une loi purement expérimentale exprimée par Hooke en 1678 pour un solide parfaitement élastique [Royer1996]. Cette théorie se traduit par l'existence d'une relation biunivoque entre contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et déformations  $\mathbf{S}$ , développée ici jusqu'à l'ordre 2 en déformation :

$$\sigma_{ij}(S_{kl}) = \sigma_{ij}(0) + \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0} S_{kl} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}} S_{kl} S_{mn} + O(S^3), \quad (\text{II.12})$$

$\sigma_{ij}(0)$  correspondant à la contrainte à l'équilibre. On pose  $\sigma_{ij}(0) = 0$  et  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ .

Ce développement conduit aux relations suivantes, définissant les constantes élastiques isothermes du second et du troisième ordre :

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0}, \quad (\text{II.13.a})$$

$$C_{ijklmn} = \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}}. \quad (\text{II.13.b})$$

Les constantes élastiques du second ordre  $C_{ijkl}$ , forment un tenseur de rang quatre (donc  $3^4 = 81$  composantes) généralement appelé tenseur des rigidités élastiques. Les tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformations  $S_{kl}$  étant tous deux symétriques, cela implique des égalités entre constantes du

second ordre par permutations d'indices :  $C_{ijkl} = C_{jikl}$  et  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ . Ceci ramène le nombre de constantes indépendantes à 36 au lieu de 81.

La notation matricielle contractée de Voigt peut être utilisée pour la désignation des constantes :

ij ou kl	$\alpha$ ou $\beta$	
11	1	$C_{\alpha\beta} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{pour } i = j \text{ et } k = l \\ 2 C_{ijkl} & \text{pour } i \neq j \text{ et } k = l \\ 2 C_{ijkl} & \text{pour } i = j \text{ et } k \neq l \\ 4 C_{ijkl} & \text{pour } i \neq j \text{ et } k \neq l \end{cases}$
22	2	
33	3	
23 ou 32	4	
31 ou 13	5	
12 ou 21	6	

Des considérations thermodynamiques [Royer1996] nous permettent d'écrire :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial U}{\partial s_{ij}} \right)_{\zeta}, \quad (\text{II.14})$$

avec  $U$  l'énergie interne d'un corps déformé et  $\zeta$  son entropie.

Il vient alors au second ordre :

$$C_{ijkl}^{(\zeta)} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \right)_{\zeta} = C_{klij}^{(\zeta)}, \quad (\text{II.15})$$

ou en utilisant la notation matricielle de Voigt :

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}. \quad (\text{II.16})$$

Cette relation dite de Maxwell, est vraie dans tous les milieux [Royer1996]. Elle conduit à un tenseur des rigidités élastiques symétriques, dont le nombre de constantes indépendantes se réduit à 21.

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.17})$$

Ce nombre de constantes indépendantes se réduira davantage en fonction des symétries des différents matériaux.

Le développement au troisième ordre donne :

$$C_{ijklmn}^{(\zeta)} = \left( \frac{\partial^3 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\zeta}. \quad (\text{II.18})$$

Les constantes élastiques du troisième ordre  $C_{ijklmn}$ , forment un tenseur de rang 6 contenant 729 composantes indépendantes dans le cas le plus général. Comme dans le cas des constantes élastiques du second ordre, ce nombre se réduit en fonction du degré de symétrie du matériau. Par exemple pour un matériau présentant une symétrie orthotrope, le nombre des constantes indépendantes se réduit à 20, alors que pour un matériau isotrope il n'en reste que 3.

Notons que le fait de se restreindre à l'ordre 3 dans le développement de la contrainte  $\sigma$ , n'est pas un choix arbitraire. A ce jour, il est impossible d'évaluer expérimentalement des constantes élastiques au-delà des constantes du troisième ordre.

### I.3.2 Comportement linéaire d'un solide piézoélectrique

Comme décrit au premier chapitre, la piézoélectricité est une dépendance entre les propriétés élastiques et électriques de certains matériaux. Dans le cas unidimensionnel, l'effet piézoélectrique direct exprime la polarisabilité de certains diélectriques lorsqu'ils sont déformés :

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{e} \mathbf{S}, \quad (\text{II.19})$$

avec  $\mathbf{D}$  l'induction (déplacement) électrique,  $\mathbf{E}$  le champ électrique et  $\mathbf{S}$  la déformation.  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{e}$  sont respectivement les constantes diélectrique (permittivité) et piézoélectrique. Par souci de simplification, la valeur du déplacement électrique à contrainte nulle, soit la polarisation spontanée  $P^{sp}$ , n'est pas indiquée. De plus, les échanges de chaleur au sein de matériaux piézoélectriques sont largement négligeables [Delaunay2006], ce qui conduit à négliger l'effet des variations d'entropie. C'est pourquoi nous ne l'indiquons plus dans la notation.

L'effet piézoélectrique inverse indique qu'un matériau, placé dans un champ électrique, est soumis à des contraintes et se déforme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E}, \quad (\text{II.20})$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte mécanique et  $\mathbf{C}$  la constante de rigidité.

La généralisation à trois dimensions de la relation (II.19) définit les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{e}$  :

$$D_m = \varepsilon_{mp}^S E_p + e_{mij} S_{ij}. \quad (\text{II.21})$$

Les constantes diélectriques à déformation constante  $\varepsilon_{mp}^S$  relient la variation d'induction  $D_m$ , au champ électrique  $E_p$  auquel est soumis le solide :

$$\varepsilon_{mp}^S = \left( \frac{\partial D_m}{\partial E_p} \right)_{S, \zeta}. \quad (\text{II.22})$$

Elles s'expriment en  $F/m$ . Le nombre de constantes diélectriques est ainsi de 9 (tenseur de rang 2), soit :

$$[\varepsilon_{mp}^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix}. \quad (\text{II.23})$$

Par des considérations thermodynamiques analogues à celles développées pour le tenseur d'élasticité [Royer1996], il résulte que ce tenseur est symétrique :

$$\varepsilon_{mp}^S = \varepsilon_{pm}^S. \quad (\text{II.24})$$

Les constantes piézoélectriques  $e_{mij}$  relient la variation d'induction  $D_m$ , à champ électrique constant, aux déformations  $S_{ij}$  subies par le solide :

$$e_{mij} = \left( \frac{\partial D_m}{\partial S_{ij}} \right)_{E, \zeta}. \quad (\text{II.25})$$

Elles s'expriment en  $C/m^2$ . On ne spécifie pas qu'elle est à champ électrique constant dans la notation, mais dans d'autres cas, l'exposant apparaîtra. Dans la mesure où  $S_{ij} = S_{ji}$ , le tenseur  $e_{mij}$  est symétrique par rapport à ses deux indices  $i$  et  $j$  :

$$e_{mij} = e_{mji}, \quad (\text{II.26})$$

ce qui permet d'utiliser la notation de Voigt :  $e_{mij} = e_{m\alpha}$  avec  $m, i, j = 1, 2, 3$  et  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Le nombre de constantes piézoélectriques passe ainsi de 27 (tenseur de rang 3) à 18.

$$[e_{m\alpha}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{32} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.27})$$

Le coefficient piézoélectrique inverse, reliant la contrainte mécanique  $\sigma_{ij}$  et le champ électrique  $E_i$  dans l'équation généralisée, se déduit de la constante  $e_{ijk}$  par des considérations thermodynamiques :

$$\left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_m} \right)_S = -e_{mij}. \quad (\text{II.28})$$

Les coefficients de proportionnalité des deux effets sont opposés. L'effet piézoélectrique inverse est donc une conséquence thermodynamique de l'effet direct. Dans le domaine linéaire, les coefficients  $e_{mij}$  sont constants, par hypothèse, et l'intégration de l'équation précédente à entropie et déformations constantes conduit à :

$$\sigma_{ij} = -e_{mij} E_m. \quad (\text{II.29})$$

Si de plus le solide subit une déformation  $S_{kl}$  :

$$\sigma_{ij} = -e_{mij} E_m + C_{ijkl}^E S_{kl}, \quad (\text{II.30})$$

avec la constante élastique à champ électrique constant  $C_{ijkl}^E$  définie par la loi de Hooke généralisée :

$$C_{ijkl}^E = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{E, \zeta}, \quad (\text{II.31})$$

qui relie les contraintes et les déformations lorsque le champ électrique  $\mathbf{E}$  est maintenu constant.

Les équations (II.21) et (II.30) constituent un système d'équations d'état (constitutives) d'un matériau piézoélectrique. En notation matricielle, ce système s'écrit :

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}^E S_\beta - e_{m\alpha} E_m, \quad (\text{II.32.a})$$

$$D_\mu = \epsilon_{\mu\varphi}^S E_\varphi + e_{\mu\alpha} S_\alpha. \quad (\text{II.32.b})$$

Ce système fournit la contrainte mécanique et l'induction électrique en fonction des variables indépendantes, champ électrique et déformation.

En plus de ce système d'équation, il en existe trois autres qui peuvent être décrit selon les variables indépendantes choisies.

En prenant  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{D}$ , le système s'écrit :

$$S_{ij} = -d_{mij} E_m + s_{ijkl}^E \sigma_{kl}, \quad (\text{II.33.a})$$



$$D_m = \varepsilon_{mp}^T E_p + d_{mij} \sigma_{ij}, \quad (\text{II.33.b})$$

avec  $s_{ijkl}^E$  la souplesse à champ électrique constant (inverse du tenseur des rigidités),  $\varepsilon_{mp}^T$  la permittivité à contrainte constante et  $d_{mij}$  le coefficient piézoélectrique.

Les couples définis en (II.32) et (II.33) sont les plus utilisés. Les deux autres permettent d'écrire  $\mathbf{E}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{D}$  :

$$\sigma_{ij} = h_{mij} D_m + C_{ijkl}^D S_{kl}, \quad (\text{II.34.a})$$

$$E_m = \beta_{mp}^S D_p - h_{mij} S_{ij}, \quad (\text{II.34.b})$$

avec le coefficient piézoélectrique  $h_{mij}$ , le tenseur des rigidités à induction constante  $C_{ijkl}^D$  et  $\beta_{mp}^S$  l'inverse du tenseur  $\varepsilon_{mp}^S$ .

$$S_{ij} = g_{mij} D_m + s_{ijkl}^D \sigma_{kl}, \quad (\text{II.35.a})$$

$$E_m = \beta_{mp}^T D_p - g_{mij} \sigma_{ij}, \quad (\text{II.35.b})$$

où  $g_{mij}$  est un nouveau coefficient piézoélectrique,  $s_{ijkl}^D$  la souplesse à induction constante et  $\beta_{mp}^T$  l'inverse du tenseur  $\varepsilon_{mp}^T$ .

Afin de pouvoir passer facilement d'un système à l'autre, il est utile d'exprimer les relations liant les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques. La notation de Voigt permettant de passer en notation matricielle :

$$C_{\alpha\beta}^E s_{\beta\gamma}^E = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (\text{II.36.a})$$

$$e_{i\beta} = d_{i\alpha} C_{\alpha\beta}^E, \quad (\text{II.36.b})$$

$$\varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ij}^S = d_{i\alpha} e_{j\alpha}, \quad (\text{II.36.c})$$

$$C_{\alpha\beta}^D = C_{\alpha\beta}^E + e_{i\alpha} h_{i\beta}, \quad (\text{II.36.d})$$

$$h_{i\beta} = g_{i\alpha} C_{\alpha\beta}^D, \quad (\text{II.36.e})$$

$$d_{i\alpha} = \varepsilon_{ij}^T g_{j\alpha}. \quad (\text{II.36.f})$$

Par la suite, nous utiliserons principalement le système d'équations (II.32) et nous ne mettrons plus les indices  $E$  et  $S$  dans les constantes  $C_{\alpha\beta}^E$ ,  $s_{\beta\gamma}^E$  et  $\varepsilon_{ij}^S$  pour alléger la notation.

Le tableau de la figure II.3 rassemble les résultats de la réduction du nombre de composantes des tenseurs traduisant les propriétés élastiques, électriques et piézoélectriques des cristaux appartenant aux différentes classes de symétrie ponctuelle.

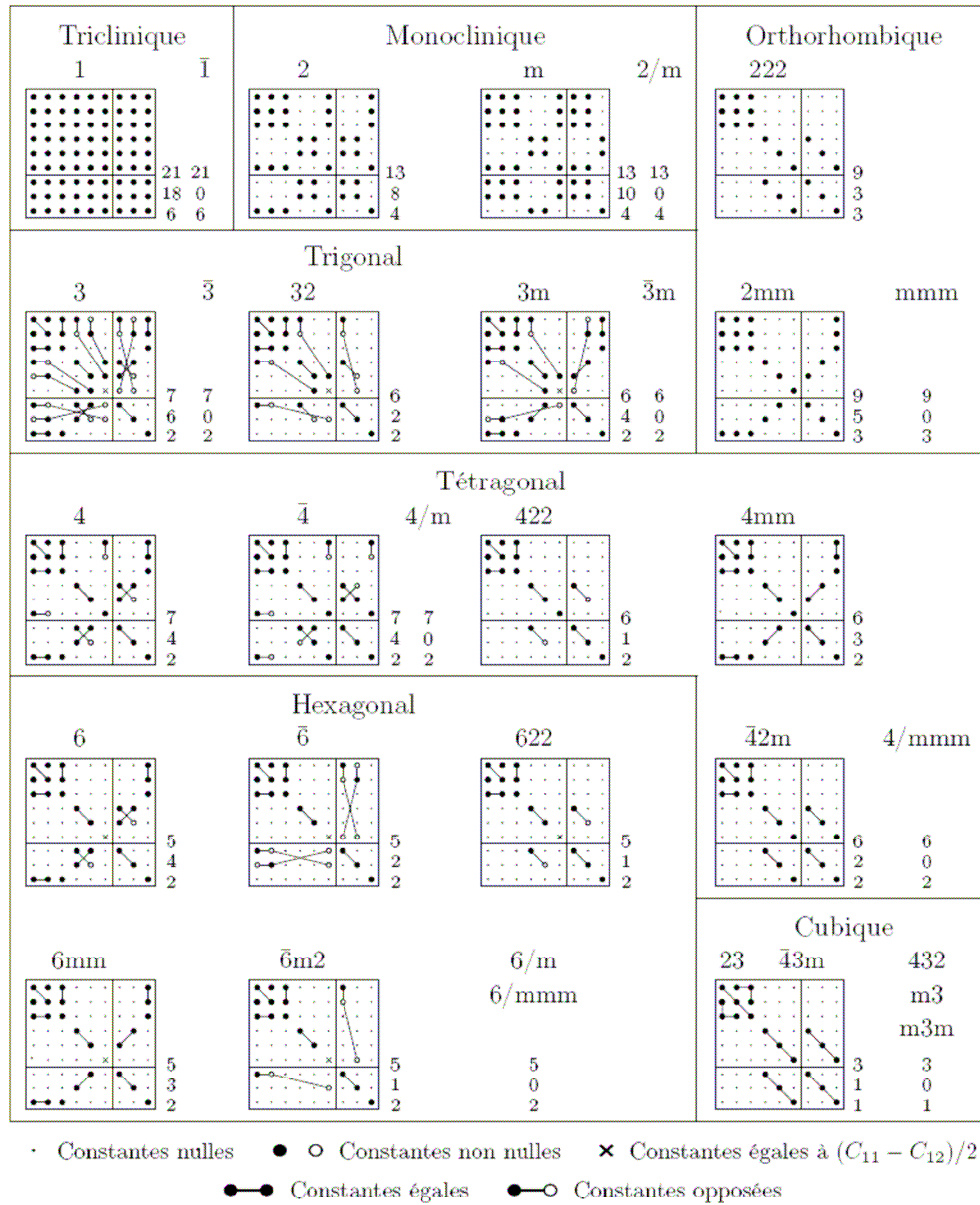


Figure II.3 : Composantes des tenseurs élastiques, piézoélectriques et diélectriques suivant les classes de symétrie [Royer1996].

## I.4 Couplage électromécanique

Le plus important des coefficients caractérisant les matériaux piézoélectriques est le coefficient de couplage électromécanique qui peut se définir de trois manières [Rogacheva2000].

La formule de Mason est souvent utilisée pour déterminer le coefficient de couplage électromécanique dans des problèmes dynamiques pour des oscillations près de la résonance, il sera noté  $k_d$  :

$$k_d^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}, \quad (\text{II.37})$$

avec  $\omega_r$ ,  $\omega_a$  les pulsations de résonance et d'antirésonance des vibrations.

Une autre formule pour déterminer le coefficient de couplage électromécanique est une formule en énergie. Le coefficient sera alors noté  $k_e$  :

$$k_e^2 = \frac{U^{(d)} - U^{(sh)}}{U^{(d)}}, \quad (\text{II.38})$$

où  $U^{(d)}$  est l'énergie interne de l'élément piézoélectrique avec les électrodes et  $U^{(sh)}$  est l'énergie interne de ce même élément avec les électrodes déconnectées. Pour calculer le  $k_e$ , on résout l'équation dynamique pour déterminer les deux énergies, en considérant que les contraintes sont connues.

Une autre méthode (la manière la plus courante), est de calculer le couplage électromécanique, qui sera noté  $k_t^2$ , en le définissant comme le rapport entre la densité d'énergie mutuelle élastique et diélectrique et la moyenne géométrique des densités d'énergies élastique et diélectrique. En négligeant les effets thermiques et magnétiques de la piézoélectricité, l'énergie interne du mode est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} E_m D_m. \quad (\text{II.39})$$

Cette équation est une fonction linéaire de l'énergie qui néglige donc le deuxième ordre en déformation. En prenant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$  comme variables indépendantes, on reprend le système d'équation (II.34) sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D S_{kl} - \frac{e_{mij}}{\epsilon_{mp}} D_p, \quad (\text{II.40.a})$$

$$E_m = \frac{1}{\epsilon_{mp}} D_p - \frac{e_{pij}}{\epsilon_{mp}} S_{ij}, \quad (\text{II.40.b})$$

avec

$$C_{ijkl}^D = C_{ijkl} + \frac{e_{mij} e_{pkl}}{\epsilon_{mp}}. \quad (\text{II.41})$$

Ainsi, l'équation (II.39) se développe en :

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl}^D S_{ij} S_{kl} - \frac{e_{pij}}{\epsilon_{mp}} S_{ij} D_m + \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_{mp}} D_m D_p, \quad (\text{II.42})$$

en posant :

$$U_e = \frac{1}{2} C_{ijkl}^D S_{ij} S_{kl}, \quad (\text{II.43.a})$$

$$U_m = -\frac{e_{pij}}{\epsilon_{mp}} S_{ij} D_m, \quad (\text{II.43.b})$$

$$U_d = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_{mp}} D_m D_p, \quad (\text{II.43.c})$$

où  $U_e$ ,  $U_m$  et  $U_d$  représentent respectivement l'énergie élastique, mutuelle (d'interaction élastique électrique) et diélectrique. L'énergie du système s'écrit alors :

$$U = U_e + U_m + U_d \quad (\text{II.44})$$

et le coefficient de couplage électromécanique devient alors :

$$k_t = \frac{U_m}{\sqrt{U_e U_d}}. \quad (\text{II.45})$$

Ce coefficient de couplage permet de caractériser un matériau à l'instar de l'ensemble des constantes élastiques, diélectriques et piézoélectriques. En effet, il tient compte à la fois des propriétés élastiques, diélectriques, et piézoélectriques. Ainsi, il est un élément de comparaison des matériaux qui traduit l'aptitude d'un matériau piézoélectrique à convertir une énergie mécanique (et inversement). Cette formule est très souvent utilisée pour déterminer les caractéristiques piézoélectriques d'un matériau piézoélectrique, traditionnellement noté  $k_{33}$ ,  $k_{31}$ ... Ils sont trouvés en résolvant le problème quasi-statique pour des matériaux piézoélastiques de géométrie simple, et ces solutions sont indépendantes de la position et du temps [Brissaud2007].

Ainsi, pour un mode de vibration en épaisseur d'une plaque, plusieurs simplifications apparaissent du fait de la nullité de la plupart des contraintes. En indice contracté, lors d'une propagation le long de l'axe de polarisation ( $Oy_3$ ), l'énergie du système se ramène à :

$$U = \frac{1}{2} C_{33}^D S_{33}^2 - \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}} S_{33} D_3 + \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_{33}} D_3^2. \quad (\text{II.46})$$

Dans ce cas, le coefficient de couplage (du mode plaque) est donné par :

$$k_i^2 = \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33} C_{33}^D}. \quad (\text{II.47})$$

Pour des états électrostatiques non uniforme, ce coefficient dépend de beaucoup de paramètres comme la fréquence de vibration, la géométrie du matériau, les électrodes, les conditions de bords mécaniques et électriques. Généralement, les valeurs de coefficient de couplage mesurées sont moins importantes que celles définies pour des matériaux uniformes.

## II Équation de propagation d'une onde acoustique dans un milieu piézoélectrique précontraint

### II.1 Équations du mouvement dans un milieu précontraint non piézoélectrique

L'étude de la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu contraint nécessite la prise en compte de la nature de cette onde et du comportement mécanique du matériau. Ceci conduit à distinguer plusieurs états du milieu :

- État naturel : Cet état correspond au milieu libre de toute contrainte (appliquée ou résiduelle). Les positions de ses points matériels sont données par le vecteur position  $\xi$  dont les composantes sont  $(\xi_\alpha, \xi_\beta, \xi_\gamma)$ . Les lettres grecques faisant directement référence à l'état naturel indicé en  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

- État statique : Si le milieu subit une déformation statique (contrainte résiduelle ou appliquée) dans le domaine élastique, son état change et nous l'appellerons "état statique" ou "état prédéformé" ou encore "état précontraint". Les positions des points matériels sont alors données par le vecteur position  $\mathbf{X}$  dont les composantes sont  $(X_I, X_J, X_K)$ . Les lettres latines majuscules faisant directement référence à l'état statique indicé en  $(I, J, K)$ .

- État dynamique : Lorsque le milieu précontraint (déformé statiquement) est traversé par une onde acoustique, cela se traduit par l'addition d'une petite contrainte dynamique. Elle vient se superposer à la première et amène le milieu dans un troisième état que nous nommerons "état dynamique". Les positions des points matériels sont définies par le vecteur  $\mathbf{x}$  dont les composantes sont  $(x_i, x_j, x_k)$ . Les lettres latines minuscules faisant directement référence à l'état dynamique indicé en  $(i, j, k)$ .

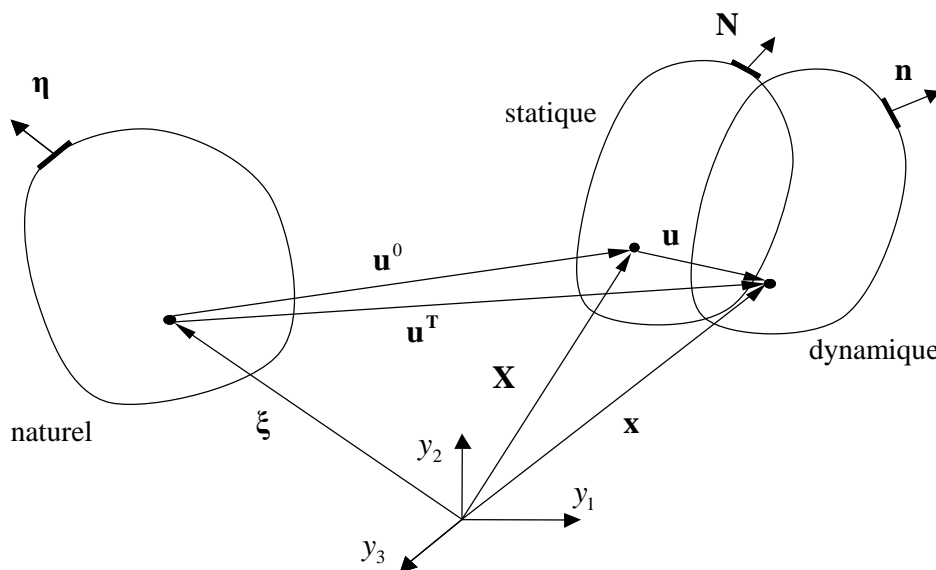


Figure II.4 : Schématisation des trois états du matériau : naturel, statique et dynamique.

Dans les trois états (représentés respectivement par des surfaces de normales  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{n}$ ) la position d'un point matériel est toujours repérée dans le même repère cartésien orthonormé, de vecteurs de bases unitaires  $y_1, y_2, y_3$ . Ainsi,  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{x}$  sont les composantes des vecteurs positions d'un même point matériel respectivement dans l'état naturel, statique et dynamique.

### II.1.1 Déplacements

Contrairement au cas linéaire où il n'y a qu'un seul déplacement à identifier, ici nous en différencions trois :

- la déformation statique, qui correspond au passage de l'état naturel à l'état statique, et qui provoque un déplacement des particules du milieu noté  $\mathbf{u}^0$ ,
- la déformation dynamique, qui correspond au passage de l'état statique à l'état dynamique, et qui provoque à son tour un déplacement noté  $\mathbf{u}$ ,

- la déformation totale, qui correspond au passage de l'état naturel à l'état dynamique, et qui provoque un déplacement global  $\mathbf{u}^T$ .

Ces vecteurs de déplacements sont reliés aux vecteurs de position par :

$$\mathbf{u}^0(\xi) = \mathbf{X} - \xi, \quad (\text{II.48.a})$$

$$\mathbf{u}^T(\xi, t) = \mathbf{x} - \xi, \quad (\text{II.48.b})$$

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{u}^T(\xi, t) - \mathbf{u}^0(\xi) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (\text{II.48.c})$$

D'un point de vue dynamique, nous resterons dans le cadre de l'acoustique linéaire. Ainsi, la perturbation apportée par l'onde acoustique est supposée petite par rapport à celle engendrée par la contrainte statique [Pao1984-Su2005] :

$$\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{u}^0\|. \quad (\text{II.49})$$

En effet, prenons l'exemple d'une déformation occasionnée dans un aluminium par le passage d'une onde (de fréquence de 2.5 MHz), le déplacement est de l'ordre de quelques angströms, alors qu'une déformation finie appliquée provoque des déplacements de l'ordre de quelques microns [Duquennoy1997].

Ici, nous avons choisi de définir ces vecteurs en fonction des coordonnées de l'état naturel, mais ces relations seraient analogues dans les deux autres systèmes de coordonnées.

### II.1.2 Déformations

Ayant défini trois vecteurs déplacements  $\mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}^T$ , nous pouvons définir trois tenseurs de déformations  $\mathbf{S}^0$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}^T$ . Comme pour les relations en déplacements, ces trois tenseurs peuvent être représentés dans différents systèmes de coordonnées. Ainsi, l'exposant indique l'état de déformation du milieu et les indices le choix du système de coordonnées. Ces tenseurs de déformations sont reliés aux vecteurs de déplacements par :

$$S_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_K}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta^0}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\lambda^0}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\lambda^0}{\partial \xi_\beta} \right), \quad (\text{II.50.a})$$

$$S_{\alpha\beta}^T = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial u_\beta^T}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial u_\lambda^T}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u_\lambda^T}{\partial \xi_\beta} \right). \quad (\text{II.50.b})$$

Comme pour les déplacements, les déformations apportées par l'onde acoustique sont considérées petites par rapport à celles causées par les contraintes statiques, ceci se traduit par la relation :

$$\|\mathbf{S}\| \ll \|\mathbf{S}^0\|. \quad (\text{II.51})$$

Le tenseur dynamique est alors donné approximativement par :

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^T - S_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \xi_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\lambda}^0}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\lambda}^0}{\partial \xi_{\beta}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\alpha}} \right), \quad (\text{II.52})$$

où nous ne prenons pas en compte le terme  $\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi_{\beta}}$  qui est largement négligeable devant les autres termes [Duquennoy1997].

### II.1.3 Tenseurs de contraintes

Les deux états de déformations et les trois systèmes de coordonnées, nous permettent de définir cinq configurations pour les tenseurs de contraintes.

- $\sigma_{IJ}^0 = t_{IJ}^0$  : l'exposant 0 réfère à l'état de déformation statique. Les indices majuscules expriment le fait que la contrainte soit calculée par rapport à la surface dans l'état statique, et qu'elle est exprimée avec les coordonnées statiques.

- $\sigma_{\alpha\beta}^0$  : état de déformation statique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état naturel et exprimée avec les coordonnées naturelles.

- $\sigma_{ij}^T = t_{ij}^T$  : l'exposant T réfère à l'état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état dynamique et exprimée avec les coordonnées dynamiques.

- $\sigma_{IJ}^T$  : état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état statique et exprimée avec les coordonnées statiques.

- $\sigma_{\alpha\beta}^T$  : état de déformation dynamique : contrainte calculée par rapport à la surface dans l'état naturel et exprimée avec les coordonnées naturelles.

Les différents tenseurs de déformations sont reliés par les relations suivantes :

$$\sigma_{IJ}^0 = t_{IJ}^0 = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad (\text{II.53.a})$$

$$\sigma_{ij}^T = t_{ij}^T = \frac{\rho^T}{\rho^S} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} \sigma_{KL}^T = \frac{\rho^T}{\rho^0} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_{\beta}} \sigma_{\alpha\beta}^T, \quad (\text{II.53.b})$$



$$t_{IJ}^T = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}^T. \quad (\text{II.53.c})$$

En accord avec les équations de déplacements (II.48), nous avons :

$$\frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{I\alpha} + \frac{\partial u_I^0}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\text{II.54.a})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_K} = \delta_{iK} + \frac{\partial u_i}{\partial X_K}, \quad (\text{II.54.b})$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} = \delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i^T}{\partial \xi_\alpha}. \quad (\text{II.54.c})$$

Le déplacement  $\mathbf{u}$  dû à la perturbation dynamique ayant été introduit, par analogie, le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond à la composante dynamique due au passage de l'onde :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma}^0. \quad (\text{II.55})$$

Les composantes de ces tenseurs s'expriment respectivement dans les systèmes de coordonnées des états prédéformé et naturel sous la forme :

$$\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}^T - \sigma_{IJ}^0 = \sigma_{IJ}^T - t_{IJ}^0, \quad (\text{II.56.a})$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^T - \sigma_{\alpha\beta}^0. \quad (\text{II.56.b})$$

En utilisant les équations (II.53.a-b-c) dans l'équation (II.56.a), ces composantes sont reliées par la relation :

$$\sigma_{IJ} = \frac{\rho^S}{\rho^0} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.57})$$

Avec l'expression (II.4), il est possible d'exprimer le rapport de masse volumique comme le déterminant de la matrice de transformation correspondante, soit :

$$\sigma_{IJ} = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\partial X_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial X_J}{\partial \xi_\beta} \sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.58})$$

#### II.1.4 Conditions d'équilibre dans l'état statique

Pour un corps en équilibre mécanique dans l'état statique, la résultante et le moment des forces agissant sur ce corps sont nuls. Cette condition d'équilibre statique se traduit mécaniquement par :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[ \sigma_{\beta\varphi}^0 \left( \delta_{\alpha\varphi} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\varphi} \right) \right] = 0, \quad (\text{II.59.a})$$

$$\frac{\partial \sigma_{IJ}^0}{\partial X_J} = \frac{\partial t_{IJ}^0}{\partial X_J} = 0. \quad (\text{II.59.b})$$

II.1.5 Développement de l'équation de la dynamique pour un milieu précontraint dans les différents systèmes de coordonnées

A partir du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\partial t_{ij}^T}{\partial x_j} = \rho^T \frac{\partial^2 u_i^T}{\partial t^2}, \quad (\text{II.60})$$

et d'après les équations de déplacements (II.48.a-b-c), en accord avec les relations de dérivation sur ces différents vecteurs (II.54.a-b-c), l'équation de la dynamique dans l'état final peut s'exprimer selon les 3 systèmes de coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \sigma_{\beta\alpha}^T + \sigma_{\beta\varphi}^T \frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha^T}{\partial t^2} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.61.a})$$

$$\frac{\partial}{\partial X_K} \left( \sigma_{KI}^T + \sigma_{KP}^T \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^S \frac{\partial^2 u_I^T}{\partial t^2} = \rho^S \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.61.b})$$

$$\frac{\partial t_{ij}^T}{\partial x_j} = \rho^T \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho^T \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_p \frac{\partial v_i}{\partial x_p} \right) = \rho^T \frac{Dv_i}{Dt}, \quad (\text{II.61.c})$$

avec  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  la vitesse de la particule à la position  $\mathbf{x}$  et où l'opérateur  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée Lagrangienne.

D'après la condition d'équilibre (II.59.a), la relation (II.61.a) s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\varphi} + \sigma_{\beta\varphi} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}. \quad (\text{II.62})$$

De même, la relation (II.59.b), nous permet d'exprimer la relation (II.61.b) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( \sigma_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^S \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}. \quad (\text{II.63})$$

Rappelons qu'ici, le tenseur  $t_{JP}^0$  est le tenseur de Cauchy qui est égal au deuxième tenseur de Piola-Kirchoff exprimé dans le système de coordonnées statique  $\sigma_{JP}^0$ .

Jusqu'à présent, deux hypothèses ont été faites : la prédéformation est statique et la perturbation dynamique est petite. La manière dont les particules sont mues de la position  $\xi$  à  $\mathbf{X}$  ne sera pas traitée, et aucune restriction sur les propriétés intrinsèques du matériau n'est imposée. Les équations de mouvement (II.62-63) sont donc applicables à un corps dans une forme générale de prédéformation, finie ou infinitésimale, élastique ou inélastique [Duquennoy1997].

## II.2 Équations de la dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte

### II.2.1 Approximation quasi-statique

Les vibrations élastiques nécessitant un déplacement de matière, la vitesse avec laquelle se déplace une déformation ou une contrainte est très inférieure à celle avec laquelle se déplace un champ électrique [Royer1996]. La vitesse des ondes élastiques est, en effet,  $10^4$  à  $10^5$  fois plus petite que la vitesse des ondes électromagnétiques. Compte tenu du fait que le champ électromagnétique associé au champ élastique est quasi-statique, le champ magnétique associé ne joue aucun rôle et les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cong \vec{0}. \quad (\text{II.64})$$

Les seules grandeurs électriques nécessaires à la description d'un solide piézoélectrique sont le champ électrique  $E_p$  et l'induction électrique  $D_M$ . Les équations régissant l'état électrostatique décrivent que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$ , et que le déplacement électrique obéit à l'équation de Poisson, soit respectivement :

$$E_p = -\frac{\partial\Phi}{\partial X_p}, \quad (\text{II.65})$$

$$\frac{\partial D_M}{\partial X_M} = \rho_e, \quad (\text{II.66})$$

où  $\rho_e$  est la densité volumique de charges libres. Pour un matériau isolant parfait,  $\rho_e = 0$ .

## II.2.2 Équations de la dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état naturel

L'équation de la dynamique (II.62) et d'équilibre à l'état statique (II.59.a) sont déjà connues dans le système de coordonnées de l'état naturel, mais il vient se rajouter l'équation de Poisson pour un diélectrique dans l'état dynamique et dans l'état statique :

$$\frac{\partial D_{\mu}}{\partial \xi_{\mu}} = 0, \quad (\text{II.67.a})$$

$$\frac{\partial D_{\mu}^0}{\partial \xi_{\mu}} = 0. \quad (\text{II.67.b})$$

De la même manière que précédemment, il est possible d'exprimer les équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte [Liu2003-Su2005] et soumis à une petite perturbation dynamique. Les équations constitutives de l'état précontraint seul sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^0 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^0 S_{\epsilon\eta}^0 + e_{\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}} + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \\ D_{\mu}^0 &= e_{\mu\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^0 S_{\gamma\delta}^0 - \epsilon_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}} S_{\alpha\beta}^0 + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \end{aligned} \quad (\text{II.68.a-b})$$

où les  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta}$  sont les constantes élastiques du deuxième et troisième ordre,  $e_{\pi\alpha\beta}$  et  $e_{\pi\alpha\beta\gamma\delta}$  sont les constantes piézoélectriques du deuxième et troisième ordre.  $\epsilon_{\mu\pi}$  et  $\epsilon_{\mu\pi\omega}$  sont les constantes diélectriques du deuxième et troisième ordre et  $l_{\mu\pi\alpha\beta}$  est la constante électrostrictive. L'ensemble des éléments de symétrie de ces constantes ont été étudiés par Declercq [Declercq2005].

Les équations constitutives de l'état final sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^T &= C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^T + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^T S_{\epsilon\eta}^T + e_{\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^T \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\omega}} + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \\ D_{\mu}^T &= e_{\mu\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^T + \frac{1}{2} e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} S_{\alpha\beta}^T S_{\gamma\delta}^T - \epsilon_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\omega}} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \xi_{\varphi}} S_{\alpha\beta}^T + O(S^3, \Phi^3, S \Phi^2, S^2 \Phi) \end{aligned} \quad (\text{II.69.a-b})$$

Comme pour la contrainte et la déformation, ces deux variables ainsi que le potentiel et le déplacement électrique sont traités comme des variables totales, composées de leurs composantes statiques et dynamiques :

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{II.70.a})$$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}, \quad (\text{II.70.b})$$

$$\Phi^T = \Phi^0 + \Phi, \quad (\text{II.70.c})$$

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^0 + \mathbf{D}. \quad (\text{II.70.d})$$

En faisant la différence entre les équations (II.69.a-b) et (II.68.a-b), en exprimant le tenseur de contraintes ainsi que le déplacement électrique et en négligeant les termes d'ordre 4 en énergie, nous obtenons les équations de la dynamique et constitutives pour un matériau piézoélectrique sous contrainte :

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} + e_{\mu\alpha\beta}^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}, \quad (\text{II.71.a})$$

$$D_\mu^* = e_{\mu\alpha\beta}^{**} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \varepsilon_{\mu\varphi}^* \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.71.b})$$

avec

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\varphi\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\varphi} + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_\epsilon^0}{\partial \xi_\eta} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.a})$$

$$e_{\mu\alpha\beta}^* = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.b})$$

$$e_{\mu\alpha\beta}^{**} = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\beta\delta} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\delta} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.72.c})$$

$$\varepsilon_{\mu\varphi}^* = \varepsilon_{\mu\varphi} + l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} - \varepsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_\omega}. \quad (\text{II.72.d})$$

En substituant les équations (II.71.a-b) dans (II.62) et (II.67.a) et en négligeant à nouveaux les termes d'ordre 4 en énergie, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\varphi} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.73.a})$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu}, \quad (\text{II.73.b})$$

$$D_\mu = \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi}, \quad (\text{II.73.c})$$

avec 4 paramètres effectifs respectivement élastiques, piézoélectriques et diélectriques définis par :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\varphi\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\varphi}} + C_{\alpha\beta\varphi\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\varphi}} + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_{\epsilon}^0}{\partial \xi_{\eta}} + e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}}, \quad (\text{II.74.a})$$

$$\tilde{e}_{\mu\alpha\beta} = e_{\mu\alpha\beta} + e_{\mu\beta\varphi} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\varphi}} + e_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\delta}} - l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\varphi}}, \quad (\text{II.74.b})$$

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\varphi} = \epsilon_{\mu\varphi} + l_{\mu\varphi\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\beta}} - \epsilon_{\mu\varphi\omega} \frac{\partial \Phi^0}{\partial \xi_{\omega}}, \quad (\text{II.74.c})$$

et comme condition au bord :

$$\left( \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) \eta_{\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\sigma} \text{ sur la surface } S^{\sigma}, \quad (\text{II.75.a})$$

$$D_{\mu} \eta_{\mu} = \Lambda^q \text{ sur la surface } S^q. \quad (\text{II.75.b})$$

$\Lambda_{\alpha}^{\sigma}$  est la contrainte surfacique appliquée sur la surface  $S^{\sigma}$  et  $\Lambda^q$  est la charge surfacique appliquée sur la surface  $S^q$ .

Ici, le terme  $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  est d'un ordre de symétrie inférieur à  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Il conserve la symétrie  $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{C}_{\gamma\delta\alpha\beta}$ , mais perd les autres ( $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq \tilde{C}_{\beta\alpha\gamma\delta} \neq \tilde{C}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ ). De la même manière, on perd la symétrie sur  $\tilde{e}_{\mu\alpha\beta}$  ( $\tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \neq \tilde{e}_{\mu\beta\alpha}$ ) comme sur  $\tilde{\epsilon}_{\mu\varphi}$  ( $\tilde{\epsilon}_{\mu\varphi} \neq \tilde{\epsilon}_{\varphi\mu}$ ). Intuitivement, on comprend que la prédéformation a changé l'orientation des vecteurs et on perd donc une bonne partie de la symétrie des tenseurs.

### II.2.3 Équation dynamique et équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état prédéformé

Comme précédemment, nous reprenons l'équation de la dynamique (II.63) et à l'équilibre statique (II.59.b) qui sont déjà connues dans le système de coordonnées de l'état prédéformé. Nous rajoutons l'équation de Poisson pour un diélectrique dans l'état dynamique et dans l'état statique :

$$\frac{\partial D_M}{\partial X_M} = 0, \quad (\text{II.76.a})$$

$$\frac{\partial D_M^0}{\partial X_M} = 0. \quad (\text{II.76.b})$$

Les équations obtenues dans le repère naturel sont maintenant exprimées dans le système de coordonnées statique. En accord avec la relation (II.58), nous passons du tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}$  au tenseur  $\sigma_{IJ}$  par :

$$\sigma_{IJ} = \delta_{I\alpha} \delta_{J\beta} \left[ \sigma_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + \sigma_{\alpha\varphi} \frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\varphi}} + \sigma_{\beta\varphi} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right]. \quad (\text{II.77})$$

Concernant le changement de coordonnées du vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , rappelons que ce vecteur est orienté par la normale à la surface où il est défini. C'est donc le changement de surface de l'équation (II.8.b) qui nous permet de poser que :

$$D_M = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|^{-1} \frac{\partial X_M}{\partial \xi_{\mu}} D_{\mu}, \quad (\text{II.78})$$

soit :

$$D_M = \delta_{M\mu} \left[ D_{\mu} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + D_{\varphi} \frac{\partial u_{\mu}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right]. \quad (\text{II.79})$$

Ceci mène au nouveau couple d'équations de la dynamique et constitutives exprimées dans le système de coordonnées de l'état statique :

$$\frac{\partial}{\partial X_J} \left( \bar{\sigma}_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.80.a})$$

$$\bar{\sigma}_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial \Phi}{\partial X_M}, \quad (\text{II.80.b})$$

$$D_M = \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial u_I}{\partial X_J} - \bar{\varepsilon}_{MP} \frac{\partial \Phi}{\partial X_P}, \quad (\text{II.80.c})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{C}_{IJKL} &= C_{IJKL} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + C_{PJKL} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_P} + C_{IPKL} \frac{\partial u_J^0}{\partial X_P} + C_{IJPL} \frac{\partial u_K^0}{\partial X_P} + C_{IJKP} \frac{\partial u_L^0}{\partial X_P} + C_{IJKLMN} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_N} + e_{PIJKL} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_P}, \\ \bar{e}_{MIJ} &= e_{MIJ} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + e_{MPJ} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_P} + e_{MIP} \frac{\partial u_J^0}{\partial X_P} + e_{PIJ} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_P} + e_{MIJKL} \frac{\partial u_K^0}{\partial X_L} - l_{MPLJ} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_P}, \\ \bar{\varepsilon}_{MP} &= \varepsilon_{MP} \left( 1 - \frac{\partial u_{\varphi}^0}{\partial \xi_{\varphi}} \right) + \varepsilon_{MPW} \frac{\partial u_P^0}{\partial X_W} + \varepsilon_{WP} \frac{\partial u_M^0}{\partial X_W} + l_{MPLJ} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_J} - \varepsilon_{MPW} \frac{\partial \Phi^0}{\partial X_W}, \end{aligned} \quad (\text{II.81.a-b-c})$$

et comme condition au bord :

$$\left( \bar{\sigma}_{IJ} + t_{JP}^0 \frac{\partial u_I}{\partial X_P} \right) N_J = \Lambda_I^\sigma \text{ sur la surface } S^\sigma. \quad (\text{II.82})$$

$\Lambda_I^\sigma$  est la contrainte surfacique appliquée sur la surface  $S^\sigma$ .

Ici, nous vérifions que le changement de repère ramène la symétrie habituelle sur les constantes élastiques qui était perdue dans l'expression des constantes effectives du système de coordonnées de l'état naturel. Ainsi, dans celui de l'état prédéformé,  $\bar{C}_{IJKL} = \bar{C}_{KLIJ} = \bar{C}_{JIKL} = \bar{C}_{IJLK}$  et  $\bar{e}_{MIJ} = \bar{e}_{MJI}$ .

Nous ne retrouvons pas la symétrie sur  $\bar{\epsilon}_{MP}$ , car  $\epsilon_{MPW} \neq \epsilon_{PMW}$ . Dans le cas où on pourra négliger le terme  $\frac{\partial \Phi^0}{\partial X_W}$ , on retrouvera la symétrie  $\bar{\epsilon}_{MP} = \bar{\epsilon}_{PM}$ .

### II.3 Équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte

L'étude se fait à partir des équations du mouvement et constitutives déterminées dans la partie précédente (II.73) et (II.80). Ces équations correspondent à une propagation dans un milieu piézoélectrique contraint. Considérons maintenant une onde plane dans un milieu précontraint de dimensions infinies. Pour une onde plane, tous les points d'un même front d'onde vibrent dans une seule direction avec la même amplitude, et le front d'onde se déplace à vitesse constante dans la direction normale au plan. Seul un milieu homogène admet ce type d'onde. Cela oblige à faire des hypothèses supplémentaires ; le milieu dans lequel les ondes planes se propagent est supposé homogène à l'état naturel et doit posséder des champs de contraintes et de déformations uniformes (prédéformations homogènes).

#### II.3.1 Propagation d'une onde plane dans le système de coordonnées de l'état naturel

En prenant l'équation (II.73.a) développée, nous avons :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\delta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\mu} + \sigma_{\beta\varphi}^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\varphi} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.83})$$

que nous pouvons réduire en :

$$\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\delta \partial \xi_\beta} + \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\beta} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (\text{II.84})$$



avec :

$$\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{\beta\delta}^0. \quad (\text{II.85})$$

Électriquement, nous développons l'équation (II.67.a) en intégrant l'expression (II.73.c) :

$$\tilde{e}_{\mu\gamma\beta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\beta} - \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\varphi} = 0. \quad (\text{II.86})$$

Ce couple d'équations peut être réécrit en supposant que l'onde acoustique est une onde plane se propageant dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\boldsymbol{\eta}$ .  $u_\alpha$  et  $\Phi$  peuvent alors se mettre sous la forme :

$$u_\alpha = \hat{u}_\alpha F \left( t - \frac{\eta_\varphi \xi_\varphi}{\tilde{V}} \right), \quad (\text{II.87.a})$$

$$\Phi = \hat{\Phi} F \left( t - \frac{\eta_\varphi \xi_\varphi}{\tilde{V}} \right), \quad (\text{II.87.b})$$

où  $\tilde{V}$  représente la vitesse de phase et  $\hat{u}_\alpha$  la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction de déplacement des particules dans le système de coordonnées de l'état naturel.

Le champ électrique est longitudinal également (chaque plan d'onde est équipotentiel) :

$$E_\varphi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\varphi} = \frac{\eta_\varphi}{\tilde{V}} \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial \xi_\varphi}. \quad (\text{II.88})$$

La substitution des équations (II.87) dans (II.84) et (II.86) conduit au système :

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} \hat{u}_\gamma + \tilde{\gamma}_\alpha \hat{\Phi} = \rho^0 \tilde{V}^2 \hat{u}_\alpha \\ \tilde{\gamma}_\gamma \hat{u}_\gamma - \tilde{\varepsilon} \hat{\Phi} = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.89.a-b})$$

avec

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} = \tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_\beta \eta_\delta, \quad (\text{II.90.a})$$

$$\tilde{\gamma}_\alpha = \tilde{e}_{\mu\alpha\beta} \eta_\mu \eta_\beta, \quad (\text{II.90.b})$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\mu\varphi} \eta_\mu \eta_\varphi. \quad (\text{II.90.c})$$

En éliminant le potentiel  $\hat{\Phi}$ , le système devient :

$$\rho^0 \tilde{V}^2 \hat{u}_\alpha = \left( \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} + \frac{\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\gamma}{\tilde{\varepsilon}} \right) \hat{u}_\gamma. \quad (\text{II.91})$$

Les polarisations  $\hat{u}_\alpha$  des ondes élastiques planes et les vitesses de phase  $\tilde{V}$  sont déterminées par le calcul des vecteurs propres et valeurs propres respectivement, du tenseur de rang deux :

$$\Delta_{\alpha\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma} + \frac{\tilde{\gamma}_\alpha \tilde{\gamma}_\gamma}{\tilde{\epsilon}}, \quad (\text{II.92})$$

appelé tenseur de Christoffel, ici généralisé au cas d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état naturel.

### II.3.2 Propagation d'une onde plane dans le système de coordonnées de l'état prédéformé

En reprenant une démarche analogue, développant l'équation (II.80.a) :

$$\bar{C}_{IJKL} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_J \partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_J \partial X_M} + t_{JP}^0 \frac{\partial^2 u_I}{\partial X_J \partial X_P} = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.93})$$

que nous réduisons en :

$$\bar{M}_{IJKL} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_J \partial X_L} + \bar{e}_{MIJ} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_J \partial X_M} = \rho^s \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (\text{II.94})$$

avec :

$$\bar{M}_{IJKL} = \bar{C}_{IJKL} + \delta_{IK} t_{JL}^0. \quad (\text{II.95})$$

Nous développons l'équation électrique (II.76.a) en intégrant l'expression (II.80.c) :

$$\bar{e}_{MKJ} \frac{\partial^2 u_K}{\partial X_M \partial X_J} - \bar{\epsilon}_{MP} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_M \partial X_P} = 0. \quad (\text{II.96})$$

En réécrivant cette fois ce couple d'équations au travers d'une onde plane se propageant dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{N}$ , nous réécrivons  $u_I$  et  $\Phi$  sous la forme :

$$u_I = \hat{u}_I F \left( t - \frac{N_P X_P}{\bar{V}} \right), \quad (\text{II.97.a})$$

$$\Phi = \hat{\Phi} F \left( t - \frac{N_P X_P}{\bar{V}} \right), \quad (\text{II.97.b})$$

où  $\bar{V}$  représente la vitesse de phase et  $\hat{u}_I$  la polarisation de l'onde dans ce système de coordonnées.

Le champ électrique est longitudinal également (chaque plan d'onde est équipotentiel) :

$$E_p = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_p} = \frac{N_p}{V} \hat{\Phi} \frac{\partial F}{\partial X_p}. \quad (\text{II.98})$$

La substitution des équations (II.97) dans (II.94) et (II.96) conduit au système :

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{IK} \hat{u}_K + \bar{\gamma}_I \hat{\Phi} = \rho^s \bar{V}^2 \hat{u}_I, \\ \bar{\gamma}_K \hat{u}_K - \bar{\varepsilon} \hat{\Phi} = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.99.a-b})$$

avec

$$\bar{\Gamma}_{IK} = \bar{M}_{IJKL} N_J N_L, \quad (\text{II.100.a})$$

$$\bar{\gamma}_K = \bar{e}_{MKJ} N_M N_J, \quad (\text{II.100.b})$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{MP} N_M N_P. \quad (\text{II.100.c})$$

En éliminant le potentiel  $\hat{\Phi}$ , le système devient :

$$\rho^s \bar{V}^2 \hat{u}_I = \left( \bar{\Gamma}_{IK} + \frac{\bar{\gamma}_I \bar{\gamma}_K}{\bar{\varepsilon}} \right) \hat{u}_K. \quad (\text{II.101})$$

Les polarisations  $\hat{u}_I$  des ondes élastiques planes et les vitesses de phases  $\bar{V}$  sont déterminées par le calcul des vecteurs propres et valeurs propres respectivement, du tenseur de rang deux :

$$\Delta_{IK} = \bar{\Gamma}_{IK} + \frac{\bar{\gamma}_I \bar{\gamma}_K}{\bar{\varepsilon}}, \quad (\text{II.102})$$

appelé tenseur de Christoffel, ici généralisé au cas d'un matériau piézoélectrique sous contrainte dans le système de coordonnées de l'état statique (prédéformé).

### II.3.3 Différence entre les vitesses exprimées dans chacun des systèmes de coordonnées

Ayant défini les équations dans deux systèmes de coordonnées, il faut bien remarquer que les longueurs vont différer, comme l'illustre la figure II.5.

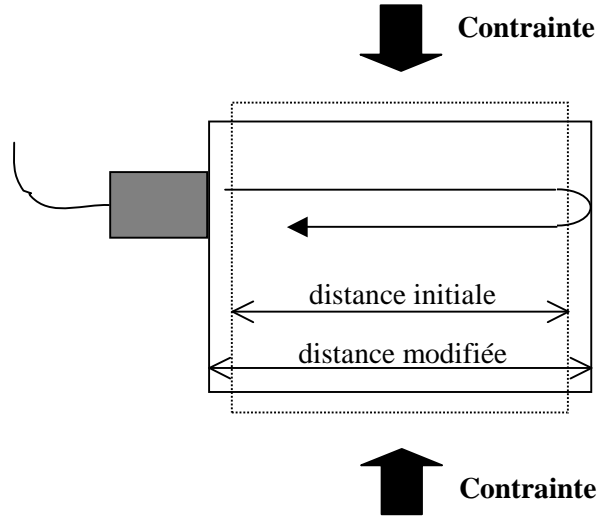


Figure : II.5 : Représentation des variations de longueur de parcours de l'onde acoustique lors d'une mesure sous contrainte statique [Duquennoy1997].

Par définition de sa métrique, les vitesses définies dans le système de coordonnées de l'état naturel sont calculées par rapport à la distance initiale de l'échantillon. Inversement, les vitesses calculées dans le système de coordonnées de l'état précontraint sont calculées par rapport à la distance modifiée. C'est pourquoi les vitesses calculées seront différentes d'un système de coordonnées à un autre.

Dans le but de bien comprendre l'écart entre les vitesses sous contraintes définies dans chacun des systèmes de coordonnées, nous avons développé une relation simple, issue de différentes approximations mécaniques [Pao1984], étendue ici cas du niobate de lithium sous précontrainte mécanique et électrique [Annexe I]. Ainsi, nous réduisons l'étude précédente à une contrainte mécanique appliquée dans la direction  $\xi_3$  avec une onde possédant une direction de propagation parfaitement parallèle à cet axe ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 1$ ). Négligeant l'écart relatif entre le tenseur de Cauchy et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff 2, considérant que l'écart entre les déformations exprimées dans les deux systèmes de coordonnées est faible, que  $u_{1,1}^0 = u_{2,2}^0 \ll u_{3,3}^0$ , que la variation du Jacobien, des tenseurs et des déformations entre les différents systèmes de coordonnées ainsi que les produits de déformations sont négligeables, nous exprimons la différence de vitesse :

$$\bar{V}_L - \tilde{V}_L \cong u_{3,3}^0 V_L^0, \quad (\text{II.103.a})$$

$$\bar{V}_{T_1} - \tilde{V}_{T_1} \cong u_{3,3}^0 V_{T_1}^0, \quad (\text{II.103.b})$$

$$\bar{V}_{T_2} - \tilde{V}_{T_2} \cong u_{3,3}^0 V_{T_2}^0, \quad (\text{II.103.c})$$

avec  $V_L$ ,  $V_{T_1}$  et  $V_{T_2}$  les vitesses sous contrainte correspondant aux modes longitudinaux, transversaux 1 et transversaux 2 respectivement, dans chacun des systèmes de coordonnées, et

$$V_L^0 = \sqrt{\frac{C_{33} + e_{33}^2/\epsilon_{33}}{\rho^0}}, \quad V_{T_1}^0 = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho^0}} \quad \text{et} \quad V_{T_2}^0 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho^0}}$$

les vitesses des modes longitudinal, transverse 1 et 2 en l'absence de contrainte.

Ainsi, dans ce plan de coupe, l'écart entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est directement proportionnel à la prédéformation  $u_{3,3}^0$  et à la vitesse en mode libre pour chaque mode de propagation. Malgré nos approximations, nous verrons dans le chapitre suivant qu'elles sont réalistes et valables dans n'importe quel plan de coupe. Cette relation met en avant le fait que la principale différence entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est liée à la déformation  $u_{3,3}^0$  et donc au phénomène qui l'induit.

## II.4 Calcul du coefficient de couplage dans un matériau piézoélectrique contraint

Ayant défini précédemment le coefficient de couplage en mode plaque (II.47), nous évaluons maintenant ce coefficient dans les deux systèmes de coordonnées.

### II.4.1 Coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées du repère naturel

Par analogie au calcul de l'équation de propagation sous contrainte, le coefficient de couplage sous contrainte prend en compte la contrainte initiale. Ainsi, les constantes du matériau à prendre en compte sont les constantes effectives calculées précédemment. De plus, nous prenons en compte la précontrainte associée au système de coordonnées comme proposé par Auld [Auld1990], soit :

$$\tilde{k}_t^2 = \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{\epsilon}_{33} \tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)}}, \quad (\text{II.104})$$

avec  $\tilde{e}_{33}$ , et  $\tilde{\epsilon}_{33}$  les constantes effectives définies dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.74.b-c) et  $\tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)}$  la constante élastique de raideur sous contrainte mécanique définie par :

$$\tilde{C}_{33}^{D(\sigma_0)} = \tilde{C}_{33} + \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{\epsilon}_{33}} + \sigma_{33}^0, \quad (\text{II.105})$$

où  $\tilde{C}_{33}$  est la constante élastique de raideur définie dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.74.a).

#### II.4.2 Coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées du repère statique

Nous calculons de la même manière le coefficient de couplage sous contrainte dans le système de coordonnées statique en faisant appel aux constantes effectives correspondantes et à la précontrainte définie dans ce repère, soit :

$$\bar{k}_t^2 = \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33} \bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)}}, \quad (\text{II.106})$$

avec  $\bar{e}_{33}$ , et  $\bar{\epsilon}_{33}$  les constantes effectives définies dans le système de coordonnées de l'état naturel (II.81.b-c) et  $\bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)}$  la constante élastique de raideur sous contrainte mécanique définie par :

$$\bar{C}_{33}^{D(\sigma_0)} = \bar{C}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}} + t_{33}^0, \quad (\text{II.107})$$

où  $\bar{C}_{33}$  est la constante élastique de raideur définie dans le système de coordonnées de l'état prédéformé (II.81.a).

#### II.4.3 Différence entre les coefficients de couplage exprimés dans chacun des systèmes de coordonnées

Par analogie au calcul de la différence entre les expressions des vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées, nous faisons le calcul de la différence entre coefficient de couplage dans le niobate de lithium sous les mêmes approximations, soit :

$$\bar{k}_t \cong \tilde{k}_t. \quad (\text{II.108})$$

Ainsi, la différence entre coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées semble négligeable. Nous verrons dans le second chapitre que cette approximation est valable dans tous les plans de coupe du niobate de lithium.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les grandeurs mécaniques utiles à notre étude et décrit les différentes expressions des tenseurs de déformations et contraintes dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons développé la relation entre la contrainte et la déformation dans un solide élastique, puis dans un matériau piézoélectrique au second ordre. De plus, nous avons défini le coefficient de couplage d'un matériau piézoélectrique et exprimé ce coefficient en mode plaque.

Dans un deuxième temps, nous avons développé l'équation du mouvement dans un matériau non piézoélectrique sous précontrainte mécanique dans les deux systèmes de coordonnées, au second ordre. Puis, nous avons généralisé par l'expression des équations de la dynamique et des équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous précontrainte statique, de type électrique ou mécanique développées au même ordre. Les équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte ont été développées dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons évalué les différences entre les vitesses exprimées dans chacun des systèmes de coordonnées sous précontrainte. L'étude du coefficient de couplage sous contrainte a été faite dans les mêmes conditions et nous avons évalué la différence de coefficient entre les deux systèmes de coordonnées.

Ainsi, les expressions des paramètres électro-acoustiques sous précontrainte statique de type électrique ou mécanique dans un matériau piézoélectrique non hystérétique ont été développées à l'ordre 3. Nous illustrons ce modèle sur le niobate de lithium dans le chapitre suivant.

## Chapitre III : Étude numérique des propriétés électro-acoustiques d'un matériau piézoélectrique non hystérétique sous précontrainte statique de type électrique ou mécanique

Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme défini dans le chapitre II pour évaluer certaines propriétés électro-acoustiques d'un matériau piézoélectrique au comportement non hystérétique soumis à une précontrainte statique de type électrique ou mécanique. Nous caractérisons l'évolution des trois modes de vitesses, soient les vitesses longitudinale et transversales, ainsi que le coefficient de couplage (en mode plaque) du niobate de lithium en fonction des deux types de contraintes. Chacune de ces propriétés est décrite dans différents plans de coupe et dans les systèmes de coordonnées naturel et prédéformé.

Sous précontrainte mécanique, nous caractérisons les propriétés du matériau en mode de compression et de traction en évaluant les différences entre les différents tenseurs associés à l'application de la contrainte mécanique, ainsi que les différences entre les calculs de vitesses et coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées (naturel et prédéformé).

Sous contrainte électrique, nous caractérisons les mêmes propriétés du matériau soumis à un champ électrique positif et négatif en évaluant les différences entre les calculs de vitesses et coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées (naturel et prédéformé).



## I Définition de l'étude

### I.1 Le niobate de lithium

Tous les résultats sont présentés pour le niobate de lithium qui présente le grand avantage d'avoir un comportement non hystérétique et des constantes piézoélectriques, élastiques et diélectriques du deuxième et troisième ordre connues. L'ensemble des constantes exposées ont été mesurées à température constante avec leurs incertitudes relatives. La structure cristalline de ce matériau est trigonale (classe 3m) et sa densité volumique à l'état libre est de  $\rho^0 = 4700 \text{ kg/m}^3$ .

#### I.1.1 Constantes du second ordre

Les valeurs de constantes retenues sont celles évaluées par Warner [Warner1967]. L'incertitude sur chacune de ces constantes est évaluée en mesurant l'écart entre ces constantes et celles déterminées par d'autres auteurs [Weis85].

Le tenseur des rigidités élastiques réduit, à champ électrique constant  $C_{\alpha\beta}$  ( $10^{10} \text{ N/m}^2$ ) est égal à :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 20.3 & 5.3 & 7.5 & 0.9 & 0 & 0 \\ 5.3 & 20.3 & 7.5 & -0.9 & 0 & 0 \\ 7.5 & 7.5 & 24.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & -0.9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 7.5 \end{bmatrix}.$$

Les incertitudes associées aux composantes indépendantes sont égales à  $\Delta C_{11} = \pm 0.015$ ,  $\Delta C_{12} = \pm 0.015$ ,  $\Delta C_{13} = \pm 0.015$ ,  $\Delta C_{14} = \pm 0.015$ ,  $\Delta C_{33} = \pm 0.02$ , et  $\Delta C_{44} = \pm 0.001$ . Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de  $\Delta C_{\alpha\beta} = \pm 0.1\%$ .

Le tenseur piézoélectrique réduit  $e_{m\alpha}$  ( $\text{C/m}^2$ ) est égal à :

$$e_{m\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 3.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec les incertitudes des composantes indépendantes égales à  $\Delta e_{15} = \pm 0.1$ ,  $\Delta e_{22} = \pm 0.005$ ,  $\Delta e_{31} = \pm 0.01$ , et  $\Delta e_{33} = \pm 0.46$ . Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de  $\Delta e_{m\alpha} = \pm 7.7\%$ .

Le tenseur diélectrique à déformation constante  $\epsilon_{mp}^S$  ( $10^{-11}$  F/m) est égal à :

$$\epsilon_{mp}^S = \begin{bmatrix} 38.9 & 0 & 0 \\ 0 & 38.9 & 0 \\ 0 & 0 & 25.7 \end{bmatrix},$$

avec les incertitudes des composantes indépendantes égales à  $\Delta \epsilon_{11}^S = \pm 0.42$  et  $\Delta \epsilon_{33}^S = \pm 1.2$ . Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de  $\Delta \epsilon_{mp}^S = \pm 2.5\%$ .

### I.1.2 Constantes du troisième ordre

Les mesures de constantes du troisième ordre du niobate de lithium ont été effectuées par Cho et Yamanouchi [Cho1987], et sont données en Annexe III. Ces derniers ont montré que le nombre de constantes indépendantes se réduit respectivement à :

- 14 constantes élastiques de rigidité,  $C_{(ij)(kl)(mn)} = C_{\alpha\beta\gamma}$ ,
- 13 constantes piézoélectriques,  $e_{m(ij)(kl)} = e_{m\alpha\beta}$ ,
- 3 constantes diélectriques,  $\epsilon_{m(ij)} = \epsilon_{m\alpha}$ ,
- 8 constantes électrostrictives,  $l_{(ij)(kl)} = l_{\alpha\beta}$ ,

où  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$  et où les indices grecs sont les indices contractés de Voigt définis au chapitre II. Dans ce même article, Cho et Yamanouchi, indiquent les éléments de symétrie et évaluent les incertitudes de mesure. Calculant les incertitudes moyennes sur l'ensemble de ces constantes, il vient :

- $\Delta C_{\alpha\beta\gamma} = \pm 32.1\%$ ,
- $\Delta e_{m\alpha\beta} = \pm 42.2\%$ ,
- $\Delta \epsilon_{m\alpha} = \pm 2.5\%$ ,
- $\Delta l_{\alpha\beta} = \pm 22.5\%$ .

Il est important de noter que l'incertitude sur l'ensemble de ces valeurs est non négligeable et constituera une source d'erreur par la suite.

## I.2 Mode de précontrainte

Comme nous l'avons décrit précédemment, les équations dynamiques peuvent être développées dans les systèmes de coordonnées de l'état naturel ou dans celui de l'état statique (prédéformé), chacun caractérisé par des densités volumiques  $\rho^0$  et  $\rho^s$  respectivement. Dans cette configuration, et comme décrit par l'équation (II.4), ces deux paramètres sont reliés par l'expression :

$$\rho^s = J^{-1} \rho^0 \equiv \left( 1 - \frac{\partial u_\varphi^0}{\partial \xi_\varphi} \right) \rho^0. \quad (\text{III.1})$$

Le système de coordonnées global de l'étude est représenté sur la figure III.1.

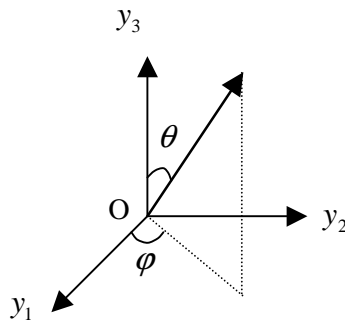


Figure III.1 : Définition des orientations de l'étude.

Dans le cas mécanique, les contraintes mécaniques, élastique et de rupture étaient inconnues jusqu'ici. Suite à la mise en place d'un banc expérimental développé à cet effet, nous montrons dans le chapitre VI que les deux valeurs de contraintes se confondent et sont très sensibles aux conditions de mesures. Ainsi, la limite à la rupture dans le plan de coupe le plus dur du niobate de lithium a été mesuré à environ -110 MPa. Alors que cette limite est théoriquement légèrement inférieure dans les autres plans de coupe et supérieure en traction, nous choisissons d'utiliser cette limite dans tous ces cas. Cette contrainte est appliquée le long de l'axe ( $Oy_3$ ), uniformément sur la surface du matériau et comptée négativement en compression.

Sous contrainte électrique, Miller [Miller1998] a montré que le champ électrique coercitif du niobate de lithium était de l'ordre de 17.5 MV/m. Ainsi, nous considérerons l'application d'un champ électrique inférieur à cette valeur (en valeur absolue) pour ne pas changer la polarisation du

matériau. Cette contrainte est appliquée le long de l'axe ( $Oy_3$ ) uniformément sur la surface du matériau.

Dans ce chapitre, nous évaluons l'évolution des trois modes de vitesses ainsi que du coefficient de couplage en mode plaque, pour les deux types de contraintes (électrique et mécanique), à différents niveaux de contrainte et dans différents plans de coupe du matériau. Nous prendrons deux valeurs d'angle azimutal  $\varphi$ ,  $\varphi = 0^\circ$  et  $\varphi = 90^\circ$  et nous ferons varier l'angle d'élévation  $\theta$  de 0 à  $180^\circ$ .

Les lois de transformations permettant de calculer les valeurs des constantes du matériau dans différents plans de coupe sont obtenues en appliquant différentes transformations matricielles, définies par Auld [Auld90] et décrites en Annexe II. Nous considérons que la contrainte initiale (mécanique ou électrique) est constante dans l'épaisseur du matériau, et nous négligeons tout effet de cisaillement. Ainsi, l'application de la contrainte se fait selon un axe ( $Oy_3$ ) et les propriétés du matériaux sont calculés dans le cas d'un matériau ayant été usiné dans un plan de coupe différent.

## II Étude sous précontrainte mécanique

Parce qu'elle est la plus facile à définir expérimentalement, la contrainte appliquée lors d'un essai de traction/compression est définie comme étant égale au premier tenseur de Piola-Kirchoff (force appliquée par unité de surface initiale) et notée  $P^0$ . Mais comme nous l'avons montré dans le précédent chapitre, les tenseurs de précontrainte intervenant dans les équations dynamiques définies dans les systèmes de coordonnées naturel et statique sont respectivement le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff ( $\sigma^0$ ) et le tenseur de Cauchy ( $t^0$ ).

### II.1 Calcul des déformations initiales

#### II.1.1 Calcul des déformations non-linéaires initiales

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer le tenseur des déformations initiales dans le système de coordonnées de l'état naturel  $u_{\alpha,\beta}^0$ . Sous l'action de la contrainte mécanique, le matériau se déforme et un champ électrique apparaît entre les deux surfaces du matériau par effet piézoélectrique direct. Dans le système de coordonnées de l'état naturel, l'équation (II.68.a) linéarisée décrivant ce phénomène se réduit à :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 - e_{\varphi\alpha\beta} E_{\varphi}^0, \quad (\text{III.2})$$

où le tenseur  $\sigma_{\alpha\beta}^0$  est le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff et  $S_{\gamma\delta}^0$  est le tenseur des déformations (II.50.a), tous deux définis dans le système de coordonnées de l'état naturel.

Dans le cas du niobate de lithium, les constantes piézoélectriques  $e_{\varphi\alpha\beta}$  sont de l'ordre de l'unité, alors que les constantes élastiques de rigidités  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sont de l'ordre de  $10^{10}$  N/m<sup>2</sup>. Le champ électrique coercitif du niobate de lithium étant de l'ordre de 17.5 kV/mm, la composante électrique ( $e_{\varphi\alpha\beta} E_{\varphi}^0$ ) seule ne peut générer plus de 10 MPa. Les niveaux de contraintes mécaniques appliquées étant de l'ordre de la centaine de MPa, l'effet du champ électrique engendrée par effet piézoélectrique est largement négligeable devant la contribution mécanique  $C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0$  dans le calcul des prédéformations [Lematre2006-Lematre2011].

De manière à avoir une estimation plus précise des déformations engendrées par la contrainte mécanique appliquée, nous reprenons l'équation (II.68.a) non-linéarisée, en négligeant le champ électrique induit, soit :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^0 S_{\epsilon\eta}^0. \quad (\text{III.3})$$

Expérimentalement, la contrainte appliquée étant homogène au tenseur de Piola-Kirchoff 1. L'équation (II.11) est utilisée pour relier ce tenseur au deuxième tenseur de Piola-Kirchoff précédent, soit :

$$P_{I\beta}^0 = \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad (\text{III.4})$$

avec  $\partial X_I / \partial \xi_{\alpha}$  le gradient de déplacement entre l'état naturel et l'état prédéformé (II.54.a). L'expression du premier tenseur de Piola-Kirchoff au second ordre est ensuite développé en insérant l'équation (III.3) et en développant le gradient du déplacement (II.50.a). Ainsi, nous obtenons :

$$P_{I\beta}^0 = C_{I\beta\kappa\delta} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} + \frac{1}{2} C_{I\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\gamma}} \frac{\partial u_{\delta}^0}{\partial \xi_{\delta}} + C_{\alpha\beta\kappa\delta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} + \frac{1}{2} C_{I\beta\kappa\delta\eta} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} \frac{\partial u_{\eta}^0}{\partial \xi_{\eta}}. \quad (\text{III.5})$$

Cette relation étant non-linéaire, elle se résout par un algorithme d'optimisation où les valeurs initiales de déformations sont les solutions de l'équation (III.5) linéarisée. Cependant, la résolution du système linéaire donne un système de 9 équations non indépendantes à 9 paramètres indépendants (les 9 composantes de déformations  $u_{\alpha,\beta}^0$ ). En première approximation, il est possible

de considérer que la partie antisymétrique du gradient de déformation (tenseur des rotations) est nulle [Lematre2006], soit :

$$\frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\beta}} = \frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\alpha}}, \quad (\text{III.6})$$

ce qui réduit la partie linéaire du système d'équation à 6 équations indépendantes et 6 inconnues.

Dans la suite du calcul, le premier tenseur de Piola-Kirchoff étant non symétrique (contrairement au tenseur de Piola-Kirchoff 2), le système d'équation comprend 9 composantes indépendantes pour 9 paramètres. La résolution du système non-linéaire ne nécessite donc pas l'approximation (III.6).

Une fois le tenseur des déformations connu dans le système de coordonnées de l'état naturel, nous calculons le tenseur de déformations de l'état prédéformé en utilisant l'équation (II.54.a) Ainsi, les déformations dans les deux systèmes de coordonnées sont reliées par l'équation :

$$\frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\alpha}} = \delta_{i\alpha} \left( \delta_{j\beta} + \frac{\partial u_j^0}{\partial \xi_{\beta}} \right) \frac{\partial u_i^0}{\partial X_j}. \quad (\text{III.7})$$

Cependant, pour être consistant avec l'approximation à l'ordre 3 des termes dynamiques, cet écart entre les deux tenseurs est négligé. Notons que ce dernier est toujours inférieur à 2% et que cette méthode de calcul est une amélioration publiée dans un article récent [Lematre2011] par rapport aux précédents travaux dans le domaine [Su2005-Lematre2005-Lematre2006a].

### II.1.2 Contribution de la non-linéarité de déformations

Les propriétés du matériau évoluant en fonction du plan de coupe et du niveau de contrainte, nous nous intéressons à la non-linéarité de déformation obtenue par optimisation de l'équation (III.5), avec et sans la partie non-linéaire, en fonction de ces deux paramètres. Pour la quantifier, nous traçons l'évolution de l'écart entre le calcul de déformation longitudinale  $S_{33}^0$  linéaire et non-linéaire en fonction des niveaux de contraintes maximaux et de l'angle d'élévation  $\theta$ , pour des plans de coupe  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$  (figure III.2).

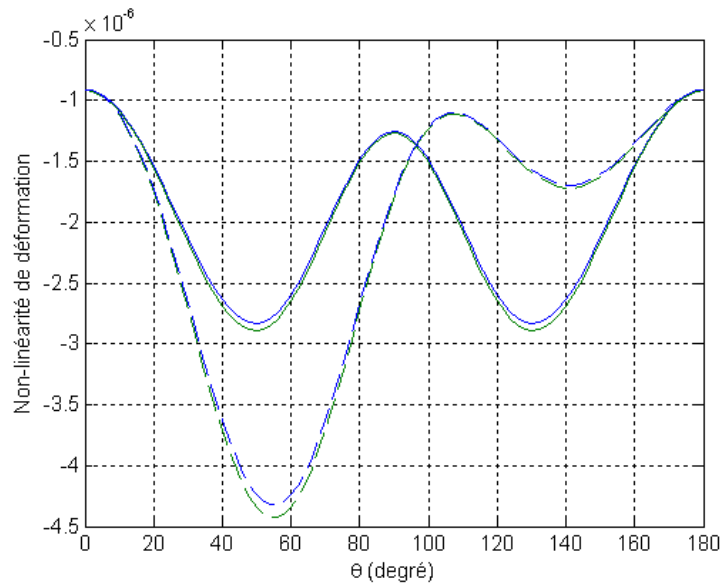


Figure III.2 : Évolution de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle  $\theta$ , pour deux niveaux de contraintes de -110 MPa (lignes bleues) et 110 MPa (lignes vertes), pour  $\varphi = 0^\circ$  (lignes continues) et  $90^\circ$  (lignes discontinues).

Cette figure nous montre que la non-linéarité de déformation longitudinale est plus importante en mode de traction qu'en mode de compression. De plus, l'écart entre les deux calculs de déformations varie majoritairement dans le plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 55^\circ$  où il atteint  $-4.45 \cdot 10^{-6}$ . La figure III.3 illustre l'évolution de la déformation  $S_{33}^0$  pour ce plan de coupe.

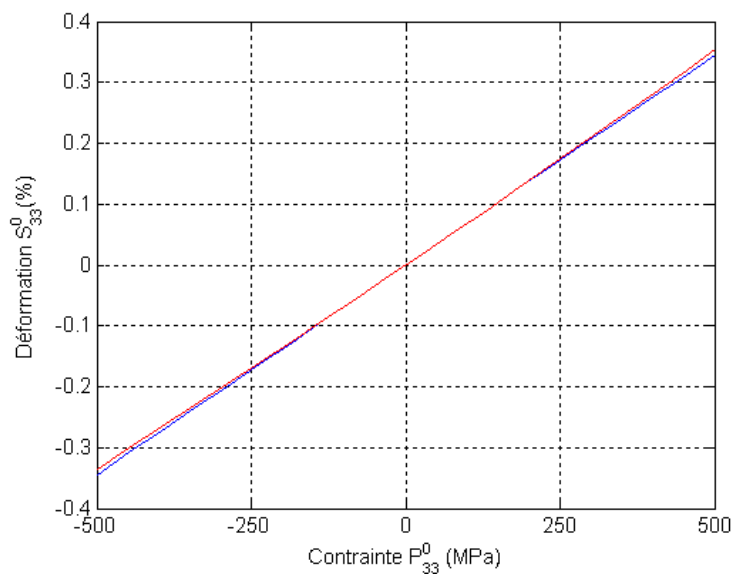


Figure III.3 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique appliquée calculée par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 55^\circ$ .

Sur cette figure, nous calculons la déformation longitudinale par méthode linéaire et non-linéaire dans une gamme de contrainte supérieure à la contrainte de rupture. Ainsi, nous observons qu'en dessous de 250 MPa, la non-linéarité de la déformation est faible, en compression comme en traction. L'écart relatif entre les deux solutions de déformation  $S_{33}^0$  linéaire et non-linéaire est de l'ordre de 0.8% pour une valeur de contrainte  $P_{33}^0 = 110$  MPa. De plus, les déformations sont faibles et ne dépassent pas 0.08% à 110 MPa de contrainte mécanique.

## II.2 Calcul des tenseurs de contraintes initiaux

Comme décrit précédemment, le premier tenseur de Piola-Kirchoff relie la force appliquée à la section de la pièce définie dans le système de coordonnées naturel. Nous avons montré que les tenseurs de précontrainte qui interviennent dans les équations dynamiques de l'état naturel (II.62) et prédéformé (II.63) sont respectivement les tenseurs de Piola-Kirchoff 2 ( $\sigma_{\alpha\beta}^0$ ) et de Cauchy ( $t_{IJ}^0$ ). Les équations (III.4) et (II.53.a) relient les 3 tenseurs entre eux au travers du tenseur de déformations. Le tenseur des déformations ayant été calculé précédemment, le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff et celui de Cauchy sont calculés en fonction des valeurs de contrainte appliquée (contrainte de Piola-Kirchoff 1).

Par la suite, nous nous plaçons dans la configuration d'étude, et nous étudions l'évolution des écarts entre  $P_{33}^0$ ,  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  selon la contrainte  $P_{33}^0$  appliquée dans différentes orientations cristallographiques ( $\varphi, \theta$ ).

### II.2.1 Évolutions des différences entre les différents tenseurs de contraintes initiaux pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.4 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le tenseur de Piola-Kirchoff 1  $P_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées comprises entre -110 et 110 MPa.



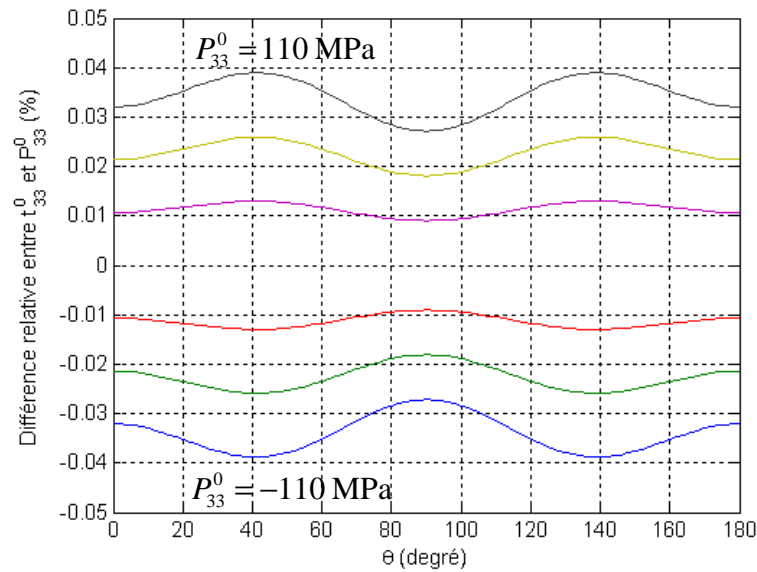


Figure III.4 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le premier tenseur de Piola-Kirchoff  $P_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et  $\varphi = 0^\circ$ .

En comparant les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées, nous observons que l'effet de  $P_{33}^0$  sur  $t_{33}^0$  n'est pas symétrique pour des valeurs de  $P_{33}^0$  égales en valeurs absolues. Ainsi, pour un angle  $\theta = 0^\circ$ , la contrainte appliquée  $P_{33}^0 = 110$  MPa induit une contrainte  $t_{33}^0 = 110.04$  MPa, alors qu'une contrainte  $P_{33}^0 = -110$  MPa induit une contrainte  $t_{33}^0 = -109.96$  MPa, ce qui est en bon accord avec les lois de l'élasticité. On vérifie que lorsque la contrainte de Piola-Kirchoff 1 est négative (positive), la contrainte de Cauchy est plus petite (grande), ce qui est lié à la surface de l'état prédéformé qui est plus grande (petite) que dans l'état naturel. Ainsi, l'écart maximum en mode de traction est observé pour des angles  $\theta = 44^\circ$  et  $134^\circ$  égale à 0.039%.

La figure III.5 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le tenseur de Piola-Kirchoff 2  $\sigma_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour des valeurs de contraintes appliquées (Piola-Kirchoff 1) comprises entre -110 et 110 MPa, pour  $\varphi = 0^\circ$ .

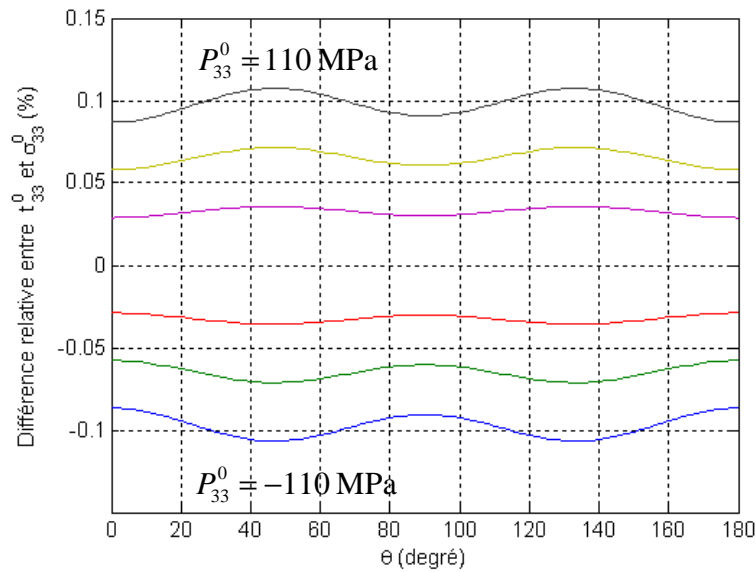


Figure III.5 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff  $\sigma_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et  $\varphi = 0^\circ$ .

Ici aussi, l'effet de la contrainte appliquée engendre une différence relative entre  $t_{33}^0$  et  $\sigma_{33}^0$  non symétrique pour des valeurs de  $P_{33}^0$  égales en valeurs absolues. De plus, il apparaît que la différence entre les deux tenseurs est 2.5 fois plus importante que celle observée précédemment entre  $t_{33}^0$  et  $P_{33}^0$ . Cet écart s'explique par le produit du tenseur de déformation qui apparaît 2 fois entre  $t_{33}^0$  et  $\sigma_{33}^0$  alors qu'il n'apparaît qu'une fois entre  $t_{33}^0$  et  $P_{33}^0$  (équations III.4 et II.53.a). Ainsi, l'écart maximum en mode de traction est observé pour des angles  $\theta = 48^\circ$  et  $138^\circ$  égale à 0.108%.

## II.2.2 Évolutions des différences entre les différents tenseurs de contraintes initiaux pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.6 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le tenseur de Piola-Kirchoff 1  $P_{33}^0$  en fonction de  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées comprises entre -110 et 110 MPa.

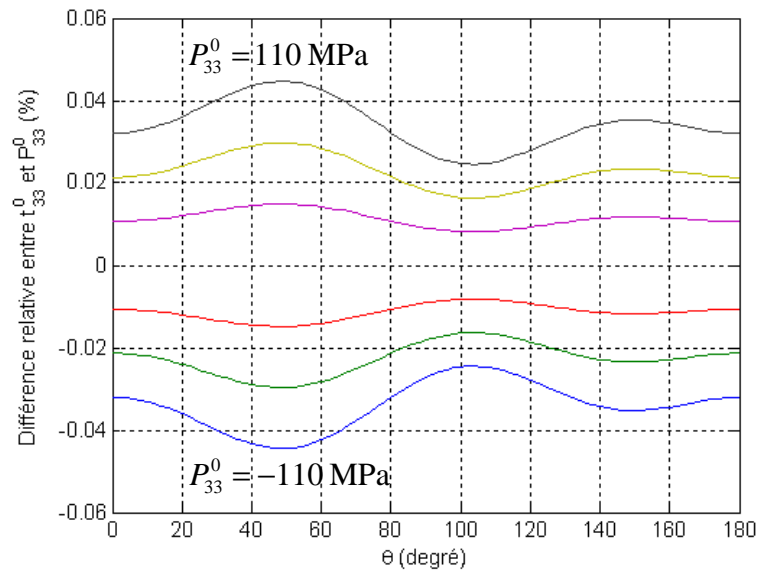


Figure III.6 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le premier tenseur de Piola-Kirchoff  $P_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et  $\varphi = 90^\circ$ .

On vérifie que les valeurs de contraintes à  $\theta = 0^\circ$  et  $180^\circ$ , sont égales au cas précédent. Ici aussi, les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées ne sont pas symétriques pour des valeurs de  $P_{33}^0$  égales en valeurs absolues. L'écart maximum observé est de 0.045% en mode de traction pour un angle  $\theta = 52^\circ$ , donc légèrement plus élevé que dans le plan de coupe précédent.

La figure III.7 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le tenseur de Piola-Kirchoff 2  $\sigma_{33}^0$  pour différentes valeurs de contraintes appliquées (Piola-Kirchoff 1) comprises entre -110 et 110 MPa, en fonction de  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$ .

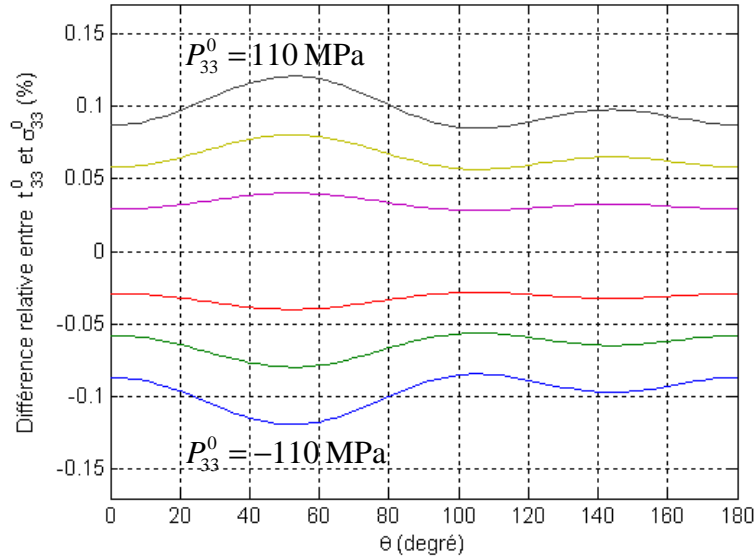


Figure III.7 : Évolutions de la différence entre le tenseur de Cauchy  $t_{33}^0$  et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff  $\sigma_{33}^0$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) pour  $\varphi = 90^\circ$ .

On vérifie que les valeurs de contraintes à  $\theta = 0^\circ$  et  $180^\circ$  sont égales au cas précédent. Ici aussi, les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées ne sont pas symétriques pour des valeurs de  $P_{33}^0$  égales en valeurs absolues. L'écart maximum est observé en mode de traction pour un angle  $\theta = 54^\circ$  égale à 0.12%, donc significativement plus élevé que dans le plan de coupe précédent.

Notons que pour une contrainte appliquée  $P_{33}^0$  comprise entre -110 et 110 MPa, les écarts relatifs entre  $(t_{33}^0, P_{33}^0)$  et  $(t_{33}^0, \sigma_{33}^0)$  sont maximums pour des valeurs de  $\theta$  et  $\varphi$  proches de  $\theta = 130^\circ$  avec  $\varphi = 30^\circ$  et valent respectivement de 0.046% et 0.121%.

### II.3 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées

Les équations de Christoffel dans les 2 systèmes de coordonnées ayant été posées (II.91) et (II.101), nous étudions dans cette partie le comportement des vitesses quasi-longitudinales et des premier et second modes quasi-transversaux en fonction des angles de coupe  $\theta$  et  $\varphi$ , pour différentes valeurs de précontraintes mécaniques. Les 3 modes de vitesses obtenus dans les systèmes de coordonnées naturel et prédéformé sont comparés. Chacun d'eux est présenté dans une

figure différente pour évaluer les différences issues du changement de système de coordonnées. Nous nous intéressons à l'évolution de ces vitesses pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ , en faisant varier l'angle  $\theta$  de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ . Chacune des figures décrit ces évolutions pour des valeurs de contraintes appliquées  $P_{33}^0$  de -110 MPa, 0 et 110 MPa. Les vitesses dans le repère naturel se calculent avec le tenseur  $\sigma_{33}^0$  et celles dans le repère prédéformé avec le tenseur  $t_{33}^0$ . Rappelons qu'à la différence du tenseur de contrainte appliqué  $P_{33}^0$ , les valeurs des deux autres tenseurs changent selon l'angle  $\theta$ .

### II.3.1 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.8 décrit l'évolution de vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

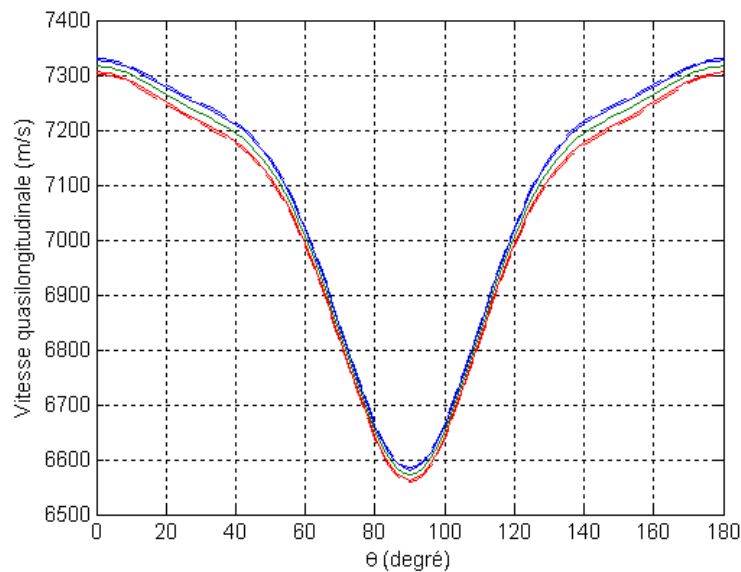


Figure III.8 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Cette figure montre que les comportements globaux des vitesses quasilongitudinales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont égales. L'application d'une contrainte positive (étirement du matériau) diminue la vitesse et inversement, une contrainte négative (compression)

augmente la vitesse. Rappelons que les vitesses dans le système de coordonnées naturel sont liées à l'épaisseur initiale du matériau, alors que les vitesses évaluées dans le repère prédéformé sont liées à l'épaisseur du matériau déformée. Par ailleurs, la variation de vitesse dans le système de coordonnées naturel est plus importante que dans le système de coordonnées de l'état prédéformé. En effet, alors qu'en compression l'épaisseur diminue, le temps de parcours diminue lui aussi. L'épaisseur ne variant pas dans le repère naturel, la variation de vitesse dans ce système de coordonnées est donc plus importante que celle définie dans le repère prédéformé. La plus grande variation de vitesse entre les deux repères est obtenue en traction, car cette variation est liée à la déformation, et cette dernière est plus importante dans ce cas. La différence maximale entre les deux vitesses définies dans chacun des repères est de 5 m/s pour  $\theta = 50^\circ$  à  $P_{33}^0 = 110$  MPa, soit une différence de 0.07%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 4.9 m/s, soit une erreur de 2%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) dans ce même plan de coupe est de l'ordre de 19 m/s, soit une différence de 0.26%.

La figure III.9 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

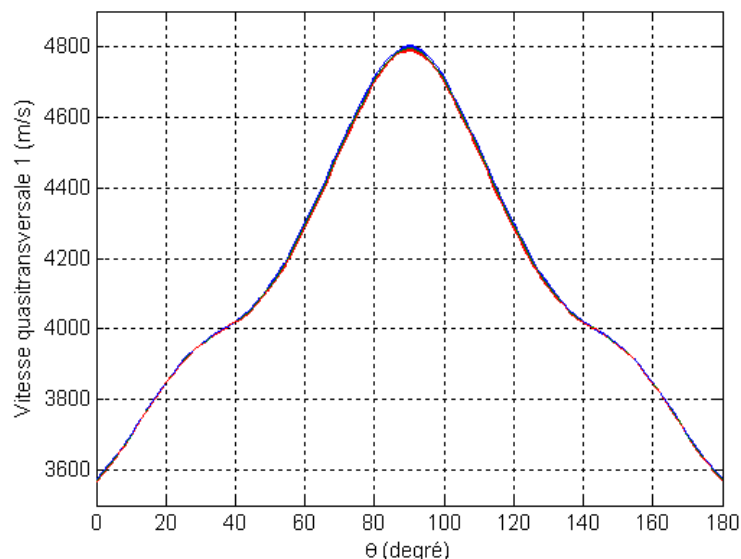


Figure III.9 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, les comportements globaux des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction. Cependant, dans le cas des vitesses définies dans le système de coordonnées de l'état prédéformé uniquement, on observe qu'au niveau des angles  $\theta = [20^\circ - 40^\circ]$  le phénomène de traction diminue la vitesse, alors que la compression l'augmente. Le phénomène inverse est observé au niveau des angles  $\theta = [140^\circ - 160^\circ]$ . Alors que les vitesses longitudinales diminuent pour un angle  $\theta$  proche de  $90^\circ$ , les vitesses de ce mode augmentent pour ce même angle, ce qui est directement lié à la déformation du matériau. La plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour  $\theta = 50^\circ$  et  $\theta = 130^\circ$ ,  $P_{33}^0 = 110$  MPa et est égale à 2.5 m/s, soit une différence de 0.06%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 2.8 m/s, soit une erreur de 12%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 10 m/s, soit 0.24%.

La figure III.10 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

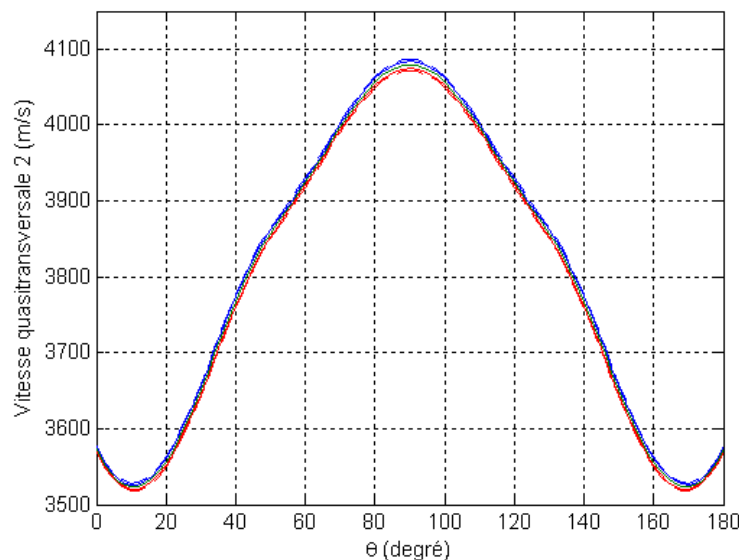


Figure III.10 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, les comportements globaux des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches et la variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. Comme dans le premier mode transverse, la vitesse augmente en se rapprochant de l'angle  $\theta = 90^\circ$ , mais ici, aucun croisement des évolutions de vitesses avec le mode libre n'est observé. La plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour  $\theta = 50^\circ$ ,  $P_{33}^0 = 110$  MPa et est égale à 3 m/s, soit une différence de 0.08%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.65 m/s, soit une erreur de 11.6%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de 6 m/s, soit 0.15%.

### II.3.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.11 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

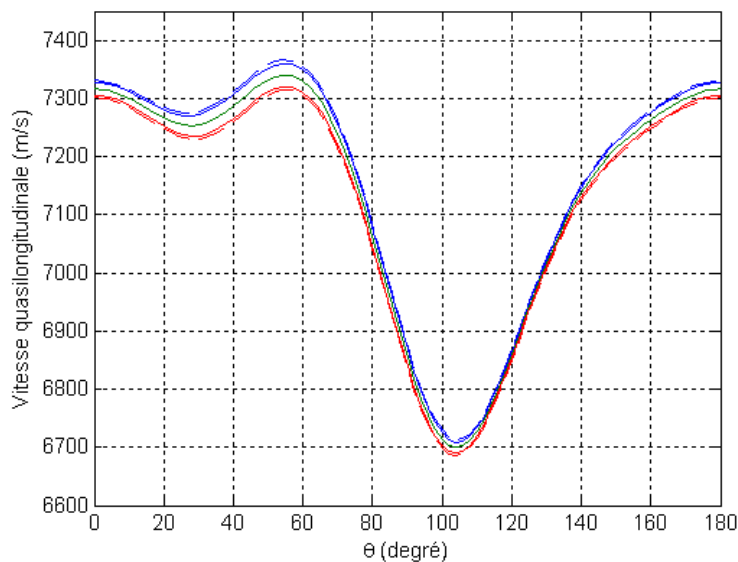


Figure III.11 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).



Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasilongitudinales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. L'application d'une contrainte positive (étirement du matériau) diminue la vitesse et inversement, une contrainte négative (compression) augmente la vitesse. La variation de vitesse dans le système de coordonnées naturel est plus importante que dans le système de coordonnées prédéformé. La plus grande variation de vitesse entre les deux repères est obtenue en traction, et est égale à 5.5 m/s pour  $\theta = 50^\circ$  à  $P_{33}^0 = 110$  MPa, soit une différence de 0.08%. Cet écart est plus important que dans le plan de coupe précédent. Cette différence est en majeure partie due à l'écart entre les tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  qui est plus important pour cette même valeur de  $\theta$  dans ce plan de coupe. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 5.56 m/s, soit une erreur de 0.18 %. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) dans ce plan de coupe est de l'ordre de 26 m/s, soit 0.35%.

La figure III.12 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

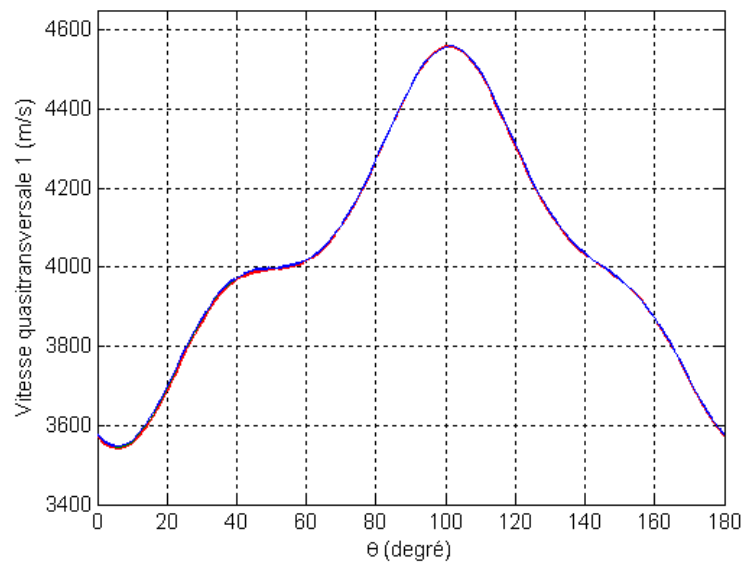


Figure III.12 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasitransversales 1 dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction, mais contrairement à la figure précédente et comme nous l'avons déjà observé dans le plan de

coupe précédent, on observe des croisements des courbes de vitesses définies dans le repère prédéformé et aucun dans le système de coordonnées de l'état naturel. Alors qu'initialement les vitesses en compression sont plus importantes que celles en traction, au niveau de l'angle  $\theta = 80^\circ$ , les vitesses en traction deviennent plus élevées qu'en compression, et s'inversent en  $\theta = 105^\circ$ , puis à nouveau en  $\theta = 145^\circ$  et  $\theta = 163^\circ$ . Pour ce mode aussi, la plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour  $\theta = 50^\circ$ ,  $P_{33}^0 = 110$  MPa et est égale à 2.6 m/s, soit une différence de 0.06%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 3.01 m/s, soit une erreur de 15%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 4 m/s, soit 0.1%.

La figure III.13 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

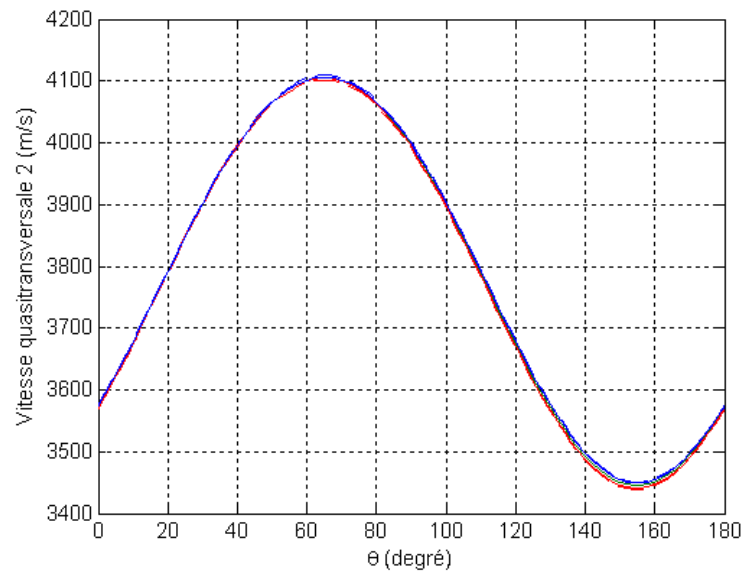


Figure III.13 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasitransversales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction, mais comme nous l'avons déjà observé, les courbes de vitesses définies dans le repère prédéformé se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées de l'état naturel. Ainsi, au

niveau de l'angle  $\theta = 20^\circ$ , les vitesses en traction sont plus élevées qu'en compression, et s'inversent en  $\theta = 55^\circ$ . Pour ce mode aussi, la plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour  $\theta = 50^\circ$ ,  $P_{33}^0 = 110$  MPa et est égale à 3.2 m/s, soit une différence de 0.08%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs  $\sigma_{33}^0$  et  $t_{33}^0$  qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.74 m/s, soit une erreur de 14%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel pour le plan de coupe en  $\theta = 150^\circ$ , calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 6.4 m/s, soit 0.19%.

## II.4 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées

Les expressions des coefficients de couplage en mode plaque ayant été établies dans les deux systèmes de coordonnées (II.104) et (II.106), nous étudions dans cette partie l'évolution du  $k_t$  en fonction des angles de coupe  $\theta$  et  $\varphi$ , pour différentes valeurs de contraintes.

### II.4.1 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.14 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$  et pour différents niveaux de contrainte (-110, 0, 110 MPa) et un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$ .

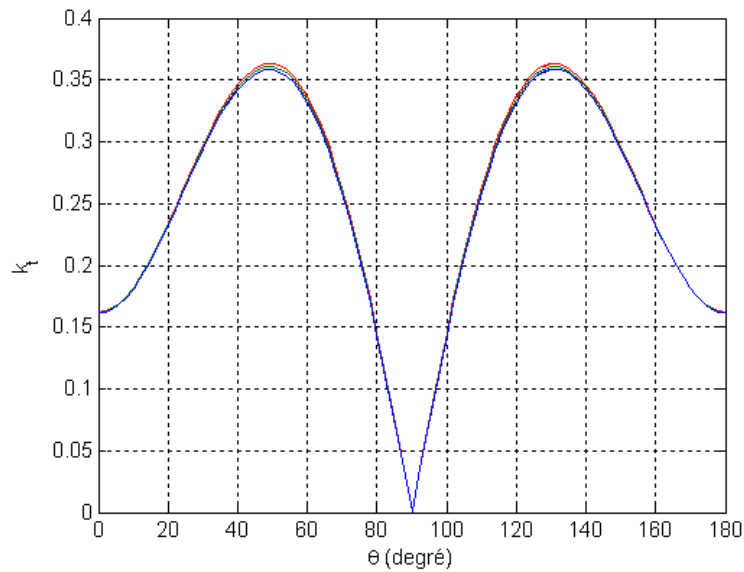


Figure III.14 : Évolutions du coefficient de couplage  $k_t$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

On observe que la valeur du coefficient de couplage varie en fonction du plan de coupe et de la valeur de la précontrainte. Le coefficient de couplage augmente en traction et diminue en compression. Cet écart est très faible pour des valeurs de  $\theta$  proches de  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , et plus important pour  $\theta = 50^\circ$  et  $128^\circ$ , jusqu'à  $+0.69\%$  pour  $\theta = 50^\circ$ . Près de cet angle, la position des maximums n'est pas changée par le changement de système de coordonnées, mais elle est décalée de quelques degrés en moins ou en plus selon que la contrainte est négative ou positive respectivement. Inversement, près de  $\theta = 128^\circ$ , les maximums sont observés pour des angles  $\theta$  plus ou moins grands selon que la contrainte est positive ou négative respectivement. Comme dans le cas des vitesses, l'évolution du coefficient est plus importante en mode de traction. Cependant, la différence entre le coefficient calculé dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est très faible, en accord avec notre approximation (II.108). Ceci s'explique du fait que les modifications occasionnées par le changement de système de coordonnées modifient uniquement les constantes effectives et le tenseur de contrainte initial, alors que les changements dans le calcul des vitesses sont très sensibles au champ de déformation lui-même, qui intervient plusieurs fois dans l'expression.

## II.4.2 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.15 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$  et pour différents niveaux de contrainte (-110, 0, 110 MPa) et un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$ .

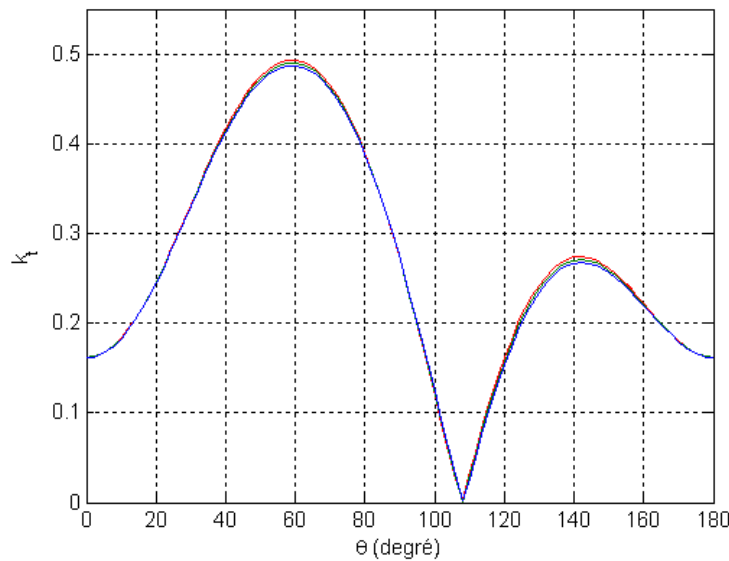


Figure III.15 : Évolutions du coefficient de couplage  $k_t$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, la valeur du coefficient varie en fonction du plan de coupe et de la valeur de la précontrainte. Pour des valeurs de  $\theta$  égales à  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , la valeur du coefficient évolue très peu selon le niveau de contrainte. Cet écart est maximum pour  $\theta = 59^\circ$ , qui correspond approximativement au plan Y+36 pour lequel le coefficient est égale à 0.49 (dans le cas libre) [Royer1999], et vaut 0.4932 soit un écart de +0.65%. Cependant, l'augmentation est maximum en  $\theta = 140^\circ$  et vaut +1.1%. Cette valeur est plus ou moins grande selon le type de contrainte, traction ou compression respectivement. Près de l'angle  $\theta = 89^\circ$ , les courbes se croisent et le coefficient de couplage en compression devient supérieur à celui calculé en mode libre et inversement pour le mode de traction. L'ensemble de ces courbes s'annule près de  $\theta = 104^\circ$ , plus ou moins selon le mode de traction ou compression. Le coefficient de couplage augmente en traction et diminue en compression tant que l'angle  $\theta$  est compris entre  $0^\circ$  et  $87^\circ$ , et entre  $104^\circ$  et  $180^\circ$ . Cet écart est très faible pour des valeurs de  $\theta$  proches de  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , et important pour des angles  $\theta = 50^\circ$  et  $128^\circ$ . Près de  $\theta = 142^\circ$ , plus ou moins selon le mode de traction ou compression, on observe un

deuxième maximum. Comme dans le plan de coupe précédent, la différence entre les calculs de coefficients dans les deux repères est largement négligeable, en bon accord avec l'approximation (II.108).

## II.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré que les paramètres de vitesses et coefficient de couplage issus du modèle développé dans le précédent chapitre dépendent du plan de coupe, du niveau et du type de contrainte appliquée, mais aussi du système de coordonnées dans lequel le mouvement est étudié. De plus, nous avons vu que la non-linéarité de déformation longitudinale n'excède pas 0.8% à contrainte maximum et que l'écart entre les différents tenseurs de contrainte n'excède pas 0.108%. Ces différences sont toutes plus importantes en mode de traction dans les deux plans de coupe.

L'étude de l'évolution des vitesses dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle  $\theta$  pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$  et des niveaux de contrainte de -110 à 110 MPa. Cette étude a montré que la différence entre les deux expressions de vitesses longitudinale et transversale pour  $\varphi = 0^\circ$  sont inférieures à 19 m/s et 10 m/s, soit 0.26% et 0.24% respectivement. Dans le plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$ , ces écarts sont de 26 m/s et 3.2 m/s, soit 0.35% et 0.08%. Dans le cas des vitesses transversales exprimées dans le système de coordonnées de l'état prédéformé, nous avons observé que les courbes d'évolutions de différents niveaux de contrainte se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées naturel.

De plus, nous avons montré que les approximations de changement de vitesses entre système de coordonnées étaient inférieures à 0.08%, donc relativement négligeable. Notons que ces écarts étaient décrits par nos approximations, avec une précision de l'ordre de quelques pour cents.

L'étude de l'évolution des coefficients de couplage en mode plaque dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle  $\theta$  pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$  et des niveaux de contrainte de -110 à 110 MPa. Cette étude a montré que l'écart entre le coefficient calculé en mode libre et sous contrainte peut atteindre jusqu'à +0.69% et +1.1% respectivement, mais décroît jusqu'à une valeur nulle selon le plan de coupe et la contrainte appliquée. Notons que les deux maximums de gains sont observés au maximum du coefficient de chaque plan de coupe du matériau, notamment celui du plan  $\varphi = 90^\circ$  et Y+36, où le niobate de lithium possède son  $k_t$  le plus grand.

De plus, nous avons constaté que la différence entre les coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées est très largement négligeable, comme prédit par nos approximations.

### III Étude sous précontrainte électrique

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement du niobate de lithium sous précontrainte électrique. Les valeurs de champs électriques imposés sont comprises entre -17.5 et 17.5 MV/m le long de l'axe ( $Oy_3$ ) avec un pas de 8.75 MV/m. L'étude est faite pour deux valeurs d'angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ , et des valeurs de  $\theta$  allant de 0 à  $180^\circ$ .

#### III.1 Calcul des déformations initiales

##### III.1.1 Calcul des déformations non-linéaires initiales

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les composantes de déformations initiales dans le système de coordonnées de l'état naturel en se servant de l'équation (II.68.a). Pour être consistant avec l'approximation à l'ordre 3 des termes dynamiques, nous considérons ici aussi que les prédéformations définies dans le système de coordonnées naturel sont égales à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé. L'écart entre la représentation du vecteur champ électrique entre les deux systèmes de coordonnées est lui aussi négligé pour les mêmes raisons.

Par effet piézoélectrique indirect, le champ électrique appliqué induit une contrainte mécanique. Reprenant l'équation (II.68.a) linéarisée pour calculer le gradient linéaire de déformation, nous procédons aux mêmes approximations que précédemment. Ainsi, alors que sous contrainte mécanique nous négligeons l'effet du champ électrique induit devant celui de la contrainte mécanique, nous négligeons ici l'influence du champ de contrainte mécanique induit sur les prédéformations. L'équation (II.68.a) devient alors :

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} \frac{\partial u_\epsilon^0}{\partial \xi_\eta} - e_{\varphi\alpha\beta} E_\varphi^0 - e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} E_\varphi^0 - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} E_\varphi^0 E_\omega^0 = 0 \quad (\text{III.8})$$

Cette relation est non-linéaire et se résout par un algorithme d'optimisation où les valeurs initiales de déformations sont les solutions de cette même équation linéarisée soit :

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - e_{\varphi\alpha\beta} E_\varphi^0 = 0 \quad (\text{III.9})$$

Comme dans le cas précédent, la résolution du système linéaire oblige à considérer l'approximation (III.6).

### III.1.2 Contribution de la non-linéarité de déformations

Les propriétés du matériau évoluant en fonction du plan de coupe et du niveau de champ électrique, nous nous intéressons ici à la non-linéarité de déformation obtenue par optimisation de l'équation (III.8), avec et sans la partie non-linéaire, en fonction de ces deux paramètres. Pour la quantifier, nous traçons l'évolution de l'écart entre le calcul de déformation longitudinale  $S_{33}^0$  linéaire et non-linéaire en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$ , pour des angles azimutaux  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$  et des valeurs de champs maximales.

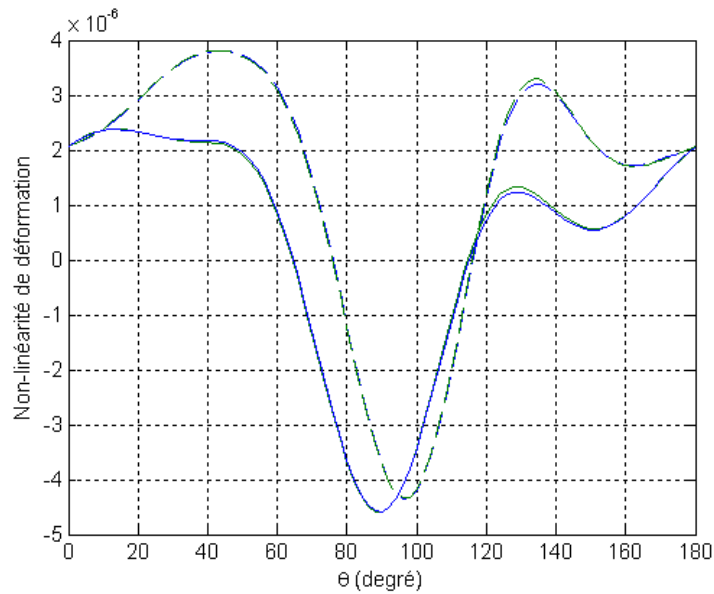


Figure III.16 : Évolutions de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle  $\theta$ , pour deux niveaux de champs électriques, soit  $-17.5 \text{ MV/m}$  (lignes bleues) et  $17.5 \text{ MV/m}$  (lignes vertes) et pour  $\varphi = 0^\circ$  (lignes continues) et  $90^\circ$  (lignes discontinues).

Cette figure montre que dans les deux plans de coupe, la valeur de la contrainte électrique induit peu de différence dans le calcul de la déformation longitudinale. Par ailleurs, nous observons que selon le plan de coupe, l'écart entre le calcul de déformation linéaire et non-linéaire est positif ou négatif. Ainsi, l'écart maximum observé est de  $-4.6 \times 10^{-6}$  pour un plan de coupe  $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta = 89^\circ$  pour un champ électrique positif.

La figure III.17 illustre l'évolution de la déformation  $S_{33}^0$  pour ce plan de coupe.



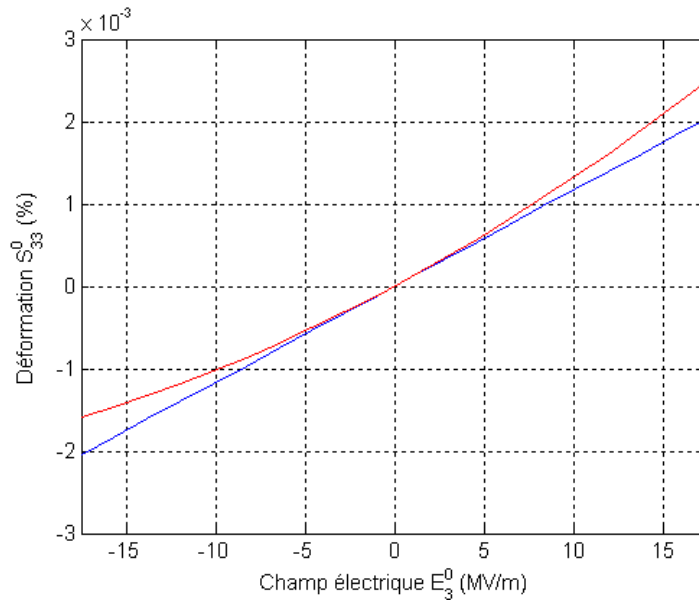


Figure III.17 : Évolutions de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe  $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta = 89^\circ$ .

Nous observons que les déformations sont très petites, mais que la non-linéarité dans ce plan de coupe est non négligeable. L'écart relatif entre ces deux courbes est maximum pour une valeur de champ de 17.5 MV/m et atteint +22.5%.

Notons que dans ce cas, la déformation est très petite, ce qui engendre un pourcentage d'écart conséquent, alors que dans le plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 42^\circ$  ou la déformation non-linéaire est de l'ordre de 0.06%, soit une non-linéarité de 0.63%.

### III.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées

Les équations de Christoffel ayant été posées dans les 2 systèmes de coordonnées (II.91) et (II.101), nous étudions dans cette partie le comportement des modes de vitesses quasi-longitudinales et premiers et seconds modes quasi-transversaux en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$ , pour différentes valeurs de champs électriques. Chacun des modes est présenté dans une figure différente pour évaluer les différences de chacun d'eux selon le système de coordonnées dans lequel les vitesses sont exprimées. Nous nous intéressons à l'évolution de ces vitesses pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ , en faisant varier l'angle  $\theta$  de 0 à  $180^\circ$ . Chacune des figures décrit ces évolutions pour des valeurs de champ électrique de -17.5, 0 et 17.5 MV/m.

### III.2.1 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.18 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

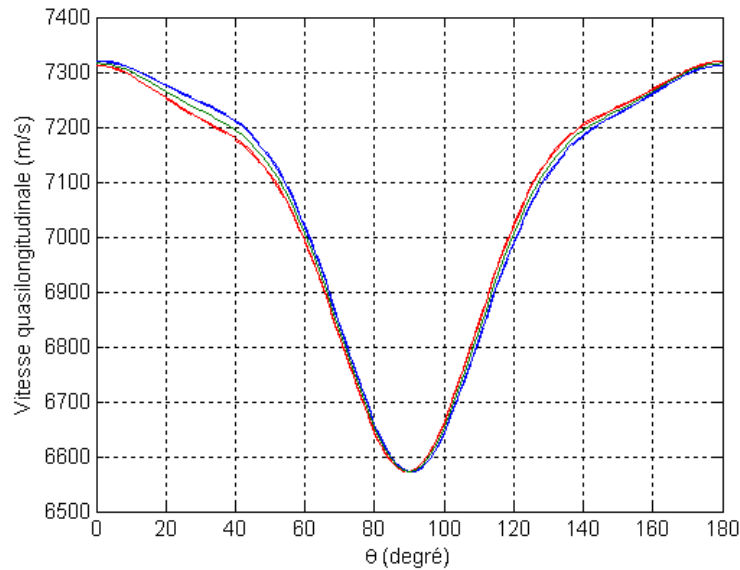


Figure III.18 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées. On vérifie que les valeurs de vitesses à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Dans les deux systèmes de coordonnées, les vitesses à champs électriques négatifs sont initialement plus importantes que celles calculées à champ électrique positif, en accord avec la déformation négative induite par le champ électrique négatif. Cet écart augmente en se rapprochant de l'angle  $\theta = 40^\circ$  et diminue en se rapprochant de  $\theta = 90^\circ$ , dans les deux systèmes de coordonnées. Au-delà de cet angle, les vitesses sous champ électrique positif deviennent supérieures aux vitesses sous champs électriques négatifs. La sensibilité du matériau aux champs électriques augmente en se rapprochant de l'angle  $\theta = 130^\circ$  et diminue par la suite. L'écart maximum entre la vitesse longitudinale en mode libre et celle sous contrainte électrique est observé dans le plan de coupe  $\theta = 40^\circ$  et sous un champ électrique de -17.5 MV/m, et est de 19 m/s, soit 0.26%.

L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle  $\theta = 40^\circ$  et champ électrique de  $-17.5$  MV/m et vaut  $3$  m/s, soit  $0.04\%$ , donc négligeable. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de  $2.9$  m/s, soit une erreur de  $3.3\%$ .

La figure III.19 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de  $(-17.5, 0, 17.5$  MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

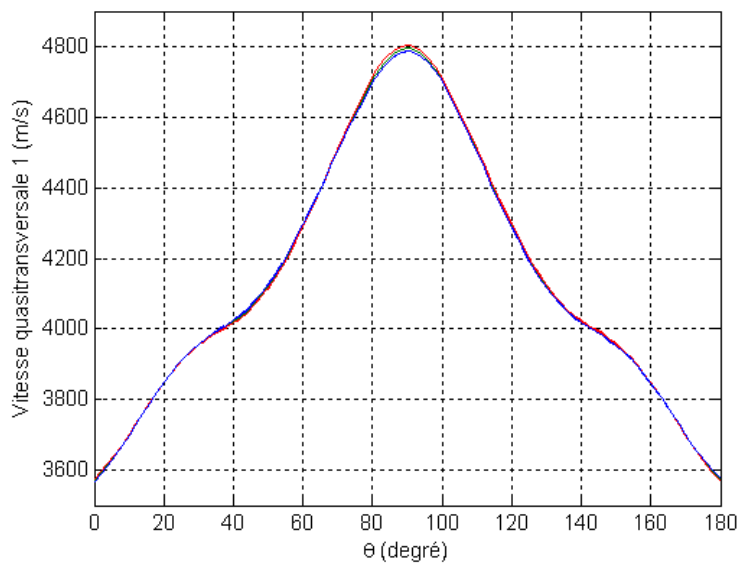


Figure III.19 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de  $(-17.5, 0, 17.5$  MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesse à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champs électriques positifs sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique positif, mais ceci s'inverse près de  $\theta = 17^\circ$  ( $14^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $21^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de  $\theta = 67^\circ$  ( $67^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $66^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé) et finalement près de  $\theta = 164^\circ$  ( $167^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $165^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique avec un écart maximum près de  $\theta = 90^\circ$  où l'écart entre la vitesse quasitransversale 1 en mode libre et celle sous contrainte électrique de  $17.5$  MV/m vaut  $9$  m/s, soit  $0.18\%$ .

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont inférieures (supérieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé pour des valeurs de champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle  $\theta = 17^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte électrique négative (positive). Au-delà de l'angle  $\theta = 67^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sous contrainte électrique positive (négative). Au-delà de l'angle  $\theta = 105^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte électrique positive (négative). Au-delà de l'angle  $\theta = 165^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sous contrainte électrique négative (positive). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle  $\theta = 48^\circ$  et champ électrique de 17.5 MV/m et vaut 2 m/s, soit 0.04%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 1.85 m/s, soit une erreur de 7.5%.

La figure III.20 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

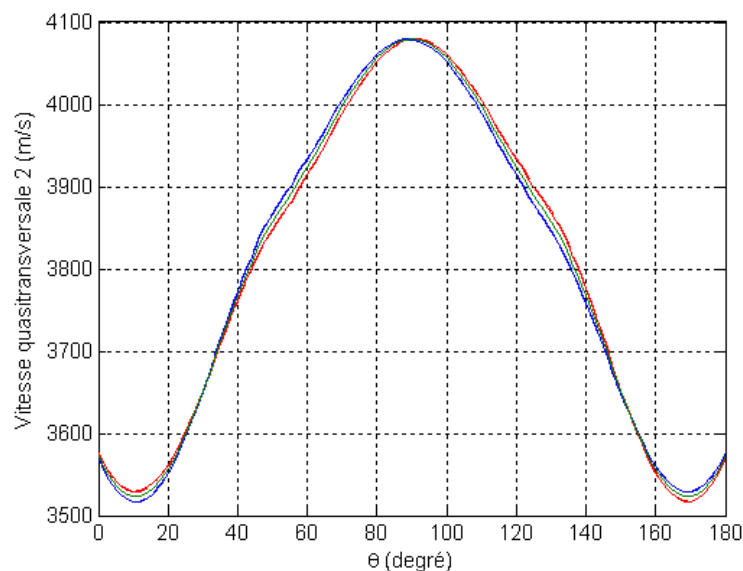


Figure III.20 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon différents niveaux de champs électriques et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesses à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champs électriques positifs sont plus importantes que celles calculées à champ électrique positif, mais ceci s'inverse près de l'angle  $\theta = 30^\circ$  ( $29^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $31^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de  $\theta = 90^\circ$  (dans les deux systèmes de coordonnées) et finalement près de  $\theta = 153^\circ$  ( $154^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $152^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique, avec un écart maximum entre la vitesse quasitransversale 2 en mode libre et celle sous contrainte électrique observé dans le plan de coupe  $\theta = 130^\circ$  sous un champ électrique de 17.5 MV/m qui vaut 7 m/s, soit 0.18%.

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont inférieures (supérieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle  $\theta = 30^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique négatif (positif). Au-delà de l'angle  $\theta = 90^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle  $\theta = 154^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées naturel sous champ électrique négatif (positif). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle  $\theta = 130^\circ$  et champ électrique de 17.5 MV/m, et est de 2 m/s, soit 0.05%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 1.85 m/s, soit une erreur de 7.5%.

### III.2.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.21 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

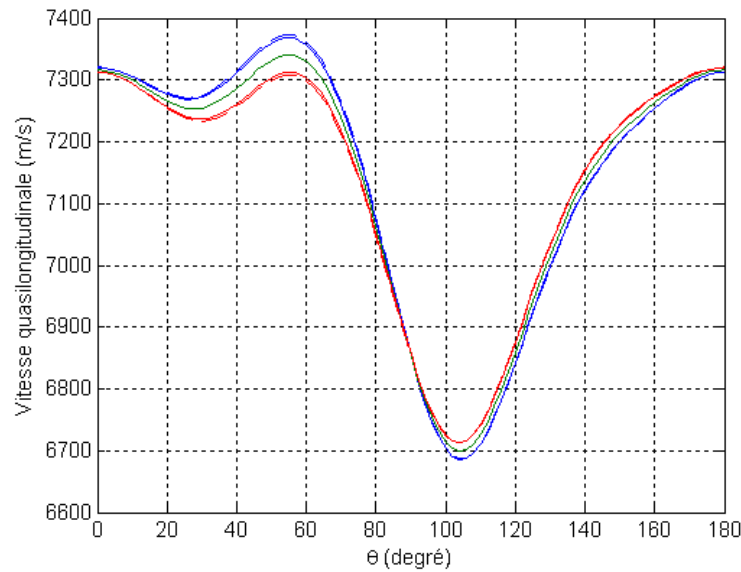


Figure III.21 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées. On vérifie que les valeurs de vitesses à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champ électrique négatif sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique positif, ce qui est en accord avec la déformation négative induite par le champ électrique négatif. Cet écart augmente en se rapprochant de l'angle  $\theta = 40^\circ$  et diminue en se rapprochant de  $\theta = 90^\circ$  ( $91^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $89^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé) où les vitesses sous champ électrique positif deviennent supérieures aux vitesses sous champ électrique négatif. L'évolution des vitesses est ensuite très sensible au champ électrique, puis cette sensibilité se réduit près de  $\theta = 180^\circ$ . L'écart maximum entre la vitesse longitudinale en mode libre et celle sous contrainte électrique de -17.5 MV/m dans un plan  $\theta = 55^\circ$  est de 33 m/s, soit 0.44%.

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé quand soumises à un champ électrique négatif (positif). Au-delà de  $\theta = 108^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé, pour des valeurs de champs électrique positif (négatif). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées maximum près de l'angle  $\theta = 55^\circ$  et champ électrique de -17.5 MV/m est de 5 m/s, soit 0.07%, donc négligeable. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 4.9 m/s, soit une erreur de 2%.

La figure III.22 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

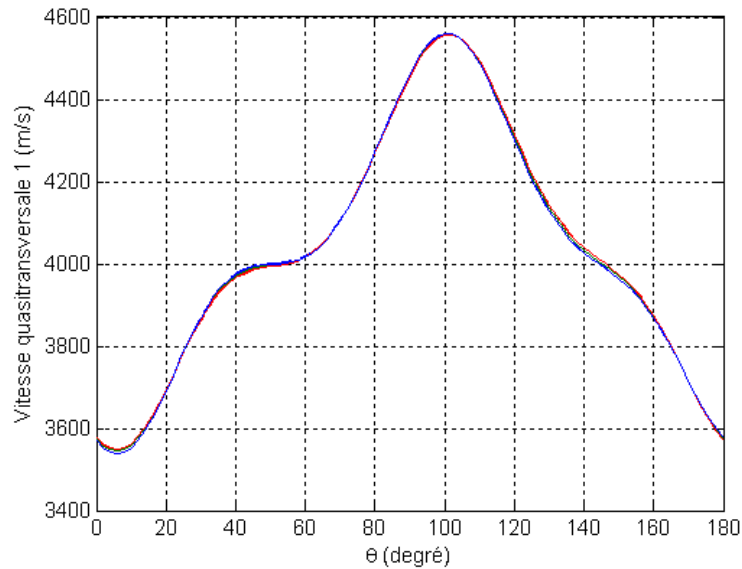


Figure III.22 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesses à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champ électrique positif sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique négatif, mais ceci s'inverse près de  $\theta = 23^\circ$  ( $22^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $24^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de  $\theta = 105^\circ$  ( $104^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $105^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé) et finalement près de  $\theta = 169^\circ$  ( $170^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $169^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique avec un écart maximum par rapport au mode libre près de  $\theta = 130^\circ$  pour une contrainte électrique de 17.5 kV/m qui 9 m/s, soit 0.21% de différence.

Initialement, les vitesses calculées dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées naturel quand soumises à un champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle  $\theta = 30^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé quand soumis à un champ électrique négatif (positif). Au-delà de l'angle  $\theta = 174^\circ$ , les

vitesse définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) à celles calculées dans le système de coordonnées naturel quand soumis à un champ électrique négatif (positif). Par ailleurs, l'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle  $\theta = 50^\circ$  et champ électrique de 17.5 kV/m est de 3 m/s, soit 0.08%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 2.55 m/s, soit une erreur de 15%.

La figure III.23 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

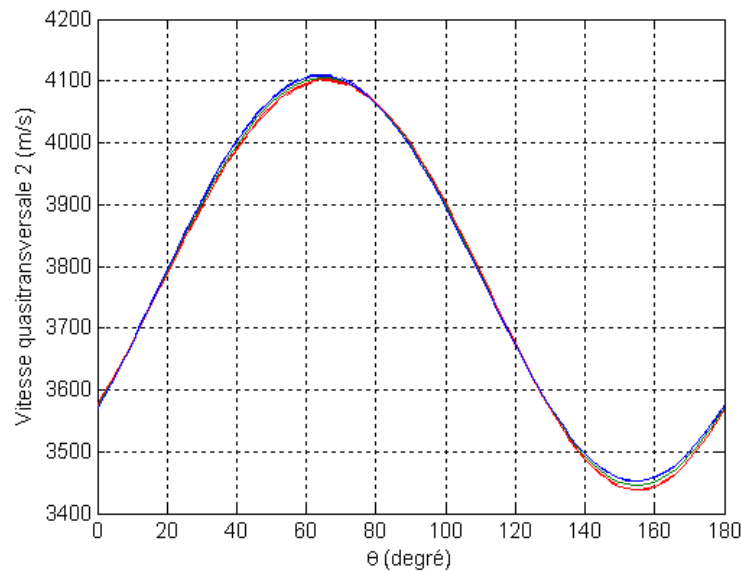


Figure III.23 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesses à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champ électrique positif sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique négatif, mais ceci s'inverse près de  $\theta = 11^\circ$  ( $10^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $12^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de  $\theta = 80^\circ$  ( $84^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $75^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé) et finalement près de  $\theta = 125^\circ$  ( $127^\circ$  dans le système de coordonnées naturel et  $124^\circ$  dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique avec un écart maximum près de  $\theta = 154^\circ$ . L'écart pour ce même



plan de coupe, entre la vitesse quasitransversale 2 en mode libre et celle sous contrainte électrique de -17.5 kV/m est de 7 m/s, soit 0.2%.

Initialement, les vitesses calculées dans le système de coordonnées naturel et à champ électrique positif (négatif) sont inférieures (supérieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé. On observe que ce phénomène s'inverse pour  $\theta = 17^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le repère prédéformé quand soumises à un champ électrique négatif (positif). Au-delà de l'angle  $\theta = 80^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte positive (négatif) deviennent inférieures (supérieures) à celles définies dans le système de coordonnées naturel. Une fois l'angle  $\theta = 112^\circ$ , les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont toutes supérieures à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé. L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle  $\theta = 64^\circ$  et champ électrique de -17.5 kV/m. Il est de 3 m/s, soit 0.07%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.8 m/s, soit une erreur de 6.6%.

### III.3 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées

Les expressions des coefficients de couplage en mode plaque ayant été établies dans les deux systèmes de coordonnées (II.104) et (II.106), nous étudions dans cette partie l'évolution du  $k_t$  en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$ , pour différentes valeurs de champs électriques.

#### III.3.1 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.24 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$  et pour différents niveaux de champs électriques (-17.5, 0, 17.5 MV/m) pour un angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$ .

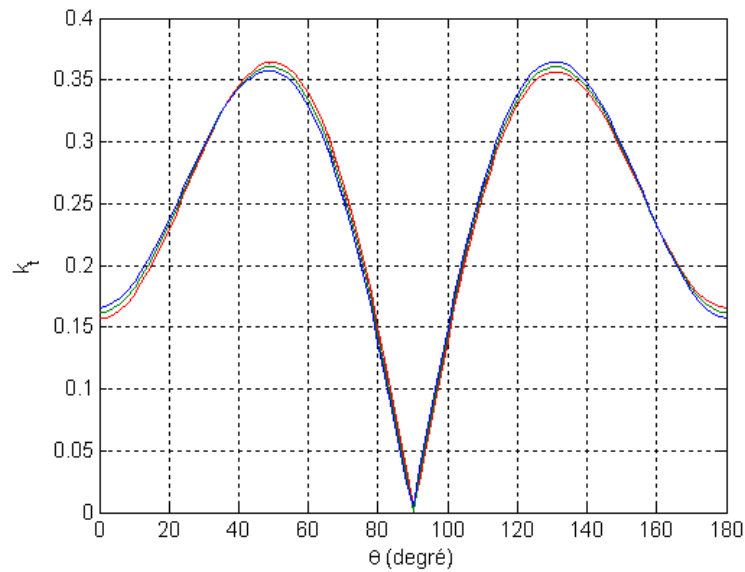


Figure III.24 : Évolutions du coefficient de couplage  $k_t$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 0^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons que la sensibilité du coefficient au champ électrique appliqué est initialement grande, le champ électrique négatif (positif) augmente (diminue) la valeur du coefficient. Dans les deux systèmes de coordonnées, ce comportement s'inverse à partir de l'angle  $\theta = 35^\circ$ . Cette sensibilité augmente jusqu'à  $\theta = 50^\circ$  puis décroît jusqu'à une valeur nulle du coefficient de couplage pour un angle d'élévation  $\theta = 90^\circ$ . Passé cet angle, le coefficient de couplage augmente avec la sensibilité et est maximum en  $\theta = 131^\circ$ . Au cours de cette croissance, le coefficient est augmenté (diminué) par l'application d'un champ électrique négatif (positif) et ce, jusqu'à un angle  $\theta = 161^\circ$  où cet ordre s'inverse. On vérifie alors que les valeurs de coefficients à  $\theta = 0^\circ$  sont égales à celles en  $\theta = 180^\circ$  pour des valeurs de champs électriques opposés. La différence entre le coefficient de couplage en mode libre et sous contrainte électrique est maximum pour  $\theta = 180^\circ$  et une valeur de champ électrique positif, et est égale à +2.9%.

L'évaluation de l'écart maximum entre le calcul du coefficient de couplage dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est inférieure à 0.02%, en accord avec l'approximation (II.108), donc largement négligeable.

### III.3.2 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.25 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$  et pour différents niveaux de champs électriques (-17.5, 0, 17.5 MV/m) pour un angle azimutal  $\varphi = 90^\circ$ .

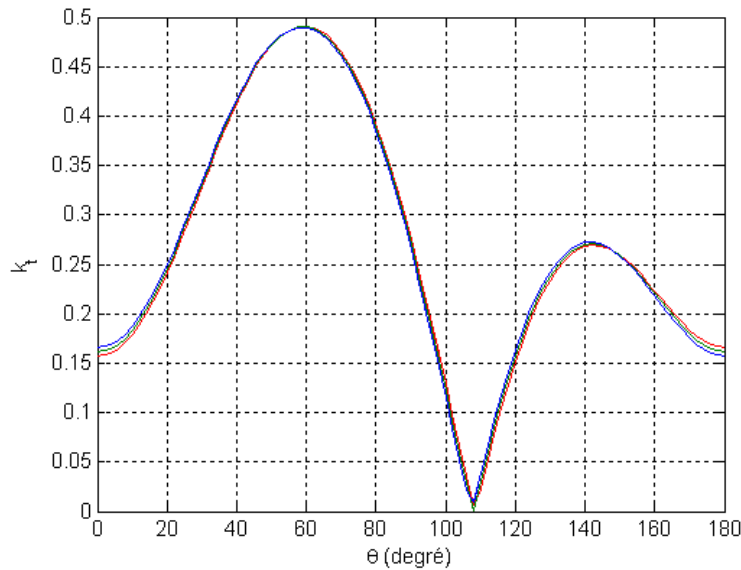


Figure III.25 : Évolutions du coefficient de couplage  $k_t$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour  $\varphi = 90^\circ$  et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

On observe qu'ici aussi, la sensibilité du coefficient au champ électrique appliqué est initialement grande, le champ électrique négatif (positif) augmente (diminue) la valeur du coefficient. La sensibilité diminue jusque  $\theta = 55^\circ$ , seuil à partir duquel le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique positif (négatif). Par la suite, la sensibilité augmente, puis reste relativement constante, mais les comportements se croisent quand le coefficient s'annule en  $\theta = 108^\circ$ . Au-delà de cet angle, le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique négatif (positif). La sensibilité augmente ensuite rapidement, puis reste relativement constante jusque  $\theta = 135^\circ$ , puis diminue en se rapprochant de l'angle  $\theta = 148^\circ$  où les comportements se croisent. Au-delà de cet angle, le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique positif (négatif). L'écart entre le coefficient en mode libre et sous contrainte électrique est maximum en  $\theta = 0^\circ$  et  $180^\circ$ , et vaut 0.004, soit +2.4%.

L'évaluation de l'écart maximum entre le calcul du coefficient de couplage dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est inférieure à 0.02%, ce qui est en accord avec l'approximation (II.108) et donc largement négligeable

### III.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons calculé les déformations induites par l'application d'un champ électrique compris entre les valeurs positives et négatives du champ coercitif du niobate de lithium, soit  $\pm 17.5 \text{ MV/m}$ . Nous avons montré que ces déformations sont 100 fois plus petite que sous contrainte mécanique. Cependant, nous avons mis en avant la non-linéarité de la déformation qui approche les 22.5% au maximum (à déformation très faible).

Par la suite, nous avons évalué les 3 modes de vitesses dans des plans de coupe à angle d'élévation quelconque et angle azimutal égale à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Dans le premier cas, les différences maximums entre vitesses longitudinale et transversales sous mode libre et sous contrainte électrique sont toujours inférieures à 19 m/s et 9 m/s respectivement, soit 0.26% et 0.18% d'écart. Dans le second cas les écarts pour ces même vitesses sont de 33 m/s et 9 m/s, soit 0.44% et 0.21%. Ainsi, la différence de vitesse sous contrainte électrique est faible. La différence de vitesse entre système de coordonnées est toujours inférieure à 0.08%, donc négligeable. Cet écart était prédit par nos approximations avec une erreur de quelques pourcentages. Notons que de nombreux croisements des courbes de vitesses définis dans chacun des repères ont été observés.

Dans un deuxième temps, nous avons évalué l'écart sur le coefficient de couplage entre le mode libre et sous contrainte électrique. Cet écart est de l'ordre de 2.9% quand  $\varphi = 0^\circ$ , et proche de 2.4% quand  $\varphi = 90^\circ$ , donc relativement faibles dans les deux cas. Notons cependant que ce type de contrainte n'augmente le  $k_t$  dans le plan de coupe où il est maximum. Par ailleurs, la différence entre le coefficient de couplage exprimé dans les deux systèmes de coordonnées est inférieure à 0.02% dans tous les plans de coupe, donc largement négligeable. Cette remarque est en accord avec l'approximation (II.108) que nous avons faite.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la dépendance des vitesses et du coefficient de couplage en mode plaque du niobate de lithium aux contraintes électrique et mécanique appliquées dans

différents plans de coupe, mais aussi dans les systèmes de coordonnées statique et prédéformé. La contrainte mécanique maximale appliquée correspond à la limite élastique du matériau, soit  $\pm 110$  MPa. La limite en champ électrique correspond au champ coercitif, soit  $\pm 17.5$  MV/m. Cette étude a montré que la non-linéarité de déformation longitudinale n'excède pas 0.8% à contrainte mécanique maximum, mais atteint 22.5% à contrainte électrique maximum (à déformation très faible). En outre, l'écart entre les différents tenseurs de contrainte mécanique n'excède pas 0.108%, et les écarts maximums sont tous observés quand le matériau est étiré.

L'étude de l'évolution des vitesses dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle  $\theta$ , pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ . Cette étude a montré que les différences entre le mode libre et sous contrainte des vitesses longitudinale et transversales pour  $\varphi = 0^\circ$  sont inférieures à 19 m/s et 10 m/s dans le cas mécanique, et inférieures à 19 m/s et 9 m/s dans le cas électrique. Ces écarts représentent 0.26% et 0.24% mécaniquement, et 0.26% et 0.18% électriquement. Dans le plan  $\varphi = 90^\circ$ , ces écarts sont respectivement de 26 m/s et 3.2 m/s sous contrainte mécanique et de 33 m/s et 9 m/s sous contrainte électrique, soient des écarts de 0.35% et 0.08% mécaniquement et 0.44% et 0.21% électriquement. Il apparaît donc que les effets non-linéaires des contraintes mécanique et électrique sur les 3 modes de vitesse sont d'un ordre comparable.

Dans le cas des vitesses transversales exprimées dans le système de coordonnées de l'état prédéformé, nous avons observé que les courbes d'évolutions de différents niveaux de contrainte mécanique se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées naturel. Ceci a aussi été observé en électrique, pour les deux modes de vitesses.

Par ailleurs, pour les deux types de contrainte, la différence de vitesse entre systèmes de coordonnées est toujours inférieure à 0.08%, donc négligeable. Cet écart était prédit par nos approximations avec une erreur de quelques pourcentages.

L'étude de l'évolution du coefficient de couplage en mode plaque dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle  $\theta$  pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ . Sous contrainte mécanique, cette étude a montré que le  $k_t$  atteint +0.69% et +1.1% respectivement, mais décroît jusqu'à zéro selon le plan de coupe et la contrainte appliquée. Sous contrainte électrique, cet écart est de l'ordre de 2.9 % quand  $\varphi = 0^\circ$ , et proche de 2.4% quand  $\varphi = 90^\circ$ . Notons que le maximum du  $k_t$  du niobate de lithium, obtenu pour  $\varphi = 90^\circ$  en Y+36, est augmenté uniquement sous contrainte mécanique.

Dans les deux cas, nous avons constaté que la différence entre les coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées n'excède pas 0.02%, donc très largement négligeable, comme prédit par nos approximations.

## Chapitre IV : Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques

Au sein des matériaux piézoélectriques, les piézocéramiques de type PZT sont aujourd'hui parmi les matériaux les plus utilisés. Plus facile à fabriquer que les monocristaux de type quartz ou niobate de lithium, ces matériaux ferroélectriques possèdent des caractéristiques plus intéressantes. Leur mode de fabrication étant bien maîtrisé, un raisonnement empirique basé sur les matériaux connus permet aux industriels de créer de plus en plus de nouveaux matériaux aux propriétés diverses.

Au cours de leurs fabrications, et lors de leurs usages, ils possèdent souvent des niveaux de contraintes résiduelles non nuls et sont communément soumis à de grandes contraintes mécaniques ou électriques, qui modifient significativement leurs caractéristiques par rapport à l'état non contraint. Chacun de ces matériaux est formé d'une multitude de domaines possédant chacun une polarisation et une déformation propre, eux même sensibles aux contraintes externes. Les altérations de structures vont générer des non-linéarités ferroélectriques se traduisant par quatre courbes d'hystérésis résultant de la somme des changements de propriétés de chaque domaine, via les évolutions de murs de domaines.

La compréhension de ces phénomènes est un point clef dans le travail d'amélioration des dispositifs piézoélectriques à comportement hystérétique. Basé sur ces considérations et sur des observations expérimentales, le modèle présenté dans ce chapitre décrit le comportement de piézocéramiques soumises à des contraintes mécaniques et électriques et en explique les fonctionnements.

## I Les phénomènes hystérétiques dans les céramiques ferroélectriques

### I.1 Domaine d'étude

Dans un matériau ferroélectrique, des phénomènes de couplage de la déformation, de la contrainte, du champ électrique et du déplacement électrique sont observés. Les relations hystérétiques entre les différents couples de variables (contrainte/champ électrique, déplacement électrique/champ électrique, déformation/contrainte et déformation/champ électrique) caractérisent le comportement non-linéaire de ces matériaux. Cette non-linéarité 'hystérétique' est à l'origine des changements de propriétés des matériaux ferroélectriques sous contraintes.

Notre étude traite d'une contrainte uniaxiale (mécanique ou électrique), appliquée dans une unique direction. La direction de contrainte est la direction 3, correspondant à la direction (Oz). Les directions (Ox) et (Oy) sont notées respectivement 1 et 2 et forment avec (Oz) un système de coordonnées orthonormé direct (figure IV.1). Par conséquent, les contraintes appliquées se réduisent à leurs composantes électrique et mécanique dans la direction 3, soit  $E_3$  et  $\sigma_{33}$  respectivement. De même, le déplacement électrique considéré se réduit à sa composante  $D_3$ . Par analogie, la déformation longitudinale associée est notée  $S_{33}$  et les deux déformations transversales identiquement notées  $S_{11}$  et  $S_{22}$ .

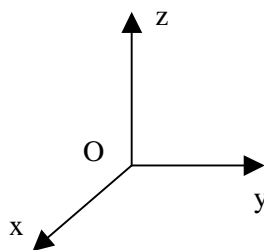


Figure IV.1 : Système de coordonnées de l'étude.

Les matériaux étudiés sont initialement polarisés dans la direction (Oz). Nous étudions l'évolution de la polarisation dans cette direction, en fonction des niveaux et du type de contraintes appliquées. L'étude de la polarisation se réduisant à sa composante  $P_3$ , elle est notée  $P$  par soucis de simplicité. De la même manière, le champ électrique, la contrainte mécanique et le déplacement électrique ne possédant qu'une composante dans la direction (Oz), ils seront notés respectivement  $E$ ,  $\sigma$  et  $D$  pour alléger les notations.

Le but de ce travail est de modéliser l'évolution des déformations et du déplacement électrique en fonction du champ électrique et de la contrainte mécanique appliqués. Lors du chargement électrique des piézocéramiques, la contrainte mécanique est nulle. Ce chargement induit une évolution hystérétique du déplacement électrique ainsi que des déformations. Lors du chargement mécanique des piézocéramiques, le champ électrique est nul. Il induit une évolution hystérétique du déplacement électrique ainsi que des déformations. On parlera de charge et de décharge pour notifier la mise sous contrainte et le relâchement de celle-ci.

Nous avons choisi de décrire les 4 phénomènes hystérétiques sur un même matériau, le PLZT, étudié par Lynch [Lynch1995a]. De cette manière, nous décrivons les quatre comportements hystérétiques sur un unique matériau, avec des valeurs de polarisations et des niveaux de contraintes comparables. Notons que ce matériau a fait l'objet de nombreux articles [Hwang1985-Sherrit1995-Chen1998-Michelitsch1998-Lu2006-Pandey2006-Su2011] et qu'il sera l'objet d'une confrontation avec notre modèle dans le chapitre suivant.

## I.2 Chargement électrique d'un matériau ferroélectrique

### I.2.1 Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique

L'évolution du déplacement électrique en fonction de la charge puis de la décharge du champ électrique a déjà été traité (en partie) dans le premier chapitre. Ici, nous décrivons plus précisément ce cycle (figure IV.2) en insistant sur les points importants, ainsi que sur les différents processus mis en œuvre. Rappelons que la polarisation a été définie comme la densité de dipôle électrique, son évolution est donc liée à celle du déplacement électrique.



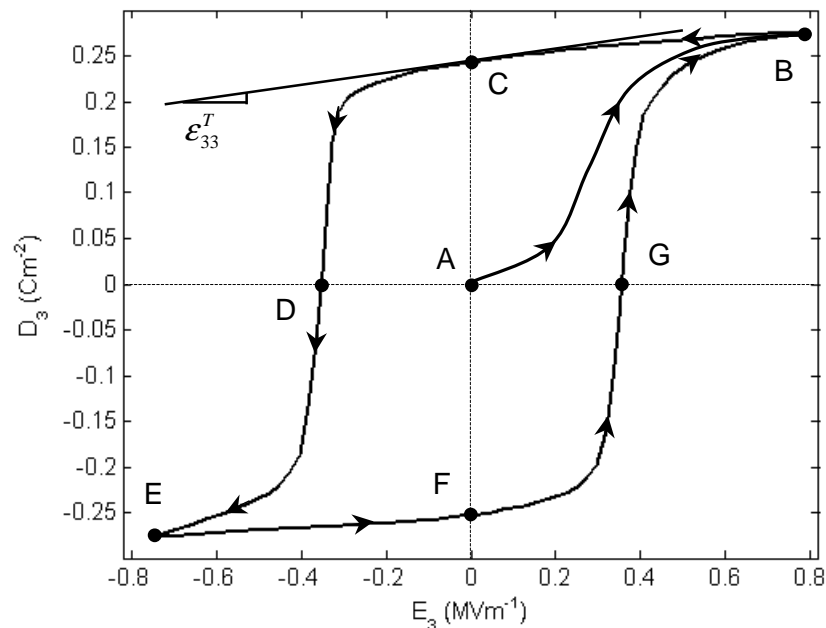


Figure IV.2 : Évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT [Lynch1995a].

A l'état initial, la céramique n'est pas polarisée et possède un déplacement électrique nul à champ électrique nul (point A). On applique un champ électrique positif croissant qui va créer et faire croître la polarisation dans le matériau jusqu'à atteindre une variation de déplacement électrique linéaire (point B), correspondant au déplacement électrique de saturation  $D_{sat}$ . En ce point, le champ électrique est égal au champ de saturation  $E_{sat}$ . Lorsque le champ électrique est relâché, le déplacement électrique, ainsi que la polarisation diminuent lentement au fur et à mesure que le champ électrique se rapproche de zéro (point C). Une fois cette valeur atteinte, une polarisation rémanente, notée  $P_0$ , est observée en l'absence de contrainte.

L'application d'un grand champ électrique négatif provoque la baisse non-linéaire du déplacement électrique. Dans un premier temps, la décroissance est lente puis s'accélère jusqu'au point D où le déplacement électrique et la polarisation sont nuls. En ce point, la variation de déplacement électrique (donc de polarisation) est maximum et le champ électrique correspondant est le champ électrique coercitif ( $-E_c$ ). Au-delà de ce point, la valeur du déplacement électrique change de signe et s'oriente dans le sens du champ. La polarisation du matériau a elle aussi changé de signe. L'évolution du déplacement électrique croît (négativement) ensuite, mais de plus en plus lentement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du champ coercitif ( $D \rightarrow E$ ) jusqu'à une variation linéaire du déplacement électrique, alors égale à  $-D_{sat}$  pour une valeur de champ égale à  $-E_{sat}$ . L'évolution de la vitesse de variation du déplacement électrique en fonction du champ électrique est considérée

symétrique par rapport à la valeur  $E_c$  [Lu2001-Boucher2002-Walter2003-Lu2006-Su2011]. Le segment  $C \rightarrow D \rightarrow E$  est un processus de renversement de la polarisation.

Lorsque le champ électrique est relâché, le déplacement électrique diminue au fur et à mesure que le champ électrique se rapproche de zéro ( $E \rightarrow F$ ). A champ électrique nul, la valeur de la polarisation est égale à  $-P_0$ . Ce phénomène de relâche est analogue (mais en sens inverse) au segment  $B \rightarrow C$ . Ces deux segments de courbe sont des processus de relâchement de la polarisation. Par la suite, on applique un champ électrique positif le long du segment  $F \rightarrow G \rightarrow B$ . L'évolution du déplacement électrique est inverse à celle du segment  $C \rightarrow D \rightarrow E$ , c'est un autre processus de renversement de polarisation. La valeur de champ électrique au point G est égale au champ électrique coercitif  $E_c$ .

Dans l'état polarisé, à contrainte mécanique nulle, pour de petites variations du champ électrique et dans l'approximation des faibles variations de polarisation, la relation avec le déplacement électrique autour du point C peut-être linéarisée :

$$D_3 = \epsilon_{33}^T E_3. \quad (\text{IV.1})$$

Par définition, la constante  $\epsilon_{33}^T$  se calcule comme la pente de cette courbe à champ électrique nul, c'est-à-dire quand le matériau est dans son état de polarisation rémanente  $P_0$ . Pour de grandes valeurs de champ électrique, l'effet non-linéaire sur le déplacement électrique doit être considéré.

### I.2.2 Évolution des déformations en fonction du champ électrique

Comme décrit au chapitre I, l'action d'un champ électrique sur une piézocéramique engendre des déformations longitudinale et transversales. Ces deux déformations subissant des cycles d'hystérésis de même forme, seule l'évolution de la déformation longitudinale au cours de la charge puis de la décharge du champ électrique est décrite ici. La figure IV.3 montre le comportement de la déformation longitudinale lors d'une charge puis d'une décharge de type électrique en l'absence de contrainte mécanique dans un matériau de type PLZT.

L'évolution de la déformation en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle décrit une nouvelle boucle d'hystérésis. La déformation est comptée positive en décompression. L'évolution de cette courbe est à mettre en parallèle avec la précédente, car les deux évolutions s'obtiennent en même temps et sont très liées, comme expliqué au chapitre I. Ainsi, nous mettons en évidence différents points de fonctionnements importants, identiques à ceux définis au cours de l'évolution de la polarisation.

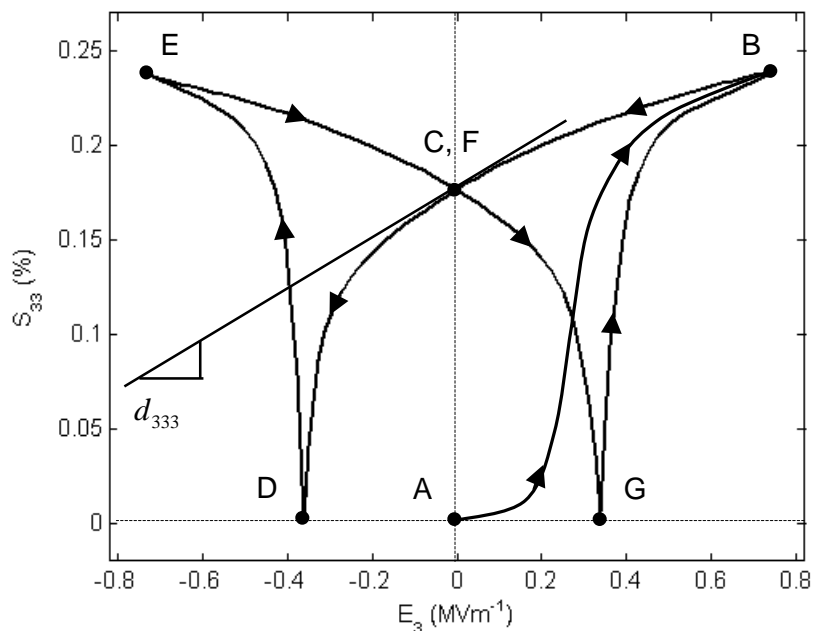


Figure IV.3 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT [Lynch1995a].

A l'état initial (point A), la céramique n'est pas polarisée. Nous considérons alors son état de déformée comme état de référence en le fixant à 0. On applique un champ électrique positif croissant qui crée et fait croître la polarisation dans le matériau, engendrant ainsi une déformation positive (expansion du matériau) jusqu'à atteindre une évolution de la déformation linéaire (point B), correspondant à la déformation de saturation  $S^{sat}$ . En ce point, le champ électrique est égal au champ de saturation  $E_{sat}$ . Lorsque le champ électrique est relâché, la déformation diminue (compression) lentement (en même temps que la polarisation) au fur et à mesure que le champ électrique se rapproche de zéro (point C). Une fois cette valeur atteinte, une déformation rémanente ( $S^{rem}$ ) en l'absence de champ électrique est observée.

L'application d'un grand champ électrique négatif provoque la baisse non-linéaire de la déformation (compression), provoquée en grande partie par la baisse de la polarisation jusqu'à une polarisation nulle (point D). En ce point, la variation de déformée est maximum et le champ électrique correspondant est le champ électrique coercitif ( $-E_c$ ). Au-delà de ce point, la valeur de la polarisation change de signe, engendrant une déformée inverse (expansion). L'évolution de la déformation croît ensuite de plus en plus lentement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du champ coercitif ( $D \rightarrow E$ ) jusqu'à une variation linéaire, pour des valeurs de déformation et de champs égaux à  $-S^{sat}$  et  $-E_{sat}$  respectivement.

Lorsque le champ électrique est relâché, la déformée diminue (compression) au fur et à mesure que le champ électrique se rapproche de zéro ( $E \rightarrow F$ ). Ce phénomène de relaxe est analogue (mais en sens inverse) au segment  $B \rightarrow C$ . Par la suite, on applique un champ électrique positif le long du segment  $F \rightarrow G \rightarrow B$ . L'évolution de la déformation est analogue au segment  $C \rightarrow D \rightarrow E$ . La valeur de champ électrique au point G est égale à  $E_c$ .

Dans l'état polarisé, à contrainte mécanique nulle, pour de petites variations de champ électrique et dans l'approximation des faibles variations de polarisation, la relation avec la déformation longitudinale autour du point C peut-être linéarisée :

$$S_{33} = d_{333} E_3. \quad (\text{IV.2})$$

Pour des valeurs de champ électrique proches de zéro, la relation est considérée comme linéaire. Par définition, la constante  $d_{333}$  correspond à la pente de cette courbe à champ électrique nul, c'est-à-dire quand le matériau est dans son état de polarisation rémanente  $P_0$ . Pour des grandes valeurs de champ électrique, l'effet non-linéaire sur la déformation doit être considéré.

### I.3 Chargement mécanique d'un matériau ferroélectrique

Dans cette partie, nous étudions le comportement des piézocéramiques sous contrainte mécanique, en mode compression et en l'absence de champ électrique. L'étirement du matériau n'est pas traité car beaucoup plus difficile à mettre en œuvre expérimentalement car il est impératif d'avoir un dispositif expérimental permettant de tenir l'échantillon sans le déformer et sans glissement. La géométrie de l'échantillon doit alors être adaptée et bien souvent, les matériaux de type PZT se déforment sous l'effet de pincement du dispositif. Par ailleurs, les comportements observés (expérimentalement) en compression ont une évolution proche des comportements en traction.

#### I.3.1 Évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique

L'action d'une contrainte mécanique sur une piézocéramique va engendrer une évolution du déplacement électrique. La figure IV.4 montre le comportement du déplacement électrique sous l'action d'une charge, puis d'une décharge mécanique en l'absence de champ électrique dans un matériau de type PLZT. On met en évidence différents points de fonctionnements importants.

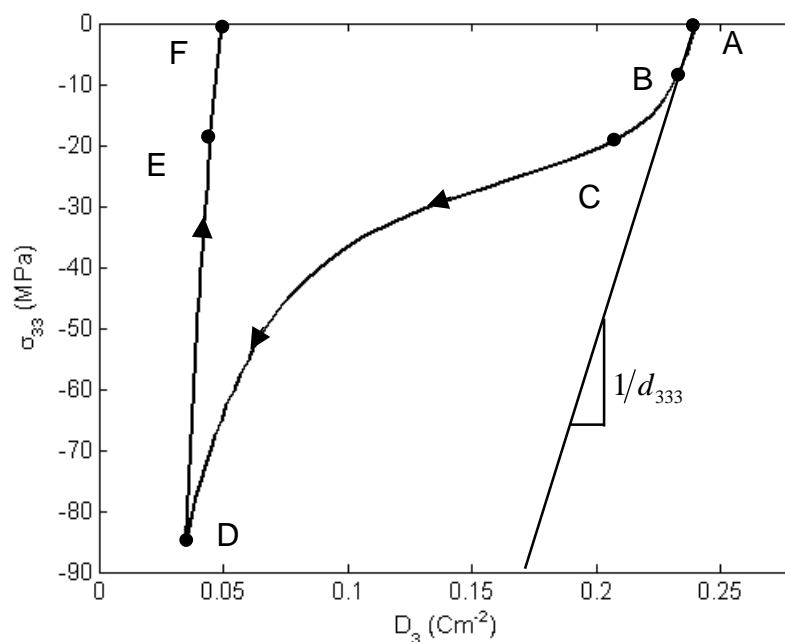


Figure IV.4 : Évolution de la contrainte en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PLZT [Lynch1995a].

A contrainte mécanique nulle (point A), un déplacement électrique rémanent à l'état initial dû à un précédent chargement (électrique ou mécanique) du matériau est observé. Ce déplacement électrique à contraintes nulles est homogène à une polarisation rémanente analogue à celle observée dans le cas du chargement électrique, notée  $P_0$ .

L'évolution du déplacement électrique suit d'abord une loi très linéaire jusqu'à un niveau de contrainte  $\sigma_l$  (point B), le déplacement électrique associé à ce point est noté  $D_l$ . On considère que les mouvements de champs de domaines sont négligeables dans cet intervalle de contrainte. Au-delà de ce point, la décroissance du déplacement électrique et de la polarisation deviennent plus rapides et ce, de plus en plus en se rapprochant de la contrainte coercitive  $\sigma_c$  (point C) pour laquelle on atteint un maximum de variation. Passé ce niveau de contrainte, la dépolarisation du matériau est de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on se rapproche de la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$  (point D) au niveau de laquelle la variation devient linéaire. Dans ce cas, la plus grande partie des murs de domaines ayant basculé, la proportion de mouvement de domaines diminue. Le déplacement électrique a alors atteint sa valeur de saturation  $D_{sat}$ .

Lors de la décompression, le déplacement électrique et la polarisation diminuent linéairement. Aux abords de la contrainte nulle (point E), cette courbe fléchit très légèrement et bien que cela ne soit pas significatif pour ce matériau, nous verrons par la suite que ce phénomène est plus important dans des matériaux plus durs. Notons que dans de nombreux modèles, les auteurs négligent la

repolarisation du matériau [Lu2001-Lu2001a-Boucher2002] ou considèrent une relaxation purement linéaire [Hwang1995-Lu2006]. Cette courbe de relaxation diffère beaucoup selon le type de matériau utilisé, dur ou mou. Dans le cas des matériaux dits ‘durs’, la repolarisation est non négligeable et fortement non-linéaire [Cao1993-Stoll1997-Kamlah1999]. Cette légère repolarisation s’explique par le ‘vide’ créé dans l’axe de décompression qui aura tendance à attirer certaines charges dans cette direction. Une fois la contrainte relâchée point (F), le matériau garde une polarisation ‘résiduelle’  $P^{res}$ .

Dans l’état polarisé, à champ électrique nul, pour de petites variations de contrainte mécanique et dans l’approximation des faibles variations de polarisation, la relation avec le déplacement électrique autour du point A peut-être linéarisée :

$$D_3 = d_{333} \sigma_{33} \quad (\text{IV.3})$$

Cette partie de courbe permet une nouvelle mesure du coefficient  $d_{333}$ , défini comme l’inverse de la pente de cette courbe à l’état initial, donc dans son état de polarisation rémanente  $P_0$ . Pour des grandes valeurs de contrainte, le changement de polarisation rend le comportement du déplacement électrique non-linéaire.

### I.3.2 Évolution des déformations en fonction de la contrainte mécanique

L’action d’une contrainte mécanique sur une piézocéramique engendre des déformations longitudinale et transversales. Ces deux déformations subissant des cycles d’hystérésis de même forme, seule l’évolution de la déformation longitudinale au cours de la charge puis de la décharge de la contrainte mécanique est étudiée. La figure IV.5 montre le comportement de la déformation longitudinale au cours de la charge puis de la décharge d’un matériau de type PLZT en l’absence de champ électrique. Comme expliqué au chapitre I, l’évolution de cette courbe est à mettre en parallèle avec la précédente, car les deux évolutions obtenues sont très liées. Ainsi, l’évolution de la polarisation en fonction de la contrainte mécanique influe directement sur les déformations. On met en évidence différents points de fonctionnement importants.

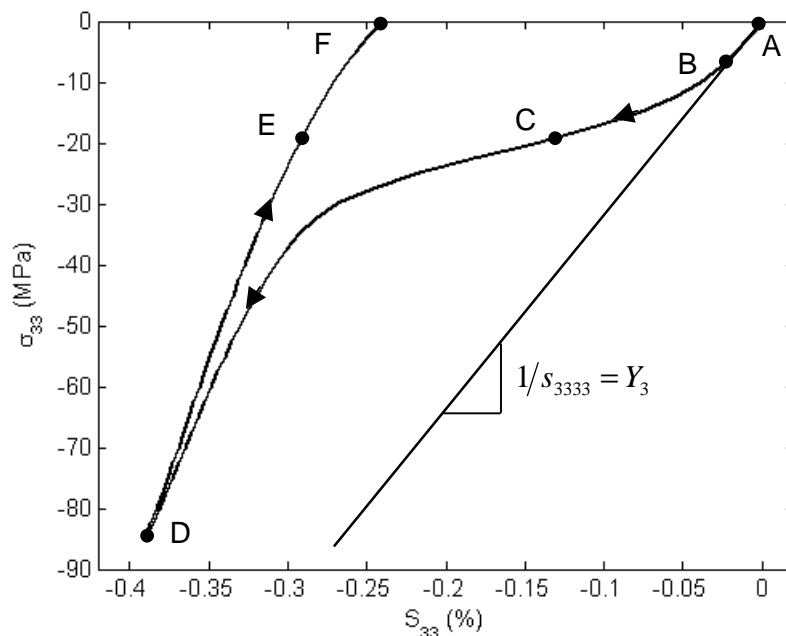


Figure IV.5 : Évolution de la relation contrainte en fonction de la déformation longitudinale à champ électrique nul dans un PLZT [Lynch1995a].

A l'état initial (point A), le matériau possède une déformation rémanente issue d'un précédent chargement, utilisée comme état de référence. Ainsi, on définit les déformations relativement à cette position, comptée négative en compression.

A faible contrainte (avant le point B), de la même manière que le déplacement électrique, l'évolution de la déformation est linéaire jusqu'à un niveau de contrainte mécanique  $\sigma_l$  avant lequel les champs de domaines bougent très peu et n'engendrent aucune non-linéarité. Au-delà de ce seuil, la déformation du matériau devient beaucoup plus rapide avec un maximum de variation au niveau de la contrainte coercitive  $\sigma_c$  (point C), identique à celle observée dans le cas du déplacement électrique. Ce comportement s'explique lui aussi par l'évolution de la polarisation qui est maximum en  $\sigma_c$ , provoquant un maximum de vitesse de déformation. Passé ce niveau de contrainte, la déformation liée au changement de polarisation du matériau est de plus en plus lente et linéaire au fur et à mesure que l'on se rapproche de la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$  (point D). C'est pourquoi la vitesse de déformation décroît aussi. Au niveau de la saturation, la déformation a atteint sa déformation de saturation  $S^{sat}$ . Ainsi, de forts changements des champs de domaines le long du segment  $B \rightarrow C \rightarrow D$ , dus en grande partie à l'évolution de la polarisation, sont observés. Cependant, il apparaît que la vitesse de déformation est plus rapide que la vitesse de dépolérisation. Cette différence s'explique par un deuxième effet purement mécanique des champs de domaines qui sera développé par la suite.

Lors de la décompression, la déformation évolue d'abord linéairement (segment  $D \rightarrow E$ ), de la même manière que la polarisation. Au niveau de la contrainte coercitive (point E), la déformation devient plus rapide, et on observe que la courbe fléchit plus nettement que la courbe précédente. Ainsi, la relaxation mécanique de matériau semble suivre une loi analogue à l'évolution de domaines en compression, mais inverse et plus faible. Une fois la contrainte relâchée (point F), le matériau garde une déformation résiduelle notée  $S^{res}$ . Notons qu'ici aussi, de nombreux auteurs [Hwang1995-Chen1998-Lu2001-Lu2006] négligent la non-linéarité de cette relaxation. Pourtant, nous montrerons plus loin que la valeur de cette déformation diffère beaucoup selon le type de matériau utilisé (dur ou mou) et que la non linéarité peut-être très prononcée, donc largement non négligeable. Ce comportement ne s'explique pas totalement par l'évolution des déformations engendrées par les changements de la polarisation et confirme l'existence d'un mouvement des champs de domaines purement mécanique.

Dans l'état polarisé, à champ électrique nul, pour de petites variations de contrainte mécanique et dans l'approximation des faibles variations de polarisation, la relation avec la déformation longitudinale autour du point A peut-être linéarisée :

$$S_{33} = s_{3333} \sigma_{33}, \quad (IV.4)$$

où le coefficient élastique  $s_{3333}$  est l'inverse du module d'Young  $Y_3$ . Cette partie de courbe permet une nouvelle mesure du coefficient  $s_{3333}$  défini comme l'inverse de la pente de cette courbe à l'état initial, donc dans son état de polarisation rémanente  $P_0$ . Pour des grandes valeurs de contrainte, le changement de polarisation rend le comportement du déplacement électrique non-linéaire.

Il est important de noter qu'à la saturation, les champs de domaines sont bloqués et n'engendrent plus de déformation significative. Ainsi, le comportement du matériau redevient classique. Pourtant, la pente de la courbe (le module d'Young  $Y_3$ ) près de la saturation est plus élevée qu'à l'état initial. Cette différence est très souvent négligée [Kamlah1999a-Lu2001-Lu2001a] ou expliqué par le comportement non-linéaire du module d'Young qui aurait (en chargement) un comportement initialement élastique, puis plastique et enfin élastique près de la contrainte de saturation, et se déchargerait élastiquement [Lu2006]. Dans notre étude, nous montrons que cet état mou s'explique par les mouvements de domaines.



### I.3.3 Évolution de la déformation en fonction de la contrainte mécanique dans un matériau ferroélectrique non polarisé

Nous avons vu dans le chapitre I que les matériaux antiferroélectriques étaient des matériaux très proches des matériaux ferroélectriques eux aussi composés de différents domaines, hystériques sous fortes contraintes mais à polarisation (résiduelle ou rémanente) nulle en l'absence de contrainte. Ainsi, à faible contrainte, ces matériaux sont l'équivalent de matériaux ferroélectriques non polarisés. Dans ce cas de figure, l'effet de la polarisation ne rentre pas en jeu.

La figure IV.6 montre l'évolution de la déformation dans un matériau antiferroélectrique non chargé [Cao1993], donc avec une polarisation nulle à champ électrique nul. Cette étude a mis à jour que les matériaux ferroélectriques non polarisés possédaient eux-aussi une déformation hystérique sous contrainte mécanique.

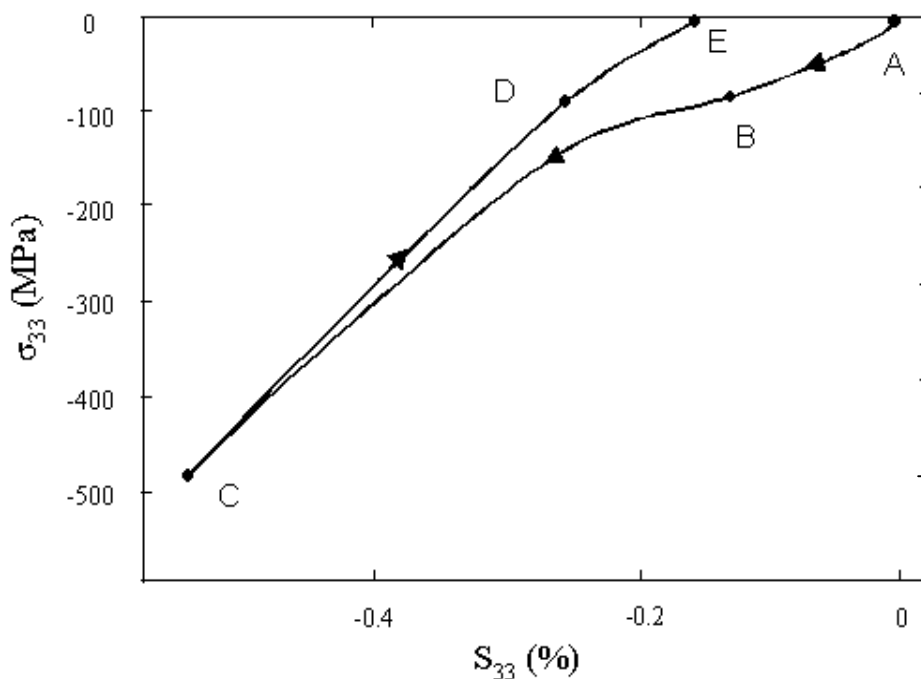


Figure IV.6 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale à champ électrique nul dans un matériau antiferroélectrique non polarisé [Cao1993].

L'évolution de la déformation en fonction de la contrainte mécanique suit une loi non-linéaire de type hystérique comparable à la précédente. Définissant les déformations par rapport à un état de référence (point A), on observe que la déformation est rapide dès le début de la contrainte. De ce fait, nous ne considérons pas de seuil de contrainte à partir duquel les murs de domaines commencent à bouger. Lors de la compression du matériau, on observe une déformation non-linéaire admettant une vitesse de déformation maximum (point B) pour une valeur de contrainte coercitive  $\sigma_c$ . Au-delà de cette contrainte, la vitesse de déformation diminue et devient constante

en se rapprochant de la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$  (point C). La contrainte mécanique est ensuite relâchée, le comportement de la déformation jusqu'à la contrainte coercitive  $\sigma_c$  (point D) est linéaire. Au-delà, la vitesse de déformation augmente en se rapprochant du mode non contraint (point E) et la déformation résiduelle est non nulle.

La polarisation du matériau restant nulle dans ce domaine d'application, ce cycle d'hystérésis est uniquement dû à des mouvements mécaniques des champs de domaines, et non à un changement de polarisation microscopique engendrant une déformation. Pourtant, la description de cette courbe est analogue à celle faite dans le cas des déformations liées à la variation de polarisation sous contrainte mécanique dans le matériau ferroélectrique. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que cette déformation est elle aussi due aux changements de domaines, mais indépendante du changement de polarisation et posons que les matériaux ferroélectriques possèdent une déformation ferroélastique 'pure' en plus de la déformation due au changement de polarisation et de la déformation classique. Cette déformation ferroélastique purement mécanique explique pourquoi la vitesse de déformation est plus importante que celle engendrée par le changement de polarisation et est à l'origine d'une partie de l'augmentation de la vitesse de déformation en fin de décompression. Ainsi, la déformation rémanente d'un matériau ferroélectrique est due aux changements de domaines liés à la polarisation microscopique, mais aussi aux mouvements de domaines purement mécaniques.

Notons que d'autres mesures ont été faites par Schäufele en 1996 [Schaeufele1996] sur des PZT durs et mous non polarisés qui ont montré des évolutions de déformations sous contrainte mécanique non-linéaire hystérique du même type que celles des matériaux ferroélectriques polarisés. Ceci confirme que le comportement ferroélastique des piézocéramiques suit une loi analogue à celle de la déformation due aux changements de domaines. Par ailleurs cette même hypothèse est formulée par Kamlah dans de récents articles [Kamlah1999-Kamlah1999a].

La prise en compte de ce comportement est une des originalités majeures de notre modèle qui donne du sens à un comportement non-linéaire pas ou mal décrit par d'autres auteurs. Ainsi, cette considération résout le problème rencontré par Lu qui l'oblige à considérer un matériau biphasé en relaxation et non en compression. Son hypothèse n'étant pas physique, notre modèle propose une explication réaliste et basée sur des considérations expérimentales.

## II Mise en place du modèle de piézocéramiques sous contraintes

L'analyse de l'évolution de la déformation et du déplacement électrique sous contraintes électrique et mécanique a montré que la non-linéarité hystérique est en majeure partie due aux

mouvements de domaines dans les matériaux. Prenant en compte la polarisation spontanée dans les équations piézoélectriques décrites au chapitre II, le déplacement électrique s'exprime :

$$D_m = P_m^{sp} + \varepsilon_{mn} E_n + d_{mij} \sigma_{ij}. \quad (IV.5)$$

Notons que dans le cas d'un matériau monodomaine, on exprime rarement la polarisation spontanée dans l'expression du déplacement électrique car elle évolue très peu, le déplacement électrique est alors calculé à une constante près. Dans le cas des matériaux polydomaines, nous avons montré au chapitre I que cette polarisation varie beaucoup, car les murs de domaines évoluent sous contraintes. Dans le modèle qui suit, nous évaluons l'évolution de la polarisation rémanente en fonction de la contrainte appliquée au travers des mouvements de domaines. De la même manière, nous évaluons l'évolution de la déformation rémanente, engendrée par les mouvements de domaines, qui se superpose à l'équation classique de la déformation d'un matériau piézoélectrique.

## II.1 Formulation du modèle en contrainte uniaxiale de type mécanique ou électrique

Nous nous plaçons dans le domaine d'étude décrit précédemment, en considérant des chargements isothermes avec des valeurs de contraintes au maximum égales aux contraintes de saturation. Au-delà de ces niveaux, le comportement du déplacement électrique et de la déformation redeviennent linéaires. Dans cette configuration, nous décomposons les déplacements électriques et tenseurs des déformations, en définissant les polarisations et déformations rémanentes macroscopiques comme des variables internes indépendantes :

$$D_m = D_m^{rev} + P_m^{rem}, \quad (IV.6)$$

$$S_{ij} = S_{ij}^{rev} + S_{ij}^{rem}, \quad (IV.7)$$

où les composantes du déplacement électrique  $D_m^{rev}$  et de la déformation  $S_{ij}^{rev}$  sont appelées réversibles dans le sens où elles s'annulent en l'absence de contraintes externes. Les autres composantes sont nommées rémanentes du fait qu'elles existent en l'absence de chargement. Comme expliqué précédemment, la polarisation rémanente est simplement notée  $P_m$ . Cette décomposition est de plus en plus répandue et soutenue par différents auteurs [Hwang1995-Kamlah1999-Walter2003-Chen2006].

D'un point de vue microscopique, nous avons vu dans le chapitre I que les polarisations et déformations spontanées sont liées entre elles par effet piézoélectrique. Par définition, la déformation spontanée représente la déformation engendrée par l'alignement des domaines dans la

direction de polarisation. Ainsi, nous ne considérons pas d'effet électrostrictif, car la relation entre polarisation et déformation est déjà prise en compte dans l'évolution des variables microscopiques. Par conséquent, et comme démontré par Kamlah [Kamlah1999], nous considérons les polarisations et déformations rémanentes macroscopiques comme des variables indépendantes.

La déformation engendrée par les mouvements de domaines liés au changement de polarisation est appelée 'déformation piézoélectrique' et est notée  $S_{ij}^p$ . Comme décrit au paragraphe I.3.3 et comme soutenue par d'autres auteurs [Kamlah1999-Walter2003], le comportement non-linéaire des déformations rémanentes  $S_{ij}^{rem}$  ne s'explique pas uniquement par les déformations rémanentes issues du changement de polarisation  $S_{ij}^p$ . Nous avons montré qu'une déformation purement mécanique intervient sous contrainte mécanique. Ainsi, nous définissons une déformation purement ferroélastique notée  $S_{ij}^f$ , induite par les mouvements de domaines lors d'un chargement mécanique :

$$S_{ij}^f = S_{ij}^{rem} - S_{ij}^p. \quad (IV.8)$$

Ainsi, dès lors que le matériau est sous contrainte mécanique ou électrique, nous évaluerons et calculerons l'évolution des composantes rémanentes, soit la polarisation, la déformation piézoélectrique et la déformation ferroélastique pure (dans le cas de la contrainte mécanique).

## II.2 Effet réversible

### II.2.1 Comportement linéaire des matériaux

En première approximation, les propriétés élastiques et diélectriques du matériau peuvent être considérées isotropes et les propriétés piézoélectriques considérées transverses isotropes [Lynch1994-Hwang1995-Chen1998-Kamlah1999a-Walter2003]. Les propriétés de la céramique étant égales à celle du grain, nous utilisons les équations constitutives linéaires de la piézoélectricité pour chaque grain. Les expressions linéaires du déplacement électrique  $D_m^L$  et de la déformation  $S_{ij}^L$ , avec la contrainte et le champ électrique comme variables sont données par :

$$\begin{cases} D_m^L = d_{mkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{mn}^T E_n \\ S_{ij}^L = s_{ijkl} \sigma_{kl} + d_{mij} E_m \end{cases}. \quad (IV.9)$$

avec :

$$s_{ijkl} = \frac{1+\nu}{Y} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{Y} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (\text{IV.10})$$

où  $Y$  est le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

## II.2.2 Évolution des constantes d'une piézocéramique

Il est important de noter que le module d'Young, ainsi que les coefficients piézoélectriques et diélectriques sont sensibles à la microstructure en domaines de ces matériaux. Kamlah [Kamlah1999a] a montré cet effet sur le module d'Young et le coefficient diélectrique de piézocéramique en mesurant ces constantes sur deux échantillons issus d'un même matériau, l'un polarisé dans la direction de la contrainte et l'autre polarisé dans une direction perpendiculaire à la contrainte. La différence entre les valeurs respectives est de l'ordre de 10%. Ainsi, le module d'Young, mais aussi le coefficient diélectrique [Zhang1999-Boucher2002-Zhou2005] sont sensibles à la polarisation du matériau, donc à leur champ de domaines. De nombreux auteurs [Lynch1994-Hwang1995-Chen1998-Kamlah1999a-Walter2003] choisissent de négliger cette variation du module d'Young et du coefficient diélectrique. Cette hypothèse s'appuie sur le fait que dans de nombreux matériaux, les mouvements de domaines sont très faibles à l'état initial. Ainsi, pour de faibles niveaux de contraintes, les variations de champs de domaines sont considérées comme faibles et n'altérant que très peu la mesure des coefficients. Les variations des polarisations et déformations rémanentes à faibles contraintes sont donc négligées. Pourtant, nous verrons par la suite que les matériaux ne répondent pas tous de la même manière et peuvent avoir une évolution des champs de domaines très précoce, qui altère la mesure des coefficients.

A contrario, le comportement du coefficient piézoélectrique des piézocéramiques est mieux connu. Il a été montré que ces coefficients varient en fonction du niveau de polarisation [Chen1998] et de la température [Zhang1983-Kounga2008]. La figure IV.7 décrit l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{31}$  en fonction du champ de polarisation et de la température sur un matériau piézoélectrique de type PVDF [Murayama1975].

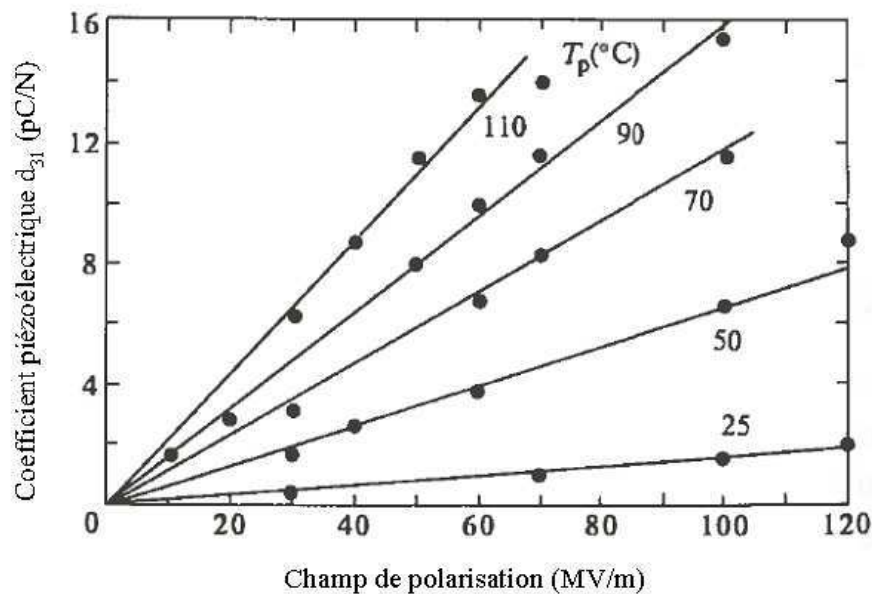


Figure IV.7 : Évolution du coefficient piézoélectrique en fonction du champ de polarisation et de la température pour un film mince de PVDF [Murayama1975].

Considérant une relation directe entre le champ de polarisation et la polarisation elle-même, il apparaît clairement que le coefficient piézoélectrique dépend linéairement du niveau de polarisation. Généralisant à l'ensemble du tenseur piézoélectrique, plus la polarisation du matériau est importante, plus les valeurs des coefficients piézoélectriques sont importantes. Inversement, en l'absence de polarisation, l'effet piézoélectrique disparaît. La dépendance des coefficients piézoélectriques à la polarisation est donc considérée comme linéaire elle aussi [Hwang1995-Chen1998-Kamlah1999-Walter2003]. Respectant le fait que les constantes classiques des matériaux sont définies à contrainte nulle, cette dépendance est normalisée par rapport à la polarisation rémanente à contrainte nulle  $P_0$ . Les coefficients piézoélectriques modifiés sont définis comme :

$$\tilde{d}_{mkl} = d_{mkl} \frac{P}{|P_0|}. \quad (\text{IV.11})$$

De cette manière, la validité de l'équation classique est vérifiée à l'état initial. Au niveau de la polarisation de saturation, la valeur du coefficient piézoélectrique modifiée peut aussi être considérée comme constante. Cette expression est donc homogène avec les lois classiques de la piézoélectricité, et contrairement aux autres auteurs, elle utilise le coefficient piézoélectrique classique et ne nécessite pas le calcul d'un coefficient piézoélectrique à contrainte de saturation.

### II.2.3 Équations constitutives réversibles

Dans l'approximation des faibles mouvements de domaines à faibles contraintes, nous prenons les valeurs de module d'Young et des constantes diélectriques et piézoélectriques issues de la littérature. En insérant le coefficient piézoélectrique modifié  $\tilde{d}_{mkl}$  dans les équations constitutives linéaires, nous définissons les variables réversibles comme suit :

$$\begin{cases} D_m^{rev} = \tilde{d}_{mkl} \sigma_{kl} + \epsilon_{mn}^T E_n \\ S_{ij}^{rev} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \tilde{d}_{mij} E_m \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Ces équations sont réversibles, car n'existent qu'en présence de contrainte électrique ou mécanique. Cependant, le coefficient piézoélectrique est fonction de la polarisation, donc d'une valeur qui n'évolue pas linéairement. Il est important de noter qu'en l'absence de champ externe et pour des champs supérieurs aux champs de saturation, ces équations sont linéaires et homogènes aux équations classiques.

## II.3 Distribution d'orientation de domaines

### II.3.1 Distribution de von Mises

La distribution de champs de domaines que nous avons choisi d'utiliser pour caractériser l'évolution de champ de domaines dans les matériaux piézocéramiques sous contraintes est une distribution de von Mises. Déjà utilisée pour caractériser ce genre de phénomène dans des matériaux 2D [Lu2006], nous utilisons les bases du modèle existant pour l'adapter à notre configuration. Cette distribution circulaire ressemble à une distribution Gaussienne et donne une distribution du maximum d'entropie [Dowe1995]. En faisant l'approximation de volume et température constants, elle est directement liée au minimum d'énergie libre [Lu2006].

Associant la coordonnée polaire  $\theta$  à chaque point matériel de coordonnées cartésiennes  $\vec{x}$ , (figure IV.8), la distribution des orientations de domaines de von Mises est donnée par :

$$f(\theta, \vec{x}) = \frac{e^{\kappa \cos(\theta - \bar{\theta})}}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad (\text{IV.13})$$

où  $\kappa = \kappa(\vec{x}) \in [0, \infty)$ ,  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\vec{x}) \in [-\pi, \pi]$  et  $I_0(\kappa)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre 0 définie comme :

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\kappa \cos \theta} d\theta. \quad (\text{IV.14})$$

Ainsi, la fonction de distribution est dépendante de deux paramètres :

- le paramètre de concentration de domaines  $\kappa$ ,
- la direction principale de domaines  $\bar{\theta}$ .

Le paramètre de concentration  $\kappa$  donne une information sur la proportion de domaines orientés dans la direction principale de domaines  $\bar{\theta}$ . Le terme  $f(\theta, \bar{x}) d\theta$  est la probabilité d'un domaine de se trouver dans une direction comprise entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Les directions perpendiculaires aux directions  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  sont notées respectivement  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ . Chacune de ces directions est portée par les vecteurs unitaires  $\bar{e}_\theta, \bar{e}_{\bar{\theta}}, \bar{e}_\alpha$  et  $\bar{e}_{\bar{\alpha}}$ . Nous disposons de deux systèmes de coordonnées. L'un global de type cartésien repère la position du point dans la céramique et le deuxième est local de type cylindrique qui donne une information sur l'angle associé à ce point.

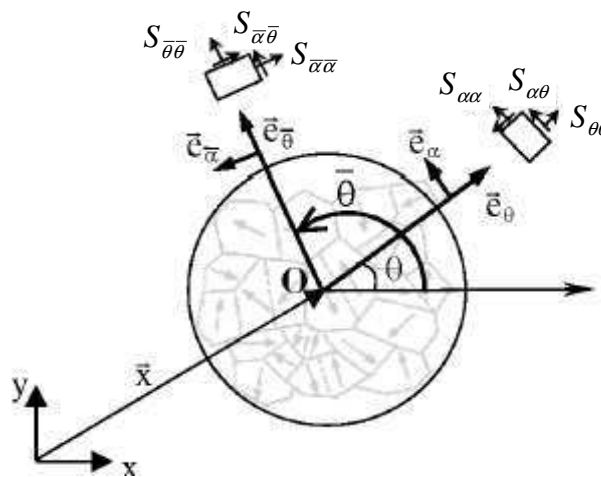


Figure IV.8 : Système de coordonnées cartésien global et système de coordonnées cylindrique local.

De cette manière, nous passons d'un repère cartésien au repère de von Mises, plus adapté à la description de nos matériaux 'orientés'. Dans notre étude, nous évaluons la valeur du paramètre de concentration de domaines correspondant à la direction 3.

### II.3.2 Propriétés de la distribution de von Mises

La distribution de von Mises est une fonction cyclique en  $\theta$ , symétrique par rapport à la direction principale  $\bar{\theta}$  (figure IV.9) et possédant les propriétés suivantes :



$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \bar{x}) d\theta = 1, \quad (\text{IV.15})$$

$$\int_0^{2\pi} \theta f(\theta, \bar{x}) d\theta = \bar{\theta}. \quad (\text{IV.16})$$

Ces deux équations indiquent qu'en chaque point matériel de position  $\bar{x}$ , la somme des probabilités de domaines est de 1 et que la somme des directions de domaines indique la direction principale de domaines  $\bar{\theta}$ . Dans la suite de la discussion, nous omettrons le vecteur  $\bar{x}$  pour simplifier la notation.

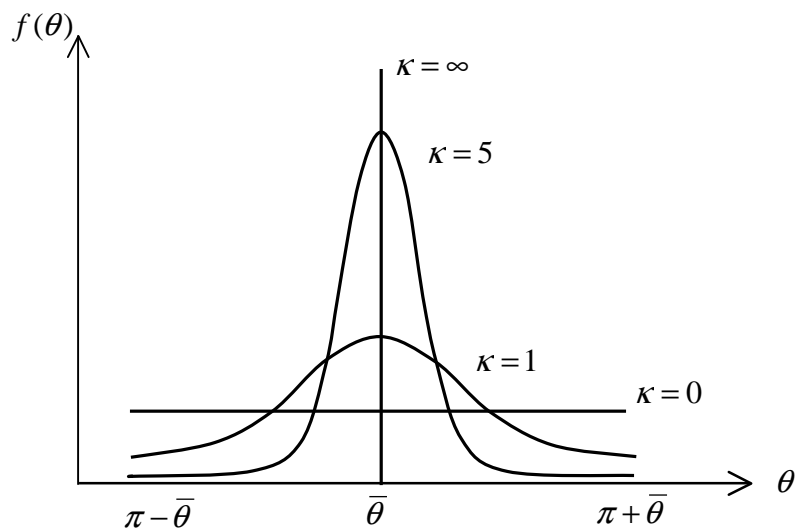


Figure IV.9 : Variation de la distribution de von Mises en fonction du paramètre de concentration  $\kappa$ .

Cette figure représente l'évolution de la distribution de von Mises pour différentes valeurs du paramètre de concentration  $\kappa$ . Ainsi, lorsque le paramètre de concentration  $\kappa$  augmente, la fonction de distribution se resserre de plus en plus autour de la direction principale  $\bar{\theta}$ . Les cas où  $\kappa = 0$  et  $\kappa = \infty$  correspondent respectivement à une distribution uniforme et à une distribution de Dirac.

Reprenant la figure I.11 déjà décrite en terme de polarisation au chapitre I, nous pouvons décrire les différents états de polarisation du matériau par ce couple de valeurs :

- figure IV.10.a : aucune polarisation particulière,  $\kappa = 0$  et  $\bar{\theta}$  est arbitraire,
- figure IV.10.b : le matériau possède une polarisation macroscopique dans la direction  $\bar{\theta}$ ,  $\kappa$  est non nul et  $\bar{\theta}$  indique la direction de polarisation.
- figure IV.10.c : le matériau est polarisé 'quasi' totalement dans une direction,  $\kappa \approx \infty$  et  $\bar{\theta}$  indique la direction de polarisation.

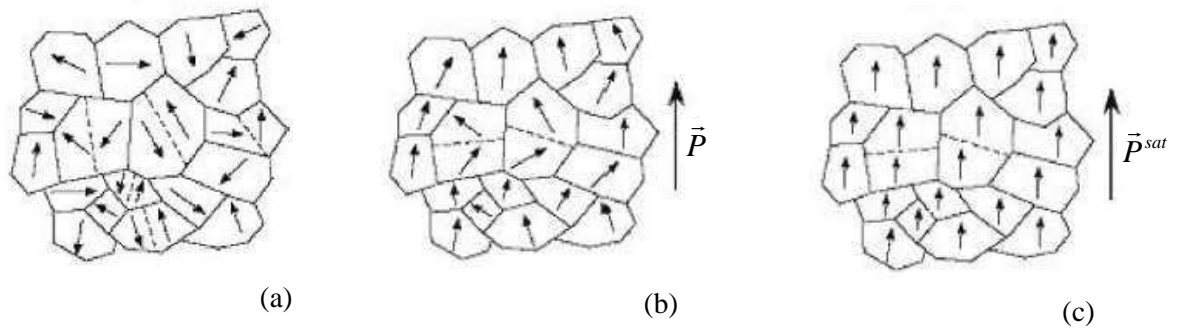


Figure IV.10 : Modèles de piézocéramiques non polarisée (a), polarisée (b) et à polarisation de saturation (c).

Ainsi, la concentration d'orientation de domaines dans une direction  $\bar{\theta}$  est reliée au paramètre  $\kappa$ . L'évolution de ce paramètre est directement liée à l'évolution de la concentration de domaines dans une direction. Il nous informe sur la proportion de domaines polarisés et déformés dans cette direction. Dans notre étude, cette direction est également la direction d'application des champs de contraintes ( $0z$ ).

### II.3.3 Définitions des différents paramètres de concentrations de la piézocéramique

Précédemment, nous avons décrit l'évolution de la polarisation dans une piézocéramique en expliquant que ces changements de polarisation entraînent des déformations. Ainsi, et comme proposé par Lu [Lu2006], nous définissons un paramètre de concentration 'piézoélectrique', noté  $\kappa^p$ . Ce paramètre régit l'évolution de la polarisation et par conséquent de la déformation piézoélectrique.

De plus, l'étude des mesures de Cao et Evans [Cao1993] a montré qu'une déformation ferroélastique pure venait se superposer à la précédente dans le cas de la contrainte mécanique. Kamlah ayant montré que ce comportement était analogue au comportement précédent, nous choisissons d'utiliser la même distribution de domaines pour quantifier l'évolution de concentration de domaines changeant ferroélastiquement. Nous appelons ce paramètre de concentration 'ferroélastique'  $\kappa^f$ . Il est directement lié à la déformation ferroélastique engendrée par le mouvement des domaines dans le cas d'une compression mécanique. Cette considération est une des originalités majeure de ce modèle.

Ainsi, l'évolution du paramètre de concentration  $\kappa^p$  décrit l'évolution de la direction principale de polarisation ainsi que de la déformation piézoélectrique. L'évolution du paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$  décrit l'évolution de la direction principale de déformation ferroélastique.

## II.4 Évolution des distributions de domaines

### II.4.1 Évolution de la polarisation en fonction des distributions de domaines

Comme nous l'avons vu au chapitre I, une piézocéramique est composée de domaines, chacun possédant une polarisation spontanée spécifique  $P^{sp}$ , mais aussi des déformations spontanées, notées dans le repère local  $S_{\theta\theta}^{sp}$ ,  $S_{\alpha\alpha}^{sp}$  et  $S_{\alpha\theta}^{sp}$ . Ces différentes quantités dépendent de la température et bien-sûr du champ de polarisation initialement appliqué. Dans la suite, nous traitons le cas d'une céramique de taille finie, dans laquelle le nombre de domaines est en nombre limité, à température constante.

La polarisation totale d'un champ de domaines compris entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est égale à  $P^{sp} f(\theta) d\theta \vec{e}_\theta$ . Projetant ce vecteur dans la direction principale  $\vec{\theta}$  et selon sa direction normale  $\vec{\alpha}$ , deux relations scalaires sont obtenues :

$$P^{sp} f(\theta) d\theta (\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_{\vec{\theta}}) = P^{sp} f(\theta) \cos(\theta - \vec{\theta}) d\theta , \quad (IV.17)$$

$$P^{sp} f(\theta) d\theta (\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_{\vec{\alpha}}) = P^{sp} f(\theta) \sin(\theta - \vec{\theta}) d\theta . \quad (IV.18)$$

En intégrant ces équations pour des valeurs de  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ , les composantes du vecteur polarisation dans les directions  $\vec{e}_{\vec{\theta}}$  et  $\vec{e}_{\vec{\alpha}}$  sont trouvées, respectivement :

$$\int_0^{2\pi} P^{sp} f(\theta) \cos(\theta - \vec{\theta}) d\theta = P^{sp} \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} , \quad (IV.19)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^{sp} f(\theta) \sin(\theta - \vec{\theta}) d\theta = 0 , \quad (IV.20)$$

où  $I_1(\kappa)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et du premier ordre définie par :

$$I_1(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\kappa \cos \theta} \cos \theta d\theta . \quad (IV.21)$$

Par définition, le paramètre de concentration décrivant le changement de polarisation de domaines est le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ . De ces deux équations, la polarisation macroscopique est déduite :

$$\vec{P} = P^{sp} \frac{I_1(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} \vec{e}_{\vec{\theta}} . \quad (IV.22)$$

Au travers du paramètre de concentration  $\kappa^p$ , cette relation fait le lien entre le niveau de polarisation microscopique représenté ici par la polarisation spontanée  $P^{sp}$  et la polarisation totale macroscopique. Dans la configuration de notre étude, la direction principale  $\bar{\theta}$  correspond à la direction 3, nous avons donc :

$$\bar{P} = P^{sp} \frac{I_1(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} \bar{e}_3. \quad (\text{IV.23})$$

Ainsi, cette expression relie le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  à la polarisation, parallèle à l'axe de contrainte du matériau.

#### II.4.2 Évolution de la déformation piézoélectrique en fonction des distributions de domaines

Les domaines de piézocéramiques possèdent une polarisation (microscopique) spontanée, mais aussi une déformation (microscopique) spontanée. Dans le système de coordonnées locales  $(\theta, \alpha)$ , ces déformations sont définies comme suit :

$$S_{\theta\theta}^{sp} = S^{sp}, \quad (\text{IV.24})$$

$$S_{\alpha\alpha}^{sp} = -\nu^p S^{sp}, \quad (\text{IV.25})$$

$$S_{\alpha\theta}^{sp} = 0, \quad (\text{IV.26})$$

où  $\nu^p$  est le coefficient de Poisson piézoélectrique. La déformation piézoélectrique étant isochore [Cao1993-Hwang1995-Kamlah1998-Lu2006], on pose  $\nu^p = 1$ . Notons que cette considération est une approximation, et que selon le type de matériau elle est plus ou moins valable, mais acceptable en première approximation [Lynch1995a].

Dans notre étude, nous considérons que la contrainte est appliquée uniquement dans l'axe (Oz) et qu'elle n'entraîne aucun phénomène de cisaillement. De plus, la déformation transversale  $S_{\alpha\alpha}^p$  représente la déformation transversale 'totale' (donc dans les deux directions perpendiculaires en 3 dimensions). Notons que cette remarque corrige une erreur au sein d'un modèle antérieur [Lu2006] qui considérait cette déformation égale à la déformation transverse dans les deux directions, ce qui rompait son hypothèse de déformation isochore.

Pour un cristal polarisé dans la direction  $\bar{e}_\theta$ , le changement de polarisation microscopique (changement de paramètre de concentration piézoélectrique) induit des 'déformations piézoélectriques' au travers de la même fonction de distribution. Ainsi, les domaines de direction de

polarisation entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  possèdent des déformations piézoélectriques macroscopiques définies dans le système de coordonnées  $(\theta, \alpha)$  par :

$$S_{\theta\theta}^p = f(\theta) S^{sp} d\theta, \quad (\text{IV.27})$$

$$S_{\alpha\alpha}^p = -f(\theta) S^{sp} d\theta, \quad (\text{IV.28})$$

$$S_{\alpha\theta}^p = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Dans le système de coordonnées  $(\bar{\theta}, \bar{\alpha})$ , ces déformations s'expriment :

$$\begin{pmatrix} S_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^p \\ S_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^p \\ S_{\bar{\alpha}\bar{\theta}}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \Delta\theta & \sin^2 \Delta\theta & \sin 2\Delta\theta \\ \sin^2 \Delta\theta & \cos^2 \Delta\theta & -\sin 2\Delta\theta \\ \frac{\sin 2\Delta\theta}{2} & -\frac{\sin 2\Delta\theta}{2} & \frac{\cos 2\Delta\theta}{2} \end{pmatrix} f(\theta) d\theta \begin{pmatrix} S^{sp} \\ -S^{sp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.30})$$

où  $\Delta\theta = \theta - \bar{\theta}$ .

En intégrant ces expressions pour des valeurs de  $\theta$  allant de 0 à  $2\pi$ , les déformations piézoélectriques macroscopiques sont obtenues en fonctions du paramètre de concentration de piézoélectrique  $\kappa^p$  :

$$S_{\bar{\theta}\bar{\theta}}^p = \int_0^{2\pi} f(\theta) S^{sp} [\cos^2(\theta - \bar{\theta}) - \sin^2(\theta - \bar{\theta})] d\theta = S^{sp} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)}, \quad (\text{IV.31})$$

$$S_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^p = \int_0^{2\pi} f(\theta) S^{sp} [\sin^2(\theta - \bar{\theta}) - \cos^2(\theta - \bar{\theta})] d\theta = -S^{sp} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)}, \quad (\text{IV.32})$$

$$S_{\bar{\alpha}\bar{\theta}}^p = 0, \quad (\text{IV.33})$$

où  $I_2(\kappa)$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et du second ordre définie par :

$$I_2(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\kappa \cos \theta} \cos 2\theta d\theta. \quad (\text{IV.34})$$

Dans notre configuration d'étude, il vient :

$$S_{33}^p = S^{sp} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)}, \quad (\text{IV.35})$$

$$S_{11}^p = S_{22}^p = -\frac{S^{sp}}{2} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)}. \quad (\text{IV.36})$$

Ainsi, les trois déformations piézoélectriques engendrées par le changement de polarisation sont connues. Sous contrainte électrique, les déformations rémanentes sont rigoureusement égales aux déformations piézoélectriques, elles sont complètement connues. Dans le cas de la compression

mécanique, il reste à calculer la déformation ferroélastique pure pour connaître la déformation rémanente totale.

#### II.4.3 Évolution de la déformation ferroélastique pure en fonction des distributions de domaines

L'évolution de la déformation longitudinale rémanente en fonction de la contrainte mécanique étant connue, l'équation (IV.8) nous permet de calculer la déformation longitudinale ferroélastique pure associée. Comme expliqué au paragraphe I.3.3, nous décrivons l'évolution de la déformation ferroélastique avec les même lois que dans le cas piézoélectrique, mais avec un paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$ , soit :

$$S_{\theta\theta}^f = S^{sp} \frac{I_2(\kappa^f)}{I_0(\kappa^f)}, \quad (\text{IV.37})$$

$$S_{\alpha\alpha}^f = -S^{sp} \frac{I_2(\kappa^f)}{I_0(\kappa^f)}, \quad (\text{IV.38})$$

$$S_{\alpha\theta}^f = 0. \quad (\text{IV.39})$$

Ici aussi, aucun phénomène de cisaillement n'est considéré. Dans notre configuration d'étude, il vient :

$$S_{33}^f = S^{sp} \frac{I_2(\kappa^f)}{I_0(\kappa^f)}, \quad (\text{IV.40})$$

$$S_{11}^f = S_{22}^f = -\frac{S^{sp}}{2} \frac{I_2(\kappa^f)}{I_0(\kappa^f)}. \quad (\text{IV.41})$$

Ainsi, les trois déformations ferroélastiques engendrées par le changement de domaines purement mécanique sont évaluables. Les déformations rémanentes sous contrainte mécanique sont donc complètement connues.

#### II.4.4 Évolution des fonctions de polarisation et de déformations en fonction des paramètres de concentration de domaines

Par définition, les fonctions de distributions évoluent en fonction du paramètre de concentration ainsi que de la direction principale (correspondant à la direction 3 dans notre configuration). Les rapports de fonction de Bessel intervenant dans le calcul de la polarisation

$(I_1(\kappa)/I_0(\kappa))$  et des déformations piézoélectriques, comme ferroélastiques  $(I_2(\kappa)/I_0(\kappa))$ , sont représentés sur la figure IV.11 en fonction de  $\kappa$ .

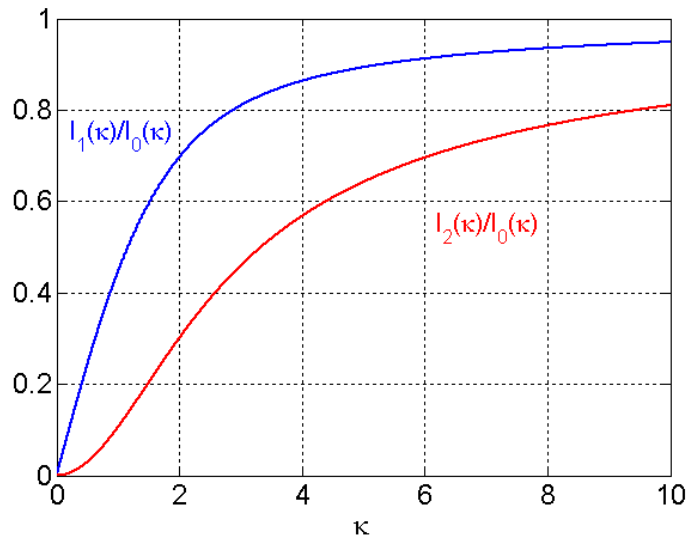


Figure IV.11 : Représentation des rapports de fonction de Bessel en fonction du paramètre de concentration  $\kappa$ .

Comme le montre l'équation (IV.23), l'évolution du rapport  $I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$  est directement proportionnelle à l'évolution de la polarisation macroscopique. Ainsi, pour une distribution uniforme ( $\kappa = 0$ ), on vérifie que la polarisation macroscopique est nulle. Pour une valeur infinie du paramètre de concentration, cette courbe est maximum en 1, ce qui traduit le cas idéal de la polarisation macroscopique égale à la polarisation spontanée. Comme expliqué au chapitre I, cette valeur ne pouvant être atteinte physiquement, nous considérons une polarisation dite de saturation  $P^{sat}$ , à partir de laquelle l'évolution de la polarisation est négligeable pour des concentrations croissantes. Une concentration de saturation  $\kappa_{sat}^p$  est associée à cette polarisation de saturation.

Connaissant les valeurs de polarisation rémanente à contraintes nulles  $P_0$  et à champ de saturation  $P^{sat}$ , l'équation (IV.23) permet de calculer les valeurs du paramètre de concentration  $\kappa^p$  correspondantes, soit  $\kappa_0^p$  et  $\kappa_{sat}^p$  respectivement. Sous contrainte électrique, la valeur du déplacement électrique notée  $D_l$  au niveau de contrainte  $\sigma_l$  est utilisée pour calculer le paramètre de concentration piézoélectrique associé noté  $\kappa_l^p$  à l'aide de l'équation (IV.6).

Chaque valeur de déformation piézoélectrique étant associée à une valeur du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ , les équations (IV.35-36) nous permettent de calculer les déformations piézoélectriques associées. Comme le montrent ces équations, l'évolution du rapport  $I_2(\kappa^p)/I_0(\kappa^p)$  est directement proportionnelle aux évolutions des déformations macroscopiques.

Ainsi, en l'absence de polarisation ( $\kappa^p = 0$ ), aucune déformation piézoélectrique n'est considérée. La figure IV.11 montre que l'évolution de la déformation piézoélectrique en fonction du paramètre de concentration  $\kappa^p$  est plus lente que l'évolution de la polarisation, mais possède aussi un maximum en 1 pour une valeur de  $\kappa^p$  infinie. La déformation spontanée est elle aussi atteinte dans une configuration où l'ensemble des champs de domaines serait idéalement orienté dans la même direction.

Les déformations ferroélastiques étant connues à l'état initial et à saturation, l'équation (IV.40) nous permet de calculer les valeurs du paramètre de concentration ferroélastique associé, soit  $\kappa_0^f$  et  $\kappa_{sat}^f$  respectivement.

#### II.4.5 Évolution des paramètres de concentration

Les champs électriques et de contrainte mécanique gouvernant l'évolution des orientations de champs de domaines, ils régissent les variations des paramètres de concentrations. Nous supposons que seules ces composantes influent sur ces paramètres de concentration et que leurs effets sont additifs. Le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  évoluant pour une contrainte mécanique ou électrique, il se décompose en la somme de deux fonctions distinctes. Le paramètre de concentration ferroélastique n'étant influencé que par la contrainte mécanique, il ne comporte qu'un terme. Ainsi, les évolutions des paramètres de concentration sont de la forme :

$$\dot{\kappa}^p = A_{\kappa^p}(E) \frac{\dot{E}}{E_c} + B_{\kappa^p}(\sigma) \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_c}, \quad (\text{IV.42})$$

$$\dot{\kappa}^f = C_{\kappa^f}(\sigma) \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_c}, \quad (\text{IV.43})$$

où les coefficients  $A_{\kappa^p}$ ,  $B_{\kappa^p}$  et  $C_{\kappa^f}$  sont des paramètres sans dimensions régissant l'évolution des paramètres de concentration et sont dépendants des conditions de chargement. Parce que l'évolution des paramètres de concentration leurs est intimement liée, les valeurs de champs coercitifs  $E_c$  et  $\sigma_c$  normalisent les composantes de champs.

#### II.4.6 Calculs des polarisations et déformations spontanées

Comme expliqué dans le chapitre I, par définition, les valeurs de la polarisation et de la déformation spontanées se mesurent à champ électrique infini. Certaines de ces valeurs se trouvent



dans la littérature, mais peu d'auteurs expliquent comment ils les déterminent. Dans notre étude, la détermination de la polarisation spontanée se fait par optimisation à partir d'une valeur numérique évaluée par la méthode de Baerwald [Baerwald1957]. Ce dernier a montré qu'en première approximation, la valeur de la polarisation rémanente de saturation  $P^{sat}$  est égale à 83% de la valeur de la polarisation spontanée d'un grain, soit :

$$P^{sat} = 0.83 P^{sp}. \quad (IV.44)$$

L'étude de l'évolution de la polarisation sous contraintes montre que la valeur de la polarisation rémanente à contraintes nulles  $P_0$  est proche de la valeur à saturation  $P^{sat}$ . De plus, nous avons montré précédemment que la valeur de la polarisation rémanente  $P_0$  est nécessairement la même sous contrainte électrique et mécanique. Sans avoir de données expérimentales du déplacement électrique sous contrainte, nous utiliserons l'équation (IV.44) en remplaçant la valeur de saturation  $P^{sat}$  par la valeur à la rémanence en gardant à l'esprit que la valeur 'réelle' est légèrement supérieure. Cette valeur sera le point de départ de notre calcul d'optimisation pour déterminer la valeur de la polarisation spontanée.

Inversement, peu de valeurs de déformation spontanée sont disponibles dans la littérature. Dans cette étude, nous déterminons cette valeur avec une loi empirique proposée par Hwang [Hwang1995]. Définissant la valeur de la déformation de saturation  $S^{sat}$  entre l'état non polarisé et l'état à champ de saturation  $E_{sat}$ , la relation qui relie cette déformation à la déformation spontanée  $S^{sp}$  est alors :

$$S^{sat} = 0.37 S^{sp}. \quad (IV.45)$$

Cette relation empirique sera le point de départ de notre calcul d'optimisation pour déterminer la valeur de déformation spontanée. Dans le cas où nous n'aurions pas connaissance de la courbe d'évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique, nous déterminerons la valeur de déformation spontanée en correspondance avec les données d'un matériau connu possédant une polarisation spontanée proche de celle de notre matériau. En effet, la comparaison de valeurs de polarisation et déformation spontanée a montré que les matériaux qui possèdent une grande valeur de polarisation spontanée ont aussi une valeur de déformation spontanée élevée (et inversement).

### III Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques sous chargement électrique

Nous nous plaçons dans le cas d'une piézocéramique possédant une polarisation rémanente  $P_0$  orientée dans la direction 3 et soumise à une contrainte électrique parallèle, à contrainte mécanique nulle. La résolution du modèle sous contrainte électrique nécessite de connaître certains paramètres du matériau :

- ses coefficients piézoélectriques  $d_{333}$  et  $d_{311}$ ,
- sa constante diélectrique  $\epsilon_{33}^T$ ,
- son coefficient de Poisson  $\nu$ .

Connaissant l'évolution du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique, on vérifie la cohérence de ces données avec le matériau en question et on évalue les valeurs de la polarisation spontanée  $P^{sp}$  et de la déformation spontanée  $S^{sp}$  à l'aide des équations (IV.44) et (IV.45). Une fois le reste du modèle en place, le calcul de ces valeurs sera optimisé par ajustement des paramètres du modèle aux données expérimentales.

#### III.1 Lois de comportement

Sous contrainte électrique, à contrainte mécanique nulle, les déformations rémanentes se réduisent aux déformations rémanentes piézoélectriques. Ainsi, les équations du déplacement électrique (IV.6) et de la déformation (IV.7) se réduisent en :

$$\begin{cases} D_m = P_m + \epsilon_{mn}^T E_n \\ S_{ij} = S_{ij}^p + \tilde{d}_{mij} E_m \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

En l'absence de chargement mécanique, Seul le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  est à considérer, le modèle décrit dans le couple d'équation (IV.42-43) se simplifie-en :

$$\dot{\kappa}^p = A_{\kappa^p}(E) \frac{\dot{E}}{E_c} \quad (\text{IV.47})$$

Dans ce cas, l'évolution du paramètre de concentration dépend uniquement de l'évolution du champ électrique.

## III.2 Évolution de la polarisation et du paramètre de concentration piézoélectrique sous chargement électrique

### III.2.1 Évolution de la polarisation sous chargement électrique

Au travers de la courbe d'évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique (la figure IV.12), les valeurs de la polarisation correspondantes aux différentes valeurs clés du champ électrique sont évaluées : nulle, critique  $E_c$  et de saturation  $E_{sat}$ .

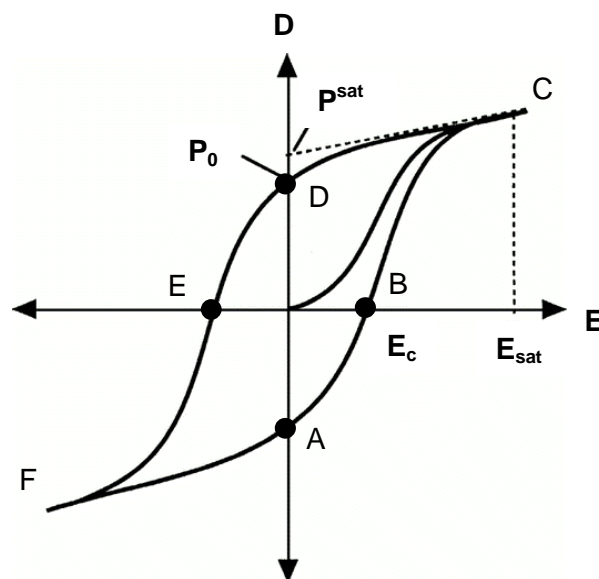


Figure IV.12 : Évolution de la polarisation et du déplacement électrique sous contrainte électrique.

Une fois le matériau polarisé et le champ électrique de saturation  $E_{sat}$  atteint (point C), l'évolution du déplacement électrique devient proportionnelle au champ électrique. Par définition, l'ordonnée à l'origine de la tangente à cette courbe au point C indique la valeur de la polarisation de saturation  $P^{sat}$ . Rappelons que si le champ électrique atteignait une valeur infinie, l'ordonnée à l'origine de la tangente à cette courbe tendrait vers la valeur de la polarisation spontanée. Une fois le champ électrique relâché jusqu'à une valeur de champ électrique nul, la valeur de la polarisation rémanente  $P_0$  est déterminée. Le champ électrique coercitif  $E_c$  correspondant au changement de polarisation, la valeur de la polarisation en ce point est nulle.

Connaissant la valeur de la polarisation spontanée, l'équation (IV.46.a) est développée avec l'équation (IV.23) pour obtenir l'expression du déplacement électrique en fonction du paramètre de concentration piézoélectrique et du champ électrique :

$$D_m = P^{sp} \frac{I_1(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} + \varepsilon_{mn}^T E_n. \quad (\text{IV.48})$$

Connaissant la valeur de la polarisation rémanente  $P_0$ , ainsi que la valeur du déplacement électrique de saturation associé à la valeur de champ électrique de saturation  $E_{sat}$ , la résolution de cette équation nous permet de calculer les valeurs associées des paramètres de concentration piézoélectrique  $\kappa_0^p$  et  $\kappa_{sat}^p$  respectivement.

### III.2.2 Évolution du paramètre de concentration piézoélectrique sous chargement électrique

Comme nous l'avons discuté précédemment, et comme le représente la figure IV.12, l'hystérésis diélectrique peut être divisée en deux processus :

Les segments  $A \rightarrow B \rightarrow C$  et  $D \rightarrow E \rightarrow F$  correspondent à des processus de changement de polarisation. L'application d'un champ électrique de sens opposé à la polarisation provoque la dépolarisation du matériau. Cette dépolarisation est de plus en plus rapide au fur et à mesure que l'on se rapproche du champ coercitif où la vitesse de dépolarisation est maximum. Au-delà du champ coercitif, la repolarisation est très rapide et ralentit en s'en éloignant. Ainsi, le taux de changement du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  est maximum près du champ coercitif et décroît de plus en plus lentement dès que l'on s'éloigne de cette valeur. L'évolution du paramètre de concentration est donc étroitement liée au champ électrique coercitif  $E_c$  pour lequel la polarisation est ramenée à zéro. La vitesse de changement de  $\kappa^p$  étant directement liée à la vitesse de changement de polarisation, on approche l'évolution du coefficient  $A_{\kappa^p}$  régissant le processus de renversement de polarisation par une loi Gaussienne de covariance  $\zeta_{C_1}^2$ , admettant un maximum en  $E_c$ . Plus le coefficient  $\zeta_{C_1}^2$  est petit, plus les changements de  $\kappa^p$  sont rapides près de  $E_c$ .

Les segments  $C \rightarrow D$  et  $F \rightarrow A$  sont des processus de relaxation de la polarisation. La polarisation décroît d'abord lentement de sa valeur de saturation puis de plus en plus rapidement en se rapprochant du champ électrique nul. Le taux de variation du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  étant directement lié à cette vitesse de dépolarisation, on suppose alors que le coefficient  $A_{\kappa^p}$  évolue exponentiellement.

Dans les deux cas, on normalise par rapport à la valeur du champ coercitif. Ainsi, le coefficient  $A_{\kappa^p}$  est choisi de la forme :

$$A_{\kappa^p} = \begin{cases} \frac{C_1}{\zeta_{C_1} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(|E/E_c|-1)^2}{2\zeta_{C_1}^2}\right) & \text{pendant le processus de renversement} \\ C_2 \exp(-\gamma \frac{E}{E_c}) & \text{pendant le processus de relaxation} \end{cases}, \quad (\text{IV.49})$$

avec  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\zeta_{C_1}$  et  $\gamma$  définies comme des constantes sans dimension du matériau.

### III.3 Détermination des constantes d'intégration

De manière à déterminer ces constantes, l'équation (IV.47) du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  est intégrée le long de différents segments de la courbe de la figure IV.12 en prenant ses points de fonctionnements pour bornes d'intégration.

En intégrant l'équation le long du segment  $F \rightarrow A$  (processus de relaxation de la polarisation) :

$$\kappa_0^p - \kappa_{sat}^p = -\frac{C_2}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\gamma \frac{E_{sat}}{E_c}\right)\right). \quad (\text{IV.50})$$

En faisant de même le long du segment  $A \rightarrow B$  (première moitié du processus de renversement de la polarisation) :

$$\kappa_0^p - 0 = \frac{C_1}{\zeta_{C_1} \sqrt{2\pi}} (\Phi_E(1) - \Phi_E(0)), \quad (\text{IV.51})$$

$$\text{avec } \Phi_E(\omega) = \int_0^\omega \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\zeta_{C_1}^2}\right) dx \quad (\text{IV.52})$$

$$\text{et } \omega = \frac{E}{E_c}.$$

En intégrant sur le segment  $B \rightarrow C$  (deuxième moitié du processus de renversement de la polarisation) :

$$\kappa_{sat}^p - 0 = \frac{C_1}{\zeta_{C_1} \sqrt{2\pi}} \left(\Phi_E\left(\frac{E_{sat}}{E_c}\right) - \Phi_E(1)\right). \quad (\text{IV.53})$$

La dernière équation nécessaire pour résoudre un système de quatre équations s'obtient en imposant une continuité de la pente au niveau de la transition  $F \rightarrow A \rightarrow B$  (processus de renversement de la polarisation complet), soit :

$$\frac{C_1}{\zeta_{C_1} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\zeta_{C_1}^2}\right) = C_2. \quad (\text{IV.54})$$

La résolution de ces quatre équations (IV.50-51-53-54), permet de déterminer les quatre constantes du matériau  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\zeta_{C_1}$  et  $\gamma$ . Cependant, ce système d'équation ne se résout pas complètement analytiquement et oblige à utiliser une résolution par optimisation. La résolution du système formé par les équations (IV.51) et (IV.53) permet de déterminer les valeurs de  $C_1$  et  $\zeta_{C_1}$ . La valeur de la constante  $C_2$  se déduit alors analytiquement de l'équation (IV.54). Pour finir, l'équation (IV.50) est résolue par optimisation pour déterminer la valeur de la constante  $C_2$ .

La construction de cette partie nous permet de décrire complètement l'évolution du paramètre de concentration  $\kappa^p$ , donc de la polarisation et du déplacement électrique en fonction du champ électrique. Dans un deuxième temps, une valeur plus précise de la polarisation spontanée est déterminée par optimisation de la courbe expérimentale du déplacement électrique en fonction du champ électrique.

### III.4 Évolution des déformations sous chargement électrique

Sous contrainte électrique, les déformations rémanentes sont uniquement piézoélectriques, donc complètement déterminées par la valeur du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ . Connaissant l'évolution de ce paramètre en fonction du champ électrique appliqué, l'évolution de la déformation rémanente sous contrainte électrique est déduite. Ainsi, l'équation (IV.46.b) est développée en y intégrant les équations (IV.40) et (IV.41), pour obtenir les expressions des déformations longitudinale et transversales :

$$S_{33} = S^{sp} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} + d_{333} \frac{P}{|P_0|} E_3, \quad (\text{IV.55})$$

$$S_{11} = S_{22} = -\frac{S^{sp}}{2} \frac{I_2(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} + d_{311} \frac{P}{|P_0|} E_3. \quad (\text{IV.56})$$

Utilisant la valeur de la déformation spontanée, les déformations longitudinales et transversales sont évaluées. Dans un deuxième temps, une valeur plus précise de la déformation spontanée est déterminée par optimisation de la courbe expérimentale de déformation longitudinale en fonction du champ électrique.

## IV Modélisation des comportements hystérétiques de piézocéramiques sous chargement mécanique

Nous nous plaçons dans le cas d'une piézocéramique possédant une polarisation rémanente  $P_0$  orientée dans la direction 3 et soumise à une contrainte mécanique parallèle, à contrainte électrique nulle. Le modèle théorique étant établi, sa résolution nécessite de connaître un certain nombre de paramètres du matériau :

- son module d'Young  $Y_3$ ,
- ses coefficients piézoélectriques  $d_{333}$  et  $d_{311}$ ,
- son coefficient de Poisson  $\nu$ .

Connaissant l'évolution du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique, il est possible de vérifier la cohérence de ces données avec le matériau en question. Dans le cas où l'étude du matériau aura été faite sous contrainte électrique, nous utilisons les valeurs de polarisation et déformation spontanées calculées et optimisées précédemment. Sinon, nous déterminons des valeurs approchées de ces constantes comme expliqué au paragraphe II.4.6 et les optimiserons par la suite.

### IV.1 Lois de comportement

Sous contrainte mécanique, à champ électrique nul, les déformations rémanentes se décomposent en déformations rémanentes piézoélectriques et ferroélastiques. Ainsi, les équations du déplacement électrique (IV.6) et des déformations (IV.7) se développent ici en :

$$\begin{cases} D_m = P_m + \tilde{d}_{mij} \sigma_{ij} \\ S_{ij} = S_{ij}^p + S_{ij}^f + s_{ijkl} \sigma_{kl} \end{cases} \quad (IV.57)$$

Dans ce cas, nous considérons le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ , ainsi que le paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$ . En l'absence de chargement électrique, le modèle décrit dans le couple d'équation (IV.42-43) se simplifie-en :

$$\begin{cases} \dot{\kappa}^p = B_{\kappa^p}(\sigma) \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_c} \\ \dot{\kappa}^f = C_{\kappa^f}(\sigma) \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_c} \end{cases} \quad (IV.58)$$

Dans ce cas, les évolutions des paramètres de concentration piézoélectrique et ferroélastique dépendent uniquement de l'évolution de la contrainte mécanique.

## IV.2 Calcul de la polarisation et de la déformation piézoélectrique rémanente sous chargement mécanique

### IV.2.1 Évolution de la polarisation sous chargement mécanique

Au travers de la description de l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique (figure IV.13), on évalue le niveau de contrainte avant lequel la dépolarisation est linéaire  $\sigma_l$ , la contrainte coercitive  $\sigma_c$  au niveau de laquelle la variation du déplacement électrique est maximum et la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$ . De plus, on détermine les valeurs de la polarisation, ou du déplacement électrique, correspondantes aux différentes valeurs clés de la contrainte mécanique : nulle, égale au seuil de contrainte  $\sigma_l$  et à la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$ .

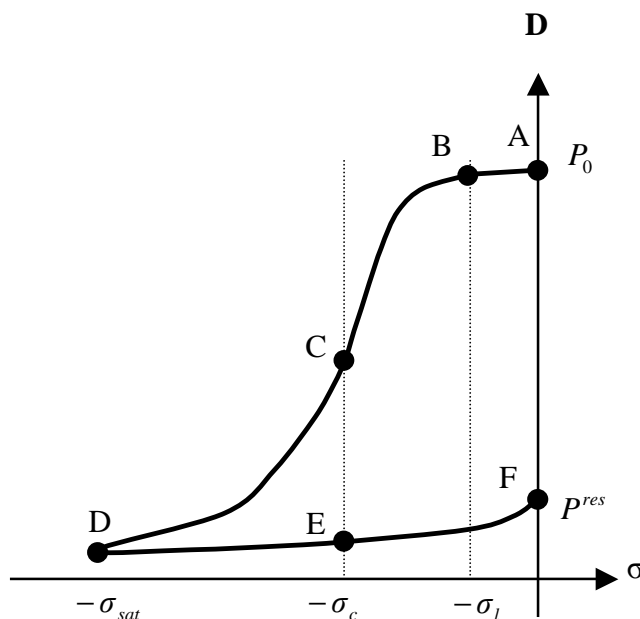


Figure IV.13 : Évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique, à champ électrique nul.

Le matériau considéré possède une polarisation initiale  $P_0$  (point A). Le niveau de contrainte  $\sigma_l$  (point B) est déterminé juste avant que la décroissance du déplacement électrique s'accélère et tant que cette évolution reste linéaire. En ce point, nous évaluons la valeur de déplacement électrique notée  $D_l$ . Lors de la dépolarisation, le seuil de contrainte coercitive  $\sigma_c$  au point d'inflexion (point



C) de la courbe de déplacement électrique est déterminé. Le niveau de saturation de la contrainte mécanique  $\sigma_{sat}$  est atteint quand l'évolution du déplacement électrique devient stable. Le déplacement électrique est non nul et égale à  $D_{sat}$ , la polarisation correspondante est notée  $P^{sat}$ . Ensuite, la contrainte mécanique est relâchée et on mesure la valeur de polarisation résiduelle  $P^{res}$  en fin de cycle (point F).

Notons que certains auteurs [Lu2006] font l'approximation d'une polarisation de saturation  $P^{sat}$  égale à 0. Or, il est improbable que la distribution de domaines soit complètement aléatoire. C'est pourquoi nous considérons une polarisation de saturation  $P^{sat}$  non nulle. La repolarisation partielle est aussi souvent négligée, les auteurs [Hwang1995-Chen1998-Kamlah1999a-Lu2006] considèrent alors que l'évolution de la polarisation pendant le processus de relâchement de la contrainte est nulle. Mais comme montré par les nombreuses mesures de Stoll et Davis [Stoll1997-Fan1999-Davis2006], et comme nous le verrons dans le prochain chapitre, cette approximation est beaucoup trop forte.

Connaissant la valeur de la polarisation spontanée, l'équation (IV.57.a) est développée avec l'équation (IV.23) pour obtenir l'équation du déplacement électrique en fonction du paramètre de concentration piézoélectrique et de la contrainte mécanique :

$$D_m = P^{sp} \frac{I_1(\kappa^p)}{I_0(\kappa^p)} \left( 1 + \frac{d_{mij} \sigma_{ij}}{|P_0|} \right). \quad (IV.59)$$

Connaissant la valeur de la polarisation rémanente initiale  $P_0$ , le déplacement électrique  $D_l$  associé à la valeur de contrainte  $\sigma_l$ , la valeur du déplacement électrique de saturation  $D_{sat}$  associée à la valeur de contrainte  $\sigma_{sat}$ , la valeur de polarisation résiduelle  $P^{res}$ , nous utilisons cette équation pour déterminer les valeurs du paramètre de concentration piézoélectrique associées, soit :  $\kappa_0^p$ ,  $\kappa_l^p$ ,  $\kappa_{sat}^p$  et  $\kappa_{res}^p$ .

#### IV.2.2 Évolution du paramètre de concentration piézoélectrique sous chargement mécanique

Comme nous l'avons discuté précédemment, et comme le représente la figure IV.13, l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique peut être divisée en trois processus :

Le long du segment  $A \rightarrow B$ , la dépolarisation est très faible et communément considérée comme nulle. Pourtant, l'étude de nombreux cycle d'hystérésis montre que la dépolarisation n'est pas nulle mais extrêmement faible et constante. Ainsi, nous considérons qu'avant un niveau de contrainte  $\sigma_l$  (point B), le paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  décroît linéairement.

Le long du segment  $B \rightarrow C \rightarrow D$ , une dépolarisation rapide est observée. Celle-ci accélère en se rapprochant de la contrainte coercitive  $\sigma_c$  (segment  $B \rightarrow C$ ) où elle atteint son maximum. Une fois ce seuil passé, la vitesse de dépolarisation ralentit et se stabilise en se rapprochant de la contrainte de saturation (segment  $C \rightarrow D$ ). Ainsi, la vitesse d'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  croît significativement à partir du niveau de contrainte  $\sigma_l$  jusqu'à son maximum en  $\sigma_c$  et décroît vers une valeur stable en  $\sigma_{sat}$ . Considérant que ce comportement est symétrique par rapport à la contrainte coercitive, nous supposons que l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  obéit à une fonction Gaussienne, avec un maximum en  $\sigma_c$  et une covariance  $\zeta_{C_3}^2$ . Plus le coefficient  $\zeta_{C_3}^2$  est petit, plus les changements de  $\kappa^p$  sont rapides près de  $\sigma_c$ .

Le long du segment  $D \rightarrow E \rightarrow F$ , on observe un phénomène de repolarisation. Alors que l'évolution de la vitesse de repolarisation semble stable le long du segment  $D \rightarrow E$ , on observe qu'elle est significativement plus rapide une fois la contrainte coercitive franchie (point E). En accord avec des comportements plus prononcés observés sur d'autres matériaux, nous supposons que la vitesse de polarisation décroît en se rapprochant de la contrainte coercitive pour ensuite recroître le long du segment  $E \rightarrow F$ . Cette hypothèse suppose un comportement analogue, mais inversé, à celui du comportement sous compression. Ainsi, nous considérons que l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  obéit à une fonction Gaussienne inverse, avec un minimum en  $\sigma_c$  et une covariance  $\zeta_{C_4}^2$  qui sera significativement plus élevée que dans le cas de la dépolarisation.

On considère donc le coefficient  $B_{\kappa^p}$  de la forme :

$$B_{\kappa^p} = \begin{cases} \sigma_c & \text{processus de dépolarisation, avant } \sigma_l \\ \frac{C_3}{\zeta_{C_3} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(|\sigma/\sigma_c|-1)^2}{2\zeta_{C_3}^2}\right) & \text{processus de dépolarisation, après } \sigma_l \\ \frac{C_4}{\zeta_{C_4} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(|\sigma/\sigma_c|-1)^2}{2\zeta_{C_4}^2}\right) & \text{processus de repolarisation} \end{cases}, \quad (\text{IV.60})$$

où  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $\zeta_{C_3}$  et  $\zeta_{C_4}$  sont des constantes sans dimension du matériau.

### IV.2.3 Détermination des constantes d'intégration

De manière à déterminer les constantes d'intégration, on intègre l'équation (IV.58.a) du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  le long des différents segments en prenant pour bornes d'intégration les points de fonctionnements de la courbe de la figure IV.13.

En intégrant l'équation (IV.58.a) le long du segment  $B \rightarrow D$  (processus de dépolarisation) :

$$\kappa_l^p - \kappa_{sat}^p = \frac{C_3}{\zeta_{C_3} \sqrt{2\pi}} \left( \Phi_{\sigma}^{dp} \left( \frac{\sigma_{sat}}{\sigma_c} \right) - \Phi_{\sigma}^{dp} \left( \frac{\sigma_l}{\sigma_c} \right) \right), \quad (IV.61)$$

avec la fonction de dépolarisation  $\Phi_{\sigma}^{dp}(\omega)$  définie par :

$$\Phi_{\sigma}^{dp}(\omega) = \int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\zeta_{C_3}^2}\right) dx \quad (IV.62)$$

et  $\omega = \frac{\sigma}{\sigma_c}$ .

La résolution de cette équation permet de calculer la valeur de la constante  $\zeta_{C_3}$  en fonction de la valeur de  $C_3$ . On détermine ensuite le meilleur couple de constante par optimisation aux données expérimentales.

En intégrant l'équation (IV.58.a) le long du segment  $D \rightarrow E$  (processus de repolarisation) :

$$\kappa_{sat}^p - \kappa_{res}^p = \frac{C_4}{\zeta_{C_4} \sqrt{2\pi}} \left( \Phi_{\sigma}^{rp} \left( \frac{\sigma_{sat}}{\sigma_c} \right) - \Phi_{\sigma}^{rp}(0) \right) \quad (IV.63)$$

avec la fonction de repolarisation  $\Phi_{\sigma}^{rp}(\omega)$  définie par

$$\Phi_{\sigma}^{rp}(\omega) = \int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\zeta_{C_4}^2}\right) dx \quad (IV.64)$$

et  $\omega = \frac{\sigma}{\sigma_c}$ .

La résolution de cette équation permet de calculer la valeur de  $\zeta_{C_4}$  en fonction de la valeur de  $C_4$ . On détermine ensuite le meilleur couple de constante par optimisation aux valeurs expérimentales.

La construction de cette partie relie l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ , donc de la polarisation et du déplacement électrique, en fonction de la contrainte mécanique. Si nous ne disposons que d'une valeur approchée de la polarisation spontanée, nous déterminons une valeur plus précise par optimisation de la courbe expérimentale du déplacement électrique en fonction du champ électrique.

#### IV.2.4 Évolution des déformations rémanentes piézoélectriques

Sous contrainte mécanique, les déformations rémanentes d'origine piézoélectrique sont complètement déterminées par l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$ . Connaissant la valeur de la déformation spontanée (ou approchée) ainsi que l'évolution de ce paramètre en fonction de la contrainte mécanique appliquée, les équations (IV.35) et (IV.36) nous permettent de calculer l'évolution des déformations piézoélectriques longitudinale ( $S_{33}^p$ ) et transversales ( $S_{11}^p$  et  $S_{22}^p$ ) en fonction de la contrainte mécanique.

### IV.3 Calcul de la déformation ferroélastique rémanente

#### IV.3.1 Évolution de la déformation ferroélastique

Au travers de la description de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique, représentée sur la figure IV.14, on évalue les valeurs de déformation longitudinale à l'état initial, à la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$  et une fois la contrainte complètement relâchée, soit respectivement :  $S^0$ ,  $S^{sat}$  et  $S^{res}$ . Notons que les niveaux de contrainte coercitive et de saturation sont les mêmes que ceux observés lors de l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique.

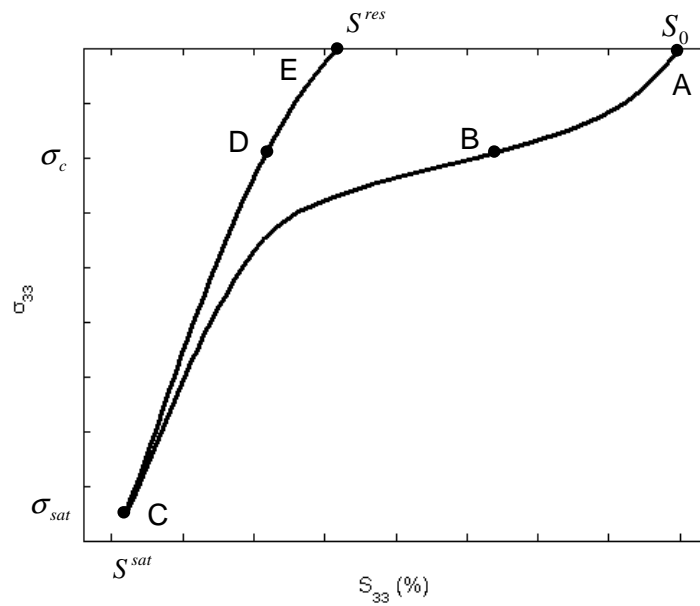


Figure IV.14 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique, à champ électrique nul.

Considérant une déformation initiale  $S_0$  (point A), nous repérons la déformation à saturation  $S^{sat}$  (point C) ainsi que la déformation résiduelle  $S^{res}$ . Généralement, les auteurs considèrent un niveau de déformation  $S_0$  nul et définissent l'évolution de la déformation par rapport à ce point. Nous adopterons cette même simplification.

La déformation longitudinale piézoélectrique (rémanente) ayant été calculée précédemment, et la déformation spontanée étant connue, nous développons l'équation (IV.57.b) en y intégrant l'équation (IV.40) pour obtenir l'expression de la déformation longitudinale :

$$S = S^p + S^{sp} \frac{I_2(\kappa^f)}{I_0(\kappa^f)} + s_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (\text{IV.65})$$

Connaissant la valeur de ces paramètres à l'état initial et après relâchement, nous calculons les paramètres de concentrations ferroélastiques  $\kappa^f$  associés aux valeurs de déformations ferroélastiques  $S_0^f$  et  $S_{res}^f$ , soit respectivement  $\kappa_0^f$  et  $\kappa_{res}^f$ . Par construction du modèle, les valeurs de déformation rémanente à saturation sont proches de zéro. La valeur du paramètre de concentration ferroélastique à la saturation  $\kappa_{sat}^f$  est considérée comme nulle.

### IV.3.2 Évolution du paramètre de concentration ferroélastique

Comme nous l'avons vu précédemment, l'évolution de la déformation ferroélastique en fonction de la contrainte mécanique suit une loi non-linéaire de type hystérétique analogue à l'évolution de la déformation piézoélectrique sous les mêmes conditions. Observant une déformée rapide dès le début de la contrainte, nous ne considérons pas de seuil de contrainte  $\sigma_l$  à partir duquel les murs de domaines commencent à bouger. Lors de la compression du matériau, une déformation non-linéaire admettant une vitesse de déformation maximum (point B) est observée au niveau de la contrainte coercitive  $\sigma_c$ . Au-delà de cette contrainte, la vitesse de déformation diminue et devient constante en se rapprochant de la contrainte de saturation  $\sigma_{sat}$  (point C). Ainsi, et comme suggéré par Kamlah [Kamlah1999], nous considérons une évolution de paramètre de concentration ferroélastique, analogue à celle du paramètre de concentration piézoélectrique (Gaussienne) mais avec des paramètres différents. Relâchant la contrainte mécanique, nous observons un comportement linéaire de la déformation jusqu'à la contrainte coercitive  $\sigma_c$  (point D) à partir de laquelle la vitesse de déformation augmente en se rapprochant du mode non contraint (point E). Cependant, de la même manière que dans le cas de l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique, on suppose que la vitesse de déformation ferroélastique décroît en se rapprochant de la contrainte coercitive pour ensuite croître de plus en plus rapidement en s'éloignant de celle-ci. Ainsi, l'évolution du paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$  est considérée comme obéissant à une fonction Gaussienne inverse, avec un minimum en  $\sigma_c$ , mais avec des paramètres différents.

Ainsi, le coefficient  $C_{\kappa^f}$  est choisi de la forme :

$$C_{\kappa^f} = \begin{cases} \frac{C_5}{\zeta_{C_5} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(|\sigma/\sigma_c|-1)^2}{2\zeta_{C_5}^2}\right) & \text{processus de compression} \\ \frac{C_6}{\zeta_{C_6} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(|\sigma/\sigma_c|-1)^2}{2\zeta_{C_6}^2}\right) & \text{processus de relaxation} \end{cases}, \quad (IV.66)$$

où  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $\zeta_{C_5}$  et  $\zeta_{C_6}$  sont des constantes sans dimension du matériau.

### IV.3.3 Détermination des constantes d'intégration

De manière à déterminer les constantes d'intégrations, l'équation (IV.58.b) du paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$  est intégrée le long du processus de compression puis de

décompression en prenant pour bornes d'intégration les points de fonctionnement de la courbe de la figure IV.13.

En intégrant l'équation (IV.58.b) le long du segment  $A \rightarrow C$  (processus de compression) :

$$\kappa_0^f - 0 = \frac{C_5}{\zeta_{C_5} \sqrt{2\pi}} \left( \Phi_{\sigma}^{cp} \left( \frac{\sigma_{sat}}{\sigma_c} \right) - \Phi_{\sigma}^{cp}(0) \right), \quad (IV.67)$$

avec la fonction de compression  $\Phi_{\sigma}^{cp}(\omega)$  définie par :

$$\Phi_{\sigma}^{cp}(\omega) = \int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\zeta_{C_5}^2}\right) dx \quad (IV.68)$$

$$\text{et } \omega = \frac{\sigma}{\sigma_c}.$$

La résolution de cette équation permet de calculer la valeur de  $\zeta_{C_5}$  en fonction de la valeur de  $C_5$ .

On détermine ensuite le meilleur couple de constante par optimisation aux valeurs expérimentales.

De la même manière que précédemment, les constantes  $C_6$  et  $\zeta_{C_6}$  se déterminent en intégrant l'équation (IV.58.b) le long du segment  $C \rightarrow E$  (processus de décompression) :

$$0 - \kappa_{res}^f = \frac{C_6}{\zeta_{C_6} \sqrt{2\pi}} \left( \Phi_{\sigma}^{dcp} \left( \frac{\sigma_{sat}}{\sigma_c} \right) - \Phi_{\sigma}^{dcp}(0) \right), \quad (IV.69)$$

avec la fonction de décompression  $\Phi_{\sigma}^{dcp}(\omega)$  définie par :

$$\Phi_{\sigma}^{dcp}(\omega) = \int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\zeta_{C_6}^2}\right) dx \quad (IV.70)$$

$$\text{et } \omega = \frac{\sigma}{\sigma_c}.$$

La résolution de cette équation permet de calculer la valeur de  $\zeta_{C_6}$  en fonction de la valeur de  $C_6$ .

Le meilleur couple de constante est ensuite déterminé par optimisation aux valeurs expérimentales.

#### IV.3.4 Calcul des déformations rémanentes ferroélastiques

La construction de cette partie nous permet de décrire complètement l'évolution du paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$ . Connaissant l'évolution de ce paramètre en fonction de la

contrainte mécanique, nous utilisons les équations (IV.40) et (I.41) pour calculer les déformations rémanentes ferroélastiques longitudinale et transversales.

Dans un deuxième temps, une valeur plus précise de la déformation spontanée est déterminée par optimisation de la courbe expérimentale de déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé les comportements hystérétiques de piézocéramiques polarisées dans une direction et soumises à une contrainte uniaxiale de type mécanique ou électrique parallèle à cette direction.

Nous avons commencé par étudier l'évolution du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique en expliquant ces phénomènes par les changements de polarisation de domaines dans la structure Pérovskite. Lors de l'étude de l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique et de la déformation longitudinale, nous avons montré que l'évolution microscopique de la polarisation explique la non-linéarité de la courbe de déplacement électrique. Ce mouvement de domaines a été qualifié de 'piézoélectrique'. Inversement, des études récentes ont montré que la non-linéarité de la déformation longitudinale sous contrainte mécanique a une origine liée à l'évolution de la polarisation, mais aussi à un mouvement de domaines purement mécanique que nous avons appelé 'ferroélastique' pur.

Nous avons montré que le comportement des piézocéramiques peut se diviser en deux phénomènes, l'un réversible dans lequel les composantes du déplacement électrique et de la déformation s'annulent en l'absence de contrainte et l'autre rémanent, existant en l'absence de contrainte. Nous avons considéré que le module d'Young et la constante diélectrique varient très peu sous contraintes, tout prenant en compte l'évolution du coefficient piézoélectrique en fonction du champ de polarisation. La description de l'évolution des domaines s'est faite au travers d'une distribution de von Mises qui nous renseigne sur la concentration de domaines piézoélectriques et ferroélastiques orientés dans la direction de polarisation initiale. Les propriétés de cette distribution nous ont permis d'évaluer les fonctions de polarisation et de déformation piézoélectrique et ferroélastique en fonction de leurs paramètres de concentration respectifs.

De manière à modéliser les comportements hystérétiques de piézocéramiques sous contrainte électrique, nous avons déterminé quelles constantes du matériau sont nécessaires et défini les points fonctionnels du déplacement et du champ électrique. Dans un deuxième temps, nous avons



modélisé des lois d'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique et montré comment calculer les constantes d'intégrations inhérentes. Une fois l'évolution de la concentration piézoélectrique connue, nous avons déduit la déformation rémanente qui dans ce cas est uniquement liée aux mouvements de domaines piézoélectriques.

De manière à modéliser les comportements hystérétiques de piézocéramiques sous contrainte mécanique, nous avons montré quelles constantes du matériau sont requises et déterminé les valeurs du déplacement électrique, de la contrainte mécanique et de la déformation longitudinale nécessaires au calcul de l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique. Dans un deuxième temps, nous avons modélisé les lois d'évolution de ce paramètre et déterminé comment calculer les constantes d'intégration associées. Connaissant l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique, nous avons déduit l'évolution du déplacement électrique et des déformations rémanentes piézoélectriques en fonction de la contrainte mécanique. Pour finir, nous avons évalué différentes valeurs de déformation ferroélastique en supposant que l'évolution de la déformation ferroélastique suit une loi analogue à celle du paramètre de concentration piézoélectrique, mais avec des paramètres différents. La détermination des nouvelles constantes d'intégration est analogue à la précédente.

Dans le chapitre suivant, nous testons ce modèle sur différents matériaux.

## Chapitre V : Comparaison entre modélisation et expériences

Le modèle théorique en place est capable d'évaluer le comportement hystérétique de piézocéramiques polarisées soumises à des contraintes mécanique et électrique appliquées dans une direction parallèle à la polarisation du matériau. Dans cette partie, nous développons le modèle sur quatre matériaux différents et en faisons la comparaison avec des courbes expérimentales obtenues dans la littérature.

Pour commencer, nous faisons l'étude complète d'un matériau PLZT 8/65/35 sous contraintes mécanique et électrique en traitant les déformations longitudinale et transversales. Dans cette partie, nous validons notre modèle sur l'ensemble des données de ce matériau. Ce travail met à jour les limites du modèle sous contrainte électrique. Dans un deuxième temps, nous étudions deux PZT aux propriétés très proches, mais tous deux plus durs que le PLZT, sous contrainte mécanique. Dans un troisième temps, nous faisons une étude sous contrainte mécanique d'un matériau possédant une dureté supérieure au PLZT, mais inférieure aux deux PZT, le PZT P188. Nous évaluons alors comment le modèle s'adapte à de tels matériaux, ainsi que les différences entre eux.

Pour chaque matériau, nous disposons de différentes données qui nous permettent de calculer les constantes d'intégration de notre modèle et de comparer nos résultats théoriques aux résultats expérimentaux. De plus, nous faisons une étude de l'évolution des constantes des matériaux dans chaque cas en expliquant comment évoluent ces constantes selon le matériau et le type de contrainte. L'étude de ces matériaux illustre les avantages et les limites de notre modèle tout en explorant les différences de comportement des piézocéramiques sous contraintes.

## I Étude d'un PLZT sous contrainte mécanique et électrique

### I.1 Définition de l'étude et du matériau

Le matériau que nous utilisons est un dérivé des PZT. De structure Pérovskite, il possède une formule générale du type  $Pb_{1-x}La_x(Zr_yTi_{1-y})_{1-x/4}O_3$  dans laquelle les proportions de La/Zr/Ti sont respectivement de 8/65/35. Ce matériau a été étudié complètement par Lynch [Lynch1995a] qui évalua l'évolution des déformations longitudinale, transversales et du déplacement électrique d'un PLZT 8/65/35 de forme cubique (10 mm de côté) polarisé dans la direction 3. Cette étude fut menée en fonction de contraintes électrique et mécanique appliquées dans la direction de polarisation. Ces travaux ont été repris dans de nombreux articles [Hwang1995-Michelitsch1998-Lu2006-Su2011] et font souvent office de référence pour tester les modèles hystérétiques de piézocéramiques.

Tableau V.1 : Propriétés du PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Module d'Young $Y_3$ (GPa)	68
Coefficient de Poisson $\nu$	0.21
Coefficient piézoélectrique $d_{333}$ ( $10^{-12}$ m/V)	682
Coefficient piézoélectrique $-d_{311}$ ( $10^{-12}$ m/V)	320
Permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = \epsilon_{33} / \epsilon_0$	3350
Température de Curie ( $^{\circ}\text{C}$ )	110

Ainsi, ce matériau possède des coefficients piézoélectriques et diélectriques élevés, ce qui le classe dans la catégorie des céramiques molles. En utilisant l'équation (IV.10), nous calculons les coefficients de souplesse  $s_{3333} = 147 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $s_{1133} = 3.08 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$  et la permittivité électrique  $\epsilon_{33}^T = 29.6 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ .

Il est important de noter qu'il existe des différences non négligeables dans la mesure de ces constantes. Au-delà du protocole de mesure et de l'échantillon lui-même, il a été montré que ces matériaux ont des propriétés qui évoluent rapidement. Ainsi, et comme discuté au chapitre I, il est compliqué de mesurer ces paramètres à contrainte complètement nulle, d'où la difficulté de définir précisément ces constantes. Généralement, ces constantes sont évaluées à -5 MPa, mais tous les

auteurs ne prennent pas cette même limite, dans l'approximation de mouvements de domaines négligeables à faible contrainte. De plus, ces paramètres se déterminent dans des matériaux aux formes adaptées permettant de négliger l'effet des autres constantes [Brissaud2007]. Dans ce travail nous nous intéressons davantage à l'évolution des constantes qu'à l'évaluation précises de ces dernières. Nous quantifierons donc les évolutions de ces constantes par rapport à leur valeur initiale en restant critique quant à la validité de cette dernière.

Afin d'éviter des changements de pentes trop brusques dans la représentation de nos résultats, l'ensemble des évolutions de coefficients théoriques est lissé à l'aide d'un filtre de Savitzky-Golay. Le choix de ce filtre a été motivé par la localité de la régression polynomiale et conserve les caractéristiques de la distribution de points tels que les extremums relatifs, généralement aplatis par le moyennage glissant d'autres méthodes.

## I.2 Contrainte électrique

### I.2.1 Calcul des paramètres du matériau

Nous nous intéressons ici à l'étude des mesures faites par Lynch pour définir les points de fonctionnement nécessaires au modèle. La figure V.1 montre les relevés expérimentaux du comportement du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique en l'absence de contrainte mécanique dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a]. Nous disposons aussi de la courbe de déformation transversale qui sera traitée ultérieurement, mais ne la représentons pas ici car elle n'est pas nécessaire dans la détermination des paramètres du matériau.

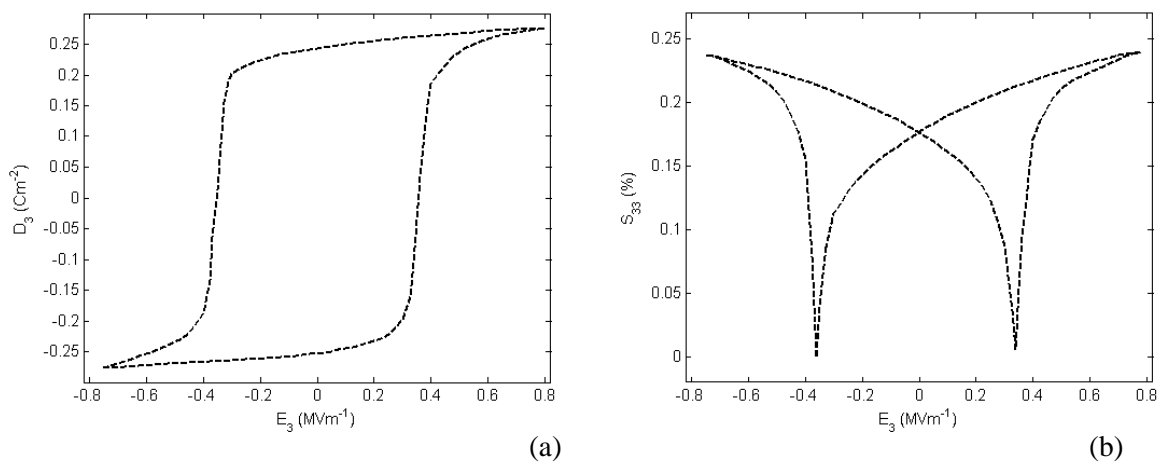


Figure V.1 : Évolution du déplacement électrique (a) et de la déformation longitudinale (b) en fonction du champ électrique en l'absence de contrainte mécanique dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

L'étude de ce matériau présente l'avantage d'avoir des valeurs de champ de saturation et coercitif très marquées et faciles à identifier. Un changement de polarisation rapide engendrant une déformée rapide est observé près du champ coercitif. Cependant, la dépolarisation lors des processus de relaxation est faible. Notons que les déformations sont calculées par rapport à l'état le plus contraint, soit au champ électrique coercitif.

A partir de ces deux courbes, les points de fonctionnement en champ électrique et polarisation nécessaires à la résolution numérique sont évalués :

- le champ électrique coercitif,  $E_c = 360 \text{ kV/m}$ ,
- le champ électrique de saturation,  $E_{sat} = 800 \text{ kV/m}$ ,
- la polarisation rémanente à l'instant initial,  $P_0 = 0.243 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- le déplacement électrique de saturation,  $D_{sat} = 0.276 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- la déformation longitudinale de saturation,  $S^{sat} = 0.239 \%$ .

Ainsi, le champ coercitif n'est pas très élevé, ce qui est en bon accord avec le caractère mou du matériau. De plus, l'évolution de la polarisation entre la contrainte nulle et la saturation n'est pas très forte. Utilisant l'équation (IV.44), une valeur approchée de la polarisation spontanée est obtenue soit  $P^{sp} = 0.29 \text{ Cm}^{-2}$ . Cette valeur est très proche de celles trouvées dans la littérature [Hwang1995-Lu2006]. Ne disposant pas de la valeur de déformation du matériau à l'état avant polarisation, nous utilisons une valeur de la déformation spontanée issue de la littérature [Lu2006] pour initialiser le calcul d'optimisation qui sera fait après celui des constantes d'intégration. Ainsi, nous prenons initialement une valeur de déformation spontanée  $S^{sp} = 0.34\%$ .

En utilisant ces données et l'équation (IV.48), les paramètres de concentration piézoélectrique à champ électrique nul et de saturation sont calculés, soit respectivement,  $\kappa_0^p = 3.88$  et  $\kappa_{sat}^p = 4.27$ . Il n'existe pas de solution analytique à ces calculs, c'est pourquoi nous utilisons un calcul par optimisation qui, dans les deux cas, converge vers une solution avec une très grande précision. Ensuite, nous calculons les constantes d'intégration à l'aide des équations (IV.50-51-53-54) et obtenons les constantes d'intégrations, soient :  $C_1 = 13.06$ ,  $\zeta_{C_1} = 1.02$ ,  $C_2 = 3.06$  et  $\gamma = 7.74$ . Ici, le calcul est plus complexe et il n'est pas possible de résoudre le système analytiquement. Dans ce cas, le calcul par optimisation, s'avère très sensible aux valeurs initiales, et a du mal à converger vers des solutions précises. Il en résulte une diminution de la précision dans la détermination des autres constantes en découlant. Ces constantes nous renseignent sur l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  sous contrainte électrique. Rappelons que dans ce cas, les

déformations rémanentes sont uniquement piézoélectriques. Ainsi, l'évolution du paramètre de concentration  $\kappa^p$  nous permet de décrire l'évolution de la polarisation et des déformations rémanentes (longitudinale et transversale) du PLZT 8/65/35 sous contrainte électrique, en l'absence de contrainte mécanique.

### I.2.2 Calcul du déplacement électrique sous contrainte électrique

Utilisant les équations (IV.23) et (IV.46.a), nous décrivons l'évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35. La courbe obtenue est comparée aux données expérimentales (figure V.2).

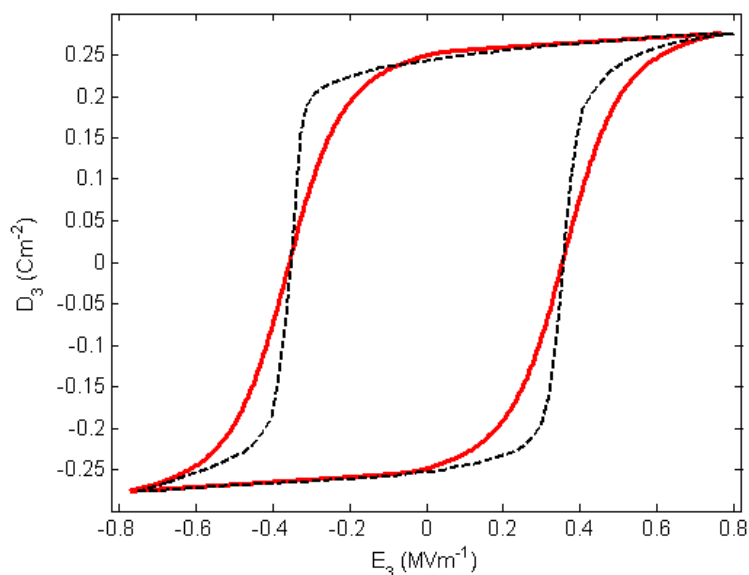


Figure V.2 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du déplacement électrique en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Ce premier résultat montre un bon accord entre modélisation et expérience. Par construction, les points initiaux, et à champs électriques critique et de saturation sont correctement retrouvés. Lors du processus de relaxation les segments de courbe suivent de très près les données expérimentales. Les segments de changement de polarisation montrent plus d'écart entre modèle et expérience. En effet, le changement de polarisation issu de l'expérience est plus rapide près du champ coercitif que dans notre modèle.

Pour des valeurs de champs proches du champ de saturation, notre modèle possède une pente très proche de la pente des données expérimentales. Cette observation valide la valeur de polarisation spontanée évaluée et montre que notre modèle reste valable au-delà du champ électrique de

saturation. De plus, la valeur de cette pente à contrainte nulle est aussi très proche des données expérimentales. Ainsi, l'évolution du coefficient diélectrique semble bien reproduite lors de la relaxation. Cependant, elle l'est significativement moins lors du processus de changement de polarisation, le paramètre de concentration n'évolue pas assez vite autour du champ coercitif. Cela peut s'expliquer par les difficultés qu'a le modèle à converger vers une solution stable ou par le choix de la fonction d'évolution du paramètre de concentration sur ces segments.

L'étude de l'évolution des coefficients  $\epsilon_{33}^T$  issus de ces courbes est faite par la suite.

### I.2.3 Calcul de la déformation longitudinale sous contrainte électrique

Utilisant les équations (IV.35) et (IV.46.b), nous décrivons l'évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans le PLZT 8/65/35. Connaissant l'évolution du paramètre de concentration  $\kappa^p$ , nous affinons la valeur de la déformation spontanée par régression de l'écart avec la courbe expérimentale. Ainsi, la valeur de déformation spontanée la plus adaptée est  $S^{sp} = 0.31\%$ . Cette courbe est comparée aux données expérimentales (figure V.3).

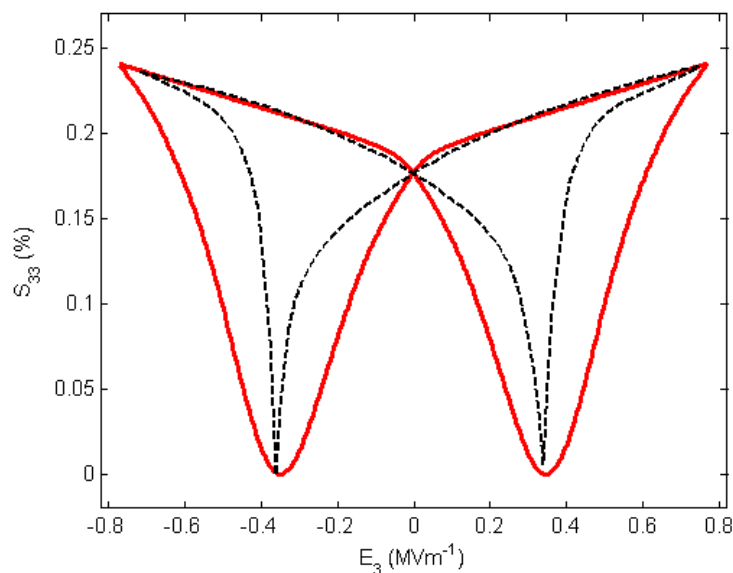


Figure V.3 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Cette courbe montre un assez bon accord entre théorie et expérience. Les points de fonctionnement initiaux, critiques et de saturation sont tout à fait respectés. Ici aussi, les segments de relaxation suivent très bien la courbe expérimentale, mais l'écart entre modèle et expérience près du champ

coercitif est plus important que précédemment. Le paramètre de concentration n'évoluant pas assez vite dans le cas du déplacement électrique, nous retrouvons cette difficulté dans le calcul de la déformation. Comme décrit dans le précédent chapitre, l'évolution des fonctions de Bessel liées aux déformations est moins rapide que celle de l'évolution de la polarisation. Ceci explique que la différence est plus accrue dans le cas de la déformation. Ceci se traduit par un écart significatif des pentes près du champ coercitif. Cependant, pour un grand champ électrique, notre modèle est très proche de la pente de la courbe expérimentale, ce qui valide notre modélisation au-delà de valeurs de champs de saturation, et assure que notre valeur de déformation spontanée est proche de celle du matériau. Cependant, la pente de la courbe à l'instant initial semble légèrement différente de celle de l'expérience, ce qui traduit un écart entre la valeur du  $d_{333}$  choisi et celle de ce matériau.

L'évolution des coefficients  $d_{333}$  issus de ces courbes est donnée par la suite.

#### I.2.4 Calcul de la déformation transversale sous contrainte électrique

Utilisant les équations (IV.36) et (IV.46.b), nous décrivons l'évolution de la déformation transversale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35. La courbe obtenue est comparée aux données expérimentales (figure V.4).

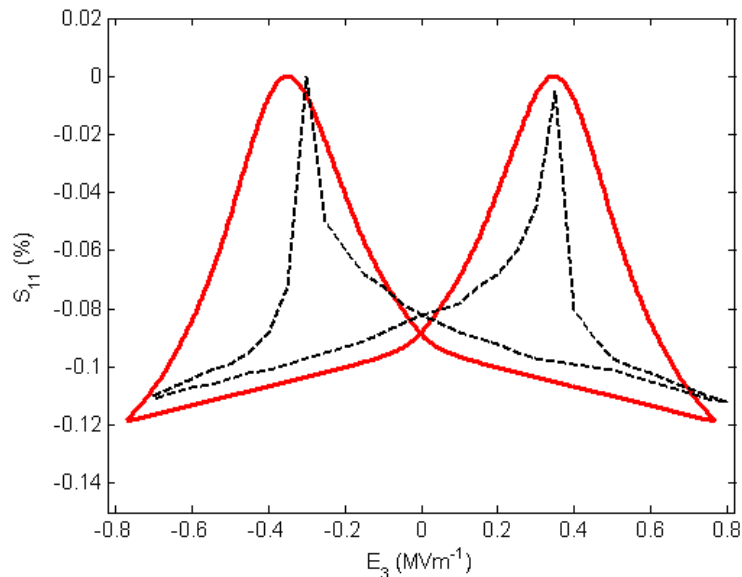


Figure V.4 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation transversale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].



L'accord entre ces deux courbes est moins bon que celui des précédentes. Les points de fonctionnement sont moins bien respectés et il y a un décalage entre modèle et expérience sur les segments de changement de polarisation, mais aussi de relaxation. Par construction du modèle, le problème de pente près du champ coercitif se retrouve aussi sur cette courbe. Un meilleur accord est observé lors des processus de relaxation, mais la différence est plus significative que dans le cas de la déformation longitudinale. Le bon accord entre les pentes de ces courbes près de la saturation confirme que le modèle est valable au-delà du champ de saturation. Cependant, il semble que la valeur expérimentale de la pente en l'absence de champ électrique soit ici aussi légèrement différente de celle de nos calculs, ce qui indique un écart entre la valeur de  $d_{311}$  utilisée dans le modèle et du matériau. Cette différence peut expliquer le décalage constant entre les déformées à l'état initial et à la saturation. Malgré ce défaut, l'approximation de déformation isochore semble correctement adaptée, en bon accord avec l'évolution de coefficient de Poisson faite par Lynch [Lynch1995a] qui a montré que ce coefficient est égal à 0.5 et varie uniquement juste autour du champ électrique.

Les résultats en déformation transversale étant les moins concluants et n'apportant pas plus d'informations dans la compréhension du phénomène que les données de la déformation longitudinale, nous ne traiterons pas l'évolution des coefficients  $d_{311}$ .

### I.2.5 Évolution du coefficient diélectrique sous contrainte électrique

Par dérivation du déplacement électrique par rapport au champ électrique (équation (IV.46.a)) à contrainte mécanique nulle, nous calculons les valeurs du coefficient diélectrique  $\epsilon_{33}^T$  expérimental et issu du modèle pour des valeurs de champ électrique positif (segment  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  de la figure IV.12). Le matériau possède une polarisation rémanente négative, et nous appliquons un champ électrique positif qui va engendrer le changement de polarisation. Le champ électrique augmente jusqu'à la saturation puis décroît jusque zéro. Les courbes obtenues sont finalement normalisées par rapport à la valeur théorique initiale du coefficient diélectrique  $\epsilon_{33}^T$  (tableau V.I).

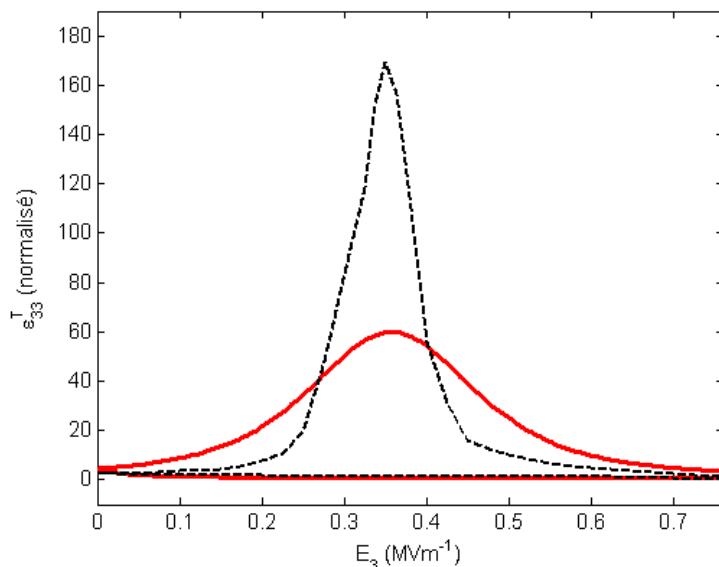


Figure V.5 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient diélectrique normalisé en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle dans un PLZT 8/65/35.

A l'état initial, donc au point de définition des constantes du matériau, le coefficient diélectrique initial expérimental est deux fois plus important que celui trouvé dans la littérature. Cet écart met en avant la complexité de mesure des coefficients (déjà discuté par Lynch [Lynch1995a]) dans les matériaux ferroélectriques. Cette remarque est directement liée avec le fait de négliger les mouvements de domaines à faible contrainte. Par ailleurs, la géométrie de l'échantillon utilisée n'est pas idéale pour déterminer une valeur précise de cette constante. En ce même point, notre modèle calcule une valeur de la constante 5 fois plus importante que la valeur de la littérature. Ainsi, notre changement de polarisation évolue légèrement trop tôt et provoque ainsi un changement trop rapide du déplacement électrique à la rémanence.

Plus on se rapproche du champ coercitif, plus le changement de polarisation, donc plus le coefficient diélectrique augmente. La courbe expérimentale est maximale pour un ratio (valeur expérimentale/valeur théorique à l'état initial) de 170 (soit 80 fois sa valeur initiale), alors que notre modèle est maximum avec un ratio de 60 (soit 30 fois sa valeur initiale). En accord avec notre modèle, ces deux coefficients sont maximums au niveau du champ électrique coercitif. L'augmentation du coefficient expérimental est beaucoup plus rapide que celle de notre modèle. Cela s'explique une nouvelle fois par la vitesse de changement de polarisation près du champ coercitif qui est trop faible dans le cas de notre modèle. Au niveau du champ électrique coercitif, le déplacement électrique (donc la polarisation) est nul. Au-delà de ce champ électrique, la polarisation recroît rapidement dans la direction opposée, mais de plus en plus lentement en se rapprochant du champ de saturation. Ainsi, le coefficient diélectrique rediminue en convergeant

vers une valeur à la saturation très proche de la valeur initiale, mais légèrement plus faible. Les valeurs expérimentales et issues du modèle sont alors très proches avec un ratio proche de 1.5.

Lors de la relaxe du champ électrique, la valeur du coefficient diélectrique reste d'abord stable puis croît très légèrement près du mode libre. Pour les deux courbes, la valeur initiale du coefficient est retrouvée précisément, en bon accord avec la théorie. Lors du relâchement du champ électrique, le matériau se dépolarise très faiblement. Notons que ce comportement est trop important dans notre modèle, ce qui induit une hausse du coefficient diélectrique non observée expérimentalement.

### I.2.6 Évolution du coefficient piézoélectrique sous contrainte électrique

Par dérivation de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique à contrainte mécanique nulle (équation (IV.46.b)), nous déduisons l'évolution du coefficient  $d_{333}$  expérimentale et issue du modèle pour des valeurs de champ électrique positif (segment  $F \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow C$  de la figure IV.3). Le champ électrique augmente jusqu'à la saturation puis décroît jusque zéro. Ces courbes sont normalisées par rapport à la valeur théorique initiale du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  (tableau V.1).

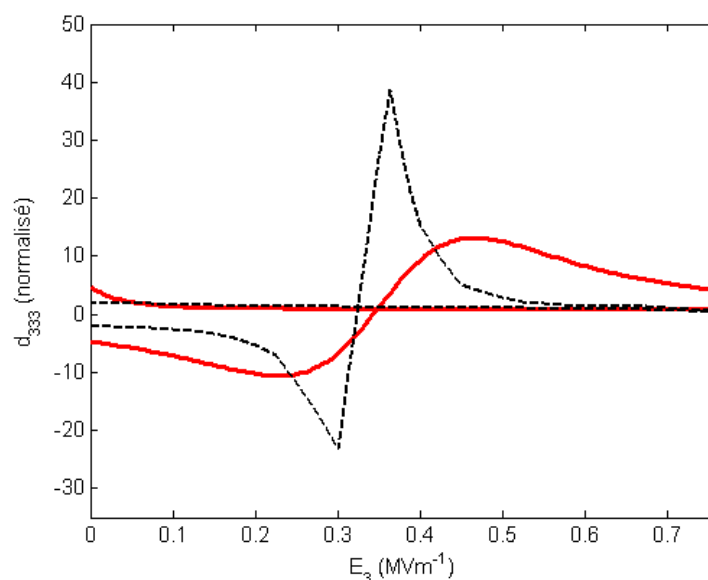


Figure V.6 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  normalisé à contrainte mécanique nulle en fonction du champ électrique dans un PLZT 8/65/35.

A l'état initial, le champ électrique est nul et le coefficient  $d_{333}$  est négatif. Les valeurs des coefficients expérimental et issu du modèle sont respectivement 2 et 4 fois plus élevées que la

valeur théorique. A l'image de la faible différence observée sur la courbe de déformation par rapport aux mesures expérimentales et de l'écart observé ici sur les dérivées, il apparaît qu'une légère différence sur les comportements peut être conséquente sur les dérivées, ce qui illustre une nouvelle fois la complexité (liée à la sensibilité) de la mesure de la constante piézoélectrique sous contrainte. De plus, la géométrie de l'échantillon n'est pas optimale pour évaluer cette constante.

L'application d'un champ électrique positif va augmenter (en valeur absolue) la valeur du coefficient piézoélectrique jusqu'à son maximum atteint pour la valeur de champ électrique coercitif. La vitesse de dépolarisation, donc de déformation (compression) rémanente piézoélectrique, est alors maximum, ce qui induit un maximum de coefficient piézoélectrique. Le coefficient expérimental admet un ratio maximum de 23 (soit 12 fois sa valeur initiale), alors que notre modèle atteint un ratio de 10 (soit 5 fois sa valeur initiale). Ici encore, notre modèle a du mal à générer des vitesses de déformations élevées et admet donc un maximum inférieur à celui de la courbe expérimentale. Une fois ce maximum atteint, le renversement de polarisation provoque un changement de sens de déformation, donc un renversement de la valeur du coefficient piézoélectrique qui devient positive. La vitesse de polarisation étant maximum, la vitesse de déformation (relâchement) est elle aussi maximum, c'est pourquoi le coefficient piézoélectrique atteint un autre maximum, mais de signe opposé. Le coefficient expérimental admet un ratio maximum de 39 (soit 19 fois sa valeur initiale), alors que notre modèle atteint un ratio de 13 (soit 6 fois sa valeur initiale). Ici encore, notre modèle a du mal à générer des vitesses de déformations élevées et admet un maximum inférieur à celui de la courbe expérimentale. Par la suite, la vitesse de polarisation diminuant, la valeur du coefficient piézoélectrique décroît et tend vers une valeur constante légèrement inférieure à la valeur initiale. Nous notons une discontinuité dans la représentation du coefficient théorique qui s'explique par la difficulté qu'a eu notre outil de calcul à converger vers des solutions stables. Ainsi, les constantes d'intégration ne sont pas assez précises pour que les différents processus ne se fassent avec plus de souplesse.

Relâchant la contrainte électrique, la valeur de la constante piézoélectrique reste d'abord stable, puis remonte très légèrement en se rapprochant de la rémanence. Dans le modèle comme dans l'expérience, les valeurs finales des coefficients sont égales (mais de signes opposés) à leurs valeurs initiales respectives, ce qui est en bon accord avec la théorie. Nous avons déjà observé que notre vitesse de dépolarisation près de la rémanence est trop importante. La déformation lui étant directement liée et le rapport de fonction de Bessel étant plus sensible aux variations de concentrations de domaines, cette erreur est amplifiée.

### I.2.7 Conclusion

Ainsi, cette première étude montre un bon accord global entre les courbes expérimentales et celles issues du modèle. La limite en grand champ électrique ainsi que les points de fonctionnement sont correctement retrouvés. Cependant, un écart important est observé entre les valeurs issues de la littérature et celles calculées. Cette remarque est analogue à celle faite par Lynch [Lynch1995a] qui décrit la difficulté de retrouver les valeurs des constantes à faibles niveaux de contraintes. Cet écart s'explique par la géométrie de l'échantillon qui n'est pas idéale pour la mesure de ces constantes et par les mouvements de domaines qui bougent très rapidement initialement [Barzegar2002-Barzegar2004]. Ainsi, un léger défaut de charge peut occasionner de grands écarts.

Cette première évaluation montre que notre modèle est capable de reproduire correctement l'évolution du déplacement électrique et des déformations longitudinale et transversales en fonction de la contrainte électrique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. La correspondance entre théorie et expérience sur les parties de relaxation est très bonne, et valide le choix de la décroissance exponentielle de la polarisation. L'accord sur les parties de changement de polarisation est correct en terme de valeur, mais est moins précis en terme de pente, donc de coefficient du matériau. Il semble que le modèle ait du mal à s'adapter à des changements de polarisation rapide (près du champ électrique coercitif), ce qui se traduit par une plus grande imprécision dans la description des déformations rapides. De plus, la résolution numérique du modèle est complexe et notre outil de calcul ne parvient pas à converger vers des valeurs de constantes d'intégration très précises, ce qui induit des discontinuités dans la description des constantes du matériau. Il semble donc que l'expression analytique choisie pour décrire les changements de polarisation ne soit pas idéale pour ce matériau.

De plus, l'approximation du coefficient de Poisson piézoélectrique constant semble adaptée à ce matériau, ce qui est en accord avec l'approximation de déformation rémanente piézoélectrique isochore. L'étude de l'évolution des déformations transversales en fonction des déformations longitudinales [Lynch1995a] montre que le coefficient de Poisson sous contrainte électrique évolue uniquement au niveau du champ électrique coercitif et est égal à 0.5 en dehors.

Les évolutions des coefficients diélectrique et piézoélectrique issus du modèle montrent un bon accord global avec celles issues des courbes expérimentales. La difficulté à décrire les évolutions rapides de polarisation se traduit par une difficulté à atteindre les maximums des coefficients diélectrique et piézoélectrique, car ce comportement est plus sensible aux changements de concentration de domaines. Ces courbes montrent qu'il est très complexe de décrire précisément les évolutions des coefficients du matériau sous contrainte électrique.

## I.3 Contrainte mécanique

### I.3.1 Calcul des paramètres du matériau

Nous nous intéressons ici à l'étude des mesures faites par Lynch [Lynch1995a] pour définir les points de fonctionnement nécessaires à la mise en place du modèle. La figure V.7 montre les relevés expérimentaux de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en l'absence de champ électrique dans le PLZT 8/65/35.

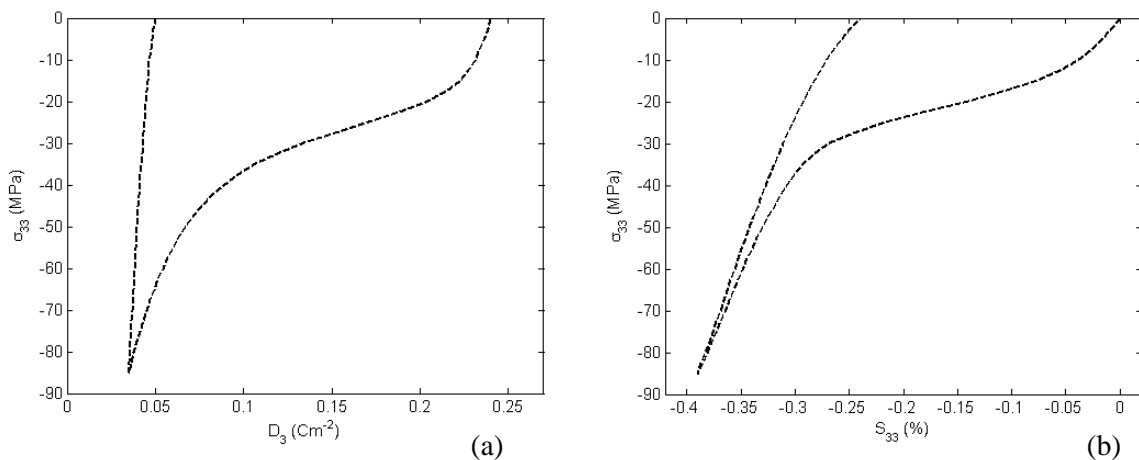


Figure V.7 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique (a) et de la déformation longitudinale (b) en l'absence de champ électrique dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Les valeurs de contrainte mécanique de saturation et coercitive se trouvent distinctement sur les deux figures. L'évolution linéaire du déplacement électrique en début de cycle est clairement linéaire. Le changement de polarisation est relativement lent et la déformée plus rapide près de la contrainte coercitive. Lors du relâchement, le déplacement électrique change peu, la repolarisation est faible, mais la déformation diminue plus significativement. La courbe de déformation transversale qui sera traitée mais non présentée ici car elle n'est pas utile dans la détermination des paramètres du matériau. Notons que les déformations sont calculées par rapport à l'état initial, soit en l'absence de contrainte électrique et mécanique.

A partir de ces deux courbes, on évalue les points de fonctionnement de contrainte mécanique, déplacement électrique, polarisation et déformation (longitudinale) :

- la contrainte mécanique coercitive,  $\sigma_c = -20$  MPa ,
- la contrainte mécanique de saturation,  $\sigma_{sat} = -85$  MPa ,
- la contrainte mécanique de début de mouvement de domaines,  $\sigma_l = -9$  MPa ,

- le déplacement électrique de saturation,  $D_{sat} = 0.035 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- le déplacement électrique à  $\sigma_l$ ,  $D_l = 0.232 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- la polarisation rémanente à l'état initial,  $P_0 = 0.24 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- la polarisation résiduelle,  $P^{res} = 0.05 \text{ Cm}^{-2}$ ,
- la déformation longitudinale résiduelle,  $S^{res} = -0.24\%$ .

Ces valeurs sont très proches de celles trouvées dans la littérature [Hwang1995-Lu2006] et seront celles utilisées pour modéliser le comportement de ce matériau. Notons que la valeur de contrainte coercitive est peu élevée, au même titre que l'était le champ électrique coercitif. Rappelons que les valeurs de polarisation et déformation spontanée ont été évaluées précédemment et seront celles utilisées dans cette partie.

De manière à quantifier le phénomène de repolarisation, le rapport entre la polarisation retrouvée pendant la décharge divisée par celle perdue pendant la charge est évalué :

$$D_{rep} = \frac{P^{res} - D_{sat}}{P_0 - D_{sat}} \times 100. \quad (\text{V.1})$$

Dans le cas du PLZT,  $D_{rep} = 7.3\%$ .

En utilisant l'équation (IV.59), nous calculons les paramètres de concentration piézoélectrique à l'état initial, à  $\sigma_l$ , à saturation et après le relâchement, soit respectivement,  $\kappa_0^p = 3.26$ ,  $\kappa_l^p = 3.17$ ,  $\kappa_{sat}^p = 0.32$  et  $\kappa_{res}^p = 0.35$ . Dans un deuxième temps, les constantes d'intégration sont calculées par optimisation :  $C_3 = 3.7$ ,  $\zeta_{C_3} = 0.74$ ,  $C_4 = 0.07$  et  $\zeta_{C_4} = 1.33$ . A la différence du modèle électrique, ces valeurs se calculent par deux, donc plus aisément et avec une grande précision de calcul. Elles nous renseignent sur l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  sous contrainte mécanique et nous permettent de décrire l'évolution de la polarisation et des déformations rémanentes piézoélectriques (longitudinale et transversales) du PLZT 8/65/35 sous contrainte mécanique.

En utilisant les déformations rémanentes piézoélectriques à l'état initial et résiduelles, nous calculons les paramètres de concentration ferroélastique associés aux déformations ferroélastiques respectives, soit  $\kappa_0^f = 2.4$  et  $\kappa_{res}^f = 0.82$ . Par la suite, les constantes d'intégration ferroélastiques sont calculées (avec la même précision que les précédentes constantes), soit  $C_5 = 2.45$ ,  $\zeta_{C_5} = 0.49$ ,  $C_6 = 0.2$  et  $\zeta_{C_6} = 1.32$ . Elles nous renseignent sur l'évolution du paramètre de

concentration ferroélastique  $\kappa^f$  sous contrainte mécanique et nous permettent de décrire l'évolution des déformations rémanentes ferroélastiques (longitudinale et transversales) du PLZT 5/65/35 sous contrainte mécanique. Ainsi, l'évolution de la polarisation et des déformations rémanentes sont connues.

### I.3.2 Calcul du déplacement électrique sous contrainte mécanique

Utilisant l'équation (IV.57.a), nous décrivons l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. La courbe inverse étant plus souvent représentée, on compare l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique de notre modèle et celle issue des données expérimentales (figure V.8).

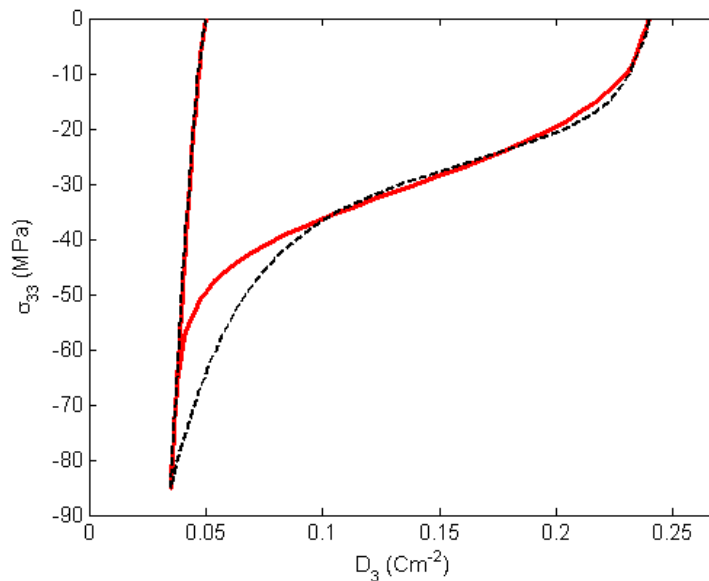


Figure V.8 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Cette courbe montre un très bon accord avec la théorie. Les différents points de fonctionnement sont correctement retrouvés.

La dépolarisation du matériau est quasi linéaire jusqu'au niveau de contrainte  $\sigma_l$ , puis s'accélère en se rapprochant de la contrainte coercitive. Ensuite, la vitesse de dépolarisation diminue jusqu'à la contrainte de saturation. La dépolarisation du matériau est très bien décrite jusqu'à -40 MPa. Entre -40 MPa et -60 MPa, le modèle dépolarise trop rapidement, puis trop lentement entre -60 et -85 MPa. Malgré ce défaut, l'évolution en Gaussienne du paramètre de concentration piézoélectrique



sous compression semble bien adaptée avec l'évolution du déplacement électrique dans ce type de matériau.

Lors du relâchement de la contrainte, le déplacement électrique évolue quasi linéairement. Le modèle s'accorde très bien sur ce segment, la repolarisation du matériau est parfaitement reproduite, mais le caractère non-linéaire de cette dernière est peu observable sur cette courbe. Comme expliqué au chapitre IV, cette repolarisation sera plus ou moins prononcée selon le caractère dur ou mou du matériau. Ici, le matériau étant mou, sa repolarisation est logiquement faible et linéaire.

L'étude de l'évolution des coefficients  $d_{333}$  issus de ces courbes est faite par la suite.

### I.3.3 Calcul de la déformation longitudinale sous contrainte mécanique

Utilisant l'équation (IV.57.b), nous décrivons l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. La courbe inverse étant plus souvent représentée, on compare l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale de notre modèle et celle issue des données expérimentales (figure V.9).

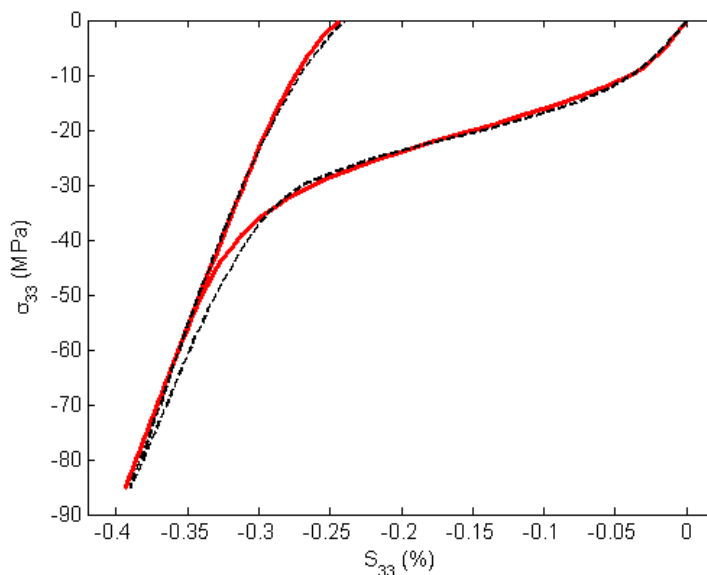


Figure V.9 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Cette figure montre un très bon accord entre le modèle et les mesures. Les points de fonctionnement sont très bien retrouvés.

Le seuil de contrainte  $\sigma_l$  avant lequel la déformation évolue linéairement et lentement est clairement observé. Après ce seuil, la déformation évolue rapidement jusqu'à -30 MPa, puis plus lentement jusqu'à la saturation. Remarquons que ce seuil est le même que celui du déplacement électrique, en bon accord avec notre hypothèse de comportement analogue de l'effet piézoélectrique et ferroélastique qui sont maximums tous deux pour une même valeur de contrainte. Lors de cette compression, notre modèle suit très bien la courbe expérimentale, avec ici aussi, un léger décalage entre -40 MPa et la contrainte de saturation. Cet accord est meilleur que celui du déplacement électrique sur le même segment. Ceci s'explique par la sommation des différents types de déformations rémanentes qui donne plus de souplesse au modèle. Ainsi, les évolutions Gaussiennes des paramètres de concentration piézoélectrique et ferroélastique semblent bien adaptées à ce type de matériau.

Lors du relâchement, on observe une évolution de la déformation relativement linéaire mais qui a tendance à se courber légèrement près du mode libre. Le très bon accord entre notre courbe et l'expérience est une première validation du mode de comportement supposé pendant ce processus. Ainsi, on observe qu'un matériau mou possède lui aussi un assouplissement assez faible. Ce comportement est très bien décrit par les lois d'évolution choisies pour les deux paramètres de concentrations.

L'étude du coefficient élastique associé est faite par la suite.

#### I.3.4 Calcul de la déformation transversale sous contrainte mécanique

Utilisant l'équation (IV.54.b), nous pouvons décrire l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35. La courbe inverse étant plus souvent représentée, on compare l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale de notre modèle et celle issue des données expérimentales (figure V.10).

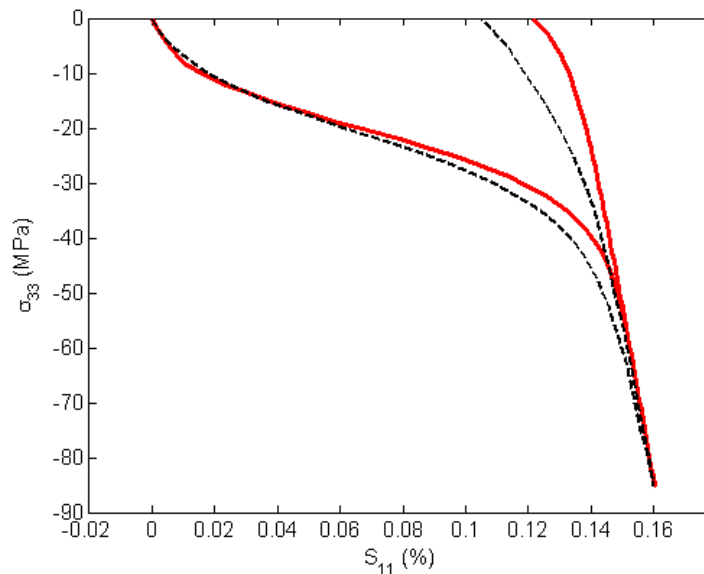


Figure V.10 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35 [Lynch1995a].

Cette figure montre un bon accord entre le modèle et les mesures expérimentales. Les points de fonctionnement initiaux et de saturation sont bien retrouvés, mais il apparaît une différence significative sur la déformation résiduelle.

Durant la compression, on observe une déformation linéaire et lente jusqu'au seuil de contrainte de -5 MPa. Dans ce mode de déformation, ce seuil est légèrement inférieur au seuil  $\sigma_l$  des deux précédentes courbes, c'est pourquoi notre modèle s'écarte légèrement de la courbe expérimentale en début de cycle. Lors du reste de la compression, la déformation est rapide, puis ralentie nettement après -40 MPa. Cette valeur est en bon accord avec les précédentes courbes et confirme que les trois comportements sont liés. Cependant, la déformation observée expérimentalement est d'abord plus rapide puis plus lente que notre modèle. L'accord entre les deux courbes est bon, mais montre plus de différences qu'avec les deux autres courbes. L'écart montre que la relation entre déformation longitudinale et transversale est mal décrite par notre modèle en compression.

Le comportement de la déformation transversale lors du relâchement est clairement non-linéaire, car il se courbe significativement en se rapprochant du mode non contraint. Notre modèle n'est pas assez rapide lors de cette courbure. Ceci confirme nos difficultés à décrire la relation entre déformations longitudinale et transversales. De plus, il apparaît que le comportement non-linéaire est plus important sur les déformations transversales, ce qui est en désaccord avec nos relations.

Dans ce cas, l'hypothèse de déformation rémanente isochore semble discutable. Lynch décrit dans un de ces articles comment la déformation transversale évolue en fonction de la déformation

longitudinale sous contrainte mécanique [Lynch1995a] et montre que le coefficient de Poisson sous contrainte mécanique varie de manière beaucoup plus significative que sous contrainte électrique. Ce comportement complexe a aussi été traité par Cao et Evans qui montrent l'évolution non-linéaire du coefficient de Poisson sur des PZT [Cao1993] sous contrainte mécanique. Cependant, le résultat reste proche des données expérimentales et notre approximation est acceptable.

L'étude du coefficient élastique associé est faite par la suite.

### I.3.5 Évolution du coefficient piézoélectrique sous contrainte mécanique

Par dérivation des déplacements électriques calculés et mesurés expérimentalement par Lynch en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, on décrit l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  pour un matériau PLZT 8/65/35. Ces courbes sont normalisées par rapport à la valeur théorique du coefficient piézoélectrique du matériau donnée dans le tableau V.I (figure V.11).

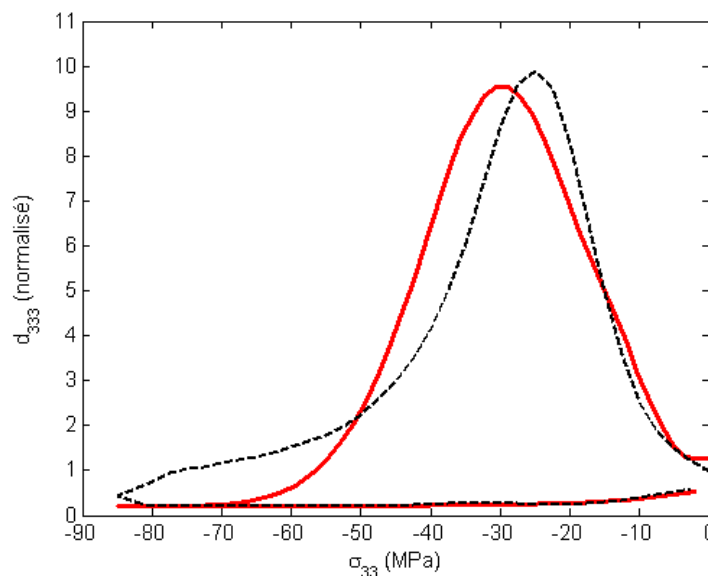


Figure V.11 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35.

A l'état initial, les valeurs des deux courbes sont très proches de la valeur théorique, ce qui montre que la valeur du  $d_{333}$  prise dans notre modèle est proche de celle du matériau étudié. Ceci valide l'hypothèse de faibles mouvement de domaines avant le seuil  $\sigma_l$  et montre qu'il est plus aisé de faire cette mesure mécaniquement. Avant d'atteindre -9 MPa, le coefficient piézoélectrique

augmente doucement. Là où notre modèle prédit un coefficient constant (du fait de la dépolarisation quasi-linéaire observée dans celui-ci), l'expérience montre une augmentation lente du coefficient. L'évolution du coefficient en début de compression est faible, mais non nulle comme simulée par le modèle.

Par la suite, le coefficient expérimental augmente rapidement jusqu'à atteindre son maximum près de la contrainte coercitive. Notre modèle suit bien ce comportement, mais est légèrement en retard. Le coefficient expérimental est maximum avec un ratio de 9.9, alors que le coefficient de notre modèle est maximum avec un ratio de 9.6. Dans cet intervalle, le matériau se dépolarise de plus en plus rapidement au fur et à mesure qu'il s'approche de la contrainte coercitive. Une fois ce maximum passé, le coefficient piézoélectrique décroît rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. Il converge alors vers une valeur stable très proche de celle du modèle, avec un ratio de 0.3. A la fin de la compression, la polarisation étant largement inférieure à la polarisation initiale et évoluant très peu, le coefficient piézoélectrique est moins important, comme prédit par le modèle.

Une fois la contrainte relâchée, le coefficient reste constant, puis augmente légèrement une fois la contrainte coercitive passée, jusqu'à atteindre un ratio de 0.5 dans les deux cas. Ce phénomène est bien décrit par notre courbe et s'explique par la légère repolarisation que reprend le matériau.

### I.3.6 Évolution du coefficient élastique longitudinal sous contrainte mécanique

Par dérivation des déformations longitudinales calculées et mesurées expérimentalement par Lynch en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, l'évolution du coefficient élastique  $s_{3333}$  est décrite dans un matériau PLZT 8/65/35. Ces courbes sont normalisées par rapport à l'inverse de la valeur théorique du module d'Young (tableau V.1) du coefficient élastique (figure V.11).

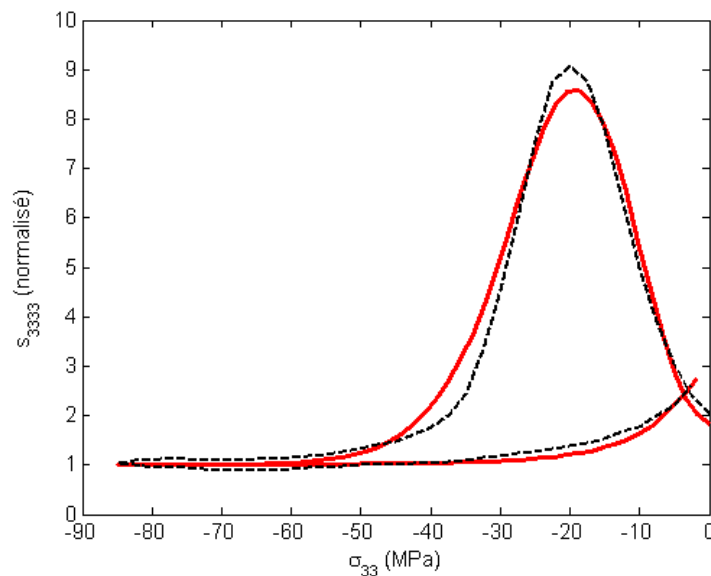


Figure V.11 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique  $s_{3333}$  normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35.

La valeur initiale du coefficient expérimental est très proche de la valeur du modèle, mais toutes deux 2 fois plus élevées que la valeur théorique. Nous remarquons qu'avant une contrainte de -7 MPa, la vitesse de déformation est plus lente et en bon accord avec notre hypothèse. Ceci valide l'hypothèse de faibles mouvements de domaines (concentration de domaines piézoélectrique et ferroélastique) avant le seuil  $\sigma_l$ . Cependant, l'écart avec la valeur théorique peut-être attribué à de légers mouvements de domaine, mais aussi à la géométrie du matériau qui n'est pas la plus adaptée. La compression mécanique provoque une hausse rapide du coefficient élastique. Légèrement plus lente avant  $\sigma_l$ , elle augmente ensuite très rapidement jusqu'à une valeur maximum bien centrée sur notre contrainte coercitive. Le coefficient élastique expérimental est maximum avec un ratio de 9.1 (soit 4.3 fois plus que sa valeur initiale), alors que celui de notre modèle est maximum avec un ratio de 8.6 (soit 4.7 plus que sa valeur initiale). Notre modèle suit très bien la courbe expérimentale. Dans cet intervalle de contrainte, le matériau se dépolarise rapidement et induit une déformation piézoélectrique rapide. A cette déformation, il faut ajouter la déformation ferroélastique. Ces deux déformations sont de plus en plus rapides au fur et à mesure que l'on se rapproche de la contrainte coercitive. C'est pourquoi le matériau gagne en souplesse en se rapprochant de cette contrainte. Ceci est en bon accord avec notre hypothèse qui suppose que le comportement ferroélastique est proche du comportement piézoélectrique. Une fois la contrainte supérieure à la contrainte coercitive, le coefficient diminue rapidement puis de plus en plus lentement en s'éloignant de la contrainte coercitive. Cette diminution est engendrée par la baisse de la vitesse de dépolarisation,

qui induit une baisse de la vitesse de déformation piézoélectrique (et par définition de la vitesse de déformation ferroélastique qui suit le même comportement). Ainsi, la vitesse de déformation diminue en s'éloignant de la contrainte coercitive.

Près de la saturation, la valeur de la souplesse du matériau converge vers une valeur légèrement inférieure à la valeur initiale. Notre modèle suit très bien ce comportement et converge vers la même valeur que l'expérience, avec un ratio de 1 dans les 2 cas. Le matériau est dépolarisé, les déformations piézoélectriques et ferroélastiques saturent, le comportement des domaines est donc bloqué et seul le module d'Young provoque une déformation. Il est important de noter qu'ici, les modules d'Young à l'état initial et à la contrainte de saturation sont proches, mais non égaux comme décrit par Lu. On verra par la suite que ces deux valeurs peuvent être significativement éloignées.

Lors de la décompression, la souplesse est d'abord constante et commence à augmenter en s'approchant de la contrainte coercitive. Une fois ce seuil passé, elle augmente beaucoup plus vite jusqu'à une valeur légèrement supérieure à la souplesse initiale, soit un ratio de 2.8 (soit 1.26 fois plus que sa valeur initiale) dans les deux cas. Ce comportement est très bien décrit par notre modèle. Comme le montrait la figure V.8, lors de la décompression, la polarisation remonte légèrement. Pourtant, l'évolution de la déformation piézoélectrique ne peut expliquer un si grand regain de souplesse. Ainsi, ce phénomène s'explique et s'illustre très bien par le comportement 'ferroélastique' pur. Il démontre un relâchement rapide des domaines par phénomène purement ferroélastique. Le matériau étant partiellement dépolarisé, il est moins déformé piézoélectriquement et donc plus facilement déformable qu'initialement.

### I.3.7 Évolution du coefficient élastique transverse sous contrainte mécanique

Par dérivation des déformations transversales calculées et mesurées expérimentalement par Lynch en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, l'évolution du coefficient élastique  $s_{1133}$  est décrite pour un matériau PLZT 8/65/35. Ces courbes sont ensuite mesurées par la valeur théorique du coefficient élastique issue du tableau V.1 (figure V.12).

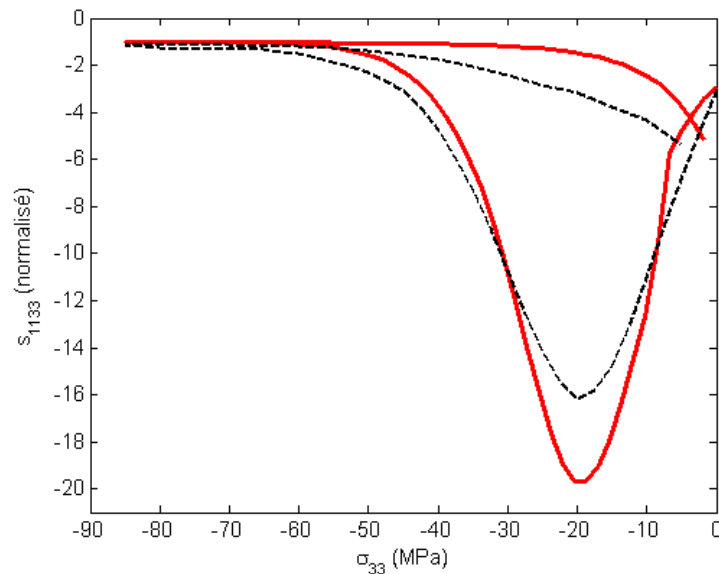


Figure V.12 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique  $s_{1133}$  normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PLZT 8/65/35

Les valeurs initiales du coefficient expérimental et issu du modèle sont très proches l'un de l'autre, mais égaux à 3 fois la valeur théorique. Cet écart est attribué aux mouvements de domaines et à la géométrie du matériau, comme dans le cas précédent.

Alors que notre modèle prédit une zone de déformée initiale lente, ce phénomène n'est pas observé expérimentalement. Les domaines semblent bouger dès le début et ainsi générer une souplesse supérieure à celle modélisée. La compression mécanique provoque une hausse très rapide du coefficient jusqu'à une valeur maximum bien centrée sur notre contrainte coercitive. Le coefficient expérimental est maximum avec un ratio de 16 (soit 3.7 fois plus que sa valeur initiale), alors que le coefficient de notre modèle est maximum avec un ratio de 19.5 (soit 6.4 fois plus que sa valeur initiale). Notre modèle suit bien les différentes phases d'évolution de la courbe expérimentale, mais admet une valeur maximum trop élevée et augmente ensuite trop rapidement. Près de la saturation, les deux courbes convergent vers une valeur de la souplesse inférieure à la valeur initiale avec un ratio de 1.

Lors de la décompression, la souplesse est d'abord constante et augmente légèrement avant la contrainte coercitive. Cette augmentation devient plus importante en se rapprochant de celle-ci et un comportement analogue au précédent coefficient en terminant avec une souplesse légèrement supérieure à la souplesse initiale est observé.

Cette courbe montre aussi qu'en l'absence de polarisation, le matériau possède un comportement non-linéaire bien expliqué par le comportement ferroélastique pur de notre modèle.



### I.3.8 Conclusion

L'évolution des comportements du PLZT 8/65/35 sous contrainte mécanique est globalement correctement reproduite par le modèle. Bien qu'ayant des difficultés à résoudre le système de calcul des constantes d'intégration, les solutions trouvées reproduisent un comportement sous contrainte électrique convenable. Le modèle sous contrainte mécanique est plus souple et donne de meilleurs résultats. Cependant, dans les deux cas, la précision sur les déformations transversales est plus faible, avec une non-linéarité plus importante et non proportionnelle à la déformation longitudinale sous contrainte mécanique. Sous contrainte électrique, cette imprécision est trop importante pour extraire une évolution de la constante piézoélectrique associée qui soit cohérente avec les valeurs expérimentales. Notons que les mesures effectuées par Lynch montrent que l'approximation de déformation rémanente isochore est largement valable électriquement, mais l'est moins mécaniquement. Les travaux de Cao et Evans confortent cette remarque sur 2 autres PZT. En outre, ces courbes montrent clairement que l'approximation de polarisation constante lors de la relaxation de la contrainte mécanique ne peut être faite sur ce matériau et que le comportement supposé correspond très bien à l'expérience. Concernant la déformation ferroélastique, celle-ci est bien modélisée. Notre modèle est capable d'expliquer l'ensemble des évolutions de ces coefficients du matériau sous contrainte électrique et mécanique [Domenjoud2012].

L'étude de l'évolution des coefficients du matériau met à jour l'écart entre modèle et expérience qui peut être attribué aux mouvements de domaines comme à la géométrie du matériau. Nous avons pu observer que le module d'Young varie légèrement entre l'état initial et la saturation. Considérant qu'à la saturation, les domaines piézoélectrique et ferroélastique n'évoluent plus, il apparaît que le module d'Young à saturation est plus proche du module d'Young 'réel' que ne l'est le module d'Young à l'état initial, car ce dernier est altéré par les mouvements de domaines.

Cette étude nous permet de faire plusieurs remarques quant au caractère mou du matériau. En plus d'avoir observé un champ électrique coercitif faible et des facilités de dépolarisation, nous avons remarqué que la contrainte coercitive est aussi peu élevée. La repolarisation du matériau lors du relâchement de la contrainte mécanique est très faible et quasi linéaire au même titre que la déformation.

Par ailleurs, de nombreux auteurs [Zhang1997-Guyomar1998-Zhang1999-Yang2000] ont montré qu'il n'est pas possible d'approximer une valeur constante du paramètre diélectrique au cours de la compression mécanique, comme de considérer un tenseur élastique constant dans le cas de la contrainte électrique. De plus, même si notre modèle suit convenablement les valeurs expérimentales, l'écart entre avec les mesures expérimentales et celles issues du modèle de l'évolution du coefficient piézoélectrique est trop important pour considérer nos courbes comme

analogues à celle de l'expérience. Ainsi, ne connaissant pas l'évolution de plus 3 constantes, il est impossible de calculer l'ensemble des coefficients nécessaires à notre modèle d'évolution des paramètres de vitesses et coefficient de couplage dans les matériaux précontraints.

## II Étude des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique

### II.1 Calculs des paramètres des matériaux

Ces deux matériaux sont des dérivés des PZT (structure de type Pérovskite) de formule chimique  $Pb(Zr_x Ti_{1-x})O_3$  tous les deux de forme parallélépipédique (6 mm × 8 mm × 12 mm). Le PZT-A, considéré comme dur, possède une proportion de Zr/Ti=52/43 et est dopé par des accepteurs de type Baryum et Fer. Le PZT-B, considéré comme dur lui aussi, possède une proportion de Zr/Ti=53/47 et est dopé avec des donneurs de type Niobate. L'étude de ces matériaux s'est faite sur des échantillons polarisés dans la direction (Oz). La contrainte mécanique est appliquée dans la direction de polarisation en l'absence de champ électrique. Nous nous intéressons à l'évolution du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique dans l'axe de la contrainte. Les propriétés classiques du matériau qui nous intéressent sont les suivantes :

Tableau V.2 : Propriétés des PZT-A et PZT-B [Cao1993].

	PZT-A	PZT-B
Module d'Young $Y_3$ (GPa)	65	52
Coefficient piézoélectrique $d_{333}$ ( $10^{-12}$ m/V)	300	400
Permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = \epsilon_{33} / \epsilon_0$	1300	1750

Nous calculons les coefficients de souplesse et les permittivités diélectriques des PZT-A et B respectivement  $s_{3333} = 153 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$ ,  $s_{3333} = 192 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$  et  $\epsilon_{33}^T = 11.4 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ ,  $\epsilon_{33}^T = 15.4 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ . Ces deux matériaux possèdent des constantes diélectriques et des coefficients piézoélectriques moins élevés que ceux du PLZT, ce qui est en accord avec le caractère plus dur de ces matériaux et valide la dureté plus élevée du PZT-A par rapport au PZT-B. Nous verrons par la suite que les valeurs des modules d'Young ne sont pas celles que nous utiliserons dans ce modèle.

Nous nous intéressons ici à l'étude des mesures faites par Cao et Evans pour définir les points de fonctionnement nécessaires au modèle. La figure V.13 montre le comportement des déplacements électriques sous contrainte mécanique en l'absence de contrainte électrique pour les deux matériaux en question.

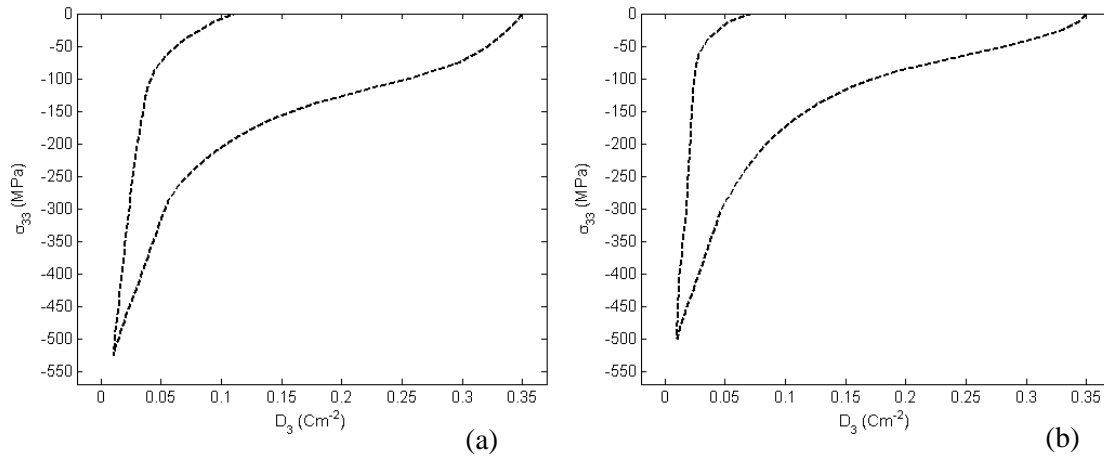


Figure V.13 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique en l'absence de champ électrique dans les PZT-A (a) et PZT-B (b) [Cao1993].

Ces deux matériaux sont très durs et nécessitent de très grandes contraintes pour se dépolariser. Pourtant, la vitesse de dépolarisation est grande et le temps de stabilisation relativement long. Ces deux matériaux possèdent une repolarisation prononcée et clairement non-linéaire, plus importante dans le cas du PZT-A. Par ailleurs, les pentes de chacune des courbes à faibles contraintes sont significativement supérieures à celles de leurs coefficients piézoélectriques  $d_{333}$  respectifs. Ainsi, l'évolution des coefficients piézoélectriques semble débiter très tôt, c'est pourquoi on ne considère pas de seuils de contrainte  $\sigma_l$  à partir desquels les dépolarisations deviennent plus rapides.

La figure V.14 montre les relevés expérimentaux des comportements des déformations longitudinales sous contrainte mécanique en l'absence de champ électrique dans les deux PZT.

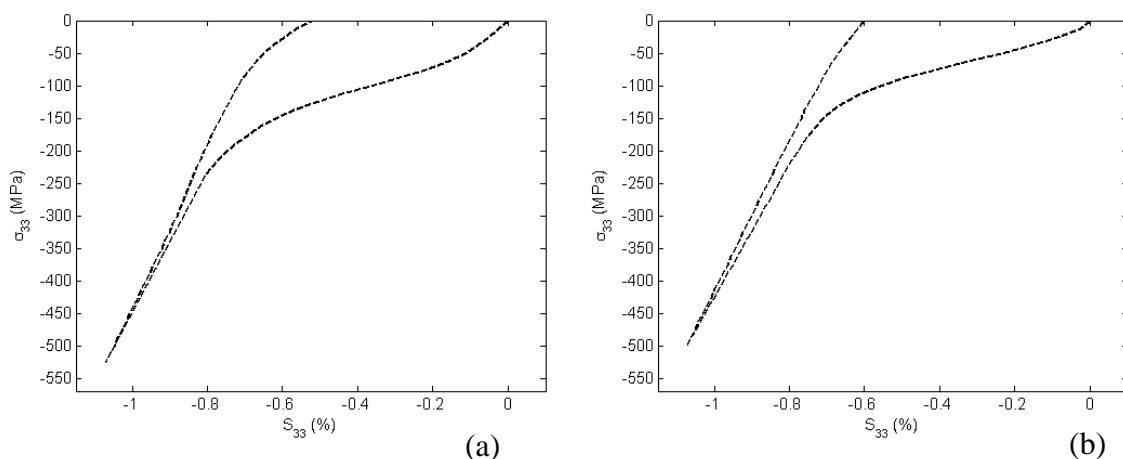


Figure V.14 : Évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale en l'absence de champ électrique dans les PZT-A (a) et PZT-B (b) [Cao1993].

Ces deux matériaux ayant des niveaux de contraintes élevés, on observe des déformées importantes. Dans les deux cas, l'évolution des déformations est rapide. Lors du relâchement de la contrainte, les deux matériaux présentent des décompressions importantes et des déformations résiduelles plus proches de la déformée initiale que dans le cas du PLZT. Par ailleurs, le PZT-A possède une déformation résiduelle moins importante que le PZT-B ce qui va dans le sens d'un caractère plus dur, mécaniquement parlant. De plus, le PZT-A possédant une polarisation résiduelle plus importante que le PZT-B, sa déformation piézoélectrique rémanente est d'autant plus grande, il est donc normal qu'il retrouve une déformée plus proche de son état initial que le PZT-B.

Comme précédemment, la pente de la courbe de contrainte en fonction de la déformation longitudinale admet une pente initiale beaucoup plus importante que la pente à saturation. Ceci s'explique en partie par l'absence de zone de faible mouvement de domaines près de l'état initial qui provoque une déformée rémanente dès le début de la compression. Cette remarque est en accord avec celle faite dans la précédente partie et pour cette raison, on choisit d'utiliser les valeurs du module d'Young à saturation qui sont respectivement de -125 et -144 GPa. Nous illustrerons ceci dans l'étude de l'évolution de la souplesse en fonction de la contrainte mécanique.

A partir de ces deux courbes, on évalue les points de fonctionnement en contrainte mécanique, déplacement électrique et polarisation pour les PZT-A et B respectivement :

Tableau V.3 : Points de fonctionnements des PZT-A et PZT-B.

	PZT-A	PZT-B
Contrainte mécanique coercitive, $\sigma_c$ (MPa)	-100	-60
Contrainte mécanique de saturation, $\sigma_{sat}$ (MPa)	-525	-500
Déplacement électrique de saturation, $D_{sat}$ (C/m <sup>2</sup> )	0.01	0.01
Polarisation rémanente à l'état initial, $P_0$ (C/m <sup>2</sup> )	0.35	0.35
Polarisation résiduelle, $P^{res}$ (C/m <sup>2</sup> )	0.11	0.07
Déformation longitudinale résiduelle, $S^{res}$ (%)	-0.524	-0.6

Ces valeurs sont très proches de celles trouvées dans la littérature [Cao1993] et seront celles utilisées pour modéliser le comportement de ces matériaux. Les phénomènes de repolarisation des deux matériaux calculés sont de  $D_{rep} = 29.4\%$  et  $D_{rep} = 11.7\%$  pour le PZT-A et PZT-B. Plus le matériau est dur, plus le module d'Young (à saturation), ainsi que la contrainte coercitive et la polarisation résiduelle sont élevés, et plus la déformation résiduelle est faible. Ces paramètres caractérisent bien le comportement dur et mou des deux matériaux. Les deux matériaux étant très proches et possédant la même polarisation initiale, on considère en première approximation qu'ils possèdent des polarisations et déformations spontanées égales. Ainsi, à partir des valeurs relevées, nous utilisons l'équation (IV.44) en confondant la polarisation initiale  $P_0$  à la valeur à champ électrique de saturation  $P^{sat}$  et nous obtenons une valeur de la polarisation spontanée  $P^{sp} = 0.42 \text{ Cm}^{-2}$ . Par la suite, une valeur approchée de la déformation spontanée est évaluée par rapport aux matériaux connus comme décrit dans le chapitre précédent, soit  $S^{sp} = 1.02\%$ .

En utilisant l'équation (IV.59), les paramètres de concentration piézoélectrique sont calculés à l'état initial, à saturation et après le relâchement, dans les PZT-A et B :

- pour le PZT-A :  $\kappa_0^p = 3.36$ ,  $\kappa_{sat}^p = 0.09$  et  $\kappa_{res}^p = 0.54$ ,
- pour le PZT-B :  $\kappa_0^p = 3.36$ ,  $\kappa_{sat}^p = 0.11$  et  $\kappa_{res}^p = 0.34$ .

Ces valeurs sont identiques pour les états initiaux car les deux matériaux possèdent les mêmes valeurs de polarisation initiale. On note une légère différence à la saturation due au niveau de contrainte  $\sigma_{sat}$  légèrement différent. L'écart entre les deux paramètres de concentration résiduelle

est directement lié à la valeur de polarisation résiduelle qui est plus importante dans le cas du PZT-A.

Dans un deuxième temps, les constantes d'intégration sont calculées par optimisation :

- pour le PZT-A :  $C_3 = 4.35$ ,  $\zeta_{C_3} = 1.45$ ,  $C_4 = 0.06$  et  $\zeta_{C_4} = 1.54$ ,
- pour le PZT-B :  $C_3 = 4.2$ ,  $\zeta_{C_3} = 1.33$ ,  $C_4 = 0.03$  et  $\zeta_{C_4} = 2.03$ .

Ces constantes nous renseignent sur l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  sous contrainte mécanique et nous permettent de décrire l'évolution de la polarisation et de la déformation rémanente piézoélectrique longitudinale des PZT-A et B sous contrainte mécanique.

Par la suite, les valeurs de la déformation ferroélastique longitudinale initiale et résiduelle sont calculées :

- pour le PZT-A :  $S_0^f = 0.14\%$  et  $S_{res}^f = 0.09\%$ ,
- pour le PZT-B :  $S_0^f = 0.12\%$  et  $S_{res}^f = 0.02\%$ .

Rappelons que la déformation rémanente ferroélastique se calcule par rapport à l'état de saturation. La déformation résiduelle du PZT-A est plus élevée que celle du PZT-B, ce qui signifie que le PZT-A se décompresse d'avantage que le PZT-B. Ainsi, la déformation rémanente ferroélastique vérifie aussi le principe de dureté de la déformation de relaxation et permet d'en déduire les paramètres de concentration ferroélastiques correspondant, respectivement :

- pour le PZT-A :  $\kappa_0^f = 1.14$  et  $\kappa_{res}^f = 0.89$ ,
- pour le PZT-B :  $\kappa_0^f = 1.05$  et  $\kappa_{res}^f = 0.38$ .

Remarquons que le comportement ferroélastique se comporte comme l'effet piézoélectrique. La déformation résiduelle du matériau le plus dur est aussi plus importante que celle du matériau le plus mou.

Par la suite, les constantes d'intégration manquantes sont calculées :

- pour le PZT-A :  $C_5 = 1.25$ ,  $\zeta_{C_5} = 0.72$ ,  $C_6 = 0.2$  et  $\zeta_{C_6} = 1.7$ ,
- pour le PZT-B :  $C_5 = 1.1$ ,  $\zeta_{C_5} = 0.58$ ,  $C_6 = 0.2$  et  $\zeta_{C_6} = 3.6$ .

Ces constantes nous renseignent sur l'évolution du paramètre de concentration ferroélastique  $\kappa^f$  sous contrainte mécanique et nous permettent de décrire l'évolution de la déformation ferroélastique longitudinale des PZT-A et B sous contrainte mécanique.

Ainsi, nous pouvons décrire l'évolution de la polarisation et de la déformation rémanente totale dans les PZT-A et B sous contrainte mécanique en l'absence de champ électrique.

## II.2 Calcul des déplacements électriques sous contrainte mécanique dans les PZT-A et PZT-B

Utilisant l'équation (IV.57.a), nous pouvons décrire l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans les PZT-A et PZT-B. Le résultat de ces deux courbes est comparé avec les courbes expérimentales (figure V.21).

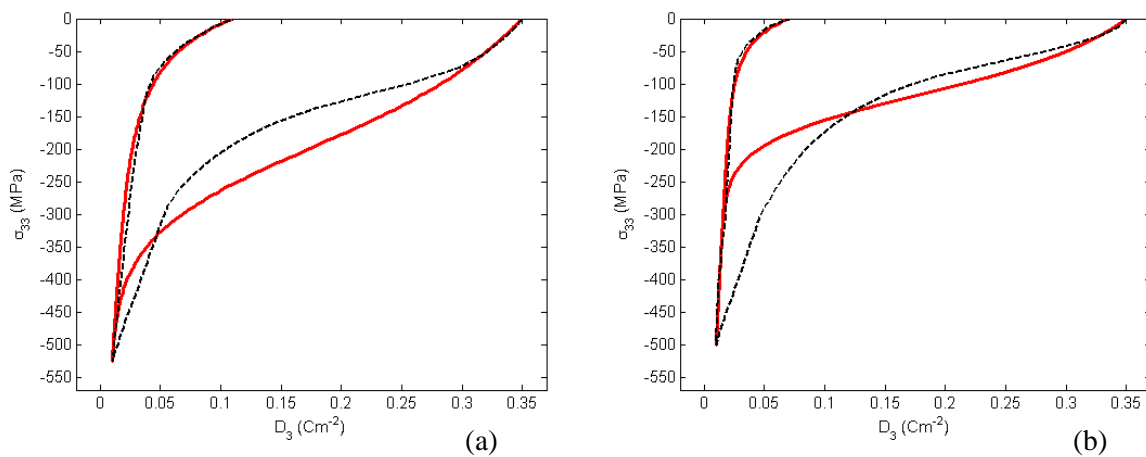


Figure V.21 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).

Ces courbes montrent comment notre modèle s'adapte à des matériaux plus durs que le PLZT, se dépolarisant plus rapidement et possédant une repolarisation non-linéaire importante lors du relâchement de la contrainte. De plus, cette figure illustre les différences d'évolution du déplacement électrique entre deux matériaux proches, mais plus ou moins durs.

En premier lieu, nous observons un bon accord global du modèle qui reproduit correctement les différents points de fonctionnement du matériau. Cependant, le modèle a du mal à suivre des dépolarisations trop rapides, c'est pourquoi nos courbes issues du modèle suivent mal les courbes expérimentales dans le procédé de compression. Dans le cas du PZT-A, le début du cycle est bien décrit, mais la suite est plus difficile et montre une différence significative entre le modèle et la courbe expérimentale. Dans le cas du PZT-B, le modèle est capable de suivre la courbe jusqu'à un niveau de contrainte de -150 MPa, puis dépolarise trop vite comme dans le cas du PLZT. L'évolution en Gaussienne du paramètre de concentration piézoélectrique sous compression mécanique semble plus adaptée aux matériaux mous.

Cependant, lors du processus de décompression, les phénomènes de repolarisation étant relativement lents, notre modèle s'adapte très bien à l'évolution du déplacement électrique de ces deux matériaux. Ainsi, l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique lors du processus de décompression semble bien adaptée aux matériaux durs comme aux matériaux mous.

L'étude des coefficients piézoélectriques associés est faite par la suite.

### II.3 Calcul des déformations longitudinales sous contrainte mécanique dans un PZT-A et PZT-B

Utilisant l'équation (IV.57.b), nous décrivons l'évolution des contraintes mécaniques en fonction des déformations longitudinales à champ électrique nul dans les PZT-A et PZT-B. Ces courbes sont comparées aux données expérimentales (figure V.22).

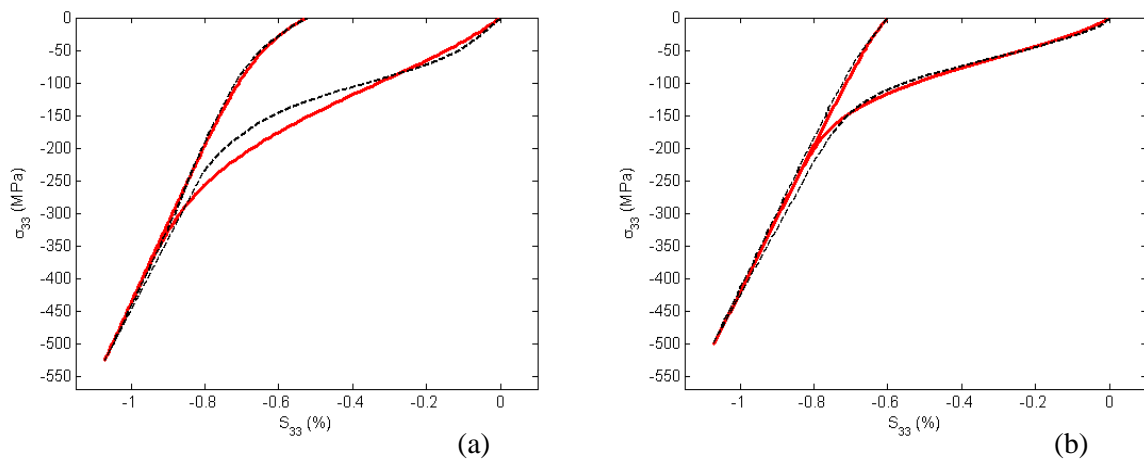


Figure V.22 Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).

Ces courbes montrent comment notre modèle s'adapte à des matériaux durs se déformant rapidement avec une décompression non-linéaire. De plus, elles illustrent les différences d'évolution de la déformation longitudinale entre deux matériaux proches et plus ou moins durs.

En premier lieu, on observe un bon fonctionnement du modèle qui reproduit correctement les différents points de fonctionnement du matériau. Bien que plus proche que dans le cas du déplacement électrique, le modèle garde des difficultés à s'adapter à des changements de déformation rapides, ce qui est directement lié au problème de suivi de dépolarisation rapide. Concernant le PZT-A, le modèle ne parvient pas à adopter un changement de déformée assez rapide et déforme d'abord un peu trop rapidement puis un peu trop lentement. Cependant, le comportement



près de la saturation est en bon accord avec les données expérimentales. Dans le cas du PZT-B le modèle parvient à suivre de très près les données expérimentales. Ainsi, les lois d'évolutions choisies pour les déformations rémanentes piézoélectriques et ferroélastiques en compression semblent bien adaptées aux matériaux durs comme mous. Le modèle décrit donc mieux les déformées que les dépolarisations, ce qui s'explique par le nombre de degrés de liberté plus élevés du calcul de déformation et du fait du comportement même des déformées qui semble bien lié à une évolution Gaussienne de ces paramètres de concentration.

Lors du processus de décompression, les deux déformées étant plus lentes, le modèle suit parfaitement l'évolution des déformées longitudinales. L'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique ayant déjà apporté un très bon accord sur l'évolution du déplacement électrique de ces mêmes matériaux lors du processus de relaxation, nous en déduisons que la définition du paramètre de concentration ferroélastique sur ce même comportement est aussi bien adaptée aux deux types de matériaux.

L'étude des coefficients élastiques associés est faite par la suite.

## II.4 Évolution des constantes des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique

### II.4.1 Évolution des constantes piézoélectriques des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique

Par dérivation des déplacements électriques calculés et mesurés expérimentalement par Cao et Evans en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, nous décrivons l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  en fonction de la contrainte mécanique. Ces courbes sont normalisées par rapport aux valeurs théoriques de leur coefficient piézoélectrique respectif données dans le tableau V.2 (figure V.23).

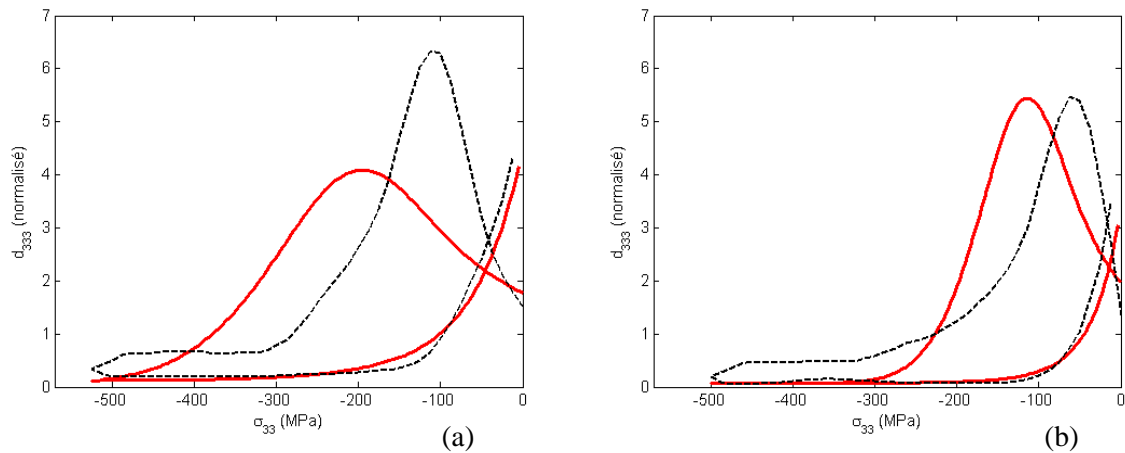


Figure V.23 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  normalisé en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).

Dans les deux types de matériaux, les valeurs initiales du coefficient sont très proches des valeurs théoriques, ce qui signifie que les constantes piézoélectriques utilisées dans le modèles sont très proches de celles des matériaux. Cependant, les valeurs expérimentales des coefficients des deux matériaux augmentent dès le début alors que dans notre modèle elles augmentent plus lentement.

Les courbes expérimentales sont maximums pour des valeurs de contraintes coercitives égales à -100 MPa et -60 MPa. Ces valeurs sont très proches de celles prise dans le modèle, mais les courbes théoriques sont maximums en -200 MPa et -120 MPa. Cette différence s'explique une nouvelle fois par la difficulté qu'a le modèle à s'adapter aux variations trop rapides. Ceci illustre le défaut de la loi Gaussienne sur ce genre de comportements. Pour ces deux valeurs, les ratios maximums des coefficients théoriques et expérimentaux sont respectivement de :

- 6.4 (soit 4.2 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle est maximum avec un ratio de 4.1 (soit 2.2 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-A,

- 5.4 (soit 3.8 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle est maximum avec un ratio de 5.4 (soit 2.5 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-B.

Ainsi, notre modèle parvient à maximiser pour les bonnes valeurs de contraintes, mais a du mal à reproduire de manière convenable la valeur des maximums.

Une fois la contrainte coercitive atteinte les coefficients théoriques et expérimentaux décroissent vers des valeurs stables. Ici aussi, les coefficients expérimentaux diminuent plus tôt vers cette valeur alors que le modèle décroît plus tard et plus rapidement. Les ratios de ces coefficients à saturation sont respectivement :

- 0.4 (soit 3.75 fois moins que sa valeur initiale), alors que notre modèle converge vers un ratio de 0.2 (soit 9 fois moins que sa valeur initiale) pour le PZT-A,

- 0.2 (soit 7 fois moins que sa valeur initiale), alors que notre modèle converge vers un ratio de 0.1 (soit 20 fois moins que sa valeur initiale) pour le PZT-B.

Les valeurs vers lesquelles les modèles convergent sont donc très proches de celles des courbes théoriques. Ces deux comportements sont bien décrits par le modèle et montrent à quel point le coefficient piézoélectrique peut diminuer selon le niveau de compression.

Lors de la relaxation, nous observons dans les deux cas une très forte augmentation du coefficient piézoélectrique des deux matériaux. Le comportement de relaxation est alors très bien décrits par le modèle. Comme dans le cas de la compression, le PZT-A accélère sa repolarisation plus tôt (aux environs de -150 MPa) alors que le PZT-B accélère à partir de -120 MPa. Les ratios des valeurs finales des deux matériaux sont respectivement de :

- 4.3 (soit 2.8 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle converge vers un ratio de 4.2 (soit 2.3 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-A,

- 3.4 (soit 2.4 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle converge vers un ratio de 3 (soit 1.5 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-B.

Les coefficients piézoélectriques des deux matériaux sont significativement plus élevés après le relâchement. Ceci s'explique par une grande mobilité des charges (repolarisation rapide) en fin de décharge. Ainsi, plus le matériau est dur, plus la repolarisation est rapide en fin de cycle et plus le coefficient piézoélectrique est élevé. L'augmentation de ces coefficients lors du relâchement semble liée à la dureté du matériau, pour lesquels l'évolution de la polarisation est plus rapide en fin de cycle.

#### II.4.2 Évolution des constantes élastiques des PZT-A et PZT-B sous contrainte mécanique

Par dérivation des déformations longitudinales calculées et mesurées expérimentalement par Cao et Evans en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, nous décrivons l'évolution du coefficient élastique  $s_{3333}$  pour les PZT-A et PZT-B. Ces courbes sont normalisées par rapport aux valeurs théoriques de leur coefficient de souplesse respectif données dans le tableau V.2 (figure V.23).

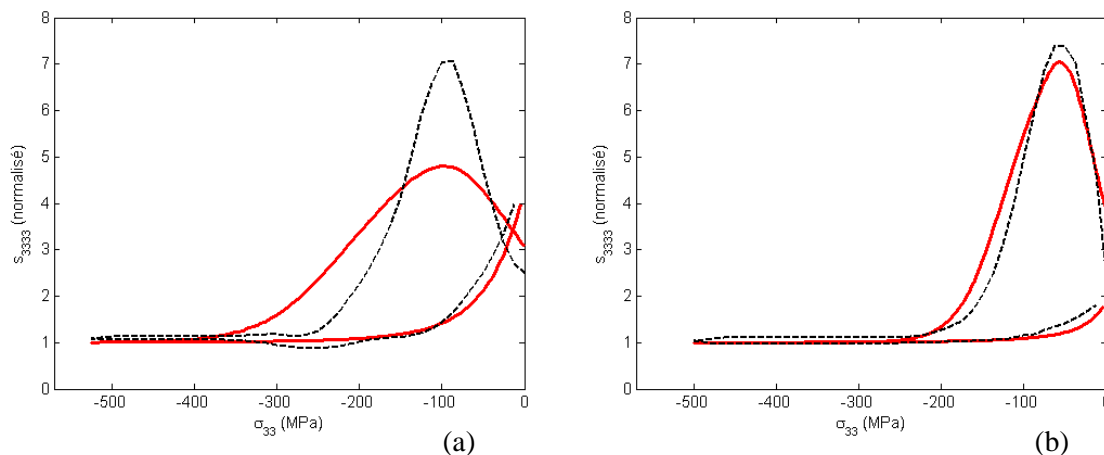


Figure V.24 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient élastique  $s_{3333}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT-A (a) et PZT-B (b).

Dans les deux cas, les valeurs initiales des coefficients élastiques sont relativement éloignées de la valeur théorique du matériau. Ceci montre clairement que dans le cas des matériaux durs, les domaines bougent dès le début de la compression et faussent la mesure du module d'Young qui (classiquement) est indépendante des mouvements de domaines. Ces deux exemples illustrent le choix qui a été fait de prendre comme valeur du module d'Young la valeur du coefficient à saturation. Ainsi, l'évolution des domaines en début de cycle est non négligeable, mais aussi très rapide. Une fois de plus, notre modèle a des difficultés à suivre cette évolution.

Les courbes expérimentales et issues du modèle sont maximums pour des valeurs de contraintes coercitives égales à -100 MPa et -60 MPa. Ces valeurs sont légèrement plus basses que les valeurs obtenues précédemment, mais restent très proches les unes des autres et très proches de celles utilisées dans le modèle. Ainsi, le modèle a plus de facilité à décrire l'évolution des déformations, comme nous l'avons déjà discuté dans le cas du PLZT. Pour ces deux valeurs, les ratios maximums expérimentaux et théoriques sont respectivement de :

- 7 (soit 2.8 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle est maximum avec un ratio de 4.6 (soit 1.5 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-A,

- 7.4 (soit 3.25 fois plus que sa valeur initiale), alors que notre modèle est maximum avec un ratio de 7 (soit 1.75 fois plus que sa valeur initiale) pour le PZT-B.

Ainsi, notre modèle parvient à maximiser au bon niveau de contrainte et pour des valeurs très proches des valeurs expérimentales.

Une fois la contrainte coercitive atteinte, les courbes issues des modèles comme les coefficients théoriques et expérimentaux décroissent vers une valeur stable. Les valeurs du coefficient

expérimental diminuent légèrement plus rapidement que celles issues du modèle et convergent vers des ratios respectivement égaux à :

- 1.1 (soit 2.2 fois moins que sa valeur initiale), alors que notre modèle converge vers un ratio de 1 (soit 3 fois moins que sa valeur initiale) pour le PZT-A,

- 1 (soit 2.25 fois moins que sa valeur initiale) comme notre modèle (soit 4 fois moins que sa valeur initiale) pour le PZT-B.

Les valeurs vers lesquelles le modèle converge sont donc très proches de celles des courbes théoriques et toutes deux relativement éloignées de leurs valeurs initiales. Ces deux évolutions sont très bien décrites par le modèle.

Lors de la relaxation, nous observons dans les deux cas une augmentation significative du coefficient élastique. Dans le cas du PZT-A, cette augmentation est importante et le coefficient en mode libre est plus élevé qu'initialement. Ceci s'explique par une vitesse de déformation rapide lors de la fin du relâchement, en lien direct avec la vitesse de repolarisation importante qui induit une vitesse de déformation rémanente piézoélectrique du même ordre. Dans celui du PZT-B, l'augmentation est plus modérée et s'explique ici aussi par une vitesse de repolarisation significative mais moins importante que pour le PZT-A. Notons que l'augmentation des vitesses de déformation ferroélastique des deux matériaux explique aussi cette hausse des coefficients. Le comportement de relaxation est très bien décrit par le modèle. Comme dans le cas de la compression, le PZT-A accélère sa repolarisation plus tôt (aux environs de -150 MPa) alors que le PZT-B accélère à partir de -120 MPa. Ce comportement est directement lié à la dureté des matériaux et au niveau de contrainte coercitive plus élevée pour les matériaux les plus durs qui se 'relâchent' donc plus tôt (à contrainte mécanique plus grande). Ainsi, les deux matériaux terminent leurs cycles avec des ratios de coefficient élastique égaux à :

- 4 (soit 1.6 fois plus que sa valeur initiale) comme notre modèle (soit 1.29 fois plus que la valeur initiale) pour le PZT-A,

- 1.8 (soit 1.25 fois plus que sa valeur initiale) comme notre modèle (soit 2.22 fois plus que la valeur initiale) pour le PZT-B.

Il est important de noter que deux matériaux si proches peuvent avoir un comportement significativement différent lors du relâchement, ce qui valide le fait que les coefficients élastiques varient eux aussi énormément lors de la compression-décompression.

## II.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié l'évolution du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique dans deux matériaux durs, très proches l'un de l'autre en terme de propriétés, mais l'un étant légèrement plus dur que l'autre.

De manière générale, notre modèle a réussi à s'adapter correctement à l'évolution des deux variables. Le phénomène de dépolarisation est celui pour lequel le modèle peine le plus à s'adapter, ce qui implique que la loi d'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique a plus de difficulté à s'adapter aux matériaux durs qu'aux matériaux plus mous du style PLZT. Cependant, le phénomène de repolarisation lors de la relaxe de la contrainte mécanique est très bien décrit par la loi d'évolution de ce même paramètre, ce qui étend les bons résultats sur matériau mou aux matériaux durs sur ce segment. L'évolution de la déformation longitudinale a montré un meilleur accord avec les résultats expérimentaux. L'évolution sous compression est d'une bonne précision, ce qui valide le choix de la loi d'évolution du paramètre de concentration ferroélastique aux matériaux durs et mous. Encore une fois, notre modèle est très précis lors de la décompression, de la même manière qu'il l'était sur les matériaux mous.

L'étude de l'évolution des constantes piézoélectriques et élastiques associées montre que le choix de ne pas considérer de zone de linéarité initiale est correct, mais que notre modèle garde de la difficulté à s'adapter à des changements de polarisation et de déformation rapides. L'évolution des constantes lors de la décompression est bien reproduite.

De cette étude, nous avons montré différentes caractéristiques des matériaux durs et mous. Comme décrit dans la littérature, les coefficients piézoélectriques, diélectriques, ainsi que le champ électrique coercitif des matériaux durs sont significativement plus élevés. De plus, nous avons observé que la valeur de la contrainte coercitive l'est aussi. Le phénomène de dépolarisation est plus rapide, et la repolarisation beaucoup plus grande. De la même manière, ces matériaux possèdent une déformation résiduelle beaucoup plus faible que les matériaux mous.

La comparaison des évolutions des deux matériaux a confirmé que l'évolution des coefficients est plus rapide pour les matériaux durs et qu'aucune zone d'évolution linéaire n'est à considérer. Cela nous a obligé à redéfinir des modules d'Young en considérant que la valeur vraie est celle où les domaines n'évoluent plus, donc à champ de contrainte de saturation. De plus, nous remarquons que les ratios maximums des évolutions des deux constantes sont légèrement plus élevés dans le cas du PLZT. Par ailleurs, il semble que plus le matériau est dur et plus le coefficient piézoélectrique est élevé en fin de cycle.

### III Étude du PZT P188 sous contrainte mécanique

#### III.1 Calcul des paramètres du matériau

Ce matériau est un dérivé des PZT aussi appelé Navy type II ou PZT-5A. De type mou, ce matériau a été étudié par Boucher [Boucher2002]. Ce dernier s'est intéressé à l'évolution du déplacement électrique sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique. Les contraintes sont appliquées dans l'axe Z, correspondant à l'axe de polarisation. Ce matériau est légèrement plus dur que le PLZT 8/65/35, mais moins que les PZT-A et B. Les propriétés classiques du matériau qui nous intéressent sont les suivantes :

Tableau V.4 : Propriétés du PZT P188 [Richard1996].

Module d'Young $Y_3$ (GPa)	49
Coefficient piézoélectrique $d_{333}$ ( $10^{-12}$ m/V)	427
Permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = \epsilon_{33}/\epsilon_0$	1934

Nous calculons le coefficient de souplesse et la permittivité diélectrique associées  $s_{3333} = 204 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$  et  $\epsilon_{33}^T = 17.1 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$ . Les constantes piézoélectriques et diélectriques sont inférieures à celles du PLZT et légèrement supérieures à celles des deux PZT précédents. C'est donc un matériau mou avec des propriétés plus dures que celles du PLZT.

Nous nous intéressons ici à l'étude des mesures faites par Boucher pour définir les points de fonctionnement nécessaires au modèle. La figure V.25 montre le relevé expérimental du comportement de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique en l'absence de champ électrique.

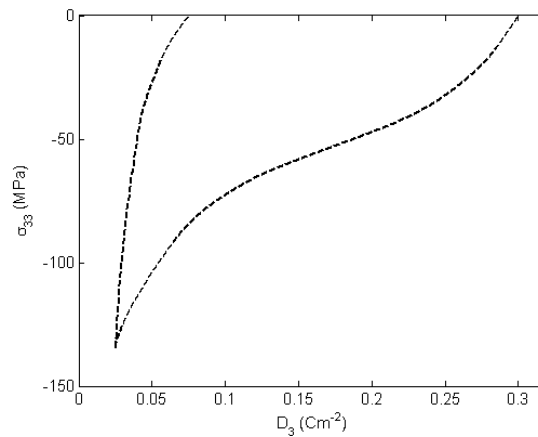


Figure V.25 : Évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans une céramique PZT P188 [Boucher2002].

Cette courbe montre le comportement de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique. La dépolariation du matériau est plus lente et qu'il se repolarise plus que dans le cas du PLZT, mais moins que pour les PZT-A et B. Ces remarques sont en accord avec le fait que ce matériau est plus dur que PLZT et moins que les deux autres. Contrairement aux deux PZT, nous retrouvons un intervalle de contrainte initiale avant lequel l'évolution de la dépolariation semble linéaire.

A partir de cette courbe, les points de fonctionnement en contrainte mécanique, déplacement électrique et polarisation sont évalués :

- la contrainte mécanique coercitive,  $\sigma_c = -50$  MPa ,
- la contrainte mécanique de saturation,  $\sigma_{sat} = -135$  MPa ,
- la contrainte mécanique de début de mouvement des domaines,  $\sigma_l = -15$  MPa ,
- le déplacement électrique de saturation,  $D_{sat} = 0.025$  Cm<sup>-2</sup> ,
- le déplacement électrique à  $\sigma_l$ ,  $D_l = 0.283$  m<sup>-2</sup> ,
- la polarisation rémanente à l'état initial,  $P_0 = 0.3$  Cm<sup>-2</sup> ,
- la polarisation résiduelle :  $P^{res} = 0.075$  Cm<sup>-2</sup> .

Ainsi, nous évaluons le phénomène de repolarisation, soit  $D_{rep} = 18.1\%$  .



A partir des valeurs relevées, l'équation (IV.44) est utilisée en confondant la polarisation initiale  $P_0$  à la valeur à champ électrique de saturation  $P^{sat}$  et nous obtenons une valeur de polarisation spontanée  $P^{sp} = 0.36 \text{ Cm}^{-2}$ .

En utilisant l'équation (IV.59), nous calculons les paramètres de concentrations piézoélectriques à l'état initial, à  $\sigma_l$ , à saturation et après le relâchement, soit respectivement,  $\kappa_0^p = 2.53$ ,  $\kappa_l^p = 2.29$ ,  $\kappa_{sat}^p = 0.16$  et  $\kappa_{res}^p = 0.39$ . Dans un deuxième temps, les constantes d'intégration sont calculées par optimisation et nous obtenons les valeurs suivantes :  $C_3 = 2.45$ ,  $\zeta_{C_3} = 0.65$ ,  $C_4 = 0.07$  et  $\zeta_{C_4} = 0.75$ .

Ces constantes nous renseignent sur l'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique  $\kappa^p$  sous contrainte mécanique et nous permettent de décrire l'évolution de la polarisation du PZT P188 sous cette contrainte mécanique.

### III.2. Calcul du déplacement électrique sous contrainte mécanique

Utilisant l'équation (IV.57.a) du précédent chapitre, nous pouvons décrire l'évolution du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT P188. La courbe inverse étant plus souvent représentée, nous comparons l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique de notre modèle et celle issue des données expérimentales faites par Boucher (figure V.26).

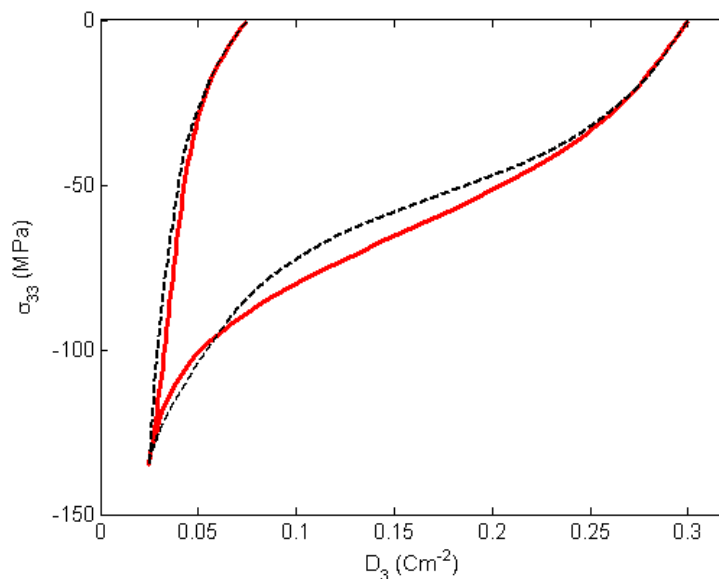


Figure V.26 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique à champ électrique nul dans un PZT P188.

Cette courbe montre une bonne cohérence entre le modèle et les mesures. Les valeurs initiales, de saturation et résiduelle sont correctement retrouvées et l'évolution du déplacement électrique lors de la relaxation est très bien reproduite.

La dépolarisation est d'abord linéaire puis s'accélère jusqu'à la contrainte coercitive. Ensuite, la vitesse de dépolarisation diminue jusqu'à la contrainte de saturation. La dépolarisation du matériau est très bien décrite jusqu'à -50 MPa, seuil à partir duquel le modèle dépolarise trop lentement. Par contre, il devient plus rapide que l'expérience après -90 MPa. Cette remarque a déjà été faite sur les précédents matériaux, mais comme précédemment, l'accord global est bon.

Lors du relâchement de la contrainte, le déplacement électrique évolue quasi linéairement jusque -50 MPa, ce qui correspond à la contrainte coercitive. Le matériau étant plus dur que le PLZT, la non-linéarité de la repolarisation est plus visible sur cette courbe et montre le bon accord de notre modèle lors du processus de relaxation.

L'étude du coefficient piézoélectrique est faite par la suite.

### III.3 Évolution du coefficient piézoélectrique sous contrainte mécanique

Par dérivation des déplacements électriques calculés et mesurés expérimentalement par Boucher en fonction de la contrainte mécanique en l'absence de champ électrique, nous décrivons l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  pour un matériau PZT P188. Cette courbe est

comparée à la courbe dérivée des mesures expérimentales et toutes deux normalisées par rapport à la valeur théorique du coefficient piézoélectrique théorique donnée dans le tableau V.3 (figure V.27).

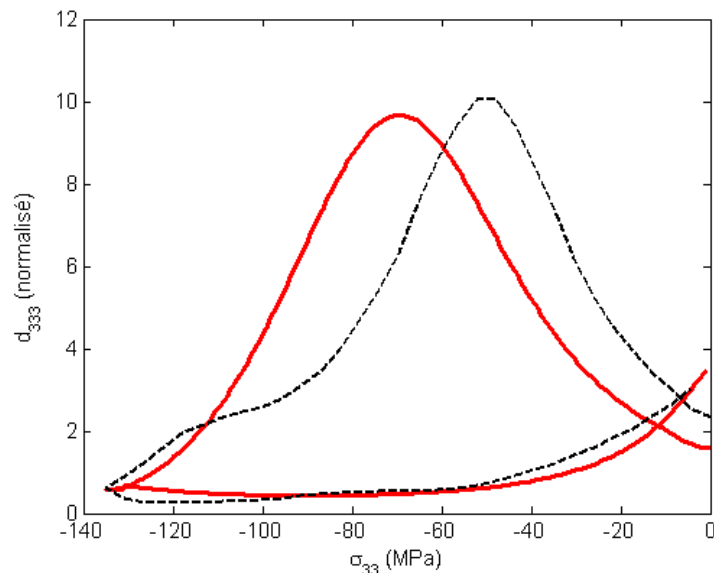


Figure V.27 : Données expérimentales (pointillés) et modélisation (traits pleins) de l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  normalisée en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un PZT P188.

La valeur initiale issue du modèle est relativement proche de la valeur issue de la littérature alors que celle issue des mesures expérimentales est plus élevée. Une fois de plus, cet écart montre que la précision des mesures de constantes des matériaux est complexe et nécessite un protocole plus précis. Jusque -15 MPa, le coefficient piézoélectrique augmente doucement, en bon accord avec la vitesse de variation de notre modèle.

Une fois le seuil de contrainte  $\sigma_l$  franchi, le coefficient piézoélectrique expérimental augmente plus rapidement jusqu'à atteindre son maximum près de la contrainte coercitive. L'évolution du coefficient issu du modèle augmente avec une vitesse cohérente à celle de l'expérience, mais maximise plus tard vers, -65 MPa. Le coefficient expérimental est maximum avec un ratio de 10 (soit 4.3 fois plus que sa valeur initiale), alors que le coefficient de notre modèle est maximum avec un ratio de 9.7 (soit 6 fois plus que sa valeur initiale). Dans cet intervalle, le matériau se dépolarise de plus en plus rapidement au fur et à mesure qu'il s'approche de la contrainte coercitive. Une fois ce maximum passé, le coefficient décroît rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. Il converge alors vers une valeur stable inférieure à la valeur initiale en bon accord avec la théorie. Les ratios expérimentaux de ces coefficients sont alors

de 0.6, soit 4 fois moins que la valeur initiale expérimentale et 10 fois moins que la valeur initiale du modèle. Notre modèle est proche de l'expérience tout le long de ce processus.

Une fois la contrainte relâchée, le coefficient reste constant, puis augmente légèrement une fois la contrainte coercitive passée. Lors de ce processus, le modèle a plus de facilité à maximiser sur la valeur coercitive théorique. Le matériau est assez dur pour que le phénomène de repolarisation soit visible, mais moins que dans le cas des deux PZT-A et B qui sont plus durs que le PZT P188. Ceci est en bon accord avec l'hypothèse qui proposait que plus le matériau est dur, plus son coefficient piézoélectrique final a tendance à dépasser la valeur initiale.

### III.4 Conclusion

L'étude du déplacement électrique du PZT P188 sous contrainte mécanique a montré que notre modèle est capable de s'adapter correctement à ce troisième matériau aux propriétés intermédiaires entre le PLZT et les PZT-A et B. De par sa nature relativement molle, nous avons pu observer un début de variation faible, ce qui semble caractéristique des matériaux mous. Le procédé de compression a été correctement reproduit par le modèle, bien qu'il ait une fois de plus un peu de difficulté à maximiser sur la bonne valeur de contrainte coercitive. Ainsi, la loi d'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique évolue assez rapidement pour ce matériau, car la vitesse de variation est correcte, mais la valeur étant décalée, nous pouvons attribuer ce défaut au modèle de distribution choisi qui n'est pas toujours optimale. Par ailleurs, les évolutions du déplacement électrique et du coefficient piézoélectrique issus du modèle sont en très bon accord avec les courbes expérimentales. Ces évolutions étant plus lentes et moins importantes, le modèle a moins de difficultés à s'adapter. De plus, cette étude confirme que dans le cas d'un matériau 'relativement dur', le coefficient piézoélectrique croît significativement en fin de cycle, ce qui va dans le sens de la corrélation entre dureté du matériau et grande valeur piézoélectrique finale.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'évolution des comportements sous contrainte électrique d'un matériau mou, le PLZT 8/65/35. La correspondance entre théorie et expérience sur les parties de relaxation est très bonne, et valide le choix de la décroissance exponentielle de la polarisation. Cependant, le modèle a plus de difficultés à s'adapter à des changements de polarisation rapides, ce qui se traduit par une imprécision plus importante près du champ électrique coercitif. La description

de l'évolution de la déformation transversale est significativement moins bonne, mais valide l'hypothèse de déformation rémanente piézoélectrique isochore.

Les évolutions des coefficients diélectrique et piézoélectrique sous contrainte électrique issues du modèle montrent un bon accord global avec celles issues des courbes expérimentales. Cependant, la difficulté à décrire les évolutions rapides de polarisation se traduit par une difficulté à atteindre les maximums des coefficients diélectriques, mais surtout piézoélectriques, car ce comportement est d'avantage sensible aux changements de concentration de domaines.

Nous avons effectué l'étude du déplacement électrique et de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique du PLZT 8/65/35, des PZT-A et B et du déplacement électrique du PZT P188. Les phénomènes de dépolarisation sont correctement évalués, mais montrent certaines difficultés sur les changements de polarisation trop rapide, notamment dans les matériaux durs. La loi d'évolution du paramètre de concentration piézoélectrique est donc plus adaptée aux matériaux mous. Cependant, les phénomènes de repolarisation et de déformation lors de la relaxe sont très bien décrits par notre modèle, sur les 4 matériaux. Ceci valide le choix des lois d'évolution des paramètres de concentration piézoélectrique et ferroélastique aux matériaux durs et mous en décompression. L'étude de la déformation transversale du PLZT a montré une précision significativement plus faible. Cet écart semble largement confirmer que l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique est mal adaptée.

L'étude de l'évolution des coefficients du matériau sous contrainte mécanique a montré un bon accord entre modèle et expérience, et a confirmé notre hypothèse de repolarisation non-linéaire et non négligeable lors de la relaxation dès que le matériau est dur. Cette remarque est en accord avec les déformations résiduelles plus faibles dans les matériaux mous que durs. La comparaison des évolutions des PZT A et B a confirmé que l'évolution des coefficients est plus rapide pour les matériaux durs et qu'aucune zone d'évolution linéaire n'est à considérer dans ce type de matériaux. Ainsi, dès que le matériau est dur, il est important de relativiser la validité des données de module d'Young sur les matériaux ferroélectriques à cause des mouvements de domaines évoluant dès le début de la compression. Considérant qu'à la saturation, les domaines piézoélectrique et ferroélastique n'évoluent plus, il apparaît que le module d'Young à saturation est plus proche du module d'Young 'réel' que ne l'est le module d'Young à l'état initial. Par ailleurs, il semble que plus le matériau est dur et plus le coefficient piézoélectrique est élevé en fin de cycle. De plus, cette étude confirme que dans le cas d'un matériau relativement dur, le coefficient piézoélectrique se repolarise significativement et va dans le sens de la corrélation entre dureté du matériau et grande valeur piézoélectrique finale.

Par ailleurs, nous avons vu qu'il n'est pas possible d'approximer une valeur constante du paramètre diélectrique au cours de la compression mécanique, comme de considérer un tenseur

élastique constant dans le cas de la contrainte électrique. Ainsi, il est impossible de calculer l'ensemble des coefficients nécessaires à notre modèle d'évolution des paramètres de vitesses et coefficient de couplage dans les matériaux précontraints.



## Chapitre VI : Étude expérimentale de matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique

Après avoir effectué l'étude théorique de matériaux piézoélectriques sous contraintes électrique et mécanique, nous développons dans ce chapitre la mise en place d'un dispositif expérimental adapté à l'étude de la non-linéarité du déplacement électrique et des déformations de matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique.

Dans un premier temps, nous mettons en place le dispositif expérimental purement mécanique. Ainsi, nous mesurons l'évolution des déformations longitudinale et transversales dans le niobate de lithium jusqu'à la limite de rupture mécanique. Cette étude permet de mesurer la valeur de ce paramètre et d'estimer la limite élastique de ce matériau. De plus, nous mettons en avant les difficultés expérimentales dédiées à l'évaluation des paramètres électroacoustiques du niobate de lithium sous contrainte mécanique.

Dans un deuxième temps, nous mesurons l'évolution du déplacement électrique et des déformations longitudinale et transversales des Pz21 et 26 sous contrainte mécanique. Ces résultats sont mis en parallèle avec ceux du précédent chapitre et permettent de discuter les hypothèses de notre modèle.



## I Étude du niobate de lithium sous contrainte mécanique

### I.1 Dispositif expérimental

#### I.1.1 Echantillons

Les échantillons utilisés ont été fabriqués par l'entreprise Sino Risingtech Material (Beijing, Chine) sous forme de disques (électrodés en surface) de 6 mm d'épaisseur, 12 et 18 mm de diamètre. Les propriétés du second ordre du niobate de lithium nous intéressant sont rappelées :

Tableau VI.1 : Propriétés du niobate de lithium [Warner1967].

Coefficient piézoélectrique $-d_{311}$ ( $10^{-12}$ C/N)	1
Coefficient piézoélectrique $d_{333}$ ( $10^{-12}$ C/N)	6
Densité volumique ( $\text{kg/m}^3$ )	4700
Coefficient élastique de souplesse $s_{3333}$ ( $10^{-12}$ $\text{m}^2/\text{N}$ )	5.02
Coefficient élastique de souplesse $-s_{1133}$ ( $10^{-12}$ $\text{m}^2/\text{N}$ )	1.47
Coefficient de Poisson	0.29

Rappelons que ces constantes sont estimées dans le cas d'un plan de coupe  $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ .

Dans le but d'étudier les évolutions de paramètres électro-acoustiques de ce matériau en fonction de la contrainte mécanique, nous disposons de ces matériaux dans quatre plans de coupe dans lesquels il a été montré que les changements étaient les plus importants [Lematre2006-Lematre2011]. Les plans de coupe choisis sont les suivants :

- $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ ,
- $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ ,
- $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 54^\circ$ ,
- $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ .

Afin de dimensionner l'instrumentation nécessaire à la mesure des paramètres électroacoustiques du matériau, nous avons commencé par rechercher leurs limites élastique et à la

rupture. Dans un premier temps, nous avons testé l'échantillon de petit rayon et de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ , car nous disposons du plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 54^\circ$  qui est très proche et aux propriétés plus connues. Par la suite, nous avons choisi le matériau avec le module d'Young le plus élevé, soit celui de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$  qui correspond à une orientation cristallographique forte. Les deux exemplaires de ce plan de coupe (avec rayons différents) ont été utilisés. Les électrodes de ces 3 échantillons de niobate sont retirées, les surfaces polies et considérées planes avec une précision inférieure à 5 micromètres. Trois jauges de contraintes mesurant chacune les déformations longitudinale et transversales ont été collées sur chacun de ces matériaux pour évaluer l'évolution des déformations sous contrainte mécanique. Les surfaces latérales ont elles aussi polies de manière à assurer une meilleure adhérence avec les jauges de déformation. Rappelons que pour ce matériau, les déformations transverses sont égales, soit  $S_{11} = S_{22}$ .

### I.1.2 Mise en place du dispositif expérimental

La première phase de test a été effectuée sur l'échantillon de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ , de diamètre 12 mm. L'essai sur cet échantillon a montré que le dispositif expérimental nécessite une grande précision de planéité et que le plateau rotulé en mode libre n'est pas capable de s'adapter assez rapidement au défaut de planéité. La dispersion entre les 3 jauges était non négligeable et la rupture est apparue brutalement aux alentours de -60 MPa, ce qui oblige à considérer le niobate de lithium comme un matériau fragile.

Lors de l'essai sur l'échantillon de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$  et de même diamètre, nous avons choisi de bloquer le plateau rotulé sous compression en insérant 2 plateaux rotulés de diamètre égale à celui des échantillons. Ces résultats ont montré une meilleure cohérence et une faible dispersion entre les 3 jauges, mais a mis en avant le manque de souplesse du dispositif sous contrainte. La rupture de ce matériau a elle aussi été brutale et est apparue à -80 MPa, ce qui est en bon accord avec le fait que ce plan de coupe correspond à un plan fort du matériau. Pour compenser ce défaut de souplesse, nous avons choisi d'insérer des éléments souples en carton de faible épaisseur entre le plateau rotulé et l'échantillon afin de s'adapter rapidement et de combler les défauts de planéité. Le dispositif adapté à nos mesures est représenté sur la figure VI.1.

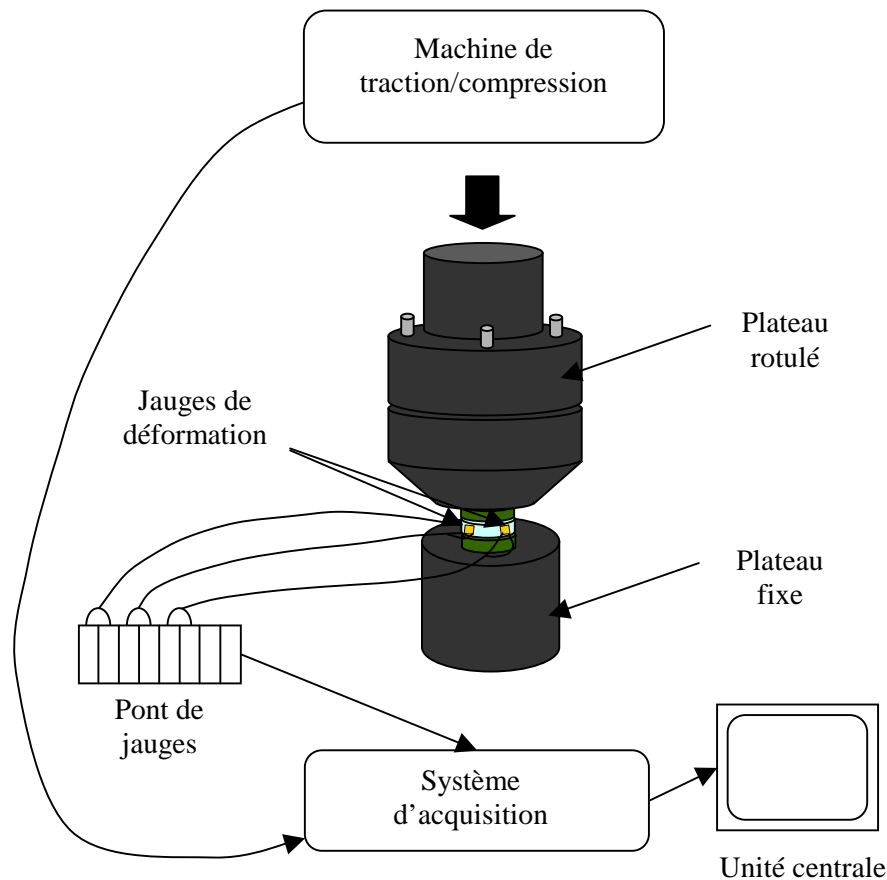


Figure VI.1 : Dispositif expérimental de mesure de déformations longitudinale et transversales sous contrainte uniaxiale.

Sous l'action d'une machine de traction/compression, utilisée en mode de compression, et pilotée en force (logiciel Wave Maker-Runner) nous appliquons une force pouvant atteindre à  $-100$  kN. Cette dernière envoie les informations de force et de déplacement de sa cellule de force au système d'acquisition qui traite les données. Afin d'assurer la planéité du plateau d'alignement, nous pressons ce dernier à  $-10$  kN, et nous serrons les quatre vis de manière à éliminer tous défauts entre les deux plateaux. Le matériau est placé entre deux éléments mous en carton d'épaisseur  $1.2$  mm qui garantissent une planéité parfaite entre le plateau d'alignement et l'échantillon. L'influence du carton compressé est négligée. Nous collons ensuite sur l'échantillon 3 jauges de déformation mesurant chacune la déformation longitudinale et transversale. L'ensemble des jauges est relié à un pont de jauge, lui-même relié au système d'acquisition. Ce dernier traite les informations reçues et les renvoie à l'unité centrale. Le dispositif est considéré plan quand les 3 jauges de déformation mesurent des valeurs égales à  $4\%$  près sous une contrainte de  $-2$  MPa.

### I.1.3 Instrumentation

La machine de traction-compression de marque Instron (modèle 8801) est capable d'appliquer une force uniaxiale dans une gamme de  $\pm 100$  kN, avec une précision effective de  $\pm 0.22\%$ . Connaissant précisément la valeur de la force appliquée, le changement de surface de l'échantillon est négligeable [Lematre2011] et on calcule la contrainte appliquée :

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (\text{VI.1})$$

où  $S$  est la surface de l'échantillon. Cet outil est équipé d'un capteur LVDT qui mesure le déplacement de la cellule de force dans une gamme de  $\pm 75$  mm, avec une précision de  $\pm 0.5\%$ . Les informations de déplacement et de force sont envoyées en sortie de la machine sous forme de signaux de tensions inférieures à 7 V (avec une précision de  $\pm 0.5\%$ ).

Le plateau d'alignement de marque Testwell est formé d'un plateau rotulé et d'un plateau fixe de diamètre de contact 56 mm, tous les deux traités 58 HRC. Le réglage des 4 vis permet de parfaire la planéité du plateau supérieur par rapport au plateau inférieur. Une fois bloqué sous -10 kN, la précision de la planéité est évaluée à  $\pm 1 \mu\text{m}$ .

Les jauges utilisées sont de marque Vishay (France, Chartres), de type rosette (C2A-06-062LT-120), précablées et isolées électriquement. Leurs dimensions totales sont de 5.33 mm  $\times$  4.17 mm, la largeur de grille est de 13 mm, les résistances de grille de 120 Ohm ( $\pm 0.6\%$ ). Ces jauges mesurent la déformation longitudinale avec un facteur de gain de 1.95 ( $\pm 0.5\%$ ) et une sensibilité transversale de  $3 \pm 0.2\%$ , et la déformation transverse avec un facteur de gain de 2.01 ( $\pm 0.2\%$ ) et une sensibilité transversale de  $1.4 \pm 0.2\%$ .

Le pont de jauge est adapté au câblage de 8 voies de déformation et fait le lien entre les jauges et le système d'acquisition.

Le système d'acquisition utilisé est le Système 7000 de l'entreprise Vishay. Il possède deux cartes d'acquisition, l'une pouvant recevoir 8 mesures de déformation et l'autre 8 voies externes. Cet appareil code sur 24 bits et traite des tensions de  $\pm 10$  V avec une précision de  $100 \mu\text{V}$ . Le logiciel qui lui est dédié (StrainSmart) permet d'équilibrer les ponts de jauges et de calibrer l'ensemble des voies.

## I.2 Mesures expérimentales

### I.2.1 Chargement mécanique

Afin de vérifier la planéité de notre système, un préchargement de -500 N, soit une contrainte de -2 MPa, est appliqué pour s'assurer de la cohérence des valeurs de déformations des 3 jauges de déformations et on vérifie que l'écart entre les 3 jauges de déformation est inférieur à 3%. Le cycle de contrainte est appliqué à une vitesse de -1 MPa/s, en compression comme en décompression. Nous effectuons des cycles de charge-décharge successifs avec un pas de -5 MPa ponctués par un temps de 60 secondes de compression constante pour observer la tenue du matériau et s'assurer qu'il n'est pas en déformation plastique.

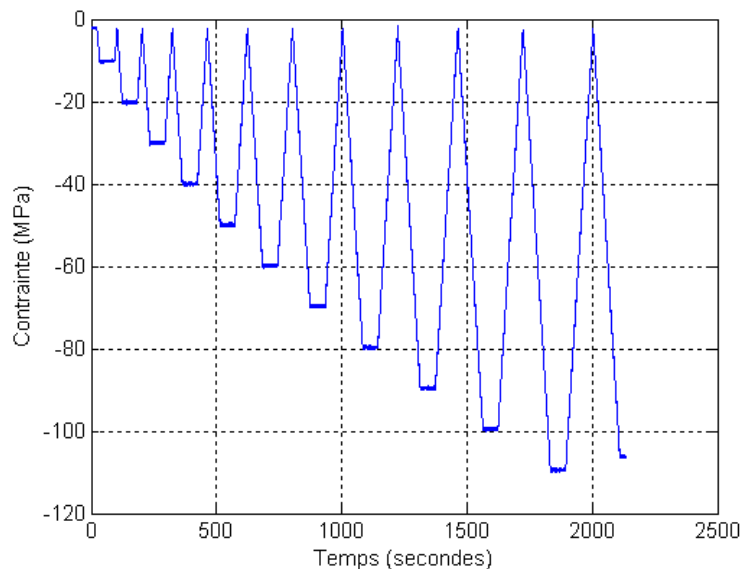


Figure VI.2 : Cycle de chargement imposé au niobate de lithium.

L'application de la contrainte est cyclique et le niveau de force est appliqué relativement à l'état initial. Cet état étant l'état de préchargement initial (-2 MPa), la contrainte ne revient pas en mode complètement libre à chaque cycle, ce qui évite la perte de contact entre éléments du dispositif et n'altère pas la mesure. Dans un deuxième temps, nous vérifions la cohérence des données en évaluant la dispersion entre les données de chacune des jauges et on en effectue la moyenne. De plus, un filtre de Savitzky-Golay est appliqué pour lisser l'effet de l'inversion du sens de chargement dans l'évolution de la déformation.

### I.2.2 Mesure des déformations

La figure VI.3 montre l'évolution de la déformation longitudinale lors de l'application des cycles de chargement/déchargement sur un échantillon de niobate de lithium de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$  et 18 mm de diamètre. L'écart quadratique entre la mesure des 3 jauges est inférieur à 3%. L'état initial (préchargé) est pris comme état de référence.

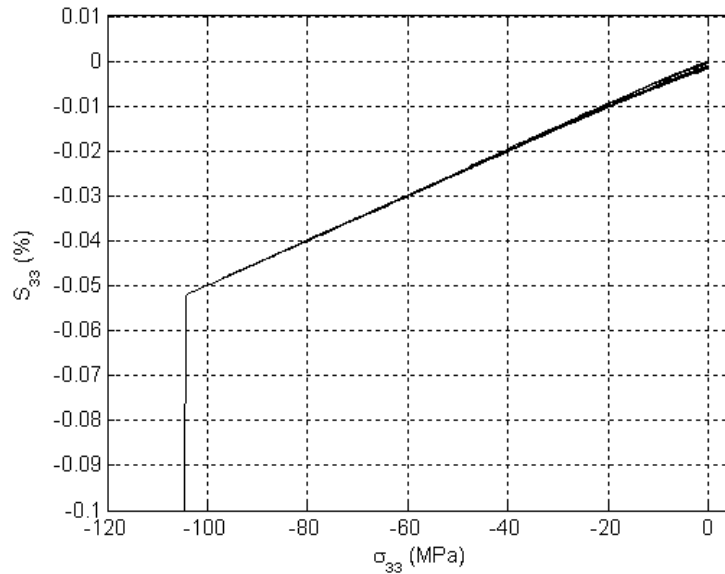


Figure VI.3 : Déformation longitudinale du niobate de lithium (plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ ) en fonction de la contrainte mécanique au cours des cycles de chargement.

Cette figure montre que dans ce plan de coupe, le niobate de lithium se déforme quasi-linéairement au cours des cycles de compression-décompression. La rupture du matériau est observée aux alentours de -105 MPa, sans passer par une zone plastique. Aucun phénomène de fluage n'est observé, ce qui confirme que le matériau est dans sa zone élastique de déformation. Ainsi, le matériau est considéré comme un matériau fragile.

Cette figure permet une évaluation directe du coefficient de souplesse  $s_{3333}$ , soit :

$$s_{3333} = \frac{s_{33}}{\sigma_{33}}. \quad (\text{VI.2})$$

A faible contrainte (-2 MPa), nous obtenons un coefficient  $s_{3333} = 4.99 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ , soit un écart de 12% par rapport à la mesure effectuée par Warner [Warner1967]. Cette différence est en majeure partie attribuée à la géométrie de notre matériau (plus adaptée en mode barre) ainsi qu'à nos incertitudes de mesure.

La figure VI.4 montre l'évolution de la déformation transversale lors de l'application des cycles de chargement/déchargement sur un échantillon de niobate de lithium de plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$  et de diamètre 18 mm. L'écart entre la mesure des 3 jauges est inférieur à 3%.

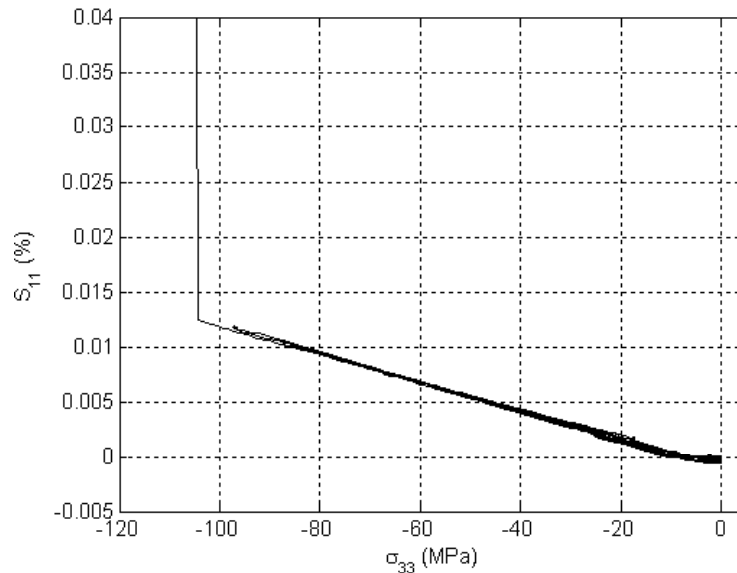


Figure VI.4 : Déformation transversale du niobate de lithium (plan de coupe  $\varphi = 90^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ ) en fonction de la contrainte mécanique au cours des cycles de chargement.

Cette figure montre que dans ce plan de coupe, le niobate de lithium se déforme quasi-linéairement au cours des cycles de compression-décompression. La rupture est observée pour une même valeur de contrainte, ce qui confirme la rupture totale du matériau. Dans ce mode de déformation aussi, aucune zone plastique n'est observée. Cette courbe confirme la précédente, valide la bonne tenue du dispositif au cours de l'essai et le caractère fragile du matériau.

Cette figure permet une mesure direct du coefficient de souplesse  $s_{1133}$ , soit :

$$s_{1133} = \frac{S_{11}}{\sigma_{33}}, \quad (\text{VI.2})$$

A faible contrainte, on obtient un coefficient  $s_{1133} = -1.18 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$  soit un écart de 5% par rapport à la mesure effectuée par Warner [Warner1967]. Cette différence est en majeure partie attribuée à la géométrie de notre matériau ainsi qu'aux incertitudes de mesure.

## I.3 Conclusion

Dans cette partie, nous avons développé la mise en place du dispositif expérimental permettant la mesure de déformations longitudinale et transversales de matériau peu épais sous contrainte mécanique. La précision des valeurs mesurées sur le niobate de lithium permet de valider notre matériel et ses réglages avec une exactitude significative.

Au travers de ces mesures, nous avons montré que les courbes d'évolution des déformations longitudinale et transversales suivent une loi caractéristique d'une déformation élastique. La limite à la rupture se confondant avec la limite élastique, le caractère fragile du matériau est confirmé. Notons que cette propriété est classiquement observée dans les monocristaux. Cette limite a été mesurée à -105 MPa dans le plan de coupe le plus dur du matériau et ne peut donc être considérée comme valable dans tous les plans de coupe. En outre, cette limite est largement dépendante du matériau, de sa géométrie ou mode de fabrication et au mode. Ainsi, nous considérons dans nos modèles une limite légèrement supérieure de -110 MPa.

Cette mesure a permis de dimensionner les résultats numériques de différents articles publiés dans le domaine qui évaluent la non-linéarité d'une précontrainte mécanique allant jusqu'à 3 GPa [Lematre2006-Lematre2011].

## II. Étude des Pz21 et Pz26 sous contrainte mécanique

Dans cette partie, le dispositif de mesure précédent est étendu à la caractérisation de matériaux piézoélectriques aux propriétés hystérétiques. Ainsi, nous développons le banc de mesure à l'évaluation du déplacement électrique sous contrainte mécanique dans le cas des Pz21 et 26.

### II.1 Dispositif expérimental

#### II.1.1 Préparation du matériau

Dans cette partie, nous caractérisons 2 matériaux piézoélectriques fabriqués par la société Ferroperm (Danemark). Le choix de forme du matériau a été motivé par deux aspects :

- dès que le matériau est plus haut que large, on risque d'observer un phénomène de flambage,



- l'approximation de contrainte uniaxiale est considérée à partir d'une hauteur 3 fois supérieure à la largeur.

De manière à concilier ces deux éléments et avoir une déformation homogène, nous avons choisi des échantillons de forme cubique de 15 mm de côté. Ces matériaux sont polarisés dans la direction perpendiculaire à leurs surfaces électrodées, correspondant à la direction de compression.

Tableau VI.2 : Propriétés des Pz21 et Pz26.

	Pz21	Pz26
Constante diélectrique $\epsilon_{33}^T$ ( $/\epsilon_0$ )	3800	1300
Constante diélectrique $\epsilon_{33}$ ( $/\epsilon_0$ )	1980	700
Coefficient piézoélectrique $-d_{311}$ ( $10^{-12}$ C/N)	250	130
Coefficient piézoélectrique $d_{333}$ ( $10^{-12}$ C/N)	640	328
Densité volumique ( $\text{kg/m}^3$ )	7800	7700
Coefficient élastique de souplesse $s_{3333}$ ( $10^{-12}$ $\text{m}^2/\text{N}$ )	18	19.6
Coefficient élastique de souplesse $-s_{1133}$ ( $10^{-12}$ $\text{m}^2/\text{N}$ )	6.85	7.05
Coefficient de Poisson	0.38	0.35

Ces deux céramiques PZT possèdent une structure Pérovskite de classe de symétrie transverse isotrope. De par leurs propriétés diélectriques et piézoélectriques, le Pz21 est classé dans la catégories des matériaux mous, alors que le Pz26 appartient à la catégorie des matériaux durs.

Ces matériaux étant de forme cubique, il est beaucoup plus aisé de coller les jauges de déformation sur les 4 faces des matériaux pour mesurer les déformations longitudinale et transversales. Ici aussi, les déformations transversales sont égales, soit  $S_{11} = S_{22}$ . La mesure des dimensions de ces matériaux a montré une précision de l'ordre de 3 micromètres.

### II.1.2 Instrumentation

Parce que la planéité de ces matériaux électrodés est égale à celle du niobate de lithium poli, mais que les céramiques sont significativement plus souples que ce dernier, il n'est pas nécessaire d'insérer un élément aussi mou que le carton entre le plateau rotulé et l'échantillon. Pour effectuer la mesure du déplacement électrique, nous mesurons la quantité de charges qui migrent sur les surfaces électrodées de l'échantillon. Ainsi, nous insérons une électrode et un matériau isolant entre l'échantillon et le plateau rotulé. Différents auteurs utilisent des matériaux tels que l'alumine, qui possède une limite à la rupture de -2.2 GPa et une résistivité électrique de l'ordre de  $10^8$  MOhm cm pour isoler électriquement l'échantillon. Ce matériau est de nature fragile, et un défaut de planéité de l'ordre de quelques microns suffit à le casser. Ainsi, de manière à avoir un matériau résistif avec une surface d'électrode suffisamment fine, nous avons choisi d'utiliser du PCB FR4 (de marque CIF). Ce matériau possède lui aussi une très haute résistivité électrique  $8 \cdot 10^7$  MOhm cm et une limite à la rupture de -415 MPa. Moins rigide que l'alumine, il présente l'avantage de rester en zone élastique très longtemps dans la gamme de contrainte dans laquelle nous travaillons et permet ainsi d'adapter la force de manière plane sur l'échantillon et de combler un éventuel défaut de planéité. Les essais effectués ont tout de même montré que le PCB possède une déformation plastique de l'ordre de 8 microns sous -280 MPa. C'est pourquoi, ces matériaux ont été changés pour chaque essai. La taille des électrodes est considérée égale à celle de l'échantillon. Notons que l'utilisation de ce matériau ne peut dépasser des niveaux de contraintes supérieurs à -350 MPa, au risque de rentrer en zone plastique. Le dispositif de mesure est représenté sur la figure VI.6.

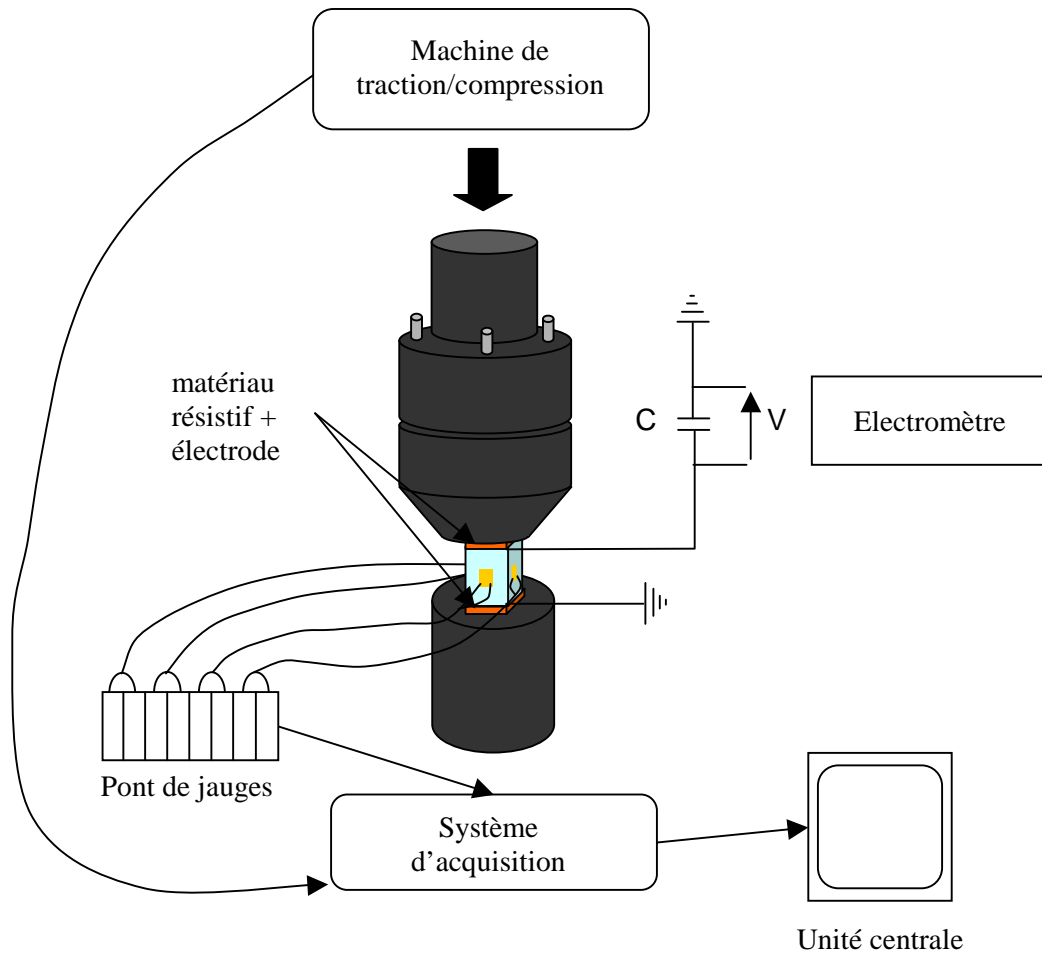


Figure VI.6 : Schéma du dispositif de mesure des déformations et du déplacement électrique d'un matériau piézoélectrique sous contrainte mécanique.

La mesure du déplacement électrique est évaluée en mesurant le flux de charge entre les deux électrodes. L'électrode inférieure étant reliée à la masse, le flux de charge est déterminé en mesurant la tension aux bornes du condensateur, relié d'un côté à l'électrode supérieure et de l'autre à la masse, soit :

$$\Delta Q = CV, \quad (\text{VI.3})$$

où  $C$  est la capacité du condensateur aux bornes duquel la tension  $V$  est mesurée. Cette capacité est de  $10 \mu\text{F}$ . Par convention, la décharge est indiquée par un  $\Delta Q$  négatif. L'état initial est pris comme référence.

La capacité statique d'un élément piézoélectrique se mesure comme :

$$C_0 = \frac{\epsilon_{33} S}{d}, \quad (\text{VI.4})$$

où  $S$  est la surface des électrodes et  $d$  l'épaisseur de l'échantillon. Ainsi, les capacités de nos échantillons de Pz21 et Pz26 sont respectivement de  $2.6 \cdot 10^{-10}$  F et  $9.2 \cdot 10^{-11}$  F, donc largement négligeable par rapport à la capacité de notre condensateur de mesure. La résistance du fil étant très faible, la constante de temps de décharge de l'échantillon dans la capacité est donc très faible.

Pour éviter tous phénomènes de décharge dans l'appareil de mesure, la tension aux bornes du condensateur est mesurée à l'aide d'un électromètre Keithley (6517b), qui possède une résistance interne de 200 TΩ. Ainsi, la capacité de mesure et la résistance étant toutes deux très grandes, la constante de temps de décharge de notre capacité est très largement supérieure au temps de mesure. On néglige donc tous phénomènes de décharge dans notre dispositif de mesure.

Le déplacement électrique dans l'échantillon est évalué en divisant la décharge par la surface des électrodes :

$$D = \frac{C V}{S}. \quad (\text{VI.5})$$

Les électrodes dépassant de moins d'un millimètre la taille de l'échantillon, nous considérons que les surfaces d'électrode sont égales aux surfaces métallisées des échantillons.

De manière à déterminer la polarisation initiale du matériau, nous effectuons un test sous contrainte maximum (au delà de la contrainte de saturation). Ainsi, la valeur de la polarisation initiale des échantillons de Pz21 est de  $0.175 \text{ C/m}^2$  et de  $0.21 \text{ C/m}^2$  pour les échantillons de Pz26. La valeur de la dépolarisation permet ensuite de quantifier la valeur de la polarisation en fonction de la contrainte mécanique.

### II.1.3 Mode de chargement

Les Pz21 et 26 possédant un comportement hystérétique, leurs déformations sont différentes à chaque cycle de charge/décharge. Ainsi, le mode de chargement est uniquement composé d'une charge, suivie d'une décharge. Les seuils de contrainte de saturation et les vitesses de charge et décharge ont été déterminés précédemment sur des échantillons identiques. Ainsi, la vitesse de chargement a été choisie égale à 4 minutes pour 10 kN (relativement lente) pour laisser aux domaines le temps de s'équilibrer. La vitesse de décharge a été choisie égale à 3 min pour 10 kN, (légèrement supérieure) car la relaxe du matériau est naturellement plus rapide. Les contraintes de saturation ont été observées à -255 MPa (-57.5 kN) pour le Pz21 et -280 MPa (-64 kN) pour le Pz26. La figure VI.7 représente les cycles de charge et décharge des deux matériaux.

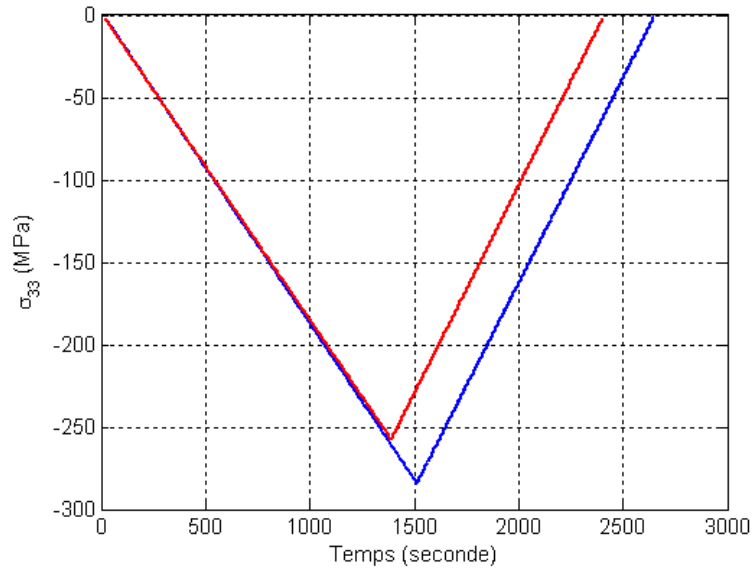


Figure VI.7 : Mode de charge et décharge du Pz21 (rouge) et du Pz26 (bleu).

Dans les deux cas, un préchargement de -2 MPa est effectué pour contrôler la planéité du dispositif via les valeurs indiquées par les jauges de déformation.

## II.2 Étude du Pz21 sous contrainte mécanique

### II.2.1 Mesure du déplacement électrique et évaluation du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ sous contrainte mécanique

La figure VI.8 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique dans un échantillon de Pz21, à champ électrique nul.

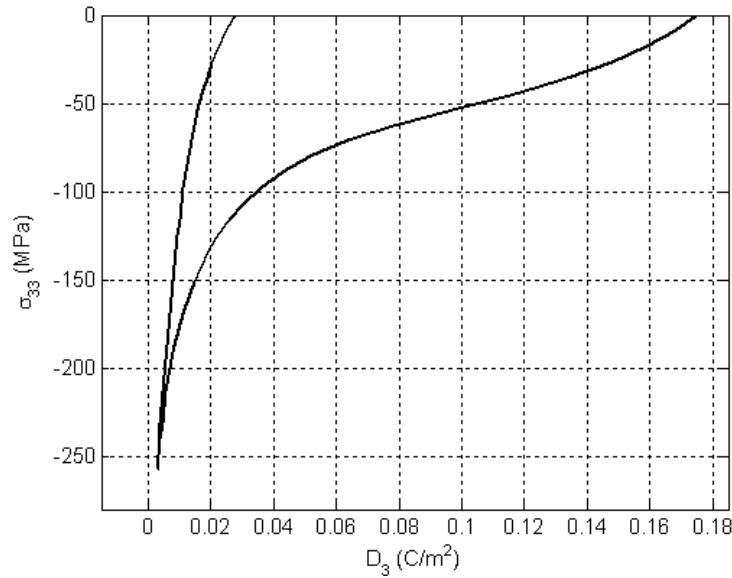


Figure VI.8 : Mesure du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Initialement, le matériau possède une polarisation assez faible  $P_0 = 0.175 C/m^2$ . Nous observons une dépolarisation rapide jusque -70 MPa, puis un ralentissement assez franc pendant lequel la vitesse de dépolarisation devient de plus en plus constante en se rapprochant de la contrainte de saturation  $\sigma_{sat} = -255 MPa$ . Le déplacement électrique à la saturation est alors égale à  $D_{sat} = 0.003 C/m^2$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la repolarisation est d'abord très faible, puis augmente légèrement près de -75 MPa jusqu'à une valeur de polarisation résiduelle égale à  $P^{res} = 0.028 C/m^2$ . Cette repolarisation est évaluée à  $D_{rep} = 14.4\%$ . Ces observations sont en bon accord avec le caractère mou du Pz21.

Cette figure ne révèle aucun problème de mesure et montre une très bonne cohérence avec les résultats expérimentaux étudiés dans le chapitre V.

De la figure précédente, nous extrayons l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.9).

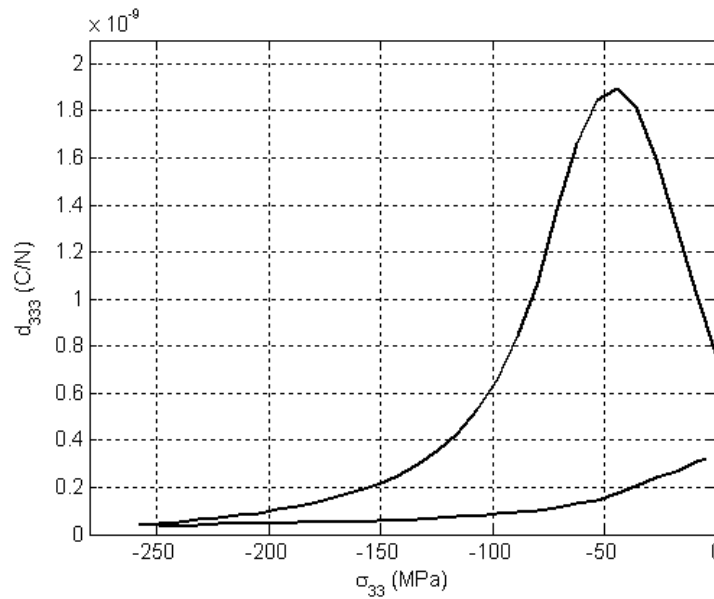


Figure VI.9 : Évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  est de  $750 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2$ , soit un écart de 14% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant. Notons que les données du constructeur sont effectuées 24h après la polarisation de l'échantillon sur des matériaux de forme barreau avec une précision de 10% à très faible niveau de contrainte mécanique. Notre valeur est mesurée à une valeur de précontrainte de -2 MPa avec une instrumentation dédiée à l'application de niveaux de contrainte plus élevés sur des cubes. De plus, d'autres auteurs [Hwang1995-Chen1998-Fan1999] ont eux aussi trouvés de grands écarts de mesures (allant jusqu'à 100%) des coefficients par cette méthode. Par ailleurs, la mesure de ce coefficient est fortement dépendante du ratio hauteur/largeur du matériau [Barzegar2002-Barzegar2004], les écarts pouvant être de 30%. Ainsi, la valeur mesurée reste proche de la valeur théorique et conforte la validité du dispositif expérimental.

Dès le début de la compression, le coefficient piézoélectrique augmente rapidement, avec un maximum au niveau de la contrainte coercitive  $\sigma_c = -50 \text{ MPa}$ . La valeur du coefficient est alors 2.7 fois plus importante que la valeur initiale. Une fois cette contrainte franchie, le coefficient diminue rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. A la contrainte de saturation, le coefficient est très faible (17.5 fois plus petit que le coefficient initial). Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord très lentement, puis beaucoup plus rapidement près de la contrainte coercitive. La valeur finale du coefficient est deux fois plus petite que la valeur initiale.

L'ensemble de ces considérations est en bon accord avec le caractère mou de la céramique.

## II.2.2 Mesure de la déformation longitudinale et évaluation du coefficient de souplesse $s_{3333}$ associé

La figure VI.10 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale dans un échantillon de Pz21, à champ électrique nul.

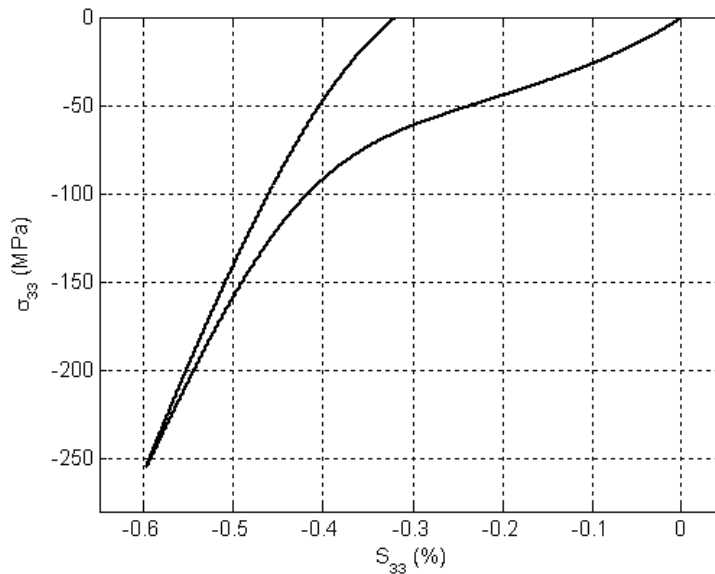


Figure VI.10 : Mesure de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Nous observons une déformation rapide jusque -70 MPa, puis un ralentissement de plus en plus important en se rapprochant de la contrainte de saturation où la vitesse de déformation est constante. La déformée est alors égale à  $S_{33}^{sat} = 0.59\%$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la vitesse de déformation est d'abord faible puis augmente légèrement à partir de -70 MPa. Une fois le mode libre atteint, la déformation résiduelle longitudinale est de  $S_{33}^{res} = 0.32\%$ . Ainsi, cette déformée correspond à 54.6% de la déformation de saturation. Notons que la non-linéarité du relâchement est faible, en accord avec la faible repolarisation du matériau. Ici aussi, cette évolution est en bon accord avec le caractère mou du Pz21.

De nouveau, cette figure ne révèle aucun problème de mesure et montre une très bonne cohérence avec les résultats expérimentaux étudiés dans le chapitre V.

De la figure précédente, on extrait l'évolution du coefficient de souplesse  $s_{3333}$  associé sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.11).



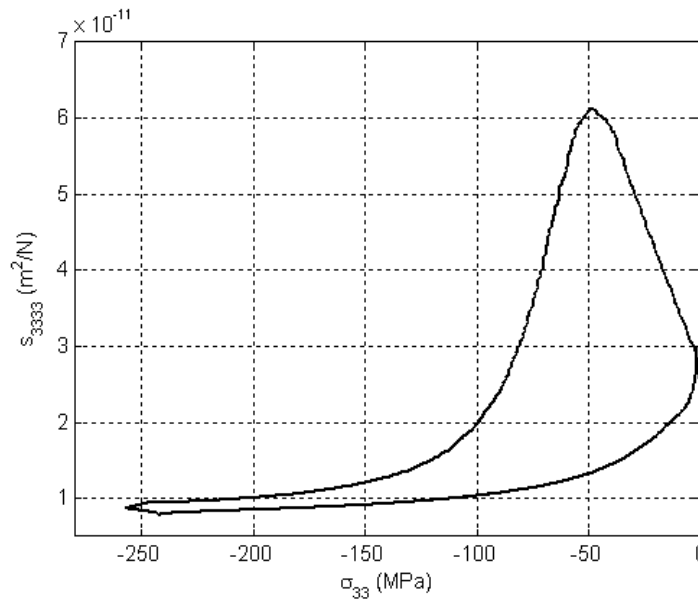


Figure VI.11 : Évolution du coefficient de souplesse  $s_{3333}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient  $s_{3333}$  est de  $2.36 \cdot 10^{-11}$  m<sup>2</sup>/N, soit un écart de 31% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant. Notons que cette valeur est calculée dans des conditions de polarisations et des géométries différentes des nôtres, et que l'entreprise indique une précision de 5%. Ici aussi, le préchargement de -2 MPa ainsi que le dimensionnement de l'instrumentation et la géométrie de notre échantillon ne permettent pas de retrouver une valeur du coefficient de souplesse très précise. Cependant, d'autres auteurs [Hwang1995-Chen1998-Fan1999] ont eux aussi trouvé de grands écarts de mesures des coefficients de souplesse lors de leurs mesures de comportement hystérétiques. Ainsi, la précision de notre mesure de ce coefficient est peu élevée, mais révèle que le matériau évolue rapidement à faible contrainte. Par ailleurs, nous sommes assez près de la valeur théorique pour considérer le bon fonctionnement de notre dispositif.

Le coefficient élastique augmente d'abord très rapidement en début de chargement, puis moins rapidement jusqu'à la contrainte coercitive. Notons que cette valeur de contrainte est la même que lors de l'évolution du coefficient piézoélectrique, ce qui est une nouvelle validation de l'hypothèse de base de notre modèle. La valeur du coefficient est alors 2.5 fois plus importante que la valeur initiale. Une fois cette contrainte franchie, le coefficient diminue rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. A ce niveau, le coefficient est faible (2.7 fois plus petit que le coefficient initial). A cet endroit, il apparaît une légère non-linéarité dans la mesure. Ce défaut n'était pas visible dans l'évolution de la déformation, car les niveaux de déformations évoluaient peu, mais il traduit une discontinuité lors de l'inversion de sens de la contrainte qui semble engendrer une fluctuation dans l'évolution de la déformation.

Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord très lentement, puis beaucoup plus rapidement en se rapprochant de la contrainte coercitive. La valeur finale du coefficient à l'état libre est proche de la valeur initiale, en accord avec ce qui a été observé sur les matériaux mous étudiés au chapitre V.

### II.2.3 Mesure de la déformation transversale et évaluation du coefficient de souplesse $s_{1133}$ associé

La figure VI.12 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale dans un échantillon de Pz21, à champ électrique nul.

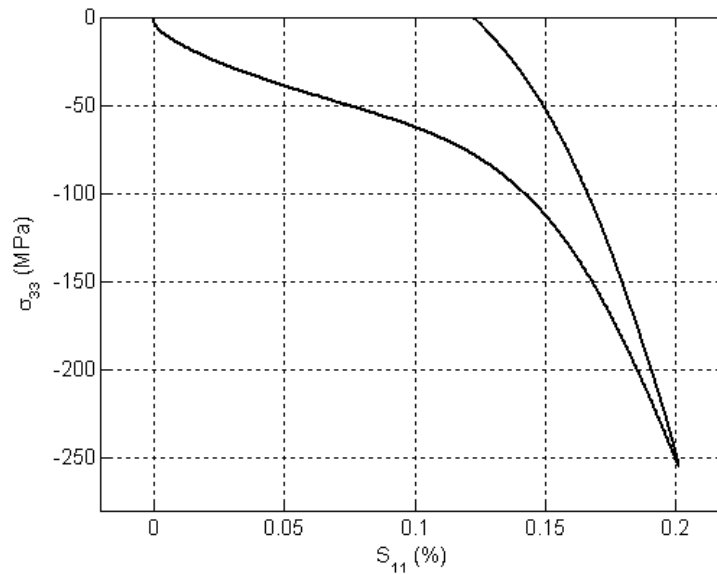


Figure VI.12 : Mesure de la déformation transversale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Nous observons une déformation rapide jusque -70 MPa, bien que légèrement plus lente que dans le cas de la déformée longitudinale, puis un ralentissement après lequel la déformée devient rapidement constante jusqu'à la contrainte de saturation. La déformée est alors égale à  $S_{11}^{sat} = 0.201\%$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la vitesse de déformation est d'abord faible puis augmente près de -70 MPa. En fin de cycle, la déformation transversale résiduelle est de  $S_{11}^{res} = 0.122\%$ . Le phénomène de relâchement est donc relativement faible, en accord avec la faible repolarisation du matériau. Ainsi, la déformation résiduelle correspond à 60.6% de la déformation de saturation. Il apparaît que la déformation résiduelle est relativement plus importante

transversalement que longitudinalement, ce qui contredit l'hypothèse de déformation rémanente isochore.

Cette figure ne révèle aucun problème de mesure et reste en accord avec les observations faites au chapitre V.

De la figure précédente, nous extrayons l'évolution du coefficient de souplesse associé  $s_{1133}$  sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.13).

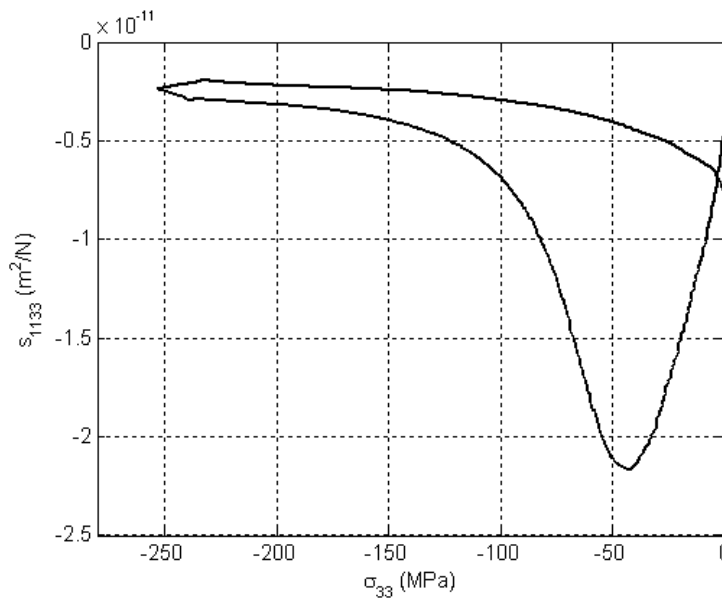


Figure VI.13 : Évolution du coefficient de souplesse  $s_{1133}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient  $s_{1133}$  est de  $4.8 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ , soit un écart de 29% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant. Comme dans le cas du coefficient  $s_{3333}$ , la précision de notre mesure de ce coefficient est dégradée par le préchargement, le dimensionnement de notre instrumentation et la géométrie de notre matériau. Ainsi, cet écart montre que le coefficient de souplesse évolue dès le début, comme observé dans les autres matériaux polydomaines. Cependant, nous sommes assez près de la valeur théorique pour considérer le bon fonctionnement de notre dispositif.

Raisonnant en valeur absolue, le coefficient élastique augmente d'abord rapidement jusqu'au même niveau de contrainte coercitive. La valeur du coefficient est alors 4.5 fois plus importante que la valeur initiale. Ainsi, la valeur du coefficient  $s_{1133}$  évolue bien plus que le coefficient  $s_{3333}$ . Au-delà de cette contrainte, le coefficient diminue rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. Le coefficient est alors faible (2 fois plus petit que le

coefficient initial), mais a moins diminué que le coefficient  $s_{3333}$ . On note qu'à cet endroit, la non-linéarité de mesure est aussi visible.

Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord lentement, puis plus rapidement près de la contrainte coercitive. La valeur finale du coefficient à l'état libre est proche de la valeur initiale comme dans le cas longitudinal, en accord avec ce qui a été observé sur les matériaux mous étudiés au chapitre V.

## II.2.4 Évolution du coefficient de Poisson sous contrainte mécanique

Des mesures de déformations longitudinale et transversale, nous déduisons la valeur du coefficient de Poisson en faisant le rapport des deux modes de déformation en fonction de la contrainte mécanique appliquée, à champ électrique nul.

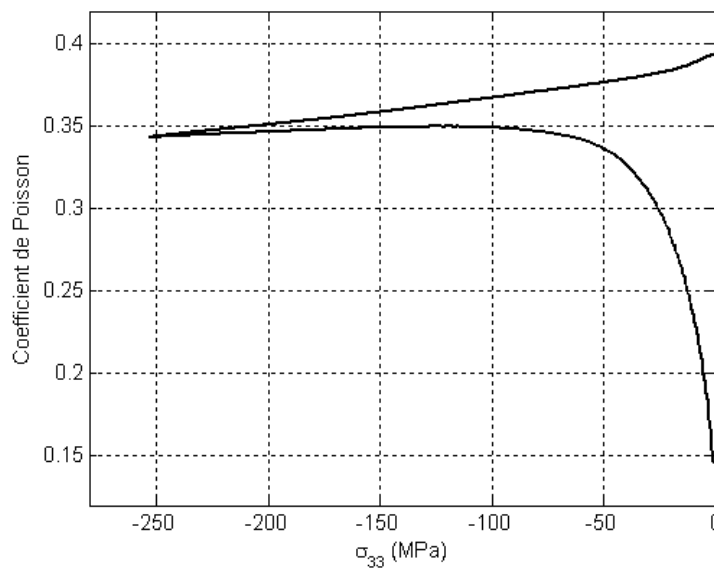


Figure VI.14 : Évolution du coefficient de Poisson en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz21.

Cette figure montre clairement que le coefficient de Poisson évolue significativement sous compression mécanique. Ceci est en accord avec les différences entre maximums de coefficient de souplesse observé. Dans le cas de ce matériau, le coefficient de Poisson est d'abord très faible, ce qui implique que le matériau se déforme beaucoup plus longitudinalement que transversalement. La valeur indiquée par le constructeur est significativement plus élevée, mais ici aussi, cette dernière se mesure sur des échantillons de géométrie différente en mesurant les coefficients de souplesse précédents. Dans notre cas, l'évaluation de ce coefficient est très sensible à la mesure de chacune

des déformations et les erreurs liées à la géométrie et au dimensionnement du dispositif occasionne un écart significatif. De plus, le fabricant ne fournit aucun élément quant à la précision de sa mesure. Cependant, la valeur du coefficient augmente rapidement jusqu'à la contrainte coercitive et ralentit ensuite vers une valeur stable de 0.35, très proche de la valeur indiquée par le fabricant. Lors du relâchement, ce coefficient augmente d'abord lentement, puis plus rapidement en fin de décharge.

Ainsi, il apparaît que le coefficient de Poisson ne peut être considéré constant au cours du cycle de charge et décharge. De plus, son évolution est proche de celle des autres coefficients du matériau, avec un point d'inflexion près de la contrainte coercitive, et une évolution faible près de la saturation. Ainsi, la non-linéarité de son évolution semble clairement liée à l'évolution des domaines du matériau, donc à l'évolution de sa déformation rémanente. Ainsi, l'approximation de déformation rémanente isochore ne peut être considérée dans le cas de ce matériau et nous pouvons supposer une loi d'évolution analogue à celle proposée dans la description des phénomènes rémanents.

## II.3 Mesure du déplacement électrique et des déformations du Pz26 sous contrainte mécanique

### II.3.1 Mesure du déplacement électrique et évaluation du coefficient piézoélectrique $d_{333}$ sous contrainte mécanique

La figure VI.15 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction du déplacement électrique dans un échantillon de Pz26, à champ électrique nul.

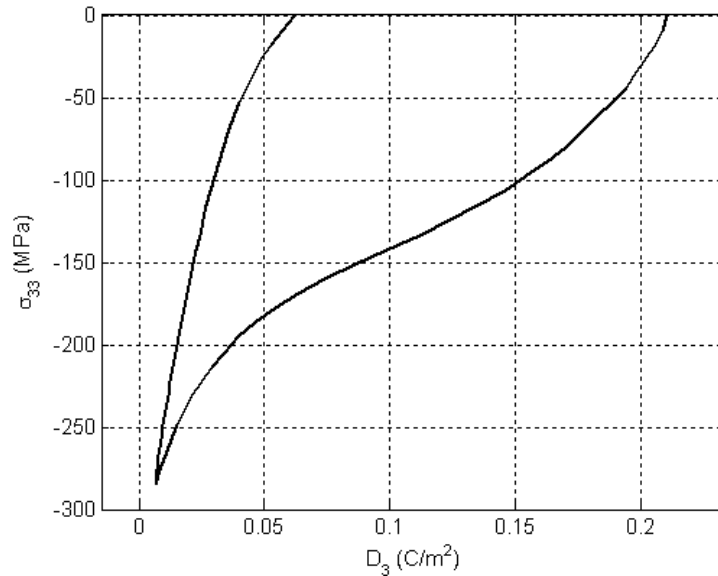


Figure VI.15 : Mesure du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Initialement, le matériau possède une polarisation plus importante que celle du Pz21, mais peu élevée, soit  $P^0 = 0.21 C/m^2$ . En comparaison du précédent échantillon, on observe une dépolarisation plus rapide jusque -150 MPa, puis un ralentissement plus lent au bout duquel la dépolarisation devient constante près de la contrainte de saturation évaluée à  $\sigma_{sat} = -280$  MPa. Le déplacement électrique est alors  $D_{sat} = 0.007 C/m^2$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la repolarisation est significativement plus rapide et s'accélère près de -120 MPa jusqu'à une valeur de polarisation résiduelle  $P^{res} = 0.061 C/m^2$ . Cette repolarisation est plus importante que celle du Pz21 et évaluée à  $D_{rep} = 26.7\%$ . Ces observations sont en bon accord avec le caractère dur du Pz26.

Une fois de plus, cette figure ne révèle aucun problème de mesure et montre une très bonne cohérence avec les résultats expérimentaux étudiés dans le chapitre V. Cette deuxième mesure valide notre dispositif expérimental de suivi du déplacement électrique en fonction de la contrainte mécanique.

De la figure précédente, nous extrayons l'évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.16).

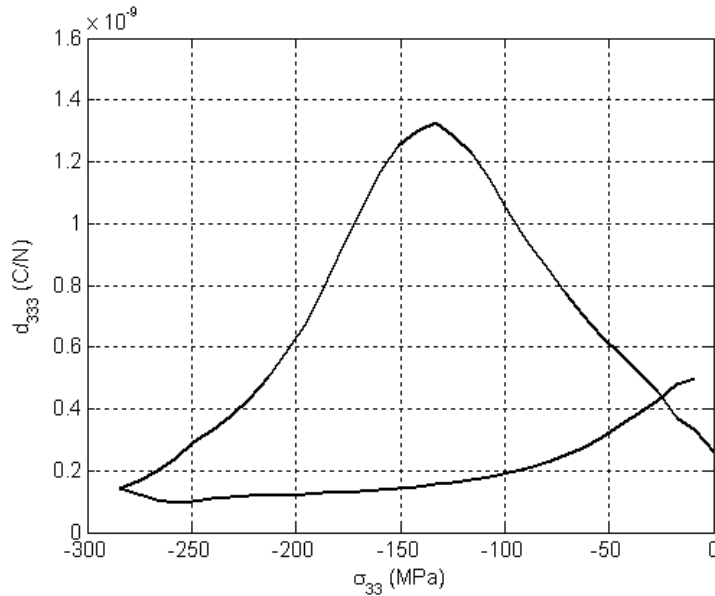


Figure VI.16 : Évolution du coefficient piézoélectrique  $d_{333}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient piézoélectrique est de  $260 \cdot 10^{-12}$  C/m<sup>2</sup>, soit un écart de 20% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant, donc tout à fait acceptable aux vues de la configuration de notre dispositif.

Dès le début de la compression, le coefficient piézoélectrique augmente rapidement, avec un maximum au niveau de la contrainte coercitive  $\sigma_c = -140$  MPa. La valeur du coefficient piézoélectrique est alors 5 fois plus importante que la valeur initiale. Une fois cette contrainte franchie, le coefficient diminue rapidement avec une vitesse qui baisse lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. A ce niveau, le coefficient est faible (1.8 fois plus petit que le coefficient initial), mais proportionnellement plus élevé que dans le cas du Pz21. Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord très lentement, puis beaucoup plus rapidement près de la contrainte coercitive. La valeur finale du coefficient est deux fois plus élevée que la valeur initiale.

L'ensemble de ces considérations est en bon accord avec le caractère dur de la céramique.

### II.3.2 Mesure de la déformation longitudinale et évaluation du coefficient de souplesse $s_{3333}$ associé

La figure VI.17 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation longitudinale dans un échantillon de Pz26, à champ électrique nul.

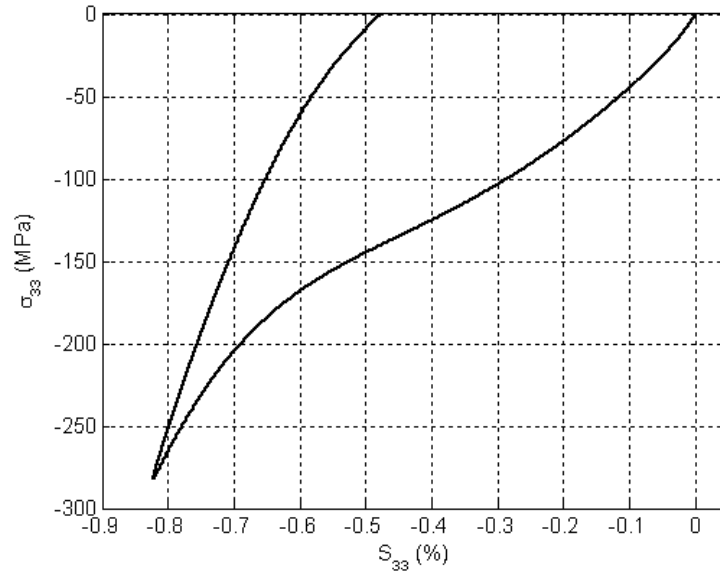


Figure VI.17 : Mesure de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Nous observons une déformation rapide jusque -140 MPa, puis un lent ralentissement après lequel la vitesse de déformation devient constante en se rapprochant de la contrainte de saturation. La déformée est alors égale à  $S_{33}^{sat} = 0.82\%$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la déformation est relativement rapide (en accord avec la repolarisation relativement rapide) puis augmente près de -100 MPa jusqu'à une valeur de déformation résiduelle  $S_{33}^{res} = 0.48\%$ . Ainsi, la déformée résiduelle correspond à 58.5% de la déformation de saturation. La non-linéarité du relâchement est légèrement plus importante que dans le cas du Pz21, en accord avec la repolarisation plus importante du matériau. Ici aussi, cette évolution est en bon accord avec les résultats expérimentaux observés dans le chapitre V, et confirme le caractère dur du Pz26.

De la figure précédente, nous extrayons l'évolution du coefficient de souplesse associé  $s_{3333}$  sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.18).



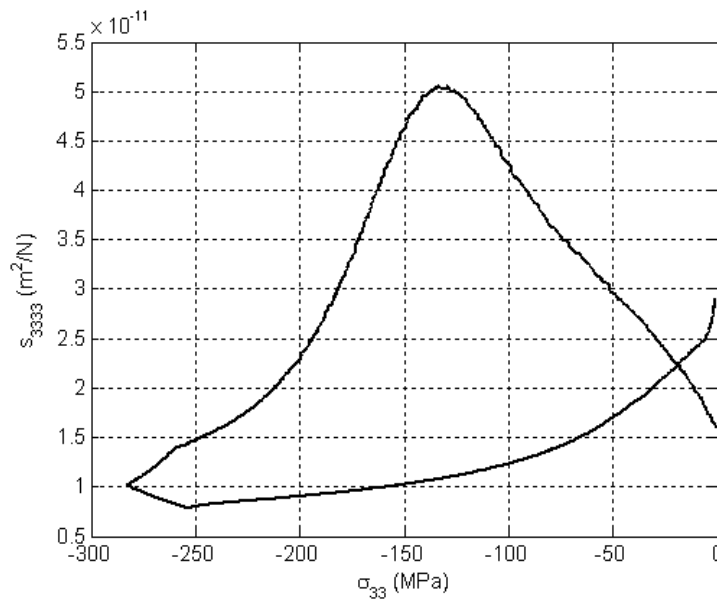


Figure VI.18 : Évolution du coefficient de souplesse  $s_{3333}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient  $s_{3333}$  est de  $1.6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ , soit un écart de 18% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant acceptable dans notre configuration. Dans le cas de ce matériau, l'augmentation du coefficient est moins rapide et permet donc une mesure plus précise du coefficient. Le coefficient élastique augmente jusqu'à la contrainte coercitive évaluée lors de l'évolution du déplacement électrique. La valeur du coefficient est alors 3.1 fois plus importante que la valeur initiale. Une fois cette contrainte franchie, le coefficient diminue rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. Le coefficient est alors faible (1.6 fois plus petit que le coefficient initial). La non-linéarité due à l'inversion de la charge se retrouve à nouveau.

Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord lentement, puis beaucoup plus rapidement près de la contrainte coercitive. La valeur finale du coefficient à l'état libre est 1.8 fois plus élevée que la valeur initiale, en accord avec ce qui a été observé sur les matériaux durs étudiés au chapitre V.

### II.3.3 Mesure de la déformation transversale et évaluation du coefficient de souplesse $s_{1133}$ associé

La figure VI.19 représente l'évolution de la contrainte mécanique en fonction de la déformation transversale dans un échantillon de Pz26, à champ électrique nul.

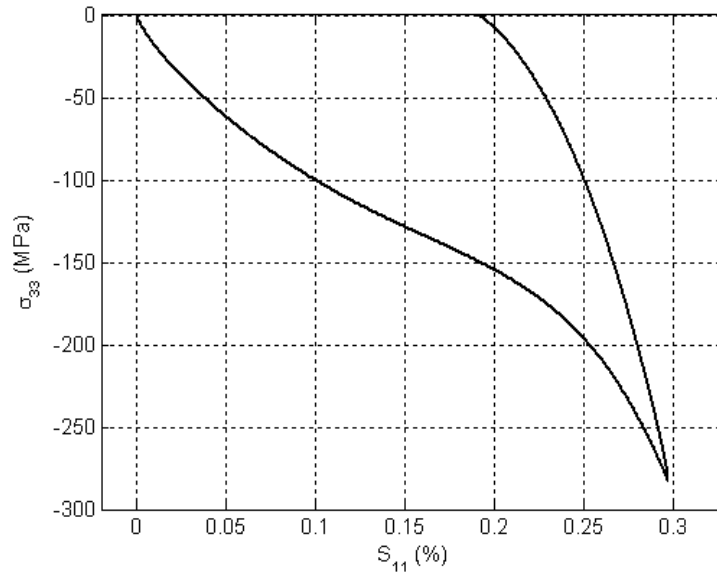


Figure VI.19 : Mesure de la déformation transversale en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Nous observons une déformation rapide jusque -130 MPa, bien que légèrement plus lente que dans le cas de la déformée longitudinale, puis un ralentissement après lequel la déformée devient constante près de la contrainte de saturation. La déformée est alors égale à  $S_{11}^{sat} = 0.297\%$ . Lors de la relaxation de la contrainte, la déformation est d'abord faible puis augmente près de -140 MPa jusqu'à une valeur de déformation résiduelle  $S_{11}^{res} = 0.19\%$ . Ici aussi, la non-linéarité de relâchement est faible, en accord avec la faible repolarisation du matériau, mais plus importante que dans le cas du Pz21. Ainsi, la déformée résiduelle correspond à 63.9% de la déformation de saturation. Il apparaît donc que la déformation résiduelle est relativement plus importante transversalement que longitudinalement, ce qui contredit ici aussi l'hypothèse de déformation isochore.

De la figure précédente, nous extrayons l'évolution du coefficient de souplesse associé  $s_{1133}$  sous contrainte mécanique, en l'absence de champ électrique (figure VI.20).

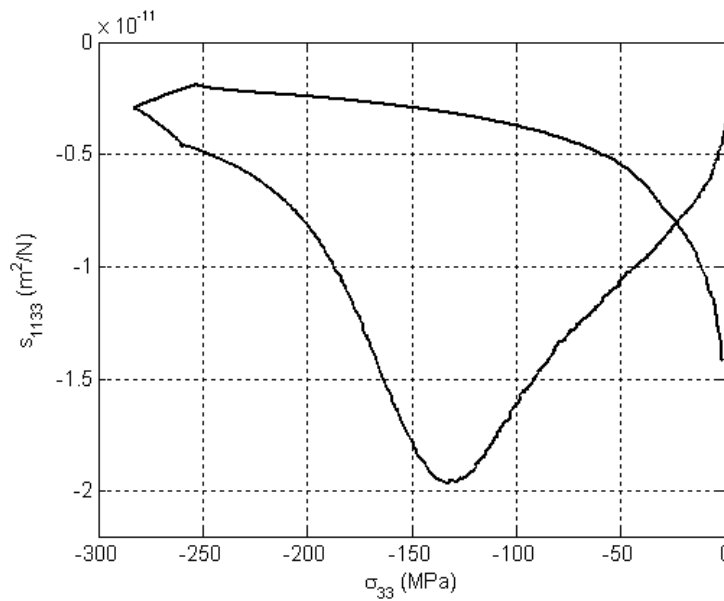


Figure VI.20 : Évolution du coefficient de souplesse  $s_{1133}$  en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26.

Cette figure montre que la valeur initiale du coefficient  $s_{1133}$  est de  $3.6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2\text{/N}$ , soit un écart de 48% par rapport à la valeur indiquée par le fabricant, mais acceptable dans notre configuration. Par ailleurs, cet écart montre que le coefficient de souplesse évolue dès le début, comme observé dans les autres matériaux étudiés. Cependant, nous sommes assez près de la valeur théorique pour considérer le bon fonctionnement de notre dispositif.

Raisonnant en valeur absolue, le coefficient élastique augmente rapidement jusqu'au même niveau de contrainte coercitive évaluée lors de l'évolution du déplacement électrique. La valeur du coefficient est alors 5.5 fois plus importante que la valeur initiale. Ainsi, la valeur du coefficient  $s_{1133}$  évolue légèrement plus que le coefficient  $s_{3333}$ . Une fois cette contrainte franchie, le coefficient diminue rapidement, puis de plus en plus lentement en se rapprochant de la contrainte de saturation. Le coefficient est alors faible et proche du coefficient initial, alors qu'il était significativement inférieur dans le cas du coefficient  $s_{3333}$ . Notons qu'à cet endroit, la non-linéarité de mesure est aussi visible.

Lors de la relaxation de la contrainte, le coefficient croît d'abord lentement, puis plus rapidement près de la contrainte coercitive. Comme dans le cas longitudinal, la valeur finale du coefficient à l'état libre est 3.8 fois plus élevée que la valeur initiale, en accord avec ce qui a été observé sur les matériaux durs étudiés au chapitre V.

### II.3.4 Évolution du coefficient de Poisson sous contrainte mécanique

Des mesures de déformation longitudinale et transversale, nous déduisons la valeur du coefficient de Poisson en faisant le rapport des deux modes de déformations en fonction de la contrainte mécanique appliquée, à champ électrique nul.

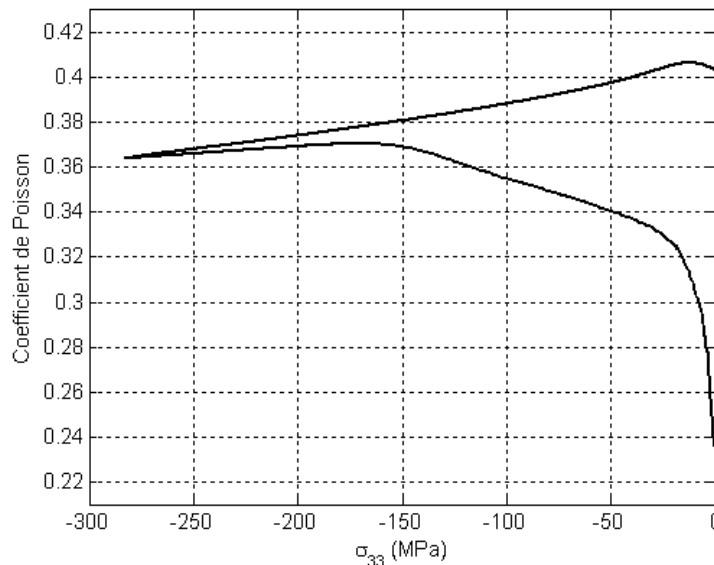


Figure VI.21 : Évolution du coefficient de Poisson en fonction de la contrainte mécanique à champ électrique nul dans un Pz26

Cette figure montre clairement que le coefficient de Poisson évolue significativement sous contrainte mécanique, en accord avec les différences d'évolutions observées entre les deux coefficients de souplesse. Dans le cas de ce matériau, le coefficient de Poisson est d'abord faible, ce qui implique que le matériau se déforme d'avantage longitudinalement que transversalement. Il augmente ensuite très rapidement, puis plus lentement jusqu'à la contrainte coercitive et ralentit ensuite franchement vers une valeur stable de 0.362 au niveau de la contrainte de saturation. Lors du relâchement, ce coefficient augmente d'abord lentement, puis plus rapidement en fin de décharge.

Ainsi, comme dans le cas du Pz21, nous observons que le coefficient de Poisson évolue peu au-delà de la contrainte coercitive, mais ne peut être considéré constant en dessous de cette limite. Ici aussi, la non-linéarité de l'évolution de ce coefficient semble liée à l'évolution des domaines du matériau, donc à sa déformation rémanente. Ainsi, l'approximation de déformation rémanente isochoire ne peut être considérée dans le cas de ces matériaux, ce qui confirme la nouvelle hypothèse d'une évolution du coefficient de Poisson liée aux mouvements de domaines.

## II.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré la précision de notre dispositif de mesure des déformations sous contrainte mécanique. L'ensemble des évolutions de deux modes de déformations a été correctement évalué. Les valeurs des coefficients de chacun des matériaux ont été retrouvées avec une précision moyenne de 30%. Les deux matériaux étudiés se déformant très vite en début de cycle, on attribue cette imprécision à la zone de préchargement de -2 MPa qui nous empêche de mesurer ces valeurs à très faible contrainte, au dimensionnement de la machine de force qui est dédiée à l'application de plus grosse force, mais aussi à la géométrie (rapport hauteur/largeur) des échantillons qui n'est pas idéale pour la mesure de ces coefficients. De plus, nous avons observé de légères non-linéarités dans les vitesses de déformations au moment du changement de mode entre charge et décharge, ce qui engendre des imprécisions près de la contrainte de saturation. Par ailleurs, les évolutions des deux matériaux sont cohérentes avec la théorie et les observations faites sur les autres matériaux dans le chapitre V.

Le bon accord des évolutions des déplacements électriques avec la théorie valide notre dispositif d'évaluation du déplacement électrique sous contrainte mécanique. La précision sur la mesure du coefficient piézoélectrique est proche de 17%. Ces résultats ont permis de valider la mesure de déplacement électrique et le dispositif qui lui est dédié. L'ensemble de ces résultats est en bon accord avec les remarques effectuées au chapitre V sur les autres matériaux étudiés.

Cependant, la comparaison des évolutions des coefficients de souplesse pour les deux matériaux a montré que les paramètres de chacun des matériaux évoluent de la même manière, mais pas dans les mêmes proportions. Cette observation a été confirmée par l'étude de l'évolution du coefficient de Poisson des deux matériaux. Ainsi, il apparaît que ce coefficient peut-être considéré constant au-delà de la contrainte coercitive, donc quand les domaines sont bloqués et la polarisation très faible. Mais inversement, le coefficient de Poisson évolue très vite avant la contrainte coercitive en compression et après cette contrainte en relâchement. Cette non-linéarité est donc attribuée aux mouvements de domaines, ce qui invalide l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique faite par d'autres auteurs et admise dans notre modèle.

Ainsi, nous avons montré au chapitre V que la déformation rémanente piézoélectrique peut-être considérée isochore, mais que l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique était plus discutable. Nos mesures confirment cette remarque et nous permettent de supposer une évolution de la déformation rémanente ferroélastique non isochore. Par ailleurs Cao et Evans [Cao1993] ont montré que le coefficient de Poisson de matériaux antiferroélectriques sous contrainte mécanique varie significativement sous contrainte mécanique, ce qui confirme cette nouvelle hypothèse. De plus, nos observations montrent une grande analogie entre l'évolution du

coefficient de Poisson et les mouvements de domaines. Ainsi, nous pouvons supposer une loi d'évolution de la déformation rémanente ferroélastique transversale propre et analogue à celles des autres modes de déformation rémanente. Cette constatation permet donc de corriger un élément fondamental de notre modèle.

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons développé la mise en place du dispositif expérimental permettant la mesure des déformations longitudinale, transversales et du déplacement électrique sous contrainte mécanique. La précision des valeurs mesurées sur le niobate de lithium et les deux PZT permet de valider notre matériel et ses réglages avec une exactitude significative.

Nous avons montré que les courbes d'évolution des déformations longitudinale et transversales du niobate de lithium suivent une loi caractéristique d'une déformation élastique d'un matériau fragile, avec une limite à la rupture se confondant avec la limite élastique mesurée à -105 MPa dans le plan de coupe le plus dur. Cette limite étant largement dépendante du matériau, de sa géométrie, nous considérons une limite à la rupture légèrement supérieure de -110 MPa. Les valeurs des coefficients de souplesse ont été retrouvées avec une précision moyenne de 8%. Cet écart est en majeure partie expliqué par la géométrie de notre échantillon qui n'est pas optimale pour la mesure de ces paramètres.

Le bon accord des évolutions des déplacements électriques des deux PZT a permis d'évaluer les coefficients piézoélectriques et élastiques de chacun des matériaux avec des précisions respectives de 17% et 30%. Ces écarts sont attribués aux mouvements de domaines rapides de ces matériaux mais aussi à la géométrie (rapport hauteur/largeur) de nos échantillons qui n'est pas idéale pour la mesure de ces coefficients. De plus, nous avons observé de légères non-linéarités dans les vitesses de déformations au moment du changement de mode entre charge et décharge, ce qui engendre de légères imprécisions près de la contrainte de saturation. Par ailleurs, les évolutions de ces paramètres sont en bon accord avec la théorie et les observations faites sur les autres matériaux dans le chapitre V. Cependant, la comparaison des évolutions des coefficients de souplesse pour les deux PZT a montré que les paramètres de chacun des matériaux évoluaient de la même manière, mais pas dans les mêmes proportions. Cette observation a été confirmée par l'étude de l'évolution des coefficients de Poisson qui est non négligeable et semble liée aux mouvements de domaines, ce qui invalide l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique. Mettant en parallèle notre conclusion du chapitre V qui valide l'hypothèse de déformation rémanente piézoélectrique, avec des travaux d'autres auteurs, nous pouvons considérer

que l'évolution de la déformation rémanente ferroélastique est non isochore. L'évolution du coefficient de Poisson montrant une grande analogie avec les mouvements de domaines, nous pouvons supposer une loi d'évolution de la déformation rémanente ferroélastique transversale propre et analogue à celles des autres modes de déformation rémanente. Cette constatation nous permet de corriger un élément fondamental de notre modèle.

## Conclusion générale

Ce travail de thèse a porté sur la compréhension, la modélisation et l'évaluation expérimentale des propriétés électro-acoustiques de structures piézoélectriques soumises à une contrainte statique de type électrique ou mécanique. Dans un premier temps, nous avons décrit les origines et les intérêts des contraintes résiduelles (précontraintes), ainsi que leurs influences sur les propriétés classiques des matériaux. Au travers de la description de l'effet piézoélectrique (direct et inverse) et des différents types de matériaux piézoélectriques, nous avons étudié les changements de polarisation et l'ingénierie des domaines afin de comprendre comment ces matériaux se polarisent macroscopiquement. Nous avons ensuite étudié les modes de fabrication ainsi que les propriétés et structures des monocristaux et des céramiques piézoélectriques. Nous avons aussi fait l'état des connaissances quant aux matériaux piézoélectriques soumis à des contraintes électrique ou mécanique. De plus, nous nous sommes étendus sur les mécanismes de changement de polarisation et de déformations dans ces matériaux.

Dans le second chapitre, nous avons évalué les vitesses de propagation d'une onde plane ainsi que le coefficient de couplage en mode plaque dans un matériau piézoélectrique au comportement non hystérétique soumis à une précontrainte statique de type électrique ou mécanique. Nous avons défini les différentes expressions des tenseurs de déformation et contraintes dans les deux systèmes de coordonnées de l'étude (statique et prédéformé). Nous avons développé les relations entre ces tenseurs dans un solide élastique, puis dans un matériau piézoélectrique au second ordre. Dans un deuxième temps, nous avons décrit les expressions des équations de la dynamique et des équations constitutives d'un matériau piézoélectrique sous précontrainte statique, de type électrique ou mécanique au même ordre. Le coefficient de couplage en mode plaque ainsi que les équations de propagation d'une onde plane dans un matériau piézoélectrique sous contrainte électrique et mécanique ont été développées dans les deux systèmes de coordonnées. Nous avons montré que l'écart entre les expressions de vitesses définies dans chacun des systèmes de coordonnées est directement proportionnel à la prédéformation longitudinale, et que cet écart entre expressions de coefficient de couplage est largement négligeable.

Dans le troisième chapitre, nous avons exploité ce modèle sur le niobate de lithium dans différents plans de coupe et dans les 2 systèmes de coordonnées. Les contraintes mécanique et électrique maximales utilisées correspondent respectivement à la limite élastique du matériau, soit



$\pm 110$  MPa et au champ électrique coercitif, soit  $\pm 17.5$  MV/m. Cette étude a montré que la non-linéarité de déformation longitudinale n'excède pas 0.8% sous contrainte mécanique, mais atteint 22.5% sous contrainte électrique (à déformation très faible). Les écarts maximums entre les différents tenseurs de contrainte mécanique sont observés en étirement, mais n'excèdent pas 0.108%. L'étude de des évolutions de vitesses dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle d'élévation  $\theta$ , pour des valeurs d'angle azimutal  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ . Cette étude a montré que les différences entre le mode libre et sous contraintes des vitesses longitudinale et transversales pour  $\varphi = 0^\circ$  sont inférieures à 19 m/s (+0.26%) et 10 m/s (+0.24%) dans le cas mécanique, et inférieures à 19 m/s (+0.26%) et 9 m/s (+0.18%) dans le cas électrique. Dans le plan  $\varphi = 90^\circ$ , ces écarts sont respectivement de 26 m/s (+0.35%) et 3.2 m/s (+0.08%) sous contrainte mécanique, et de 33 m/s (+0.44%) et 9 m/s (0.21%) sous contrainte électrique. Ainsi, il apparaît que les effets non-linéaires des contraintes mécanique et électrique sur les 3 modes de vitesse sont d'un ordre comparable. Par ailleurs, pour les deux types de contrainte, la différence de vitesse entre systèmes de coordonnées est toujours inférieure à 0.08%, donc négligeable, en bon accord avec nos calculs. De plus, différentes singularités d'évolution des vitesses ont été observées dans le cas des vitesses transversales. L'étude de l'évolution du coefficient de couplage en mode plaque dans les deux systèmes de coordonnées a été faite en fonction de l'angle  $\theta$  pour des valeurs de  $\varphi = 0^\circ$  et  $90^\circ$ . Sous contrainte mécanique, cette étude a montré que le  $k_t$  croît jusqu'à +0.69% et +1.1% respectivement. Sous contrainte électrique, cet écart est de l'ordre d'2.9% quand  $\varphi = 0^\circ$ , et proche de 2.4% quand  $\varphi = 90^\circ$ . L'application d'une précontrainte mécanique permet d'augmenter le maximum du  $k_t$  du niobate de lithium, obtenu pour  $\varphi = 90^\circ$  en Y+36. Dans les deux cas, la différence entre les coefficients de couplage calculés dans chacun des systèmes de coordonnées est largement négligeable, comme prédit par nos calculs.

Ainsi, il apparaît que les limites physiques du niobate de lithium ne permettent pas d'augmenter significativement ses paramètres électro-acoustiques. Cependant, les différences de vitesses prédites sont théoriquement évaluables avec un dispositif expérimental adapté.

Dans le quatrième chapitre, nous avons modélisé les comportements hystérétiques de piézocéramiques polarisées et soumises à une contrainte uniaxiale de type mécanique ou électrique parallèle à la direction de polarisation. Nous avons commencé par expliciter le lien entre l'évolution du déplacement électrique et la déformation longitudinale d'une piézocéramique sous contrainte électrique au travers des changements de polarisation de domaines. Ainsi, nous avons défini un mouvement de domaines 'piézoélectrique' responsable de l'évolution macroscopique de la polarisation du matériau et par conséquent de la déformation rémanente piézoélectrique. De plus, nous avons montré que la non-linéarité de la déformation longitudinale sous contrainte mécanique

est liée à l'évolution de la polarisation, mais aussi à un mouvement de domaines purement mécanique que nous avons appelé 'ferroélastique'. Nous avons scindé le comportement des piézocéramiques en un phénomène réversible, dans lequel les composantes du déplacement électrique et des déformations s'annulent en l'absence de contrainte, et un phénomène rémanent, existant en l'absence de contrainte. Nous avons décrit les variations des paramètres classiques des matériaux, ainsi que l'évolution des domaines au travers d'une distribution de von Mises qui nous renseigne sur la concentration de domaines piézoélectrique et ferroélastique orientés dans la direction de polarisation initiale. Les propriétés de cette distribution nous ont permis d'évaluer les fonctions de polarisation et de déformations piézoélectrique et ferroélastique en fonction de leurs paramètres de concentration respectifs. Nous avons modélisé des lois d'évolution de ces paramètres de concentration, et déterminé les points fonctionnels du déplacement électrique, de la déformation longitudinale et des champs de contraintes nécessaires à la résolution de notre modèle et au calcul des constantes d'intégrations inhérentes.

Dans le cinquième chapitre, nous avons d'abord confronté notre modèle à l'évolution du déplacement électrique et des déformations longitudinale et transversales d'un matériau mou, le PLZT 8/65/35, sous contrainte électrique. Bien qu'ayant de légères difficultés à s'adapter à des changements de polarisation rapides et une précision moindre dans la description de la déformation transversale, nous observons un très bon accord global et une très bonne cohérence avec l'hypothèse de déformation rémanente piézoélectrique isochore. Les évolutions des coefficients diélectrique et piézoélectrique sous contrainte électrique issues du modèle montrent un bon accord global avec celles issues des courbes expérimentales. Sous contrainte mécanique, nous avons effectué l'étude du déplacement électrique et des déformations longitudinale et transversale du PLZT 8/65/35, des PZT-A et B (durs) et du déplacement électrique du PZT P188. Malgré certaines difficultés sur les changements de polarisation trop rapide, les phénomènes de dépolarisation ont été correctement évalués, ce qui implique que notre loi d'évolution du paramètre piézoélectrique est plus adaptée aux matériaux mous que durs. Cependant, les phénomènes de repolarisation et de déformation lors de la relaxe sont très bien décrits par notre modèle, sur les 4 matériaux, ce qui valide le choix des lois d'évolution des paramètres de concentration piézoélectrique et ferroélastique aux matériaux durs et mous en décompression. L'étude de l'évolution des coefficients du matériau sous contrainte mécanique a montré un bon accord entre modélisation et expérience, et a confirmé notre hypothèse de repolarisation non-linéaire et non négligeable lors de la relaxation de matériaux assez durs. Cependant, l'étude de la déformation transversale du PLZT a montré une précision significativement plus faible qui semble confirmer que l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique est mal adaptée.

Par ailleurs, nous avons montré qu'il n'est pas possible d'approximer une valeur constante du paramètre diélectrique sous contrainte mécanique, comme de considérer un tenseur élastique constant sous contrainte électrique. Ainsi, il s'avère impossible de calculer l'ensemble des coefficients nécessaires à notre modèle d'évolution des paramètres de vitesses et coefficient de couplage dans les matériaux précontraints.

Dans une dernière partie, nous avons développé la mise en place d'un dispositif expérimental permettant la mesure des déformations longitudinale, transversales, et du déplacement électrique sous contrainte mécanique. La précision des valeurs mesurées sur le niobate de lithium et sur deux PZT (Pz21 et Pz26) a permis de valider notre dispositif et ses réglages avec une exactitude significative. Nous avons montré que le niobate de lithium est de nature fragile, avec une limite à la rupture se confondant avec la limite élastique aux alentours de -110 MPa. Les valeurs des coefficients de souplesse du niobate de lithium ont été retrouvées avec une précision moyenne de 8%, en majeure partie attribuée à la géométrie de notre échantillon. Le bon accord des évolutions des déplacements électriques des deux PZT a permis d'évaluer les coefficients piézoélectriques et élastiques de chacun des matériaux avec des précisions respectives de 17% et 30%. Ces écarts sont aussi attribués à la géométrie de nos échantillons, mais aussi aux mouvements de domaines rapides de ces matériaux.

Cependant, nous avons montré que les évolutions des coefficients de Poisson des deux céramiques sont largement non négligeables et semblent liées aux mouvements de domaines, ce qui confirme que l'hypothèse de déformation rémanente isochore sous contrainte mécanique n'est pas justifiée. De plus, nous avons montré que l'évolution de la déformation rémanente ferroélastique est non isochore et avons proposé une loi d'évolution de la déformation rémanente ferroélastique transversale propre et analogue à celles des autres modes de déformation rémanente. Cette constatation permet de corriger un élément fondamental de notre modèle. Ainsi, il convient de le raffiner et de vérifier sa validité sur le PLZT, ainsi que sur les Pz21 et Pz26.

Ainsi, le dispositif expérimental mis en place permet l'étude des comportements de matériaux piézoélectriques sous contrainte mécanique. La validation du modèle d'évolution des vitesses a déjà été entamée mais nécessite d'être améliorée pour gagner en précision. De plus, nous développons (en collaboration interne) actuellement une méthode d'optimisation des paramètres du modèle hystérétique par algorithme génétique. Cet outil permet de vérifier que nos lois d'évolution sont bien adaptées et permet de remonter à des constantes du matériau plus précises par inversion du modèle.

## Annexes

### Annexe I Estimation des différences entre vitesses et coefficient de couplage définis dans les différents systèmes de coordonnées

#### Annexe I.1 Estimation de la différence entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées

Dans le but de bien comprendre l'écart entre les vitesses définies dans chacun des systèmes de coordonnées, nous développons une relation simple, issue de différentes approximation. Ainsi, l'étude précédente est réduite à l'application d'une contrainte mécanique dans la direction  $\xi_3$  avec une onde possédant une direction de propagation parfaitement parallèle à cet axe ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 1$ ).

Dans cette configuration,  $u_{1,1}^0 = u_{2,2}^0$ . Par ailleurs, sous contrainte mécanique, nous avons montré que l'on peut négliger le champ électrique induit et que dans sous contrainte électrique, on néglige la contrainte mécanique. Ainsi, dans le cas général, nous ne considérons que des contraintes mécanique  $\sigma_{33}^0$ , et électrique  $E_3^0$ .

Dans le système de coordonnées de l'état naturel, la résolution de l'équation de Christoffel (II.91) donne :

$$\begin{aligned} \rho^0 \tilde{V}_L^2 = & \sigma_{33}^0 + C_{33} + 2 C_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} + C_{33\alpha} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} - e_{333} E_3^0 + \\ & + \frac{1}{\varepsilon_{33} + l_{33\alpha} u_{\alpha,\alpha}^0 + \varepsilon_{333} E_3^0} \left( e_{33} + e_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial \xi_3} + e_{33\alpha} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} + l_{33} E_3^0 \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1.a})$$

$$\rho^0 \tilde{V}_{T_1}^2 = \sigma_{33}^0 + C_{55} + 2 C_{55} \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1} + C_{55\alpha} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} - e_{355} E_3^0 \quad (\text{A.1.b})$$

$$\rho^0 \tilde{V}_{T_2}^2 = \sigma_{33}^0 + C_{44} + 2 C_{44} \frac{\partial u_2^0}{\partial \xi_2} + C_{44\alpha} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} - e_{344} E_3^0 \quad (\text{A.1.c})$$

avec  $\alpha = 1, 2, 3$  et  $\tilde{V}_L$ ,  $\tilde{V}_{T_1}$  et  $\tilde{V}_{T_2}$  sont les vitesses correspondant aux modes longitudinal, transversal 1 et transversal 2 respectivement. Notons que les deux vitesses transversales sont égales et que seule la vitesse longitudinale est couplée piézoélectriquement.

Dans le système de coordonnées de l'état prédéformé, la résolution de l'équation de Christoffel (II.101) donne :

$$\rho^s \bar{V}_L^2 = t_{33}^0 + C_{33} \left( 1 - \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} \right) + 4 C_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial X_3} + C_{33I} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_I} - e_{333} E_3^0 + \frac{1}{\varepsilon_{33}(1 - u_{\alpha,\alpha}^0) + 2 \varepsilon_{33} u_{3,3}^0 + l_{33I} u_{I,I}^0 + \varepsilon_{33} E_3^0} \left( e_{33} \left( 1 - \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} \right) + 3 e_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial X_3} + e_{33I} \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial X_I} + l_{33} E_3^0 \right)^2 \quad (\text{A.2.a})$$

$$\rho^s \bar{V}_{T_1}^2 = t_{33}^0 + C_{55} \left( 1 - \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} \right) + 2 C_{55} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_3^0}{\partial X_3} \right) + C_{55I} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_I} - e_{355} E_3^0 \quad (\text{A.2.b})$$

$$\rho^s \bar{V}_{T_2}^2 = t_{33}^0 + C_{44} \left( 1 - \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial \xi_\alpha} \right) + 2 C_{44} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_3^0}{\partial X_3} \right) + C_{44I} \frac{\partial u_I^0}{\partial X_I} - e_{344} E_3^0 \quad (\text{A.2.c})$$

avec  $I = 1, 2, 3$  et  $\bar{V}_L$ ,  $\bar{V}_{T_1}$  et  $\bar{V}_{T_2}$  sont les vitesses correspondant aux modes longitudinal, transversal 1 et transversal 2 respectivement. Notons que dans ce système de coordonnées aussi, les deux vitesses transversales sont égales et que seule la vitesse longitudinale est couplée piézoélectriquement.

Comme décrit dans la figure III.5, l'écart relatif entre le tenseur de Cauchy et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff 2 est inférieur à 0.2% pour  $\theta = 0$ . De plus, comme décrit par l'équation III.7, l'écart entre les déformations exprimées dans les deux systèmes de coordonnées est inférieur à 2% et dans ce plan de coupe,  $u_{1,1}^0 = u_{2,2}^0 \ll u_{3,3}^0$ . De la même manière, le Jacobien ne change pas de plus de 0.02% pour une contrainte de 110 MPa. Négligeant la variation du Jacobien, des tenseurs de précontrainte et de déformations entre les différents système de coordonnées ainsi que les produits de déformations, les différences de vitesses s'expriment :

$$\begin{aligned} \bar{V}_L^2 - \tilde{V}_L^2 &= 2 u_{3,3}^0 (V_L^0)^2 \\ \bar{V}_{T_1}^2 - \tilde{V}_{T_1}^2 &= 2 u_{3,3}^0 (V_{T_1}^0)^2, \\ \bar{V}_{T_2}^2 - \tilde{V}_{T_2}^2 &= 2 u_{3,3}^0 (V_{T_2}^0)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

avec  $V_L^0 = \sqrt{\frac{C_{33} + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}}{\rho^0}}$ ,  $V_{T_1}^0 = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho^0}}$  et  $V_{T_2}^0 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho^0}}$  les vitesses des modes longitudinal, transverse 1 et 2 en l'absence de contrainte.

Ainsi, la différence entre les vitesses est principalement liée à la déformation  $u_{3,3}^0$  plus qu'à un changement des propriétés piézoélectriques.

La différence entre les deux vitesses étant inférieure à 3%, nous considérons maintenant que  $\bar{V} \cong \tilde{V} \cong V_0$ , soit  $\bar{V} + \tilde{V} \cong 2V_0$  et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_L^2 - \tilde{V}_L^2}{(V_L^0)^2} &= \frac{(\bar{V}_L + \tilde{V}_L)}{V_L^0} \frac{(\bar{V}_L - \tilde{V}_L)}{V_L^0} \cong 2 \frac{(\bar{V}_L - \tilde{V}_L)}{V_L^0} \\ \bar{V}_{T_1}^2 - \tilde{V}_{T_1}^2 &\cong 2 \frac{(\bar{V}_{T_1} - \tilde{V}_{T_1})}{V_{T_1}^0} \\ \bar{V}_{T_2}^2 - \tilde{V}_{T_2}^2 &\cong 2 \frac{(\bar{V}_{T_2} - \tilde{V}_{T_2})}{V_{T_2}^0} \end{aligned} \quad (A.4)$$

Utilisant cette approximation, on recalcule les équations (A.4) :

$$\begin{aligned} \bar{V}_L - \tilde{V}_L &\cong u_{3,3}^0 V_L^0 \\ \bar{V}_{T_1} - \tilde{V}_{T_1} &\cong u_{3,3}^0 V_{T_1}^0 \\ \bar{V}_{T_2} - \tilde{V}_{T_2} &\cong u_{3,3}^0 V_{T_2}^0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

Dans le cas mécanique, ces expressions sont exactes avec une erreur absolue inférieure à 3.5%.

## Annexe I.2 Estimation de la différence entre les coefficients de couplages définis dans les deux systèmes de coordonnées

En faisant les même approximations que précédemment, on montre que les coefficients de couplage définies dans les deux systèmes de coordonnées différents sont égaux à niveaux de contrainte équivalent :

$$\bar{k}_i \cong \tilde{k}_i \quad (A.6)$$

Ainsi, sous les approximations énoncées, les coefficients de couplage sont égaux dans les deux systèmes de coordonnées.

## Annexe II Calcul des constantes des matériaux dans différents plans de coupe

### Annexe II.1 Lois de transformations des paramètres piézoélastiques du second ordre

Par définition, les paramètres piézoélastiques d'un matériau sont définis dans un repère analogue à celui de la figure III.1 pour des angles  $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ . Les lois de transformations qui donnent les paramètres piézoélastiques du second ordre dans n'importe quelle direction sont données par Auld [Auld90].

Ainsi, on définit la matrice de transformation faisant tourner le repère autour de l'axe (Oz). L'angle correspondant est l'angle  $\varphi$ , comme indiqué dans la figure III.1 :

$$[a_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

De la même manière, on définit la matrice de transformation faisant tourner le repère autour de l'axe (Oy). L'angle correspondant est l'angle  $\theta$ , comme indiqué dans la figure III.1 :

$$[a_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

La matrice de passage entre tenseur du deuxième ordre est définie, soit :

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & 2a_{xy}a_{xz} & 2a_{xz}a_{xx} & 2a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & 2a_{yy}a_{yz} & 2a_{yz}a_{yx} & 2a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & 2a_{zy}a_{zz} & 2a_{zz}a_{zx} & 2a_{zx}a_{zy} \\ a_{xy}a_{xz} & a_{yy}a_{zy} & a_{yz}a_{zz} & a_{yy}a_{zz} + a_{yz}a_{zy} & a_{yx}a_{zz} + a_{yz}a_{zx} & a_{yy}a_{zx} + a_{yx}a_{zy} \\ a_{zx}a_{xx} & a_{zy}a_{xy} & a_{zz}a_{xz} & a_{xy}a_{zz} + a_{xz}a_{zy} & a_{xz}a_{zx} + a_{xx}a_{zz} & a_{xx}a_{zy} + a_{xy}a_{zx} \\ a_{xx}a_{yx} & a_{xy}a_{yy} & a_{xz}a_{yz} & a_{xy}a_{yz} + a_{xz}a_{yy} & a_{xz}a_{yz} + a_{xx}a_{yz} & a_{xx}a_{yy} + a_{xy}a_{yx} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Selon l'angle duquel nous souhaitons faire tourner le repère, nous avons deux matrices M différentes.

Ainsi, les coefficients piézoélastiques du second ordre définis dans un repère ayant subi une rotation autour d'un des deux angles sont définis par :

$$C'_{HK} = M_{HI} C_{IJ} M_{KJ} \quad (\text{A.10})$$

avec  $C_{IJ}$  la constante élastique de raideur du matériau et  $(H, I, J, K) = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

$$e'_{HI} = a_{hk} e_{kJ} M_{IJ}, \quad (\text{A.11})$$

avec  $e_{kJ}$  la constante piézoélectrique du matériau,  $(I, J) = 1, 2, 3, \dots, 6$  et  $(h, k) = 1, 2, 3$ .

$$\varepsilon'_{ij} = a_{il} \varepsilon_{lk} a_{jk} \quad (\text{A.12})$$

avec  $\varepsilon_{lk}$  la constante diélectrique du matériau,  $(i, j, k, l) = 1, 2, 3$ .

Par la suite, on applique ces opérations de rotations pour chaque angle successivement.

## Annexe II.2 Lois de transformations des paramètres piézoélastiques du troisième ordre

De manière analogue à ce qui a été défini par Auld, on applique les mêmes matrices de transfert sont appliquées aux paramètres piézoélastiques du troisième ordre, soit :

$$C'_{HIJ} = M_{HK} C_{KPQ} M_{IP} M_{JQ} \quad (\text{A.13})$$

avec  $C_{KPQ}$  la constante élastique de raideur du troisième ordre du matériau et  $(H, I, J, K, P, Q) = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

$$e'_{HIJ} = a_{hk} e_{kPQ} M_{IP} M_{JQ}, \quad (\text{A.14})$$

avec  $e_{kPQ}$  la constante piézoélectrique du troisième ordre du matériau,  $(I, J, P, Q) = 1, 2, 3, \dots, 6$  et  $(h, k) = 1, 2, 3$ .

$$\varepsilon'_{hij} = a_{hk} \varepsilon_{kmn} a_{im} a_{jn} \quad (\text{A.15})$$

avec  $\varepsilon_{lk}$  la constante diélectrique du troisième ordre du matériau et  $(i, j, k, l) = 1, 2, 3$ .

$$l'_{ijH} = M_{HK} l_{mnK} a_{im} a_{jn}, \quad (\text{A.16})$$

avec  $l_{mnK}$  la constante électrostrictive du matériau,  $(H, K) = 1, 2, \dots, 6$  et  $(i, j, m, n) = 1, 2, 3$ .

Par la suite, ces opérations de rotations sont appliquées pour chaque angle successivement.



## Annexe III Constantes du troisième ordre du niobate de lithium

Les mesures de constantes du troisième ordre du niobate de lithium ont été effectuées par Yamanouchi et Cho [Cho1987]. Ces derniers ont montré que le nombre de constantes indépendantes se réduit respectivement à :

- 14 constantes élastiques de rigidité,  $C_{(ij)(kl)(mn)} = C_{\alpha\beta\gamma}$ ,

- 13 constantes piézoélectriques,  $e_{m(ij)(kl)} = e_{m\alpha\beta}$ ,

- 3 constantes diélectriques,  $\epsilon_{m(ij)} = \epsilon_{m\alpha}$ ,

- 8 constantes électrostrictives,  $l_{(ij)(kl)} = l_{\alpha\beta}$ ,

où  $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$  et où les indices grecs sont les indices contractés de Voigt définis au chapitre II.

### Annexe III.1 Constantes élastiques de rigidités du troisième ordre

Les constantes élastiques de rigidités indépendantes du troisième ordre sont égales à :

Tableau A.1 : Constantes élastiques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium.

$C_{\alpha\beta\gamma}$	Valeur ( $10^{11}$ N/m <sup>2</sup> )	$\Delta C_{\alpha\beta\gamma} = \pm 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
$C_{111}$	-21.2	4
$C_{112}$	-5.3	1.2
$C_{113}$	-5.7	1.5
$C_{114}$	2	0.8
$C_{123}$	-2.5	1
$C_{124}$	0.4	0.3
$C_{133}$	-7.8	1.9
$C_{134}$	1.5	0.3
$C_{144}$	-3	0.2
$C_{155}$	-6.7	0.3
$C_{222}$	-23.3	3.4

$C_{333}$	-29.6	7.2
$C_{344}$	-6.8	0.7
$C_{444}$	-0.3	0.4

L'incertitude moyenne sur l'ensemble de ces constantes est égale à  $\Delta C_{\alpha\beta\gamma} = \pm 32.1\%$ , donc relativement importante.

### Annexe III.2 Constantes piézoélectriques du troisième ordre

Les constantes piézoélectriques indépendantes du troisième ordre sont égales à :

Tableau A.2 : Constantes piézoélectriques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium.

$e_{m\alpha\beta}$	Valeur ( $C/m^2$ )	$\Delta e_{m\alpha\beta} = \pm C/m^2$
$e_{115}$	17.1	6.6
$e_{116}$	-4.7	6.4
$e_{125}$	19.9	2.1
$e_{126}$	-15.9	5.3
$e_{135}$	19.6	2.7
$e_{136}$	-0.9	2.7
$e_{145}$	20.3	5.7
$e_{311}$	14.7	6
$e_{312}$	13	11.4
$e_{313}$	-10	8.7
$e_{314}$	11	4.6
$e_{333}$	-17.3	5.9
$e_{344}$	-10.2	5.6

L'incertitude moyenne sur l'ensemble de ces constantes est égale à  $\Delta e_{m\alpha\beta} = \pm 42.2\%$ , donc relativement importante.

### Annexe III.3 Constantes diélectriques du troisième ordre

Les constantes diélectriques indépendantes du troisième ordre sont égales à :

Tableau A.3 : Constantes diélectriques indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium.

$\epsilon_{m\alpha}$	Valeur ( $10^{-19}$ F/V)	$\Delta \epsilon_{m\alpha} = \pm 10^{-19}$ F/V
$\epsilon_{31}$	-2.81	0.06
$\epsilon_{22}$	-2.4	0.09
$\epsilon_{33}$	-2.91	0.06

L'incertitude moyenne sur l'ensemble de ces constantes est égale à  $\Delta \epsilon_{m\alpha} = \pm 2.5\%$ , donc moins importante que les deux précédentes.

### Annexe III.4 Constantes électrostrictives du troisième ordre

Les constantes électrostrictives indépendantes du troisième ordre sont égales à :

Tableau A.4 : Constantes électrostrictives indépendantes du troisième ordre du niobate de lithium.

$l_{\alpha\beta}$	Valeur ( $10^{-9}$ F/m)	$\Delta l_{\alpha\beta} = \pm 10^{-9}$ F/m
$l_{11}$	1.11	0.39
$l_{12}$	2.19	0.56
$l_{13}$	2.32	0.67
$l_{31}$	0.19	0.61
$l_{33}$	-2.76	0.41
$l_{14}$	1.51	0.17
$l_{41}$	1.85	0.17
$l_{44}$	-1.83	0.11

L'incertitude moyenne sur l'ensemble de ces constantes est égale à  $\Delta l_{\alpha\beta} = \pm 22.5\%$ , donc non négligeable ici aussi.

## Bibliographie

- [Auld1990] B. A. Auld. Acoustic Fields and Waves in Solids I. *Krieger Publishing Company*, 1990.
- [Baerwald1957] H. G. Baerwald. Thermodynamic Theory of Ferroelectric Ceramics. *Physical Review*, vol. 105, p. 480-486, 1957.
- [Barzegar2002] A. Barzegar, D. Damjanovic et N. Setter. Study of Size (Aspect Ratio) effect on Longitudinal Piezoelectric Coefficient Meseasured by Quasistatic Technique. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2002.
- [Barzegar2004] A. Barzegar, D. Damjanovic et N. Setter. The Effect of Boundary Conditions and Sample Aspect Ratio on Apparent d33 Piezoelectric Coefficient Determined by Direct Quasistatic Method. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 51, p. 262-270, 2004.
- [Berlincourt1959] D. Berlincourt et H. H. A. Krueger. Domain Processes in Lead Titanate Zirconate and Barium Titanate Ceramics. *Journal of Applied Physics*, vol.30, p. 1804-1810, 1959.
- [Bou2008] G. Bou Abboud. Microstructuration par échange protonique sur niobate de lithium : application et réalisation de fonctions de filtrage. *Université Paris-Est*, 2008.
- [Boucher2002] E. Boucher, G. Sebald, D. Guyomar et E. Pleska. Piezoceramic coefficient hysteresis under high stress and electric field. *IEEE*, 2002.
- [Brissaud2007] M. Brissaud. Matériaux piézoélectriques. Caractérisation, modélisation et vibration. *Presses polytechniques et universitaires romandes*, 2007.
- [Cao1993] H. Cao et A. G. Evans. Nonlinear Deformation of Ferroelectric Ceramic. *J. Am. Ceram. Soc.*, vol.76, p. 890-896, 1993.
- [Chen1998] W. Chen et C. S. Lynch. A micro-electromechanical model for polarization switching of ferroelectric materials. *Acta mater*, vol. 46, p. 5303-5311, 1998.
- [Cho1987] Y. Cho, et K. Yamanouchi. Nonlinear, elastic, piezoelectric, electrostrictive, and dielectric constants of lithium niobate. *J. Appl. Phys*, vol. 61, p. 875-887, 1987.

- [Damjanovic1997] D. Damjanovic. Stress and Frequency dependence of the direct piezoelectric effect in ferroelectric ceramics. *American Institute of Physics*, vol. 82, p. 1788-1797, 1997.
- [Davis2006] M. Davis. Phase transitions, anisotropy and domain engineering: the piezoelectric properties of relaxor-ferroelectric single crystals. *Ecole Polytechnique de Lausanne*, 2006.
- [Declercq2009] N. F. Declercq. Determination of symmetry relations between higher order material constants for the study of nonlinear acoustic properties of piezoelectric crystals of any symmetry class (A). *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, p. 3399, 2009.
- [Delaunay2006] T. Delaunay. Caractérisation fonctionnelle et relations structures-propriétés de monocristaux piézoélectriques de type Pérovskite. *Université de Tours*, 2006.
- [Desmet1996] C. Desmet, U. Kawald, A. Mourad, W. Lauriks et J. Thoen. The behaviour of Lamb waves in stressed polymer foils. *Acoustical society of America*, vol. 100, p. 1509-1513, 1996.
- [Domenjoud2010] M. Domenjoud, M. Lematre, P. Tran-Huu-Hue et G. Feuillard. Integrated piezoelectric structures under external mechanical stress: Theory and experiments. *IEEE International Ultrasonics Symposium*, 2010.
- [Domenjoud2012] M. Domenjoud, M. Lematre, P. Tran et G. Feuillard. Modeling of hysteretic behaviour of piezoceramic materials under external electrical and mechanical stress, *In press*, 2012.
- [Duquenoy1997] M. Duquenoy. Analyse ultrasonore des contraintes résiduelles dans les alliages d'aluminium par ondes de Rayleigh. *Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis*, 1997.
- [El2004] A. El Hassouni. Croissance, caractérisations structurales et analyses spectroscopiques de fibres monocristallines de la famille des niobates  $\text{LiNbO}_3$  (LN),  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  (BNN) et  $\text{Sr}_x\text{Ba}_{1-x}\text{Nb}_2\text{O}_6$  (SBN) à propriétés non linéaires. *Université Claude Bernard-Lyon 1*, 2004.
- [Fan1999] J. Fan, W. A. Stoll et C. S. Lynch. Nonlinear Constitutive behavior of soft and hard PZT: experiments and modelling. *Acta mater.*, vol.47, p. 4415-4425, 1999.
- [Fares1995] M. L. Fares, H. Essom et F. Montheillet. Modélisation mécanique de l'essai de compression plane de monocristaux. *Métallurgie-CIT/Sciences et Génie des Matériaux*, 1995.
- [Fares2002] M. L. Fares, H. Essom et F. Montheillet. Étude expérimentale de l'hétérogénéité de la déformation lors de l'essai de la compression plane de monocristaux. *Mécanique Industries*, vol. 3, p. 545-556, 2002.
- [Ferrand2007] B. Ferrand, La méthode de tirage Czochralski, 2007.

- [Gafka1993] D. Gafka et J. Tani. Sensitivity of surface acoustic wave velocity in lithium niobate to electric field or biasing stress. *J. Appl. Phys*, vol. 73, p. 7145-7151, 1993.
- [Hwang1985] S. C. Hwang, C. S. Lynch et R. M. McMeeking. Ferroelectric/Ferroelastic interactions and a polarization switching model. *Acta metall. Mater*, vol.43, p. 2073-2084, 1985.
- [Inoue1993] T. Inoue, T. Nada, T. Tsuchiya, T. Nakanishi, Toshiyuki et T. Miyama. Tonpilz Piezoelectric Transducers with Acoustic Matching Plates for Underwater Color Image Transmission. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 40, p. 121-129, 1993.
- [Jones2008] J. L. Jones, A. B. Kouna, E. Aulbach et T. Granzow. Domain Switching During Electromechanical Poling in Lead Zirconate Titanate Ceramics. *Journal of Applied Physics*, vol. 91, p. 1586-1590, 2008.
- [Kamlah1999] M. Kamlah et C. Tsakmakis. Phenomenological modeling of the non-linear electromechanical coupling in ferroelectrics. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, p. 669-695, 1999.
- [Kamlah1999a] M. Kamlah et Q. Jiang. A constitutive model for ferroelectric PZT ceramics under uniaxial loading. *Smart Mater. Struct.*, vol. 8, p. 441-459, 1999.
- [Kato1995] M. Kato, T. Sato, K. Kameyama et N. Hideyuki. Estimation of the stress distribution in metal using nonlinear acoustoelasticity. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 98, p. 1496-1504, 1995.
- [Krueger1961] H. H. A. Krueger et D. Berlincourt. Effects of High Static Stress on the Piezoelectric Properties of Transducer Materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 33, p. 1339-1344, 1961.
- [Krueger1967] H. A. Krueger. Stress Sensitivity of Piezoelectric Ceramics: Part1. Sensitivity to Compressive Stress Parallel to the Polar Axis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 42, p. 636-645, 1967.
- [Krueger1967a] H. A. Krueger. Stress Sensitivity of Piezoelectric Ceramics: Part3. Sensitivity to Compressive Stress Perpendicular to the Polar Axis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 43, p. 583-591, 1967.
- [Kunga2008] A. B. Kouna, T. Granzow, E. Aulbach, M. Hinterstein, J. Röde. High-temperature poling of ferroelectrics. *Journal of Applied Physics*, vol. 104, p. 1-6, 2008.

- [Lematre2005] M. Lematre, G. Feuillard, T. Delaunay et M. Lethiecq. Modelling of Ultrasonic Wave Propagation in Integrated Piezoelectric Structures under Residual Stress. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2005.
- [Lematre2006] M. Lematre, G. Feuillard, T. Delaunay et M. Lethiecq. Modeling of Ultrasonic Wave Propagation in Integrated Piezoelectric Structures under Residual Stress. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 53, p. 685-696, 2006.
- [Lematre2006a] M. Lematre, G. Feuillard, E. Le Clézio et M. Lethiecq. Modeling of the influence of a prestress gradient on guided wave propagation in piezoelectric structures. *Acoustical society of America*, vol. 120, p. 1964-1975, 2006.
- [Lematre2008] M. Lematre, P. Tran et G. Feuillard. Modeling and Numerical study of the Electro-Acoustic behaviour in Integrated Piezoelectric Structures under External Mechanical Stress. *IEEE International Ultrasonics Symposium*, 2008.
- [Lematre2011] M. Lematre, M. Domenjoud et L. P. Tran-Huu-Hue. Exact second order formalism for the study of electro-acoustic properties in piezoelectric structure under an initial mechanical stress. *Ultrasonics*, vol. 51, p. 898-910, 2011.
- [Liu2003] H. Liu, Z. B. Kuang et Z. M. Cai. Propagation of Bleustein-Gulyaev waves in a prestred layered piezoelectric structure. *Ultrasonics*, vol. 41, p. 397-405, 2003.
- [Lu2001] W. Lu, D. N. Fang et K. C. Hwang. Micromechanics of ferroelectric domain switching behavior. Part I: Coupled electromechanical field of domain inclusion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 37, p. 29-38, 2001.
- [Lu2001a] W. Lu, D. N. Fang et K. C. Hwang. Micromechanics of ferroelectric domain switching behavior. Part 2: Constitutive relations and hysteresis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 37, p. 39-47, 2001.
- [Lu2006] X. Lu et S. Hanagud. A domain evolution model for hysteresis in piezoceramic materials. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 53, p. 1239-1249, 2006.
- [Lynch1995a] C.S. Lynch. Electro-Mechanical Coupling in 8/65/35 PLZT. *IEEE*, 1995.
- [Merz1953] W. J. Merz. Double hysteresis loop of batio<sub>3</sub> at the curie point. *Physical Review*, vol. 91, p. 513-517, 1953.
- [Meyer2002] R. J. Meyer, T. Montgomery et W. J. Hughes. Tonpiliz Transducers Designed using Single Crystal Piezoelectrics. *IEEE*, 2002.

- [Miller1998] G. D. Miller. Periodically poled lithium niobate: modeling, fabrication, and nonlinear-optical performance. *Stanford University*, 1998.
- [Michelitsch1998] T. Michelitsch et W. S. Kreher. A simple model for the nonlinear material behavior of ferroelectrics. *Acta mater*, vol. 46, p. 5085-5094, 1998.
- [Palma1984] A. Palma, L. Palmieri et E. Verona. Non linear electroacoustic effect in lamb wave propagation in LiNbO<sub>3</sub> plates. *Ultrasonics symposium*, 1984.
- [Palma1985] A. Palma, L. Palmieri, G. Socino et E. Verona. Acoustic Lamb wave-electric field nonlinear interaction in YZ LiNbO<sub>3</sub> plates. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 46, p. 25-27, 1985.
- [Palmieri1986] L. Palmieri, G. Socino et E. Verona. Electroelastic effect in layer acoustic mode propagation along ZnO films on Si substrates. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 49, p. 1581-1583, 1986.
- [Pao1984] Y. H. Pao, W. Sachse et H. Fukuoka. Physical Acoustics : Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses. *Physical Acoustics*, 1984
- [Perez2001] R. Perez, J. E. Garcia et A. Albareda. Nonlinear Dielectric Behavior of Piezoelectric Ceramics. *IEEE*, 2001.
- [Rakotomanana2003] L. R. Rakotomanana. Thermomécanique des milieux continus. *Université Rennes 1*, 2003.
- [Ren2001] W. Ren, A. J. Masys, G. Yang et B. K. Mukherjee. The Variation of Piezoelectric and Electrostrictive Strain as a Function of Frequency and Applied Field Using an Interferometric Technique. *IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics*, 2001.
- [Rogacheva2000] N. N. Rogacheva. The dependence of the electromechanical coupling coefficient of piezoelectric elements on the position and size of the electrodes. *J. Appl. Maths Mechs*, vol. 65, p. 317-326, 2000.
- [Royer1996] D. Royer et E. Dieulesaint. Ondes élastiques dans les solides, Tome 1 : Propagation libre et guidée. *MASSON*, 1996.
- [Royer1999] D. Royer et E. Dieulesaint. Ondes élastiques dans les solides, Tome 2 : Génération, interaction acousto-optique, applications. *MASSON*, 1999.
- [Sarasamak2010] K. Sarasamak, S. Limpijumong, W. R. L. Lambrecht et R. L. Walter. Pressure-dependent elastic constants and sound velocities of wurtzite SiC, GaN, InN, ZnO, and CdSe, and their relation to the high-pressure phase transition: A first-principles study. *The American Physical Society*, vol. 82, p. 1-10, 2010.
- [Schaeufele1996] A. Schaeufele et K. H. Härdtl. Ferroelastic properties of lead zirconate titanate ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 79, p. 2637-2640, 1996.



- [Si-Chaib2001] M. O. Si-Chaib, S. Menad, S. H. Djelouah et M. Bocquet. An ultrasound method for the acoustoelastic evaluation of simple bending stresses. *NDT & E International*, vol. 34, p. 521-529, 2001.
- [Si-Chaib2005] M. O. Si-Chaib, H. Djelouah et T. Boutkedjirt. Propagation of ultrasonic waves in materials under bending forces. *NDT & E International*, vol.38, p. 283-289, 2005.
- [Sinha1985] B. K. Sinha, W. J. Tanski, T. Lukaszek et A. Ballato. Influence of biasing stresses on the propagation of surface waves. *J. Appl. Phys.*, vol. 57, p. 767-776, 1985.
- [Stoll1997] W. A. Stoll III. Nonlinear constitutive behavior of PZT. *Georgia Institute of Technology*, 1997.
- [Su2005] J. Su, Z. B. Kuang et H. Liu. Love wave in ZnO/SiO<sub>2</sub>/Si structure with initial stresses. *Journal of sound and Vibration*, vol. 286, p. 981-999, 2005.
- [Su2011] Y. Su et G. J. Weng. A polycrystal hysteresis model for ferroelectric ceramics. *The Royal Society*, 2011.
- [Suchanicz2008] J. Suchanicz, D. Sitko, N. T. H. Kim-Ngan et A. G. Balogh. Electric properties of soft PZT ceramics under combined electric and mechanic fields. *Journal of Applied Physics*, vol. 104, p. 1-4, 2008.
- [Surowiak2007] Z. Surowiak et M. Plonska. Piezoelectrical properties of X/65/35 PLZT ceramics depended of the lanthanum (X) ions contents. *Molecular and Quantum Acoustics*, vol. 28, p. 253-257, 2007.
- [Thollon1992] D. Thollon, C. Marseile et P. Traulle Philippe. Transducteur Tonpilz protégé contre les chocs. *Thomson-CSF*, 1992.
- [Toupin1961] R. A. Toupin et B. Bernstein. Sound Waves in Deformed Perfectly Elastic Materials. Acoustoelastic Effect. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 33, p. 216-225.
- [Van1999] D. Van Tol et W. J. Hughes. Megahertz Tonpilz Transducer. *SPIE Conference on Ultrasonic Transducer Engineering*, 1999.
- [Wali2007] Y. Wali, A. Njeh, T. Wieder et M. H. Ben Godzlen. The effect of depth-dependent residual stresses on the propagation of surface acoustic waves in thin Ag films on Si. *NDT & E International*, vol. 40, p. 545-551, 2007.
- [Wali2008] Y. Wali, H. Ketata et M. H. Ben Ghazlene. Effet des contraintes statiques sur les vitesses de propagation des ondes ultrasonores. *Ndt*, 2008.
- [Walter2003] V. Walter, P. Delobelle et P. Le Moal. A nonlinear electromechanical model for ferroelectric materials: application to soft-PZT thick films screen-printed on aluminium

- substrate. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 50, p. 471-480, 2003.
- [Wang2009] S. J. Wang, X. Li et Z. H. Chen. The effect of residual stress on adhesion-induced instability in micro-electromechanical systems. *Thin Solid Films*, vol. 518, p. 257-259, 2009.
- [Warner1967] A. W. Warner, M. Onoe, et G. A. Coquin. Determination of Elastic and Piezoelectric Constants for Crystals in Class (3m), *The Journal of Acoustical Society of America*, vol. 42, p. 1223-1231, 1967.
- [Weis1985] R. S. Weis et T. K. Gaylord. Lithium Niobate: Summary of Physical Properties and Crystal Structure. *Applied Physics A*, vol. 37, p. 191-203, 1985.
- [Willatzen2005] M. Willatzen, L. X. Wang et Y. Y. Feng. Nonlinearities and hysteresis phenomena in reciprocal ultrasound systems. *IEEE ultrasonics symposium*, 2005.
- [Wongdamnern2008] N. Wongdamnern, N. Triamnak, A. Ngamjarurojana, Y. Laosiritaworn, S. Ananta et R. Yimnirium. Comparative studies of dynamic hysteresis responses in hard and soft PZT ceramics. *Ceramics international*, vol. 34, p. 731-734, 2008.
- [Yang2000] G. Yang, S. F. Liu, W. Ren et B. K. Mukherjee. Uniaxial stress Dependence of the Piezoelectric Properties of Lead Zirconate Titanate Ceramics. *Smart structures and Materials*, vol. 3992, p. 431-434, 2000.
- [Zhang1999] Q. M. Zhang et J. Zhao. Electromechanical Properties of Lead Zirconate Titanate Piezoceramics Under the Influence of Mechanical stresses. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 46, p. 1518-1526, 1999.
- [Zhao1998] J. Zhao, Q. Zhang et V. Mueller. Uniaxial Stress Dependence of Electromechanical and Dielectric Properties of 0.9PMN-0.1PT Electroceramics. *IEEE*, 1998.
- [Zhou2002] Q. F. Zhou, L. P. Wang, G. Gerber, R. Jr. Meyer, D. Van Tol, S. Tadigagadapa, W. J. Hughes et S. Trolier-McKinstry. Fabrication of MEMS Tonpilz Transducers, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.*, 2002.
- [Zhou2005] D. Zhou, M. Kamlah et D. Munz. Effects of uniaxial prestress on the ferroelectric hysteretic response of soft PZT. *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 25, p. 425-432, 2005.



## Publications

### Articles dans revue internationale à comité de lecture

1. M. Lematre, **M. Domenjoud** and P. Tran, Exact Second Order Formalism for the Study of Electro-Acoustic Properties in Piezoelectric Structures under an External Mechanical Stress, *Ultrasonics*, volume 51, pages 898-910, 2011.
2. **M. Domenjoud**, M. Lematre, Pascal Tran and G. Feuillard, Modelling of Hysteretic Behaviour of Piezoceramic Materials under External Electrical and Mechanical Stress, *Advances in Applied Ceramics*, accepted on 30 January 2012, in press.

### Communications internationales avec acte et comité de lecture

3. S. Dos Santos, **M. Domenjoud** and C. Plag, Symmetry analysis applied to nonlinear acoustics : Principle and application for acoustic signal processing, *International Symposium on Nonlinear Acoustics -ISNA*, pages 46–49, Stockholm, Sweden, 2008.
4. S. Dos Santos, **M. Domenjoud** and Z. Prevorovsky, Ultrasonic Imaging of Human Tooth using Chirp-Coded Nonlinear Time Reversal Acoustics, *Physics Procedia*, volume 3, pages 913-918, Santiago de Chile, Chile, 2009.
5. **M. Domenjoud**, M. Lematre, P. Tran and G. Feuillard. Integrated Piezoelectric Structures under External Mechanical Stress: theory and experiments, *Ultrasonics, IEEE Symposium -IUS*, pages 2080-2082, San Diego, USA, 2010.

### Communications internationales avec comité de lecture sans acte

6. S. Dos Santos, P.-Y. Le Bas, K. Van Den Abeele, T. Goursolle, O. Bou Matar and **M. Domenjoud**, Tr-news and news-tr experiments for an imaging of the local nonlinearity in damaged aeronautic complex structure, Congress of *Acoustics*, Madrid, Spain, 2-7 September, 2007.
7. **M. Domenjoud**, M. Lematre, P. Tran Huu Hue and G. Feuillard, Electro-Acoustic Characterisations of Piezoelectric Materials under External Mechanical Stress: Theory and Experiments, Congress of *Piezo 2011*, Sestriere, Italy, 28 February-2 Mars 2011.



# Résumé

Utilisés dans de nombreux domaines, les matériaux piézoélectriques sont régulièrement soumis à des sollicitations externes ou internes qui modifient leurs propriétés. Dans le but de prévoir et d'anticiper ces altérations, ce travail étudie les propriétés de matériaux piézoélectriques soumis à une contrainte statique de type mécanique ou électrique.

Dans un premier temps, nous développons les équations du mouvement d'un matériau piézoélectrique (non hystérétique) au second ordre, en tenant compte à la fois des déformations dynamiques occasionnées par le passage de l'onde, mais aussi des déformations statiques concomitantes à la présence de contraintes. L'étude numérique des vitesses en onde plane et du coefficient de couplage est faite sur un matériau de référence (le niobate de lithium), dans différents plans de coupe et dans les différents systèmes de coordonnées (naturel et prédéformé). Ainsi, on évalue dans quelles configurations l'application d'une contrainte externe de type électrique ou mécanique améliore ou dégrade les propriétés du matériau.

Dans une seconde partie, nous caractérisons les comportements hystérétiques de piézocéramiques sous contrainte (uniaxiale) mécanique et électrique en modélisant l'évolution des polarisations et déformations rémanentes microscopiques via les mouvements de murs de domaines. La comparaison des résultats numériques avec des évolutions issues de la littérature de 4 piézocéramiques nous permet de définir le domaine de validation de nos hypothèses et d'explicitier les comportements hystérétiques de piézocéramiques dites « dures » et « molles ». L'étude de l'évolution des constantes du matériau a permis de mettre en avant des comportements propres aux différents types de piézocéramiques ainsi que les avantages et limites de notre modèle.

Dans une dernière partie, nous mettons en place un dispositif expérimental de mesure de déformations (longitudinale et transversales), ainsi que du déplacement électrique de deux piézocéramiques (une molle, le Pz21, et une dure, le Pz26) et du niobate de lithium sous contrainte mécanique (uniaxiale). Ces résultats nous ont permis de dimensionner notre étude sur le niobate de lithium et apportent une meilleure compréhension de l'évolution des déformations transversales dans les piézocéramiques.

**Mots clés :** Piézoélectrique, précontrainte mécanique, précontrainte électrique, hystérésis, piézocéramiques dure et molle, ferroélastique.

# Abstract

Used in many domains, piezoelectric materials are frequently submitted to external or internal stresses which modify their properties. In order to prevent and anticipate these modifications, this work studies the properties of piezoelectric materials under static electrical or mechanical stress.

First, the motion equations of a piezoelectric (non hysteretic) material are developed at the second order taking to account the static strain (caused by the stress) and the dynamic ones (caused by the propagation of an elastic wave). The numerical study of plane wave velocities and coupling coefficients is performed on lithium niobate, in different cuts and different coordinate systems (natural and static). Then, we evaluate in which configurations the application of an electrical or mechanical stress improves or degrades the material properties.

In a second part, the hysteretic behaviours of piezoceramic materials under electrical and mechanical stresses are characterized by modelling the evolutions of microscopic remanent polarization and strains through the movements of domain walls. Numerical results are compared to evolutions of 4 piezoceramics from the literature. It allows us to define the validation domain of our hypothesis and to explain hysteretic behaviours of soft and hard piezoceramics. The study of the material constant evolutions shows characteristic behaviours of the different types of piezoceramics, as well as the advantages and limitations of our model.

In the last part, an experimental device to measure strains (longitudinal and transversal) and electrical displacements is developed. Measurements are made on lithium niobate and on two piezoceramics (Pz21, a soft composition and Pz26, a hard one) under mechanical stress. Results allow study on lithium niobate to be planned and bring a better understanding of transversal strain evolutions in piezoceramics.

**Keywords** : Piezoelectric, mechanical pre-stress, electrical pre-stress, hysteretic, hard and soft piezoceramics, ferroelastic.